UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ROBERT ANDRES GALEANO ANAYA

Ações de Fluxos Estocásticos na Variedade de Fréchet das Subvariedades Compactas de uma Variedade

Campinas

2021

Robert Andres Galeano Anaya

Ações de Fluxos Estocásticos na Variedade de Fréchet das Subvariedades Compactas de uma Variedade

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Robert Andres Galeano Anaya e orientada pelo Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G131a Galeano Anaya, Robert Andres, 1988-
Ações de fluxos estocásticos na variedade de Fréchet das subvariedades compactas de uma variedade / Robert Andres Galeano Anaya. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Processo estocástico. 2. Equações diferenciais estocásticas. 3. Integrais estocásticas. 4. Espaços de Fréchet. 5. Variedades diferenciáveis. I. Ledesma, Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Actions of stochastic flows in the Fréchet manifold of the compact submanifolds of a manifold
Palavras-chave em inglês:
Stochastic processes
Stochastic differential equations
Stochastic integrals
Fréchet spaces
Differentiable manifolds
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Diego Sebastian Ledesma [Orientador]
Paulo Regis Caron Ruffino
Simão Nicolau Stelmastchuk
Fabiano Borges da Silva
Leandro Batista Morgado
Data de defesa: 19-02-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-5363-9591
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0129151341768877

Tese de Doutorado defendida em 19 de fevereiro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof(a). Dr(a). SIMÃO NICOLAU STELMASTCHUK

Prof(a). Dr(a). FABIANO BORGES DA SILVA

Prof(a). Dr(a). LEANDRO BATISTA MORGADO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado a:
minha esposa Lina Márquez, e as minhas filhas Larissa Galeano e Valery Galeano.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por ter sido meu refúgio seguro nos momentos de angústia e incertezas.

Ao professor Diego Sebastian Ledesma por ter me orientado neste trabalho e por todas as oportunidades que me proporcionou durante esses quatro anos.

Aos professores Paulo Regis Caron Ruffino, Simão Nicolau Stelmastchuk, Fabiano Borges Da Silva e Leandro Batista Morgado por participar da banca de avaliação.

A toda minha família pelo apoio em cada decisão e projeto. Em especial à minha mãe Rossi Anaya, meu pai Hugo Galeano, meus irmaos Hugo Alberto, Katy, kety e Cristian, a minha tia Carmen Pacheco e meus sogros Jorge Márquez e Nolvi Solano.

Aos amigos do Imecc, especialmente Leithold, Carlos, Sergio, Fabian e Juan por toda a ajuda aos estúdios, pelo companheirismo e pelos bons momentos que proporcionaram durante estes quatro anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho estudamos a integral estocástica sobre o espaço de Fréchet $\mathcal{S}(M)$ das subvariedades compactas de uma variedade diferenciável M com respeito a processos estocásticos induzidos neste espaço, por fluxos na variedade base M que são solução de uma equação diferencial estocástica. Em particular, queremos dar sentido a integral $\displaystyle\int_0^T F(N_t)\, dN_t$, para $F : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ sendo um funcional e N_t um tal processo estocástico, e estudar suas conexões com a geometria da variedade M. Focaremos no caso em que F é o funcional energia ou o funcional volume.

Palavras-chave: Processos estocásticos, variedade diferenciável, espaço de Fréchet.

Abstract

In this work we study the stochastic integral over the Fréchet space $\mathcal{S}(M)$ of the compact submanifolds of a differentiable manifold M with respect to stochastic processes induced in this space, by flows in the base manifold M that are solution of a stochastic differential equation. In particular, we want to make sense of the integral $\int_0^T F(N_t)dN_t$, for $F : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ being a functional and N_t such a stochastic process, and to study its connections with the geometry of the manifold M. We will focus on the case where F is the energy functional or the volume functional.

Keywords: Stochastic processes, differentiable manifold, Fréchet space.

Sumário

Introdução 10

1 PRELIMINARES 13
1.1 Espaços de Frechet 13
1.1.1 A Integral de Riemann 15
1.1.2 Variedades de Fréchet 20
1.2 Espaço de Subvariedades em M 21
1.3 Fluxos Agindo em $\mathcal{S}(M)$ 23

2 CÁLCULO ESTOCÁSTICO 28
2.1 Conceitos básicos 28
2.2 Equações diferenciais estocásticas 32
2.3 Aproximação de Wong Sakai 33
2.4 Ação do fluxo estocástico no fibrado tangente 36
2.5 Teorema de Girsanov 38

3 FÓRMULA DE ITÔ PARA AÇÕES DE FLUXOS ESTOCÁSTICOS EM VARIEDADES DE FRÉCHET 40

4 CÁLCULO DAS VARIAÇÕES PARA HIPERSUPERFICIES E CURVAS 49
4.1 Variações da Energia e Comprimento de Arco 49
4.2 Variações de Área para Hipersuperfícies 56
4.3 Caso de campos conformalmente Killing 72

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 76

REFERÊNCIAS 77

Introdução

A teoria de cálculo estocástico em espaços vetoriais e variedades diferenciáveis de dimensão finita é um tópico da Matemática amplamente estudado e que tem sido trabalhado ao longo dos anos por diversos autores. Referências canônicas sobre estes tópicos são os livros de (Kunita, Itô, Watanabe) entre outros. A extensão da teoria para espaços vetoriais de dimensão infinita , em particular, a espaços de Banach pode ser vista, por exemplo, no livro de (ELWORTHY, 1988). Já para espaços que não são de Banach há poucos trabalhos sobre o assunto. Citamos aqui, em particular, o trabalho de (DUNCAN, 1975), que estudou processos estocásticos com valores em um espaço de Fréchet cujos funcionais lineares contínuos são martingales quadrado integráveis, os trabalhos de (ÜSTÜNEL, 1982), que estendeu a formula de Itô para o movimento Browniano às funções cujo laplaciano (no sentido das distribuições) é uma medida, e (USTUNEL, 1983) onde foram estudadas aplicações do cálculo estocástico sobre os espaços nucleares para os fluxos estocásticos de dimensão finita e equações de evolução estocástica de dimensões infinitas. O problema fundamental nos espaços que não são de Banach é basicamente sua topologia que, de forma direta, dificulta uma boa definição da integral estocástica, que generalize a integral estocástica em dimensão finita de uma forma canônica, assim como a definição de martingale e movimento browniano.

Neste trabalho vamos estudar a integral estocástica sobre o espaço de Fréchet das subvariedades compactas de uma variedade diferenciável M com respeito a processos estocásticos induzidos neste espaço, por fluxos na variedade M que são solução de uma equação diferencial estocástica. O trabalho é uma generalização do artigo de (KINATEDER; MCDONALD, 2002) onde foi estudada uma fórmula de Itô para a evolução de domínios de $\mathbb{R}^n$ sob a ação de um fluxo estocástico.

A ideia básica é a seguinte: seja M uma variedade diferenciável e considere $\mathcal{S}(M)$ o espaço de Fréchet das subvariedades compactas de M. Fixamos uma subvariedade N. Por outro lado, seja $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e considere sobre M uma equação diferencial estocástica no sentido Stratonovich

$$\begin{aligned} d\phi_t &= \sum_{i=1}^{r} X_i(\phi_t) \circ dB_t^i + X_0(\phi_t)dt \\ \phi_0(x) &= x, \quad q.s, \end{aligned}$$

onde B_t é um movimento Browniano em $\mathbb{R}^r$ e X_i são campos vetoriais suaves em M. Assuma que a equação acima admite um fluxo estocástico solução $\phi_t : \Omega \times M \times [0,t] \to M$. Então $N_t : \Omega \times [0,t] \to \mathcal{S}(M)$ é um processo estocástico no espaço de Fréchet $\mathcal{S}(M)$. Se

$F : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ é um funcional, neste trabalho, queremos dar sentido a integral

$$\int_0^T F(N_t)\, dN_t,$$

e estudar suas conexões com a geometria da variedade M, em particular quando F é o funcional energia ou o funcional volume.

Esta tese está dividida em quatro capítulos que foram organizados da seguinte forma:

Iniciamos com o Capítulo 1 onde apresentamos algumas definições e resultados sobre espaços de Fréchet que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Começamos apresentando alguns conceitos sobre análise e geometria das variedades de Fréchet. As referências principais utilizadas neste capítulo são (GARABEDIAN; SCHIFFER, 1953), (GRAY, (1990)), (HAMILTON, (1982)), (KINATEDER; MCDONALD, 2002), (PROTTER, (1990)). Finalizamos o capítulo dando a construção da variedade $\mathcal{S}(M)$ como variedade de Fréchet.

No Capítulo 2, faremos uma revisão rápida das ferramentas básicas do cálculo estocástico. Primeiramente definimos alguns conceitos básicos da teoria de probabilidade, logo depois começamos com uma revisão da teoria básica das equações diferenciais estocásticas do tipo Itô impulsionadas por semimartingales contínuas e enunciamos resultados sobre a existência de um fluxo solução para estas equações. As referências principais utilizadas neste capítulo são (CALIN, 2012), (KUO, 2006), (HSU, 2002), (KUNITA, 1997), (ELWORTHY, 1988).

No Capítulo 3, construímos uma fórmula de Itô para um funcional definido no espaço de Fréchet $\mathcal{S}(M)$ e para um processo estocástico dado pela ação do grupo de difeomorfismos sobre algum espaço ou variedade de Fréchet. As contas são adaptações das ideias apresentadas no trabalho de (KINATEDER; MCDONALD, 2002) para a variedade $\mathcal{S}(M)$.

Finalmente no Capítulo 4, utilizamos a fórmula de Itô dada no capítulo 3 para obter estimativas do funcional energia e o funcional volume para os processos $N_t = \phi_t(N)$. Começaremos estudando o caso das curvas fechadas ou compactas que são as subvariedades de dimensão 1 onde são analisados o funcional energia e o funcional comprimento de arco. Na segunda parte do capítulo estudamos o caso de subvariedades compactas de uma variedade Riemanniana de dimensão finita $n > 1$. Para isto, será preciso estudar as fórmulas de variação do volume. No trabalho derivamos as fórmulas de variação da volume da variedade e observamos que, embora as fórmulas da primeira e segunda variação são bem conhecida, a fórmula da segunda variação do volume que obtemos aqui não aparece na literatura, pois geralmente só são estudados casos particulares desta. A forma em que obtemos as fórmulas de variação é também moderno pois são utilizadas o formalismo de variação do volume em função de variações na métrica. Uma vez obtidas estas fórmulas, concluímos o trabalho estudando o comportamento do funcional volume quando é avaliado na variedade aleatória e estudamos o caso particular em que os campos que dirigem a equação estocástica são conformalmente Killing.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Começamos apresentando alguns conceitos sobre análise e geometria das variedades de Frechet. As referências principais utilizadas neste capítulo são (GARABEDIAN; SCHIFFER, 1953), (GRAY, (1990)), (HAMILTON, (1982)), (KINATEDER; MCDONALD, 2002), (PROTTER, (1990)).

1.1 Espaços de Frechet

Começamos lembrando alguns fatos básicos de análise e geometria das variedades de Frechet para mais detalhes ver (HAMILTON, (1982)).

Definição 1.1. *Uma seminorma sobre um espaço vetorial F é uma função com valores reais $\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}$ tal que*

i) $\|f\| \geqslant 0$, *para todo* $f \in F$;

ii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$, *para todo* $f, g \in F$;

iii) $\|cf\| = |c| \, \|f\|$, *para todo escalar* c *e* $f \in F$.

Uma coleção de seminormas $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$ *define uma única topologia da seguinte forma: uma sequência ou rede* $f_j \to f$ *se, e só se,* $\|f_j - f\|_n \to 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Um espaço vetorial topológico localmente convexo é um espaço vetorial com uma topologia que surge a partir da coleção de seminormas. A topologia é Hausdorff se, e somente se, $f = 0$ *quando* $\|f\|_n = 0$ *para todo* n. *A topologia é metrizável se, e somente se, pode ser definida por uma coleção enumerável de seminormas* $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Neste caso sempre podemos utilizar sequências no lugar de redes. Uma sequência* f_j *é de Cauchy se* $\|f_i - f_k\|_n \to 0$ *quando* $i, k \to \infty$ *para todo* n. *O espaço* F *é completo se toda sequência de Cauchy converge.*

Definição 1.2. ***(Espaço de Fréchet)*** *Um espaço de Fréchet G é um espaço vetorial topológico localmente convexo o qual é Hausdorff, completo e metrizável.*

Exemplo 1.1. *a) Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.*

b) Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}$, com

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : -n \leqslant x \leqslant n\}.$$

Então, $C(\mathbb{R})$ é um espaço de Fréchet. De fato, sejam $f, g \in C(\mathbb{R})$ com $f \neq g$, isto é existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Sem perda de generalidade suponhamos que $g(x) > f(x)$.
Seja $\epsilon = \dfrac{g(x) - f(x)}{2}$ e consideramos $B(f, \epsilon)$ e $B(g, \epsilon)$ vizinhanças de f e g respectivamente.
Se $h \in B(f, \epsilon) \cap B(g, \epsilon)$, então

$$\|f - h\|_n < \epsilon \ \text{ e } \ \|g - h\|_n < \epsilon,$$

logo

$$\|g - f\|_n \leqslant \|g - h\|_n + \|h - f\|_n < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Observamos que $\sup\{|g(x) - f(x)| : -n \leqslant x \leqslant n\} < 2\epsilon$. *Portanto*

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &< 2\frac{g(x) - f(x)}{2} \\ &= g(x) - f(x). \end{aligned}$$

Assim $g(x) - f(x) < g(x) - f(x)$ o que é uma contradição. Portanto $B(f, \epsilon) \cap B(g, \epsilon) = \varnothing$. Logo $C(\mathbb{R})$ é Hausdorff.

Para ver que é completo escolhemos uma sequência de Cauchy $(f_i) \subset C(\mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k, m \geqslant N$ temos que

$$\|f_k - f_m\|_n < \epsilon,$$

ou seja,

$$\sup\{|f_k(x) - f_m(x)| : -n \leqslant x \leqslant n\} < \epsilon.$$

Logo, para cada $x \in [-n, n]$ temos

$$|f_k(x) - f_m(x)| < \epsilon,$$

portanto, $(f_k(x))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Definimos

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x),$$

observamos que f é contínua em x, pela convergência uniforme. Assim $f \in C(\mathbb{R})$ e

$$\|f_k - f\|_n < \epsilon \quad \forall k \geqslant N.$$

Concluímos então que $C(\mathbb{R})$ é completo.

O espaço $C(\mathbb{R})$ é metrizável pois a norma induz uma métrica e é localmente convexo pois a combinação linear de funções contínuas é uma função contínua.

c) Seja X um espaço metrizável localmente compacto e separável, $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em $\mathbb{C}$, que é evidentemente um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Seja U_n uma sequência de conjuntos abertos relativamente compactos de X, para toda função contínua $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ e cada inteiro n, colocamos

$$P_n(f) = \sup_{x \in U_n} |f(x)|,$$

as quais são seminormas sobre $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$. Além disso, para toda função $f \neq 0$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$, existem um $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$ e um n tal que $x \in U_n$, logo $P_n(f) \neq 0$. O espaço localmente convexo $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ assim definido é metrizável. Agora, para uma sequência de Cauchy f_k de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ temos que para todo inteiro n, a sequência das restrições $f_k|_{\overline{U}_n}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\overline{U}_n)$, isto é, converge uniformemente em $\overline{U}_n$ para uma aplicação contínua g_n de $\overline{U}_n$ em $\mathbb{C}$; como $g_{n+1}|_{\overline{U}_n} = g_n$, existe uma função contínua $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ tal que a restrição para cada U_n coincide com as de g_n. Portanto

$$\lim_{m \to \infty} P_n(f - f_m) = 0,$$

para todo n, logo f é o limite da sequência de cauchy f_m, assim temos que $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ é um espaço de Fréchet.

1.1.1 A Integral de Riemann

Seja $f(t)$ uma função contínua em $[a, b]$ com valores no espaço de Fréchet F. Queremos definir a integral $\int_a^b f(t)dt$ como um elemento de F. Isto é feito no seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Existe um único elemento $\int_a^b f(t)dt \in F$ tal que*

(i) para cada funcional linear contínuo $l : F \to \mathbb{R}$,

$$l\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b l(f(t))dt.$$

(ii) para toda seminorma contínua $\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}$,

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$

(iv) $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

(v) $\displaystyle\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt.$

Demonstração. Seja $C([a,b],F)$ o espaço de Fréchet de todas as funções contínuas em $[a,b]$ com valores em F com a seminorma

$$\|f\|_n = \sup_t \|f(t)\|_n\,.$$

Dizemos que uma função $f(t)$ é linear se $f(t) = tf_1 + f_2$ para algúm $f_1, f_2 \in F$, e que $f(t)$ é linear por partes se é contínua e existe uma partição $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k = b$ tal que $f(t)$ é linear em cada parte $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$ para $1 \leqslant i \leqslant k$. O espaço vetorial $PL([a,b],F)$ de funções lineares por partes em $[a,b]$ com valores em F é um subespaço linear denso de $C([a,b],F)$. Então para uma função linear por partes podemos definir a integral pela regra dos trapézios

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}).$$

Assim podemos verificar as propriedades $(i)-(v)$ para funções lineares por partes diretamente da fórmula acima. Como a integral define um funcional linear contínuo no subespaço denso $PL([a,b],\mathbb{R})$ estende-se, por continuidade, a um funcional linear contínuo em todos os $C([a,b],\mathbb{R})$, o que prova o teorema. $\square$

Exemplo 1.2. *Seja $F = \mathcal{C}_{2\pi}$ o espaço de Banach de funções contínuas periódicas com período 2π. Então o caminho contínuo $f(t) \in \mathcal{C}_{2\pi}$ em $[a,b]$ é uma função contínua $f(t,x)$ em $[a,b] \times (-\infty,\infty)$ periódica em x, definida por $f(t)(x) = f(t,x)$. A integral do caminho é dado por*

$$\left\{\int_a^b f(t)dt\right\}(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

Teorema 1.2. *Seja X um espaço topológico e F um espaço de Fréchet. Seja $f : X\times[a,b] \to F$ um mapa contínuo. Então a aplicação $g : X \to F$ definida por*

$$g(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

é contínua.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$. Então $x_0 \times [a,b]$ é compacto, portanto, dada qualquer seminorma $\|\cdot\|$ em F e qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma vizinhança U de x_0 em X

tal que, para todo $x \in U$ e todo $t \in [a,b]$, temos $\|f(x,t) - f(x_0,t)\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Então

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(x_0)\| &= \left\| \int_a^b f(x,t)dt - \int_a^b f(x_0,t)dt \right\| \\
&= \left\| \int_a^b [f(x,t) - f(x_0,t)]dt \right\| \\
&\leqslant \int_a^b \|f(x,t) - f(x_0,t)\|\, dt \\
&\leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Seja $f(t)$ um caminho contínuo em um espaço de Fréchet. Definimos sua derivada como,

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Se $f(t)$ é a posição no tempo t, então $f'(t)$ é a velocidade. Agora se o limite existe e é contínuo dizemos que f é continuamente diferenciável ou C^1. Nesse sentido podemos estabelecer os dois teoremas fundamentais do cálculo.

Teorema 1.3. *Se $f(t)$ é uma curva C^1 em $[a,b]$ com valores num espaço de Fréchet, então*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Demonstração. Se l é um funcional linear contínuo e f é C^1, então $l \circ f$ é C^1, e $(l \circ f)' = l \circ (f')$, como $f : \mathbb{R} \to F$ e $l : F \to \mathbb{R}$, então $l \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo para $\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
l\left(\int_a^b f'(t)dt \right) &= \int_a^b l \circ (f')(t)dt \\
&= \int_a^b (l \circ f)'(t)dt \\
&= l \circ f(b) - l \circ f(a) \\
&= l(f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$. □

Teorema 1.4. *(ver (HAMILTON, (1982)), p, 72) Se $f(t)$ é uma curva C^0 em $[a,b]$ e se $g(t) = \displaystyle\int_a^t f(\theta)d\theta$, então $g(t)$ é C^1 e $g'(t) = f(t)$.*

Demonstração. Dado que $f(t)$ é C^0 temos

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_0^1 f(t+hu)du,$$

assim, pelo Teorema 1.2, obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \int_0^1 f(t)du$$
$$= f(t),$$

logo $g' = f(t)$ e, dado que $f(t)$ é C^0, temos $g(t)$ é C^1. $\square$

Corolário 1.1. *Se $f(a) = g(a)$ e f e g são C^1 com $f'(t) = g'(t)$ para $a \leqslant t \leqslant b$, então $f(b) = g(b)$.*

Demonstração. Dado que f e g são C^1 e $f'(t) = g'(t)$, então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$
$$= \int_a^b g'(t)$$
$$= g(b) - g(a),$$

assim $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$, como $f(a) = g(a)$ concluímos que $f(b) = g(b)$. $\square$

Corolário 1.2. *Se f é C^1 em $[a,b]$ e se $\|f'(t)\| \leqslant k$, então $\|f(b) - f(a)\| \leqslant k(b-a)$.*

Demonstração. Como f é C^1 então

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\|\int_a^b f'(t)dt\right\|$$
$$\leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$$
$$\leqslant \int_a^b kdt$$
$$= k(b-a),$$

portanto $\|f(b) - f(a)\| \leqslant k(b-a)$. $\square$

Definição 1.3. ***(Derivada Direcional)*** *Sejam G, H espaços de Fréchet, $U \subset G$ um subconjunto aberto, e $F : U \longrightarrow H$ uma aplicação. A derivada direcional de F em $g \in U$ na direção $h \in G$ é definida por*

$$\mathbb{D}F(g)(h) = \lim_{t\to 0}\frac{F(g+th) - F(g)}{t}, \tag{1.1}$$

sempre que o limite exista.

Tal derivada também é chamada a derivada de Gateaux. Dizemos que F é diferenciável no conjunto $U \subset G$, se $\mathbb{D}F(g)(h)$ existe para todo $g \in U$ e todo $h \in G$. Denotamos a diferencial em U por $\mathbb{D}F : U \times G \longrightarrow H$.

Definição 1.4. ***(Mapa continuamente diferenciável)*** *Um mapa $F : U \subset G \longrightarrow H$ é dito continuamente diferenciável em U se $\mathbb{D}F$ é contínua em $U \times G$.*

Proposição 1.1. ***(Regra da Cadeia)*** *Sejam $F : U \subset G \longrightarrow H$, $Q : V \subset H \longrightarrow K$ dois mapas diferenciáveis com $F(U) \subset V$, então $Q \circ F : G \longrightarrow K$ é diferenciável, e*

$$\mathbb{D}(Q \circ F)(g)(h) = \mathbb{D}Q(F(g))(\mathbb{D}F(g)(h)).$$

Demonstração. Assumimos que F e Q estão definidos em uma vizinhança convexa. Como F e Q são diferenciáveis, existem funções contínuas $L(g_0, g_1)h$ e $M(f_0, f_1)k$ onde

$$L\colon (U \subset G) \times (U \subset G) \times G \to H$$

$$M\colon (V \subset H) \times (V \subset H) \times H \to K,$$

tais que

$$F(g_1) - F(g_0) = L(g_0, g_1)(g_1 - g_0) \ \text{ e } \ Q(f_1) - Q(f_0) = M(f_0, f_1)(f_1 - f_0).$$

Definimos a função $N(g_0, g_1)h$ por

$$N(g_0, g_1)h = M(F(g_0), F(g_1))L(g_0, g_1)h.$$

Então N é contínua e linear em h. Seja $f_0 = F(g_0)$ e $f_1 = F(g_1)$, logo temos que

$$\begin{aligned} Q(F(g_1)) - Q(F(g_0)) &= M(F(g_0), F(g_1))(F(g_1) - F(g_0)) \\ &= M(F(g_0), F(g_1))L(g_0, g_1)(g_1 - g_0) \\ &= N(g_0, g_1)(g_1 - g_0). \end{aligned}$$

Portanto, $Q \circ F$ é diferenciável. Agora, como

$$L(g, g)h = \mathbb{D}F(g)h \ \text{ e } \ M(f, f)k = \mathbb{D}Q(f)k,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}[Q \circ F](g)h &= N(g, g)h \\ &= M(F(g), F(g))L(g, g)h \\ &= \mathbb{D}Q(F(g))\mathbb{D}F(g)h. \end{aligned}$$

□

Definição 1.5. ***(Segunda Derivada)*** *Seja $F : U \subset G \longrightarrow K$, definimos sua segunda derivada em $g \in U$ na direção $k \in G$ por:*

$$\mathbb{D}^2 F(g)(h, k) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{D}F(g + tk)(h) - \mathbb{D}F(g)(h)}{t},$$

sempre que o limite existe.

De maneira semelhante podemos definir as derivadas de ordem superior. Dizemos que F é suave se F tem derivadas contínuas de toda ordem (ver (HAMILTON, (1982)), seção 1.3.5).

1.1.2 Variedades de Fréchet

Nesta seção vamos definir as variedades de Fréchet, as quais são uma generalização das variedades de Banach que são modeladas sobre espaços de Banach.

Definição 1.6. ***(Variedade de Fréchet)*** *Uma variedade de Fréchet é um espaço topológico de Hausdorff, munido de um atlas com cartas coordenadas $(U_\alpha, \mathtt{u}_\alpha)$ a valores em espaços de Fréchet G_α, de tal modo que suas funções de transição*

$$\mathtt{u}_\beta \circ \mathtt{u}_\alpha^{-1} : \mathtt{u}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathtt{u}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são mapas suaves entre espaços de Fréchet.

Definição 1.7. ***(Mapa Suave)*** *Dadas duas variedades de Fréchet $\mathcal{G}, \mathcal{H}$. Um mapa $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dito suave em uma vizinhança aberta de $g \in \mathcal{G}$, se existem cartas $(U_\alpha \subset \mathcal{G}, \mathtt{u}_\alpha)$ e $(V_\alpha \subset \mathcal{H}, \mathtt{v}_\alpha)$ com $g \in U_\alpha$ e $F(g) \in V_\alpha$ tal que*

$$\mathtt{v}_\alpha \circ F \circ \mathtt{u}_\alpha^{-1} : \mathtt{u}_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathtt{v}_\alpha(V_\alpha)$$

é um mapa suave de espaços de Fréchet.

Dada uma variedade de Fréchet $\mathcal{G}$ e um ponto $g \in \mathcal{G}$, seja C_g o conjunto de curvas suaves em $\mathcal{G}$ parametrizadas por $t \in [-1, 1]$ e passando através de g em $t = 0$.

$$C_g := \{\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathcal{G} : \gamma \text{ é } \textit{uma curva suave em } \gamma(0) = g\}.$$

Como no caso clásico, existe uma relação de equivalência em C_g. Dizemos que γ e $\hat{\gamma}$ são equivalentes, e escrevemos $\gamma \backsimeq \hat{\gamma}$, se para alguma carta $(U_\alpha, \mathtt{u}_\alpha)$ em g temos

$$(\mathtt{u}_\alpha \circ \gamma)'(0) = (\mathtt{u}_\alpha \circ \hat{\gamma})'(0).$$

Denotamos a classe de equivalência de $\gamma \in C_g(\mathcal{G})$ por $[\gamma]$. O espaços das classes de equivalência $\gamma \in C_g(\mathcal{G})/\backsimeq$, é naturalmente um espaço de Fréchet que se denota por $T_g(\mathcal{G})$. Definimos o fibrado tangente de $\mathcal{G}$ dado por

$$T\mathcal{G} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} T_g(\mathcal{G}),$$

com a projeção natural $\pi \colon T\mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Dado uma atlas $\{\phi_\alpha \colon U_\alpha \subset \mathcal{G} \to V_\alpha \subset E_\alpha\}$ de $\mathcal{G}$, V_α aberto do espaço de Fréchet E_α. Definimos um atlas para $T\mathcal{G}$ por

$$\Phi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E_\alpha$$
$$\Phi_\alpha(v_g) = (g, D\phi_\alpha(g)v_g),$$

onde $D\phi_\alpha(g) \colon T_g\mathcal{G} \to E_\alpha$. As funções de transição são, como no caso de dimensão finita, as derivadas das mudanças de coordenadas. O espaço $T\mathcal{G}$ é uma variedade de Fréchet (ver

(HAMILTON, (1982)), seção 1.4).

Agora vamos definir a derivada de Fréchet para o caso de variedades a qual será muito útil para a construção de nosso trabalho.

Um mapa suave $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ induz uma aplicação $\mathbb{D}F : T\mathcal{G} :\to T\mathcal{H}$ que é linear na fibra. A construção é clássica: se $g \in \mathcal{G}$ e $\gamma \in C_g(\mathcal{G})$ satisfaz $[\gamma] = h \in T_g\mathcal{G}$, então, $F(\gamma) \in C_{F(g)}(\mathcal{H})$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}F(g) &: T_g\mathcal{G} \to T_{F(g)}\mathcal{H} \\ \mathbb{D}F(g)(h) &= [F(\gamma)]. \end{aligned}$$

Em particular, se $F : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ e $\gamma \in C_g(\mathcal{G})$ com $[\gamma] = h \in T_g(\mathcal{G})$, então

$$\mathbb{D}F(g)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(g)}{t}. \tag{1.2}$$

1.2 Espaço de Subvariedades em M

Estudamos aqui em detalhe o espaço no qual vamos trabalhar nesta tese. Consideremos uma variedade de dimensão finita M e seja

$$\mathcal{S}_r(M) = \{S \subset M : S \text{ é uma subvariedade suave e compacta de dimensão } r\},$$

o espaço de todas as subvariedades suaves e compactas de M de dimensão r. Vamos mostrar que $\mathcal{S}_r(M)$ é uma variedade de Fréchet.

Para isto, primeiramente mergulhamos $M \subset \mathbb{R}^n$ e a munimos, utilizando a métrica induzida pelo mergulho, com uma métrica Riemanniana. Consideramos $\mathcal{D}(M)$ o conjunto dos difeomorfismos C^∞ de M.

Lembramos que o espaço dos difeomorfismos de M, $\mathcal{D}(M)$ é um espaço de Frechét com tangente dado pelo espaço $\chi(M)$ dos campos vetoriais de classe C^∞ sobre M. Mais ainda, podemos construir uma carta local de $\mathcal{D}(M)$ a partir da aplicação induzida pela aplicação exponencial,

$$\exp : \mathcal{U} \subset \chi(M) \to \mathcal{D}(M). \tag{1.3}$$

Considere o espaço $\mathcal{V}_S \subset \mathcal{U}$ formado por todos os campos vetoriais $X \in \mathcal{U}$ tais que

$$X|_S \notin TS.$$

Vemos que $\mathcal{V}_S$ é aberto em $\chi(M)$. De fato se $X \in \mathcal{V}_S$ então

$$X = X^T + X^\perp$$

em que

$$X^T(x) \in T_xS \quad \text{e} \quad X^\perp(x) \in T_xS^\perp \quad \forall x \in S$$

Como S é compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$||X^\perp(x)|| > 2\epsilon$$

Observamos que o aberto,

$$B(X,\ \epsilon) = \{Y \in X,\ |X(x) - Y(x)|_0 < \epsilon,\ \forall, x \in M\}$$

satisfaz

$$B(X, \epsilon) \subset \mathcal{V}_S,$$

pois, se $Y \in B(X, \epsilon)$ temos

$$\begin{aligned} ||Y^\perp(x)|| &= ||Y^\perp(x) - X^\perp(x) + X^\perp(x)|| \\ &\geqslant |\ ||X^\perp(x)|| - ||Y^\perp(x) - X^\perp(x)||\ | \\ &> 2\epsilon - \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

para todo $x \in S$. Agora, consideramos os conjuntos abertos

$$\tilde{\mathcal{V}}_S = \exp(\mathcal{V}_S), \quad S \in \mathcal{S}_r(M)$$

como conjuntos abertos em $\mathcal{D}(M)$.
Observamos que se $S,\ S' \in \mathcal{S}_r(M)$ tais que

$$\tilde{\mathcal{V}}_S \cap \tilde{\mathcal{V}}_{S'} \neq \varnothing$$

então a diferenciabilidade da mudança de coordenadas segue da diferenciabilidade do mapa

$$\exp^{-1} \circ \exp : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}_{S'}.$$

Este último é diferenciável pois é a restrição a do mapa $\exp^{-1} \circ \exp$ a um aberto.
Definimos então a base da topologia de $\mathcal{S}_r(M)$ como sendo formada pelos conjuntos

$$\mathcal{W}_S = \tilde{\mathcal{V}}_S(S).$$

e observamos que cada $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{S}_r(M)$ é uma variedade de Frechét com tangente dado pelo espaço de Frechet $\mathcal{V}_S$. Mais ainda, nas interseções, a identidade é um mapa diferenciável pois as mudanças de coordenadas entre os $\mathcal{V}_S$ são diferenciáveis. Agora, como

$$S_r(M) = \bigcup_{S \in S_r(M)} \tilde{\mathcal{V}}_S$$

Munimos a $S_r(M)$ com a topologia tal que $V \subset S_r(M)$ é aberto se $V \cap \tilde{\mathcal{V}}_S$ é aberto para todo $S \in \mathcal{S}_r(M)$. Obtemos assim que $S_r(M)$ é uma variedade de Fréchet.

Uma vez que sabemos que $\mathcal{S}_r(M)$ é variedade de Fréchet temos que, naturalmente, a união disjunta

$$\mathcal{S}(M) = \bigcup_{r=1}^{n-1} \mathcal{S}_r(M)$$

é variedade de Fréchet. Neste trabalho utilizaremos indistintamente a notação $\mathcal{S}(M)$ e $\mathcal{S}_r(M)$ e deixaremos a interpretação ao contexto.

Observação 1.1. *Segue da nossa discussão anterior que o espaço tangente para $S \in \mathcal{S}(M)$, pode ser identificado com $(C^\infty(S))^N$ isto é*

$$T_S\mathcal{S}(M) \simeq C^\infty(S, U) \subset (C^\infty(S))^N. \tag{1.4}$$

Denotamos por $T\mathcal{S}(M)$ o fibrado tangente de $\mathcal{S}(M)$, com a projeção natural $\pi : T\mathcal{S}(M) \to \mathcal{S}(M)$.

1.3 Fluxos Agindo em $\mathcal{S}(M)$

Para a variedade de Fréchet $\mathcal{S}(M)$ estudaremos uma classe natural de mapas suaves que atuam sobre ela. Em particular estudamos a ação do fluxo solução de um sistema dinâmico definido sobre a variedade M.
Começamos estudando a ação de um mapa sobre um campo vetorial. Seja X um campo vetorial suave em M e $\varphi : M \to M$ um mapa. Definimos

$$(\varphi_* X) = d\varphi X \circ \varphi^{-1},$$

isto é

$$\begin{aligned}(\varphi_* X)f(x) &= X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))\\ &= [(d\varphi)_y X_{\varphi^{-1}(x)} f]|_{y=\varphi^{-1}(x)},\end{aligned}$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$ e $x \in M$. Desta forma se ϕ_t é o fluxo de X então $\psi_t = \varphi \circ \phi_t \circ \varphi^{-1}$ é o fluxo de $(\varphi_* X)$. De fato

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\psi_t(x)) &= \frac{d}{dt} f(\varphi \circ \phi_t \circ \varphi^{-1})(x)\\ &= df d\varphi \frac{d}{dt}(\phi_t \circ \varphi^{-1})(x)\\ &= df d\varphi X(\phi_t \circ \varphi^{-1})(x)\\ &= df d\varphi X \circ \varphi^{-1}(\varphi \circ \phi_t \circ \varphi^{-1})(x)\\ &= df d\varphi X \circ \varphi^{-1}(\psi_t)(x)\\ &= (\varphi_* X) f(\psi_t(x)),\end{aligned}$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$ e $x \in M$.

Exemplo 1.3. *Seja* $M = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)).$$

Dado $X(x, y) = x\partial_y$ *então*

$$\begin{aligned}(\phi_* X)f(x, y) &= \phi_1(x, y)(\partial_y(f \circ \phi)(\phi^{-1}(x, y)))\\ &= \phi_1(x, y)[(\partial_1 f)(\phi(x, y))\partial_y\phi_1(x, y) + (\partial_2 f)(\phi(x, y))\partial_y\phi_2(x, y)](\phi^{-1}(x, y))\\ &= x[(\partial_1 f)(x, y)(\partial_y\phi_1)(\phi^{-1}(x, y)) + (\partial_2 f)(x, y)(\partial_y\phi_2)(\phi^{-1}(x, y))].\end{aligned}$$

Assuma que M é uma variedade e X, Y são campos vetoriais e sejam ϕ_t e ψ_t fluxos tais que

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X(\phi_t)$$

e

$$\frac{d}{dt}\psi_t = (\phi_{t*}^{-1}Y)(\psi_t).$$

Defina $\xi_t = \phi_t \circ \psi_t$ então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\xi_t(x)) &= df|_{\xi_t(x)}\frac{d}{dt}(\xi_t(x))\\ &= df|_{\xi_t(x)}\frac{d}{dt}(\phi_t \circ \psi_t(x))\\ &= df|_{\xi_t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi_t(\psi_t(x)) + d\phi_t\frac{d}{dt}\psi_t(x)\right)\\ &= df|_{\xi_t(x)}(X(\phi_t \circ \psi_t(x)) + d\phi_t(\phi_{t*}^{-1}Y)(\psi_t(x)))\\ &= df|_{\xi_t(x)}(X(\phi_t \circ \psi_t(x)) + (d\phi_t(\phi_{t*}^{-1}Y) \circ \phi_t^{-1})(\phi_t \circ \psi_t(x)))\\ &= df|_{\xi_t(x)}(X(\phi_t \circ \psi_t(x)) + (\phi_{t*}\phi_{t*}^{-1}Y)(\phi_t \circ \psi_t(x)))\\ &= df|_{\xi_t(x)}(X + Y)_{\xi_t}\\ &= (X + Y)f(\xi_t).\end{aligned}$$

Seja $H : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$, un mapa de classe C^1. Isto é, existe $\mathbb{D}H : T\mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ contínuo. Vamos caracterizar $\mathbb{D}H$ quando avaliamos em curvas da forma $\phi_t(N)$ para uma subvariedade compacta N e o fluxo solução ϕ_t da equação

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X \circ \phi_t.$$

Para isto lembramos que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}H_S(V) &= \lim_{r\to 0}\frac{H(S_r) - H(S)}{r}\\ &:= \frac{d}{dr}\bigg|_{r=0} H(S_r),\end{aligned}$$

para uma curva S_r em $\mathcal{S}(M)$ com tangente $V \in T_{S_0}\mathcal{S}(M)$.
Dado um campo vetorial X sobre M então para uma subvariedade compacta S temos que

$S_t = \phi_t(S)$ define uma curva sobre $\mathcal{S}(M)$, para o fluxo ϕ_t associado a X. O vetor tangente associado a esta curva é o próprio X. Então, denotamos

$$\begin{aligned}\mathbb{D}H_{S_t}(X) &:= \lim_{r\to 0}\frac{H(S_{t+r}) - H(S_t)}{r}\\ &:= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} H(S_{t+r}).\end{aligned}$$

Observamos que se $\varphi : M \to M$, então $\varphi_t = \varphi\circ\phi_t$ é a curva integral de $D\varphi X$ pois temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_t &= \frac{d}{dt}(\varphi\circ\phi_t)\\ &= D\varphi\frac{d}{dt}\phi_t\\ &= D\varphi X(\phi_t),\end{aligned}$$

de onde $\varphi(S_t) = \varphi\circ\phi_t(S)$ e

$$\begin{aligned}\mathbb{D}H_{\varphi(S_t)}(D\varphi X) &= \lim_{r\to 0}\frac{H(\varphi(S_{t+r})) - H(\varphi(S_t))}{r}\\ &:= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} H(\varphi(S_{t+r}))\\ &:= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} H(\varphi\circ\phi_{t+r}(S)).\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\mathbb{D}H_{S_t}(\varphi_* X) = \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} H(\varphi\circ\phi_{t+r}\circ\varphi^{-1}(S)).$$

Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned}H(\xi_t(S)) - H(S) &= \int_0^t \frac{d}{ds}H(\xi_s(S))ds\\ &= \int_0^t \mathbb{D}H_{\xi_s(S)}(X+Y)ds.\end{aligned}$$

Agora se $\zeta_s = \phi_{t+sr}\circ\psi_{t+r}$, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\zeta_s &= \frac{d}{ds}(\phi_{t+sr}\circ\psi_{t+r})\\ &= \frac{d}{ds}\phi_{t+sr}(\psi_{t+r}) + d\phi_{t+sr}\frac{d}{ds}\psi_{t+r}\\ &= X(\phi_{t+sr}(\psi_{t+r}))\frac{d}{ds}(t+sr) + 0\\ &= rX(\phi_{t+sr}\circ\psi_{t+r})\\ &= rX(\zeta_s).\end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema Fundamental do cálculo obtemos

$$\begin{aligned} H(\phi_{t+r} \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S)) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} H(\zeta_s(S)) ds \\ &= r \int_0^1 \mathbb{D}H_{\phi_{t+sr} \circ \psi_{t+r}(S)}(X) ds, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{H(\phi_{t+r} \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S))}{r} &= \lim_{r \to 0} \int_0^1 \mathbb{D}H_{\phi_{t+sr} \circ \psi_{t+r}(S)}(X) ds \\ &= \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_t(S)}(X). \end{aligned}$$

De forma similar, como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \phi_t \circ \psi_{t+r}(x) &= \frac{d}{dr} \phi_t(\psi_{t+r}(x)) + D\phi_t \frac{d}{dr} \psi_{t+r}(x) \\ &= D\phi_t(\phi^{-1}_{(t+r)*} Y)(\psi_{t+r}(x)) \\ &= D\phi_t(\phi^{-1}_{(t+r)*} Y) \circ \phi_t^{-1}(\phi_t \circ \psi_{t+r}(x)) \\ &= (\phi_{t*}(\phi^{-1}_{(t+r)*} Y))(\phi_t \circ \psi_{t+r}(x)) \\ &= (\phi^{-1}_{r*} Y)(\phi_t \circ \psi_{t+r}(x)), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_t(S)) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} H(\phi_t \circ \psi_{t+sr}(S)) ds \\ &= r \int_0^1 \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_{t+sr}(S)}(\phi^{-1}_{sr*} Y) ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_t(S))}{r} &= \lim_{r \to 0} \int_0^1 \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_{t+r}(S)}(\phi^{-1}_{sr*} Y) ds \\ &= \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_t(S)}(Y). \end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}H_{\xi_t(S)}(X + Y) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} H(\xi_{t+r}(S)) \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{H(\xi_{t+r}(S)) - H(\xi_t(S))}{r} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{H(\phi_{t+r} \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S))}{r} \\ &\quad + \lim_{r \to 0} \frac{H(\phi_t \circ \psi_{t+r}(S)) - H(\phi_t \circ \psi_t(S))}{r} \\ &= \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_t(S)}(X) + \mathbb{D}H_{\phi_t \circ \psi_t(S)}(Y) \\ &= \mathbb{D}H_{\xi_t(S)}(X) + \mathbb{D}H_{\xi_t(S)}(Y). \end{aligned}$$

De onde

$$\begin{aligned}H(\xi_t(S)) - H(S) &= \int_0^t \mathbb{D}H_{\xi_s(S)}(X+Y)ds \\ &= \int_0^t (\mathbb{D}H_{\xi_s(S)}(X) + \mathbb{D}H_{\xi_s(S)}(Y))ds.\end{aligned}$$

A partir da definição da derivada de Frechét, dada $S \in \mathcal{S}(M)$ e $X \in TS \subset TM$ temos

$$\begin{aligned}\mathbb{D}H_S(X) &= \lim_{t\to 0} \frac{H(\phi_t(S)) - H(S)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{H(S) - H(S)}{t} \\ &= 0\end{aligned}$$

De forma similar podemos mostrar que quando a ação subjacente é dirigida por um sistema dinâmico associado a uma equação da forma

$$\begin{aligned}d\xi_{t,\epsilon} &= \sum_{i=1}^{r} X_i(\xi_{t,\epsilon})dB^i_{t,\epsilon} + X_0(\xi_{t,\epsilon})dt \\ &= \left[\sum_{i=1}^{r} X_i(\xi_{t,\epsilon})\frac{dB^i_{t,\epsilon}}{dt} + X_0(\xi_{t,\epsilon})\right]dt \\ \phi_{0,\epsilon} &= Id,\end{aligned} \tag{1.5}$$

onde X_i são campos vetoriais em M, e $B^i_{t,\epsilon}$ são funções a valores reais que dependem de um parâmetro real positivo ϵ. Para tais sistemas temos

$$\begin{aligned}H(\phi_{t,\epsilon}(S)) - H(S) = &\sum_{i=1}^{r}\int_0^t \mathbb{D}H(\phi_{s,\epsilon}(S))(X_i)dB^i_{s,\epsilon} \\ &+ \int_0^t \mathbb{D}H(\phi_{s,\epsilon}(S))(X_0)ds,\end{aligned} \tag{1.6}$$

onde as derivadas que ocorrem na igualdade (1.6) são definidas através dos fluxos gerados pelos campos vetoriais X_i.

2 Cálculo Estocástico

Neste capítulo, faremos uma revisão rápida das ferramentas básicas do cálculo estocástico. Primeiramente definimos alguns conceitos básicos da teoria de probabilidade, logo depois começamos com uma revisão da teoria básica das equações diferenciais estocásticas do tipo Itô em variedades que são impulsionadas por semimartingales contínuos. Finalmente estudamos condições para existência de um fluxo estocástico, solução da equação da equação diferencial estocástica correspondente. As referências principais utilizadas neste capítulo são (CALIN, 2012), (KUO, 2006), (HSU, 2002), (KUNITA, 1997), (ELWORTHY, 1988).

2.1 Conceitos básicos

Começaremos com as definições básicas da teoria do cálculo estocástico.

Definição 2.1. *Um espaço de probabilidade é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *onde* Ω *é um conjunto,* $\mathcal{F}$ *é uma* σ*-álgebra de conjuntos em* Ω *e* $\mathbb{P}$ *é uma medida de probabilidade definida em* $\mathcal{F}$ *tal que* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definição 2.2. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* (E, τ) *um espaço topológico, uma função* $X : \Omega \to E$ *é uma variável aleatória, se for mensurável, isto é, se*

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F},$$

para todo $A \in \tau$.

Definição 2.3. *Uma variável aleatória* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *é chamada integrável se*

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x| \, p(x) dx < \infty,$$

onde $p(x)$ *denota a função densidade de probabilidade de* X.

Definição 2.4. *A esperança de uma variável aleatória integrável* X *é definida por*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx.$$

Proposição 2.1. *O operador esperança* $\mathbb{E}$ *é linear, isto é, para qualquer variável aleatória integrável* X *e* Y

1. $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$*;*
2. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Demonstração. Segue do fato de que a integral é um operador linear. □

Definição 2.5. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade. Sejam* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma variável aleatória* $\mathcal{F}$*-mensurável e* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *uma* σ*-álgebra. A esperança condicional* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *de* X *com relação a* $\mathcal{G}$ *é definida como sendo a única* $(\mathbb{P} - q.t.p.)$ *variável aleatória tal que*

1. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *é* $\mathcal{G}$*-mensurável;*
2. $\displaystyle\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}$, *para todo* $A \in \mathcal{G}$.

Observação 2.1. *A existência da esperança condicional é consequência do Teorema de Radon-Nikodym*

A esperança condicional satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.2. *Sejam* X *e* Y *duas variável aleatórias sobre o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *temos*

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$, *isto é, toda esperança condicional tem a mesma média, que é a média de* X*;*

2. *Linearidade:*

$$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}], \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

3. *Fatorando a parte mensurável:*

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}],$$

se X *é* $\mathcal{G}$*-mensurável. Em particular* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$*;*

4. *Propriedade da torre:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}],$$

se $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$*;*

5. *Postividade:*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geqslant 0,$$

se $X \geqslant 0$*;*

6. *Esperança condicional de uma constante é uma constante:*

$$\mathbb{E}[c|\mathcal{G}] = c;$$

7. *Uma condição independente:*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X],$$

se X *é independente de* $\mathcal{G}$.

Demonstração. Ver (CALIN, 2012) p.18. □

Definição 2.6. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade. Um processo estocástico é uma função mensurável* $X(t, \omega)$ *definida sobre o espaço produto* $[0, \infty) \times \Omega$*. Em particular,*

a) para cada t*,* $X(t, \cdot\,)$ *é uma variável aleatória,*

b) para cada ω*,* $X(\cdot\,, \omega)$ *é uma função mensurável.*

Por conveniência, a variável aleatória $X(t, \cdot\,)$ *será escrita como* $X(t)$ *ou* X_t*. Assim um processo estocástico* $X(t, \omega)$ *também pode ser expressado como* $X(t)(\omega)$ *ou simplesmente como* $X(t)$ *ou* X_t*.*

Definição 2.7. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* T *um intervalo em* $\mathbb{R}$ *ou um conjunto de inteiros positivos. Uma filtração sobre* T *é uma família crescente* $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ *de* σ*-álgebras tais que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *para* $t < s$*. Um processo estocástico* X_t*,* $t \in T$*, é adaptado a* $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ *se para cada* t*, a variável aleatória* X_t *é* $\mathcal{F}_t$*-mensurável.*

Observação 2.2. *Uma* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$ *é chamada completa se* $A \in \mathcal{F}$ *e* $\mathbb{P}(A) = 0$ *implica que* $B \in \mathcal{F}$ *para qualquer subconjunto* B *de* A*. Assumiremos que toda* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_t$ *é completa.*

Definição 2.8. *Seja* X_t *um processo estocástico adaptado a uma filtração* $\{\mathcal{F}_t\}$ *e* $\mathbb{E}\,|X_t| < \infty$ *para todo* $t \in T$*. Então* X_t *é chamada um martingale com respeito a* $\{\mathcal{F}_t\}$ *se para qualquer* $s \leqslant t$ *em* T*,*

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad q.s.$$

Quando a filtração não é explicitamente especificada, estamos assumindo que a filtração $\mathcal{F}$ é aquela dada por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; s \leqslant t\}$.

Definição 2.9. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado. Uma função* $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *é dito um tempo de parada se verifica:*

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,$$

para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. Ou equivalentemente que*

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Definição 2.10. *Um processo estocástico* $B(t, \omega)$ *a valores em* $\mathbb{R}$ *é chamado um movimento Browniano se satisfaz as seguintes condições,*

i) $\mathbb{P}\{\omega; B(0, \omega) = 0\} = 1$*,*

ii) B_t *tem incrementos independentes,*

iii) o processo B_t *é contínuo em* t*,* *iv)* $B_t - B_s$ *é normalmente distribuído com média* 0 *e variância* $t - s$*, para* $s < t$*.*

Generalizando isto para o caso n dimensional, dizemos que um processo $B = (B^1, \dots, B^n)$ é um movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$, se cada B^i constitui um movimento Browniano em $\mathbb{R}$ e as σ-álgebras geradas por cada B^i são independentes. Para mais detalhes sobre a existência e propriedades do movimento Browniano ver (KUO, 2006) p.23.

Definição 2.11. *Um processo estocástico definido sobre a filtração* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ *se denomina um semimartingale se o podemos decompor na forma:*

$$X_t = M_t + A_t,$$

onde M *é uma martingale local e* A *é um processo adaptado do tipo càdlàg que localmente é de variação finita.*

A seguir definimos a integral de Itô para um processo estocástico adaptado e contínuo.

Definição 2.12. *Sejam* Z *um semimartingale. Para cada* X *processo estocástico adaptado contínuo real definimos a integral de Itô por*

$$\int_0^t X dZ = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} (X_{t_i})(Z_{t_{i+1} \wedge t} - Z_{t_i \wedge t}),$$

com $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots\}$ *uma partição de* $[0, \infty)$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$*,* $\|\pi\| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ *e* $t_i \wedge t := \min\{t, t_i\}$*.*
A integral de Stratonovich é definida como

$$\int_0^t X \circ dZ = \int_0^t X dZ + \frac{1}{2}[X, Z]_t,$$

onde

$$[X, Y] = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} (X_{t \wedge t_i} - X_{t \wedge t_{i+1}})(Z_{t_{i+1} \wedge t} - Z_{t_i \wedge t}).$$

É possível ver que as integrais de Itô e Stratonovich assim definidas é independente da sequência de partições π e que, em particular, a integral de Itô não satisfaz o teorema fundamental do cálculo. No seu lugar temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1 (Fórmula de Itô)**.** *Seja* $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ *um semimartingale contínuo. Se* $F(X^1, \dots, X^d)$ *é uma função* C^2*, então* $F(X_t)$ *é um semimartingale contínuo e satisfaz a fórmula*

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d[X^i, X^j]_s.$$

Além disso se F *é uma função* C^3*, então*

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i.$$

Demonstração. Segue-se do teorema 2.3.11 do livro de (KUNITA, 1997). □

Observação 2.3. *No caso em que X_t é um movimento Browniano de dimensão m temos que a fórmula de Itô acima se reduz a*

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(X_s) ds,$$

pois $d[X^i, X^j] = dX^i dX^j = \delta_{ij} ds$.

2.2 Equações diferenciais estocásticas

Nesta seção vamos dar as ideias básicas de equações diferenciais estocásticas e do seu fluxo solução. Faremos uma revisão rápida do tópico e focada no que é relevante para o nosso trabalho. Caso o leitor deseje ter uma visão mais aprofundada do tópico recomendamos a consulta dos livros (IKEDA; WATANABE, 2014), (HSU, 2002), (ELWORTHY, 1982).

Para esta seção fixamos a seguinte notação:

- (M, g) uma variedade Riemanniana conexa de classe C^∞;
- $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado;
- $(B_t^1, \ldots, B_t^m)$ o movimento Browniano m-dimensional em $\mathbb{R}^m$;
- τ um $\mathcal{F}_*$-tempo de parada.

Definimos também o conceito de semimartingale em variedades diferenciáveis.

Definição 2.13. *Um processo contínuo X com valores em M definido sobre $[0, \tau)$ é chamado um semimartingale com valores em M se $f(X)$ é um semimartingale com valor real sobre $[0, \tau)$ para todo $f \in C^\infty(M)$.*

Considere sobre M campos de vetores autônomos $X_0(t), X_1(t), \ldots, X_m(t)$ com parâmetro $t \in [0, \tau]$.

Definição 2.14. *Uma equação diferencial estocástica no sentido Stratonovich sobre M é uma equação da forma*

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \sum_{i=1}^{m} X_i(\xi_t) \circ dB_t^i + X_0(\xi_t) dt \\ \xi_0 &= x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Um processo estocástico ξ_t a valores em M é solução da equação (2.1) se para toda $f \in C^2(M)$, temos

$$\begin{aligned} f(\xi_t) &= f(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t X_k(f)(\xi_s) \circ dB_s^i + \int_0^t X_0(f)(\xi_s) ds \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t X_k(f)(\xi_s) dB_s^i + \int_0^t \Big(X_0(f)(\xi_s) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} X_k^2 f(\xi_s) \Big) ds, \end{aligned}$$

onde $X_i(f)$ representa as derivadas de f na direção dos campos X_i.

Observação 2.4. *Observamos que*

$$\int_0^t \underbrace{X_k(f)(\xi_s)}_{\text{é um processo a valores em } \mathbb{R}} dB_s^i$$

e portanto, podemos utilizar a definição da integral estocástica apresentada na seção anterior.

Um critério que garante a existência de solução e do fluxo solução é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Se $\{X_1, \ldots, X_m\}$ são campos de vetores sobre M, B_t um movimento Browniano a valores em $\mathbb{R}^l$, e ξ_0 uma variável aleatória que toma valores em M. Então, existe uma única solução da equação diferencial estocástica (2.1) até um tempo de explosão $e(x)$.*

Demonstração. Ver (HSU, 2002) p.13. □

Observamos que a solução pode ter um tempo de explosão finito. Caso a variedade M seja compacta, pode ser visto que este não é o caso e que sempre $e(x) = \infty$ ver (ELWORTHY, 1982), (HSU, 2002) ou (IKEDA; WATANABE, 2014). Porém no caso não compacto pode suceder que $e(x) < \infty$. Um critério sobre quando isto não acontece pode ser encontrado no livro de (ELWORTHY, 1982), Teorema 6A da página 239.

Neste trabalho vamos considerar que as equações diferenciais estocásticas que nos interessam satisfazem $e(x) = \infty$.

2.3 Aproximação de Wong Sakai

Construída a teoria básica de equações diferenciais estocásticas e sua existência de fluxo solução, vamos agora ver que é possível aproximar fluxos estocásticos por fluxos determinísticos particulares. Isto é o conteúdo do teorema de aproximação de Wong-Sakai cujas ideias básicas estudamos a seguir.
Começamos definindo o espaço de Wiener para depois obter uma aproximação do movimento Browniano por meio de interpolação linear.

Definição 2.15. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de Wiener de dimensão r com a σ-álgebra usual e medida de Wiener. Ou seja, escrevemos*

$$\Omega = \mathcal{W}^r = \{\omega \in C([0,\infty), \mathbb{R}^r) : \omega(0) = 0\},$$

e assuma que $\mathbb{P}$ é uma medida de Wiener em $\mathcal{W}^r$.

Agora veremos algumas condições de regularidade para o fluxo solução, note que si a variedade é compacta podemos deduzir por mergulhos a existência de um fluxo de difeomorfismo $\phi_t(\cdot\,,\omega) : M \to M$ contínuos em t na topologia C^∞, no caso em que a variedade não seja compacta não sabemos.

Teorema 2.3. *Seja $\phi(t,x,\omega)$ a solução de (2.1) sobre o espaço de Wiener $(\mathcal{W}^r, \mathbb{P})$. Então temos uma modificação de $\phi(t,x,\omega)$, a qual pode ser escolhida tal que a aplicação $x \to \phi(t,x,\omega)$ seja um difeomorfismo de $\mathbb{R}^d$ q.s., para cada $t \in [0,\infty)$.*
Assim temos uma família de difeomorfismos a um parâmetro $\phi_t(\omega) : x \to \phi(t,x,\omega)$ para $t \in [0,\infty)$. Claramente $X_0(\omega)$ é a identidade e $X_s(\theta_t\omega) \circ X_t(\omega) = X_{t+s}(\omega)$ para quase todo ω.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada no trabalho de (IKEDA; WATANABE, 2014) p.251. □

Para o caso de uma variedade M em geral a solução ϕ pode ser considerada como uma família de funções $\phi_t : x \to \phi(t,x,\omega)$.

Teorema 2.4. *O fluxo $\phi(t,x,\omega)$ tem uma modificação, que é denotada por $\phi(t,x,\omega)$ novamente, tal que a aplicação $\phi_t(\omega) : x \to \phi(t,x,\omega)$ é C^∞ no sentido que $x \to f(\phi(t,x,\omega))$ é C^∞ para todo $f : M \to \mathbb{R}$ e todo $t \in [0,\infty)$, q.s.. Além disso, para cada $x \in M$ e $t \in [0,\infty)$, a diferencial $\phi_*(t,x,\omega)$ da aplicação $x \to \phi(t,x,\omega)$;*

$$\phi_*(t,x,\omega) : T_x(M) \to T_\phi(M),$$

é um isomorfismo q.s. sobre o conjunto $\{\omega; \phi(t,x,\omega) \in M\}$.

Demonstração. Ver (IKEDA; WATANABE, 2014) p.267. □

Observação 2.5. *Neste trabalho vamos assumir que a equação diferencial estocástica*

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^{r} X_i(\xi_t) \circ dB_t^i + X_0(\xi_t)dt$$
$$\xi_0 = x.$$

admite fluxo solução para todo $t \geqslant 0$.

Seja B_t o movimento Browniano em $\mathbb{R}^r$ definido com respeito ao espaço de probabilidade $(\mathcal{W}^r, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Denotamos $B_s(\omega) = \omega(s)$ e construímos uma aproximação ao processo B_s no intervalo $[0,t]$ utilizando partições de $[0,t]$ e interpolação linear. A construção é bem conhecida.
Dado $\omega \in \mathcal{W}^r$, seja $\{t_j\}_{j=0}^m$ uma partição de $[0,t]$ e definimos

$$\alpha_m(s) = \max\{t_j : s \geqslant t_j\}$$
$$\beta_m(s) = \min\{t_j : s < t_j\}.$$

Consideramos

$$B^j_{s,m} = B^j_{\alpha_m(s)} + \frac{s - \alpha_m(s)}{\beta_m(s) - \alpha_m(s)}[B^j_{\beta_m(s)} - B^j_{\alpha_m(s)}]. \tag{2.2}$$

Seja $\phi_{t,m}(\omega)$ (ver (MALLIAVIN, (1998)) p.206) a solução da equação diferencial dada por

$$\begin{aligned} d\phi_{t,m}(\omega) &= \sum_{i=1}^{r} X_i(\phi_{t,m}(\omega))dB^i_{t,m}(\omega) + X_0(\phi_{t,m}(\omega))dt \\ \phi_{0,m}(\omega) &= Id. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dada uma subvariedade $N \in \mathcal{S}(M)$, escrevemos $N_{t,m} = \phi_{t,m}(N)$.

A seguir enunciamos o resultado principal desta seção, o teorema de aproximação de Wong-Sakai, o qual é um resultado muito importante da análise estocástica e sera de utilidade nos próximos capítulos, sua prova pode ser encontrada nos trabalhos de (ver (WONG; ZAKAI, 1969), (MALLIAVIN, (1998)), (KUNITA, 1997)). A grosso modo o resultado diz que podemos aproximar a solução da equação diferencial estocástica (2.1) pelo resultado da (2.3).

Teorema 2.5. *Suponha que X_i, $0 \leqslant i \leqslant r$, são campos vetoriais suaves em M com derivadas limitadas de todas as ordens. Seja $\{t_j\}_{j=0}^m$ uma partição de $[0,t]$ que se torna um refinamento quando $m \to \infty$. Seja $(\mathcal{W}^r, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço Wiener r-dimensional com medida Wiener, e para $\omega \in \Omega$, seja $\phi_{t,m}$ o fluxo em $\mathcal{S}(M)$ definido como a solução do sistema de EDO's dada por (2.3). Então, $\phi_{t,m}(x)$ converge uniformemente para $\phi_t(x)$ $\mathbb{P}$-quase sempre, assim como todas as derivadas em x em cada subconjunto compacto de $[0,t] \times M$. Além disso, escrevendo $\phi_t(x) = \lim_{m\to\infty} \phi_{t,m}(x)$, temos que ϕ_t resolve o sistema (2.1). Isto é,*

$$\begin{aligned} d\phi_t &= \sum_{i=1}^{r} X_i(\phi_t) \circ dB^i_t + X_0(\phi_t)dt \\ \phi_0 &= Id, \text{ q.s.}, \end{aligned}$$

onde $(B^1_t, B^2_t, \ldots, B^r_t)$ é o movimento Browniano r-dimensional.

2.4 Ação do fluxo estocástico no fibrado tangente

Dado o fluxo estocástico $\phi : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times M \times \Omega \to M$ o fluxo solução da EDE 2.1, por ser este um fluxo de difeomorfismos, podemos construir um novo processo no espaço tangente v_t como segue: dado $v \in T_xM$ definimos

$$v_t = \tilde{\phi}(t,(x,v),\omega) = d\phi(t,x,\omega)\cdot v = \phi_{t*}(x,\omega)v.$$

Escrevemos, por simplicidade,

$$v_t = \phi_{t*}v : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \Omega \to T_{\phi_t}M.$$

Seguindo o trabalho de (ELWORTHY, 1988), podemos ver que, de fato, o processo v_t é solução de uma equação diferencial estocástica sobre TM. Para isto, começamos lembrando uma propriedade da derivada covariante.

Considere os intervalos I e J de $\mathbb{R}$ e um mapa C^1 por partes $u : I \times J \to M$, existem campos de vetores $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ sobre U (isto é a derivada com respeito à primeira e segunda variável respectivamente). Tomando coordenadas normais centradas em um ponto $u(s,t)$ temos que

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Se $\xi_t : M \times \Omega \to M$, $t \geqslant 0$, é um fluxo suave associado ao campo vetorial Y, $v \in T_xM$, escolhemos $\sigma : [-1,1] \to M$ com $\sigma(0) = x$ e $\sigma'(0) = v$. Então

$$v_t = \xi_{t*}v = \frac{\partial}{\partial s}\xi_t(\sigma(s)), \quad q.s..$$

Portanto, por (2.4) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial t}v_t &= \frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\xi_t(\sigma(s)) \\
&= \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\xi_t(\sigma(s)) \\
&= \frac{D}{\partial s}Y(\xi_t(\sigma(s))),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{D}{\partial t}v_t = \nabla_{v_t}Y(\xi_t(\sigma(s))).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{D^2}{\partial t^2}v_t &= \frac{D}{\partial t}(\nabla Y(v_t)) \\
&= \nabla^2(Y(Y,v_t)) + \nabla Y\left(\frac{D}{\partial t}v_t\right) \\
&= \nabla^2 Y(Y,v_t) + \nabla_{\nabla_{v_t}Y}Y,
\end{aligned}$$

onde

$$\nabla^2 Y(v,w) = \nabla_v \nabla_w Y - \nabla_{\nabla_v w} Y.$$

Com isto, podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser achada no livro de (ELWORTHY, 1988).

Teorema 2.6. *Considere o fluxo estocástico ξ_t associado à equação (2.1) e o processo*

$$v_t = \xi_{t*} v : \Omega \to T_{\xi_t} M,$$

então v_t satisfaz a EDE

$$Dv_t = \nabla X_0(v_t)dt + \sum_{k=1}^{m} \nabla X_i(v_t) \circ dB_t^i.$$

Também no trabalho de (ELWORTHY, 1988) podemos encontrar uma fórmula de Itô para v_t que é a seguinte: se $\theta : TM \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ temos que

$$\begin{aligned}
\theta_{x_t}(v_t) &= \theta_x(v) + \int_0^t \frac{d}{dr}\theta_{x_s}(\delta S^0(r,v_s))\Big|_{r=0} dt + \sum_{k=0}^{m} \int_0^t \frac{d}{dr}\theta_{x_s}(\delta S^i(r,v_s))\Big|_{r=0} \circ dB_s^i \\
&= \theta_x(v) + \sum_{k=0}^{m} \int_0^t \frac{d}{dr}\theta_{x_s}(\delta S^i(r,v_s))\Big|_{r=0} dB_s^i \\
&+ \int_0^t \left[\frac{d}{dr}\theta_{x_s}(\delta S^0(r,v_s))\Big|_{r=0} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{d^2}{dr^2}\theta_{x_s}(\delta S^i(r,v_s))\Big|_{r=0} \right) \right] ds,
\end{aligned}$$

onde $S^i(t,x)$ é o fluxo do campo vetorial X_i sobre M e

$$\delta S^i(t,v) = dS^i(t,x)v,$$

é o fluxo de

$$\frac{D}{\partial t}\delta S(t,v) = \nabla Y(\delta S(t,v)) = \nabla_{\delta S(t,v)} Y.$$

A prova disto pode ser achada na proposição 9E de (ELWORTHY, 1982).

Para uso posterior vamos encontrar uma equação para $\theta(v_t) = |v_t|^2$ seguindo as contas do livro de (ELWORTHY, 1988). Para isto, começamos utilizando a fórmula acima e calculando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\delta S(t,v)|^2 &= \frac{d}{dt}\langle \delta S(t,v), \delta S(t,v) \rangle \\
&= 2\langle \delta S(t,v), \nabla Y(\delta S(t,v)) \rangle \\
&= 2\langle \delta S(t,v), \nabla_{\delta S(t,v)} Y \rangle,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}|\delta S(t,v)|^2 &= 2\frac{d}{dt}\langle \delta S(t,v), \nabla_{\delta S(t,v)} Y \rangle \\
&= 2\Big[\langle \nabla_{\delta S(t,v)} Y, \nabla_{\delta S(t,v)} Y \rangle + \langle \delta S(t,v), \nabla Y(\nabla Y(\delta S(t,v))) \rangle \\
&+ \langle \delta S(t,v), \nabla^2(Y, \delta S(t,v)) \rangle \Big].
\end{aligned}$$

Assim utilizando isto com a EDE (2.1) temos que

$$\begin{aligned}
dg(v_t, v_t)_{\xi_t} &= 2[g(\nabla_{v_t} X_0, v_t)_{\xi_t}]dt + 2\sum_i^m [g(\nabla_{v_t} X_i, v_t)_{\xi_t}] \circ dB_t^i \\
&= 2[g(\nabla_{v_t} X_0, v_t)_{\xi_t}]dt + 2\sum_i^m [g(\nabla_{v_t} X_i, v_t)_{\xi_t}]dB_t^i + \frac{1}{2}\sum_i \frac{d}{dt}[g(\nabla_{v_t} X_i, v_t)_{\xi_t}]dt \\
&= 2[g(\nabla_{v_t} X_0, v_t)_{\xi_t}]dt + 2\sum_i^m [g(\nabla_{v_t} X_i, v_t)_{\xi_t}]dB_t^i + \sum_{i=1}^m \Big\{ g(\nabla_{v_t} X_i, \nabla_{v_t} X_i) \\
&+ g(v_t, \nabla_{\nabla_{v_t} X_i} X_i) + g(v_t, \nabla^2 X_i(X_i, v_t)) \Big\} dt.
\end{aligned}$$

2.5 Teorema de Girsanov

Finalizamos o capítulo com outro resultado que será de utilidade nas contas de nosso trabalho: O Teorema de Girsanov. Este teorema descreve como a dinâmica de processos estocásticos muda quando a medida original é alterada para uma medida de probabilidade equivalente.

Primeiramente consideramos $T > 0$ e $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ funções mensurável satisfazendo

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leqslant C(1+|x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T],$$

para alguma constante C, (onde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) e tal que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant D\,|x-y|\,; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],$$

para alguma constante D. Denotamos por $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t^{(m)}$ a σ-álgebra gerada por $\{B_s; s \leqslant t\}$, B_s é um movimento Browniano m-dimensional e $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ a classe de processos $u(t,\omega) \in \mathbb{R}$ satisfazendo algumas condições ver (ØKSENDAL, 2003) p.35.
Definimos

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t u(s,\omega) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega) ds \right); \quad t \leqslant T,$$

tal que

$$d\mathbb{Q}(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \ \text{ sobre } \ \mathcal{F}_T^{(m)}.$$

e

$$\tilde{B}_t := \int_0^t u(s,\omega) ds + B_t; \quad t \leqslant T,$$

Finalmente formulamos o teorema de Girsanov.

Teorema 2.7 (Teorema de Girsanov)**.** *Seja $X(t) = X^*(t) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(t) = Y^*(t) \in \mathbb{R}^n$ um processo de difusão de Itô e um processo de Itô respectivamente da forma*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t; \quad t \leqslant T, \quad X(0) = x,$$

$$dY_t = [\gamma(t,\omega) + b(Y_t)]dt + \sigma(Y_t)dB_t; \quad t \leqslant T, \quad Y(0) = x,$$

onde as funções $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ *satisfazem as condições dadas no inicio da seção e* $\gamma(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Suponha que existe um processo* $u(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^m$ *tal que*

$$\sigma(Y_t)u(t,\omega) = \gamma(t,\omega),$$

e assuma que $u(t,\omega)$ *satisfaz a condição de Novikov*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty.$$

Defina M_t, $\mathbb{Q}$ *e* $\tilde{B}_t$ *como acima. Então*

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\tilde{B}_t.$$

Portanto a $\mathbb{Q}$*-lei de* $Y^*(t)$ *é a mesma que a* $\mathbb{P}$*-lei de* $X^*(t)$, $t \leqslant T$, *isto é* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_t]$.

Demonstração. Ver (ØKSENDAL, 2003) p.158. □

3 Fórmula de Itô para Ações de Fluxos Estocásticos em Variedades de Fréchet

Neste capítulo, vamos construir uma fórmula de Itô para um funcional definido no espaço de Fréchet $\mathcal{S}(M)$ e para um processo estocástico dado pela ação do grupo de difeomorfismos sobre algum espaço ou variedade de Fréchet. As contas seguem de perto as ideias apresentadas no trabalho de (KINATEDER; MCDONALD, 2002) sendo adaptadas ao ambiente em que estamos trabalhando.

Seja ϕ_t a solução da equação diferencial estocástica no sentido Stratonovich, dada por

$$\begin{aligned} d\phi_t &= \sum_{i=1}^{r} X_i(\phi_t) \circ dB_t^i + X_0(\phi_t)dt \\ \phi_0 &= Id, \text{ q.s.}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $X_i, 0 \leqslant i \leqslant r$ são campos vetoriais C^∞ em M com derivadas limitadas de toda ordem, e que satisfazem a condição de Lipschitz. Então, as trajetórias de um ponto, $\phi_t(x)$, representam os caminhos de um processo de difusão com valores em M. Logo a solução ϕ_t define então um processo a valores no grupo de difeomorfismos de M. Este processo atua pela restrição na variedade de Frèchet $\mathcal{S}(M)$, como vimos nos capítulos anteriores.

Definimos o processo estocástico correspondente a ação induzida pela composição sobre $\mathcal{S}(M)$ por $N_t = \phi_t(N)$, onde N é uma subvariedade compacta. E vemos que:

a) N_t é adaptado à filtração $\mathcal{F}_t$;

b) $N_t(\omega) : [0, \infty) \times \mathcal{S}(M) \to \mathcal{S}(M)$, é continua $\mathbb{P}$-quase sempre em t;

c) $N_0(\omega) = N$, $\mathbb{P}$-quase sempre.

Definição 3.1. ***(variação aceitável)*** *Assuma que $H \colon \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ é suave. Dizemos que H admite uma variação aceitável ϕ_t se para cada $N \in \mathcal{S}(M)$, e todo i, $0 \leqslant i \leqslant r$, a covariação quadrática (processo de suporte) de $\mathbb{D}H(N_s)(X_i)$ e o movimento Browniano B^i (isto é, $[\mathbb{D}H(N)(X_i), B^i]$) existe.*

Observação 3.1. *A definição anterior é fundamental para poder definir a integral de Itô, pois vai permitir que $[\mathbb{D}H(N)(X_i), B^i]$ exista e possa ser integrado.*

Para este caso temos o seguinte teorema que generaliza de certa forma a integral estocástica para um caso particular de espaços de Fréchet.

Teorema 3.1. *Suponha que ϕ_t é um fluxo estocástico de difeomorfismos satisfazendo a equação (3.1) onde X_i, $0 \leqslant i \leqslant r$ são campos vetoriais suaves em M com derivada limitada de toda ordem, e que satisfazem a condição de Lipschitz. Assuma que $B_s = (B_s^1, B_s^2, \ldots, B_s^r)$ é o movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $H\colon \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^2 o qual admite uma variação aceitável ϕ_t (Definição 3.1). Considere $N_s = \phi_s(N)$ com $N \in \mathcal{S}(M)$. Seja η_t^i o fluxo associado a X^i e definimos*

$$\mathbb{D}H(N_s)(X_i) = \frac{d}{d\rho}\bigg|_{\rho=0} H(\eta_\rho^i(N_s)),$$

ver (1.2). Então,

$$H(N_t) - H(N) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \mathbb{D}H(N_s)(X_i) \circ dB_s^i + \int_0^t \mathbb{D}H(N_s)(X_0)ds, \tag{3.2}$$

$\mathbb{P}$-quase sempre, onde as integrais que ocorrem na soma são de tipo Stratonovich.

No artigo de (KINATEDER; MCDONALD, 2002) encontramos o caso em que a variedade de Fréchet é dada pelo conjunto dos domínios suaves em $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho generalizamos para o caso de subvariedades compactas quaisquer. Para provar este Teorema vamos utilizar as ideias de (WONG; ZAKAI, 1969) feitas no capítulo anterior e os seguintes lemas.

Lema 3.1. *Suponha que $\{t_j\}_{j=1}^m$ é uma partição de $[0, T]$ que se torna um refinamento quando $m \to \infty$. Assuma que $\phi_{t,m}$ é a solução do sistema (2.3) e que ϕ_t é a solução do sistema (3.1). Seja $N \in \mathcal{S}(M)$ e H um funcional suave. Então,*

$$H(\phi_t(N)) = \lim_{m\to\infty} H(\phi_{t,m}(N)) \quad \mathbb{P}\text{-quase sempre.}$$

Demonstração. Seja N uma subvariedade compacta fixa. Pelo Teorema 2.5 temos que

$$|\phi_{t,m}(x) - \phi_t(x)| \to 0, \quad \text{q.s.}$$

uniformemente para $(t, x) \in [0, T] \times N$. Assim, para m grande, temos que existe $V_{\phi_t(N)}$ vizinhança tubular de $\phi_t(N)$ tal que $\phi_{t,m}(N) \subset V_{\phi_t(N)}$. Logo, por (1.3), existem funções $f_1^m, f_2^m, \ldots, f_N^m \in C^\infty(\phi_t(N))$ tal que

$$\phi_{t,m}(x) = \exp_y(f_1^m(y)X_1(y) + \cdots + f_N^m(y)X_N(y)),$$

onde $y = \pi(\phi_{t,m}(x))$ e π é a projeção ao longo das fibras normais. Como $\phi_{t,m}(x)$ converge uniformemente para $\phi_t(x) = \exp_{\phi_t(x)} 0$, então obtemos que $f_i^m \to 0$ para todo $i = 1, \ldots, N$ na topologia do espaço de Fréchet $C^\infty(\phi_t(N))$. Portanto, $\phi_{t,m}(N)$ converge a $\phi_t(N)$ na topologia de $\mathcal{S}(M)$. Visto que H é suave temos

$$H(\phi_t(N)) = \lim_{m\to\infty} H(\phi_{t,m}(N)) \quad \mathbb{P}\text{-quase sempre,}$$

como queríamos mostrar. $\square$

Pelo visto acima utilizando a equação (1.6), para H suave, $\omega \in \mathcal{W}^r$ e todo m, obtemos

$$H(N_{t,m}) - H(N) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \mathbb{D}H(N_{s,m})(X_i)dB^i_{s,m} + \int_0^t \mathbb{D}H(N_{s,m})(X_0)ds. \tag{3.3}$$

Assim, para provar o Teorema 3.1, precisamos aplicar o Lema 3.1 no lado esquerdo da igualdade (3.3) e, em seguida, analisar o lado direito de (3.3).

Vamos agora determinar as condições para que os funcionais nas integrais no lado direito de (3.3) sejam bem comportados. Para isso, consideramos $H : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ um funcional suave e denotamos

$$F_i(N_t) = \mathbb{D}H(N_t)(X_i). \tag{3.4}$$

O processo a valores reais $F_i(N_t)$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é contínuo, $\mathcal{F}_t$-adaptado e

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T |F_i(N_t)(\omega,t)|^2 \, dt < \infty\right] = 1,$$

portanto, integrais de Itô do movimento Browniano para os processos dados por (3.4) estão bem definidos.

Agora vamos estudar a convergência do primeiro termo no lado direito de (3.3) para obter o caso especial $r = 1$ do Teorema 3.1 no caso de integrandos bem comportados.

Lema 3.2. *Seja $\{t_j\}_{j=1}^m$ uma partição de $[0,t]$ que se torna um refinamento quando $m \to \infty$. Assuma que ϕ_t é o fluxo estocástico satisfazendo a equação (3.1) para o caso especial de $r = 1$ e que $H\colon \mathcal{S}(M) \to \mathbb{R}$ é um funcional suave que admite uma variação aceitável ϕ_t. Para $\omega \in \mathcal{W}$, suponha que $\phi_{t,m}(\omega)$ é o fluxo suave obtido como uma solução da equação (2.3), no caso especial de $r = 1$. Então, quase sempre,*

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^t \mathbb{D}H(N_{s,m})(X_1)dB_{s,m} = \int_0^t \mathbb{D}H(N_s)(X_1)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{D}^2H(N_s)(X_1)ds,$$

onde $\mathbb{D}H(N_s)(X_1)$ é dado pela expressão (1.2).

Demonstração. Fixamos uma partição $\{t_j\}_{j=1}^m$ de $[0,t]$ e seja $B_{s,m}$ definido pela expressão (2.2). Para o caso $r = 1$, vamos considerar $\phi_{s,m}$ a solução da equação (2.3) e ϕ_t o fluxo estocástico satisfazendo a equação (3.1). Seja η^1_s o fluxo associado ao campo vetorial X_1 e escrevemos

$$F(N_s) = \left.\frac{d}{d\rho}\right|_{\rho=0} H(\eta^1_\rho(N_s)).$$

Provaremos o resultado para o caso em que $H(N_s)$ é limitada para todo $0 \leqslant s \leqslant t$, q.s.. O caso geral segue da aplicação do Teorema da Convergência Limitada à afirmação do Lema

3.2, considerando o processo $\phi_s^n = \phi_{\min\{s,T_n\}}$, onde $T_n = \inf\{s \geqslant 0 : F(N_s) \geqslant n\}$. Pela definição de F e dado que $B_{s,m}$ é linear por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{D}H(N_{s,m})(X_1)dB_{s,m} &= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} F(N_{s,m})dB_{s,m}. \\
&= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} F(N_{t_{j-1},m})dB_{s,m} \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})]dB_{s,m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} F(N_{t_{j-1},m})[B_{t_j,m} - B_{t_{j-1},m}] \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})]dB_{s,m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} F(N_{t_{j-1}})[B_{t_j,m} - B_{t_{j-1},m}] \\
&+ \sum_{j=1}^{m} [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})][B_{t_j,m} - B_{t_{j-1},m}] \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})]dB_{s,m}.
\end{aligned}$$

Agora, vemos

$$B_{t_j,m} = B_{\alpha_m(t_j)} + \frac{t_j - \alpha_m(t_j)}{\beta_m(t_j) - \alpha_m(t_j)}[B_{\beta_m(t_j)} - B_{\alpha_m(t_j)}],$$

e

$$B_{t_{j-1},m} = B_{\alpha_m(t_{j-1})} + \frac{t_{j-1} - \alpha_m(t_{j-1})}{\beta_m(t_{j-1}) - \alpha_m(t_{j-1})}[B_{\beta_m(t_{j-1})} - B_{\alpha_m(t_{j-1})}],$$

onde

$$\alpha_m(t_j) = t_j, \quad \alpha_m(t_{j-1}) = t_{j-1}, \quad \beta_m(t_j) = t_{j+1} \;\text{ e }\; \beta_m(t_{j-1}) = t_j.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
B_{t_j,m} &= B_{t_j} + \frac{t_j - t_j}{t_{j+1} - t_j}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] \\
&= B_{t_j},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_{t_{j-1},m} &= B_{t_{j-1}} + \frac{t_{j-1} - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] \\
&= B_{t_{j-1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{D}H(N_{s,m})(X_1)dB_{s,m} &= \sum_{j=1}^m F(N_{t_{j-1}})[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] \\ &+ \sum_{j=1}^m [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})][B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})]dB_{s,m}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Analisemos o primeiro termo do lado direito de (3.5). Para isso assumimos $F(N_t)$ como sendo um semimartingale com o fim de definir a integral Stratonovich do movimento Browniano, temos pela definição da integral no sentido Itô que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m F(N_{t_{j-1}})[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] = \int_0^t F(N_s)dB_s. \tag{3.6}$$

Portanto, obtemos uma expressão para o primeiro termo do lado direito de (3.5). Agora mostramos que o segundo termo do lado direito da equação (3.5) converge a 0 em L^2. Escrevemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})][B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] &= \sum_{j=1}^m [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})] \int_0^t I_{(t_{j-1},t_j]}(s)dB_s \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^m [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})] I_{(t_{j-1},t_j]}(s)dB_s \\ &= \int_0^t Y_s^m dB_s,\end{aligned}$$

onde

$$Y_s^m = \sum_{j=1}^m [F(N_{t_{j-1},m}) - F(N_{t_{j-1}})] I_{(t_{j-1},t_j]}(s).$$

Lembramos que $F(N_s)$ foi assumida como sendo limitada, então temos que

$$\left| F(N_{t_j,m}) - F(N_{t_j}) \right|,$$

é adaptado, limitado, contínuo e converge a 0 uniformemente q.s.. Logo pela Isometria de Itô e Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t Y_s^m dB_s\right)^2 &= \lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t (Y_s^m)^2 ds\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_0^t E\left|Y_s^m\right|^2 ds \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para analisar o terceiro termo do lado direito da equação (3.5) temos que, $\phi_{s,m}$ é suave em s com m fixo. Assim, $\phi_{s,m}(N)$ é uma curva suave em N passando através da subvariedade

N. Dado que F é suave por hipótese, então para m e N fixos a função $G(r) = F(\phi_{r,m}(N))$ é uma função suave da variável real r. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(m, \omega)$ tal que, q.s.,

$$\begin{aligned}
F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m}) &= (s - t_{j-1}) \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} F(\phi_{\rho,m}(N_{\theta,m})) \\
&= (s - t_{j-1}) \mathbb{D}F(N_{\theta,m}) \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} \phi_{\rho,m}(N_{\theta,m}) \\
&= (s - t_{j-1}) \mathbb{D}F(N_{\theta,m}) \left[\pi\left(X_1(N_{\theta,m}) \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} B_{\rho,m} + X_0(N_{\theta,m})\right)\right] \\
&= (s - t_{j-1}) [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} B_{\rho,m} + \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)] \\
&= (s - t_{j-1}) [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{1}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] + \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde π é a projeção normal à variedade N_s, e dado que $t_{j-1} < \rho < t_j$ e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} B_{\rho,m} &= \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} B_{\alpha_m(\rho)} + \frac{\rho - \alpha_m(\rho)}{\beta_m(\rho) - \alpha_m(\rho)} [B_{\beta_m(\rho)} - B_{\alpha_m(\rho)}] \\
&= \frac{d}{d\rho}\Big|_{\rho=0} (B_{t_{j-1}} + \frac{\rho - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}]) \\
&= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}].
\end{aligned}$$

Desta forma o terceiro termo do lado direito da igualdade (3.5) pode ser expressado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})] dB_{s,m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{1}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] + \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)] dB_{s,m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)(s - t_{j-1}) dB_{s,m}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [F(N_{s,m}) - F(N_{t_{j-1},m})] dB_{s,m} = &\sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)(s - t_{j-1}) dB_{s,m}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, como $\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)$ é quase sempre limitada, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_0)(s-t_{j-1})dB_{s,m}=0 \ \text{ q.s..} \tag{3.10}$$

Agora reescrevendo o primeiro termo do lado direito da equação (3.9) como

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]dB_{s,m}\\
&=\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]dB_{s,m}+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)\\
&-\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)]\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]dB_{s,m},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

e utilizando a expressão (2.2) vemos que

$$B_{s,m}=B_{\alpha_m(s)}+\frac{s-\alpha_m(s)}{\beta_m(s)-\alpha_m(s)}[B_{\beta_m(s)}-B_{\alpha_m(s)}],\quad t_{j-1}<s<t_j,$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha_m(s)&=\max\{t_j : s\geqslant t_j\}=t_{j-1}\\
\beta_m(s)&=\min\{t_j : s<t_j\}=t_j,
\end{aligned}$$

logo, obtemos que,

$$B_{s,m}=B_{t_{j-1}}+\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}],$$

de onde

$$dB_{s,m}=\frac{B_{t_j}-B_{t_{j-1}}}{t_j-t_{j-1}}ds.$$

Assim, usando a estrutura linear por partes de $B_{s,m}$ e integrando vemos que a equação

(3.11) tem a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\right) \frac{(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2}{(t_j-t_{j-1})} ds + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \\
&- \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)] \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{s-t_{j-1}}{(t_j-t_{j-1})^2} ds + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \\
&- \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)] \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]^2 + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \\
&- \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)] \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}F(N_{t_{j-1}})(X_1)[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} [\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1) - \mathbb{D}N(N_{t_{j-1}})(X_1)][B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]^2 \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big[\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) - \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)\Big] \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m}.
\end{aligned}
$$

Reescrevemos a expressão (3.11) como

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}F(N_{t_{j-1}})(X_1)[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} [\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1) - \mathbb{D}F(N_{t_{j-1}})(X_1)][B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]^2 \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1) - \mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)] \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} [B_{t_j}-B_{t_{j-1}}] dB_{s,m}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Já que $\mathbb{D}F(N_{t_{j-1}})(X_1)$ é cadlag e adaptado, vemos que o primeiro termo da expressão (3.12) converge a

$$\frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{D}F(N_s)(X_1) ds.$$

Além disso, $|\mathbb{D}F(N_{s,m})(X_1) - \mathbb{D}F(N_s)(X_1)|$ converge a zero uniformemente quase sempre, o que implica que o segundo termo do lado direito da expressão (3.12) converge a zero em L^1.

Lembramos que $\mathbb{D}F(N_s)(X_1) = \left.\frac{d}{d\rho}\right|_{\rho=0} F(\eta^1_\rho(N_s))$. Resta apenas analisar o terceiro termo da expressão (3.12). Observamos que pela mesma análise feito para encontrar a expressão (3.12) temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)-\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)]\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]dB_{s,m}\right| \\
&=\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}[\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)-\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)](B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sup_j\Big[\Big|\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)-\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)\Big|\Big]\sum_{j=1}^{m}(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Observemos que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2=t \quad \text{q.s..}$$

Além disso, como H é um funcional de classe C^2, então

$$\Big|\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)-\mathbb{D}F(N_{t_{j-1},m})(X_1)\Big|\to 0, \quad \text{q.s.,}$$

uniformemente. Colocando todo o visto acima na expressão (3.12), obtemos que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbb{D}F(N_{\theta,m})(X_1)\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}[B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]dB_{s,m}=\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{D}F(N_s)(X_1)ds \quad \text{q.s.} \tag{3.14}$$

Agora a prova do Lema segue das expressões (3.5), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) e (3.14). Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\int_0^t\mathbb{D}H(N_{s,m})(X_1)dB_{s,m}&=\int_0^t F(N_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{D}F(N_s)(X_1)ds \\
&=\int_0^t\mathbb{D}H(N_s)(X_1)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{D}^2H(N_s)(X_1)ds.
\end{aligned}$$

□

4 Cálculo das Variações para Hipersuperficies e Curvas

Neste capítulo, utilizaremos a fórmula de Itô dada no capítulo 3 para obter estimativas do funcional energia e o funcional volume para os processos $N_t = \phi_t(N)$ como no capítulo anterior. Para isso primeiro estudamos curvas fechadas ou compactas que são as subvariedades de dimensão 1 e depois estudamos o caso de subvariedades compactas de uma variedade Riemanniana de dimensão finita $n > 1$. Finalmente estudamos o caso particular em que os campos que dirigem a equação estocástica são conformalmente Killing. As referências principais utilizadas neste capítulo são (ØKSENDAL, 2003), (ELWORTHY, 1988), (KUO, 2006) (ABRAHAM; MARSDEN; RATIU, 2012), (TOPPING, 2006), (LEE, 2013).

4.1 Variações da Energia e Comprimento de Arco

Consideramos, como feito anteriormente, uma variedade diferenciável M e uma equação diferencial estocástica em M da forma

$$dx_t = X_0(x_t)dt + \sum_i^m X_i(x_t) \circ dB_t^i, \tag{4.1}$$

onde $X_0, X_1, \ldots, X_m$ são campos vetoriais suaves e $B_t^1, \ldots, B_t^m$ são movimentos Brownianos independentes definidos sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Assumimos que os campos vetoriais satisfazem

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum_i \nabla_{X_i} X_i = 0,$$

e que para toda forma bilinear $A_x \in T_x M$ temos

$$tr(A)_x = \sum_i A(X_i, X_i)_x.$$

Denotamos por $\phi_t : M \to M$ o fluxo estocástico associado à equação (4.1) e por $\phi_{t*} : T_x M \to T_{\phi_t(x)} M$ a diferencial de ϕ_t no ponto x. Além disso, pelo visto no capítulo 2, o processo estocástico

$$v_t = \phi_{t*} v : \Omega \to T_{x_t} M,$$

satisfaz a E.D.E.

$$Dv_t = \nabla X_0(v_t)dt + \sum_{i=1}^m \nabla X_i(v_t) \circ dB_t^i.$$

Dada uma curva fechada $\gamma : [0,1] \to M$, seja γ_s uma variação estocástica de γ definida por

$$\gamma_s = \phi_s \circ \gamma : [0,1] \to M,$$

a qual também é uma curva fechada dado que ϕ_t é um difeomorfismo para cada t. Queremos determinar o comportamento do comprimento de arco da curva γ_s, isto é,

$$\mathcal{L}(\gamma_t) = \int_0^t \mathbb{E}\|\partial_s \gamma_t(s)\| ds,$$

e de forma similar o comportamento do funcional energia dado por

$$\mathcal{E}(\gamma_t) = \int_0^t \mathbb{E}\left\|\partial_s \gamma_t(s)\right\|^2 ds.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\partial_s \gamma_t(s) &= (d\phi_t)_{\gamma(s)} \partial_s \gamma(s) \\ &= (\phi_{t*})_{\gamma(s)} \partial_s \gamma(s).\end{aligned}$$

Portanto temos que estudar como se comporta

$$\langle (d\phi_t)_x v, (d\phi_t)_x w \rangle_x = \langle \phi_{t*} v, \phi_{t*} w \rangle_x.$$

Dados dois vetores $v,\, w \in T_x M$ considere os processos sobre TM

$$v_t = \phi_{t*} v, \qquad w_t = \phi_{t*} w.$$

Teorema 4.1. *Com as condições acima temos que*

$$dg(v_t, w_t)_{x_t} = \sum_i (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dB_t^i + \sum_i g(\nabla_{v_t} X_i, \nabla_{w_t} X_i)_{x_t} dt - \mathrm{Ric}(v_t, w_t)_{x_t} dt,$$

ou, equivalentemente

$$d(\phi_t^* g)(v,w) = \sum_i \phi_t^* (\mathcal{L}_{X_i} g)(v,w) dB_t^i + \sum_i \phi_t^* g(\nabla_v X_i, \nabla_w X_i) dt - \phi_t^* \mathrm{Ric}(v,w) dt$$

Demonstração. Lembrando o feito no capítulo 2 temos o seguinte: Se $S(t,x)$ é o fluxo de Y, então $\delta S(t,v) = DS(t,x)(v)$ denota o fluxo de

$$\frac{D}{dt}\delta S(t,v) = \nabla Y(\delta S(t,v)) = \nabla_{\delta S(t,v)} Y.$$

Disso,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g(\delta S(t,v), \delta S(t,w)) &= g(\nabla Y(\delta S(t,v)), \delta S(t,w)) + g(\delta S(t,v), \nabla Y(\delta S(t,w))) \\ &= g(\nabla_{\delta S(t,v)} Y, \delta S(t,w)) + g(\delta S(t,v), \nabla_{\delta S(t,w)} Y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}g(\delta S(t,v),\delta S(t,w)) &= \frac{d}{dt}[g(\nabla_{\delta S(t,v)}Y,\delta S(t,w)) + g(\delta S(t,v),\nabla_{\delta S(t,w)}Y)]\\ &= g(\nabla Y(\delta S(t,v)),\nabla Y(\delta S(t,w)))\\ &+ g(\delta S(t,w),\nabla Y(\nabla Y(\delta S(t,v)))) + g(\delta S(t,w),\nabla^2 Y(Y,\delta S(t,v)))\\ &+ g(\nabla Y(\delta S(t,w)),\nabla Y(\delta S(t,v)))\\ &+ g(\delta S(t,v),\nabla Y(\nabla Y(\delta S(t,w)))) + g(\delta S(t,v),\nabla^2 Y(Y,\delta S(t,w))),\end{aligned}$$

onde

$$\nabla^2 Y(v,w) = \nabla_v\nabla_w Y - \nabla_{\nabla_v w}Y.$$

Utilizando isto junto com a EDE (4.1) temos que

$$\begin{aligned}&dg(v_t,w_t)_{x_t}\\ &= [g(\nabla_{v_t}X_0,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]\circ dB_t^i\\ &= [g(\nabla_{v_t}X_0,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dB_t^i\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \frac{d}{dt}[g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dt\\ &= [g(\nabla_{v_t}X_0,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dB_t^i\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \{g(\nabla_{v_t}X_i,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{\nabla_{w_t}X_i}X_i) + g(v_t,\nabla^2 X_i(X_i,w_t))\\ &+ g(\nabla_{w_t}X_i,\nabla_{v_t}X_i) + g(w_t,\nabla_{\nabla_{v_t}X_i}X_i) + g(w_t,\nabla^2 X_i(X_i,v_t))\}dt.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_i(X_i,w_t) &= \nabla_{X_i}\nabla_{w_t}X_i - \nabla_{\nabla_{X_i}w_t}X_i\\ \nabla^2 X_i(X_i,v_t) &= \nabla_{X_i}\nabla_{v_t}X_i - \nabla_{\nabla_{X_i}v_t}X_i,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}&dg(v_t,w_t)_{x_t}\\ &= [g(\nabla_{v_t}X_0,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dB_t^i\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \{g(\nabla_{v_t}X_i,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t} + g(\nabla_{\nabla_{v_t}X_i}X_i + \nabla_{X_i}\nabla_{v_t}X_i - \nabla_{\nabla_{X_i}v_t}X_i,w_t)_{x_t}\}dt\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \{g(\nabla_{v_t}X_i,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t} + g(\nabla_{\nabla_{w_t}X_i}X_i + \nabla_{X_i}\nabla_{w_t}X_i - \nabla_{\nabla_{X_i}w_t}X_i,v_t)_{x_t}\}dt\\ &= [g(\nabla_{v_t}X_0,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i,w_t)_{x_t} + g(v_t,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dB_t^i\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \{g(\nabla_{v_t}X_i,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t} + g(\nabla_{X_i}\nabla_{v_t}X_i + \nabla_{[v_t,X_i]}X_i,w_t)_{x_t}\}dt\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \{g(\nabla_{v_t}X_i,\nabla_{w_t}X_i)_{x_t} + g(\nabla_{X_i}\nabla_{w_t}X_i + \nabla_{[w_t,X_i]}X_i,v_t)_{x_t}\}dt.\end{aligned}$$

Utilizando a definição da curvatura

$$R(u,v,w,z) = g(\nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w, z),$$

e somando e subtraindo na equação acima

$$\frac{1}{2}\sum_i [g(\nabla_{v_t}\nabla_{X_i}X_i, w_t) + g(\nabla_{w_t}\nabla_{X_i}X_i, v_t)]_{x_t} dt,$$

temos que

$$\begin{aligned}
& dg(v_t, w_t)_{x_t} \\
& = [g(\nabla_{v_t}X_0, w_t)_{x_t} + g(v_t, \nabla_{w_t}X_0)_{x_t}]dt + \sum_i [g(\nabla_{v_t}X_i, w_t)_{x_t} + g(v_t, \nabla_{w_t}X_i)_{x_t}]dB_t^i \\
& + \sum_i g(\nabla_{v_t}X_i, \nabla_{w_t}X_i)_{x_t} dt + \sum_i R(X_i, v_t, X_i, w_t)_{x_t} dt \\
& + \frac{1}{2}\sum_i [g(\nabla_{v_t}\nabla_{X_i}X_i, w_t) + g(\nabla_{w_t}\nabla_{X_i}X_i, v_t)]_{x_t} dt.
\end{aligned}$$

Utilizando a definição da derivada de Lie

$$(\mathcal{L}_X g)(v,w) = g(\nabla_v X, w) + g(v, \nabla_w X),$$

temos

$$\begin{aligned}
dg(v_t, w_t) &= (\mathcal{L}_{X_0} g)(v_t, w_t)_{x_t} dt + \sum_i (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dB_t^i + \sum_i g(\nabla_{v_t}X_i, \nabla_{w_t}X_i)_{x_t} dt \\
&+ \sum_i R(X_i, v_t, X_i, w_t)_{x_t} dt + \frac{1}{2}\sum_i (\mathcal{L}_{\nabla_{X_i}X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dt \\
&= (\mathcal{L}_{(X_0 + \frac{1}{2}\sum_i \nabla_{X_i}X_i)} g)(v_t, w_t)_{x_t} dt + \sum_i (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dB_t^i \\
&+ \sum_i g(\nabla_{v_t}X_i, \nabla_{w_t}X_i)_{x_t} dt + \sum_i R(X_i, v_t, X_i, w_t)_{x_t} dt \\
&= \sum_i (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dB_t^i + \sum_i g(\nabla_{v_t}X_i, \nabla_{w_t}X_i)_{x_t} dt - \mathrm{Ric}(v_t, w_t)_{x_t} dt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$d(\phi_t^* g) = \sum_i \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_i} g) dB_t^i + \sum_i \phi_t^* g(\nabla_v X_i, \nabla_w X_i) dt - \phi_t^* \mathrm{Ric}(v,w) dt.$$

$\square$

Podemos, simplificar o resultado do teorema como segue

Corolário 4.1. *Se $v_t = (D\phi_t)_x v$ para $v \in T_x M$, $z_t = g(v_t, v_t)_{x_t}$ e $u_t = \frac{v_t}{\|v_t\|}$ então temos a seguinte fórmula*

$$\begin{aligned}
d\sqrt{z_t} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t}) \sqrt{z_t} dB_t^i \\
&+ \frac{1}{2}\Big[- Ric(u_t, u_t)_{x_t} + \sum_{i=1}^m \Big(g\Big(\nabla_{u_t}X_i, P_{(u_t)^\perp}\nabla_{u_t}X_i\Big)_{x_t}\Big)\Big]\sqrt{z_t} dt,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde a projeção $P_{(u_t)^\perp}\nabla_{u_t}X_i = \nabla_{u_t}X_i - g(\nabla_{u_t}X_i, u_t)u_t$.

Demonstração. Sabemos do Teorema 4.1 que

$$dg(v_t, w_t) = \sum_i^m (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_t, w_t)_{x_t} dB_t^i + \sum_i^m g(\nabla_{v_t} X_i, \nabla_{w_t} X_i)_{x_t} dt - \mathrm{Ric}(v_t, w_t)_{x_t} dt,$$

para $v_t = (D\phi_t)_x v$ e $w_t = (D\phi_t)_x W$ com $v, w \in T_x M$. Assim para $z_t = g(v_t, v_t)_{x_t}$ e $u_t = \dfrac{v_t}{\|v_t\|}$ obtemos

$$\begin{aligned} dz_t &= \sum_{i=1}^m \left(\left(\mathcal{L}_{X_i} g \right) \left(\frac{v_t}{\|v_t\|}, \frac{v_t}{\|v_t\|} \right)_{x_t} \right) \|v_t\|^2 dB_t^i + \sum_i^m g\left(\nabla_{\frac{v_t}{\|v_t\|}} X_i, \nabla_{\frac{v_t}{\|v_t\|}} X_i \right)_{x_t} \|v_t\|^2 dt \\ &\quad - \mathrm{Ric}\left(\frac{v_t}{\|v_t\|}, \frac{v_t}{\|v_t\|} \right)_{x_t} \|v_t\|^2 dt \qquad (4.3) \\ &= \sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t}) z_t dB_t^i + \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla_{u_t} X_i\|_{x_t}^2 - Ric(u_t, u_t)_{x_t} \right) z_t dt. \end{aligned}$$

Agora aplicamos a fórmula de Itô 1-dimensional para o processo estocástico $z_t = g(v_t, v_t)$ e para a função $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} d\sqrt{z_t} &= \frac{1}{2\sqrt{z_t}} \left[\sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t}) z_t dB_t^i + \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla_{u_t} X_i\|_{x_t}^2 - Ric(u_t, u_t)_{x_t} \right) z_t dt \right] \\ &\quad - \frac{1}{8 z_t^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t})^2 z_t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t}) \sqrt{z_t} dB_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[- Ric(u_t, u_t)_{x_t} + \sum_{i=1}^m \left(\|\nabla_{u_t} X_i\|_{x_t}^2 - \frac{1}{4} ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t))_{x_t}^2 \right) \right] \sqrt{z_t} dt. \end{aligned}$$

Finalmente observamos que se $\|w\| = 1$ então

$$\begin{aligned} \|\nabla_w X_i\|^2 - \frac{1}{4}((\mathcal{L}_{X_i} g)(w, w))^2 &= g(\nabla_w X_i, \nabla_w X_i) - \frac{1}{4} \Big[g(\nabla_w X_i, w) + g(w, \nabla_w X_i) \Big]^2 \\ &= g(\nabla_w X_i, \nabla_w X_i) - \frac{1}{4} \Big[2 g(\nabla_w X_i, w) \Big]^2 \\ &= g(\nabla_w X_i, \nabla_w X_i) - g(\nabla_w X_i, w)^2 \\ &= g(\nabla_w X_i, \nabla_w X_i) - g\Big(\nabla_w X_i, g(\nabla_w X_i, w) w \Big) \\ &= g\Big(\nabla_w X_i, \nabla_w X_i - g(\nabla_w X_i, w) w \Big) \\ &= g\Big(\nabla_w X_i, P_{w^\perp} \nabla_w X_i \Big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d\sqrt{z_t} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m ((\mathcal{L}_{X_i} g)(u_t, u_t)_{x_t}) \sqrt{z_t} dB_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[- Ric(u_t, u_t)_{x_t} + \sum_{i=1}^m \left(g\left(\nabla_{u_t} X_i, P_{(u_t)^\perp} \nabla_{u_t} X_i \right)_{x_t} \right) \right] \sqrt{z_t} dt. \end{aligned}$$

□

Adaptando ideias apresentadas no trabalho de (ELWORTHY; ROSENBERG, 1996) e utilizando o Teorema de Girsanov chegamos as seguintes estimativas.

Corolário 4.2. *Temos as seguintes estimativas para o funcional energia e comprimento de arco*

1. *Se existem constantes a_1 e a_2 tais que*
$$a_1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|\nabla_u X_i\|_x^2 - Ric(u,u)_x \right) \leqslant a_2, \quad \text{q.s.},$$
$\forall u \in T_xM$, $\|u\| = 1$, $\forall x \in M$, *então*
$$\mathcal{E}(\gamma_0)e^{a_1 t} \leqslant \mathcal{E}(\gamma_t) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_0)e^{a_2 t}.$$
Portanto
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\mathcal{E}(\gamma_t)\right) \in [a_1, a_2].$$

2. *Se existem constantes b_1 e b_2 tais que*
$$b_1 \leqslant \frac{1}{2}\left[-Ric(u,u)_x + \sum_{i=1}^{m} \left(g(\nabla_u X_i, P_{(u)^\perp} \nabla_u X_i)_x \right) \right] \leqslant b_2, \quad \text{q.s.},$$
$\forall u \in T_xM$, $\|u\| = 1$, $\forall x \in M$, *então*
$$\mathcal{L}(\gamma_0)e^{b_1 t} \leqslant \mathcal{L}(\gamma_t) \leqslant \mathcal{L}(\gamma_0)e^{b_2 t}.$$
Portanto
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\mathcal{L}(\gamma_t)\right) \in [b_1, b_2].$$

Demonstração. Consideremos as equações
$$dx_t = \sum_{i}^{m} a_t^i x_t dB_t^i + \sigma_t x_t dt,$$
e
$$dy_t = \sum_{i}^{m} a_t^i y_t dB_t^i + \left(\sigma_t + \sum_{i}^{m} (a_t)^2 \right) y_t dt.$$
Seja
$$u_t = (a_t^1, \ldots, a_t^n), \quad \tilde{B}_t^i = B_t^i + \int_0^t a_s^i ds,$$
e a medida de probabilidade $d\mathbb{Q} = M_t d\mathbb{P}$, onde
$$M_t = \exp\left(-\sum_{i}^{m} a_s^i dB_s^i - \frac{1}{2} \sum_{i}^{m} \int_0^t (a_s^i)^2 ds \right),$$
então pelo Teorema de Girsanov (ver pág 158 de (ØKSENDAL, 2003)) garante que y_t é solução de
$$dy_t = \sum_{i}^{m} a_t^i y_t d\tilde{B}_t^i + \sigma_t y_t dt,$$

e satisfaz

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[y_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t y_t].$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô temos que

$$\begin{aligned} y_t &= x_0 \exp\left(\sum_{i=1}^m \int_0^t a_s^i dB_s^i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \int_0^t (a_s^i)^2 ds\right) \exp\left(\int_0^t (\sigma_s + \sum_{i=1}^m (a_s^i)^2) ds\right) \\ &= x_0 \exp\left(\sum_{i=1}^m \int_0^t a_s^i dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \int_0^t (a_s^i)^2 ds\right) \exp\left(\int_0^t \sigma_s ds\right) \\ &= x_0 M_t^{-1} \exp\left(\int_0^t \sigma_s ds\right), \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[y_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[x_0 M_t M_t^{-1} \exp\left(\int_0^t \sigma_s ds\right)\right] \\ &= x_0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^t \sigma_s ds\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora por simplicidade assumimos que

$$k \leqslant \sigma_s \leqslant K, \quad q.s,$$

de modo que

$$x_0 e^{kt} \leqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x_t] \leqslant x_0 e^{Kt}.$$

Analisando o primeiro caso em relação à equações (4.2) e (4.3) e utilizando o feito acima obtemos

$$z_0 e^{a_1 t} \leqslant \mathbb{E}[z_t] \leqslant z_0 e^{a_2 t},$$

isto é equivalente a ter

$$\|v_0\|^2 e^{a_1 t} \leqslant \mathbb{E}[g(v_t, v_t)] \leqslant \|v_0\|^2 e^{a_2 t},$$

finalmente integramos para obter

$$\mathcal{E}(\gamma_0) e^{a_1 t} \leqslant \mathcal{E}(\gamma_t) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_0) e^{a_2 t}.$$

De igual forma temos a estimativa para o comprimento de arco. □

Corolário 4.3. *Se M é uma variedade com curvatura seccional não positiva então temos, em média, um não decaimento em energia. Mais precisamente, temos*

$$\mathcal{E}(\gamma_0) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_t) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_0) e^{kt},$$

portanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\mathcal{E}(\gamma_t)\right) \in [0, k].$$

onde k é uma constante.

Demonstração. Nas condições acima e utilizando o Teorema 4.1 para o caso das curvas com $v_t(s) = \dfrac{d}{dt}\gamma_t(s) \in T_{\gamma_t(s)}M$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\gamma_t) &= \int_0^t \mathbb{E}\|v_t(s)\|^2 ds \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\|v_0(s)\|^2 ds + \mathbb{E}(\sum_i \int_0^t \int_0^t (\mathcal{L}_{X_i} g)(v_r(s), v_r(s)) dB_r^i ds) \\
&+ \sum_i \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}\|\nabla_{v_r(s)} X_i\|^2 drds - \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(\mathrm{Ric}(v_r(s), v_r(s))) drds \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\|v_0(s)\|^2 ds + \sum_i \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}\|\nabla_{v_r(s)} X_i\|^2 drds - \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(\mathrm{Ric}(v_r(s), v_r(s))) drds.
\end{aligned}$$

Dado que as curvaturas seccionais de M são não positivas então temos que $-\mathrm{Ric}(v_r(s), v_r(s))$ é não negativo, logo

$$\sum_i \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}\|\nabla_{v_r(s)} X_i\|^2 drds - \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(\mathrm{Ric}(v_r(s), v_r(s))) drds \geqslant 0,$$

e, portanto,

$$\mathcal{E}(\gamma_0) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_t).$$

Finalmente, se consideramos

$$k = \sup_{x \in M} \sup_{v \in T_x M, \|v\|=1} \left(\sum_i \|\nabla_v X_i\|^2 - Ric(v, v) \right),$$

então

$$\mathbb{E}[\|v_t(s)\|^2] \leqslant \mathbb{E}\|v_0(s)\|^2 + \int_0^t k\mathbb{E}[\|v_r(s)\|^2] dr,$$

e assim pelo lema de Gronwall temos que

$$\mathbb{E}[\|v_t(s)\|^2] \leqslant \mathbb{E}[\|v_0(s)\|^2] e^{kt}.$$

Portanto

$$\mathcal{E}(\gamma_t) \leqslant \mathcal{E}(\gamma_0) e^{kt}.$$

□

4.2 Variações de Área para Hipersuperfícies

Na seção anterior vimos estimativas para os funcionais energia e comprimento de arco. Agora, vamos estudar estimativas para o funcional volume que é a generalização natural do funcional comprimento de arco para variedades com dimensão $n \geqslant 2$. Para isso, precisamos calcular a primeira e segunda variação do volume para o caso de superfícies. Seja (M, h) uma variedade Riemanniana e N uma subvariedade compacta de M munida da métrica induzida que denotamos por g. Seja $\phi_t : M \to M$ um fluxo de difeomorfismos sobre M. Para cada t temos subvariedades compactas sem fronteira $N_t = \phi_t(N)$. Denotamos por g_t a métrica induzida por M sobre N_t para cada t, isto é, dados $u, v \in T_x N_t$ então

$$g_t(u, v)_x = h(u, v)_x.$$

A métrica g_t induz sobre N_t uma forma volume que denotamos por ω_t. Denotamos de $\mu = \omega_0$ a forma volume induzida sobre N. Para cada t, a variedade N_t está munida da métrica g_t que induz uma conexão ∇^t que é a conexão de Levi-Civita em N_t. Seja $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita em M induzida por h, então

$$B_t(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla^t_X Y,$$

é a segunda forma fundamental da superfície. Observamos que $B_t(X, Y)_x \in T_x N_t^{\perp} \subset T_x M$. O vetor curvatura media é definido como sendo o traço de B_t, isto é

$$H_t(x) = \sum_i B_t(e_i, e_i)_x,$$

para uma base ortonormal $\{e_i\}$ de $T_x N_t$.

Definimos os seguintes operadores sobre N_t a partir de uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como acima. Dado um campo vetorial X em M sejam

a) $\|\nabla X\|^2 = \sum_i h(\overline{\nabla}_{e_i} X, \overline{\nabla}_{e_i} X)$,

b) $A^t(X) = \sum_{i,j} h(X, B_t(e_i, e_i))$ e $\|A^t(X)\|^2 = \sum_{i,j} h(X, B_t(e_i, e_j))^2$,

c) $Ric_t^{\perp}(X) = -\sum_i R(X, e_i, X, e_i)$.

A forma volume ω_t nos permite calcular o volume da superfície pela fórmula

$$vol(N_t) = \int_{N_t} \omega_t = \int_N \phi_t^* \omega_t.$$

Lema 4.1. *Com as hipóteses acima temos que, para cada t, valem as seguintes fórmulas*

$$(\partial_t g_t)_x(u, v) = \mathcal{L}_X h(u, v)_x,$$

$$(\partial_t^2 g_t)_x(u, v) = \mathcal{L}_X^2 h(u, v)_x.$$

Demonstração. Sabemos que N é uma subvariedade M então $\phi_t|_N : N \to N_t$ é difeomorfismo, portanto existem $y \in N$ e $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_y N$ tais que

$$\phi_t(y) = x, \qquad D\phi_t(\tilde{u}) = u, \qquad D\phi_t(\tilde{v}) = v.$$

Assim

$$\begin{aligned} g_t(u,v)_x &= h(u,v)_x \\ &= h(D\phi_t(\tilde{u}), D\phi_t(\tilde{v}))_{\phi_t(y)} \\ &= (\phi_t^* h)(\tilde{u},\tilde{v})_y. \end{aligned}$$

Lembramos que, para todo tensor T ver ((ABRAHAM; MARSDEN; RATIU, 2012) pag 365) temos que

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* T = \phi_t^* \mathcal{L}_X T,$$

com $\mathcal{L}$ sendo a derivada de Lie na direção do campo vetorial X. Então

$$\begin{aligned} (\partial_t g_t)_x(u,v) &= \partial_t(\phi_t^* h)(\tilde{u},\tilde{v})_y \\ &= (\phi_t^* \mathcal{L}_X h)(\tilde{u},\tilde{v})_y \\ &= \mathcal{L}_X h(u,v)_x, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 g_t)_x(u,v) &= \partial_t(\phi_t^* \mathcal{L}_X h)(\tilde{u},\tilde{v})_y \\ &= (\phi_t^* \mathcal{L}_X \mathcal{L}_X h)(\tilde{u},\tilde{v})_y \\ &= (\phi_t^* \mathcal{L}_X^2 h)(\tilde{u},\tilde{v})_y \\ &= \mathcal{L}_X^2 h(u,v)_x. \end{aligned}$$

□

O seguinte resultado é bem conhecido, apresentamos aqui sua demonstração para mostrar nosso método de trabalho.

Teorema 4.2. *(Primeira fórmula de variação). Nas hipóteses acima temos que*

$$\mathbb{D}vol(N)(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} vol(N_t) = -\int_N \langle H, X\rangle \mu.$$

Demonstração. Seja N uma subvariedade de M, dada $\phi_t : M \to M$ um fluxo de difeomorfismos sobre M. Para cada t seja $N_t = \phi_t(N)$ uma subvariedade compacta sem fronteira, então para ω_t a forma volume sobre N_t temos o seguinte;

$$vol(N_t) = \int_{N_t} \omega_t = \int_N \phi_t^* \omega_t.$$

Logo

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} vol(N_t) &= \int_N \phi_t^* \mathcal{L}_X \omega_t \Big|_{t=0} + \int_N \phi_t^* \frac{d\omega_t}{dt}\Big|_{t=0} \\ &= \int_N \phi_0^* \mathcal{L}_X \omega_0 + \int_N \phi_0^* (\frac{d\omega_t}{dt}|_{t=0}) \\ &= \int_N \mathcal{L}_X \mu + \int_N \frac{d\omega_t}{dt}|_{t=0}. \end{aligned}$$

Se g_t é uma métrica evoluindo no tempo, então (ver por exemplo (TOPPING, 2006) prop 2.3.12)

$$\frac{d}{dt}\omega_t = \frac{1}{2}tr(\partial_t g_t)\omega_t.$$

Para calcular $tr(\partial_t g_t)$ consideramos vetores ortonormais $\{e_i^t, \ldots, e_n^t\}$ para g_t e tais que $\nabla^t_{e_i^t} e_i^t = 0$. Dessa forma vemos que

$$\begin{aligned}
tr(\partial_t g_t) &= \sum_{i=1}^n \partial_t g_t(e_i^t, e_i^t) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X h(e_i^t, e_i^t) \\
&= \sum_{i=1}^n [h(\overline{\nabla}_{e_i^t} X, e_i^t) + h(e_i^t, \overline{\nabla}_{e_i^t} X)] \\
&= 2\sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i^t} X, e_i^t\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^n [e_i^t\langle X, e_i^t\rangle - \langle X, \overline{\nabla}_{e_i^t} e_i^t\rangle] \\
&= -2\sum_{i=1}^n \langle X, \overline{\nabla}_{e_i^t} e_i^t\rangle + 2\sum_{i=1}^n e_i^t\langle X, e_i^t\rangle \\
&= -2\sum_{i=1}^n \langle X, \overline{\nabla}_{e_i^t} e_i^t - \nabla^t_{e_i^t} e_i^t\rangle + 2\sum_{i=1}^n e_i^t\langle X, e_i^t\rangle.
\end{aligned}$$

Sendo $B_t(e_i^t, e_i^t) = \overline{\nabla}_{e_i^t} e_i^t - \nabla^t_{e_i^t} e_i^t$, segue que

$$\begin{aligned}
tr(\partial_t g_t) &= -2\sum_{i=1}^n \langle X, B_t(e_i^t, e_i^t)\rangle + 2\sum_{i=1}^n e_i^t\langle X, e_i^t\rangle \\
&= -2\langle H_t, X\rangle + 2\sum_{i=1}^n e_i^t\langle X, e_i^t\rangle \\
&= -2\langle H_t, X\rangle + 2\sum_{i=1}^n e_i^t g_t(P_{TN_t}X, e_i^t) \\
&= -2\langle H_t, X\rangle + 2div_{N_t}(P_{TN_t}X).
\end{aligned}$$

Portanto, se $\mu = \omega_0$ vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}vol(N)(X) &= \int_N \mathcal{L}_X\mu + \int_N \frac{d\omega}{dt}\bigg|_{t=0} \\
&= \int_N \mathcal{L}_X\mu + \frac{1}{2}\int_N tr(\partial_t g_t)\omega_t\bigg|_{t=0} \\
&= \int_N \mathcal{L}_X\mu + \frac{1}{2}\int_N [-2\langle H_t, X\rangle + 2div_{N_t}(P_{TN_t}X)]\omega_t\bigg|_{t=0},
\end{aligned}$$

como $\partial N = \varnothing$ e dado que $\mathcal{L}_X \mu = (div X)\mu$ ver ((LEE, 2013) pag 344) então pelo Teorema da Divergência temos que

$$\int_N \mathcal{L}_X \mu = 0, \quad \int_N div_N(P_{TN}X)\mu = 0.$$

Portanto

$$\mathbb{D}vol(N)(X) = -\int_N \langle H, X\rangle \mu.$$

□

A fórmula a seguir é nossa e até onde sabemos não aparece na literatura. Em geral é estudada para casos particulares.

Teorema 4.3. *(Segunda fórmula de variação). Nas hipóteses acima temos que*

$$\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) = \int_N \Bigg\{ - Ric_0^{\perp}(X) + \|\nabla X\|^2 - h(\nabla_X X, H) - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 - \sum_{i=1}^n g_t(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{e_i}X} X) + \Big[- \langle H, X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X)\Big]^2 \Bigg\}\mu.$$

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) &= \frac{d^2}{dt^2} vol(N_t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_N \phi_t^* \mathcal{L}_X \omega_t + \int_N \phi_t^* \frac{d\omega_t}{dt}\right]\Bigg|_{t=0} \\
&= \int_N \phi_t^* \mathcal{L}_X^2 \omega_t\Big|_{t=0} + \int_N \phi_t^* \mathcal{L}_X \frac{d\omega_t}{dt}\Big|_{t=0} + \int_N \phi_t^* \mathcal{L}_X \frac{d\omega_t}{dt}\Big|_{t=0} + \int_N \phi_t^* \frac{d^2\omega_t}{dt^2}\Big|_{t=0} \\
&= \int_N \mathcal{L}_X^2 \mu + 2\int_N \mathcal{L}_X \frac{d\omega_t}{dt}\Big|_{t=0} + \int_N \frac{d^2\omega_t}{dt^2}\Big|_{t=0},
\end{aligned}$$

como $\partial N = \varnothing$, temos pelo Teorema da Divergência que

$$\int_N \mathcal{L}_X^2 \mu = 2\int_N \mathcal{L}_X \frac{d\omega_t}{dt}\Big|_{t=0} = 0,$$

desta forma

$$\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) = \int_N \frac{d^2\omega_t}{dt^2}\Big|_{t=0}.$$

Para calcular a segunda derivada utilizamos as fórmulas de ((TOPPING, 2006) prop. 2.3.6) para a derivada do traço de um tensor T que varia também com relação a t.

$$\frac{d}{dt} tr(T) = -\langle \partial_t g_t, T\rangle + tr(\partial_t T).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\omega_t &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[tr(\partial_t g_t)\omega_t] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}tr(\partial_t g_t)\right]\omega_t + \frac{1}{2}tr(\partial_t g_t)\frac{d}{dt}\omega_t \\
&= \frac{1}{2}\left[-\langle \partial_t g_t, \partial_t g_t\rangle + tr(\partial_t(\partial_t g_t))\right]\omega_t + \frac{1}{2}tr(\partial_t g_t)\left[\frac{1}{2}tr(\partial_t g_t)\omega_t\right] \\
&= \left[-\frac{1}{2}\|\partial_t g_t\|^2 + \frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2\right]\omega_t.
\end{aligned}$$

Lembramos que

$$\mathcal{L}_X h(Y,Z) = h(\overline{\nabla}_Y X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_Z X).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|\partial_t g_t\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}(\partial_t g_t)(e_i,e_j)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}[h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j) + h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X)]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}[h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)^2 + 2h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X) + h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X)^2] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j) + 2\sum_{i,j=1}^{n} h(\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X)h(e_i,\overline{\nabla}_{e_j}X) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j) + 2\sum_{i,j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X,e_i) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X,e_i)g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X,e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_t\left(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X, \sum_{j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)e_j\right) \\
&+ 2\sum_{i=1}^{n} g_t\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} g_t\left(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X, \sum_{i=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X,e_i)e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X) + 2\sum_{i=1}^{n} g_t\left(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{\sum_j g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X,e_j)e_j}X\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_j}X).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|\partial_t g_t\|^2 &= 2\sum_{i=1}^n g_t(P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X) + 2\sum_{i=1}^n g_t\Big(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X}X\Big)\\
&= 2\sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 + 2\sum_{i=1}^n g_t\Big(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X}X\Big),
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X^2 h(Y,Z) &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X h)(Y,Z)\\
&= \mathcal{L}_X h(\overline{\nabla}_Y X, Z) + \mathcal{L}_X h(Y, \overline{\nabla}_Z X)\\
&= X(\mathcal{L}_X h(Y,Z)) - X(\mathcal{L}_X h(Y,Z)) + \mathcal{L}_X h(\overline{\nabla}_Y X, Z) + \mathcal{L}_X h(Y, \overline{\nabla}_Z X)\\
&= X(\mathcal{L}_X h(Y,Z)) - \mathcal{L}_X h(\overline{\nabla}_X Y, Z) - \mathcal{L}_X h(Y, \overline{\nabla}_X Z) + \mathcal{L}_X h(\overline{\nabla}_Y X, Z)\\
&+ \mathcal{L}_X h(Y, \overline{\nabla}_Z X)\\
&= X(\mathcal{L}_X h(Y,Z)) - \mathcal{L}_X h([X,Y], Z) - \mathcal{L}_X h(Y, [X,Z])\\
&= Xh(\overline{\nabla}_Y X, Z) + Xh(Y, \overline{\nabla}_Z X) - h(\overline{\nabla}_{[X,Y]}X, Z) - h([X,Y], \overline{\nabla}_Z X)\\
&- h(\overline{\nabla}_Y X, [X,Z]) - h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X).
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
Xh(\overline{\nabla}_Y X, Z) &= h(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X, Z) + h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_X Z),\\
Xh(Y, \overline{\nabla}_Z X) &= h(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Z X) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X^2 h(Y,Z) &= h(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X, Z) + h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_X Z) + h(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Z X) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X)\\
&- h(\overline{\nabla}_{[X,Y]}X, Z) - h([X,Y], \overline{\nabla}_Z X) - h(\overline{\nabla}_Y X, [X,Z]) - h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X)\\
&= h(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X, Z) + h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_X Z) + h(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Z X) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X)\\
&- h(\overline{\nabla}_{[X,Y]}X, Z) - h(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) - h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_X Z)\\
&+ h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) - h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X)\\
&= h(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X) - h(\overline{\nabla}_{[X,Y]}X, Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X)\\
&- h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X).
\end{aligned}$$

Somamos e subtraímos o termo $h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z)$ para obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X^2 h(Y,Z) &= h(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X, Z) - h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) - h(\overline{\nabla}_{[X,Y]}X, Z) \\
&+ 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X) - h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X) \\
&= R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X) \\
&- h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X) \\
&= 2R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X) \\
&- h(Y, \overline{\nabla}_{[X,Z]}X) - R(X,Y,X,Z) \\
&= 2R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Z X) \\
&- h(Y, \overline{\nabla}_Z\overline{\nabla}_X X) - h(\overline{\nabla}_{[X,Z]}X, Y) + h(Y, \overline{\nabla}_Z\overline{\nabla}_X X) - R(X,Y,X,Z) \\
&= 2R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + R(X,Z,X,Y) \\
&+ h(Y, \overline{\nabla}_Z\overline{\nabla}_X X) - R(X,Y,X,Z) \\
&= 2R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + h(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X, Z) + h(Y, \overline{\nabla}_Z\overline{\nabla}_X X) \\
&= 2R(X,Y,X,Z) + 2h(\overline{\nabla}_Y X, \overline{\nabla}_Z X) + (\mathcal{L}_{\overline{\nabla}_X X} h)(Y,Z).
\end{aligned}$$

Ao considerar uma base ortonormal de N, temos

$$\begin{aligned}
tr(\partial_t^2 g_t) &= tr(\mathcal{L}_X^2 h) \\
&= 2tr_N(R(X,e_i,X,e_i)) + 2\sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 + \sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_{\overline{\nabla}_X X} h)(e_i,e_i).
\end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_{\overline{\nabla}_X X} h)(e_i,e_i) &= \sum_{i=1}^n [h(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_X X, e_i) + h(e_i, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_X X)] \\
&= 2\sum_{i=1}^n h(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_X X, e_i) \\
&= 2div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X)) - 2h(\overline{\nabla}_X X, H).
\end{aligned}$$

Assim,

$$tr(\partial_t^2 g_t) = 2tr_N(R(X,e_i,X,e_i)) + 2\sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 + 2div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X)) - 2h(\overline{\nabla}_X X, H).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) &= \int_N \frac{d^2\omega_t}{dt^2}\Big|_{t=0} \\
&= \int_N \Big[-\frac{1}{2}\|\partial_t g_t\|^2 + \frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2\Big]\omega_t\Big|_{t=0} \\
&= \int_N \Big\{-\frac{1}{2}\Big[2\sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 + 2\sum_{i=1}^n g_t\Big(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X}X\Big)\Big] \\
&+ \frac{1}{2}\Big[2tr_N(R(X,e_i,X,e_i)) + 2\sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 + 2div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X)) \\
&- 2h(\overline{\nabla}_X X, H)\Big] + \frac{1}{4}[-2\langle H,X\rangle + 2div_{N_t}(P_{TN_t}X)]^2\Big\}\omega_t\Big|_{t=0} \\
&= \int_N \Big\{tr_N(R(X,e_i,X,e_i)) + \sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 + div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X)) \\
&- h(\overline{\nabla}_X X, H) - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 - \sum_{i=1}^n g_t\Big(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X}X\Big) \\
&+ [-\langle H,X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X)]^2\Big\}\omega_t\Big|_{t=0},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos que $\int_N div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X))\mu = 0$, portanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) = \int_N \Big\{ & tr_N(R(X,e_i,X,e_i)) + \sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 - h(\overline{\nabla}_X X, H) \\
& - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2 - \sum_{i=1}^n g_t\Big(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X}X\Big) \\
& + \Big[-\langle H,X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X)\Big]^2\Big\}\omega_t\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

□

A fórmula acima se reduz-se ao caso clássico para variações ortogonais de superfícies mínimas. O corolário a seguir mostra que a fórmula acima reduz à forma usual em que é apresentada a segunda variação do volume na literatura.

Corolário 4.4. *Nas hipóteses acima, se N é uma subvariedade mínima (isto é, se $H = 0$) e $X \in TN_t^\perp$ então*

$$\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) = \int_N [-Ric_0^\perp(X) + \|\nabla X\|^2 - 2\|A^0(X)\|^2]d\mu,$$

para $\{e_1, \ldots, e_n\}$ campos ortogonais.

Demonstração. Se $H = 0$ e $X \in TN_t^\perp$, então

$$\begin{aligned}
tr(\partial_t g_t)|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n} \partial_t g_t(e_i, e_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= -2\langle H, X \rangle + 2\sum_{i=1}^{n} e_i \langle X, e_i \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A diferença do feito acima, utilizamos que $X \in TN_t^\perp$ para calcular $\|\partial_t g_t\|^2$. Consideramos uma base de campos ortonormais $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tais que $\nabla_{e_i} e_j = 0$. Portanto

$$B(e_i, e_j) = \overline{\nabla}_{e_i} e_j,$$

e

$$\begin{aligned}
h(\overline{\nabla}_{e_i} X, e_j) &= e_i h(X, e_j) - h(X, \overline{\nabla}_{e_i} e_j) \\
&= -h(X, \overline{\nabla}_{e_i} e_j - \nabla_{e_i} e_j) \\
&= -h(X, B(e_i, e_j)),
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\|\partial_t g_t\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_t g_t)(e_i, e_j)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [h(\overline{\nabla}_{e_i} X, e_j) + h(e_i, \overline{\nabla}_{e_j} X)]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [-h(X, B(e_i, e_j)) - h(X, B(e_i, e_j))]^2 \\
&= 4\sum_{i,j=1}^{n} h(X, B(e_i, e_j))^2.
\end{aligned}$$

De onde

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X, X) &= \frac{1}{2}\int_N [-\|\partial_t g_t\|^2 + tr(\partial_t^2 g_t)] d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_N \Bigg[2tr_N(R(X, e_i, X, e_i)) + 2\sum_{i=1}^{n} \|\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 + 2div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X)) \\
&- 4\sum_{i,j=1}^{n} h(X, B(e_i, e_j))^2 \Bigg] d\mu \\
&= \int_N [-Ric_0^\perp(X) + \|\nabla X\|^2 - \|A^0(X)\|^2] d\mu,
\end{aligned}$$

dado que $\int_N div_{N_t}(P_{TN_t}(\overline{\nabla}_X X))\mu = 0$. $\square$

Do Teorema 4.3 podemos obter estimativas para a segunda variação. Disto tratam os corolários a seguir.

Corolário 4.5. *Nas condições acima, temos a seguinte limitação para a segunda variação do volume*

$$\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) \leqslant \int_N \left[-Ric_0^{\perp}(X) + \|\nabla X\|^2 - h(\overline{\nabla}_X X, H) + (-\langle H, X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X))^2 \right]\mu.$$

Demonstração. Da segunda fórmula da variação do volume temos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) &= \int_N \left[-\frac{1}{2}\|\partial_t g_t\|^2 + \frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2 \right]\omega_t \Big|_{t=0} \\
&\leqslant \int_N \left[\frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2 \right]\omega_t \Big|_{t=0} \\
&= \int_N \Big[-Ric_0^{\perp}(X) + \|\nabla X\|^2 - h(\overline{\nabla}_X X, H) \\
&+ (-\langle H, X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X))^2 \Big]\mu.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.6. *Nas condições acima, temos a seguinte limitação para a segunda variação do volume*

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) \geqslant \int_N \Big[&-Ric_0^{\perp}(X) - h(\overline{\nabla}_X X, H) - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 \\
&- \sum_{i=1}^n g_t(e_i, P_{TN_t}\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{e_i} X} X) \Big]\mu.
\end{aligned}$$

Demonstração. Dado que

$$\sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i} X\|^2 + (-\langle H, X\rangle + div_{N_t}(P_{TN_t}X))^2 \geqslant 0,$$

obtemos o resultado. □

Teorema 4.4. *A fórmula para o volume de N_t é dada por*

$$\begin{aligned}
vol(N_t) = vol(N) &- \int_0^t \int_{N_s} \langle H_s, X_0\rangle \omega_s ds - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \langle H_s, X_i\rangle \omega_s dB_s^i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \Big\{ -Ric_s^{\perp}(X_i) + \|\nabla X_i\|^2 - h(\overline{\nabla}_{X_i} X_i, H_s) - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_s}\overline{\nabla}_{e_i} X_i\|^2 \qquad (4.4) \\
&- \sum_{i=1}^n g_s\Big(e_i, P_{TN_s}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i} X_i} X_i\Big) + \Big[-\langle H_s, X_i\rangle + div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) \Big]^2 \Big\}\omega_s ds.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela fórmula de Itô temos o seguinte

$$\begin{aligned} vol(N_t) &= vol(N) + \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_0)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_i) \circ dB_s^i \\ &= vol(N) + \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_0)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_i)dB_s^i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}^2 vol(N_s)(X_i, X_i)ds. \end{aligned}$$

Portanto aplicando primeira e segunda fórmula de variação obtemos o resultado. □

Corolário 4.7. *Se $\overline{\nabla}X = 0$, então $vol(N_t) = vol(N)$ para todo t.*

Demonstração. Se $\overline{\nabla}X = 0$, então $\overline{\nabla}_{e_i}X = 0$ para todo i, pois $\|\overline{\nabla}X\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\overline{\nabla}_{e_i}X\|^2$. Dado que $(\partial_t g_t)_x(e_i^t, e_i^t) = 2h(\overline{\nabla}_{e_i^t}X, e_i^t) = 0$, assim $\partial_t g_t = 0$ logo

$$\mathbb{D}vol(N)(X) = \mathbb{D}^2 vol(N)(X, X) = 0,$$

segue-se da fórmula de Itô que $vol(N_t) = vol(N)$. □

Da fórmula de Itô podemos calcular o comportamento da média do $vol(N_t)$.

Corolário 4.8. *Seja M compacta e ϕ_t o fluxo associado à EDE definida a partir dos campos gradientes das funções alturas ($X_i = \nabla h_i$) e X_0 tal que*

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} X_i = 0.$$

Assumindo que as curvaturas seccionais de M são não positivas, então

$$\mathbb{E}[vol(N_t)] \leqslant \mathbb{E}[vol(N_0)]e^{Kt},$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\mathbb{E}[vol(N_t)]\right) \leqslant K,$$

onde K é uma constante.

Observação 4.1. *Tal ϕ_t é o fluxo do movimento Browniano em M ver (HSU, 2002).*

Demonstração. Aplicamos esperança à fórmula (4.4) do funcional $vol(N_t)$ e dado que M é compacta podemos limitar $\|\nabla X_i\| \leqslant 1$. Logo pelo Corolário 4.5 temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[vol(N_t)] &= vol(N_0) - \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \int_{N_s} \langle H_s, X_0 \rangle \omega_s ds\bigg] \\
&+ \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \bigg\{-Ric_s^{\perp}(X_i) + \|\nabla X_i\|^2 - h(\overline{\nabla}_{X_i}X_i, H_s) - \sum_{i=1}^n \|P_{TN_s}\overline{\nabla}_{e_i}X_i\|^2 \\
&- \sum_{i=1}^n g_s\bigg(e_i, P_{TN_s}\overline{\nabla}_{P_{TN_t}\overline{\nabla}_{e_i}X_i}X_i\bigg) + \bigg[-\langle H_s, X_i\rangle + div_{N_s}(P_{TN_s}X_i)\bigg]^2\bigg\}\omega_s ds\bigg] \\
&\leqslant vol(N_0) - \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \int_{N_s} \langle H_s, X_0 \rangle \omega_s ds\bigg] + \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \bigg[-Ric_s^{\perp}(X_i) + \|\nabla X_i\|^2 \\
&- h(\overline{\nabla}_{X_i}X_i, H_s) + (-\langle H_s, X_i\rangle + div_{N_s}(P_{TN_s}X_i))^2\bigg]\omega_s ds\bigg] \\
&\leqslant vol(N_0) - \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \int_{N_s} \langle H_s, X_0 \rangle \omega_s ds\bigg] \\
&+ \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \bigg[1 - h(\overline{\nabla}_{X_i}X_i, H_s) + (div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) - \langle H_s, X_i\rangle)^2\bigg]\omega_s ds\bigg].
\end{aligned}
$$

Agora como $X_0 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_i^n \nabla_{X_i}X_i = 0$ então

$$
\langle H_s, X_0 \rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n h(\overline{\nabla}_{X_i}X_i, H_s) = 0.
$$

Assim

$$
\mathbb{E}[vol(N_t)] \leqslant vol(N_0) + \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{N_s} \bigg\{1 + (div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) - \langle H_s, X_i\rangle)^2\bigg\}\omega_s ds\bigg].
$$

Note que, para uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de TN_s

$$
\begin{aligned}
div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) - \langle H_s, X_i \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j}^s P_{TN_s}X_i, e_j\rangle - \sum_{j=1}^n \langle X_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \bigg[\langle \nabla_{e_j}^s P_{TN_s}X_i, e_j\rangle - \langle X_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle\bigg] \\
&= \sum_{j=1}^n \bigg[e_j\langle P_{TN_s}X_i, e_j\rangle - \langle P_{TN_s}X_i, \nabla_{e_j}^s e_j\rangle - \langle X_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle\bigg] \\
&= \sum_{j=1}^n \bigg[e_j\langle X_i, e_j\rangle - \langle X_i, \nabla_{e_j}^s e_j\rangle - \langle X_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle\bigg] \\
&= \sum_{j=1}^n \bigg[e_j\langle X_i, e_j\rangle - \langle X_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle\bigg].
\end{aligned}
$$

Agora, como $X_i = \nabla h_i$ temos

$$\begin{aligned} div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) - \langle H_s, X_i\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\Big[e_j\langle\nabla h_i, e_j\rangle - \langle\nabla h_i, \overline{\nabla}_{e_j}e_j\rangle\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{n}[e_j^2(h_i) - \overline{\nabla}_{e_j}e_jh_i] \\ &= \sum_{j=1}^{n} Hessh_i(e_j, e_j). \end{aligned}$$

Pelo fato de M ser compacta temos que $Hessh_i$ é limitada ($\|Hessh_i\| \leqslant K_i$). Portanto

$$(div_{N_s}(P_{TN_s}X_i) - \langle H_s, X_i\rangle)^2 \leqslant K_i^2.$$

Dessa forma obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[vol(N_t)] &\leqslant vol(N_0) + \mathbb{E}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{N_s}[1+K_i^2]\omega_s ds\Bigg] \\ &= vol(N_0) + \mathbb{E}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t[1+K_i^2]vol(N_s)ds\Bigg] \\ &= vol(N_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[1+K_i^2]\int_0^t\mathbb{E}[vol(N_s)]ds. \end{aligned}$$

Utilizando o lema de Gronwall para estimar o crescimento do volume, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[vol(N_t)] &\leqslant vol(N_0)\exp\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[1+K_i^2]\int_0^t ds\Bigg) \\ &= vol(N_0)\exp\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[1+K_i^2]t\Bigg). \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $K = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[1+K_i^2]$ obtemos

$$\mathbb{E}[vol(N_t)] \leqslant vol(N_0)e^{Kt}.$$

$\square$

Exemplo 4.1. *Se M é um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante. Sabemos que*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

para campos invariantes X, Y. Seja então $N \subset M$ um subgrupo de Lie compacto munido da métrica induzida por M. Considere $X_1, \ldots, X_k$ uma base ortonormal de campos invariantes tais que $\{X_1, \ldots, X_k\} \in T_eN$. Seja ϕ_t o fluxo associado ao campo invariante Y. Definamos como acima, $N_t = \phi_t(N)$. Então para cada t temos que $B = \{D\phi_t X_1, \ldots, D\phi_t X_k\}$ é uma base de TN_t. Observamos que, na base B, a métrica é descrita como

$$(g_t)_{ij} = h(D\phi_t X_i, D\phi_t X_j).$$

Sejam a_{ij} *os escalares tais que*

$$[X_i, Y] = \sum_j a_{ij} X_j + Z,$$

com $Z \in T_e N^{\perp} \subset T_e M$. *Agora se* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *é uma base ortonormal então* $a_{ij} = h([X_i, Y], X_j)$. *Além disso, como*

$$h([X_i, Y], X_j) = h(X_i, [Y, X_j]) \quad \text{e} \quad [Y, X_j] = -[X_j, Y],$$

segue-se que

$$a_{ij} = -a_{ji} = h([X_j, Y], X_i),$$

e daí obtemos que $a_{ii} = 0$ *para todo* i. *Assim temos que*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}vol(N)(Y) &= \int_N \mathcal{L}_Y \mu + \int_N \frac{d\omega_t}{dt}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_N tr(\partial_t g_t)\omega_t \bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Primeiro, note que para algum $x = \phi_t(x_0) \in N_t$ *temos*

$$\begin{aligned} \partial_t((g_t)_{ij}(x)) &= \mathcal{L}_Y h(\phi_{t*} X_i, \phi_{t*} X_j)_{\phi_t(x_0)} \\ &= \mathcal{L}_Y \phi_t^* h(X_i, X_j)_{x_0} \\ &= \phi_t^* h(\nabla_{X_i} Y, X_j)_{x_0} + \phi_t^* h(X_i, \nabla_{X_j} Y)_{x_0} \\ &= \phi_t^* [h(\nabla_{X_i} Y, X_j)_{x_0} + h(X_i, \nabla_{X_j} Y)_{x_0}] \\ &= \phi_t^* \left[h\left(\frac{1}{2}[X_i, Y], X_j\right)_{x_0} + h\left(X_i, \frac{1}{2}[X_j, Y]\right)_{x_0} \right] \\ &= \frac{1}{2}\phi_t^* \left[h\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} X_l + Z, X_j\right)_{x_0} + h\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l + Z\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1} [a_{il}(g_t)_{lj}(x) + a_{jl}(g_t)_{il}(x)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} tr(\partial_t g_t)(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \partial_t (g_t)_{ii}(x) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1} \sum_{l=1} [a_{il}(g_t)_{li}(x) + a_{il}(g_t)_{il}(x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il}(g_t)_{il}(x). \end{aligned}$$

Assim obtemos a primeira fórmula de variação para o volume de N_t*;*

$$\mathbb{D}vol(N)(Y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} \int_N (g_0)_{il}(x_0)\mu.$$

Dado que $\{X_1,\ldots,X_k\}$ *é uma base ortonormal de* T_eN *e* $a_{ii}=0$*, então*

$$\mathbb{D}vol(N)(Y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}vol(N)=0,$$

de onde tiramos que $\mathbb{D}vol(N)(Y)=0$*. Dessa forma temos que* ϕ_t *preserva o volume.*

Exemplo 4.2. *Consideremos o grupo de lie* $G=SL(3,\mathbb{R})$ *e o subgrupo compacto* $G_0=SO(3,\mathbb{R})$*, seja* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{g}_0$ *as álgebras de lie de* G *e* G_0*, logo uma decomposição de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *é dada por*

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{s},\qquad [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]\subset\mathfrak{g}_0,\qquad [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{s}]\subset\mathfrak{s}.$$

Uma base para $\mathfrak{g}_0$ *é dada por*

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad X_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\qquad X_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Os comutadores dos elementos da base são

$$[X_1,X_2]=X_3,\qquad [X_3,X_1]=X_2,\qquad [X_2,X_3]=X_1.$$

Tome $Y\in\mathfrak{g}$*, então* $Y=Y_{\mathfrak{g}_0}+Y_{\mathfrak{s}}$ *onde* $Y_{\mathfrak{g}_0}=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3$ *segue-se que*

$$\begin{aligned}[X_1,Y]&=[X_1,Y_{\mathfrak{g}_0}+Y_{\mathfrak{s}}]\\&=[X_1,Y_{\mathfrak{g}_0}]+[X_1,Y_{\mathfrak{s}}]\\&=[X_1,b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3]+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s}\\&=b_1[X_1,X_1]+b_2[X_1,X_2]+b_3[X_1,X_3]+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s}\\&=b_2X_3-b_3X_2+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s}.\end{aligned}$$

Analogamente

$$[X_2,Y]=b_3X_1-b_1X_3+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s},$$

e

$$[X_3,Y]=-b_2X_1+b_1X_2+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s}.$$

Agora da nossa relação ($[X_i,Y]=\sum_j a_{ij}X_j+parte\ \ em\ \ \mathfrak{s}$) *temos que*

$$a_{11}=0,\quad a_{22}=0,\quad a_{33}=0.$$

Logo pela observação feita para grupos de Lie obtemos que

$$\mathbb{D}vol(G_0)(Y)=\mathbb{D}^2vol(G_0)(Y,Y)=0.$$

4.3 Caso de campos conformalmente Killing

Nesta seção veremos o comportamento da variação do volume para o caso em que os campos que dirigem a equação estocástica (4.1) são conformalmente Killing. Como antes assuma que $N \subset M$ é uma subvariedade compacta e que os campos $\{X_1, \ldots, X_n\}$ que dirigem a equação que da origem ao fluxo ϕ_t são conformalmente Killing, isto é,

$$\mathcal{L}_{X_i} h = \lambda_i h,$$

para uma função λ_i. Podemos ver que

$$\lambda_i = \frac{2}{dim(M)} div(X_i).$$

Teorema 4.5. *Nas condições acima, temos que*

$$\mathbb{D}vol(N)(X) = n \int_N \lambda\mu,$$

e

$$\mathbb{D}^2 vol(N)(X, X) = \frac{n}{2} \int_N \left[X(\lambda) + \frac{1}{2} n\lambda^2 \right] \mu.$$

Demonstração. Dado que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} vol(N_t) = \int_N \frac{d}{dt} \omega_t|_{t=0}.$$

Se g_t é uma métrica evoluindo no tempo, então

$$\frac{d}{dt}\omega_t = \frac{1}{2} tr(\partial_t g_t)\omega_t.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} tr(\partial_t g_t) &= \sum_{i=1}^n \partial_t g_t(e_i^t, e_i^t) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X h(e_i^t, e_i^t) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda h(e_i^t, e_i^t) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n h(e_i^t, e_i^t) \\ &= n\lambda. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{D}vol(N)(X) = \frac{1}{2} n \int_N \lambda\mu.$$

Para a segunda fórmula de variação temos que

$$\frac{d}{dt} tr(T) = -\langle \partial_t g_t, T \rangle + tr(\partial_t T).$$

Desta forma
$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_t = [-\frac{1}{2}\|\partial_t g_t\|^2 + \frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2]\omega_t.$$
Primeiro
$$\begin{aligned}
\|\partial_t (g_t)_{ij}(x)\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_t g_t)(e_i^t, e_j^t)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [\mathcal{L}_X h(e_i^t, e_j^t)]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [\lambda h(e_i^t, e_j^t)]^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} h(e_i^t, e_j^t)^2 \\
&= n\lambda^2.
\end{aligned}$$

Agora encontramos

$$\begin{aligned}
(\partial_t^2 g_t)_{ij}(x) &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X h)(e_i^t, e_j^t) \\
&= \mathcal{L}_X(\lambda h)(e_i^t, e_j^t) \\
&= (\mathcal{L}_X \lambda) h(e_i^t, e_j^t) + \lambda \mathcal{L}_X h(e_i^t, e_j^t) \\
&= X(\lambda) h(e_i^t, e_j^t) + \lambda^2 h(e_i^t, e_j^t) \\
&= (X(\lambda) + \lambda^2) h(e_i^t, e_j^t).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
tr(\partial_t^2 g_t) &= \sum_{i=1}^{n} (\partial_t^2 g_t)_{ii}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X(\lambda) + \lambda^2) h(e_i^t, e_i^t) \\
&= n(X(\lambda) + \lambda^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\omega_t &= \left[-\frac{1}{2}\|\partial_t g_t\|^2 + \frac{1}{2}tr(\partial_t^2 g_t) + \frac{1}{4}tr(\partial_t g_t)^2 \right]\omega_t \\
&= \left[-\frac{1}{2}n\lambda^2 + \frac{1}{2}n(X(\lambda) + \lambda^2) + \frac{1}{4}(n\lambda)^2 \right]\omega_t \\
&= \left[\frac{n}{2}X(\lambda) + \frac{1}{4}n^2\lambda^2 \right]\omega_t.
\end{aligned}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 vol(N)(X,X) &= \frac{d^2}{dt^2} vol(N_t)|_{t=0} \\
&= \int_N \frac{d^2}{dt^2}\omega_t|_{t=0} \\
&= \int_N \left[\frac{n}{2}X(\lambda) + \frac{1}{4}n^2\lambda^2\right]\mu \\
&= \frac{n}{2}\int_N \left[X(\lambda) + \frac{1}{2}n\lambda^2\right]\mu
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.6. *Se ϕ_t é o fluxo da equação diferencial estocástica (4.1) e os campos que dirigem a equação estocástica são conformalmente Killing, então a fórmula para o volume de N_t é dada por*

$$
\begin{aligned}
vol(N_t) = vol(N) &+ \frac{1}{2}n\int_0^t\int_{N_s} \lambda_0\omega_s ds + \frac{1}{2}n\sum_{i=1}^m \int_0^t\int_{N_s} \lambda_i\omega_s dB_s^i \\
&+ \frac{n}{4}\sum_i^m \int_0^t\int_{N_s} \left[X_i(\lambda_i) + \frac{n}{2}\lambda_i^2\right]\omega_s ds.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Demonstração. Pela fórmula de Itô temos o seguinte

$$
\begin{aligned}
vol(N_t) &= vol(N) + \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_0)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_i)\circ dB_s^i \\
&= vol(N) + \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_0)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}vol(N_s)(X_i)dB_s^i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbb{D}^2 vol(N_s)(X_i,X_i)ds.
\end{aligned}
$$

Portanto aplicando primeira e segunda fórmula de variação para o caso em que os campos que dirigem a equação são conformalmente Killing obtemos o desejado. □

Corolário 4.9. *Nas condições acima, se λ_i são constantes para todo i, então*

$$
\mathbb{E}[vol(N_t)] = \mathbb{E}[vol(N)]e^{kt},
$$

onde k é uma constante.

Demonstração. Utilizamos a fórmula (4.5) para o volume de N_t

$$
\begin{aligned}
vol(N_t) = vol(N) &+ \frac{1}{2}n\lambda_0\int_0^t vol(N_s)ds + \frac{1}{2}n\sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^t\int_{N_s} \omega_s dB_s^i \\
&+ \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2 \int_0^t vol(N_s)ds.
\end{aligned}
$$

Aplicando a esperança na igualdade acima produzimos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[vol(N_t)] &= vol(N) + \frac{1}{2}n\lambda_0 \int_0^t \mathbb{E}[vol(N_s)]ds + \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2 \int_0^t \mathbb{E}[vol(N_s)]ds \\ &= vol(N) + \left[\frac{1}{2}n\lambda_0 + \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2\right]\int_0^t \mathbb{E}[vol(N_s)]ds.\end{aligned}$$

Utilizamos o lema de Gronwall para obter

$$\mathbb{E}[vol(N_t)] = vol(N)e^{(\frac{1}{2}n\lambda_0 + \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2)\int_0^t ds}.$$

Portanto

$$\mathbb{E}[vol(N_t)] = vol(N)\exp\left(\frac{1}{2}n\lambda_0 t + \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2 t\right),$$

Por fim, tomando

$$k = \frac{1}{2}n\lambda_0 + \frac{n^2}{8}\sum_i^m \lambda_i^2,$$

obtemos o resultado. □

5 Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a integral estocástica sobre o espaço de Fréchet das subvariedades compactas de uma variedade diferenciável M com respeito a processos estocásticos induzidos neste espaço por fluxos estocásticos que são solução de uma equação diferencial estocástica. Desse modo generalizamos o resultado apresentado no artigo de (KINATEDER; MCDONALD, 2002).

Em ressumo

- Introduzimos os conceitos básicos da teoria de variedades de Frechét.
- Fizemos uma revisão rápida das ferramentas básicas do cálculo estocástico.
- Construímos para a variedade $\mathcal{S}(M)$, seguindo as ideias apresentadas no trabalho de (KINATEDER; MCDONALD, 2002), uma fórmula de Itô para um funcional definido no espaço de Fréchet $\mathcal{S}(M)$ e com respeito a um processo estocástico definido no mesmo espaço a partir de um fluxo de difeomorfismos associado a uma equação diferencial estocástica sobre a variedade M.
- Utilizamos a fórmula de Itô construída para obter estimativas do funcional energia (no caso de curvas fechadas) e o funcional volume (no caso de variedades em geral) para os processos $N_t = \phi_t(N)$.
- Estudamos o caso particular em que os campos que dirigem a equação estocástica são conformalmente Killing.

O formalismo introduzido somente foi estudado, como dito acima, para um funcional. No entanto ele pode funcionar para outro tipo de funcionais, como por exemplo o funcional curvatura total entre outros. Por outro lado, também podemos pensar em outro tipo de variedades de Fréchet nas quais a fórmula de Itô pode ser definida e determinada de forma similar à feita neste trabalho.

Referências

ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.; RATIU, T. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 75. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 58.

CALIN, O. An introduction to stochastic calculus with applications to finance. *Ann Arbor*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 11, 28 e 30.

DUNCAN, T. Frechet-valued martingales and stochastic integrals. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, Taylor & Francis, v. 1, n. 1-4, p. 269–284, 1975. Citado na página 10.

ELWORTHY, D. Geometric aspects of diffusions on manifolds. In: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII, 1985–87*. [S.l.]: Springer, 1988. p. 277–425. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 28, 36, 37 e 49.

ELWORTHY, K.; ROSENBERG, S. Homotopy and homology vanishing theorems and the stability of stochastic flows. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, Springer, v. 6, n. 1, p. 51–78, 1996. Citado na página 54.

ELWORTHY, K. D. *Stochastic differential equations on manifolds*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982. v. 70. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 37.

GARABEDIAN, P. R.; SCHIFFER, M. *Convexity of domain functionals*. California: Stanford, 1953. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.

GRAY, A. *Tubes*. Addison-Wesley: Redwood City, CA, (1990). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.

HAMILTON, R. *The inverse function theorem of Nash and Moser*. Bull: AMS 7, p. 65-222, (1982). Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 17, 19 e 21.

HSU, E. P. *Stochastic analysis on manifolds*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 38. Citado 5 vezes nas páginas 11, 28, 32, 33 e 67.

IKEDA, N.; WATANABE, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. [S.l.]: Elsevier, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.

KINATEDER, K.; MCDONALD, P. An ito formula for domain-valued processes driven by stochastic flows. *Probability theory and related fields*, Springer, v. 124, n. 1, p. 73–99, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 13, 40, 41 e 76.

KUNITA, H. *Stochastic flows and stochastic differential equations*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. v. 24. Citado 4 vezes nas páginas 11, 28, 32 e 35.

KUO, H.-H. *Introduction to stochastic integration*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 11, 28, 31 e 49.

LEE, J. M. Smooth manifolds. In: *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 1–31. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 60.

MALLIAVIN, P. *Stochastic Analysis*. Berlin: Springer Verlag, (1998). Citado na página 35.

ØKSENDAL, B. Stochastic differential equations. In: *Stochastic differential equations*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 65–84. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 49 e 54.

PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*. New York: Springer Verlag,, (1990). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.

TOPPING, P. *Lectures on the Ricci flow*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. v. 325. Citado 3 vezes nas páginas 49, 59 e 60.

ÜSTÜNEL, A. A generalization of itô's formula. *Journal of Functional Analysis*, Academic Press, v. 47, n. 2, p. 143–152, 1982. Citado na página 10.

USTUNEL, A. Some applications of stochastic calculus on the nuclear spaces to the nonlinear problems. In: *Nonlinear Stochastic Problems*. [S.l.]: Springer, 1983. p. 481–508. Citado na página 10.

WONG, E.; ZAKAI, M. *Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete: Springer, 1969. v. 12. 87-97 p. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.