



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica

GISELE LUCAS GARCEZ

**Otimização topológica evolucionária de estruturas
com base em tensões e incluindo cargas
dependentes**

Campinas

2021

GISELE LUCAS GARCEZ

**Otimização topológica evolucionária de estruturas
com base em tensões e incluindo cargas
dependentes**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELA ALUNA GISELE LUCAS GARCEZ, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RENATO PAVANELLO.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

G164o Garcez, Gisele Lucas, 1970-
Otimização topológica evolucionária de estruturas com base em tensões e incluindo cargas dependentes / Gisele Lucas Garcez. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Renato Pavanello.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização estrutural. I. Pavanello, Renato, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Stress-based structural topology optimization for design-dependent loads problems using the BESO method

Palavras-chave em inglês:

Structural optimization

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutora em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Renato Pavanello [Orientador]

Alberto Luiz Serpa

Rafael Thiago Luiz Ferreira

William Martins Vicente

Eliseu Lucena Neto

Data de defesa: 23-11-2021

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-3953-710X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4221210847657452>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

TESE DE DOUTORADO

**Otimização topológica evolucionária de estruturas
com base em tensões e incluindo cargas
dependentes**

Autor: Gisele Lucas Garcez

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese de Doutorado:

**Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. Rafael Thiago Luiz Ferreira
IEM/EAM-1/ITA**

**Prof. Dr. William Martins Vicente
FEAGRI/UNICAMP**

**Prof. Dr. Eliseu Lucena Neto
IEI/EIA-I/ITA**

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 23 de novembro de 2021

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, Dumberk Leonidas Nicolau Rodrigues Garcez (in memoriam), que não mediu esforços para me ajudar nessa etapa tão importante da minha vida, garantindo a segurança necessária em todos os momentos.

Dedico também ao meu filho, Alexandre Lucas Garcez Galvão, ao qual agradeço por todo carinho, apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, ao qual agradeço pelo dom da vida.

Ao professor Dr. Renato Pavanello pela oportunidade de tê-lo como orientador de doutorado, agradeço por sua extrema dedicação, um exemplo de profissionalismo e competência.

Ao professor Dr. Kamal Abdel Radi Ismail pela orientação no programa de estágio docência.

Ao professor Dr. Renato Picelli pela parceria nos artigos.

Aos meus primeiros orientadores, professores Dra. Delma de Mattos Vidal e Dr. Maher Nasr Bismarck Nasr (in memoriam) pelos conhecimentos transmitidos no início da minha vida acadêmica.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, seu corpo docente, direção e administração pelo empenho profissional.

Aos amigos e companheiros de laboratório que me apoiaram e auxiliaram durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora por aceitarem participar e contribuir para elevar a qualidade do trabalho.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.”

RESUMO

Garcez, Gisele Lucas. Otimização topológica evolucionária de estruturas com base em tensões e incluindo cargas dependentes. 2021. 128p. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Nos últimos anos, o retorno à aplicação dos critérios de tensão na otimização topológica de estruturas tem sido uma tendência da comunidade científica. Entretanto, as cargas dependentes de projeto ainda não foram muito exploradas utilizando critérios de tensão. Essencialmente, no contexto de otimização topológica, cargas dependentes são aquelas que podem variar em intensidade, direção ou ponto de aplicação ao longo da otimização, devido à mudanças na topologia. De acordo com a sua natureza, as cargas dependentes podem ser classificadas como cargas de superfície e cargas de corpo.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta para otimização topológica de estruturas sujeitas à cargas dependentes de projeto baseado em um critério de tensão, utilizando o método evolucionário bi-direcional de otimização estrutural (BESO). A proposta é baseada na minimização da norma-P das tensões de von Mises com restrição de volume. Na implementação da proposta, uma análise consistente da sensibilidade incluindo cargas dependentes foi desenvolvida através do método adjunto.

Uma série de testes foram realizados para explorar e validar o método, através de exemplos numéricos, abordando os casos clássicos da literatura nos quais seja possível observar a concentração de tensões. Comparações entre as análises sujeitas a cargas dependentes, utilizando a solução tradicional de minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises, mostrou que o método é uma forma efetiva de reduzir o valor da máxima tensão de von Mises nas estruturas.

Palavras-chave: Otimização Estrutural, Tensão de von Mises, Norma-P, Carga dependente, Peso próprio.

ABSTRACT

Garcez, Gisele Lucas. Stress-based structural topology optimization for design-dependent loads problems using the BESO method. 2021. 128p. Thesis (PhD). School of Mechanical Engineering, University of Campinas, Campinas, Brazil.

Stress is one of the main criteria for structural designs and the development of reliable algorithms considering design-dependent loads has become important in several engineering projects. Essentially, design-dependent loads in topological optimization are those that can vary in intensity, direction and location during the optimization process. According to their nature, design-dependent loads can be classified into two categories: surface loads and body loads.

This work aims to propose an approach for stress-based topology optimization of continuous elastic bi-dimensional structures under design-dependent loads using the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method. The topology optimization is developed through the minimization of P-norm von Mises stress while the volume constraint is satisfied. To implement the algorithm, a consistent sensitivity analysis including design-dependent loads has been developed by the adjoint method.

A series of benchmark tests have been performed to explore and validate the method through several numerical examples. Comparison between traditional compliance minimization and P-norm of von Mises stress minimization analyses, including design-dependent loads, shows that the method is an effective way to reduce the maximum von Mises stress value.

Keywords: Structural Optimization, von Mises stress, P-Norm, design-dependent loads, self-weight.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Exemplo do problema de <i>checkerboard</i>	25
Figura 2.1 – Sistema de coordenadas local e construção do tensor das funções de forma.	35
Figura 2.2 – Nós localizados no interior do subdomínio Ω_i	42
Figura 3.1 – Ilustração da viga em balanço.	51
Figura 3.2 – Comparação entre a minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises.	53
Figura 3.3 – Minimização da norma-P das tensões de von Mises: comparação com resultados da literatura.	54
Figura 4.1 – Dimensões e condições de contorno da viga biapoçada.	59
Figura 4.2 – Topologias para diferentes condições de carregamento obtidas por (Huang; Xie, 2011): (a) com peso próprio e $F = 100\%$ do peso próprio ($C^* = 0,282$ Nm); (b) com peso próprio e $F = 50\%$ do peso próprio ($C^* = 0,131$ Nm) ; (c) com peso próprio e $F = 10\%$ do peso próprio ($C^* = 0,048$ Nm); and (d) apenas peso próprio ($C^* = 0,034$ Nm).	60
Figura 4.3 – Compliance e Fração volumétrica do caso (d) apenas peso próprio $C^* = 0,034$ Nm - (Huang; Xie, 2011).	60
Figura 4.4 – Topologias para diferentes condições de carregamento obtidas na implementação da minimização das tensões com carga fixa: (a) com peso próprio e $F = 100\%$ do peso próprio ($C^* = 0,287$ Nm); (b) com peso próprio e $F = 50\%$ do peso próprio ($C^* = 0,131$ Nm); (c) com peso próprio e $F = 10\%$ do peso próprio ($C^* = 0,048$ Nm); and (d) apenas peso próprio ($C^* = 0,033$ Nm).	61
Figura 4.5 – Implementação: Compliance e Fração volumétrica do caso (d) apenas peso próprio $C^* = 0,033$ Nm.	62
Figura 5.1 – Dimensões e condições de contorno do Perfil-L.	72
Figura 5.2 – Perfil-L: Topologias sem considerar o peso próprio e considerando o peso próprio minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$	73
Figura 5.3 – Perfil-L - Resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$	74

Figura 5.4 – Perfil-L - Evolução das funções objetivo obtidas através da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$	74
Figura 5.5 – Análise dos picos na evolução da função objetivo.	75
Figura 5.6 – Perfil-L minimização da norma-P das tensões de von Mises com e sem a normalização das sensibilidades ($P = 7$).	76
Figura 5.7 – Exemplo de aplicação de um filtro de pós processamento ($P = 7$).	77
Figura 5.8 – Topologias para diversos valores do expoente da norma.	78
Figura 5.9 – Dimensões e condições de contorno da viga biapoiada com entalhe.	80
Figura 5.10–Viga biapoiada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 1: Peso Próprio e duas cargas fixas cujo somatório corresponde a 100% do peso próprio inicial).	81
Figura 5.11–Viga biapoiada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 2: Peso Próprio e duas cargas fixas cujo somatório corresponde a 30% do peso próprio inicial).	82
Figura 5.12–Viga biapoiada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 3: Somente peso próprio).	83
Figura 5.13–Viga biapoiada com entalhe: comparação entre carga fixa e carga dependente devido ao peso próprio.	85
Figura 5.14–Dimensões e condições de contorno da viga em balanço.	86
Figura 5.15–Comparação entre os resultados da viga em balanço com e sem considerar o peso próprio da estrutura.	87
Figura 5.16–Viga em balanço $V_{frac} = 30\%$	88
Figura 5.17–Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 30\%$	89
Figura 5.18–Viga em balanço $V_{frac} = 40\%$	90
Figura 5.19–Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 40\%$	91
Figura 5.20–Viga em balanço $V_{frac} = 50\%$	92
Figura 5.21–Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 50\%$	93
Figura 6.1 – Ilustração das cargas de superfície durante o processo de otimização.	96
Figura 6.2 – Sensibilidade utilizando um único critério para adição e remoção de elementos (Viga biapoiada).	97
Figura 6.3 – Ilustração do cálculo de Δf	100

Figura 6.4 – Ilustração da viga biapoçada sujeita a carga de superfície.	102
Figura 6.5 – Viga biapoçada: aplicação das cargas fixa e dependente com $P = 4$	103
Figura 6.6 – Comparação entre as cargas de pressão fixa e dependente $P = 4$	103
Figura 6.7 – Comparação entre as topologias com e sem utilizar o processo de normalização das sensibilidades para $P = 6$	104
Figura 6.8 – Viga biapoçada: minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga de pressão.	104
Figura 6.9 – Viga biapoçada - minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga de pressão para $P = 5$ e $P = 6$	105
Figura 6.10–Viga biapoçada: minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga de pressão para $P = 7$	106
Figura 6.11–Ilustração do Problema do pistão sujeito a carga de superfície.	107
Figura 6.12–Problema do Pistão - aplicação da carga para $P = 3,5$	108
Figura 6.13–Problema do Pistão - resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 3,5$	109
Figura 6.14–Problema do Pistão - resultados da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 4,5$ e $P = 5,5$	110
Figura 6.15–Problema do Pistão - resultados da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 5,65$ e $P = 5,69$	112
Figura 6.16–Problema do pistão comparando três frações volumétricas ($P = 4,5$).	113
Figura 6.17–Ilustração do Perfil-L sujeito a carga de superfície.	114
Figura 6.18–Perfil-L sujeito a carga de superfície - minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$	116
Figura 6.19–Elementos carregados na análise do Perfil-L ($P = 7$).	117
Figura 6.20–Perfil-L sujeito a carga de superfície antes e depois do pós processamento $P = 7$	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coordenadas e ponderações dos pontos de integração.	37
Tabela 3.1 – Parâmetros BESO utilizados na validação da implementação da minimização da norma-P das tensões de von Mises.	51
Tabela 3.2 – Viga em balanço - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	52
Tabela 4.1 – Parâmetros BESO utilizados na validação da implementação minimização da compliance com peso próprio.	58
Tabela 5.1 – Parâmetros BESO utilizados na implementação do Perfil-L sujeito à carga devido ao peso próprio.	73
Tabela 5.2 – Perfil-L sujeito à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	78
Tabela 5.3 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga biapoiada com entalhe sujeita à carga devido ao peso próprio.	81
Tabela 5.4 – Viga biapoiada com entalhe sujeita à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	84
Tabela 5.5 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga em balanço sujeita à carga devido ao peso próprio.	87
Tabela 5.6 – Viga em balanço sujeita à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	93
Tabela 6.1 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga biapoiada sujeita a carga de superfície.	103
Tabela 6.2 – Viga biapoiada sujeita à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	105
Tabela 6.3 – Resultados da viga biapoiada sujeita a carga de pressão para $P = 6$ e $P = 7$	106
Tabela 6.4 – Parâmetros BESO utilizados no exemplo do Pistão sujeito a carga de superfície.	108

Tabela 6.5 – Pistão sujeito à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	111
Tabela 6.6 – Resultados do problema do pistão para três frações volumétricas.	113
Tabela 6.7 – Parâmetros BESO utilizados na implementação do Perfil-L sujeito à carga de superfície.	115
Tabela 6.8 – Perfil-L sujeito à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.	119

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
ESO	Evolutionary Structural Optimization
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
FEM	Finite Element Method

LISTA DE SÍMBOLOS

Matrizes e Vetores

B_i	Matriz deformação deslocamento do elemento i
D_i	Matriz constitutiva do elemento i
f	Vetor global das forças aplicadas
f_i	Vetor de forças aplicadas do elemento i
f_d	Parcela de f_i que é função da posição do elemento no contorno.
K	Matriz de rigidez global
K_i	Matriz de rigidez do elemento i
K_0	Matriz de rigidez do elemento sólido
u	Vetor global dos deslocamentos
u_i	Vetor dos deslocamentos do elemento i
u_0	Vetor dos deslocamentos do elemento sólido

Letras Latinas

AR_{max}	Máxima razão de admissão
C	Compliance
C^*	Energia de deformação da estrutura
E	Módulo de Young
ER	Razão de evolução
$erro_{global}$	Critério de parada da otimização estrutural
F	Magnitude da carga fixa

$F_{pressure}$	Força nodal devido a pressão distribuída nas faces carregadas
g	Aceleração da gravidade
k	Número da iteração
L_i	Comprimento da face do elemento
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro de convergência
N_i	Número de elementos do domínio
P	Ordem da norma (expoente P)
P_0	Pressão aplicada
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material
q_0	Magnitude da carga uniformemente distribuída
r_i	Distância entre o centro do elemento i e o nó j
r_{min}	Raio do filtro
RR	Razão de rejeição
V^*	Volume estrutural prescrito (volume final da estrutura)
V_i	Volume do elemento
V_{frac}	Volume objetivo (fração do volume inicial)
w_i	Fator de peso (ponderação do elemento i)
x_i	Variável de projeto binária que representa a pseudo-densidade do elemento
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto

Letras Gregas

α_i	Sensibilidade do elemento i
α_j^n	Sensibilidade nodal

λ	Variável adjunta (multiplicador de Lagrange)
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Massa específica
ρ_0	Massa específica dos elemento sólido i
ρ^{PN}	Norma-P
r_{min}	Raio do filtro
σ_i^{vm}	Tensão de von Mises do elemento i
σ_{max}^{vm}	Máxima tensão de von Mises da estrutura
σ_{xx}	Componente de tensão normal na direção X
σ_{yy}	Componente de tensão normal na direção Y
τ_{xy}	Componente de tensão de cisalhamento no plano XY
τ	Precisão do critério de parada

SUMÁRIO

1	Introdução	21
1.1	Métodos evolucionários de otimização estrutural	23
1.2	Cargas dependentes	26
1.2.1	Forças de corpo	26
1.2.2	Forças de superfície	27
1.2.2.1	Forças transmissíveis	28
1.3	Otimização estrutural baseada em critérios de tensão	29
1.4	Objetivos	31
2	Minimização da compliance com carga fixa	34
2.1	Método dos elementos finitos	34
2.2	Método BESO baseado em critério de rigidez	38
2.2.1	Processo de adição/remoção de elementos	39
2.2.2	Formulação do método BESO aplicado à minimização da compliance	39
2.2.3	Análise da sensibilidade aplicada à minimização da compliance utilizando a interpolação SIMP	40
2.2.4	Esquema de filtro numérico de suavização da sensibilidade	41
2.2.5	Estabilização do processo de evolução	42
2.2.6	Critério de parada aplicado à minimização da compliance	43
3	Minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga fixa	45
3.1	Utilização do método adjunto na solução do problema de otimização topológica baseado no critério de tensões	45
3.2	Formulação do problema de otimização baseado no critério de tensões	46
3.2.1	Análise da sensibilidade da norma-P das tensões de von Mises	47
3.3	Processo de otimização utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises	49
3.4	Minimização da norma-P das tensões de von Mises da viga em balanço	50
4	Minimização da compliance com carga dependente devido ao peso próprio	55
4.1	Método BESO incluindo carga dependente devido ao peso próprio aplicado a minimização da compliance	55

4.1.1	Análise da sensibilidade na minimização da compliance com carga dependente devido ao peso próprio	55
4.1.2	Resultados da implementação do método BESO incluindo carga dependente devido ao peso próprio	59
5	Minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga dependente devido ao peso próprio	63
5.1	Processo de otimização utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises	63
5.1.1	Filtro de sensibilidade	64
5.1.2	Processo de adição/remoção de elementos	66
5.2	Formulação do método BESO aplicado à minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio	67
5.2.1	Análise da sensibilidade	68
5.2.2	Desenvolvimento do termo devido à carga dependente	70
5.3	Perfil-L: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio	71
5.4	Viga biapojada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio	79
5.5	Viga em balanço: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio	86
5.5.1	Viga em balanço: Volume final igual a 30% do volume inicial	88
5.5.2	Viga em balanço: Volume final igual a 40% do volume inicial	90
5.5.3	Viga em balanço: Volume final igual a 50% do volume inicial	91
5.6	Comentários gerais sobre a minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo peso próprio	94
6	Minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga dependente devido à pressão	95
6.1	Proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido a pressão	97
6.1.1	Análise da sensibilidade	98
6.1.2	Obtenção do termo de carga	99
6.1.3	Critério de remoção e adição de elementos	100

6.1.4	Procedimentos utilizados no método BESO na minimização da norma-P das tensões de von Mises	101
6.2	Viga biapoiada: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão	102
6.3	Problema do pistão: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão	107
6.4	Perfil-L: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão	114
7	Conclusões gerais	120
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	121
8	REFERÊNCIAS	122

1 INTRODUÇÃO

Os três principais tipos de Otimização Estrutural são: a otimização paramétrica ou dimensional, a otimização de forma e a otimização topológica. A otimização Paramétrica ou Dimensional é utilizada para obter dimensões específicas do componente de forma otimizada, como: o diâmetro de um furo, a espessura das nervuras da asa de uma aeronave ou outras dimensões específicas de modo que cumpra sua função estrutural. A otimização de forma permite modificar os contornos dos segmentos, é utilizada quando já temos as características pré-definidas do componente e desejamos realizar um ajuste, mas sem alterar as características principais (como o número de furos). A otimização topológica permite retirar e por material e é bastante utilizada na fase de anteprojetado, especialmente na concepção de um projeto conceitual, quando a solução nem sempre é intuitiva porque permite, dentro de um domínio fixo, a alteração dos contornos e da distribuição de material.

Os elementos de um problema de otimização são as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições. As variáveis de projeto são os parâmetros que definem o sistema. Essas variáveis podem ser contínuas ou discretas. As variáveis contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo, enquanto as discretas assumem somente valores isolados. A função objetivo é uma função, ou uma função de várias funções, que é utilizada para medir o desempenho. As restrições são exigências de qualquer natureza, que o projeto deve satisfazer, podendo ser restrições de igualdade ou de desigualdade. Os parâmetros que podem ser utilizados como medidas de desempenho da estrutura são por exemplo uma componente do tensor de tensões, a rigidez, os deslocamentos, o peso etc. E eles podem fazer tanto o papel de restrições como o de funções objetivo. Então o problema de otimização pode ser formulado como a minimização ou maximização de uma função objetivo sujeita a alguma ou algumas restrições. No processo de otimização, pode-se escolher algum parâmetro de desempenho como função objetivo e selecionar outros como restrições.

As primeiras investigações em otimização estrutural foram realizadas há mais de cem anos e a data exata do início da otimização estrutural não pode ser determinada com precisão. Atualmente, dois artigos são considerados como pioneiros em otimização estrutural: (Maxwell, 1870) e (Michell, 1904). A maioria dos trabalhos citam (Michell, 1904) como sendo o primeiro em otimização topológica, mas de acordo com (Logo; Ismail, 2020) que compilaram

os 150 anos de otimização topológica, o primeiro artigo foi apresentado por (Maxwell, 1870). De acordo com (Logo; Ismail, 2020), isso pode ser verificado através do primeiro parágrafo do artigo de (Michell, 1904) indicando que o estudo resulta da extensão do trabalho apresentado por (Maxwell, 1870), publicado 34 anos antes. Em relação as quatro últimas décadas, diversos trabalhos apresentando a história da otimização estrutural foram publicados, entre outros, por (Rozvany *et al.*, 1982a), (Sigmund; Kurt, 2013), (Deaton; Grandhi, 2014), (Zargham *et al.*, 2016) e (Logo; Ismail, 2020).

O primeiro procedimento numérico em elementos finitos aplicado a otimização topológica foi elaborado por (Rossow; Taylor, 1973). A origem das técnicas de solução numérica, provendo o necessário embasamento matemático para uma solução efetiva em otimização topológica, foi apresentada em (Berke; Khot, 1974). Porém o maior desenvolvimento, iniciou no final da década de 80, com o trabalho de (Bendsoe; Kikuchi, 1988). O trabalho de (Bendsoe; Sigmund, 1999) apresentou um significativo avanço através da introdução de uma função de densidade contínua para a variável de projeto, onde os domínios de alta densidade definem a forma e para as densidades intermediárias os parâmetros do material são obtidos através de uma lei de interpolação. Desde então a otimização topológica tem sido usada como uma estratégia de otimização estrutural e diversos métodos alternativos vem sendo desenvolvidos.

Alguns exemplos de métodos de otimização topológica são: os métodos baseados em densidade (Bendsoe, 1989; Zhou; Rozvany, 1991; Mlejnek, 1992); os métodos baseados na derivada topológica (Sokolowski; Zochowski, 1999), o método bolha (Eschenauer *et al.*, 1994); o método *level-set* (Allaire *et al.*, 2002; Zhen *et al.*, 2008; Sethian; Wiegmann, 2000; Wang *et al.*, 2003; Xia; Shi, 2016); o método do campo de fase (Bourdin; Chambolle, 2003) e os métodos evolucionários: ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) (Xie; Steven, 1993; Xie; Steven, 1997; Querin *et al.*, 1998) e a versão bidirecional, conhecida como BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) (Yang *et al.*, 1999; Querin *et al.*, 2000; Huang; Xie, 2007).

Outro importante avanço foi apresentado por (Rozvany, 2000) que desenvolveu o modelo de interpolação de material denominado Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP). Em 2001, Sigmund publicou um código em linguagem MATLAB para otimização topológica baseado na interpolação de material SIMP, utilizando os critérios de otimalidade para minimização da compliance sujeita a restrição de volume (Sigmund, 2001).

1.1 Métodos evolucionários de otimização estrutural

Um importante ramo da otimização topológica são os métodos evolucionários de otimização estrutural. Inicialmente o método evolucionário foi desenvolvido na versão unidirecional, denominada ESO (Xie; Steven, 1993), o método é baseado no conceito da remoção de materiais nas regiões onde o valor das tensões é menor. O método usa um modelo mecânico discretizado por um método numérico do tipo elementos finitos, e para cada elemento, define-se uma variável de projeto que pode ser entendida como uma pseudo-densidade.

No método ESO, o nível de tensão do elemento é obtido comparando a tensão de von Mises de cada elemento, com uma tensão crítica prescrita, ou com a tensão máxima da estrutura. Uma razão de rejeição, RR , é definida e os elementos com tensão de von Mises abaixo do valor da tensão máxima de von Mises multiplicada por RR são removidos do modelo. O ciclo de análise utilizando o método dos elementos finitos é repetido, usando a mesma razão de rejeição, até que todos os elementos abaixo da tensão previamente escolhida, sejam removidos. A razão de rejeição é então acrescida de outra parcela, denominada razão de evolução, ER , de tal forma que $RR_{k+1} = RR_k + ER$, onde k é o número da iteração. O processo é repetido até que um critério de parada seja atendido, como por exemplo, que todas as tensões estejam abaixo de uma porcentagem do valor da tensão máxima.

Como a proposta inicial do método evolucionário de otimização topológica, ESO, é baseada no conceito da remoção de material, excluindo elementos do modelo desenvolvido para análise utilizando o método dos elementos finitos, o método ESO original é conhecido por ser um método hard-kill, isso significa que a variável de projeto binária define os elementos vazios como 0 e os elementos sólidos como 1. O primeiro livro sobre o método ESO foi publicado por (Xie; Steven, 1997). O método ESO tem sido utilizado em diversas aplicações em engenharia, sendo que um resumo das primeiras aplicações foi apresentado por (Steven *et al.*, 2000). Como complemento ao algoritmo original do ESO, (Querin *et al.*, 2000) propuseram um método chamado de ESO aditivo (AESO). O método é baseado na adição gradual de material nas regiões onde as tensões são elevadas. Ambos os métodos ESO e AESO são unidirecionais, ou retiram ou acrescentam material.

Os primeiros estudos no sentido de tornar o método evolucionário de otimização estrutural em um método bidirecional (que permite adicionar e retirar material), foram desenvolvidos por (Yang *et al.*, 1999) e (Rozvany *et al.*, 2004). O trabalho conduzido por (Yang *et al.*, 1999), com a otimização topológica baseada na rigidez, propõe calcular a sensibilidade dos

elementos vazios através da extrapolação linear do campo dos deslocamentos, após a análise por elementos finitos. A sensibilidade do elemento quantifica a variação da função objetivo em relação à uma variável de projeto. Na otimização topológica baseada na rigidez, a sensibilidade é calculada de acordo com a proposta de (Chu *et al.*, 1996), como sendo proporcional a variação da compliance, ou a energia de deformação, devido à remoção ou adição de um elemento. Esse método foi posteriormente estendido a estruturas tridimensionais (Young *et al.*, 1999). Em 2004, Rozvany et al apresentaram uma significativa modificação no algoritmo ESO, também no intuito de tornar o método bidirecional (Rozvany *et al.*, 2004), conhecido como SERA (*Sequential Element Rejection and Admission*).

Uma das deficiências das propostas iniciais do método BESO é ser dependente da discretização da malha. De acordo com (Sigmund; Petersson, 1998), essa deficiência é comum à maioria dos métodos de otimização topológica, não apenas ao BESO. Outro problema é que, inicialmente, os métodos ESO/BESO podiam conduzir para uma solução não convergente (a solução pode piorar em relação a função objetivo), gerar uma topologia com descontinuidade da estrutura (quebra), ou problemas do tipo tabuleiro de xadrez (*checkerboard*). Por isso, optou-se por adotar critérios de parada definidos em termos de um volume objetivo e não da função objetivo. *Checkerboard* refere-se ao problema da formação de regiões com alternância entre elementos sólidos e vazios, gerando uma topologia que se assemelha a um tabuleiro de xadrez. A figura 1.1 ilustra um problema de *checkerboard*.

Baseado em técnicas utilizadas em processamento de imagem, (Sigmund; Petersson, 1998) sugeriram a utilização de um filtro numérico, fazendo com que a sensibilidade de cada elemento seja calculada através da média ponderada da sensibilidade do próprio elemento e dos elementos ao redor.

No intuito de corrigir as principais deficiências do método BESO, como garantir a existência da solução, evitar *checkerboard* e tornar a topologia independente da malha, (Huang; Xie, 2007) desenvolveram um método evolucionário bidirecional de otimização estrutural convergente e independente da malha inicial. Para reduzir os problemas de *checkerboard* e a dependência da malha, a sensibilidade é inicialmente suavizada através de um esquema de filtro numérico. Suavizando a sensibilidade e utilizando uma média histórica, é possível estabilizar o procedimento de otimização.

O método evolucionário de otimização estrutural (ESO), inicialmente proposto por (Xie; Steven, 1993) foi baseado em critérios de tensão, através da gradual remoção dos elemen-

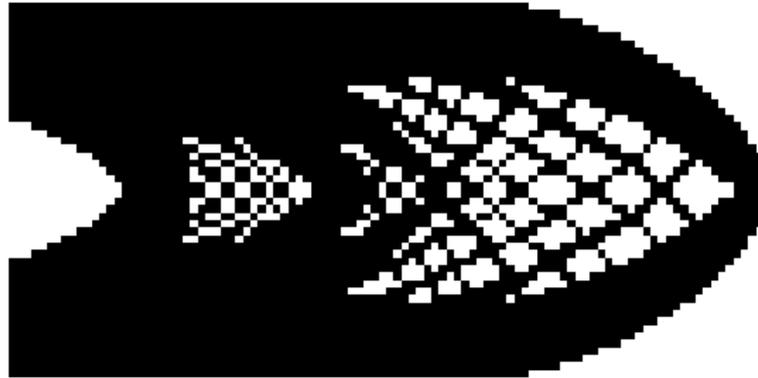


Figura 1.1 – Exemplo do problema de *checkerboard*.

tos com tensões menores. Entretanto, as pesquisas iniciais na versão bidirecional do método evolucionário de otimização estrutural (BESO) foram desenvolvidas utilizando critérios de rigidez (Yang *et al.*, 1999).

Recentemente o método BESO foi estendido à minimização da norma-P das tensões de von Mises por (Xia *et al.*, 2018) e (Nabaki *et al.*, 2019). Apesar das cargas dependentes terem sido objeto de estudo anterior em BESO, tais pesquisas apenas abordam a minimização da compliance, ou seja, utilizam critérios de rigidez. Outro trabalho recente desenvolvido utilizando o método BESO foi apresentado por (Zhou *et al.*, 2021), utilizando a normalização das sensibilidades, aplicado à dinâmica estrutural, esta técnica também foi aplicada no presente trabalho no intuito de contribuir com a estabilização do processo de otimização. Mais detalhes sobre o método BESO e diversas aplicações podem ser encontrados no livro de (Huang; Xie, 2010).

O foco do presente trabalho é apresentar uma proposta de otimização topológica baseada na minimização da norma-P das tensões de von Mises desenvolvida para permitir a inclusão de cargas dependentes de projeto.

1.2 Cargas dependentes

De forma geral, cargas dependentes são aquelas que podem variar em intensidade direção ou ponto de aplicação, em função da variação da geometria da estrutura. Como exemplo de cargas dependentes em estruturas da construção civil é possível destacar as cargas devido ao vento, a neve em telhados e o peso próprio. Em estruturas mecânicas destacam-se as cargas internas em carcaças de bombas, containers de pressão e devido ao escoamento de fluidos em dutos e turbinas. Em engenharia aeronáutica destaca-se o escoamento externo ao redor da superfície das asas, empenagens e fuselagem.

Do ponto de vista da otimização topológica, carga dependente de projeto é aquela que pode mudar de ponto de aplicação, direção ou intensidade com a evolução da topologia ao longo do processo iterativo de otimização. A maioria dos estudos em otimização topológica são focados na otimização de estruturas nas quais a carga permanece fixa durante o processo de otimização, porém muitos problemas de engenharia envolvem cargas dependente de projeto.

De acordo com a origem, as cargas dependentes podem ser classificadas como: de corpo e de pressão. Neste trabalho as cargas dependentes são apresentadas de acordo com a origem, seguindo uma ordem cronológica interna ao item, que representa o histórico da evolução das cargas dependentes para cada tipo de carregamento.

1.2.1 Forças de corpo

Em alguns casos de otimização estrutural, o peso próprio representa uma parcela bastante significativa das cargas, principalmente nas aplicações em engenharia civil. O peso próprio também é significativo no controle do peso de estruturas internas em engenharia aeronáutica. A partir da década de 70 diversos trabalhos têm sido desenvolvidos no intuito de contemplar as cargas de corpo.

Em 1977, Rozvany apresentou as primeiras discussões acrescentando a combinação das cargas aplicadas com as cargas devido ao peso próprio (Rozvany, 1977). Em 1980, (Rozvany *et al.*, 1980) publicaram a modificação do trabalho desenvolvido por Rozvany e Prager de otimização de superfícies curvas (modeladas com a interseção de arcos em duas direções) possibilitando a combinação das cargas externas com a carga devido ao peso próprio. (Karihaloo; Kanagasundaram, 1987) apresentaram uma proposta para o cálculo de vigas estaticamente indeterminadas sujeitas a cargas concentradas e cargas devido ao peso próprio. (Turteltaub; Washabaugh, 1999) apresentaram o primeiro trabalho combinando peso próprio e força centrí-

fuga, o método foi desenvolvido através da maximização a rigidez levando em conta as forças de corpo variáveis, sem restrições em relação às frequências naturais. (Park *et al.*, 2003) apresentaram um estudo de otimização topológica de uma lente de uma câmera multi-espectral para uso espacial, a câmera tem um funcionamento semelhante a um telescópio e a otimização considera cargas devido ao peso próprio.

O trabalho de (Yang *et al.*, 2005), além de abordar a otimização de estruturas sujeitas à cargas de superfície, também aborda a otimização de estruturas sujeitas à cargas de corpo devido ao peso próprio. (Bruyneel; Duysinx, 2005) apresentaram uma proposta de otimização topológica incluindo carga dependente devido ao peso próprio, utilizando *Gradient-Based Method of Moving Asymptotes* (GBMMA). (Ansola *et al.*, 2006) apresentaram uma modificação no método ESO para incluir as cargas devido ao peso próprio. (Gao *et al.*, 2008) apresentaram a otimização topológica considerando o problema de condução de calor, incluindo carga térmica dependente, utilizando o método BESO. Em 2011, Huang e Xie apresentaram a minimização da compliance incluindo carga dependente devido ao peso próprio utilizando o método BESO (Huang; Xie, 2011).

1.2.2 Forças de superfície

(Hammer; Olhoff, 2000) apresentaram estruturas sujeitas a pressão estática, as quais sofrem alterações tanto na direção quanto na intensidade, ao longo do processo de otimização. A otimização é baseada na minimização da compliance com restrição de volume, utilizando a interpolação de material SIMP, as forças são aplicadas ao longo do contorno da superfície.

No trabalho de (Chen; Kikuchi, 2001) é utilizada uma carga térmica fictícia para representar a pressão exercida pelo fluido em um sólido. O domínio de projeto é composto por três fases (sólido, vazio e fluido hidrostático). A otimização é realizada utilizando SLP (*sequential linear programming*) e interpolação de material SIMP. (Bourdin; Chambolle, 2003) apresentaram forças de pressão na interface com estruturas sólidas, através da minimização da compliance, calculada considerando o trabalho total das pressões e das forças internas.

O trabalho de (Fuchs; Shemesh, 2004) aborda as particularidades encontradas na simulação de estruturas sujeitas a pressão exercida pela água, o estudo aborda a localização da fronteira e sugere uma transição suave para o valor do módulo de elasticidade, na interface entre o sólido e a água, para reduzir instabilidades numéricas. Em 2004, Du e Olhoff publicaram dois trabalhos com estruturas sujeitas a cargas dependentes, o primeiro aborda estruturas 2D

(Du; Olhoff, 2004a) e o segundo aborda estruturas 3D (Du; Olhoff, 2004b), o método adota minimização da compliance em um algoritmo baseado em uma técnica de isolinha modificada, utilizado para gerar a superfície carregada que permanece na fronteira durante a evolução da topologia.

Nesse contexto vale lembrar que o trabalho de (Yang *et al.*, 2005) além de abordar a otimização de estruturas sujeitas à cargas de corpo devido ao peso próprio, também aborda estruturas sujeitas à cargas de superfície. (Sigmund; Clausen, 2007) utilizaram uma formulação mista deslocamento/pressão definindo a fase dos vazios como sendo um fluido hidrostático, transferindo as cargas de pressão através do fluido, sem a necessidade de parametrização das cargas de superfície, os exemplos envolvem estruturas 2D e 3D, o trabalho apresenta também uma extensão para três fases (sólido, vazio e fluido), e utiliza a interpolação de material RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*).

(Bruggi; Cinquni, 2009) apresentaram uma formulação para o problema de otimização incluindo cargas devido à pressão utilizando MMA (*method of moving asymptotes*), o método é baseado na aplicação de restrições nas pressões para evitar topologias com cavidades preenchidas por fluidos. Trabalhos envolvendo a interação fluido estrutura também foram desenvolvidos por: (Emmendoerfer-Jr.; Fancello, 2014) que abordaram a otimização topológica incluindo carga dependente devido a pressão, através da minimização de volume com restrição em tensão, utilizando *Level set*; (Picelli *et al.*, 2015) que apresentaram a otimização topológica incluindo carga dependente devido a pressão por contato com um fluido, sendo o domínio estrutural modelado através das equações da elasticidade e o domínio fluido modelado através da equação de Laplace e (Picelli *et al.*, 2017) que apresentaram a otimização estrutural sujeita a cargas dependentes devido a pressão aplicada à módulos flutuantes submersos.

1.2.2.1 Forças transmissíveis

As cargas transmissíveis podem ser consideradas uma particularização das cargas de superfície. Uma força transmissível é uma força que se altera à medida que o contorno da estrutura é modificado, seguindo a sua linha de ação. Um exemplo bastante representativo deste tipo de carga é a força exercida pela neve em telhados. A formulação da otimização é semelhante à formulação padrão do procedimento de otimização topológica, com a adição da condição de transmissibilidade da força.

(Rozvany; Prager, 1979) apresentaram a otimização de superfícies curvas, nas quais

a superfície é substituída por um sistema denso de interseção de arcos em duas direções prescritas; nesse estudo, a malha varia com a topologia, mas a magnitude da carga permanece a mesma. Em 1982 foi apresentada uma nova classe de estruturas otimizadas, denominadas estruturas de Prager (Prager-structures), em homenagem ao professor Prager que iniciou o projeto e faleceu inesperadamente (Rozvany *et al.*, 1982b). Uma estrutura de Prager deve satisfazer os seguintes critérios de projeto: todos os componentes da estrutura têm a mesma tensão, que é constante ao longo do sistema. O peso estrutural total é minimizado em relação ao layout do componente, bem como o local das forças externas deve permanecer constante ao longo da sua linha de ação.

Em 1993, Rozvany e Wang desenvolveram um método utilizando o conceito de estruturas de Prager, para qualquer sistema de cargas verticais, cujo estudo incluiu também alguns exemplos de aplicação do método (Rozvany; Wang, 1983). Também em 1983, o procedimento de otimização estático-cinemático foi estendido para cargas não paralelas (Wang; Rozvany, 1983) e o procedimento para forças verticais foi modificado, para levar em conta o efeito da carga devido ao peso próprio. Em 2000, Fuchs e Moses apresentaram a proposta de otimização topológica utilizando cargas transmissíveis (Fuchs; Moses, 2000), combinado com o método de interpolação de material SIMP.

1.3 Otimização estrutural baseada em critérios de tensão

Os três principais desafios da otimização estrutural baseada nos critérios de tensão são: a natureza local das tensões que resulta em um grande número de restrições; o problema de singularidade que aparece nos métodos baseados em densidade, resultando no aparecimento de regiões degeneradas, onde os elementos com baixa densidade e tensões elevadas não podem ser removidos pelo algoritmo, convergindo em ótimos locais; e o comportamento não linear das tensões em relação às variáveis de projeto. A singularidade pode ser resolvida através de métodos de relaxamento, fazendo com que a tensão e a densidade decresçam simultaneamente. A natureza local das tensões pode ser resolvida transformando a tensão nos elementos em uma medida global, utilizando uma função de agregação, como a função Kreisselmeier–Steinhauser (KS) investigada por (Yang; Chen, 1996) ou a norma-P sugerida por (Duysinx; Sigmund, 1998). Ao aumentar o valor da ordem da norma (expoente P), a norma tende ao valor máximo do conjunto, portanto minimizar a norma-P das tensões de von Mises, tende a minimizar o valor da máxima tensão de von Mises da estrutura. Para aumentar o valor do expoente P (Kiyono *et al.*, 2016) apresentou uma solução para a minimização das tensões com uma formulação utilizado

múltiplos valores para o expoente da norma. O comportamento não linear das tensões ocorre em locais onde os níveis de tensão são muito sensíveis as variações da topologia durante o processo de otimização, como por exemplo os cantos vivos. É preciso destacar que a não linearidade citada é a não linearidade das tensões em relação às variáveis de projeto. Para minimizar esse problema alguns autores aplicam um filtro adicional para suavizar a topologia ao longo das iterações (Le *et al.*, 2010) e (Xia *et al.*, 2018).

Diversos trabalhos baseados na restrição das tensões tem sido propostos como (Guilherme; Fonseca, 2007), (París *et al.*, 2009), (París *et al.*, 2010), (Luo *et al.*, 2013), (Moon; Yoon, 2013), (Luo *et al.*, 2014). (Le *et al.*, 2010) apresentou uma medida global/regional combinada com um sistema adaptativo para controlar o nível de tensões local, utilizando informações das últimas iterações. (Holmberg *et al.*, 2013) desenvolveu um método para lidar com o número elevado de restrições, onde os pontos de avaliação da tensões são separados em grupos de acordo com o nível de tensão. (Emmendoerfer-Jr.; Fancello, 2014) apresentou a minimização do volume com restrição de tensão, incluindo cargas dependentes devido à pressão, utilizando *level set*. (Svärd, 2015) apresentou uma proposta para elevar a acurácia do cálculo das tensões, na qual uma técnica de relaxação das tensões conhecida como *qp*, combinada com a norma-P foi utilizada para formular o problema de otimização baseado em restrição de tensão. (Verbart *et al.*, 2017) apresentou uma proposta unificando a agregação com a relaxação, incluindo um estudo sobre os parâmetros de agregação, as funções de agregação avaliadas foram *lower bound KS-function* e *P-mean function*. (Picelli *et al.*, 2018) resolveu o problema utilizando tanto a minimização das tensões quanto a restrição das tensões, através de uma aproximação sequencial linear utilizando *level set*. (Blachowski *et al.*, 2020) apresentou a otimização topológica de estruturas elastoplásticas sujeitas a restrição das tensões.

Trabalhos baseados em critérios de tensão incluindo cargas dependentes, foram apresentados apenas utilizando outros métodos: (Lee *et al.*, 2012) resolveu o problema através da restrição das tensões com minimização da massa utilizando SNOPT (*sequential quadratic programming optimizer*) e (Emmendoerfer-Jr. *et al.*, 2019) propôs um método utilizando *level set*, ambas propostas são baseada na minimização do volume com restrição das tensões; (Senhora *et al.*, 2020) apresentou a otimização topológica utilizando um método baseado em densidade, o método Lagrangiano Aumentado (AL), uma técnica numérica que foi utilizada para resolver problemas de otimização com restrição, sendo a proposta focada na minimização da massa com restrição de tensão, tratando a tensão como uma quantidade local.

Em relação aos métodos evolucinários, a versão unidirecional, o método ESO, foi inicialmente desenvolvido utilizando critérios de tensão, por (Xie; Steven, 1993), gradualmente removendo os elementos com valores menores de tensão. Entretanto os primeiros trabalhos utilizando a versão bidirecional foram focados no critério de rigidez, (Yang *et al.*, 1999), devido ao comportamento local das tensões. Apenas recentemente o método BESO foi estendido aos critérios de tensão (Xia *et al.*, 2018) e (Nabaki *et al.*, 2019), minimizando a norma-P das tensões de von Mises. Também utilizando BESO, alguns autores propuseram a combinação das minimizações da compliance com a minimização das tensões, sendo que o trabalho desenvolvido por (Zhao *et al.*, 2019) é focado na tensão de von Mises e o trabalho desenvolvido por (Chen *et al.*, 2020) é focado na tensão principal.

1.4 Objetivos

A contribuição original deste trabalho é o desenvolvimento de uma proposta de otimização estrutural topológica utilizando um método discreto, baseado em um critério de tensão e incluindo cargas dependentes, dois desafios no campo da otimização estrutural. A proposta foi implementada utilizando a linguagem de programação MatLab incluindo: a discretização da malha, a definição das condições de contorno, a análise por elementos finitos e o algoritmo de otimização estrutural (BESO).

A definição clara da variável de projeto é característica dos métodos *level set* e BESO, estes dois métodos produzem uma representação binária da estrutura (sólido e vazio). Uma vantagem dos métodos binários é evitar o problema de singularidade, que pode ocorrer quando elementos com baixa densidade e elevada tensão não podem ser removidos pelo algoritmo de otimização ao utilizar um método baseado em densidade.

A proposta é baseada na minimização da norma-P das tensões de von Mises com restrição de volume, de estruturas sujeitas à cargas dependentes. A norma-P foi utilizada como função de agregação, primeiramente, porque a função objetivo precisa ser uma função diferenciável. Outro motivo para utilizar a norma-P é que ao aumentar o valor do expoente P, a norma tende ao valor máximo do conjunto, no caso a máxima tensão de von Mises. Portanto ao aumentar o valor do expoente P, minimizar a norma-P das tensões de von Mises tende a minimizar o valor da máxima tensão de von Mises da estrutura.

Como as cargas variam ao longo do processo de otimização, o termo devido a derivada das forças aplicadas em relação à variável de projeto não é nulo. Portanto, uma análise

consistente da sensibilidade incluindo o termo devido à carga dependente foi desenvolvida através do método adjunto, para as cargas de corpo e para as cargas de superfície. As cargas transmissíveis não foram analisadas por serem consideradas, em termos de desenvolvimento do algoritmo e formulação matemática, apenas uma particularização das cargas de superfície.

Ao considerar as cargas dependentes, dois principais desafios são introduzidos. Um está relacionado à localização da carga que varia ao longo da otimização e, no caso das cargas de superfície, varia também em termos de direção. O outro ocorre apenas no caso de cargas de superfície e está relacionado à sensibilidade dos elementos carregados de algumas estruturas, fazendo com que, nas regiões onde o deslocamento é elevado, os elementos carregados sejam constantemente removidos ao longo das primeiras iterações, comprometendo o processo de otimização. Para solucionar este problema, foi adotado o uso de dois números de sensibilidade, calculados e utilizados separadamente nos critérios de adição e remoção de elementos.

Para melhorar a implementação e resolver os desafios relacionados ao desenvolvimento de um método baseado em um critério de tensão, foram avaliadas diversas soluções: o uso de *clusters*, que consiste em calcular a função de agregação separando a estrutura em regiões de acordo com o nível de tensão; a utilização de um filtro de suavização da topologia ao longo das iterações; a normalização da sensibilidade; e a média histórica das sensibilidades.

A significativa contribuição de incluir a normalização da sensibilidade, que não havia sido aplicada anteriormente em um método baseado em critério de tensões, foi aplicada para reduzir as diferenças entre as sensibilidades calculadas em cada iteração. Associada a média histórica, a normalização das sensibilidades reduz oscilações numéricas melhorando a convergência.

De forma geral o objetivo do trabalho é desenvolver, implementar e validar uma metodologia de otimização estrutural topológica, inicialmente modelada utilizando o método dos elementos finitos e posteriormente otimizada usando o método evolucionário bidirecional adaptado para o critério de tensão, incluindo cargas dependentes de projeto. Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Implementar o modelo em elementos finitos considerando que o material da estrutura tem um comportamento mecânico elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- Implementar o método de otimização estrutural BESO adaptado ao critério de tensão;

- Propor, implementar e validar uma metodologia de otimização estrutural incluindo cargas dependentes;
- Desenvolver um método consistente de análise de sensibilidade utilizando o método adjunto;
- Utilizar a estratégia de normalização das sensibilidades associada a média histórica.

O trabalho é organizado em sete capítulos: O primeiro capítulo apresenta a introdução com a contextualização do problema. O segundo apresenta o método BESO baseado no critério de rigidez com carga fixa. O terceiro apresenta a aplicação do método BESO baseado em um critério de tensão com carga fixa. O quarto capítulo apresenta a implementação e a validação do método BESO baseado no critério de rigidez com carga dependente devido ao peso próprio. O capítulo cinco apresenta o desenvolvimento da proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio. O capítulo seis apresenta o desenvolvimento da proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido a pressão. Finalmente, o capítulo sete apresenta as conclusões.

2 MINIMIZAÇÃO DA COMPLIANCE COM CARGA FIXA

Este capítulo apresenta o método de simulação computacional utilizado na otimização topológica, apresentando de forma sucinta a análise estrutural utilizando o método dos elementos finitos e posteriormente apresentando a otimização estrutural topológica baseada no critério de rigidez, utilizando o método BESO.

O método BESO baseado em critério de rigidez com restrição de volume é também conhecido como BESO *compliance*. Trata-se de um procedimento clássico que será utilizado como padrão de comparação nos exemplos que serão apresentados nos próximos capítulos. Mais detalhes do procedimento BESO (como o esquema de filtro, critério de remoção/adição de elementos e cálculo da sensibilidade) podem ser encontrados em (Huang; Xie, 2007).

2.1 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é amplamente utilizado em simulações computacionais para realizar análises estruturais. A análise baseia-se na discretização da estrutura em subestruturas, sendo que cada uma dessas subestruturas é denominada elemento finito e possui comportamento conhecido, sendo o comportamento do todo considerado como a superposição das subestruturas. Cada elemento finito tem um número de pontos, conhecido como nós, sendo apenas considerados explicitamente os deslocamentos generalizados nesses nós. Os deslocamentos nos demais pontos do elemento finito podem ser obtidos por interpolação dos deslocamentos dos nós, com base no esquema de interpolação adotado. O conjunto dos elementos e nós é denominado malha.

Existem diversos componentes tridimensionais que podem ser simplificados utilizando modelos bidimensionais. Nesse trabalho o modelo bidimensional é discretizado em uma malha quadrangular de quatro nós por elemento. Os coeficientes em estado plano de tensão das matrizes e vetores dos elementos, obtidos para a aproximação do modelo bidimensional, são calculados utilizando o procedimento de integração numérica. A quadratura de Gauss é estendida para as funções de integração com duas variáveis, inicialmente considerando a função $f(\xi, \eta)$ definida em um elemento quadrangular no sistema de coordenadas local, no intervalo fechado de $[1, -1]$.

A formulação por elementos isoparamétricos facilita o mapeamento do domínio es-

trutural, pois permite a utilização de elementos irregulares (Cook *et al.*, 2002). As funções de forma do elemento isoparamétrico quadrilateral com quatro nós, nas coordenadas isoparamétricas, são das por:

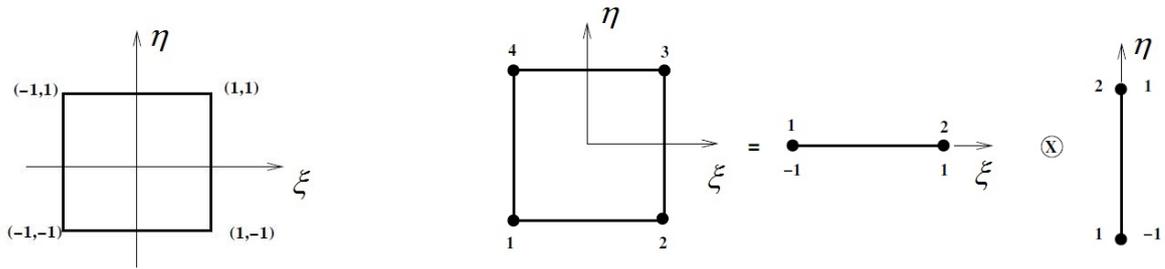
$$N1 = \frac{1}{4} (1 - \xi - \eta + \xi\eta) \quad (2.1a)$$

$$N2 = \frac{1}{4} (1 + \xi - \eta - \xi\eta) \quad (2.1b)$$

$$N3 = \frac{1}{4} (1 + \xi + \eta + \xi\eta) \quad (2.1c)$$

$$N4 = \frac{1}{4} (1 - \xi + \eta - \xi\eta) \quad (2.1d)$$

A figura 2.1 apresenta o sistema de coordenadas local do elemento isoparamétrico quadrilateral com quatro nós.



(a) Sistema de coordenadas local.

(b) Construção do tensor das funções de forma.

Figura 2.1 – Sistema de coordenadas local e construção do tensor das funções de forma.

Substituindo os valores dos pontos de Gauss nas variáveis ξ e η e aplicando os pesos de interpolação, W_ξ e W_η , obtemos a matriz de rigidez do elemento de quatro nós.

A matriz das funções de forma pode ser apresentada na forma matricial:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Sendo a matriz Jacobiana dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo x_j e y_j ($j = 1, 2, 3, 4$) as coordenadas dos j nós de cada elemento.

A matriz de deformação deslocamento, \mathbf{B}_i , pode ser calculada como a matriz das derivadas das funções de forma, que para o caso do problema de elasticidade plana pode ser obtido derivando-se cada função de interpolação em relação a ξ e η . Portanto, a matriz de deformação deslocamento, \mathbf{B}_i , para o caso do problema de elasticidade plana, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{i(1,2,3,4)} = \begin{bmatrix} a(N_{i,\xi}) - b(N_{i,\eta}) & 0 \\ 0 & c(N_{i,\eta}) - d(N_{i,\xi}) \\ c(N_{i,\eta}) - d(N_{i,\xi}) & d(N_{i,\xi}) - d(N_{i,\eta}) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Sendo os coeficientes:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} [y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(1 + \xi) + y_4(1 - \xi)] \\ b &= \frac{1}{4} [y_1(\eta - 1) + y_2(1 - \eta) + y_3(1 + \eta) + y_4(-1 - \eta)] \\ c &= \frac{1}{4} [x_1(\eta - 1) + x_2(1 - \eta) + x_3(1 + \eta) + x_4(-1 - \eta)] \\ d &= \frac{1}{4} [x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(1 + \xi) + x_4(1 - \xi)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

A matriz de rigidez de um elemento finito isoparamétrico quadrangular de 4 nós é calculada utilizando a integral:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (2.6)$$

sendo que \mathbf{D}_i e \mathbf{B}_i são respectivamente a matriz constitutiva e a matriz de deformação deslocamento (matriz das derivadas das funções de forma) do elemento e \mathbf{J} é a matriz Jacobiana associada a área do elemento.

O estado plano de tensão assume que as tensões normais e de cisalhamento, na direção perpendicular ao plano são nulas. No presente trabalho são consideradas as principais hipóteses a seguir:

- A estrutura possui as dimensões fora do plano muito menores que as dimensões dentro do plano. Adotando-se o plano xy como referência para a modelagem, a dimensão na direção z corresponde a espessura do corpo que é considerada muito menor que as demais dimensões.
- A estrutura possui carregamento somente no plano médio xy ;
- O material da estrutura tem um comportamento mecânico elástico linear, isotrópico e homogêneo, portanto a lei de Hooke é considerada válida.

Então, considerando estado plano de tensões, a matriz constitutiva é dada por:

$$\mathbf{D}_i = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade.

A formulação isoparamétrica é uma transformação de um elemento real em um elemento de referência. Aplicando a quadratura de Gauss para resolver a integral apresentada na equação 2.6, determina-se a matriz de rigidez do elemento:

$$K_e = \sum_{-1}^1 \sum_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \det[\mathbf{J}] w_\xi w_\eta \quad (2.8)$$

As coordenadas e ponderações dos pontos de integração são apresentados na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Coordenadas e ponderações dos pontos de integração.

ξ_1	ξ_2	w_ξ
-0.577350269189626	0.577350269189626	1
η_1	η_2	w_η
-0.577350269189626	0.577350269189626	1

Depois de determinar a matriz de rigidez do elemento, a matriz de rigidez global, \mathbf{K} , é montada de acordo as condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio entre os elementos. Também de acordo com os graus de liberdade, é montado o vetor global das forças aplicadas, \mathbf{f} .

A equação do equilíbrio estático é dada por:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.9)$$

Aplicando as condições de contorno e resolvendo-se o sistema linear, é possível calcular o vetor global dos deslocamentos, \mathbf{u} .

Mais detalhes sobre o método dos elementos finitos podem ser encontrados nas publicações (Cook *et al.*, 2002) e (Bittencourt, 2010).

2.2 Método BESO baseado em critério de rigidez

O código BESO baseado em critério de rigidez segue a estrutura básica apresentada no trabalho de (Huang; Xie, 2007). Sendo que a função objetivo C^* é calculada como a energia de deformação:

$$C^* = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (2.10)$$

Quando o elemento i é removido da estrutura, a matriz de rigidez é transformada:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}^* - \mathbf{K} = -\mathbf{K}_i \quad (2.11)$$

sendo \mathbf{K}^* a matriz de rigidez resultante depois que o elemento é removido e \mathbf{K}_i a matriz de rigidez do elemento i .

Assumindo que a remoção do elemento não tem efeito na carga aplicada \mathbf{f} e variando os dois lados da equação de equilíbrio estático, a variação do vetor dos deslocamentos pode ser expressa na forma:

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.12)$$

Das equações 2.10 e 2.12 é possível obter a variação da função objetivo:

$$\Delta C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (2.13)$$

Então a sensibilidade do elemento i pode ser definida como:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (2.14)$$

sendo que \mathbf{u}_i é o vetor dos deslocamentos do elemento i e \mathbf{K}_i é a matriz de rigidez do elemento i .

A equação 2.13 representa a variação na compliance, como resultado da remoção do elemento i . Uma alternativa para minimizar a compliance, que equivale a maximizar a rigidez por meio da remoção de elementos, é eliminar os elementos com os menores valores de α_i , uma vez que causa um aumento menor em C do que eliminar elementos com α_i maiores. A sensibilidade de todos os elementos são então calculadas e os elementos são ordenados pelo valor da sensibilidade do maior para o menor.

2.2.1 Processo de adição/remoção de elementos

A máxima razão de admissão, AR_{max} , é um valor introduzido para garantir que não serão acrescentados muitos elementos a cada iteração. O elemento sólido é removido se: $\alpha_i \leq \alpha_{del}^{th}$ e o elemento vazio é adicionado se: $\alpha_i > \alpha_{add}^{th}$. Sendo α_{del}^{th} e α_{add}^{th} os limites de remoção e adição de elementos que são determinados de acordo com os passos seguintes:

1. α_{del}^{th} e α_{add}^{th} são iguados a α_{th} , onde α_{th} pode ser calculado através do volume da iteração seguinte (V_{k+1}).
2. A razão de admissão AR pode ser calculada para cada iteração como o quociente entre o número de elementos adicionados e o número total de elementos. Se $AR \leq AR_{max}$ o procedimento segue para o próximo passo.
3. O α_{add}^{th} é obtido ordenando-se o número de sensibilidade dos elementos vazios. O número de elementos a ser transformados de vazios para sólidos é calculado como o AR_{max} multiplicado pelo número total de elementos;
4. Então, α_{add}^{th} é calculado como sendo a sensibilidade do elemento ordenado imediatamente abaixo do último elemento adicionado;
5. α_{del}^{th} é então calculado de forma que o volume removido seja igual a $V_k - V_{k+1} + N_{add}$, sendo que N_{add} é o volume de elementos adicionados.

2.2.2 Formulação do método BESO aplicado à minimização da compliance

O problema de otimização estrutural topológica aplicado à minimização da compliance consiste em minimizar a energia de deformação sujeita a uma restrição de volume,

considerando as forças que atuam na estrutura. Portanto, o problema consiste em:

$$\text{Minimizar : } C^* = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}; \quad (2.15)$$

$$\text{Sujeito a : } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0; \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.17)$$

$$\text{sendo : } x_i = x_{min} \text{ ou } 1. \quad (2.18)$$

sendo que C^* é a energia de deformação (que é também proporcional ao valor da compliance da estrutura), n é o número de elementos, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{f} e \mathbf{u} são respectivamente os vetores das forças externas e dos deslocamentos. V_i é o volume do elemento V^* é o volume estrutural prescrito (volume final da estrutura) e a variável de projeto binária, x_i , representa a pseudo-densidade do elemento.

2.2.3 Análise da sensibilidade aplicada à minimização da compliance utilizando a interpolação SIMP

O método BESO desenvolvido por (Huang; Xie, 2007), que utiliza o modelo de interpolação de material SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é utilizado para resolver o problema apresentado nas equações (2.15 a 2.18).

De acordo com este modelo de interpolação de material, o módulo de Young penalizado é expresso por:

$$E(x_i) = E_0 x_i^q \quad (2.19)$$

sendo E_0 o módulo de Young dos elementos sólidos e q o fator de penalização do modelo de interpolação de material e x_i a variável de projeto, que originalmente é contínua para o modelo SIMP, sendo considerados apenas os valores limites na aplicação do algoritmo BESO.

Na versão *hard kill*, o valor 0 é utilizado para representar os elementos vazios e o valor 1 é utilizado para representar os elementos sólidos. Na versão *soft kill*, geralmente o valor $x_{min} = 0.001$ é utilizado para representar os elementos vazios e o valor de 1 é utilizado para representar os elementos sólidos.

Para um problema de elasticidade linear, bi ou tridimensional, a matriz de rigidez global, \mathbf{K} , pode ser expressa através do procedimento de montagem, que é representado pelo símbolo do somatório, \sum , utilizando a matriz de rigidez dos elementos e a variável de projeto:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N x_i^q \mathbf{K}_0 \quad (2.20)$$

sendo que \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do elemento sólido, x_i é a variável de projeto e q é o fator de penalização do modelo de interpolação de material, considerando que a malha é formada por elementos iguais, ou seja, o valor de \mathbf{K}_0 é constante em toda a malha.

Nos métodos ESO e BESO, a estrutura é otimizada utilizando variáveis de projeto discretas, isso quer dizer que a variável de projeto assume somente dois valores. Desta forma, a sensibilidade utilizada no método BESO pode ser definida para cada elemento de acordo com a versão *hard kill* ou *soft kill*.

Para o caso *hard kill* temos:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i) && \text{quando } x_i = 1; \\ \alpha_i &= 0 && \text{quando } x_i = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para o caso *soft kill* temos:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i) && \text{quando } x_i = 1; \\ \alpha_i &= \frac{x_{min}^{(q-1)}}{2} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i) && \text{quando } x_i = x_{min}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2.4 Esquema de filtro numérico de suavização da sensibilidade

O filtro numérico de suavização da sensibilidade é aplicado para melhorar a convergência (garantir que a solução melhore em relação a função objetivo), para gerar uma topologia sem descontinuidade da estrutura (quebra) e evitar a formação de regiões com alternância entre elementos sólidos e vazios (*checkerboard*). O filtro, conforme apresentado no trabalho de (Huang; Xie, 2007), consiste em calcular a sensibilidade de cada elemento através da média ponderada da sensibilidade do próprio elemento e dos elementos ao redor.

Antes de aplicar o esquema de filtro numérico, a sensibilidade nodal, α_j^n , é obtida através da sensibilidade calculada para cada elemento, α_i^e . Portanto, a sensibilidade nodal, α_j^n , é obtida considerando a influência da sensibilidade dos elementos conectados ao nó, j , sendo calculada por:

$$\alpha_j^n = \frac{\sum_{i=1}^M A_i \alpha_i^e}{\sum_{i=1}^M A_i} \tag{2.23}$$

sendo que M é o número de elementos conectados ao nó j e A_i é a área do elemento i .

A sensibilidade nodal é então convertida na sensibilidade do elemento suavizada. O comprimento de escala, chamado raio mínimo do filtro (r_{min}), cujo centro localiza-se no centroide do elemento i , identifica os nós que irão influenciar a sensibilidade do elemento i . Para facilitar o entendimento do raio do filtro, a figura 2.2 apresenta os nós localizados no interior do subdomínio.

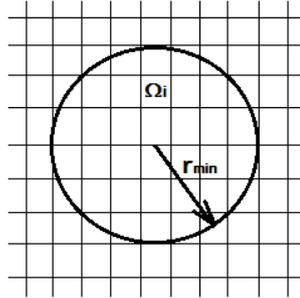


Figura 2.2 – Nós localizados no interior do subdomínio Ω_i .

A sensibilidade do elemento i é obtida através da expressão:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^k w(r_{ij})} \quad (2.24)$$

O filtro possui um fator de escala denominado r_{min} que identifica os nós que irão influenciar a sensibilidade do elemento e k_n é o número de nós pertencentes ao subdomínio Ω_i . O fator de peso, $w(r_{ij})$, indica que o número de sensibilidade do elemento tem maior influência na sensibilidade nodal quando o elemento é mais próximo ao nó. O fator de peso é definido como:

$$w(r_{ij}) = \max(0, r_{min} - r_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots, k_n) \quad (2.25)$$

sendo que r_{ij} é a distância entre o centro do elemento i e o nó j .

2.2.5 Estabilização do processo de evolução

Utilizando o esquema de filtro anteriormente descrito, similar ao sugerido por (Sigmund; Petersson, 1998), tanto a função objetivo quanto a topologia podem apresentar dificuldades de convergência. Para melhorar a convergência, (Huang; Xie, 2007) propuseram suavizar a sensibilidade através da média histórica:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} (\alpha_{i,k} + \alpha_{i,k-1}) \quad (2.26)$$

sendo k a iteração corrente e na primeira iteração $\alpha_{i,k} = \alpha_i$.

O volume da iteração seguinte é calculado como:

$$V_{k+1} = V_k + (1 - ER) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.27)$$

sendo ER a razão de evolução.

Considerando que os elementos têm tamanhos iguais, uma vez que o volume prescrito é alcançado, o volume da estrutura é mantido constante para as próximas iterações.

2.2.6 Critério de parada aplicado à minimização da compliance

O ciclo de análise em elementos finitos e de remoção/adição de elementos prossegue até que o volume objetivo seja atingido e o seguinte critério de parada seja satisfeito:

$$erro_{global} = \frac{\sum_{i=1}^N (C_{k-i+1} - C_{k-N-i+1})}{\sum_{i=1}^N (C_{k-i+1})} \leq \tau \quad (2.28)$$

sendo que τ é a precisão do critério de parada (o parâmetro de convergência) e N é o número de iterações. Usualmente utiliza-se $N = 5$, o que significa que a variação da compliance é avaliada para as últimas 10 iterações.

O algoritmo de otimização pode ser resumido através dos seguintes passos:

1. Discretização do domínio de projeto em elementos finitos e seleção das condições de contorno;
2. Definição dos parâmetros BESO: Razão de evolução, ER ; Máxima razão de admissão, AR_{max} ; Fração do volume inicial, V_{frac} ; Raio do filtro, r_{min} ; Fator de penalização do modelo de interpolação de material, q ; Número de iterações utilizado no cálculo do erro, N ; Precisão do critério de parada, τ ;
3. Análise por elementos finitos;
4. Cálculo da sensibilidade de acordo com a equação 2.22. Utilizando o filtro de sensibilidade e através da média histórica, a sensibilidade é recalculada e posteriormente ordenada.
5. Determinação do volume objetivo para a próxima iteração;
6. Adição e remoção de elementos;

7. Reinicialização da variável de projeto e atualização da topologia;
8. Os passos de 2 a 7 são repetidos até que a restrição de volume seja satisfeita e o critério de parada apresentado na equação 2.28 seja satisfeito.

Os algoritmos de otimização (BESO) e de análise utilizando o método de elementos finitos foram programados em MATLAB.

3 MINIMIZAÇÃO DA NORMA-P DAS TENSÕES DE VON MISES COM CARGA FIXA

O capítulo 3 apresenta o método BESO baseado em critério de tensão, através da minimização das tensões com restrição de volume. O objetivo geral da minimização das tensões é encontrar a melhor distribuição de material entre os elementos, reduzindo a concentração de tensões e reduzir da máxima tensão de von Mises da estrutura. Como a máxima tensão pode mudar de local ao longo das iterações, utiliza-se a norma-P das tensões como uma função de agregação para transformar a tensão nos elementos em uma medida global do nível de tensões (Duysinx; Sigmund, 1998).

3.1 Utilização do método adjunto na solução do problema de otimização topológica baseado no critério de tensões

Em geral, o processo de otimização consiste em otimizar uma função objetivo selecionando as variáveis de projeto que produzem um determinado resultado desejado. Em otimização topológica, o número de parâmetros representados pela variável de projeto chegar a milhares, dependendo do número de elementos usados no modelo. Frequentemente, o processo de otimização envolve a obtenção de informações não apenas da função objetivo, mas também da derivada da função objetivo em relação a variável ou variáveis de projeto.

A derivada da função objetivo é extremamente útil uma vez que fornece uma medida da sensibilidade da resposta aos parâmetros da variável de projeto. O método adjunto é uma forma eficiente de resolver a derivada da função objetivo, usualmente, a um custo comparável com o de resolver o sistema apenas uma vez. Portanto resolver o problema adjunto não é mais difícil do que resolver o próprio problema.

Nesse trabalho, a análise da sensibilidade é calculada através do método adjunto, sendo que a derivada da função objetivo é obtida através da regra da cadeia e o vetor dos multiplicadores de Lagrange é obtido resolvendo o sistema adjunto.

3.2 Formulação do problema de otimização baseado no critério de tensões

A otimização topológica baseada no critério de tensão é desenvolvida através da minimização da norma-P das tensões de von Mises com restrição de volume, que consiste em:

$$\text{Minimizar : } \sigma^{PN} = \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_i^{vm})^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (3.1a)$$

$$\text{Sujeito a : } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.1c)$$

$$\text{sendo : } x_i = x_{min} \quad \text{ou} \quad 1. \quad (3.1d)$$

sendo que σ^{PN} é função de agregação (norma-P das tensões de von Mises), P é a ordem da norma, conforme o expoente P aumenta, o valor da norma aproxima-se do valor da tensão máxima e n é o número de elementos. V_i é o volume do elemento e V^* é o volume prescrito (volume final da estrutura). A variável de projeto binária, x_i , representa a pseudo-densidade do elemento. \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores das forças externas e dos deslocamentos.

Nesse trabalho, o valor $x_{min} = 0,001$ é utilizado para representar os elementos vazios e o valor de 1 é utilizado para representar os elementos sólidos.

O módulo de Young penalizado é expresso por:

$$E(x_i) = E_0 x_i^q \quad (3.2)$$

sendo que E_0 é o módulo de Young dos elementos sólidos e q é o fator de penalização do modelo de interpolação de material.

A matriz de rigidez global, \mathbf{K} , pode ser expressa através do procedimento de montagem, utilizando a matriz de rigidez dos elementos e a variável de projeto:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_i} x_i^q \mathbf{K}_0 \quad (3.3)$$

sendo que \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do elemento sólido.

Para evitar o uso do subscripto i , que denota o elemento, os componentes do vetor de tensões são escritos na forma: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$. As componentes de tensão são calculadas utilizando o método dos elementos finitos, como:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T \quad (3.4)$$

sendo que \mathbf{D}_i e \mathbf{B}_i são respectivamente a matriz constitutiva e a matriz deformação deslocamento do elemento.

A tensão de von Mises para o caso 2D, que é calculada no centroide dos elementos, é:

$$\sigma_i^{vm} = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2)} \quad (3.5)$$

Assumindo a hipótese de que os problemas que serão abordados, podem ser representados através do estado plano de tensões e que o material é um sólido isotrópico representado através do modelo de penalização SIMP, a matriz constitutiva é:

$$\mathbf{D}_i = \frac{E_0 x_i^q}{(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.2.1 Análise da sensibilidade da norma-P das tensões de von Mises

A variação da norma-P das tensões em relação a variável de projeto x_i é obtida através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 3.7 é a derivada da norma-P em relação a tensão de von Mises e pode ser calculado como:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} (\sigma_i^{vm})^P \right)^{\left(\frac{1}{P}-1\right)} \left((\sigma_i^{vm})^{(P-1)} \right) \quad (3.8)$$

O segundo termo do lado direito da equação 3.7 é a derivada da tensão de von Mises em relação as três componentes de tensão do caso 2D:

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_{xx}} \right) = \frac{1}{2\sigma_i^{vm}} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_{yy}} \right) = \frac{1}{2\sigma_i^{vm}} (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \tau_{xy}} \right) = \frac{3}{\sigma_i^{vm}} \tau_{xy} \quad (3.11)$$

O terceiro termo do lado direito da equação 3.7 é derivada do vetor de tensões (equação 3.4) em relação a variável de projeto x_i :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial x_i} \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

No cálculo da sensibilidade, este trabalho adota o mesmo esquema de interpolação utilizado por (Xia *et al.*, 2018). Nesse esquema de interpolação de material, a matriz constitutiva, \mathbf{D}_i , torna-se constante em relação a variável de projeto x_i . Relembrando que as componentes de tensão utilizadas no cálculo das tensões de von Mises e respectiva norma-P são calculadas de acordo com a equação 3.4.

A matriz tensão-deformação, \mathbf{B}_i , é a derivada das funções de forma e independe da variável de projeto x_i . Portanto o terceiro termo da equação 3.7 torna-se:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

onde \mathbf{D}_0 é a matriz constitutiva do elemento sólido.

Quando a carga é fixa a derivada das forças aplicadas é nula. Portanto derivando a equação do equilíbrio estático em relação a variável de projeto, temos:

$$0 = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

Isolando o termo devido ao deslocamento $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = -\mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right)$, a derivada da norma-P das tensões de von Mises em relação à variável de projeto torna-se:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \right) \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \left[-\mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (3.15)$$

Definindo a variável adjunta como:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{K}^{-1} \quad (3.16)$$

Então a derivada da norma-P das tensões de von Mises em relação a variável de projeto pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = -\boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (3.17)$$

O vetor adjunto é obtido resolvendo o sistema adjunto:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_0^T \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right) \quad (3.18)$$

sendo que a pseudo-carga, no lado direito da equação 3.18, é montada de forma semelhante ao vetor de força, calculado na análise por elementos finitos.

A sensibilidade é obtida como sendo o negativo da derivada da norma-P em relação à variável de projeto:

$$\alpha_i = - \left[\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} \right] = \left[\boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (3.19)$$

O filtro numérico utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises é o mesmo filtro utilizado na minimização da compliance, apresentado no item 2.2.4.

O ciclo de análise em elementos finitos e de remoção/adição de elementos prosegue até que o volume objetivo seja atingido e o seguinte critério de parada seja satisfeito:

$$erro_{global} = \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1} - \sigma_{max,k-N-i+1})}{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1})} \leq \tau \quad (3.20)$$

sendo $erro_{global}$ o critério de parada da otimização estrutural, σ_{max} a máxima tensão de von Mises, τ o Parâmetro de convergência e N o número de iterações. Usualmente utiliza-se $N = 5$, o que significa que a variação da sensibilidade é avaliada para as últimas 10 iterações.

3.3 Processo de otimização utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises

O procedimento de iteração do método evolucionário bidirecional inicia pela discretização do domínio de projeto, utilizando o método de elementos finitos. Em seguida, definem-se os parâmetros BESO:

1. Volume objetivo, como uma fração do volume inicial (V_{frac});
2. Razão de Evolução (ER);
3. Máxima razão de admissão (AR_{max});
4. Raio do filtro (r_{min});
5. Fator de penalização do modelo de interpolação de material (q);
6. Ordem da norma (P);

7. Valor mínimo atribuído à variável de projeto (x_{min});
8. Número de iterações utilizado no cálculo do erro (N);
9. Precisão do critério de parada (τ).

Na sequência inicia-se o processo de otimização propriamente dito, com a análise em elementos finitos para o cálculo das tensões, deformações e deslocamentos. Calcula-se a sensibilidade de cada elemento. Aplica-se o filtro numérico e calcula-se a sensibilidade como média histórica entre as iterações atual e a última iteração, conforme apresentado no item 2.2.5.

Determina-se o volume da próxima iteração $V_{k+1} = V_k + (1 - ER)$. Se o volume calculado para a próxima iteração for menor do que a fração do volume inicial (V_{frac}), o processo continua até que seja atingido o volume final desejado. Uma vez que o volume final é alcançado, o volume permanece constante.

A variável de projeto é reinicializada, os elementos são então ordenados de acordo com o valor da sensibilidade do maior para o menor. Calcula-se a razão de admissão da iteração, AR , que é definida como o número de elementos a ser adicionado, dividido pelo número total de elementos do modelo. O AR_{max} é introduzido para garantir que não serão acrescentados muitos elementos em cada iteração.

O ciclo de análise por elementos finitos, a adição e remoção de material continua até que o volume objetivo seja alcançado e o processo do critério de parada seja satisfeito, em função do valor da precisão, τ , previamente escolhido.

3.4 Minimização da norma-P das tensões de von Mises da viga em balanço

A viga em balanço será o exemplo utilizado como validação da proposta de implementação da minimização das tensões. A geometria, o carregamento e as condições de restrição da viga em balanço são apresentados na figura 3.1. A carga fixa F é de 1500 N. As propriedades do material são: Módulo de Young, $E = 210$ GPa; coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$ e massa específica, $\rho = 7870$ kg/m³. O Modelo em elementos finitos é composto de 5000 elementos, dispostos em uma malha de 100×50 elementos quadrados com quatro nós e de lados iguais.

Os resultados utilizados na validação da proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises utilizando o exemplo da viga em balanço são os resultados obtidos por (Nabaki *et al.*, 2019). Como os resultados da implementação da minimização da norma-P das tensões de von Mises serão comparados com os resultados obtidos por Nabaki *et al.*, em todas

as análises apresentadas neste item, os seis elementos onde a carga é aplicada foram eliminados da plotagem, assim como nas figuras apresentadas no trabalho de Nabaki *et al.* em 2019.

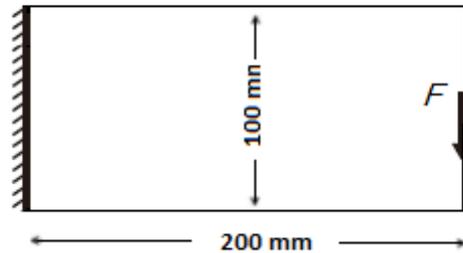


Figura 3.1 – Ilustração da viga em balanço.

A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros BESO utilizados na implementação da viga em balanço.

Tabela 3.1 – Parâmetros BESO utilizados na validação da implementação da minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	30, 40 e 50	%
ER	Razão de evolução	2	%
r_{min}	Raio do filtro	2	mm
AR_{max}	Máxima razão de admissão	0,5	%
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	3	-
P	Ordem da norma (expoente P)	4	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada para $V_{frac} = 30\%$	0,1	%
τ	Precisão do critério de parada para $V_{frac} = 40\%$	0,01	%
τ	Precisão do critério de parada para $V_{frac} = 50\%$	0,01	%

É preciso destacar que o valor do parâmetro de convergência e da ordem da norma não foram especificados no trabalho de (Nabaki *et al.*, 2019).

A Tabela 3.2 apresenta um resumo dos resultados obtidos para dois casos de otimização da viga em balanço: minimização de compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises. Os valores de σ_{max} , que é a máxima tensão de von Mises, obtidos na minimização da norma-P das tensões de von Mises são comparados com os obtidos na minimização

da compliance no intuito de verificar a eficiência do método de minimização das tensões em reduzir o valor da tensão máxima, sendo portanto τ_σ , a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 3.2 – Viga em balanço - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	V_{frac} (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	30	510,719	-
Tensão P4	30	394,179	-22.8
Compliance	40	431,152	-
Tensão P4	40	339,125	-21.3
Compliance	50	413,371	-
Tensão P4	50	311,245	-24.7

Comparando os valores é possível observar que na minimização da norma-P das tensões de von Mises o valor da tensão máxima é menor do que o valor obtido na minimização da compliance, para todas as frações volumétricas, confirmando a eficiência do método em reduzir o valor da tensão máxima.

A figura 3.2 apresenta a comparação entre as topologias obtidas na implementação dos dois casos de otimização: minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises. O mapa de cores apresentado são os valores das tensões de von Mises calculadas no centroide dos elementos.

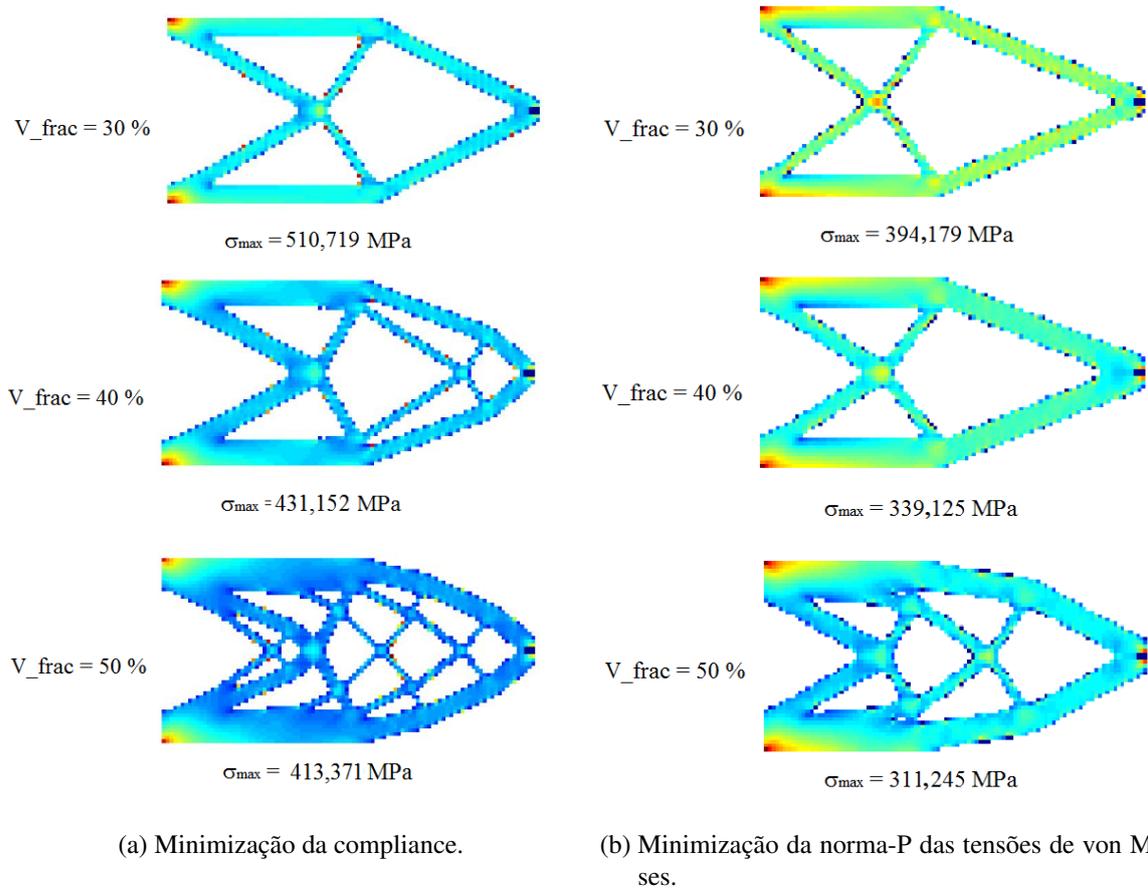
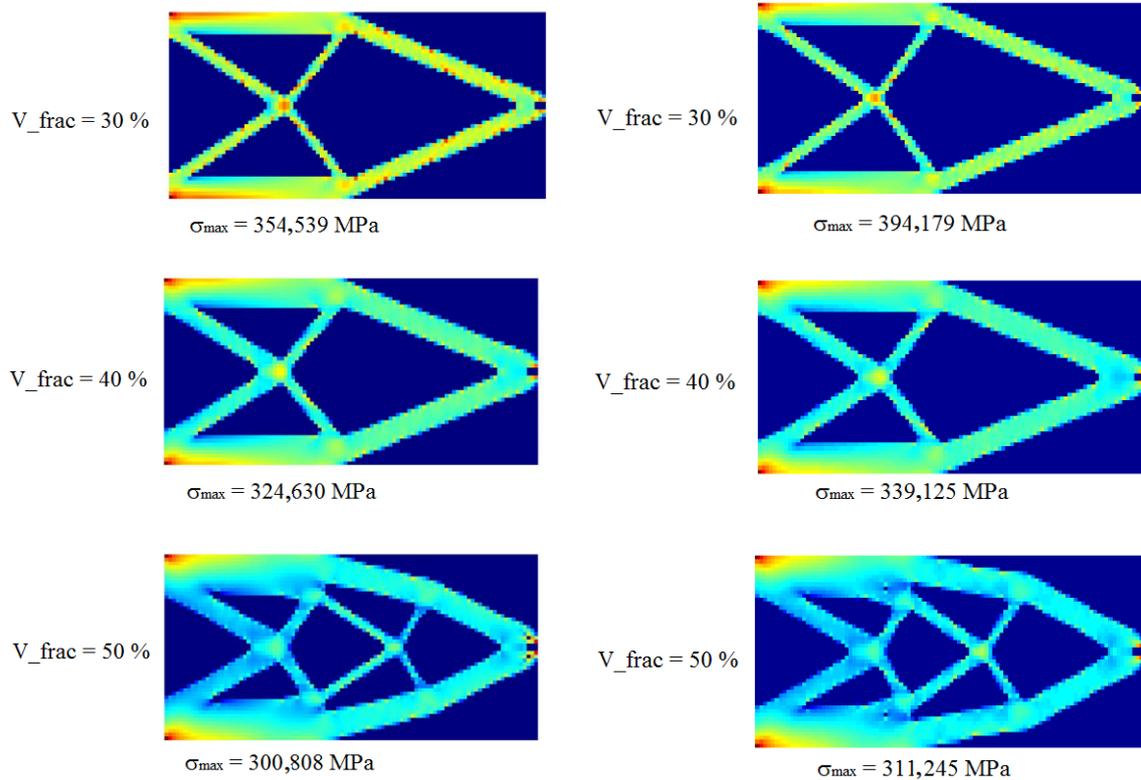


Figura 3.2 – Comparação entre a minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Observando a figura 3.2 é possível notar que as topologias obtidas através da minimização da norma-P das tensões de von Mises geram uma melhor distribuição das tensões ao longo da viga, permitindo um melhor aproveitamento do material.

A figura 3.3 apresenta a comparação entre os resultados obtidos por Nabaki *et al.* e a implementação realizada no presente estudo, utilizando como exemplo a viga em balanço. Conforme mencionado anteriormente, para efeitos de comparação, os seis elementos onde a carga é aplicada foram eliminados da plotagem, assim como nas figuras apresentadas no trabalho de Nabaki *et al.* em 2019.

(a) Resultados (Nabaki *et al.*, 2019).

(b) Resultados da implementação.

Figura 3.3 – Minimização da norma-P das tensões de von Mises: comparação com resultados da literatura.

Através dos resultados apresentados na figura 3.3 é possível verificar uma boa correlação tanto em relação às topologias quanto em relação ao valor das tensões obtidas. É possível observar também que a proposta de implementação da minimização da norma-P das tensões de von Mises utilizando o método BESO é eficiente em distribuir as tensões na estrutura e consequentemente reduzir o valor da tensão máxima.

4 MINIMIZAÇÃO DA COMPLIANCE COM CARGA DEPENDENTE DEVIDO AO PESO PRÓPRIO

O capítulo 4 apresenta a minimização da compliance incluindo carga dependente devido ao peso próprio, implementado de acordo com a proposta de (Huang; Xie, 2011).

4.1 Método BESO incluindo carga dependente devido ao peso próprio aplicado a minimização da compliance

O problema consiste em minimizar a função objetivo C^* sujeita a uma restrição de volume, considerando as forças que atuam na estrutura:

$$\text{Minimizar : } C^* = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}; \quad (4.1)$$

$$\text{Sujeito a : } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0; \quad (4.2)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.3)$$

$$\text{sendo : } x_i = x_{min} \text{ ou } 1. \quad (4.4)$$

sendo C^* a energia de deformação, n é o número de elementos, V_i é o volume do elemento, V^* é o volume estrutural prescrito (volume final da estrutura). A variável de projeto binária, x_i , representa a pseudo-densidade do elemento, sendo o valor mínimo que denota os elementos vazios x_{min} igual a 0,001. \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores das forças externas e dos deslocamentos.

Neste problema, o vetor das forças aplicadas, \mathbf{f} , inclui a carga dependente devido à gravidade. O método adjunto é utilizado para determinar a sensibilidade e os vetores de força, introduzindo um multiplicador de Lagrange, λ .

4.1.1 Análise da sensibilidade na minimização da compliance com carga dependente devido ao peso próprio

A função objetivo modificada pode ser expressa como:

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}) \quad (4.5)$$

A derivada da função objetivo modificada é:

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) \quad (4.6)$$

A equação (4.6) pode ser reescrita de forma a separar o termo desconhecido $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$, que representa a variação do vetor deslocamento em relação à variável de projeto x_i .

Então:

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_i} (\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\lambda}) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \quad (4.7)$$

Analisando o segundo termo da equação (4.7): $\left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$, para eliminar o termo desconhecido $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$, igualamos $\frac{1}{2} \mathbf{f}^T = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}$ e da equação de equilíbrio $\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u}$ temos que $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$. Portanto: $\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \mathbf{u}$.

Substituindo na equação (4.7) obtemos a derivada da função objetivo:

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_i} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \quad (4.8)$$

Considerando o esquema de interpolação utilizado por (Huang; Xie, 2011), que é uma adaptação do esquema de interpolação de material proposto por (Stolpe; Svanberg, 2001), a massa específica e o módulo de Young do modelo de interpolação de material são expressos por:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (4.9)$$

$$E_i = \frac{x_i}{1 + q(1 - x_i)} E_0 \quad (4.10)$$

sendo que ρ_0 e E_0 são a massa específica e o módulo de Young dos elementos sólidos e q é o fator de penalização do modelo de interpolação de material.

A análise de sensibilidade indica que o comportamento monotônico da função objetivo depende do valor do fator de penalização do modelo de interpolação de material, q . (Huang; Xie, 2011) observaram que utilizando um fator de penalização maior do que 3 (que é o valor usual para q), o comportamento monotônico da função objetiva é enfraquecido. Por esse

motivo, optou-se por utilizar o mesmo fator de interpolação de material utilizado nas análises apresentadas por (Huang; Xie, 2011), ou seja, $q = 5$.

Considerando uma malha para análise em elementos finitos quadrangular, de quatro nós por elemento, o vetor de carga nodal equivalente do elemento devido ao peso próprio, assumindo que a gravidade é constante e está alinhada com a direção vertical, é obtido através da seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_i = V_i \rho_i g \bar{\mathbf{f}} = V_i x_i \rho_0 g \left\{ 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4} \right\}^T \quad (4.11)$$

sendo: V_i o volume do elemento, ρ_i a massa específica do elemento apresentada na equação 4.9 e g a aceleração da gravidade. Portanto \mathbf{f}_i é a carga nodal equivalente devido ao peso próprio, distribuída nos graus de liberdade correspondentes à direção vertical.

Assumindo que a derivada das forças externas do elemento afeta apenas a carga dependente da variação da topologia devido ao peso próprio, a variação das forças externas torna-se:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = V_i \rho_0 g \bar{\mathbf{f}}^T \quad (4.12)$$

A variação da rigidez em relação a variável de projeto é:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\{(1)[1 + q(1 - x_i)]\} - \{x_i[0 + (q'(1 - x_i)) + (-1)(q)]\}}{[1 + q(1 - x_i)]^2} \mathbf{K}_0$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{[1 + q(1 - x_i)] - [(x_i)(-q)]}{[1 + q(1 - x_i)]^2} \mathbf{K}_0$$

A segunda parcela da sensibilidade da função objetivo, associada à energia de deformação total passa a ser:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + q}{[1 + q(1 - x_i)]^2} \right\} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i \quad (4.13)$$

Portanto a derivada da função objetivo em relação a variável de projeto torna-se:

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = V_i \rho_0 g \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_i - \left\{ \frac{1 + q}{2 [1 + q(1 - x_i)]^2} \right\} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i \quad (4.14)$$

Tabela 4.1 – Parâmetros BESO utilizados na validação da implementação minimização da compliance com peso próprio.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	50	%.
ER	Razão de evolução	2	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	2	%
r_{min}	Raio do filtro	0,3	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	5	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada	0,1	%

A sensibilidade pode ser definida para elementos sólidos e elementos vazios como:

$$\alpha_i = \frac{1}{(q+1)} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{V_i \rho_0 g}{(q+1)} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i, & x = 1; \\ -\frac{V_i \rho_0 g}{(q+1)} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_i + \frac{1}{2[1+q(1-x_i)]^2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i, & x = x_{min}. \end{cases} \quad (4.15)$$

A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros BESO utilizados na minimização da compliance com peso proprio da viga biapoiada.

Na minimização da compliance incluindo o peso próprio, a sensibilidade pode assumir tanto valores positivos quanto negativos. Portanto o sinal pode mudar, fazendo com que a sensibilidade tenha um comportamento não monotônico. O valor do fator de penalização do modelo de interpolação de material adotado na presente análise é o mesmo adotado nos exemplos apresentados no trabalho de (Huang; Xie, 2011), porque de acordo com (Huang; Xie, 2011), ao aumentar o valor do fator de penalização do modelo de interpolação de material o comportamento não monotônico da sensibilidade é enfraquecido, tanto que, quando o fator de penalização do material tende ao infinito, o comportamento não monotônico desaparece.

O filtro numérico utilizado na minimização da compliance com peso próprio é o mesmo filtro utilizado na minimização da compliance com carga fixa apresentado no item 2.2.4. O procedimento de convergência utilizado na minimização da compliance incluindo peso próprio é o mesmo utilizado na minimização da compliance com carga fixa apresentado no item 2.2.6.

A figura 4.1 apresenta as dimensões e condições de contorno da viga biapoiada.

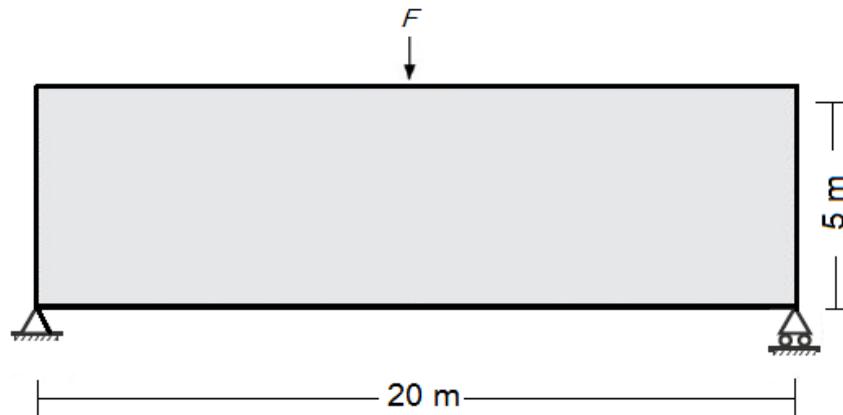


Figura 4.1 – Dimensões e condições de contorno da viga biapoiada.

As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 200 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica de 78 kg/m^3 . Embora a massa específica do aço seja 7800 kg/m^3 , foi mantida a massa específica de 78 kg/m^3 utilizada por (Huang; Xie, 2011), visando a comparação dos resultados.

4.1.2 Resultados da implementação do método BESO incluindo carga dependente devido ao peso próprio

A figura 4.2 apresenta os resultados dos casos com peso próprio obtidos por (Huang; Xie, 2011) apresentando as topologias para diferentes condições de carregamento, sendo que C^* é a energia de deformação da estrutura (que equivale a metade do valor da compliance).

A figura 4.3 apresenta a evolução da função objetivo com a fração volumétrica do caso de carregamento que considera apenas o peso próprio do trabalho publicado por (Huang; Xie, 2011).

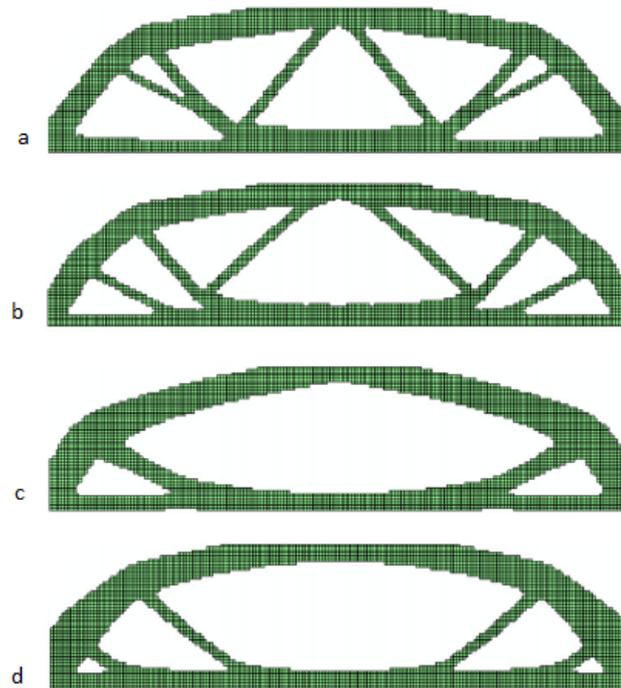


Figura 4.2 – Topologias para diferentes condições de carregamento obtidas por (Huang; Xie, 2011): (a) com peso próprio e $F = 100\%$ do peso próprio ($C^* = 0,282$ Nm); (b) com peso próprio e $F = 50\%$ do peso próprio ($C^* = 0,131$ Nm) ; (c) com peso próprio e $F = 10\%$ do peso próprio ($C^* = 0,048$ Nm); and (d) apenas peso próprio ($C^* = 0,034$ Nm).

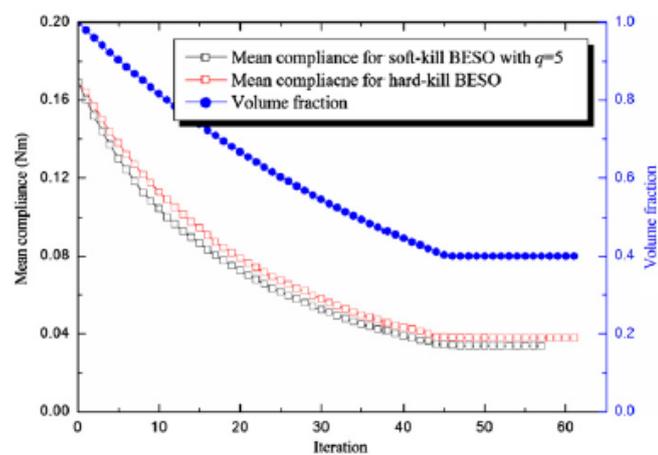


Figura 4.3 – Compliance e Fração volumétrica do caso (d) apenas peso próprio $C^* = 0,034$ Nm - (Huang; Xie, 2011).

A figura 4.4 apresenta as topologias para diferentes condições de carregamento obtidos através da implementação realizada neste trabalho que está de acordo com a proposta de (Huang; Xie, 2011), utilizando o método BESO com minimização da compliance incluindo carga dependente devido ao peso próprio, conforme apresentado no item 4.1. C^* é a energia de deformação da estrutura (que equivale a metade do valor da compliance).

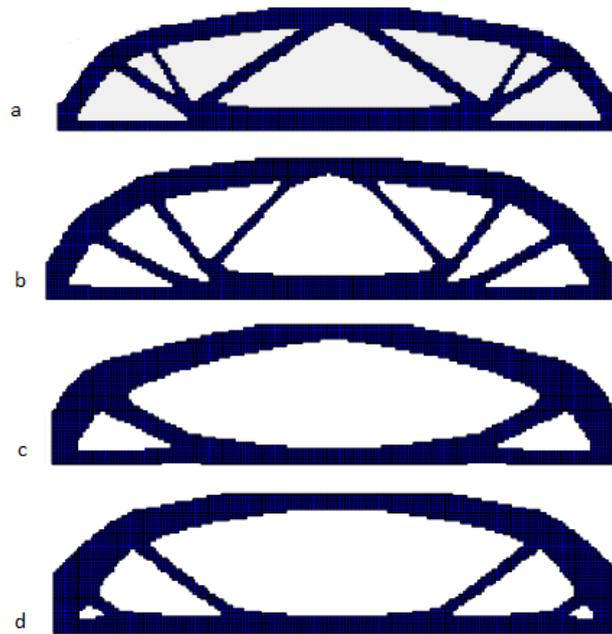


Figura 4.4 – Topologias para diferentes condições de carregamento obtidas na implementação da minimização das tensões com carga fixa: (a) com peso próprio e $F = 100\%$ do peso próprio ($C^* = 0,287$ Nm); (b) com peso próprio e $F = 50\%$ do peso próprio ($C^* = 0,131$ Nm); (c) com peso próprio e $F = 10\%$ do peso próprio ($C^* = 0,048$ Nm); and (d) apenas peso próprio ($C^* = 0,033$ Nm).

A figura 4.5 apresenta a evolução da função objetivo com a fração volumétrica obtida através da implementação do caso de carregamento considerando apenas o peso próprio, que corresponde a topologia do caso (d).

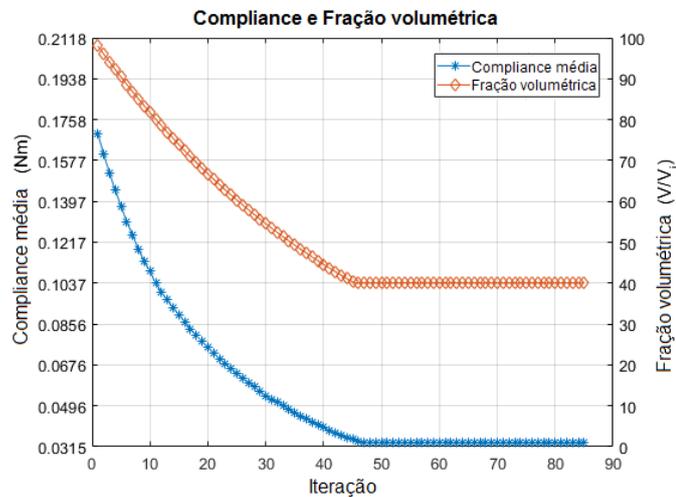


Figura 4.5 – Implementação: Compliance e Fração volumétrica do caso (d) apenas peso próprio $C^* = 0,033 \text{ Nm}$.

Através dos resultados é possível notar que as topologias dependem da razão entre a carga fixa e o peso próprio, o mesmo comportamento foi observado no trabalho de (Huang; Xie, 2007). É possível observar também que as barras centrais estão associadas à aplicação da carga fixa, portanto vão reduzindo conforme a carga fixa decresce, o que faz sentido do ponto de vista estrutural.

É possível também observar uma boa correlação entre as topologias apresentadas no trabalho de (Huang; Xie, 2007) (figura 4.2) e a implementação apresentada neste trabalho (figura 4.4). Os resultados obtidos validam a implementação da minimização da compliance com carga dependente devido ao peso próprio.

5 MINIMIZAÇÃO DA NORMA-P DAS TENSÕES DE VON MISES COM CARGA DEPENDENTE DEVIDO AO PESO PRÓPRIO

O objetivo final da otimização topológica baseada em critérios de tensão é encontrar a melhor distribuição dos elementos sólidos de forma a reduzir a concentração de tensões, com a consequente redução da tensão máxima da estrutura. Para lidar com o comportamento local das tensões, é adotada a norma-P das tensões de von Mises, agregando a tensão nos elementos em uma medida única que represente o nível de tensão global da estrutura. A tensão de von Mises é calculada através do método dos elementos finitos (FEM) considerando as cargas dependentes devido ao peso próprio. Na interpolação de material, uma função polinomial é utilizada para o módulo de Young e uma função linear é utilizada para a massa específica.

O problema de otimização estrutural topológica consiste em minimizar a norma P das tensões de von Mises sujeita a uma restrição de volume. Como o objetivo é reduzir o nível de tensões da estrutura, a avaliação numérica apresenta exemplos clássicos da literatura nos quais seja possível observar a concentração de tensões, no intuito de verificar a distribuição da tensão ao longo da estrutura e a redução no valor da máxima tensão de von Mises. Os três exemplos analisados são: o Perfil-L, a viga biapoiada com entalhe e a viga em balanço.

O Perfil-L foi escolhido devido à concentração de tensões no canto vivo. A viga biapoiada com entalhe foi escolhida devido à concentração de tensões causada pelo entalhe. A viga em balanço foi escolhida devido à concentração de tensões causada pelas condições de contorno. Como a proposta é avaliar a importância de considerar o peso próprio na minimização da norma-P das tensões de von Mises, no capítulo 5 todos os exemplos avaliados incluem a carga devido ao peso próprio.

5.1 Processo de otimização utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises

O procedimento de iteração do método evolucionário bidirecional inicia pela discretização do domínio de projeto, utilizando o método de elementos finitos. Em seguida, definem-se os parâmetros BESO:

1. Volume objetivo, como uma fração do volume inicial (V_{frac});
2. Razão de Evolução (ER);

3. Máxima razão de admissão (AR_{max});
4. Raio do filtro (r_{min});
5. Fator de penalização do modelo de interpolação de material (q);
6. Ordem da norma (P);
7. Valor mínimo atribuído à variável de projeto (x_{min});
8. Número de iterações utilizado no cálculo do erro (N);
9. Precisão do critério de parada (τ).

Na sequência inicia-se o processo de otimização propriamente dito, com a análise em elementos finitos para o cálculo das tensões, deformações e deslocamentos. Calcula-se a sensibilidade de cada elemento, aplica-se o filtro numérico e as técnicas de normalização das sensibilidades e do cálculo da média histórica entre a iteração atual e a última iteração.

Determina-se o volume da próxima iteração $V_{k+1} = V_k + (1 - ER)V_k$ que é regulado através do parâmetro ER , que é a razão de evolução, o qual controla a porcentagem de volume da iteração seguinte. Se o volume calculado para a próxima iteração for menor do que a fração do volume inicial (V_{frac}), o processo continua até que seja atingido o volume final desejado. Uma vez que o volume final é alcançado, o volume permanece constante.

A variável de projeto é reinicializada e os elementos são então ordenados de acordo com o valor da sensibilidade do maior para o menor. Calcula-se a razão de admissão da iteração, AR , que é definida como o número de elementos a ser adicionado, dividido pelo número total de elementos do modelo. O parâmetro AR_{max} é introduzido para garantir que não serão acrescentados muitos elementos em cada iteração. O ciclo de análise por elementos finitos e a adição e remoção de material continuam até que o volume objetivo seja alcançado e o processo do critério de parada seja satisfeito, em função do valor da precisão do critério de parada, τ , previamente escolhido.

5.1.1 Filtro de sensibilidade

O filtro numérico de suavização da sensibilidade é aplicado para melhorar a convergência (garantir que a solução melhore em relação a função objetivo), para gerar uma topologia sem descontinuidade da estrutura (quebra) e evitar a formação de regiões com alternância entre

elementos sólidos e vazios (*checkerboard*). O filtro consiste em calcular a sensibilidade de cada elemento através da média ponderada da sensibilidade do próprio elemento e dos elementos ao redor.

Antes de aplicar o esquema de filtro numérico, a sensibilidade nodal, α_j^n , é obtida através da sensibilidade calculada para cada elemento, α_i^e . Portanto, a sensibilidade nodal, α_j^n , é obtida considerando a influência da sensibilidade dos elementos conectados ao nó, j , sendo calculada como:

$$\alpha_j^n = \frac{\sum_{i=1}^M A_i \alpha_i^e}{\sum_{i=1}^M A_i} \quad (5.1)$$

sendo que M é o número de elementos conectados ao nó j e A_i é a área do elemento i .

A sensibilidade nodal é então convertida na sensibilidade do elemento suavizada. O comprimento de escala, chamado raio mínimo do filtro (r_{min}), cujo centro localiza-se no centroide do elemento i , identifica os nós que irão influenciar a sensibilidade do elemento i .

A sensibilidade do elemento i é obtida através da expressão:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^k w(r_{ij})} \quad (5.2)$$

O fator de peso, $w(r_{ij})$, determina se o número de sensibilidade do elemento tem maior ou menor influência na sensibilidade nodal. O fator de peso é definido como:

$$w(r_{ij}) = \max(0, r_{min} - r_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots, k_n) \quad (5.3)$$

sendo que r_{ij} é a distância entre o centro do elemento i e o nó j .

Utilizando o esquema de filtro anteriormente descrito, similar ao sugerido por (Sigmund; Petersson, 1998), tanto a função objetivo quanto a topologia podem apresentar dificuldades de convergência. Para melhorar a convergência, duas estratégias são adotadas, a normalização das sensibilidades e a média histórica.

A normalização das sensibilidades segue a proposta (Zhou *et al.*, 2021), a qual utiliza o método de escala Min-Max:

$$N(\alpha_i) = \frac{\alpha_i - (\alpha_{i min})}{(\alpha_{i max}) - (\alpha_{i min})} \quad (5.4)$$

sendo que $N(\alpha_i)$ é o vetor das sensibilidades normalizado. α_i é o vetor inicial das sensibilidades e $\alpha_{i max}$ e $\alpha_{i min}$ são respectivamente os valores máximos e mínimos.

As sensibilidades são então calculadas como a média das iterações atual e última:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} (\alpha_{i,k} + \alpha_{i,k-1}) \quad (5.5)$$

onde k e $k - 1$ são respectivamente a iteração atual e a iteração anterior.

O volume da próxima iteração é calculado como:

$$V_{k+1} = \max \{V^*, V_k(1 - ER)\} \quad (5.6)$$

onde ER é a razão de evolução responsável por controlar a porcentagem de volume que aumenta ou decresce o volume da iteração V_k .

5.1.2 Processo de adição/remoção de elementos

AR_{max} é a máxima razão de admissão, um valor introduzido para garantir que não serão acrescentados muitos elementos a cada iteração. O elemento sólido é removido se: $\alpha_i \leq \alpha_{del}^{th}$ e o elemento vazio é adicionado se: $\alpha_i > \alpha_{add}^{th}$. Sendo α_{del}^{th} e α_{add}^{th} os limites de remoção e adição de elementos que são determinados de acordo com:

1. α_{del}^{th} e α_{add}^{th} são igualados a α_{th} , onde α_{th} pode ser calculado através do volume da iteração seguinte (V_{k+1}).
2. A razão de admissão AR pode ser calculada para cada iteração como o quociente entre o número de elementos adicionados e o número total de elementos. Se $AR \leq AR_{max}$ o procedimento segue para o próximo passo.
3. O α_{add}^{th} é obtido ordenando-se o número de sensibilidade dos elementos vazios. O número de elementos a ser transformados de vazios para sólidos é calculado como o AR_{max} multiplicado pelo número total de elementos;
4. Então, α_{add}^{th} é calculado como sendo a sensibilidade do elemento ordenado imediatamente abaixo do último elemento adicionado;
5. α_{del}^{th} é então calculado de forma que o volume removido seja igual a $V_k - V_{k+1} + N_{add}$, sendo que N_{add} é o volume de elementos adicionados.

O ciclo de análise em elementos finitos e de remoção/adção de elementos prossegue até que o volume objetivo seja atingido e o critério de parada seja satisfeito.

Na minimização da norma-P das tensões de von Mises o critério de parada é calculado em função da máxima tensão de von Mises:

$$erro_{global} = \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1} - \sigma_{max,k-N-i+1})}{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1})} \leq \tau \quad (5.7)$$

sendo que σ_{max} é a máxima tensão de von Mises, τ é a precisão do critério de parada e N é o número de iterações. Nesta análise utiliza-se $N = 5$.

5.2 Formulação do método BESO aplicado à minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio

A otimização topológica baseada no critério de tensão é desenvolvida através da minimização da norma P das tensões de von Mises com restrição de volume. O problema é formulado como:

$$\text{Minimizar : } \sigma^{PN} = \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_i^{vm})^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (5.8a)$$

$$\text{Sujeito a : } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0, \quad (5.8b)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.8c)$$

$$\text{sendo : } x_i = x_{min} \quad \text{ou} \quad 1. \quad (5.8d)$$

sendo que σ^{PN} é função de agregação (norma-P das tensões de von Mises), P é a ordem da norma, conforme o expoente P aumenta, o valor da norma aproxima-se do valor da tensão máxima e n é o número de elementos. V_i é o volume do elemento e V^* é o volume prescrito (volume final da estrutura). A variável de projeto binária, x_i , representa a pseudo-densidade do elemento, sendo o valor mínimo que denota os elementos vazios x_{min} igual a 0,001. Os vetores das forças externas e dos deslocamentos são respectivamente \mathbf{f} e \mathbf{u} e a matriz de rigidez global é \mathbf{K} .

Considerando o esquema de interpolação utilizado por (Huang; Xie, 2011), que é uma adaptação do esquema de interpolação de material proposto por (Stolpe; Svanberg, 2001),

a massa específica e o módulo de Young do modelo de interpolação de material são expressos por:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5.9)$$

$$E_i = x_i^q E_0 \quad (5.10)$$

sendo que ρ_0 é a massa específica dos elementos sólidos, E_0 é o módulo de Young dos elementos sólidos e q é o fator de penalização do modelo de interpolação de material. Assume-se que o coeficiente de Poisson independe da variável de projeto.

A matriz de rigidez global, \mathbf{K} , pode ser expressa através do procedimento de montagem, utilizando a matriz de rigidez dos elementos e a variável de projeto:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{Ni} x_i^q \mathbf{K}_0 \quad (5.11)$$

sendo que \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do elemento sólido.

Para evitar o uso repetitivo do subscrito i que denota o elemento, as componentes do vetor de tensões podem ser escritas como: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$. O vetor das componentes de tensão no elemento é calculado utilizando o método dos elementos finitos:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T \quad (5.12)$$

sendo que \mathbf{D}_i e \mathbf{B}_i são respectivamente a matriz constitutiva e a matriz deformação deslocamento. \mathbf{u}_i é o vetor dos deslocamentos do elemento i .

A tensão de von Mises para o caso 2D é obtida através das componentes de tensão $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}$, segundo a expressão:

$$\sigma_i^{vm} = \left(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3 \tau_{xy}^2 \right)^{0.5} \quad (5.13)$$

As tensões são calculadas no centroide dos elementos.

5.2.1 Análise da sensibilidade

Por ser uma das principais contribuições do presente trabalho, a análise da sensibilidade é novamente apresentada passo a passo, para destacar o desenvolvimento de uma análise

consistente da sensibilidade aplicada à minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo as cargas dependentes.

A derivada da Norma-P das tensões em relação à variável de projeto x_i é obtida através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \quad (5.14)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 5.14 é a derivada da norma P em relação à tensão de von Mises, calculado como:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} (\sigma_i^{vm})^P \right)^{\left(\frac{1}{P}-1\right)} \left((\sigma_i^{vm})^{(P-1)} \right) \quad (5.15)$$

O segundo termo do lado direito da equação 5.14 é a derivada da tensão de von Mises em relação às três componentes de tensão do caso 2D:

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_{xx}} \right) = \frac{1}{2\sigma_i^{vm}} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_{yy}} \right) = \frac{1}{2\sigma_i^{vm}} (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \tau_{xy}} \right) = \frac{3}{\sigma_i^{vm}} \tau_{xy} \quad (5.18)$$

E o terceiro termo do lado direito da equação 5.14 é a variação do vetor das componentes de tensão (equação 5.12) em relação a variável de projeto x_i . Na análise da sensibilidade, é adotada a mesma interpolação de material utilizada por (Xia *et al.*, 2018), na qual a matriz constitutiva, \mathbf{D}_i é constante em relação a variável de projeto x_i .

Derivando o equilíbrio estático temos:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad (5.19)$$

Como as cargas variam ao longo do processo de otimização, o termo devido a derivada das forças aplicadas em relação a variável de projeto não é nulo. Uma das novidades apresentadas neste trabalho é o desenvolvimento de uma análise consistente da sensibilidade incluindo o termo devido à carga dependente, utilizando o método adjunto. Então isolando o termo devido à variação do deslocamento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (5.20)$$

A equação 5.14 passa a ser:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \right) \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \left[\mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (5.21)$$

Definindo a variável adjunta como:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{K}^{-1} \quad (5.22)$$

Utilizando a variável adjunta anteriormente definida, a variação da norma-P das tensões de von Mises em relação a variável de projeto pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\lambda} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (5.23)$$

E o sistema adjunto pode ser resolvido por elementos finitos:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{B}_i \mathbf{D}_0 \quad (5.24)$$

sendo que o lado direito da equação 5.24 é montado em analogia ao vetor de força calculado na análise por elementos finitos.

No método BESO a sensibilidade pode ser calculada como o negativo da derivada da norma-P das tensões. Então a sensibilidade, considerando as cargas dependentes, passa a ser:

$$\alpha = - \left[\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} \right] = - \left[\boldsymbol{\lambda} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (5.25)$$

5.2.2 Desenvolvimento do termo devido à carga dependente

Considerando uma malha para análise em elementos finitos quadrangular, de quatro nós por elemento, o vetor de carga nodal equivalente do elemento devido ao peso próprio, assumindo que a gravidade é constante e está alinhada com a direção vertical, é obtido através da seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_i = V_i \rho_i g \bar{\mathbf{f}} = V_i x_i \rho_0 g \left\{ 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4} \right\}^T \quad (5.26)$$

sendo que V_i e ρ_i são o volume e a massa específica do elemento i , g é a aceleração da gravidade e $\bar{\mathbf{f}}$ é a carga devido ao peso próprio distribuída nos graus de liberdade correspondentes a direção vertical.

Considerando que a variação de um elemento afeta apenas as cargas dependentes devido ao peso próprio, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = V_i \rho_0 g \bar{\mathbf{f}}^T \quad (5.27)$$

A derivada da matriz de rigidez global em relação a variável de projeto x_i pode ser obtida diferenciando a matriz de rigidez do elemento, \mathbf{K}_i , em relação a variável de projeto x_i :

$$\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial x_i} = q x_i^{(q-1)} \mathbf{K}_0 \quad (5.28)$$

sendo que \mathbf{K}_i é a matriz de rigidez do elemento i e \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do elemento sólido.

Portanto a sensibilidade do elemento pode ser calculada como:

$$\alpha_i = -\lambda_i \left[V_i \rho_0 g \bar{\mathbf{f}}^T - \left(q x_i^{(q-1)} \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i \right) \right] \quad (5.29)$$

sendo λ_i o vetor da variável adjunta do elemento i calculado resolvendo o sistema adjunto apresentado na equação 5.24.

Relembrando que para garantir a convergência duas técnicas foram utilizadas, a normalização da sensibilidades e a média histórica das últimas iterações.

5.3 Perfil-L: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio

O primeiro exemplo analisado é o Perfil-L, um exemplo clássico utilizado na otimização estrutural baseada em critérios de tensão, devido à concentração de tensões causada pelo canto vivo. Os dois principais objetivos do exemplo são: avaliar a eficiência do método de minimização da norma-P das tensões de von Mises em reduzir o valor da tensão máxima e avaliar a influência da ordem da norma (expoente P). O valor positivo de P é a ordem da norma, aumentando o valor do expoente, a Norma-P tende ao valor da tensão máxima. Então, minimizar a norma tende a minimizar o valor da tensão máxima. Como observado por (Verbart *et al.*, 2017), valores elevados da ordem da norma podem levar a instabilidades numéricas dificultando a convergência, isso ocorre especialmente em locais de concentração de tensões como os cantos vivos. Por esse motivo duas técnicas foram utilizadas para reduzir os efeitos causados pelo aumento no valor da ordem da norma, a normalização da sensibilidade, para reduzir as diferenças abruptas entre as tensões de um elemento para outro e o uso de um filtro para suavizar a topologia. Diversos valores para a ordem da norma foram testados no intuito de avaliar as

topologias resultantes e encontrar o máximo valor possível para a ordem da norma no exemplo do Perfil-L.

A figura 5.1 apresenta a geometria e as condições de contorno do Perfil-L, a espessura do perfil é 1 mm. O carregamento aplicado é uma combinação do peso próprio e de uma carga fixa de $F = -1,9527$ kN que corresponde a 100 % do peso próprio do volume inicial da estrutura. A carga fixa é dividida e aplicada na face superior de três elementos, para evitar concentração de tensões causadas pela aplicação da carga fixa.

O modelo é composto por uma malha de 25600 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 210 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica de 7800 kg/m³.

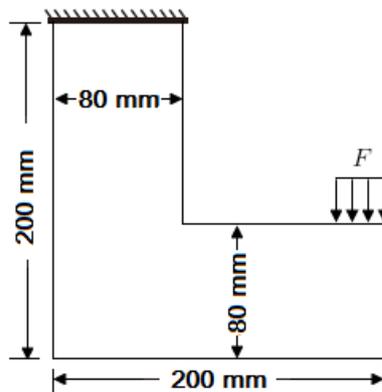


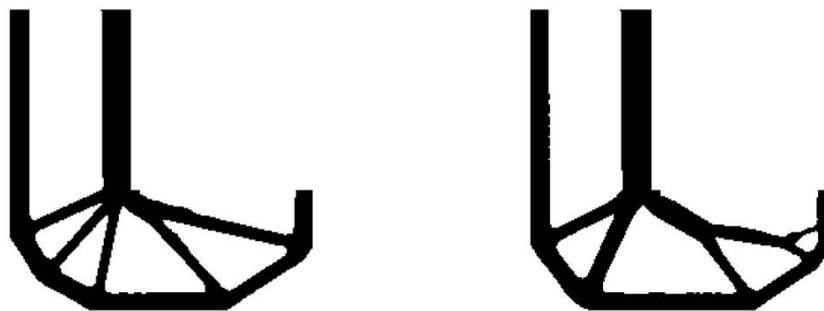
Figura 5.1 – Dimensões e condições de contorno do Perfil-L.

Os parâmetros do método BESO utilizados na análise do Perfil-L aplicados tanto na minimização da compliance quanto na minimização da norma-P das tensões de von Mises são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Parâmetros BESO utilizados na implementação do Perfil-L sujeito à carga devido ao peso próprio.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	40	%
ER	Razão de evolução	2	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	0,3	%
r_{min}	Raio do filtro	0,006	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	4	-
P	Ordem da norma (expoente P)	de 4 a 7	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada	0,01	%

Para demonstrar os efeitos de incluir o peso próprio foi desenvolvida uma análise inicial, apresentada na figura 5.2, comparando as topologias considerando e não considerando o peso próprio.



(a) Topologia sem peso próprio.

(b) Topologia considerando o peso próprio.

Figura 5.2 – Perfil-L: Topologias sem considerar o peso próprio e considerando o peso próprio minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$.

É possível observar que considerar o peso próprio altera a topologia final, confirmando a importância do desenvolvimento de algoritmos considerando as cargas dependentes devido ao peso próprio.

A figura 5.3 apresenta os resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 6$, ambas análises considerando o peso próprio.

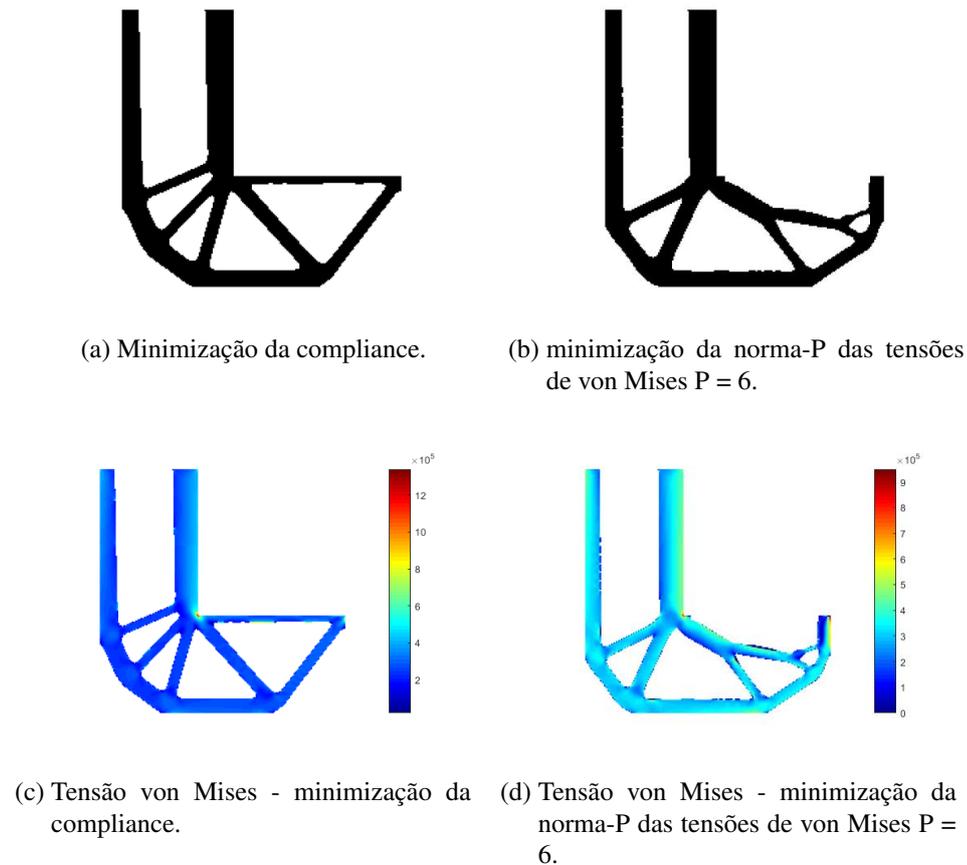


Figura 5.3 – Perfil-L - Resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$.

A figura 5.4 apresenta a evolução das funções objetivo utilizando o método de minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 6$.

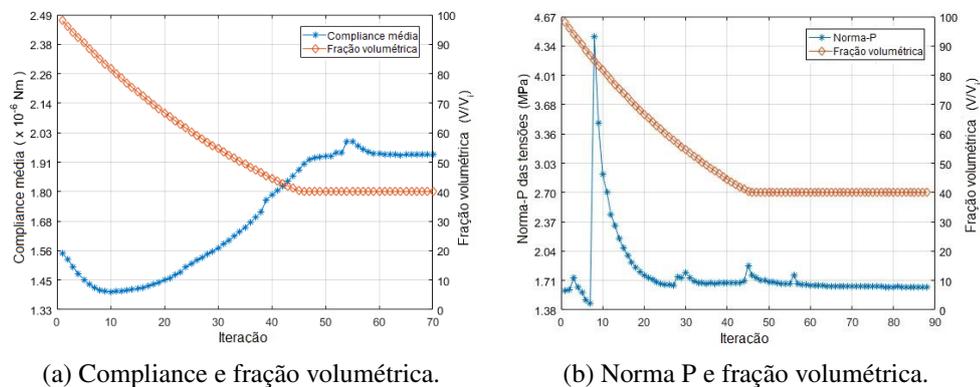


Figura 5.4 – Perfil-L - Evolução das funções objetivo obtidas através da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$.

Aumentando o valor da ordem da norma (expoente P) a topologia final é significativamente modificada, por esse motivo a função objetivo apresenta um comportamento diferente

da minimização da compliance. Observando a figura 5.4 (b) é possível notar alguns picos seguidos de uma redução no valor da Norma-P.

A figura 5.5 apresenta a evolução da função objetivo destacando as topologias antes e depois dos picos.

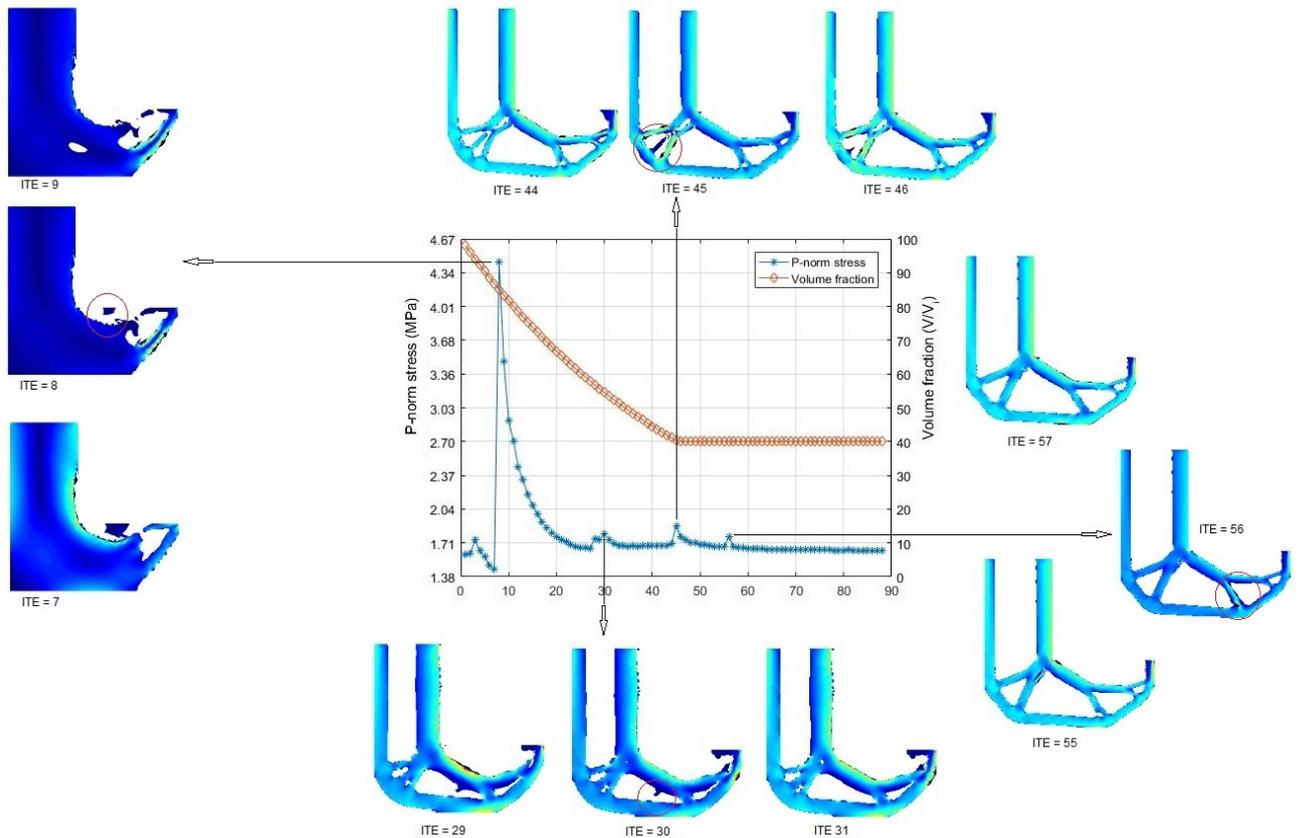


Figura 5.5 – Análise dos picos na evolução da função objetivo.

Na minimização da norma-P das tensões de von Mises, com o aumento do valor da ordem da norma, as topologias são bastante modificadas ao longo das iterações para reduzir o valor das tensões e os picos denotam as modificações mais significativas na topologia. Por exemplo, o primeiro ponto de máximo, que ocorre na iteração 8, refere-se a modificação mais significativa no início do processo de otimização, isso pode ser observado nas três topologias à esquerda (na figura 5.5), sendo que o ponto de máximo denota o surgimento de uma porção de material que foi posteriormente eliminada na iteração 9. Nas iterações 30 e 45, os picos representam a quebra das barras destacadas nas topologias acima e abaixo do gráfico apresentado na figura 5.5. O pico que ocorre na iteração 56 é devido a uma modificação menos significativa, apresentada nas topologias à direita do gráfico.

Conforme já foi discutido, aumentando o valor da ordem da norma (expoente P), a

norma tende ao valor máximo do conjunto, então minimizar a norma das tensões tende a minimizar a tensão máxima da estrutura. Porém existe um valor máximo para o expoente da norma, depois do qual a otimização não converge. O Perfil-L foi escolhido para analisar a influência do expoente da norma devido à concentração de tensões no canto vivo, porque para eliminar o canto vivo é necessário aumentar o expoente. No intuito de contribuir para a estabilização do processo e tornar possível um aumento extra no valor de P , foram investigadas algumas alternativas, como por exemplo separar a estrutura em grupos e aplicar diferentes valores para ordem da norma. Outra alternativa estudada foi a normalização das sensibilidades. Nesse trabalho optou-se por utilizar a normalização das sensibilidades, por ser suficiente para aumentar o valor do expoente da norma eliminando o canto vivo, ser de fácil implementação e não gerar um aumento significativo no tempo de processamento.

A figura 5.6 apresenta os resultados da minimização da norma- P das tensões de von Mises com peso próprio, utilizando $P = 7$, comparando os resultados obtidos sem a normalização das sensibilidades com os resultados obtidos utilizando a estratégia de normalização das sensibilidades.

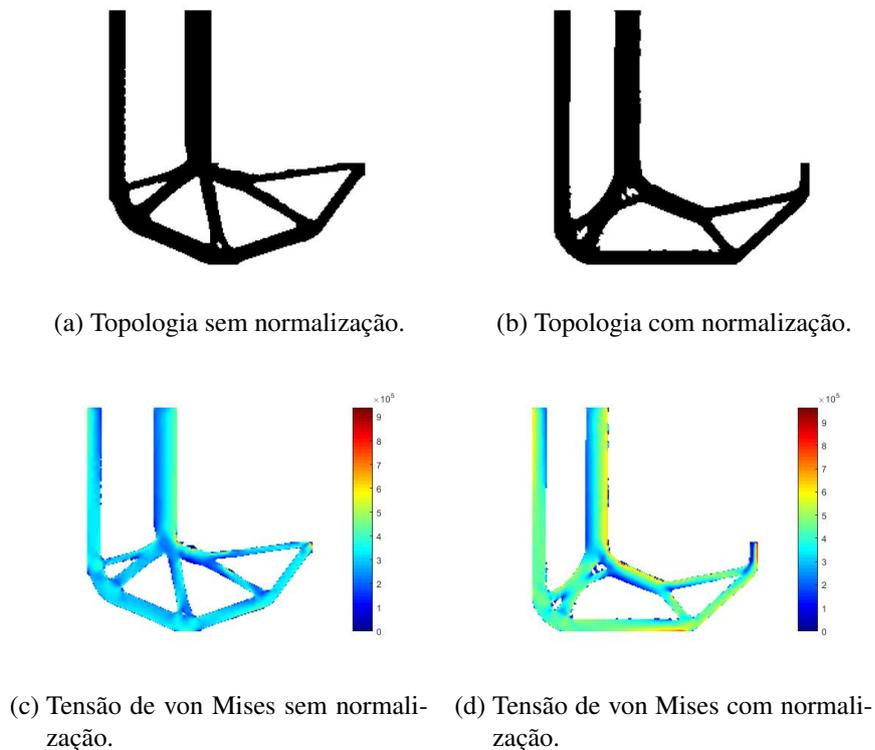


Figura 5.6 – Perfil-L minimização da norma- P das tensões de von Mises com e sem a normalização das sensibilidades ($P = 7$).

É possível observar que a normalização das sensibilidades permitiu eliminar o canto vivo. Entretanto, ao aumentar o expoente da norma, as topologias geradas já não possuem mais contornos suaves. Para suavizar a topologia final é possível aplicar um filtro de pós-processamento.

A figura 5.7 apresenta um exemplo do uso de um filtro de pós-processamento, utilizado para suavizar os contornos com o objetivo de facilitar a manufatura. O filtro consiste em primeiramente localizar os elementos do contorno, através da seleção dos elementos cujos vizinhos são vazios e posteriormente eliminar os elementos do contorno com tensões baixas, suavizando a estrutura final, para gerar um contorno que facilite a manufatura.

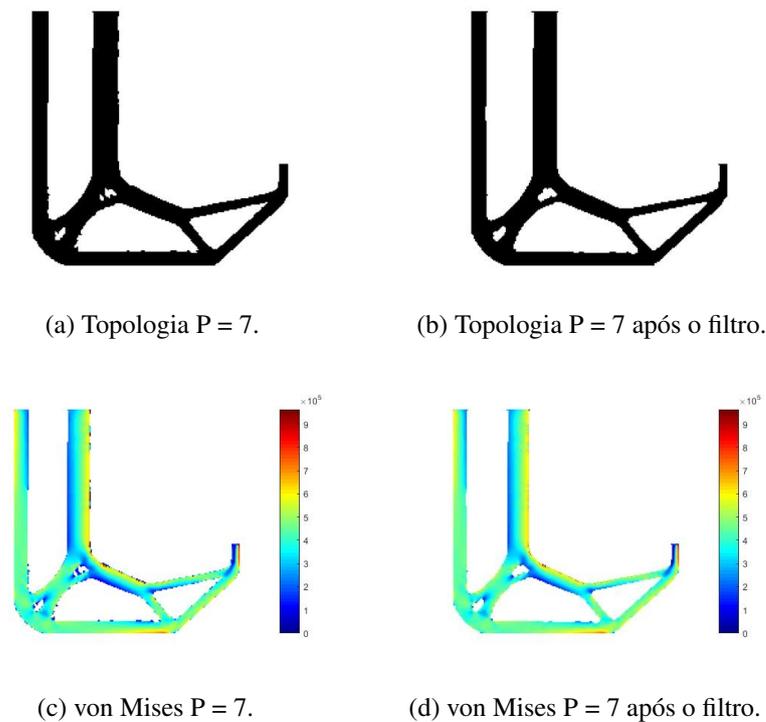


Figura 5.7 – Exemplo de aplicação de um filtro de pós processamento ($P = 7$).

O aumento no valor de P é utilizado para aproximar a função objetivo do valor da tensão máxima, reduzindo as tensões através de alterações na topologia. A figura 5.8 apresenta as topologias obtidas na minimização da compliance e na minimização da norma- P das tensões de von Mises para vários valores do expoente da norma.

Em geral, aumentar o valor do expoente da norma causa também um aumento no valor da compliance, quando comparado ao valor obtido na otimização tradicional (minimização da compliance), ou seja, tende a reduzir a rigidez global da estrutura. Por esse motivo, para todos os exemplos, além do valor das tensões, é apresentado o valor da compliance, para não

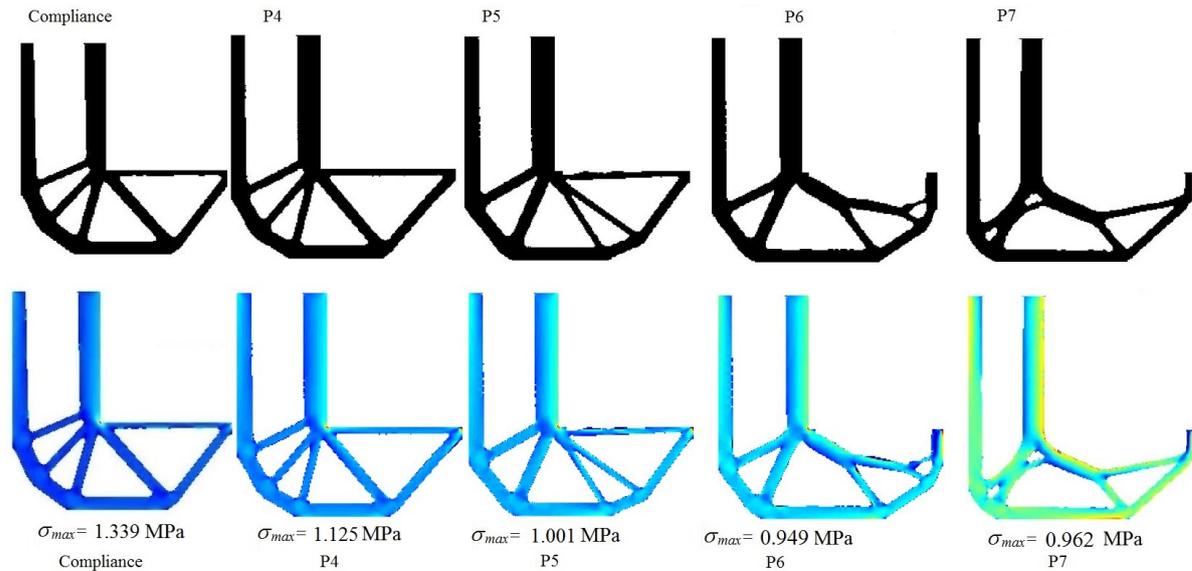


Figura 5.8 – Topologias para diversos valores do expoente da norma.

perder o foco de que o método permite reduzir o valor da máxima tensão de von Mises, mas a rigidez da estrutura é um parâmetro que precisa ser verificado na maioria dos projetos. Uma das vantagens do método é permitir a escolha do expoente da norma, que pode ser utilizado como uma solução de compromisso entre a máxima tensão de von Mises e a rigidez da estrutura.

A Tabela 5.2 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação do Perfil-L comparando dois critérios diferentes: minimização da norma-P das tensões de von Mises e minimização da compliance, sendo que C é a compliance que pode ser definida como a medida inversa da rigidez global da estrutura (flexibilidade média), τ_c é a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e τ_σ é a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 5.2 – Perfil-L sujeito à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	C (N m)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	$2,162 \times 10^{-6}$	-	1,339	-
Tensões P4	$2,117 \times 10^{-6}$	-2,1	1,125	-16,0
Tensões P5	$2,147 \times 10^{-6}$	-0,7	1,001	-25,2
Tensões P6	$2,377 \times 10^{-6}$	9,9	0,949	-29,1
Tensões P7	$2,287 \times 10^{-6}$	5,8	0,962	-28,1

É possível observar que com o aumento do expoente da norma, o valor da tensão máxima diminui. Isso ocorre porque quando o expoente P tende ao infinito a norma tende ao valor máximo do conjunto, no caso a máxima tensão de von Mises. Conforme o expoente da norma aumenta, minimizar a norma- P das tensões de von Mises tende a minimizar o valor da tensão máxima. Entretanto ao aumentar o valor do expoente de $P = 6$ para $P = 7$ o valor da máxima tensão de von Mises não se alterou muito; isso ocorreu porque com $P = 6$ e $P = 7$ a máxima tensão de von Mises migrou para o ponto de aplicação da carga fixa. É possível observar também que a minimização da norma- P das tensões de von Mises utilizando $P = 7$ permitiu eliminar completamente o canto vivo.

Em todos os casos de carregamento a minimização da norma- P das tensões de von Mises reduz o valor da tensão máxima em relação a minimização da compliance. Então, a minimização da norma- P das tensões de von Mises incluindo a carga dependente devido ao peso próprio é eficiente em minimizar a função objetivo reduzindo o valor da tensão máxima.

A Tabela 5.2 mostra que o valor de P pode ser selecionado para reduzir as tensões controlando o valor da flexibilidade, de acordo com os requisitos de cada projeto. Portanto, uma das vantagens do método é permitir um equilíbrio entre as tensões e a flexibilidade para cada problema de engenharia.

5.4 Viga biapoiada com entalhe: minimização da norma- P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio

A viga biapoiada é um caso clássico utilizado nas análises de peso próprio e o entalhe induz a concentração de tensões necessária para avaliar a variação da tensão máxima.

A figura 5.9 apresenta a geometria e as condições de contorno da viga biapoiada com entalhe, o exemplo consiste em uma viga com duas cargas fixas equidistantes das bordas e com um entalhe no centro da viga.

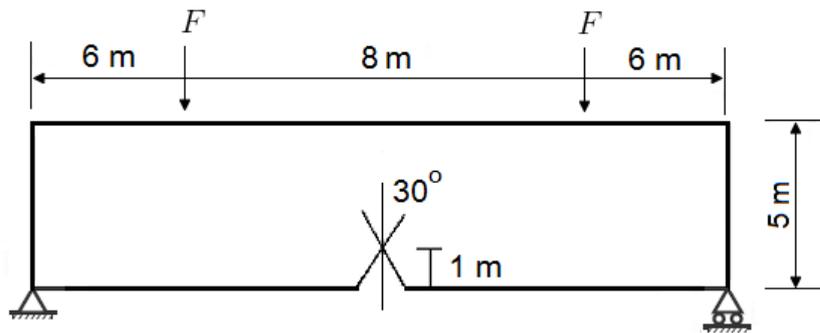


Figura 5.9 – Dimensões e condições de contorno da viga biapoiada com entalhe.

O principal objetivo do exemplo é avaliar a influência da relação entre a carga fixa e o peso próprio da estrutura, no intuito de comparar as topologias finais e a redução no valor da tensão máxima. Portanto, três condições de carregamento são avaliadas:

1. Condição de carregamento 1: combina o peso próprio da viga com duas cargas fixas de -3825,90 kN cada simetricamente aplicadas, cujo somatório corresponde a 100 % do peso próprio do volume inicial da estrutura. O somatório da carga fixa aplicada é de -7651,80 kN.
2. Condição de carregamento 2: combina o peso próprio da viga com duas cargas fixas de -1147,77 kN cada simetricamente aplicadas, cujo somatório corresponde a 30 % do peso próprio do volume inicial da estrutura. Portanto, a carga fixa total aplicada é de -2295,54 kN.
3. Condição de carregamento 3: apenas peso próprio.

Para reduzir a concentração de tensões nos apoios e ser possível observar concentração de tensões no entalhe, a restrição aplicada foi distribuída nos primeiros 20 cm das bordas, de acordo com a malha adotada, nos três primeiros nós de cada lado da viga. Sendo que apenas o primeiro nó do lado esquerdo possui restrição nas duas direções.

O modelo é composto por uma malha de 200×50 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 200 GPa, coeficiente de Poisson de 0.3 e massa específica de 7800 kg/m^3 . Os parâmetros do método BESO utilizados na análise da viga biapoiada com entalhe são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga biapoçada com entalhe sujeita à carga devido ao peso próprio.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	60	%
ER	Razão de evolução	2	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	2	%
r_{min}	Raio do filtro	0,3	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	5	-
P	Ordem da norma (expoente P)	4 e 5	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada	0,01	%

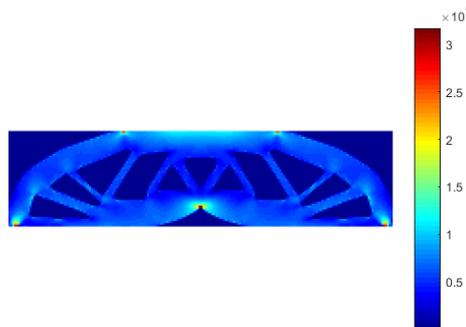
A figura 5.10 apresenta os resultados da condição de carregamento 1 utilizando $P = 4$ e $P = 5$.



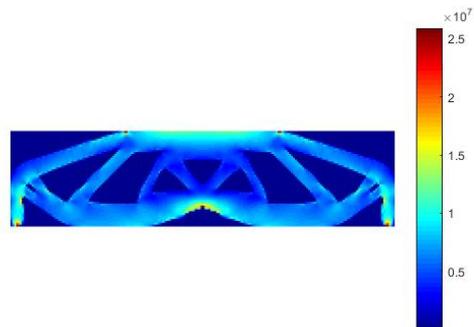
(a) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 4$.



(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5$.



(c) Tensão von Mises $P = 4$.



(d) Tensão von Mises $P = 5$.

Figura 5.10 – Viga biapoçada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 1: Peso Próprio e duas cargas fixas cujo somatório corresponde a 100% do peso próprio inicial).

A figura 5.11 apresenta os resultados da condição de carregamento 2 utilizando $P = 4$ e $P = 5$.

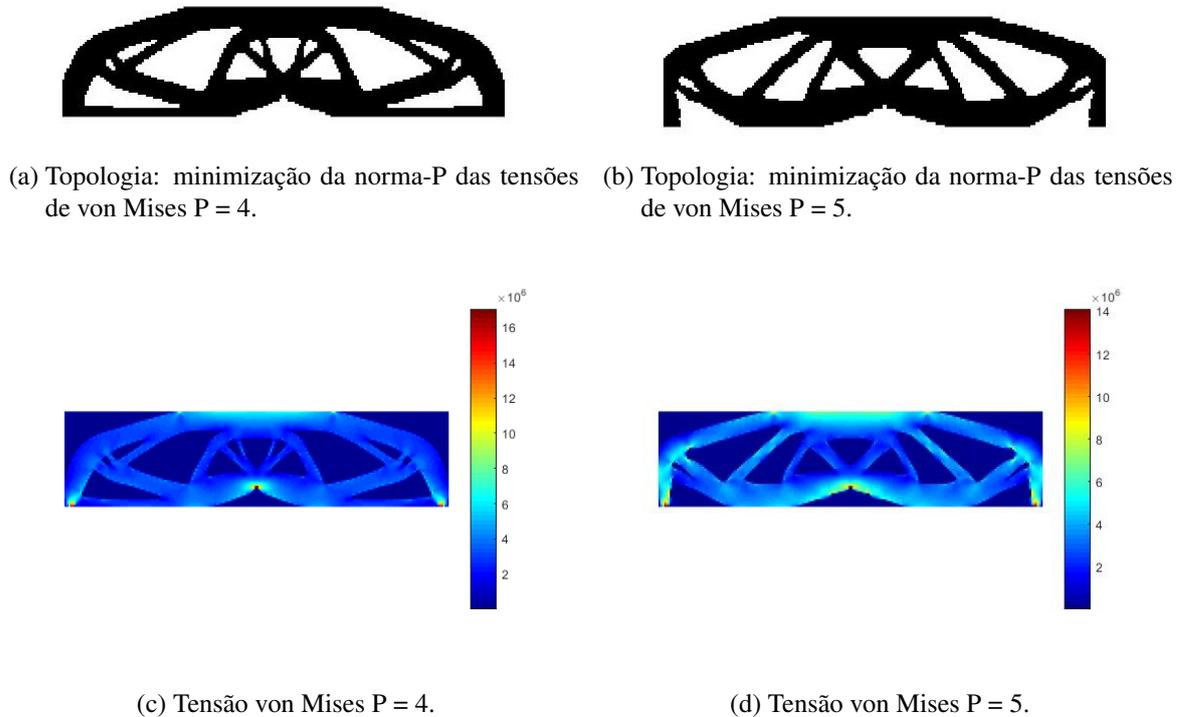


Figura 5.11 – Viga biapoiada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 2: Peso Próprio e duas cargas fixas cujo somatório corresponde a 30% do peso próprio inicial).

Os resultados mostram uma distribuição mais homogênea das tensões com o aumento do valor do expoente da norma, para os dois casos de carregamento.

A condição de carregamento 3 apresenta a viga biapoiada com entalhe sujeita apenas ao peso próprio. Quando o carregamento é composto apenas pelo peso próprio é necessário o uso de uma interpolação de material alternativa. De acordo com (Bruyneel; Duysinx, 2005), quando a interpolação de material tradicional é aplicada a sensibilidade incluindo as cargas dependentes, o termo devido ao peso próprio tende ao infinito em regiões de baixa densidade. Por isso no caso de carregamento sujeito apenas ao peso próprio, foi adotado o esquema de interpolação de material sugerido (Huang; Xie, 2011).

Utilizando o esquema de interpolação de material sugerido por (Huang; Xie, 2011) o módulo de Young é calculado como:

$$E_i = \frac{x_i}{[1 + q(1 - x_i)]^2} E_0 \quad (5.30)$$

E a massa específica é calculada como:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5.31)$$

Portanto, a sensibilidade dos elementos, quando só o peso próprio é aplicado torna-se:

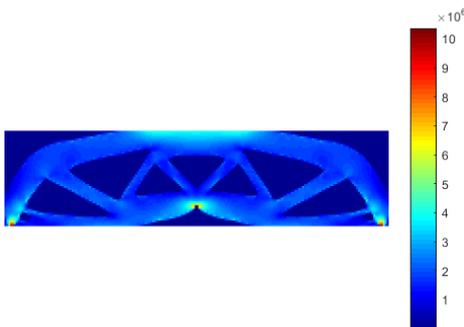
$$\alpha_i = \begin{cases} \left[-\frac{V_i \rho_0 g}{(q+1)} \lambda_i \bar{\mathbf{f}}^T + \lambda_i \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i \right], & x = 1; \\ \left[-\frac{V_i \rho_0 g}{(q+1)} \lambda_i \bar{\mathbf{f}}^T + \frac{1}{[1+q(1-x_i)]^2} \lambda_i \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_i \right], & x = x_{min}. \end{cases} \quad (5.32)$$

A figura 5.12 apresenta os resultados da condição de carregamento 3, sujeita apenas ao peso próprio utilizando $P = 4$ e $P = 5$, calculada através da equação 5.32.

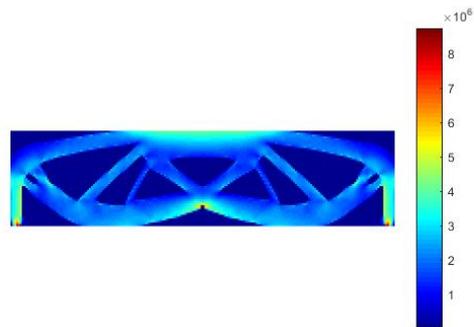


(a) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 4$.

(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5$.



(c) Tensão von Mises $P = 4$.



(d) Tensão von Mises $P = 5$.

Figura 5.12 – Viga biarquiada com entalhe: minimização da norma-P das tensões de von Mises (Condição de carregamento 3: Somente peso próprio).

A respeito da interpolação de material ser utilizada apenas quando o carregamento é composto somente pelo peso próprio, essa interpolação só foi adotada nesse caso porque para os outros casos de carregamento foi observado que a interpolação de material tradicional gera topologias mais suaves e reduz mais o valor da tensão máxima.

A Tabela 5.4 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação da viga biapoiada com entalhe comparando dois critérios diferentes: minimização da norma-P das tensões de von Mises e minimização da compliance, sendo τ_c a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e τ_σ a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 5.4 – Viga biapoiada com entalhe sujeita à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	Carga fixa	C (N m)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	100% do peso próprio inicial	$6,080 \times 10^3$	-	40,496	-
Tensão P4	100% do peso próprio inicial	$6,409 \times 10^3$	5,4	31,707	-21,7
Tensão P5	100% do peso próprio inicial	$7,109 \times 10^3$	16,9	25,900	-36,0
Compliance	30% do peso próprio inicial	$1,610 \times 10^3$	-	20,983	-
Tensão P4	30% do peso próprio inicial	$1,792 \times 10^3$	11,3	17,055	-18,7
Tensão P5	30% do peso próprio inicial	$2,049 \times 10^3$	27,3	14,116	-32,7
Compliance	apenas peso próprio	545,547	-	12,062	-
Tensão P4	apenas peso próprio	688,768	26,3	10,336	-14,3
Tensão P5	apenas peso próprio	778,087	42,6	8,746	-27,5

A redução no valor da tensão de von Mises é maior conforme a carga fixa aumenta, entretanto é possível observar que o valor da tensão máxima reduz em relação a minimização da compliance para todos os casos de carregamento.

A otimização topológica baseada em critérios de tensão utilizando a Norma P como parâmetro de agregação permite o aumento do valor do expoente da norma para reduzir o valor da tensão máxima. Relembrando que isso aumenta o valor da compliance quando comparada a obtida na minimização da compliance. Em aplicações práticas uma das vantagens do método é utilizar o expoente da norma como uma decisão de engenharia, de acordo com os requisitos do projeto.

Os problemas envolvendo minimização da compliance mostraram diferenças significativas nas topologias otimizadas ao considerar o peso próprio em comparação com a simplificação de aplicar o mesmo nível de carga através de uma carga fixa. Por esse motivo uma análise adicional foi desenvolvida para verificar os resultados obtidos utilizando a minimização da norma-P das tensões de von Mises. Para manter o mesmo nível de carregamento a soma das cargas fixas é de 100% do peso final da estrutura.

A figura 5.13 apresenta a viga simplesmente apoiada com um entalhe pré-existente utilizando o critério de minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 4$, comparando os resultados entre uma carga fixa equivalente aplicada em dois nós equidistantes das bordas e considerando apenas o peso próprio da estrutura.

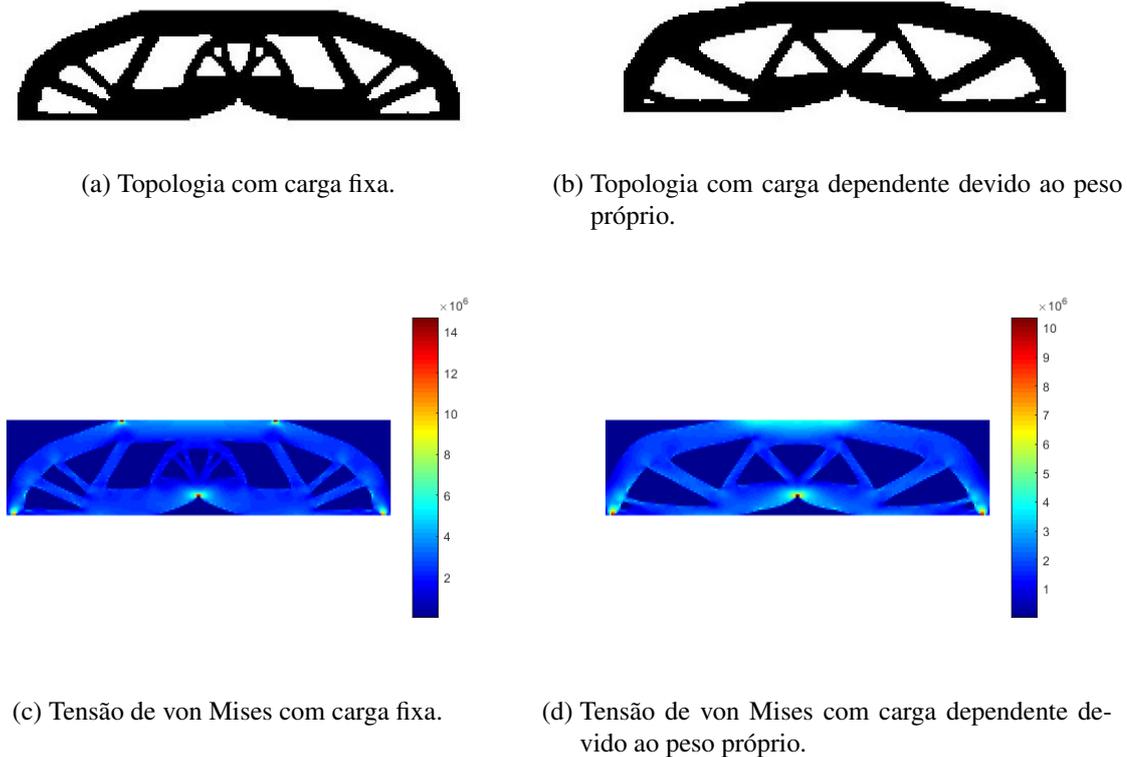


Figura 5.13 – Viga biapoiada com entalhe: comparação entre carga fixa e carga dependente devido ao peso próprio.

Pode ser observado através da figura 5.13 que considerar o peso próprio na minimização da norma-P das tensões de von Mises altera a topologia final, provando a importância de desenvolver algoritmos que considerem as cargas dependentes devido ao peso próprio. A minimização da norma-P das tensões de von Mises com peso próprio gerou uma topologia mais suave e permitiu reduzir a tensão máxima de 14,70 MPa para 10,37 MPa.

5.5 Viga em balanço: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido ao peso próprio

O principal objetivo do exemplo é avaliar a influência da variação do volume final, V_{frac} , na topologia e na distribuição das tensões. Portanto, três volumes são analisados: 30%, 40% e 50% do volume inicial.

As dimensões e as condições de contorno da viga em balanço são apresentados na figura 5.14 e a espessura da viga é 1 mm. A geometria escolhida é a mesma utilizada na minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga fixa apresentada por (Nabaki *et al.*, 2019).

O carregamento é uma combinação do peso próprio da estrutura com uma carga fixa F que corresponde a 100% do valor do peso próprio inicial da estrutura $F = -1,5441$ N e a carga fixa foi dividida e aplicada em seis elementos.

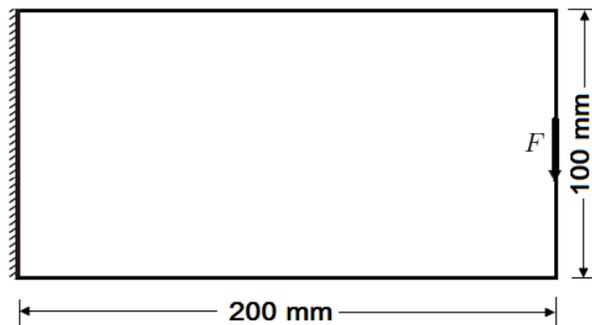


Figura 5.14 – Dimensões e condições de contorno da viga em balanço.

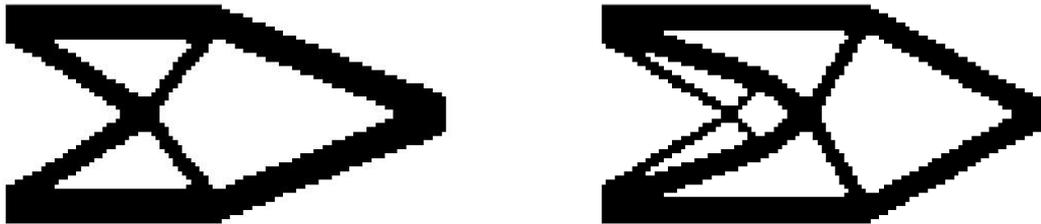
O modelo é composto por 5000 elementos, dispostos em uma malha de 100×50 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 210 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica de 7870 kg/m^3 , que correspondem ao aço carbono 1018.

A Tabela 5.5 apresenta os parâmetros BESO utilizados na implementação da viga em balanço.

Tabela 5.5 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga em balanço sujeita à carga devido ao peso próprio.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	30, 40 e 50	%
ER	Razão de evolução	2	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	5	%
r_{min}	Raio do filtro	0,002	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	3	-
P	Ordem da norma (expoente P)	4	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada	0,01	%

Para demonstrar os efeitos de incluir o peso próprio, a figura 5.15 apresenta a comparação entre a minimização da norma-P das tensões de von Mises da viga em balanço com e sem considerar o peso próprio. Nessa análise foi utilizado $P = 4$, a carga fixa é igual a $F = 100\%$ do peso inicial e a fração volumétrica é 40% do volume inicial da estrutura.



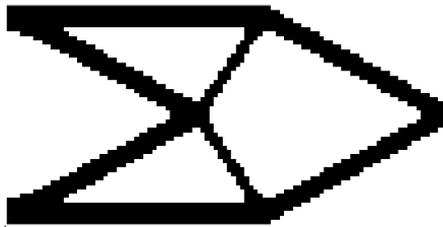
(a) Viga em balanço sem considerar o peso próprio da estrutura. (b) Viga em balanço considerando o peso próprio da estrutura.

Figura 5.15 – Comparação entre os resultados da viga em balanço com e sem considerar o peso próprio da estrutura.

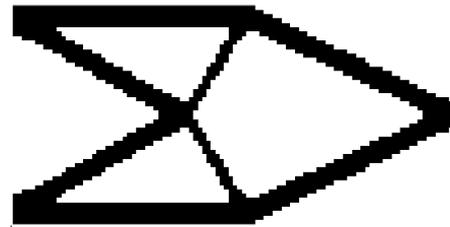
Na análise da viga em balanço também é possível observar que considerar o peso próprio altera a topologia final da estrutura.

5.5.1 Viga em balanço: Volume final igual a 30% do volume inicial

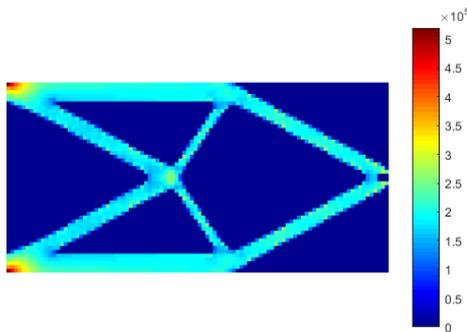
A figura 5.16 apresenta as topologias obtidas através da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises para uma restrição de volume de 30% do volume inicial.



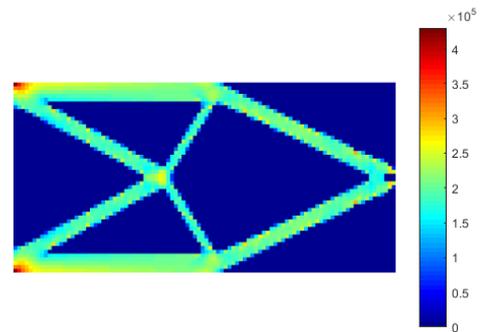
(a) Topologia: Minimização da compliance.



(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises.



(c) Tensão von Mises: minimização da compliance.



(d) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Figura 5.16 – Viga em balanço $V_{frac} = 30\%$.

Para um volume final igual a 30%, na minimização da norma-P das tensões de von Mises é possível notar um aumento na espessura das barras no lado direito da estrutura e uma redução de material no centro.

A figura 5.17 apresenta as evoluções das funções objetivo. O carregamento é uma combinação entre o peso próprio e uma carga fixa que corresponde a $F = 100\%$ do peso próprio inicial.

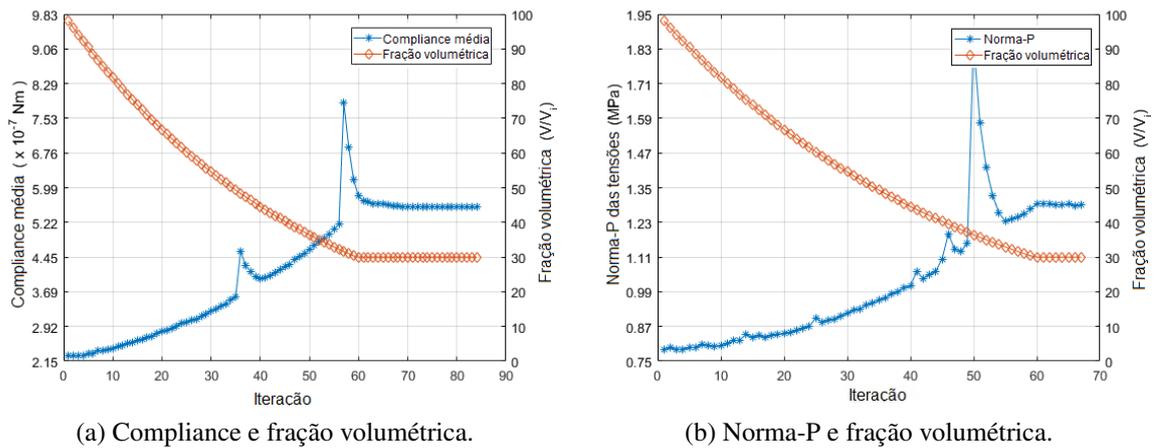
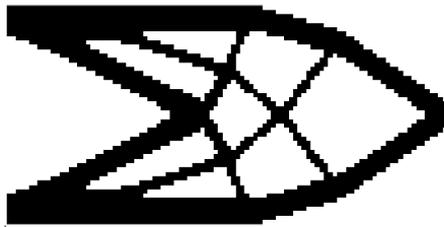


Figura 5.17 – Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 30\%$.

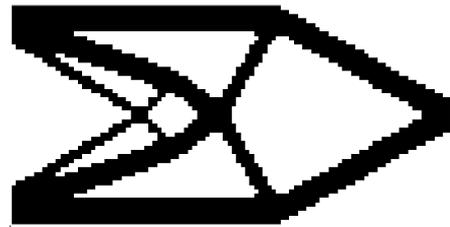
Para o volume final de 30% a evolução das funções objetivo apresentam um comportamento semelhante, embora seja possível notar mais picos na minimização da norma-P das tensões de von Mises, na tentativa de alterar a topologia.

5.5.2 Viga em balanço: Volume final igual a 40% do volume inicial

A figura 5.18 apresenta os resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises, para uma restrição de volume de 40% do volume inicial.



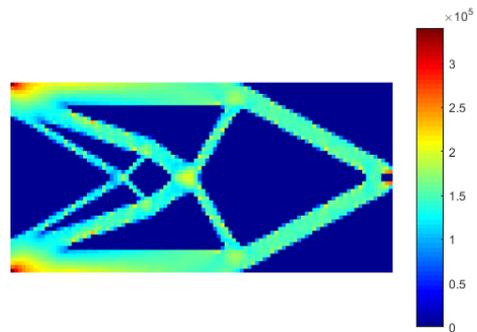
(a) Topologia: Minimização da compliance.



(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises.



(c) Tensão von Mises: minimização da compliance.



(d) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Figura 5.18 – Viga em balanço $V_{frac} = 40\%$.

Comparando as soluções da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises, observa-se que as diferenças na topologia aumentam conforme o volume final aumenta.

A figura 5.19 apresenta as evoluções das funções objetivo. O carregamento é uma combinação entre o peso próprio e uma carga fixa que corresponde a $F = 100\%$ do peso próprio inicial.

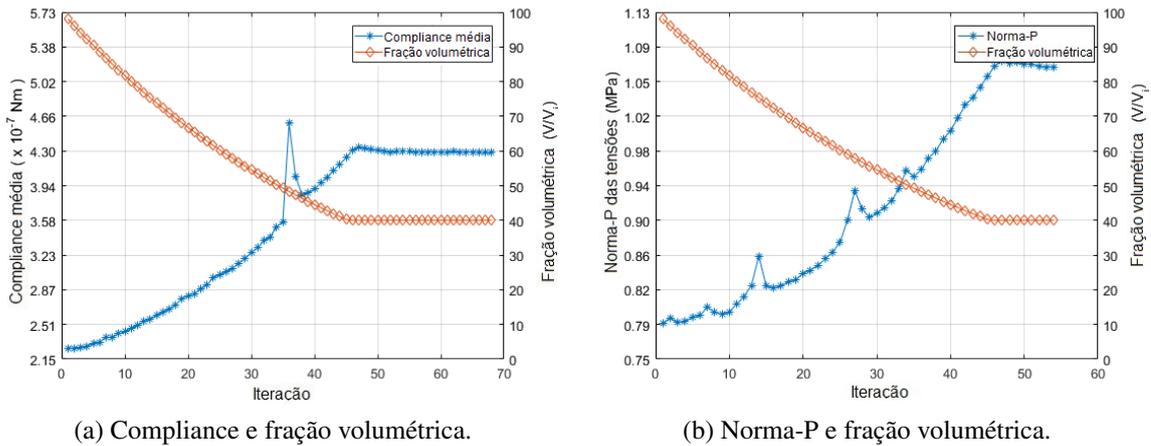


Figura 5.19 – Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 40\%$.

Observando a figura 5.19 é possível notar que na minimização da norma-P das tensões de von Mises a evolução da função objetivo apresenta três picos que representam modificações significativas na topologia como a quebra de barras. Isso ocorre porque uma fração volumétrica maior permite que a topologia seja bastante modificada para reduzir o valor da tensão máxima.

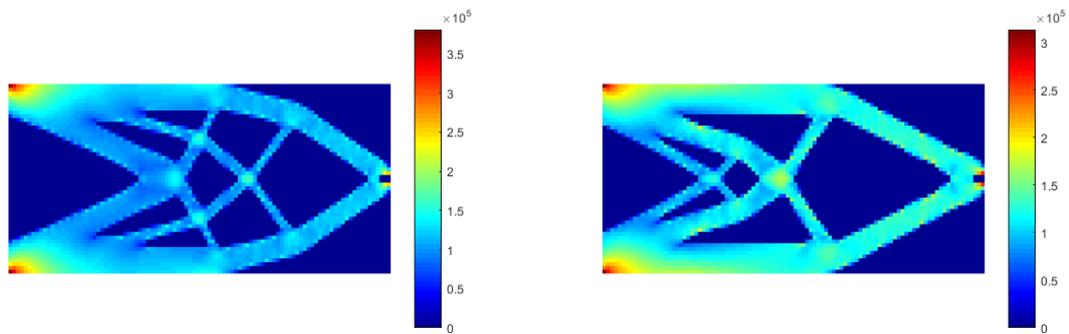
5.5.3 Viga em balanço: Volume final igual a 50% do volume inicial

A figura 5.20 apresenta os resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises, para uma restrição de volume de 50% do volume inicial.



(a) Topologia: Minimização da compliance.

(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises.



(c) Tensão von Mises: minimização da compliance.

(d) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Figura 5.20 – Viga em balanço $V_{frac} = 50\%$.

Os resultados obtidos para um volume final de 50% confirmam que as diferenças na topologia aumentam conforme o volume final aumenta.

A figura 5.21 apresenta as evoluções das funções objetivo. O carregamento é uma combinação entre o peso próprio e uma carga fixa que corresponde a $F = 100\%$ do peso próprio inicial.

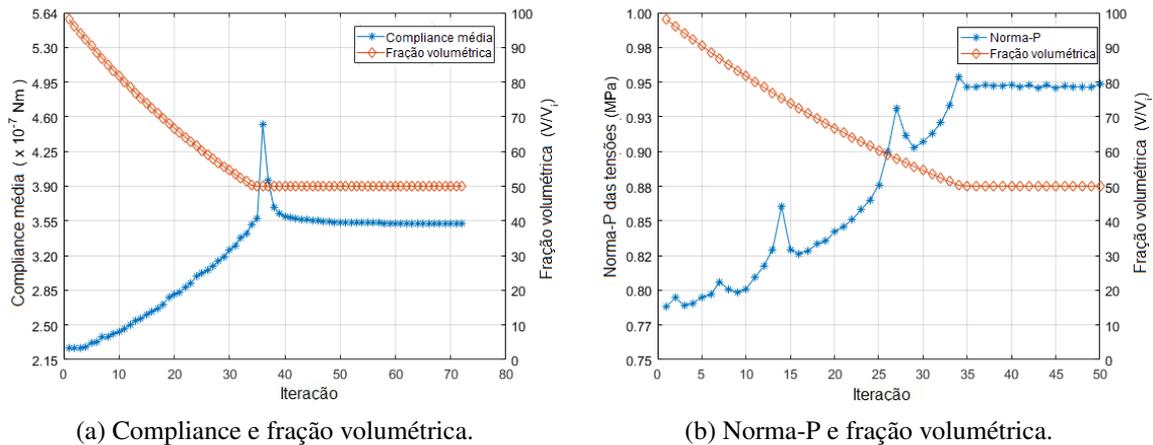


Figura 5.21 – Viga em balanço: evolução das funções objetivo $V_{frac} = 50\%$.

Para um fração volumétrica de 50% é possível notar que na minimização da norma-P das tensões de von Mises a evolução da função objetivo também apresenta picos significativos, porque a topologia foi bastante modificada.

A Tabela 5.6 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação da viga em balanço utilizando a minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo o peso próprio. Sendo τ_c a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e τ_σ a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 5.6 – Viga em balanço sujeita à carga devido ao peso próprio - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	V_{frac} (%)	C (N m)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	30	$5,559 \times 10^{-7}$	-	0,519	-
Tensão P4	30	$5,669 \times 10^{-7}$	2,0	0,430	-17,1
Compliance	40	$4,283 \times 10^{-7}$	-	0,461	-
Tensão P4	40	$4,361 \times 10^{-7}$	1,8	0,341	-26,0
Compliance	50	$3,521 \times 10^{-7}$	-	0,381	-
Tensão P4	50	$3,599 \times 10^{-7}$	2,2	0,313	-17,8

É possível observar que na minimização da norma-P das tensões de von Mises o valor da tensão máxima é menor do que o valor da tensão máxima obtido na minimização da compliance para todas as frações volumétricas, confirmando a eficiência do método. É possível observar também que as topologias obtidas através da minimização da norma-P das tensões de

von Mises geram uma melhor distribuição das tensões ao longo da viga, permitindo um melhor aproveitamento do material.

De acordo com (Nabaki *et al.*, 2019) a princípio qualquer valor poderia ser utilizado para o expoente da norma, mas na prática um valor entre 4 e 5 mostrou-se apropriado para a maioria dos problemas. Na viga em balanço o máximo valor possível para o expoente da norma foi 4, mas mesmo com esse valor, foi possível obter uma redução significativa no valor da tensão máxima.

5.6 Comentários gerais sobre a minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo peso próprio

Considerando que a tensão é um dos principais critérios utilizados no dimensionamento estrutural e a carga devido ao peso próprio pode ser significativa em diversos problemas de engenharia, o desenvolvimento de algoritmos combinando carga dependente devido ao peso próprio e a minimização da norma-P das tensões de von Mises tem se mostrado importante.

Foi desenvolvida uma análise para explorar a necessidade de desenvolver uma metodologia específica para considerar o peso próprio. O exemplo adotado foi a biapoiada com entalhe. Dois casos de carregamento foram comparados, a viga carregada apenas com o peso próprio e a viga carregada com duas cargas fixas simetricamente espaçadas cujo valor somado equivale ao peso próprio da estrutura. A diferença nas topologias comprova a necessidade de desenvolver metodologias capazes de considerar as cargas dependentes devido ao peso próprio.

Os exemplos abordados nos itens 5.3, 5.4 e 5.5 representam os casos clássicos de concentração de tensões apresentados na literatura. Portanto, foram desenvolvidos diversos testes com exemplos representativos para verificar e explorar a proposta e em todos os casos, o nível de tensões foi significativamente reduzido. O exemplo abordado no item 5.3 apresenta o Perfil-L e avalia a influência do fator P da norma. O exemplo abordado no item 5.4 apresenta a viga biapoiada com entalhe e avalia a variação na combinação de carregamento (carga fixa e peso próprio) e o exemplo abordado no item 5.5 apresenta a viga em balanço e avalia a variação da fração volumétrica.

Observou-se que os valores do expoente da norma adotados foram suficientes para limitar o nível de tensões e que em problemas práticos, o valor do expoente da norma pode ser utilizado como uma decisão de engenharia, de acordo com os requisitos de cada projeto.

6 MINIMIZAÇÃO DA NORMA-P DAS TENSÕES DE VON MISES COM CARGA DEPENDENTE DEVIDO À PRESSÃO

A tensão é um dos principais critérios do projeto estrutural e as cargas de superfície estão presentes em diversas aplicações aeronáuticas, aeroespaciais e mecânicas. Os três principais desafios da otimização estrutural baseada nos critérios de tensão são: a natureza local das tensões que resulta em um grande número de restrições, a singularidade que faz com que os elementos com baixa densidade e tensões elevadas não sejam removidos pelo algoritmo e a não linearidade em relação ao valor das tensões. Para solucionar o problema relacionado ao grande número de restrições, foi utilizada a Norma-P como função de agregação, transformando a tensão nos elementos em uma medida global. O problema de singularidade foi naturalmente resolvido por se tratar de um método discreto. O comportamento não linear das tensões foi reduzido utilizando a normalização das sensibilidades, que permitiu o uso de um valor maior para a ordem da norma (expoente P) suavizando o canto vivo.

Ao considerar as cargas de superfície outros dois desafios são introduzidos, um está relacionado a variação das cargas em termos de ponto de aplicação e direção, o outro está relacionado a sensibilidade dos elementos carregados.

Como as cargas dependentes podem variar em intensidade, local e direção, um dos principais desafios relacionados à implementação das cargas de superfície é a localização no contorno. A figura 6.1 apresenta uma ilustração da distribuição das cargas nas faces dos elementos com a evolução da topologia.

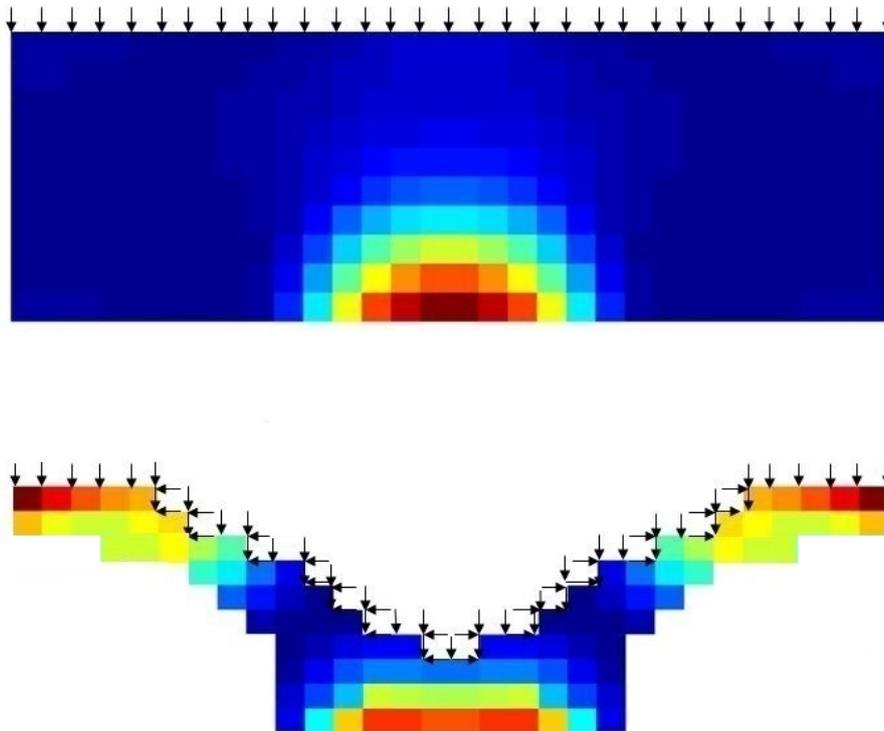


Figura 6.1 – Ilustração das cargas de superfície durante o processo de otimização.

Para resolver esse desafio além do vetor da variável de projeto, que identifica se o elemento é sólido ou vazio, foi criado um outro vetor que identifica se o elemento pertence ao contorno de aplicação de carga. A direção da carga é obtida em função dos elementos vazios vizinhos aos elementos carregados.

Adicionalmente, o termo de carga introduz desafios no critério de remoção dos elementos carregados, porque algumas condições de contorno fazem com que os elementos carregados sejam constantemente removidos nas primeiras iterações (nas regiões onde o deslocamento é elevado) comprometendo o processo de otimização.

A figura 6.1 apresenta a remoção dos elementos carregados nas primeiras iterações, comprometendo o processo de otimização da viga biapoiada.

Em 2005, [Yang et al.](#) apresentaram um trabalho incluindo cargas de superfície na minimização da compliance, no qual os autores propuseram o cálculo de dois números de sensibilidade ordenados e usados separadamente para os critérios de adição e remoção de elementos, um incluindo o termo devido à carga dependente e o outro sem considerar o termo de carga. A mesma solução foi utilizada no presente trabalho.

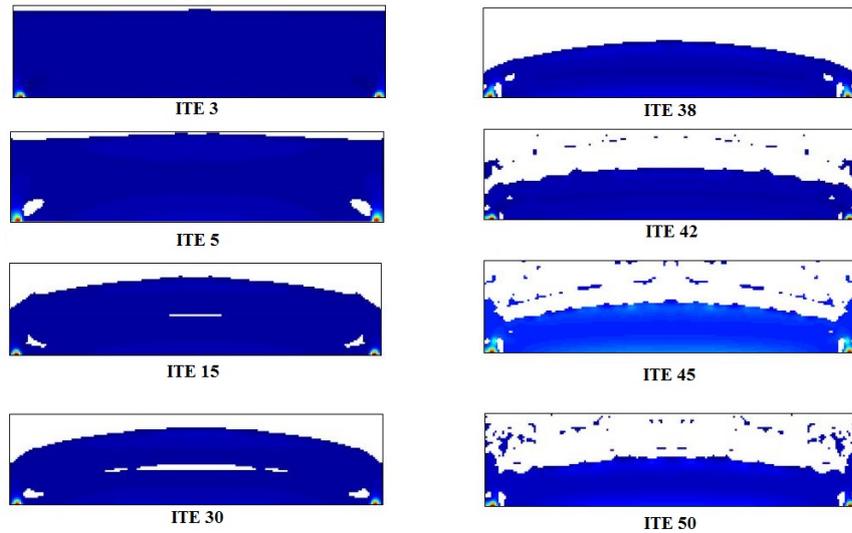


Figura 6.2 – Sensibilidade utilizando um único critério para adição e remoção de elementos (Viga biapoiada).

6.1 Proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido a pressão

O problema pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar : } \sigma^{PN} = \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_i^{vm})^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (6.1a)$$

$$\text{Sujeito a : } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0, \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (6.1c)$$

$$\text{sendo : } x_i = x_{min} \quad \text{ou} \quad 1. \quad (6.1d)$$

sendo que σ^{PN} é função de agregação (norma-P das tensões de von Mises), P é a ordem da norma e n é o número de elementos. V_i é o volume do elemento e V^* é o volume prescrito (volume final da estrutura). A variável de projeto binária, x_i , representa a pseudo-densidade do elemento, sendo o valor mínimo que denota os elementos vazios, x_{min} , igual a 0,001. Os vetores das forças externas e dos deslocamentos são respectivamente \mathbf{f} e \mathbf{u} e a matriz de rigidez global é \mathbf{K} .

6.1.1 Análise da sensibilidade

Relembrando que, na minimização da norma-P das tensões de von Mises, a sensibilidade é obtida através da derivada da função objetivo, que no caso é a norma-P das tensões de von Mises, em relação a variável de projeto x_i e é obtida através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \quad (6.2)$$

O desenvolvimento dos três termos que compõem a variação da norma-P das tensões de von Mises em relação a variável de projeto é semelhante ao apresentado no item 5.2.1.

No caso das cargas de superfície, o critério de adição e remoção de elementos é feito utilizando dois números de sensibilidade. O primeiro é obtido sem considerar o termo devido à carga de superfície, portanto:

$$\alpha_i = - \left[\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} \right] = \left[\lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (6.3)$$

sendo que λ_i é o vetor da variável adjunta do elemento i .

O segundo número de sensibilidade é obtido considerando o termo carga de superfície, portanto:

$$\alpha_i = - \left[\frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial x_i} \right] = - \left[\lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right] \quad (6.4)$$

Definindo a variável adjunta como:

$$\lambda = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{K}^{-1} \quad (6.5)$$

Obtida utilizando o método de elementos finitos para resolver o sistema:

$$\mathbf{K} \lambda = \frac{\partial \sigma^{PN}}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{B}_i \mathbf{D}_0 \quad (6.6)$$

sendo que o lado direito da equação 6.6 é montado de forma semelhante ao vetor de carga calculado na análise por elementos finitos.

6.1.2 Obtenção do termo de carga

A variação no vetor de carga do elemento devido à aplicação da carga de superfície é calculado como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{2} q_0 A \bar{\mathbf{f}}^T \quad (6.7)$$

sendo que $\bar{\mathbf{f}}$ é o vetor localizador que identifica os graus de liberdade onde a carga é aplicada, A é a área da superfície e q_0 é a magnitude da carga. Sendo que a orientação (positiva ou negativa) das componentes do vetor localizador segue a mesma orientação do vetor de força global da análise por elementos finitos.

No intuito de verificar se um elemento removido deve retornar, quando um elemento carregado é removido, o vetor localizador é calculado como a variação da carga de superfície causada pela remoção do elemento carregado. Portanto, o vetor localizador dos elementos que foram retirados na última iteração torna-se:

$$\bar{\mathbf{f}} = \overline{\Delta \mathbf{f}} = \{\mathbf{f}_{(ite)} - \mathbf{f}_{(ite-1)}\} \quad (6.8)$$

sendo que $\mathbf{f}_{(ite)}$ e $\mathbf{f}_{(ite-1)}$ são respectivamente o vetor localizador da iteração atual e da iteração anterior.

A figura 6.3 apresenta uma ilustração do cálculo de $\overline{\Delta \mathbf{f}}$, quando o elemento sólido S_i é removido tornando-se o elemento vazio V_i . Para a condição de carregamento apresentada na figura 6.3, o vetor localizador do elemento removido V_i torna-se $\bar{\mathbf{f}} = \overline{\Delta \mathbf{f}} = \{-1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1\}$.

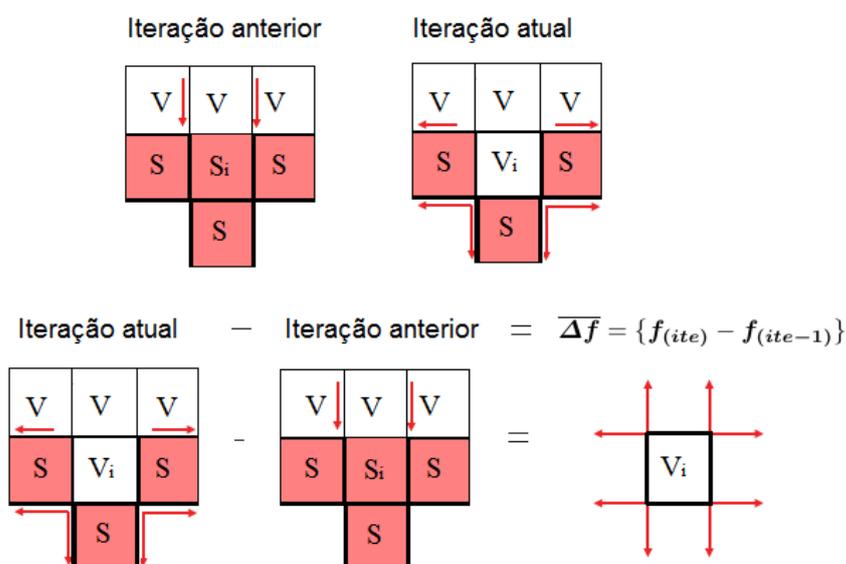


Figura 6.3 – Ilustração do cálculo de Δf .

6.1.3 Critério de remoção e adição de elementos

O presente trabalho adota a mesma estratégia utilizada por (Yang *et al.*, 2005) baseada no cálculo de dois números de sensibilidade utilizando as equações 6.3 and 6.4.

A adição ou remoção de elementos não afeta o vetor de carga dos elementos não carregados. Portanto, a sensibilidade dos elementos não carregados é calculada sem o termo devido à carga dependente, utilizando a equação 6.3.

Para os elementos carregados, duas sensibilidades são calculadas, uma considerando o termo devido à carga dependente (utilizando a equação 6.4) e outra sem considerar a carga dependente (utilizando a equação 6.3).

As duas sensibilidades são calculadas e ordenadas separadamente. A sensibilidade ordenada sem incluir o termo de carga (equação 6.3) é utilizada no critério de remoção e a sensibilidade ordenada incluindo o termo de carga (equação 6.4) é utilizada no critério de adição. Se um elemento é elegível para remoção (utilizando a equação 6.3) mas é também elegível para adição (utilizando a equação 6.4) é adotada a operação de adição, esta seleção também está de acordo com o trabalho de (Yang *et al.*, 2005).

6.1.4 Procedimentos utilizados no método BESO na minimização da norma-P das tensões de von Mises

O filtro numérico utilizado na minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente é o mesmo utilizado na minimização das tensões co carga dependente devido ao peso próprio.

Para estabilizar o processo, duas estratégias são aplicadas, a normalização das sensibilidades e o cálculo da média histórica. A normalização segue a proposta de (Zhou *et al.*, 2021), no qual o método de escala Mínimo-Máximo é utilizado para normalizar as sensibilidades:

$$\mathbf{N}(\alpha_i) = \frac{\alpha_i - (\alpha_{i\min})}{(\alpha_{i\max}) - (\alpha_{i\min})} \quad (6.9)$$

sendo que $\mathbf{N}(\alpha_i)$ é o vetor das sensibilidades normalizado. α_i é o vetor inicial das sensibilidades e $\alpha_{i\max}$ e $\alpha_{i\min}$ são respectivamente os valores máximos e mínimos.

Posteriormente é calculada a média histórica, utilizando a informação da iteração atual e da última iteração:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} (\alpha_{i,k} + \alpha_{i,k-1}) \quad (6.10)$$

sendo que k e $k - 1$ são respectivamente a iteração atual e última iteração.

Como a adição e remoção de elementos é realizada utilizando critérios diferentes, sendo que quando o elemento é elegível para adição e remoção é adotada a operação de adição, o volume da iteração atual, V_k , é verificado antes do cálculo do volume da próxima iteração. O volume da próxima iteração é calculado como:

$$V_{k+1} = \max \{V^*, V_k(1 - ER)\} \quad (6.11)$$

sendo que V_{k+1} é o volume da próxima iteração e ER é a razão de evolução, responsável por controlar a porcentagem de volume entre as iterações.

Na minimização da norma-P das tensões de von Mises o critério de parada é calculado em função da máxima tensão de von Mises:

$$erro_{global} = \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1} - \sigma_{max,k-N-i+1})}{\sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1})} \leq \tau \quad (6.12)$$

sendo que N é o número de iterações utilizado no cálculo do erro, σ_{max} é a máxima tensão de von Mises e τ é a precisão do critério de parada do algoritmo. A análise por elementos finitos e o processo de adição e remoção de elementos é repetida, até que o critério de convergência seja alcançado.

6.2 Viga biapoiada: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão

O primeiro exemplo é a viga biapoiada sujeita a carga de pressão distribuída. Os objetivos principais do exemplo são: comparar a carga de pressão dependente com uma carga de pressão fixa de mesma intensidade e avaliar a proposta de normalização das sensibilidades. O exemplo também verifica a evolução da topologia com o aumento do expoente da norma, para isso diversos valores de P foram testados.

A viga biapoiada apresenta inicialmente uma carga de pressão de $q_0 = 8 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ uniformemente distribuída aplicada na face superior da viga, com a evolução da otimização a carga é distribuída ao longo das faces dos elementos carregados. Para reduzir a concentração de tensões nos apoios, a restrição é aplicada nos três primeiros nós de cada lado da viga, sendo que apenas o primeiro nó do lado esquerdo é fixo. A figura 6.4 apresenta a geometria e as condições de contorno da viga biapoiada sujeita a carga de superfície, a espessura da viga é 1 m.

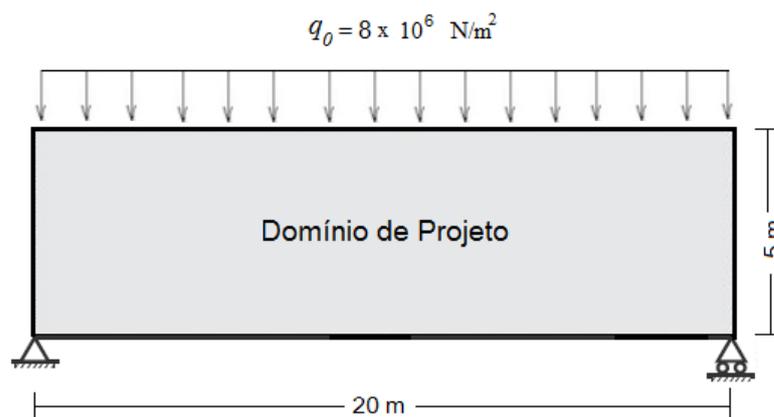


Figura 6.4 – Ilustração da viga biapoiada sujeita a carga de superfície.

O modelo é composto por uma malha de 200×50 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

Os parâmetros do método BESO utilizados na análise da viga biapoiada sujeita a carga de superfície são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros BESO utilizados na implementação da viga biapoiada sujeita a carga de superfície.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	50	%
ER	Razão de evolução	2	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	2	%
r_{min}	Raio do filtro	0,3	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	5	-
P	Ordem da norma (expoente P)	4 a 7	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada até $P = 5$	0,1	%
τ	Precisão do critério de parada $P = 6$ e $P = 7$	0,01	%

A figura 6.5 apresenta a aplicação da carga de pressão fixa e da carga de pressão dependente para $P = 4$.

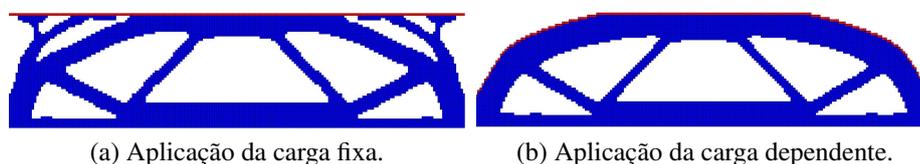


Figura 6.5 – Viga biapoiada: aplicação das cargas fixa e dependente com $P = 4$.

A figura 6.6 apresenta a comparação entre as topologias obtidas considerando a carga de pressão dependente e a carga de pressão fixa de mesma magnitude, para $P = 4$.

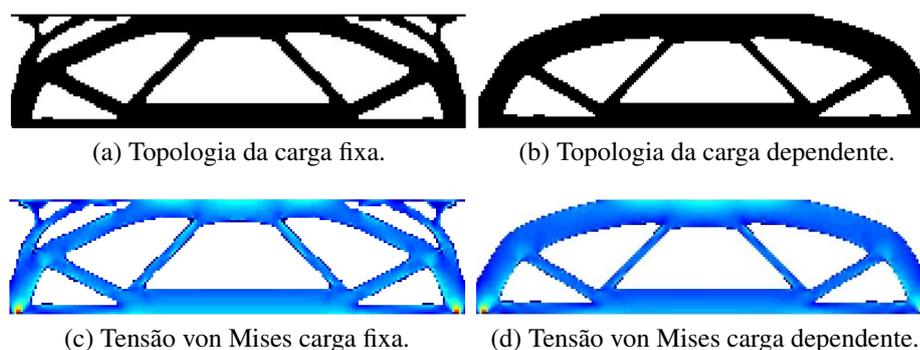


Figura 6.6 – Comparação entre as cargas de pressão fixa e dependente $P = 4$.

Através da diferença nas topologias apresentadas na figura 6.6 é possível verificar a importância de desenvolver algoritmos considerando as cargas dependentes.

A segunda análise apresenta a avaliação da estratégia de normalização das sensibilidades. A figura 6.7 apresenta os resultados obtidos com e sem a normalização das sensibilidades para $P = 6$.

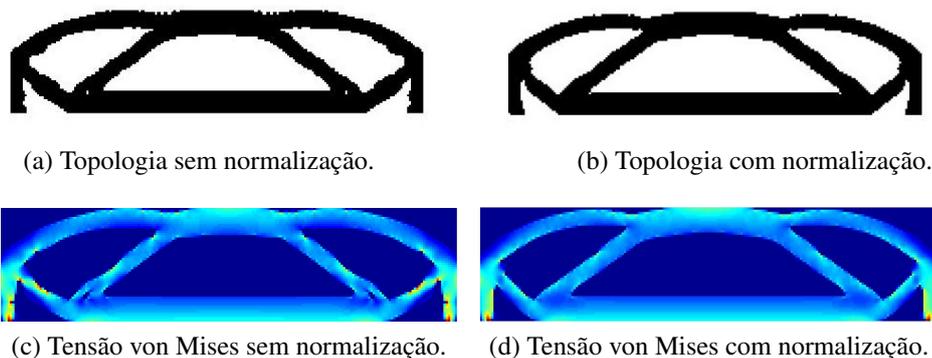


Figura 6.7 – Comparação entre as topologias com e sem utilizar o processo de normalização das sensibilidades para $P = 6$.

Observando a figura 6.7 é possível verificar que a normalização das tensões gerou uma topologia mais suave.

A figura 6.8 apresenta os resultados da minimização da compliance utilizando a técnica de normalização das sensibilidades para a posterior comparação dos resultados com a minimização da norma- P das tensões de von Mises.

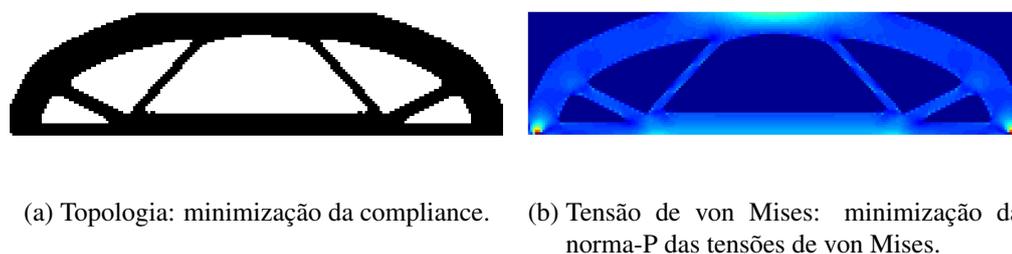


Figura 6.8 – Viga biapoçada: minimização da compliance e minimização da norma- P das tensões de von Mises com carga de pressão.

A figura 6.9 apresenta os resultados obtidos através da minimização da norma- P das tensões de von Mises para $P = 5$ e $P = 6$.

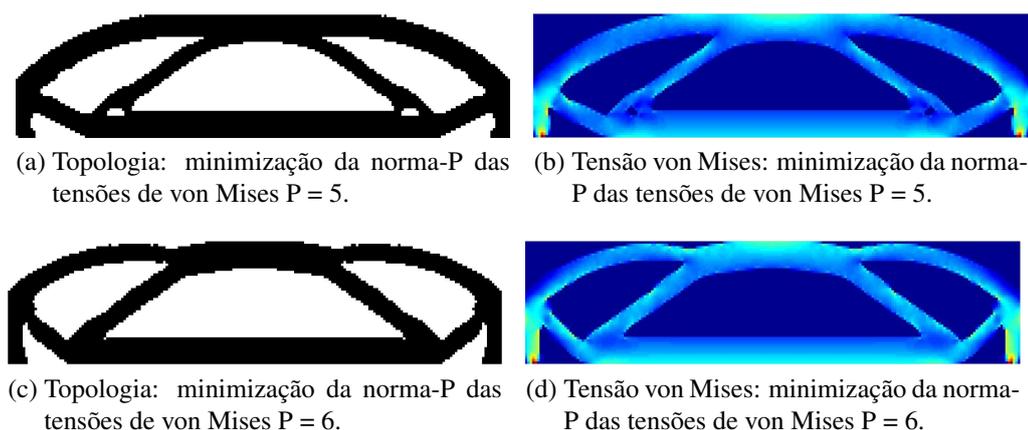


Figura 6.9 – Viga biarçoadada - minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga de pressão para P = 5 e P = 6.

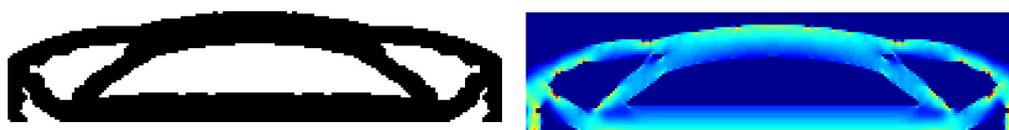
A tabela 6.2 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação da viga biarçoadada com carga de pressão comparando dois critérios: minimização da norma-P das tensões de von Mises e minimização da compliance. Sendo C a compliance, τ_c a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e σ_{max} a máxima tensão de von Mises e τ_σ é a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 6.2 – Viga biarçoadada sujeita à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

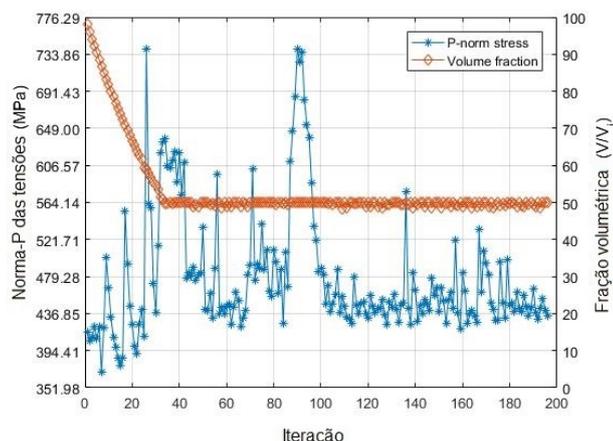
Critério	C (Nm)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ
Compliance	$1,449 \times 10^6$	-	366,27	-
Tensão P4	$1,478 \times 10^6$	2,0	331,41	-9,5
Tensão P5	$1,607 \times 10^6$	10,9	311,01	-15,1
Tensão P6	$1,742 \times 10^6$	20,2	297,00	-18,9

A normalização das sensibilidades contribuiu para a estabilização do processo de otimização permitindo o aumento do valor do expoente da norma gerando topologias mais suaves até o valor de P = 6, reduzindo a tensão máxima em até 18,9 %.

A normalização das tensões também permitiu o uso do valor 7 para o expoente da norma. A figura 6.10 apresenta os resultados obtidos através da minimização da norma-P das tensões de von Mises para P = 7.



(a) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 7$. (b) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 7$.



(c) Norma-P e fração volumétrica.

Figura 6.10 – Viga biapoçada: minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga de pressão para $P = 7$.

A Tabela 6.3 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação da viga biapoçada para a minimização da compliance e para a minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$ e $P = 7$.

Tabela 6.3 – Resultados da viga biapoçada sujeita a carga de pressão para $P = 6$ e $P = 7$.

Critério	C (Nm)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ
Compliance	$1,449 \times 10^6$	-	366,27	-
Tensão P6	$1,742 \times 10^6$	20,2	297,00	-18,9
Tensão P7	$2,154 \times 10^6$	48,7	290,69	-20,6

A figura 6.10 mostra que é possível o uso do valor 7 para o expoente da norma, entretanto como pode ser observado para $P = 6$ a topologia é mais suave. Comparando os resultados com $P = 6$ e $P = 7$ a redução na tensão máxima varia de 18,9 % para 20,6 e a flexibilidade aumenta de 20,2% para 48,7%. Esse comportamento foi observado também por (Nabaki *et al.*, 2019) e (Le *et al.*, 2010) os quais concluíram que a princípio qualquer valor pode ser utilizado para o expoente da norma, entretanto ao aumentar o valor de P muitos ótimos locais podem ser introduzidos, convergindo para um ótimo local com uma redução pequena na

tensão máxima e um aumento grande na flexibilidade. Portanto, pode ser observado que $P = 6$ mostrou-se mais apropriado para o caso da viga biapoiada sujeita a carga de pressão.

6.3 Problema do pistão: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão

O segundo exemplo é o problema do pistão, um caso clássico de carga de pressão; o exemplo é semelhante ao explorado por (Lee *et al.*, 2012). O principal objetivo do exemplo é avaliar a eficiência em reduzir as tensões, mesmo quando a concentração de tensões é causada exclusivamente pela restrição de fixação na base do pistão. O exemplo também verifica a possibilidade do uso de números decimais para o valor do expoente da norma. Para avaliar o uso de números decimais, três valores foram testados: $P = 3,5$; $P = 4,5$ e $P = 5,5$. Para avaliar a estabilidade da solução, foram testados também três valores para a fração volumétrica.

A figura 6.11 apresenta o problema do pistão. Inicialmente é aplicada uma carga uniformemente distribuída na face superior do pistão, com a evolução da otimização, a carga é distribuída ao longo das faces dos elementos carregados. A pressão aplicada é $q_0 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. Para reduzir a concentração de tensões devido às condições de contorno, o apoio é distribuído nos cinco nós centrais.

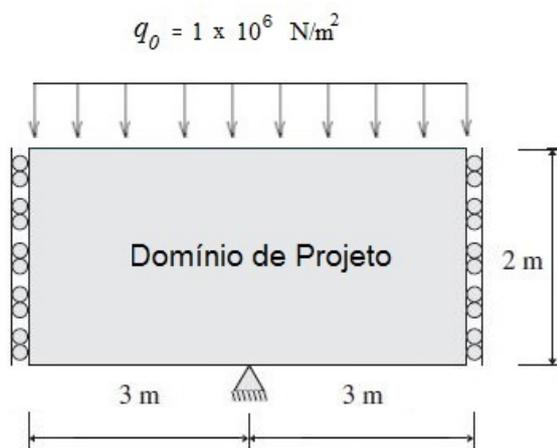


Figura 6.11 – Ilustração do Problema do pistão sujeito a carga de superfície.

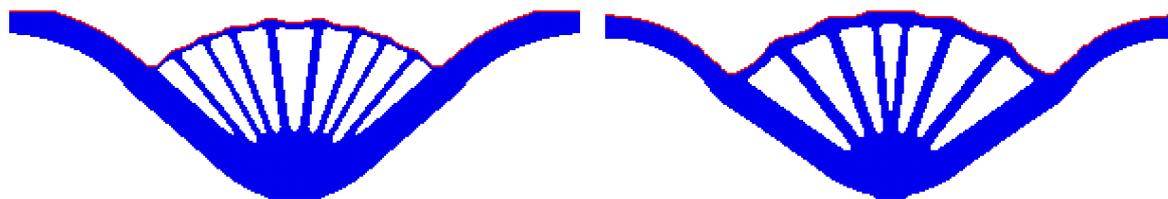
O modelo é composto por uma malha de 300×100 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

A Tabela 6.4 apresenta os parâmetros do método BESO para o exemplo do Pistão, utilizados na minimização da norma-P das tensões de von Mises e na minimização da compliance.

Tabela 6.4 – Parâmetros BESO utilizados no exemplo do Pistão sujeito a carga de superfície.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
V_{frac}	Fração do volume inicial	30	%
ER	Razão de evolução	2,5	%
AR_{max}	Máxima razão de admissão	2,5	%
r_{min}	Raio do filtro	0,08	m
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	5	-
P	Ordem da norma (expoente P)	3,5 a 5,69	-
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001	-
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5	-
τ	Precisão do critério de parada	0,1	%

As figuras 6.12 e 6.13 apresentam respectivamente a aplicação das cargas e a comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 3,5$.



(a) Aplicação da carga: minimização da compliance. (b) Aplicação da carga: minimização da das tensões $P = 3,5$.

Figura 6.12 – Problema do Pistão - aplicação da carga para $P = 3,5$.

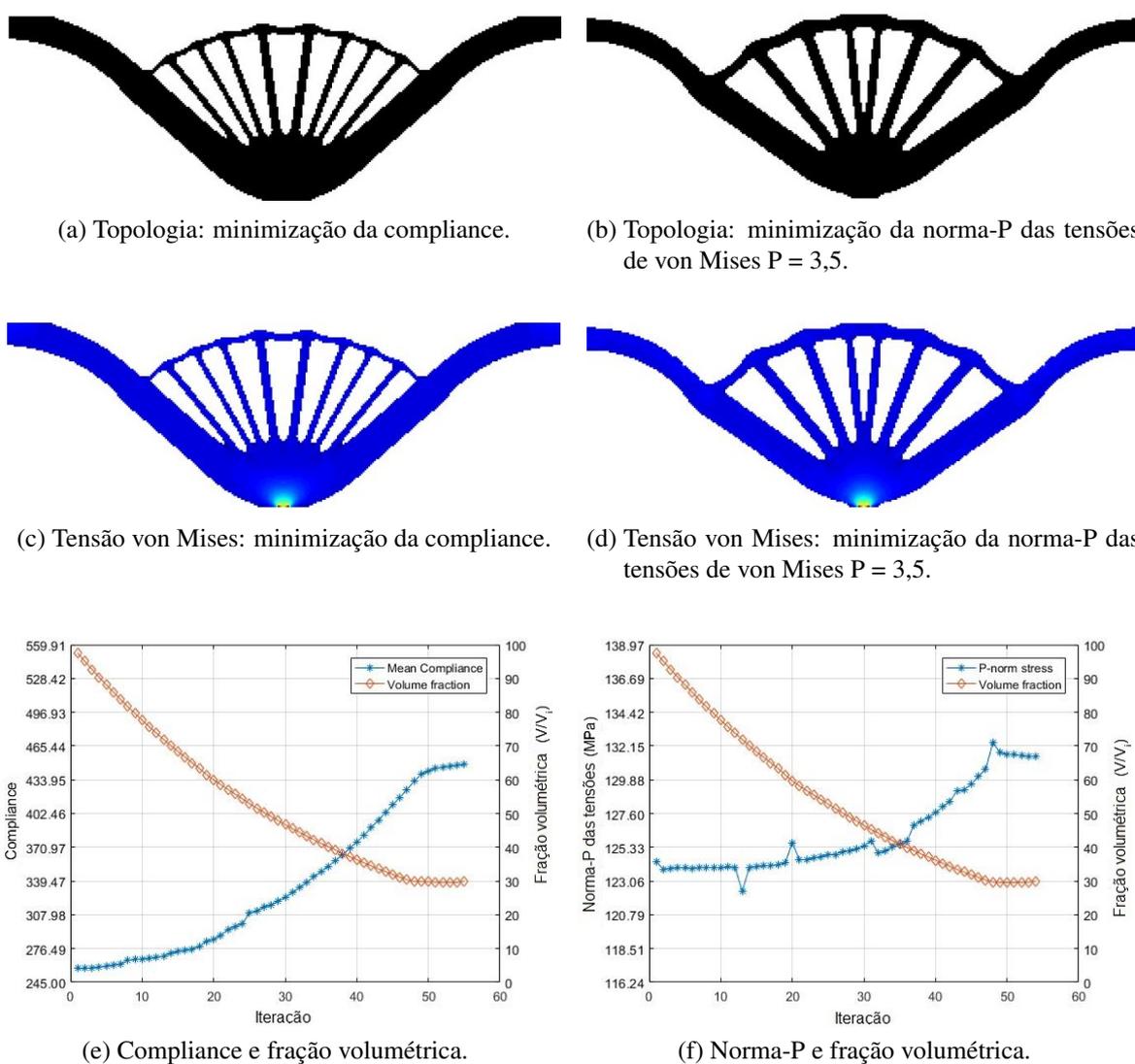


Figura 6.13 – Problema do Pistão - resultados da minimização da compliance e da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 3,5$.

A figura 6.14 apresenta o problema do pistão aplicando a minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 4,5$ e $P = 5,5$.

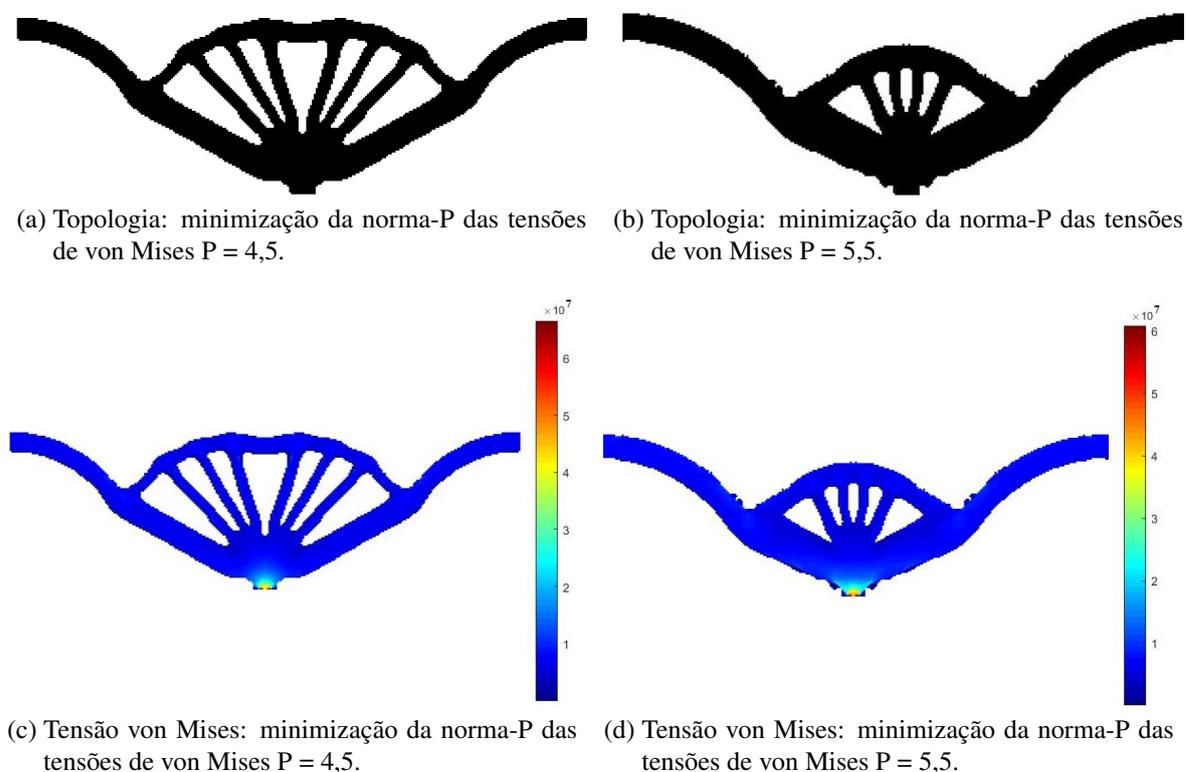


Figura 6.14 – Problema do Pistão - resultados da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 4,5$ e $P = 5,5$.

Os resultados demonstram que números decimais também podem ser utilizados para a ordem na norma (expoente P).

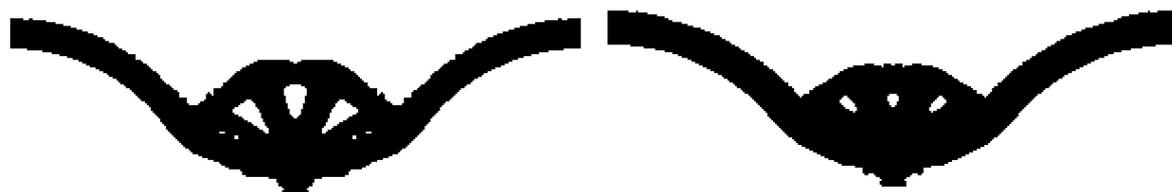
A Tabela 6.5 apresenta os resultados da análise do problema do pistão comparando os critérios de minimização da norma-P das tensões de von Mises e minimização da compliance. Sendo τ_c a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e τ_σ a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 6.5 – Pistão sujeito à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	C (Nm)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	896,929	-	72,219	-
Tensão P = 3,5	903,540	0,7	69,710	-3,5
Tensão P = 4,5	949,864	5,8	66,494	-7,9
Tensão P = 5,5	972,227	8,3	60,830	-15,8

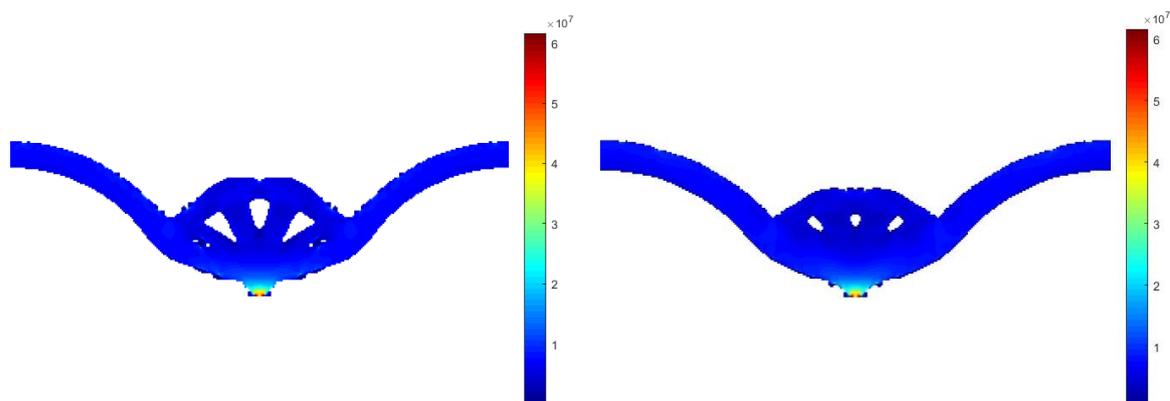
Como esperado, aumentando o valor de P a tensão máxima reduz e a compliance aumenta. A adoção de valores decimais permitiu elevar o expoente da norma até o valor de 5.5 alcançando uma redução ainda maior no valor da tensão máxima. A redução no valor da tensão máxima obtida no problema do pistão é menor do que a observada no exemplo da viga biapoiada, devido à restrição na base do pistão. Entretanto, as topologias apresentam resultados significativos, como o apresentado na figura 6.14 (d), mostrando que estruturas menores e com barras laterais mais espessas também são uma solução na obtenção de uma estrutura mais resistente.

No problema do pistão, o máximo valor inteiro para a ordem da norma com o qual a otimização converge é cinco. No intuito de avaliar o máximo valor com duas casas decimais para a ordem da norma e a evolução da topologias ao elevar o valor do expoente, a figura 6.15 apresenta os resultados para $P = 5.65$ e $P = 5.69$. O último valor, com duas casas decimais, para o qual a otimização converge é $P = 5.69$.



(a) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5,65$.

(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5,69$.



(c) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5,65$.

(d) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises $P = 5,69$.

Figura 6.15 – Problema do Pistão - resultados da minimização da norma-P das tensões de von Mises para $P = 5,65$ e $P = 5,69$.

A figura 6.15 confirma a tendência de gerar topologias reduzindo o número de barras, aumentando a espessura das mesmas, como uma solução para reduzir o valor da tensão máxima.

Para verificar a convergência do método foi desenvolvida uma análise variando a fração volumétrica, parâmetro que determina o volume final da estrutura. A figura 6.16 apresenta as topologias obtidas variando a fração volumétrica, utilizando $P = 4,5$.

A Tabela 6.6 apresenta os valores da máxima tensão de von Mises para as três frações volumétricas avaliadas, sendo σ_{max} a máxima tensão de von Mises.

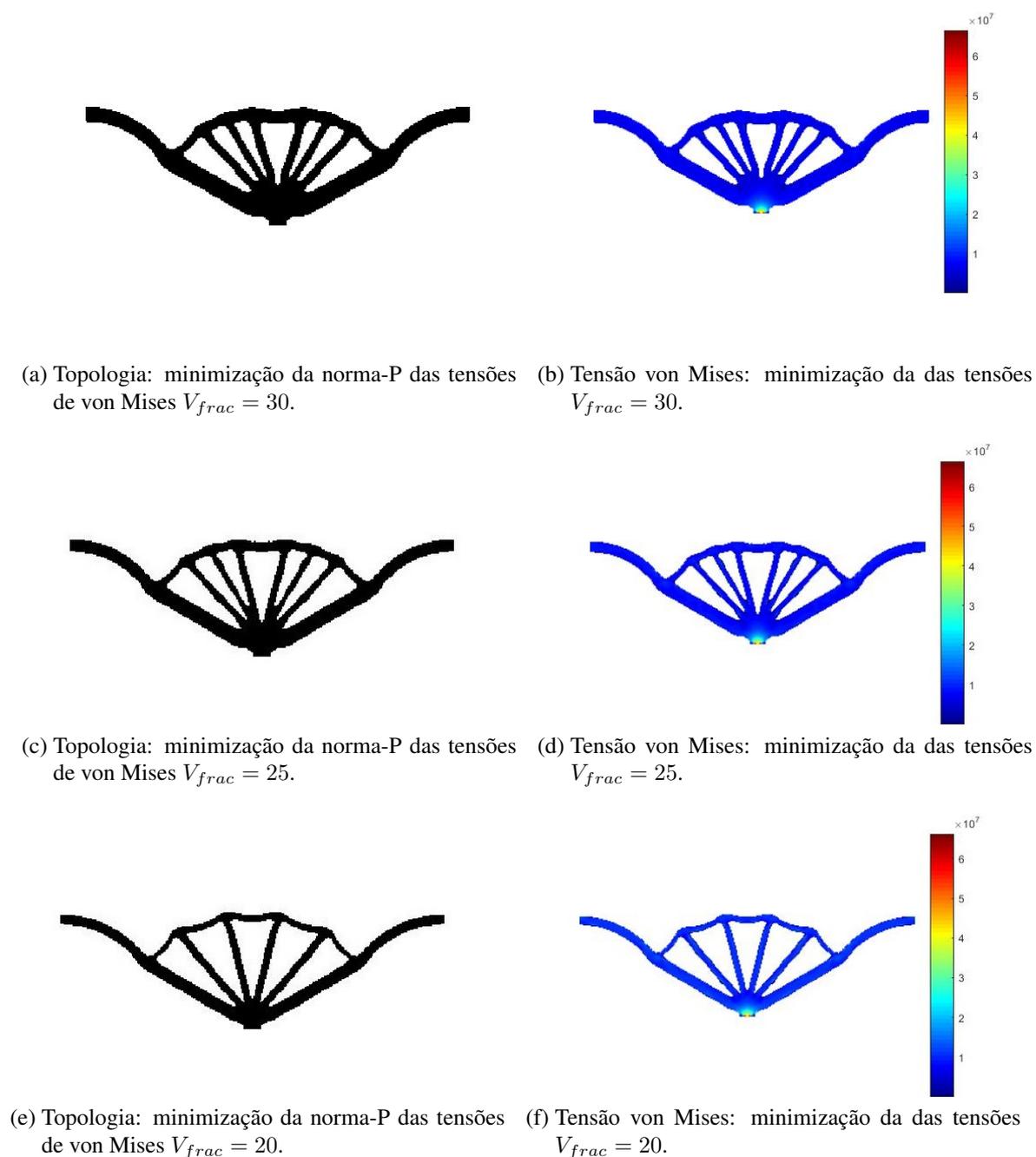


Figura 6.16 – Problema do pistão comparando três frações volumétricas ($P = 4,5$).

Tabela 6.6 – Resultados do problema do pistão para três frações volumétricas.

Fração volumétrica	σ_{max} (MPa)
30 %	66,14
25 %	66,44
20 %	66,15

Os resultados mostram que foi possível reduzir o volume estrutural em até 20% do volume inicial da estrutura, mantendo os níveis de tensão obtidos com 30% do volume inicial. O nível de tensão permanece o mesmo porque embora a espessura das barras diminua com a redução da fração volumétrica, a tensão máxima está localizada no apoio central.

6.4 Perfil-L: minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente devido à pressão

O terceiro exemplo selecionado é o Perfil-L, um exemplo clássico de minimização da norma-P das tensões de von Mises devido ao canto vivo. O principal objetivo do exemplo é investigar se a estratégia de normalização das tensões é eficiente em eliminar o canto vivo.

A condição de carregamento é a combinação de uma carga fixa vertical e uma pressão distribuída aplicada no lado direito do Perfil-L, as cargas são: $q_0 = -5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e $F = -400 \text{ N}$. As dimensões e as condições de contorno do Perfil-L são apresentados na figura 6.17, a espessura do perfil é 1 mm.

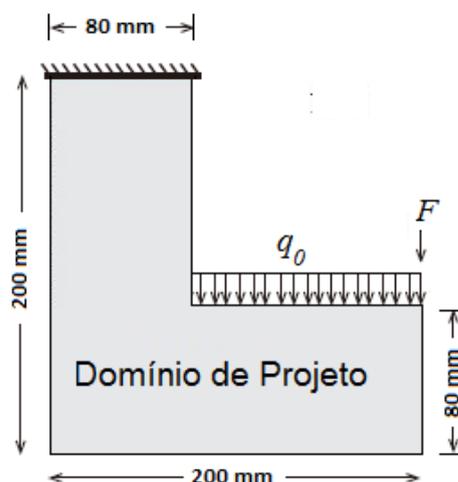


Figura 6.17 – Ilustração do Perfil-L sujeito a carga de superfície.

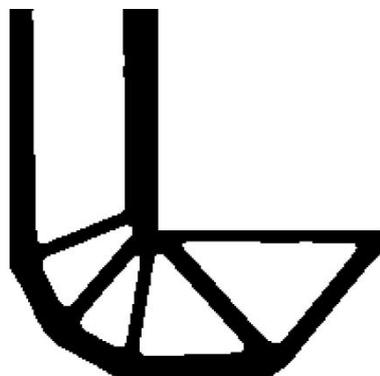
O modelo é composto por uma malha de 25600 elementos quadrangulares, de lados iguais, com quatro nós por elemento. As propriedades do material são: Módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. O exemplo é resolvido para duas soluções: minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises.

A Tabela 6.7 apresenta os parâmetros do método BESO utilizados na análise do perfil-L sujeito à combinação de uma carga fixa com uma carga de superfície, utilizado nas soluções de minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises.

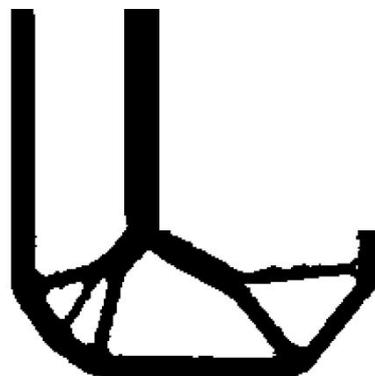
Tabela 6.7 – Parâmetros BESO utilizados na implementação do Perfil-L sujeito à carga de superfície.

Parâmetro	Descrição	Valor
V_{frac}	Fração do volume inicial	40 %
ER	Razão de evolução	2 %
AR_{max}	Máxima razão de admissão	2 %
r_{min}	Raio do filtro	0,006 m
x_{min}	Valor mínimo da variável de projeto	0,001
q	Fator de penalização do modelo de interpolação de material	4
P	Ordem da norma (expoente P)	5 a 7
N	Número de iterações utilizado no cálculo do erro	5
τ	Precisão do critério de parada	0,01 %

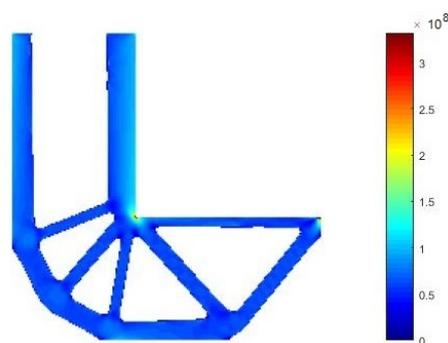
A figura 6.18 apresenta a comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises do Perfil-L para $P = 6$. As figuras 6.18(e) and 6.18(f) apresentam a evolução das funções objetivo.



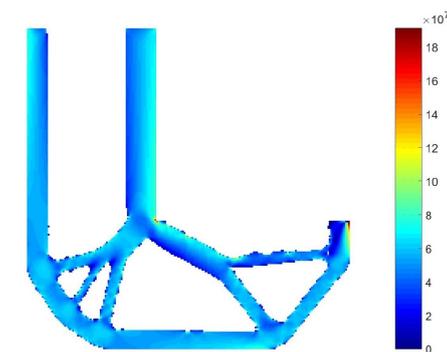
(a) Topologia: minimização da Compliance.



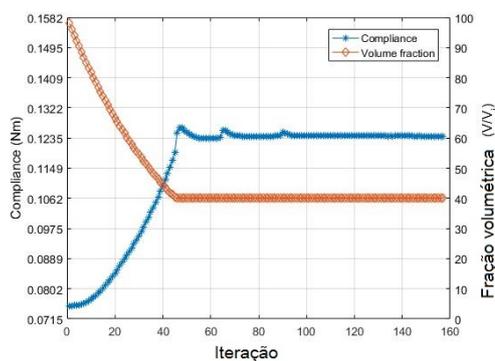
(b) Topologia: minimização da norma-P das tensões de von Mises.



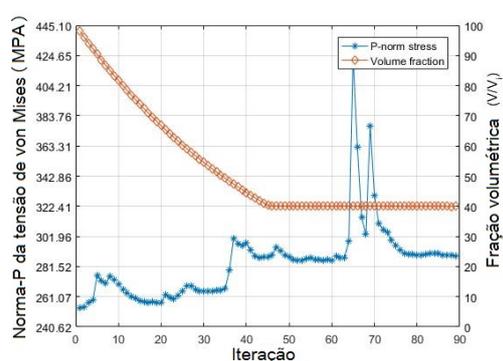
(c) Tensão von Mises: minimização da Compliance.



(d) Tensão von Mises: minimização da norma-P das tensões de von Mises.



(e) Compliance e fração volumétrica.



(f) Norma-P e fração volumétrica

Figura 6.18 – Perfil-L sujeito a carga de superfície - minimização da compliance e minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$.

A figura 6.18 mostra que a minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 6$ modifica a topologia, para minimizar a Norma-P e reduzir as tensões. Portanto, as funções objetivo tem um comportamento diferente.

Aumentando a ordem da norma os locais de concentração de tensão variam muito de uma iteração para outra. Por esse motivo, alguns autores utilizam técnicas para lidar com o problema; um exemplo são os filtros de topologia ao longo das iterações como os utilizados nos trabalhos de (Xia *et al.*, 2018) e (Le *et al.*, 2010), que também têm a função de suavizar a topologia final.

A figura 6.19 apresenta em vermelho a aplicação da carga dependente para o exemplo do Perfil-L para $P = 7$.

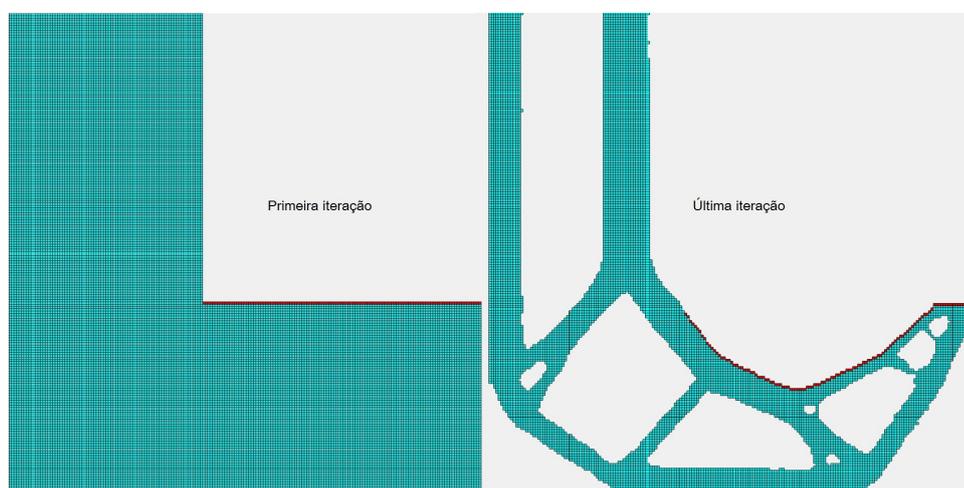


Figura 6.19 – Elementos carregados na análise do Perfil-L ($P = 7$).

O presente trabalho utiliza a técnica de normalização de sensibilidades com a função de contribuir para a estabilização do processo de otimização e permitir alcançar valores de P maiores; o processo permitiu utilizar $P = 7$.

Adicionalmente, um filtro de pós-processamento, para suavizar a topologia final, foi aplicado ao Perfil-L na análise utilizando $P = 7$. A figura 6.20 apresenta as topologias do Perfil-L na minimização da norma-P das tensões de von Mises sujeito a carga dependente devido à pressão, antes e depois do uso do filtro de pós-processamento.

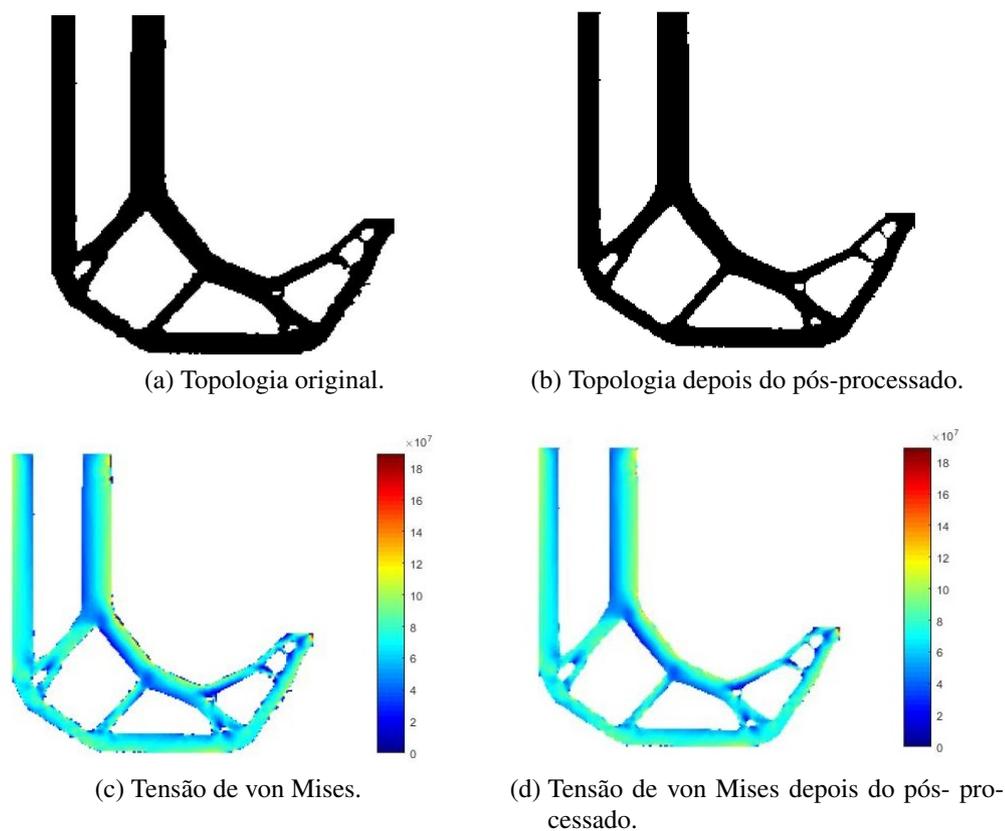


Figura 6.20 – Perfil-L sujeito a carga de superfície antes e depois do pós processamento $P = 7$.

A Tabela 6.8 apresenta um resumo dos resultados obtidos na simulação do Perfil-L sujeito a carga de superfície comparando a minimização da norma-P das tensões de von Mises com a minimização da compliance. Sendo que τ_c é a diferença percentual entre o valor da compliance obtida através do critério de rigidez (minimização da compliance) e do critério de tensões (minimização da norma-P das tensões de von Mises) e τ_σ é a diferença percentual entre as tensões de von Mises.

Tabela 6.8 – Perfil-L sujeito à carga de pressão - Comparação entre a minimização da compliance e a minimização da norma-P das tensões de von Mises.

Critério	C (Nm)	τ_c (%)	σ_{max} (MPa)	τ_σ (%)
Compliance	0,168	-	244,088	-
Tensões P = 5	0,154	-8,6	190,161	-22,1
Tensões P = 6	0,166	-1,3	191,179	-21,7
Tensões P = 7	0,169	0,6	189,180	-22,5

Os resultados mostram que o método de minimização da norma-P das tensões de von Mises é eficiente em reduzir o valor da tensão máxima. A normalização da sensibilidade permitiu o uso do expoente $P = 7$, tornando possível a eliminação do canto vivo. Para obter uma topologia final mais suave, foi implementado um filtro de pós-processamento.

O filtro consiste primeiramente em localizar os elementos do contorno, através da seleção dos elementos cujos vizinhos são vazios. Posteriormente, o filtro elimina os elementos do contorno com tensões baixas, suavizando a estrutura final, para gerar um contorno que facilite a manufatura.

A minimização da norma-P das tensões de von Mises distribuiu as tensões na região próxima ao canto vivo alterando o local da tensão máxima, do canto vivo para o local onde a carga fixa é aplicada. Por esse motivo, o valor da tensão máxima quase não sofreu alteração de $P = 5$ para $P = 7$. A minimização da norma-P das tensões de von Mises com $P = 7$ eliminou o canto vivo, com uma redução de 22% na tensão máxima em relação a minimização da compliance.

7 CONCLUSÕES GERAIS

As cargas de superfície devido à pressão são parte integrante da maioria dos projetos em engenharia aeronáutica, aeroespacial e mecânica. As cargas de corpo devido ao peso próprio são o principal carregamento em estruturas de grande porte na engenharia civil, como edifícios, pontes e viadutos. Portanto, o desenvolvimento de métodos contemplando as cargas dependentes sempre foi de grande interesse na otimização estrutural. Associado ao fato dos critérios de tensão serem um dos principais requisitos dos projetos estruturais, o desenvolvimento de propostas combinando critérios de tensão com cargas dependentes tornou-se um importante ramo da otimização topológica.

O foco principal do trabalho foi desenvolver a proposta de considerar as cargas dependentes para um critério de tensão, através de uma análise consistente utilizando o método adjunto. Ao longo do desenvolvimento, foram investigadas estratégias de melhorias, capazes de ampliar a capacidade do método de minimização da norma-P das tensões de von Mises, para reduzir o valor da tensão máxima e lidar com cantos vivos.

Seis exemplos numéricos clássicos foram investigados para validar a convergência do algoritmo e a eficiência do método. Os resultados mostram que a minimização da norma-P das tensões de von Mises incluindo carga dependente é eficiente em minimizar a função objetivo, reduzindo o valor da tensão máxima em todos os exemplos analisados.

Através da análise da viga biapoçada, com e sem entalhe, foi possível observar que a normalização das sensibilidades contribuiu para a estabilização do processo de otimização permitindo o aumento do valor do expoente da norma gerando topologias mais suaves e com uma melhor distribuição das tensões. No Perfil-L os resultados mostram que a normalização da sensibilidade tornou possível a eliminação do canto vivo para os dois tipos de carga dependente (carga de corpo e carga de superfície) também permitindo uma melhor distribuição das tensões ao longo da estrutura.

O problema do pistão e a viga em balanço mostraram que o método é eficiente em reduzir o valor da tensão máxima até mesmo quando a concentração de tensão é causada apenas pela restrição. Na viga em balanço é possível observar também que o método permite uma melhor distribuição da tensão ao longo da viga.

A recente investigação do uso de números decimais para o valor do expoente da

norma e a normalização da sensibilidade permitiu explorar valores para a ordem da norma maiores do que os apresentados nos trabalhos iniciais em minimização da norma-P das tensões de von Mises com carga fixa utilizando o método BESO.

O estudo demonstrou que o valor máximo para a ordem da norma pode variar de um exemplo para outro. Também é possível concluir que uma das vantagens do método é permitir a utilização da ordem da norma como uma solução de compromisso entre a tensão máxima obtida e a flexibilidade, de acordo com os requisitos de cada projeto.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Desenvolver uma proposta utilizando o método BESO baseada na minimização de volume com restrição de tensão (inverter a função objetivo com a restrição).
- Associar o BESO aplicado a minimização da norma-P das tensões de von Mises a um software comercial de elementos finitos, estendendo a geração de malha e análise estrutural à geometrias mais complexas.
- Aplicar a proposta de minimização da norma-P das tensões de von Mises em diferentes problemas envolvendo cargas dependentes, como por exemplo análises térmicas.
- Implementar a metodologia apresentada utilizando uma linguagem de programação que permita o processamento de uma malha mais refinada.
- Implementar a metodologia apresentada utilizando uma linguagem de programação que permita o processamento de uma malha com mais graus de liberdade, para a análise de estruturas 3D.

8 REFERÊNCIAS

- Allaire, G.; Jouve, F.; Toader, A. M. A level-set method for shape optimization. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 334, n. 12, p. 1125 – 1130, 2002.
- Ansola, R.; Canales, J.; Tárrago, J. A. An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization (eso) of continuum structures subjected to self-weight loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 14, p. 1220 – 1230, 2006.
- Bendsoe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, Dec 1989.
- Bendsoe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197 – 224, 1988.
- Bendsoe, M. P.; Sigmund, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, n. 9, p. 635–654, Nov 1999.
- Berke, L.; Khot, N. S. Use of optimality criteria methods for large scale system. **AGARD Lec.70**, v. 70, p. 1–29, 1974.
- Bittencourt, M. L. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2010. 294 p.
- Blachowski, B.; Tauzowski, P.; Logo, J. Yield limited optimal topology design of elastoplastic structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 61, n. 5, p. 1953–1976, maio 2020.
- Bourdin, B.; Chambolle, A. Design-dependent loads in topology optimization. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 89, n. 1, p. 309–336, 2003, second World Congress on Computational Mechanics.
- Bruggi, M.; Cincini, C. An alternative truly-mixed formulation to solve pressure load problems in topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 17, p. 1500–1512, 2009.
- Bruyneel, M.; Duysinx, P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 29, n. 4, p. 245–256, abr. 2005.
- Chen, A.; Cai, K.; Zhao, Z. L.; Zhou, Y.; Xia, L.; Xie, Y. M. Controlling the maximum first principal stress in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 1615–1488, ago. 2020.
- Chen, B.-C.; Kikuchi, N. Topology optimization with design-dependent loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 1, p. 57–70, 2001.

Chu, D.; Xie, Y.; Hira, A.; Steven, G. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 21, n. 4, p. 239–251, 1996.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.]: Wiley, 2002.

Deaton, J. D.; Grandhi, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 1, p. 1–38, jan. 2014.

Du, J.; Olhoff, N. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - part i: new computational approach for 2d problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 27, n. 3, p. 151–165, maio 2004a.

Du, J.; Olhoff, N. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - part ii: algorithm and examples for 3d problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 27, n. 3, p. 166–177, maio 2004b.

Duysinx, P.; Sigmund, O. **New developments in handling stress constraints in optimal material distribution**. [S.l.]: 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 1998. 294 p.

Emmendoerfer-Jr., H.; Fancello, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 99, n. 2, p. 129–156, 2014.

Emmendoerfer-Jr., H.; Fancello, E. A.; Silva, E. C. N. Stress-constrained level set topology optimization for design-dependent pressure load problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 344, p. 569 – 601, 2019.

Eschenauer, H. A.; Kobelev, V. V.; Schumacher, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. **Structural optimization**, v. 8, n. 1, p. 42–51, Aug 1994.

Fuchs, M.; Moses, E. Optimal structural topologies with transmissible loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 4, p. 263–273, Jul 2000.

Fuchs, M. B.; Shemesh, N. N. Y. Density-based topological design of structures subjected to water pressure using a parametric loading surface. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 28, n. 1, p. 11–19, ago. 2004.

Gao, T.; Zhang, W.; Zhu, J.; Xu, Y.; Bassir, D. Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, n. 14, p. 805–813, 2008.

Guilherme, C. E. M.; Fonseca, J. S. O. Topology optimization of continuum structures with epsilon-relaxed stress constraints. **International Symposium on Solid Mechanics (2007 mar. 05-07 : São Paulo, SP)**. ABCM-Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2007., v. 46, n. 5, p. 647–661, nov. 2007.

Hammer, V. B.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 2, p. 85–92, abr. 2000.

Holmberg, E.; Torstenfelt, B.; Klarbring, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 1, p. 33–47, jul. 2013.

Huang, X.; Xie, M. **Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

Huang, X.; Xie, Y. Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 8, p. 942–948, 2011, computational Mechanics and Design.

Huang, X.; Xie, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, n. 14, p. 1039–1049, 2007.

Karihaloo, B. L.; Kanagasundaram, S. Optimum design of statically indeterminate beams under multiple loads. **Computers & Structures**, v. 26, n. 3, p. 521–538, 1987.

Kiyono, C. Y.; Vatanabe, S. L.; Silva, E. C.; Reddy, J. A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design. **Composite Structures**, v. 156, p. 10–19, 2016.

Le, C.; Norato, J.; Bruns, T.; Ha, C.; Tortorelli, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, n. 4, p. 605–620, abr. 2010.

Lee, E.; James, K. A.; Martins, J. R. R. A. Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, n. 5, p. 647–661, nov. 2012.

Logo, J.; Ismail, H. Milestones in the 150-year history of topology optimization: a review. **Computer Assisted Methods in Engineering and Science**, v. 27, n. 2–3, p. 97–132, 2020.

Luo, Y.; Mingdong, Z.; Wang, M. Y.; Deng, Z. Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints. **Computers & Structures**, v. 143, p. 73 – 84, 2014.

Luo, Y.; Wang, M. Y.; Kang, Z. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 254, p. 31 – 41, 2013.

Maxwell, J. C. On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, v. 26, n. 1, p. 1–40, 1870.

Michell, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904.

Mlejnek, H. P. Some aspects of the genesis of structures. **Structural optimization**, v. 5, n. 1, p. 64–69, mar. 1992.

Moon, S. J.; Yoon, G. H. A newly developed qp-relaxation method for element connectivity parameterization to achieve stress-based topology optimization for geometrically nonlinear structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 265, p. 226 – 241, 2013.

Nabaki, K.; Shen, J.; Huang, X. Stress minimization of structures based on bidirectional evolutionary procedure. **Journal of Structural Engineering (United States)**, v. 145, 02 2019.

Park, K. S.; Chang, S. Y.; Youn, S. K. Topology optimization of the primary mirror of a multi-spectral camera. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 25, n. 1, p. 46–53, mar. 2003.

París, J.; Navarrina, F.; Colominas, I.; Casteleiro, M. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 39, n. 4, p. 419–437, out. 2009.

París, J.; Navarrina, F.; Colominas, I.; Casteleiro, M. Stress constraints sensitivity analysis in structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 33, p. 2110–2122, 2010.

Picelli, R.; Dijk, R. van; Vicente, W. M.; Pavanello, R.; Langelaar, M.; Keulen, F. van. Topology optimization for submerged buoyant structures. **Engineering Optimization**, v. 49, n. 1, p. 1–21, 2017.

Picelli, R.; Townsend, S.; Brampton, C.; Norato, J.; Kim, H. Stress-based shape and topology optimization with the level set method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 329, p. 1–23, 2018.

Picelli, R.; Vicente, W. M.; Pavanello, R.; Keulen, F. van. Topology optimization considering design dependent stokes flow loads. **11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Sydney Australia, June, 2015.**

Querin, O. M.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary structural optimisation (eso) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, v. 15, n. 8, p. 1031–1048, 1998.

Querin, O. M.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 34, n. 3, p. 291–308, 2000.

Rossow, M. P.; Taylor, J. E. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. **AIAA Journal**, v. 11, p. 1566–1569, 1973.

Rozvany, G. Optimal plastic design: allowance for selfweight. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 103, n. EM6, p. 1165–1170, 1977.

Rozvany, G. The simp method in topology optimization - theoretical background, advantages and new applications. In: . [S.l.: s.n.], 2000.

Rozvany, G.; Querin, O.; Logo, J. **Sequential element rejection and admission (SERA) method: application to multiconstraint problems**. [S.l.: s.n.], 2004.

Rozvany, G. I. N.; Nakamura, H.; Kuhnell, B. T. Optimal archgrids: Allowance for selfweight. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 24, n. 3, p. 287–304, 1980.

Rozvany, G. I. N.; Prager, W. A new class of structural optimization problems: Optimal archgrids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1, p. 309–336, 1979, second World Congress on Computational Mechanics.

Rozvany, G. I. N.; Wang, C. M. On plane prager-structures i. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 25, n. 7, p. 519–527, 1983.

Rozvany, G. I. N.; Wang, C. M.; Dow, M. Layout optimization of structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 31, n. 1, p. 91–113, 1982a.

Rozvany, G. I. N.; Wang, C. M.; Dow, M. Prager structures: archgrids and cable networks of optimal layout. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 31, n. 1, p. 91–113, 1982b.

Senhora, F. V.; Giraldo-Londoño, O.; Menezes, I. F. M.; Paulino, G. H. Topology optimization with local stress constraints: a stress aggregation-free approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, n. 4, p. 1639–1668, out. 2020.

Sethian, J. A.; Wiegmann, A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. **Journal of Computational Physics**, v. 163, n. 2, p. 489–528, 2000.

Sigmund, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120–127, Apr 2001.

Sigmund, O.; Clausen, P. M. Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 13, p. 1874–1889, 2007.

Sigmund, O.; Kurt, M. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, Dec 2013.

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural optimization**, v. 16, n. 1, p. 68–75, Aug 1998.

Sokolowski, J.; Zochowski, A. On the topological derivative in shape optimization. **SIAM - Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, PA, USA, v. 37, n. 4, p. 1251–1272, abr. 1999.

Steven, G. P.; Li, Q.; Xie, Y. M. Evolutionary topology and shape design for general physical field problems. **Computational Mechanics**, v. 26, n. 2, p. 129–139, Aug 2000.

Stolpe, M.; Svanberg, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topo-

logy optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 8, n. 47, p. 589–597, 2001.

Svärd, H. Interior value extrapolation: a new method for stress evaluation during topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 51, n. 3, p. 613–629, mar. 2015.

Turteltaub, S.; Washabaugh, P. Optimal distribution of material properties for an elastic continuum with structure-dependent body force. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 30, p. 4587–4608, 1999.

Verbart, A.; Langelaar, M.; Keulen, F. van. A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 2, p. 663–679, fev. 2017.

Vicente, W. M.; Picelli, R.; Pavanello, R.; Xie, Y. M. Topology optimization of frequency responses of fluid–structure interaction systems. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 98, p. 1–13, 2015.

Wang, C. M.; Rozvany, G. I. N. On plane prager-structures ii: non-parallel external loads and allowances for selfweight. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 25, n. 7, p. 529–541, 1983.

Wang, M. Y.; Wang, X.; Guo, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 1, p. 227–246, 2003.

Xia, L.; Zhang, L.; Xia, Q.; Shi, T. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 311, p. 56–70, 2018.

Xia, Q.; Shi, T. Optimization of structures with thin-layer functional device on its surface through a level set based multiple-type boundary method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 311, p. 56–70, 2016.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, v. 49, n. 5, p. 885–896, 1993.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. **Basic evolutionary structural optimization**. [S.l.]: Springer London, 1997. 294 p.

Yang, R. J.; Chen, C. J. Stress-based topology optimization. **Structural optimization**, v. 12, n. 2, p. 98–105, out. 1996.

Yang, X. Y.; Xie, Y. M.; Steven, G. P.; Querin, O. M. Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. **AIAA Journal**, v. 37, n. 11, p. 1483–1488, nov. 1999.

Yang, X. Y.; Xie, Y. M.; Steven, G. P. Evolutionary methods for topology optimisation of continuous structures with design dependent loads. **Computers & Structures**, v. 83, n. 12, p. 956–963, 2005.

Young, V.; Querin, O. M.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. 3d and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (beso). **Structural optimization**, v. 18, n. 2, p. 183–192, Oct 1999.

Zargham, S.; Ward, T. A.; Ramli, R.; Badruddin, I. A. Topology optimization: a review for structural designs under vibration problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, n. 6, p. 1157–1177, jun. 2016.

Zhao, F.; Xia, L.; Lai, W.; Xia, Q.; Shi, T. Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, n. 2, p. 647–658, fev. 2019.

Zhen, L.; Yu, W. M.; Shengyin, W.; Peng, W. A level set-based parameterization method for structural shape and topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 76, n. 1, p. 1–26, 2008.

Zhou, E. L.; Wu, Y.; Lin, X. Y.; Li, Q. Q.; Xiang, Y. A normalization strategy for beso-based structural optimization and its application to frequency response suppression. **Acta Mechanica**, p. 1619–6937, fev. 2021.

Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. The coc algorithm, part ii: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1, p. 309–336, 1991, second World Congress on Computational Mechanics.