UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

SARIS FERNANDO MONTEIRO

Aplicações das Funções Geradoras em Relações de Recorrências

Campinas

2022

Saris Fernando Monteiro

Aplicações das Funções Geradoras em Relações de Recorrências

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Saris Fernando Monteiro e orientada pelo Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M764a Monteiro, Saris Fernando, 1982-
Aplicações das funções geradoras em relações de recorrências / Saris Fernando Monteiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções geradoras. 2. Relações de recorrência. 3. Análise combinatória. I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Applications of generating functions in recurrence relations
Palavras-chave em inglês:
Generating functions
Recurrence relations
Combinatorial analysis
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Elen Viviani Pereira Spreafico
Robson da Silva
Data de defesa: 07-04-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-0945-1345
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/1375004876491014

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 07 de abril de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO

Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado aos meus pais Manoel Divino e Maria Hipólita.

Agradecimentos

Quero registrar meus agradecimentos à todas as pessoas que contribuiram para que eu pudesse fazer esse curso.

Aos meus pais, Manoel e Maria, pelo apoio constante, carinho, atenção e pela presença incessante em minha vida, sem eles nada seria possível.

À minha irmã gêmea, Miriam Rejane, aos meus irmãos, Júlio César e Fábio Aleandro, por fazerem parte da minha vida e sempre terem uma palavra de apoio.

Ao meu amigo Miltom pela parceria de muitos anos, tornando possível os gastos financeiros em Campinas.

À todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional por contribuirem muito com minha formação acadêmica, em especial à professora Sueli que sempre incentiva e deseja sucesso aos mestrandos.

Ao meu orientador, Professor Dr. José Plínio, agradeço muito pela paciência, dedicação, pela disponibilidade em me auxiliar durante a produção desse trabalho.

À todos os amigos que fiz durante o curso, gostaria de citar todos, mas em especial aqueles que estiveram mais próximos trocando ideias, José Cristiano, Cesar Andrey, Fabiana. Muito obrigado por compartilhar os anseios, dificuldades, alegrias e principalmente os conteúdos.

E principalmente à Deus, o autor de todas as coisas.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. Mas o que seria o oceano se não infinitas gotas?

(Isaac Newton)

Resumo

Esse trabalho é um estudo sobre as Funções Geradoras e as Relações de Recorrências Lineares e está dividido em três capítulos da seguinte maneira:

No primeiro capítulo apresentamos as Funções Geradoras Ordinárias e Funções Geradoras Exponenciais juntamente com suas definições, propriedades e alguns teoremas com suas respectivas demonstrações. Ainda nesse capítulo é explorado o conceito de Partições e algumas Funções Geradoras de Partições.

No segundo capítulo exploramos o conceito de Relações de Recorrências, especificamente as lineares. Mostramos alguns métodos de resolução de relações de recorrências dentre os quais destacamos a resolução baseada em Funções Geradoras e também um método interessante através da Diagonalização de matrizes. Os métodos estão bem detalhados de fácil compreensão.

O capítulo três é composto por quatro aplicações de Relações de Recorrências e Funções Geradoras. ***(n,k)-block fountain*** é um método de empilhamento de moedas no plano obedecendo alguns critérios, **A pizza de Steiner** que consiste em dividir "a pizza"e obter o maior número de pedaços com n cortes, **Triângulação de um n-ágono convexo**, é um problema de dividir polígonos em triângulos e por último uma das sequências mais famosas da matemática que é "**A sequência de Fibonacci**"onde é mostrada a Relação de Recorrência da sequência e sua respectiva Função Geradora.

Palavras-chave: Funções Geradoras, Relações de Recorrências, Aplicações.

Abstract

This dissertation is a study on Generating Functions and the Linear Recurrence Relations and is divided in three chapters in the following manner:

On the first chapter we present Ordinary Generating Functions and Exponential Generating Functions along with their definitions, properties and a few theorems with their respective demonstrations. Still on this chapter we explore the concepts of Partitions and some Partition Generating Functions.

On the second chapter we explore the concept of Recurrence Relations, specifically the Linear ones. We show a few methods for the resolution of Recurrence Relations, highlighting the resolution based on Generating Functions and also an interesting method using matrix diagonalization. The methods are very well detailed and are easy to comprehend.

Chapter 3 is made of four applications on Recurrence Relations and Generating Functions. (n,k)-block fountain is a method of piling up coins on a plane obeying a few criteria. Steiner's pizza consists of dividing the pizza and obtaining the greatest number of slices with n cuts, triangulation of a convex n-agon is a problem of diving polygons in triangles and lastly one of the most famous sequences in Mathematics, the Fibonacci Sequence, where we show the sequence recurrence relation and its respective generating function.

Keywords: Generating Functions, Recurrence Relations, Applications.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Existem muitas ferramentas para solucionar problemas de contagem, dentre essas podemos dizer que as Funções Geradoras constituem a mais poderosa, visto que é possível encontrar soluções de uma forma abrangente. As Funções Geradoras tiveram origem nos trabalhos de A.De Moivre (1667 - 1754), tendo sido aplicadas extensivamente por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições. Este método foi muito usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo de probabilidade. N. Bernoulli (1687-1759) utilizou este método no estudo de permutações caóticas. [1].

Veremos que as Funções Geradoras Ordinárias são utilizadas para resolver problemas em que a ordem dos objetos é irrelevante, caso contrário utilizamos as Funções Geradoras Exponenciais.

A vantagem em utilizar Funções Geradoras para representar sequências numéricas está em encontrar uma forma fechada, ou seja, conseguirmos localizar valores de cada termo da sequência através de cálculos simples, apenas substituindo valores de n.

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).[2] Porém em algumas situações em que se faz necessário encontrar algum termo "distante"da sequência, deve-se fazer muitos cálculos, afinal, sempre depende-se de termos anteriores. Diante disso, devemos resolver a Relação de Recorrência, ou seja, encontrar uma forma fechada de maneira que possamos encontramos o valor de qualquer termo da sequência independente de termos anteriores.

Existem vários métodos para resolver Relações de Recorrências, alguns serão apresentados nesse trabalho, porém, nosso foco está no método das Funções Geradoras por considerarmos um método eficiente na resolução de problemas desde os mais simples até os mais avançados.

CAPÍTULO

1

Introdução à Funções Geradoras

Nesse capítulo serão apresentadas as Funções Geradoras Ordinárias e Exponenciais, as definições, propriedades e alguns teoremas. Além disso, serão mostradas as Partições de Inteiros e suas respectivas Funções Geradoras. As principais referências utilizadas foram [1], [3], [4],[5],[6].

As funções geradoras fazem parte de um conjunto de ferramentas utilizado para a resolução de problemas de contagem. Uma função geradora é uma série de potências cujos coeficientes correspondem a uma sequência a_n, cujos índices percorrem os números naturais. As funções geradoras são séries formais, ou seja, não se analisa a convergência da série para os valores de x [3]. As funções geradoras são formas fechadas. Analisando a sequência gerada pelos coeficientes da série, percebe-se que funções geradoras na realidade não são funções no sentido de relação entre dois conjuntos, em que existe o domínio e o contradomínio, o nome se deve ao resultado histórico do seu estudo.

> Uma função geradora é um varal no qual penduramos uma sequência de números para exibição. [4].

1.1 Série de Potências

Definição 1.1.1. *Uma série de potências é uma série infinita da forma* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$*, onde* a_i*, para* $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$*, são números reais e* x *é uma variável.*

Observe que qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo: $1 + 3x^2 + 2x^3 + x^5$ pode ser escrito da seguinte forma: $1 + 3x^2 + 2x^3 + 0x^4 + x^5 + 0x^6 + 0x^7 \ldots$, olhando somente para os coeficientes do polinômio obtemos a sequência que chamaremos de $a_n = (1, 3, 2, 0, 1, \ldots)$, então afirmamos que o polinômio é a função geradora da sequência a_n. Uma série de potências pode ser escrita de uma forma condensada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Definição 1.1.2. *Se* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ *e* $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$ *são duas séries de potências, então a soma dessas duas séries é a série de potência na qual o coeficiente de*

x^r é $a_r + b_r$ e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + ... + a_rb_0$.

Exemplo 1.1.1. *Sejam as funções geradoras $f(x) = x+3x^2+2x^3+x^4$ e $g(x) = 1+3x+2x^2+x^3$, essas funções correspondem às sequências $a_n = (0,1,3,2,1,...)$ e $b_n = (1,3,2,1,0,...)$, então temos:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x+3x^2+2x^3+x^4 \\ g(x) &= 1+3x+2x^2+x^3 \end{aligned}$$

Somando essas duas funções obtemos $S(x) = 1+4x+5x^2+3x^3+x^4$ que corresponde a sequência $c_n = (1,4,5,3,1,...)$.

1.2 Função Geradora Ordinária

Definição 1.2.1. *Se o número de soluções de um problema de combinatória é a_r, com $r = 0,1,2,...$, então a função geradora ordinária para este problema é a série de potências $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$.*

Exemplo 1.2.1. *Encontre a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, e a variáveL x_1 pertence a $\{1,2\}$, a variável x_2 pertence a $\{3,4,5\}$ e a variável x_3 pertence a $\{2,3\}$.*

Para resolver esse problema definimos três polinômios, um para cada variável x_i, de forma que os expoentes das variáveis sejam os elementos do conjunto ao qual cada uma pertence, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x+x^2 \\ p_2(x) &= x^3+x^4+x^5 \\ p_3(x) &= x^2+x^3 \end{aligned}$$

Nosso objetivo é encontrar valores para x_1, x_2 e x_3 cuja soma seja 8 e que esses valores estejam nos conjuntos que x_1, x_2 e x_3 pertençam respectivamente. Para isso, vamos calcular o produto dos três polinômios.

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ f(x) &= (x+x^2)(x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3) \\ f(x) &= x^6+3x^7+4x^8+3x^9+x^{10} \end{aligned}$$

Após expandir o produto dos polinômios percebe-se que o coeficiente de x^8 corresponde a solução do problema. No caso, existem 4 soluções inteiras positivas, conforme $f(x)$ apresenta. Por ser um problema simples, serão apresentadas as quatro soluções. O termo xx^4x^3 indica que $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 3$, xx^5x^2 indica que $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 2$, $x^2x^3x^3$ indica que $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 3$ e $x^2x^4x^2$ indica que $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 2$. Analisando o polinômio, é possível ver que ele oferece solução para outros problemas, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 = r$, para $r \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ com as restrições impostas às variáveis $x_i' s$. Veja: Com as restrições impostas, temos 1 solução para $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ pois 1 é o coeficiente de x^6. Sendo assim, pode-se afirmar que $f(x)$ é a função geradora que fornece a solução do problema através de seus coeficientes $\{1, 3, 4, 3, 1\}$.

Exemplo 1.2.2. *De quantas maneiras podemos escolher 3 pessoas de um grupo de 7 pessoas?*

Para resolver esse tipo de problema utilizamos combinação simples, pois não existe nenhuma restrição, observe:

$$\binom{7}{3} = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Este problema pode ser resolvido através de função geradora. Utilizamos o polinômio $(1 + x)$ para representar a presença de 1 pessoa. Como temos 7 pessoas, então:

$$f(x) = (1+x)^7$$
$$f(x) = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$$

Perceba que o coeficiente do termo x^3 é 35 que corresponde exatamente ao valor da combinação simples. Esses problemas podem ser resolvidos através de funções geradoras, porém, é interessante utilizar essa ferramenta em problemas mais complexos.

Teorema 1.2.1. *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos:*

i) $Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$

ii) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \Big) x^n$

iii) A função geradora para $(a_0 + a_1 + ... + a_r)$ é igual a $(1 + x + x^2 + ...)f(x)$

iv) A função geradora para (ra_r) é igual a $xf'(x)$, onde $f'(x)$ é a derivada de f com respeito a x

v) $\int f(x)dx = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Demonstração. i) Como $f(x)$ e $g(x)$ são as funções geradoras de (a_r) e (b_r), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} Af(x) + Bg(x) &= Aa_0 + Aa_1x + Aa_2x^2 + ... + Bb_0 + Bb_1x + Bb_2x^2 + ... \\ &= (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + ... \end{aligned}$$

■

Demonstração. ii) Temos que

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0b_0) + (a_0b1 + a_1b0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... \\ & \quad ... + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0)x^n + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} (a_kb_{n-k}) \Big) x \end{aligned}$$

■

Demonstração. iii) Basta tomar $b_r = 1$, isto é, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$, em (ii). ■

Demonstração. iv) Seja $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ a função geradora da sequência a_r, então a função geradora de ra_r é:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

Assim sendo, temos:

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} ra_r x^{r-1}$$

$$f'(x) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} ra_r x^r}{x}$$

$$xf'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} ra_r x^r$$

Portanto, a função geradora para ra_r é:

$$xf'(x) = r \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

□

Demonstração. v) Temos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
\int f(x)dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an}{n+1} x^{n+1}
\end{aligned}$$

■

1.3 Cálculo de Funções Geradoras

A partir de uma função geradora, é possível encontrar outras funções geradoras utilizando derivadas e integral, substiuição de variável e outras propriedades das séries de potências. Veja:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

Para encontrar a forma fechada dessa função geradora podemos utilizar alguns artifícios algébricos, para isso, podemos multiplicar a igualdade por x.

$$\begin{aligned}
xf(x) &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) \\
xf(x) &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...
\end{aligned}$$

Agora, vamos subtrair $xf(x)$ da função original,

$$\begin{aligned}
f(x) - xf(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) - (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...) \\
f(x)(1-x) &= 1 \\
f(x) &= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = 1+x+x^2+x^3+... = \dfrac{1}{1-x}$ é a função geradora da sequência $(1,1,1,1,1,1,...)$. A partir dessa função geradora podemos encontrar formas fechadas simples para outras séries de potências.

Exemplo 1.3.1. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência* $a_r = (0,0,1,1,1,...)$.

A série de potências que corresponde a sequência a_r é:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0+0x+x^2+x^3+x^4+... \\ &= x^2+x^3+x^4+... \\ &= x^2.(1+x+x^2+x^3+...) \\ &= x^2.\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{x^2}{1-x} \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.2. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência* $a_r = (5,5,5,5,5,5,...)$

A série de potências que corresponde a sequência a_r é:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+5x+5x^2+5x^3+... \\ &= 5.(1+x+x^2+x^3+...) \\ &= 5.\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{5}{1-x} \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.3. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência* $a_r = r$

Sabemos que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é a função geradora da sequência $(1,1,1,1,...)$, aplicando o item (iv) do Teorema 1.2.1, concluímos que a função geradora é $xf'(x)$. Observe que:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+...+rx^{r-1}+...,$$

logo,

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x+2x^2+3x^3+...+rx^r+...$$

possui r como coeficiente de x^r, sendo, portanto, a função geradora para a sequência $(a_r = r)$.

Exemplo 1.3.4. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência* $a_r = r^2$.

Vimos que

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x+2x^2+3x^3+...+rx^r+...,$$

Para que o coeficiente de x^r seja r^2, basta tomarmos a derivada desta função e multiplicá-la por x, observe:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+...+r^2x^{r-1}+...) \\ &= 1^2x^1+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+...+r^2x^r+..., \end{aligned}$$

Como

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

Então, a função geradora para a sequência $a_r = r^2$ é $x(xf'(x))'$, onde $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exemplo 1.3.5. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência $a_r = 3r+5r^2$.*

Vimos no exemplo 1.3.3 que a função geradora para $(a_r = r)$ é $\dfrac{x}{(1-x)^2}$, e no exemplo 1.5.2 a função geradora para $(a_r = r^2)$ é $\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$
Portanto, pelo Teorema 1.2.1 (i) a função geradora para $a_r = 3r+5r^2$ é dada por:

$$3\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)+5\left(\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right).$$

Exemplo 1.3.6. *Encontrar a sequência gerada pela função geradora ordinária*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-3x}$$

Sabemos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+...$$

substituindo x por $3x$, obtemos

$$\frac{1}{1-3x} = 1+(3x)+(3x)^2+(3x)^3+...$$

Agora, basta multiplicar a expressão por x^2,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1-3x} &= x^2.1+x^2.(3x)+x^2.(3x)^2+x^2.(3x)^3+... \\ &= x^2+3x^3+9x^4+27x^5+... \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é a função geradora da sequência $(a_r) = (0,0,1,3,9,27,...)$

Exemplo 1.3.7. *Encontrar a função geradora ordinária para se calcular o número de soluções em inteiros não-negativos da equação* $2x+3y+4z+5w=r$

Para resolver esse problema, será feita uma substituição de variáveis,

$$y_1 = 2x,\ y_2 = 3y,\ y_3 = 4z,\ y_4 = 5w$$

A equação é equivalente a encontrar as soluções da equação $y_1+y_2+y_3+y_4=r$, onde

$$\begin{aligned} y_1 &\in \{0,2,4,6,...\},\\ y_2 &\in \{0,3,6,9,...\},\\ y_3 &\in \{0,4,8,12,...\},\\ y_4 &\in \{0,5,10,15,...\}, \end{aligned}$$

Portanto, a função geradora para esse problema é:

$$\begin{aligned} f(y) &= (1+y^2+y^4+...).(1+y^3+y^6+y^9+...).\\ &\quad (1+y^4+y^8+y^{12}+...).(1+y^5+y^{10}+y^{15}+...)\\ &= \frac{1}{1-y^2}.\frac{1}{1-y^3}.\frac{1}{1-y^4}.\frac{1}{1-y^5} \end{aligned}$$

A resposta é o coeficiente de y^r.

1.4 Teorema Binomial Generalizado

Teorema 1.4.1. *Se x é um número real tal que |x|<1 e u é um número real qualquer, então*

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k, \text{ em que } \binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)...(u-r+1)}{r!}, & \text{se } r>0 \\ 1, & \text{se } r=0 \end{cases}$$

O número $\binom{u}{r}$ é chamado de coeficiente binomial generalizado.

Teorema 1.4.2. *O coeficiente de* x^p *na expansão de* $(1+x+x^2+x^3+...)^n$ *é igual a* C^p_{n+p-1}.

Demonstração. Observe que

$$(1+x+x^2+x^3+...)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

Então, basta fazer a substituição no teorema 1.4.1 de x por $-x$ e u por $-n$, temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)...((n+p-1)(-1)^p)}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)...(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)((n+p-2)...(n+1)n(n-1)!}{p!((n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}
\end{aligned}$$

■

Este resultado é o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Através do teorema binomial generalizado é possível encontrar um termo especifico de uma função geradora, observe:

Exemplo 1.4.1. *Sendo $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ a função geradora ordinária para a sequência (a_r), encontre a_2.*

Basta tomarmos o coeficiente de x^2 na expansão de $(1+x)^{\frac{1}{4}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{r}x^r = 1+\frac{1}{4}x+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}x^2+...$$

Logo,

$$a_2 = \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2} = -\frac{3}{32}$$

1.5 Função Geradora Exponencial

Em problemas de combinatória quando a ordem de escolha dos objetos é relevante, e houver uma quantidade significativa de restrições deve-se utilizar a Função Geradora Exponencial, em que seus coeficientes estão associados à um arranjo dos objetos. Em problemas cuja ordem é irrelevante, como já foi mostrado, utiliza-se Função Geradora Ordinária.

Definição 1.5.1. *A Função Geradora Exponencial da sequência* (a_r) *é a série de potências* $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$.

Exemplo 1.5.1. *Encontrar a função geradora exponencial para a sequência* $(1,1,1,1,1,...)$

Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...$$

E nessa expansão o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ é igual a 1, para todo r, esta é a função geradora exponencial da sequência $a_r = 1$, para $r = 0,1,2,...$

Exemplo 1.5.2. *Encontrar a sequência* (a_r) *para a Função Geradora* e^{3x}.

Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...$$

Basta substituir x por $3x$ e obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 1 + (3x) + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + ... + \frac{(3x)^r}{r!} + ... \\ &= 1 + 3x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + ... + \frac{3^r}{r!}x^r + ... \end{aligned}$$

Observando os coeficientes, percebe-se que a sequência é: $(a_r) = \left(\frac{3^r}{r!}\right)$

Exemplo 1.5.3. *Quantas são as r-sequências quaternárias nas quais o número de* $0's$ *é par e o número de* $1's$ *também é par?*

Uma r-sequência quaternária é uma r-upla formada somente pelos dígitos $0,1,2,3$. A função geradora exponencial para o dígito 0 é: (o número de $0's$ é par)

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2r}}{2r!} + ... = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

A função geradora exponencial para o dígito 1 é: (o número de $1's$ é par)

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2r}}{2r!} + ... = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

A função geradora exponencial para o dígito 2 é:(o número de $2's$ é irrestrito)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ... = e^x$$

A função geradora exponencial para o dígito 3 é: (o número de $3's$ é irrestrito).

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^r}{r!}+...=e^x$$

Portanto a função geradora exponencial é:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)^2.(e^x)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).e^x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(e^{2x}+1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty}2\frac{(2x)^r}{r!}\Big)+1 \\
&= 1+\frac{1}{4}\Big(\sum_{r=1}^{\infty}4^r.\frac{x^r}{r!}+\sum_{r=1}^{\infty}2.2^r.\frac{x^r}{r!}\Big) \\
&= 1+\frac{1}{4}\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(4^r+2.2^r).\frac{x^r}{r!}\Big) \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4}(4^r+2^{r+1}).\frac{x^r}{r!}
\end{aligned}$$

Portanto, com as restrições dadas o número de r-sequências quaternárias é igual a $\dfrac{4^r+2^{r+1}}{4}$.

Exemplo 1.5.4. *Uma transportadora vai montar três filiais em cidades distintas, serão contratados oito funcionários para trabalharem nessas filiais. De quantas maneiras a transportadora pode distribuir esses oito funcionários nas três filiais de modo que cada filial receba pelo menos um funcionário dos contratados?*

Observe que nenhuma filial poderá receber mais do que seis funcionários, pois nenhuma delas poderá ficar vazia. Sendo o número de funcionários de cada filial relevante, para resolver o problema será utilizada função geradora exponencial.

$$f(x)=\Big(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^8}{8!}\Big)^3$$

A resposta é o coeficiente de $\dfrac{x^8}{8!}$ na função. A função geradora pode ser escrita de uma forma fechada, note:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Big(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^8}{8!}+...\Big)^3 \\
&= \Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^8}{8!}+...-1\Big)^3 \\
&= (e^x-1)^3 \\
&= e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1
\end{aligned}$$

Já sabemos do exemplo 1.5.2 que:

$$e^{3x} = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + ... + \frac{(3x)^8}{8!} + ...$$

Portanto, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ é 3^8, da mesma forma podemos encontrar o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em e^{2x} que é 2^8. Logo, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$ será $3^8 - 3.2^8 + 3 = 5796$.

1.6 Partição de Inteiros

Definição 1.6.1. *Uma partição de um número inteiro positivo n é a coleção não ordenada de números inteiros positivos, tais que sua soma é n, ou seja, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r$, tal que os $\lambda_i' s$ são partes da partição de n, com $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_r$. Denotamos por p(n) o número de partições de n.*

Exemplo 1.6.1. *O número 5 pode ser descrito da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

e portanto, $p(5) = 7$

Definição 1.6.2. *O número de partições de n tendo k como a maior parte é denotado por $p_k(n)$.*

Exemplo 1.6.2. *Observe as partições do inteiro 5 no exemplo 1.6.1. Podemos observar que temos duas partições em que o número 2 é a maior parte, logo escrevemos $p_2(5) = 2$. Veja também que temos apenas uma partição em que o número 4 é a maior parte, logo $p_4(5) = 1$.Na tabela a seguir tempos todas as $p_k(n)$ para $k = 1,2,3,4,5$.*

Tabela 1 – k maior parte

k	1	2	3	4	5
$p_k(5)$	1	2	2	1	1

Como a maior parte não pode superar n, temos que $p_n(n) = 1$ e $p_k(n) = 0$, para $k > n$.

Definição 1.6.3. *O número de partições de n com exatamente k partes é denotado por $q_k(n)$.*

Exemplo 1.6.3. *Continuando no exemplo 1.6.1, observe que o número inteiro 5 tem apenas uma partição com exatamente 1 parte, logo escrevemos $q_1(5) = 1$, veja também que existem 2 partições com exatamente 2 partes, logo $q_2(5) = 2$. Na tabela a seguir temos todas as $q_k(n)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.*

Tabela 2 – k partes

k	1	2	3	4	5
$q_k(5)$	1	2	2	1	1

Comparando a tabela 1 com a tabela 2 é possível verificar que elas são idênticas, isso não acontece por acaso, veja o teorema 1.7.1.

1.7 Diagrama de Ferrers

As partições de números inteiros podem ser representadas por diagramas.

Definição 1.7.1. *Seja $a_1 + a_2 + ... + a_k$ uma partição de um número inteiro n. O diagrama de Ferrers desta partição consiste de linhas preenchidas com pontos, uma linha por elemento da partição, e em cada linha i, a quantidade de pontos é igual ao elemento a_i que ela representa.*

Exemplo 1.7.1. *O diagrama de Ferrers para a partição $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ é:*

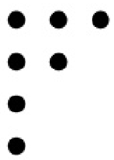

Figura 1 – Partição 7=3+2+1+1

Definição 1.7.2. *A partição conjugada de uma partição é obtida trocando as linhas do diagrama de Ferrers pelas colunas.*

Exemplo 1.7.2. *A partição conjugada de $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ é $7 = 4 + 2 + 1$, pois o diagrama de Ferrers da primeira partição, quando "transposto", resulta no da segunda.*

Figura 2 – Partição conjugada

A conjugada de uma partição não é necessariamente distinta da partição original. Quando a conjugada de uma partição é igual à partição, dizemos que ela é auto-conjugada.

Exemplo 1.7.3. *Observe o diagrama de Ferrers da partição de* $6 = 3 + 2 + 1$ *e o diagrama de Ferrers de sua respectiva conjugada.*

Figura 3 – Partição auto-conjugada

Teorema 1.7.1. *O número* $p_k(n)$ *de partições* n *tendo* k *como a maior parte é igual ao número* $q_k(n)$ *de partições de* n *com exatamente* k *partes, isto é,* $p_k(n) = q_k(n)$.

Demonstração. Por intermédio da operação "conjugação"definida no conjunto das partições de n, vemos facilmente que toda partição tendo k como maior parte é transformada em uma partição que possui exatamente k partes, e que cada uma que possui k partes é levada em uma que possui k como a maior parte, o que conclui a demonstração. ■

Corolário 1.7.1. *Seja* $P_k(n)$ *o número de partições de* n *com partes menores do que ou iguais a* k, *e* $Q_k(n)$ *o número de partições de* n *com, no máximo,* k *partes. Então,* $P_k(n) = Q_k(n)$.

Demonstração. A operação de conjugação transforma cada elemento contado por $P_k(n)$ em um único elemento contado por $Q_k(n)$, isto pela mesma razão apresentada na demonstração do teorema. ■

1.8 Funções Geradoras de Partições

O exemplo 1.6.1 exibe todas as partições do número inteiro 5. Analisando as partições podemos tirar algumas conclusões. Suponha que seja necessário distribuirmos 5 objetos idênticos em 3 caixas idênticas, sem que nenhuma fique vazia, então, teríamos apenas as seguintes possibilidades $\{3, 1, 1\}$ e $\{2, 2, 1\}$, que são as partições de 5 em exatamente 3 partes. Da mesma forma podemos concluir que o número de maneiras de se distribuir n objetos idênticos em k caixas idênticas, sem que nenhuma fique vazia, é igual a $q_k(n)$. Vide definição 1.6.3.

Vamos encontrar a função geradora para as partições de n em partes ímpares distintas, para isso, devemos tomar o produto

$$(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)(1 + x^7)...(1 + x^{2k+1})...$$

O coeficiente de x^5 é 1, isso significa que só existe uma maneira de escrever o número 5 como soma de ímpares distintos, $5 = 5$. Observando a expansão do produto é possível ver também que o coeficiente de x^9 é igual a 2, logo, o número 9 pode ser escrito de duas maneiras como soma de ímpares distintos, o próprio $9 = 9$ e $9 = 5 + 3 + 1$. Interpretando esse produto, vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_i(n)x^n.$$

onde $d_i(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas, isto é, que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2x+1})$$

é a função geradora para $d_i(n)$.

Definição 1.8.1. *A função geradora para o número de partições em partes distintas de um número inteiro é dada por:*

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)...(1 + x^k)... = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^k).$$

Exemplo 1.8.1. *Sabemos que na partição de um número menor do que ou igual a 5 nunca teremos partes superiores a 5, então, se tomarmos o produto*

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)$$

teremos a função geradora para as partições de todos os números menores do que ou iguais a 5 em partes distintas. Observe a expansão.

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15}$$

O coeficiente de x^5 é 3, observando o exemplo 1.6.1 podemos confirmar que existem 3 partições em que as partes são distintas, são elas: $\{5\}, \{4 + 1\}, \{3 + 2\}$.

Definição 1.8.2. *A função geradora para as partições de n em partes pares e distintas é definida por:*

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k}).$$

Definição 1.8.3. *A função geradora para as partições de n em que as partes são quadrados distintos é definida por:*

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{k^2})$$

Definição 1.8.4. *A função geradora para $p(n)$, o número de partições irrestritas de n, é dada por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \text{ onde } p(0)=1.$$

O coeficiente $p(n)$ de x^n corresponde ao número de partições irrestritas de n, para mostrar a identidade, serão utilizados apenas argumentos combinatórios.
Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+...;\\
\frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+...;\\
\frac{1}{1-x^3} &= 1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+...;\\
\frac{1}{1-x^4} &= 1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}+...;\\
&\vdots\\
\frac{1}{1-x^m} &= 1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+x^{4m}+x^{5m}+...;
\end{aligned}$$

As contribuições para os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série de potências, de x^{2a_2} da segunda série de potências, de x^{3a_3} da terceira série de potências, ..., e de x^{ma_m} da $m^{ésima}$ série de potências, onde $a_i \geqslant 0$, para todo i. Sendo o produto destes termos igual a x^n, temos que:

$$a_1+2a_2+3a_3+...+ma_m=n$$

Cada a_i corresponde ao número de $i's$ que aparecem na partição de n, isto é, podemos expressar n como

$$n=(1+1+...+1)+(2+2+...+2)+...+(m+m+...+m),$$

onde temos a_1 $1's$ no primeiro parênteses, a_2 $2's$ no segundo parênteses, a_3 $3's$ no terceiro parênteses, e a_m $m's$ no $m^{ésimo}$. Sendo assim, cada partição de n irá contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão.
A função $\frac{1}{1-x}$ "controla"a presença dos $1's$, a $\frac{1}{1-x^2}$ a presença dos $2's$, $\frac{1}{1-x^3}$ a presença dos $3's$, ... , $\frac{1}{1-x^m}$ a presença dos $m's$, logo, a função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera m é dada por:

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}$$

Exemplo 1.8.2. *Mostre que o número de partições de $n = 5$ é $p(5) = 7$ utilizando funções geradoras.*

Para resolver esse problema vamos utilizar a função geradora do cálculo do número de partições de n. Temos

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{1-x^k}\right) &= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\\ &= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+7x^6+10x^7+11x^8+13x^9+12x^{10}\ldots\end{aligned}$$

É possível ver que o coeficiente de x^5 é 7, que corresponde ao número de partição do número inteiro 5.
Seguem algumas funções geradoras.

Tabela 3 – Funções geradoras

Função Geradora	Para a sequência das partições de n em partes que são:
$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$	ímpares distintas
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k+1})}$	ímpares
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k})}$	pares
$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k})$	pares distintos
$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{k^3})$	cubos distintos
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{k^3})}$	cubos
$\prod_{p primo}\frac{1}{(1-x^{p})}$	primos

O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares. Como foi mostrado no exemplo 1.6.1 todas a partições do número inteiro 5, podemos observar que o número de partições em partes distintas é 3, são elas $\{5\}, \{4+1\}, \{3+2\}$ e que o número de partições em partes ímpares é 3 também, veja, $\{5\}, \{3+1+1\}, \{1+1+1+1+1\}$. Isso não é coincidência, ocorre para todo n, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 1.8.1. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema basta mostrar que a função geradora do número de partições de n em partes distintas é igual a função geradora do número de partições de n em partes ímpares. Funções geradoras estas que já foram vistas. Na tabela 3 temos a função geradora para o número de partições de n em que as partes são números ímpares e o exemplo 1.8.2 temos a função geradora do números de partições de n em que as partes são distintas. Vamos mostrar que as expressões são idênticas:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x^k)(1-x^k)}{(1-x^k)} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^k+x^k-x^{2k}}{(1-x^k)} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{2k}}{(1-x^k)} \\
&= \frac{\cancel{(1-x^2)}\cancel{(1-x^4)}\cancel{(1-x^6)}\cancel{(1-x^8)}\ldots}{(1-x)\cancel{(1-x^2)}(1-x^3)\cancel{(1-x^4)}(1-x^5)\cancel{(1-x^6)}\ldots} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k+1})}
\end{aligned}$$

■

CAPÍTULO

2 Relações de Recorrência

Nesse capítulo serão apresentadas as Relações de Recorrências Lineares, vamos mostrar os vários tipos de Recorrências e também alguns métodos de resolução. As principais referências utilizadas foram [7], [2], [8], [9], [10].

A Recorrência é uma regra que nos permite determinar um termo qualquer de uma sequência a_n em função de termos anteriores, dada uma regra para definir o primeiro termo (ou os primeiros termos de acordo com a necessidade).

2.1 Sequências numéricas

Uma sequência numérica é um conjunto de números que são dispostos em uma ordem, onde cada número é chamado de termo. O termo é escrito da forma a_n, sendo n a posição ou ordem do termo. Essa ordem é definida segundo a lei de formação da sequência.

A sequência que possui uma quantidade limitada de termos é chamada de sequência finita, caso contrário, a sequência é infinita.

As sequências são representadas da seguinte forma: $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ quando finita, e $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ quando infinita.

Exemplo 2.1.1. *Observe a sequência de números abaixo e determine o próximo termo.*

$$(1, 3, 5, ...).$$

Perceba que não foi especificada a lei de formação, então, podemos dizer que o próximo número é 7. Mas na realidade o próximo número é 6, pois a lei de formação que não foi especificada é a seguinte: $a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$. Veja, serão mostrados os 4 primeiros termos da sequência através da lei de formação.

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1^3}{6} + 1^2 + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2^3}{6} + 2^2 + \frac{2}{6} \\ &= -\frac{8}{6} + 4 + \frac{2}{6} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{3^3}{6} + 3^2 + \frac{3}{6} \\ &= -\frac{27}{6} + 9 + \frac{3}{6} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Para $n = 4$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{4^3}{6} + 4^2 + \frac{4}{6} \\ &= -\frac{64}{6} + 16 + \frac{4}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Esse exemplo mostrou que não devemos presumir um próximo termo de uma sequência se não soubermos a lei de formação dessa sequência.

Nem sempre as sequências apresentam uma lei de formação, quando a regra é definida, ela se apresenta das seguintes maneiras:

- Através de uma propriedade exclusiva dos termos da sequência. Por exemplo: a sequência dos números naturais, $(a_n) = (1, 2, 3, 4, ...)$.
- Através de uma expressão que associa cada n a um determinado valor de a_n. Por exemplo: $a_n = n^2 - 1$, $(a_n) = (0, 3, 8, 15, ...)$.
- Através de uma relação de recorrência em que, a partir de um certo termo, determina cada termo seguinte em função dos anteriores. Por exemplo: A sequência em que o primeiro termo $a_1 = 2$ e cada termo a partir do segundo é dado por $a_n = a_{n-1} + 2$, $(a_n) = (2, 4, 6, 8, ...)$.

2.2 Recorrências

Definição 2.2.1. *Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.*

Uma lei de formação pode corresponder a duas ou mais sequências, para que não exista essa ambiguidade é necessário que seja informado o primeiro termo da sequência. Veja:

Exemplo 2.2.1. *A sequência dos números ímpares* $a_n = (1,3,5,7,...)$*, pode ser representada pela lei de formação:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.2.2. *A sequência dos números pares* $a_n = (2,4,6,8,...)$*, pode ser representada pela lei de formação:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Perceba que a lei de formação é a mesma, o que difere é o primeiro termo, caso o primeiro termo não fosse especificado, não saberíamos ao certo se a lei corresponderia à sequência dos números pares ou à sequência dos números ímpares, que obviamente são sequências distintas. Observe o próximo exemplo com a mesma lei de formação.

Exemplo 2.2.3. *A sequência* $a_n = (\sqrt{2}, \sqrt{2}+2, \sqrt{2}+4, \sqrt{2}+6...,)$*, pode ser representada pela lei de formação:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Exemplo 2.2.4. *A sequência* $a_n = (5,8,11,14,17,...)$*, pode ser representada pela lei de formação:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

Essa sequência corresponde à uma **Progressão Aritmética** de razão $r = 3$. Através desse exemplo é possível ver que as progressões aritméticas podem ser escritas através de uma relação de recorrência. Veja:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + r \\ a_1 = a \end{cases}$$

Logo, a sequência é $a_n = (a, a+r, a+2r, a+3r, ...)$.

As leis de formação nem sempre possuem uma soma, é possível que tenhamos lei de formação com multiplicação, observe o próximo exemplo.

Exemplo 2.2.5. *A sequência $a_n = (3, 15, 75, 375, ...)$, pode ser representada pela lei de formação:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5.a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

A sequência desse exemplo corresponde a uma **Progressão Geométrica** de razão $q = 5$, de uma forma geral as progressões geométricas também podem ser escritas através de uma relação de recorrência. Veja:

$$\begin{cases} a_{n+1} = q.a_n \\ a_1 = a \end{cases}$$

Logo, a sequência é $a_n = (a, aq, aq^2, aq^3, ...)$.

As sequências definidas por recorrências mostradas nos exemplos anteriores dependiam apenas de um termo anterior. Porém, existem sequências que dependem de mais de um termo anterior, é o que será mostrado a seguir.

Exemplo 2.2.6. *Observe a lei de formação abaixo e determine a sequência gerada.*

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

Para encontrar a sequência definida pela relação de recorrência basta fazer as substituições, fica claro que cada termo a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Logo, a sequência é $a_n = (2, 5, 7, 12, 19, 31, ...)$. Se a gente alterar os dois primeiros termos da sequência mantendo a lei de formação teremos uma nova sequência, como já foi dito anteriormente não basta definir a lei de formação é necessário especificar nesse caso o primeiro e segundo termos da sequência.

Exemplo 2.2.7. *Observe a lei de formação abaixo e determine a sequência gerada.*

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \textit{ sendo } a_1 = 3,\ a_2 = 5 \textit{ e } n \geqslant 2$$

Observe que essa lei de formação apresenta mais uma informação, o valor de n deve ser maior do que ou igual a 2, caso essa regra não seja obedecida é impossível determinar a sequência. A lei de formação pede a média aritmética entre os dois termos imediatamente anteriores, logo a sequência é $a_n = (3, 5, 4, 4, 4, 4, ...)$. A partir do terceiro termo os valores começam a repetir, isso se justifica pelo fato de que, no cálculo de uma média aritmética simples se acrescentarmos um valor maior que a média, a nova média aumentará, se acrescentarmos um valor menor que a média, a nova média é puxada para baixo, porém se acrescentarmos um novo valor igual a média, a nova média se manterá. Podemos escrever essa lei de formação de uma forma generalizada:

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \text{ sendo } a_1 = a,\ a_2 = b \text{ e } n \geqslant 2$$

Da relação de recorrência sabemos que o primeiro termo é $a_1 = a$ e o segundo termo é $a_2 = b$, vamos encontrar o terceiro termo.

$$a_3 = \frac{a+b}{2}$$

Veja o quarto termo:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} \\ &= \frac{3a+3b}{6} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Veja o quinto termo:

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{a+b+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}{4} \\ &= \frac{4a+4b}{8} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a sequência é $a_n = (a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, ...)$.

Definição 2.2.2. *Uma equação de recorrência é dita* ***homogênea*** *se cada termo da sequência depende exclusivamente dos termos anteriores. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita* ***não-homogênea****.*

Definição 2.2.3. *Uma relação de recorrência é dita* ***linear*** *quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear. Além disso, é dita de* ***primeira ordem*** *quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1}.*

2.3 Resolução de Relações de Recorrência

Resolver uma relação de recorrência significa encontrar uma **forma fechada**. Ou seja, uma fórmula que dependa exclusivamente de n e não de termos anteriores como em relações de recorrência. Serão apresentadas algumas técnicas para a resolução de relações de recorrência.

2.4 Recorrência de primeira ordem

2.4.1 Homogênea

Exemplo 2.4.1. *Encontre uma forma fechada para a relação de recorrência abaixo,*

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2.a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

Para resolver esse tipo de recorrência utilizaremos uma técnica cujo objetivo é cancelar termos de modo que encontremos uma forma fechada, veja:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2.a_1 \\ a_3 &= 2.a_2 \\ a_4 &= = 2.a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= 2.a_{n-2} \\ a_n &= 2.a_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando os termos temos:

$$a_1.a_2.a_3.a_4.\cdots.a_{n-2}.a_{n-1}.a_n = 3.2.a_1.2.a_2.2.a_3.\cdots.2.a_{n-2}.2.a_{n-1}$$

Cancelando os termos fica:

$$\begin{aligned} \cancel{a_1}.\cancel{a_2}.\cancel{a_3}.\cancel{a_4}.\cdots.\cancel{a_{n-2}}.\cancel{a_{n-1}}.a_n &= 3.2^{n-1}.\cancel{a_1}.\cancel{a_2}.\cancel{a_3}.\cdots.\cancel{a_{n-2}}.\cancel{a_{n-1}} \\ a_n &= 3.2^{n-1} \end{aligned}$$

Com a forma fechada podemos encontrar qualquer termo da sequência, por exemplo, $a_{30} = 3.2^{30-1} = 3.2^{29} = 3.536870912 = 1610612736$.
Essa forma fechada que acabamos de encontrar é exatamente a fórmula do termo geral de

uma progressão geométrica. Veja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= q.a_1\\
a_3 &= q.a_2\\
a_4 &= q.a_3\\
&\vdots\\
a_{n-1} &= q.a_{n-2}\\
a_n = &= q.a_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando os termos temos:

$$a_1.a_2.a_3.a_4.\cdots.a_{n-2}.a_{n-1}.a_n = a_1.q.a_1.q.a_2.q.a_3.\cdots.q.a_{n-2}.q.a_{n-1}$$

Cancelando os termos fica:

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1}.\cancel{a_2}.\cancel{a_3}.\cancel{a_4}.\cdots.\cancel{a_{n-2}}.\cancel{a_{n-1}}.a_n &= a_1.q^{n-1}.\cancel{a_1}.q.\cancel{a_2}.q.\cancel{a_3}.\cdots.q.\cancel{a_{n-2}}.q.\cancel{a_{n-1}}\\
a_n &= a_1.q^{n-1}
\end{aligned}$$

2.4.2 Não homogênea

Esse tipo de recorrência se resolve facilmente quando possuem coeficientes constantes. Observe:

Exemplo 2.4.2. *Encontre uma forma fechada para a relação de recorrência abaixo,*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2\\ a_1 = 5 \end{cases}$$

Essa relação de recorrência é linear de primeira ordem, pois, a função que relaciona os termos é de primeiro grau e cada termo depende exclusivamente do termo anterior. Para resolver esse tipo de recorrência, vamos dispor os termos da sequência da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 5\\
a_2 &= a_1 + 2\\
a_3 &= a_2 + 2\\
a_4 &= a_3 + 2\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + 2
\end{aligned}$$

Agora vamos somar as equações,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = 5 + a_1 + 2 + a_2 + 2 + a_3 + 2 + ... + a_{n-1} + 2$$

Observando a soma é possível ver que os termos se repetem dos dois lados da equação de modo que se cancelam,

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + ... + \cancel{a_{n-1}} + a_n &= 5 + \cancel{a_1} + 2 + \cancel{a_2} + 2 + \cancel{a_3} + 2 + ... + \cancel{a_{n-1}} + 2 \\
a_n &= 5 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{(n-1)vezes} \\
a_n &= 5 + 2(n-1)
\end{aligned}$$

Encontramos uma forma fechada em que cada termo depende exclusivamente de n, por exemplo, $a_5 = 5 + 2(5-1) = 13$. Quando temos uma forma fechada, fica muito fácil encontrar "termos distantes", por exemplo, $a_{5232} = 5 + 2(5232 - 1) = 10467$. Essa forma fechada que acabamos de encontrar é exatamente a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. Veja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + r.(n-1)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.3. *Encontre uma forma fechada para a relação de recorrência $x_{n+1} = ax_n + b$ sendo a e b constantes reais.*

Sabemos que um termo inicial é fixado que chamaremos de x_0, então o processo de recorrência fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b \\
x_3 &= ax_2 + b = a[a(ax_0 + b) + b] + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b \\
&\vdots \\
x_n &= a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \cdots + a^2 + ab + b
\end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

Podemos perceber que o termo entre parênteses é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão a, onde o primeiro termo é igual a 1, então temos:

$$x_n = a^n x_0 + b\Big[1.\frac{a^n - 1}{a - 1}\Big] \tag{2.2}$$

Podemos reescrever a fórmula com condição inicial a x_1:

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\left[\frac{a^{n-1}-1}{a-1}\right], a \neq 1. \tag{2.3}$$

Para o caso em que $a = 1$ temos:

$$x_n = x_1 + b(n-1). \tag{2.4}$$

Essa relação de recorrência generaliza as progressões aritméticas.

Exemplo 2.4.4. *Encontre a forma fechada da sequência* $(1, 7, 37, 62, \cdots,)$ *cuja relação de recorrência é* $x_{n+1} = 5x_n + 2$*, utilizando a fórmula (2.3).*

Veja que $a = 5$, $b = 2$ e $x_1 = 1$, logo

$$x_n = 5^{n-1}.1 + 2\left[\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right] = \frac{3}{10}.5^n - \frac{1}{2}$$

O próximo teorema indica um meio de reduzir a recorrência que procuramos a solução em um caso mais simples já visto acima.

Teorema 2.4.1. *Se* x_n *é solução não nula da recorrência* $a_{n+1} = g(n)a_n$*, então a substituição* $a_n = x_n y_n$*, transforma a recorrência* $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ *em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$$

Demonstração. Tomando $a_n = x_n y_n$ podemos escrever a equação $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ como:

$$x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$$

Mas, $x_{n+1} = g(n)x_n$ pois x_n é solução de $a_{n+1} = g(n)a_n$, o que transforma a equação em

$$g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$$

∎

2.5 Recorrência de segunda ordem

2.5.1 Homogênea

Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com os coeficientes constantes, tem o seguinte formato $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, em que $q \neq 0$, pois se $q = 0$ teremos uma recorrência linear de primeira ordem.As recorrências desse tipo podem ser associadas a uma equação do segundo grau do tipo $r^2 + pr + q = 0$, conhecida como equação característica. Perceba que sendo $q \neq 0$, então, 0 não pode ser raíz da equação característica.

Para encontrar uma forma fechada, devemos analisar as raízes da equação característica.

Teorema 2.5.1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2*

Demonstração. Basta fazer a substituição da solução na recorrência, veja:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2} + pc_1 r_1^{n+1} + pc_2 r_2^{n+1} + qc_1 r_1^n + qc_2 r_2^n \\ &= c_1 r_1^n r_1^2 + c_2 r_2^n r_2^2 + pc_1 r_1^n r_1^1 + pc_2 r_2^n r_2^1 + qc_1 r_1^n + qc_2 r_2^n \\ &= c_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + c_2 r_2 (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= 0c_1 r_1^n + 0c_2 r_2^n = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.2. *Seja $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ equação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes, $r^2 + pr + q = 0$ sua equação característica e r_1 e r_2 raízes:*

1. *Se r_1 e $r_2 \in \mathbb{R}$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, com c_1 e c_2 constantes. e $r_1 \neq r_2$*

2. *Se r_1 e $r_2 = r \in \mathbb{R}$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1 r_1^n + c_2 n r^n$, com c_1 e c_2 constantes.*

3. *Se $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então a solução $c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, com c_1 e c_2 constantes reais, pode ser escrita na forma $x_n = \rho^n[c_1' cos(n\theta) + c_2' sen(n\theta)]$, onde c_1' e c_2' são novas constantes.*

Demonstração. Item 1: Sabemos que a_n é solução e agora y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos determinar constantes c_1 e c_2 que sejam soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1 \\ c_1 r_2 + c_2 r_2 = y_2 \end{cases}$$

Do sistema, temos que

$$c_1 = \frac{r_2^2 y_1}{r_1 r_2(r_2 - r_1)} \text{ e } c_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2(r_2 - r_1)}$$

Perceba que a solução é possível, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \neq 0$.

Consideremos agora $z_n = y_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$. Substituindo z_n em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$y_{n+2} - c_1 r_1^{n+2} - c_2 r_2^{n+2} + py_{n+1} - pc_1 r_1^{n+1} - pc_2 r_2^{n+1} + qy_n - qc_1 r_1^n - qc_2 r_2^n =$$

$$= y_{n+2} - c_1 r_1^n r_1^2 - c_2 r_2^n r_2^2 + py_{n+1} - pc_1 r_1^n r_1 - pc_2 r_2^n r_2 + qy_n - qc_1 r_1^n - qc_2 r_2^n =$$

$$= -c_1 r_1^n \underbrace{(r_1^2 + pr_1 + q)}_{=0} - c_2 r_2^n \underbrace{(r_2^2 + pr_2 + q)}_{=0} + \underbrace{y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n)}_{=0} = 0$$

Como $z_{n+2} = pz_{n+1} + qz_n = 0$, segue que z_n é solução de x_{n+2}+p$x_{n+1} + qx_n = 0$. Além disso, se $z_n = y_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$ e $c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1$, então:

$$z_1 = y_1 - c_1 r_1^1 - c_2 r_2^1 = 0$$

Da mesma maneira,

$$z_2 = y_2 - c_1 r_1^2 - c_2 r_2^2 = 0$$

Daí, $z_3 = -pz_2 - qz_1 = 0$ e recursivamente obtemos $z_n = 0, \forall n$ ∎

Demonstração. Item 2: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Como antes, vamos determinar constantes c_1 e c_2 que sejam soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c_1 r + c_2 r = y_1 \\ c_1 r^2 + 2c_2 r^2 = y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$c_1 = \frac{2y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \text{ e } c_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}$$

Note que a solução acima é possível pois $r \neq 0$

Consideremos agora $z_n = y_n - c_1 r^n - c_2 n r^n$

Substituindo z_n em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$y_{n+2} - c_1 r^{n+2} - c_2(n+2) r^{n+2} + py_{n+1} - pc_1 r^{n+1} - pc_2(n+1) r^{n+1} + qy_n - qc_1 r^n - qc_2 n r^n =$$

$$= y_{n+2} - c_1 r^n . r^2 - c_2 n r^n . r^2 - 2c_2 r^n . r^2 + py_{n+1} - pc_1 r^n . r - pc_2 n r^n - pc_2 r^n . r - qy_n - qc_1 r^n - qc_2 n r^n =$$

$$= -c_1^n \underbrace{(r^2+pr+q)}_{=0} - c_2 n r^n \underbrace{(r^2+pr+q)}_{=0} - c_2 r^n r \underbrace{(2r+p)}_{=0} + \underbrace{(y_{n+2}+py_{n+1}+qy_n)}_{=0} = 0.$$

Observação: $2r+p$ é nulo, pois $r = \dfrac{-p}{2}$. De fato como $r_1 = r_2 = r$ é raíz dupla de r^2+pr+q, então temos $p^2-4q=0$ e portanto $r = \dfrac{-p}{2}$.

Como $z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = 0$, segue que z_n é solução de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$.

Além disso, se $z_n = y_n - y_n = y_n - c_1 r^n - c_2 n r^n$ e $c_1 r + c_2 r = y_1$, então:

$$z_1 = y_1 - c_1 r^1 - c_2 1 r^1 = 0.$$

Da mesma maneira,

$$z_2 = y_2 - c_1 r^2 - c_2 2 r^2 = 0.$$

Daí, $z_3 = -pz_2 - qz_1 = 0$ e recursivamente obtemos $z_n = 0$, $\forall n$. ■

Demonstração. Item 3: A forma trigonométrica é uma facilitação da apresentação de soluções para recorrências cujo polinômio característico possui raízes complexas.

Dados $r_1 = \rho(cos\theta + isin\theta)$ e $r_2 = \rho(cos\theta - isin\theta)$, segue da *Fórmula de Moivre* para potenciação de números complexos que:

$$r_1^n = \rho^n(cosn\theta + isinn\theta)$$

e

$$r_2^n = \rho^n(cosn\theta - isinn\theta)$$

Como $r_1 \neq r_2$, tomamos $y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, onde c_1 e c_2 são constantes reais, como solução de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$ e fazemos a substituição:

$$c_1[\rho^n(cosn\theta + isinn\theta)] + c_2[\rho^n(cosn\theta - isinn\theta)] =$$

$$c_1\rho^n cosn\theta + c_1\rho^n isinn\theta + c_2\rho^n cosn\theta - c_2\rho^n isinn\theta =$$

$$(c_1+c_2)(\rho^n cosn\theta) + (c_1-c_2)(\rho^n isinn\theta).$$

Sendo c_1' e c_2' novas constantes reais tais que $(c_1+c_2) = c_1'$ e $(c_1-c_2) = c_2'$, então:

$$x_n = \rho^n(c_1' cosn\theta + c_2' isinn\theta).$$

Observação: Note que no item 3 do teorema anterior as soluções r_1^n e r_2^n não são reais. No entanto, via combinações dessas, podemos obter um par de soluções reais a saber $\rho^n cosn\theta$ e $\rho^n isinn\theta$ que geram o conjunto da equação de recorrência. ■

Exemplo 2.5.1. *Encontre uma solução para a recorrência* $x_{n+2} - x_{n+1} - 12x_n = 0$.

A equação característica dessa relação de recorrência é $r^2 - r - 12 = 0$ cujas raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = -3$. Então de acordo com o teorema 2.5.2 item 1, a solução geral da equação é dada por $x_n = c_1(4)^n + c_2(-3)^n$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Quando as condições iniciais são fornecidas é possível determinar os valores das constantes reais. Suponha que no exemplo 2.5.1 os termos iniciais sejam, $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$.Então devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 0 = c_1(4)^0 + c_2(-3)^0 \\ x_1 = 2 = c_1(4)^1 + c_2(-3)^1 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $c_1 = \frac{2}{7}$ e $c_2 = -\frac{2}{7}$. Portanto, a solução da recorrência é:

$$x_n = \frac{2}{7}(4)^n - \frac{2}{7}(-3)^n$$

Exemplo 2.5.2. *Encontre uma solução para a recorrência* $9x_{n+2} - 12x_{n+1} + 4x_n = 0$

A equação característica dessa relação de recorrência é $9r^2 - 12r + 4 = 0$ cujas raízes são $r_1 = \frac{2}{3}$ e $r_2 = \frac{2}{3}$, então de acordo com o teorema 2.5.2 item 2, a solução geral da equação é dada por $x_n = c_1\left(\frac{2}{3}\right)^n + c_2 n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, onde c_1 e c_2 são constantes reais. Vamos supor que as condições iniciais sejam $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$, então para encontrar as constantes devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 0 = c_1\left(\frac{2}{3}\right)^0 + c_2 0\left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ x_1 = 2 = c_1\left(\frac{2}{3}\right)^1 + c_2 1\left(\frac{2}{3}\right)^1 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1\left(\frac{2}{3}\right) + c_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = 3$. Portanto, a solução da recorrência é:

$$x_n = 3n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Exemplo 2.5.3. *Encontre uma solução para a recorrência* $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$.

A equação característica dessa relação de recorrência é $r^2 + r + 1 = 0$ cujas raízes complexas são $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$,e o módulo $\rho = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, e o argumento principal é $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$, então de acordo com o teorema 2.5.2 item 3, a solução geral da equação é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n\left[c_1' cos(n.\theta) + c_2' isin(n.\theta)\right], \\ &= 1^n\left[c_1' cos\left(n.\frac{\pi}{3}\right) + c_2' isin\left(n.\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= c_1' cos\left(n.\frac{\pi}{3}\right) + c_2' isin\left(n.\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

onde c_1' e c_2' são constantes reais.

2.5.2 Não homogênea

Teorema 2.5.3. *Se* a_n *é uma solução da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, *então a substituição* $x_n = a_n + y_n$ *transforma a recorrência ao caso homogêneo* $y_{n+2} + py_{n+1} + q_n = 0$.

Demonstração. Substituindo $x_n = a_n + y_n$ em $x_{n+2} + +px_{n+1} + q_n = f(n)$ obtemos:

$$a_{n+2} + y_{n+2} + pa_{n+1} + py_{n+1} + qa_n + qy_n = f(n),$$

ou ainda,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = f(n)$$

Como a_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ e consequentemente $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$. ■

2.6 Resolução de recorrência baseada em Funções Geradoras

Essa técnica é utilizada para obtenção de uma fórmula explícita para a função geradora ordinária da sequência.A técnica será mostrada através de um exemplo. Veja:

Exemplo 2.6.1. *Encontre a sequência da relação de recorrência abaixo utilizando funções geradoras;*

$$a_{n+1} = 2a_n + 1; (n \geqslant 0; a_0 = 0)$$

Fazendo substituições nos valores de n encontramos alguns termos da sequência, $a_n = (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, ..)$ analisando a sequência percebemos que corresponde as potências de dois menos uma unidade, sendo assim, podemos conjecturar $a_n = 2^n - 1$ e provar utilizando as técnicas do exemplo 2.4.2. Porém o objetivo aqui é encontrar uma função geradora que represente essa sequência. Para encontrar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, multiplicamos os membros da equação de recorrência por x^n,

$$x^n a_{n+1} = x^n 2a_n + 1x^n$$

desenvolvendo a soma do lado esquerdo temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0} a_{n+1} x^n &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + ... \\
&= \frac{\{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) - a_0\}}{x} \\
&= \frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

como $a_0 = 0$ nesse problema, então o lado esquerdo é exatamente $\frac{f(x)}{x}$.

Fazendo a multiplicação no lado direito e fazendo a soma para todo $n \geqslant 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} (2a_n + 1)x^n &= 2f(x) + \sum_{n\geqslant 0}^{\infty} x^n \\
&= 2f(x) + \frac{1}{1-x},
\end{aligned}$$

sabemos que $\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ é válida para $|x| < 1$.

Após multiplicar os dois membros da equação por x^n vamos resolver essa igualdade em função de x.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= 2f(x) + \frac{1}{1-x} \\
f(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)}
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar uma fórmula explícita para os $a_{n's}$, então temos que expandir $f(x)$ em série. Fazer isso neste exemplo é fácil utilizando expansão da fração parcial.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= x\left\{\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right\} \\
&= \{2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + ...\} - \{x + x^2 + x^3 + x^4 + ...\} \\
&= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + (2^4-1)x^4 + ...
\end{aligned}$$

Observando os coeficientes da série, fica claro que $a_n = 2^n - 1 \ \forall n \geqslant 0$.

Nesse exemplo não era necessário utilizar as funções geradoras, pois a resposta já era clara, portanto, o que é impressionante das funções geradoras é que em problemas mais complexos o método permanece o mesmo. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 2.6.2. *Encontre a sequência da relação de recorrência abaixo utilizando funções geradoras;*

$$a_{n+1} = 3a_n + n; (n \geqslant 0; a_0 = 1)$$

Essa relação de recorrência pode ser escrita também da seguinte maneira:

$$a_n = 3a_{n-1} + n - 1; (n \geqslant 1; a_0 = 1)$$

Vamos calcular alguns termos da sequência para tentar obter uma fórmula geral, $a_n = (1, 3, 10, 32, 99, 301, ...)$, perceba que nem sempre isso é possível. Vamos utilizar a técnica das funções geradoras. Devemos multiplicar a equação de recorrência por x^n, em seguida somar todos os valores de n para os quais a relação é válida que nesse caso a soma é de $n = 1$ até ∞. Primeiro lado esquerdo;

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + ... = (f(x) - 1)$$

Fazendo o mesmo procedimento do lado direito temos:

$$(3a_{n-1}x^n + nx^n - x^n) = 3x \sum_{n \geqslant 1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n \geqslant 1}^{\infty} nx^n - \sum_{n \geqslant 1}^{\infty} x^n$$

Precisamos identificar a série $\sum\limits_{n \geqslant 0}^{\infty} nx^n$.

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$$

Será utilizada uma manobra que parece não comum, porém depois de utilizar muitas vezes parece óbvio, veja:

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} nx^n = \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} x\left(\frac{d}{dx}\right)x^n = x\left(\frac{d}{dx}\right)\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} x^n = x\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

A série que estamos interessados é a derivada da série geométrica, então sua soma é essencialmente a derivada da soma das séries geométricas. Como estamos utilizando séries formais, não entraremos no mérito da convergência. Portanto, igualamos os resultados e colocamos tudo em função de x. Veja:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} a_n x^n &= 3x\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geqslant 1}^{\infty} nx^n - \sum_{n\geqslant 1}^{\infty} x^n \\
f(x)-1 &= 3xf(x) + \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

Utilizando artifícios algébricos e isolando $f(x)$ encontramos:

$$f(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Agora usando o método das frações parciais,

$$f(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-3x}$$

Vamos encontrar os valores de A,B e C,

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{A(1-3x)+B(1-x)(1-3x)+C(1-x)^2}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{(3B+C)x^2+(-3A-4B-2C)x+A+B+C}{(1-x)^2(1-3x)}
\end{aligned}$$

Se os denominadores das igualdades são iguais, logo os numeradores também são, portanto, vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3B+C=2 \\ -3A-4B-2C=-2 \\ A+B+C=1 \end{cases}$$

resolvendo o sistema obtemos o seguinte resultado para: $A=-\frac{2}{4}$, $B=\frac{1}{4}$ e $C=\frac{5}{4}$.Logo,

$$\frac{1-2x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = -\frac{2}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-3x}\right)$$

Analisando o resultado podemos definir a forma fechada da sequência:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) &= -\frac{2}{4}(1+2x+3x^2+...), \text{ o coeficiente de } x^n \text{ nessa função é } -\frac{2}{4}n. \\
\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{1}{4}(1+x+x^2+x^3+...), \text{ o coeficiente de } x^n \text{ nessa função é } \frac{1}{4}. \\
\frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-3x}\right) &= \frac{5}{4}(1+3x+(3x)^2+(3x)^3+...), \text{ o coeficiente de } x^n \text{ nessa função é } \frac{5}{4}.3^n.
\end{aligned}$$

Então, $a_n = \dfrac{5.3^n-2n-1}{4}$

2.7 Resolução de Recorrência através de Diagonalização.

Antes de resolver uma relação de recorrência utilizando a técnica de diagonalização de matrizes, serão mostrados alguns conceitos iniciais necessários.

2.7.1 Potência de matriz

Calcular a potência de uma matriz A^n é muito simples quando A é diagonal, pois

$$\text{diag}(a_1, a_2, ..., a_k)^n = \text{diag}(a_1^n, a_2^n, ..., a_k^n).$$

Caso a matriz A não seja diagonal, é necessário uma grande quantidade de operações[1],

$$A^n = \underbrace{AAA...A}_{n-1}$$

Existe um processo chamado diagonalização de matrizes em que, se A for diagonalizável, A pode ser escrita como produto de três matrizes em que uma delas é diagonal.

Teorema 2.7.1. *Seja A diagonalizável com $A = PDP^{-1}$, e $n \in \mathbb{N}$. Então, $A^n = PD^nP^{-1}$.*

Demonstração. Para demonstrar, basta reescrever A^n como produto de n matrizes:

$$\begin{aligned} A^n &= A.A.A.A...A \\ &= (PDP^{-1}).(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) \\ &= PD.(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D...DP^{-1} \\ &= PDIDI...DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

■

Se a matriz A é diagonalizável e n é muito grande, é vantajoso calcular sua potência na base em que é diagonal, fazendo assim uma quantidade fixa (e pequena) de operações.

Porém, quem são essas matrizes P e P^{-1}? O processo de diagonalização será mostrado a seguir em detalhes.

2.8 Diagonalização de Matrizes

2.8.1 Autovalores e Autovetores

Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[1] podemos calcular A^2, depois $A^2A^2 = A^4$, depois $A^4A^4 = A^8$, e etc, acelerando o processo, mas mesmo assim a quantidade de operações pode ser arbitrariamente grande.

Definição 2.8.1. *Dizemos que um vetor não nulo v é um autovetor de T se existe um número real λ tal que $T(v) = \lambda v$. Em tal caso, dizemos que λ é o autovalor associado ao autovetor v.*

2.8.2 Polinômio característico

O polinômio característico de uma matriz nos permite determinar seus autovalores, e consequentemente seus autovetores, e é uma importante aplicação de determinantes.

Se x e λ são um par de autovetor e autovalor de uma transformação A, então por definição:

$$Ax = \lambda x$$

Queremos encontrar valores para λ e x, com $x \neq 0$. Podemos reescrever esta equação, já que $\lambda x = \lambda I x$, logo, $Ax = \lambda I x$, temos então:

$$Ax = \lambda I x$$
$$(A - \lambda I)x = 0$$

Se $(A - \lambda I)$ não for singular (ou seja, seu determinante for diferente de zero), o sistema acima terá somente uma solução, com $x = 0$, pois

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x &= 0 \\ x &= (A - \lambda I)^{-1} 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Como queremos as outras soluções, com $x \neq 0$, estamos procurando valores de λ para os quais a matriz $(A - \lambda I)$ é singular,

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Essa equação é chamada de equação característica e seu lado esquerdo é chamado de polinômio característico. As raízes do polinômio característico de uma matriz A são os autovalores da transformação representada por A.

Exemplo 2.8.1. *Encontre os autovalores e autovetores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Vamos encontrar o polinômio característico e encontrar suas raízes.

$$det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Calculando o determinante e resolvendo a equação temos, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Agora vamos encontrar os autovetores, utilizando a definição temos:

$$Ax = \lambda x$$

Para $\lambda_1 = 3$ temos:

$$\begin{aligned} Ax &= 3x \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 3. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fazendo as multiplicações temos: $\begin{cases} 2x + y = 3x, \\ x + 2y = 3y \end{cases}$

Resolvendo o sistema encontramos $y = x$ e colocando $y = 1$, então $x = 1$, portanto um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$ é o vetor $(1, 1)$.

Para $\lambda_2 = 1$ temos:

$$\begin{aligned} Ax &= 1x \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 1. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fazendo as multiplicações temos: $\begin{cases} 2x + y = x, \\ x + 2y = y \end{cases}$

Resolvendo o sistema encontramos $y = -x$ e colocando $y = 1$, então $x = -1$, portanto um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é o vetor $(-1, 1)$.

A matriz A pode ser escrita como o produto de $P.D.P^{-1}$ em que P é formada pelos autovetores da matriz A disposto na vertical, D é formada pelos autovalores da matriz A dispostos na diagonal e P^{-1} é a matriz inversa de P, veja um exemplo.

Exemplo 2.8.2. *Escreva a matriz A do exemplo 2.8.1 como produto de P.D.P^{-1}.*

Como já encontramos os autovalores e autovetores, basta montar as matrizes e fazer os cálculos para obter a comprovação. A matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, logo,

$$\begin{aligned} A &= P.D.P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O processo para encontrar a matriz inversa pode ser visto em qualquer livro de álgebra linear.

Definição 2.8.2. *Uma equação de recorrência linear de ordem k*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k}$$

pode ser descrita em forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{bmatrix}}_{C} . \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k+1} \end{bmatrix}$$

A matriz C é chamada de matriz associada à equação de recorrência (a_n)

Exemplo 2.8.3. *Vamos construir a matriz associada da seguinte relação de recorrência,*

$$a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-3} - a_{n-4}$$

Os coeficientes da equação são $(2, -3, 1/2, -1)$, e a matriz associada da equação é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

de forma que

$$C. \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{bmatrix}$$

com $a_{n+4} = 2a_{n+3} - 3a_{n+2} + (1/2)a_{n+1} - a_n$, conforme esperado.

Perceba que C transforma $a_n, ..., a_{n+k}$ em outro vetor coluna, com $a_{n+1}, ..., a_{n+k+1}$, Se aplicarmos C novamente, obteremos os próximos k valores, e assim por adiante.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix} \xrightarrow{C} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{C} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \\ \vdots \\ a_{n+k+2} \end{bmatrix} \xrightarrow{C} \dots$$

Assim, se pudermos calcular C^n e aplicar no vetor com valores iniciais, teremos o valor de a_n na primeira posição,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \xrightarrow{C^n} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

Como foi mostrado, calcular C^n é fácil caso C seja diagonalizável, determinamos a base em que C é diagonal, e calculamos PD^nP^{-1}.

Então, o método para resolver a relação de recorrência através de diagonalização é: Seja C uma matriz associada a uma relação de recorrência de ordem k. Sendo D diagonalizável, sejam P e P^{-1} as matrizes de mudança de base tais que $D = P^{-1}CP$. Seja Z o vetor coluna com os valores iniciais da recorrência,

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

A forma fechada para o enésimo termo da recorrência é dada pela primeira entrada do vetor

$$PD^nP^{-1}Z.$$

Exemplo 2.8.4. *Resolva a relação de recorrência baixo através de diagonalização.*

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n, \textit{ sendo, } x_1 = 0, x_2 = 2$$

Utilizando processo de diagonlização de matrizes, vamos primeiro encontrar a matriz associada à relação de recorrência, podemos ver que os coeficientes da recorrência são $(1,12)$, logo a matriz associada é: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$ Calculando os autovalores da matriz associada encontramos $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$ e os autovetores associados respectivamente $v_1 = (1,4)$ e $v_2 = (-1,3)$. Logo,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix} . \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz A^n no vetor inicial

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse produto de matrizes temos:

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}.4^n - \frac{2}{7}(-3)^n \\ \\ \frac{8}{7}.4^n - \frac{6}{7}.(-3)^n \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução da relação de recorrência é: $x_n = \frac{2}{7}.4^n - \frac{2}{7}.(-3)^n$.

Exemplo 2.8.5. *Resolva a relação de recorrência abaixo através de diagonalização.*

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3}, \textit{ para } n \geqslant 3,\ a_0 = 3, a_1 = 3 \textit{ e } a_2 = 7$$

Vamos encontrar a matriz associada à relação de recorrência.Os coeficientes da recorrência são $(3,-1,3)$. Portanto, a matriz associada é: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calculando os autovalores da matriz associada encontramos $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$ e os autovetores associados respectivamente $v_1 = (1,3,9)$, $v_2 = (-1,-i,1)$ e $v_3 = (-1,i,1)$. Logo,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -i & i \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 1/10 \\ -9-3i/20 & i/2 & 1-3i/20 \\ -9+3i/20 & -i/2 & 1+3i/20 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a matriz A^n no vetor inicial

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o produto de matrizes obtemos:

$$A^n = \begin{bmatrix} i^n.(-1)^n + 3^n + i^n \\ -i.i^n.(-1)^n + 3.3^n + i.i^n \\ -i^n.(-1)^n + 9.3^n - i^n \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução da relação de recorrência é: $a_n = (-i)^n + i^n + 3^n$.

CAPÍTULO

3 Algumas Aplicações

3.1 *(n,k) - block fountain*

Um *(n,k) - fountain* é um arranjo de n moedas em linhas de modo que a primeira linha (linha inferior) é um bloco único composto por k moedas e cada moeda da linha superior toca em exatamente duas moedas da linha inferior. Veja um exemplo.

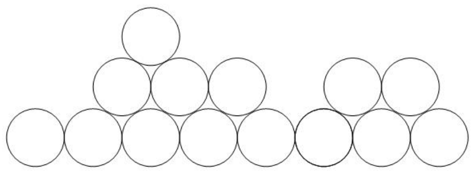

Figura 4 – (14,8)-fountain

Na figura é possível ver que a primeira linha é composta por oito moedas, ou seja, $k = 8$ e o total de moedas é quatorze. Então, essa combinação de moedas é definida por *(14,8)-fountain*, essa é uma das possibilidades de empilhamento quando a "base"que chamamos de primeira linha é composta por oito moedas.

Dentre todos os *(n,k)-fountain* possíveis, existe um tipo especial, são aqueles nas quais em cada linha existe apenas um bloco contínuo de moedas, que chamaremos de *(n,k)-block fountain.* [4]

Sabendo que a primeira linha possui exatamente k moedas, quantos *block fountains* existem? Chamamos de $f(k)$ a quantidade de *block fountain* possíveis quando $k = 0, 1, 2, 3...$

Exemplo 3.1.1. *Quantos block fountain existem para* $k = 4$ *moedas?*

Podemos mostrar que existem 13 possibilidades de empilhamento quando $k = 4$, veja esse exemplo através de figuras.

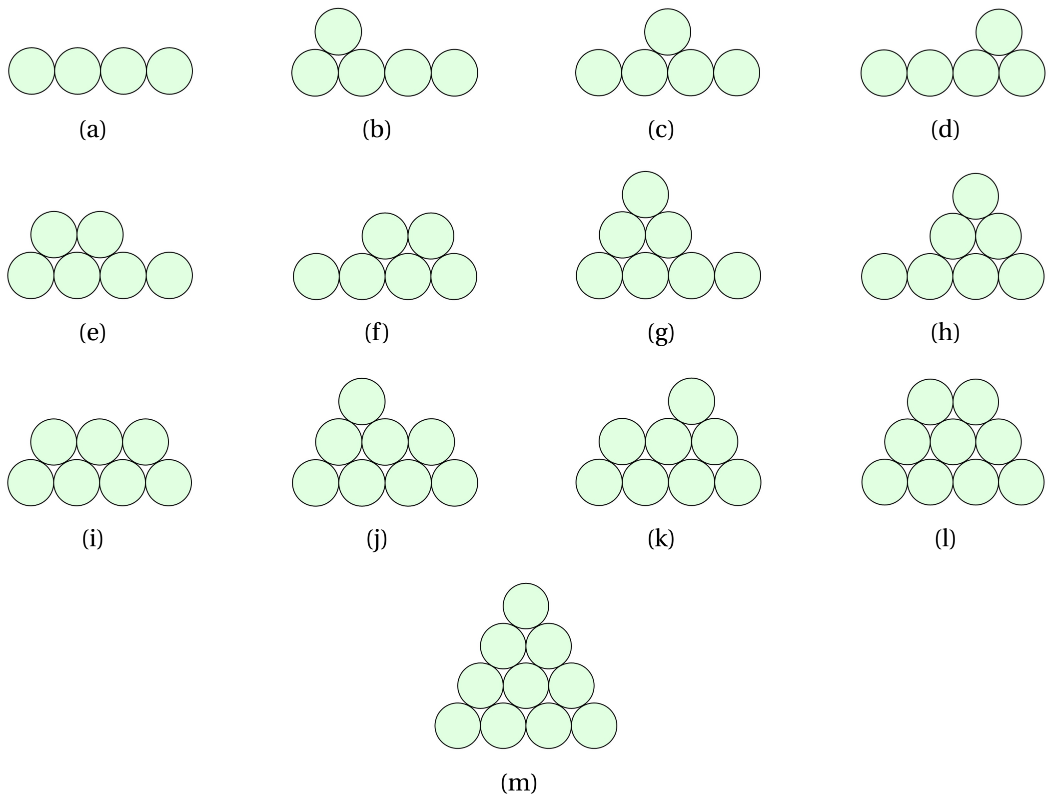

Figura 5 – Possibilidades de empilhamento k=4

Perceba que se retirarmos a primeira linha do *block fountain* teremos um outro *block fountain* que possui menos k moedas. Por outro lado, se quisermos formar todos os possíveis *block fountains* cuja primeira linha possui k moedas, então devemos estabelecer essa linha. Observe que a segunda linha, possui no máximo $k-1$ moedas, então, dado um número j a segunda linha pode variar a quantidade de moedas da seguinte maneira $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Se a segunda linha possuir $j=0$ moedas, então existe uma única maneira de empilhar as moedas, caso contrário, existem $k-j$ maneiras de fazer isso, dependendo até que ponto recuamos a linha de j sobre a linha de k moedas. Sabendo que $f(k)$ é a quantidade de *block fountain* quando $k = 1, 2, 3, \ldots$, então temos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} f(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a relação de recorrência para encontrar a quantidade de *block fountains* quando $k = 4$ expresso no Exemplo 3.1.1

$$\begin{aligned} f(4) &= \sum_{j=1}^{4} (k-j) f(j) + 1 \\ &= (4-1).f(1) + (4-2).f(2) + (4-3).f(3) + (4-4).f(4) + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

3.1.1 Função geradora de *(n,k)-block fountain*

Vamos utilizar a técnica de funções geradoras para encontrar uma forma fechada da relação de recorrência de *(n,k)-block fountain.*

Definimos $F(x)$ como a função geradora ordinária da sequência $\{f(n)\}$:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)x^j$$

Agora vamos multiplicar a relação de recorrência por x^k e somar em k, para $k \geqslant 1$, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} (k-j)f(j) + 1 \Big) x^k$$

Fazendo uma análise, temos:

$$F(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} (k-j)f(j) + 1 \Big) x^k.$$

Note que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} (k-j)f(j) + 1 \Big) x^k = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \Big) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} f(m)x^m \Big) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Sabemos que a função geradora ordinária para $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ é $\frac{x}{(1-x)^2}$ e para $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é $\frac{x}{1-x}$, temos que:

$$\begin{aligned}
F(x) - f(0) &= \frac{x}{(1-x)^2}(F(x) - f(0)) + \frac{x}{1-x} \\
F(x) - 1 &= \frac{x}{(1-x)^2}(F(x) - 1) + \frac{x}{1-x}. \\
F(x) &= \frac{1-2x}{1-3x+x^2}
\end{aligned}$$

Para obter a forma fechada devemos expandir esta função em série, acompanhe:

$$x^2 - 3x + 1 = \Big(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Big) \Big(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Big)$$

Utilizando frações parciais temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x}{1-3x+x^2} &= \frac{1-2x}{\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&= \frac{1-2x}{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)} \\
&= \frac{1-2x}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{A}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}
\end{aligned}$$

Resolvendo,

$$\frac{A}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{A+B-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}A+\frac{3-\sqrt{5}}{2}B\right)x}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

Logo,

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}A+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}B=2 \end{cases}$$

Obtemos:

$$\begin{cases} A=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Como

$$\frac{A}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$$

e

$$\frac{B}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$$

temos:

$$F(x)=\frac{1-2x}{1-3x+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

Analise a função geradora da sequência de Fibonacci para que possamos fazer algumas observações.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Vamos observar o seguinte termo da sequência de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-1} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n} - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]
\end{aligned}$$

Portanto, através dessa observação percebemos que:

$$f(n) = a_{2n-1}$$

Em outras palavras, a quantidade de *block fountain* existentes é igual a Sequência de Fibonacci nas posições ímpares.

3.2 A Pizza de Steiner

Jacob Steiner (1796-1863) propôs um problema que ficou conhecido como "A pizza de Steiner", que consiste em obter o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos[1].Para que o nome do problema faça sentido basta pensar no plano como uma grande pizza.

Jacob Steiner deixou um grande legado para matemática, principalmente na área de geometria, mais sobre sua biografia pode ser obtido em [11] .

Para iniciar a resolução do problema vamos passar um corte reto em uma pizza, obtendo assim dois pedaços (partes) conforme figura 6.Logo, 1 corte, 2 partes.

[1] A primeira solução para este problema foi obtida pelo matemático suiço Jacob Steiner em 1826.

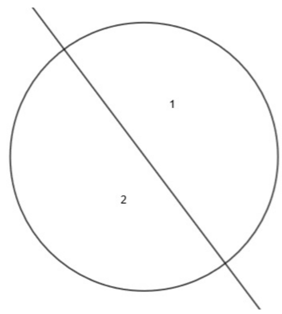

Figura 6 – 1 corte, 2 partes

Podemos passar dois cortes paralelos obtendo assim 3 partes conforme figura 7.

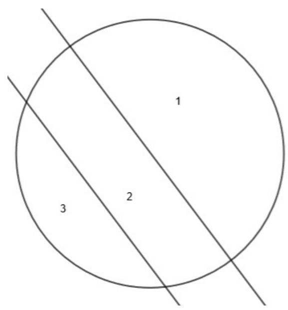

Figura 7 – 2 cortes paralelos, 3 partes

Caso os dois cortes sejam coincidentes, obteríamos 2 partes da mesma forma quando utilizamos apenas um corte, como queremos a maior quantidade de partes, utilizar cortes coincidentes não é interessante.

Utilizando dois cortes concorrentes obtemos 4 partes, veja:

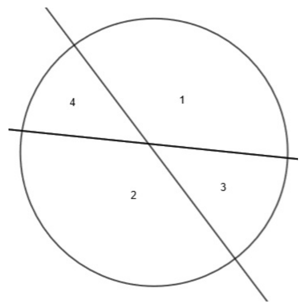

Figura 8 – 2 cortes concorrentes, 4 partes

Agora, passando um terceiro corte na intersecção dos dois cortes anteriores obtemos 6 partes, veja:

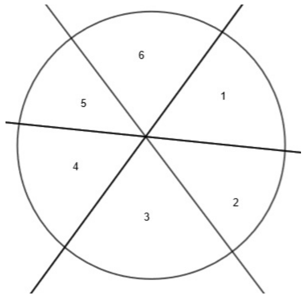

Figura 9 – 3 cortes concorrentes, 6 partes

Como queremos obter o maior número de partes, perceba que se o corte intersectar os dois cortes anteriores, porém sem passar pelo ponto de intersecão é possível encontrar 7 partes, veja:

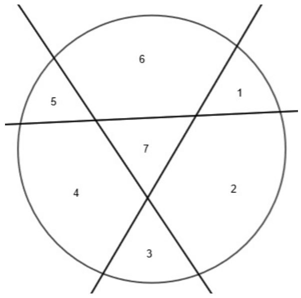

Figura 10 – 3 cortes concorrentes, 7 partes

Então, para que seja obtido o maior número de partes os cortes deverão ser dois a dois concorrentes e a interseção de qualquer subconjunto de três cortes seja vazia. Observe a próxima figura que atende essa definição, temos 4 cortes e 11 partes.

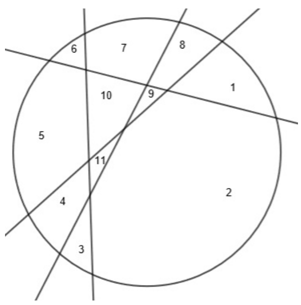

Figura 11 – 4 cortes concorrentes, 11 partes

A partir desses exemplos podemos conjecturar uma relação entre o número de cortes e a quantidade de partes.

Através da tabela podemos estabelecer uma relação de recorrência, considerando $(n = 0)$ obtemos, $r_0 = 1$, $r_n = r_{n-1} + n$, para $n \geqslant 1$.

Tabela 4 – cortes x partes

Número de cortes	Número de partes
0 corte	1
1 corte	2=1+1
2 cortes	4=1+1+2
3 cortes	7=1+1+2+3
4 cortes	11=1+1+2+3+4
$\vdots$	$\vdots$
r_n cortes	P=1+1+2+3+4+...+r$_n$

A partir da tabela podemos ver que quando são feitos n cortes na pizza, obtemos p partes que é igual a $1+\underbrace{1+2+3+4+...+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}$. Logo o número de partes é:

$$P = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Fazendo as substituições em n encontramos a sequência $p_n = (1,2,4,7,11,...)$.

3.2.1 Função Geradora da Pizza de Steiner

A resolução da relação de recorrência que corresponde aos cortes da Pizza de Steiner pode ser encontrada de uma forma simples conforme a tabela 4. Porém, podemos resolver essa relação de recorrência através do método das Funções Geradoras, confirmando mais uma vez o poder de tal método. Acompanhe, vamos multiplicar a relação de recorrência por x^n, em seguida fazer a soma de todos os valores de n para os quais a relação é válida, nesse caso, n varia de 1 ao infinito. Sabemos que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$.

$$\begin{aligned}
r_n &= r_{n-1} + n \\
\sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\
\sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
F(x) - 1 &= xF(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \\
F(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^2(1-x)}
\end{aligned}$$

Utilizando o método das frações parciais temos:

$$F(x) = \frac{x^2-x+1}{(1-x)^2(1-x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$$

Vamos encontrar os valores de A,B e C,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-x+1}{(1-x)^2(1-x)} &= \frac{A+(1-x)B+(1-x)C}{(1-x)^3} \\
&= \frac{A(1-2x+x^2)+B-Bx+C}{(1-x)^3} \\
&= \frac{A-2xA+Ax^2+B-Bx+C}{(1-x)^3} \\
&= \frac{A+B+C-2xA-Bx+Ax^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2A-B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

resolvendo o sistemas obtemos o seguinte resultado para: $A=1, B=-1$ e $C=1$, logo,

$$\frac{x^2-x+1}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$$

Analisando o resultado podemos definir a forma fechada da sequëncia:

$\frac{1}{(1-x)} = 1(1+x+x^2+...)$, o coeficiente de x^n nessa função é 1
$\frac{-1}{(1-x)^2} = -1(1+2x+3x^2+...)$, o coeficiente de x^n nessa função é $-n-1$
$\frac{1}{(1-x)^3} = 1(1+3x+6x^2+10x^3+...)$, o coeficiente de x^n nessa função é $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1-n-1+\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{n^2+n+2}{2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{2} x^n
\end{aligned}$$

3.3 Triangulação de um n-ágono convexo

Quando fixamos um vértice de um polígono e traçamos todas as diagonais do polígono partindo desse vértice fixado, dividimos o polígono em triângulos.Veja:

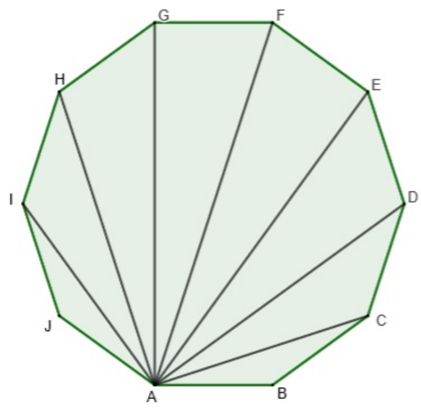

Figura 12 – Decágono

O decágono foi dividido em 8 triângulos, mas não foram traçadas todas as diagonais do polígono, se forem traçadas as diagonais partindo do vértice B, teremos outros triângulos, porém todas as diagonais existentes serão interesectadas pelas novas diagonais.

Com essa ideia de encontrar triângulos em polígonos, Leonard Euler (1707-1783) propôs em 1751 um problema para o matemático Christian Goldbach (1690-1764) que consistia do seguinte:

Dado um polígono convexo de $n \geqslant 3$ *lados, de quantas maneiras distintas podemos traçar as diagonais deste polígono de modo que este seja triangulado e as diagonais não se cruzem?*

Podemos iniciar a resolução desse problema geometricamente.

Definição 3.3.1. *Um polígono é convexo quando, dado dois ponto* A *e* B *que são interiores ao polígono, qualquer ponto do segmento que une* A *a* B *também é interior ao polígono.*

Vamos definitir como T_n o número de triângulações de um polígono convexo de n lados. Veja:

Para $n = 3$ temos $T_3 = 1$.

Existe uma única maneira de triangular um triângulo.

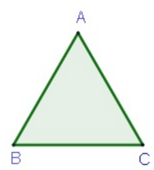

Figura 13 – Triangulação - apenas uma maneira

Para $n = 4$ temos $T_4 = 2$.

Existem duas maneiras de triângular um quadrilátero.

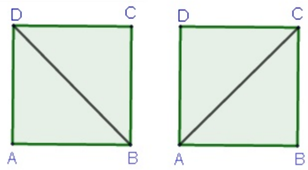

Figura 14 – Triangulação - duas maneiras

Para $n = 5$ temos $T_5 = 5$

Existem cinco maneiras de triangular um pentágono.

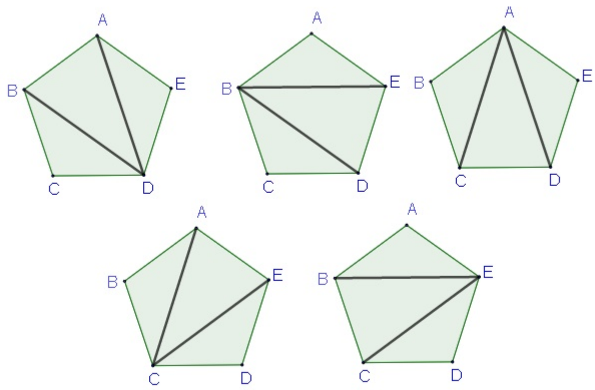

Figura 15 – Triangulação - cinco maneiras

Analise as triangulações do pentágono, observe o que foi feito. Fixada a base CD e traçada a diagonal BD, o polígono fica dividido em um triângulo BCD e um quadrilátero ABDE e como vimos, um quadrilátero possui duas maneiras de triângulações, logo com a base CD fixada e a diagonal BD temos duas triângulações. Agora fixada a base CD e traçadas as diagonais AC e AD, o polígono é dividido em três triângulos ABC, ACD e ADE, logo temos uma triângulação com a base CD fixada e traçadas as diagonais AC e AD. Agora fixada CD e traçada a diagonal CE, o polígono fica divido em um triângulo CDE e um quadrilátero ABCE, como sabemos, o quadrilátero possui duas triangulações. Logo com a base CD fixada e traçada a diagonal CE temos duas triângulações. Somando as triângulações temos no total cinco triangulações do pentágono de forma que as diagonais não se cruzem.

Segundo [12], Euler utilizou uma fórmula indutiva para calcular as triangulações,

$$T_n = \frac{2.6.10...(4n-10)}{(n-1)!}, n \geqslant 3$$

porém não dava garantias de que estava correto, mas já conhecia o valor de T_n para $n \leqslant 9$. Perceba que essa fórmula só é válida para $n \geqslant 3$, mas ela pode ser expandida para os casos em que $n = 0, 1$ e 2 da seguinte forma: Basta fazer uma substituição de variável, colocamos

$k = n-3$, e então $n = k+3$. Então fica,

$$\begin{aligned} T_{k+3} &= \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots[4(k+3)-10]}{(k+3-1)!} \\ &= \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4k+2)}{(k+2)!} \end{aligned}$$

Para $k \geqslant 0$, de acordo com a ilustração a partir da definição 3.3.1, tínhamos $T_3 = 1, T_4 = 2$, $T_5 = 5$ que são os números de Catalan C_1, C_2, C_3 respectivamente, deslocados dois índices para a direita. Então, definimos $C_n = T_{n+2}$, e então fica do seguinte modo:

$$\begin{aligned} C_n = T_{n+2} = T_{(n-1)+3} &= \frac{2\cdot 6\cdot 0\cdots[4(n-1)+2]}{(n-1+2)!} \\ &= \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para todo $n \geqslant 1$, essa igualdade pode ser reescrita da seguinta maneira:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4n-2}{n+1}.\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-6)}{n!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1}.C_{n-1} \end{aligned}$$

Para todo $n \geqslant 1$. Veja que quando $n = 1$, $C_1 = C_0$, logo definimos $C_0 = 1$, e então os números de Catalan podem ser definimos através da seguinte relação de recorrência:

$$C_0 = 1 \tag{3.2}$$

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}.C_{n-1}, n \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Euler não fez demonstração de sua fórmula indutiva, com o intuito de desvendar o problema, ele encaminhou para o físico húngaro Johann Andreas Von Segner, que em 1758 obteve a seguinte relação de recorrência para o problema:

$$T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_2$$

Uma demonstração combinatória para o problema foi dada pelo matemático francês Gabriel Lamé em 1838. A prova dada por Lamé foi discutida em artigos publicados em 1838/39 pelo matemático belga Eugène Charles Catalan. Além de estudar e citar resultados de Lambé, Catalan escreveu vários artigos que envolviam a mesma sequência. O termo "Números de Catalan"surgiu dessas citações, Catalan contribuiu para o desenvolvimento do estudo da sequência, porém a sua contribuição não foi crucial, apesar de se ter atribuído a ele o nome da sequência. [9]

3.3.1 Fórmula recursiva de Segner

Veja a ideia de Segner para o problema da triangulação de polígonos convexos, ele utilizou adição e o princípio da multiplicação.

Considere um n-ágono com vértices $A_1, A_2, \cdots, A_n$, sendo $n \geqslant 3$. Seja $1 < k < n$, então o triângulo $A_1 A_k A_n$ divide o n-ágono em dois polígonos menores. Se $3 \leqslant k \leqslant n-2$ temos um k-ágono à direita do triângulo $A_1 A_k A_n$ com vértices $A_1, A_2, \cdots, A_k$ e um $(n-k+1)$-ágono à esquerda com vértices $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$. Caso $k = 2$ o n-ágono não possui nenhum polígono no lado direito, mas um $(n-1)$-ágono em seu lado esquerdo; caso $k = n-1$, o resultado é semelhante para $k = 2$. Veja a figura:

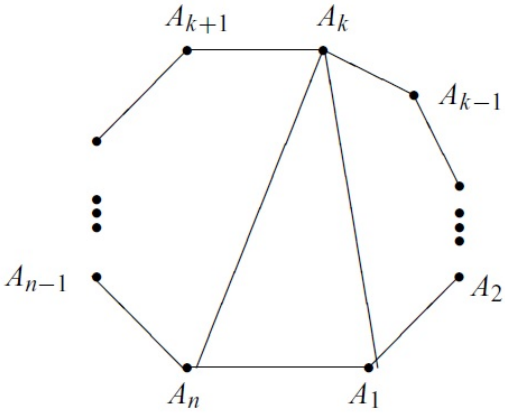

Figura 16 – Decomposição poligonal

O k-ágono pode ser triângulado de T_n maneiras, e o $(n-k+1)$-ágono em T_{n-k+1} maneiras. Portanto, pelo princípio da multiplicação existem $T_k T_{n-k+1}$ triangulações diferentes do n-ágono que contém o triângulo $A_1 A_k A_n$. Logo, quando $2 \leqslant k < n$, pelo princípio da adição, o número total de triangulações do n-ágono é dado por:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1} \tag{3.4}$$

$$= T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_2 \tag{3.5}$$

Para $n \geqslant 3$ e $T_2 = 1$ que foi definido anteriormente.

Desde que $C_n = T_{n+2}$, isso produz a relação de recorrência de Segner para C_n:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 \tag{3.6}$$

$$= (C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}).(C_{n-1}, C_{n-2}, \cdots, C_0) \tag{3.7}$$

Exemplo 3.3.1. *Calcule o número de triângulações de um hexágono convexo de forma que suas diagonais não se cruzem.*

Sabemos da igualdade (3.1) que $C_n = T_{n+2}$, logo $T_6 = C_4$. Utilizando a fórmula recursiva de Segner temos:

$$
\begin{aligned}
C_4 &= (C_0, C_1, C_2, C_3).(C_3, C_2, C_1, C_0) \\
&= (1,1,2,5).(5,2,1,1) \\
&= (1.5 + 1.2 + 2.1 + 5.1) \\
&= (5 + 2 + 2 + 5) \\
&= 14
\end{aligned}
$$

3.3.2 Função Geradora da triangulação de um n-ágono convexo

Para encontrar a forma fechada da relação de recorrência (3.3) vamos utilizar as funções geradoras. Portanto, queremos encontrar os coeficientes da função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$.

Analisando o lado direito da relação de recorrência em (3.4),

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-k+1}, n \geqslant 3$$

Podemos ver que é semelhante ao item ii) do teorema 1.2.1 no caso em que $a_k = b_k$ para todo k. Definindo $T_0 = 0$ e $T_1 = 0$ podemos estender o somatório de $k = 0$ até $n + 1$ e a expressão resultante fica,

$$\sum_{k=0}^{n+1} T_k T_{n-k+1}$$

que é exatamente a expressão do coeficiente de x^{n+1} na função $f^2(x) = f(x).f(x)$, onde $f(x)$ é a função geradora da sequência (T_n). Com essa definição, a relação de recorrência pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$
\begin{gathered}
T_0 = 0,\ T_1 = 0,\ T_2 = 1 \\
T_n = \sum_{k=0}^{n+1} T_k T_{n-k+1}, \text{ para } n \geqslant 3.
\end{gathered}
$$

Multiplicando a relação de recorrência por x^n e somando para $n \geqslant 3$, obtemos

$$\sum_{n=3}^{\infty} T_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} T_k T_{n-k+1} \right) x^n$$

logo,

$$f(x) - T_0 - T_1 x - T_2 x^2 = \frac{\sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} T_k T_{n-k+1} \right) x^n}{x},$$

e

$$f(x) - x^2 = \frac{f^2(x)}{x}.$$

Portanto, a função geradora da sequência T_n satisfaz,

$$f^2(x) - xf(x) + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em $f(x)$ encontramos as raízes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} \\ &= \frac{x}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora devemos fazer uma análise para saber qual raíz escolher, as condições iniciais indicariam a escolha correta, mas como fazer isso? Veja a expansão em série do termo $\sqrt{1-4x}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n x^n \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(-4)x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-4)^2 x^2 + \cdots + \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-4)^n x^n + \cdots . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Veja que se utilizarmos o sinal "+"em (3.9) a função geradora será

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}(1+\sqrt{1-4x}) &= \frac{x}{2}[1+(1+...)] \\ &= \frac{x}{2}(2+...), \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde todos os termos subtentendidos por "$\cdots$"contém potência de x. Mas, então, o coeficiente de x na expansão acima é

$$\frac{2}{2} = 1$$

o que contraria a condição inicial $T_1 = 0$. Portanto, a conclusão é que o sinal que fornece a função correta deve ser o "$-$".

Simplificando a expressão obtida para $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{2}\Bigg[1-\Bigg(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}(-1)^0(-4)x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}(-1)^1(-4)^2x^2+\cdots+\\
&\quad+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\left(\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-1)^{n-1}(-4)^n x^n+\cdots\Bigg)\Bigg]\\
&= \frac{x}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}(-1)^1(-4)x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}(-1)^2(-4)^2x^2+\cdots+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-1)^n(-4)^n x^n+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}2^1x^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!}2^{n-1}x^{n+1}+\cdots\\
&= \frac{1}{1!}x^2+\frac{2!}{2!.2}2^1x^3+\cdots+\\
&\quad+\frac{(2n-2)!}{n!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)!}2^{n-1}x^{n+1}+\cdots\\
&= \frac{1}{1!}x^2+\frac{2!}{2!}x^3+\cdots+\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^{n+1}+\cdots.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Portanto, T_n, o coeficiente de x^n na expansão em série de $f(x)$, é:

$$T_n=\frac{(2(n-1)-2)!}{(n-1)!(n-2)!}=\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

3.4 A Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma das sequências numéricas mais curiosas que existe, e fornece amplas oportunidades de estudo. Muitos matemáticos profissionais e amadores se debruçam em cima da sequência para encontrar ligações, relações além das já existentes. A sequência é tão importante que existe uma associação para o estudo de Fibonacci e sequências inteiras relacionadas. A associação foi fundada por Verner E. Hoggatt, Jr. (1921-1980) do *San Jose State College* hoje *San Jose State University* na Califórnia e Alfred Brousseau (1907-1988) do St. Mary's College, na Califórnia. A Associação publica *The Fibonacci Quarterly*, dedicado a artigos relacionados a sequências inteiras. [9]

A sequência numérica foi proposta por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em que o primeiro e segundo termo é o número 1, a partir do segundo termos os elementos são originados com a soma dos dois termos antecessores, veja:

$$F_n=(1,1,2,3,5,8,13,21,34,...,).$$

Fazendo uma análise detalhada da sequência é possível ver que ela pode ser escrita através de uma relação de recorrência:

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}.\ (n\geqslant 0; F_0=0 \text{ e } F_1=1)$$

3.4.1 Função Geradora da Sequência de Fibonacci

Quando temos uma relação de recorrência é interessante encontrar uma "forma fechada", pois assim é possível encontrar qualquer termo da sequência sem depender de termos anteriores. Como foi mostrado nesse estudo, existem vários métodos para encontrar uma solução de uma relação de recorrência. Para encontrar a solução da relação de recorrência da Sequência de Fibonacci vamos utilizar o método das Funções Geradoras. Temos que encontrar a função cujos coeficientes correspondem a sequência procurada, logo $F(x) = \sum_{n \geqslant 0} F_n x^n$. Dada a relação de recorrência temos:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ (n \geqslant 1; F_0 = 0, F_1 = 1)$$

Seguindo o método, primeiro passo é multiplicar a relação de recorrência por x^n e fazer a soma dos termos para $(n \geqslant 1)$.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}x^n &= F_n x^n + F_{n-1}x^n \\
\\
\sum_{n\geqslant 1} F_{n+1}x^n &= \sum_{n\geqslant 1} F_n x^n + \sum_{n\geqslant 1} F_{n-1}x^n \\
\frac{F(x)-x}{x} &= F(x) + xF(x) \\
\\
F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2}
\end{aligned}$$

As raízes da equação do denominador são $r\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, ao realizar a expansão em frações parciais, utilizaremos apenas r_+ e r_- ao referir-se as raízes da equação $1-x-x^2=0$.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{A}{(1-xr_+)} + \frac{B}{(1-xr_-)} \\
&= \frac{A(1-xr_-)+B(1-xr_+)}{(1-xr_+)(1-xr_-)} \\
&= \frac{A - Axr_- + B - Bxr_+}{(1-xr_+)(1-xr_-)} \\
&= \frac{A+B+x(-Ar_- - Br_+)}{(1-xr_+)(1-xr_-)}
\end{aligned}$$

Então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ar_- - Br_+ = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos os valores de A e B.

$$A = \frac{1}{(r_+ - r_-)} \text{ e } B = -\frac{1}{(r_+ - r_-)}$$

Fazendo as substituições obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{\frac{1}{(r_+ - r_-)}}{(1-xr_+)} - \frac{\frac{1}{(r_+ - r_-)}}{(1-x_{r-})} \\
&= \left(\frac{1}{(r_+ - r_-)}\right)\left(\frac{1}{(1-xr_+)}\right) - \left(\frac{1}{(r_+ - r_-)}\right)\left(\frac{1}{(1-xr_-)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{(r_+ - r_-)}\right)\left(\frac{1}{(1-xr_+)} - \frac{1}{(1-xr_-)}\right)
\end{aligned}$$

Veja que:

$$\frac{1}{(1-xr_+)} = 1 + r_+x + r_+^2x^2 + r_+^3x^3 + ... = \sum_{j\geqslant 0} r_+^j x^j$$

$$\frac{1}{(1-xr_-)} = 1 + r_-x + r_-^2x^2 + r_-^3x^3 + ... = \sum_{j\geqslant 0} r_-^j x^j$$

$$\frac{1}{(r_+ - r_-)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Portanto,

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{j\geqslant 0} r_+^j x^j - \sum_{j\geqslant 0} r_-^j x^j\right)$$

Logo, a função geradora é: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n)$, para $n = 0, 1, 2, ...,$

Ou fazendo as substituições das raízes,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

CAPÍTULO

4 Considerações Finais

Neste trabalho mostramos métodos de resolução de Relações de Recorrências com destaque ao método das Funções Geradoras. No capítulo 1, foram apresentadas as Funções Geradoras, cálculo dessas funções e também falamos sobre Partição de Inteiros. Já no capítulo 2 foi explorado o estudo das Relações de recorrência mostrando alguns métodos de resolução, no capítulo 3 foram mostrados alguns problemas que envolviam Relações de Recorrências e Funções Geradoras.

O objetivo desse trabalho foi criar um material de estudos sobre As Funções Geradoras e Relações de Recorrências que auxilie professores e alunos na exploração desse conteúdo.

A elaboração desse trabalho juntamente com as disciplinas cursadas no mestrado puderam melhorar significamente minha formação e prática docente.

Referências

[1] DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio; P. MELLO, Margarida; T. C. MURARI, Idani. ***Introdução à Análise Combinatória***. Ciência Moderna, Rio de Janeiro,RJ, 4ª Edição, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

[2] LIMA, Elon Lages;CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. ***A Matemática do Ensino Médio Volume 2***. Sociedade Brasileira de Matemática; Rio de Janeiro,RJ, 5ª edição, 2004). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 33.

[3] NIVEN, I. M. ***Formal power series***. Amer. Math. Montly 76, 1969, p. 871-889). Citado na página 15.

[4] WILF, Herbert S. ***Generatingfunctionology***. CRC press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 57.

[5] CUNHA FILHO, Jair. ***Variações do diagrama de Ferrers, partições planas e funções geradoras***. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP, 2006. Citado na página 15.

[6] DO AMARAL SAMPAIO, César Adriano. ***Funções Geradoras e Aplicações em Partições***. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP, 1998. Citado na página 15.

[7] CORMEM, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. ***Introduction to algorithms***. The MIT Press; Cambridge, 2ª edição, 2001). Citado na página 33.

[8] PEREIRA, Marcus Vinícius. ***Recorrências - Problemas e Aplicações*** . Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) - Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2014. Citado na página 33.

[9] KOSHY, Thomas. ***Fibonacci and Lucas Numbers with Applications***. John Wiley Sons; New York,1ª edição, 2001). Citado 3 vezes nas páginas 33, 68 e 72.

[10] ROSEN, Kenneth H.;. ***Discrete Mathematics and Its Applications***. McGraw-Hill; New York, 6ª edição, 2007). Citado na página 33.

[11] BURCKHARDT, J. J. ***Dictionary of Scientifc Biography***. New York, (1970-1990). Citado na página 61.

[12] KOSHY, Thomas. ***Catalan Numbers with Applications***. Oxford University Press; New York,2009). Citado na página 67.