



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GILBERTO BRITO DE ALMEIDA FILHO

**Propriedades de gapsets, construção de cotas
para a quantidade de gapsets de gênero g e
semigrupos de Weierstrass**

Campinas

2022

Gilberto Brito de Almeida Filho

**Propriedades de gapsets, construção de cotas para a
quantidade de gapsets de gênero g e semigrupos de
Weierstrass**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática.

Orientador: Saeed Tafazolian

Coorientador: Matheus Bernardini de Souza

Este trabalho corresponde à versão
final da Tese defendida pelo aluno Gil-
berto Brito de Almeida Filho e orien-
tada pelo Prof. Dr. Saeed Tafazolian.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

AL64p Almeida Filho, Gilberto Brito de, 1992-
Propriedades de gapsets, construção de cotas para a quantidade de gapsets de gênero g e semigrupos de Weierstrass / Gilberto Brito de Almeida Filho. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Saeed Tafazolian.
Coorientador: Matheus Bernardini de Souza.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Torre de corpos de funções. 2. Gapset. 3. Números de Fibonacci. 4. Semigrupos de Weierstrass. I. Tafazolian, Saeed, 1978-. II. Souza, Matheus Bernardini de, 1989-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Properties of gapsets, construction of quotas for the quantity of gapsets of genus g and Weierstrass semigroups

Palavras-chave em inglês:

Tower of functions fields

Gapset

Fibonacci numbers

Weierstrass semigroups

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Matheus Bernardini de Souza [Coorientador]

Cícero Fernandes de Carvalho

Guilherme Chaud Tizziotti

Pietro Speziali

Wanderson Tenório

Data de defesa: 24-02-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-5531-5531>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4489626081186306>

**Tese de Doutorado defendida em 24 de fevereiro de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MATHEUS BERNARDINI DE SOUZA

Prof(a). Dr(a). WANDERSON TENÓRIO

Prof(a). Dr(a). CÍCERO FERNANDES DE CARVALHO

Prof(a). Dr(a). GUILHERME CHAUD TIZZIOTTI

Prof(a). Dr(a). PIETRO SPEZIALI

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, pois sem ele eu não teria capacidade para desenvolver este trabalho. À minha família e esposa pela força e compreensão.

Agradecimentos

Minha absoluta gratidão ao soberano e eterno Deus, por acender em mim o desejo em estudar matemática e a vontade de ser professor e pesquisador, pela força e entendimento a cada passo, por me guardar todos esses anos longe de casa e pela força de acreditar que era capaz de conquistar essa jornada.

Agradeço a minha mãe e minhas irmãs, por apoiarem minhas escolhas, por compreenderem a necessidade de minha ausência durante essa empreitada e pela força necessária para que eu pudesse conquistar mais essa trajetória.

Agradeço imensamente a minha esposa e sua família pelo apoio e força durante essa caminhada, os quais me deram suporte sempre que precisei.

Agradeço aos professores e funcionários do IMECC e do PMA da Uem os quais contribuíram de forma indireta ou direta para minha formação profissional, acadêmica e pessoal, durante o tempo que tive o prazer de participar de cada um destes programas.

Um agradecimento especial aos amigos que se foram antes e durante desse tempo difícil em que nos encontramos provocado pela Covid-19.

Agradeço aos membros da banca Dr. Cícero Fernandes de Carvalho , Dr. Guilherme Chaud Tizziotti, Dr. Pietro Speziali e Dr. Wanderson Tenório por aceitarem participar desta banca. É uma honra ter este trabalho corrigido pelos senhores.

Agradeço, aos meus orientadores, Dr. Saeed Tafazolian por todo o apoio e acolhimento que me foi prestado, a luz dos acontecimentos que se sucederam durante esta pandemia. Com ele tive a oportunidade de crescer profissionalmente e conhecer melhor o universo das curvas maximais e torre de funções. Ao Dr. Matheus Bernardini por todo apoio e ajuda nesta empreitada, com quem pude crescer profissionalmente, graças as inúmeras reuniões, mesmo que por vídeo chamada. E em especial, ao professor dr. Fernando Torres que tive a oportunidade de conhecer desde do início do doutorado e que me acompanhou durante os primeiros anos dessa jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“E não vos conformeis com este século,
mas transformai-vos pela renovação da vossa mente,
para que experimenteis qual seja a boa, agradável e
perfeita vontade de Deus.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12: 2)*

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar propriedades de gapsets e a torre de funções sobre a equação $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$. Nossos principais resultados foram divididos em três capítulos. No segundo capítulo, buscamos estudar gapsets k -esparso puros de gênero g satisfazendo a desigualdade $2g \leq 3k$. Vemos que este tipo de gapset satisfaz propriedades interessantes, como por exemplo, um controle sobre a quantidade de saltos de tamanho k . No Capítulo três, construímos novas cotas superior e inferior para a quantidade de gapsets de gênero g . Para isso, identificamos gapsets com cobrimentos de tabuleiros e generalizamos as noções de conjunto de Apéry e vetor de Kunz de um semigrupo numérico para gapsets e m -extensões. No Capítulo quatro, exploramos a torre de corpos de funções dada pela equação $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$, com $i \geq 1$. O objetivo principal é exibir funções com pólos somente em P_i . Neste capítulo calculamos divisores que serão fundamentais para o processo de encontrar funções com divisor de pólos da forma nP_i , onde n é um gerador minimal do semigrupo de Weierstrass H_i . Desta forma, este trabalho contribui para um melhor entendimento dos gapsets tanto usando a propriedade de k -esparso puro quanto usando propriedades mais gerais, e ainda estende a compreensão sobre a torre de corpos de funções $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$ a qual é interessante para construir códigos geométricos.

Palavras-chave: Gapset; Fibonacci; semigrupo de Weierstrass; torre de corpos de funções.

Abstract

The aim of this work is to investigate properties of gapsets and the function tower on the equation $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$. Our main results were divided into three chapters. In the second chapter, we seek to study pure k -sparse gapsets of genus g satisfying the inequality $2g \leq 3k$. We see that this type of gapset satisfies interesting properties, as for example, a control over the amount of jumps of size k . In Chapter three, we create a new upper bound and lower bound for the number of gapsets of genus g . For this, we identify gapsets with a tiling of a g -board and generalize the notions of Apéry set and Kunz vector of a numerical semigroups to gapsets and m -extensions. In Chapter four, we explore the tower of functions fields given by the equation $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$, where the main objective is to display functions with poles only in P_i . In this chapter, we calculate divisors that will be fundamental to the process of finding functions which pole divisor has the form nP_i , where n is a minimal generator of the Weierstrass semigroup H_i . Thus, this work contributes to a better understanding of gapsets both using the pure k -sparse property and using more general properties, and also extends the understanding of the tower of function fields under the equation $x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}$ which is interesting to make geometric codes.

Keywords: Gapset; Fibonacci; Weierstrass semigroup; tower of function fields.

Lista de ilustrações

Figura 1 – g -tabuleiro	59
Figura 2 – Cobrimento de uma m -extensão que não é gapset	66
Figura 3 – Identificação m -filtrações com cobrimentos	68
Figura 4 – Um cobrimento não associado a um gapset	71

Lista de tabelas

Tabela 1 – Alguns exemplos do Teorema 2.42.	53
Tabela 2 – Alguns exemplos da aplicação ϕ_3 para gênero 3, 4, 5 e 6	54
Tabela 3 – Alguns valores de $\#\mathcal{G}_k(g)$	58
Tabela 4 – Casos considerados	69
Tabela 5 – A cota $\nu(g)$	72
Tabela 6 – Alguns valores de $\#\mathcal{F}(g, q, m = 4)$	84
Tabela 7 – Alguns valores da quantidade de gapsets com gênero g e profundidade q	85
Tabela 8 – O grau dos divisores D_1 à D_5 em alguns níveis da torre.	89
Tabela 9 – Os divisores de H_2	106
Tabela 10 – Os divisores de H_3	107
Tabela 11 – Os divisores de H_4	107
Tabela 12 – Os divisores de H_5	109
Tabela 13 – Os divisores de H_6	113
Tabela 14 – Os divisores de H_7	118
Tabela 15 – Os divisores de H_7	119
Tabela 16 – Os divisores de H_8	130

Lista de símbolos

G	Gapset
S	Semigrupo numérico
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
$H(P)$	Semigrupo de Weierstrass no ponto P
\mathcal{X}	Curva geometricamente irredutível, projetiva e não singular
$\mathbb{P}_{\mathcal{X}}$	Conjunto de todos os lugares da curva \mathcal{X}
$\mathbf{F}_n^{(k)}$	Número de Fibonacci k -generalizado de ordem n
$[x]$	Função maior inteiro
$\lfloor x \rfloor$	Função menor inteiro
n_g	Número de semigrupos numéricos (gapsets) de gênero g
$\Gamma(g)$	Conjunto de gapsets de gênero g
$\Gamma(g, q)$	Conjunto de gapsets de gênero g e profundidade q
$\mathcal{G}_k(g)$	Conjunto de gapsets k -esparso puros de gênero g
$\mathcal{G}_k(g, q)$	Conjunto de gapsets k -esparso puros de gênero g e profundidade q
$\mathcal{S}(g)$	Conjunto de semigrupos numéricos de gênero g
$\mathcal{C}(g)$	Conjunto de cobrimento de um g -tabuleiro
\mathbb{F}_q	Corpo finito com q elementos
\mathcal{T}	Torre de funções

Sumário

Introdução	15
1 Conceitos Básicos	22
1.1 Divisores	22
1.2 O Teorema de Riemann–Roch	28
1.3 Semigrupos numéricos e gapsets	30
1.4 Semigrupos de Weierstrass	33
1.5 Extensões Algébricas de Corpos de Funções	35
2 Gapset k-esparso puro	40
2.1 Alguns resultados básicos	40
2.2 Gapsets k -esparso puros	42
2.3 Identificando gapsets com m -sets	48
2.4 Sobre a cardinalidade de $\mathcal{G}_k(g)$, para $2g \leq 3k$	54
3 Gapsets e cobrimentos de tabuleiros	59
3.1 Resultados básicos	60
3.2 O vetor de Kunz para m -extensões	62
3.3 Identificando gapsets com cobertura de tabuleiros	65
3.4 Construindo gapsets via cobertura de tabuleiros	68
3.5 Parametrizando gapsets com gênero e profundidade fixados	72
4 Sobre semigrupos de Weierstrass em uma torre de corpos de funções	86
4.1 Resultados auxiliares	87
4.2 Semigrupos de Weierstrass	106
4.2.1 Calculando H_2	106
4.2.2 Calculando H_3	107
4.2.3 Calculando H_4	107
4.2.4 Calculando H_5	108
4.2.5 Calculando H_6	109
4.2.6 Calculando H_7	113
4.2.7 Calculando H_8	119
REFERÊNCIAS	131

Apêndices	135
APÊNDICE A Cálculo dos termos iniciais da sequência $w_k(g)$	136
APÊNDICE B Demonstrações de resultados da Seção 3.5	143

Introdução

Vamos apresentar dois dos principais conceitos que serão abordados neste trabalho, semigrupos numéricos e gapsets. Um semigrupo numérico S é um subconjunto de \mathbb{N}_0 contendo o zero, fechado em relação a adição usual, tal que $G(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$, chamado de conjunto de lacunas de S , é finito. Um *gapset* é um conjunto finito $G \subset \mathbb{N}$ que satisfaz a seguinte propriedade: seja $z \in G$ e escreva $z = x + y$, com x e $y \in \mathbb{N}$; então $x \in G$ ou $y \in G$. Este conceito foi formalmente introduzido em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b). Portanto, um gapset nada mais é do que o conjunto de lacunas de algum semigrupo numérico. Vamos denotar o conjunto de todos os gapsets de gênero g por $\Gamma(g)$ e o conjunto de todos os semigrupos numéricos por $\mathcal{S}(g)$. Seguindo a literatura já existente, vamos denotar por n_g a cardinalidade do conjunto $\mathcal{S}(g)$. Segue imediatamente que $n_g = \#\Gamma(g)$.

O valor de n_g para $g \leq 50$ foi calculado e pode ser encontrado em (BRAS-AMORÓS, 2008). Essa sequência está registrada como A007323 em OEIS e, listamos seus primeiros termos a seguir: 1, 1, 2, 4, 7, 12, 23, 39. Em posse desses valores, foi observado alguns padrões interessantes para n_g . Abaixo exibimos a conjectura de três propriedades para n_g feitas por Bras-Amorós.

Conjectura 0.1. *i)* $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-1} + n_{g-2}}{n_g} = 1.$

ii) $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_g}{n_{g-1}} = \varphi$, onde φ denota o número de ouro.

iii) $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$, para todo $g \geq 2$.

Um problema decorrente do item iii) da Conjectura 0.1 acima é saber se a seguinte desigualdade

$$n_g \geq n_{g-1} \tag{1}$$

é satisfeita para cada $g \geq 1$. A Desigualdade (1) é conhecida como versão fraca do item iii) da Conjectura 0.1 e tem sido objeto de estudo de diversos matemáticos.

A seguir, vamos comentar sobre alguns destes trabalhos. Utilizando semigrupos numéricos com gênero e número de ordinarização fixados é possível mostrar que

$$n_g = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor} n_{g,r},$$

onde $n_{g,r}$ é a quantidade de semigrupos numéricos com gênero g e número de ordinarização r . Com essa abordagem é possível mostrar que $n_g \leq n_{g+1}$ para $r > \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - 14$ ($g \geq 87$). Esse resultados podem ser encontrados em (BRAS-AMORÓS, 2008).

Outra abordagem sobre a Conjectura 0.1 que pode ser feita é através de semigrupos numéricos com gênero fixado e com profundidade menor ou igual à 3 (para a definição de profundidade veja Seção 3 do Capítulo 1). Definindo t_g como o número de semigrupos numéricos S com gênero g tais que $F(S) < 3m(S)$ é possível provar resultados interessantes, como por exemplo, que o número de semigrupos numéricos S com gênero g tal que $F(S) < 2m(S)$ é exatamente \mathbf{F}_{g+1} (o número de Fibonacci de ordem $g + 1$). Esse abordagem foi realizada em (ZHAO, 2010), onde foi conjecturado que

Conjectura 0.2. $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{t_g}{n_g} = 1$.

Posteriormente, foi provado que os itens i) e ii) da Conjectura 0.1 eram de fato verdadeiros. Tais demonstrações podem ser encontrada em (ZHAI, 2013), onde também é provado a Conjectura 0.2 de Zhao a qual garante que para um g suficientemente grande, a quantidade de semigrupos numéricos de genero g e profundidade no máximo três é praticamente igual a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g . Ficando em aberto, até o presente momento, tanto a verificação do item *iii*) da Conjectura 0.1 quanto a validade da Desigualdade (1). Uma outra abordagem possível para o estudo da Desigualdade (1) é fixar o gênero e a multiplicidade do semigrupo numérico. Fixando estes dois parâmetros podemos escrever

$$n_g = \sum_{m=0}^{g+1} N(m, g), \quad (2)$$

onde $N(m, g)$ é o número de semigrupos numéricos de gênero g e multiplicidade m . Usando a Igualdade (2) juntamente com a condição $2g < 3m$ é possível mostrar que $N(m, g) = N(m - 1, g - 1) + N(m - 1, g - 2)$, a demonstração deste e demais resultados é encontrada em (KAPLAN, 2012). Para mais exemplos de abordagens que buscaram descrever o valor exato de n_g , podemos citar o estudo onde é fixado o gênero g e a quantidade de lacunas pares, a qual é denotada por γ , de um semigrupo numérico. Esta análise é interessante, pois é inspirada na relação entre o estudo de curvas algébricas e semigrupos numéricos. Fixando g e γ , podemos reescrever n_g como

$$n_g = \sum_{\gamma=0}^{\lfloor \frac{2g}{3} \rfloor} N_\gamma(g), \quad (3)$$

onde $N_\gamma(g)$ é a quantidade de semigrupos com gênero g e γ lacunas pares. A Igualdade (3) permite notar certos comportamentos sobre uma família de semigrupos, i.e., podemos mostrar que a cardinalidade de semigrupos numéricos satisfaz $N_\gamma(g) = N_\gamma(3\gamma)$, quando $g \geq 3\gamma$. A demonstração deste e demais resultados sobre esta abordagem são encontrados em (BERNARDINI; TORRES, 2017).

Outros trabalhos exibiram cotas para o valor de n_g usando diversas técnicas. Podemos citar, por exemplo, o uso de multi-conjuntos e árvore de semigrupos para provar

que $2\mathbf{F}_g \leq n_g \leq 1 + 3 \cdot 2^{g-3}$, para todo $g \geq 3$ (onde (\mathbf{F}_g) é a sequência de Fibonacci). Este tópico é encontrado em (BRAS-AMORÓS, 2009).

Ainda, utilizando coeficientes de funções geradoras explícitas, é possível mostrar que $a_g \leq n_g \leq c_g$, tal estudo é realizado em (ELIZALDE, 2010). Outros trabalhos como em (O'DORNEY, 2013) que utilizou descendentes fortes e em (BLANCO; ROSALES, 2011) que estudou semigrupos numéricos com gênero e número de Frobenius fixados, podem servir como referência para estudos na busca de entender n_g . Um excelente material sobre alguns estudos citados acima pode ser encontrado em (KAPLAN, 2017).

Recentemente, a noção de gapsets foi utilizada para o estudo da sequência n_g . A motivação dessa abordagem é provavelmente devida ao trabalho realizado em (ZHAI, 2013), que garante que a partir de um gênero suficientemente grande a maioria dos gapsets com condutor c e multiplicidade m satisfazem a condição $c \leq 3m$. Denotando por n'_g a cardinalidade de todos os gapsets de gênero g satisfazendo a condição $c \leq 3m$ (este fato pode ser ajustado via definição precisa de limite, utilizando adequadamente a definição precisa de limite). Diversos resultados interessantes foram obtidos por Eliahou e Fromentin utilizando a noção de gapsets, entre eles podemos citar a validade de uma propriedade similar ao item 3) da Conjectura 0.1, onde eles obtiveram sob a condição $c \leq 3m$. Estes resultados podem ser encontrados em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b) e (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020a).

Além de abordar o estudo da sequência (n_g) via gapsets iremos usar no Capítulo 2 o conceito gapsets k -esparso puros (a definição de k -esparso puro pode ser encontrada na Seção 2 do Capítulo 2). O estudo de semigrupos numéricos via propriedade da diferenças entre lacunas consecutivas foi primeiro utilizado na tese de doutorado (VILLANUEVA, 2008), onde foi introduzido o estudo de semigrupos numéricos cuja distancia máxima entre duas lacunas consecutivas é 2, tais semigrupos eram chamados fracamente Arf. Posteriormente, esses semigrupos numéricos viriam a ser chamados de semigrupos esparso no artigo (MUNUERA; TORRES; VILLANUEVA, 2009). Semigrupos esparso surgem da generalização da condição de um dado semigrupo numérico ser Arf (mais informações sobre semigrupos Arf veja (CAMPILLO; MARTÍN; MUNUERA, 2000), (ROSALES; GARCÍA-SÁNCHEZ, 2009) e (ROSALES et al., 2004)). Atualmente, a definição de um semigrupo esparso foi generalizada para semigrupo k -esparso (e também k -esparso puro), para consultar tais generalizações veja (TIZZIOTTI; VILLANUEVA, 2016).

Algumas das aplicações mais interessantes de semigrupos numéricos, está na sua co-relação com a geometria algébrica no estudo de curvas algébricas e Semigrupos de Weierstrass. Mais explicitamente, dado um semigrupo numérico H , queremos saber se existe uma curva \mathcal{X} e algum ponto $P \in \mathcal{X}$ tais que $H = H(P)$, onde $H(P)$ é o semigrupo de Weierstrass de \mathcal{X} em P (veja essa definição na subseção 1.4). Se a resposta for positiva, dizemos que o semigrupo numérico H é um semigrupo de Weierstrass. Um

fato importante sobre esta pergunta é que nem sempre um semigrupo numérico é um semigrupo Weierstrass. Esta problemática foi introduzida em 1890 por Hurwitz. Após quase 80 anos de estudos, foi observada uma condição necessária para que um semigrupo numérico fosse de Weierstrass. Tal condição é chamada de condição de Buchweitz e pode ser encontrado um breve comentário em (FILHO; TAFAZOLIAN, 2021). Essa condição é ideal para verificarmos que semigrupo numérico H não é Weierstrass. Mais especificamente, um dos primeiros exemplos que mostram que nem todo semigrupo numérico é Weierstrass é o semigrupo H cujo conjunto de lacunas é $G(H) = \{1, 2, \dots, 11, 12, 19, 21, 24, 25\}$.

Diversos trabalhos realizaram estudos interessantes para tentar responder a pergunta se um semigrupo numérico é Weierstrass ou não. Por exemplo, podemos citar os seguintes artigos (OLIVEIRA, 1991), (KOMEDA, 2013) e (TORRES, 1994).

Vale ressaltar a aplicação da propriedade de um semigrupo ser esparso no estudo de semigrupos de Weierstrass: do ponto de vista geométrico, semigrupos numéricos esparsos estão intimamente relacionados com semigrupos de Weierstrass que surgem de uma cobertura duplo de curvas algébricas. Alguns trabalhos evidenciam este fato, por exemplo, é possível observar que a estrutura aritmética está fortemente influenciada pela paridade do número de Frobenius, para mais detalhes veja (TIZZIOTTI; VILLANUEVA, 2019). Além disso, em (VELOSO; CONTIERO; MOREIRA, 2014), foi estudado a estrutura de semigrupos esparsos e sua aplicação para semigrupos de Weierstrass, onde procuraram uma classificação e uma cota superior para o gênero de semigrupos esparsos. Ainda, provaram que, se o gênero de um o semigrupo esparso é grande o suficiente, então as últimas lacunas são espaçadas por 2. Este resultado é provado independentemente da paridade do número de Frobenius. Além disso, classificam alguns semigrupos esparsos com poucos saltos únicos ou com grande número de Frobenius.

Finalmente, vamos descrever os principais tópicos e resultados deste trabalho. Primeiramente, o leitor notará que este trabalho foi dividido em quatro capítulos, os quais tratam de diferentes temas. Abaixo, encontram-se um breve resumo dos capítulos.

No **Capítulo 1**, introduzimos os principais conceitos e resultados da literatura para o desenvolvimento deste trabalho. Por exemplo, apresentamos as definições e propriedades sobre divisores em corpo de funções algébricas, bem como o importante Teorema de Riemann-Roch e o Teorema das lacunas de Weierstrass. Apresentamos também a noção de semigrupos numéricos e gapsets, onde discutimos a utilização e importância destas duas nomenclaturas. Finalmente, para o propósito do Capítulo 4, abordamos os principais tópicos sobre extensões de corpos de funções. Para uma leitura mais completa, o leitor pode consultar os textos (STICHTENOTH, 1993), (MARTÍNEZ-MORO; MUNUERA; RUANO, 2008), (DEURING, 1973) e (FILHO; TAFAZOLIAN, 2021).

No **Capítulo 2**, apresentamos resultados com o propósito de contar gapsets via gênero e tamanho máximo entre a diferença de duas lacunas consecutivas. Encontramos

cotas para o parâmetro k (de k -esparso) relacionadas ao gênero, multiplicidade e condutor de um gapset. Este capítulo é baseado em resultados obtidos no trabalho (BERNARDINI; FILHO, 2022).

Neste capítulo, usaremos a condição $2g \leq 3k$ para obter os principais resultados do capítulo. Notamos que gapsets satisfazendo essa condição são "bem comportados", isto é, veremos que a família de gapsets que satisfaz essa condição possuem um único salto de tamanho k . Abaixo exibimos os principais resultados do Capítulo 2.

Teorema 2.48. *Sejam g e k inteiros não negativos, de modo que $2g \leq 3k$. Então a aplicação $\varphi : \mathcal{G}_k(g) \rightarrow \mathcal{G}_{k+1}(g+1), G \mapsto \varphi(G) = \phi(G)$ é bijetiva.*

Corolário 2.49. *Dado g um inteiro não negativo, seja k tal que $2g = 3k$. Então $\#\mathcal{G}_k(g) = \#\mathcal{G}_{k+n}(g+n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Em particular, usando o Corolário 2.49 encontramos uma nova sequência, a qual denotamos por $(w_k(g))$. Listamos essa sequência em OEIS, nomeada por A348619, cujos primeiros termos são 1, 2, 5, 12, 30, 70 e 167. Além disso, obtemos explicitamente os gapsets que entram na contagem dos números 1, 2, 5 e 12 dessa sequência.

No **Capítulo 3**, vamos abordar o estudo de gapsets usando cobrimentos de tabuleiros de uma linha por n colunas. Pela literatura, sabemos que tais cobrimentos estão diretamente ligados ao número de Fibonacci k -generalizado, denotado por $\mathbf{F}_n^{(k)}$. Da teoria de semigrupos numéricos, sabemos que o conjunto de Apéry e o vetor de Kunz estão intimamente ligados aos geradores do semigrupo numérico. Neste capítulo trazemos as nomenclaturas de conjunto de Apéry e vetor de Kunz para gapsets, além de generalizar tais conceitos para m -extensões. Tal fato indica que o conjunto de Apéry e o vetor de Kunz não decorrem da propriedade do semigrupo numérico ser fechado em relação a adição, mas de uma propriedade mais geral. Munidos dessa generalização construímos uma bijeção entre m -extensões e o conjunto de cobrimentos de um tabuleiro. A seguir apresentamos os principais resultados do Capítulo 3.

Para o próximo teorema, utilizamos a aplicação σ . Tal aplicação associa uma m -extensão (através do seu pseudo vetor de Kunz) à um cobrimento de tabuleiro. Essa construção é detalhada na Seção 3.2.

Teorema 3.20. *Seja $\sigma : \mathcal{A}(g) \rightarrow \mathcal{C}(g), A \mapsto \sigma(A) = \text{Kunz}(A)$ o mapa descrito acima. Então σ é uma bijeção.*

Corolário 3.32. *A quantidade de gapsets de gênero g (e também os gapsets de profundidade menor ou igual à 3) é limitado inferiormente por*

$$\left\lfloor \frac{3\mathbf{F}_{g+1} - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor - \lambda,$$

onde $\lambda = 0$, se $g \not\equiv 4 \pmod{6}$ e $\lambda = 1$ caso contrário.

Corolário 3.57. *Seja $g \geq 1$. Temos que*

$$n_g \leq \mathbf{F}_{g+1}^{\lfloor \frac{2g}{5} \rfloor} + \left\lfloor \frac{g+6}{3} \right\rfloor + \#\mathcal{TF}(g, q, m=4),$$

onde $q \in \left[\frac{2g}{5} + 1, g \right]$.

Finalmente, no **Capítulo 4** estudamos a torre de corpos de funções dada pela relação de recorrência

$$x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i}. \quad (4)$$

Sabemos que códigos algébricos geométricos são definidos por meio de espaços de Riemann-Roch de divisores em corpos de funções sobre corpos finitos. Uma das aplicações deste fato, ocorre na teoria da codificação, onde se faz necessária uma descrição explícita das bases de tais espaços. O problema de computar essas bases é difícil e é abordado, por exemplo, nos artigos (MAHARAJ, 2005), (HU; MAHARAJ, 2008) e (PELLIKAAN; STICHTENOTH; TORRES, 1998). Em (NOSEDA; OLIVEIRA; QUOOS, 2011) é dado um algoritmo para calcular bases desses espaços e ainda exibem semigrupos de Weierstrass sobre uma torre dada pela Equação (4).

O trabalho realizado neste capítulo, se destaca por usar métodos algébricos para exibir as funções com divisor de polos da forma nP , para todos os n 's que são geradores minimais de $H(P)$, para isso exibimos fórmulas para alguns divisores em qualquer nível da torre. Os principais resultados do Capítulo 4.

Teorema 4.1. (1) *Em M_1 , $\text{div}(y_1) = R_1 + S_1 - P_1 - Q_1$;*

(2) *Em M_i , para $i = 2k \geq 2$,*

$$\text{div}(y_i) = 2^{i-1}D_{i-1}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i),$$

com $\text{deg}(D_j(i)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k-1$ e $\text{deg}(D_{k-1+j}(i)) = 2^{k+1-j}$ para $j = 1, \dots, k$;

(3) *Em M_i , para $i = 2k + 1 \geq 3$,*

$$\text{div}(y_i) = 2^{i-1}D_{i-1}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^k D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j}D_{k+j}(i),$$

com $\text{deg}(D_j(i)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k$ e $\text{deg}(D_{k+j}(i)) = 2^{k+1-j}$ para $j = 1, \dots, k$.

Proposição 4.6. (1) *Em M_3 , $\text{div}(z_3) = Q_3 + R_3 + S_3 - 3P_3$;*

(2) *Em M_4 , $\text{div}(z_4) = R_4 + S_4 + D_1(4) - 3P_4 - 3Q_4$;*

(3) Em M_5 , $\text{div}(z_5) = D_1(5) + D_2(5) - 3D_\infty(5)$;

(4) Em M_6 , $\text{div}(z_6) = D_2(6) + 2D_3(6) - 3D_\infty(6) - 3D_1(6)$;

(5) Em M_7 , $\text{div}(z_7) = D_3(7) + 4D_4(7) - 3(D_\infty(7) + D_1(7) + D_2(7))$;

(6) Em M_8 , $\text{div}(z_8) = 2D_4(8) + 8D_5(8) - 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + S_8 + R_8 + Q_8 + P_8)$;

(7) Seja $i = 2k \geq 10$. Em M_i ,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right);$$

(8) Seja $i = 2k + 1 \geq 9$. Em M_i ,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j} D_{k+j}(i) \right).$$

1 Conceitos Básicos

Um corpo de funções sobre um corpo K é uma extensão algébrica e finita sobre o corpo de funções racionais $K(x)$. Este tipo de extensão de corpos ocorre naturalmente em vários ramos da matemática como, por exemplo, na Teoria dos Números e Geometria Algébrica.

Em Geometria Algébrica estamos interessados nas propriedades geométricas de uma curva algébrica $C = \{(\alpha, \beta) \in K^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0\}$, onde $f(X, Y)$ é um polinômio irredutível em duas variáveis sobre um corpo algebricamente fechado K . Acontece que o corpo $K(C)$ de funções racionais em C (que é um corpo de função algébrica sobre K) contém uma grande quantidade de informações sobre a geometria da curva C . Este aspecto da Teoria de corpos de funções algébricas é apresentado em vários livros sobre Geometria Algébrica, como por exemplo, (STICHTENOTH, 1993), (HARTSHORNE, 1977) e (SHAFAREVICH, 1994).

1.1 Divisores

Neste capítulo veremos o Teorema de Riemann–Roch e algumas de suas aplicações. Um dos objetivos deste capítulo é utilizar este teorema para relacionar curvas e semigrupos numéricos.

Vamos denotar por \mathbb{P}_F o conjunto de todos os lugares do corpo de funções F/K .

Definição 1.1. O grupo de divisores de F/K é definido como o grupo abeliano livre gerado pelos lugares F/K e é denotado por $\text{div}(F)$. Os elementos deste grupo são chamados de divisores de F .

Mais especificamente, os divisores são somas formais

$$D = \sum_{i=1}^n n_{P_i} P_i$$

onde $n_{P_i} \in \mathbb{Z}$ e $P_i \in \mathbb{P}_F$.

Os números n_{P_i} são chamados de *coeficientes do divisor* D . Para aqueles n'_i s que não são nulos, definimos o suporte do divisor D como

$$\text{Supp}(D) = \{P \in \mathbb{P}_F \mid n_P \neq 0\}$$

Um divisor da forma $D = P$ com $P \in \mathbb{P}_F$ é dito *divisor primo*.

Ressaltamos algumas propriedades do grupo $\text{div}(F)$. Dados dois divisores $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ e $D' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} m_P P$ temos que

1. A soma de D e D' é da forma:

$$D + D' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} (n_P + m_P) P$$

2. O divisor D é nulo se cada $n_P = 0$

Ainda podemos estabelecer uma ordenação parcial no grupo $\text{div}(F)$. Dados dois divisores $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ e $D' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} m_P P$ dizemos que

$$D \leq D' \Leftrightarrow n_P \leq m_P \text{ para todo } P \in \mathbb{P}_F.$$

Se ainda tivermos que $D \neq D'$ escrevemos que $D < D'$.

Quando cada $n_P \geq 0$ dizemos que D é um Divisor efetivo. Dado um divisor $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ podemos definir a aplicação $v_P(D) = n_P$ para cada $P \in \mathbb{P}_F$. Em termos desta aplicação podemos reescrever

$$\text{Supp}(D) = \{P \in \mathbb{P}_F \mid v_P(D) \neq 0\} \text{ e } D = \sum_{P \in \text{Supp}(D)} v_P(D) P$$

Definição 1.2. O grau de um divisor $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ é definido como

$$\text{deg}(D) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D) \text{deg}(P)$$

Vemos que a aplicação $\text{deg} : \text{div}(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\text{deg}(D)$ é um homomorfismo.

Exemplo 1.3. Seja F/K um corpo de funções. Dados $Q, P \in \mathbb{P}_F$ dois lugares com grau um. Podemos definir os seguintes divisores: $D_1 = 2P$, $D_2 = 20Q$ e $D_3 = 7P + Q$. Para exemplificar as definições acima temos:

a) $D_1 + D_2 = 2P + 20Q$;

b) $D_1 + D_3 = 9P + Q$;

c) D_1 não é comparável com D_2 , $D_3 \geq D_1$;

d) $v_P(D_3) = 7$, $v_Q(D_3) = 1$, e $v_{P'}(D_3) = 0$ para todo lugar $P' \neq P, Q$.

e) $\text{deg}(D_1) = 2$, $\text{deg}(D_2) = 20$ e $\text{deg}(D_3) = 8$.

Como sabemos, cada $0 \neq z \in F$ possui um número finito de polos e zeros. Então vamos denotar por $Z := \{P \in \mathbb{P}_F | v_P(z) > 0\}$ e $N := \{P \in \mathbb{P}_F | v_P(z) < 0\}$ o conjuntos de zeros e polos de z respectivamente, logo tanto Z quanto N são conjuntos finitos. Isto dá sentido a próxima definição.

Definição 1.4. *Seja $0 \neq z \in F$. Definimos então*

1. $\text{div}_0(z) := \sum_{P \in Z} v_P(z)P$, o divisor de zeros de z . O número $v_P(z)$ é chamado ordem do zero P ;
2. $\text{div}_\infty(z) := \sum_{P \in N} -v_P(z)P$, o divisor de polos de z . O número $v_P(z)$ é chamado ordem do polo P ;
3. $\text{div}(z) := \text{div}_0(z) - \text{div}_\infty(z)$, o divisor principal de z .

Observamos que os divisores de zeros e polos são ambos divisores efetivos e que o divisor principal pode ser escrito da forma

$$\text{div}(z) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(z)P. \quad (1.1)$$

Definição 1.5. *O conjunto dos divisores*

$$\text{Princ}(F) := \{\text{div}(z) | 0 \neq z \in F\}$$

é um subgrupo de $\text{div}(F)$ e é chamado de grupo dos divisores principais de F .

Dizemos que dois divisores $D, D' \in \text{div}(F)$ são *equivalentes* e escrevemos $D \sim D'$ se existe $0 \neq z \in F$ tal que $D = D' + \text{div}(z)$.

Definição 1.6. *Dado $D \in \text{div}(F)$, definimos o espaço de Riemann–Roch associado à D como*

$$\mathcal{L}(D) := \{z \in F | \text{div}(z) \geq -D\} \cup \{0\}$$

Escrevendo o divisor $D = \sum_{i=1}^n a_i P_i - \sum_{j=1}^m b_j Q_j$ com $a_i, b_j > 0$, podemos destacar algumas propriedades imediatas: para cada $z \in \mathcal{L}(D)$

- z possui zeros de ordem maior ou igual à b_j em Q_j ;
- z possui polos somente em cada P_i , com ordem menor ou igual à a_i .

Lema 1.7. *Seja $D \in \text{div}(F)$. Então*

$$(a) \quad z \in \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow v_P(z) \geq -v_P(D) \text{ para cada } P \in \mathbb{P}_F.$$

(b) $\mathcal{L}(D) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ existe $A \in \text{div}(D)$ tal que $A \geq 0$ e $A \sim D$.

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Seja $D \in \text{div}(F)$. Um fato sobre $\mathcal{L}(D)$ ele é um espaço vetorial sobre K . Com efeito, tomando $w, z \in \mathcal{L}(D)$ e $\lambda \in K$ temos pela propriedades de valorização que para cada $P \in \mathbb{P}_F$

$$v_P(w + z) \geq \min \{v_P(w), v_P(z)\} \geq -v_P(D)$$

$$v_P(\lambda w) = v_P(w) \geq -v_P(D).$$

Com isso, devemos verificar que este espaço vetorial tem ou não dimensão finita sobre K . Mas antes de verificarmos este fato, veremos a relação entre esses espaços quando estes estão associados à divisores equivalentes. Sejam dois divisores equivalentes D e D' , isto é, $D = D' + (z)$, então $\mathcal{L}(D)$ e $\mathcal{L}(D')$ são isomorfos. Para verificar este fato, basta observar que a aplicação

$$\psi : \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D')$$

$$x \longmapsto xz$$

é um isomorfismo.

Proposição 1.8. *Sejam $D, D' \in \text{div}(F)$.*

a) $\mathcal{L}(0) = K$.

b) $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ quando $D < 0$.

c) Se $D \leq D'$, então $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$ e $\dim_K \left(\frac{\mathcal{L}(D')}{\mathcal{L}(D)} \right) \leq \deg(D' - D)$.

d) $\mathcal{L}(D)$ tem dimensão finita. Se ainda tivermos $\deg(D) \geq 0$ então

$$\dim_K(\mathcal{L}(D)) \leq \deg(D) + 1.$$

e) Se $D \sim D'$ então $\dim_K(\mathcal{L}(D)) = \dim_K(\mathcal{L}(D'))$

Demonstração. a) A inclusão $K \subset \mathcal{L}(0)$ é imediata. Agora, dado $0 \neq z \in \mathcal{L}(0)$ temos que $v_P(z) \geq 0$ para cada $P \in \text{Supp}(P)$, isto implica que z não tem polos, isto é, $z \in K$. Portanto, $K = \mathcal{L}(0)$.

b) Seja D um divisor com $D < 0$. suponha que existe $0 \neq z \in \mathcal{L}(D)$ tal que $v_P(z) \geq -D > 0$ isto implica que z não tem polos, mas possui pelo menos um zero. Absurdo!

- c) Sejam D e D' dois divisores tais que $D \leq D'$. Primeiro vamos mostrar que $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$. Com efeito, seja $z \in \mathcal{L}(D)$ então $(z) \geq -D$, como $D \leq D'$ temos que $\text{div}(z) \geq -D \geq -D'$. Portanto, $z \in \mathcal{L}(D')$. Para verificar a segunda afirmação observamos que $D' = D + P_1 + \dots + P_r$ onde $P_i \in \mathbb{P}_F$ e $r \geq 0$. Segue da primeira parte que

$$\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D + P_1) \subset \dots \subset \mathcal{L}(D + P_1 + \dots + P_r).$$

Portanto, basta mostrar que $\dim_K \left(\frac{\mathcal{L}(D + P_1)}{\mathcal{L}(D)} \right) \leq 1$. Suponha que $D' = D + P$, onde P é um lugar. Como v_P é sobrejetora, então podemos escolher $u \in F$ tal que $v_P(u) = v_P(D') = v_P(D) + 1$.

Dado $z \in \mathcal{L}(D')$ temos que $v_P(z) \geq v_P(D') = -v_P(u)$, isto é, $v_P(xu) \geq 0$. Definindo a aplicação $f : \mathcal{L}(D') \rightarrow \frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{P}}$ dada por $f(z) = xu + \mathfrak{P}$. É fácil ver que esta aplicação tem kernel igual à $\mathcal{L}(D)$ e portanto induz uma aplicação injetiva entre K -espaços vetoriais, ou seja,

$$\dim_K \left(\frac{\mathcal{L}(D')}{\mathcal{L}(D)} \right) \leq \dim_K(F_P) = \deg(P) = \deg(D') - \deg(D).$$

- d) Seja D um divisor. Se $\deg(D) \leq 0$ já vimos que possui dimensão finita. Suponha que $\deg(D) = m > 0$ então pelo item anterior temos que $\dim_K(\mathcal{L}(D)) = \dim_K \left(\frac{\mathcal{L}(D)}{\mathcal{L}(0)} \right) + 1 \leq m + 1$.
- e) Suponha que $D = D' + (z)$ para algum $z \in F$. Defina a aplicação $\phi : \mathcal{L}(D') \rightarrow \mathcal{L}(D)$ dada por $\phi(x) = xz$ é um homomorfismo de K -espaços vetoriais com inversa é dada por $\psi(y) = yz^{-1}$. Portanto, $\dim_K(\mathcal{L}(D)) = \dim_K(\mathcal{L}(D'))$.

□

Pelo item d) vemos que $\mathcal{L}(D)$ possui dimensão finita sobre K . Este fato é tão importante que gera trabalhos acadêmicos onde se busca exibir uma base para o espaço de Riemann–Roch $\mathcal{L}(D)$. Por outro lado, a utilização da base de um espaço de Riemann–Roch pode ajudar a caracterizar certos tipos de curvas. Este fato torna importante sermos capazes de calcular a dimensão de um dado divisor.

Definição 1.9. Para cada $D \in \text{div}(F)$ definimos a dimensão do divisor D como $\ell(D) := \dim_K(\mathcal{L}(D))$.

Nos próximos resultados iremos nos preparar para sermos capazes de efetuar o calculo da dimensão de um divisor D .

Teorema 1.10. Seja $0 \neq z \in F$. Então

$$\deg_0(z) = \deg_\infty(z) = [F : K(z)]. \tag{1.2}$$

Demonstração. Escrevamos $m = [F : K(z)]$ e $D = \text{div}_\infty(z) = \sum_{i=1}^s -v_{P_i}(z)P_i$, onde P_1, \dots, P_s são todos os polos de z . Então

$$\text{deg}(D) = \sum_{i=1}^s v_{P_i}(x^{-1}) \text{deg}(P_i) \leq [F : K(z)].$$

Basta mostrarmos que a desigualdade contrária também é satisfeita. Escolhamos uma base f_1, \dots, f_m de $F/K(z)$ e um divisor D' tal que $D' \geq 0$ e $(f_i) \geq -D'$, para $i = 1, \dots, m$. Então temos que

$$\ell(kD + D') \geq m(k + 1), \text{ para todo } k \geq 0. \quad (1.3)$$

Escrevendo $d' = \text{deg}(D')$, obtemos que

$$\begin{aligned} n(k + 1) &\leq \ell(kD + D') \leq \text{deg}((kD + D')_+) + 1 = \text{deg}(kD + D') + 1 = \\ &k \text{deg}(D) + \text{deg}(D') + 1 = k \text{deg}(D) + d' + 1. \end{aligned}$$

Logo $m(k + 1) \leq k \text{deg}(D) + d' + 1 \Rightarrow k(\text{deg}(D) - n) \geq n - d' - 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Note que o lado direito da última desigualdade não depende de k , portanto $\text{deg}(D) \geq n$. Desse modo, provamos que $\text{deg}_\infty(z) = [F : K(z)]$. Como $(z)_0 = (z^{-1})_\infty$, podemos concluir que $\text{deg}_0(z) = \text{deg}_\infty(z^{-1}) = [F : K(z^{-1})] = [F : K(z)]$.

Vamos provar (1.3). Para isso, basta mostrarmos que os elementos $z^i f_j$, com $0 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n$, pertencem ao espaço $L(kD + D')$ e são linearmente independentes sobre K , pois isso nos dá que $\ell(kD + D') = \dim(L(kD + D')) > n(k + 1)$.

De fato, $\text{div}(z^i) = i \text{div}(z) = i \text{div}_0(z) - i \text{div}_\infty(z) \geq -i \text{div}_\infty(z) \geq -k \text{div}_\infty(z) = -kD$, pois $i \leq k$, e $\text{div}(f_j) \geq -D'$, para todo $j = 1, \dots, n$. Daí, $\text{div}(z^i f_j) = \text{div}(z^i) + \text{div}(f_j) \geq -kD - D'$, ou seja, $z^i f_j \in L(kD + D')$.

Ainda, se $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k a_{ij} z^i f_j = 0$, com $a_{ij} \in K$, temos que $\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} z^i \right) f_j = 0$,

donde $\sum_{i=1}^k a_{ij} z^i = 0$, para todo $j = 1, \dots, m$. Como z é um elemento transcendente sobre K , temos que $a_{ij} = 0$, para todos $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$. Isso mostra que os elementos $z^i f_j$ são linearmente independentes sobre K .

□

Como $\text{deg}_0(z) = \text{deg}_\infty(z)$ temos que todo divisor principal tem grau nulo.

Corolário 1.11. *Sejam $D, D' \in \text{div}(F)$ e $z \in F$.*

- a) *Se $D \sim 0 \Leftrightarrow D = (z)$ para algum $z \in F$.*
- a) *Se $D = D' + (z)$, então $\deg(D) = \deg(D')$.*
- b) *Se $\deg(D) = 0$, então D é principal $\Leftrightarrow \ell(D) = 1$.*

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Proposição 1.12. *Existe uma constante $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que para cada divisor $D \in \text{div}(F)$ vale a seguinte desigualdade:*

$$\deg(D) - \ell(D) \leq \lambda.$$

Demonstração. Veja em (STICHTENOTH, 1993). □

Definição 1.13. *Definimos o gênero de F/K como*

$$g(F) := \max \{ \deg(D) + 1 - \ell(D) \mid D \in \text{div}(F) \} \quad (1.4)$$

Corolário 1.14. $g(F) \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

1.2 O Teorema de Riemann–Roch

Definição 1.15. *Seja F/K um corpo de funções de gênero g . Um divisor $W \in \mathbb{P}_F$ é dito canônico, se $\ell(W) = g$ e $\deg(W) = 2g - 2$.*

Teorema 1.16 (Teorema de Riemann-Roch). *Seja W um divisor canônico do corpo de funções F/K de gênero g . Para qualquer divisor $D \in \text{div}(F)$ temos*

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g + \ell(W - D). \quad (1.5)$$

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Proposição 1.17. *Sejam F/K um corpo de funções de gênero g e D um divisor tal que $\deg(D) \geq 2g - 1$. Então $\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$.*

Demonstração. Basta notar que $\deg(W - D) \leq (2g - 2) - (2g - 1) < 0$, onde W é um divisor canônico de F . □

No próximo resultado, caracterizamos todos os divisores canônicos.

Proposição 1.18. *Seja F/K um corpo de funções de gênero g . Um divisor D é canônico se, e somente se, $\deg(D) = 2g - 2$ e $\ell(D) \geq g$.*

Demonstração. A ida desta afirmação já foi verificada. Agora seja D um divisor tal que $\deg(D) = 2g - 2$ e $\ell(D) \geq g$. Como

$$\ell(W - D) + 1 - g = \deg(D) + \ell(W - D) + 1 - g \geq g,$$

onde concluímos que $\ell(W - D) \geq 1$. Portanto, $\deg(W - D) = 0$ e como vimos anteriormente estes dois divisores são equivalentes. \square

Definição 1.19. *Seja $P \in \mathbb{P}_F$. Um inteiro $a \geq 0$ é chamado de não lacuna de P se existe um elemento $x \in F$ tal que $\text{div}_\infty(x) = aP$. Caso contrário a é chamado de lacuna de P .*

Proposição 1.20. *Sejam F/K um corpo de funções de gênero g e $P \in \mathbb{P}_F$. Então cada $a \geq 2g$ é um não lacuna de F . Em outras palavras existe $x \in F$ com divisor de polos $\text{div}_\infty(x) = aP$.*

Demonstração. Dado um inteiro $a \geq 2g$, consideramos o divisor $D = aP$, então $\deg((a - 1)P) = (a - 1)\deg(P) \geq 2g - 1$. Segue da Proposição 1.18 que $\ell((a - 1)P) = (a - 1)\deg(P) + 1 - g$ e $\ell(aP) = a\deg(P) + 1 - g$, ou seja, $\ell((a - 1)P) < \ell(aP)$. Assim, $\mathcal{L}((a - 1)P) \subsetneq \mathcal{L}(aP)$. Em outras palavras, cada elementos x de $\mathcal{L}(aP)$ que não está em $\mathcal{L}((a - 1)P)$ satisfaz $\text{div}_\infty(x) = aP$. \square

Esta proposição mostra que dado F/K um corpo de funções de gênero g (ou uma curva plana de gênero g) todo natural $n \geq 2g$ é um não lacuna de F , isto é, os números $2g, 2g + 1, 2g + 2, \dots$, são sempre não lacunas. Percebemos que para um corpo de funções (ou uma curva) de gênero g existirão um número finito de números que são lacunas e estes se encontram abaixo de $2g - 1$. Este fato aguça nossa intuição para a possibilidade do surgimento de um novo objeto (isto ficará mais claro nos próximos resultados).

Teorema 1.21 (*Teorema das lacunas de Weierstrass*). *Suponha que F/K possui gênero $g > 0$ e P um lugar de grau um. Então existe exatamente g lacunas $i_1 < \dots < i_g$ de P . Temos ainda que,*

$$i_1 = 1 \quad e \quad i_g \leq 2g - 1.$$

Demonstração. Temos a seguinte caracterização das lacunas:

$$a \text{ é lacuna de } P \text{ se, e só se, } \mathcal{L}((a - 1)P) = \mathcal{L}(aP).$$

Olhando para a sequência de espaços vetoriais

$$K = \mathcal{L}(0) \subset \mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(2P) \subset \cdots \subset \mathcal{L}((2g-1)P)$$

E lembrando que $\dim \mathcal{L}(0) = 1$, $\dim \mathcal{L}((2g-1)P) = g$ e $\dim \mathcal{L}(iP) \leq \dim \mathcal{L}((i-1)P) + 1$, para todo i . Juntando essas informações podemos concluir o teorema. \square

1.3 Semigrupos numéricos e gapsets

Antes de apresentarmos a definição de semigrupo de Weierstrass precisamos da seguinte definição.

Definição 1.22. *Seja $S \subset \mathbb{N}_0$. Dizemos que S é um Semigrupo numérico se:*

1. $0 \in S$.
2. $x + y \in S$, para $x, y \in S$.
3. $G(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.

Os elementos de $G(S)$ são chamados de *lacunas* de S e os elementos de S são chamados de *não lacunas*. A cardinalidade de $G(S)$ é chamada de *gênero* de S . Sobre semigrupos numéricos existem outros elementos importantes que valem a pena serem destacadas.

Definição 1.23. *Seja S um semigrupo numérico. A seguir definimos alguns invariantes:*

1. A *Multiplicidade de um semigrupo numérico S é o menor elemento não nulo de S , i.e., $\min\{x \in S \mid x \neq 0\}$. Denotamos por $m(S)$.*
2. O *número de Frobenius de um semigrupo numérico $S \neq \mathbb{N}_0$ é o maior inteiro não negativo que não está em S , i.e., $\max\{G(S)\}$. Denotamos por $F(S)$. No caso em que $S = \mathbb{N}_0$, convencionamos $F(S) = -1$.*
3. O *condutor de um semigrupo numérico S é definido $c(S) = F(S) + 1$;*
4. A *profundidade do semigrupo numérico é definido como $q(S) = \left\lceil \frac{c(S)}{m(S)} \right\rceil$.*

Exemplo 1.24. $S = \mathbb{N}_0$ é um semigrupo numérico com gênero zero. Além disso, é o único semigrupo o qual possui gênero nulo.

Proposição 1.25. *Se S é um semigrupo numérico com gênero $g \geq 1$ e multiplicidade m , então*

$$2 \leq m \leq g + 1. \tag{1.6}$$

Demonstração. Se $m \geq g + 2$, temos que $[1, g + 1] \subseteq G(S)$ e $\#G(S) \geq g + 1$, o que não pode acontecer. Assim $m \leq g + 1$. Por outro lado, como $G(S) \neq \emptyset$, então $1 \in G(S)$ e $m \geq 2$. \square

Exemplo 1.26. Se S tem gênero g e multiplicidade igual à 2, então

$$S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2g - 2, 2g, 2g + 1, \dots\}.$$

Este semigrupo é chamado de semigrupo Hiperelíptico.

Notamos que se S tem gênero $g \geq 1$, então $[2g, \infty) \subset S$. Com efeito, no intervalo $[1, 2g]$ existem, pelo menos, g não lacunas b_1, \dots, b_g . Se existe $x \geq 2g$ sendo uma lacuna, então $x \neq x - b_i \in G(S)$ para cada $i = 1, \dots, g$. Portanto, existiriam pelo menos $g + 1$ lacunas, o que é um absurdo. O caso em que $g = 0$ é trivial.

O próximo resultado nos fala sobre a relação entre o condutor e o gênero de um semigrupo numérico.

Proposição 1.27. Se S é um semigrupo numérico não vazio de gênero g e condutor c , então $g + 1 \leq c \leq 2g$.

Demonstração. Se $c \leq g$, então $G(S) \subseteq [1, g - 1]$ e $\#G(S) \leq g - 1$, portanto não ocorre. Assim, $c \geq g + 1$. Por outro lado, temos pela observação acima que $c \leq 2g$. \square

Definição 1.28. Dados $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ relativamente primos, o conjunto

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_r \rangle := \{a_1 n_1 + \dots + a_r n_r \mid \text{com } a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}_0\}$$

é um semigrupo numérico. O semigrupo $\langle n_1, n_2, \dots, n_r \rangle$ é chamado de semigrupo gerado por n_1, n_2, \dots, n_r .

Todo semigrupo numérico possui um conjunto finito de geradores, para mais detalhes ver (ROSALES; GARCÍA-SÁNCHEZ, 2009). Além disso, dentro do conjunto de geradores de um semigrupo numérico S podemos extrair o menor conjunto que gera S . Este conjunto "menor", chamamos de *conjunto minimal de geradores* de S .

Exemplo 1.29. Seja $S = \langle 2, 3 \rangle$. Como 2 é coprimo com 3 temos que S é um semigrupo numérico com $S = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ e $G(S) = \{1\}$

A proposição a seguir será muito útil no Capítulo 4 e permite calcular facilmente o gênero de um semigrupo numérico gerado por dois elementos.

Proposição 1.30. Seja $S := \langle a, b \rangle$ um semigrupo numérico gerado por a e b com $\text{mdc}\{a, b\} = 1$. Então

$$a) g(S) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

$$b) F(S) = (a-1)(b-1).$$

Demonstração. Veja (ROSALES; GARCÍA-SÁNCHEZ, 2009). □

O seguinte teorema permite identificar o conjunto minimal de geradores entre dois semigrupos numéricos.

Teorema 1.31. *Sejam S' e S dois semigrupos numéricos. Então*

$$a) S + S' = \{m + n \mid m \in S \text{ e } n \in S'\} \text{ semigrupo numérico.}$$

b) *Se α é um conjunto de geradores de S e β é um conjunto de geradores de S' , então $\alpha \cup \beta$ é um conjunto de geradores de $S + S'$.*

Demonstração. Veja (ROSALES; GARCÍA-SÁNCHEZ, 2009). □

Eliahou e Fromentin introduziram a noção formal de gapset, visando estudar, de forma independente de semigrupos numéricos, problemáticas provenientes da teoria de semigrupos numéricos. Esta nova abordagem se mostrou vantajosa e mais detalhes podem ser vistos em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b).

Definição 1.32. *Seja $G \subset \mathbb{N}$ um conjunto finito. Dizemos que G é um gapset se dado $z \in G$ e escreva $z = x + y$ com $x, y \in \mathbb{N}$ então $x \in G$ ou $y \in G$.*

Pensar em termos de gapsets em vez de semigrupos numéricos pode trazer benefícios. De fato, como mostraremos neste trabalho, os conjuntos de lacunas podem ser manipulados e transformados de maneiras que não são tão claramente expressáveis no nível dos semigrupos numéricos. Agora transferimos algumas terminologias de semigrupos numéricos para conjuntos de lacunas.

1) A multiplicidade de G é $m(G) := \min\{x \in \mathbb{N} \setminus G\}$;

2) o gênero de G é $g(G) := \#G$;

3) o número de Frobenius é $F(G) := \max\{G\}$ se $G \neq \emptyset$. Se $G = \emptyset$, $F(G) = -1$;

4) o condutor de G é $c(G) := F(G) + 1$;

5) a profundidade de G é $q(G) := \left\lceil \frac{c(G)}{m(G)} \right\rceil$.

Verifica-se que um gapset nada mais é que o conjunto de lacunas de um semigrupo numérico e vice versa.

Neste trabalho, usaremos a nomenclatura de gapsets quando estivermos usando propriedades de lacunas de um semigrupo numérico. Caso contrário, utilizaremos a nomenclatura de semigrupos numéricos.

A seguir, vamos listar alguns resultados e conceitos referentes a gapsets.

Seja G um gapset com multiplicidade m . Vamos denotar $G_0 = [1, m - 1]$ e para cada $i \geq 0$,

$$G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1], \text{ para todo } i \geq 0. \quad (1.7)$$

Note que $G_i \cap G_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Lembramos que dado $y \in \mathbb{N}$ e $X \subset \mathbb{N}$ temos que $y + X = \{y + x \mid x \in X\}$. A seguir apresentamos um resultado útil para o desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho.

Lema 1.33. *Seja G um gapset de multiplicidade m e profundidade q . Então*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}, \quad (1.8)$$

onde G_i foi definido em (1.7).

Demonstração. Como $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$, segue que G é união disjunta de G_i para $i \geq 0$. Seja c o condutor de G . Então $G \subset [1, c - 1]$. Uma vez que $(q - 1)m < c \leq qm$, por definição de q , segue que $G_i = \emptyset$ para $i \geq q$. Seja $f = c - 1$, como $f \in G$ e $f \geq (q - 1)m + 1$ temos que $f \in G_{q-1}$. Resta mostrar que $G_{i+1} \subset m + G_i$, para $i \geq 0$. Com efeito, seja $x \in G_{i+1}$. Como $G_{i+1} \subset [(i + 1)m + 1, (i + 2)m - 1]$ segue que $x - m \in [im + 1, (i + 1)m - 1]$ e uma vez que $x - m \in G$ concluímos que $x \in m + G_i$. □

Seja G um gapset. A *partição canônica* de G é a partição $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ dada por (1.8).

1.4 Semigrupos de Weierstrass

Seja \mathcal{X}_F uma curva plana, projetiva, irredutível e considere um ponto $P \in \mathcal{X}_F$. Considere $\mathcal{L}(mP)$ o conjunto de funções racionais com polos somente em P , onde $m \in \mathbb{N}_0$.

Construímos o conjunto $U = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{L}(mP)$.

Lembramos a seguinte caracterização

$$\ell(mP) = \ell((m - 1)P) + 1 \text{ se e só se } f \in U \text{ com } v_P(f) = -m.$$

Definimos o seguinte conjunto

$$H_F(P) := \{-v_P(f) \mid f \in U^*\}, \quad (1.9)$$

onde $U^* := U \setminus \{0\}$.

Teorema 1.34. *O conjunto $H_F(P)$ é um semigrupo numérico de gênero g .*

Demonstração. Se $m, n \in H_F(P)$ então existem $f, g \in A$ tais que $v_P(f) = -m$ e $v_P(g) = -n$. Se $m \geq 2g - 1$, temos pelo Teorema de Riemann–Roch que $\ell(mP) = m + 1 - g$ onde g é o gênero da curva. Por outro lado, temos por resultados anteriores que $m \in H_F(P)$ para todo $m \geq 2g$. Isto mostra que $\ell(mP) = \ell((m - 1)P)$ somente para g valores de m . Logo, $\#G(H_F(P)) = g$. \square

Definição 1.35. *Um semigrupo numérico S é dito ser um semigrupo de Weierstrass se existe uma curva \mathcal{X}_F e um ponto $P \in \mathcal{X}_F$ tais que $S = H_F(P)$.*

No exemplo a seguir calcularemos o semigrupo de Weierstrass da curva Hermitiana. O semigrupo desta curva tem sua importância devido a caracterizar a família de semigrupos gerados por dois elementos como sendo todos Weierstrass. Neste exemplo utilizamos propriedades de curvas para obter o semigrupo.

Exemplo 1.36. *Seja q potência de um primo, $\mathcal{H}_q : X^{q+1} - Y^q Z - Y Z^q$ sobre \mathbb{F}_{q^2} . Sabemos que $P_\infty = (0 : 1 : 0)$ é o único ponto no infinito (com $Z = 0$) da curva \mathcal{H}_q .*

Como a reta tangente a curva Hermitiana em P_∞ é $-Z$, temos que $t = \frac{X}{Y}$ é parâmetro local em P_∞ .

Observamos que $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ são funções regulares fora de P_∞ . Calculando a valorização, temos:

- $t^{q+1} = \left(\frac{Z}{Y}\right)^q + \frac{Z}{Y} \Rightarrow v_{P_\infty}\left(\left(\frac{Z}{Y}\right)^q + \frac{Z}{Y}\right) = q + 1 \Rightarrow v_{P_\infty}\left(\frac{Y}{Z}\right) = -(q + 1).$
- $\left(\frac{Z}{Y}\right)^{q+1} = \left(\frac{Y}{Z}\right)^q + \frac{Y}{Z} \Rightarrow (q + 1)v_{P_\infty}\left(\frac{X}{Z}\right) = -q(q + 1) \Rightarrow v_{P_\infty}\left(\frac{X}{Z}\right) = -q.$

Logo, $q, q + 1 \in H_{\mathcal{H}_q}(P_\infty)$. Portanto, o semigrupo gerado por $q, q + 1$ ($\langle q, q + 1 \rangle$) está contido em $H_{\mathcal{H}_q}(P_\infty)$. Utilizando a fórmula para gênero de um semigrupo gerado por dois elementos, temos que

$$g(\langle q, q + 1 \rangle) = \frac{q(q - 1)}{2}.$$

Conclusão:

$$H_{\mathcal{H}_q}(P_\infty) = \langle q, q + 1 \rangle .$$

1.5 Extensões Algébricas de Corpos de Funções

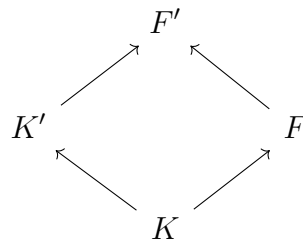
Seja F/K um corpo de funções de uma variável sobre o corpo de constantes K e vamos considerar F'/K' um corpo de funções de uma variável sobre o corpo de constantes K' tal que $F \subset F'$ é uma extensão algébrica e $K \subset K'$.

Nesta seção vamos considerar que K é um corpo perfeito e vamos considerar que F e F' estão ambos sobre um mesmo corpo algebricamente fechado.

Definição 1.37. Um corpo de funções F'/K' é chamado de extensão algébrica de F/K se $F \subset F'$ como extensão algébrica e $K \subset K'$.

1. F'/K' é chamada de extensão de corpos constante se $F' = FK'$, isto é, F' é o corpo composto de F e K' .
2. F'/K' é chamada de extensão finita se $[F' : F] < \infty$.

Podemos observar a definição no diagrama abaixo.



Sobre a definição acima observamos através do diagrama e de propriedades do grau de transcendência que K'/K é uma extensão algébrica. Verificamos ainda que $F \cap K' = K$. Com efeito, se $x \in F \cap K'$, temos que $x \in F$ e x é algébrico sobre K , pois $x \in K$. Como K é algebricamente fechado em F , temos que $x \in K$, o que mostra que $F \cap K' \subset K$.

Exemplo 1.38. Tomemos $K = K' = \mathbb{F}_q$, $F = K(x)$ como o corpo de de funções racionais e $F' = K(x, y)$ com $y^q = x^{q+1} + x$.

Sobre a definição anterior, podemos construir novos objetos. Suponha que $K = \mathbb{F}_q$ um corpo com q elementos. Considere corpos de funções F_i/K com $i \geq 0$ satisfazendo

- 1) $F_i \subsetneq F_{i+1}$, para todo $i \geq 0$.
- 2) F_{i+1}/F_i é finita e separável.
- 3) $\lim_{i \rightarrow \infty} g(F_i) = \infty$.

A sequência acima é chamada de torre de funções. Sabemos que número $N(F)$ de lugares \mathbb{F}_q -racionais de um corpo de funções F é limitado superiormente por $q+1+2g\sqrt{q}$. Em (IHARA, 1981), foi observado que sob a condição $g > \frac{\sqrt{q}(\sqrt{q}-1)}{2}$, temos $N(F) < q+1+2g\sqrt{q}$. Escrevendo

$$N_q(g) := \max\{N(F) \mid F \text{ é um corpo de funções de gênero } g \text{ sobre } \mathbb{F}_q\}$$

e $A(q) := \limsup \frac{N_q(g)}{g}$, em (VLADUT; D, 1983) foi provado a seguinte cota:

$$A(q) \leq \sqrt{q} - 1,$$

conhecida como cota de Drinfeld-Vladut. Em (TSFASMAN; VLADUTX; ZINK, 1982) foi construído uma sequência infinita de códigos geométricos tais que $A(q^2) = q-1$, onde foram usados uma sequência infinita de corpos de funções, veja (GARCIA; STICHTENOTH, 1995) e (GARCIA; STICHTENOTH, 1996). Tais resultados levaram ao estudo mais profundo desses objetos. A seguir, apresentamos alguns exemplos de torres de de corpos de funções sobre \mathbb{F}_q :

$$\mathcal{TF} : \quad x_{i+1}^m = a(x_i + b)^m + c \quad (1.10)$$

$$\mathcal{F}_1 : \quad x_{i+1}^2 = \frac{x_i(1-x_i)}{x_i+1} \quad (1.11)$$

$$\mathcal{F}_2 : \quad x_{i+1}^2 = \frac{x_i^2+1}{2x_i} \quad (1.12)$$

Em (1.10) $a, b, c \in \mathbb{F}_q^\times$, com $ab^m + c = 0$ e $\text{mdc}(m, q) = 1$, esta torre é chamada Torre de Fermat. Em (1.11) precisamos que $2 \nmid q$. Mais informações sobre estas torres, o leitor poderá consultar (GARCIA; STICHTENOTH; RÜCK, 2003) e (GARCIA; STICHTENOTH, 2003). Voltaremos à torre (1.12) no Capítulo 4.

Lema 1.39. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K . Então F'/K' é uma extensão finita de F/K se, e só se, K'/K é finita.*

Demonstração. Veja em (STICHTENOTH, 1993). □

Definição 1.40. *Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K . Um lugar $Q \in \mathbb{P}_{F'}$ é dito uma extensão (ou está sobre) de $P \in \mathbb{P}_F$ quando $P \subset Q$. Quando Q está sobre P denotamos $Q|P$.*

Esta definição levanta três pontos. Primeiro ponto é se para cada lugar em \mathbb{P}_F existe uma extensão. O segundo ponto é se a quantidade de lugares sobre um dado lugar em $P \in \mathbb{P}_F$. E finalmente o terceiro ponto é se dado um lugar Q em F' existe algum lugar P em F tal que $Q|P$. Vamos responder estes pontos ao longo dessa sessão.

Teorema 1.41. *Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K . Considere $P \in \mathbb{P}_F$, $Q \in \mathbb{P}_{F'}$, \mathcal{O}_P e \mathcal{O}_Q . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) $Q|P$;
- b) $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_Q$
- c) Existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $e \geq 1$ e $v_Q(z) = ev_P(z)$, $\forall z \in F$.

Demonstração. Veja em (STICHTENOTH, 1993). □

Observamos que se $Q|P$ então pelo item c) do teorema anterior temos que $P = Q \cap F$ e $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_Q \cap F$. Desta forma, existe uma imersão de F_P em F_Q dada pela seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \frac{\mathcal{O}_P}{P} &\longrightarrow \frac{\mathcal{O}_Q}{Q} \\ x + P &\longmapsto x + Q \end{aligned}$$

Então definimos o *grau relativo* $f(Q|P) := [F_Q : F_P]$ (que pode ser finito ou infinito.)

O inteiro e do Teorema 1.41 é chamado *índice de ramificação* de Q sobre P e é denotado por $e(Q|P) := e$. Quando $e(Q|P) > 1$ dizemos que $Q|P$ se *ramifica* e se $e(Q|P) = 1$ dizemos que $Q|P$ se *não se ramifica*.

Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K . Se F_1/K_1 é uma extensão de algébrica de F'/K' e $Q_1 \in \mathbb{P}_{F_1}$ uma extensão de Q então

$$e(Q_1|P) = e(Q_1|Q)e(Q|P) \tag{1.13}$$

$$f(Q_1|P) = f(Q_1|Q)f(Q|P). \tag{1.14}$$

Com efeito, como $v_{P'}(x) = e(P'|P)v_P(x)$, para cada $x \in F$, e $v_{P_1}(z) = e(P_1|P')v_{P'}(z)$, para todo $z \in F'$, temos que $v_{P_1}(x) = e(P_1|P')e(P'|P)v_P(x)$, para todo $x \in F$, donde $e(P_1|P) = e(P_1|P')e(P'|P)$. A segunda igualdade segue de forma análoga.

Proposição 1.42. *Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K . Considere $P \in \mathbb{P}_F$, $Q \in \mathbb{P}_{F'}$ com Q uma extensão de P . Então $f(Q|P) < \infty$ se, e somente se, $[F' : F] < \infty$.*

Demonstração. Consideremos as inclusões $K \subset F_P \subset F'_{P'}$ e $K \subset K' \subset F'_{P'}$, donde $[F_P : K] < \infty$ e $[F'_{P'} : K'] < \infty$. Então, segue que $[F'_{P'} : F_P] < \infty \Leftrightarrow [K' : K] < \infty$. Dessa forma, $[F'_{P'} : F_P] < \infty \Leftrightarrow [F' : F] < \infty$. □

Lema 1.43. *Dado um lugar Q em $\mathbb{P}_{F'}$ existe exatamente um lugar $P \in \mathbb{P}_F$ tal que $Q|P$.*

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Lema 1.44. *Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K . Todo lugar P em \mathbb{P}_F possui um número finito e não nulo de extensões em F'/K' .*

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Lema 1.45. *Seja F'/K' uma extensão de algébrica de F/K e $z \in F'$ elemento transcendente sobre K . Então $[K'(z) : K(z)] = [K' : K]$.*

Demonstração. Ver (STICHTENOTH, 1993). □

Teorema 1.46 (Equação Fundamental). *Sejam F'/K' uma extensão de algébrica de F/K , $P \in \mathbb{P}_F$ e Q_1, \dots, Q_m lugares em F' tais que $Q_i|P$ para cada $i = 1, \dots, m$. Então*

$$\sum_{i=1}^m e_i(Q_i|P) f_i(Q_i|P) = [F' : F]. \quad (1.15)$$

Demonstração. Tomando $x \in F$ tal que P seja o único zero de x em F/K . Seja $s = v_P(x) > 0$. Então pelo Lema 1.44 os lugares $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{P}_{F'}$ são exatamente os zeros de x em F'/K' uma vez que $v_{Q_i} = e(Q_i|P)s > 0$. Calculando o grau de $F'/K(x)$ de duas formas diferentes obteremos o resultado desejado. Com efeito,

$$\begin{aligned} [F' : K(x)] &= [F' : K'(x)][K'(x) : K(x)] \\ &= \left(\sum_{i=1}^m v_{Q_i}(x) \deg(Q_i) \right) [K' : K] \\ &= \left(\sum_{i=1}^m e_i v_P(x) [F'_{Q_i} : K'] [K' : K] \right) \\ &= v_P(x) \left(\sum_{i=1}^m e_i [F'_{Q_i} : F_P] [F_P : K] \right) \\ &= s \cdot \deg(P) \left(\sum_{i=1}^m e_i f_i \right). \end{aligned}$$

Por outro lado $[F'K(x)] = [F' : F][F : K(x)] = [F' : F]s \deg(P)$, pois $\text{div}_0(x) = sP$. □

Seja $G : X \rightarrow Y$ um morfismo não constante de curvas projetivas não singulares definidas sobre um corpo K . Então $K(Y)$ é visto como subcorpo de $K(X)$ e $n := [K(X) : K(Y)] < \infty$. O índice de ramificação é definido da seguinte forma: dado $p \in X$ e $q := f(p)$. Seja $t \in \mathcal{O}_q(Y)$ um parâmetro local do anel de valorização de q em $K(Y)$. Considere v_p a valorização discreta associada à p . O índice de ramificação é $e(p) := v_p(t)$.

Definição 1.47. *Sejam F'/K' uma extensão de algébrica de F/K com $[F' : F] < \infty$, $P \in \mathbb{P}_F$ e $m \in \mathbb{N}$.*

1. P é totalmente ramificado em F'/F se existe um lugar $Q \in \mathbb{P}_{F'}$ com $Q|P$ e $e(Q|P) = [F' : F]$.
2. P se decompõe completamente em F'/F se existem exatamente m lugares distintos $Q \in \mathbb{P}_{F'}$ com Q sobre P .

2 Gapset k —esparso puro

Neste capítulo, trazemos alguns resultados familiares da teoria de semigrupos numéricos para a teoria de gapsets. No capítulo anterior, fizemos uma breve discussão sobre a relação entre as duas nomenclaturas.

Aqui, vamos abordar o estudo da sequência n_g (a quantidade de gapsets de gênero g) ser crescente para todo g , usando a linguagem de gapsets. Para mais detalhes veja (BERNARDINI; FILHO, 2022).

Sabemos da teoria de semigrupos numéricos diversas relações entre seus parâmetros, como por exemplo, o gênero, a multiplicidade, o condutor e o número de Frobenius. Dado um gapset, podemos olhar para a distância entre dois elementos consecutivos, neste sentido, um gapset k -esparso puro é um gapset cuja maior distância observada é k (a definição precisa é encontrada na Seção 2 do Capítulo 2). Neste capítulo, obtemos relações entre o parâmetro k (de k -esparso) com alguns dos invariantes já conhecidos. Além disso, obtemos alguns resultados sobre gapsets k —esparso puros.

Vamos denotar por $\mathcal{G}_k(g)$ o conjunto de todos os gapset k —esparso puro G de gênero g . Observamos que sob a condição $2g \leq 3k$, estes apresentam um bom comportamento. Usando estes resultados juntamente com a hipótese $2g \leq 3k$ obtemos os principais resultados deste Capítulo, que listamos a seguir.

Teorema 2.48. *Sejam g e k inteiros não negativos, de modo que $2g \leq 3k$. Então a aplicação $\varphi : \mathcal{G}_k(g) \rightarrow \mathcal{G}_{k+1}(g+1)$, $G \mapsto \varphi(G) = \phi(G)$ é bijetiva.*

A função ϕ atua num dado gapset trasladando de uma unidade os elementos do gapset entre 1 e a maior salto (ℓ_α) e de duas unidades os demais elementos. Mais detalhes desta aplicação, bem como propriedades, podem ser encontrados na Seção 2.3.

Corolário 2.49. *Dado g um inteiro não negativo, seja k tal que $2g = 3k$. Então $\#\mathcal{G}_k(g) = \#\mathcal{G}_{k+n}(g+n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 2.50. *Seja $g \in \mathbb{N}$. Tem-se $n_g \leq n_{g+1}$ se, e somente se,*

$$\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2g-1}{3} \rfloor} \#\mathcal{G}_k(g) \leq \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2g+2}{3} \rfloor} \#\mathcal{G}_k(g+1),$$

2.1 Alguns resultados básicos

Lembremos que um *gapset* é um conjunto finito $G \subset \mathbb{N}$ que satisfaz a seguinte propriedade: seja $z \in G$ e escreva $z = x + y$, com x e $y \in \mathbb{N}$; então $x \in G$ ou $y \in G$.

Esse conceito foi formalmente introduzido em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b). Nesta seção vamos introduzir alguns resultados básicos sobre gapsets. Ao longo deste capítulo, denotamos $[a, b] := \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$ e $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}$, para inteiros a e b .

O próximo resultado nos fornece informações sobre cada elemento de um gapset e pode ser encontrado em (OLIVEIRA, 1991).

Proposição 2.1 ((OLIVEIRA, 1991)). *Seja $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_g\}$ um gapset com gênero g . Então $j \leq \ell_j \leq 2j - 1$, para todo $j \in [1, g]$.*

Demonstração. Se $\ell_j < j$ para algum j , então $\ell_1 < 1$, isto gera uma contradição. Por outro lado, seja $j \in [1, g]$. Se ℓ_j é par, então $\frac{\ell_j}{2} \in G$ e para cada $\ell \in [1, \frac{\ell_j}{2} - 1]$, existe pelo menos um elemento de G em $\{\ell, \ell_j - \ell\}$. Existem j elementos de G em $[1, \ell_j]$, incluindo $\frac{\ell_j}{2}$ e ℓ_j , assim $j \geq (\ell_j/2 - 1) + 2$ e obtemos $\ell_j \leq 2j - 2 < 2j - 1$. Se ℓ_j é ímpar, então para cada $\ell \in [1, \frac{\ell_j - 1}{2}]$, existe pelo menos um elemento de G em $\{\ell, \ell_j - \ell\}$. Portanto, existem j elementos de G em $[1, \ell_j]$, incluindo ℓ_j , logo $j \geq \frac{\ell_j - 1}{2} + 1$ e concluímos que $\ell_j \leq 2j - 1$. \square

Vale destacar que alguns trabalhos denotam o número de Frobenius ℓ_g por F , e portanto a Proposição 2.1 garante que $g \leq F \leq 2g - 1$. Outra forma de obter essa desigualdade é utilizar a Proposição 1.27, onde concluímos que dado um gapset não vazio de gênero g e número de Frobenius F , então $g \leq F \leq 2g - 1$. Juntando os resultados das Proposições 1.25 e 1.27, obtemos uma relação entre a profundidade e o gênero de um gapset.

Corolário 2.2. *Dado um gapset G não vazio, com gênero g e profundidade q , então $1 \leq q \leq g$.*

Demonstração. Aplicando as Proposições 1.25 e 1.27, obtemos que

$$1 = \frac{g+1}{g+1} \leq \frac{c}{m} \leq \frac{2g}{2} = g.$$

Assim, $1 \leq q \leq g$. \square

A seguir, apresentamos três exemplos clássicos. Em particular, os Exemplos 2.4 e 2.5 confirmam que as cotas apresentadas nas Proposições 1.25, 2.1, 1.27 e no Corolário 2.2 são atingidos.

Exemplo 2.3. *O gapset trivial $G = \emptyset$ tem gênero 0, multiplicidade 0, condutor 0 e profundidade 0. É o único gapset com profundidade 0.*

Ainda, podemos exibir outro gapset com a propriedade de ser o único com profundidade 1.

Exemplo 2.4. *Seja $g \in \mathbb{N}$. O gapset $[1, g]$ tem gênero g , multiplicidade $g + 1$, condutor $g + 1$ e profundidade 1. Não há outro gapset com profundidade 1. Seguindo a terminologia usada nas principais referências de semigrupos numéricos, esses gapsets são chamados de gapset ordinários.*

Exemplo 2.5. *Seja $g \in \mathbb{N}$. O gapset $G = (2\mathbb{N} + 1) \cap [1, 2g - 1]$ tem gênero g , multiplicidade 2, condutor $2g$ e profundidade $q(G) = g$. Não há outros gapsets com profundidade g . De fato, seja G' outro gapset de mesmo gênero, com $q(G') = g$ e multiplicidade $m \geq 3$ (note que $m = 2$ então $G = G'$). Então, $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$ e assim $\frac{c}{m} \leq \frac{2g}{3} < g$. Portanto, $q(G') < g$.*

Terminamos esta seção com o seguinte resultado.

Proposição 2.6. *Seja $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_g\}$ um gapset com multiplicidade m e gênero g . Então $[am + \ell_j + 1, am + \ell_{j+1} - 1] \cap G = \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$ e todo $j \in [1, g - 1]$.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{N}_0$ e $j \in [1, g - 1]$. Se $b \in [am + \ell_j + 1, am + \ell_{j+1} - 1]$, então $b = am + \ell_j + c$, com $c \in [1, \ell_{j+1} - \ell_j - 1]$. Um vez que $am \notin G$ e $\ell_j + c \notin G$, concluimos que $b \notin G$. \square

2.2 Gapsets k -esparso puros

Vamos adotar a notação proveniente da teoria de semigrupos numéricos.

Definição 2.7. *Um gapset G é chamado de k -esparso quando a diferença entre dois elementos consecutivos é no máximo k , em outras palavras, $\ell_{i+1} - \ell_i \leq k$, para cada $\ell_i \in G$. Além disso, se existem dois elementos $\ell_i, \ell_{i+1} \in G$ tais que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$ dizemos que G é um gapset k -esparso puro.*

Vamos denotar a família de todos os gapsets k -esparso puros por \mathcal{G}_k e família de todos os gapsets k -esparso por $\tilde{\mathcal{G}}_k$. Segue imediatamente a seguinte relação entre essas famílias $\mathcal{G}_k \subset \tilde{\mathcal{G}}_k$ e $\tilde{\mathcal{G}}_k \subset \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}$.

No decorrer deste capítulo vamos evidenciar as lacunas onde ocorre o maior salto por negrito da seguinte forma $G = \{1, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$.

Observação 2.8. *Vamos fixar a seguinte convenção: \emptyset é um gapset 0-esparso e $\{1\}$ é um gapset 1-esparso. Ainda vale ressaltar a notação: se G é um gapset k -esparso puro com gênero $g \geq 2$, então podemos escrever $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$, onde $\alpha = \max\{i : \ell_{i+1} - \ell_i = k\}$.*

A seguir apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 2.9. Seja $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_g\}$ um gapset 1-esparso puro. Note que $\ell_{i+1} - \ell_i = 1$, para todo i . Assim, $G = \{1, 2, \dots, g\}$ é um gapset ordinário.

Exemplo 2.10. Seja $G = \{\ell_1 = 1 < \ell_2 = 3 < \dots < \ell_g = 2g - 1\}$ um gapset 2-esparso puro. Note que $\ell_{i+1} - \ell_i = 2$, para todo i . Dizemos que $G = \{1, 3, \dots, 2g - 1\}$ é o gapset hiperelíptico de gênero g .

É importante observar que nem todo gapset 2-esparso puro é hiperelíptico. Com efeito, o gapset $G = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13\}$ é 2-esparso puro, mas não é hiperelíptico.

Exemplo 2.11. Seja $G = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$ um gapset 4-esparso puro. De fato, como $\ell_g - \ell_{g-1} = 4$ é a maior diferença obtida segue que $k = 4$. Note que $\alpha = g - 1 = 8$.

A seguir vamos obter alguns resultados relacionando o tamanho do maior salto com alguns outros invariantes: gênero, multiplicidade e condutor.

Proposição 2.12. Seja G um gapset k -esparso puro com multiplicidade m . Então $k \leq m$.

Demonstração. Sejam ℓ_i e $\ell_{i+1} \in G$ tais que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$. Se $k > m$, então $\ell_i + 1, \ell_i + 2, \dots, \ell_i + m \notin G$ ($\ell_i + m < \ell_{i+1}$). Existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\ell_i + 1 \leq \ell_{i+1} - am \leq \ell_i + m$. Note que $G \ni \ell_{i+1} = (\ell_{i+1} - am) + am$. Mas $\ell_{i+1} - am \notin G$ e $am \notin G$, o que leva a uma contradição. \square

Proposição 2.13. Seja G um gapset esparso puro com multiplicidade m , gênero g e $F(G) = 2g - t$, para algum $t \in [1, g - 1]$. Então $m \leq t + 1$.

Demonstração. Sabemos que a quantidade de lacunas consecutivas com diferença de uma unidade é exatamente $t - 1$ (ver (TIZZIOTTI; VILLANUEVA, 2019)). Como $[1, m - 1] \subset G$ temos que imediatamente que $m \leq t + 1$. \square

Em particular, a proposição anterior, mostra que para gapsets esparsos puros quando ℓ_g está próximo de $2g$ então a multiplicidade é pequena. Percebemos que isto condiz com os resultados obtidos em (VELOSO; CONTIERO; MOREIRA, 2014).

Exemplo 2.14. O gapset $G = \{1, 2, \dots, g - 3, g - 1, g, 2g - 2\}$ tem multiplicidade $m = k = g - 2$. Portanto, a desigualdade da Proposição 2.12 é ótima.

Observando a Proposição 2.12 junto com a Proposição 1.25 notamos que um gapset k -esparso puro com gênero g satisfaz $k \leq g + 1$. Mas podemos obter um resultado melhor na próxima proposição.

Proposição 2.15. Se G é um gapset k -esparso puro com gênero g , então $k \leq g$.

Demonstração. Sejam ℓ_i e $\ell_{i+1} \in G$ tais que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$. Se $k \geq g + 1$, então $\ell_i + 1, \ell_i + 2, \dots, \ell_i + g \in [1, 2g - 2] \cap (\mathbb{Z} \setminus G)$ (note que $\ell_i + g < \ell_{i+1} \leq \ell_g$). Assim, $\#G \leq (2g - 2 - g) + 1 = g - 1$, o que é uma contradição. \square

Exemplo 2.16. O gapset $G = \{1, 2, \dots, g - 1, 2g - 1\}$ tem multiplicidade $g = k$. Portanto, a desigualdade da Proposição 2.15 é ótima. Além, disso, veremos que este é o único gapset satisfazendo essa condição.

O próximo resultado melhora a cota inferior dado na Proposição 1.27.

Proposição 2.17. Seja G um gapset k -esparso puro com o condutor c e o gênero g . Então $g + k \leq c$.

Demonstração. Suponha que $g + k > c$. Escrevendo $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$, concluímos que $\ell_g \leq g + k - 2$. Por outro lado, temos que $I = [\ell_\alpha + 1, \ell_{\alpha+1} - 1] \cap G = \emptyset$, $\#I = k - 1$ e $G \subset [1, g + k - 2]$. Assim, $\#G \leq (g + k - 2) - (k - 1) = g - 1$, o que é uma contradição. \square

Exemplo 2.18. O gapset ordinário com gênero g tem multiplicidade $g + 1$, condutor $g + 1$ e $k = 1$. O gapset hiperelíptico com gênero g tem multiplicidade 2, condutor $2g$ e $k = 2$. Observe que eles não atingem o máximo k em relação à multiplicidade e ao gênero. Mas temos que o gapset ordinário atinge a cota $g + k = c$.

Observação 2.19. Note que podemos usar a Proposição 2.17 para obter

$$2g - (r + 1) \leq \ell_g,$$

onde G é um gapset $(g - r)$ -esparso puro. Com efeito, suponha que $\ell_g \leq g + k - 2$. Seja $\ell_{i+1} - \ell_i = k$ então $I = [\ell_i + 1, \ell_i + k - 1] \subset S$ e $\#I = k - 1$, por outro lado, $I \subset [1, \ell_g] \subset [1, g + k - 2]$ e $\#[1, g + k - 2] = g + k - 2$ e portanto em $[1, g + k - 2]$ deve ter g lacunas e $k - 2$ não lacunas, i.e., $k - 1 \leq k - 2 \Rightarrow 1 \leq 0$, absurdo!

Observação 2.20. Se $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_g\}$ é um gapset k -esparso puro com gênero g tal que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$, então $k \leq i + 1$. Isso segue de Proposição 2.1, uma vez que $k = \ell_{i+1} - \ell_i \leq 2i + 1 - i = i + 1$.

A seguir vamos analisar dois exemplos a fim de observar a relação entre ℓ_α e ℓ_g de um gapset de gênero g .

Exemplo 2.21. Considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13\}$. Observamos que $g(G) = 9$, $m(G) = 5$, $k = 4$ e $\alpha = 7$. Como $\ell_\alpha = \ell_7 = 8$ e $\ell_g = \ell_9 = 13$ temos que $\ell_7 + m = 8 + 5 = 13 = \ell_9$.

Exemplo 2.22. Considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Observamos que $g(G) = 9$, $m(G) = 4$, $k = 2$ e $\alpha = 8$. Como $\ell_\alpha = \ell_8 = 13$ e $\ell_9 = 15$ temos que $\ell_8 + m = 13 + 4 = 17 > 15 = \ell_9$.

Observando os exemplos anteriores percebemos uma possível relação entre ℓ_α e ℓ_g . O próximo resultado é importante para as provas dos principais resultados deste trabalho. Ele confirma que o número de Frobenius de um gapset não pode ser grande o suficiente, com relação ao seu elemento ℓ_α .

Proposição 2.23. Seja $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$ um gapset k -esparso puro com gênero g e multiplicidade m . Então $\ell_g \leq \ell_\alpha + m$.

Demonstração. Vamos supor que $\ell_g > \ell_\alpha + m$ e considerar r o menor índice tal que $\ell_r > \ell_\alpha + m$. Pela Proposição 2.6, concluímos que $\ell_r \geq \ell_{\alpha+1} + m$ e assim $\ell_r - \ell_{r-1} \geq k$. Uma vez que G é um gapset k -esparso puro, temos $\ell_r - \ell_{r-1} = k$. Note que $r \geq \alpha + 1$. Com efeito, sabemos que $\ell_j \leq \ell_\alpha < \ell_\alpha + m$, para todo $j \in [1, \alpha]$. Pela definição de α , sabemos que α é o maior índice de tal forma que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$ e então $r \leq \alpha + 1$. Assim, a única possibilidade é $r = \alpha + 1$. No entanto $\ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k \leq \ell_\alpha + m$ e obtemos uma contradição. Portanto, $\ell_g \leq \ell_\alpha + m$. \square

Como consequência, obtemos informações sobre onde o elemento ℓ_α pode estar. Para isso, vamos fazer o uso da profundidade do gapset observando as possibilidades. Na verdade, mesmo para gapset, com profundidades grandes, não há muitas possibilidades para alocar ℓ_α em algum G_i , onde $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$. Tal escrita é chamada partição canônica de G .

Corolário 2.24. Considere $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$ um gapset k -esparso puro com o gênero g e considere sua partição canônica $G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$. Então um dos seguintes itens ocorre:

- (1) $\ell_\alpha, \ell_{\alpha+1} \in G_{q-2}$
- (2) $\ell_\alpha, \ell_{\alpha+1} \in G_{q-1}$
- (3) $\ell_\alpha \in G_{q-2}$ e $\ell_{\alpha+1} \in G_{q-1}$

Demonstração. Pela Proposição 2.23, concluímos que $\ell_\alpha \in G_{q-2}$ ou $\ell_\alpha \in G_{q-1}$, pois $\ell_g \in G_{q-1}$. Para o primeiro caso, ambas as possibilidades podem ocorrer: $\ell_{\alpha+1} \in G_{q-2}$ ou $\ell_{\alpha+1} \in G_{q-1}$. Para o segundo caso, devemos ter $\ell_{\alpha+1} \in G_{q-1}$ onde concluímos o resultado. \square

Exemplo 2.25. Os três casos obtidos no Corolário 2.24 podem ocorrer. Para um inteiro $m \geq 3$, exibimos os seguintes exemplos:

- 1) $\{1, \dots, m-1, \mathbf{m} + \mathbf{1}, \mathbf{2m} - \mathbf{1}, 2m+1\} = [1, m-1] \cup \{m+1, 2m-1\} \cup \{2m+1\}$
possui $q = 3$, $\ell_\alpha = m+1 \in G_1$ e $\ell_{\alpha+1} = 2m-1 \in G_1$;
- 2) $\{1, \dots, m-1, \mathbf{m} + \mathbf{1}, \mathbf{2m} - \mathbf{1}\} = [1, m-1] \cup \{m+1, 2m-1\}$ possui $q = 2$,
 $\ell_\alpha = m+1 \in G_1$ e $\ell_{\alpha+1} = 2m-1 \in G_1$;
- 3) $\{1, \dots, m-1, \mathbf{m} + \mathbf{1}, \mathbf{2m} + \mathbf{1}\} = [1, m-1] \cup \{m+1\} \cup \{2m+1\}$ possui $q = 3$,
 $\ell_\alpha = m+1 \in G_1$ e $\ell_{\alpha+1} = 2m+1 \in G_2$.

A seguir apresentamos uma generalização de resultados encontrados em (MUNUERA; TORRES; VILLANUEVA, 2009). Tais resultados foram obtidos para semigrupos 2-esparso puro e aqui trazemos esses resultados para k -esparso puro

Proposição 2.26. *Seja G um gapset k -esparso puro com $\ell_g = 2g - M$. Então,*

- (1) $\ell_i \geq ki - M - g(k-2)$, para $i = 1, \dots, g$;
- (2) se $\ell_i = ki - M - g(k-2)$ temos que $\ell_j = kj - M - g(k-2)$ para $j = i, \dots, g$.

Demonstração. (1) $\ell_g - \ell_{g-1} \leq k$ (note que $k = k \cdot (g - (g-1))$) e $\ell_{g-1} - \ell_{g-2} \leq k$ logo $\ell_g - \ell_{g-2} \leq 2k$. Como $\ell_i - \ell_{i-1} \leq k$ e $\ell_g = 2g - M$ segue que $\ell_g - \ell_i \leq k(g-i) \Rightarrow \ell_i \geq ki - M - g(k-2)$.

- (2) Se $\ell_i = ki - M - g(k-2)$ temos que $\ell_{i+1} - \ell_i \leq k$ logo $\ell_{i+1} \leq k(i+1) - M - g(k-2)$. Pelo resultado anterior $k(i+1) - M - g(k-2) \leq \ell_{i+1} \leq k(i+1) - M - g(k-2)$, i.e., $\ell_{i+1} = k(i+1) - M - g(k-2)$. Portanto, para $j = i, \dots, g$, segue que $\ell_j = kj - M - g(k-2)$.

□

A seguir, vamos focar em gapsets k -esparso puros com gênero g que satisfazem a condição $2g \leq 3k$. Como veremos, estes gapsets satisfazem propriedades interessantes e desempenham um papel importante no desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 2.27. *Seja G um gapset k -esparso puro com gênero g e profundidade q . Se $2g \leq 3k$, então $q \leq 3$.*

Demonstração. Como $m \geq k \geq \frac{2g}{3}$ e $c \leq 2g$, temos $q = \left\lfloor \frac{c}{m} \right\rfloor \leq \frac{2g}{\frac{2g}{3}} = 3$. □

Observação 2.28. *É importante notar que o gapset $\{1, 2, 3, 4, \mathbf{6}, \mathbf{9}, 11\}$ possui profundidade 3, gênero 7 e $k = 3$. Neste caso $2g > 3k$. Portanto, concluímos que a recíproca da Proposição 2.27 não é verdadeira.*

Na próxima proposição vamos mostrar que se um gapset é tal que $2g \leq 3k$, então a quantidade de saltos de tamanho k é igual a 1, em outras palavras, o conjunto $\{i : \ell_i - \ell_{i-1} = k\}$ possui um único elemento α para $g \geq 4$. Para $g \leq 3$, veremos que existe um único gapset que não satisfaz essa propriedade. A critério de informação, tal gapset é hiperelíptico. Porém, a existência deste gapset não gera um problema, uma vez que estamos interessados em gapsets com gênero grandes e para gêneros menores que três a quantidade de gapsets é facilmente contada.

Proposição 2.29. *Seja G um gapset k -esparso puro com gênero g tal que $2g \leq 3k$. Então, há um único $i \in [1, g-1]$ tal que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$, exceto para $G = \{1, 3, 5\}$.*

Demonstração. Vamos separar em três casos, $k = g$, $k = g - 1$ e $k \leq g - 2$. Utilizaremos a Proposição 2.12. Se $k = g$, então $m = g$ ou $g + 1$ (lembre que $m = g + 1$ é o gapset ordinário). Para $m = g$ a única possibilidade é $\{1, \dots, g-1\} \cup \{2g-1\}$ e possui um único salto para cada $g \geq 2$.

Se $k = g - 1$, então $m = g - 1, g$ ou $g + 1$. Para $m = g + 1$ novamente temos o gapset ordinário. Para $m = g$ caímos no caso anterior. Para $m = g - 1$ temos $[1, g-2] \cup \{a, b\}$ com $a < b$. Temos duas possibilidades: quando $a - (g-2) = k = g - 1$ temos $a = 2g + 1$, absurdo. Quando $b - a = k = g - 1$ temos $b = a + (g - 1) \geq 2g - 1$ e portanto $b = 2g - 1$, conseqüentemente $a = g$. Assim, $G = \{1, \dots, g-2, g, 2g-1\}$. Neste caso, temos necessariamente que $g \geq 3$. Se $g > 3$ temos $k = g - 1 > 2$ e $g - (g - 2) = 2$, i.e., temos um único salto de tamanho k . Para $g = 3$ temos $G = \{1, 3, 5\}$ e este é o único gapset o qual a propriedade falha.

Suponha $k \leq g - 2$, se $v_k(S) \geq 2$ então existem i, j tais que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$ e $\ell_{j+1} - \ell_j = k$, ou seja, $\ell_i + 1, \dots, \ell_i + k - 1$ e $\ell_j + 1, \dots, \ell_j + k - 1$ são elementos distintos de G . Portanto, $2(k-1) = (k-1) + (k-1) \leq g-1$ ($[1, 2g-1]$ tem g lacunas e $g-1$ não lacunas), logo $2k-2+k \leq g+k-1 \leq g+g-3$ (pois $k \leq g-2$). Assim $3k \leq 2g-1 < 2g$, absurdo. \square

A seguir, apresentamos uma segunda prova da proposição anterior, mais sucinta, a qual podemos usar o pacote `numericlasgps` do software GAP como auxílio.

Observação 2.30. *Suponha que existam $i \neq j$ tais que $\ell_{i+1} - \ell_i = \ell_{j+1} - \ell_j = k$. Então $\ell_g \geq \ell_1 + 2 \cdot k + (g-3) \cdot 1 = 2k + g - 2 \geq \frac{4g}{3} + g - 2 = \frac{7g}{3}g/3 - 2 \geq 2g$, se $g \geq 6$. Pela Proposição 2.1, o que gera uma contradição. Os casos $g \leq 5$ podem ser feitos usando o software GAP.*

O pacote `numericlasgps` do software GAP pode ser consultado em (DELGADO; GARCÍA-SÁNCHEZ, 2016).

A Proposição 2.29, permite que observemos um “*bom*” comportamento que gapsets onde $2g \leq 3k$ em relação ao número de saltos de tamanho k . Porém, perdemos a observação deste comportamento quando $2g > 3k$. Neste caso, ainda podemos encontrar exemplos de gapsets com um único salto de tamanho k e também exemplos de gapsets com mais de um salto de tamanho k . Tal comentário fica explícito com a observação a seguir.

Observação 2.31. *Se $2g > 3k$, então é possível ter um único i tal que $\ell_{i+1} - \ell_i = k$ e ainda ter mais de um índice que satisfaça essa propriedade. Por exemplo, se $G_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, então $k(G_1) = 5 - 3 = 2$ e $2g(G_1) = 10 > 3k(G_1) = 6$; se G_2 é o gapset hiperelíptico com gênero $g \geq 4$, então $2g(G_2) \geq 8 > 3k(G_1) = 6$ e cada par de elementos consecutivos de G_2 tem distância 2.*

Para o próximo resultado, consideramos um gapset k -esparso puro G com o gênero g tal que $2g \leq 3k$ e usamos o último resultado sobre a unicidade de um par de elementos com a maior distância k . Se $q(G) = 3$ e $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ é a partição canônica de G , então o Corolário 2.24 garante que $\ell_\alpha \in G_1$ ou $\ell_\alpha \in G_2$.

Proposição 2.32. *Sejam $g > 1$ e k inteiros positivos tais que $2g \leq 3k$ e considere $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$ um gapset k -esparso puro com multiplicidade m . Então $\ell_\alpha \leq 2m - 1$.*

Demonstração. Usando a hipótese $2g \leq 3k$ concluímos que a profundidade do gapset G é no máximo 3. Suponha que $\ell_\alpha \geq 2m + 1$. Pela Proposição 2.12, temos $\ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k \geq 2m + 1 + k \geq 3k + 1$. Assim, $\ell_{\alpha+1} \geq 2g + 1$, o que gera um absurdo. \square

A seguir, constatamos que a hipótese $2g \leq 3k$ é essencial para garantirmos que $\ell_\alpha \leq 2m - 1$. No mesmo exemplo, conseguimos ver que a hipótese $2g \leq 3k$ não é equivalente ao gapset possuir profundidade 3.

Exemplo 2.33. *A proposição anterior não é verdadeira no caso geral, mesmo para profundidade no máximo 3. Por exemplo, o gapset $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, \mathbf{11}, \mathbf{14}\}$ possui $\ell_\alpha = 11 > 9 = 2m - 1$ e $q(G) = 3$.*

Observação 2.34. *A Proposição 2.32 dá informações sobre ℓ_α , mas não sobre $\ell_{\alpha+1}$. Por exemplo, se $G = \{1, 2, \dots, 10, \mathbf{12}, \mathbf{21}, 23\}$, então $\ell_{\alpha+1} \leq 2m - 1$; se $G = \{1, 2, \mathbf{4}, \mathbf{7}\}$, então $\ell_{\alpha+1} > 2m - 1$.*

2.3 Identificando gapsets com m -sets

Nesta seção, introduziremos a definição do mapa ϕ que desempenhará um papel fundamental no restante deste capítulo, ainda aproveitaremos para discutir quais

propriedades o conjunto imagem $\phi(G)$ possui, quando G é um gapset k -esparso puro de gênero. Nosso objetivo é garantir que $\phi(G)$ seja um gapset $(k + 1)$ -esparso puro com o gênero $g + 1$. Assim, procuramos hipóteses que o garantam este fato.

Eliahou e Fromentin introduziram a noção de m -extensão, para $m \in \mathbb{N}$, mais detalhes em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b).

Definição 2.35. *Uma m -extensão $A \subset \mathbb{N}$ é um conjunto finito contendo $[1, m - 1]$ que admite uma partição $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$, para algum $t \in \mathbb{N}_0$, onde $A_0 = [1, m - 1]$ e $A_{i+1} \subseteq m + A_i$ para todo i .*

Em particular, se A é uma m -extensão, então $A \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. Para nossa abordagem, lidamos com conjuntos mais gerais e os definimos a seguir.

Definição 2.36. *Seja m um inteiro positivo. Dizemos que um conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ é um m -set, se $[1, m - 1] \subset M$ e $M \cap m\mathbb{N} = \emptyset$.*

Seja $c = F + 1$, onde F o maior elemento de um m -set M , definimos a profundidade de M como $\left\lfloor \frac{c}{m} \right\rfloor$. Em particular, uma m -extensão é um m -set. Além disso, estendemos a noção de partição canônica para m -sets da seguinte forma: se M é um m -set, $M = M_0 \cup \dots \cup M_{q-1}$, onde $M_i = M \cap [im + 1, (i + 1)m - 1]$ para cada i é dita a partição canônica de M . Tal generalização, parece natural, pois como veremos a imagem de gapsets (com profundidade menor ou igual a 3) por ϕ possuem esta característica. A nomenclatura m -set é inspirada no fato de estes conjuntos são “sets” com a propriedade $M \cap m\mathbb{N} = \emptyset$, mas esta propriedade não é forte o suficiente para que sejam m -extensões.

Denotamos por $\mathcal{M}_k(g)$ o conjunto de todos os m -sets com g elementos com $m \geq 2$, tal que a distância máxima entre dois elementos consecutivos (com respeito à ordenação natural) é k e está em $[1, 2g - 1]$. Em alguns casos, também lidamos com subconjuntos de $[1, 2g - 1]$ sem nenhuma propriedade específica. Vamos denotar por $\mathcal{C}_k(g)$ o conjunto de todos os conjuntos que possuem g elementos e tal que a distância máxima entre dois elementos consecutivos (em relação à ordem natural) é k . Observamos que $\mathcal{G}_k(g) \subset \mathcal{M}_k(g) \subset \mathcal{C}_k(g)$.

Observação 2.37. *Considere $C = [1, m - 1] \cup [m + 1, 2m]$, $A = [1, m - 1] \cup [m + 1, m + 2] \cup [2m + 1, 2m + 3]$ e $G = [1, m - 1] \cup \{2m - 4\}$. Então, $C \in \mathcal{C}_k(g)$, mas $C \notin \mathcal{M}_k(g), \mathcal{G}_k(g)$ pois $2m \in C$. De forma análoga, temos $A \in \mathcal{C}_k(g), \mathcal{M}_k(g)$ mas $A \notin \mathcal{G}_k(g)$, pois $[m + 1, m + 2] \not\subseteq [2m + 1, 2m + 3] - m$. Finalmente, como G é um gapset temos $G \in \mathcal{C}_k(g), \mathcal{M}_k(g)$ e $\mathcal{G}_k(g)$.*

Sejam g e k inteiros não negativos. Definimos a aplicação $\phi : \mathcal{G}_k(g) \rightarrow \mathcal{C}_{k+1}(g+1)$, da seguinte forma: se $G = \{1 = \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_i + k < \dots < \ell_g\}$, então

$$G \mapsto \phi(G) = \{1 = \ell_0 < 2 = \ell_1 + 1 < \ell_2 + 1 < \dots < \ell_\alpha + 1 < \ell_{\alpha+1} + 2 < \dots < \ell_g + 2\}, \quad (2.1)$$

onde $\alpha := \max\{i : \ell_{i+1} - \ell_i = k\}$.

Vamos convencionar que, $\phi(\emptyset) = \{1\}$ e $\phi(\{1\}) = \{1, 3\}$.

Seja $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ a partição canônica de G . Observamos que a aplicação ϕ leva G_0 em $G_0 \cup \{m\}$, fazendo uma translação de uma unidade nos elementos de G maiores que $m + 1$ até ℓ_α e trasladando de duas unidades os demais elementos de G .

Teorema 2.38. *A aplicação ϕ está bem definida e é injetiva. Além disso, se $G \in \mathcal{G}_k(g)$ possui multiplicidade m , então*

- (1) se $q(G) = 1$, então $\phi(G)$ é um gapset de profundidade 2;
- (2) se $q(G) = 2$, então $\phi(G)$ é um $(m + 1)$ -set de profundidade 2;
- (3) se $q(G) = 3$, então $\phi(G)$ é um $(m + 1)$ -set de profundidade 3, com exceção para os casos em que $2m + 1 \in G$ e $\ell_\alpha \geq 2m + 1$.

Demonstração. Inicialmente vamos verificar que $\phi(G) \in \mathcal{C}_{k+1}(g + 1)$. Com efeito, vemos facilmente que a distância máxima entre dois elementos consecutivos em $\phi(G)$ é $(\ell_{\alpha+1} + 2) - (\ell_\alpha + 1) = k + 1$ e existem $g + 1$ elementos em $\phi(G)$. Como $\ell_g \leq 2g - 1$, então $\ell_g + 2 \leq 2g + 1$ e $\phi(G) \subset [1, 2(g + 1) - 1]$.

Agora, vamos provar que ϕ é injetiva. Sejam $G_1 = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{\alpha_1} < a_{\alpha_1+1} = a_{\alpha_1} + k < \dots < a_g\}$ e $G_2 = \{b_1 < b_2 < \dots < b_{\alpha_2} < b_{\alpha_2+1} = b_{\alpha_2} + k < \dots < b_g\} \in \mathcal{G}_k(g)$ tais que $\phi(G_1) = \phi(G_2)$, onde $\alpha_1 = \max\{i : a_{i+1} - a_i = k\}$ e $\alpha_2 = \max\{i : b_{i+1} - b_i = k\}$. Basta provar que $\alpha_1 = \alpha_2$. Suponha por absurdo que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha_1 < \alpha_2$. Então $a_n = b_n$, para todo $n \in [1, \alpha_1] \cup [\alpha_2 + 1, g]$ e $a_{\alpha_2} + 2 = b_{\alpha_2} + 1$. Como, $k = b_{\alpha_2+1} - b_{\alpha_2} = a_{\alpha_2+1} - (a_{\alpha_2} + 1)$, temos que $k + 1 = a_{\alpha_2+1} - a_{\alpha_2}$, o que é um absurdo. Portanto, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $G_1 = G_2$.

Para verificar as demais conclusões, vamos proceder da seguinte forma:

Se $q = 1$, então G é o gapset ordinário de gênero g e, $\phi(G) = [1, g] \cup \{g + 2\}$ é um gapset com profundidade 2.

Resta resolver os casos $q = 2$ e $q = 3$. Para ambos casos vamos verificar algumas condições. Seja $G = \{1 = \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\}$ com $m(G) = m$; em particular, $[1, m - 1] \subset G$ e $m \notin G$ implica que $[1, m] \subset \phi(G)$ e $m + 1 \notin \phi(G)$.

Se $q = 2$, então $m + 1 \leq \ell_g \leq 2m - 1$ e o maior elemento de $\phi(G)$, $\ell_g + 2$, é tal que $(m + 1) + 1 < m + 3 \leq \ell_g + 2 \leq 2m + 1 = 2(m + 1) - 1$. Assim, $2(m + 1) \notin \phi(G)$, o que garante que $\phi(G)$ is a $(m + 1)$ -set com profundidade 2.

Se $q = 3$, então $2m + 1 \leq \ell_g \leq 3m - 1$ e o maior elemento de $\phi(G)$, $\ell_g + 2$, é tal que $2(m + 1) + 1 = 2m + 3 \leq \ell_g + 2 \leq 3m + 1 < 3(m + 1) - 1$. Assim, $3(m + 1) \notin \phi(G)$. Se $2m + 1 \notin G$, então $2m + 2 \notin \phi(G)$, já que $2m$ e $2m + 1 \notin G$. Se $2m + 1 \in G$ e $\ell_\alpha < 2m + 1$, então $2m + 2 \notin G$, pois o correspondente de $2m + 1$ em $\phi(G)$ é $2m + 3$. Portanto, $2m + 2$ e $3m + 3 \notin G$ e $\phi(G)$ é um $(m + 1)$ -set com profundidade 3.

□

Observação 2.39. *Em geral, a imagem de ϕ não é um m -set. Considere o gapset $G_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14\}$, logo G possui profundidade 3 e sua imagem $\phi(G_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 16\}$ não é um 6-set. Já o gapset $G_2 = \{1, 2, 4, 5, 7, 10\}$ possui profundidade 4 e sua imagem $\phi(G_2) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 12\}$ não é um 4-set.*

A seguir, vemos novamente como a condição $2g \leq 3k$ garante uma propriedade interessante aos gapsets.

Corolário 2.40. *Se $G \in \mathcal{G}_k(g)$ possui multiplicidade m e $2g \leq 3k$, então $\phi(G)$ é um $(m + 1)$ -set.*

Demonstração. A Proposição 2.27 garante que a profundidade de G é no máximo 3. Os casos de profundidade 1 ou 2 seguem de (1) e (2) do Teorema 2.38. Se $q = 3$, então Proposição 2.23 assegura que $\ell_\alpha \leq 2m - 1$ e usando o item (3) do Teorema 2.38 completamos a prova. □

Um fato importante de observar é que a aplicação ϕ é diferente da aplicação usada por Eliahou e Fromentin em seus trabalhos. Para isso, vamos relembrar a definição usada por eles.

Eliahou e Fromentin trabalharam com uma aplicação σ e para um gapset G sua partição canônica $G_0 \cup G_1 \cup G_2$, mais detalhes sobre esta aplicação veja (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b). Tal aplicação é definida como $\sigma(G) = (G_0 \cup \{m\}) \cup (G_1 + 1) \cup (G_2 + 2)$. Em particular, $\sigma(G)$ é sempre um gapset, se sua profundidade é no máximo 3. Note que $g(\sigma(G)) = g(G) + 1$. Vale notar que a aplicação ϕ considerada neste trabalho é diferente da aplicação σ . Por exemplo, considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 19, 21\}$, então $\phi(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 21\} \cup \{23\}$ e $\sigma(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 20\} \cup \{23\}$, dessa forma $\sigma \neq \phi$. Mais especificamente, podemos generalizar este exemplo. No caso geral, considere $g \geq 12$. Se $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, 2g - 5\} \cup \{2g - 3\}$, então $\phi(G) = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 3\} \cup \{2g - 1\}$ e $\sigma(G) = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 4\} \cup \{2g - 1\}$. Com isso, trabalhamos não somente com uma aplicação nova, mas também conseguimos resultados bastantes interessantes com tal aplicação.

Agora focaremos nossa atenção em gapsets k -esparso puros com gênero g e profundidade 2 e 3 (uma vez que para $q = 1$ está completamente determinado). Vamos

denotar por $\mathcal{G}_k(g, 2) := \{G \in \mathcal{G}_k(g) : q(G) = 2\}$ e $\mathcal{G}_k(g, 3) := \{G \in \mathcal{G}_k(g) : q(G) = 3\}$ a família de gapsets k -esparso puros com gênero g e profundidade 2 e 3, respectivamente. O Teorema 2.38 garante que gapsets com multiplicidade m e profundidade no máximo 3 são mapeados por ϕ em um $(m + 1)$ -set com profundidade no máximo 3, exceto para o caso de conjuntos de lacunas G com profundidade 3, onde $2m + 1 \in G$ e $\ell_\alpha \geq 2m + 1$. Agora iremos procurar condições que garantam que tais $(m + 1)$ -sets sejam gapsets.

No próximo resultado, encontramos uma condição para que um m -set seja um gapset.

Lema 2.41. *Seja G um m -set. Se $G \subset [1, 2m - 1]$, então G é um gapset com multiplicidade m e profundidade no máximo 2.*

Demonstração. Seja $z \in G$, suponha sem perda de generalidade que $z = x + y$, com $x \leq y$. Uma vez que $z \leq 2m - 1$, temos que $x \leq m - 1$. Portanto, $x \in G$ e isso completa a prova deste lema. \square

Munidos do lema anterior, podemos provar que gapsets com profundidade no máximo 2 são mapeados via aplicação ϕ em gapsets de profundidade no máximo 2.

Vamos denotar por $\phi_2 := \phi|_{\mathcal{G}_k(g, 2)}$ a restrição da aplicação ϕ à família de gapsets k -esparso puros com gênero g e profundidade 2. Como é possível constatar a seguir, para gapsets com profundidade 2, não precisamos impor a condição $2g \leq 3k$.

Teorema 2.42. *Sejam g e k inteiros não negativos. Então, $Im(\phi_2) \subset \mathcal{G}_{k+1}(g + 1, 2)$.*

Demonstração. Considere $G' \in Im(\phi_2)$, vamos mostrar que G' é um gapset $(k + 1)$ -esparso puro com gênero $g + 1$ e profundidade 2. Note que existe $G \in \mathcal{G}_k(g)$ tal que $\phi_2(G) = G'$. Denotando $m(G) = m$ e observando que $q(G) = 2$, obtemos pelo Teorema 2.38 que G' é um $(m + 1)$ -set com profundidade 2. Pelo Lema 2.41, podemos concluir que G' é um gapset e $G' \in \mathcal{G}_{k+1}(g + 1, 2)$, uma vez que $G' \subset [1, 2(m + 1) - 1]$. \square

Observação 2.43. *A aplicação ϕ_2 é injetiva, mas não é sobrejetiva. Para ver que ela não é sobrejetiva, considere o gapset $[1, g] \cup \{g + 2\} \in \mathcal{G}_{k+1}(g + 1, 2)$. Note que $[1, g] \cup \{g + 2\} \notin \phi_2(\mathcal{G}_k(g + 1, 2))$. Em particular, $\#\mathcal{G}_k(g, 2) < \#\mathcal{G}_{k+1}(g + 1, 2)$.*

Exemplo 2.44. *A Tabela 1 ilustra como ϕ_2 age.*

A seguir, apresentamos um resultado semelhante ao Teorema 2.42 com uma condição adicional. Nesse caso, vemos a necessidade de impor que condição $2g \leq 3k$ seja satisfeita, para que m -sets sejam gapsets com profundidade 3.

Como antes, vamos denotar por $\phi_3 := \phi|_{\mathcal{G}_k(g, 3)}$ a restrição da aplicação ϕ à família de gapsets k -esparso puros com gênero g e profundidade 3.

$g = g(G)$	G	$\phi_2(G)$
2	$\{1, 3\}$	$\{1, 2, 5\}$
3	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 3, 7\}$
	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 3, 6\}$
4	$\{1, 2, 3, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 9\}$
	$\{1, 2, 3, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 8\}$
	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 7\}$
	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 6, 7\}$

Tabela 1 – Alguns exemplos do Teorema 2.42.

Teorema 2.45. *Sejam g e k inteiros não negativos tais que $2g \leq 3k$. Então $\text{Im}(\phi_3) \subseteq \mathcal{G}_{k+1}(g+1, 3)$.*

Demonstração. Seja $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k < \dots < \ell_g\} \in \mathcal{G}_k(g, 3)$, com $m(G) = m$. Pelo Corolário 2.40, $\phi(G)$ é um $(m+1)$ -set que pertence a $\mathcal{M}_{k+1}(g+1, 3)$. Basta provar que $\phi_3(G)$ é um gapset. Considere a partição canônica de $\phi(G)$, a saber $G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2$. Dado $z \in \phi(G)$ escrevemos $z = x + y$, com $x \leq y$. Vamos dividir a demonstração em três casos, quando $z \in G'_0, G'_1$ ou G'_2 :

- 1) se $z \in G'_0 = [1, m]$. Neste caso, ambos x e $y \in G'_0$.
- 2) se $z \in G'_1 \subseteq [m+2, 2m+1]$. Neste caso, $2x \leq x + y = z \leq 2m+1$. Portanto, $x \leq m$ e $x \in G'_0$.
- 3) se $z \in G'_2 \subseteq [2m+3, 3m+1]$. Afirmamos que se $x \leq m$ ou $y \geq 2m+1$, então $x \in G'_0$. O primeiro caso é trivial e o segundo implica que $3m+1 \geq z \geq x + 2m+1$ e nós obtemos $x \leq m$. Portanto, resta mostrar que se $x, y \in [m+1, 2m]$, com $x \leq y$, então x ou $y \in G'_1$.

- Considere $\ell_{\alpha+1} \leq 2m-1$. Neste caso, afirmamos que $y-1 \leq \ell_\alpha$. Na verdade, se $y \geq \ell_\alpha+2$, então $z \geq (m+1) + (\ell_\alpha+2) = \ell_\alpha+m+3$. Assim, $G \ni z-2 \geq \ell_\alpha+m+1$, o que é uma contradição a Proposição 2.23. Assim, ambos $x-1$ e $y-1 \leq \ell_\alpha$ e podemos escrever $z-2 = (x-1) + (y-1)$. Como $z-2 \in G$ e G é um gapset, nós podemos concluir que $x-1$ ou $y-1 \in G$ e assim $x \in \phi(G)$ ou $y \in \phi(G)$.
- Considere $\ell_{\alpha+1} \geq 2m+1$. Usaremos a hipótese $2g \leq 3k$ neste caso. Pela Proposição 2.32, temos que $\ell_\alpha \leq 2m-1$ e assim $\ell_\alpha+1 \in G'_1$. Portanto, $z \geq \ell_{\alpha+1}+2$. Neste caso, $x \leq y \leq 2m < \ell_{\alpha+1}$ e $G \ni z-2 = (x-1) + (y-1)$. Uma vez que G é um gapset, então $x-1$ ou $y-1 \in G$. Portanto, $x \in \phi(G)$ ou $y \in \phi(G)$ e isto conclui a demonstração.

□

Observação 2.46. Em geral, $\phi(G)$ não é um gapset, mesmo se a profundidade de G for 3 e $\phi(G)$ for um m -set. Considere o gapset $G = \{1, \dots, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 23, 28\}$, logo G tem profundidade 3, multiplicidade 10 e sua imagem $\phi(G) = \{1, \dots, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 24, 30\}$ é um 11-set, mas não é um gapset. Existem alguns exemplos, como $G = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ tal que $\phi(G) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ é também um gapset, mesmo quando $2g > 3k$.

Exemplo 2.47. A Tabela 2 mostra como ϕ_3 age.

G	$\phi_3(G)$
$\{1, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$	$\{1, 2, \mathbf{4}, \mathbf{7}\}$
$\{1, 2, \mathbf{4}, \mathbf{7}\}$	$\{1, 2, 3, \mathbf{5}, \mathbf{9}\}$
$\{1, 2, 3, \mathbf{5}, \mathbf{9}\}$	$\{1, 2, 3, 4, \mathbf{6}, \mathbf{11}\}$
$\{1, 2, 3, 4, \mathbf{6}, \mathbf{11}\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, \mathbf{7}, \mathbf{13}\}$
$\{1, 2, 3, 5, \mathbf{6}, \mathbf{10}\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6, \mathbf{7}, \mathbf{12}\}$
$\{1, 2, 3, 5, \mathbf{7}, \mathbf{11}\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6, \mathbf{8}, \mathbf{13}\}$
$\{1, 2, 3, 6, \mathbf{7}, \mathbf{11}\}$	$\{1, 2, 3, 4, 7, \mathbf{8}, \mathbf{13}\}$

Tabela 2 – Alguns exemplos da aplicação ϕ_3 para gênero 3, 4, 5 e 6

2.4 Sobre a cardinalidade de $\mathcal{G}_k(g)$, para $2g \leq 3k$

Nesta seção, apresentamos o principal resultado deste trabalho. Aqui exibiremos uma relação entre $\mathcal{G}_k(g)$ e $\mathcal{G}_{k+1}(g+1)$.

Teorema 2.48. *Sejam g e k inteiros não negativos, de modo que $2g \leq 3k$. Então a aplicação $\varphi : \mathcal{G}_k(g) \rightarrow \mathcal{G}_{k+1}(g+1), G \mapsto \varphi(G) = \phi(G)$ é bijetiva.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que a hipótese $2g \leq 3k$ implica que $\mathcal{G}_k(g)$ tem apenas gapsets $\emptyset, \{1\}$ e gapsets com profundidade 2 ou 3. O Teorema 2.38 garante que φ é injetiva; Os Teoremas 2.42 e 2.45 garantem que φ está bem definida. Portanto, só temos que provar que φ é sobrejetiva.

Seja $G \in \mathcal{G}_{k+1}(g+1)$ tal que $2g \leq 3k$. Se $G = \{1\}$, então $G' = \emptyset$ é tal que $\phi(G') = G$ e se $G = \{1, 3\}$, então $G' = \{1\}$ é tal que $\phi(G') = G$. Portanto, podemos assumir que G tem gênero $g+1 \geq 3$.

Escreva $G = \{\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \dots < \ell_\alpha < \ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + k + 1 < \dots < \ell_{g+1}\}$ e seja m a multiplicidade. Como $2g \leq 3k$ então $2(g+1) \leq 3k + 2 < 3(k+1)$. Em particular, G tem profundidade de no máximo 3 e, portanto, $\ell_{g+1} \leq 3m - 1$. Note que a Proposição 2.29 garante que α é o único índice tal que $\ell_{\alpha+1} - \ell_\alpha = k + 1$ ($\{1, 3, 5\} \notin \mathcal{G}_{k+1}(g+1)$). Vamos mostrar que $G' = \{\ell_2 - 1 < \ell_3 - 1 < \dots < \ell_\alpha - 1 < \ell_{\alpha+1} - 2 < \dots < \ell_{g+1} - 2\} \in \mathcal{G}_k(g)$ e satisfaz $\varphi(G') = G$.

Naturalmente, $\#G' = g$ e a distância máxima entre os elementos de G' é $(\ell_{\alpha+1} - 2) - (\ell_\alpha - 1) = k$. Agora vamos provar que G' é um $(m - 1)$ -set:

- $m - 1 \notin G'$

Como $\ell_j = j, \forall j \in [1, m - 1]$, então $G' \ni \ell_j - 1 = j - 1, \forall j \in [2, m - 1]$; também temos que $\ell_m \geq m + 1$. Estudamos dois casos, como segue: (1) se $\ell_m \geq m + 2$, então $\ell_m - 1 > \ell_m - 2 \geq m$. Neste caso, obtemos que $m - 1 \notin G'$; (2) suponha que $\ell_m = m + 1$. Se existe $j \in [m, g]$ tal que $\ell_{j+1} - \ell_j \geq 2$, então $G' \ni \ell_m - 1 = m$ e assim $m - 1 \notin G'$. Caso contrário, podemos escrever $\ell_j = j + 1, \forall j \in [m, g]$ e a distância máxima entre os elementos consecutivos de G é $k + 1 = 2$, que não pode ocorrer ($2g > 3$). Portanto, $m - 1 \notin G'$.

- $2(m - 1) \notin G'$

Suponha que $2m - 2 \in G'$. Neste caso, poderíamos ter $2m \in G$ ou $2m - 1 \in G$. O primeiro caso não ocorre, porque m é a multiplicidade de G . No segundo caso, temos $2m - 1 \leq \ell_\alpha$ (caso contrário, o elemento correspondente seria $(2m - 1) - 2 = 2m - 3$). Pela Proposição 2.32, temos que $\ell_\alpha = 2m - 1$. Portanto, $\ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + (k + 1) = 2m - 1 + k + 1 \geq 2(k + 1) + k = 3k + 2 \geq 2(g + 1)$, o que é uma contradição. Portanto, $2m - 2 \notin G'$.

- $3(m - 1) \notin G'$

Já sabemos que $\ell_{g+1} \leq 3m - 1$ e, portanto, o maior elemento de G' é tal que $\ell_{g+1} - 2 \leq 3m - 3$. Portanto, só temos que mostrar que $\ell_{g+1} \neq 3m - 1$ o que implica que $\ell_{g+1} - 2 \leq 3m - 4$. Suponha que $\ell_{g+1} = 3m - 1$. Neste caso, temos $2m - 1 \in G$ e podemos ter $\ell_\alpha < 2m - 1$ ou $\ell_\alpha = 2m - 1$. O primeiro caso implica que $\ell_{\alpha+1} \leq 2m - 1$. De fato, usando a Proposição 2.6, denotamos por ℓ_r e ℓ_{r+1} o maior elemento de G que é menor ou igual a $\ell_\alpha + m$ e pelo menor elemento de G que é maior ou igual a $\ell_{\alpha+1} + m$, respectivamente. Nesse caso, $\ell_{r+1} - \ell_r \geq k$, o que é uma contradição, de acordo com a Proposição 2.29 (note que $G \neq \{1, 3, 5\}$). No segundo caso, obtemos $\ell_{\alpha+1} = \ell_\alpha + (k + 1) = 2m - 1 + k + 1 \geq 2(k + 1) + k = 3k + 2 \geq 2(g + 1)$, o que é uma contradição. Portanto, $3m - 3 \notin G'$.

Portanto, podemos escrever $G' = G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2$, com $G'_0 = [1, m - 2]$, $G'_1 \subseteq [m, 2m - 3]$ e $G'_2 \subseteq [2m - 1, 3m - 4]$. Agora provamos que G' é um gapset. Seja $z \in G'$ e escreva $z = x + y$, com $x, y \in \mathbb{N}$ e $x \leq y$. Temos

- Se $z \in G'_0$, então x e $y \in G'_0$.
- Se $z \in G'_1$, então $z \leq 2m - 3$ e $2x \leq 2m - 3$. Logo, $x \in G'_0$.
- Seja $z \in G'_2$. Se $x \leq m - 2$, então $x \in G'_0$. Se $y \geq 2m - 1$, então $x \leq m - 3$ e $x \in G'_0$. Portanto, basta considerar $x, y \in [m, 2m - 3]$. Note que $\ell_\alpha \leq 2m - 2$ (se $\ell_\alpha = 2m - 1$,

então $2m - 2 \in G'$, o que não ocorre). Em particular, $\ell_\alpha - 1 \leq 2m - 3$ e $z \geq \ell_{\alpha+1} - 2$. Assim $z = \ell_t - 2$, para algum $t \in [\alpha + 1, g + 1]$. Afirmamos que $y < \ell_\alpha$. Caso contrário, $z = x + y \geq m + \ell_\alpha$ e isso implica que $\ell_t > \ell_\alpha + m$, o que é uma contradição de acordo com o Proposição 2.23. Portanto, $x \leq y < \ell_\alpha$. Escrevendo $\ell_t - 2 = z = x + y$, i.e., $\ell_t = (x + 1) + (y + 1)$ e usando que G é um gapset, concluímos que $x + 1 \in G$ or $y + 1 \in G$. Portanto, $x \in G'$ ou $y \in G'$.

□

Corolário 2.49. *Sejam g e k inteiros não negativos tais que $2g = 3k$. Então $\#\mathcal{G}_k(g) = \#\mathcal{G}_{k+n}(g + n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Prosseguimos por indução em n . O Teorema 2.48 assegura que $\#\mathcal{G}_k(g) = \#\mathcal{G}_{k+1}(g+1)$, uma vez que $2g = 3k$. Note que $2(g+j) \leq 3(k+j)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e podemos aplicar o Teorema 2.48 novamente: a aplicação $\mathcal{G}_{k+j}(g+j) \rightarrow \mathcal{G}_{k+j+1}(g+j+1)$, $G \mapsto \phi(G)$ é bijetiva, que completa a prova. □

Pela Proposição 2.15, podemos escrever $n_g = \sum_{k=0}^g \#\mathcal{G}_k(g)$. Segue imediatamente do Corolário 2.49 o seguinte resultado.

Corolário 2.50. *Seja $g \in \mathbb{N}$. $n_g \leq n_{g+1}$ se, e somente se,*

$$\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2g-1}{3} \rfloor} \#\mathcal{G}_k(g) \leq \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2g+2}{3} \rfloor} \#\mathcal{G}_k(g+1)$$

A seguir, vamos calcular os primeiros valores da sequência $w_k(g) := \#\mathcal{G}_k(g)$, com $k \geq \lfloor \frac{2g}{3} \rfloor$, mais especificamente, vamos exibir os gapsets k -esparso puros para $k = g, g - 1, g - 2$ e $g - 3$. A demonstrações para exibir cada gapset são muito longas e portanto deixamos para consulta no Apêndice A. O leitor interessado em consultar tais cálculos, irá notar que os métodos para exibir estes gapsets são distintos entre si, isto se deve ao fato, que os cálculos de todos os gapsets que exibimos abaixo foram realizados de duas maneiras distintas. Portanto, para que o leitor perceba tais nuances, deixamos algumas demonstrações fixando a multiplicidade do gapset e outras fixamos o número de Frobenius do gapset.

Teorema 2.51. *Os gapsets k -esparso puros de gênero g com $k = g - 3, g - 2, g - 1, g$, são:*

- a) *Se $k = g$, temos que $w_g(g) = 1$ e para cada $g \geq 1$ temos os seguintes gapsets k -esparso puros de gênero g : $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 1\}$*

- b) Se $k = g - 1$, temos que $w_{g-1}(g) = 2$ e para cada $g \geq 3$ temos os seguintes gapsets k -esparsos puros de gênero g : $G = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 1\}$ e $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 2\}$
- c) Se $k = g - 2$, temos que $w_{g-2}(g) = 5$ e para cada $g \geq 6$ temos os seguintes gapsets k -esparsos puros de gênero g : $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 3\}$, $G = [1, g - 2] \cup \{2g - 4, 2g - 3\}$, $G = [1, g - 2] \cup \{g + 1, 2g - 1\}$, $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g, 2g - 2\}$, $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g + 1, 2g - 1\}$ e $G = [1, g - 3] \cup \{g, g + 1, 2g - 1\}$
- d) Se $k = g - 3$, temos que $w_{g-3}(g) = 12$ e para cada $g \geq 9$ temos os seguintes gapsets k -esparsos puros de gênero g : $G = [1, g - 4] \cup \{g - 1, g + 1, g + 2, 2g - 1\}$, $G = [1, g - 4] \cup \{g, g + 1, g + 2, 2g - 1\}$, $G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g, g + 2, 2g - 1\}$, $G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g - 1, g + 2, 2g - 1\}$, $G = [1, g - 4] \cup \{g - 1, g, g, 2g - 2\}$, $G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g - 1, g, 2g - 2\}$, $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 4\}$ e $G = [1, g - 2] \cup \{2g - 5, 2g - 4\}$.

Terminamos esta seção apresentando a Tabela 3, que ilustra nossos resultados. Os números em vermelho representam onde primeiro surge os valores da sequência $w_k(g)$.

$g \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	n_g
0	1																				1
1	1																				1
2	1	1																			2
3	1	2	1																		4
4	1	3	2	1																	7
5	1	5	3	2	1																12
6	1	7	7	5	2	1															23
7	1	10	12	8	5	2	1														39
8	1	15	18	17	8	5	2	1													67
9	1	20	31	28	18	12	5	2	1												118
10	1	27	51	49	34	22	12	5	2	1											204
11	1	38	78	87	57	40	22	12	5	2	1										343
12	1	51	125	147	100	76	42	30	12	5	2	1									592
13	1	70	195	237	177	134	83	54	30	12	5	2	1								1001
14	1	95	297	399	309	239	150	99	54	30	12	5	2	1							1693
15	1	128	457	654	530	422	259	183	103	70	30	12	5	2	1						2857
16	1	172	705	1061	902	723	452	336	199	135	70	30	12	5	2	1					4806
17	1	230	1074	1717	1513	1248	811	590	363	243	135	70	30	12	5	2	1				8045
18	1	309	1621	2777	2535	2148	1411	1037	646	444	251	167	70	30	12	5	2	1			13467
19	1	413	2448	4464	4232	3636	2434	1810	1124	804	480	331	167	70	30	12	5	2	1		22464

Tabela 3 – Alguns valores de $\#\mathcal{G}_k(g)$

3 Gapsets e cobrimentos de tabuleiros

A sequência de Fibonacci (\mathbf{F}_n) é dada pela relação de recorrência

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_{n-2},$$

para todo $n \geq 2$ com valores iniciais $\mathbf{F}_0 = 0$ e $\mathbf{F}_1 = 1$. Existem algumas generalizações desta sequência bem conhecidas e neste trabalho lidamos com a sequência de Fibonacci k -generalizada, a saber $(\mathbf{F}_n^{(k)})$, onde $k \geq 2$ e $n \geq -k + 2$. A relação de recorrência é dada por $\mathbf{F}_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_{n-i}^{(k)}$ e os valores iniciais são dados por $\mathbf{F}_1^{(k)} = 1$ e $\mathbf{F}_i^{(k)} = 0$, para $i \in [-k + 2, 0]$.

Seja g um número inteiro positivo. Um g -tabuleiro é um retângulo $1 \times g$ com 1 linha e g colunas (veja Figura 1). Um cobrimento de um g -tabuleiro é uma sequência $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, onde β_i é um número inteiro positivo e $\sum \beta_i = g$. Podemos imaginar que um elemento β_i dessa sequência pode ser identificado como um retângulo $1 \times \beta_i$ e podemos preencher o g -tabuleiro, colocando retângulos $1 \times \beta_1, 1 \times \beta_2, \dots, 1 \times \beta_n$ lado a lado. Denotaremos o conjunto de todos os cobrimentos de g -tabuleiro por $\mathcal{C}(g)$, o conjunto de cobrimentos de um g -tabuleiro com peças de tamanho $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$ por $\mathcal{C}(g, k)$ e um cobrimento por \mathfrak{C} . É possível verificar que o número de Fibonacci k -generalizado de ordem $g + 1$ é dado por

$$\mathbf{F}_{g+1}^{(k)} = \#\mathcal{C}(g, k), \tag{3.1}$$

veja o Teorema 3.4. Vamos denotar $\#\mathcal{C}(g, k) = f_g^{(k)}$.

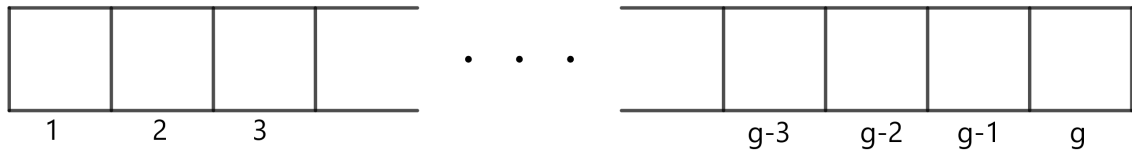


Figura 1 – g -tabuleiro

Dado um g -tabuleiro, vamos denotar por f_g o número de cobrimentos de um g -tabuleiro com peças de tamanhos 1×1 ou 1×2 , com $g \geq 0$ e $f_0 = 1$. Os primeiros termos dessa sequência são: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ e $f_4 = 5$.

Neste capítulo, vamos usar a noção de cobrimento de um g -tabuleiro para representar gapsets de gênero g . Para encontrar essa relação, iremos, na Seção 3.2, generalizar a noção de vetor de Kunz para m -extensões. Esta generalização mostra que o vetor de Kunz

não provém da propriedade do semigrupo numérico ser fechado em relação à adição. Além disso, a noção de vetor de Kunz para m -extensões não só reduz muitos dos cálculos como também é parte central na construção de uma bijeção entre m -extensões e cobrimentos. Tal bijeção, permite que identifiquemos gapsets com cobrimentos de tabuleiros. Munidos dessa identificação, seremos capazes de construir uma cota inferior para os números n_g e n'_g , isto é, para a quantidade de gapsets de gênero g e a quantidade de gapsets de gênero g e profundidade $q \leq 3$, respectivamente.

Corolário 3.32. *A quantidade de gapsets de gênero g (e também os gapsets de profundidade menor ou igual à 3) é limitado inferiormente por*

$$\left\lfloor \frac{3\mathbf{F}_{g+1} - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor - \lambda,$$

onde $\lambda = 0$, se $g \not\equiv 4 \pmod{6}$ e $\lambda = 1$ caso contrário.

Além disso, usando os resultados de (KARAKAS, 2017) obtemos resultados interessantes sobre o número de gapsets com gênero e profundidade fixados. Para isso, considere $\mathcal{TF}(g, q, m = 4)$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g , multiplicidade 4 e profundidade q .

Corolário 3.57. *Seja $g \geq 1$. Temos que*

$$n_g \leq \mathbf{F}_{g+1}^{\left(\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor\right)} + \left\lfloor \frac{g+6}{3} \right\rfloor + \#\mathcal{TF}(g, q, m = 4),$$

onde $q \in \left[\frac{2g}{5} + 1, g \right]$.

Para este capítulo, iremos fixar as seguintes notações: sejam g e q inteiros não negativos, denotamos por $\mathcal{F}(g, q) := \{G \in \Gamma(g) : q(G) = q\}$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g e profundidade q , e $\tilde{\mathcal{F}}(g, q) := \{G \in \Gamma(g) : q(G) \leq q\}$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g e profundidade no máximo q . Ainda, denotamos por $\mathcal{F}(g, q, m = 3)$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g e profundidade q e multiplicidade 3, e $\mathcal{F}(g, q, m = 4)$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g e profundidade q e multiplicidade 4.

3.1 Resultados básicos

Começamos esta seção com alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 17\}$. Esse gapset é um 7-esparso puro com multiplicidade 7, gênero 9 e profundidade 3. Podemos calcular sua partição canônica $G_0 = [1, 6]$, $G_1 = \{9, 10\}$ e $G_2 = \{17\}$.*

Exemplo 3.2. Considere o gapset $G = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16\}$. Esse gapset é um 3-esparso puro com multiplicidade 3, gênero 9 e profundidade 6. Podemos calcular seu vetor de Kunz $(3, 11, 19)$ (veja a definição de vetor de Kunz na Seção 3.2).

A seguir, enunciaremos um resultado clássico da teoria dos números.

Teorema 3.3. A sequência (f_n) satisfaz

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n,$$

para todo $n \geq 1$. Em particular, $f_n = \mathbf{F}_{n+1}$.

Demonstração. Por definição, existem f_{n+1} coberturas para um $(n+1)$ -tabuleiro. Porém, elas podem ser divididas em dois tipos: primeiro existe um retângulo 1×1 na primeira posição e neste caso, temos um n -tabuleiro e portanto f_n coberturas. Segundo, existe uma peça 1×2 na posição $(1, 2)$ e portanto temos um $(n-1)$ -tabuleiro e assim f_{n-1} coberturas. Segue que $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Finalmente, vemos que f_n e \mathbf{F}_{n+1} satisfazem a mesma relação de recorrência e possuem valores iniciais iguais, portanto temos a igualdade. \square

De forma similar, provamos o próximo resultado.

Teorema 3.4. A sequência $(f_n^{(k)})$ satisfaz

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n-1}^{(k)} + f_n^{(k)},$$

para todo $n \geq 1$. Em particular, $f_n^{(k)} = \mathbf{F}_{n+1}^{(k)}$.

O resultado a seguir pode ser provado utilizando indução.

Proposição 3.5. Seja \mathbf{F}_n o número de Fibonacci de ordem n . As seguintes igualdades são verdadeiras:

$$1) \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{2i} = \mathbf{F}_{2n+1} - 1.$$

$$2) \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{2i-1} = \mathbf{F}_{2n}.$$

$$3) \sum_{i=0}^n \mathbf{F}_{3i} = \frac{\mathbf{F}_{3n+2} - 1}{2}.$$

$$4) \sum_{i=0}^n \mathbf{F}_{3i+1} = \frac{\mathbf{F}_{3n+3}}{2}.$$

$$5) \sum_{i=0}^n \mathbf{F}_{3i+2} = \frac{\mathbf{F}_{3n+4} - 1}{2}.$$

O próximo resultado garante que cada m -extensão com no máximo 2 é um gapset.

Proposição 3.6. *Seja $G \subseteq [1, 2m - 1] \cap \mathbb{Z}$, com $[1, m - 1] \cap \mathbb{Z} \subseteq G$ e $m \notin G$. Então G é um gapset com multiplicidade m e profundidade no máximo 2.*

Demonstração. É claro que $[1, m - 1] \subseteq G$. Seja $z \in G$ e escreva $z = x + y$, com $x \leq y$. Como $z \leq 2m - 1$, então $x \leq m - 1$. Portanto, $x \in G$ e a prova está completa. \square

Lema 3.7. *Seja $g \geq 2$ um inteiro. Então $\mathbf{F}_i^{(g)} = 2^{i-2}$, para todo $i \in [2, g + 1]$.*

Demonstração. Prossequimos por indução em i . Note que $\mathbf{F}_2^{(g)} = \mathbf{F}_1^{(g)} = 1 = 2^0$. Seja $i \in [2, g + 1]$ e assumamos que $\mathbf{F}_j^{(g)} = 2^{j-2}$, para todo $j \in [2, i - 1]$. Então, $\mathbf{F}_i^{(g)} = \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{F}_j^{(g)} = 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{i-3} = 2^{i-2}$. \square

Como consequência deste lema, temos que $\mathbf{F}_{g+1}^{(g)} = 2^{g-1}$ e obtemos uma fórmula para o número de cobrimentos de g -tabuleiros como segue.

Proposição 3.8. $\#\mathcal{C}(g) = 2^{g-1}$.

Demonstração. Seja \mathfrak{C} um cobrimento em $\mathcal{C}(g)$. Então \mathfrak{C} pode ter partes $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times g$ (não precisa ter todos eles). Da Igualdade (3.1), $\#\mathcal{C}(g) = \mathbf{F}_{g+1}^{(g)}$. A fórmula fornecida no Lema 3.7 conclui a prova. \square

3.2 O vetor de Kunz para m -extensões

Nesta seção, apresentamos o conjunto Apéry e o vetor de Kunz de um gapset G . Esta definição surge de forma natural, quando consideramos o semigrupo numérico $\mathbb{N}_0 \setminus G$. Podemos estender esses conceitos e introduzir o conjunto Apéry e o vetor de Kunz de uma m -extensão (veja novamente a Definição 2.35).

Seja G um gapset com multiplicidade m e considere o semigrupo numérico $S := \mathbb{N}_0 \setminus G$. Lembre que o conjunto Apéry de S em m é definido como $Ap(S) = \{w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$, onde $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{m}\}$, para $i \in [0, m - 1]$. Observe que $w_0 = 0$ e escreva $w_i = mk_i + i$. O vetor de Kunz de S em m é dado por $Kunz(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Portanto, é possível considerar o conjunto Apéry de G em m e o vetor de Kunz de G em m dados por $Ap(G) := Ap(\mathbb{N}_0 \setminus G)$ e $Kunz(G) := Kunz(\mathbb{N}_0 \setminus G)$, respectivamente. Observe que os elementos w_i podem ser definidos como $w_i := m + \max\{g \in G : g \equiv i \pmod{m}\}$. Dessa forma, temos uma caracterização de $Ap(G)$ e $Kunz(G)$ depende exclusivamente do gapset G .

Vamos estender esses conceitos e definir o conjunto Apéry e o vetor de Kunz para uma m -extensão. Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e A uma m -extensão. O pseudo-conjunto Apéry de A (em m) é $Ap(A)^p := Ap(\mathbb{N}_0 \setminus A) = \{w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$, onde $w_i := m + \max\{a \in A : a \equiv i \pmod{m}\}$. Observe que w_i está bem definido para cada i , uma vez que A é um subconjunto finito de \mathbb{N} e se $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ tem-se $A_{i+1} \subset A_i + m$. Escrevendo $w_i = mk_i + i$, para $i \in [1, m-1]$, dizemos que $Kunz(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ é o pseudo vetor de Kunz de A . No caso em que a m -extensão A é um gapset, temos $Ap(A)^p$ é denotado simplesmente por $Ap(A)$ e $Kunz(A)^p$ é denotado simplesmente por $Kunz(A)$. A escolha de usar o termo pseudo tem o propósito de evitar possíveis confusões entre as definições. Outros termos foram considerados (por exemplo, fraco e quase), mas este pareceu o mais apropriado.

Exemplo 3.9. Considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12\}$. Temos que $w_1 = 5 + \max\{g \in G \mid g \equiv 1 \pmod{5}\} = 5 + 11 = 16$, $w_2 = 5 + \max\{g \in G \mid g \equiv 2 \pmod{5}\} = 5 + 12 = 17$, $w_3 = 5 + \max\{g \in G \mid g \equiv 3 \pmod{5}\} = 5 + 8 = 13$ e $w_4 = 5 + \max\{g \in G \mid g \equiv 4 \pmod{5}\} = 5 + 4 = 9$. Assim, $Ap(G) = \{16, 17, 13, 9\}$ e $Kunz(G) = (3, 3, 1)$.

O exemplo anterior calculamos o conjunto de Apéry e o vetor de Kunz associado à um gapset. No exemplo a seguir, calculamos o pseudo vetor de Kunz associado à uma m -extensão.

Exemplo 3.10. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 18\}$ (podemos ver que A é uma 5-extensão que não é um gapset). Então, temos que $w_1 = 5 + \max\{s \in A \mid s \equiv 1 \pmod{5}\} = 5 + 6 = 11$, $w_2 = 5 + \max\{s \in A \mid s \equiv 2 \pmod{5}\} = 5 + 12 = 17$, $w_3 = 5 + \max\{s \in A \mid s \equiv 3 \pmod{5}\} = 5 + 18 = 23$ e $w_4 = 5 + \max\{s \in A \mid s \equiv 4 \pmod{5}\} = 5 + 4 = 9$. Assim, $Ap(A)^p = \{16, 17, 13, 9\}$ e $Kunz(A)^p = (2, 3, 4, 1)$.

Lema 3.11. Seja A uma m -extensão com $\alpha_i := \#\{k \in A : k \equiv i \pmod{m}\}$. Então A é determinado exclusivamente pelo vetor $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$.

Demonstração. Seja $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$ uma m -extensão. Para $i \in [1, m-1]$, considere os números $\alpha_i := \#\{k \in A : k \equiv i \pmod{m}\}$. Vamos mostrar que $(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{m-1} + 1)$ é o pseudo vetor de Kunz de A . De fato, suponha que para algum $j \in [1, m-1]$ exista $\ell := xm + j \notin A$ com $0 \leq x \leq \alpha_j - 1$. Portanto, $\ell \notin A_s$ para algum s . Pela condição $A_{s+1} \subset A_s + m$ temos que $\ell + m = (x+1)m + j \notin A_{s+1}$ e assim $\ell + bm \notin A_r$ para cada $r \geq s$. Concluimos que $x = \alpha_j - 1$.

Assim, $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$ é o vetor de $B := \mathbb{N}_0 \setminus A$, ou seja, B é determinado por $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$. Portanto, A é determinado exclusivamente por vetor. \square

Proposição 3.12. Seja A uma m -extensão, com $Kunz(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Então $A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \pmod{m}\} = \{i, i + m, \dots, i + (k_i - 1)m\}$.

Demonstração. Pela maximalidade de $w_i = mk_i + i$, concluímos que $mx + i \notin A$, se $x > k_i$. Por outro lado, temos que $w_i - m = m(k_i - 1) + i \in A$; portanto $m(k_i - \ell) + i \in A$, para $\ell \in [0, k_i - 1]$. O resultado resulta diretamente do fato de que A pode ser escrito como $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$, para algum $t \in \mathbb{N}_0$, onde $A_0 = [1, m - 1]$ e $A_{i+1} \subseteq m + A_i$ para todo i . \square

Corolário 3.13. *Seja A uma m -extensão, com $\text{Kunz}(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Então $k_i = \#\{a \in A : a \equiv i \pmod{m}\}$, para todo $i \in [1, m - 1]$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.12, $A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \pmod{m}\}$ possui k_i elementos e o resultado segue. \square

Corolário 3.14. *Seja A uma m -extensão, com $\text{Kunz}(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Então o gênero de A é $\sum_{i=1}^{m-1} k_i$.*

Demonstração. Sabemos que $\#A = \sum_{i=1}^{m-1} \#\{A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \pmod{m}\}\}$. Pelo Corolário 3.13, o resultado segue. \square

Exemplo 3.15. *Considere o gapset $G = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$. Podemos verificar facilmente que seu vetor de Kunz é $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$. Vemos que k_1, k_2 e k_3 satisfazem as seguintes desigualdades: $2k_1 \geq k_2$, $k_1 + k_2 \geq k_3$, $k_2 + k_3 + 1 \geq k_1$ e $2k_3 + 1 \geq k_2$.*

Pelo exemplo anterior vemos que os elementos do vetor de Kunz de um gapset (ou semigrupos numéricos) satisfazem um certo sistema de inequações. De fato, esta propriedade pode ser verificada e o seguinte sistema de desigualdades é apresentado a seguir. Este sistema está intimamente ligado ao conjunto minimal de geradores de um semigrupo numérico e carrega informações importantes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i \geq 1, & \forall i \in \{1, \dots, m-1\}; \\ X_i + X_j - X_{i+j} \geq 0, & 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1; \\ X_i + X_j - X_{i+j-m} \geq -1, & 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Para mais informações sobre esse sistema, veja (ROSALES et al., 2002).

Observação 3.16. *Seja A uma m -extensão não vazia com $\text{Kunz}(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Assim $k_i \geq 1$ para todo i . Em outras palavras, dado $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}(g)$ (aquí \mathbb{N}^{m-1} denota o produto cartesiano de \mathbb{N} $m-1$ vezes), se algum $a_i = 0$, temos que $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$ não está associado a nenhuma m -extensão.*

A seguir, mostraremos que um cobrimento g -tabuleiro com retângulos de tamanhos $1 \times \beta_1, 1 \times \beta_2, \dots, 1 \times \beta_n$ está associado a um gapset se satisfizer o sistema (3.2).

Observação 3.17. *Buscamos trazer informações da teoria combinatória sobre a quantidade de cobrimento de tabuleiros para a teoria de gapsets. Desta forma, as generalizações de pseudo vetor de Kunz e pseudo conjunto de Apéry feitas no início desta seção permitem que tais propriedades sejam transportadas da teoria combinatória para a teoria de gapsets. Seja \mathfrak{C} uma cobertura de um g -tabuleiro com peças de tamanhos $1 \times \alpha_1, 1 \times \alpha_2, \dots, 1 \times \alpha_{m-1}$. Então \mathfrak{C} está associado a um gapset se, e somente se, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1})$ satisfaz o Sistema (3.2).*

Vamos denotar por $\mathbb{N}^n(g) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid g = \sum_{i=1}^n a_i\}$ e o conjunto de todas as m -extensões com o gênero g por $\mathcal{A}_m(g)$.

Lema 3.18. *Há uma bijeção entre $\mathcal{A}_m(g)$ e $\mathbb{N}^{m-1}(g)$.*

Demonstração. Seja $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}(g)$, então $g = \sum_{i=1}^{m-1} a_i$. Definindo o conjunto $A = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{i, m+i, \dots, (a_i-1)m+i\}$, segue-se que A é uma m -extensão. Agora, dada uma m -extensão A , podemos escrever seus elementos via congruência módulo m , i.e., $A = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{i, m+i, \dots, (k_i-1)m+i\}$. Obtemos imediatamente do Corolário 3.14 que $Kunz(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}(g)$. \square

3.3 Identificando gapsets com cobrimento de tabuleiros

Nesta seção, estamos interessados em identificar uma m -extensão de gênero g com um cobrimento de um g -tabuleiro, i.e., um retângulo $1 \times g$ (1 linha e g colunas), onde g é um número inteiro positivo. Em particular, esta identificação permite relacionar um gapset de gênero g com um cobrimento de um g -tabuleiro. Nesta seção, denotaremos o conjunto de todas as m -extensões de gênero g por $\mathcal{A}_m(g)$ e o conjunto de todos os cobrimentos de um g -tabuleiro por $\mathcal{C}(g)$.

Seja A uma m -extensão com $Kunz(A)^p = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$. Observe que o gênero de A é dado por $\sum_{i=1}^{m-1} k_i$. Identificamos a m -extensão A com o cobrimento do g -tabuleiro como segue: a primeira parte do tabuleiro é coberto por uma peça de tamanho $1 \times k_1$, a segunda parte por uma peça de tamanho $1 \times k_2$ e assim por diante, até $(m-1)$ -ésima parte por uma peça de tamanho $1 \times k_{m-1}$. Ilustramos com o seguinte exemplo.

Exemplo 3.19. *Seja $A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$. Observe que A é uma 3-extensão, a qual não é um gapset ($5 + 5 = 10 \in A$, mas $5 \notin A$). Neste caso, $Kunz(A)^p = (4, 1)$ e A é identificado com o vetor $(4, 1)$ cujo cobrimento é ilustrado pela Figura 2 a seguir.*



Figura 2 – Cobrimento de uma m -extensão que não é gapset

Agora provamos que esta construção induz uma bijeção entre o conjunto de m -extensões com gênero g e o conjunto de cobrimentos de g -tabuleiros.

Teorema 3.20. *Seja $\sigma : \mathcal{A}(g) \rightarrow \mathcal{C}(g), A \mapsto \sigma(A) = Kunz(A)^p$ o mapa descrito acima. Então σ é uma bijeção.*

Demonstração. O Corolário 3.14 garante que σ está bem definido. Primeiro, provamos que σ é injetivo. Sejam A uma m -extensão e A' uma m' -extensão tal que $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = Kunz(A)^p = Kunz(A')^p = (k'_1, k'_2, \dots, k'_{m'-1})$. Portanto, $m = m'$ e $k_i = k'_i$, para todos i . Assim, A e A' têm exatamente os mesmos elementos e $A = A'$. Agora provamos que σ é sobrejetora. Seja $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{C}(g)$. Então $\sum_{i=1}^n c_i = g$. Devemos construir uma m -extensão A tal que $Kunz(A)^p = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ para algum m . Observe que $m = n + 1$ e temos que tomar $A = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{i, m + i, \dots, (c_i - 1)m + i\}$. A construção garante que A seja uma extensão de m . □

O teorema anterior, permite notar que a cardinalidade de $\mathcal{A}(g)$ pode ser facilmente calculada.

Proposição 3.21. *A cardinalidade de $\mathcal{A}(g)$ é exatamente 2^{g-1} .*

Demonstração. A bijeção σ indica que a cardinalidade de $\mathcal{A}(g)$ coincide com a cardinalidade de $\mathcal{C}(g)$, que é 2^{g-1} pela Proposição 3.8. □

Agora lidamos com o mapa σ restrito a $\Gamma(g)$ e apresentamos dois resultados. O primeiro envolve o número de gapsets de gênero g e profundidade no máximo 2, a saber $|\Gamma(g, q \leq 2)|$. Foi provado por Zhao (ZHAO, 2010) usando uma abordagem envolvendo semigrupos numéricos e uma identidade envolvendo os números de Fibonacci e coeficientes binomiais. Eliahou e Fromentin (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020a) provaram que as sequências $(|\Gamma(g, q \leq 2)|)$ e (\mathbf{F}_{g+1}) satisfazem a mesma relação de recorrência com as mesmas condições iniciais. Aqui damos uma terceira prova para esse fato.

Proposição 3.22. *O número de gapsets de gênero g e $q \leq 2$ é \mathbf{F}_{g+1} .*

Demonstração. Considere o mapa σ restrito a $\Gamma(g, q \leq 2)$. Só temos que determinar a imagem desta aplicação. Afirmamos que coincide com o conjunto $\mathcal{C}(g, 2)$. De fato, todo

gapset com gênero g e profundidade de no máximo 2 é identificado com um cobrimento em $\mathcal{C}(g, 2)$. Além disso, se \mathfrak{C} é um cobrimento em $\mathcal{C}(g, 2)$, então representa uma m -extensão com profundidade no máximo 2. Pela Proposição 3.6, esta m -extensão é uma partição canônica e está associada a um gapset. Portanto, a pré-imagem de \mathfrak{C} é um gapset com gênero g e profundidade no máximo 2. Portanto, há uma bijeção entre $\Gamma(g, q \leq 2)$ e $\mathcal{C}(g, 2)$ e o resultado segue. \square

Como consequência da construção de σ , sabemos que a imagem de uma m -extensão com gênero g e profundidade q é um cobrimento em $\mathcal{C}(g, q)$. Em particular, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.23. *O número de gapsets com gênero g e profundidade no máximo k satisfaz $|\Gamma(g, q \leq k)| \leq \mathbf{F}_{g+1}^{(k)}$.*

Demonstração. Todo gapset com gênero g e profundidade no máximo k tem imagem sob o mapa σ sendo um cobrimento em $\mathcal{C}(g, k)$. Portanto, o mapa σ restrito a $\Gamma(g, q \leq k)$ tem como imagem um subconjunto de $\mathcal{C}(g, k)$. Da Igualdade (3.1) o resultado segue. \square

Como consequência imediata da Proposição 3.23, obtém-se um limite superior para n_g .

Corolário 3.24. *Seja n_g o número de gapsets com o gênero g . Então $n_g \leq 2^{g-1}$.*

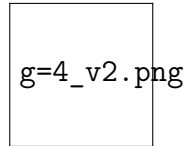
Demonstração. O número n_g pode ser definido como $n_g = \{G \in \Gamma(g) : q(G) \leq g\}$. Portanto, ela coincide com a cardinalidade de $|\Gamma(g, q \leq g)|$. Da Proposição 3.23, obtemos o resultado. \square

Eliahu e Fromentin em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b) estabeleceram a relação entre m -filtrações e m -extensões. A seguir usamos essa relação a fim de mostrar que o pseudo vetor de Kunz de uma m -extensão também pode ser calculado via m -filtração associada. Porém, antes veremos como uma cobertura de um g -tabuleiro e uma m -filtração se relacionam.

Definição 3.25. *Seja G um gapset de multiplicidade m , profundidade q e partição canônica $G = G_0 \cup \dots \cup G_{q-1}$. A gapset m -filtração F de G é dada por $F = (F_0, \dots, F_{q-1})$, onde $F_i = G_i - im$ para cada i .*

No exemplo a seguir, exploramos essa definição, bem como apresentamos uma notação útil para gapset m -filtração.

Exemplo 3.26. *Seja $g = 4$. Neste exemplo, os conjuntos G_i são gapsets e o conjunto A é uma 2-extensão que não é um gapset. O elemento F_i é a filtragem de gapset associada ao gapset G_i e a m -partição \tilde{F} é associada à m -extensão A .*

Figura 3 – Identificação m -filtrações com cobrimentos

Quando lidamos com m -filtrações, podemos calcular os números α_i da seguinte maneira.

Proposição 3.27. *Seja $F = (F_0, F_1, \dots, F_{q-1})$ a m -filtração associada a m -extensão A com profundidade q e $\text{Kunz}(A)^P = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$. Então, $\alpha_i = \#\{k \in [0, q-1] : i \in F_k\}$.*

Demonstração. Vamos denotar $\beta_i := \#\{k \in [0, q-1] : i \in F_k\}$. Como $A = A_0 \cup \dots \cup A_{q-1}$ é a m -extensão associada à F , temos que $im + F_i = A_i$ para cada i . Observe que $\#F_i = \#A_i$, então pela Proposição 3.12 $\alpha_i \leq \beta_i$ para cada i . Se temos $\alpha_i < \beta_i$ então pela propriedade de m -extensão ($A_{i+1} \subset m + A_i$) obtemos que $(\alpha_i + 1)m + i \in A_{\alpha_i+1}$ que é um absurdo. Portanto, $\alpha_i = \beta_i$. \square

Exemplo 3.28. *Considere a 5-extensão $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13\}$, então a 5-filtração associada é $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2 = (1234)(234)(23)$ com $q = 3$. Observe, por exemplo, que $\alpha_2 = 3 = \#\{k \in [0, 2] \mid 2 \in F_k\} = \beta_2$. Os outros casos seguem de forma similar, $\alpha_1 = 1 = \beta_1$, $\alpha_3 = 3 = \beta_3$ e $\alpha_4 = 2 = \beta_4$.*

Quando identificamos uma m -extensão de gênero g com um cobrimento de um g -tabuleiro, podemos obter alguns dos invariantes da seguinte maneira

- O gênero da m -extensão é o tamanho do tabuleiro.
- A multiplicidade m da m -extensão é o número de peças mais um.
- A profundidade da m -extensão é o tamanho da maior parte, ou seja, $\max\{a_i : i \in [1, m-1]\}$. Em outras palavras, a profundidade de um gapset é exatamente o maior valor que aparece nas coordenadas do vetor de Kunz do gapset.

3.4 Construindo gapsets via cobrimento de tabuleiros

Nesta seção vamos exibir vários cobrimentos de um g -tabuleiro com peças de tamanho 1×1 , 1×2 e 1×3 com o propósito de uma cota inferior para n'_g e para n_g . Para isso, vamos fazer uso do sistema (3.2) para descobrir quais cobrimentos retornam um gapset. Mais precisamente, vamos exibir quais cobrimentos retornam gapsets de profundidade até 3.

Antes do resultado geral, vamos estudar alguns casos particulares. Esse trabalho é necessário, uma vez que permite calcular a quantidade dessas coberturas.

A seguir, mostramos o caso onde ocorre a maior quantidade de gapsets usando essa técnica.

Teorema 3.29. *Sejam $n \geq 0$, $k \geq 1$ e $m \geq 1$ inteiros tais que $n + k \leq m - 1$. Considere \mathfrak{C}^g um cobrimento de um g -tabuleiro da seguinte forma: nas primeiras posições posicionamos n peças de tamanho 1×2 , nas posições subsequentes posicionamos k peças de tamanho 1×3 e nas demais posições posicionamos peças de tamanho 1×1 e 1×2 . Então a m -extensão associada é um gapset.*

Demonstração. Sabemos que \mathfrak{C}^g está associado a uma m -extensão A com $Kunz(A)^p = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$. Vamos mostrar que α_i 's satisfazem o Sistema (3.2). Para exibimos na tabela abaixo, todas as possibilidades de valores para α_{i+j} e $\alpha_i + \alpha_j$, quando $1 \leq i + j \leq m - 1$.

i	j	α_i	α_j	$\alpha_i + \alpha_j$	α_{i+j}
$[1, n]$	$[1, n]$	2	2	4	$\{1, 2, 3\}$
$[1, n]$	$[n + 1, k + n]$	2	3	5	$\{1, 2, 3\}$
$[n + 1, k + n]$	$[n + 1, k + n]$	3	3	6	$\{1, 2, 3\}$
$[1, n]$	$[k + n + 1, m - 1]$	2	$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 2, 3\}$
$[n + 1, k + n]$	$[k + n + 1, m - 1]$	3	$\{1, 2\}$	$\{4, 5\}$	$\{1, 2, 3\}$
$[k + n + 1, m - 1]$	$[k + n + 1, m - 1]$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2\}$

Tabela 4 – Casos considerados

Os demais casos seguem de forma similar ao da tabela acima.

□

Observação 3.30. *Destacamos que o resultado acima pode ser provado utilizando outras propriedades de gapsets. A saber, sejam $n \geq 0$ e $k \geq 1$ tais que $n + k \leq m - 1$. Seja $G \subset [1, 3m - 1]$ tal que $m, 2m \notin G$, $[1, m - 1] \subset G$, $G \cap [m + 1, 2m - 1] \supseteq [m + 1, m + n + k]$ e $G \cap [2m + 1, 3m - 1] = [2m + n + 1, 2m + n + k]$. Verifica-se que G é um gapset com multiplicidade m e profundidade no máximo 3, o qual possui as mesmas propriedades do teorema anterior.*

Vamos denotar o cobrimento construído no teorema anterior por $\mathfrak{C}_{m,k}^g$, i.e., $\mathfrak{C}_{m,k}^g$ é um cobrimento de um g -tabuleiro onde nas primeiras posições posicionamos n peças de tamanho 1×2 , nas posições subsequentes posicionamos k peças de tamanho 1×3 e nas demais posições posicionamos peças de tamanho 1×1 e 1×2 .

Teorema 3.31. *Seja $\nu_{m,k}(g)$ a quantidade de cobrimentos do tipo $\mathfrak{C}_{m,k}^g$. Então*

$$\nu_{m,k} = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g+1} - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor - \lambda,$$

onde

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } g \equiv 4 \pmod{6} \\ 0, & \text{se } g \not\equiv 4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam n e k inteiros. Então, como se trata de uma soma finita, temos que

$$\sum_{n,k} \mathbf{F}_{g+1-3k-2n} = \sum_k \left(\sum_n \mathbf{F}_{g+1-3k-2n} \right).$$

Para um $k \geq 1$ fixado, temos que

$$\sum_n \mathbf{F}_{g+1-3k-2n} = \mathbf{F}_{g+1-3k} + \mathbf{F}_{g-1-3k} + \cdots + \mathbf{F}_a,$$

onde $a = 1$ se $g + 1 - 3k$ é ímpar e $a = 0$ se $g + 1 - 3k$ é par. Usando as fórmulas do Proposição 3.5, concluímos que

$$\sum_n \mathbf{F}_{g+1-3k-2n} = \mathbf{F}_{g+2-3k} - \epsilon,$$

onde $\epsilon = 0$ se $g + 1 - 3k$ é ímpar e $\epsilon = 1$ se $g + 1 - 3k$ é par.

Agora, vamos calcular $\sum_k \mathbf{F}_{g+2-3k} - \epsilon$. Note que

$$\sum_n \mathbf{F}_{g+2-3k} = \mathbf{F}_{g-1} + \mathbf{F}_{g-4} + \cdots + \mathbf{F}_b,$$

onde $b = 4$ se $g \equiv 2 \pmod{3}$, $b = 2$ se $g \equiv 0 \pmod{3}$ e $b = 3$ se $g \equiv 1 \pmod{3}$. Usando as fórmulas do Proposição 3.5, obtemos

$$\sum_k \mathbf{F}_{g+2-3k} = \frac{\mathbf{F}_{g+1} - \delta}{2},$$

onde $\delta = 4$ se $g \equiv 2 \pmod{3}$, $\delta = 1$ se $g \not\equiv 2 \pmod{3}$. Como

$$\sum_k \epsilon = \{k \in \mathbb{N} \mid 3k \leq g \text{ e } g + 1 - 3k \text{ par}\} = \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor + \lambda,$$

onde $\lambda = 0$, se $g \not\equiv 4 \pmod{6}$ e $\lambda = 1$, se $g \equiv 4 \pmod{6}$. Portanto,

$$\nu_{m,k}(g) = \sum_k \mathbf{F}_{g+2-3k} - \epsilon = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g+1} - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor - \lambda.$$

□

Notamos que a quantidade de cobrimentos de um g -tabuleiro do tipo $\mathfrak{C}_{m,k}^g$ depende apenas do gênero. Portanto, denotaremos $\nu_{m,k}(g)$, por $\nu(g)$. Um cálculo similar, nos leva a ver o número $\nu(g)$ como uma soma de números de Fibonacci, tal soma é $\left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g+3}}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g-2i}}{2} \right\rfloor$, onde $\mathbf{F}_j = 0$ para todo $j \leq 0$. A seguir destacamos valores iniciais para n fixado.

- (1) Para $n = 0$, temos $\nu_{0,k} = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g+3}}{2} \right\rfloor$;
- (2) Para $n = 1$, temos $\nu_{1,k} = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g-2}}{2} \right\rfloor$;
- (3) Para $n = 2$, temos $\nu_{2,k} = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g-4}}{2} \right\rfloor$;
- (4) Para $n = 3$, temos $\nu_{3,k} = \left\lfloor \frac{\mathbf{F}_{g-6}}{2} \right\rfloor$;

Corolário 3.32. *A quantidade de gapsets de gênero g (e também os gapsets de profundidade menor ou igual à 3) é limitado inferiormente por*

$$\left\lfloor \frac{3\mathbf{F}_{g+1} - 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor - \lambda,$$

onde $\lambda = 0$, se $g \not\equiv 4 \pmod{6}$ e $\lambda = 1$ caso contrário.

Exemplo 3.33. *Considere o seguinte cobrimento de um 9-tabuleiro: $1 \times 1, 1 \times 3, 1 \times 3$ e 1×2 . Esta cobertura dá origem à 5-extensão A com $\text{Kunz}(A)^p = (1, 3, 3, 2)$. Note que A não é um gapset pois $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_1 + \alpha_1 = 2$ mas $\alpha_2 = \alpha_{1+1} = 3$, onde não ocorre $\alpha_1 + \alpha_1 \geq \alpha_2$. De fato, usando $\text{Kunz}(A)^p = (1, 3, 3, 2)$, vemos que $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13\}$ e $\mathbb{N}_0 \setminus A = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 14, \dots\}$. Este exemplo mostra que uma generalização imediata do Teorema 3.29 não é tão simples e que nem toda cobertura com peças de tamanhos $1 \times 1, 1 \times 2$ e 1×3 está associada a um gapset. Podemos ver a representação na figura abaixo.*



Figura 4 – Um cobrimento não associado a um gapset

Vemos que $\nu(g)$ é também uma cota inferior para n'_g . A seguir, comparamos os primeiros valores de $\nu(g)$ com as demais cotas. Na tabela a seguir, na segunda coluna exibimos a cota obtida em (BRAS-AMORÓS, 2008), já na quarta coluna exibimos a cota obtida em (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020b).

g	$2\mathbf{F}_g$	$\nu(g)$	$n'_{g-1} + n'_{g-2}$	n'_g	n_g
0	0	1	*	1	1
1	*	1	*	1	1
2	2	2	2	2	2
3	4	4	3	4	4
4	6	6	6	6	7
5	10	11	10	11	12
6	16	18	17	20	23
7	26	30	31	33	39
8	42	49	53	57	67
9	68	81	90	99	118
10	110	131	156	168	204
11	178	214	267	287	343
12	288	347	455	487	592
13	466	563	774	824	1001
14	754	912	1311	1395	1693

Tabela 5 – A cota $\nu(g)$

3.5 Parametrizando gapsets com gênero e profundidade fixados

Nesta seção, vamos usar o gênero e a profundidade de um gapset para obter uma cota superior para o número de gapsets de gênero g . Vamos observar que gapsets com profundidade grandes possuem multiplicidade pequena e usaremos este fato para não somente calcular estas quantidades, mas também para explicitar cada um desses gapsets. Percebemos que para certos intervalos de q temos controle sobre a multiplicidade de um gapset. Por esse motivo, iremos estudar os três primeiros intervalos, a saber são: $\left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right]$, $\left[\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \right]$ e $\left[\left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor + 1, g \right]$. Essas quantidades somadas a Proposição 3.23 irão dar origem a cota superior a qual estamos interessados.

Como vimos anteriormente, a profundidade de um gapset de gênero g pertence ao intervalo $[1, g]$. Nesta seção vamos dividir este intervalo a fim de obter mais informações sobre gapsets. Sabemos que o único gapset com profundidade g é o semigrupo hiperelíptico e o único gapset com profundidade 1 é o gapset ordinário. Assim, podemos sem perda de generalidade estudar o intervalo $[2, g - 1]$. De fato, a Proposição 3.35 garante que podemos diminuir consideravelmente este intervalo.

Começamos observando que para um gapset G de multiplicidade m e condutor c , podemos escrever $c = mb + \bar{c}$, com $b \in \mathbb{N}$ e $\bar{c} \in \{0, 2, 3, \dots, m-1\}$. Denotando por (k_1, \dots, k_{m-1}) o vetor de Kunz de G , temos que a maior coordenada, denotada por k_i^* , é dada por

$$k_i^* = \begin{cases} k_{m-1} = \frac{c}{m}, & \text{se } \bar{c} = 0, \\ k_{\bar{c}-1} = \frac{c - \bar{c}}{m} + 1, & \text{se } \bar{c} \neq 0. \end{cases}$$

Proposição 3.34. (*KARAKAS, 2017*) *Seja G um gapset com multiplicidade 3, condutor $c = 3b + \bar{c}$ e vetor de Kunz (k_1, k_2, k_3) , onde $b \in \mathbb{N}$.*

a) *Se $\bar{c} = 0$, então $\mathbb{N} \setminus G = \langle 3, 3k_1 + 1, 3b + 2 \rangle$, onde $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq k_1 \leq b$.*

b) *Se $\bar{c} = 2$, então $\mathbb{N} \setminus G = \langle 3, 3b + 4, 3k_2 + 2 \rangle$, onde $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq k_2 \leq b$.*

acertei aqui A seguir vamos estudar o comportamento entre o gênero, profundidade e multiplicidade de um gapset.

Proposição 3.35. *Seja G um gapset com gênero g , profundidade q e multiplicidade $m \geq 3$. Então $q \leq \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor$.*

Demonstração. Seja c o condutor de G . Como $c \leq 2g$ e $m \geq 3$, obtemos que $\frac{c}{m} \leq \frac{2g}{3}$ e o resultado segue. \square

Corolário 3.36. *Seja $g \geq 6$. Então $\#\mathcal{F}(g, q) = 0$, para todo $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor + 1, g - 1 \right]$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.35, não há gapset com multiplicidade maior que 2 com profundidade situada no intervalo mencionado. Os exemplos 2.3, 2.4 e 2.5 completam a prova. \square

Logo, podemos nos concentrar no intervalo $\left[2, \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \right]$.

Proposição 3.37. *Seja G um gapset com gênero $g \geq 4$, profundidade q e multiplicidade m . Se $q \in \left[\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \right]$, então $m = 3$.*

Demonstração. Já sabemos que se $m = 1$, então $q = 0$ e se $m = 2$, então $q = g$. Se $m \geq 4$, então $\frac{c}{m} \leq \frac{2g}{4} = \frac{g}{2}$. Assim, $q \leq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$. Portanto, se $q \in \left[\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \right]$ então $m = 3$. \square

Agora, queremos calcular $\#\mathcal{F}(g, q)$, para $q \in I = \left[\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \right]$. Da Proposição 3.37, os gapsets com gênero g , profundidade $q \in I$ têm multiplicidade 3.

Proposição 3.38. *Seja $g \geq 5$ e $g \equiv 2 \pmod{3}$. Então $\#\mathcal{F}\left(g, \left\lceil \frac{2g}{3} \right\rceil\right) = 0$.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.35 e Exemplo 2.5. \square

Nos resultados a seguir, vamos supor que $g \geq 5$.

Proposição 3.39. *Se g é ímpar e $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g+1}{2}\right]$, então*

$$\#\mathcal{F}(g, q, m = 3) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \leq \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil - 1 \\ 2, & \text{se } q = \frac{g+1}{2} \end{cases}$$

Demonstração. Observe que $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g+1}{2}\right]$. Pela Proposição 3.34 temos que $c = 3b$ ou $c = 3b + 2$, para alguns $b \in \mathbb{N}$ e $g = k_1 + k_2$.

- 1) Suponha $c = 3b$, então $k_2 = b = q$. Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_1 = \frac{g-1}{2}$ e é possível pela Proposição 3.34. Se $q \leq \frac{g+1}{2} - 1 = \frac{g-1}{2}$ as $g = k_1 + k_2$ então $k_1 \geq \frac{g+1}{2} > b$, então este caso não ocorre.
- 2) Suponha $c = 3b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e $b = q - 1$. Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_2 = \frac{g-1}{2}$ e é possível pela Proposição 3.34. Se $q \leq \frac{g-1}{2}$ como $g = k_1 + k_2$ assim $k_2 = \frac{g+1}{2} > b$, então este caso não ocorre.

\square

De forma similar, obtemos o próximo resultado.

Proposição 3.40. *Se g é par e $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2}\right]$, então*

$$\#\mathcal{F}(g, q, m = 3) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \leq \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil - 1 \\ 1, & \text{se } q = \frac{g}{2} \end{cases}$$

Demonstração. Observe que $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2}\right]$. Pela Proposição 3.34 temos $c = 3b$ ou $c = 3b + 2$, para alguns $b \in \mathbb{N}$ e $g = k_1 + k_2$.

- 1) Suponha $c = 3b$, então $k_2 = b = q$. Se $q = \frac{g}{2}$, então $k_1 = \frac{g}{2}$ e é possível pela Proposição 3.34. Se $q \leq \frac{g}{2} - 1$ as $g = k_1 + k_2$ então $k_1 \geq \frac{g}{2} + 1 > b$, então este caso não ocorre.

- 2) Suponha $c = 3b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e $b = q - 1$. Se $q = \frac{g}{2}$, então $k_2 = \frac{g}{2} > b$ e não é possível pela Proposição 3.34. Se $q \leq \frac{g}{2} - 1$ como $g = k_1 + k_2$ então $k_2 \geq \frac{g}{2} + 1 > b$, então este caso não ocorre.

□

Teorema 3.41. *Sejam g e q inteiros positivos. Então*

$$\#\mathcal{F}(g, q, m = 3) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \geq \frac{2g + 2}{3} \\ 1, & \text{se } q = \frac{2g + 1}{3} \\ 2, & \text{se } \frac{g + 1}{2} \leq q \leq \frac{2g}{3} \\ 1, & \text{se } q = \frac{g}{2} \\ 0, & \text{se } q < \frac{g}{2}. \end{cases}$$

Demonstração. Usando as técnicas de Eliahou e Fromentin (ELIAHOU; FROMENTIN, 2020a), para gapsets de multiplicidade 3, obtemos

- $(12)^r(1)^s$ com $0 \leq s \leq r + 1$ e $r \geq 1$;
- $(12)^r(2)^s$ com $0 \leq s \leq r$ e $r \geq 1$.

Observe que se $(12)^r(2)^s$ é um gapset, então $(12)^r(1)^s$ também é um gapset. Por outro lado, se $(12)^r(1)^s$ não é um gapset, então $(12)^r(2)^s$ não é um gapset.

Em ambos os casos, o gênero do gapset é dado por $2r + s$ e a profundidade do gapset é dada por $r + s$. Portanto, para um gapset com gênero g e profundidade q , (r, s) satisfaça o sistema

$$\begin{cases} 2r + s = g \\ r + s = q. \end{cases}$$

Assim,

$$(r, s) = (g - q, 2q - g). \quad (3.3)$$

Agora, vamos verificar os demais casos.

Se $q = \frac{2g + 2}{3}$. Neste caso, temos que $g \equiv 2 \pmod{3}$. Seja G com gapset com gênero g , profundidade $q = \frac{2g + 2}{3}$ e multiplicidade 3. Então, $r + 1 = \frac{g + 1}{3} < \frac{g + 4}{3} = s$ o que é uma contradição. Então ambos $(12)^r(1)^s$ e $(12)^r(2)^s$ não são gapsets.

Se $q = \frac{2g + 1}{3}$. Neste caso, temos que $g \equiv 1 \pmod{3}$. Seja G com gapset com gênero g , profundidade $q = \frac{2g + 1}{3}$ e multiplicidade 3. Então, $r + 1 = \frac{g + 1}{3} = s$. Se

$r \geq 1$, i.e., $g \geq 4$, então $(12)^r(2)^s$ é um gapset. No entanto, $(12)^r(2)^s$ não é gapset, pois $r = \frac{g-2}{3} < \frac{g+1}{3} = s$.

Se $\frac{g}{2} \leq q \leq \frac{2g}{3}$. Considere G um gapset de gênero g , profundidade $q \in [\frac{g}{2}, \frac{2g}{3}]$ e multiplicidade 3. Vamos mostrar que $(12)^r(1)^s$ e $(12)^r(2)^s$ são gapsets. Com efeito, ambos são gapsets se, e somente se, $0 \leq 2q - g \leq g - q + 1$ e isto ocorre quando $\frac{g}{2} \leq q \leq \frac{2g}{3}$.

Os demais itens segue imediatamente das Proposições 3.39 e 3.40. \square

A seguir, vemos que gapsets de gênero g e multiplicidade maior que 3 devem ter profundidade no máximo a metade de g .

Proposição 3.42. *Seja G um gapset com gênero g , profundidade q e multiplicidade $m \geq 4$. Então $q \leq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$.*

Demonstração. Seja c o condutor de G . Como $c \leq 2g$ e $m \geq 4$, obtemos $\frac{c}{m} \leq \frac{2g}{4}$ e o resultado segue. \square

Proposição 3.43. *Seja G um gapset com gênero $g \geq 9$, profundidade q e multiplicidade m . Se $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right]$, então $m \in \{3, 4\}$.*

Demonstração. Já sabemos que se $m = 1$, então $q = 0$ e se $m = 2$, então $q = g$. Se $m \geq 5$, então $\frac{c}{m} \leq \frac{2g}{5}$. Assim, $q \leq \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor$. Portanto, se $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right]$, então $m = 3$ ou $m = 4$. \square

Agora vamos calcular a quantidade de gapsets quando $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \right]$. Observe que, neste caso, a multiplicidade m é 3 ou 4. No entanto, este cálculo já foi executado para $m = 3$ nas Proposições 3.39 e 3.40.

Proposição 3.44. *(KARAKAS, 2017) Seja G um gapset com multiplicidade 4, condutor $4b$ e vetor de Kunz (k_1, k_2, k_3) . Então $k_3 = b$ e $(k_1, k_2) \in A_0 \cup B_0$, onde*

$$A_0 := \{(t, u) \mid \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \leq t \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1, b - t \leq u \leq 2t\},$$

$$B_0 := \{(t, u) \mid \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq t \leq b, b - t \leq u \leq b\} \setminus \{(b, 0)\}$$

Proposição 3.45. *(KARAKAS, 2017) Seja G um gapset com multiplicidade 4, condutor $4b + 2$ e vetor de Kunz (k_1, k_2, k_3) . Então $k_1 = b + 1$ e $(k_2, k_3) \in A_2 \cup B_2$, onde*

$$A_2 := \{(t, u) \mid \left\lfloor \frac{b-1}{3} \right\rfloor \leq u \leq \left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor - 1, b - u \leq t \leq 2u + 1\},$$

$$B_2 := \{(t, u) \mid \left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor \leq u \leq b, b - u \leq t \leq b\} \setminus \{(0, b)\}$$

Proposição 3.46. (KARAKAS, 2017) *Seja G um gapset com multiplicidade 4, condutor $4b + 3$ e vetor de Kunz (k_1, k_2, k_3) . Então $k_2 = b + 1$ e $(k_1, k_3) \in A_3$, onde*

$$A_3 := \{(t, u) \mid \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor \leq t \leq b+1, \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq u \leq b\}$$

Seja G um gapset do gênero g , multiplicidade 4 e condutor c , então $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$ e $c = 4b + i$ para alguns $i \in \{0, 2, 3\}$ e $b \in \mathbb{N}$. Observamos que pelos resultados obtidos em (KARAKAS, 2017), temos que $q = k_i$, para algum i , e portanto $k_j = g - q - k_i$. Nos resultados a seguir, vamos determinaremos para quais k_t a tripla (k_1, k_2, k_3) retorna um gapset. Mais precisamente, iremos usar as Proposições 3.44, 3.45 e 3.46 para explicitar a quantidade de gapsets de gênero g multiplicidade 4 e profundidade q .

As demonstrações dos resultados a seguir são exaustivos e os deixamos no Apêndice B.

Lema 3.47. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b$, então $k_3 = b = q$ e*

(1) *se $q = \frac{g+1}{2}$, então G não existe.*

(2) *se $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ ou $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-1-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$.*

Demonstração. Veja Lema B.1. □

Lema 3.48. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e*

(1) *Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_3 \in \left[\left\lfloor \frac{g-3}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-3}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left\lfloor \frac{g-3}{4} \right\rfloor, \frac{g-1}{2} - 1 \right]$.*

(2) *Se $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_3 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1+2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-5-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left\lfloor \frac{g-5-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-3-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$.*

Note que se $g < 15$ b) não ocorre.

Demonstração. Veja Lema B.2. □

Lema 3.49. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 3$, então $k_2 = b + 1 = q$ e*

(1) se $q = \frac{g+1}{2}$, então G não existe.

(2) se $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_1 \in \left[\left[\frac{g-1-2r}{4} \right], \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] \right]$,
 onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$.

Demonstração. Veja Lema B.3. □

Juntando os resultados obtidos nos Lemas 3.47, 3.48 e 3.49, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.50. *Seja G um gapset de gênero g ímpar. Então,*

(1)

$$\#\mathcal{F}(g, q, m = 4) = \frac{g-1}{2} - \left[\frac{g-3}{6} \right] = \left[\frac{g}{3} \right],$$

quando $q = \frac{g+1}{2}$.

(2)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m = 4) &= \frac{3g+3-2r}{2} \\ &- \left(\left[\frac{g-3-2r}{4} \right] + \left[\frac{g-1-2r}{4} \right] + \left[\frac{g-1+2r}{6} \right] + \left[\frac{g+1+2r}{6} \right] \right), \end{aligned}$$

quando $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$.

Seja $\#\mathcal{TF}(g, q, m = 4)$ a quantidade de gapsets de gênero g ($g \geq 40$), multiplicidade 4 e profundidade q , isto é, $\sum_q \#\mathcal{F}(g, q, m = 4) = \#\mathcal{TF}(g, m = 4)$.

Corolário 3.51. *Seja $g \in \mathbb{N}$ ímpar. Então, $\#\mathcal{TF}(g, m = 4)$ é exatamente*

1)

$$\begin{aligned} \left[\frac{g}{3} \right] + \left(\frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] \right) \left(\frac{2g+7}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] \right) \\ - \lambda(1-a) - \frac{3a(3-a)}{2} - 2, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 1 \pmod{12}$.

2)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+12}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)s - \frac{3b(5-b)}{2} - 3,$$

quando $g \equiv 3 \pmod{12}$.

3)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+11}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)(s+1) - \frac{3b(5-b)}{2},$$

quando $g \equiv 5 \pmod{12}$.

4)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+10}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - \lambda(1-a) - \frac{3a(3-a)}{2} - 4,$$

quando $g \equiv 7 \pmod{12}$.

5)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+12}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)s - \frac{3b(5-b)}{2} - 3,$$

quando $g \equiv 9 \pmod{12}$.

6)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+11}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)(s+1) - \frac{3b(5-b)}{2},$$

quando $g \equiv 11 \pmod{12}$.onde $a \geq 2$ e b são inteiros positivos, com a tal que

$$\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = \begin{cases} 3a+2, \text{ fazemos } \lambda = 1 \\ 3(a+1), \text{ fazemos } \lambda = 2 \\ 3(a+1)+1, \text{ fazemos } \lambda = 3. \end{cases}$$

e b é tal que $\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 3b+s$ com $0 \leq s < 3$.

Lema 3.52. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b$, então $k_3 = b = q$ e*

- (1) se $q = \frac{g}{2}$, então $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g}{6} \right\rceil, \left\lceil \frac{g}{4} \right\rceil - 1 \right]$ ou $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g}{4} \right\rceil, \frac{g}{2} - 1 \right]$.
- (2) se $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g-2}{2} \right]$, então $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g+2+2r}{6} \right\rceil, \left\lceil \frac{g-2-2r}{4} \right\rceil - 1 \right]$ ou $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g-2-2r}{4} \right\rceil, \frac{g-2-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil - 1$.

Demonstração. Veja Lema B.6. □

Lema 3.53. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e*

- (1) se $q = \frac{g}{2}$, então $k_3 \in \left[\left\lceil \frac{g-2}{6} \right\rceil, \left\lceil \frac{g-4}{4} \right\rceil - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left\lceil \frac{g-4}{4} \right\rceil, \frac{g-2}{2} \right]$.
- (2) se $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g-2}{2} \right]$, então $k_3 \in \left[\left\lceil \frac{g+2r}{6} \right\rceil, \left\lceil \frac{g-6-2r}{4} \right\rceil - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left\lceil \frac{g-6-2r}{4} \right\rceil, \frac{g-4-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil - 1$.

Demonstração. Veja Lema B.7. □

Lema 3.54. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 3$, então $k_2 = b + 1 = q$ e se $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g}{2} \right]$, então*

- (1) $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g}{4} \right\rceil, \frac{g}{2} - \left\lceil \frac{g-2}{4} \right\rceil \right]$, quando $q = \frac{g}{2}$.
- (2) $k_1 \in \left[\left\lceil \frac{g-2r}{4} \right\rceil, \frac{g+2+2r}{2} - \left\lceil \frac{g-4-2r}{4} \right\rceil \right]$, quando $q \in \left[\left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil + 1, \frac{g-2}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lceil \frac{2g}{5} \right\rceil - 1$.

Demonstração. Veja Lema B.8. □

Juntando os resultados obtidos nos Lemas 3.52, 3.53 e 3.54, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.55. *Se g é par, então*

(1)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m = 4) &= \frac{3g + 2}{2} - \left(\left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2}{4} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor, \end{aligned}$$

quando $q = \frac{g}{2}$.

(2)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m = 4) &= \frac{3g + 2 - 2r}{2} \\ &- \left(\left\lfloor \frac{g+2+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2r}{4} \right\rfloor \right), \end{aligned}$$

quando $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-2}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$.

Corolário 3.56. *Seja $g \in \mathbb{N}$ par. Então, $\#\mathcal{TF}(g, q, m = 4)$ é exatamente*

1)

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g}{3} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ &- 2b(5-3b) - (1-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - (-2b)\lambda_5, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 0 \pmod{12}$.

2)

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+5}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ &- 2b(8-3b) - (3-2b)\lambda_0 - (1-2b)\lambda_1 - (2-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (2-2b)\lambda_4 - \\ &\quad (-2b)\lambda_5, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 2 \pmod{12}$.

3)

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+7}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ &- 6b(2-b) - (1-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (1-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ &\quad (1-2b)\lambda_5, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 4 \pmod{12}$.

4)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+9}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 2b(2-3b) - (1-2b)\lambda_0 - (-2b)\lambda_1 - (-2b)\lambda_2 - (-1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ (-2-2b)\lambda_5,$$

quando $g \equiv 6 \pmod{12}$.

5)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+8}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 2b(7-3b) - (2-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (1-2b)\lambda_2 - (2-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ (1-2b)\lambda_5,$$

quando $g \equiv 8 \pmod{12}$.

6)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+7}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 6b(3-b) - (3-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (3-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (2-2b)\lambda_4 - \\ (1-2b)\lambda_5,$$

quando $g \equiv 10 \pmod{12}$.

onde b é um inteiro positivo tal que $\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 6b + s$ com $0 \leq s < 5$ e λ_i tal que

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i \leq s \\ 0, & \text{para } i > s. \end{cases}$$

Corolário 3.57. *Seja $g \geq 40$. Temos que*

$$n_g \leq \mathbf{F}_{g+1}^{\left(\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor\right)} + \left\lfloor \frac{g+6}{3} \right\rfloor + \#\mathcal{TF}(g, q, m = 4),$$

onde $q \in \left[\frac{2g}{5} + 1, g \right]$.

Demonstração. Seja G um gapset com gênero g , profundidade q e multiplicidade m . Se $m = 1$ temos $g = 0$. Se $m = 2$ temos um único gapset de gênero g . Se $m = 3$, então a quantidade de gapsets de gênero g com multiplicidade 3 é dado por $\sum_q \#\mathcal{F}(g, q, m = 3) = 2A + B$, onde A é a cardinalidade de $\left[\frac{g+1}{3}, \frac{2g}{3} \right]$ e B a cardinalidade $\mathbb{Z} \cap \left\{ \frac{g}{2}, \frac{2g+1}{3} \right\}$. Portanto,

$\sum_q \#\mathcal{F}(g, q, m = 3) = \left\lfloor \frac{g+6}{3} \right\rfloor$. A quantidade de gapsets de gênero g , profundidade $q \in \left[\frac{2g}{5} + 1, g \right]$ e multiplicidade $m = 4$ é dada por $\sum_q \#\mathcal{F}(g, q, m = 4)$ e foi calculada nos resultados acima via congruência de g módulo 12.

□

Na tabela a seguir apresentamos os primeiros valores para $\#\mathcal{F}(g, q, m = 4)$ quando r varia entre 0 e 2. Vemos que para $g \leq 40$ tem-se $r \geq 2$. Portanto, fixamos $g \geq 40$. Lembramos da escrita de $q = \frac{g-2}{2} - r = \frac{g-2-2r}{2}$, com $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$ do Lema 3.52. Aproveitamos ainda para apresentar a seguir a Tabela 7, a qual exhibe a relação entre gapsets com gênero e profundidade fixados.

$g \backslash r$	0	1	2	Total
15	11	0	0	11
16	12	0	0	12
17	13	0	0	13
18	12	0	0	12
19	14	0	0	14
20	14	0	0	14
21	15	0	0	15
22	15	0	0	15
23	17	0	0	17
24	17	0	0	17
25	18	17	0	35
26	17	0	0	17
27	19	19	0	38
28	20	0	0	20
29	21	20	0	41
30	20	20	0	40
31	22	21	0	43
32	22	21	0	43
33	23	23	0	46
34	23	23	0	46
35	25	24	23	72
36	25	23	0	48
37	26	25	25	76
38	25	26	0	51
39	27	27	26	80
40	28	26	26	80

Tabela 6 – Alguns valores de $\#\mathcal{F}(g, q, m = 4)$

$g \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	n_g	
0	1																					1
1	1																					1
2	1	1																				2
3	1	2	1																			4
4	1	4	1	1																		7
5	1	7	3	0	1																	12
6	1	12	7	2	0	1																23
7	1	20	12	4	1	0	1															39
8	1	33	23	7	2	0	0	1														67
9	1	54	44	11	5	2	0	0	1													118
10	1	88	79	24	8	2	1	0	0	1												204
11	1	143	143	37	11	5	2	0	0	0	1											343
12	1	232	254	71	19	10	2	2	0	0	0	1										592
13	1	376	447	124	33	10	6	2	1	0	0	0	1									1001
14	1	609	785	209	57	16	11	2	2	0	0	0	0	1								1693
15	1	986	1364	353	104	26	11	7	2	2	0	0	0	0	1							2857
16	1	1596	2357	612	158	48	16	12	2	2	1	0	0	0	0	1						4806
17	1	2583	4052	1028	254	79	23	13	7	2	2	0	0	0	0	0	1					8045
18	1	4180	6935	1739	409	132	37	13	14	2	2	2	0	0	0	0	0	1				13467
19	1	6764	11828	2895	670	195	63	20	14	8	2	2	1	0	0	0	0	0	1			22464

Tabela 7 – Alguns valores da quantidade de gapsets com gênero g e profundidade q

4 Sobre semigrupos de Weierstrass em uma torre de corpos de funções

O estudo sobre diversos tipos de torre de corpos de funções foi abordado inicialmente em (GARCIA; STICHTENOTH, 2003). A motivação deste estudo é proveniente da teoria de equações sobre corpos finitos, no formato

$$y^2 \equiv f(x) \text{ módulo número primo,}$$

onde $f(x)$ é uma função racional com coeficientes inteiros.

Assumindo um resultado análogo da hipótese de Riemann para a função zeta que ele introduziu, E. Artin conjecturou um limite superior para o número de soluções para tais congruências. A solução geral dessa conjectura foi dada por A. Weil (o caso elíptico foi resolvido antes por H. Hasse), e pode ser enunciada da seguinte maneira: Seja \mathbf{F} um corpo de funções sobre o corpo finito \mathbb{F}_q , com q elementos e denotamos $N(\mathbf{F})$ o número de lugares \mathbb{F}_q -racionais. O célebre Teorema de A. Weil afirma que a desigualdade

$$N(\mathbf{F}) \leq q + 1 + 2g\sqrt{q},$$

é válida, onde g é gênero de \mathbf{F} . Tal resultado pode ser encontrado em (WEIL, 1948).

O objeto de estudo deste capítulo é estudar a torre de corpos de funções sob a equação

$$y^2 = \frac{x^2 + 1}{2x}. \quad (4.1)$$

A torre sobre essa equação atinge a cota de Drinfeld-Vladut. Diversos outros autores realizaram estudos sobre a equação (4.1). Um desses trabalhos foi realizado em (NOSEDA; OLIVEIRA; QUOOS, 2011) onde estudam sobre a torre da equação (4.1), nos quais focam em exibir uma base para o espaço de Riemann-Roch associado à um lugar. Com o auxílio computacional, foram exibidos os primeiros elementos dos semigrupos de Weierstrass para os primeiros níveis desta torre.

Seja $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^2}$ o corpo finito de cardinalidade p^2 com p um primo ímpar. Seja $\mathcal{T} := (M_i \mid i \in \mathbb{N})$ a torre do corpo de funções $M_i | \mathbb{F}$ definido por $M_1 := \mathbb{F}(x_1)$, e para $i \geq 1$

$$M_{i+1} = M_i(x_{i+1}) \quad \text{onde} \quad x_{i+1}^2 = y_i := \frac{x_i^2 + 1}{2x_i} \quad (4.2)$$

Esta torre foi introduzida por Garcia e Stichtenoth como um exemplo de torre assintoticamente ótima sobre \mathbb{F} , para mais detalhes veja (GARCIA; STICHTENOTH; RÜCK, 2003) e (GARCIA; STICHTENOTH, 2003).

Para cada inteiro positivo i , existe apenas um lugar P_i (resp. Q_i, R_i, S_i) de M_i sobre $P_1 := \infty$ (resp. $Q_1 := 0, R_1 := \alpha, S_1 := -\alpha$ com $\alpha^2 = -1$). Segundo a Proposição 5,3 em (GARCIA; STICHTENOTH, 2003). Em particular, os lugares P_i, Q_i, R_i e S_i são \mathbb{F} - racionais.

Vamos calcular elementos do semigrupo Weierstrass $H_i := H_i(P_i)$ em P_i e um conjunto de funções definidoras, isto é, vamos exibir funções (e seus respectivos divisores) cujo divisor de pólos é da forma nP_i , para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

4.1 Resultados auxiliares

Seja g_i o gênero de M_i , para cada $i \geq 1$. Para $i \geq 2$, a extensão dos corpos de função $M_i|M_{i-1}$ é um recobrimento duplo; assim, a fórmula do gênero Riemann-Hurwitz aplicada neste caso é

$$2g_i - 2 = 2(2g_{i-1} - 2) + r_{i-1}, \quad (4.3)$$

onde r_{i-1} é o número de lugares em M_{i-1} que se ramificam em $M_i|M_{i-1}$ (lembre-se de que $\text{char}(\mathbf{F}) \neq 2$). Esses lugares são precisamente aqueles no suporte do divisor de y_{i-1} em M_{i-1} cuja ordem é ímpar (ver, por exemplo, [(STICHTENOTH, 1993), III.7.3]).

Ao longo deste capítulo, usaremos a seguinte notação:

- Para uma função racional f , o símbolo $\text{div}(f)$ (resp. $\text{div}_0(f)$, $\text{div}_\infty(f)$) representa o divisor (resp. o divisor de zeros, o divisor de pólos) de f ;
- Definimos $D_\infty(i) = P_i + Q_i + S_i + R_i$;
- Para $1 \leq j \leq i$, definimos $D_j(i)$ como o divisor em M_i definido como a soma de lugares dois a dois distintos no suporte de $\text{div}_0(x_j + 1)$;
- Para $1 \leq j \leq i$, definimos $E_j(i)$ como o divisor em M_i definido como a soma de lugares dois a dois distintos no suporte de $\text{div}_0(x_j - 1)$;
- Para $i \geq 3$, seja $z_i := \frac{x_{i-2} + 1}{x_i}$. Observe que $z_i^2 = 4x_{i-1}x_{i-2}$.

Teorema 4.1. (1) Em M_1 , $\text{div}(y_1) = R_1 + S_1 - P_1 - Q_1$.

(2) Para $i = 2k \geq 2$, em M_i temos o divisor

$$\text{div}(y_i) = 2^{i-1}D_{i-1}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i),$$

com $\text{deg}(D_j(i) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k-1$ e $\text{deg}(D_{k-1+j}(i)) = 2^{k+1-j}$ para $j = 1, \dots, k$.

(3) Para $i = 2k + 1 \geq 3$, em M_i temos o divisor

$$\operatorname{div}(y_i) = 2^{i-1}D_{i-1}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^k D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j}D_{k+j}(i),$$

com $\deg(D_j(i)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k$ e $\deg(D_{k+j}(i)) = 2^{k+1-j}$ para $j = 1, \dots, k$.

Demonstração. Temos que $\operatorname{div}(x_1) = Q_1 - P_1$ e $\operatorname{div}(x_1^2 + 1) = R_1 + S_1 - 2P_1$ em M_1 . Então $\operatorname{div}(y_1) = R_1 + S_1 - Q_1 - P_1$, isto mostra (1). Para provar (2) e (3) vamos utilizar indução em i . Em M_i , com $i \geq 2$, temos que

$$\operatorname{div}(y_i) = 2\operatorname{div}_0(x_{i-1} + 1) - \operatorname{div}_0(x_i) - \operatorname{div}_\infty(x_i), \quad (4.4)$$

pois $x_i^2 = \frac{(x_i + 1)^2}{2x_{i-1}}$.

- Se $i = 2$, então pelo item (1) temos que os lugares P_1, Q_1, R_1 e S_1 em M_1 são os únicos lugares que ramificam em $M_2|M_1$, portanto $\operatorname{div}(x_1 + 1) = D_1(2) - 2P_1$ com $\deg(D_1(2)) = 2$. Como $x_2^2 = y_1$, temos do item anterior que $\operatorname{div}(x_2) = R_2 + S_2 - Q_2 - P_2$ e então por (4.4) temos $\operatorname{div}(y_1) = 2D_1(2) - D_\infty(2)$.
- O caso geral será dividido em dois: quando i é par e quando i é ímpar. Note que os lugares no suporte de $D_\infty(i)$ e os lugares no suporte de $D_j(i)$, com $j = 1, \dots, k-1$, são os únicos lugares em M_i que ramificam em $M_{i+1}|M_i$. Por outro lado, como $x_i(P) = -1$ é totalmente ramificado na extensão $M_i|\mathbf{F}(x_i)$ e assim em M_i temos que $\operatorname{div}_0(x_i) = 2^{i-1}D_i(i)$ com $\deg(D_i(i)) = 1$. Portanto, em M_{i+1} o divisor de zeros de x_i é

$$\operatorname{div}_0(x_i) = 2^{i-1}D_i(i + 1),$$

com $\deg(D_i(i + 1)) = 2$.

Se $i = 2k \geq 2$ é par, então $i + 1 = 2k + 1 \geq 3$ é ímpar. Suponha por hipótese de indução

$$\operatorname{div}(y_i) = 2^{i-1}D_{i-1}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i)$$

em M_i . Vamos mostrar que vale para $i + 1$. De fato, como $x_{i+1}^2 = y_i$ temos que

$$2\operatorname{div}(x_{i+1}) = 2^{i-1}D_{i-1}(i + 1) - 2D_\infty(i + 1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2D_j(i + 1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i + 1)$$

em M_{i+1} , com $\deg(D_j(i+1)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k-1$ e $\deg(D_{k-1+j}(i+1)) = 2^{k+2-j}$ para $j = 1, \dots, k$. Em particular,

$$\operatorname{div}(x_{i+1}) = 2^{i-2}D_{i-1}(i + 1) - D_\infty(i + 1) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i + 1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-2}D_{k-1+j}(i + 1).$$

Usando (4.4) temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(y_{i+1}) &= 2^i D_i(i+1) - D_\infty(i+1) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i+1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-2} D_{k-1+j}(i+1) \\ &\quad - 2^{i-2} D_{i-1}(i+1). \end{aligned}$$

e portanto

$$\operatorname{div}(y_{i+1}) = 2^i D_i(i+1) - D_\infty(i+1) - \sum_{j=1}^k D_j(i+1) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j} D_{k+j}(i+1),$$

onde $\deg(D_j(i+1)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k$ e $\deg(D_{k+j}(i+1)) = 2^{k+2-j}$ para $j = 1, \dots, k+1$. Se i é ímpar, então $i+1$ é par. A prova deste caso é similar ao caso anterior. □

Corolário 4.2. $g_i = \begin{cases} 2^i - 3 \cdot 2^{\frac{i-1}{2}} + 1, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ 2^i - 2 \cdot 2^{\frac{i}{2}} + 1, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$

Demonstração. É claro que $g_1 = 0$. Seja $i \geq 2$, então pela equação (4.3) temos que

$$2g_i - 2 = 2^i(2g_1 - 2) + \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j} r_j.$$

Pelo Teorema 4.1, obtemos que $r_j = 2^{\frac{j+3}{2}}$ se j é ímpar e $r_j = 2^{\frac{j}{2}+1}$ se j é par. Dessas observações, o resultado segue. □

Pelo teorema anterior, podemos exibir a seguinte tabela mostrando a variação do grau dos primeiros D'_j s em cada extensão. Na Tabela 8, indicamos n^* ($n \in \mathbb{N}$) o primeiro nível em que o grau do divisor estaciona.

	$\deg(D_1)$	$\deg(D_2)$	$\deg(D_3)$	$\deg(D_4)$	$\deg(D_5)$
M_1	1	0	0	0	0
M_2	2	1	0	0	0
M_3	4*	2	1	0	0
M_4	4	4	2	1	0
M_5	4	8*	4	2	1
M_6	4	8	8	4	2
M_7	4	8	16*	8	4
M_8	4	8	16	16	8

Tabela 8 – O grau dos divisores D_1 à D_5 em alguns níveis da torre.

A Tabela 5 será muito útil quando estivermos calculando os semigrupos H_i , com $i = 1, 2, \dots, 8$.

Proposição 4.3. (1) Em M_1 , $\text{div}(x_1) = Q_1 - P_1$;

(2) Em M_2 , $\text{div}(x_2) = R_2 + S_2 - P_2 - Q_2$;

(3) Em M_3 , $\text{div}(x_3) = D_1(3) - D_\infty(3)$;

(4) Em M_i , com $i = 2k \geq 4$,

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i);$$

(5) Em M_i , com $i = 2k + 1 \geq 5$,

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^k D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i).$$

Demonstração. Os itens (1) e (2) seguem da prova do Teorema 4.1. Para verificar os demais itens vamos usar $x_{i+1}^2 = y_i$ (em M_{i+1}) e o Teorema 4.1.

(3) Como $x_3^2 = y_2$, temos que $2\text{div}(x_3) = 2D_1(3) - 2D_\infty(3)$. Portanto, $\text{div}(x_3) = D_1(3) - D_\infty(3)$.

(4) Se $i = 2k$, então $i - 1 = 2(k - 1) + 1$. Como $x_i^2 = y_{i-1}$, temos que $2\text{div}(x_i) = \text{div}(y_{i-1})$ e pelo item (2) do Teorema 4.1 que

$$2\text{div}(x_i) = 2^{i-2}D_{i-2}(i) - 2D_\infty(i) - 2 \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k-1+j}(i).$$

Portanto,

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i).$$

(5) Se $i = 2k + 1$, então $i - 1 = 2k$. Como $x_i^2 = y_{i-1}$, temos que $2\text{div}(x_i) = \text{div}(y_{i-1})$ e pelo item (3) do Teorema 4.1 que

$$2\text{div}(x_i) = \text{div}(y_{i-1}) = 2^{i-2}D_{i-2}(i) - 2D_\infty(i) - 2 \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i).$$

Portanto,

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^k D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i).$$

□

Usando o Teorema 4.1, podemos exibir alguns outros divisores que serão muito úteis na próxima seção, seção esta que é dedicada a calcular os divisores de funções com divisor de pólos da forma nP_i , onde n é um gerador minimal de H_i .

1. Em M_5 , $\text{div}(x_5) = 4D_3(5) - (D_1(5) + D_2(5) + S_5 + R_5 + Q_5 + P_5)$.
2. Em M_6 , $\text{div}(x_6) = 8D_4(6) - (D_1(6) + D_2(6) + 2D_3(6) + S_6 + R_6 + Q_6 + P_6)$.
3. Em M_7 , $\text{div}(x_7) = 16D_5(7) - (D_1(7) + D_2(7) + 2D_3(7) + 4D_4(7) + S_7 + R_7 + Q_7 + P_7)$.
4. Em M_8 , $\text{div}(x_8) = 32D_6(8) - (D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) + S_8 + R_8 + Q_8 + P_8)$.

Com o próximo resultado, calculamos o $\text{div}(x_i)$ em qualquer extensão. Este resultado será muito útil na próxima seção.

Corolário 4.4. *Seja I um número natural.*

- (1) Em M_I , $\text{div}(x_1) = 2^{I-1}(Q_I - P_I)$;
- (2) Seja $I \geq 2$. Em M_I , $\text{div}(x_2) = 2^{I-2}(R_I + S_I - P_I - Q_I)$;
- (3) Seja $I \geq 3$. Em M_I , $\text{div}(x_3) = 2^{I-3}(D_1(I) - D_\infty(I))$;
- (4) Seja $I \geq 5$. Em M_I , $\text{div}(x_4) = 2^{I-4}(D_2(I) - D_\infty(I) - D_1(I))$; aqui temos $\text{deg}(D_1(I)) = 4$ e $\text{deg}(D_2(I)) = 8$
- (5) Sejam $i = 2k + 1 \geq 5$ e $I \geq i$ tais que $I - i = 2h - 1$ ou $I - i = 2h$ com $h = 1, \dots, k - 1$. Em M_I temos

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(I) - 2^{I-i}(D_\infty(I) + \sum_{j=1}^{k+h-1} D_j(I)) - \sum_{j=h}^{k-2} 2^{2j} D_{k+j}(I).$$

Se $I - i = 2h - 1$, então $\text{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k + h - 1$, e $\text{deg}(D_{k+j}(I)) = 2^{k+2h-j}$ para $j = h, \dots, k - 1$; caso contrário se $I - i = 2h$, então $\text{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k + h$, e $\text{deg}(D_{k+j}(I)) = 2^{k+2h-j+1}$ para $j = h + 1, \dots, k - 1$.

- (6) Sejam $i = 2k \geq 6$ e $I \geq i$ tais que $I - i = 2h - 1$ ou $I - i = 2h$ com $h = 1, \dots, k - 2$. Em M_I temos

$$\text{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(I) - 2^{I-i}(D_\infty(I) + \sum_{j=1}^{k+h-1} D_j(I)) - \sum_{j=h+1}^{k-2} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(I).$$

Se $I - i = 2h$, então $\text{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k + h - 1$, e $\text{deg}(D_{k-1+j}(I)) = 2^{k+2h+1-j}$ para $j = h + 1, \dots, k - 1$; caso contrário se $I - i = 2h - 1$, então $\text{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, k + h - 1$, e $\text{deg}(D_{k-1+j}(I)) = 2^{k+2h-j}$ para $j = h + 1, \dots, k - 1$.

(7) Sejam $i \geq 3$ e $I \geq 2i - 3$. Então em M_I ,

$$\operatorname{div}(x_i) = 2^{I-i}(D_{i-2}(I) - D_\infty(I) - \sum_{j=1}^{i-3} D_j(I)),$$

onde $\operatorname{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j = 1, \dots, i - 2$.

Demonstração. Os itens (1), (2) e (3) seguem da proposição anterior e da Tabela 5.

(4) Como $x_4^2 = y_3$, temos que pelo Teorema 4.1 que $2\operatorname{div}(x_4) = \operatorname{div}(y_3) = 2D_2(4) - 2D_1(4) - 2D_\infty(4)$ em M_4 . Portanto, $\operatorname{div}(x_4) = D_2(4) - D_1(4) - D_\infty(4)$ em M_4 . Dado $I \geq 5$, utilizando a Tabela 5 concluímos que $\operatorname{div}(x_4) = 2^{I-4}(D_2(I) - D_1(I) - D_\infty(I))$.

(5) Este item segue do seguinte fato: em M_i temos que o divisor da função x_i é escrito como

$$\operatorname{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i) - D_\infty(i) - \sum_{j=1}^k D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i).$$

Vamos analisar o grau de cada $D_j(i)$ com $j = 1, \dots, 2k - 2$ em cada extensão M_I .

- Se $I - i = 2h$ então $I = 2(h + k) + 1$, defina $k' = k + h - 1$. Então pelo Teorema 4.1 item (3) segue que $\operatorname{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j \leq k' = k + h$ e $\operatorname{deg}(D_{k+h+j}(I)) = 2^{k+h+1-j}$ fazendo $t = h - j$ obtemos que $\operatorname{deg}(D_{k+t}(I)) = 2^{k+2h+1-t}$.
- Se $I - i = 2h - 1$ então $I = 2(h + k)$, defina $k' = k + h$. Então pelo Teorema 4.1 (2) temos que $\operatorname{deg}(D_j(I)) = 2^{j+1}$ para $j \leq k' - 1 = k + h - 1$ e $\operatorname{deg}(D_{k+h+j-1}(I)) = 2^{k+h+1-j}$ fazendo $t = h + 1 - j$ obtemos que $\operatorname{deg}(D_{k+t}(I)) = 2^{k+2h-t}$.

Portanto, em M_I temos que $D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i)$ se transforma em $2^{I-i}(D_\infty(i) +$

$\sum_{j=1}^k D_j(i))$. Agora, para D_{k+j} com $1 \leq j \leq h$ temos pelo Teorema 4.1 que em M_i

a t -ésima posição da soma $\sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i)$ é dada por $2^{2t}D_{k+t}(i)$ e em $M_{2(k+t)+1}$ temos que $\operatorname{deg}(D_{k+t}(2(k+t)+1)) = 2^{(k+t)+1}$ (e a partir deste ponto o grau do divisor não cresce mais) logo em M_I temos t -ésima parcela da soma é dada por $2^{2h-2t}2^{2t}D_{k+t}(I) = 2^{2h}D_{k+t}(I)$ e isso só ocorre quando $t = 1, \dots, h - 1$. Portanto,

$$\operatorname{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(I) - 2^{I-i}(D_\infty(I) + \sum_{j=1}^{k+h-1} D_j(I)) - \sum_{j=h}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(I).$$

Os itens (6) e (7) seguem pelo mesmo argumento.

□

Proposição 4.5. Em M_{i+1} temos que

(1) Em M_2 , $\text{div}(x_1 - 1) = D_2(2) + E_2(2) - 2P_2$;

(2) Em M_3 , $\text{div}(x_2 - 1) = 4(D_3(3) + E_3(3)) - 4(P_3 + Q_3)$;

(3) Em M_4 , $\text{div}(x_3 - 1) = 8(D_4(4) + E_4(4)) - 4(P_4 + Q_4 + R_4 + S_4)$;

(4) Em M_5 , $\text{div}(x_4 - 1) = 8(D_5(5) + E_5(5)) - 2(P_5 + Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5))$;

(5) Em M_{i+1} para $i = 2k \geq 4$,

$$\begin{aligned} \text{div}(x_i - 1) &= 2^{i-1}(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j+1} D_{k+j}(i+1); \end{aligned}$$

(6) Em M_{i+1} para $i = 2k + 1 \geq 5$,

$$\begin{aligned} \text{div}(x_i - 1) &= 2^{i-1}(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j} D_{k+j}(i+1). \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos usar a relação $x_{i+1}^2 - 1 = \frac{(x_i - 1)^2}{2x_i}$, para $i \geq 1$. Então,

$$2\text{div}(x_i - 1) = \text{div}(x_{i+1} - 1) + \text{div}(x_{i+1} + 1) + \text{div}(x_i) \quad (4.5)$$

(1) Usando a Igualdade (4.5) temos que $2\text{div}(x_1 - 1) = \text{div}(x_2 - 1) + \text{div}(x_2 + 1) + \text{div}(x_1)$. Segue da Proposição 4.3 que $\text{div}(x_2 + 1) = 2D_2(2) - (P_2 + Q_2)$ e $\text{div}(x_1) = 2Q_2 - 2P_2$. Como $\text{div}(x_2 - 1) = 2E_2(2) - (P_2 + Q_2)$ temos que

$$\begin{aligned} 2\text{div}(x_1 - 1) &= 2D_2(2) + 2E_2(2) - 2(P_2 + Q_2) + 2Q_2 - 2P_2 \\ &= 2D_2(2) + 2E_2(2) - 4P_2, \end{aligned}$$

assim $\text{div}(x_1 - 1) = D_2(2) + E_2(2) - 2P_2$. Os itens (2), (3) e (4) seguem de forma similar.

(5) Suponha que $i = 2k$, então $i + 1 = 2k + 1$. Pelo Teorema 4.1 e Proposição 4.3 temos que

$$\begin{aligned} \text{div}(x_{i+1} - 1) + \text{div}(x_{i+1} + 1) &= 2^i(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) \\ &\quad - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k+j}(i+1)) - 2^{i-3} D_{i-2}(i+1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_i) &= 2^{i-3}D_{i-2}(i+1) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i+1)) - 2D_k \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i+1) \end{aligned}$$

Somando as igualdades acima e usando a Igualdade (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_i - 1) &= 2^{i-1}(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j+1}D_{k+j}(i+1) \end{aligned}$$

(6) Suponha que $i = 2k + 1$, então $i + 1 = 2(k + 1)$. Pelo Teorema 4.1 e Proposição 4.3 temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_{i+1} - 1) + \operatorname{div}(x_{i+1} + 1) &= 2^i(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) - 2(D_\infty(i+1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k D_j(i+1) + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k+j}(i+1)) - 2^{i-3}D_{i-2}(i+1) \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{div}(x_i) = 2^{i-3}D_{i-2}(i+1) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1)) - \sum_{j=2}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i+1)$$

Somando as igualdades acima e usando a Igualdade (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_i - 1) &= 2^{i-1}(D_{i+1}(i+1) + E_{i+1}(i+1)) - 2(D_\infty(i+1) + \sum_{j=1}^k D_j(i+1)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j}D_{k+j}(i+1) \end{aligned}$$

□

No próximo resultado, calculamos o divisor da função z_i em M_i , para $i \geq 3$.

Proposição 4.6. (1) Em M_3 , $\operatorname{div}(z_3) = Q_3 + R_3 + S_3 - 3P_3$;

(2) Em M_4 , $\operatorname{div}(z_4) = R_4 + S_4 + D_1(4) - 3P_4 - 3Q_4$;

(3) Em M_5 , $\operatorname{div}(z_5) = D_1(5) + D_2(5) - 3D_\infty(5)$;

(4) Em M_6 , $\operatorname{div}(z_6) = D_2(6) + 2D_3(6) - 3D_\infty(6) - 3D_1(6)$;

(5) Em M_7 , $\operatorname{div}(z_7) = D_3(7) + 4D_4(7) - 3(D_\infty(7) + D_1(7) + D_2(7))$;

(6) Em M_8 , $\text{div}(z_8) = 2D_4(8) + 8D_5(8) - 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + S_8 + R_8 + Q_8 + P_8)$;

(7) Seja $i = 2k \geq 10$. Em M_i ,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right);$$

(8) Seja $i = 2k + 1 \geq 9$. Em M_i ,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j} D_{k+j}(i) \right).$$

Demonstração. Relembramos que $z_i^2 = 4x_{i-2}x_{i-1}$, para $i \geq 3$. Então em M_i temos

$$2\text{div}(z_i) = \text{div}(x_{i-1}) + \text{div}(x_{i-2}). \quad (4.6)$$

(1) Usando a igualdade (4.6) temos que $2\text{div}(z_3) = \text{div}(x_1) + \text{div}(x_2) = (4Q_3 - 4P_3) + (2R_3 + 2S_3 - 2Q_3 - 2P_3)$, então $\text{div}(z_3) = R_3 + S_3 + Q_3 - 3P_3$.

(2) Usando novamente a igualdade (4.6) temos que $2\text{div}(z_4) = \text{div}(x_2) + \text{div}(x_3) = (4R_4 + 4S_4 - 4Q_4 - 4P_4) + 2D_1(4) - (2R_4 + 2S_4 + 2Q_4 + 2P_4)$, então $\text{div}(z_4) = D_1(4) + R_4 + S_4 - 3Q_4 - 3P_4$.

(3) Em M_5 , temos $2\text{div}(z_5) = \text{div}(x_3) + \text{div}(x_4) = 4D_1(4) - (4R_5 + 4S_5 + 4Q_5 + 4P_5) + 2D_2(5) - 2D_1(5) - 2R_5 - 2S_5 - 2Q_5 - 2P_5$, então

$$\text{div}(z_5) = D_2(5) + D_1(5) - 3(R_5 + S_5 + Q_5 + P_5).$$

(4) Em M_6 , temos $2\text{div}(z_6) = \text{div}(x_4) + \text{div}(x_5) = [4D_2(6) - 4D_1(6) - 4(R_6 + S_6 + Q_6 + P_6)] + [4D_3(6) - 2(D_1(6) + D_2(6) + S_6 + R_6 + Q_6 + P_6)]$, então

$$\text{div}(z_6) = 2D_3(6) + D_2(6) - 3(D_1(6) + S_6 + R_6 + Q_6 + P_6).$$

(5) Em M_7 , temos $2\text{div}(z_7) = \text{div}(x_5) + \text{div}(x_6) = [4D_3(7) - 4(D_1(7) + D_2(7) + S_7 + R_7 + Q_7 + P_7)] + [8D_4(7) - (2D_1(7) + 2D_2(7) + 2D_3(7) + 2(S_7 + R_7 + Q_7 + P_7))]$, então

$$\text{div}(z_7) = 4D_4(7) + D_3(7) - 3(D_1(7) + D_2(7) + S_7 + R_7 + Q_7 + P_7).$$

(6) Em M_8 , temos $2\text{div}(z_8) = \text{div}(x_6) + \text{div}(x_7) = [8D_4(8) - (4D_1(8) + 4D_2(8) + 4D_3(8) + 4(S_8 + R_8 + Q_8 + P_8))] + [16D_5(8) - (2D_1(8) + 2D_2(8) + 2D_3(8) + 4D_4(8) + 2S_8 + 2R_8 + 2Q_8 + 2P_8)]$, então

$$\text{div}(z_8) = 8D_5(8) + 2D_4(8) - 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + S_8 + R_8 + Q_8 + P_8).$$

- (7) Se $i = 2k \geq 10$, então $i - 1 = 2(k - 1) + 1$ e $i - 2 = 2(k - 1)$. Em M_i , temos por $2\text{div}(z_i) = \text{div}(x_{i-1}) + \text{div}(x_{i-2})$ e pelos itens (4) e (5) da Proposição 4.3 temos que

$$\begin{aligned}
2\text{div}(z_i) &= 2^{i-5}D_{i-4}(i) - 4D_\infty(i) - 4\sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) - \sum_{j=2}^{k-3}2^{2j-1}D_{k-2+j}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) \\
&\quad - 2D_\infty(i) - 2\sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-3}2^{2j}D_{k-1+j}(i) \\
&= 2^{i-5}D_{i-4}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) \\
&\quad - 6\left[D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) + \sum_{j=2}^{k-3}2^{2j-1}D_{k-2+j}(i) + \sum_{j=1}^{k-3}2^{2j}D_{k-1+j}(i)\right] \\
&= 2^{i-5}D_{i-4}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) - 6\left[D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4}2^{2j}D_{k-1+j}(i)\right] \\
&\quad + 2^{2(k-3)}D_{2k-4}(i),
\end{aligned}$$

como $2k - 4 = i - 4$ e $2(k - 3) = i - 6$, temos que $2^{2(k-3)}D_{2k-4}(i) = 2^{i-6}D_{i-4}(i)$. Assim,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3\left(D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4}2^{2j-1}D_{k-1+j}(i)\right).$$

- (8) Se $i = 2k + 1 \geq 9$, então $i - 1 = 2k$ e $i - 2 = 2(k - 1) + 1$. Em M_i , temos por $2\text{div}(z_i) = \text{div}(x_{i-1}) + \text{div}(x_{i-2})$ e pelos itens (4) e (5) da Proposição 4.3 temos que

$$\begin{aligned}
2\text{div}(z_i) &= 2^{i-5}D_{i-4}(i) - 4D_\infty(i) - 4\sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) - \sum_{j=1}^{k-3}2^{2j}D_{k-1+j}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) \\
&\quad - 2D_\infty(i) - 2\sum_{j=1}^kD_j(i) - \sum_{j=1}^{k-2}2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) \\
&= 2^{i-5}D_{i-4}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) \\
&\quad - 6\left[D_\infty(i) + \sum_{j=1}^kD_j(i) + \sum_{j=2}^{k-2}2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) + \sum_{j=1}^{k-3}2^{2j}D_{k-1+j}(i)\right] \\
&= 2^{i-5}D_{i-4}(i) + 2^{i-4}D_{i-3}(i) - 6\left[D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1}D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4}2^{2j}D_{k+j}(i)\right] \\
&\quad + 2^{2k-5}D_{2k-3}(i),
\end{aligned}$$

como $2k - 5 = i - 6$ e $2k - 3 = i - 4$, temos que $2^{2k-5}D_{2k-3}(i) = 2^{i-6}D_{i-4}(i)$. Assim,

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3\left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^kD_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4}2^{2j}D_{k+j}(i)\right).$$

□

O próximo corolário calculamos o produto das funções z_i , com i ímpar.

Corolário 4.7. *Seja $i = 2k + 1 \geq 5$. Em M_i ,*

$$\operatorname{div} \left(\prod_{j=1}^k z_{2j+1} \right) = Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j} D_{k+j}(i) - (2^{i-1} - 1)P_i.$$

Demonstração. Vamos provar novamente por indução sobre i . Se $i = 5$, então pela Proposição 4.6 temos que em M_5 , $\operatorname{div}(z_5) = D_1(5) + D_2(5) - 3D_\infty(5)$ e $\operatorname{div}(z_3) = 4(Q_5 + R_5 + S_5 - 3P_5)$. Então

$$\operatorname{div}(z_3 z_5) = Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + D_2(5) - 15P_5.$$

Se $i \geq 7$, vamos supor que o resultado é válido para $i - 2 = 2(k - 1) + 1$. Então, em M_{i-2} temos pela hipótese de indução

$$\operatorname{div} \left(\prod_{j=1}^{k-1} z_{2j+1} \right) = Q_{i-2} + R_{i-2} + S_{i-2} + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i-2) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k+j}(i-2) - (2^{i-3} - 1)P_{i-2}.$$

Pela Proposição 4.3 temos que

$$\operatorname{div} \left(\prod_{j=1}^{k-1} z_{2j+1} \right) = 4(Q_i + R_i + S_{i-2} + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i)) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k+j}(i) - 4(2^{i-3} - 1)P_i.$$

Agora, usando a Proposição 4.6 obtemos que

$$\operatorname{div} \left(\prod_{j=1}^k z_{2j+1} \right) = Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j} D_{k+j}(i) - (2^{i-1} - 1)P_i.$$

□

Proposição 4.8. *Seja $i = 2k \geq 6$. Em M_i ,*

$$\operatorname{div}(U_i) = Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) + 2^{i-5} E_{i-3}(i) - (2^{i-1} - 1)P_i,$$

$$\text{onde } U_i = \begin{cases} \frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3 z_5 z_6}, & \text{se } i = 6, \\ \frac{(x_1 + 1)(x_4^2 - 1)}{z_5 z_7 z_8}, & \text{se } i = 8, \\ \frac{(x_{i-7} + 1)(x_{i-4}^2 - 1)(\prod_{j=1}^{k-4} z_{2j+1})}{z_{i-3} z_{i-1} z_i}, & \text{se } i \geq 10. \end{cases}$$

Demonstração. • Se $i = 6$, então pela Proposição 4.6 $\operatorname{div}(\frac{1}{z_6}) = 3(D_\infty(6) + D_1(6)) - D_2(6) - 2D_3(6)$ e pelo corolário anterior temos que $\operatorname{div}(\frac{1}{z_3 z_5}) = 30P_5 - 2(Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + D_2(5))$ em M_6 . Note que $\operatorname{div}(x_2 - 1)2(D_3(6) + E_3(6)) - 16(P_6 + Q_6)$. De fato, como $x_3^2 - 1 = \frac{(x_2 - 1)^2}{2x_2}$ em M_3 temos $\operatorname{div}(x_2 - 1) = 2(D_3(3) + E_3(3)) - 2(P_3 + Q_3)$.

Logo em M_6 , $\text{div}(x_2 - 1) = 2(D_3(6) + E_3(6)) - 16(P_6 + Q_6)$. Ainda, usando que $\text{div}(x_2 + 1) = 2D_2(2) - (P_2 + Q_2)$ em M_2 . Concluimos que

$$\text{div}\left(\frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3 z_5 z_6}\right) = Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6) + D_2(6) + 2E_3(6) - 31P_6.$$

- Se $i = 2k \geq 8$, temos da Proposição 4.6 que

$$\text{div}\left(\frac{1}{z_i}\right) = 3\left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i)\right) - 2^{i-7} D_{i-4}(i) - 2^{i-5} D_{i-3}(i).$$

Segue da Proposição 4.5 que em M_{i-3}

$$\begin{aligned} \text{div}(x_{i-4} - 1) &= 2^{i-5} D_{i-3}(i-3) + 2^{i-5} E_{i-3}(i-3) - 2\left(D_\infty(i-3) + \sum_{j=1}^{k-3} D_j(i-3)\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-3+j}(i-3) \end{aligned}$$

como em M_{i-4}

$$\text{div}(x_{i-4} + 1) = 2^{i-5} D_{i-4}(i-4) - D_\infty(i-4) - \sum_{j=1}^{k-3} D_j(i-4) - \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-3+j}(i-4)$$

temos que em M_{i-3}

$$\begin{aligned} \text{div}(x_{i-4}^2 - 1) &= 2^{i-5} D_{i-4}(i-3) + 2^{i-5} D_{i-3}(i-3) + 2^{i-5} E_{i-3}(i-3) \\ &\quad - 4\left(D_\infty(i-3) + \sum_{j=1}^{k-3} D_j(i-3)\right) - \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j} D_{k-3+j}(i-3) \end{aligned}$$

Usando a tabela anterior, obtemos que em M_8

$$\text{div}(x_4^2 - 1) = 8(D_4(8) + D_5(8) + E_5(8)) - 32(D_\infty(8) + D_1(8)) \quad (4.7)$$

e em M_{10}

$$\text{div}(x_6^2 - 1) = 32(D_6(10) + D_7(10) + E_7(10)) - (D_\infty(8) + D_1(8) + D_2(10) + D_3(10)) \quad (4.8)$$

Agora, usando a Proposição 4.6, em M_8

$$\text{div}\left(\frac{1}{z_5 z_7}\right) = 30D_\infty(8) - 2(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) - 4D_4(8), \quad (4.9)$$

em M_{10}

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\frac{1}{z_7 z_9}\right) &= 30(D_\infty(10) + D_1(10) + D_2(10)) - 2(D_3(10) + D_4(10)) \\ &\quad - 4D_5(10) - 16D_6(10), \end{aligned} \quad (4.10)$$

em M_{12}

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{z_9 z_{11}} \right) &= 30(D_\infty(12) + D_1(12) + D_2(12) + D_3(12) + D_4(12)) \\ &\quad - 2D_5(12) - 4D_6(12) - 16D_7(12) - 64D_8(12), \end{aligned} \quad (4.11)$$

e para $i \geq 14$ temos, em M_i

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{z_{i-1} z_{i-3}} \right) &= 30 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-7} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right) \\ &\quad - (2^{i-12} D_{i-7}(i) + 2^{i-10} D_{i-6}(i) + 2^{i-8} D_{i-5}(i) + 2^{i-6} D_{i-4}(i)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por outro lado, temos pela Proposição 4.8 que

$$\operatorname{div}((x_{i-7} + 1) \prod_{j=1}^{k-4} z_{2j+1}) = 2^{i-8} D_{i-7}(i) - 2^{i-1} P_i. \quad (4.13)$$

Juntando todas essas informações, a proposição segue. \square

Proposição 4.9. (1) Seja $i = 2k \geq 4$. Em M_i ,

$$\operatorname{div}(x_1 \prod_{j=2}^k z_{2j}) = (2^{i-2} + 1)Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) - (3 \cdot 2^{i-2} - 1)P_i;$$

(2) Para $i \geq 6$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(x_1 x_2 x_3 \prod_{j=3}^k z_{2j} \right) &= (2^{i-4} + 1)(Q_i + R_i + S_i + D_1(i)) + \sum_{j=2}^{k-1} D_j(i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) - (15 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos denotar $L_i := \prod_{j=2}^k z_{2j}$, onde $i = 2k$.

(1) Por indução sobre i , temos que

$$\begin{aligned} L_4 &= x_1 z_4 = 8(Q_4 - P_4) + (R_4 + S_4 + D_1(4) - 3P_4 - 3Q_4) \\ &= 5Q_4 + R_4 + S_4 + D_1(4) - 11P_4 \end{aligned}$$

Suponha que seja válido para $t \leq i - 1$. Então notando que $i - 2 = 2(k - 1)$ temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_1 L_{i-2}) &= 4(2^{i-4} + 1)Q_i + 4(R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-2} D_j(i)) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j-1} D_{k-2+j}(i) \\ &\quad - 4(3 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i, \end{aligned}$$

pois pelo Corolário 4.4 temos que $\text{div}(x_1) = 2^{I-1}(Q_I - P_I)$, em M_I . Vamos provar que vale para $i = 2k$. De fato, usando Proposição 4.6 temos que

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{div}(x_1 L_i) &= 4(2^{i-4} + 1)Q_i + 4(R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-2} D_j(i)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j-1}D_{k-2+j}(i) - 4(3 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i \\ &+ 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) \\ &= (2^{i-2} + 1)Q_i + R_i + S_i + 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-2} D_j(i) + 2^2D_{k-1} + [2^3D_k + 2^5D_{k+1} + \dots + 2^{2(k-4)-1}D_{2k-6} \\ &+ 2^{2(k-3)-1}D_{2k-5}] - 3[D_{k-1} + 2^1D_k + 2^3D_{k+1} + \dots + 2^{2(k-5)-1}D_{2k-6} \\ &+ 2^{2(k-4)-1}D_{2k-5}] - (3 \cdot 2^{i-2} - 1)P_i \\ &= (2^{i-2} + 1)Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) - (3 \cdot 2^{i-2} - 1)P_i. \end{aligned}$$

(2) Segue da Corolário 4.4 que $\text{div}(x_2) = 2^{i-2}(R_i + S_i - P_i - Q_i)$ e $\text{div}(x_3) = 2^{i-3}(D_1(i) - D_\infty(i))$. Multiplicando o item anterior por $\frac{x_2 x_3}{z_4}$ temos

$$\begin{aligned} \text{div} \left(x_1 x_2 x_3 \prod_{j=3}^k z_{2j} \right) &= (2^{i-4} + 1)(Q_i + R_i + S_i + D_1(i)) + \sum_{j=2}^{k-1} D_j(i) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-2} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) - (15 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i. \end{aligned}$$

□

O corolário a seguir, calculamos o divisor de funções específicas com ordem de pólo ímpar em P_i .

Corolário 4.10. Para $i = 2k + 1 \geq 5$, seja

$$U_i = \begin{cases} \frac{(x_1^2 - 1)}{z_4 z_5}, & \text{se } i = 5, \\ \frac{x_1 x_2 (x_3^2 - 1)}{z_4 z_6 z_7}, & \text{se } i = 7, \\ \frac{x_1 (x_2 + 1) (x_5^2 - 1)}{z_6 z_8 z_9}, & \text{se } i = 9, \\ \frac{x_1 (x_{i-7} + 1) (x_{i-4}^2 - 1) (\prod_{j=2}^{k-3} z_{2j})}{z_{i-3} z_{i-1} z_i}, & \text{se } i \geq 11. \end{cases}$$

Em M_i ,

(1) se $i = 5$,

$$\operatorname{div}(U_5) = 9Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + E_2(5) - (3 \cdot 2^3 - 1)P_5, \quad \text{and}$$

$$\operatorname{div}(z_4 U_5) = 3(Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5)) + E_2(5) - (15 \cdot 2 - 1)P_5,$$

com $\operatorname{deg}(E_2(5)) = 8$.

(2) se $i \geq 7$, então $\operatorname{div}(U_i) = (2^{i-2} + 1)Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k+j}(i) + 2^{i-5} E_{i-3}(i) - (3 \cdot 2^{i-2} - 1)P_i$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(z_4 U_i) &= (2^{i-4} + 1)(Q_i + R_i + S_i + D_1(i)) + \sum_{j=2}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k+j}(i) \\ &+ 2^{i-5} E_{i-3}(i) - (15 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) Como $\operatorname{div}(x_1 + 1) = 4D_1(5) - 16P_5$ e $\operatorname{div}(x_1 - 1) = D_2(5) + E_2(5) - 16P_5$ em M_5 , temos que $\operatorname{div}(x_1^2 - 1) = 4D_1(5) + D_2(5) + E_2(5) - 32P_5$. Pela Proposição 4.6 temos que

$$\operatorname{div}(U_5) = \operatorname{div}\left(\frac{(x_1^2 - 1)}{z_4 z_5}\right) = 9Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + E_2(5) - (3 \cdot 2^3 - 1)P_5$$

pois $\operatorname{div}(z_4 z_5) = [2(R_5 + S_5 + D_1(5)) - 6P_5 - 6Q_5] + [D_1(5) + D_2(5) - 3(S_5 + R_5 + Q_5 + P_5)] = 3D_1(5) + D_2(5) - (S_5 + R_5) - 9(Q_5 + P_5)$. Além disso,

$$\operatorname{div}(z_4 U_5) = \operatorname{div}\left(\frac{(x_1^2 - 1)}{z_5}\right) = 3(Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5)) + E_2(5) - (15 \cdot 2 - 1)P_5,$$

(2) Em M_7 , $\operatorname{div}(x_3 + 1) = 4D_3(7) - 16D_\infty(7)$ e $\operatorname{div}(x_3 - 1) = 4D_4(7) + 4E_4(7) - 16D_\infty(5)$, logo $\operatorname{div}(x_3^2 - 1) = 4D_3(7) + 4D_4(7) + 4E_4(7) - 32D_\infty(7)$. Pelas Proposições 4.3 e 4.6

temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U_7) &= \operatorname{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2-1)}{z_4z_6z_7}\right) = \\ &= 32(S_7 + R_7 + Q_7) - 96P_7 + \\ &+ 4D_3(7) + 4D_4(7) + 4E_4(7) - 32(S_7 + R_7 + Q_7 + P_7) + \\ &+ [-8(S_7 + R_7) - 8D_1(7) + 24(Q_7 + P_7)] + \\ &+ [-2D_2(7) - 2D_3(7) + 6(S_7 + R_7 + Q_7 + P_7) + 6D_1(7)] + \\ &+ [-D_3(7) - 4D_4(7) + 3(D_1(7) + D_2(7) + S_7 + R_7 + Q_7 + P_7)] = \\ &= 33Q_7 + S_7 + R_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 95P_7. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{div}(z_4) = 2^3(R_7 + S_7 + D_1(7)) - 3 \cdot 2^3(P_7 + Q_7)$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(z_4U_7) &= 2^3(R_7 + S_7 + D_1(7)) - 3 \cdot 2^3(P_7 + Q_7) + \\ &+ 33Q_7 + S_7 + R_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 95P_7 = \\ &= 9(Q_7 + S_7 + R_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 119P_7 \end{aligned}$$

- Se $i = 9$ temos pela Proposição 4.3 e Corolário 4.4 em M_9 , que $\operatorname{div}(x_1) = 2^8(Q_9 - P_9)$, $\operatorname{div}(x_2 + 1) = 32D_2(9) - 128(Q_9 + P_9)$ e $\operatorname{div}(x_5^2 - 1) = 2^4(D_5(9) + D_6(9) + E_6(9)) - 32(D_\infty(9) + D_1(9) + D_2(9))$. Por outro lado, temos pela Proposição 4.6 temos $\operatorname{div}(z_6) = 8(D_2(9) + D_3(9)) - 3 \cdot 2^3(D_\infty(9) + D_1(9))$, $\operatorname{div}(z_8) = 2D_4(9) + 2^3D_5(9) - 6(D_\infty(9) + D_1(9) + D_2(9) + D_3(9))$ e $\operatorname{div}(z_9) = 2^2D_5(9) + 2^4D_6(9) - 3(D_\infty(9) + D_1(9) + D_2(9) + D_3(9) + D_4(9))$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U_9) &= \operatorname{div}\left(\frac{x_1(x_2 + 1)(x_5^2 - 1)}{z_6z_8z_9}\right) = (2^7 + 1)Q_9 + R_9 + S_9 + D_1(9) \\ &+ D_2(9) + D_3(9) + D_4(9) + 2^2D_5(9) + 2^4E_8(9) - (3 \cdot 2^7 - 1)P_9. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{div}(z_4) = 2^5(R_9 + S_9 + D_1(9)) - 3 \cdot 2^5(P_9 + Q_9)$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(z_4U_9) &= 2^5(R_9 + S_9 + D_1(9)) - 3 \cdot 2^5(P_9 + Q_9) \\ &+ (2^7 + 1)Q_9 + R_9 + S_9 + D_1(9) + D_2(9) + D_3(9) \\ &+ D_4(9) + 2^2D_5(9) + 2^4E_8(9) - (3 \cdot 2^7 - 1)P_9 \\ &= (2^5 + 1)(Q_9 + R_9 + S_9 + D_1(9)) + D_2(9) + D_3(9) \\ &+ D_4(9) + 2^2D_5(9) + 2^4E_8(9) - (15 \cdot 2^5 - 1)P_9. \end{aligned}$$

- Para $i = 11$, temos pela Proposição 4.3 e Corolário 4.4 em M_{11} , que $\operatorname{div}(x_1) = 2^{10}(Q_{11} - P_{11})$, $\operatorname{div}(x_4 + 1) = 32D_4(11) - 128(D_1(11) + D_\infty(11))$ e $\operatorname{div}(x_7^2 - 1) = 64(D_7(11) + D_8(11) + E_8(11)) - 32(D_\infty(11) + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11))$.

Por outro lado, temos pela Proposição 4.6 que $\text{div}(z_4) = 128(R_{11} + S_{11} + D_1(11)) - 384(Q_{11} + P_{11})$, $\text{div}(z_8) = 8D_4(11) + 8D_5(11) - 24(D_\infty(11) + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11))$, $\text{div}(z_{10}) = 8D_6(11) + 32D_7(11) - 6(D_\infty(11) + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11) + D_5(11))$ e $\text{div}(z_{11}) = 16D_7(11) + 64D_8(11) - 3(D_\infty(11) + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11) + D_5(11) + 4D_6(11))$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{div}(U_{11}) &= \text{div}\left(\frac{x_1(x_4 + 1)(x_7^2 - 1)z_4}{z_8 z_{10} z_{11}}\right) = \\ &= (2^9 + 1)Q_{11} + R_{11} + S_{11} + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11) + D_5(11) \\ &\quad + 4D_6(11) + 16D_7(11) + 64E_8(11) - (3 \cdot 2^9 - 1)P_{11} \end{aligned}$$

Como $\text{div}(z_4) = 2^8(R_{11} + S_{11} + D_1(11)) - 3 \cdot 2^8(P_{11} + Q_{11})$ temos

$$\begin{aligned} \text{div}(z_4 U_{11}) &= 2^7(R_{11} + S_{11} + D_1(11)) - 3 \cdot 2^7(P_{11} + Q_{11}) \\ &+ (2^9 + 1)Q_{11} + R_{11} + S_{11} + D_1(11) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11) + D_5(11) \\ &\quad + 4D_6(11) + 16D_7(11) + 64E_8(11) - (3 \cdot 2^9 - 1)P_{11} = \\ &= (2^7 + 1)(Q_{11} + R_{11} + S_{11} + D_1(11)) + D_2(11) + D_3(11) + D_4(11) + D_5(11) \\ &\quad + 4D_6(11) + 16D_7(11) + 64E_8(11) - (15 \cdot 2^7 - 1)P_{11} \end{aligned}$$

- Para $i \geq 13$, temos da Proposição 4.6 temos em M_i , que

$$\text{div}(z_{i-1}) = 2^{i-8}D_{i-5}(i) + 2^{i-6}D_{i-4}(i) - 3 \left(2D_\infty(i) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right),$$

$$\text{div}(z_{i-3}) = 2^{i-10}D_{i-7}(i) + 2^{i-8}D_{i-6}(i) - 3 \left(8D_\infty(i) + 8 \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=2}^{k-5} 2^{2j-1} D_{k-2+j}(i) \right)$$

e

$$\text{div}(z_i) = 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j} D_{k+j}(i) \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{div}(z_{i-3} z_{i-1} z_i) &= 2^{i-10}D_{i-7}(i) + 2^{i-8}D_{i-6}(i) + 2^{i-8}D_{i-5}(i) \quad (4.14) \\ &\quad + 2^{i-6}D_{i-4}(i) + 2^{i-7}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) \\ &\quad - 3 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j} D_{k+j}(i) \right) \\ &\quad - 3 \left(2D_\infty(i) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right) \\ &\quad - 3 \left(8D_\infty(i) + 8 \sum_{j=1}^{k-2} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-5} 2^{2j-1} D_{k-2+j}(i) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{i-5}D_{i-3}(i) + 3 \cdot 2^{i-7}D_{i-4}(i) \\
 &-(2^5 + 1)(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i)) - 2^{2k-12}D_{2k-6}(i) - 2^{2k-10}D_{2k-5}(i) - 2^{2k-8}D_{2k-4}(i) \\
 &- 3D_k(i) - 3 \sum_{j=1}^{k-7} 2^{2j}D_{k+j}(i) - 3 \sum_{j=1}^{k-6} 2^{2j-1}D_{k-1+j}(i) - 3 \sum_{j=2}^{k-5} 2^{2j-1}D_{k-2+j}(i).
 \end{aligned}$$

Se $i = 2k + 1$ então $i - 1 = 2k$ e $i - 3 = 2(k - 1)$. Pelas Proposições 4.3, 4.5 e Corolário 4.4 temos em M_i , que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(x_{i-4}^2 - 1) &= 2^{i-5}D_{i-4}(i) + 2^{i-5}D_{i-3}(i) + 2^{i-5}E_{i-3}(i) - \\
 &2^5 \left(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) \right) - 2 \sum_{j=2}^{k-4} 2^{2j}D_{k-2+j}(i)
 \end{aligned}$$

Como $i - 7 = 2(k - 3)$ temos em M_i , que

$$\operatorname{div}(x_1 \prod_{j=2}^{k-3} z_{2j}) = 2^7[(2^{i-9} + 1)Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i)] + \sum_{j=5}^{k-5} 2^{2j-1}D_{k-4+j}(i) - 2^7(3 \cdot 2^{i-9} - 1)P_i$$

e

$$\operatorname{div}(x_{i-7} + 1) = 2^{i-8}D_{i-7}(i) - 2^7(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^k D_j(i)) - \sum_{j=5}^{k-5} 2^{2j-1}D_{k-4+j}(i).$$

Então

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}((x_1 \prod_{j=2}^{k-3} z_{2j})(x_{i-7} + 1)(x_{i-4}^2 - 1)) &= \quad (4.15) \\
 &2^{i-5}(D_{i-4}(i) + D_{i-3}(i) + E_{i-3}(i)) + (2^{i-2})Q_i \\
 &- 2^5(D_\infty(i) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i)) - 2 \sum_{j=2}^{k-5} 2^{2j}D_{k-2+j}(i) - (3 \cdot 2^{i-2})P_i.
 \end{aligned}$$

O resultado segue somando as equações (4.14) e (4.15).

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(U_i) &= (2^{i-2} + 1)Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j}D_{k+j}(i) + 2^{i-5}E_{i-3}(i) \\
 &- (3 \cdot 2^{i-2} - 1)P_i.
 \end{aligned}$$

Como $\operatorname{div}(z_4) = 2^{i-4}(R_{11} + S_{11} + D_1(11)) - 3 \cdot 2^{i-4}(P_{11} + Q_{11})$ temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(z_4 U_i) &= (2^{i-4} + 1)(Q_i + R_i + S_i + D_1(i)) + \sum_{j=2}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j}D_{k+j}(i) + 2^{i-5}E_{i-3}(i) \\
 &- (15 \cdot 2^{i-4} - 1)P_i.
 \end{aligned}$$

□

Observação 4.11. *Seja i um inteiro positivo. Por indução sobre i , em M_i a seguinte fórmula segue facilmente.*

(1) se $i = 2k + 1 \geq 3$,

$$\operatorname{div}\left(\prod_{j=1}^i x_j\right) = Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^k D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j} D_{k+j}(i) - (2^i - 1)P_i; \quad (4.16)$$

(2) se $i = 2k \geq 2$,

$$\operatorname{div}\left(\prod_{j=1}^i x_j\right) = Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) - (2^i - 1)P_i. \quad (4.17)$$

Corolário 4.12. *Seja $i = 2k \geq 4$. Em M_i temos:*

(1) para $i = 4$,

$$\operatorname{div}(x_1 z_4) = 5Q_4 + R_4 + S_4 + D_1(4) - (2^4 - 5)P_4;$$

(2) para $i = 6$,

$$\operatorname{div}(x_1 x_2 x_3 z_6) = 5(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + 2D_3(6) - (2^6 - 5)P_6;$$

(3) para $i = 2k \geq 8$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\left(\prod_{j=1}^{i-3} x_j\right) z_i\right) &= 5(Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i)) + 2^{i-7} D_{i-4}(i) \\ &\quad + 2^{i-5} D_{i-3}(i) - (2^i - 5)P_i. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) Em M_4 , pelas Proposições 4.6 e 4.4 temos que $\operatorname{div}(z_4) = R_4 + S_4 + D_1(4) - 3P_4 - 3Q_4$ e $\operatorname{div}(x_1) = 8(Q_4 - P_4)$. Então $\operatorname{div}(x_1 z_4) = 5Q_4 + R_4 + S_4 + D_1(4) - (2^4 - 5)P_4$.

(2) Em M_6 , pelas Proposições 4.6 e 4.4 temos $\operatorname{div}(z_6) = D_2(6) + 2D_3(6) - 3D_\infty(6) - 3D_1(6)$, $\operatorname{div}(x_1) = 2^5(Q_6 - P_6)$, $\operatorname{div}(x_2) = 2^4(R_6 + S_6 - P_6 - Q_6)$ e $\operatorname{div}(x_3) = 2^3(D_1(6) - D_\infty(6))$ assim

$$\operatorname{div}(x_1 x_2 x_3 z_6) = 5(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + 2D_3(6) - (2^6 - 5)P_6.$$

(3) Note que $i - 3 = 2(k - 2) + 1$. Em M_i , pela Proposição 4.6 e Equação (4.16) temos que

$$\operatorname{div}(z_i) = 2^{i-7} D_{i-4}(i) + 2^{i-5} D_{i-3}(i) - 3 \left(D_\infty(i) - \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i) \right)$$

e

$$\operatorname{div}\left(\prod_{j=1}^{i-3} x_j\right) = 2^3(Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-2} D_j(i)) + \sum_{j=1}^{k-3} 2^{2j} D_{k-2+j}(i) - (2^i - 1)P_i,$$

então

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\left(\prod_{j=1}^{i-3} x_j\right)z_i\right) &= 5(Q_i + R_i + S_i + \sum_{j=1}^{k-1} D_j(i) + \sum_{j=1}^{k-4} 2^{2j-1} D_{k-1+j}(i)) + 2^{i-7} D_{i-4}(i) \\ &+ 2^{i-5} D_{i-3}(i) - (2^i - 5)P_i. \end{aligned}$$

□

4.2 Semigrupos de Weierstrass

Nesta seção, vamos usar os divisores calculados na seção anterior para encontrar uma função F_n tal que $\operatorname{div}_\infty(F_n) = nP_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Vamos usar propriedades de semigrupos numéricos, bem como de semigrupos de Weierstrass para encontrar as funções associadas aos geradores minimais. Tais geradores serão indicados nas tabelas subsequentes. Vamos denotar por c_i o condutor do semigrupo de Weierstrass H_i em P_i . A seguir, vamos calcular H_2, \dots, H_8 . Observamos que $H_1 = \mathbb{N}_0$, uma vez que $g_1 = 0$. Um fato muito importante sobre tais semigrupos é fato de serem relacionados via recobrimento de duplo de curvas, isto é, $H_i = \frac{H_{i+1}}{2}$, para cada i . Portanto, para cada $x \in H_i$ temos que $2x \in H_{i+1}$.

4.2.1 Calculando H_2

Aqui vamos determinar o **semigrupo de Weierstrass** H_2 . Do Corolário 4.2 temos que $g_2 = 1$ e assim

$$H_2 = \langle 2, 3 \rangle$$

(sabemos que só existe um único semigrupo numérico com gênero um). Os divisores de funções as quais o divisor de pólos é da forma nP_2 , onde n é um gerador minimal de H_2 são apresentados a seguir.

Ordem de Pólo em P_2	divisor da função correspondente
2	$\operatorname{div}(x_1) = 2Q_2 - 2P_2$
3	$\operatorname{div}(x_1x_2) = Q_2 + R_2 + S_2 - 3P_2$

Tabela 9 – Os divisores de H_2 .

4.2.2 Calculando H_3

Para determinar o **semigrupo de Weierstrass** H_3 vamos mostrar que $3, 4 \in H_3$. Com efeito, do Corolário 4.2 temos que $g_3 = 3$. Pela Proposição 4.6 (1) temos $3 \in H_3$ e pelo caso anterior $4 \in H_3$. Pela Proposição 1.30 item a) temos que o semigrupo numérico gerado por 3 e 4 possui gênero 3. Portanto,

$$H_3 = \langle 3, 4 \rangle.$$

Os divisores de funções as quais o divisor de pólos é da forma nP_3 , onde n é um gerador minimal de H_3 são apresentados a seguir.

Ordem de Pólo em P_3	divisor da função correspondente
3	$\text{div}(z_3) = Q_3 + R_3 + S_3 - 3P_3$
4	$\text{div}(x_1) = 4Q_3 - 4P_3$

Tabela 10 – Os divisores de H_3 .

4.2.3 Calculando H_4

O **semigrupo de Weierstrass** H_4 , como veremos, será gerado por 6,8,11 e 15. De fato, usando o Corolário 4.2 temos que $g_4 = 9$. Pelo caso anterior, obtemos que $6, 8 \in H_4$ geram as não lacunas pares. Da Proposição 4.6, item (2), temos que

$$\text{div}(z_4) = R_4 + S_4 + D_1(4) - 3P_4 - 3Q_4.$$

Como $z_3^2 = 4x_1x_2$, obtemos que $11, 15 \in H_4$. Um cálculo rápido, mostra que o semigrupo numérico $\langle 6, 8, 11, 15 \rangle$ possui gênero 9. Portanto,

$$H_4 = \langle 6, 8, 11, 15 \rangle.$$

Os divisores de funções as quais o divisor de pólos é da forma nP_4 , onde n é um gerador minimal de H_4 são apresentados a seguir.

Ordem de Pólo em P_4	divisor da função
6	$\text{div}(z_3) = 2Q_4 + 2R_4 + 2S_4 - 6P_4$
8	$\text{div}(x_1) = 8Q_4 - 8P_4$
11	$\text{div}(x_1z_4) = 5Q_4 + R_4 + S_4 + D_1(4) - 11P_4$
15	$\text{div}(x_1x_2z_4) = Q_4 + 5R_4 + 5S_4 + D_1(4) - 15P_4$

Tabela 11 – Os divisores de H_4 .

4.2.4 Calculando H_5

Para determinar o **semigrupo de Weierstrass** H_5 usaremos o caso anterior e definiremos funções que auxiliarão os cálculos de alguns divisores. Começamos observando que pelo Corolário 4.2 temos $g_5 = 21$. Pelo caso anterior temos que $12, 16, 22 \in H_5$ geram os pólos de ordem pares.

Vamos procurar por não lacunas ímpares em $H_5 \cap [1, 42]$. Pelo Corolário 4.7,

$$\operatorname{div}(z_4 z_5) = Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + D_2(5) - 15P_5$$

de modo que

$$\{15 + 2n \mid n \in H_4, n \leq 12 = c_4 - 2\} = \{15, 27, 31, 37, 39\}$$

é um conjunto de não lacunas ímpares em $H_5 \cap [1, 42]$. Pela Proposição 4.6, item (3), podemos calcular

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_5}\right) = 3D_\infty(5) - D_1(5) - D_2(5).$$

Vamos ajustar o divisor $\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_5}\right)$ de forma que o único pólo seja P_5 . Começamos removendo o divisor $D_1(5)$, para isso usaremos a função $\operatorname{div}(x_1 + 1) = D_1(1) - P_1$ em M_1 , logo em M_5 , temos $\operatorname{div}(x_1 + 1) = 4D_1(5) - 16P_5$. Agora, para remover o divisor $D_2(5)$ faremos uso da função $\operatorname{div}(x_1 - 1) = D_2(5) + E_2(5) - 16P_5$ em M_5 , com $\deg(E_2(5)) = 8$. Com efeito, como $x_2^2 - 1 = \frac{(x_1 - 1)^2}{2x_1}$ em M_2 segue que $\operatorname{div}(x_1 - 1) = D_2(2) + E_2(2) - 2P_2$. Assim,

$$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_5}\right) = 3(Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5)) + E_2(5) - 29P_5$$

e conseqüentemente $41 = 29 + 12 \in H_5$. A seguir, observamos que em M_5 , pela Proposição 4.6

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_4}\right) = 6P_5 + 6Q_5 - 2R_5 - 2S_5 - 2D_1(5)$$

de modo que

$$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_4 z_5}\right) = 9Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + E_2(5) - 23P_5.$$

Em seguida, explicitamos os geradores minimais de H_5 . Sabemos que $2g_5 = 42$ e, como $43 - 12 = 31 = 15 + 16$, $45 - 12 = 33 \notin H_5$, $47 - 12 = 35 = 12 + 23$, $49 - 12 = 37 = 15 + 22$, $51 - 12 = 39 = 15 + 2 \cdot 12$, $53 - 12 = 41 = 12 + 29$ temos que esses são os geradores minimais de H_5 . Portanto,

$$H_5 = \langle 12, 15, 16, 22, 23, 29 \rangle.$$

Na tabela a seguir, os divisores de funções as quais o divisor de pólos é da forma nP_5 , onde n é um gerador minimal de H_5 são apresentados.

Ordem de Pólo em P_5	divisor da função correspondente
12	$\text{div}(z_3) = 4(Q_5 + R_5 + S_5) - 12P_5$
15	$\text{div}(z_3z_5) = Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + D_2(5) - 15P_5$
16	$\text{div}(x_1) = 16Q_5 - 16P_5$
22	$\text{div}(x_1z_4) = 10Q_5 + 2R_5 + 2S_5 + 2D_1(5) - 22P_5$
23	$\text{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_4z_5}\right) = 9Q_5 + R_5 + S_5 + D_1(5) + E_2(5) - 23P_5$
29	$\text{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_5}\right) = 3Q_5 + 3R_5 + 3S_5 + 3D_1(5) + E_2(5) - 29P_5$

 Tabela 12 – Os divisores de H_5 .

4.2.5 Calculando H_6

Do Corolário 4.2 obtemos que o gênero do **semigrupo de Weierstrass** H_6 é $g_6 = 49$ e procuramos não lacunas em $H_6 \cap [1, 98]$. Pelo caso anterior, sabemos que $24, 30, 32, 44, 46, 58 \in H_6$ geram os não lacunas pares. Então precisamos encontrar as não lacunas ímpares.

Pela Proposição 4.6, item (4),

$$\text{div}\left(\frac{1}{z_6}\right) = 3(D_\infty(6) + D_1(6)) - D_2(6) - 2D_3(6).$$

Vamos ajustar o divisor $\text{div}\left(\frac{1}{z_6}\right)$ de forma que o único pólo seja P_6 . Começamos removendo o divisor $D_2(6)$, para isso usaremos a função $\text{div}(x_2 + 1)$, onde $\text{div}(x_2 + 1) = 2D_2(2) - (P_2Q_2)$ em M_2 . Logo, em M_6 , $\text{div}(x_2 + 1) = 4D_2(6) - 16(P_6 + Q_6)$. Agora, para o divisor $D_3(6)$, vamos considerar o seguinte divisor $\text{div}(x_2 - 1)$. Uma vez que $x_3^2 - 1 = \frac{(x_2 - 1)^2}{2x_2}$ em M_3 , teremos que $\text{div}(x_2 - 1) = 2(D_3(3) + E_3(3)) - 2(P_3 + Q_3)$. Então em M_6 , $\text{div}(x_2 - 1) = 2(D_3(6) + E_3(6)) - 16(P_6 + Q_6)$. Portanto,

$$\text{div}\left(\frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3z_5z_6}\right) = Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6) + D_2(6) + 2E_3(6) - 31P_6.$$

Assim, $\{31 + 2n \mid n \in H_5, n \leq 32 = c_5 - 2\} = \{31, 55, 61, 63, 75, 77, 79, 85, 87, 89, 91, 93, 95\}$ é um conjunto de 13 não lacunas em $H_6 \cap [1, 98]$.

A seguir consideramos a partir da Proposição 4.6 item (4) que

$$\text{div}(z_6) = D_2(6) + D_3(6) - 3(D_\infty(6) + D_1(6)).$$

Assim, da tabela do caso anterior, temos

$$\text{div}(x_1z_4z_6) = 17Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6) + D_2(6) + 2D_3(6) - 47P_6$$

e assim $71 = 47 + 24 \in H_6$. Agora, pela Proposição 4.3 item (3) e Corolário 4.4 itens (1) e (2) teremos em M_3

$$\text{div}(x_1x_2x_3) = Q_3 + R_3 + S_3 + D_1(3) - 7P_3.$$

Logo, em M_6 ,

$$\operatorname{div}(x_1x_2x_3) = 8(Q_6 + R_6 + S_6) + 8D_1(6) - 56P_6$$

e portanto

$$\operatorname{div}(x_1x_2x_3z_6) = 5(Q_6 + R_6 + S_6) + 5D_1(6) + D_2(6) + 2D_3(6) - 59P_6.$$

Assim, $83 = 59 + 24 \in H_6$. Até agora, obtivemos 17 não lacunas ímpares em $H_6 \cap [1, 98]$, são elas:

$$31, 47, 55, 59, 61, 63, 71, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95.$$

Vamos denotar F_n uma função cujo divisor de pólos é da forma nP_6 . A seguir observamos que $77 = 31 + 46 = 47 + 30$. Dos cálculos anteriores, temos que $F_{31} = \frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3z_5z_6}$,

$$F_{30} = z_3z_5, F_{46} = \frac{(x_1^2 - 1)}{z_4z_5} \text{ e } F_{47} = x_1z_4z_6. \text{ Então}$$

$$F_{31} = \frac{x_3(x_2 - 1)}{4(x_1 + 1)(x_3 + 1)}F_{47}, F_{46} = \frac{x_1 - 1}{4(x_2 + 1)}F_{30},$$

e assim

$$F_{31}F_{46} = \frac{x_3(x_2 - 1)(x_1 - 1)}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)}F_{47}F_{30}.$$

Portanto,

$$F_{47}F_{30} - 16F_{31}F_{46} = \frac{2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)}F_{47}F_{30}.$$

Veremos a seguir que esta observação será útil quando estivermos calculando H_7 e H_8 . Mas antes disso, vamos a mais uma observação.

Notamos que $105 = 31 + 74 = 47 + 58$. Agora, usando as funções F_{31} , F_{47} , F_{58} definidas acima, obtemos que $F_{74} = x_1z_3z_4z_5$, vemos que

$$F_{31}F_{74} = \frac{(x_1 - 1)x_3}{2(x_1 + 1)(x_3 + 1)}F_{47}F_{58}.$$

Assim

$$F_{47}F_{58} - 2F_{31}F_{74} = \frac{2x_3 + x_1 + 1}{(x_1 + 1)(x_3 + 1)}F_{47}F_{58}.$$

Em seguida, calculamos o divisor das funções

$$z = z_{123} := \frac{2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)}, \text{ e } w = w_{13} := \frac{2x_3 + x_1 + 1}{(x_1 + 1)(x_3 + 1)}. \quad (4.18)$$

Afirmção 4.13. Em M_6 , temos que o divisor da função z definida em (4.18) é

$$\operatorname{div}(z) = 8P_6 + \Sigma(6) - 2D_2(6) - D_3(6), \quad (4.19)$$

onde $\Sigma(6)$ é um divisor de grau 16 cujo suporte é disjunto de $D_\infty(6)$, $D_1(6)$, $D_2(6)$ e $D_3(6)$.

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\operatorname{div}((x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)) = 8D_1(6) + 4D_2(6) + 4D_3(6) - (56P_6 + 24Q_6 + 8R_6 + 8S_6),$$

em M_6 . Seja $Z := 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1$. É fácil verificar que $\operatorname{div}_\infty(Z) = 48P_6 + 24Q_6 + 8R_6 + 8S_6$ e para completar o cálculo do divisor $\operatorname{div}(z)$, precisaremos calcular $\operatorname{div}_0(Z)$.

Observamos que os divisores $D_1(3)$, $D_2(3)$ e $D_3(3)$ são subconjuntos de $\operatorname{div}_0(Z)$ em M_3 . Para $P \in D_1(3)$, queremos calcular $v_P(Z)$ em M_3 . Escreva $Z - (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2)x_3$. Então

$$Z^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 + 1)Z + (x_1 + 1)^2 \left[(x_2 + 1)^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} \right] = 0,$$

e usando propriedades de valorização vemos que $v_P(Z) = 1$ (observe que $(x_2 + 1)(P) \neq 0$). Assim, $v_P(Z) = 8$ em M_6 . Agora, para $P \in D_2(3)$ queremos calcular $v_P(Z)$ em M_3 . Escrevendo

$$Z = (x_2 + 1)(x_1 + 1) + 2x_3[(x_2 + 1) + (x_1 - 1)],$$

temos $v_P(Z) = 1$ em M_3 , pois $\operatorname{div}(x_1 - 1) = D_2(3) + E_2(3) - 4P_3$. Então $v_P(Z) = 2$ em M_6 . Finalmente, seja $P \in D_3(3)$ e escrevendo

$$Z = 2(x_1 + x_2)(x_3 + 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

Notando que $2(x_1 + x_2)(P) \neq 0$, $v_P(x_1 - 1) = 1$ e $v_P(x_2 - 1) = 2$ então $v_P(Z) = 3$ em M_3 . Assim, $v_P(Z) = 3$ em M_6 também. Portanto,

$$\operatorname{div}(Z) = 8D_1(6) + 2D_2(6) + 3D_3(6) + \Sigma(6) - 48P_6 - 24Q_6 - 8R_6 - 8S_6,$$

onde $\Sigma(6)$ é o divisor dito acima ($\deg_0(Z) = 32 + 16 + 24 + \deg(\Sigma(6)) = 88$), e portanto a fórmula para $\operatorname{div}(z)$ segue. \square

Afirmção 4.14. Em M_6 , temos que o divisor da função w definida em (4.18) é

$$\operatorname{div}(w) = 8P_6 + \Delta(6) - 3D_3(6), \quad (4.20)$$

onde $\Delta(6)$ é um divisor de grau 16 cujo suporte é disjunto de $D_\infty(6)$, $D_1(6)$ e $D_3(6)$.

Demonstração. Para ver isso, começamos com o denominador de w , onde temos que

$$\operatorname{div}((x_1 + 1)(x_3 + 1)) = 8D_\infty(6) + 4D_3(6) - 40P_6 - 8(Q_6 + R_6 + S_6).$$

Seja W o numerador de w . É fácil ver que $\operatorname{div}_\infty(W) = 32P_6 + 8(Q_6 + R_6 + S_6)$ em M_6 e que os divisores $D_1(3)$ e $D_3(3)$ estão no suporte de $\operatorname{div}_0(W)$ em M_3 . Vamos calcular $v_P(w)$ para $P \in D_1(3)$. Seja $P \in D_1(3)$ e escreva $W - (x_1 + 1) = 2x_3$. Assim,

$$W^2 - 2(x_1 + 1)W + (x_1 + 1)^2 \left[-\frac{1}{x_1x_2} \right] = 0,$$

e assim temos que $v_P(W) = 1$ em M_3 , isto é, $v_P(W) = 8$ em M_6 . Vamos calcular $v_P(w)$ para $P \in D_3(3)$. Seja $P \in D_3(3)$, como

$$W = 2(x_3 + 1) + (x_1 - 1),$$

e $\text{div}_0(x_3 + 1) = 4D_3(3)$, $\text{div}_0(x_1 - 1) = D_2(3) + E_2(3) = D_2(3) + E_3(3) + D_3(3)$ obtemos $v_P(W) = 1$ em M_3 e $v_P(W) = 1$ em M_6 também. Portanto,

$$\text{div}(W) = 8D_1(6) + D_3(6) + \Delta(6) - 32P_6 - 8(Q_6 + R_6 + S_6),$$

com $\Delta(6)$ como desejado ($\text{deg}(\text{div}_0(W)) = 32 + 8 + \text{deg}(\Delta(6)) = 56$), e a fórmula para $\text{div}(w)$ segue. \square

Proposição 4.15. *As demais não lacunas ímpares em $H_6 \cap [1, 98]$ são 53, 59, 81 e 97.*

Demonstração. Agora podemos fazer os últimos cálculos. Usando os divisores das funções z e w obtemos

- i) $\text{div}(zF_{47}F_{30}) = 19Q_6 + 3R_6 + 3S_6 + 3D_1(6) + D_2(6) + D_3(6) + \Sigma(6) - 69P_6$;
- ii) $\text{div}(zF_{59}F_{30}) = 7(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + D_3(6) + \Sigma(6) - 81P_6$;
- iii) $\text{div}(wF_{58}F_{47}) = 23Q_6 + 7(R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + E_3(6) + \Delta(6) - 97P_6$, no último cálculo usamos o fato de que $E_2(6) = E_3(3) + D_3(6)$;
- iv) Tomando $F_{46} = \frac{x_1^2 - 1}{z_4 z_5}$, observamos que $F_{58} = z_4 F_{46}$. Motivados por este fato, vamos considerar a função $\frac{wF_{47}F_{46}}{x_1}$. Então

$$\text{div} \left(\frac{wF_{47}F_{46}}{x_1} \right) = 3(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + E_3(6) + \Delta(6) - 53P_6.$$

\square

Finalmente, temos que

$$H_6 = \langle 24, 30, 31, 32, 44, 46, 47, 53, 58, 59, 69, 81 \rangle.$$

Explicitamos os geradores minimais de forma similar ao caso anterior. Os divisores de funções as quais o divisor de pólos é da forma nP_6 , onde n é um gerador minimal de H_6 são apresentados a seguir.. Aqui, z e w denotam as funções das Afirmações 4.13 e 4.14, e F'_n s funções cujo divisor de pólos é da forma nP_6 .

Ordem de Pólo em P_6	divisor da função correspondente
24	$\operatorname{div}(z_3) = 8(Q_6 + R_6 + S_6) - 24P_6$
30	$\operatorname{div}(z_3z_5) = 2(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + 2D_2(6) - 30P_6$
31	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3z_5z_6}\right) = Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6) + D_2(6) + 2E_3(6) - 31P_6$
32	$\operatorname{div}(x_1) = 32Q_6 - 32P_6$
46	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_4z_5}\right) = 18Q_6 + 2(R_6 + S_6 + D_1(6)) + E_2(6) - 46P_6$
47	$\operatorname{div}(x_1z_4z_6) = 17Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6) + D_2(6) + 2D_3(6) - 47P_6$
53	$\operatorname{div}\left(\frac{wF_{47}F_{46}}{x_1}\right) = 3(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + E_3(6) + \Delta(6) - 53P_6$
58	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_5}\right) = 6(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + E_2(6) - 58P_6$
59	$\operatorname{div}(x_1x_2x_3z_6) = 5(Q_6 + R_6 + S_6) + 5D_1(6) + D_2(6) + 2D_3(6) - 59P_6$
69	$\operatorname{div}(zF_{47}F_{30}) = 19Q_6 + 3R_6 + 3S_6 + 3D_1(6) + D_2(6) + D_3(6) + \Sigma(6) - 69P_6$
81	$\operatorname{div}(zF_{59}F_{30}) = 7(Q_6 + R_6 + S_6 + D_1(6)) + D_2(6) + D_3(6) + \Sigma(6) - 81P_6$

 Tabela 13 – Os divisores de H_6 .

4.2.6 Calculando H_7

Para calcular explicitamente o **semigrupo de Weierstrass** H_7 vamos prosseguir de forma similar aos casos anteriores. Novamente pelo Corolário 4.2, obtemos $g_7 = 105$, então vamos procurar as não lacunas ímpares em $H_7 \cap [1, 210]$. Pelo caso anterior, sabemos que $48, 60, 62, 64, 88, 92, 94, 106, 116, 118, 138, 162 \in H_7$ geram as não lacunas pares. Segue do Corolário 4.7 que

$$\operatorname{div}(z_3z_5z_7) = Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4D_4(7) - 63P_7.$$

Então, usando a função $z_3z_5z_7$ encontramos 25 elementos pertencentes à $H_7 \cap [1, 210]$, a saber, $\{63 + 2n \mid n \in H_6, n \leq 72 = c_6 - 2\} = \{63, 111, 123, 125, 127, 151, 155, 157, 159, 169, 171, 173, 175, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 199, 201, 203, 205, 207\}$.

Agora considere $\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_7}\right)$ em M_7 . Pela Proposição 4.6 (5) temos

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_7}\right) = 3(D_\infty(7) + D_1(7) + D_2(7)) - D_3(7) - 4D_4(7).$$

Vamos ajustar o divisor da função $\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_7}\right)$ para que o único lugar no suporte do divisor de polos seja P_7 . Começamos removendo o divisor $D_3(7)$, para isso vamos

usar a função $x_3 + 1$ cujo divisor é $\text{div}(x_3 + 1) = 4D_3(3) - D_\infty(3)$ em M_3 . Então em M_7 , $\text{div}(x_3 + 1) = 4D_3(7) - 16D_\infty(7)$. Para o divisor $D_4(7)$ vamos considerar $\text{div}(x_3 - 1)$. Pela Proposição 4.5 em M_7 , segue que $\text{div}(x_3 - 1) = 4D_4(7) + 4E_4(7) - 16D_\infty(7)$ (com $\text{deg}(E_4(7)) = 8$). Assim, em M_7 , $\text{div}(x_3^2 - 1) = 4D_3(7) + 4D_4(7) + 4E_4(7) - 32D_\infty(7)$, e portanto

$$\frac{(x_3^2 - 1)}{z_7} = 3(D_1(7) + D_2(7) + D_3(7)) + 4E_4(7) - 29D_\infty(7).$$

Observamos em M_7 , os seguintes divisores

$$\text{div}\left(\frac{1}{z_4}\right) = 24(P_7 + Q_7) - 8(R_7 + S_7 + D_1(7)) \text{ e}$$

$$\text{div}\left(\frac{1}{z_6}\right) = 6(D_\infty(7) + D_1(7)) - 2D_2(7) - 2D_3(7).$$

Portanto, usando a função (x_1x_2) , com $\text{div}(x_1x_2) = 32(Q_7 + R_7 + S_7) - 96P_7$ em M_7 , obtemos que

$$\text{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_4z_6z_7}\right) = 33Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 95P_7.$$

Assim $143 = 95 + 48 \in H_7 \cap [1, 210]$.

Uma vez que

$$\text{div}(z_4) = 8(R_7 + S_7 + D_1(7)) - 24(P_7 + Q_7),$$

concluimos que

$$\text{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_6z_7}\right) = 9(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 119P_7;$$

logo $167 = 119 + 48 \in H_7 \cap [1, 210]$.

Afirmção 4.16. $H_7 \cap [1, 210]$ contém as seguintes não lacunas ímpares:

$$\{63, 95, 103, 107, 109, 111, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 135, 139, 141, 149, 151\} \cap \{153 + 2n \mid n = 1, 2, \dots, 28\}.$$

Demonstração. Pelos cálculos acima, basta mostrar que $\{103, 107, 109, 117, 115, 121, 135, 139, 141, 147, 149, 153, 161, 163, 165, 177, 193, 195, 197, 209\} \subset H_7$.

Vamos denotar por F_n funções com divisor de pólos da forma nP_7 . A seguir, vamos verificar que $107, 139, 163 \in H_7$. Com efeito, seja z a função definida na Afirmção 4.13, em M_7 temos que

$$\text{div}(z) = 16P_7 + \Sigma(7) - 4D_2(7) - D_3(7).$$

Assim, tomando $F_{63} = z_3z_5z_7$, $F_{60} = z_3z_5$, $F_{95} = \frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_4z_6z_7}$ e $F_{119} = F_{95}z_4$, obtemos:

$$\operatorname{div}(zF_{63}F_{60}) = 5(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4D_4(7) + \Sigma(7) - 107P_7,$$

$$\operatorname{div}(zF_{95}F_{60}) = 37Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4E_4(7) + \Sigma(7) - 139P_7, \text{ e}$$

$$\operatorname{div}(zF_{119}F_{60}) = 13(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4E_4(7) + \Sigma(7) - 163P_7.$$

Em particular, $195 = 107 + 88 \in H_7$. Como $F_{88} = x_1z_4$ então encontramos

$$\operatorname{div}(zF_{63}F_{60}F_{88}) = 45Q_7 + 13(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4D_4(7) + \Sigma(7) - 195P_7.$$

Dando continuidade, vamos verificar que $141, 165 \in H_7$. Seja w a função definida na Afirmação 4.14. Portanto, em M_7 , temos que

$$\operatorname{div}(w) = 16P_7 + \Delta(7) - 3D_3(7).$$

Então, tomando as funções $F_{63} = z_3z_5z_7$ e $F_{94} = x_1z_4z_6$ obtemos:

$$\operatorname{div}(wF_{63}F_{94}) = 35Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + 4D_4(7) + \Delta(7) - 141P_7,$$

$$\operatorname{div}(wz_4F_{63}F_{94}) = 11(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 3D_2(7) + 4D_4(7) + \Delta(7) - 165P_7.$$

Agora, motivamos pela influência das funções z e w nos cálculos, vamos considerar as seguintes funções.

$$\tilde{z} = \frac{2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_2x_3 + x_2 + x_3 + 1}{(x_2 + 1)(x_3 + 1)(x_4 + 1)} \quad e \quad \tilde{w} = \frac{2x_4 + x_2 + 1}{(x_2 + 1)(x_4 + 1)}. \quad (4.21)$$

Podemos calcular os divisores dessas funções, argumentando da mesma forma como fizemos nas Afirmações 4.13 e 4.14.

Afirmação 4.17.

$$\operatorname{div}(\tilde{z}) := 8(Q_7 + P_7) + \tilde{\Sigma}(7) - 2D_3(7) - 2D_4(7) \quad (4.22)$$

e

$$\operatorname{div}(\tilde{w}) := 8(Q_7 + P_7) + \tilde{\Delta}(7) - 6D_4(7), \quad (4.23)$$

onde $\tilde{\Sigma}(7)$ (resp. $\tilde{\Delta}(7)$) é um divisor in M_7 de grau 32 com suporte disjunto de $D_\infty(7)$, $D_1(7)$, $D_2(7)$, $D_3(7)$, $D_4(7)$ (resp. $D_\infty(7)$, $D_4(7)$).

Munidos dessas funções, vamos calcular as seguintes não lacunas ímpares: $109, 117, 147, 149, 161, 193, 177, 197, 209 \in H_7$. Sejam $F_{63} = z_3z_5z_7$, $F_{60} = z_3z_5$, $F_{94} = x_1z_4z_6$, $F_{62} = \frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3z_5z_6}$, $F_{92} = \frac{x_1^2 - 1}{z_4z_5}$ e $F_{138} = zx_1z_4z_6z_3z_5$. Então

$$\operatorname{div}(\tilde{w}F_{62}F_{63}) = 11Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + D_3(7) + 2E_4(7) + \tilde{\Delta}(7) - 117P_7,$$

$$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{62}F_{92}) = 45Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 2D_4(7) + 2E_3(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 147P_7,$$

$$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{94}) = 43Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + D_3(7) + 2D_4(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 149P_7,$$

$$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{138}) = 47Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 3D_2(7) + 2D_4(7) + \tilde{\Sigma}(7) + \Sigma(7) - 193P_7,$$

$$\operatorname{div}(\tilde{w}F_{60}F_{62}F_{63}) = 15Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + D_3(7) + 2E_4(7) + \tilde{\Delta}(7) - 177P_7$$

e

$$\operatorname{div}(z\tilde{w}F_{60}F_{62}F_{63}) = 15Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 3D_2(7) + 2E_4(7) + \tilde{\Delta}(7) + \Sigma(7) - 161P_7.$$

Afirmamos que $109 \in H_7$. Com efeito, considere $\frac{wF_{94}F_{95}}{x_1}$. Usando a função w obtemos

$$\operatorname{div}\left(\frac{wF_{94}F_{95}}{x_1}\right) = 3(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + 4E_4(7) + \Delta(7) - 109P_7.$$

Em particular, $197 = 149 + 48 \in H_7$ e $209 = 149 + 60 \in H_7$. Agora, resta mostrar que $103, 115, 121, 135, 153 \in H_7$. Do Corolário 4.4 temos que

$$\operatorname{div}(x_6) = 8D_4(7) - 2(D_\infty + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7)),$$

e olhando para a função $\tilde{z}x_6$ obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{z}x_6) &= [8(P_7 + Q_7) + \tilde{\Sigma}(7) - 2(D_4(7) + D_3(7))] \\ &+ [8D_4(7) - 2(D_\infty + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7))] \\ &= 6(P_7 + Q_7) + \tilde{\Sigma}(7) + 6D_4(7) - 2(D_1(7) + D_2(7)) - 4D_3(7) - 2(R_7 + S_7). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(\tilde{z}x_6F_{109}) = 9Q_7 + R_7 + S_7 + \tilde{\Sigma}(7) + \Delta(7) + 2D_4(7) + D_1(7) + D_2(7) + 8E_3(7) - 103P_7.$$

No último cálculo, usamos o fato de que $E_4 = D_3(7) + 2E_3(7) - D_4(7)$ em M_7 . A seguir, considere as funções F_{147} , F_{149} e F_{117} calculadas acima. Então

$$\operatorname{div}\left(\frac{F_{147}}{F_{149}}\right) = 2(P_7 + Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2E_3(7) - 2D_2(7),$$

e assim

$$\operatorname{div}\left(F_{117}\frac{F_{147}}{F_{149}}\right) = 13Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 2(E_3(7) + E_4(7)) + \tilde{\Delta} - 115P_7.$$

Pela Proposição 4.6 item (4) temos

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{z_6}\right) = 6(D_\infty(7) + D_1(7)) - 2D_2(7) - 2D_3(7),$$

e usando as funções F_{63} e $F_{64} = (x_1 - 1)$ com $\text{div}(x_1 - 1) = D_2(7) + D_3(7) + E_3(7) - 64P_7$ temos

$$\text{div} \left(\frac{F_{63}F_{64}}{z_6} \right) = 7(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 4D_4(7) + E_3(7) - 121P_7.$$

Agora, para achar a não lacuna 135 vamos usar as funções F_{103} , F_{107} e F_{139} . Observando que

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{F_{139}}{F_{107}} \right) &= [37Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4E_4(7) + \Sigma(7) - 139P_7] \\ &\quad - [5Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4D_4(7) + \Sigma(7) - 107P_7] \\ &= 32Q_7 + 4E_4(7) - 4D_4(7) - 32P_7. \end{aligned}$$

Obtemos que

$$\text{div} \left(F_{103} \frac{F_{139}}{F_{107}} \right) = 41Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + 8E_4(7) + \Delta(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 135P_7.$$

Finalmente, para verificar que $153 \in H_7$, vamos considerar F_{119} , F_{121} e F_{155} . Como

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{F_{119}}{F_{121}} \right) &= [9(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 119P_7] \\ &\quad - [7(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 4D_4(7) + E_3(7) - 121P_7] \\ &= 2(P_7 + Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) \\ &\quad - 4D_4(7) - E_3(7). \end{aligned}$$

(usamos o fato de que $E_2(7) = D_3 + E_3$). Como

$$\text{div}(F_{155}) = \text{div}(F_{63}F_{92}) = 37Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1) + D_2 + D_3 + 4D_4 + E_2 - 155P_7.$$

Portanto,

$$\text{div} \left(F_{155} \frac{F_{119}}{F_{121}} \right) = 39Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2D_2(7) + 3D_3(7) + 4E_4(7) - 153P_7.$$

□

$H_7 = \langle 48, 60, 62, 63, 64, 88, 92, 94, 95, 103, 106, 107, 109, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 135, 138, 139, 141, 147, 149, 153, 161, 162, 193 \rangle$.

Pelos anteriores, calculamos todos os geradores de minimais de H_7 , de forma semelhante ao caso anterior. Listamos abaixo as ordens de pólos que geram H_7 juntamente com as funções F_n . Aqui z, w, \tilde{z} e \tilde{w} são as funções definidas nas afirmações 4.13, 4.14, e F_n uma função cujo divisor de pólos é da forma nP_7 .

Ordem de Pólo em P_7	divisor da função correspondente
48	$\operatorname{div}(z_3) = 16(Q_7 + R_7 + S_7) - 48P_7$
60	$\operatorname{div}(z_3z_5) = 4(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 4D_2(7) - 60P_7$
62	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3z_5z_6}\right) = 2(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + 2E_3(7) - 62P_7$
63	$\operatorname{div}(z_3z_5z_7) = Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4D_4(7) - 63P_7$
64	$\operatorname{div}(x_1) = 64Q_7 - 64P_7$
88	$\operatorname{div}(x_1z_4) = 40Q_7 + 8(R_7 + S_7) + 8D_1(7) - 88P_7$
92	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_4z_5}\right) = 36Q_7 + 4(R_7 + S_7 + D_1(7)) + E_2(7) - 92P_7$
94	$\operatorname{div}(x_1z_4z_6) = 34Q_7 + 2(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2D_2(7) + 2D_3(7) - 94P_7$
95	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_4z_6z_7}\right) = 33Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_4(7) - 95P_7$
103	$\operatorname{div}(\tilde{z}_6F_{109}) = 9Q_7 + R_7 + S_7 + \tilde{\Sigma}(7) + \Delta(7) + 2D_4(7) + D_1(7) + D_2(7) + 8E_3(7) - 103P_7$
106	$\operatorname{div}\left(\frac{wF_{47}F_{46}}{x_1}\right) = 6(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2D_2(7) + E_3(7) + \Delta(7) - 106P_7$
107	$\operatorname{div}(zF_{63}F_{60}) = 5(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4D_4(7) + \Sigma(7) - 107P_7$
109	$\operatorname{div}\left(\frac{wF_{94}F_{95}}{x_1}\right) = 3(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + 4E_4(7) + \Delta(7) - 109P_7$
115	$\operatorname{div}\left(F_{117}\frac{F_{147}}{F_{149}}\right) = 13Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 2(E_3(7) + E_4(7)) + \tilde{\Delta} - 115P_7$
116	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_5}\right) = 12(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + E_2(7) - 116P_7$
117	$\operatorname{div}(\tilde{w}F_{62}F_{63}) = 11Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + D_3(7) + 2E_4(7) + \tilde{\Delta}(7) - 117P_7$
118	$\operatorname{div}(x_1x_2x_3z_6) = 10(Q_7 + R_7 + S_7) + 10D_1(7) + 2D_2(7) + 2D_3(7) - 118P_7$
119	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_6z_7}\right) = 9(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 4E_3(7) - 119P_7$

 Tabela 14 – Os divisores de H_7 .

Ordem de Pólo em P_7	divisor da função correspondente
121	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{63}F_{64}}{z_6}\right) = 7(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 4D_4(7) + E_3(7) - 121P_7$
135	$\operatorname{div}\left(F_{103}\frac{F_{139}}{F_{107}}\right) = 41Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7) + 8E_4(7) + \Delta(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 135P_7$
138	$\operatorname{div}(zF_{47}F_{30}) = 38Q_7 + 6R_7 + 6S_7 + 6D_1(7) + 2D_2(7) + D_3(7) + \Sigma(7) - 138P_7$
139	$\operatorname{div}(zF_{95}F_{60}) = 37Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + 4E_4(7) + \Sigma(7) - 139P_7$
141	$\operatorname{div}(wF_{63}F_{94}) = 35Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + 4D_4(7) + \Delta(7) - 141P_7$
147	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{62}F_{92}) = 45Q_7 + 5(R_7 + S_7 + D_1(7)) + D_2(7) + D_3(7) + 2D_4(7) + 2E_3(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 147P_7$
149	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{94}) = 43Q_7 + 3(R_7 + S_7 + D_1(7) + D_2(7)) + D_3(7) + 2D_4(7) + \tilde{\Sigma}(7) - 149P_7$
153	$\operatorname{div}\left(F_{155}\frac{F_{119}}{F_{121}}\right) = F_{121} = 39Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2D_2(7) + 3D_3(7) + 4E_4(7) - 153P_7$
161	$\operatorname{div}(z\tilde{w}F_{60}F_{62}F_{63}) = 15Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 3D_2(7) + 2E_4(7) + \tilde{\Delta}(7) + \Sigma(7) - 161P_7$
162	$\operatorname{div}(zF_{59}F_{30}) = 14(Q_7 + R_7 + S_7 + D_1(7)) + 2D_2(7) + D_3(7) + \Sigma(7) - 162P_7$
193	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{138}) = 47Q_7 + 7(R_7 + S_7 + D_1(7)) + 3D_2(7) + 2D_4(7) + \tilde{\Delta}(7) + \Sigma(7) - 193P_7$

Tabela 15 – Os divisores de H_7 .

4.2.7 Calculando H_8

Finalmente, vamos calcular o **semigrupo de Weierstrass** H_8 . Primeiramente, usamos novamente o Corolário 4.2 e obtemos que $g_8 = 225$. A seguir, vamos encontrar as não lacunas em $H_8 \cap [1, 450]$. Pelo caso anterior temos que 96, 120, 124, 126, 128, 176, 184, 188, 190, 206, 212, 214, 218, 230, 232, 234, 236, 238, 242, 270, 276, 278, 282, 294, 298, 306, 322, 324, 386 $\in H_8$ geram as não lacunas pares. Logo, basta encontrarmos as não lacunas ímpares neste intervalo. Pela Proposição 4.8 temos

$$\operatorname{div}\left(\frac{(x_1 + 1)(x_4^2 - 1)}{z_5 z_7 z_8}\right) = Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 127P_8.$$

Pela Proposição 4.9 item (1) temos

$$\operatorname{div}(x_1 z_4 z_6 z_8) = 65Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 191P_8.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \{127, 195\} + \{0, 96, 120, 124, 126, 128, 176, 184, 188, 190, 192, 206, 212, 214, 216, 218, 220, \\ & \quad 222, 224, 230, 234, 236, 238, 242, 270, 276, 278, 282, 294, 298, 306, 322, 324, 286\} = \\ & \{127, 191, 223, 247, 251, 253, 255, 287, 303, 311, 315, 317, 319, 333, 339, 341, 343, 345, 347, \\ & \quad 349, 351, 357, 361, 363, 365, 367, 369, 375, 379, 381, 383, 397, 403, 405, 407, 409, 411, 413, \\ & \quad 415, 421, 425, 427, 429, 433, 449\} \subset H_8. \end{aligned}$$

Proposição 4.18. *Em $H_8 \cap [1, 450]$ temos as seguintes não lacunas:*

$$\begin{aligned} & \{213, 215, 221, 223, 231, 235, 237, 239, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 263, 269, 271, 277, \\ & \quad 279, 283, 285, 287, 291, 293\} \cup \{295 + 2j \mid j = 0, \dots, 77\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos denotar por F_n funções as quais possuem divisor de pólos da forma nP_8 . Pela Proposição 4.9 temos que

$$\operatorname{div}(F_{239}) = 17(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 239P_8.$$

Exibiremos algumas funções (e seus respectivos divisores) que serão utilizadas no cálculo dos demais elementos de H_8 . Primeiro, vamos ver alguns divisores que são dados através de F_{127} :

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{96}) = 33(Q_8 + R_8 + S_8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 223P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{120}) = 9(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 247P_8,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{124}) &= 5(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 2D_4(8) + 2E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad - 251P_8, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{126}) = 3(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 6D_4(8) + 8E_5(8) - 253P_8,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{128}) &= Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + 9D_2(8) + 3D_3(8) + 2D_4(8) + 2E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad - 255P_8, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{188}\tilde{z}) = 85Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 299P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{176}) = 81Q_8 + 17(R_8 + S_8 + D_1(8)) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 303P_8,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{184}) &= 73Q_8 + 9(R_8 + S_8 + D_1(8)) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) + E_2(8) \\ &\quad + 2E_3(8) - 311P_8, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{188}) = 69Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 315P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{192}) = 65(Q_8 + R_8 + S_8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 319P_8,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{206}) &= 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 8E_5(8) + 8E_3(8) \\ &\quad + \Delta(8) + \Sigma'(8) - 333P_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{212}) &= 13(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 5D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \Delta(8) - 339P_8, \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{214}) &= 11(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 3D_2(8) + D_3(8) + 6D_4(8) + 8E_5(8) + \Sigma(8) \\ &\quad - 341P_8. \end{aligned}$$

e a seguir alguns que são dados através da função F_{191} :

$$\operatorname{div}(F_{191}F_{96}) = 97Q_8 + 33(R_8 + S_8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 287P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{191}F_{120}) = 73Q_8 + 9(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 311P_8,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{191}F_{124}) &= 69Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) + 2E_3(8) \\ &\quad - 315P_8 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(F_{191}F_{126}) = 67Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 6D_4(8) + 8D_5(8) - 317P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{191}F_{128}) = 193Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 319P_8.$$

Além desses divisores, podemos ainda calcular e exibir as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{255}) &= (x_1x_2x_8(x_3 + 1)z_5z_8^2) = Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) \\ &\quad + 8D_5(8) + 32D_6(8) - 255P_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{335}) &= F_{239}F_{96} = 49(Q_8 + R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) \\ &\quad - 335P_8. \end{aligned}$$

Vamos calcular os divisores das funções z , w , \tilde{z} e \tilde{w} definidas em 4.13, 4.14 e 4.17 em M_8 .

$$\operatorname{div}(z) = 32P_8 + \Sigma(8) - 8D_2(8) - 2D_3(8)$$

$$\operatorname{div}(w) = 32P_8 + \Delta(8) - 6D_3(8)$$

$$\operatorname{div}(\tilde{z}) = 16(P_8 + Q_8) + \tilde{\Sigma}(8) - 4D_3(8) - 2D_4(8)$$

$$\operatorname{div}(\tilde{w}) = 16(P_8 + Q_8) + \tilde{\Delta}(8) - 6D_4(8).$$

Motivados pelas funções acima, vamos considerar as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= \frac{2x_5x_3 + 2x_5x_4 + x_3x_4 + x_3 + x_4 + 1}{(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + 1)} \\ \bar{w} &:= \frac{2x_5 + x_3 + 1}{(x_5 + 1)(x_3 + 1)}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

as quais tem seus divisores exibidos na próxima afirmação.

Afirmção 4.19. *Em M_8 os divisores dessas funções são*

$$\operatorname{div}(\bar{z}) = 8D_\infty + \bar{\Sigma}(8) - 4D_4(8) - 4D_5(8) \quad (4.25)$$

$$\operatorname{div}(\bar{w}) = 8D_\infty + \bar{\Delta}(8) - 12D_5(8),$$

onde $\bar{\Sigma}(8)$ é um divisor em M_8 de grau 64, cujo suporte é disjunto de $D_\infty(8)$, $D_1(8)$, $D_2(8)$, $D_3(8)$, $D_4(8)$ e $D_5(8)$ ($\bar{\Delta}(8)$ é um divisor em M_8 de grau 64, cujo suporte é disjunto de $D_\infty(8)$ e $D_5(8)$).

O cálculo dos divisores da Afirmção 4.19 segue de forma similar aos cálculos realizados nas Afirmções 4.13 e 4.14.

Munidos dos divisores listados acima, vamos exibir as seguintes não lacunas 231, 235, 237, 301, 309, 325 e 327 $\in H_8$.

Tomando as funções $F_{126} = z_3 z_5 z_7$ e $F_{222} = z_3^2 z_5 z_7$ encontramos as seguintes não lacunas 231, 235, 237, 245, 301, 327 e 309 em H_8 .

$$\operatorname{div}(F_{126}^2 z_8 \bar{z} \tilde{w}) = 25Q_8 + 9(R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) + \tilde{\Delta}(8) - 231P_8,$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{x_1 x_2 (x_3 + 1) x_8 z_5 z_8^2 \tilde{z}}{(x_6 + 1)}\right) = 21Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 235P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{253} \tilde{w}) = 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) - 237P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{317} \tilde{w}) = 83Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 8D_5(8) + \tilde{\Delta}(8) - 301P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{126} F_{191} \bar{z}) = 75Q_8 + 11(R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 2D_4(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 309P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{341} \tilde{w}) = 27Q_8 + 11(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 3D_2(8) + D_3(8) + 8E_5(8) + \Sigma(8) + \tilde{\Delta}(8) - 325P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{222} F_{126} z_8 \bar{z} \tilde{w}) = 57Q_8 + 41(R_8 + S_8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) + \tilde{\Delta}(8) - 327P_8 \text{ e}$$

$$\operatorname{div}(F_{223} z_5 z_7 \bar{z}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 2D_4(8) + 8D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 245P_8.$$

A seguir exibimos divisores para as não lacunas 251 e 287 (já exibidos anteriormente essas não lacunas, mas associadas a outras funções) utilizando novas funções. Para isso, vamos usar as funções: $F'_{251} = \frac{F_{235}}{\tilde{z}}$, $F'_{287} = \frac{F_{311}}{z_5}$ e seus respectivos divisores são apresentados a seguir.

$$\operatorname{div}(F'_{251}) = 5Q_8 + 5(R_8 + S_8) + 5(D_1(8) + D_2(8)) + 5D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 251P_8,$$

$$\operatorname{div}(F'_{287}) = 97Q_8 + 33(R_8 + S_8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 287P_8.$$

Utilizando as funções $F_{301}, F_{235}, F_{96}, F_{234}, F_{250}, F_{252}$ e F_{256} e notando que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(z_7 \frac{F_{250}}{F_{252}} \frac{F_{250}}{F_{256}}\right) &= 2D_\infty(8) + 2D_1(8) + 4D_4(8) - 2(D_2(8) + D_3(8)) \text{ e} \\ \operatorname{div}\left(z_6 z_7 \frac{F_{250}}{F_{252}} \frac{F_{250}}{F_{256}}\right) &= 8D_2(8) - 4(D_\infty(8) + D_1(8))\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F_{301} z_4 z_6 \tilde{w}) &= 7Q_8 + 9(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 8D_5(8) \\ &\quad + \Delta(8) + \bar{\Delta}(8) - 329P_8, \\ \operatorname{div}(F_{235} F_{96}) &= 53Q_8 + 37(R_8 + S_8) + 5(D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) \\ &\quad + 8D_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 331P_8 \text{ e} \\ \operatorname{div}\left(z_7 \frac{F_{250}}{F_{252}} \frac{F_{250}}{F_{256}} F_{245}\right) &= 13(Q_8 + R_8 + S_8) + 5D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 6D_4(8) \\ &\quad + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 243P_8, \\ \operatorname{div}\left(z_6 z_7 \frac{F_{250}}{F_{252}} \frac{F_{250}}{F_{256}} F_{239}\right) &= 13(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 9D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) \\ &\quad + 8D_5(8) - 243P_8.\end{aligned}$$

A seguir vamos definir funções de maneira pontual a fim de encontrar funções associadas as não lacunas restantes. Com esse propósito, vamos considerar inicialmente a função $A_1 := \frac{x_7 x_8}{x_6 + 1} \tilde{w}^{-1}$ cujo divisor é

$$\operatorname{div}(A_1) = R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 8D_5(8) - \tilde{\Delta}(8) - 15(P_8 + Q_8).$$

Assim, obtemos $249 \in H_8$, uma vez que

$$\operatorname{div}(A_1 F_{234}) = 7(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 249P_8.$$

De forma similar, encontramos as seguintes não lacunas $283, 297, 305 \in H_8$. Para isso, definimos a função $A_2 := \frac{F_{231}}{F_{237}}$ a qual tem como divisor $\operatorname{div}(A_2) = 6(P + Q + R + S) + 4D_5 + \bar{\Sigma} - 8E_5$. Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F_{303} A_2) &= 87Q_8 + 23(R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) \\ &\quad - 297P_8.\end{aligned}$$

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(F_{311} \frac{F_{231}}{F_{237}}\right) &= 79Q_8 + 15(R_8 + S_8) + 11D_1(8) + 3(D_2(8) + D_3(8)) + 2D_4(8) + 4D_5(8) \\ &\quad + E_2(8) + \bar{\Sigma}(8) - 305P_8,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{F_{305}}{F_{309}} F_{287} \right) = 101Q_8 + 37(R_8 + S_8) + 9D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) \\ + E_2(8) - 283P_8 \text{ e}$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{F_{231}}{F_{237}} F_{299} \right) = 91Q_8 + 11(R_8 + S_8) + 7(D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 4D_5(8) \\ + \bar{\Sigma}(8) - 293P_8.$$

Para encontrarmos a não lacuna 271, vamos utilizar a função $A_3 := \frac{F_{317}}{F_{293}} \bar{z}$ com divisor $\operatorname{div}(A_3) = 2D_4(8) - 16(Q_8 + P_8) - 4(D_1(8) + D_2(8))$. Logo,

$$\operatorname{div}(A_3^{-1} F_{287}) = 113Q_8 + 33(R_8 + S_8) + 5(D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) - 271P_8.$$

Aqui, para encontrar as não lacunas 215, 269, 277, 279, 285 e 291 $\in H_8$ iremos dispor das seguintes funções $A_4 := \frac{F_{271}}{F_{252}} z_5^2 z_7 x_8 (x_6 + 1)^{-1}$, $A_5 := \frac{F_{255}}{F_{251}} z$, $A_6 := \frac{F_{190}}{F_{188}}$, $A_7 := \frac{F_{230}}{F_{238}}$ e $A_8 := \frac{F_{184}}{F_{176}}$ as quais possuem os seguintes divisores $\operatorname{div}(A_4) := 76Q_8 + 4D_3(8) - 52P_8 - 4(R_8 + S_8) - 2D_4(8)$, $\operatorname{div}(A_5) := \Sigma(8) + 28P_8 - 4(D_1(8) + D_2(8) + R + S + Q)$ e $\operatorname{div}(A_6) := 4E_4(8) - 2(D_\infty(8) + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8))$. Então,

$$\operatorname{div} \left(\frac{218}{234} F_{231} \right) = 9(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8))D_3(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 215P_8,$$

$$\operatorname{div}(A_4 F_{239}) = 93Q_8 + 13(R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + 5D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) \\ - 291P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{249} A_5^{-1}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 277P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{277} A_6) = 9(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + 6E_4(8) - 279P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{277} A_7) = 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 11D_2(8) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + E_3(8) + \tilde{\Delta} \\ - 269P_8 \text{ e}$$

$$\operatorname{div}(F_{277} A_8) = 3(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 11D_2(8) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_2(8) - 285P_8.$$

As não lacunas 221 e 213 são obtidas através das funções $A_9 := \frac{F_{223}}{F_{231}} \tilde{w} z_7 z_5$ e $A_{10} :=$

$$\left(\frac{F_{231} \bar{z} z_8}{F_{234}} \right)^{-1} \left(\frac{F_{234}}{F_{237}} \right)^{-1} x_8 x_7 \left(\frac{x_8 z_8}{x_6 + 1} \right)^{-3} \text{ as quais permitem obter:}$$

$$\operatorname{div}(A_9 F_{215}) = 3(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 221P_8,$$

$$\operatorname{div}(F_{212} A_{10}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8) + 2D_1(8) + 5D_2(8) + E_3(8) + 8E_5(8) + D_3(8) + \Delta(8) \\ - 213P_8.$$

Para mostrar que 295, 297, 305, 307, 313, 321, 323, 325, 329, 353, 385 $\in H_8$ vamos listar

divisores de funções ainda não exibidos. Esses divisores estão listados a seguir.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{206}) &= 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 8E_3(8); \\ &\quad + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 333P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{238}) &= 25(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + E_2(8) \\ &\quad + 8E_5(8) - 359P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{236}) &= 21(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 5D_2(8) + 5D_3(8) + 2D_4(8) \\ &\quad + 8E_5(8) - 363P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{237}F_{128}) &= 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 9D_2(8) + 5D_3(8) + \tilde{\Delta}(8) + E_3(8) \\ &\quad + 8E_5(8) - 365P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{243}F_{126}) &= 15(Q_8 + R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 3D_2(8) + 3D_3(8) + 10D_4(8) + 4D_5(8) \\ &\quad + \bar{\Sigma}(8) - 369P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{120}F_{128}) &= 9(Q_8 + R_8 + S_8) + 9D_1(8) + 17D_2(8) + 2D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + E_3(8) - 375P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{250}) &= 7(Q_8 + R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 7D_2(8) + 3D_3(8) + 6D_4(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + 2E_3(8) - 377P_8; \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(F_{127}F_{252}) = 5(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 10D_4(8) + 8E_5(8) - 379P_8 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{263}F_{120}) &= 33(Q_8 + R_8 + S_8) + 33D_1(8) + 11D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) \\ &\quad - 383P_8. \end{aligned}$$

A partir desses divisores, vamos considerar as seguintes funções: $A_{21} = \frac{F_{120}}{F_{124}}$, $A_{22} = \left(\frac{z_7}{x_6}x_5^{-1}\right)^{-1} \tilde{z}$ e $A_{23} = F_{269} \frac{F_{359}}{F_{365}}$ para obtermos as não lacunas 329, 325 e 323 como se segue.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_{21}F_{333}) &= 23Q_8 + 7(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 6E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 329P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_{21}^2F_{333}) &= 27Q_8 + 11(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 4E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 325P_8 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_{21}^3F_{333}) &= 31Q_8 + 15(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 323P_8. \end{aligned}$$

Notamos ainda que usando as funções $F'_{128} = 8D_2(8) + 2D_3(8) + E_3(8) - 128P_8$ e $A_{24} := \frac{F_{128}}{F'_{128}}$ a qual possui divisor $\operatorname{div}(A_{24}) = 2(P_8 + Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 4D_4(8) - E_3(8) - 6D_2(8)$, podemos obter de forma diferente a não lacuna 323.

$$\begin{aligned} A_{24}F_{325} &= 29Q_8 + 13(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 5D_2(8) + D_3(8) + 8D_4(8) + 3E_3(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 323P_8. \end{aligned}$$

Para as não lacunas 353 e 263¹ usaremos novamente as funções A_{22} e A_{23} . Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{363}A_{22}) &= 31Q_8 + 15(R_8 + S_8) + 21D_1(8) + 5D_2(8) + 3D_3(8) + 4D_4(8) + 8E_5(8) \\ &\quad + \tilde{\Sigma}(8) - 353P_8 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_{23}F_{365}) &= 25(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 3D_2(8) + D_3(8) + 8D_5(8) + 2D_4(8) \\ &\quad - 263P_8. \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos utilizar as seguintes funções $A_{25} := \frac{F_{353}}{F_{363}\tilde{z}}$, $A_{26} := \frac{F_{124}}{F_{126}}$, $A_{27} := \frac{F_{369}}{F_{379}}$, $A_{28} := \frac{F_{190}}{F_{188}}$, $A_{29} := \frac{F_{377}}{F_{375}}$ e F_{305} para determinar as ultimas não lacunas, a saber, 297, 295, 305, 307, 385, 321 e 313. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_{26}F_{291}) &= 87Q_8 + 7(R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + 7D_3(8) + 4D_4(8) \\ &\quad + 8D_5(8) - 297P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{F_{297}F_{124}}{F_{126}}\right) &= 89Q_8 + 9(R_8 + S_8) + 19D_1(8) + 3D_2(8) + 5D_3(8) \\ &\quad + 8D_5(8) - 295P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{127}F_{188}A_{27}) &= 79Q_8 + 15(R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 3D_2(8) + 3D_3(8) + 2D_4(8) \\ &\quad + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 305P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{305}A_{28}) &= 77Q_8 + 13(R_8 + S_8) + 5D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) \\ &\quad + 4D_5(8) + 4E_4(8) + \bar{\Sigma}(8) - 307P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{383}A_{29}) &= 31(Q_8 + R_8 + S_8) + 31D_1(8) + D_2(8) + 2D_3(8) + 6D_4(8) \\ &\quad + 8D_5(8) + E_3(8) - 385P_8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_{323}A_{29}^{-1}) &= 31Q_8 + 16(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 15D_2(8) + 4D_4(8) + 2E_3(8) \\ &\quad + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 321P_8 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{F_{305}}{\tilde{z}}\right) &= 71Q_8 + 7(R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 3D_2(8) + 3D_3(8) + 6D_4(8) \\ &\quad + 8D_5(8) - 313P_8. \end{aligned}$$

□

A prova novamente, se concentra em encontrar funções cujos divisor de pólos é da forma nP_8 , para todo n que é um gerador minimal de H_8 . Aqui, as funções z , w , \bar{z} , \bar{w} , \tilde{z} e \tilde{w} denotam as funções das Afirmações 4.13, 4.14, 4.17 e 4.19. A seguir, apresentamos uma tabela contendo todos esses divisores.

¹ Foi usado que $E_2 = 2D_3 + E_3$ em 263

Ordem de Pólo em P_8	divisor da função correspondente
96	$\operatorname{div}(z_3) = 32(Q_8 + R_8 + S_8) - 96P_8$
120	$\operatorname{div}(z_3 z_5) = 8(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 8D_2(8) - 120P_8$
124	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1(x_2^2 - 1)}{z_3 z_5 z_6}\right) = 4(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 2E_3(8) - 124P_8$
126	$\operatorname{div}(z_3 z_5 z_7) = 2(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 4D_4(8) - 126P_8$
127	$\operatorname{div}\left(\frac{(x_1 + 1)(x_4^2 - 1)}{z_5 z_7 z_8}\right) = Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8E_5(8) - 127P_8$
128	$\operatorname{div}(x_1) = 128Q_8 - 128P_8$
176	$\operatorname{div}(x_1 z_4) = 80Q_8 + 16(R_8 + S_8 + D_1(8)) - 176P_8$
184	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_4 z_5}\right) = 72Q_8 + 8(R_8 + S_8 + D_1(8)) + E_2(8) - 184P_8$
188	$\operatorname{div}(x_1 z_4 z_6) = 68Q_8 + 4(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + 4D_3(8) - 188P_8$
190	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1 x_2 (x_3^2 - 1)}{z_4 z_6 z_7}\right) = 66Q_8 + 2(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 4E_4(8) - 190P_8$
191	$\operatorname{div}(x_1 z_4 z_6 z_8) = 65Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 191P_8$
206	$\operatorname{div}(\tilde{z} x_6 F_{109}) = 18Q_8 + 2(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + \tilde{\Sigma}(8) + \Delta(8) + 2D_4(8) + 8E_3(8) - 206P_8$
212	$\operatorname{div}\left(\frac{w F_{47} F_{46}}{x_1}\right) = 12(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + E_3(8) + \Delta(8) - 212P_8$
213	$\operatorname{div}(F_{212} A_{10}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8) + 2D_1(8) + 5D_2(8) + E_3(8) + 8E_5(8) + D_3(8) + \Delta(8) - 213P_8$
214	$\operatorname{div}(z F_{63} F_{60}) = 10(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 2D_2(8) + 4D_4(8) + \Sigma(8) - 214P_8$
215	$\operatorname{div}\left(\frac{218}{234} F_{231}\right) = 9(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8))D_3(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 215P_8$
218	$\operatorname{div}\left(\frac{w F_{94} F_{95}}{x_1}\right) = 6(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 4E_4(8) + \Delta(8) - 218P_8$
221	$\operatorname{div}(A_9 F_{215}) = 3(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 221P_8$
230	$\operatorname{div}\left(F_{117} \frac{F_{147}}{F_{149}}\right) = 26Q_8 + 10(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 2D_2(8) + 2D_3(8) + E_3(8) + 2E_4(8) + \tilde{\Delta} - 230P_8$
231	$\operatorname{div}(F_{126}^2 z_8 \bar{z} \tilde{w}) = 25Q_8 + 9(R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) + \tilde{\Delta}(8) - 231P_8$

Ordem de Pólo em P_8	divisor da função correspondente
232	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1^2 - 1}{z_5}\right) = 24(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + E_2(8) - 232P_8$
234	$\operatorname{div}(\tilde{w}F_{62}F_{63}) = 22Q_8 + 6(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 2D_3(8) + 2E_4(8) + \tilde{\Delta}(8) - 234P_8$
235	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3 + 1)x_8z_5z_8^2\tilde{z}}{(x_6 + 1)}\right) = 21Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 235P_8$
236	$\operatorname{div}(x_1x_2x_3z_6) = 20(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + 4D_3(8) - 236P_8$
237	$\operatorname{div}(F_{253}\tilde{w}) = 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) - 237P_8$
238	$\operatorname{div}\left(\frac{x_1x_2(x_3^2 - 1)}{z_6z_7}\right) = 18(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 2D_2(8) + 2D_3(8) + 4E_4(8) - 238P_8$
239	$\operatorname{div}(F_{239}) = 17(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) - 239P_8$
242	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{63}F_{64}}{z_6}\right) = 14(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_4(8) + E_3(8) - 242P_8$
243	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{250}F_{250}}{z_7F_{252}F_{256}}F_{245}\right) = 13(Q_8 + R_8 + S_8) + 5D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 6D_4(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 243P_8$
245	$\operatorname{div}(F_{223}z_5z_7\bar{z}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8) + 3(D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 2D_4(8) + 8D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 245P_8$
249	$\operatorname{div}(A_1F_{234}) = 7(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 249P_8.$
263	$\operatorname{div}(F_{269}\frac{F_{359}}{F_{365}}) = 25(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 3D_2(8) + D_3(8) + 8D_5(8) + 2D_4(8) - 263P_8$
269	$\operatorname{div}(F_{277}A_7) = 19Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 11D_2(8) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + E_3(8) + \tilde{\Delta} - 269P_8$
270	$\operatorname{div}\left(F_{103}\frac{F_{139}}{F_{107}}\right) = 82Q_8 + 2(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 8E_4(8) + \Delta(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 270P_8$
271	$\operatorname{div}(A_3^{-1}F_{287}) = 113Q_8 + 33(R_8 + S_8) + 5(D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) - 271P_8$
276	$\operatorname{div}(zF_{47}F_{30}) = 76Q_8 + 12(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + 2D_3(8) + \Sigma(8) - 276P_8$

Ordem de Pólo em P_8	divisor da função correspondente
277	$\operatorname{div}(F_{249}A_5^{-1}) = 11(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_4(8) - 277P_8$
278	$\operatorname{div}(zF_{95}F_{60}) = 74Q_8 + 10(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 2D_2(8) + 4E_4(8) + \Sigma(8) - 278P_8$
279	$\operatorname{div}(F_{277}A_6) = 9(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8D_5(8) + 6E_4(8) - 279P_8$
282	$\operatorname{div}(wF_{63}F_{94}) = 70Q_8 + 6(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 4D_4(8) + \Delta(8) - 282P_8$
283	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{305}}{F_{309}}F_{287}\right) = 101Q_8 + 37(R_8 + S_8) + 9D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 8D_5(8) + E_2(8) - 283P_8$
285	$\operatorname{div}(F_{277}A_8) = 3(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 11D_2(8) + 3D_3(8) + 8D_5(8) + 2E_2(8) - 285P_8$
291	$\operatorname{div}(A_4F_{239}) = 93Q_8 + 13(R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + 5D_3(8) + 8D_5(8) - 291P_8$
293	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{231}}{F_{237}}F_{299}\right) = 91Q_8 + 11(R_8 + S_8) + 7(D_1(8) + D_2(8)) + 3D_3(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 293P_8$
294	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{62}F_{92}) = 90Q_8 + 10(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 2D_2(8) + 2D_3(8) + 2D_4(8) + 2E_3(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 294P_8$
295	$\operatorname{div}\left(F_{297}\frac{F_{124}}{F_{126}}\right) = 89Q_8 + 9(R_8 + S_8) + 19D_1(8) + 3D_2(8) + 5D_3(8) + 8D_5(8) - 295P_8$
297	$\operatorname{div}(A_{26}F_{291}) = 87Q_8 + 7(R_8 + S_8) + 17D_1(8) + D_2(8) + 7D_3(8) + 4D_4(8) + 8D_5(8) - 297P_8$
298	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{94}) = 86Q_8 + 6(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + 2D_3(8) + 2D_4(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 298P_8$
299	$\operatorname{div}(F_{127}F_{188}\tilde{z}) = 85Q_8 + 5(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 299P_8$
301	$\operatorname{div}(F_{317}\tilde{w}) = 83Q_8 + 3(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8) + D_3(8)) + 8D_5(8) + \tilde{\Delta}(8) - 301P_8$
305	$\operatorname{div}\left(F_{311}\frac{F_{231}}{F_{237}}\right) = 79Q_8 + 15(R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 3D_2(8) + 3D_3(8) + 2D_4(8) + 4D_5(8) + \bar{\Sigma}(8) - 305P_8$

Ordem de Pólo em P_8	divisor da função correspondente
306	$\operatorname{div}\left(F_{155}\frac{F_{119}}{F_{121}}\right) = 78Q_8 + 14(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + 6D_3(8) + 4E_4(8) - 306P_8$
307	$\operatorname{div}(F_{305}A_{28}) = 77Q_8 + 13(R_8 + S_8) + 5D_1(8) + D_2(8) + D_3(8) + 2D_4(8) + 4D_5(8) + 4E_4(8) + \bar{\Sigma}(8) - 307P_8$
313	$\operatorname{div}\left(\frac{F_{305}}{\bar{z}}\right) = 71Q_8 + 7(R_8 + S_8) + 7D_1(8) + 3D_2(8) + 3D_3(8) + 6D_4(8) + 8D_5(8) - 313P_8$
321	$\operatorname{div}(F_{323}A_{29}^{-1}) = 31Q_8 + 16(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 15D_2(8) + 4D_4(8) + 2E_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 321P_8$
322	$\operatorname{div}(z\tilde{w}F_{60}F_{62}F_{63}) = 30Q_8 + 14(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 6D_2(8) + 2E_4(8) + \tilde{\Delta}(8) + \Sigma(8) - 322P_8$
323	$\operatorname{div}(A_{21}^3F_{333}) = 29Q_8 + 13(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 5D_2(8) + D_3(8) + 8D_4(8) + 3E_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 323P_8.$
324	$\operatorname{div}(zF_{59}F_{30}) = 28(Q_8 + R_8 + S_8 + D_1(8)) + 4D_2(8) + 2D_3(8) + \Sigma(8) - 324P_8$
325	$\operatorname{div}(F_{341}\tilde{w}) = 27Q_8 + 11(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 4E_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 325P_8$
329	$\operatorname{div}(F_{301}z_4z_6\tilde{w}) = 23Q_8 + 7(R_8 + S_8 + D_1(8) + D_2(8)) + D_3(8) + 4D_4(8) + 6E_3(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Delta}(8) + \bar{\Sigma}(8) - 329P_8$
353	$\operatorname{div}(F_{363}A_{22}) = 31Q_8 + 15(R_8 + S_8) + 21D_1(8) + 5D_2(8) + 3D_3(8) + 4D_4(8) + 8E_5(8) + \tilde{\Sigma}(8) - 353P_8$
385	$\operatorname{div}(F_{383}A_{29}) = 31(Q_8 + R_8 + S_8) + 31D_1(8) + D_2(8) + 2D_3(8) + 6D_4(8) + 8D_5(8) + E_3(8) - 385P_8$
386	$\operatorname{div}(\tilde{z}F_{63}F_{138}) = 94Q_8 + 14(R_8 + S_8 + D_1(8)) + 6D_2(8) + 2D_4(8) + \tilde{\Delta}(8) + \Sigma(8) - 386P_8$

 Tabela 16 – Os divisores de H_8 .

Referências

- BERNARDINI, M.; FILHO, G. A. On pure k -sparse gapsets dedicated to the memory of Fernando Torres. *Semigroup Forum*, 2022. Disponível em: <https://rdcu.be/cG6cm>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 40.
- BERNARDINI, M.; TORRES, F. Counting numerical semigroups by genus and even gaps. *Discrete Mathematics*, v. 340, n. 12, p. 2853–2863, 2017. ISSN 0012-365X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X17302479>. Citado na página 16.
- BLANCO, V.; ROSALES, J. The set of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, 06 2011. Citado na página 17.
- BRAS-AMORÓS, M. Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, v. 76, p. 379–384, 03 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 72.
- BRAS-AMORÓS, M. Bounds on the number of numerical semigroups of a given genus. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 213, n. 6, p. 997–1001, 2009. ISSN 0022-4049. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404908002260>. Citado na página 17.
- CAMPILLO, A.; MARTÍN, J. F.; MUNUERA, C. On the parameters of algebraic geometry codes related to arf semigroups. *Information Theory, IEEE Transactions on*, v. 46, p. 2634 – 2638, 12 2000. Citado na página 17.
- DELGADO, M.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P. numericalsgps, a gap package for numerical semigroups. *ACM Communications in Computer Algebra*, v. 50, p. 12–24, 09 2016. Citado na página 47.
- DEURING, M. *Lectures on the Theory of Algebraic Functions of One Variable*. Springer, Cham, 1973. 155 p. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 978-3-540-38368-0. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0060944>. Citado na página 18.
- ELIAHOU, S.; FROMENTIN, J. Gapsets and numerical semigroups. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 169, p. 105129, 2020. ISSN 0097-3165. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316519301104>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 66 e 75.
- _____. Gapsets of small multiplicity. *Springer, Cham*, p. 63–82, 05 2020. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 32, 41, 49, 51, 67 e 72.
- ELIZALDE, S. Improved bounds on the number of numerical semigroups of a given genus. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 214, p. 1862–1873, 10 2010. Citado na página 17.
- FILHO, G. A.; TAFAZOLIAN, S. *Códigos Geométricos Uma introdução via corpos de funções algébricas*. [S.l.]: Editora do IMPA, 2021. 122 p. ISBN 978-65-89124-49-8. Citado na página 18.

- GARCIA, A.; STICHTENOTH, H. A tower of artin-schreier extensions of function fields attaining the drinfeld-vladut bound. *Inventiones Mathematicae*, v. 121, p. 211–222, 01 1995. Citado na página 36.
- _____. On the asymptotic behaviour of some towers of function fields over finite fields. *JOURNAL OF NUMBER THEORY*, v. 61, p. 248–273, 12 1996. Citado na página 36.
- _____. On tame towers over finite fields. *J. reine angew. Math.*, v. 557, n. 557, p. 53–80, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 36, 86 e 87.
- GARCIA, A.; STICHTENOTH, H.; RÜCK, H.-G. On tame towers over finite fields. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 01 2003. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 86.
- HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. [S.l.]: Springer, Cham, 1977. v. 52. ISSN 0072-5285. Citado na página 22.
- HU, X.; MAHARAJ, H. On the qth power algorithm. *Finite Fields and Their Applications*, v. 14, p. 1068–1082, 11 2008. Citado na página 20.
- IHARA, Y. Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields. *J. FAC. SCI. TOKYO*, v. 28, 01 1981. Citado na página 36.
- KAPLAN, N. Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of wilf. *Journal of Pure and Applied Algebra - J PURE APPL ALG*, v. 216, 05 2012. Citado na página 16.
- _____. Counting numerical semigroups. *The American Mathematical Monthly*, v. 124, 07 2017. Citado na página 17.
- KARAKAS, H. Parametrizing numerical semigroups with multiplicity up to 5. *International Journal of Algebra and Computation*, v. 28, 11 2017. Citado 4 vezes nas páginas 60, 73, 76 e 77.
- KOMEDA, J. Double coverings of curves and non-weierstrass semigroups. *Communications in Algebra*, v. 41, 01 2013. Citado na página 18.
- MAHARAJ, H. Explicit constructions of algebraic-geometric codes. *Information Theory, IEEE Transactions on*, v. 51, p. 714–722, 03 2005. Citado na página 20.
- MARTÍNEZ-MORO, E.; MUNUERA, C.; RUANO, D. *Advances in Algebraic Geometry Codes*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2008. viii + 444 p. (Coding Theory and Cryptology: Volume 5). ISBN 978-981-279-400-0. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/6767>. Citado na página 18.
- MUNUERA, C.; TORRES, F.; VILLANUEVA, J. Sparse numerical semigroups. In: . [S.l.: s.n.], 2009. p. 23–31. ISBN 978-3-642-02180-0. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 46.
- NOSEDA, F.; OLIVEIRA, G.; QUOOS, L. Bases for riemann-roch spaces of one-point divisors on an optimal tower of function fields. *IEEE Transactions on Information Theory - TIT*, v. 58, 06 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 86.
- O'DORNEY, E. Degree asymptotics of the numerical semigroup tree. *Semigroup Forum*, v. 87, 12 2013. Citado na página 17.

OLIVEIRA, G. Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves. *manuscripta mathematica*, v. 71, p. 431–450, 12 1991. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.

PELLIKAAN, R.; STICHTENOTH, H.; TORRES, F. Weierstrass semigroups in an asymptotically good tower of function fields 1. *Finite Fields and Their Applications-FINITE FIELDS THEIR APPL*, v. 4, 10 1998. Citado na página 20.

ROSALES, J.; GAR, P.; GAR, J.; IA, I.-G.; BRANCO, M. Systems of inequalities and numerical semigroups. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 65, p. 611–623, 06 2002. Citado na página 64.

ROSALES, J.; GARCÍA-SÁNCHEZ. *Numerical semigroups*. [S.l.]: Springer, New York, 2009. 186 p. ISBN 978-1-4419-0159-0. Citado 3 vezes nas páginas 17, 31 e 32.

ROSALES, J.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P.; GARCÍA-GARCÍA, J.; BRANCO, M. Arf numerical semigroups. *Journal of Algebra*, v. 276, p. 3–12, 06 2004. Citado na página 17.

SHAFAREVICH, I. *Basic Algebraic Geometry 1*. [S.l.: s.n.], 1994. ISBN 978-3-540-54812-6. Citado na página 22.

STICHTENOTH, H. *Algebraic Function Fields and Codes*. [S.l.: s.n.], 1993. v. 254. ISBN 978-3-540-56489-8. Citado 8 vezes nas páginas 18, 22, 25, 28, 36, 37, 38 e 87.

TIZZIOTTI, G.; VILLANUEVA, J. On k -sparse numerical semigroups. *JOURNAL OF ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS*, v. 17, 11 2016. Citado na página 17.

_____. On certain families of sparse numerical semigroups with frobenius number even. *ALGEBRA AND DISCRETE MATHEMATICS*, v. 27, p. 99–116, 01 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.

TORRES, F. Weierstrass points and double coverings of curves. with application: Symmetric numerical semigroups which cannot be realized as weierstrass semigroups. *Manuscripta Mathematica*, v. 83, 12 1994. Citado na página 18.

TSFASMAN, M.; VLADUTX, S.; ZINK, T. Modular curves, shimura curves, and goppa codes better than varshamov-gilbert bound. *MATHEMATISCHE NACHRICHTEN*, v. 109, p. 21 – 28, 01 1982. Citado na página 36.

VELOSO, P. M.; CONTIERO, A.; MOREIRA, C. On the structure of sparse numerical semigroups and applications to weierstrass points. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 219, 12 2014. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.

VILLANUEVA, J. *Semigrupos fracamente de Arf e pesos de semigrupos*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas-SP, 2008. Citado na página 17.

VLADUT, S.; D, V. D. Number of points of an algebraic curve. *FUNCTIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS - FUNCT ANAL APPL-ENGL TR*, v. 17, p. 53–54, 01 1983. Citado na página 36.

WEIL, A. Sur les courbes algebriques et les varietes qui sen deduisent. *Act. Sc. et Industrielles*, Hermann, Paris, n. 1041, 1948. Citado na página 86.

ZHAI, A. Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, v. 86, 11 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

ZHAO, Y. Constructing numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, v. 80, p. 242–254, 04 2010. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 66.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo dos termos iniciais da sequência $w_k(g)$

Nos resultados que seguem iremos utilizar a Proposição 2.17 e a Proposição 2.12 para obter as seguintes desigualdades: para um gapset k -esparso puro de gênero g , multiplicidade m e número de Frobenius ℓ_g temos que $k \leq m \leq g + 1$ e $\ell_g \geq 2g - (r + 1)$, escrevendo $k = g - r$. Note que o caso $m = g + 1$ pode ser desprezado, uma vez que neste caso temos apenas o semigrupo ordinário e $k = 1$. Nos resultados a seguir, iremos usar as Proposições 3.44, 3.45 e 3.46.

Proposição A.1. *Seja G um gapset g -esparso puro, então $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 1\}$.*

Demonstração. Como $g = k \leq m \leq g$, então $m = g$. Assim, $G = [1, g - 1] \cup \{a\}$ com $a - (g - 1) = g$. Portanto, $a = 2g - 1$.

□

Pelo resultado acima, vemos que existe um único gapset g -esparso puro de gênero g , para todo $g \geq 1$. Note que $g = 0$ implica $G = \emptyset$.

Corolário A.2. $w_g(g) = 1$, para todo g .

A seguir, vamos calcular todos os gapsets $(g - 1)$ -esparso puros de gênero g , com $g \geq 3$. Para isso, vamos separar o número de Frobenius em casos.

Proposição A.3. *Seja G um gapset $(g - 1)$ -esparso puro de gênero g , com $\ell_g = 2g - 1$. Então $G = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 1\}$.*

Demonstração. Note que $g - 1 \leq m \leq g$.

- 1) Se $m = g$, então $G = [1, g - 1] \cup \{a\}$. Assim, $a = 2g - 2$ o que gera uma contradição.
- 2) Se $m = g - 1$, então $G = [1, g - 2] \cup \{a, 2g - 1\}$. Se $2g - 1 - a = g - 1$, então $a = g$ e $G = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 1\}$. Se $a - (g - 2) = g - 1$, então $a = 2g - 3$, daí g e $g - 1 \notin G$ e $\ell_g = g + g - 1$, esse caso não ocorre.

□

Proposição A.4. *Seja G um gapset $(g - 1)$ -esparso puro gênero g , com $\ell_g = 2g - 2$. Então $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 2\}$.*

Demonstração. Quando $m = g$ então $G = [1, g - 1] \cup \{a\}$, logo $a = 2g - 2$. Quando $m = g - 1$ $G = [1, g - 2] \cup \{a < 2g - 2\}$ se $2g - 2 - a = g - 1$ então $a = g - 1$ absurdo. se $a - (g - 2) = g - 1$ então $a = 2g - 3$, dai $g - 1 \notin G$ e $\ell_g = g - 1 + g - 1$, este caso não ocorre. \square

Note que para existir um gapset $(g - 1)$ -esparso puro satisfazendo $2g \leq 3k$, isto é, $3(g - 1) = 3k \geq 2g$ é necessário que $g \geq 3$.

Corolário A.5. $w_{g-1}(g) = 2$, para todo $g \geq 3$.

Nos próximos resultados vamos explicitar cada gapset $(g - 2)$ -esparso puro com gênero g . Para isso, vamos adotar uma forma diferente para exibi-los, de forma que o leitor perceba que tais cálculos podem ser feitos de maneiras distintas e portanto agora vamos dividir em casos pela multiplicidade do gapset. Lembramos que pelas Proposições 2.12 e 2.17 temos neste caso $m \in \{g - 2, g - 1, g\}$ e $\ell_g \in \{2g - 3, 2g - 2, 2g - 1\}$.

Proposição A.6. *Seja G um gapset $(g - 2)$ -esparso puro com $m = g$, então $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 3\}$.*

Demonstração. Como $m = g$, então $G = [1, g - 1] \cup \{a\}$. Logo $a - (g - 1) = g - 2$, isto é, $a = 2g - 3$. Portanto, $G = [1, g - 1] \cup \{2g - 3\}$. \square

Proposição A.7. *Seja G um gapset $(g - 2)$ -esparso puro com $m = g - 1$, então $G = [1, g - 2] \cup \{2g - 4, 2g - 3\}$.*

Demonstração. Como $m = g - 1$, então $G = [1, g - 2] \cup \{a, b\}$, com $a < b$. Assim, temos duas possibilidades: $b - a = g - 2$ ou $a - (g - 2) = g - 2$.

1) Se $a - (g - 2) = g - 2$, então $a = 2g - 4$ e $2g - 3 \leq b \leq 2g - 1$, como $2g - 2 = (g - 1) + (g - 1)$, $2g - 1 = g + (g - 1)$ e $g - 1, g \notin G$. Então $b = 2g - 1$. Portanto, $G = [1, g - 2] \cup \{2g - 4, 2g - 3\}$ é o gapset desejado.

2) Se $b - a = g - 2$ então $b = a + g - 2 \geq 2g - 2$ pois $a \geq g$. Como $2m = 2g - 2$ então $b = 2g - 1$ e $a = b - k = (2g - 1) - (g - 2) = g + 1$ portanto $G = [1, g - 2] \cup \{g + 1, 2g - 1\}$ não é um gapset.

\square

Proposição A.8. *Seja G um gapset $(g - 2)$ -esparso puro com $m = g - 2$, então as seguintes possibilidades ocorrem*

(1) $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g, 2g - 2\}$,

(2) $G = [1, g - 3] \cup \{g, g + 1, 2g - 1\}$ e

$$(3) G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g + 1, 2g - 1\}.$$

Demonstração. Como $m = g - 2$ então $G = [1, g - 3] \cup \{a, b, d\}$, com $a < b < d$. Temos três possibilidades: $d - b = g - 2$, $b - a = g - 2$ ou $a - (g - 3) = g - 2$.

- 1) Se $a - (g - 3) = g - 2$, então $a = 2g - 5$ e $2g - 3 \leq b \leq d - 1$, mas para $g \geq 6$ temos que $g - 2, g - 1, g \notin G$. Logo, $2g - 4, 2g - 3, 2g - 2, 2g - 1 \notin G$ portanto este caso não ocorre, pois não existem possibilidades para b .
- 2) Se $b - a = g - 2$ então $b = a + g - 2 \geq 2g - 3$ pois $a \geq g - 1$. Se $a \geq g + 1$, então $b \geq 2g - 1$, o que gera absurdo, pois teríamos $d \geq 2g$. Logo $a \in \{g - 1, g\}$. Se $a = g$, temos que $b = 2g - 2$ e $d = 2g - 1$. Como $(g - 2) + (g + 1) = 2g - 1$ e $g + (g - 2) = 2g - 2$ segue que esse caso não ocorre. Se $a = g - 1$, temos que $b = 2g - 3$. Como $(g - 2) + (g + 1) = 2g - 1$ e $g + (g - 2) = 2g - 2$, assim esse caso também não ocorre.
- 3) Se $d - b = g - 2 \Rightarrow d = b + g - 2 \geq g + g - 2 = 2g - 2$, pois $b \geq g$. Assim, $d \in \{2g - 2, 2g - 1\}$.

Se $d = 2g - 2$, temos que $b = 2g - 2 - g + 2 = g$ e $a = g - 1$. Logo, $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g, 2g - 2\}$

Se $d = 2g - 1$ temos que $b = 2g - 1 - g + 2 = g + 1$ e $a \in \{g - 1, g\}$. Para $a = g$ temos que $G = [1, g - 3] \cup \{g, g + 1, 2g - 1\}$. Para $a = g - 1$ temos que $G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g + 1, 2g - 1\}$.

□

Note que $3(g - 2) = 3k \geq 2g$, logo $g \geq 6$ e para $g < 6$ não existe gapsets $(g - 2)$ -esparso puros de gênero g satisfazendo $3k \geq 2g$.

Corolário A.9. $w_{g-2}(g) = 5$, para todo $g \geq 6$.

Para gapsets $(g - 3)$ -esparso puros de gênero g , temos que $g - 3 \leq m \leq g$ e $2g - 4 \leq \ell_g$. Nos resultados a seguir podemos supor que $g \geq 9$ pelo Corolário 2.49.

Proposição A.10. *Seja G um gapset $(g - 3)$ -esparso puro de gênero g com $\ell_g = 2g - 1$, então as seguintes possibilidades podem ocorrer*

$$(1) G = [1, g - 4] \cup \{g - 1, g + 1, g + 2, 2g - 1\};$$

$$(2) G = [1, g - 4] \cup \{g, g + 1, g + 2, 2g - 1\};$$

$$(3) G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g, g + 2, 2g - 1\};$$

$$(4) G = [1, g-4] \cup \{g-2, g-1, g+2, 2g-1\}.$$

Demonstração. Seja $m := m(G)$. Observamos que G é simétrico e portanto $\ell_g - x \notin G$ para todo $x \in G$. Como $g-3 \leq m \leq g$, vamos dividir em 4 casos:

- 1) Se $m = g$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-1\} \cup \{a\}$, para algum número natural $a \geq m$. Logo $a = 2g-1$, mas $a - (g-1) \neq k$ o que gera um absurdo.
- 2) Se $m = g-1$, então $a - (g-2) = k$ ou $\ell_g - a = k$. Para $\ell_g - a = k$ temos que $a = g+2$ e assim $g, g-1 \notin G$ absurdo. Para $a - (g-2) = k$ temos que $a = 2g-5$ e para $g > 5$ $g, g-1 \notin G$ absurdo.
- 3) Se $m = g-2$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-3\} \cup \{a, b, d\}$, onde a, b e d são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d$. Segue imediatamente que $d = 2g-1$. Se $d - b = k$, então $b = g+2$ e pela propriedade de ser simétrico temos $g-3 \notin G$ o que é uma contradição. Se $b - a = k$, então que $b \geq (g-1) + (g-3) = 2g-4$ e que necessariamente temos $a \in \{g-1, g\}$. Para $a = g$ obtemos $b = 2g-3$, onde $g-2, g-1 \notin G$ com $(g-1) + (g-2) = b$ contradição. Para $a = g-1$ obtemos $b = 2g-4$, onde $2m = b$ contradição. Se $a - (g-3) = k$, então $a = 2g-6$, mas para $g > 6$ temos que $g, g-1 \notin G$ e $g + (g-1) = \ell_g$, absurdo.
- 4) Se $m = g-3$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{a, b, d, h\}$, onde a, b, d e h são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d < h$. Segue imediatamente que $h = 2g-1$.

Se $h - d = k$, então $d = g+2$ e portanto $b \in \{g-1, g, g+1\}$. Para $b = g+1$ temos $a \in \{g-1, g\}$, i.e., $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{g-1, g+1, g+2, 2g-1\}$ e $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{g, g+1, g+2, 2g-1\}$. Para $b = g$ temos $a \in \{g-1, g-2\}$, no caso em que $a = g-1$ teremos $g-2, g+1 \notin G$ onde $(g-2) + (g+1) = \ell_g$ contradição. Para $a = g-2$ obtemos $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{g-2, g, g+2, 2g-1\}$. Para $b = g-1$ temos $a = g-2$ e $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{g-2, g-1, g+2, 2g-1\}$. Se $d - b = k$, então $c \geq 2g-6$. Como $a \in \{g-1, g\}$, temos para ambos os casos temos que $b = g+2$ e $d = \ell_g$ absurdo. Se $b - a = k$, então $b \geq (g-3) + (g-2) \geq 2g-5$. Logo $b \in \{2g-3, 2g-4, 2g-5\}$ e necessariamente temos $a \in \{g-1, g\}$. Se $a = g-1$ ou g temos que $g+2 \notin G$ e assim $g+2 + m = \ell_g$ contradição. Se $a - (g-4) = k$, então $a = 2g-7$, mas para $g > 7$ temos que $g < 2g-7$ e portanto, $g-1 \notin G$ e $g + (g-1) = \ell_g$, absurdo.

□

Proposição A.11. *Seja G um gapset $(g-3)$ -esparso puro com $\ell_g = 2g-2$, então uma das seguintes possibilidades podem ocorrer*

$$(1) G = [1, g - 4] \cup \{g - 1, g, g, 2g - 2\};$$

$$(2) G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g - 1, g, 2g - 2\}.$$

Demonstração. Seja $m := m(G)$. Como $g - 3 \leq m \leq g$, vamos dividir em 4 casos:

- 1) Se $m = g$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g - 1\} \cup \{a\}$, para algum número natural $a \geq m$. Logo $a = 2g - 2$, mas $a - (g - 1) = g - 1$ absurdo.
- 2) Se $m = g - 1$, então $2m = \ell_g$ absurdo.
- 3) Se $m = g - 2$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g - 3\} \cup \{a, b, d\}$, onde a, b e d são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d$. Segue imediatamente que $d = 2g - 2$. Se $d - b = k$, então $b = g + 1$ e $a = g - 1$. Logo $g, g - 2 \notin G$ o que gera uma contradição. Se $b - a = k$, então observando que $b \geq (g - 1) + (g - 3) = 2g - 4$ temos que $b = 2g - 4$ e $a = g - 1$. Logo $g, g - 2 \notin G$ o que gera uma contradição. Finalmente, se $a - (g - 3) = k$, então $a = 2g - 6$, mas para $g > 6$ temos que $g, g - 2 \notin G$ e $g + (g - 2) = \ell_g$, absurdo.
- 4) Se $m = g - 3$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g - 4\} \cup \{a, b, d, h\}$, onde a, b, d e h são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d < h$. Segue imediatamente que $d = 2g - 2$. Se $h - d = k$, então $d = g + 1$ e portanto $b \in \{g - 1, g\}$. Para $b = g$ temos $a = g - 1$ e $G = \{1, 2, \dots, g - 4\} \cup \{g - 1, g, g, 2g - 2\}$. Para $b = g - 1$ temos $a = g - 2$ e $G = \{1, 2, \dots, g - 4\} \cup \{g - 2, g - 1, g, 2g - 2\}$. Se $d - b = k$, então $d \geq 2g - 4$. Para $d = 2g - 4$ temos que $b = g - 1$ e $a = g - 2$ mas $g + 1 \notin G$ e $(g + 1) + (g - 3) = \ell_g$ contradição. Para $d = 2g - 3$ temos que $b = g$ e $a = g - 1$ mas $g + 1 \notin G$ e $(g + 1) + (g - 3) = \ell_g$ contradição. Se $b - a = k$, então $b \geq (g - 3) + (g - 2) \geq 2g - 5$. Logo $b \in \{2g - 3, 2g - 4, 2g - 5\}$, em qualquer um destes casos temos uma contradição. Se $a - (g - 4) = k$, então $a = 2g - 7$, mas para $g > 6$ temos que $g - 1 < 2g - 7$ e portanto, $g - 1 \notin G$ e $2(g - 1) = \ell_g$, absurdo.

□

Proposição A.12. *Seja G um gapset $(g - 3)$ -esparso puro com $\ell_g = 2g - 3$, então*

$$(1) G = [1, g - 2] \cup \{g, 2g - 3\};$$

$$(2) G = [1, g - 2] \cup \{2g - 5, 2g - 3\};$$

$$(3) G = [1, g - 3] \cup \{g - 1, g, 2g - 3\};$$

$$(4) G = [1, g - 4] \cup \{g - 2, g - 1, g, 2g - 3\}.$$

Demonstração. Seja $m := m(G)$. Como $g - 3 \leq m \leq g$, vamos dividir em 3 casos:

- 1) Se $m = g$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-1\} \cup \{a\}$, para algum número natural $a \geq m$. Logo $a = 2g-3$, mas para $g > 2$ temos que $g-1, g-2 \notin G$ e $(g-1) + (g-2) = \ell_g$, absurdo.
- 2) Se $m = g-1$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-2\} \cup \{a, b\}$, onde a e b são números naturais com $a \geq m$ e $a < b$. Segue imediatamente que $b = 2g-3$. Se $b-a = k$, então $a = g$ e $G = \{1, 2, \dots, g-2\} \cup \{g, 2g-3\}$. Se $a-(g-2) = k$ e assim $a = 2g-5$. Desta forma, $G = \{1, 2, \dots, g-2\} \cup \{2g-5, 2g-3\}$.
- 3) Se $m = g-2$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-3\} \cup \{a, b, d\}$, onde a, b e d são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d$. Segue imediatamente que $d = 2g-3$. Se $d-b = k$, então $b = g$ e $a = g-1$, i.e., $G = \{1, 2, \dots, g-3\} \cup \{g-1, g, 2g-3\}$. Se $b-a = k$, então observando que $b \geq (g-1) + (g-3) = 2g-4$ temos que $b = 2g-4$ e $a = g-1$. Logo, $g-2 \notin G$ e $2(g-2) = b$ contradição. Finalmente, se $a-(g-3) = k$, então $a = 2g-6$, mas para $g > 5$ temos que $g-1, g-2 \notin G$ e $(g-1) + (g-2) = \ell_g$, absurdo.
- 4) Se $m = g-3$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{a, b, d, h\}$, onde a, b, d e h são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d < h$. Segue imediatamente que $h = 2g-3$. Se $h-d = k$, então $d = g$ e $b = g-1$, $a = g-2$, i.e., $G = \{1, 2, \dots, g-4\} \cup \{g-2, g-1, g, 2g-3\}$. Se $d-b = k$, então $d = 2g-4$ e $b = g-1$. Assim $a = g-2$ e $g \notin G$ onde $\ell_g = g + (g-3 = m)$ absurdo. Se $b-a = k$, então $b \geq (g-3) + (g-2) \geq 2g-5$, logo $b = 2g-5$ e $d = 2g-4$ e $a = g-2$. Mas, para $g > 5$ temos que $g \notin G$ e $\ell_g = g + (g-3)$ absurdo. Se $a-(g-4) = k$, então $a = 2g-7$, $b = 2g-6$ e $d = 2g-5$; mas para $g > 6$ temos que $g-1 < 2g-7$ e portanto, $g-2, g-1 \notin G$ e $(g-1) + (g-2) = \ell_g$, absurdo.

□

Proposição A.13. *Seja G um gapset $(g-3)$ -esparso puro com $\ell_g = 2g-4$, então*

- (1) $G = [1, g-1] \cup \{2g-4\}$;
- (2) $G = [1, g-2] \cup \{2g-5, 2g-4\}$.

Demonstração. Seja $m := m(G)$. Como $g-3 \leq m \leq g$, vamos dividir em 4 casos:

- 1) Se $m = g$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-1\} \cup \{a\}$, para algum número natural $a \geq m$. Pela propriedade de k -esparso temos que $a = 2g-4$.
- 2) Se $m = g-1$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g-2\} \cup \{a, b\}$, onde a e b são números naturais com $a \geq m$ e $a < b$. Segue imediatamente que $b = 2g-4$. Se $b-a = k$, então $a = g-1$ absurdo. Logo, $a-(g-2) = k$ e assim $a = 2g-5$. Desta forma, $G = \{1, 2, \dots, g-2\} \cup \{2g-5, 2g-4\}$.

- 3) Se $m = g - 2$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g - 3\} \cup \{a, b, d\}$, onde a, b e d são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d$. Segue imediatamente que $d = 2g - 4$. Este não ocorre, uma vez que teríamos $2m = \ell_g$.
- 4) Se $m = g - 3$, então o gapset é da forma $G = \{1, 2, \dots, g - 4\} \cup \{a, b, d, h\}$, onde a, b, d e h são números naturais com $a \geq m$ e $a < b < d < h$. Segue imediatamente que $h = 2g - 4$. Se $h - d = k$, então $d = g - 1$ absurdo. Se $d - b = k$, então $d \geq 2g - 4$, absurdo. Se $b - a = k$ então $b \geq g - 2 + g - 3 = 2g - 5$, logo $b = 2g - 5$, $d = 2g - 4$ e $a = g - 2$. Mas para $g > 5$ $g \notin G$ e portanto $\ell_g = g + (g - 3)$ absurdo. Se $a - (g - 4) = k$, então $a = 2g - 7$, $b = 2g - 6$ e $d = 2g - 5$; mas para $g > 5$ temos que $g - 2 < 2g - 7$ e portanto, $g - 2 \notin G$ e $2(g - 2) = \ell_g$, absurdo.

□

Finalmente, o temos que

Corolário A.14. $w_{g-3}(g) = 12$, para todo $g \geq 9$.

APÊNDICE B – Demonstrações de resultados da Seção 3.5

Lema B.1. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b$, então $k_3 = b = q$ e*

(1) *se $q = \frac{g+1}{2}$, então G não existe.*

(2) *se $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ ou $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-1-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$.*

Demonstração. Suponha $c = 4b$, então $k_3 = b = q$. Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g+1}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g+1}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ e $k_2 = g - k_1 - k_3 = \frac{g-1}{2} - k_1 < b - k_1$ e este caso não ocorre (ambos os casos A_0, B_0). Se $q \leq \frac{g+1}{2} - 1 = \frac{g-1}{2}$, então $(k_1, k_2) \in A_0$ ou B_0 . Vamos escrever $q = \frac{g-1}{2} - r = \frac{g-1-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$. Vamos dividir em dois casos, o primeiro quando $(k_1, k_2) \in A_0$ e o segundo quando $(k_1, k_2) \in B_0$.

No primeiro caso, $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1-2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right]$, isto é, $k_1 = \left\lfloor \frac{g-1-2r}{6} \right\rfloor + j$ onde $j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor - 1 - \left\lfloor \frac{g-1-2r}{6} \right\rfloor$ e $k_2 = \frac{g+1+2r}{2} - k_1$. Como $k_2 \leq 2k_1$ se, e somente se, $\frac{g+1+2r}{2} \leq 3\left(\left\lfloor \frac{g-1-2r}{6} \right\rfloor + j\right)$ se, e somente se, $\left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g-1-2r}{6} \right\rfloor \leq j$, portanto, $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right]$.

No segundo caso, $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-1-2r}{2} \right]$, isto é, $k_1 = \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor + j$ onde $j = 0, \dots, \frac{g-1-2r}{2} - \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor$ e $k_2 = \frac{g+1+2r}{2} - k_1$. Como $k_2 \leq b$ se, e somente se, $\frac{g+1+2r}{2} - k_1 \leq \frac{g-1-2r}{2}$ equivalentemente $2r+1 - \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor \leq j$, isto é, $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-1-2r}{2} \right]$, pois $2r+1 \leq \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor$. \square

Lema B.2. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e*

- (1) se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{6} \right], \left[\frac{g-3}{4} \right] - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{4} \right], \frac{g-1}{2} - 1 \right]$.
- (2) se $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_3 \in \left[\left[\frac{g-1+2r}{6} \right], \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left[\frac{g-5-2r}{4} \right], \frac{g-3-2r}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$.

Nota, se $g < 15$ b) não ocorrem gapsets.

Demonstração. Suponha $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$. Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{6} \right], \left[\frac{g-3}{4} \right] - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{4} \right], \frac{g-1}{2} \right]$ e $k_2 = g - k_1 - k_3 = \frac{g-1}{2} - k_3 = b - k_3$. Mas se $k_3 = b$ então $k_2 = 0$, que não pode ocorrer. Portanto, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{6} \right], \left[\frac{g-3}{4} \right] - 1 \right]$ ou $k_3 \in \left[\left[\frac{g-3}{4} \right], \frac{g-1}{2} - 1 \right]$. Se $q \leq \frac{g+1}{2} - 1 = \frac{g-1}{2}$, então $(k_2, k_3) \in A_2$ ou B_2 . Vamos escrever $q = \frac{g-1}{2} - r = \frac{g-1-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$. Então, $b = q - 1 = \frac{g-1}{2} - r - 1 = \frac{g-3-2r}{2}$ e $b - 1 = \frac{g-5-2r}{2}$. No primeiro caso, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-5-2r}{6} \right], \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] - 1 \right]$, isto é, $k_3 = \left[\frac{g-5-2r}{6} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] - 1 - \left[\frac{g-5-2r}{6} \right]$ e $k_2 = \frac{g+1+2r}{2} - k_3$. Como $k_2 \leq 2k_3 + 1 \Leftrightarrow \frac{g+1+2r}{2} \leq 3k_3 + 1 \Leftrightarrow \frac{g+1+2r}{2} \leq 3\left(\left[\frac{g-5-2r}{6} \right] + j\right) + 1 \Leftrightarrow \left[\frac{g-1+2r}{6} \right] - \left[\frac{g-5-2r}{6} \right] \leq j$, isto é, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-1+2r}{6} \right], \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] - 1 \right]$. No segundo caso, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-5-2r}{4} \right], \frac{g-3-2r}{2} \right]$, isto é, $k_3 = \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] + j$, onde $j = 0, \dots, \frac{g-3-2r}{2} - \left[\frac{g-5-2r}{4} \right]$ e $k_2 = \frac{g+1+2r}{2} - k_3$. Como $k_2 \leq b \Leftrightarrow \frac{g+1+2r}{2} - k_3 \leq \frac{g-3-2r}{2} \Leftrightarrow 2r+2 \leq k_3 \Leftrightarrow 2r+2 - \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] \leq j$. Note que $2r+2 > \left[\frac{g-5-2r}{4} \right] \geq \frac{g-5-2r}{4} \Leftrightarrow r > \frac{g-13}{10}$ que é um absurdo. Portanto, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-5-2r}{4} \right], \frac{g-3-2r}{2} \right]$. \square

Lema B.3. *Seja G um gapset de gênero g ímpar, profundidade $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g+1}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 3$ então $k_2 = b + 1 = q$ e*

- (1) Se $q = \frac{g+1}{2}$, então k_1 não ocorre.
- (2) Se $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então $k_1 \in \left[\left[\frac{g-1-2r}{4} \right], \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$.

Demonstração. Note que $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g+1}{2} \right]$. Pelas Proposições 3.44, 3.45 e 3.46 temos que $c = 4b$, $c = 4b + 2$ ou $c = 4b + 3$, para algum $b \in \mathbb{N}$ e $g = k_1 + k_2 + k_3$. Suponha $c = 4b + 3$, então $k_2 = b + 1 = q$. Se $q = \frac{g+1}{2}$, então $b = \frac{g-1}{2}$. $k_1 \in \left[\left[\frac{g+1}{4} \right], \frac{g+1}{2} \right]$, isto é, $k_1 = \left[\frac{g+1}{4} \right] + j$ com $j = 0, \dots, \frac{g+1}{2} - \left[\frac{g+1}{4} \right]$ e $k_3 = g - k_1 - k_2 = \frac{g-1}{2} - k_1$. Note que $k_3 < \left[\frac{g-1}{4} \right]$, pois $\frac{g-1}{2} < \left[\frac{g-1}{4} \right] + \left[\frac{g+1}{4} \right]$ e pela Proposição 3.46 este caso não ocorre.

Se $q \leq \frac{g+1}{2} - 1 = \frac{g-1}{2}$. Vamos escrever $q = \frac{g-1}{2} - r = \frac{g-1-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$. Então, $b = q - 1 = \frac{g-1}{2} - r - 1 = \frac{g-3-2r}{2}$. Como $k_1 \in \left[\left[\frac{g-1-2r}{4} \right], \frac{g-1-2r}{2} \right]$ temos que $k_1 = \left[\frac{g-1-2r}{4} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \frac{g-1-2r}{2} - \left[\frac{g-1-2r}{4} \right]$ e $k_3 = \frac{g+1+2r}{2} - k_1$. Assim,

- $k_3 \leq b \Leftrightarrow \frac{g+1+2r}{2} - k_1 \leq \frac{g-3-2r}{2} \Leftrightarrow 2r+2 \leq \left[\frac{g-1-2r}{4} \right] + j \Leftrightarrow 2r+2 - \left[\frac{g-1-2r}{4} \right] \leq j$, isto é, $k_1 \geq 2r+2$
- $\left[\frac{b}{2} \right] \leq k_3 \Leftrightarrow \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] \leq \frac{g+1+2r}{2} - k_1 \Leftrightarrow \left[\frac{g-1-2r}{4} \right] + j \leq \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] \Leftrightarrow +j \leq \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] - \left[\frac{g-1-2r}{4} \right]$, isto é, $k_1 \leq \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right]$.

Portanto, $k_1 \in \left[\left[\frac{g-1-2r}{4} \right], \frac{g+1+2r}{2} - \left[\frac{g-3-2r}{4} \right] \right]$. □

Juntando os resultados obtidos nos Lemas 3.47, 3.48 e 3.49, obtemos o seguinte resultado.

Corolário B.4. *Se g é ímpar, então*

(1) se $q = \frac{g+1}{2}$, então

$$\#\mathcal{F}(g, q, m=4) = \frac{g-1}{2} - \left[\frac{g-3}{6} \right] = \left[\frac{g}{3} \right].$$

(2) se $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-1}{2} \right]$, então

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m = 4) = & \frac{3g + 3 - 2r}{2} \\ & - \left(\left\lfloor \frac{g-3-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-1+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

$$\text{onde } r = 0, \dots, \frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1.$$

Demonstração. Segue imediatamente dos Lemas B.1, B.2 e B.3. \square

Corolário B.5. *A quantidade de gapsets de gênero $g \geq 5$ ímpar, multiplicidade 4 e profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1, \frac{g+1}{2} \right]$ é exatamente*

1)

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+7}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - \lambda(1-a) - \frac{3a(3-a)}{2} - 2, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 1 \pmod{12}$.

2)

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+12}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - (2-b)s - \frac{3b(5-b)}{2} - 3, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 3 \pmod{12}$.

3)

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+11}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - (2-b)(s+1) - \frac{3b(5-b)}{2}, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 5 \pmod{12}$.

4)

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+10}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - \lambda(1-a) - \frac{3a(3-a)}{2} - 4, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 7 \pmod{12}$.

5)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+12}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)s - \frac{3b(5-b)}{2} - 3,$$

 quando $g \equiv 9 \pmod{12}$.

6)

$$\left\lfloor \frac{g}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+11}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-1}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) - (2-b)(s+1) - \frac{3b(5-b)}{2},$$

 quando $g \equiv 11 \pmod{12}$.

 Onde $a \geq 2$ e b são inteiros positivos, com a tal que

$$\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = \begin{cases} 3a+2, \text{ fazemos } \lambda = 1 \\ 3(a+1), \text{ fazemos } \lambda = 2 \\ 3(a+1)+1, \text{ fazemos } \lambda = 3 \end{cases}$$

 e b é tal que $\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 3b+s$ com $0 \leq s < 3$.

Demonstração. Como g é ímpar, temos que $g-3$, $g-1$ e $g+1$ são pares. Vamos dividir em casos: $g = 12a+1$, $12a+3$, $12a+5$, $12a+7$, $12a+9$ e $12a+11$.

$$1) \ g = 12a+1: \left\lfloor \frac{g-3-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-1}{4} + \left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-1}{4} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-1+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-1}{6} + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor \text{ e } \left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-1}{6} + \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor. \text{ Portanto, a soma}$$

$$\sum_r \left(\left\lfloor \frac{2g-3-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g-1-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g-1+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g+1+2r}{6} \right\rfloor \right)$$

pode ser reescrita como

$$\sum_r \left(\frac{5g-5}{6} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor \right).$$

Uma vez que $\frac{5g-5}{6}$ não depende de r , queremos calcular os termos em que r aparece, isto é, queremos determinar

$$\sum_r \left(\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor \right). \quad (\text{B.1})$$

 Fazendo, $r = 6u$, $6u+1$, $6u+2$, $6u+3$, $6u+4$, $6u+5$. Temos os sub-casos:

- a) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} + 1$.
- b) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}$.
- c) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}$.
- d) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3}$.
- e) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}$.
- f) $\left\lfloor \frac{-(1+r)}{2} \right\rfloor = \frac{-1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}$.

Escrevendo $r = 3u + j$, com $j \in 0, 1, 2$, notamos que nos casos c), d) e e) os valores são exatamente $-u$ e nos demais casos os valores obtidos são $-u - 1$. Logo, obtemos uma sequência da forma $(0, 0, -1, -1, -1, -2, -2, -2, \dots)$ fazendo u variar. Munidos desta informação, podemos escrever a soma (B.1) como $\sum_{u=0}^{b-2} 3(-u) + (1-a)\lambda$, onde

$$\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = \begin{cases} 3a+2, \text{ fazemos } \lambda = 1 \\ 3(a+1), \text{ fazemos } \lambda = 2 \\ 3(a+1) + 1, \text{ fazemos } \lambda = 3. \end{cases}$$

Juntando essa informação com o Corolário B.4 a fórmula segue.

$$2) \quad g = 12a + 3: \quad \left\lfloor \frac{g-3-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-3}{4} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{g-1-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-3}{4} + \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{g-1+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-3}{6} + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor \text{ e } \left\lfloor \frac{g+1+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-6}{6} + \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor. \\ \sum \left(\left\lfloor \frac{2g-3-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g-1-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g-1+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2g+1+2r}{6} \right\rfloor \right)$$

pode ser reescrita como

$$\sum \left(\frac{5g-15}{6} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor \right)$$

Uma vez que $\frac{5g-15}{6}$ não depende de r , queremos calcular os termos em que r aparece, isto é, queremos determinar

$$\sum_r \left(\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor \right). \quad (\text{B.2})$$

Fazendo, $r = 6u, 6u + 1, 6u + 2, 6u + 3, 6u + 4, 6u + 5$. Temos os sub-casos:

a) $\left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}$, $\left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{3+r}{3}$ e $\left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} + 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}. \\
 \text{c)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}, \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+4}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}. \\
 \text{d)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3}. \\
 \text{e)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}, \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}. \\
 \text{f)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+4}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}.
 \end{aligned}$$

Escrevendo $r = 3u + j$, com $j \in 0, 1, 2$, notamos que nos casos b), c) e d) os valores são exatamente $2 - u$ e nos demais casos os valores obtidos são $1 - u$. Logo, obtemos uma sequência da forma $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ fazendo u variar. Munidos desta informação, podemos escrever a soma (B.2) como $3 + \sum_{u=0}^{b-1} 3(2-u) + s(2-b)\lambda$, onde $\frac{g-3}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 3b + s$ com $0 \leq s < 3$. Juntando essa informação com o Corolário B.4 a fórmula segue.

Os demais casos 3), 4), 5) e 6) seguem de cálculos similares. \square

Lema B.6. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b$, então $k_3 = b = q$ e*

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{se } q = \frac{g}{2}, \text{ então } k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - 1 \right] \text{ ou } k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor, \frac{g}{2} - 1 \right]. \\
 (2) \quad & \text{se } q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-2}{2} \right], \text{ então } k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g+2+2r}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g-2-2r}{4} \right\rfloor - 1 \right] \text{ ou } k_1 \in \\
 & \left[\left\lfloor \frac{g-2-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g-2-2r}{2} \right], \text{ onde } r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha $c = 4b$, então $k_3 = b = q$. Se $q = \frac{g}{2}$, então $k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - 1 \right]$ e $k_2 = g - k_1 - k_3 = \frac{g}{2} - k_1$, então $(k_1, k_2) \in A_0$ ou B_0 .

- $k_2 \leq 2k_1 \Leftrightarrow \frac{g}{2} \leq 3\left(\left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor + j\right) \Leftrightarrow 0 \leq j$.
- $k_2 \leq b \Leftrightarrow \frac{g}{2} - k_1 \leq \frac{g}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k_1$

Portanto, estes casos ocorrem. Se $q \leq \frac{g}{2} - 1 = \frac{g-2}{2}$, vamos escrever $q = \frac{g-2}{2} - r = \frac{g-2-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$. então $(k_1, k_2) \in A_0$ ou B_0 . No

primeiro caso, $k_1 \in \left[\left[\frac{g-2-2r}{6} \right], \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] - 1 \right]$, isto é, $k_1 = \left[\frac{g-2-2r}{6} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] - 1 - \left[\frac{g-2-2r}{6} \right]$ e $k_2 = \frac{g+2+2r}{2} - k_1$. Como $k_2 \leq 2k_1 \Leftrightarrow \frac{g+2+2r}{2} \leq 3\left(\left[\frac{g-2-2r}{6} \right] + j \right) \Leftrightarrow \left[\frac{g+2+2r}{6} \right] - \left[\frac{g-2-2r}{6} \right] \leq j$, portanto $k_1 \in \left[\left[\frac{g+2+2r}{6} \right], \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] - 1 \right]$.

No segundo caso, $k_1 \in \left[\left[\frac{g-2-2r}{4} \right], \frac{g-2-2r}{2} \right]$, isto é, $k_1 = \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] + j$, onde $j = 0, \dots, \frac{g-2-2r}{2} - \left[\frac{g-2-2r}{4} \right]$ e $k_2 = \frac{g+2+2r}{2} - k_1$. Como $k_2 \leq b \Leftrightarrow \frac{g+2+2r}{2} - k_1 \leq \frac{g-2-2r}{2} \Leftrightarrow 2r+1 \leq \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] + j \Leftrightarrow 2r+1 - \left[\frac{g-2-2r}{4} \right] \leq j$, isto é, $k_1 \in \left[\left[\frac{g-2-2r}{4} \right], \frac{g-2-2r}{2} \right]$. \square

Lema B.7. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$ e*

$$(1) \text{ se } q = \frac{g}{2}, \text{ então } k_3 \in \left[\left[\frac{g-2}{6} \right], \left[\frac{g-4}{4} \right] - 1 \right] \text{ ou } k_3 \in \left[\left[\frac{g-4}{4} \right], \frac{g-2}{2} \right].$$

$$(2) \text{ se } q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-2}{2} \right], \text{ então } k_3 \in \left[\left[\frac{g+2r}{6} \right], \left[\frac{g-6-2r}{4} \right] - 1 \right] \text{ ou } k_3 \in \left[\left[\frac{g-6-2r}{4} \right], \frac{g-4-2r}{2} \right], \text{ onde } r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1.$$

Demonstração. Suponha $c = 4b + 2$, então $k_1 = b + 1 = q$. Se $q = \frac{g}{2}$, então $b = \frac{g-2}{2}$, $b-1 = \frac{g-4}{2}$, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-4}{6} \right], \left[\frac{g-4}{4} \right] - 1 \right]$ e $k_2 = g - k_1 - k_3 = \frac{g}{2} - k_3 = b + 1 - k_3$.

- Para A_2 : Como $k_2 \leq 2k_3 + 1 \Leftrightarrow \frac{g}{2} \leq 3k_3 + 1 \Leftrightarrow k_3 \geq \left[\frac{g-2}{6} \right]$. Assim, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-2}{6} \right], \left[\frac{g-4}{4} \right] - 1 \right]$.
- Para B_2 : $k_3 \in \left[\left[\frac{g-4}{4} \right], \frac{g-2}{2} \right]$ e $k_2 = \frac{g}{2} - k_3 = b + 1 - k_3$. Note que $k_2 = b + 1 - (b) = 1 \neq 0$.

Portanto estes casos ocorrem (ambos casos A_2, B_2). Se $q \leq \frac{g}{2} - 1 = \frac{g-2}{2}$, então $(k_2, k_3) \in A_2$ ou B_2 . Vamos escrever $q = \frac{g-2}{2} - r = \frac{g-2-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$. Então, $b = q - 1 = \frac{g-2}{2} - r - 1 = \frac{g-4-2r}{2}$ e $b-1 = \frac{g-6-2r}{2}$.

No primeiro caso, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-6-2r}{6} \right], \left[\frac{g-6-2r}{4} \right] - 1 \right]$, isto é,
 $k_3 = \left[\frac{g-6-2r}{6} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \left[\frac{g-6-2r}{4} \right] - 1 - \left[\frac{g-6-2r}{6} \right]$ e $k_2 = \frac{g+2+2r}{2} - k_3$. Como $k_2 \leq 2k_3 + 1 \Leftrightarrow \frac{g+2+2r}{2} \leq 3k_3 + 1 \Leftrightarrow \left[\frac{g+2r}{6} \right] \leq k_3$, isto é, $k_3 \in \left[\left[\frac{g+2r}{6} \right], \left[\frac{g-6+2r}{4} \right] - 1 \right]$.

No segundo caso, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-6-2r}{4} \right], \frac{g-4-2r}{2} \right]$, isto é, $k_3 = \left[\frac{g-6-2r}{4} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \frac{g-4-2r}{2} - \left[\frac{g-6-2r}{4} \right]$ e $k_2 = \frac{g+2+2r}{2} - k_3$. Como $k_2 \leq b \Leftrightarrow \frac{g+2+2r}{2} - k_3 \leq \frac{g-4-2r}{2} \Leftrightarrow 2r+3 \leq k_3$. Note que $2r+3 > \left[\frac{g-6-2r}{4} \right] \geq \frac{g-6-2r}{4} \Leftrightarrow r > \frac{g-18}{10}$. Portanto, $k_3 \in \left[\left[\frac{g-6-2r}{4} \right], \frac{g-4-2r}{2} \right]$. \square

Lema B.8. *Seja G um gapset de gênero g par, profundidade $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g}{2} \right]$ e $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$. Se $c = 4b + 3$, então $k_2 = b + 1 = q$ e Se $q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g}{2} \right]$, então*

$$(1) \ k_1 \in \left[\left[\frac{g}{4} \right], \frac{g}{2} - \left[\frac{g-2}{4} \right] \right], \text{ quando } q = \frac{g}{2}.$$

$$(2) \ k_1 \in \left[\left[\frac{g-2r}{4} \right], \frac{g+2+2r}{2} - \left[\frac{g-4-2r}{4} \right] \right], \text{ quando } q \in \left[\left[\frac{2g}{5} \right] + 1, \frac{g-2}{2} \right], \text{ onde } r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1.$$

Demonstração. Suponha $c = 4b + 3$, então $k_2 = b + 1 = q$. Se $q = \frac{g}{2}$, então $k_1 \in \left[\left[\frac{g}{4} \right], \frac{g}{2} \right]$ e $k_3 = g - q - k_1 = \frac{g}{2} - k_1$. Como $\left[\frac{b}{2} \right] \leq k_3 \Leftrightarrow \left[\frac{g-2}{4} \right] \leq \frac{g}{2} - k_1 \Leftrightarrow k_1 \leq \frac{g}{2} - \left[\frac{g-2}{4} \right]$. Portanto, $k_1 \in \left[\left[\frac{g}{4} \right], \frac{g}{2} - \left[\frac{g-2}{4} \right] \right]$.

Se $q \leq \frac{g}{2} - 1 = \frac{g-2}{2}$. Vamos escrever $k_2 = b + 1 = q = \frac{g-2}{2} - r = \frac{g-2-2r}{2}$, para $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left[\frac{2g}{5} \right] - 1$. Então, $b = q - 1 = \frac{g-2}{2} - r - 1 = \frac{g-4-2r}{2}$.

Como $k_1 \in \left[\left[\frac{g-2r}{4} \right], \frac{g-2r}{2} \right]$ temos que $k_1 = \left[\frac{g-2r}{4} \right] + j$ onde $j = 0, \dots, \frac{g-2-2r}{2} - \left[\frac{g-2r}{4} \right]$ e $k_3 = \frac{g+2+2r}{2} - k_1$. Assim,

- $k_3 \leq b \Leftrightarrow \frac{g+2r}{2} - k_1 \leq \frac{g-2-2r}{2} \Leftrightarrow 2r+3 \leq k_1$.

$$\bullet \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \leq k_3 \Leftrightarrow k_1 \leq \frac{g+2+2r}{2} - \left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor.$$

$$\text{Portanto, } k_1 \in \left[\left\lfloor \frac{g-2r}{4} \right\rfloor, \frac{g+2+2r}{2} - \left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor \right]. \quad \square$$

Juntando os resultados obtidos nos Lemas B.6, B.7 e B.8, obtemos o seguinte resultado.

Corolário B.9. *Se g é par, então*

(1)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m=4) &= \frac{3g+2}{2} - \left(\left\lfloor \frac{g}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2}{4} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor, \end{aligned}$$

$$\text{quando } q = \frac{g}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F}(g, q, m=4) &= \frac{3g+2-2r}{2} \\ &\quad - \left(\left\lfloor \frac{g+2+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g+2r}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g-2r}{4} \right\rfloor \right), \end{aligned}$$

onde $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor + 1, \frac{g-2}{2} \right]$, onde $r = 0, \dots, \frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1$.

Demonstração. Segue imediatamente dos Lemas 3.52, 3.53 e 3.54 □

Corolário B.10. *A quantidade de gaps de gênero g par, multiplicidade 4 e profundidade $q \in \left[\left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor - 1, \frac{g}{2} \right]$ é exatamente*

1)

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g}{3} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ &- 2b(5-3b) - (1-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - (-2b)\lambda_5, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 0 \pmod{12}$.

2)

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+8}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ &- 2b(8-3b) - (3-2b)\lambda_0 - (1-2b)\lambda_1 - (2-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (2-2b)\lambda_4 - \\ &\quad (-2b)\lambda_5, \end{aligned}$$

quando $g \equiv 2 \pmod{12}$.

3)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+7}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 6b(2-b) - (1-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (1-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ (1-2b)\lambda_5,$$

 quando $g \equiv 4 \pmod{12}$.

4)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor 1 + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g}{3} + 4 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 2b(2-3b) - (1-2b)\lambda_0 - (-2b)\lambda_1 - (-2b)\lambda_2 - (-1-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ (-2-2b)\lambda_5,$$

 quando $g \equiv 6 \pmod{12}$.

5)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+11}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 2b(7-3b) - (2-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (1-2b)\lambda_2 - (2-2b)\lambda_3 - (-2b)\lambda_4 - \\ (1-2b)\lambda_5,$$

 quando $g \equiv 8 \pmod{12}$.

6)

$$\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor + \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{2g+4}{3} + 4 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \left(\frac{g-2}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor \right) \\ - 6b(3-b) - (3-2b)\lambda_0 - (2-2b)\lambda_1 - (3-2b)\lambda_2 - (1-2b)\lambda_3 - (2-2b)\lambda_4 - \\ (1-2b)\lambda_5,$$

 quando $g \equiv 10 \pmod{12}$.

Onde b é um inteiro positivo tal que $\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 6b + s$ com $0 \leq s < 6$ e λ_i tal que

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i \leq s \\ 0, & \text{para } i > s. \end{cases}$$

Demonstração. Como g é par, temos que $g-4$, e $g+2$ são pares. Vamos dividir em casos: $g = 12a$, $12a+2$, $12a+4$, $12a+6$, $12a+8$ e $12a+10$.

1) $g = 12a$: $\left\lfloor \frac{g-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g}{4} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-4}{4} + \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{g+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g}{6} + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor$
 e $\left\lfloor \frac{g+2+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g}{6} + \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor$. Fazendo, $r = 6u, 6u+1, 6u+2, 6u+3, 6u+4, 6u+5$. Temos os sub-casos:

$$\text{a) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} + 1.$$

$$\text{b) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}.$$

$$\text{c) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}.$$

$$\text{d) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3}.$$

$$\text{e) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}.$$

$$\text{f) } \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}.$$

Escrevendo $r = 6u + j$, com $j \in 0, 1, 2, 3, 4, 5$, notamos que a soma $\sum \alpha$, com

$$\alpha := 2 \left\lfloor \frac{-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor$$

não segue o mesmo padrão que no caso g ímpar. Porém, podemos escrever α como

$$\sum_{u=0}^{b-1} (1-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (2-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (1-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (-2u) \sum_{u=0}^{b-1} (-2u) + \beta, \quad (\text{B.3})$$

onde b é um inteiro positivo tal que $\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 6b + s$ com $0 \leq s < 6$ e $\beta = (1-2b)\lambda_0 + (2-2b)\lambda_1 + (-2b)\lambda_2 + (1-2b)\lambda_3 + (-2b)\lambda_4 + (-2b)\lambda_5$. Calculando os somatórios de (B.3) obtemos $2b(5-3b)$. Reunindo essas informações juntamente com o Corolário B.9 item (1) a fórmula segue.

2) $g = 12a + 2$: $\left\lfloor \frac{g-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-2}{4} + \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{g-4-2r}{4} \right\rfloor = \frac{g-2}{4} + \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor$,
 $\left\lfloor \frac{g+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-2}{6} + \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor$ e $\left\lfloor \frac{g+2+2r}{6} \right\rfloor = \frac{g-2}{6} + \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor$. Fazendo, $r = 6u, 6u+1, 6u+2, 6u+3, 6u+4, 6u+5$. Temos os sub-casos:

$$\text{a) } \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{3+r}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r}{3} + 1.$$

$$\text{b) } \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}.$$

$$\text{c) } \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+4}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+3}{3}. \\ \text{e)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{2-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+2}{3}. \\ \text{f)} \quad & \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor = \frac{1-r}{2}, \left\lfloor \frac{2+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+4}{3} \text{ e } \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor = \frac{r+1}{3}. \end{aligned}$$

Escrevendo $r = 6u + j$, com $j \in 0, 1, 2, 3, 4, 5$, notamos que a soma $\sum \alpha$, com

$$\alpha := \left\lfloor \frac{1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-1-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+r}{3} \right\rfloor$$

não segue o mesmo padrão que no caso g ímpar. Porém, podemos escrever α como

$$\sum_{u=0}^{b-1} (3-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (2-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (2-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (1-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (2-2u) + \sum_{u=0}^{b-1} (-2u) + \beta, \quad (\text{B.4})$$

onde b é um inteiro positivo tal que $\frac{g-4}{2} - \left\lfloor \frac{2g}{5} \right\rfloor = 6b + s$ com $0 \leq s < 6$ e $\beta = (3-2b)\lambda_0 + (2-2b)\lambda_1 + (2-2b)\lambda_2 + (1-2b)\lambda_3 + (2-2b)\lambda_4 + (-2b)\lambda_5$. Calculando os somatórios de (B.4) obtemos $2b(8-3b)$. Reunindo essas informações juntamente com o Corolário B.9 item (1) a fórmula segue.

Os demais itens seguem de forma similar, aproveitando os cálculos já realizados no itens a) à f) dos casos 1) e 2). □