



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica**

**JUCIMAR PERUZZO**

**BURACOS NEGROS E ESTIMATIVAS DAS  
ENERGIAS ENVOLVIDAS EM PROCESSOS DE  
ACREÇÃO**

**CAMPINAS  
2021**

**Jucimar Peruzzo**

**BURACOS NEGROS E ESTIMATIVAS DAS  
ENERGIAS ENVOLVIDAS EM PROCESSOS DE  
ACREÇÃO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

**Orientador: Samuel Rocha de Oliveira**

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JUCIMAR PERUZZO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA.

**Campinas  
2021**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

P435b Peruzzo, Jucimar, 1986-  
Buracos negros e estimativas das energias envolvidas em processos de  
acrecção / Jucimar Peruzzo. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Relatividade geral (Física). 2. Buracos Negros (Astronomia). 3. Discos de  
acrecção de buracos negros. 4. Jatos. I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Black holes and energies estimates in accretion processes

**Palavras-chave em inglês:**

General relativity (Physics)

Black holes (Astronomy)

Black-holes accretion disks

Jets

**Área de concentração:** Matemática Aplicada e Computacional

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

**Banca examinadora:**

Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]

Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Raphael de Oliveira Garcia

**Data de defesa:** 15-12-2021

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada e Computacional

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-2817-346X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8279515389610954>

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 15 de dezembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA**

**Prof(a). Dr(a). RAISSA FERNANDES PESSOA MENDES**

**Prof(a). Dr(a). RAPHAEL DE OLIVEIRA GARCIA**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*À minha mãe Maria Eloni e ao meu pai Luiz Peruzzo Netto.*

# Agradecimentos

Ao professor Dr. Samuel Rocha de Oliveira, por ter aceitado me orientar, pela paciência e por sua sabedoria.

Aos professores do IMECC Ednei Felix Reis, Sueli Irene Rodrigues Costa, Kelly Cristina Poldi, Laécio Carvalho de Barros, Rodrigo Silva Lima e Cristiano Torezzan, por todos os ensinamentos.

A todos os funcionários do IMECC/Unicamp, pelos excelentes serviços prestados.

Aos colegas de turma do IMECC, pela amizade e contribuição no meu crescimento acadêmico.

Aos professores que tive ao longo da vida, por todos os ensinamentos. Trago em mim um pouco de cada um deles.

Aos colegas servidores do Instituto Federal Catarinense (IFC) – *Campus* Concórdia, pelo privilégio em trabalhar nesta instituição.

A todos os meus alunos, por tudo o que aprendi com eles.

Ao meu pai Luiz, minha mãe Maria e minha irmã Lucimar, por sempre terem acreditado em mim.

À Josi, pela confiança e pelo amor que tens por mim.

A Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de estudar.

*A matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.*  
(Stephan Hawking)

*A física é complicada demais para ser deixada para os físicos.*  
(David Hilbert)

*Os buracos negros são os únicos lugares do universo onde  
a teoria da relatividade mostra todo o seu poder e sua glória.*  
(Freeman Dyson)

*Adquiri um respeito enorme pela matemática, cujos aspectos mais sutis  
até agora considerei, em minha ignorância, apenas um luxo.*  
(Albert Einstein)

## Resumo

Os buracos negros são objetos astrofísicos oriundos de processos gravitacionais intensos e que, muitas vezes, estão presentes em fenômenos envolvendo energias extremas. O objetivo deste trabalho é explorar as principais propriedades dos buracos negros e sua relação com o processo de acreção, que constitui um dos mecanismos mais eficientes de conversão de matéria em energia. Apresentamos a fonte de energia e a dinâmica interna das estrelas, sua evolução e a formação dos objetos compactos. Investigamos os aspectos gerais dos buracos negros a partir da mecânica newtoniana e da relatividade geral, bem como estudamos o comportamento de uma partícula orbitando um buraco negro de Schwarzschild e de Kerr. Depois descrevemos o processo de acreção com simetria esférica e em discos, explorando suas características e relações com os núcleos ativos de galáxias (AGNs) e com os jatos. Através de nossos modelos estimamos as luminosidades nos discos de acreção em buracos negros estelares e em supermassivos, bem como a potência dos jatos, e comparamos os resultados com os dados observacionais. Os resultados apontam que o fenômeno da acreção consegue produzir a energia necessária para explicar a luminosidade dos AGNs e a potência dos jatos, com exceção dos picos mais energéticos, desde que os buracos negros tenham matéria disponível e suficiente para acretar.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral. Buracos Negros. Acreção. AGNs. Jatos.

## Abstract

Black holes are astrophysical objects arising from intense gravitational processes that are often present in phenomena involving extreme energies. The objective of this work is to explore the main properties of black holes and their relationship with the accretion process, which is one of the most efficient mechanisms for converting matter into energy. We present the energy source and internal dynamics of stars, their evolution and the formation of compact objects. We investigate the general aspects of black holes from Newtonian mechanics and general relativity, as well as study the behavior of a particle orbiting a Schwarzschild and Kerr black hole. We then describe the accretion process with spherical symmetry and in disks, exploring their characteristics and relationships with active nuclei of galaxies (AGNs) and with jets. Through our models we estimate the luminosities in stellar and supermassive black holes, as well as the power of the jets, and compare the results with observational data. The results show that the accretion phenomenon is able to produce the energy necessary to explain the luminosity of the AGNs and the power of the jets, with the exception of the more energetic peaks, as long as the black holes have sufficient material available to accrete.

**Keywords:** General Relativity. Black Holes. Accretion. AGNs. Jets.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>1 Evolução Estelar e Buracos Negros Newtonianos</b>	<b>15</b>
1.1 Fonte de Energia Estelar . . . . .	15
1.1.1 Energia Gravitacional . . . . .	15
1.1.2 Fusão Nuclear . . . . .	16
1.1.3 Luminosidade . . . . .	17
1.2 Dinâmica Interna de uma Estrela . . . . .	17
1.2.1 Equilíbrio Hidrostático . . . . .	17
1.2.2 Equilíbrio Térmico . . . . .	18
1.2.3 Transporte Radiativo . . . . .	18
1.2.4 Limite de Eddington . . . . .	20
1.3 Evolução Estelar . . . . .	21
1.3.1 Anãs Marrons . . . . .	21
1.3.2 Anãs Brancas . . . . .	21
1.3.3 Estrelas de Nêutrons . . . . .	22
1.3.4 Buracos Negros . . . . .	22
1.3.5 Tipos de Buracos Negros . . . . .	23
1.4 Buraco Negro Newtoniano . . . . .	23
1.4.1 Velocidade de Escape . . . . .	23
1.4.2 Raio do Buraco Negro . . . . .	24
1.5 Partículas Orbitando um Buraco Negro . . . . .	24
1.5.1 Problema de Força Central . . . . .	25
1.5.2 Equação de Órbita . . . . .	27
1.5.3 Conservação da Energia . . . . .	28
1.5.4 Órbitas de Kepler . . . . .	31
<b>2 Buracos Negros Relativísticos</b>	<b>34</b>
2.1 Introdução à Relatividade Geral . . . . .	34
2.2 Tipos de Buracos Negros . . . . .	35
2.3 Buraco Negro de Schwarzschild . . . . .	36
2.3.1 Histórico . . . . .	36

2.3.2	A Métrica de Schwarzschild . . . . .	37
2.3.3	Singularidade e Horizonte de Eventos . . . . .	38
2.3.4	Geodésicas na Métrica de Schwarzschild . . . . .	41
2.3.5	Geodésicas Tipo Tempo . . . . .	43
2.3.6	Geodésicas Tipo Luz . . . . .	48
2.3.7	Força de Maré e Raio de Roche . . . . .	50
2.3.8	Rendimento no Processo de Acreção . . . . .	51
2.4	Buraco Negro de Reissner-Nordström . . . . .	52
2.5	Buraco Negro de Kerr . . . . .	52
2.5.1	Histórico . . . . .	52
2.5.2	A Métrica de Kerr . . . . .	53
2.5.3	Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera . . . . .	54
2.5.4	Geodésicas ao Redor de um Buraco Negro de Kerr . . . . .	56
2.5.5	Rendimento no Processo de Acreção . . . . .	59
2.6	Buraco Negro de Kerr-Newman . . . . .	60
2.7	O Renascimento dos Buracos Negros . . . . .	60
2.8	Evidências e Detecção de Buracos Negros . . . . .	61
2.8.1	Introdução . . . . .	61
2.8.2	Interação Gravitacional . . . . .	62
2.8.3	Disco de Acreção . . . . .	62
2.8.4	Ondas Gravitacionais . . . . .	63
2.8.5	Imagem Direta . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Modelo de um Gás e Acreção Esférica</b>	<b>66</b>
3.1	Acreção . . . . .	66
3.1.1	Definição . . . . .	66
3.1.2	Pesquisas Pioneiras . . . . .	68
3.1.3	O Espectro . . . . .	70
3.2	Dinâmica dos Gases . . . . .	71
3.2.1	Introdução . . . . .	71
3.2.2	Leis de Conservação . . . . .	71
3.2.3	Processos Adiabáticos e Isotérmicos . . . . .	73
3.3	Acreção Esférica . . . . .	75
3.3.1	Introdução . . . . .	75
3.3.2	Fluxo de Gás . . . . .	75
3.3.3	Possíveis Soluções . . . . .	77
3.3.4	Taxa de Acreção . . . . .	79
3.3.5	Estimativas para Taxas e Luminosidades de Acreção . . . . .	81

<b>4</b>	<b>Discos de Acreção</b>	<b>82</b>
4.1	Pesquisas Pioneiras . . . . .	82
4.2	Sistemas Binários e Formação do Disco . . . . .	82
4.3	Torques Viscosos . . . . .	85
4.4	Conservação da Massa e do Momento Angular . . . . .	87
4.5	Viscosidade . . . . .	89
4.6	Tipos de Discos . . . . .	90
4.6.1	Geometria . . . . .	90
4.6.2	Profundidade Óptica . . . . .	90
4.6.3	Taxa de Suprimento de Massa . . . . .	91
4.7	Discos Finos . . . . .	91
4.7.1	Discos Finos Estáveis . . . . .	91
4.7.2	Conservação da Energia do Gás . . . . .	95
4.7.3	Equações e Soluções do Modelo Padrão . . . . .	96
4.7.4	Escalas de Tempo . . . . .	97
4.8	Espectro . . . . .	99
4.9	Estimativas de Luminosidades de Acreção . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Núcleos Ativos de Galáxias e Jatos</b>	<b>102</b>
5.1	Núcleos Galácticos Ativos . . . . .	102
5.1.1	Quasares . . . . .	103
5.1.2	Energia e Eficiência na Acreção . . . . .	104
5.1.3	Surtos de Raios Gama . . . . .	106
5.2	Jatos . . . . .	107
5.2.1	Formação . . . . .	107
5.2.2	Características do Plasma . . . . .	108
5.2.3	Campos Magnéticos . . . . .	110
5.2.4	Disco, Campo Magnético e Jatos . . . . .	116
5.2.5	Radiogaláxias . . . . .	117
5.2.6	Energia Eletromagnética . . . . .	119
	<b>Considerações Finais</b>	<b>125</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>128</b>

# Introdução

As forças gravitacionais extremas que atuam nas proximidades de um buraco negro (BN) fornecem uma oportunidade única para estudar as propriedades do fenômeno de acreção. Este trabalho tem como objetivo apresentar as principais características dos BNs e sua participação no processo de acreção, que consiste na transformação da energia potencial gravitacional em energia eletromagnética. É uma revisão bibliográfica do assunto, onde abordamos os aspectos teóricos e comparamos com os dados observacionais recentes.

Ao estudar as propriedades dos BNs objetivamos descrever as geodésicas no seu entorno, com o intuito de estimar os valores máximos do rendimento no processo de acreção. Após isso apresentamos as principais descobertas e contribuições no estudo da acreção em BNs, enfatizando as energias máximas envolvidas nos processos. O trabalho utiliza uma linguagem matemática não-tensorial e o seu desenvolvimento é detalhado, podendo servir como um texto introdutório ao tema para professores e alunos de graduação nas áreas de Física, Matemática e Astronomia.

No capítulo 1 descrevemos a dinâmica e a evolução estelar, enfatizando o análogo newtoniano de um BN. Na sequência analisamos as possíveis trajetórias de partículas em torno de um BN, pelo problema da força central.

Uma abordagem dos BNs do ponto de vista da teoria da relatividade geral é realizada no capítulo 2, onde discutimos as soluções de Schwarzschild e de Kerr, bem como estudamos as suas geodésicas. É importante conhecer e descrever as órbitas das partículas ao redor de um BN pois a matéria acretada seguirá essas trajetórias. Além disso apresentamos alguns dados atuais sobre a detecção e propriedades dos BNs.

A acreção consiste no acúmulo de matéria em um objeto astronômico massivo, por sua atuação gravitacional nas redondezas. Os planetas, as estrelas, as galáxias, etc., são formados através dele. Neste trabalho nos restringiremos em estimar as energias irradiadas enquanto a matéria é atraída e espirala em torno de BNs. No capítulo 3 descrevemos a acreção com simetria esférica e no capítulo 4 abordamos a acreção em discos. A acreção esférica é um modelo mais simples mas, como a maioria dos BNs possui momento angular, é concebível que, se existir matéria nas redondezas, eles estejam envolvidos por discos, o qual se aquece devido à viscosidade e emite radiação.

No capítulo 5 exploramos os núcleos de galáxias ativas (AGNs), onde um BN supermassivo acreta gás e estrelas do núcleo da galáxia, emitindo altas luminosidades.

Descrevemos também como são formados os jatos, que consistem na ejeção de matéria pelo eixo de simetria, através da interação do campo magnético nos discos de acreção com as partículas carregadas nele presentes. Fizemos estimativas da luminosidade dos AGNs e da potência dos jatos, comparando-os com dados observacionais.

# Capítulo 1

## Evolução Estelar e Buracos Negros Newtonianos

As estrelas apresentam um ciclo de vida e uma dinâmica complexa para a produção de energia. Um dos possíveis destinos de uma estrela é se transformar num buraco negro (BN). Neste capítulo descreveremos como as estrelas produzem energia, como elas evoluem e morrem. Os destinos finais das estrelas apresentam caroços compactos, entre os quais os chamados BNs. Apresentaremos como surgiu a ideia desse objeto e quais as órbitas newtonianas de uma partícula orbitando um BN.

### 1.1 Fonte de Energia Estelar

O que faz com que o Sol brilhe? Como as estrelas produzem a energia? No século XVII determinou-se a distância entre a Terra e o Sol, possibilitando o cálculo da sua luminosidade com precisão. No século XIX os cientistas já sabiam que a energia que mantinha o Sol ativo não era oriunda da combustão de material fóssil, pois ela poderia fazer isso por apenas poucos milhares de anos.

#### 1.1.1 Energia Gravitacional

Em 1854 o físico alemão Hermann Helmholtz propôs que a energia luminosa do Sol tinha origem gravitacional. Quando o gás que o compunha caía em direção ao seu centro, a energia potencial gravitacional era transformada em energia térmica, irradiando para o espaço [1].

Quando a energia potencial gravitacional  $U$  diminui, devido à contração, aumenta a energia cinética das partículas dentro da estrela, ou seja, aumenta a sua energia interna  $E_i$ . A energia total  $E$  é dada por  $E = U + E_i$ . De acordo com o teorema do Virial, aplicado a gases perfeitos, a energia total é a metade da energia potencial gravitacional,  $U + E_i = U/2$ , de onde vem  $E_i = -U/2$ . Dessa forma, quando a estrela se contrai, metade da energia é usada para aumentar a sua temperatura e a outra parte é liberada

na forma de radiação  $E_{\text{rad}}$ . A energia a ser irradiada é oriunda da diminuição da sua energia gravitacional, de modo que

$$E_{\text{rad}} = -\frac{U}{2}. \quad (1.1)$$

Para uma estrela de massa  $M$  e raio  $R$ ,  $U \sim -GM^2/R$  e a energia máxima que pode ser irradiada é

$$E_{\text{rad}} \sim \frac{GM^2}{2R}, \quad (1.2)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional. O valor de  $E_{\text{rad}}$  do Sol é  $\sim 10^{48}$  erg, sendo que  $1 \text{ J} = 1 \times 10^7 \text{ erg}$  [1, 2].

A produção de energia através da contração gravitacional foi uma explicação satisfatória para a época. No entanto, descobriu-se posteriormente que a idade da Terra era bem maior do que o tempo que o Sol poderia ter permanecido ativo com a mesma luminosidade, estimado em cerca de 30 milhões de anos. Isso significava que o estoque de energia seria insuficiente. No século XX descartou-se essa fonte energética e descobriu-se a fusão nuclear [1].

Mesmo não sendo a fonte energética principal das estrelas, a energia resultante da contração gravitacional é um processo importante na formação estelar, quando ainda não ocorre a fusão nuclear [2].

### 1.1.2 Fusão Nuclear

Em 1920 o astrofísico inglês Arthur Eddington especulou que a energia das estrelas era de origem subatômica. Ele considerou o que é hoje a fusão nuclear de átomos de Hidrogênio (H) em Hélio (He). Eddington propôs também o aniquilamento do próton com o elétron como fonte de energia, mas sabemos que esse último processo não ocorre [2].

A fusão nuclear era viável do ponto de vista energético, mas classicamente a repulsão elétrica entre os dois íons de H tornava isso impossível na temperatura do centro do Sol. Somente na década de 1930 a fusão nuclear foi aceita como processo gerador de energia nas estrelas. Em 1938 Hans Bethe e, independentemente, Carl F. von Weizsäcker, explicaram os diferentes ciclos de fusão nas estrelas, sendo que, no centro do Sol, a fusão era possível devido ao fenômeno quântico do tunelamento. O ciclo dominante no Sol é o próton-próton, representado pela equação  $4\text{}^1_1\text{H} \rightarrow \text{}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$ , onde quatro átomos de  ${}^1\text{H}$  se fundem e produzem um átomo de  ${}^4\text{He}$  mais um pósitron, um antineutrino do elétron e um fóton [3, 4, 1].

O H é o elemento mais abundante do universo e apresenta-se majoritariamente na forma de plasma. As estrelas passam a maior parte de suas vidas na sequência principal, convertendo H em He. Dependendo da massa, a estrela pode alcançar temperaturas maiores, sintetizando elementos mais pesados. Estrelas mais pesadas possuem uma vida

mais breve que as mais leves, pois queimam mais rapidamente o seu combustível nuclear [2].

Sabe-se atualmente que, a cada segundo o Sol transforma 600 milhões de toneladas de H em He e, destas, quatro milhões de toneladas são convertidas em radiação. O potencial total do Sol é de  $2 \times 10^{52}$  erg e, queimando nesse ritmo, poderá brilhar durante 100 bilhões de anos [1].

### 1.1.3 Luminosidade

O fluxo de energia  $H$  de uma estrela é dado por  $H = \sigma T^4$ , onde  $\sigma$  é a constante de Stephan-Boltzmann e  $T$  é a sua temperatura efetiva. A temperatura efetiva é a temperatura de um corpo negro que emite a mesma quantidade de energia eletromagnética por unidade de área e por unidade de tempo que a estrela [2, 4].

A luminosidade  $L_r$  é a quantidade de energia irradiada por unidade de tempo em todas as direções. Para uma estrela esférica de raio  $R$ , o valor de  $L$  é dado por

$$L_r = \frac{dE}{dt} = 4\pi R^2 \sigma T^4. \quad (1.3)$$

Quanto maior é a luminosidade de uma estrela, mais ela pressiona os gases para fora e maior é o seu raio<sup>1</sup>. Consequentemente, menor é a força da gravidade superficial e menor é a pressão atmosférica. Próxima ao equilíbrio termodinâmico uma estrela irradia como um corpo negro e sua luminosidade é dada pela eq. (1.3) [1, 2, 4].

## 1.2 Dinâmica Interna de uma Estrela

As condições de equilíbrio interno de uma estrela dependem da distribuição de massa, da pressão do gás, da produção e do transporte de energia. Essas condições são regidas por equações diferenciais, as quais serão descritas a seguir.

### 1.2.1 Equilíbrio Hidrostático

Uma das condições para a estrela ser estável é ela estar em equilíbrio hidrostático: a resultante das forças atuando num elemento de volume no seu interior deve ser nula. A força da gravidade puxa a massa estelar para o seu centro e a pressão do gás contrabalança essa força, empurrando para fora [2, 3].

Considere um elemento de volume cilíndrico de seção transversal  $dA$  e comprimento  $dr$ , a uma distância  $r$  do centro de uma estrela de massa  $M$ . A força de pressão

---

<sup>1</sup>Estima-se que os raios das estrelas variem entre  $10^{-2}R_\odot$  e  $10^{+3}R_\odot$ , e suas luminosidades entre  $10^{-4}L_\odot$  e  $10^{+6}L_\odot$ , onde  $R_\odot = 6,9634 \times 10^8$  m é o raio e  $L_\odot = 3,8 \times 10^{33}$  erg/s a luminosidade do Sol, respectivamente [2].

$dF_P$  sobre esse elemento é a diferença entre as forças de pressão nas paredes interna e externa, de acordo com a relação

$$dF_P = -\frac{dP}{dr}dAdr, \quad (1.4)$$

onde  $P$  é a pressão. O sinal negativo está presente porque a força aponta para o centro da estrela. Sendo  $dm = \rho dAdr$  a massa desse elemento de volume, onde  $\rho$  é a sua densidade, a força gravitacional sobre ele é dada por

$$dF_g = -\frac{GM}{r^2}\rho dAdr, \quad (1.5)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional. Igualando as duas forças (eqs. 1.4 e 1.5), obtêm-se a equação do equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)\frac{GM}{r^2}, \quad (1.6)$$

que é válida para uma distribuição esférica simétrica de matéria não relativística. A pressão num ponto localizado a uma distância  $r$  do centro é dada por [2, 4, 3]

$$P(r) = -GM \int_0^R \frac{\rho(r)}{r^2} dr. \quad (1.7)$$

## 1.2.2 Equilíbrio Térmico

Toda a energia produzida pela estrela é carregada para a superfície e irradiada para o exterior. A equação da conservação da energia representa a quantidade de energia liberada pela estrela por unidade de área e tempo,

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \rho(r), \quad (1.8)$$

onde  $\varepsilon$  é o coeficiente de produção de energia, ou seja, a energia liberada por processos nucleares por unidade de massa [3].

No interior da estrela a perda de energia na superfície por radiação  $L$  é compensada pela liberação de energia por processos nucleares. Nas fases normais, onde as mudanças do fluxo de energia  $L_r$  são lentas, a energia total pode ser calculada a partir da eq. (1.8) como [2]

$$L_r = 4\pi\varepsilon \int_0^R \rho(r)r^2 dr. \quad (1.9)$$

As estrelas tentam manter a estabilidade através da fusão nuclear. A pressão exercida pelo gás e pela radiação contrabalança a força gravitacional.

## 1.2.3 Transporte Radiativo

O fluxo de energia é determinado pelos mecanismos de transporte (condução, convecção ou radiação), sendo causado, principalmente pelo gradiente de temperatura.

Seja  $K$  o coeficiente de absorção de energia por unidade de massa. O termo  $K\rho dl$  é a opacidade, ou seja, a fração de energia do feixe absorvida ao atravessar a distância  $dl$ . Considere  $I(r, \theta)$  a intensidade da radiação, energia por unidade de área e tempo, e por unidade de ângulo sólido  $\Omega$  a uma distância  $r$  do centro da estrela e em uma direção inclinada de um ângulo  $\theta$  do raio vetor. Sendo  $j$  a energia total por unidade de massa e tempo, tem-se que a equação básica do transporte radioativo é [2]

$$\frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + IK\rho - \frac{j\rho}{4\pi} = 0. \quad (1.10)$$

O fluxo é a energia por unidade de área e por unidade de tempo em todas as direções, sendo definido por

$$H(r) = \int I \cos \theta d\Omega. \quad (1.11)$$

Seja  $H$  a quantidade de energia cruzando a área  $dA$ , por unidade de tempo e numa direção  $\theta$ , em um segundo a radiação ocupará um volume de  $c \text{ cm}^3$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Tem-se, então, que a densidade de energia é dada por

$$u(r) = \frac{HdAdl}{c \cos \theta dAdl} = \frac{1}{c} \int I d\Omega. \quad (1.12)$$

A energia que cruza a área  $dA$  num intervalo de tempo  $dt$  é  $I \cos \theta d\Omega dt$ . Sendo o número de fótons obtido pela energia total dividida pela energia de cada fóton, e o momento de cada fóton dado por  $p = h\nu/c$ , a pressão exercida sobre a área normal na direção  $\cos \theta$  é dada por

$$P_r(r) = \frac{I \cos \theta dA' d\Omega dt}{h\nu} \frac{h\nu \cos \theta dA}{c} = \frac{1}{c} \int I \cos^2 \theta d\Omega, \quad (1.13)$$

onde  $dA'$  e  $dt$  são unitários,  $h$  é a constante de Planck e  $\nu$  a frequência da radiação.

A partir da equação de transporte radiativo (1.10) e das relações (1.11), (1.12) e (1.13), encontram-se que

$$P_r = \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} \sigma T^4 \quad (1.14)$$

e

$$H_r = -\frac{4\sigma c}{3} \frac{T^3}{K\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (1.15)$$

Sendo a luminosidade dada por (a partir de 1.3)

$$L_r = 4\pi r^2 H_r, \quad (1.16)$$

substituindo a eq. (1.16) na eq. (1.15) obtém-se a equação básica de equilíbrio radiativo [2]

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3K\rho L_r}{16\pi\sigma cr^2 T^3}. \quad (1.17)$$

## 1.2.4 Limite de Eddington

A Luminosidade de Eddington ou Limite de Eddington é um conceito formulado em 1926 por Arthur Eddington e corresponde à luminosidade máxima teórica emitida por uma estrela em equilíbrio. O desenvolvimento a seguir será baseado nas referências [4, 2].

Considere uma partícula carregada na superfície de uma estrela sujeita a ação da gravidade e do fluxo radiativo. A partícula ficará ligada à estrela somente se a força gravitacional for maior que a força radiativa. Se a radiação fosse mais intensa que esse limite, ela superaria a força da gravidade, ejetaria a matéria para o espaço e desestabilizaria a estrela. Na igualdade entre essas forças tem-se a maior luminosidade possível.

Nos interiores estelares a pressão da radiação é importante somente quando a temperatura é bastante alta, pois ocorre a ionização total dos átomos. Para estrelas de grande massa a pressão de radiação é muito superior à pressão do gás:  $P_{\text{rad}} \gg P_{\text{gás}}$ .

No equilíbrio, a pressão da radiação é igual à pressão do gás devido à força da gravidade local. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade local dada por  $g = GM/r^2$ , onde  $r$  é a distância do centro da estrela de massa  $M$ , pela equação do equilíbrio hidrostático (1.6) vem que

$$\frac{dP_r}{dr} = -\rho(r)g(r). \quad (1.18)$$

O equilíbrio radiativo é dado pela eq. (1.17) e a pressão da radiação pela eq. (1.14). Derivando a eq. (1.14) em relação a  $r$  (sendo  $T$  dependente de  $r$ ) e levando em (1.17), vem que

$$L_r = -\frac{4\pi cr^2}{K\rho} \frac{dP_r}{dr}. \quad (1.19)$$

Para altas temperaturas a opacidade é dominada pelo espalhamento de elétrons. Desse modo, substituímos  $K$  por  $\kappa_T$ , sendo esta, para o hidrogênio ionizado, dada por  $\kappa_T = \sigma_T/m_p$ , onde  $\sigma_T$  é a seção de choque de Thomson ( $6,7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$ ) e  $m_p$  a massa do próton. Levando a eq. (1.18) na eq. (1.19) obtêm-se a luminosidade de Eddington, que representa a maior luminosidade que uma estrela de massa  $M$  pode emitir e estar em equilíbrio:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T}. \quad (1.20)$$

Em relação à massa do Sol, uma estrela de massa  $M$  possui  $L_{\text{Edd}}$  dada por<sup>2</sup>

$$L_{\text{Edd}} = 1,26 \times 10^{31} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ J/s} = 1,26 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg/s}. \quad (1.21)$$

Uma luminosidade  $L_r > L_{\text{Edd}}$  é chamada de Super-Eddington e está associada a eventos transitórios de ejeção de matéria, como nas supernovas.

---

<sup>2</sup>A massa  $M$  de uma estrela ou objeto astronômico, será dada em função da massa do Sol  $M_\odot$ , sendo  $M_\odot = 1,9887973 \times 10^{30} \text{ kg}$  [2].

## 1.3 Evolução Estelar

As estrelas nascem a partir de uma nuvem de gás e poeira. As flutuações de densidade produzem centros de atração gravitacional, gerando aglomerados de matéria e, sob certas circunstâncias, estrelas. Após formadas, o destino das estrelas depende basicamente de suas massas e se são isoladas ou não. Se a estrela estiver isolada, sua evolução depende apenas de sua massa. No entanto, se ela fizer parte de um sistema binário<sup>3</sup> ou múltiplo, sua evolução depende tanto de sua massa quanto da separação entre os astros constituintes do sistema e de suas massas.

Nesta seção serão enfatizados os chamados objetos compactos, que são resíduos de estrelas em que a densidade da matéria é muito maior que a matéria ordinária (comum). Como exemplo podem-se citar as anãs brancas, as estrelas de nêutrons e os BNs. O estudo da física desses objetos tem se tornado uma área de fronteira da física nas últimas décadas [5].

### 1.3.1 Anãs Marrons

Se a massa do aglomerado gasoso for  $M < 0,08 M_{\odot}$  não se forma uma estrela, ou seja, não consegue-se iniciar o processo de fusão do H. Essas protoestrelas são denominadas anãs-marrons, brilham muito fracamente e são difíceis de serem detectadas. O limite mínimo de uma anã-marrom é cerca de  $0,015 M_{\odot}$  [3, 2].

### 1.3.2 Anãs Brancas

Se a massa  $M$  da estrela for  $M < 0,8 M_{\odot}$ , ela consegue fundir apenas o H e termina a sua vida como uma anã branca de He. Se  $0,8 M_{\odot} < M < 10 M_{\odot}$  ela torna-se gigante, supergigante e ejeta a maior parte da massa, formando uma nebulosa planetária. O caroço restante resfria e se contrai, transformando-se numa anã branca de carbono ou oxigênio. A contração da anã branca segue até ocorrer a repulsão de degenerescência dos elétrons<sup>4</sup>. Apesar de não existirem mais reações nucleares no seu centro, as anãs brancas continuam emitindo radiação, sendo que esta vem da energia acumulada nas reações de fusão do passado (energia fóssil). Estes objetos vão esfriando lentamente, transformando-se numa anã negra<sup>5</sup> [2].

A maioria das estrelas existentes no universo é de baixa massa, de modo que a grande parte se transformará em anãs brancas. O raio de uma anã branca é de cerca de 10.000 km e sua massa é menor que  $1,4 M_{\odot}$ , sendo este valor denominado limite de Chandrashekar. Sua densidade é cerca de 1 milhão de vezes maior que a densidade do Sol [2].

---

<sup>3</sup>Um sistema binário é formado por duas estrelas que orbitam uma ao redor da outra.

<sup>4</sup>Num estado degenerado todos os elétrons ocupam os níveis mais baixos de energia. Sendo férmions, os elétrons respeitam o Princípio de Exclusão de Pauli.

<sup>5</sup>O tempo para uma anã branca se transformar numa anã negra é da ordem da idade do universo.

A primeira anã-branca descoberta foi Sirius B, companheira de Sirius, em 1862. Sua alta densidade foi confirmada em 1925 através da análise do espectro eletromagnético, resultante do efeito Doppler gravitacional [2, 3].

### 1.3.3 Estrelas de Nêutrons

As estrelas de nêutrons foram concebidas pelo físico russo Lev Landau na década de 1930 e detectadas em 1967 sob a forma de pulsares. Se  $10 M_{\odot} < M < 25 M_{\odot}$ , após sair da sequência principal a estrela torna-se gigante, supergigante, ejeta a maior parte da matéria numa explosão de supernova e o caroco restante torna-se uma estrela de nêutrons [4, 2, 3].

Durante o colapso do caroco a pressão gravitacional faz com que os elétrons se combinem com os prótons, formando nêutrons. Com isso os núcleos desaparecem e ocorre a neutronização da matéria. A pressão que equilibra a força gravitacional deve-se à pressão de degenerescência dos nêutrons. O limite superior para a massa de uma estrela de nêutrons é de  $3 M_{\odot}$ , sendo este o chamado Limite Causal [4].

As estrelas de nêutrons possuem raios de poucos quilômetros e densidade da ordem do núcleo atômico ( $10^{14} \text{ g/cm}^3$ ), o que equivale a um valor 10 trilhões de vezes maior que a densidade do Sol. Elas não possuem massa única, pois depende se a estrela está isolada ou participa de um sistema binário, se acreta ou não material. As massas das estrelas de nêutrons situam-se, em sua maioria, entre  $1,3 M_{\odot}$  e  $1,8 M_{\odot}$  e possuem raio de cerca de 10 km [1].

Os pulsares são estrelas de nêutrons que emitem pulsos de radiação eletromagnética, especialmente na faixa de ondas de rádio. Devido a existência de um intenso campo magnético, à medida que gira ele induz um campo elétrico na sua superfície, arrancando partículas carregadas (especialmente elétrons), as quais são aceleradas e acabam emitindo radiação síncrotron em um feixe estreito, direcionada pelos cones dos polos. Se, durante o giro o eixo do campo magnético ficar na nossa linha de visada, veremos um pulso de radiação eletromagnética, como um farol. Os pulsares perdem energia ao rotacionarem e se transformam em estrelas de nêutrons normais. As estrelas de nêutrons apresentam baixa luminosidade no visível e algumas delas giram a mais de 700 Hz [3, 5].

### 1.3.4 Buracos Negros

E se o caroco restante da explosão da supernova tiver uma massa maior que  $3 M_{\odot}$ ? Neste caso ele colapsa de modo a formar um BN. Isso acontece se a massa  $M$  da estrela inicial for  $25 M_{\odot} < M < 120 M_{\odot}$ . Modelos computacionais teóricos apontam um limite de massa para as estrelas em cerca de  $120 M_{\odot}$ . Estrelas com massa  $M > 120 M_{\odot}$  ejetam parte da massa logo no início de sua vida devido à pressão da radiação, evoluindo posteriormente como uma estrela de menor massa. No entanto, algumas estrelas massivas observadas possuem massa em torno de  $150 M_{\odot}$ , o que obrigará uma revisão dos modelos

teóricos [3, 2].

O BN é um objeto astrofísico que não emite radiação eletromagnética, pois, devido à sua alta compacidade, nem a luz consegue escapar do seu interior. Apesar de inicialmente exótico, ele é caracterizado apenas por três grandezas físicas: massa  $M$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$ .

### 1.3.5 Tipos de Buracos Negros

Quanto às suas massas podem-se classificar os BNs da seguinte forma: estelares, intermediários, supermassivos e primordiais [6, 7, 2].

- Estelares: São oriundos de estrelas de alta massa após passarem pelo estágio evolutivo, como descrito anteriormente, e apresentam massas entre 3 e  $25 M_{\odot}$ .
- Intermediários: Possuem massas entre  $10^2$  e  $10^3 M_{\odot}$  e tenham sido formados pela fusão de estrelas ou de BNs estelares. Os primeiros BNs dessa categoria foram detectados em 2019 no LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory* ou Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser) [8].
- Supermassivos: Encontram-se no centro da maioria, se não de todas, as galáxias e possuem massas entre  $10^6$  e  $10^{10} M_{\odot}$ . Não se sabe ao certo como se formam, podendo ser oriundos da fusão de BNs menores ou do colapso de uma nuvem gigante de gás.
- Primordiais: Foram formados nos primeiros instantes do universo, devido a alta densidade de matéria presente. Teriam massas entre  $10^{-8}$  kg e  $10^5 M_{\odot}$ .

Atualmente há um conhecimento maior sobre os BNs estelares e os supermassivos, e poucos dados sobre os intermediários e os primordiais, não sabendo exatamente se estes últimos existem ou não.

## 1.4 Buraco Negro Newtoniano

O primeiro registro do conceito de BN deve-se ao inglês John Michell em 1783, quando percebeu que, se a densidade de um corpo fosse grande o suficiente, nem a luz conseguiria escapar. Chamou tais objetos de estrelas negras ou estrelas escuras. Em 1795 o matemático francês Pierre-Simon Laplace analisou este problema e chegou à mesma conclusão que Michell [4, 9, 10, 6].

### 1.4.1 Velocidade de Escape

Considere um corpo de massa  $m$  localizado inicialmente sobre a superfície de um planeta de massa  $M$  e raio  $R$  e suponha que esse corpo seja arremessado radialmente para fora do planeta com velocidade inicial  $v_0$ . Desprezando as forças de resistência tem-se que

a energia total  $E$  do corpo é conservada durante o movimento, sendo dada pela soma da energia cinética  $T$  com a energia potencial gravitacional<sup>6</sup>  $U$ ,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}, \quad (1.22)$$

onde  $v$  é a velocidade do corpo em certo instante,  $r$  é a altura em relação à superfície do planeta e  $G$  é a constante gravitacional. O valor de  $T$  é máximo no momento do lançamento e diminui à medida que o corpo ganha altura. O valor de  $U$  é mínimo na superfície do planeta ( $r = R$ ) e aumenta à medida que se afasta do mesmo (por isso o sinal negativo), tendo valor máximo  $U = 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Se a velocidade  $v_0$  com que o corpo é lançado radialmente a partir de  $r = R$  é tal que  $E < 0$ , significa que  $T < U$ , a energia cinética inicial não consegue vencer o potencial de atração, o corpo subirá até uma altura máxima e retornará à superfície. Se a velocidade  $v_0$  tem valor tal que  $E > 0$ , significa que  $T > U$  e o corpo não retornará mais à superfície do planeta.

A velocidade mínima com que o corpo deve ser lançado para permitir que ele se livre completamente da atração gravitacional do planeta é a velocidade de escape  $v_e$ , obtida fazendo  $v = v_e$ ,  $E = 0$  e  $r = R$  na eq. (1.22), de onde vem que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (1.23)$$

Percebe-se que  $v_e$  depende apenas da massa  $M$  e do raio  $R$  do planeta ou do corpo celeste. A velocidade de escape da Terra é 11,2 km/s, da Lua é 2,38 km/s e do Sol é 617 km/s.

### 1.4.2 Raio do Buraco Negro

Se o objeto for bastante massivo, nem a luz consegue escapar. Fazendo  $v \rightarrow c$  na eq. (1.23), encontra-se a distância ao centro do corpo para a qual nada consegue escapar para o infinito

$$R = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.24)$$

Os BNs são objetos extremamente densos. Para exemplificar, suponhamos que o Sol se torne um BN. De acordo com a eq. (1.24) o seu horizonte de eventos teria um raio de 3 km, muito menor que os quase  $7 \times 10^5$  km atuais. Para a Terra se tornar um BN, sua massa teria que ser compactada numa esfera com 8,9 mm.

## 1.5 Partículas Orbitando um Buraco Negro

Nesta seção será analisado o movimento de uma partícula ao redor de um corpo central, no nosso caso, um BN, baseado nas referências [11, 12, 13, 14].

---

<sup>6</sup>Usaremos  $U$  para representar a energia potencial gravitacional e  $V$  para o potencial gravitacional, sendo que estes se relacionam por  $V = U/m$ .

### 1.5.1 Problema de Força Central

O movimento sob uma força central é um sistema formado por dois corpos que sofrem uma força ao longo da linha que conecta os centros dos corpos, cujo módulo é apenas função da distância entre a partícula e o centro  $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ . São exemplos de força central a força gravitacional e a força elétrica.

Considere um BN de massa  $M$  e uma partícula pontual de massa  $m$  ao seu redor, cujas posições num referencial inercial são  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente. Sendo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  a posição relativa entre eles e  $r$  o módulo da distância ( $r = |\mathbf{r}|$ ), a energia potencial gravitacional  $U(r)$  do sistema é  $U(r) = -GMm/r$ , onde  $G$  é a constante gravitacional.

A função Lagrangiana  $\mathcal{L}$  de um sistema é a diferença entre a energia cinética e a potencial  $\mathcal{L} = T - U$ , de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (M\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m\dot{\mathbf{r}}_2^2) - U(r). \quad (1.25)$$

O sistema formado por duas partículas requer 6 coordenadas, sendo 3 para cada vetor  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . Usando as coordenadas do centro de massa (CM) e a massa reduzida, reduzimos o problema para a análise do movimento de uma partícula. Sendo  $\mathbf{R}$  as coordenadas do CM,

$$\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m}, \quad (1.26)$$

pode-se expressar a energia cinética  $T$  do sistema como

$$T = \frac{1}{2} \left( (M + m)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{Mm}{M + m}\dot{\mathbf{r}}^2 \right). \quad (1.27)$$

A partir de (1.26) tem-se

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m}{M + m}\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{M}{M + m}\mathbf{r}, \quad (1.28)$$

e usando a massa reduzida

$$\mu = \frac{Mm}{M + m}, \quad (1.29)$$

escreve-se a eq. (1.27) como

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.30)$$

A eq. (1.30) mostra que a energia cinética do sistema é a energia de duas partículas imaginárias, uma de massa  $M + m$  movendo-se com a velocidade do CM e outra com massa  $\mu$  movendo-se com a velocidade da posição relativa  $\mathbf{r}$ .

Usando as eqs. (1.28) para obter a Lagrangiana, tem-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (1.31)$$

Pode-se repartir a Lagrangiana em duas partes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\dot{\mathbf{R}}^2 + \left( \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) \right) = \mathcal{L}_{\text{CM}} + \mathcal{L}_{\text{rel}}, \quad (1.32)$$

de modo a poder analisar o movimento separado de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{r}$ . Na eq. (1.32) percebe-se que  $\mathcal{L}$  independe de  $\mathbf{R}$  e da equação de Lagrange vem que  $(M + m)\ddot{\mathbf{R}} = 0$  ou  $\dot{\mathbf{R}} = \text{constante}$ . A coordenada  $\mathbf{R}$  do centro de massa é denominada cíclica, pois  $\mathcal{L}_{\text{CM}}$  tem a forma da Lagrangiana de uma partícula livre de massa  $M + m$  e posição  $\mathbf{R}$ . A equação Lagrangiana para  $\mathcal{L}_{\text{rel}}$  é  $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$ . Sendo  $\dot{\mathbf{R}} = \text{constante}$  escolhe-se um referencial no qual o centro de massa está em repouso. Dessa forma, no referencial do CM,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (1.33)$$

O momento angular total  $\mathbf{L}$  de um sistema de duas partículas é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2. \quad (1.34)$$

No referencial do CM,  $\mathbf{R} = 0$ , de modo que as eqs. (1.28) se reduzem a

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m}{M + m}\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{M}{M + m}\mathbf{r}. \quad (1.35)$$

Levando (1.35) em (1.34) e usando (1.29) vem que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}. \quad (1.36)$$

Sendo que  $\mathbf{L}$  é conservado, a direção do vetor  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  é constante, o que significa que o movimento completo do sistema permanece no plano.

Na sequência escreve-se a Lagrangiana (1.33) em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r). \quad (1.37)$$

A equação de Euler-Lagrange para  $\theta$  é

$$\mu r^2\dot{\theta} = L = \text{constante}. \quad (1.38)$$

Sendo que  $L$  (componente  $l_z$  de  $\mathbf{L}$ ) é constante, a equação de Euler-Lagrange para  $r$  é

$$\mu r\dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} = \mu\ddot{r}. \quad (1.39)$$

Num intervalo de tempo  $dt$  o vetor  $\mathbf{r}$  varre uma área  $dA = (1/2)r^2d\theta$ . Derivando em relação ao tempo verifica-se que a velocidade vetorial areal é constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{constante}, \quad (1.40)$$

que é a Segunda Lei de Kepler [15].

Sendo a força centrífuga (fictícia)  $F_{\text{cf}}$  dada por

$$F_{\text{cf}} = \mu r\dot{\theta}^2, \quad (1.41)$$

reescreve-se a eq. (1.39) como

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} + F_{\text{cf}}, \quad (1.42)$$

que é semelhante a Segunda Lei de Newton para um corpo de massa  $\mu$  na posição  $\mathbf{r}$  sujeita a uma força central mais a força centrífuga para fora. Relacionando (1.38) com (1.41) escrevemos  $F_{cf}$  como  $F_{cf} = L^2/\mu r^3$ . Sendo  $U_{cf}$  a energia potencial centrífuga pode-se escrever  $F_{cf} = -dU_{cf}/dr$ , donde obtêm-se

$$U_{cf}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (1.43)$$

Considerando a eq. (1.43), pode-se escrever a equação radial (1.42) como

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{d}{dr} [U(r) + U_{cf}(r)]. \quad (1.44)$$

Sendo a energia potencial efetiva  $U_{ef} = U(r) + U_{cf}$ , ou

$$U_{ef} = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (1.45)$$

obtêm-se  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = -dU_{ef}(r)/dr$ , ou

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) + \frac{L^2}{\mu r^3}. \quad (1.46)$$

De acordo com a eq. (1.46), o movimento radial da partícula é o mesmo que seria se a partícula estivesse se movendo a uma dimensão com a energia potencial  $U_{ef}$ .

## 1.5.2 Equação de Órbita

Utilizando a regra da cadeia  $\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta}$ , a partir de (1.38) e fazendo a mudança de variável  $u = 1/r$ , obtêm-se

$$\frac{d}{dt} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\theta}. \quad (1.47)$$

Objetivando escrever a eq. (1.46) em função de  $\theta$ , tem-se

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (1.48)$$

Substituindo (1.48) em (1.39) obtêm-se a equação diferencial na variável  $u(\theta)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{L^2 u^2} F(r). \quad (1.49)$$

A seguir será resolvida a eq. (1.49), com o objetivo de encontrar as possíveis órbitas. Sendo que a força  $F$  é do tipo inverso do quadrado, pode-se escrevê-la como  $F(r) = -\gamma/r^2$ , onde  $\gamma = GMm = \text{constante}$ . Sendo  $u = 1/r$ , vem que  $F(r) = -\gamma u^2$ , de modo que (1.49) fica

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{\gamma\mu}{L^2}, \quad (1.50)$$

sendo esta conhecida como Equação de Binet. Fazendo a substituição

$$w(\theta) = u(\theta) - \frac{\gamma\mu}{L^2}, \quad (1.51)$$

a eq. (1.50) se reduz à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = 0, \quad (1.52)$$

cuja solução geral é  $w(\theta) = A \cos(\theta - \delta)$ , onde  $A$  é uma constante positiva e  $\delta$  a constante de fase. Fazendo  $\delta = 0$ , tem-se

$$w(\theta) = A \cos \theta. \quad (1.53)$$

Levando (1.53) em (1.51) obtém-se a solução geral para  $u(\theta)$ :

$$u(\theta) = \frac{\gamma u}{L^2} + A \cos \theta. \quad (1.54)$$

Introduzindo a constante positiva  $\epsilon = AL^2/\gamma\mu$ , a eq. (1.54) fica

$$u(\theta) = \frac{\gamma\mu}{L^2} (1 + \epsilon \cos \theta). \quad (1.55)$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{L^2}{\gamma\mu}, \quad (1.56)$$

a eq. (1.55) é escrita como

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (1.57)$$

que é a equação de uma seção cônica com um foco na origem. As seções cônicas são formadas pela interação entre um plano e um cone e representam todas as possíveis órbitas de um corpo se movendo num potencial inversamente proporcional à distância, como uma partícula orbitando um planeta ou um BN. Dependendo da excentricidade classificam-se as órbitas de acordo com as diferentes seções cônicas, como será apresentado adiante.

### 1.5.3 Conservação da Energia

A energia total do sistema é dada por

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (1.58)$$

Fazendo  $dE/dt = 0$  verificamos que  $E$  é constante, ou seja, a energia é conservada. Resolvendo a eq. (1.58) para  $\dot{r} = dr/dt$ , tem-se

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U(r)] - \frac{L^2}{2\mu r^2}}. \quad (1.59)$$

Integrando (1.59), vem que

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{(2/\mu)[E - U(r)] - L^2/(2\mu r^2)}} dr + C, \quad (1.60)$$

onde  $C$  é uma constante.

Substituindo  $\dot{\theta} = L/\mu r^2$  (eq. 1.38) e sendo

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr, \quad (1.61)$$

a partir da eq. (1.59) obtêm-se

$$\theta(r) = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu[E - U(r) - L^2/2\mu r^2]}} dr + C. \quad (1.62)$$

As eqs. (1.59) e (1.62) fornecem a solução geral do problema de força central, sendo que a primeira determina implicitamente a distância  $r$  da massa  $\mu$  ao centro em função do tempo, pois  $\theta$  varia com o tempo de acordo com (1.38), e a segunda define a relação entre  $r$  e  $\theta$ , ou seja, a equação da trajetória. As soluções destas equações são difíceis de obter, existindo de forma exata apenas para algumas situações específicas [16, 17].

Na sequência serão obtidas as energias potenciais de um sistema que contém uma partícula de massa  $m$  movendo-se no campo gravitacional de um BN. A energia potencial total efetiva do sistema é dada pela eq. (1.45)

$$U_{ef}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (1.63)$$

que é a soma da energia potencial real  $U(r)$  com a energia potencial centrífuga  $U_{cf}$ . Quando  $r$  é grande,  $U(r)$  é dominante e  $U_{ef}$  é negativa; quando  $r$  é pequeno,  $U_{cf}$  é dominante, e quando  $r$  é próximo de zero,  $U_{ef}$  é positivo. Isso está representado na fig. (1.1), a qual contém o gráfico de  $U_{ef}$  em função da distância  $r$  e duas linhas pontilhadas representando as energias  $E$  positivas e negativas [18].

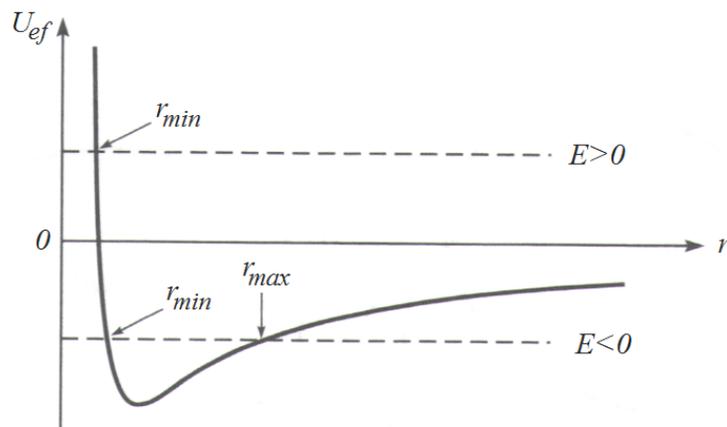


Figura 1.1: Energia  $U_{ef}$  em função da distância para uma partícula [11, 18].

Quando a partícula está longe do BN, a aceleração  $\ddot{\mathbf{r}}$  é para dentro da trajetória, buscando a aproximação; quando a partícula se aproxima do BN,  $\ddot{\mathbf{r}}$  é para fora, tendendo

ao afastamento. Se  $L = 0$ , a partícula está se movendo na direção radial e colidirá com o BN.

A partir da eq. (1.63), fazendo  $dU_{\text{ef}}/dr = 0$ , encontra-se o ponto crítico, valor de  $r$  para o qual  $U_{\text{ef}}$  é mínimo<sup>7</sup>:

$$r_c = \frac{L^2}{\gamma\mu}. \quad (1.64)$$

Chama-se  $r_c$  porque, quando  $U_{\text{ef}}$  é mínimo, a órbita é circular [18]. Levando (1.64) em (1.63) obtêm-se a energia potencial efetiva mínima

$$U_{\text{ef}\min} = -\frac{\gamma^2\mu}{2L^2}. \quad (1.65)$$

Calculando a derivada segunda da energia potencial no ponto, encontra-se

$$\left. \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r=r_c} = \frac{\gamma^4\mu^4}{L^6} > 0, \quad (1.66)$$

confirmando que  $r_c$  é um ponto de mínimo.

Na equação da energia total da partícula orbitando o BN (eq. 1.58), o primeiro termo do segundo membro corresponde à energia cinética e os outros dois correspondem à energia potencial efetiva, de modo que ela pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + U_{\text{ef}}(r). \quad (1.67)$$

Sendo que  $\mu\dot{\mathbf{r}}^2/2 \geq 0$ , tem-se que  $E \geq U_{\text{ef}}(r)$ , de modo que o movimento da partícula está restrito às regiões em que a energia total é maior que a energia potencial efetiva. Se  $E > 0$  a partícula pode se mover para qualquer lugar acima da linha, mas não no interior do ponto de retorno ( $r_{\min}$ ), para o qual

$$E = U_{\text{ef}}(r_{\min}). \quad (1.68)$$

Se a partícula inicialmente está se movendo em direção ao BN, ela continuará até alcançar  $r_{\min}$  e depois se moverá para fora, indo para o infinito. Neste caso existe uma órbita aberta ou ilimitada [16, 19].

Se a partícula tiver  $E < 0$  ela se moverá entre os pontos  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$ . Isso significa que, se ela estiver se afastando do BN ela continuará até alcançar  $r_{\max}$  e depois voltará até o ponto  $r_{\min}$ , persistindo o movimento nessa órbita limitada. Uma órbita é chamada limitada se a distância da partícula ao centro de força é constante (órbita circular) ou está compreendida entre dois valores extremos ( $r_{\min} < r < r_{\max}$ ). Uma órbita limitada não precisa ser fechada, de modo que a partícula pode se mover indefinidamente num anel sem que a trajetória seja fechada. Segundo o Teorema de Bertrand, provado por J. Bertrand em 1873, os únicos potenciais centrais para os quais todas as órbitas são fechadas são referentes aos quais a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância ou que obedece a lei de Hook [19].

---

<sup>7</sup>Esse ponto também poderia ser de máximo, mas neste caso é ponto de mínimo.

Quando  $E = U_{\text{ef}}$ , a velocidade  $\dot{\mathbf{r}}$  se anula, designando um ponto de inflexão (ou ponto de retorno), uma vez que  $\dot{\theta} \neq 0$ , e o vetor  $\dot{\mathbf{r}}$  passa de acelerado para retardado, ou vice-versa [17, 15].

### 1.5.4 Órbitas de Kepler

O tipo de órbita descrita por (1.57) depende da constante positiva  $\epsilon$ , e pode ser limitada ou ilimitada.

Sendo que  $-1 \leq \cos \theta \leq +1$ , se  $\epsilon < 1$ ,  $r(\theta)$  é limitado para todo  $\theta$ . Se  $\epsilon > 1$ ,  $r(\theta) \rightarrow \infty$  para algum ângulo  $\theta$ . Para  $\epsilon < 1$  o valor de  $r(\theta)$  oscila entre o periélio ( $\theta = 0$ ), onde, de acordo com a eq. (1.57),

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} = a(1 - \epsilon), \quad (1.69)$$

e o afélio ( $\theta = \pi$ ),

$$r_{\max} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} = a(1 + \epsilon). \quad (1.70)$$

A função  $r(\theta)$  (eq. 1.57) é periódica com período  $2\pi$ , de modo que a órbita se fecha após um ciclo [20].

A órbita gerada por essas expressões é uma elipse. Em coordenadas cartesianas esta é descrita pela equação

$$\frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.71)$$

onde  $a$  é o semieixo maior (sobre o eixo  $x$ ),  $b$  o semieixo menor (sobre o eixo  $y$ ) e  $d$  é a distância do centro para um dos focos da elipse, onde se encontra um dos corpos (BN). Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dados também por

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \text{e} \quad d = a\epsilon. \quad (1.72)$$

A partir das relações em (1.72) encontra-se que

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (1.73)$$

onde  $\epsilon$  é a excentricidade da elipse, cujo valor é  $0 < \epsilon < 1$ . Se  $\epsilon = 0$ ,  $a = b$  e tem-se um círculo; se  $\epsilon \rightarrow 1$ ,  $(b/a) \rightarrow 0$  e a elipse é alongada e muito fina. A partir das eqs. (1.69) e (1.70) pode-se escrever a excentricidade como

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}. \quad (1.74)$$

As relações descritas anteriormente representam a Primeira Lei de Kepler, segundo a qual a órbita descrita por um corpo movendo-se em torno do outro é uma elipse, sendo que o segundo corpo localiza-se num dos focos.

A partir das eqs. (1.68) e (1.63) tem-se que a energia da partícula é

$$E = -\frac{\gamma}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2}. \quad (1.75)$$

Sendo  $r_{\min}$  dado por (1.69) e usando (1.56), encontra-se

$$E = \frac{\gamma^2 \mu}{2L^2} (\epsilon^2 - 1). \quad (1.76)$$

O tempo que uma partícula de massa  $m$  leva para completar uma volta em torno de um corpo de massa  $M$ , numa órbita fechada com semi-eixo maior  $a$ , é o período  $\tau$ , o qual é dado pela Terceira Lei de Kepler, que será deduzida a seguir.

A partir da Segunda Lei de Kepler (eq. 1.40) será determinado o tempo que um corpo numa órbita limitada leva para completar uma revolução em torno de um corpo central. Sendo  $A = \pi ab$  a área de uma elipse, o período vem da integração da equação anterior

$$\int d(\pi ab) = \int \frac{L}{2\mu} d\tau, \quad (1.77)$$

de modo a obter

$$\tau = \frac{2\pi ab\mu}{L}. \quad (1.78)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (1.78), considerando as eqs. (1.72) e (1.73) e a relação (1.56), obtêm-se  $\tau = 4\pi^2 a^3 \mu / \gamma$ . Sendo  $\gamma = GMm$  e  $\mu = Mm/(M + m)$ , vem que

$$\tau^2 = \frac{4\pi a^3}{G(M + m)}. \quad (1.79)$$

Se  $M \gg m$  a eq. (1.79) se reduz a [15]

$$\tau^2 = \left( \frac{4\pi}{GM} \right) a^3. \quad (1.80)$$

Analisando a eq. (1.76) constata-se que: se  $E < 0$ ,  $\epsilon < 1$ ; se  $E > 0$ ,  $\epsilon > 1$ . A órbita de menor energia possível corresponde a uma órbita circular com  $\epsilon = 0$ .

De acordo com a eq. (1.57), a fronteira entre as órbitas limitadas e as ilimitadas surge quando  $E = 0$  ou  $\epsilon = 1$ . Com  $\epsilon = 1$ , se  $\theta \rightarrow \pm\pi$ ,  $\cos\theta \rightarrow -1$  e  $r(\theta) \rightarrow \infty$ . Neste caso a órbita é ilimitada e seu tipo é uma parábola, que na forma cartesiana é escrita como  $y^2 = \alpha^2 - 2\alpha x$ . Se  $\epsilon > 1$  ou  $E > 0$ , o denominador da eq. (1.57) se anula quando  $\epsilon \cos(\theta_{\max}) = -1$ . Dessa forma,  $r(\theta) \rightarrow \infty$  quando  $\theta \rightarrow \pm\theta_{\max}$ , estando a órbita, com formato de hipérbole, confinada entre os ângulos  $-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}$ . A equação da hipérbole em coordenadas cartesianas com eixo sob o eixo  $x$  é

$$\frac{(x + d)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.81)$$

Na fig. (1.2) tem-se a representação das diferentes órbitas de uma partícula em movimento em torno de um corpo central, as quais dependem da energia e da excentricidade.

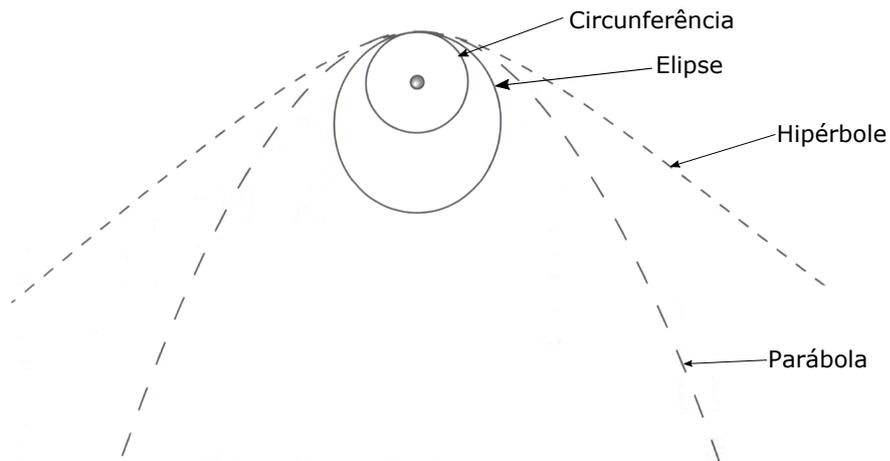


Figura 1.2: Órbitas de uma partícula em movimento em torno de um corpo central [11].

Uma síntese da classificação e das características das trajetórias de Kepler está descrita na tab. (1.1).

Tabela 1.1: Características das órbitas de Kepler [14, 20, 15].

Excentricidade	Energia	Aberta/Fechada	Tipo de Órbita
$\epsilon = 0$	$E = -\gamma^2 \mu / 2l^2$	Fechada	Circunferência
$0 < \epsilon < 1$	$-\gamma^2 \mu / 2l^2 < E < 0$	Fechada	Elipse
$\epsilon = 1$	$E = 0$	Aberta	Parábola
$\epsilon > 1$	$E > 0$	Aberta	Hipérbole

Ao estudar o fenômeno da acreção o interesse maior será nas órbitas fechadas, em especial as circulares, pois elas formarão os discos de acreção.

## Capítulo 2

# Buracos Negros Relativísticos

Uma das previsões mais intrigantes da Teoria da Relatividade Geral (TRG) é a existência dos buracos negros (BNs). Um BN é uma região do espaço-tempo onde o campo gravitacional é tão forte que nenhuma informação (matéria ou energia) consegue escapar. Apesar de terem concepção newtoniana (estrelas escuras), os BNs são descritos pela TRG, sendo que possuem ao menos um horizonte de eventos, uma espécie de superfície que delimita um volume cujos pontos não estão conectados com o exterior.

Neste capítulo apresentaremos os aspectos iniciais da TRG, descrevendo as principais características dos BNs e explorando as geodésicas de partículas no entorno dos BNs de Schwarzschild e de Kerr.

### 2.1 Introdução à Relatividade Geral

A seguir será feita uma breve introdução à Relatividade Geral (RG), baseada nas referências [21, 22, 23, 24, 25].

A RG foi publicada em 1916 pelo físico alemão Albert Einstein, a qual foi elaborada entre 1912 e 1915 com a ajuda do seu amigo, o matemático suíço Marcel Grossmann. Foram publicados quatro artigos no final de 1915 ([26, 27, 28, 29]) e um artigo em março de 1916 ([30]). Na mesma época, e de maneira independente, o matemático David Hilbert chegou aos mesmos resultados de Einstein.

Na teoria newtoniana da gravitação os corpos interagem por ação à distância, de maneira instantânea. Na RG a atração gravitacional ocorre devido à geometria do espaço-tempo, sendo este plano somente na ausência de matéria-energia. A matéria-energia deforma o espaço-tempo, tornando-o curvo; o espaço-tempo age sobre a matéria, encurvando seus movimentos. Dessa forma, a força gravitacional é a consequência da curvatura da geometria do espaço-tempo provocada pela presença de matéria-energia.

Na TRG surgem as hoje conhecidas equações de campo de Einstein, que são um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares. Em notação tensorial elas são

escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento,  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  é a velocidade da luz. O tensor  $R_{\mu\nu}$  está relacionado à curvatura do espaço-tempo e o tensor  $T_{\mu\nu}$  representa o conteúdo de matéria-energia do universo.

A interação gravitacional na TRG não é mediada por um potencial, como na gravitação newtoniana, mas pelas propriedades geométricas do espaço-tempo, as quais são descritas pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . No espaço-tempo a distância é determinada pelo elemento de linha  $ds$ , que está relacionado ao tensor métrico ou métrica por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde a soma é realizada sobre os termos com índices repetidos.

As componentes cartesianas do tensor métrico no espaço quadridimensional plano de Minkowski, em coordenadas retangulares, são  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-c^2, +1, +1, +1)$ , de modo que

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3)$$

Em coordenadas polares esféricas as componentes de  $g_{\mu\nu}$  para o mesmo espaço são  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-c^2, +1, +r^2, +r^2 \sin^2 \theta)$ , e o elemento de linha é escrito como<sup>1</sup>

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.4)$$

Em coordenadas retangulares o elemento de linha relacionado à métrica euclidiana (espaço tridimensional) é  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

A métrica fornece a medida, ou seja, o comprimento dos vetores, possibilitando a descrição matemática do espaço-tempo. Neste trabalho será usada, por convenção, a seguinte assinatura da métrica quadridimensional:  $[-, +, +, +]$ .

As equações de campo de Einstein são muito complicadas e ele mesmo acreditava que não existiriam soluções exatas para elas. No entanto, rapidamente o astrônomo alemão Schwarzschild encontrou a primeira delas em 1916.

## 2.2 Tipos de Buracos Negros

Os BNs são conhecidos como soluções do vácuo das equações de campo de Einstein, ou seja, soluções de pura gravitação. O BN isolado mais geral que pode existir, segundo a Relatividade Geral (RG), é caracterizado por apenas três parâmetros: massa  $M$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$  [31, 23, 25, 24].

---

<sup>1</sup>Por convenção,  $\phi$  será o ângulo que a projeção de  $\mathbf{r}$  no plano  $xy$  faz com o eixo  $x$  e  $\theta$  o ângulo que ele faz em relação ao eixo  $z$ .

A matéria no interior do BN perde todas as suas características iniciais, restando apenas essas três propriedades. Não existe nenhum outro adereço que possa identificar um BN isolado. Dois BNs que possuem esses mesmos parâmetros são indistinguíveis. Dessa forma, os BNs estacionários são classificados como:

- Buraco Negro de Schwarzschild: possui apenas massa  $M$ .
- Buraco Negro de Reissner-Nordström: possui massa  $M$  e carga elétrica  $Q$ .
- Buraco Negro de Kerr: possui massa  $M$  e momento angular  $J$ .
- Buraco Negro de Kerr-Newman: possui massa  $M$ , momento angular  $J$  e carga elétrica  $Q$ .

A seguir será descrito sobre cada um deles, com mais detalhes os BNs de Schwarzschild e de Kerr.

## 2.3 Buraco Negro de Schwarzschild

### 2.3.1 Histórico

A primeira solução exata para as equações de campo de Einstein foi obtida em 1916 pelo físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild. Em fevereiro do referido ano foi publicado nos Anais da Academia Real de Ciências da Prússia um artigo intitulado “Sobre o campo gravitacional de uma massa pontual de acordo com a teoria de Einstein”, correspondente a uma apresentação oral feita por Albert Einstein no mês anterior, contendo um resultado obtido por Karl Schwarzschild [32]. Neste trabalho Schwarzschild apresentou a solução exata das equações de Einstein que corresponderia ao campo gravitacional de uma massa pontual situada no vácuo [33].

Karl Schwarzschild era um importante astrônomo e físico alemão. Com o início da Primeira Guerra Mundial em 1914, Schwarzschild se apresentou voluntariamente para servir ao exército de seu país, trabalhando como oficial de meteorologia e de artilharia. Em meados de 1915, quando lutava na frente russa, Schwarzschild desenvolveu os trabalhos que originaram seus dois artigos sobre relatividade [33].

Além do primeiro artigo já citado anteriormente, houve um segundo intitulado “Sobre o campo gravitacional de uma distribuição esférica e homogênea de matéria”, no qual aparece, pela primeira vez, a quantidade  $r_S$ , que passaria a ser chamada de raio de Schwarzschild [34]. Durante a campanha russa, Schwarzschild contraiu uma doença chamada pênfigo, incurável na época, o que provocou sua morte em maio de 1916, com 42 anos de idade [33].

É importante lembrar que o físico e matemático holandês Johannes Droste obteve a mesma solução de Schwarzschild, quase que de maneira simultânea a este. Seu trabalho

contém exatamente a solução de Schwarzschild e foi apresentado pelo seu orientador Hendrik Lorentz na Academia Holandesa de Ciências em maio de 1916. Em vários aspectos o trabalho de Droste é mais completo e profundo que o de Schwarzschild. No entanto, o mesmo caiu no completo esquecimento. Isso deve-se ao fato de Schwarzschild já ser um cientista respeitado na época, bem como o seu trabalho ter sido comunicado por Einstein na academia de maior prestígio na época e citado no seu artigo final da Relatividade Geral [33].

### 2.3.2 A Métrica de Schwarzschild

Na sequência será apresentado a primeira solução exata das equações de campo de Einstein obtida por Schwarzschild, de acordo com [31, 23, 35, 10, 24].

O elemento de linha da solução de pura gravitação de Schwarzschild, em coordenadas espaço-temporais esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , é dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $M$  a massa do astro e  $c$  a velocidade da luz. Sendo  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  o elemento de ângulo sólido, a eq. (2.5) pode ser escrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.6)$$

Como forma de simplificar a notação, na RG é costume usar a massa geométrica  $m$  no lugar da massa  $M$ , sendo estas relacionadas por  $m = GM/c^2$ . Se  $G = c = 1$ ,  $m$  é adimensional. Com  $G$  e  $c$  em unidades usuais,  $m$  tem unidades de distância. A eq. (2.5) passa a ser escrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.7)$$

e está definida nos seguintes intervalos:  $-\infty < t < +\infty$ ,  $2m < r < +\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Dessa forma, as componentes do tensor métrico de Schwarzschild são

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[ - \left(1 - \frac{2m}{r}\right), + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, +r^2, +r^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (2.8)$$

Analisando (2.5) percebe-se que, se  $M \rightarrow 0$  ou  $r \rightarrow \infty$ , a métrica recai na métrica de Minkowski (espaço plano e sem massa) (eq. 2.4).

A solução de Schwarzschild ou a geometria de Schwarzschild descreve o campo gravitacional externo a um corpo esfericamente simétrico e estático de massa  $m$ . Isso corresponde à descrição de um BN de massa  $m$  em repouso no vácuo. A interpretação completa e correta da solução de Schwarzschild ocorreu apenas na década de 1920 e levou, anos mais tarde, ao estudo mais aprofundado e à descoberta dos BNs.

### 2.3.3 Singularidade e Horizonte de Eventos

A seguir serão explorados temas relacionados à singularidade e ao horizonte de eventos de um BN, baseado nas referências [24, 23, 33, 6, 21].

Na Fig.(2.1) tem-se uma representação esquemática da formação de um BN. O tempo está representado na direção vertical. Enquanto a matéria colapsa, o seu tamanho diminui até constituir a singularidade (linha no espaço-tempo). É criado também o horizonte de eventos, uma espécie de superfície onde nenhuma informação emitida no seu interior consegue ultrapassá-lo.

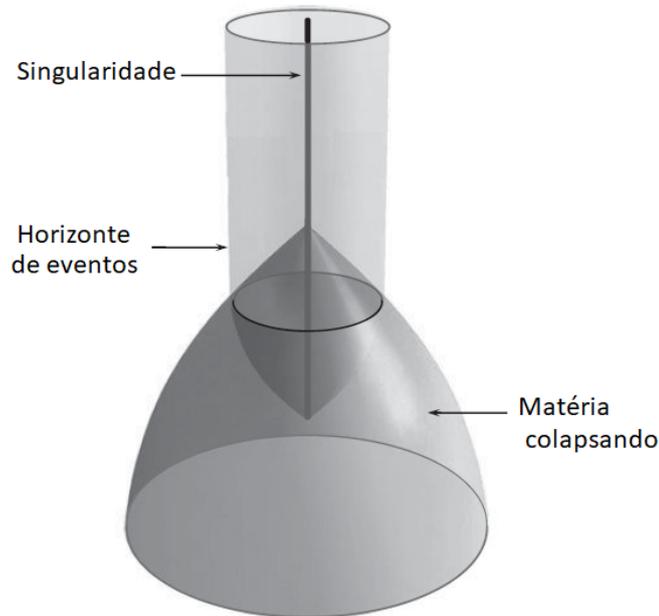


Figura 2.1: Formação de um buraco negro. Baseado em [36].

Analisando a métrica de Schwarzschild (2.7) percebe-se que ela possui duas singularidades: uma em  $r = 0$  e outra em  $r = r_S$ . A primeira singularidade é real, mas a segunda desaparece com uma escolha adequada de coordenadas (não é singularidade física). A singularidade  $r = 0$  não tem a interpretação de um ponto no espaço, pois dentro do horizonte de eventos  $r$  comporta-se como uma coordenada temporal. O raio  $r = r_S$  é denominado raio de Schwarzschild,

$$r_S = 2m = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.9)$$

Em termos da massa solar  $M_\odot$  ele pode ser escrito como

$$r_S \simeq 3 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}. \quad (2.10)$$

O astrônomo inglês Eddington foi um dos primeiros a questionar a natureza da singularidade presente para  $r = r_S$  na solução (2.7). Na RG  $r = r_S$  não corresponde a um

ponto no espaço, como no caso newtoniano, mas a uma esfera delimitada pelo horizonte de eventos, cuja área é

$$A = 4\pi r_S^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} = 16\pi m^2. \quad (2.11)$$

Perceba que a área do BN é proporcional ao quadrado de sua massa.

A densidade de um BN é dada por  $\rho = M/(4\pi r^3/3)$ . Sendo  $r$  o raio de Schwarzschild (eq. 2.9),

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2}, \quad (2.12)$$

demonstrando que a densidade é inversamente proporcional ao quadrado da massa do BN. Isso significa que BN massivos tendem a ser menos densos.

Na década de 1930 o astrofísico indiano Chandrasekhar estudou o colapso gravitacional, concluindo que este processo era inevitável para estrelas de grande massa. Na década de 1960 os físicos soviéticos V. Belinsky, I. Khalatnikov e E. Lifshitz mostraram que o colapso estelar geralmente é oscilatório, e a estrela é compactada de forma não homogênea, até seu volume ser reduzido a zero [37, 9].

A região definida por  $r = r_S = 2m$  é uma fronteira sem volta entre a região exterior  $r > 2m$  e a interior  $0 < r < 2m$ . Toda a informação da região  $0 < r < 2m$  é desconectada causalmente para um observador externo.

De maneira geral, qualquer corpo pode formar um BN se for obrigado a entrar no seu raio de Schwarzschild ( $r_S$ ). Isso significa que, qualquer distribuição de matéria, em qualquer escala, pode virar um BN, desde que toda ela caiba dentro do seu  $r_S$  [9].

O raio  $r_S$  caracteriza uma região limite denominada horizonte de eventos, a partir da qual nada consegue escapar. Todo corpo que for comprimido num raio menor do que o  $r_S$ , vai colapsar na singularidade. O horizonte de eventos não possui nenhuma estrutura física, ou seja, não existe nenhuma superfície de matéria nesse local, exceto no momento em que a matéria em queda cruza essa região em direção à singularidade. O termo horizonte de eventos foi formulado pelo físico Wolfgang Rindler na década de 1950 [38].

Em 1965 o físico-matemático inglês Roger Penrose verificou que a singularidade é uma propriedade presente em todos os BNs. Em 1969 Penrose introduziu a “Conjectura do Censor Cósmico” ou “Censura Cósmica”, segundo a qual toda singularidade oriunda de um colapso gravitacional fica escondida no interior de um horizonte de eventos (não existem singularidades nuas) [37, 38].

Imagine uma partícula luminosa que se move em direção ao BN e um observador, localizado numa região afastada, que a acompanha. Para o observador a partícula nunca alcança o horizonte de eventos, bem como a luz por ela emitida tende para o vermelho (desvio gravitacional para o vermelho), ficando menos brilhante até se tornar invisível, à medida que a partícula se aproxima do horizonte de eventos. Seja  $d\tau$  o tempo próprio medido por uma partícula parada em uma distância  $r$  fixa próxima a um BN e  $dt$  o tempo

medido pelo observador localizado numa distância infinita. A relação entre eles é

$$d\tau(r) = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} dt, \quad (2.13)$$

o que mostra que  $d\tau(r) < dt$ . O observador próximo mede um tempo menor que o observador distante. Do ponto de vista da partícula, ela atinge, sim, o horizonte de eventos, pois este é uma singularidade de coordenadas e não uma singularidade física.

Na fig. (2.2) tem-se a aparência de cones de luz em coordenadas de Schwarzschild próximas à superfície do horizonte de eventos ( $r = 2m$ ), onde as linhas dos cones representam o caminho radial da luz emanando de certos eventos. Os cones de luz naturalmente dividem o espaço-tempo em passado e futuro. Pontos no interior do cone representam eventos tipo tempo (movimento com velocidade menor que a da luz); pontos fora do cone assinalam eventos tipo espaço; pontos sobre a linha do cone são denominados tipo luz e representam o movimento de um feixe de luz.

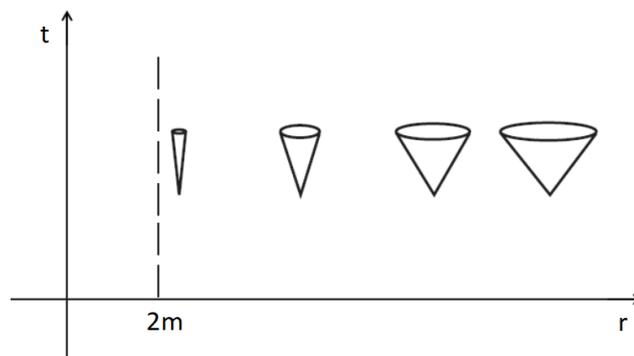


Figura 2.2: Cones de luz em coordenadas de Schwarzschild próximos ao horizonte de eventos [6, 24].

Considerando a geodésica radial de um raio de luz ao encontro de um BN, tem-se que  $\theta$  e  $\phi$  são constantes. Sendo  $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$ , a partir de (2.7) tem-se

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (2.14)$$

de onde vem

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Os sinais + e - referem-se a raios de luz saindo e entrando, respectivamente. Perceba que  $(dt/dr) \rightarrow \pm\infty$  quando  $r \rightarrow 2m$ . Isso sugere que nenhuma partícula alcançaria a linha  $r = 2m$  num valor finito de tempo<sup>2</sup>. Como afirmado anteriormente, essa singularidade pode ser removida por uma mudança de coordenadas. O horizonte de eventos não está localizado no espaço, mas é uma fronteira no espaço-tempo.

<sup>2</sup>Esse tempo é o medido por observadores distantes. O observador em queda livre cai num tempo (próprio) finito.

### 2.3.4 Geodésicas na Métrica de Schwarzschild

Na RG descreve-se o caminho seguido por uma partícula em uma geometria específica, sendo o resultado da ação da massa e da energia. Esse caminho é chamado geodésica e representa a trajetória da partícula no espaço-tempo curvo. Nesta subseção serão discutidas as geodésicas de uma partícula na métrica de Schwarzschild, baseando-se em [22, 35, 39, 25, 10].

Se um objeto não está sujeito a nenhuma força além da gravitacional, seu movimento é geodésico, ou seja, sua trajetória descreve uma geodésica. Vamos considerar a geodésica entre dois pontos. O problema consiste em encontrar a curva que satisfaça o princípio variacional de Hamilton  $\delta \int ds = 0$ . Sendo  $ds$  dado pela eq. (2.2), tem-se

$$\delta \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|^{1/2} d\lambda, \quad (2.16)$$

em que  $\lambda$  é um parâmetro usado para descrever a curva. Sendo  $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ , escreve-se a eq. (2.16) como

$$\delta \int |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2} d\lambda = \delta \int \mathcal{L}(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) d\lambda = 0. \quad (2.17)$$

Em (2.17) introduziu-se a Lagrangiana  $\mathcal{L}$  associada a uma partícula, a qual é definida por

$$\mathcal{L} = |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2}, \quad (2.18)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo e o ponto indica a derivada em relação ao parâmetro  $\lambda$ .

A solução  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  é obtida através das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (2.19)$$

A Lagrangiana da métrica de Schwarzschild é dada por

$$\mathcal{L}^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.20)$$

A simetria esférica da solução de Schwarzschild possibilita escolher  $\theta = \pi/2$ , restringindo a geodésica da partícula ao plano equatorial. Dessa forma, é possível escrever (2.20) como

$$\mathcal{L}^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2. \quad (2.21)$$

Em relação à coordenada  $r$ , a equação de Euler-Lagrange é

$$-\frac{2m}{r^2} \dot{t}^2 - \frac{2m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + 2r \dot{\phi}^2 - \frac{d}{d\lambda} \left[ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right] = 0. \quad (2.22)$$

Para uma órbita circular,  $\dot{r} = 0$ . Assumindo  $d\lambda = d\tau$ , a eq. (2.22) torna-se

$$\frac{m}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = r \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2. \quad (2.23)$$

Isolando  $dt$  e integrando de 0 a  $2\pi$  encontra-se o período  $T$ ,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3, \quad (2.24)$$

que é a versão relativística da Terceira Lei de Kepler para órbitas circulares.

A partir da Lagrangiana (eq. 2.21) obtêm-se as equações de Euler-Lagrange para as variáveis  $\theta$ ,  $\phi$  e  $t$ , respectivamente:

$$r^2 \sin \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{d\lambda}(r^2 \dot{\theta}) = 0, \quad \frac{d}{d\lambda}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0, \quad \frac{d}{d\lambda} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (2.25)$$

Sendo  $\theta = \pi/2$ , o que implica,  $\dot{\theta} = 0$ , das equações anteriores vem que

$$r^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad r^2 \dot{\phi} = \text{constante}, \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = \text{constante}. \quad (2.26)$$

Chamando  $\tilde{L} = L/M$  o momento angular por unidade de massa e  $\tilde{E} = E/M$  a energia por unidade de massa de repouso, a partir das eqs. (2.26) vem que

$$\tilde{L} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.27)$$

e

$$\tilde{E} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.28)$$

A grandeza  $\tilde{E}$  pode ser interpretada como a energia por unidade de massa que uma partícula possui em movimento geodésico.

Se  $\lambda \propto \tau$ , a Lagrangiana  $\mathcal{L}$  é sempre constante, permitindo um modo mais direto de resolver as equações do movimento do que integrar as equações da geodésica. Ela é escrita como

$$\mathcal{L} = |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2} = \kappa, \quad (2.29)$$

onde

$$\kappa = \begin{cases} +1, & \text{geodésicas tipo tempo (partículas massivas);} \\ 0, & \text{geodésicas tipo luz ou nulas (fótons).} \end{cases} \quad (2.30)$$

Nas geodésicas tipo tempo a parte espacial é inferior à parte temporal e as partículas movem-se com velocidades menores que a velocidade da luz no vácuo. Nas geodésicas tipo luz ou nulas as partículas (neste caso os fótons) se movem na velocidade da luz. Nas geodésicas tipo espaço o movimento ocorre com velocidade maior que a velocidade da luz. Nesse momento o interesse será nas geodésicas tipo tempo e nas geodésicas nulas.

Sendo a Lagrangiana dada por (2.21), em termos de  $\tilde{L}$  (eq. 2.27) e  $\tilde{E}$  (eq. 2.28) ela pode ser escrita como

$$\mathcal{L}^2 = \frac{\tilde{E}^2}{1 - 2m/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2m/r} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} = \kappa. \quad (2.31)$$

Com esta equação pode-se determinar as geodésicas de partículas massivas e de fótons na métrica de Schwarzschild.

A partir da eq. (2.31) vem que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\kappa + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (2.32)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem para  $r(\tau)$ , cuja solução fornece a geodésica ao longo da qual a partícula se moverá.

A eq. (2.31) pode ser reescrita como

$$\frac{\tilde{E}^2 - \kappa}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\kappa m}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} - \frac{m\tilde{L}^2}{r^3}, \quad (2.33)$$

onde

$$E_{\text{ef}} = \frac{\tilde{E}^2 - \kappa}{2} \quad (2.34)$$

e

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{\kappa m}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} - \frac{m\tilde{L}^2}{r^3} \quad (2.35)$$

são a energia e o potencial efetivos, respectivamente.

Relacionando (2.34) e (2.35) com (2.33) vem

$$E_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}, \quad (2.36)$$

A partir da eq. (2.35) os potenciais efetivos para fótons e para partículas massivas assumem as respectivas formas:

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{\tilde{L}^2}{2r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (2.37)$$

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) - 1 \right]. \quad (2.38)$$

Um ponto importante a ser destacado é que, na TRG o potencial efetivo para os fótons não é nulo, diferentemente da mecânica newtoniana. Isso significa que a gravidade interfere no movimento da radiação.

### 2.3.5 Geodésicas Tipo Tempo

O formato da geodésica descrita por uma partícula depende da sua energia  $E$  e do seu momento angular  $L$ , como será descrito a seguir, podendo ser capturada ou refletida pela barreira de potencial do BN [23, 10, 24, 31, 22].

Partículas com  $\tilde{E} \geq 1$  oriundas do infinito ( $r = \infty$ ) são refletidas no entorno do BN e retornam para o infinito. Partículas com  $\tilde{E} < 1$  movem-se em órbitas ao redor do BN.

Para partículas massivas ( $\kappa = +1$ ), a eq. (2.32) fica

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (2.39)$$

A velocidade radial é nula quando  $(dr/d\tau) = 0$ , ou

$$\tilde{E}^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right), \quad (2.40)$$

o que significa que tem-se um ponto de retorno. Desenvolvendo,

$$(1 - \tilde{E}^2)r^3 - 2mr^2 + \tilde{L}^2r - 2m\tilde{L}^2 = 0. \quad (2.41)$$

A forma da geodésica depende do tipo de raízes desta equação. Vamos encontrar como a geodésica evolui com o tempo ou com o ângulo  $\phi$ . A partir da eq. (2.27) vem

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}. \quad (2.42)$$

Juntamente com a relação

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2, \quad (2.43)$$

escreve-se a eq. (2.39) como

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = (\tilde{E}^2 - 1)\frac{r^4}{\tilde{L}^2} + \frac{2mr^3}{\tilde{L}^2} - r^2 + 2mr. \quad (2.44)$$

Fazendo a substituição de variáveis,  $u = 1/r$ , obtém-se a equação diferencial de primeira ordem

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2mu^3 - u^2 + \frac{2mu}{\tilde{L}^2} + \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{L}^2}, \quad (2.45)$$

cuja solução determina a órbita da partícula de teste. As eqs. (2.44) e (2.45) são reformulações da eq. (2.41). Se  $(dr/d\tau) = 0$ , então  $(dr/d\phi) = (du/d\phi) = 0$ .

## Geodésica Radial

Uma partícula descreve uma geodésica radial quando o seu momento angular é nulo. Fazendo  $\tilde{L} = 0$  na eq. (2.39) vem que [10, 24, 31]

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (2.46)$$

Considerando uma partícula inicialmente em repouso no infinito. Sua energia é  $\tilde{E} = 1$ , porque o espaço-tempo é plano no infinito. Essa partícula se moverá da posição inicial  $r = \infty$  até uma distância de maior aproximação  $r = r_0$  do BN. Tem-se, então que

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (2.47)$$

Usa-se o sinal negativo porque a velocidade radial é negativa. Integrando obtém-se

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2m)^{1/3} (\tau_* - \tau)^{2/3}, \quad (2.48)$$

onde  $\tau_*$  é uma constante de integração definida quando  $r = 0$ . Conclui-se que o tempo próprio da partícula para cruzar  $r = 2m$  é finito.

A partir das eqs. (2.28) e (2.47) encontra-se que o tempo medido por um observador externo é dado por

$$t = -\frac{\tilde{E}}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{r'^{1/2}}{1 - 2m/r'} dr'. \quad (2.49)$$

Analisando a eq. (2.49) constata-se que, quando  $r \rightarrow 2m = r_S$ , a integral tende para o infinito, significando que  $t \rightarrow \infty$ . Comparando as equações dos tempos (2.48 e 2.49) verificamos que a partícula marca um tempo próprio finito para se mover de um ponto  $r_0$  até  $r_S$ , enquanto para um observador externo, situado longe do BN, o tempo é infinito.

### Órbitas Fechadas

Agora serão abordadas as geodésicas de partículas com momento angular não nulo ( $\tilde{L} \neq 0$ ), com base nas referências [40, 41, 35, 21, 25, 42].

Uma partícula descreve uma órbita fechada se possuir energia  $\tilde{E}$  tal que  $\tilde{E}^2 < 1$ . Se essa condição for satisfeita, há três diferentes raízes da eq. (2.39). A análise de todas elas é trabalhosa, de modo que serão descritas apenas as órbitas circulares, que são as de interesse no momento.

Analisando, agora, o potencial para partículas massivas. Sendo  $\kappa = -1$  e fazendo  $\partial V_{\text{ef}}/\partial r = 0$  encontra-se o ponto crítico da eq. (2.38), donde vem

$$mr^2 - \tilde{L}^2 r + 3m\tilde{L}^2 = 0, \quad (2.50)$$

cujas soluções são

$$r = \frac{\tilde{L}^2 \pm \sqrt{\tilde{L}^4 - 12m^2\tilde{L}^4}}{2m} = \frac{\tilde{L}^2}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{\tilde{L}^2}} \right). \quad (2.51)$$

A seguir serão analisadas em detalhes as possíveis soluções de (2.51), as quais fornecerão as órbitas circulares.

- Se  $\tilde{L} < \sqrt{12}m = 2\sqrt{3}m$ , não há um extremo de potencial efetivo e não existem órbitas circulares. Isso significa que qualquer partícula com  $\tilde{L} < 2\sqrt{3}m$  que estiver se aproximando do BN, seguirá na órbita de captura, cairá diretamente sobre o horizonte de eventos ( $r = 2m$ ) e posteriormente alcançará a sua singularidade ( $r = 0$ ).

Na fig. (2.3) tem-se um gráfico de  $V_{\text{ef}}$  em função de  $r$  para  $\tilde{L} < 2\sqrt{3}m$ . Nele percebe-se que não há nenhum ponto crítico, reforçando as características do movimento descritas anteriormente.

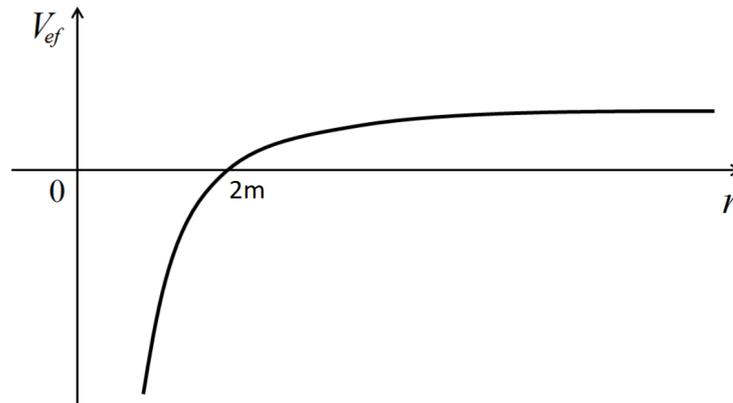


Figura 2.3: Potencial efetivo em função da distância para  $\tilde{L} < 2\sqrt{3}m$ . Baseado em [40, 21].

- Se  $\tilde{L} = 2\sqrt{3}m$ , vem que  $r = 6m$ , de modo que existe apenas uma órbita circular, cujo raio é

$$r_c = 6m = 3r_S. \quad (2.52)$$

Verificando a estabilidade dessa órbita calcula-se a derivada segunda de  $V_{\text{ef}}$  (2.38) em  $r_c$ ,

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_c=6m} = 0, \quad (2.53)$$

e conclui-se que a mesma não é instável e nem estável, sendo chamada de marginalmente estável. O valor  $r_c = r_I = 6m$  é o raio limite de órbitas estáveis, denominado ISCO (*Innermost Stable Circular Orbit*, ou órbita circular estável mais interna).

- Se  $\tilde{L} > 2\sqrt{3}m$ , há um raio mínimo ( $r_-$ ) para o potencial máximo e um raio máximo ( $r_+$ ) para o potencial mínimo. A fig. (2.4) apresenta um gráfico de  $V_{\text{ef}}$  em função de  $r$  para  $\tilde{L} > 2\sqrt{3}m$ . Nele percebe-se a existência de dois pontos críticos,  $r_-$  e  $r_+$ , e a seguir serão encontrados os valores mínimos desses raios.

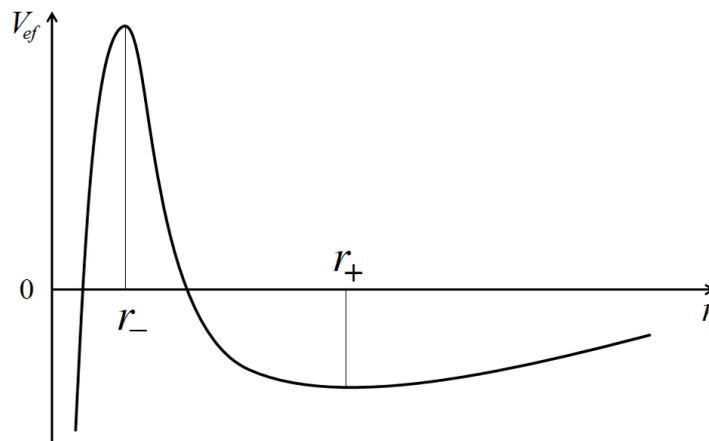


Figura 2.4: Potencial efetivo em função da distância para  $\tilde{L} > 2\sqrt{3}m$ . Baseado em [40, 21].

A partir da relação (2.51) obtém-se

$$r_+(\text{min}) = \lim_{\tilde{L} \rightarrow 2\sqrt{3}m} \left[ \frac{\tilde{L}^2}{2m} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{12m^2}{\tilde{L}^2}} \right) \right] = 6m, \quad (2.54)$$

que é o raio da ISCO obtido anteriormente.

Trabalhando inicialmente um pouco o limite, vem também que

$$r_-(\text{min}) = \lim_{\tilde{L} \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tilde{L}^2}{2m} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{\tilde{L}^2}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 12m^2/\tilde{L}^2}}{1 + \sqrt{1 + 12m^2/\tilde{L}^2}} \right) \right] = \lim_{\tilde{L} \rightarrow \infty} \left( \frac{6m}{1 + \sqrt{1 - 12m^2/\tilde{L}^2}} \right) = 3m. \quad (2.55)$$

Se  $\tilde{L} \rightarrow \infty$ , então, a partir de (2.51),  $r = \tilde{L}^2/m$ . Perceba que esta é a mesma relação newtoniana para o raio da órbita circular de uma partícula com momento angular por unidade de massa, ou seja,  $\tilde{L} = rv$ . Escrevendo em unidades convencionais, no limite newtoniano

$$r = \frac{r^2 v^2}{GM}, \quad (2.56)$$

donde vem

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.57)$$

Analisando a estabilidade da órbita em  $r_-(\text{min})$ , encontra-se

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_-=3m} = -\frac{1}{27m^2} \left( \frac{\tilde{L}^2}{3m^2} + 2 \right) < 0, \quad (2.58)$$

o que mostra que  $r_-(\text{min})$  é um ponto de máximo e a órbita é instável.

Portanto, conclui-se que as órbitas são:

- Estáveis para  $r > 6m$ ;
- Instáveis para  $3m < r < 6m$ .

Estando em órbita uma partícula emitirá radiação gravitacional, desviando-se levemente do movimento geodésico. Situada inicialmente numa órbita circular  $r_c \gg m$  (com  $\tilde{E} < 1$ ), lentamente ela espiralará para um raio menor, devido a perda de energia por radiação, se aproximando do raio orbital  $r_I = 6m$ . Assim que a partícula atravessa o  $r_I$ , rapidamente cairá no horizonte de eventos [9].

Na fig. (2.5) tem-se um gráfico do potencial efetivo relativístico (linha contínua) e o newtoniano (linha pontilhada) para uma partícula em função da distância. Observe a diferença entre os mesmos quando  $r \rightarrow 0$ . No caso newtoniano (Eq. 1.63) a barreira centrífuga sempre domina com  $V_{\text{ef}} \rightarrow \infty$ . Neste caso não há  $r_-$  e uma partícula não pode

cair em direção a  $r = 0$  com  $\tilde{L} \neq 0$ . Na geometria relativística de Schwarzschild (Eq. 2.38),  $V_{\text{ef}} \rightarrow -\infty$  quando  $r \rightarrow 0$  e, mesmo com  $\tilde{L} \neq 0$ , a partícula pode cair em direção à singularidade.

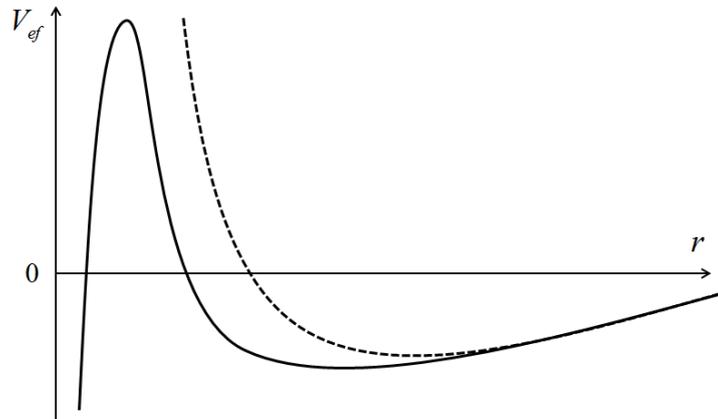


Figura 2.5: Potenciais efetivos relativístico (linha contínua) e newtoniano (linha pontilhada) em função da distância. Baseado em [39, 25].

Perceba que o potencial efetivo relativístico de Schwarzschild é semelhante ao potencial efetivo newtoniano, diferindo apenas o último termo. Para grandes valores de  $r$  o potencial efetivo relativístico é aproximadamente igual ao potencial efetivo newtoniano. Para valores pequenos de  $r$  o termo  $\sim 1/r^3$  torna-se relevante e leva à diferença entre eles.

### Órbitas Abertas

As órbitas de uma partícula são abertas se ela possui uma energia tal que  $\tilde{E}^2 > 1$  [40, 41]. Nesse momento não temos interesse nessas órbitas, de modo que não iremos explorá-las.

### 2.3.6 Geodésicas Tipo Luz

Na sequência serão analisadas as geodésicas circulares do tipo luz, que são as geodésicas descritas pelos fótons. Ao longo de uma trajetória de um raio de luz,  $ds^2 = 0$ , de modo que não se pode usar o tempo próprio como parâmetro [21, 31, 40].

Se um fóton, oriundo do infinito, deslocar-se em direção ao BN numa trajetória não radial, ele seguirá uma trajetória curvilínea. Se a energia do fóton for suficiente para vencer a barreira de potencial, ele avançará em direção ao horizonte de eventos, sendo capturado pelo BN. Caso contrário, ele será refletido e escapará para longe.

A fig. (2.6) apresenta um gráfico do potencial efetivo para fótons, em função da distância. Sendo  $\kappa = 0$  e fazendo  $(\partial V_{\text{ef}}/\partial r) = 0$ , a partir da eq. (2.37) vem

$$-\tilde{L}^2 r + 3m\tilde{L}^2 = 0, \quad (2.59)$$

cuja solução é

$$r_c = 3m = \frac{3}{2}r_S. \quad (2.60)$$

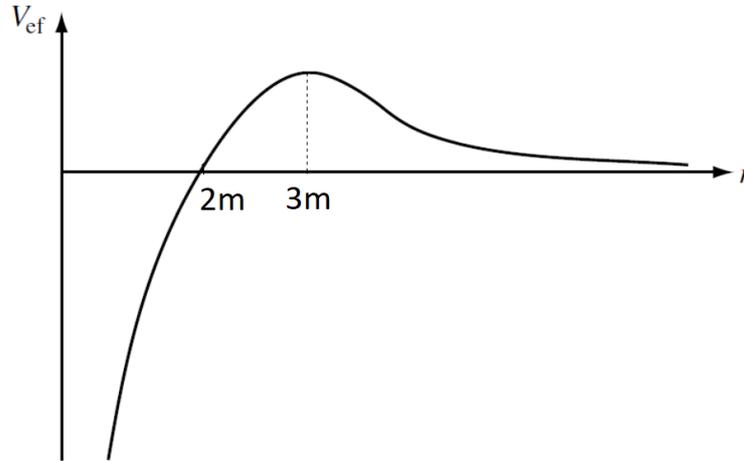


Figura 2.6: Potencial efetivo para a órbita de fótons. Baseado em [40, 21, 31].

Calculando a derivada segunda de (2.37) em  $r = 3m$  encontra-se

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r=3m} = \frac{-\tilde{L}^2}{(3m)^4} < 0, \quad (2.61)$$

o que significa que  $r = 3m$  é um ponto de máximo, cujo valor do potencial efetivo é

$$V_{\text{ef}}(3m) = \frac{\tilde{L}^2}{54m^2}. \quad (2.62)$$

A órbita para fótons existe apenas para  $r = 3m$  e é instável. Uma pequena perturbação é suficiente para desfazer a órbita.

Pela equação do potencial efetivo (2.34), tem-se que  $\tilde{E}^2 = 2E_{\text{ef}} + \kappa$ . Sendo  $\kappa = 0$  e  $E_{\text{ef,max}} = V_{\text{ef,max}}$ , a partir de (2.62) vem

$$\tilde{E}_{\text{max}}^2 = \frac{\tilde{L}^2}{27m^2}. \quad (2.63)$$

Dessa forma, pode-se concluir que:

- Se  $\tilde{E}^2 > \tilde{L}^2/(27m^2)$ , os fótons que se aproximam do BN descreverão uma geodésica espiral que tende para a órbita circular com  $r = 3m$ . Essa órbita é instável e os fótons serão capturados pelo horizonte de eventos ( $r = 2m$ ) ou escaparão para o infinito se estiverem direcionados para fora.
- Se  $\tilde{E}^2 < \tilde{L}^2/(27m^2)$ , os fótons que se aproximam da região  $r > 3m$  serão defletidos, porque há um ponto de retorno.

### 2.3.7 Força de Maré e Raio de Roche

A força de maré é provocada pela força gravitacional diferencial, sendo esta a diferença entre as forças gravitacionais exercidas em duas partículas vizinhas por um outro corpo, mais distante. Essa força tende a separar as duas partículas e, se elas constituem um mesmo corpo, a força diferencial tende a alongá-lo ou até rompê-lo. A seguir este fenômeno será descrito brevemente [2, 9, 3].

Considere um corpo de teste de massa  $m_0$  a uma distância  $r$  de um corpo de massa  $M$ , sendo este último o que provoca a maré. Derivando a lei da gravitação universal  $F = -GMm_0/r^2$ , obtém-se

$$dF = \frac{2GMm_0}{r^3} dr, \quad (2.64)$$

onde  $dr$  é a distância entre dois pontos no corpo de teste.

Uma consequência da força de maré é que o corpo de teste não pode chegar muito próximo do corpo de massa  $M$  sem se romper. A distância mínima do centro do corpo gerador da maré que o corpo de teste pode chegar sem se tornar instável é chamado de limite ou raio de Roche, em homenagem ao astrônomo francês Edouard Roche. A seguir será calculado esse limite para um corpo de teste sólido.

Considere duas partículas de massas iguais a  $m_0$  se tocando (fazem parte de um mesmo objeto), separadas por uma distância  $dr$ . A força gravitacional entre essas partículas é

$$F_g = \frac{Gm_0m_0}{(dr)^2}. \quad (2.65)$$

A partir de (2.64) tem-se que a força de maré que um corpo de massa  $M$ , localizado a uma distância  $d$  do corpo de teste, exerce sobre este é

$$F_m = \frac{2GMm_0dr}{d^3}. \quad (2.66)$$

Para as duas partículas permanecerem juntas, a força gravitacional deve contrabalançar a força de maré. Igualando as relações (2.65) e (2.66),

$$d = \sqrt[3]{\frac{2M}{m_0}}. \quad (2.67)$$

Escrevendo as massas dos dois corpos em função de suas densidades,  $M = (4/3)\pi R^3 \rho_M$  e  $m_0 = (4/3)\pi (dr/2)^3 \rho_m$ , onde  $R$  é o raio e  $\rho_M$  é a densidade do corpo gerador da força de maré e  $\rho_{m_0}$  é a densidade do corpo de teste, encontra-se o limite de Roche

$$d = 2,52 \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_{m_0}}} R. \quad (2.68)$$

Quando o corpo de teste não é sólido, mas um fluido, o coeficiente da eq. (2.68) é 2,44. Para corpos esferoidais sólidos mantidos coesos por forças de tensão intrínsecas, o valor do coeficiente é 1,38 [2].

Como exemplo pode-se citar o caso da Terra e da Lua. A Lua tem uma órbita estável em torno da Terra com um raio de cerca de 384.000 km. Ela se romperia ao se aproximar da Terra numa distância menor que 7.527 km [2].

Ao se aproximar de um BN, um corpo de densidade  $\rho_c$  é desintegrado pelas forças de maré a uma distância denominada raio de Roche

$$R_{\text{Roche}} = r_S \sqrt[3]{\frac{\rho_{BN}}{\rho_c}}, \quad (2.69)$$

onde  $r_S$  é o raio de Schwarzschild e  $\rho_{BN}$  é a densidade do BN.

Um conceito equivocado é de que um BN suga a matéria ao seu redor. Isto somente acontece se a matéria chegar a uma distância menor do que o seu  $R_{\text{Roche}}$ . No entanto, tudo que vai ao seu encontro fica retido em seu interior.

A atração gravitacional sentida por um observador situado em  $r > r_S$  é a mesma que seria sentida se, ao invés do BN, tivesse um outro objeto qualquer com a mesma massa  $M$ . O limite de Roche delimita o volume em torno de um astro no qual a matéria está ligada gravitacionalmente a ele.

### 2.3.8 Rendimento no Processo de Acreção

Um gás no disco de acreção num corpo central massivo distribui-se em órbitas circulares ao redor do objeto compacto. No entanto, devido à viscosidade e à turbulência, o gás perde momento angular e move-se para o interior, perdendo energia potencial gravitacional e aquecendo, emitindo radiação. A seguir será estimada a eficiência energética desse processo para uma partícula [31, 6, 25].

Seja  $\tilde{E}$  a energia por unidade de massa medida de uma partícula no infinito ( $\tilde{E}_\infty = 1$ ). A energia de ligação de uma órbita do BN é a diferença entre a energia por unidade de massa da partícula em repouso no infinito e a energia da partícula por unidade de massa movendo-se nessa órbita ( $\tilde{E}$ ), ou seja,

$$\eta = 1 - \tilde{E}. \quad (2.70)$$

Esse é o rendimento energético que pode ser liberado em processos gravitacionais, como na acreção.

A valor máximo da energia liberada por uma partícula corresponde ao movimento da mesma do infinito para a ISCO. A partir da eq. (2.33) tem-se que a energia de uma partícula ( $\kappa = +1$ ) em movimento circular ( $\dot{r} = 0$ ) é

$$\tilde{E}^2 = -\frac{2m}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} - \frac{2m\tilde{L}^2}{r^3} + 1. \quad (2.71)$$

Sendo  $r = r_I = 6m$  e  $\tilde{L} = 2\sqrt{3}m$ , obtêm-se  $\tilde{E} = 2\sqrt{2}/3$  e

$$\eta = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0,057 = 5,7\%, \quad (2.72)$$

que é a eficiência máxima da radiação emitida no disco de acreção num BN de Schwarzschild. Esse valor é cerca de 10 superior ao rendimento existente em processos nucleares.

## 2.4 Buraco Negro de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström é também uma solução das equações de campo de Einstein e foi desenvolvida pelos físicos Gunnar Nordström e Hans Reissner. Ela descreve o campo gravitacional de um corpo esférico estático de massa  $M$  carregado eletricamente com carga elétrica  $Q$ . A seguir será exposta resumidamente essa solução, baseado em [33, 10, 24, 31, 23].

No universo a matéria apresenta-se predominantemente neutra eletricamente, ou seja, composta por cargas elétricas positivas e negativas em iguais quantidades. Dessa forma, não se acredita que existam BNs com carga elétrica considerável, pois a matéria que o originou muito provavelmente era neutra.

Do ponto de vista matemático existe a possibilidade de um BN carregado eletricamente, cuja métrica é

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.73)$$

Se  $Q = 0$  a métrica de Reissner-Nordström (2.73) torna-se a métrica de Schwarzschild (2.7).

Entre as suas características, um BN de Reissner-Nordström possui dois horizontes de eventos, os quais são dados por

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}. \quad (2.74)$$

A carga elétrica de um BN pode ser estimada pela sua interação com átomos ionizados. No entanto, até o momento não se conhece nenhum BN carregado eletricamente.

Se  $m^2 - Q^2 < 0$  ou  $m < |Q|$ , então não existem horizontes de eventos e a singularidade está desprotegida, sendo chamada singularidade nua. De acordo com a Conjectura do Censor Cósmico, idealizada pelo físico-matemático inglês Roger Penrose, toda singularidade é envolvida por um horizonte de eventos.

## 2.5 Buraco Negro de Kerr

### 2.5.1 Histórico

A solução de Kerr foi desenvolvida em 1963 pelo matemático neozelandês Roy Patrick Kerr [43], descreve um BN com rotação e constitui uma solução das equações de campo de Einstein. As geodésicas da geometria de Kerr foram calculadas primeiramente pelo físico australiano Brandon Carter em 1973 [37, 5, 5, 9].

A rotação de uma estrela se opõem parcialmente ao colapso gravitacional, de modo que ela pode conter mais massa do que seria o caso se a mesma não tivesse rotação. Para estrelas que giram rapidamente, existe um limite superior absoluto na rotação estável

definido pela frequência de Kepler,  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$ , que é a frequência máxima que a estrela pode ter antes que comece a perder massa na região do equador.

Como a rotação deve ser comum na matéria que colapsa para formar um BN, devido à conservação do momento angular é provável que a maioria dos BNs apresentem rotação. Os BNs com rotação ou momento angular intrínseco (spin) são descritos pela solução de Kerr, a qual depende, além da massa  $M$ , do momento angular  $J$ .

A solução de Kerr é mais trabalhosa que a de Schwarzschild, o que torna a estrutura de um BN com rotação mais complexa do que o BN estático. É importante ressaltar que a solução de Kerr foi obtida quase 50 anos após a solução de Schwarzschild

## 2.5.2 A Métrica de Kerr

A seguir será apresentada a métrica de Kerr e exploradaa as principais propriedades dos BNs providos de momento angular, com base nas referências [25, 24, 10].

A métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist para um BN de massa  $m$  que gira na direção  $\phi$  e possui momento angular  $J$  é

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2mr}{\rho} \right) dt^2 - \left( \frac{4mra \sin^2 \theta}{\rho} \right) dt d\phi + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.75)$$

onde os termos  $a$ ,  $\rho$  e  $\Delta$  são definidos, respectivamente, por

$$a = \frac{J}{m}, \quad (2.76)$$

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.77)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2. \quad (2.78)$$

As coordenadas de Boyer-Lindquist relacionam-se com as coordenadas cartesianas como

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi + a \sin \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi - a \sin \theta \cos \phi \\ z = r \cos \theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (2.79)$$

O termo  $a$  é um parâmetro definido por (2.76) que relaciona o momento angular com a massa do BN. Seus valores estão situados no intervalo  $0 \leq a \leq m$ . Se  $a = 0$ ,  $J = 0$  e a métrica de Kerr (2.75) reduz-se à métrica de Schwarzschild (2.7) (BN estático). Se  $a = m$ , tem-se  $J = m^2$ , e neste caso o BN é chamado BN de Kerr extremo, onde o horizonte de eventos está girando na velocidade da luz. Praticamente todos os BNs possuem  $a \neq 0$ , sendo os lentos com  $a = 0,3 - 0,4$  e os considerados rápidos com  $a > 0,95$ .

De acordo com algumas observações, os BNs supermassivos com  $M < 3 \times 10^7 M_\odot$  giram com  $a > 0,9$  e os com  $M > 8 \times 10^7 M_\odot$  giram de forma mais moderada. As rotações dos BNs são estudadas a partir da análise do efeito Doppler do espectro de raios X emitidos pela parte interna do disco de acreção, o qual fornece informações sobre a estrutura do disco e, conseqüentemente, sobre o seu momento angular [44].

### 2.5.3 Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera

Na sequência serão descritas a singularidade, os horizontes de eventos e a ergosfera de um BN de Kerr, com base em [25, 24, 38, 37, 31].

Analisando a eq. (2.75) percebe-se que a singularidade ocorre quando  $\Sigma = 0$  (2.77) ou  $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ , que se verifica, para  $a \neq 0$ , quando  $r = 0$  ou  $\cos \theta = 0$ . Sendo  $z$  o eixo de rotação do BN ( $z = 0$ ), a partir de (2.79) vem que  $x^2 + y^2 = a^2$ , o que corresponde a um anel de raio  $a$  situado no plano equatorial  $z = 0$ . Percebe-se que, diferentemente de um BN de Schwarzschild onde a singularidade é uma linha, num BN de Kerr a singularidade está diluída em um anel fino em torno do centro. Quanto maior a velocidade angular do BN, maior é o anel da singularidade.

Na fig.(2.7) tem-se uma ilustração do BN de Kerr, na qual aparece a singularidade, os horizontes de eventos, as superfícies  $S_\pm$  e a ergosfera.

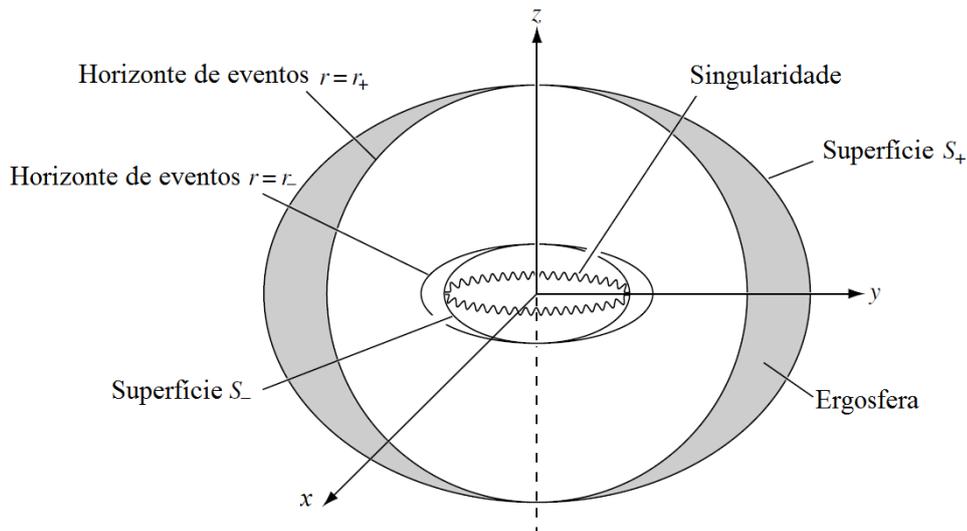


Figura 2.7: Buraco negro de Kerr [31].

O horizonte de eventos está situado no ponto onde o termo  $dr^2$  da eq. (2.75) muda de sinal, e isso ocorre quando  $\Delta = 0$ . Resolvendo a eq. (2.78),  $r^2 - 2mr + a^2 = 0$ , encontra-se dois horizontes de eventos, os quais são dados por

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (2.80)$$

O caso de interesse físico da relação (2.83) é para  $m^2 - a^2 > 0$ . O horizonte de eventos externo é descrito por  $r_+$  e o interno por  $r_-$ , sendo este último chamado horizonte de Cauchy. O horizonte descrito por  $r_+$  é semelhante ao de Schwarzschild.

Analisando os dois extremos de rotação para o BN de Kerr:

- Para  $a \rightarrow 0$ ,  $r_+ \rightarrow 2m$  e  $r_- \rightarrow 0$  (não existe), o que representa um BN de Schwarzschild.
- Para  $a \rightarrow m$ ,  $r_+ = r_- \rightarrow m$ , de modo que os dois horizontes se sobrepõem.

Constata-se que o horizonte de eventos de um BN de Kerr continua sendo uma superfície esférica mas é menor que o horizonte de eventos de um BN Schwarzschild. O horizonte de eventos é uma superfície tipo luz (nula) que limita a região na qual, se algo cair, é impossível retornar.

Considere um fóton orbitando o plano equatorial de um BN. Sendo  $ds^2 = 0$ ,  $dr = d\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ , a eq. (2.75) fica

$$-\left(1 - \frac{2mr}{\rho}\right) dt^2 - \left(\frac{4mra}{\rho}\right) dt d\phi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho}\right) d\phi^2 = 0. \quad (2.81)$$

Dividindo a equação por  $dt^2$  e sendo  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ , vem que

$$-\left(1 - \frac{2mr}{\rho}\right) - \left(\frac{4mra}{\rho}\right) \dot{\phi} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho}\right) \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.82)$$

Escolhendo os coeficientes

$$\begin{cases} A = \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho}\right), \\ B = -\frac{4mra}{\rho}, \\ C = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho}\right). \end{cases} \quad (2.83)$$

escreve-se (2.82) como uma equação algébrica quadrática  $A\dot{\phi}^2 + B\dot{\phi} + C = 0$ , cuja solução é

$$\dot{\phi} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (2.84)$$

Um fóton permanece estacionário ao redor de um BN quando  $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . A partir da eq. (2.84) percebe-se que  $\dot{\phi} = 0$  quando  $C = 0$  na raiz positiva. Sendo  $C$  dado por (2.83) e  $\rho$  dado por (2.77), fazendo  $C = 0$  encontra-se  $r^2 - 2mr = 0$ , cuja solução fornece o raio da superfície estacionária externa no equador,

$$r_{S_+} = 2m. \quad (2.85)$$

A superfície  $S_+$  envolve completamente o horizonte de eventos externo ( $r_+$ ), tocando-o nos polos ( $r_{S_+} \geq r_+$ ). A região em forma de toroide entre o horizonte de eventos externo ( $r_+$ ) e

a superfície  $S_+$  é chamada de ergoregião ou ergosfera ( $r_+ < r < r_{S_+}$ ). A ergosfera arrasta o espaço-tempo ao seu redor, obrigando tudo a girar no mesmo sentido do BN, inclusive a luz. Nessa região nada pode permanecer estático, com respeito a observadores distantes, pois o sistema de referência é arrastado. Portanto, um fóton permanecerá estacionário somente sobre a ergosfera. Uma partícula massiva ou um fóton que entra na ergoregião pode escapar dela ou cair no BN, dependendo da velocidade e do ângulo de incidência.

De acordo com o Processo de Penrose, idealizado pelo físico Roger Penrose, as partículas podem extrair energia de um BN em rotação. Suponha que uma partícula entre na ergosfera e seja dividida em duas, de modo que uma cai no horizonte de eventos externo e a outra escape para o infinito. A partícula que escapou pode ter mais energia que a partícula capturada, sendo essa energia oriunda da diminuição do momento angular do BN. Como consequência, o BN diminui sua rotação [40].

## 2.5.4 Geodésicas ao Redor de um Buraco Negro de Kerr

Na sequência serão analisadas as geodésicas no BN de Kerr, em especial as órbitas circulares [25, 31].

Considere a Lagrangiana de uma partícula movendo-se no plano equatorial ( $\theta = \pi/2$  e  $\dot{\theta} = 0$ ):

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{4ma}{r} \dot{t}\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right) \dot{\phi}^2. \quad (2.86)$$

As equações de Euler-Lagrange para as variáveis  $t$  e  $\phi$  são,

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} + \frac{2ma}{r} \dot{\phi} = \tilde{E}, \quad -\frac{2ma}{r} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right) \dot{\phi} = \tilde{L}, \quad (2.87)$$

onde  $\tilde{E}$  é a energia por unidade de massa e  $\tilde{L}$  o momento angular por unidade de massa da partícula. Resolvendo para  $\dot{t}$  e  $\dot{\phi}$ , encontra-se

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right) \tilde{E} - \frac{2ma\tilde{L}}{r} \right] \quad (2.88)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tilde{L} + \frac{2ma\tilde{E}}{r} \right]. \quad (2.89)$$

A expressão que determina as geodésicas das partículas massivas e dos fótons na métrica de Kerr é

$$\frac{\tilde{E}^2 - \kappa}{2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}, \quad (2.90)$$

onde

$$\frac{\tilde{E}^2 - \kappa}{2} = E_{\text{ef}}, \quad (2.91)$$

é a energia efetiva e

$$V_{\text{ef}}(r, \tilde{E}, \tilde{L}) = -\frac{\kappa m}{r} + \frac{\tilde{L}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - \kappa)}{2r^2} - \frac{m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2}{r^3} \quad (2.92)$$

o potencial efetivo.

Para partículas massivas ( $\kappa = +1$ ) a eq. (2.92) fica

$$V_{\text{ef}}(r, \tilde{E}, \tilde{L}) = -\frac{m}{r} + \frac{\tilde{L}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - 1)}{2r^2} - \frac{m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2}{r^3}. \quad (2.93)$$

Para fótons ( $\kappa = 0$ ):

$$V_{\text{ef}}(r, \tilde{E}, \tilde{L}) = \frac{\tilde{L}^2 - a^2\tilde{E}^2}{2r^2} - \frac{m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2}{r^3}. \quad (2.94)$$

A solução de Kerr não admite geodésicas radiais. Devido ao arrastamento do espaço-tempo provocado pela rotação do BN, as geodésicas são necessariamente curvas.

### Órbitas Circulares de Partículas

A obtenção de uma expressão algébrica para o raio das órbitas circulares na solução de Kerr é mais complexa que no caso de Schwarzschild, pois o potencial efetivo depende também de  $\tilde{E}$ .

Para uma órbita circular estável de raio  $r = r_c$  ( $\dot{r} = 0$ ), a partir de (2.90) e (2.91) tem-se  $E_{\text{ef}} = V_{\text{ef}}$ , ou

$$\frac{\tilde{E}^2 - 1}{2} = -\frac{m}{r} + \frac{\tilde{L}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - 1)}{2r^2} - \frac{Mm(\tilde{L} - a\tilde{E})^2}{r^3}. \quad (2.95)$$

Fazendo a substituição de variáveis,  $u = 1/r$ , escreve-se as eqs. (2.93) e (2.95) como

$$V_{\text{ef}}(u, \tilde{E}, \tilde{L}) = -mu + \left[ \frac{\tilde{L}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - 1)}{2} \right] u^2 - m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2 u^3 \quad (2.96)$$

e

$$-2mu + [\tilde{L}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - 1)]u^2 - 2m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2 u^3 = \tilde{E}^2 - 1. \quad (2.97)$$

Introduzindo a variável  $x = \tilde{L} - a\tilde{E}$ , escreve-se (2.96) e (2.97) como

$$3mx^2u^2 - (x^2 + 2ax\tilde{E} + a^2)u + m = 0 \quad (2.98)$$

e

$$2mu + (x^2 + 2ax\tilde{E} + a^2)u^2 - 2mx^2u^3 = \tilde{E}^2 - 1. \quad (2.99)$$

Somando a eq. (2.99) com a eq. (2.98) multiplicada por  $u$ ,

$$\tilde{E}^2 = 2mx^2u^3 - mu + 1. \quad (2.100)$$

Rearranjando a eq. (2.99) vem que

$$2ax\tilde{E}u = x^2u(3mu - 1) - (a^2u - M). \quad (2.101)$$

Eliminando  $\tilde{E}$  entre as eqs. (2.100) e (2.101) obtém-se a equação quadrática para  $x^2$ :

$$u^2[(3mu - 1)^2 - 4a^2mu^3]x^4 - 2u[(3mu - 1)(a^2u - M) - 2ua^2(mu - 1)]x^2 + (a^2u - m)^2 = 0, \quad (2.102)$$

cuja solução é, considerando apenas o sinal negativo

$$x = -\frac{(a\sqrt{u} \pm \sqrt{m})}{\sqrt{u(1 - 3mu \mp 2a\sqrt{mu^3})}}. \quad (2.103)$$

Inserindo (2.104) em (2.100), encontra-se que, para uma órbita circular estável,

$$\tilde{E} = \frac{1 - 2mu \mp a\sqrt{mu^3}}{\sqrt{1 - 3mu \mp 2a\sqrt{mu^3}}}. \quad (2.104)$$

Sendo que  $\tilde{L} = x + a\tilde{E}$ , a partir de (2.104) obtém-se

$$\tilde{L} = \mp \frac{\sqrt{m}(1 + a^2u^2 \pm 2a\sqrt{mu^3})}{\sqrt{u}\sqrt{1 - 3mu \mp 2a\sqrt{mu^3}}}. \quad (2.105)$$

O raio  $r = r_c$  de uma órbita circular é encontrado fazendo  $\partial V_{\text{ef}}/\partial r = 0$ . Considerando uma estabilidade marginal da órbita, é necessário que

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r=r_c} = 0. \quad (2.106)$$

Vem que

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = u^3 \left( \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial u} \right) = 0. \quad (2.107)$$

Sendo que  $\partial V_{\text{ef}}/\partial u = 0$ , tem-se que  $\partial^2 V_{\text{ef}}/\partial u^2 = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial u^2} = 6m(\tilde{L} - a\tilde{E})^2 u - [\tilde{L} - a^2(\tilde{E}^2 - 1)], \quad (2.108)$$

donde vem

$$u = \frac{x^2 + 2ax\tilde{E} + a^2}{6mx^2}. \quad (2.109)$$

Levando (2.104) em (2.109),

$$1 - 3a^2u^2 - 6mu \mp 8a\sqrt{mu^3} = 0. \quad (2.110)$$

Substituindo  $u$  por  $r$ ,  $u = 1/r$ , vem

$$r_c^2 - 6mr_c - 3a^2 \mp 8a\sqrt{mr_c} = 0. \quad (2.111)$$

O sinal  $-$  corresponde a uma órbita contrária à rotação do BN e o sinal  $+$  corresponde a uma órbita no mesmo sentido de rotação.

Analisando, agora, as órbitas circulares limites para o BN de Kerr:

- Se  $a = 0$ , a eq. (2.111) fica  $r_c^2 - 6mr = 0$ , donde vem

$$r_c = 6m, \quad (2.112)$$

que é o  $r_I$  para o BN de Schwarzschild.

- Se  $a = m$ , para uma órbita no mesmo sentido de rotação do BN,

$$r_c^2 - 6mr_c - 3m^2 - 8m\sqrt{mr_c} = 0, \quad (2.113)$$

cuja solução é (por inspeção direta)

$$r_c = m. \quad (2.114)$$

Se a órbita tiver o sentido oposto de rotação,

$$r_c^2 - 6mr_c - 3m^2 + 8m\sqrt{mr_c} = 0, \quad (2.115)$$

cuja solução é

$$r_c = 9m. \quad (2.116)$$

Para uma partícula em órbita no mesmo sentido do BN, os valores de  $\tilde{E}$  e  $\tilde{L}$  são

$$\tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \tilde{L} = \frac{2m}{\sqrt{3}}. \quad (2.117)$$

Fazendo a derivada segunda do potencial efetivo (2.93) em  $r_c = m$  encontra-se (2.106), o que mostra que  $r_I = m$  é um ponto de inflexão, e que esta órbita circular no plano equatorial de um BN de Kerr é marginalmente estável.

No BN de Kerr, o raio da ISCO depende do valor de  $a$ , de modo que

$$m \leq r_I \leq 6m. \quad (2.118)$$

### 2.5.5 Rendimento no Processo de Acreção

A existência da ISCO tem importantes consequências na astrofísica. A matéria que cai no BN espirala através do disco de acreção para o  $r_I$ , mergulhando no BN e aumentando o seu momento angular  $J$ . Esse aumento faz com que  $J$  fique próximo do extremo  $J = m^2$ . Estando próximo de  $J = m^2$ , o BN começa a apresentar fenômenos astrofísicos altamente energéticos, como a ejeção de matéria, a produção de raios X, entre outros [40, 31, 25].

Seja  $\tilde{E}$  a energia por unidade de massa medida de uma partícula numa determinada órbita. A energia de ligação da partícula na órbita é  $1 - \tilde{E}$ , sendo esta a energia que pode ser liberada no processo de acreção.

O valor máximo da energia liberada corresponde a um BN com  $a = m$ . Sendo  $E = 1/\sqrt{3}$ , encontra-se que o valor limite do rendimento energético que pode ser liberado por uma partícula durante a transição de uma órbita aberta para a órbita circular estável mais interna ( $r_I = m$ ) é

$$\eta = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,42 = 42\%. \quad (2.119)$$

O processo de acreção em objetos compactos é responsável pelos fenômenos mais energéticos conhecidos no universo.

## 2.6 Buraco Negro de Kerr-Newman

A solução de Kerr-Newman descreve um BN em rotação e com carga elétrica. Partindo da solução de Kerr, foi generalizada pelo matemático Erza Newman [23, 38].

Para um BN de massa  $m$ , momento angular  $J$  e carga elétrica  $Q$  que gira na direção  $\phi$ , a métrica de Kerr-Newman é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\rho}\right) dt^2 - \left(\frac{4mra \sin^2 \theta}{\rho}\right) dt d\phi + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.120)$$

onde os termos  $a$ ,  $\rho$  e  $\Delta$  são definidos, respectivamente por

$$a = \frac{J}{m}, \quad \rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2 + Q^2. \quad (2.121)$$

O BN de Kerr-Newman é um elipsoide com uma singularidade em forma de um toroide, horizontes de eventos dados por

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}, \quad (2.122)$$

e superfície  $S_+$  que envolve a ergosfera dada por,

$$r_{S+} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}. \quad (2.123)$$

Devido à velocidade rotacional do BN e ao fato deste ser eletricamente carregado, um intenso campo magnético é gerado, criando um fluxo intenso de matéria que, devido a sua interação violenta, gera e emite fótons de raios gama.

## 2.7 O Renascimento dos Buracos Negros

Em 1939 os físicos norte-americanos Julius Oppenheimer e Hartland Snyder publicaram um trabalho no qual constataram que estrelas massivas colapsariam totalmente sob a influência do seu próprio campo gravitacional, originando objetos frios e negros, incapazes de emitir radiação eletromagnética [37]. Esta ideia ainda primitiva de BN não foi bem aceita e a maioria dos físicos não acreditava que pudesse existir objetos com as características citadas. O próprio Albert Einstein publicou um trabalho no mesmo ano no qual afirmava que o colapso gravitacional não resultaria na formação de um BN [33].

Em 1958 o físico David Finkelstein publicou um trabalho no qual interpretou a esfera de raio  $r_S$  como uma espécie de membrana unidirecional que apenas permitiria o cruzamento de trajetórias físicas, partículas e fótons, de fora para dentro. Essa esfera funcionaria como uma fronteira entre duas regiões, sendo a externa completamente desconectada da interna. Surgia, então, o conceito de horizonte de eventos, que de fato é o que

distingue e define um BN. A partir de então, alguns grupos de físicos passam a estudar mais intensamente estes misteriosos objetos [33].

O entusiasmo pelos BNs aumentou na década de 1960 com a descoberta dos quasares e das estrelas de nêutrons. O termo Buraco Negro foi cunhado inicialmente pela jornalista Ann E. Ewing, que ouvira num congresso científico, e amplamente divulgado a partir de 1967 pelo físico norte-americano John Wheeler, através do artigo *Our Universe: The Known and the unknown* (Nosso Universo: o conhecido e o desconhecido), publicado no *American Scholar* e no *American Scientist* em 1968 [33, 45]. Nas décadas seguintes a pesquisa nesse assunto se intensificou e atualmente constitui uma das fronteiras da ciência.

## 2.8 Evidências e Detecção de Buracos Negros

### 2.8.1 Introdução

No discurso ao receber o Prêmio Nobel de Física em 1983, o físico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar afirmou que os BNs são os objetos macroscópicos mais perfeitos e mais simples que existem no universo [37]. No entanto, apesar de suas notáveis características, suas detecções e observações são bastantes difíceis.

O número de BNs existentes no universo é imenso. O número de BNs estelares na Via Láctea, por exemplo, é de cerca de  $1 \times 10^8$ . Estima-se também que existam nela cerca de  $3 \times 10^{11}$  de estrelas, e que no universo existam centenas de bilhões de galáxias [46].

Em 1971 o satélite Uhuru detectou a primeira fonte de raios X associada a um BN: Cygnus X-1. Este foi o primeiro candidato a BN, está situado a cerca de 6 mil anos-luz da Terra e possui massa de cerca de  $20 M_{\odot}$  [38]. Cygnus X-1 é uma fonte na constelação do Cisne que emite raios X em escalas de tempo de milissegundos, indicando que o disco de acreção em torno de um BN estelar tem dimensões da ordem do diâmetro da Terra. Pelas velocidades calculadas a partir do efeito Doppler observado no espectro da estrela, concluiu-se que ela faz parte de um sistema binário e que sua companheira é um BN [10].

No centro da Via Láctea existe um BN supermassivo denominado Sagitário A\*, com massa de  $4 \times 10^6 M_{\odot}$ . Mapeando-se as órbitas de algumas estrelas na região do céu denominada Sagitário A, constatou-se que as mesmas orbitam ao redor de algum objeto supermassivo que, pelas dimensões e pelo conhecimento atual, só pode ser um BN. Quando BNs supermassivos acretam intensamente matéria, eles formam os chamados quasares, que são os objetos mais brilhantes do universo, chegando a ter uma luminosidade  $10^3$  vezes maior que uma galáxia inteira.

Um das principais características de um BN é a existência do seu horizonte de eventos. No entanto, certos trabalhos científicos apontam que é impossível ter uma prova direta da sua existência. Não é possível observar diretamente um BN porque ele não emite

radiação eletromagnética [9]. Quanto à radiação de Hawking, ela é de baixa intensidade para ser detectada atualmente. No entanto, se ela existir, há grande expectativa de que seja detectada nos próximos anos com a nova geração de telescópios.

O que deseja-se obter é a imagem das redondezas do horizonte de eventos. Em especial, espera-se obter um círculo luminoso ao redor de uma esfera negra, o que seria a sombra do BN. O BN captura os raios de luz que nele caem, de modo que ele projeta uma sombra sobre os gases que estão acretando ao seu redor. No entanto, a região ao redor da sombra é suplementada por outras ondas de luz oriundas de trás do BN. O efeito da lente gravitacional curva fortemente os raios de luz, de modo que o material atrás do BN contribui com a luz em torno da região escura. Os BNs visíveis são apenas os que acretam matéria. A maioria deles são inativos e permanecem ocultos [47].

Entre as formas de detecção há a análise do movimento de estrelas ao seu redor, devido à interação gravitacional, o estudo dos discos de acreção e a detecção e análise de ondas gravitacionais. Comentaremos brevemente sobre cada um deles.

## 2.8.2 Interação Gravitacional

Os BN podem ser observados de maneira indireta, através da interação gravitacional com os outros corpos. No entanto, o pequeno tamanho e a grande massa de um BN (comparados a outros astros), gera um intenso campo gravitacional, tornando possíveis movimentos extremamente rápidos. Por exemplo, o período de uma órbita num BN estelar pode ser menor que  $1 \mu s$  (microsegundo) [47].

Um dos modos de detectar um candidato a BN estelar é procurá-lo em sistemas binários onde uma das estrelas é invisível. Através do estudo da deflexão da órbita da estrela visível pode-se determinar a massa do objeto invisível, comparando o resultado com a massa de um BN. A única maneira que a massa de um BN pode ser medida é se ele estiver num sistema binário.

Os BN supermassivos podem ser estudados analisando o movimento de várias estrelas ao seu redor, de maneira semelhante ao sistema binário. Estes BNs produzem também o fenômeno das lentes gravitacionais, que é a deflexão da luz oriunda de galáxias distantes que, ao passar nas proximidades do BN, acompanham a curvatura do espaço-tempo.

## 2.8.3 Disco de Acreção

Um indício de que o sistema possa conter um BN é a presença de um disco de acreção, que se forma pela captura de matéria dos seus arredores. A matéria se movimenta em direção ao BN em trajetórias espirais, formando o disco. A fricção das partículas de matéria no disco provoca o seu aquecimento até altas temperaturas, provocando a emissão de raios X, cujos fótons fogem antes de entrarem no horizonte de eventos. Os raios X são também oriundos de outras fontes, de modo que devem ter algumas características

próprias para serem originários dos discos de acreção de BN. Na acreção ocorre a seguinte transformação de energia:

$$\text{Potencial Gravitacional} \Rightarrow \text{Cinética} \Rightarrow \text{Térmica} \Rightarrow \text{Radiação.}$$

O disco de acreção produz também o efeito Doppler da radiação. Se o disco estiver inclinado em relação ao observador, este verá um lado do disco se aproximar e o outro se afastar com a mesma velocidade, que é da ordem de milhares de km/s para um disco de acreção de um BN. Dessa forma, a radiação que é emitida de um lado possui um comprimento de onda menor que a emitida no outro lado. O comprimento de onda de uma fonte de radiação que se movimenta com velocidade  $v$  em relação ao observador é deslocado de um valor dado por

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \cos \theta \left( \frac{1}{1 - v^2/c^2} \right), \quad (2.124)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor velocidade e a linha de visada e  $c$  a velocidade da luz [2].

Além de radiação eletromagnética pode-se também observar os jatos espiralados de partículas com velocidades na ordem da velocidade da luz, emitidos em sentidos opostos nos polos, perpendiculares ao plano do disco. Esses jatos se estendem por distâncias de até  $10^5$  anos-luz [38].

## 2.8.4 Ondas Gravitacionais

As ondas gravitacionais são ondulações no espaço-tempo previstas pela TRG e detectadas recentemente. Essas ondas se propagam na velocidade da luz e possuem baixa intensidade, o que dificulta a sua detecção.

O primeiro sinal de uma onda gravitacional (evento GW150914) foi detectado no LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory* ou Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser) em setembro de 2015, e o resultado divulgado em fevereiro de 2016. O sinal registrado por dois detectores condiz com o previsto teoricamente como oriundo da colisão de dois BNs, com massas de  $36 M_{\odot}$  e  $29 M_{\odot}$ , originando um BN de  $62 M_{\odot}$ . A diferença de massa ( $3 M_{\odot}$ ) foi convertida em radiação gravitacional, que se propagou no espaço [48].

O objetivo no futuro é usar as ondas gravitacionais como uma nova astronomia. Em vez de observar o universo captando e analisando a radiação eletromagnética, como é feito atualmente, pode-se estudá-lo detectando e analisando as ondas gravitacionais. Sendo que os BNs não emitem radiação eletromagnética, seria uma forma interessante estudá-los através das ondas gravitacionais.

## 2.8.5 Imagem Direta

A primeira imagem direta de um BN (sombra) foi divulgada em abril de 2019, após cerca de 2 anos de tratamento de dados de fotografias obtidas por radiotelescópios.

Trata-se de um BN supermassivo localizado no centro da galáxia Messier 87, denominado M87\*, distante  $53 \times 10^6$  de anos-luz e com massa de cerca de  $6,5 \times 10^9 M_{\odot}$ . Não se trata de uma fotografia, mas de uma imagem criada por algoritmos computacionais baseados em modelos matemático e em fotografias obtidas por radiotelescópios do projeto EHT (*Event Horizon Telescope* ou Telescópio do Horizonte de Eventos) no comprimento de onda de 1,3 mm. A imagem do M87\* (fig.2.8) e suas análises foram publicadas em 6 artigos da revista *The Astrophysical Journal Letters* [49, 50, 51, 52, 53, 54].

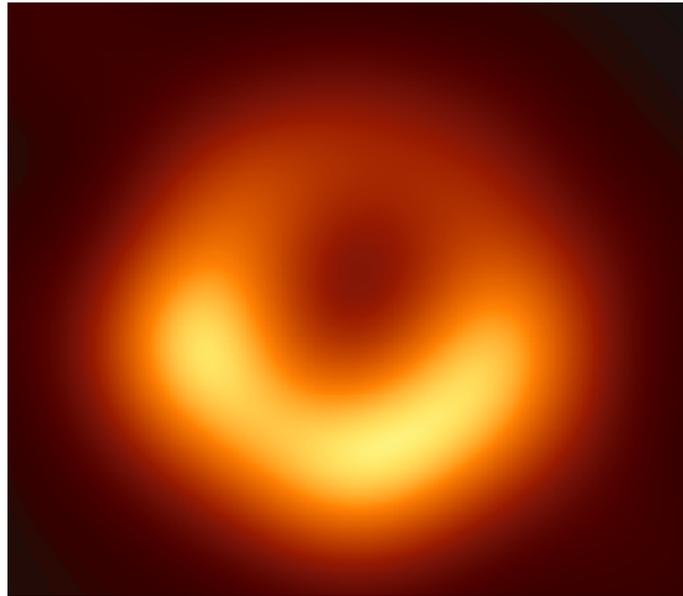


Figura 2.8: Sombra do BN M87\* [49].

O EHT é formado por 8 radiotelescópios localizados em diferentes locais do planeta e capturam simultaneamente os dados de uma região de interesse, simulando um radiotelescópio virtual gigante do tamanho da Terra. O objetivo inicial do EHT é fotografar e estudar 2 BNs supermassivos: o Sagitarius A\*, localizado no centro da Via Láctea, a  $25,6 \times 10^3$  anos-luz, e o M87\*. Apesar de estar mais próximo de nós, Sagitarius A\* tem massa de  $4,3 \times 10^6 M_{\odot}$ , cerca de 1.500 vezes menor que M87\*, sendo mais difícil captar a sua imagem<sup>3</sup>. De acordo com observações na última década, em diferentes comprimentos de onda, Sagitarius A\* é um dos BNs supermassivos de menor luminosidade conhecidos. A luminosidade máxima dos picos é cerca de 8 a 9 ordens de grandeza abaixo da  $L_{\text{Edd}}$  para um BN com massa equivalente, além de ser altamente variável. As últimas observações apontam para uma luminosidade maior sem precedente no espectro próximo ao infravermelho, e podem ser decorrentes de alterações do fluxo de acreção, como resultado da passagem próxima de alguma estrela [55, 56].

O que se observa na imagem da fig.(2.8) é a sombra de um BN imerso num disco de gás incandescente de plasma (disco de acreção). A luz é mais intensa num lado porque

<sup>3</sup>Quanto maior a massa do BN maior o seu horizonte de eventos, o que produz uma sombra maior.

o BN está em rotação e, ao girar, arrasta os raios de luz consigo. A imagem observada está de acordo com os modelos matemáticos de um BN de Kerr com  $a = 0,94$  [52, 53, 54].

Devido ao desvio da luz produzido pelo próprio BN (efeito de lente gravitacional), os radiotelescópios da EHT medem um diâmetro para a sombra maior que o diâmetro da esfera de fótons, sendo um pouco maior que o dobro do diâmetro do horizonte de eventos para o M87\*. Além disso, num BN de Kerr a sombra produzida sofre uma deformação na circularidade, sendo de 10% neste caso específico.

No início do ano de 2021 foram publicados 2 novos trabalhos ([57, 58]) que, além de diversas outras informações, apresentam uma nova imagem de M87\*, em luz polarizada, a qual revela a estrutura do campo magnético localizado na borda do horizonte de eventos (fig.2.9). É possível ver os campos magnéticos no disco de acreção que repelem o plasma, ajudando-o a resistir à força da gravidade.

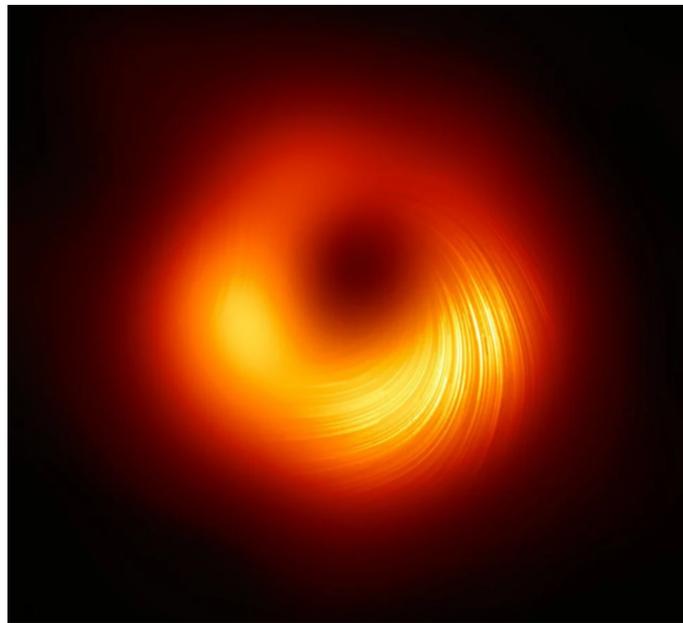


Figura 2.9: Sombra do BN M87\* em luz polarizada [58].

Cerca de 10% da matéria do disco de acreção de um BN acaba sendo ejetada, na forma de vento e em jatos, e o campo magnético tem um papel fundamental neste mecanismo. No M87\* a taxa de acreção foi estimada em  $(3 - 20) \times 10^{-4} M_{\odot}/\text{ano}$ , a intensidade do campo magnético em  $(1 - 30) \text{ G}$ , a temperatura eletrônica na ordem de  $(1 - 12) \times 10^{10} \text{ K}$  e a densidade média na ordem de  $10^{(4-7)}/\text{cm}^3$  [57, 58].

Os BNs supermassivos existem no centro da maioria das galáxias ou até mesmo em todas. Em algumas delas eles estão ativos, o que significa que estão emitindo radiação devido à acreção de matéria. Se não tem matéria envolta do BN para alimentá-lo, ele está silencioso. Sagittarius A\* tem uma taxa de acreção de matéria bem menor que M87\*.

## Capítulo 3

# Modelo de um Gás e Acreção Esférica

Neste capítulo calcularemos a energia que pode ser extraída através da acreção e citaremos as pesquisas pioneiras relacionadas a este fenômeno. A seguir abordaremos as principais grandezas envolvidas no modelo de um gás acretado, o qual será utilizado para estudar o processo de acreção esférica.

### 3.1 Acreção

A palavra “Acreção” ou “Acresção” vem do latim *Accrescentia*, e significa a aglomeração de elementos materiais. Na astrofísica este processo é responsável pela formação de grande parte da estrutura no universo e consiste na captura e acumulação de matéria que se incorpora ou aglutina ao redor de um corpo central já formado, como planetas, estrelas, buracos negros (BNs) e galáxias em formação [45, 59, 60].

Os primeiros estudos sobre este tema iniciaram no final da década de 1930 e se intensificaram após a década de 1960. O interesse ocorreu devido à tentativa de explicar fenômenos altamente energéticos, como os quasares, os surtos de raios gama e os jatos de partículas.

#### 3.1.1 Definição

A acreção pode ser considerado como o processo astrofísico mais eficiente na conversão de matéria em energia. Como exemplo de rendimentos máximos, podemos citar: Fissão nuclear do  $^{235}\text{U}$ : 0,1%; Fusão nuclear entre  $^2\text{H}$  e  $^3\text{H}$ : 0,37%; Conjunto de reações de fusão nuclear do Sol: 0,7%; Acreção num BN de Schwarzschild: 5,7%; Acreção num BN de Kerr: 42%; Aniquilamento matéria-antimatéria: 100%.

Ao comparar os rendimentos da acreção num BN de Kerr com o da fusão entre  $^2\text{H}$  e  $^3\text{H}$  constata-se que o primeiro pode ser superior a uma centena de vezes a fusão nuclear do hidrogênio [61, 62]. Além disso, em vários tipos de sistemas binários próximos

a extração da energia potencial gravitacional da matéria acretada é a principal fonte de energia [63, 64].

De uma maneira simples, será estimada a ordem de grandeza dessa energia. Para um corpo de massa  $M$  e raio  $R_*$  a energia potencial gravitacional liberada  $\Delta E_{\text{ac}}$  pelo acréscimo de uma massa  $M_{\text{ac}}$  em sua superfície, por unidade de massa acretada, é

$$\frac{\Delta E_{\text{ac}}}{M_{\text{ac}}} = \frac{GM}{R_*}, \quad (3.1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional. Percebe-se que a densidade de energia liberada depende da relação  $M/R_*$ , ou seja, quanto mais compacto o objeto, maior a eficiência na liberação de energia. Dessa maneira, a acreção de matéria é um mecanismo poderoso para produção de radiação de alta energia em objetos compactos, como estrelas de nêutrons e BNs [63, 64].

É importante salientar que a eq. (3.1) corresponde ao caso ideal onde toda a energia potencial gravitacional é convertida em radiação. Na realidade, a energia liberada é uma fração desse valor. Por isso introduz-se o rendimento  $\eta$ , de modo que

$$\frac{\Delta E_{\text{ac}}}{M_{\text{ac}}} = \frac{\eta GM}{R_*}. \quad (3.2)$$

O valor máximo de  $\eta$  é cerca de 0,42 para um BN de Kerr em rotação máxima (como foi demonstrado no capítulo 2), e pode ser inferior aos valores de fusão nuclear, dependendo das condições em que a acreção ocorre.

O problema da acreção é complexo, sendo bem descrito apenas em casos idealizados, como, por exemplo, um fluxo estacionário de material acretante, numa geometria esférica ou em formato de disco. Neste trabalho serão explorados alguns aspectos de acreção em BNs.

Para uma relação fixa  $M/R_*$ , a luminosidade de um sistema de acreção depende da taxa  $\dot{M}_{\text{ac}} = \dot{M} = dM/dt$  em que a matéria é acretada:

$$L_{\text{ac}} = \frac{\eta GM\dot{M}}{R_*}. \quad (3.3)$$

A máxima luminosidade emitida por uma estrela em equilíbrio hidrostático é conhecida como luminosidade de Eddington ou limite de Eddington e implica um limite de  $\dot{M}$ , quando toda a energia cinética é transformada em radiação [63, 65].

A partir da relação (1.21) estimaremos alguns valores para  $L_{\text{Edd}}$ . Um BN com  $M = 15 M_{\odot}$ , por exemplo, possui  $L_{\text{Edd}} = 2,0 \times 10^{39}$  erg/s, enquanto um BN supermassivo com  $M = 10^9 M_{\odot}$ , possui  $L_{\text{Edd}} = 1,3 \times 10^{47}$  erg/s. Por comparação, a luminosidade do Sol é  $L_{\odot} = 3,8 \times 10^{33}$  erg/s, e uma galáxia com  $10^{11}$  estrelas semelhantes ao Sol, possui  $L \sim 4 \times 10^{44}$  erg/s.

A taxa de acreção pode variar ao longo do tempo, dependendo principalmente da quantidade de matéria disponível. Quando esta é abundante, a acreção ocorre à taxa próxima ao  $L_{\text{Edd}}$ .

### 3.1.2 Pesquisas Pioneiras

O primeiro estudo sobre a acreção de matéria foi realizado em 1939 por Fred Hoyle e Raymond Lyttleton, através do artigo *The Effect of Interstellar Matter on Climatic Variation* (O Efeito da Matéria Interestelar na Variação Climática) [66]. A proposta do artigo foi descrever e analisar mudanças climáticas que tenham ocorrido no planeta Terra, sendo as causas terrestres ou astronômicas. A influência do Sol no clima terrestre é evidente e uma mudança na sua luminosidade certamente produziria efeitos no clima da Terra. Dessa forma, estudaram a alteração da luminosidade de uma estrela causada pela matéria que seria por ela acretada ao mover-se no meio interestelar. O mecanismo que levaria ao aumento da energia solar seria a captura de parte da nuvem, de modo que a energia gravitacional seria transformada em energia cinética e em energia radiante. Cálculos de acreção de matéria pelo Sol mostraram ser pequenos os efeitos na alteração de radiação para causar mudanças climáticas na Terra.

Em 1941 Hoyle e Lyttleton publicaram um segundo trabalho intitulado *On The Accretion Theory of Stellar Evolution* (Sobre a Teoria de Acreção de Evolução Estelar) [67]. Neste artigo deduziram a relação da taxa de adição de massa por uma estrela ( $\dot{M}$ ) num processo de acreção de gás hidrogênio (sem pressão), sendo esta dada por

$$\dot{M} = \frac{4\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{v^3}, \quad (3.4)$$

onde  $M$  a massa da estrela,  $\rho(\infty)$  a densidade do gás que cerca a estrela (densidade a uma grande distância) e  $v$  a velocidade relativa da estrela em relação à nuvem de gás.

No ano seguinte Hoyle e Lyttleton publicaram *On the Internal Constitution of the Stars* (Sobre a Constituição Interna de Estrelas) [68], no qual investigaram a estrutura estelar, relacionando a sua composição, o seu raio, a sua massa e sua luminosidade. Obtiveram importantes relações envolvendo as condições de equilíbrio de uma estrela, como a relação de luminosidade e raio, massa, pressão, temperatura, massa atômica dos elementos constituintes, entre outros. Apesar de não estudar a acreção neste artigo, ele foi muito importante para os trabalhos posteriores.

Em 1944 foi publicado o artigo *On the Mechanism of Accretion by Stars* (Sobre o Mecanismo de Acreção por Estrelas), por Hermann Bondi e Hoyle [69], no qual investigaram a acreção de matéria interestelar (hidrogênio) por uma estrela, baseados nos trabalhos anteriores de Hoyle e Lyttleton [66, 67, 68]. Inicialmente demonstraram que a taxa de acreção  $\dot{M}$  deve satisfazer a desigualdade [70]

$$\frac{2\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{v^3} < \dot{M} < \frac{4\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{v^3}. \quad (3.5)$$

O valor exato depende das condições prévias, mas mostraram que, para um estado estacionário a taxa de acreção tende para o valor

$$\dot{M} = \frac{2,5\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{v^3}. \quad (3.6)$$

Um dos mais importantes trabalhos sobre o fenômeno de acreção foi publicado por Bondi em 1952, intitulado *On spherically Symmetrical Accretion* (Sobre a Acreção com Simetria Esférica) [71], no qual estudou o processo de acreção esférica, calculando a taxa de acreção e obtendo as soluções analíticas para o escoamento do fluido. Neste caso o movimento do gás é esfericamente simétrico e constante, o aumento da massa da estrela é ignorado e o campo de força gravitacional permanece inalterado [72].

Nos trabalhos anteriores os efeitos da pressão da nuvem do gás foram desconsiderados, pois as dificuldades matemáticas são muito maiores quando se considera os efeitos dinâmicos e de pressão. Além disso, supôs-se também que todo o calor gerado seria irradiado rapidamente para longe, de modo que a temperatura do gás sempre seria baixa. Bondi calculou a taxa de acreção numa estrela em repouso em relação a uma nuvem infinita de gás, incluindo os efeitos de pressão [71, 59, 70, 65], obtendo

$$\dot{M} = \frac{2\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{c_s^3}, \quad (3.7)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som na nuvem de gás. Se existir uma velocidade relativa  $v$  entre a estrela e a nuvem de gás, a expressão (3.7) fica

$$\dot{M} = \frac{2\pi G^2 M^2 \rho(\infty)}{(v^2 + c_s^2)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

O termo  $(v^2 + c_s^2)^{1/2}$  é a raiz quadrada média da velocidade das partículas do gás em relação ao objeto central. Posteriormente outros cientistas corrigiram a relação (3.8), substituindo o fator numérico 2 por 4.

A partir da década de 1950 importantes trabalhos sobre a acreção foram construídos. De acordo com [59], de 1939 a 2002 foram publicados cerca de 260 importantes trabalhos sobre o tema acreção de matéria. Inicialmente estudou-se os processos de acreção em sistemas binários<sup>1</sup>, com estrelas comuns, e posteriormente os processos em objetos compactos. Os estudos se intensificaram com a descoberta dos quasares e a solução de Kerr no início da década de 1960. Os quasares (*quasi-stellar radio sources* ou fontes de rádio quase estelar) são objetos extremamente brilhantes<sup>2</sup> e foram descobertos em comprimentos de onda de rádio. Quando os astrônomos analisaram essas fontes em outros comprimentos de onda, observaram que tinham características estelares. O que intrigava os pesquisadores era a densidade energética dos quasares, sendo que um deles emitia mais radiação que uma galáxia inteira com  $10^{11}$  de estrelas. Sendo que a fusão nuclear era insuficiente para explicar o poder energético dos mesmos, as primeiras explicações sobre a fonte energética dos quasares convergiam como sendo de origem gravitacional [59].

Em 1964 E. Salpeter explicou a luminosidade dos quasares como oriunda da acreção de matéria em objetos massivos compactos, que posteriormente foram denominados

<sup>1</sup>Procura-se um sistema binário porque, para um objeto isolado, a taxa de acreção a partir do meio interestelar é muito baixa [59].

<sup>2</sup>Os quasares têm luminosidade da ordem de  $10^{44-47}$  ergs/s. [59]

BNs por J. Wheeler. A luminosidade calculada por ele foi da ordem de  $10^{47}$  ergs/s, estando de acordo com as observações [59]. Atualmente acredita-se que a energia dos quasares resulte da acreção de matéria em BNs supermassivos localizados no núcleo de galáxias ativas [73].

Nas décadas de 1960 e 1970 os físicos russos N. Shakura e R. Sunyaev estudaram os discos de acreção keplerianos e Y. Zeldovich e P. Guseynov supuseram que, em vários sistemas binários, um dos componentes era um BN [59, 74, 75]. Em 1972 J. Pringle e M. Rees analisaram pela primeira vez a natureza da radiação oriunda de um disco de acreção ao redor de um BN [59]. Nos anos seguintes, através de vários trabalhos publicados, S. Shapiro e colaboradores investigaram diversas propriedades do processo de acreção em BNs [76, 77, 78].

Na década de 1980 tentou-se explicar os fenômenos observados através de modelos teóricos e a partir da década de 1990 buscou-se unificar os diferentes modelos de discos de acreção, cada qual criado para explicar propriedades específicas. A partir de então, objetivava-se unificar os modelos, obtendo uma solução geral [59].

### 3.1.3 O Espectro

A seguir estimaremos a ordem de grandeza de propriedades dos fótons de radiação eletromagnética emitidos durante o processo de acreção [63].

Para uma luminosidade de acreção  $L_{ac}$  oriunda de uma fonte de raio  $R_*$ , define-se a temperatura da radiação do corpo negro  $T_b$  como a temperatura que a fonte teria para irradiar o espectro do corpo negro. Sendo  $L = E/(4\pi R_*^2)$  e  $H = \sigma T^4$ , tem-se

$$T_b = \left( \frac{L_{ac}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4}. \quad (3.9)$$

Seja o espectro contínuo da radiação emitida por uma temperatura  $T_{rad}$  associada a energia de um fóton, tem-se  $3kT_{rad}/2 = hf$ , ou

$$T_{rad} = \frac{2hf}{3k}. \quad (3.10)$$

Seja  $T_t$  a temperatura que o material acretado alcançaria se sua energia potencial fosse transformada totalmente em energia térmica. Para cada par próton-elétron acretado a energia potencial liberada é  $\simeq GMm_p/R_*$  e a energia térmica associada é igual a  $3kT$ . Vem, então que

$$T_t = \frac{GMm_p}{3kR_*}. \quad (3.11)$$

Se o fluxo de acreção for opticamente grosso, a radiação atinge o equilíbrio térmico com o material acretado e  $T_{rad} \sim T_b$ . Se a energia de acreção é convertida diretamente em radiação (material fino),  $T_{rad} \sim T_t$ . Com isso pode-se supor que

$$T_b \lesssim T_{rad} \lesssim T_t. \quad (3.12)$$

A partir das eqs. (3.9) a (3.11) estima-se que, para um BN estelar leve com  $M = 3 M_{\odot}$ ,  $L_{ac} \sim L_{Edd} \sim 10^{38}$  erg/s, por exemplo, a temperatura da radiação (em Kelvin) fica compreendida  $T_{rad} \sim 10^{7-12}$  K, de modo que as energias dos fótons da radiação emitida ficam no intervalo

$$1 \text{ keV} \lesssim E \lesssim 50 \text{ MeV}, \quad (3.13)$$

que corresponde à faixa de raios X. Se for um BN supermassivo com  $M = 10^9 M_{\odot}$ ,  $L_{ac} \sim L_{Edd} \sim 10^{47}$  erg/s, a temperatura da radiação (em Kelvin) fica compreendida  $T_{rad} \sim 10^{5-13}$  K, de modo que as energias dos fótons estão no intervalo

$$1 \text{ eV} \lesssim E \lesssim 1 \text{ GeV}, \quad (3.14)$$

que corresponde a faixa do espectro que inicia na luz visível e vai até os raios X de altíssima energia.

## 3.2 Dinâmica dos Gases

Toda matéria é acreta na forma gasosa, de modo que as partículas constituintes interagem diretamente por colisões. Por isso, elaboraremos um modelo simples de um gás, baseado em [63, 71, 62].

### 3.2.1 Introdução

Uma partícula de um gás percorre, em média, uma certa distância, o livre caminho médio  $\lambda$ , antes de colidir e alterar o seu estado de movimento. Se o gás for aproximadamente uniforme nessa escala de comprimento, o efeito das colisões é aleatório e as velocidades das partículas distribuem-se ao redor de uma velocidade média, que é a velocidade  $v$  do gás. As partículas seguem a distribuição de Maxwell-Boltzmann e podem ser descritas pela temperatura  $T$ . Sendo que estamos interessados em escalas de comprimento  $L \gg \lambda$ , podemos considerar o gás como um fluido, tendo velocidade  $\mathbf{v}$ , temperatura  $T$  e densidade  $\rho$  em cada ponto.

### 3.2.2 Leis de Conservação

Na sequência serão descritas as leis de conservação dos gases, as quais, juntamente com a equação de estado e com as condições de contorno, descrevem a dinâmica do gás.

Sendo um gás com velocidade  $\mathbf{v}$ , temperatura  $T$  e densidade  $\rho$ , definidos em função da posição  $\mathbf{r}$  e do tempo  $t$ , a conservação da massa é dada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.15)$$

As diferenças de pressão no gases produzem forças que alteram o momento. A conservação do momento para cada elemento do gás é dada pela equação de Euler

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f}, \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{f}$  é a força externa por unidade de volume. Um exemplo de força externa seria a exercida pela gravidade, de modo que  $\mathbf{f} = -\rho\mathbf{g}$ , sendo  $\mathbf{g}$  a aceleração da gravidade local. O termo  $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  representa a convecção do momento através do fluido por gradientes de velocidade.

A Lei dos Gases Perfeitos fornece a pressão em cada ponto do gás e pode ser escrita como

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H}, \quad (3.17)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $m_H \sim m_p$  (massa do hidrogênio é da mesma ordem da massa do próton) e  $\mu$  é o peso molecular médio, que é a massa média por partícula de gás medida em unidades de  $m_H$ .

O peso molecular médio  $\mu$  de um gás é dada por

$$\mu = \frac{\sum_i n_i A_i}{\sum n_i + n_e}, \quad (3.18)$$

onde  $n_i$  é a densidade de átomos do tipo  $i$ , cuja massa molecular é  $A_i$ , e  $n_e$  é a densidade numérica de elétrons. Para um gás neutro,  $n_e \rightarrow 0$ , e

$$\mu = \frac{\sum_i n_i A_i}{\sum n_i}. \quad (3.19)$$

Para um gás completamente ionizado,  $n_e \rightarrow \sum_i n_i Z_i$ , onde  $Z_i$  é o número atômico, de modo que o peso molecular é dado por [79]

$$\mu = \frac{\sum_i n_i A_i}{\sum n_i (1 + Z_i)}. \quad (3.20)$$

Para o hidrogênio neutro tem-se que  $\mu = 1$ , e para o hidrogênio totalmente ionizado,  $\mu = 1/2$ . Para uma mistura de gases,  $1/2 < \mu < 1$ , dependendo do grau de ionização.

Um elemento de gás possui uma energia cinética por unidade de volume  $\rho v^2/2$  e uma energia térmica por unidade de volume de  $\rho\varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é a energia interna por unidade de massa, a qual depende apenas da temperatura  $T$  do gás. Portanto, uma partícula monoatômica movendo-se livremente possui energia  $3kT/2$ , de modo que

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H}. \quad (3.21)$$

Os gases cósmicos não são totalmente monoatômicos e o grau de liberdade não é exatamente 3, mas a expressão (3.21) é uma boa aproximação. A equação da energia para o gás é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.22)$$

O fluxo radiativo é calculado por  $\mathbf{F}_{\text{rad}} = \iint \mathbf{n} I_\nu(\mathbf{n}, \mathbf{r}) d\nu d\Omega$ , onde  $I_\nu$  é a intensidade da radiação no ponto  $\mathbf{r}$  e na direção  $\mathbf{n}$ , integrada na frequência  $\nu$  e no ângulo sólido  $\Omega$ . O termo  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$  é a taxa com a qual a energia radiante está sendo perdida ou recebida, por unidade de volume. Se o gás é opticamente fino, de modo que, após ser produzida, a radiação escapa livremente, a perda de energia por volume é  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} = -4\pi \int j_\nu d\nu$ , onde  $j_\nu$  é a emissividade do gás. Para um gás quente irradiando livremente, o valor é aproximadamente constante  $\mathbf{F}_{\text{rad}} = \rho^2 T^{1/2}$ .

O último termo da eq. (3.22) é o divergente do fluxo de condutividade do calor  $\mathbf{q}$ , o qual mede a taxa na qual os movimentos aleatórios, em especial dos elétrons, transportam a energia térmica no gás e atenuam as diferenças de temperatura. Quando as diferenças de temperatura são pequenas esse termo pode ser omitido da equação da energia.

As eqs. (3.15) a (3.22) fornecem uma descrição geral de um gás em condições apropriadas. A seguir serão discutidas algumas situações específicas e extraídas algumas informações úteis.

### 3.2.3 Processos Adiabáticos e Isotérmicos

Consideramos inicialmente que o fluxo de gás é regular (constante), de modo que as derivadas temporais são nulas e que não há perdas de calor e nem condução térmica. Dessa forma, as eqs. (3.15), (3.16) e (3.22) podem ser escritas como:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.23)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f}, \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.25)$$

Substituindo a eq. (3.23) em (3.24) obtém-se

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.26)$$

Multiplicando a eq. (3.24) por  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P. \quad (3.27)$$

Igualando as eqs. (3.24) e (3.27), e simplificando, vem que

$$\mathbf{v} \cdot \left[ \nabla \varepsilon + P \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] = 0. \quad (3.28)$$

A eq. (3.28) significa que, se seguirmos uma pequena distância ao longo de  $\mathbf{v}$  em uma linha de fluxo do gás, os incrementos  $d\varepsilon$  e  $d(1/\rho)$  em  $\varepsilon$  e  $1/\rho$ , respectivamente, devem

estar relacionados como

$$d\varepsilon + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \quad (3.29)$$

A partir da relação (3.21):

$$d\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} dT. \quad (3.30)$$

Relacionando (3.30) com (3.29) e sendo  $P$  dado pela eq.(3.17):

$$\frac{3}{2}dT + \rho T d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \quad (3.31)$$

Integrando (3.31) vem que  $\rho^{-1}T^{3/2} = K$ , onde  $K$  é uma constante, ou

$$P\rho^{-5/3} = K. \quad (3.32)$$

A relação (3.32) descreve um fluxo adiabático ao longo de uma linha de transformação e, em muitos casos pode ser generalizado para todo o gás. Se o gás não fosse monoatômico o coeficiente em (3.21) seria diferente de  $3/2$  e em (3.32) seria obtido um expoente diferente para  $\rho$ , de modo que

$$P\rho^{-\gamma} = K, \quad (3.33)$$

onde  $\gamma$  é o chamado índice adiabático, que relaciona os calores específicos a pressão constante e a volume constante:  $\gamma = C_P/C_V$ .

Consideramos agora soluções para um gás em situação de equilíbrio. Se  $\mathbf{v} = 0$ , das eqs. (3.23), (3.24) e (3.25) apenas a relação  $\nabla P = \mathbf{f}$  precisa ser satisfeita, juntamente com a eq. (3.17).

Suponha que a solução possui funções  $P$  e  $\rho$ , bem como  $P_0$  e  $\rho_0$  definidos num ponto. Suponha que pequenas perturbações atuam sobre o gás, de modo que  $P = P_0 + P'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ , de modo que pode-se omitir termos de ordem mais elevada. No lugar da eq. (3.22) assume-se que as perturbações são adiabáticas e/ou isotérmicas. A partir da relação (3.33) e sendo  $K = \text{constante}$ , tem-se

$$P + P' = K(\rho + \rho')^\gamma, \quad (3.34)$$

onde  $\gamma = 5/3$  para uma transformação adiabática e  $\gamma = 1$  para uma transformação isotérmica.

Linearizando as eqs. da continuidade (3.15) e de Euler (3.16) e usando  $\nabla P_0 = \mathbf{f}$ ,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0. \quad (3.36)$$

Da eq. (3.34) percebe-se que, para uma aproximação em primeira ordem,  $P$  é função apenas de  $\rho$ ,  $\nabla P' = (dP/d\rho)_0 \nabla \rho'$  ou  $(dP/d\rho)_0 = dP_0/d\rho_0$ , de modo que pode-se escrever (3.36) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho' = 0. \quad (3.37)$$

Sendo a velocidade do som  $c_s$  definida por

$$c_s = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2}, \quad (3.38)$$

relacionando as eqs. (3.35) e (3.37) obtêm-se

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho', \quad (3.39)$$

que é a equação de uma onda propagando-se com velocidade  $c_s$ . Isso mostra que pequenas perturbações sobre o gás em equilíbrio hidrostático se propagam com velocidade  $c_s$ . Além disso, o valor de  $c_s$  limita a rapidez com a qual o gás responde às mudanças de pressão.

Utilizando as eqs. (3.34) e (3.38) em (3.17) obtêm-se as velocidades do som para processos adiabático ( $c_s^{\text{ad}}$ ) e isotérmico ( $c_s^{\text{is}}$ ):

$$c_s^{\text{ad}} = \left( \frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{5kT}{3\mu m_H} \right)^{1/2}, \quad (3.40)$$

$$c_s^{\text{is}} = \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

### 3.3 Acreção Esférica

A acreção com simetria esférica é de grande importância teórica, pois apresenta alguns conceitos de aplicação ampla, possibilitando entender sistemas mais complexos de acreção. Esta seção será desenvolvida baseando-se nas referências [63, 65, 62, 59, 74, 72].

#### 3.3.1 Introdução

Neste modelo de acreção considera-se um gás composto de hidrogênio movendo-se em direção ao objeto central, neste caso, um BN newtoniano de massa  $M$ . O BN não possui rotação, a nuvem de gás é isenta de momento angular e de campos magnéticos (ou são desprezíveis), fazendo com que o fluxo de acreção seja esféricamente simétrico. Assume-se também que o gás está em repouso no infinito, onde sua densidade é  $\rho(\infty)$ , sua pressão é  $P(\infty)$  e a velocidade do som é  $c_s(\infty)$ .

Uma característica da acreção em BN, que difere da acreção numa estrela, é que o primeiro impõe uma regularidade próximo ao raio de Schwarzschild ( $r_S$ ). Numa estrela, com superfície dura, a taxa de acreção depende fortemente das condições próximas a ela.

#### 3.3.2 Fluxo de Gás

Na descrição do fluxo de gás serão utilizadas coordenadas polares esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , com origem no centro do BN. Na simetria esférica as variáveis do fluido são independentes de  $\theta$  e  $\phi$  e a velocidade possui apenas a componente radial:  $\mathbf{v} = v\hat{r}$ . Considerando

um fluxo constante, a partir da equação da continuidade (3.15) obtém-se a eq.(3.23). Utilizando o divergente em coordenadas polares esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (3.42)$$

vem que

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0. \quad (3.43)$$

Integrando (3.43), obtém-se

$$r^2 \rho v = C, \quad (3.44)$$

onde  $C$  é uma constante.

O termo  $\rho(-v)$  é o fluxo de material para a estrela. Coloca-se o sinal negativo pois ele está direcionado para o interior. Multiplicando a eq. (3.44) por  $4\pi$ , de modo a ter a área da esfera, e sendo  $\dot{M}$  a taxa de acreção constante, tem-se

$$4\pi r^2 \rho v = -\dot{M}. \quad (3.45)$$

O termo  $\mathbf{f}$  na equação de Euler (3.16) é a força externa, que neste caso é a força gravitacional por unidade de volume. No modelo com simetria esférica ele tem apenas a componente radial:  $f_r = -GM\rho/r^2$ . Sendo o gradiente de uma função  $F$  em coordenadas esféricas

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (3.46)$$

e o divergente dado pela eq. (3.42), obtém-se

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.47)$$

Escrevendo a eq. (3.33) da forma

$$P = K\rho^\gamma, \quad (3.48)$$

é possível tratar de forma simultânea um processo de acreção adiabático ( $\gamma \simeq 5/3$ ) e isotérmico ( $\gamma \simeq 1$ ). Será considerado o caso em que  $1 < \gamma < 5/3$ , pois os extremos não são totalmente satisfeitos.

A temperatura do gás é dada pela Lei Geral dos Gases (eq. 3.17)

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k}, \quad (3.49)$$

com  $P$  e  $\rho$  medidas em determinado ponto.

A partir da variação da pressão, presente na eq. (3.47) tem-se

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr}. \quad (3.50)$$

A partir da relação (3.38) vem que

$$\frac{dP}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}, \quad (3.51)$$

e a eq. (3.52) fica

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.52)$$

Manipulando algebricamente a eq. (3.43), pode-se escrevê-la como

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2). \quad (3.53)$$

Relacionando (3.53) em (3.52) obtém-se

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) \frac{d}{dr}v^2 = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right). \quad (3.54)$$

Escrevendo a expressão desta forma, é possível encontrar as suas soluções, classificá-las e escolher as que são de interesse.

### 3.3.3 Possíveis Soluções

A seguir será analisada, em detalhes, a eq. (3.54). Para grandes distâncias, o termo entre parêntesis no segundo membro é negativo, pois  $c_s^2$  se aproxima de um valor finito  $c_s^2(\infty)$  e  $r$  aumenta consideravelmente. Consequentemente, o segundo membro ficaria positivo. No primeiro membro a derivada deve ser negativa, pois o gás acelera à medida que se aproxima do BN ( $r$  diminui). Portanto, para  $r$  grande, a solução é verdadeira somente se o escoamento do gás for subsônico:

$$v^2 < c_s^2, \quad \text{para } r \text{ grande.} \quad (3.55)$$

Ao se aproximar do BN,  $r$  diminui e o termo entre parêntesis no segundo membro da eq. (3.54) aumenta. Este torna-se nulo num raio  $r_0$  dado por

$$r_0 = \frac{GM}{2c_s^2(r_0)}, \quad (3.56)$$

onde  $c_s(r_0)$  é o valor de  $c_s$  na distância  $r_0$  do centro do BN. O valor de  $r_0$  é algumas ordens de grandeza maior que o raio do BN.

Analisando novamente os sinais dos termos da eq. (3.54) pode-se constatar que, para  $r$  pequeno, próximo ao BN, o fluxo de gás deve ser supersônico:

$$v^2 > c_s^2, \quad \text{para } r \text{ pequeno.} \quad (3.57)$$

A existência do ponto  $r_0$  é muito importante para analisar o processo de acreção. Fazendo  $r = r_0$ , a eq. (3.54) fica

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) \frac{d}{dr}v^2 = 0. \quad (3.58)$$

A igualdade é verdadeira somente se

$$v^2 = c_s^2 \quad (3.59)$$

ou

$$\frac{d}{dr}v^2 = 0. \quad (3.60)$$

A condição  $v^2 = c_s^2$  em  $r = r_0$  é chamada condição de ponto sônico.

Na fig. (3.1) tem-se o gráfico de  $v^2(r)/c_s^2(r)$  em função de  $r/r_0$  para um fluxo de gás adiabático num campo gravitacional com simetria esférica, considerando  $\gamma = 4/3$ . A partir dele constata-se que as soluções da eq. (3.54) são divididas em 6 famílias, obtidas analisando o comportamento a partir de  $r_0$ .

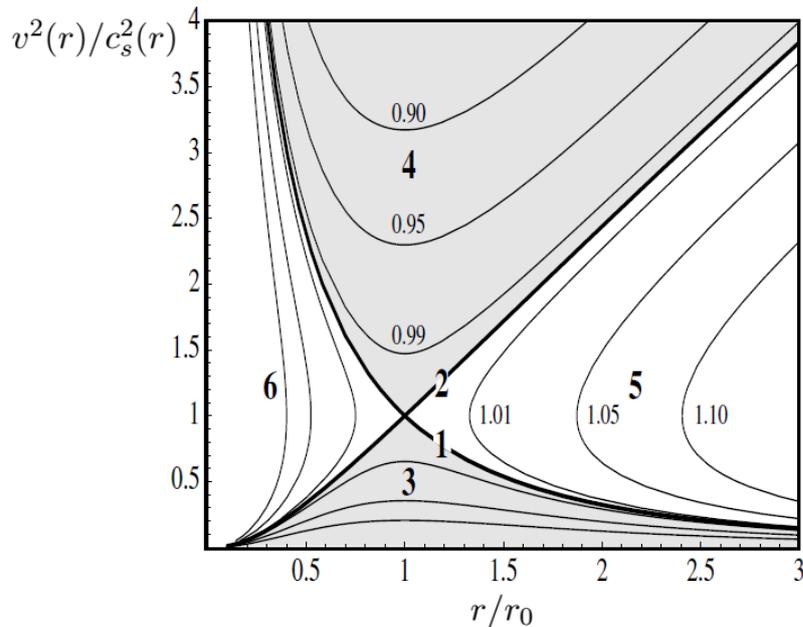


Figura 3.1:  $v^2(r)/c_s^2(r)$  em função de  $r/r_0$  para um fluxo de gás adiabático [63].

Tipo 1:  $v^2(r_0) = c_s^2(r_0)$ ,  $v^2 \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Se  $v^2 < c_s^2$ ,  $r > r_0$ ; se  $v^2 > c_s^2$ ,  $r < r_0$ .

Tipo 2:  $v^2(r_0) = c_s^2(r_0)$ ,  $v^2 \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ . Se  $v^2 > c_s^2$ ,  $r > r_0$ ; se  $v^2 < c_s^2$ ,  $r < r_0$ .

Tipo 3:  $v^2(r_0) < c_s^2(r_0)$  em todos os lugares, então  $dv^2/dr = 0$  em  $r_0$ .

Tipo 4:  $v^2(r_0) > c_s^2(r_0)$  em todos os lugares, então  $dv^2/dr = 0$  em  $r_0$ .

Tipo 5:  $d(v^2)/dr = \infty$  em  $v^2 = c_s^2(r_0)$ , então  $r > r_0$  sempre.

Tipo 6:  $d(v^2)/dr = \infty$  em  $v^2 = c_s^2(r_0)$ , então  $r < r_0$  sempre.

As soluções 1 e 2 são chamadas transônicas e fazem uma divisão entre o fluxo subsônico e o supersônico. Entre as soluções a única de interesse é a Tipo 1, pois possui características condizentes com a realidade. As soluções 2 e 4 devem ser excluídas pois os valores de  $v$  são supersônicos para  $r$  grande, e a solução 3 não deve ser considerada por  $v$  ser subsônico para  $r$  pequeno; isso contraria as relações (3.55) e (3.57). As soluções tipo 5 e 6 possuem valores duplos.

Integrando a eq. (3.47), tem-se

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dP - \frac{GM}{r} = K_2, \quad (3.61)$$

em que  $K_2$  é constante.

Derivando a relação (3.48),

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1}, \quad (3.62)$$

substituindo na eq. (3.61) e integrando, vem que

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = K_2. \quad (3.63)$$

Utilizando as relações (3.33) e (3.41), tem-se

$$\gamma K \rho^{\gamma-1} = c_s^2, \quad (3.64)$$

e a eq. (3.63) fica

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = K_2, \quad (3.65)$$

sendo esta conhecida como equação de Bernoulli.

### 3.3.4 Taxa de Acreção

Na solução Tipo 1 tem-se que  $v^2 \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , então a constante em (3.65) deve ser

$$K_2 = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1}, \quad (3.66)$$

onde  $c_s(\infty)$  é a velocidade do som no gás num ponto distante do BN.

No ponto sônico,  $v^2(r_0) = c_s^2(r_0)$  quando  $r = r_0$ . Utilizando as eqs. (3.56) e (3.60), obtém-se da equação de Bernoulli:

$$c_s(r_0) = c_s(\infty) \left( \frac{5-3\gamma}{2} \right)^{-1/2} \quad (3.67)$$

Sendo  $r = r_0$ ,  $\rho = \rho(r_0)$  e  $v = -c_s(r_0)$ , pode-se escrever o fluxo de gás para o BN (eq. 3.45) como

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho(r_0) c_s(r_0). \quad (3.68)$$

A partir de (3.64),  $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$ . Relacionando (3.67) e (3.68), obtém-se o fluxo de gás para o BN:

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left( \frac{5-3\gamma}{2} \right)^{\frac{3\gamma-5}{2(\gamma-1)}}. \quad (3.69)$$

Perceba que a taxa de acreção  $\dot{M}$  não depende de  $r$ . Seja  $\chi$  o termo numérico na eq. (3.69):

$$\chi(\gamma) = \left( \frac{5-3\gamma}{2} \right)^{\frac{3\gamma-5}{2(\gamma-1)}}. \quad (3.70)$$

O mesmo é igual a 1 quando  $\gamma = 5/3$  e aproximadamente igual a 4,5 quando  $\gamma = 1$ :

$$1 \leq \gamma \leq 5/3 \longrightarrow 4,5 \gtrsim \chi \geq 1. \quad (3.71)$$

Dessa forma pode-se escrever (3.69) como

$$\dot{M} = \pi\chi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)}. \quad (3.72)$$

Considerando  $\gamma = 1,4$  como um valor típico no meio interestelar, tem-se que  $\chi = 2,5$ ; considerando também  $\rho(\infty) = 10^{-21} \text{ kg/m}^3$  e  $c_s(\infty) = 10^4 \text{ m/s}$ , pode-se escrever  $\dot{M}$  (eq. 3.72), com  $M$  em função de  $M_\odot$ , como

$$\dot{M} = 1,38 \times 10^6 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{ kg/s}. \quad (3.73)$$

Ao se mover para  $r$  menores, mais próximo ao BN, a velocidade  $-v$  do fluxo de gás aumenta, até atingir  $c_s(\infty)$ . Sendo que  $c_s(r)$  não excede  $c_s(\infty)$ , o único termo na eq. (3.65) capaz de equilibrar esse aumento é a energia potencial gravitacional. Isso passa a ocorrer aproximadamente a partir do raio de acreção ou raio de Bondi

$$r_{\text{ac}} = \frac{2GM}{c_s^2(\infty)}. \quad (3.74)$$

Para valores de  $r < r_{\text{ac}}$ ,  $\rho(r)$  e  $c_s(r)$  aumentam. Com isso, a temperatura e a emissão de radiação também aumentam, e o gás esfria. Em  $r = r_{\text{ac}}$  o gás entra em queda livre. Sendo  $v \gg c_s$  (velocidade supersônica), da eq. (3.65) vem que a velocidade de queda livre é

$$v_{\text{queda}}^2 \simeq \frac{2GM}{r}. \quad (3.75)$$

O raio de acreção estima a influência do BN sobre a matéria ao seu redor, de modo que este exerce influência significativa somente na região de raio  $r_{\text{ac}}$ . Em termos de  $r_{\text{ac}}$  pode-se escrever a eq. (3.72) como

$$\dot{M} = \frac{1}{4} \pi \chi r_{\text{ac}}^2 c_s(\infty) \rho(\infty). \quad (3.76)$$

A taxa de acreção no sistema esférico geralmente tem um rendimento pequeno. Isso ocorre porque o tempo de difusão da radiação para o exterior é muito maior do que o tempo de queda livre e ela fica aprisionada no fluxo. Em 1973 Shapiro verificou que a eficiência de um BN de massa solar acretando no meio interestelar é de  $\eta \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ . Para altas taxas de fluxo de matéria acretada o valor aumenta até  $10^{-4}$  [76].

Seja  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  a taxa de acreção de Eddington, de forma que  $\dot{M}_{\text{Edd}} = L_{\text{Edd}}/c^2$ . Simulações para  $1 \ll (\dot{M}/\dot{M}_{\text{Edd}}) \leq 300$  mostram que a eficiência da acreção  $\eta$  situa-se no intervalo  $10^{-6} \leq \eta \leq 10^{-2}$  [65].

### 3.3.5 Estimativas para Taxas e Luminosidades de Acreção

Suponhamos um BN estelar de pequena massa, com  $M = 5 M_{\odot}$ , por exemplo. Tendo gás disponível nas suas redondezas, a partir da eq.(3.73) obtém-se uma taxa de acreção de<sup>3</sup>

$$\dot{M} \sim 10^8 \text{ kg/s} \sim 10^{-15} M_{\odot}/\text{ano}. \quad (3.77)$$

Seja  $L_{ac} = \eta \dot{M} c^2$  a luminosidade emitida num processo de acreção, no qual o gás é acretado numa taxa  $\dot{M}$ . Considerando  $\eta = 0,057$  como o valor máximo do rendimento para o BN de Schwarzschild, a partir de (3.77) tem-se que a luminosidade máxima é

$$L_{ac(\max)} \sim 10^{30} \text{ erg/s}. \quad (3.78)$$

Essa luminosidade corresponde a uma fração de luminosidade solar,  $L \simeq 4,7 \times 10^{-4} L_{\odot}$ , e é bem inferior a luminosidade de Eddington,  $L_{\text{Edd}} \sim 10^{39} \text{ erg/s}$ .

Considerando, agora, um BN supermassivo com  $M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$ , semelhante ao Sagitário A\*. Os valores de  $\dot{M}$  e  $L_{ac(\max)}$  correspondentes seriam:

$$\dot{M} \sim 10^{19} \text{ kg/s} \sim 10^{-5} M_{\odot}/\text{ano}, \quad (3.79)$$

$$L_{ac(\max)} \sim 10^{42} \text{ erg/s}, \quad (3.80)$$

os quais são valores mais interessantes, sendo poucas ordens de grandeza mais baixos que sua luminosidade de Eddington,  $L_{\text{Edd}} \sim 10^{45} \text{ erg/s}$ . O valor de  $L_{ac(\max)}$  é maior que a luminosidade máxima de Sagitário A\* ( $L \sim 10^{36} \text{ erg/s}$ ) [55], mas fica bem abaixo da luminosidade de BN supermassivos com grande atividade.

---

<sup>3</sup>1 kg/s  $\simeq 1,59 \times 10^{-23} M_{\odot}/\text{ano}$ .

# Capítulo 4

## Discos de Acreção

Os discos de acreção são estruturas gasosas em rotação em torno de um corpo central, que pode ser uma estrela ou um buraco negro (BN). Ao fluir para este corpo o gás tem um momento angular que impede que ele atinja diretamente o objeto e acaba formando um disco. Neste capítulo descreveremos a formação e a estrutura dos discos de acreção, especialmente em torno de BNs.

### 4.1 Pesquisas Pioneiras

Os discos de acreção são poderosas fábricas de energia no universo [80]. A teoria de acreção em discos foi formulada primeiramente pelos físicos V. Shvartsman, J. Pringle, M. Rees, N. Shakura e R. Sunyaev no início da década de 1970, através dos trabalhos [81, 82, 83, 74, 84, 85], e foi aprimorada por outros nos anos seguintes. Um entendimento mais profundo dos mecanismos físicos que governam os discos de acreção foi adquirido somente nas últimas décadas.

A descrição mais ampla das propriedades nas proximidades de um BN envolve o uso da teoria da relatividade geral, o que é algo bastante complexo. Porém, a física do disco de acreção é governada por processos hidrodinâmicos e eletromagnéticos, e pode ser descrita de maneira aproximada usando a física newtoniana, mesmo que os fluxos de matéria na parte interna do disco apresentem efeitos relativísticos [7].

### 4.2 Sistemas Binários e Formação do Disco

A maioria das estrelas no universo encontra-se em sistemas duplos ou múltiplos, estando associadas entre si pela atração gravitacional. Em algum momento durante sua evolução, ocorre a transferência de massa entre seus componentes. O estudo desses sistemas, em especial o sistema binário, permite determinar uma série de informações sobre os componentes, como a massa, o raio e a temperatura. Nesta seção descreveremos como ocorre a formação do disco de acreção num sistema binário, baseado nas referências

[86, 63, 64, 87, 3].

Num sistema binário os dois corpos giram ao redor de um centro de massa descrevendo órbitas elípticas, de acordo com as leis de Kepler. A velocidade angular do sistema é  $\Omega = (GM_b/a^3)^{1/2}$ , onde  $M_b = M_1 + M_2$  é a soma da massa dos corpos e  $a$  a distância entre eles.

O momento angular total  $J_b$  do binário é

$$J_b = (M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) \Omega, \quad (4.1)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são as distâncias das respectivas massas  $M_1$  e  $M_2$  ao centro de massa, onde  $a_1 = (M_2/M_b)a$  e  $a_2 = (M_1/M_b)a$ .

A eq. (4.1) pode ser escrita como

$$J_b = M_1 M_2 \left( \frac{Ga}{M_b} \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Assumindo que a massa perdida por uma estrela é acretaada por outra, tem-se que  $\dot{M}_1 + \dot{M}_2 = 0$ . Aplicando ln em (4.2) e derivando em relação ao tempo, vem que

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2\dot{J}}{J} - \frac{2\dot{M}_2}{M_2} \left( 1 - \frac{M_2}{M_1} \right). \quad (4.3)$$

A transferência de massa conservativa é caracterizada pela massa e o momento angular total constante. Perceba em (4.3) que, se  $\dot{M}_2 < 0$ ,  $\dot{a} > 0$ , o binário expande-se e a transferência de massa ocorre do menos massivo para o mais massivo. Consequentemente, a massa remanescente em  $M_2$  move-se para uma órbita mais externa para conservar  $J$ . A transferência de massa continuará se a estrela se expandir ou se o binário perder momento angular.

Existe um ponto sobre a linha reta que une os centros dos dois corpos no qual o potencial gravitacional é mínimo. Nesse ponto, denominado ponto de Lagrange, a força resultante dos efeitos de rotação e atração das massas  $M_1$  e  $M_2$  é nula. Denomina-se lóbulo de Roche a superfície equipotencial tridimensional envoltória em torno de cada corpo, que inclui o ponto de Lagrange, onde a matéria está gravitacionalmente ligado a ele. Quando os gases da estrela  $M_1$ , por exemplo, atravessam o ponto de Lagrange e penetram no lobo de Roche da outra estrela ( $M_2$ ), eles são atraídos por esta, formando um disco de acreção [65].

Sistemas binários nos quais uma anã branca aceta massa de uma estrela companheira do sistema binário são conhecidos como variáveis cataclísmicas e são bastante comuns nas galáxias. É importante estudar o fenômeno de acreção em sistemas binários porque o processo ocorre de maneira isolada. Nas variáveis cataclísmicas podem ocorrer erupções causadas pela fusão do hidrogênio quando ele incide na superfície da anã branca, o campo magnético forma colunas de acreção do gás e há também surtos de raios X, podendo a radiação ser emitida no limite de Eddington ou acima dele [61, 4].

Considere um sistema binário formado por um BN e por uma estrela. Ao passar pelo lóbulo de Roche, o gás da estrela segue em direção ao BN. Mas, como possui momento angular, ele não cai diretamente no BN, passando a mover-se em órbitas quase circulares ao seu redor. Estando numa circunferência de raio  $R$ , uma partícula possui uma velocidade angular Kepleriana dada por [62]

$$\Omega_k(R) = \left( \frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  a massa do BN. Discos que seguem essa velocidade são chamados Keplerianos. Inicialmente as trajetórias das partículas podem estar em planos diferentes, mas as colisões entre elas as forçam a descreverem um mesmo plano. As órbitas circulares são as órbitas de menor energia para um dado valor de momento angular.

Devido às colisões e atritos entre as partículas, a maior parte do gás perde momento angular e espirala em direção ao BN, movendo-se em órbitas com  $R$  cada vez menor. Para perder momento angular, existem processos no disco que convertem a energia cinética em calor e exercem torques sobre o gás acretado, fazendo com que uma parte deste mova-se para a parte externa e transporte o momento angular. Isso forma um disco de acreção ao redor do BN, cuja estrutura e espectro de radiação emitido depende, além da taxa de acreção, das condições externas ao disco. Ao passar pelo raio interno do disco o gás mergulha no BN, conservando a energia e o momento angular [74, 44].

Os discos de acreção têm dimensões de alguns milissegundos-luz para os BNs estelares e alguns dias-luz para os BNs supermassivos, variando de  $10^5$  a  $10^6$  vezes o tamanho do BN. De maneira geral, a massa de gás no disco é pequena quando comparada com o BN, de modo que podemos desprezar a sua autogravidade. A temperatura do disco varia de  $10^7$  K próximo ao BN até  $10^3$  K na parte externa do disco.

Na fig. (4.1) há uma representação artística do sistema binário Cygnus X-1, formado por um BN com  $M = 21,2 M_\odot$  e uma estrela supergigante azul com  $M \simeq 40 M_\odot$ . Nele o BN acreta matéria da estrela, formando o disco de acreção e um par de jatos [88].

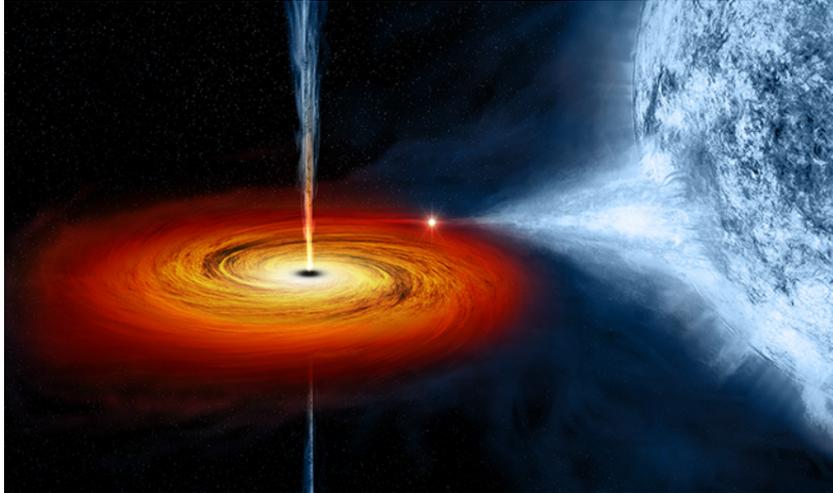


Figura 4.1: Concepção artística do sistema binário Cygnus X-1 [89].

### 4.3 Torques Viscosos

Os efeitos das tensões viscosas levam ao aquecimento da matéria no disco de acreção, com a posterior emissão de energia térmica [80]. Nesta seção será descrito como o torque, oriundo dessas tensões, age no disco de acreção (baseado em [63]).

A matéria presente no disco consiste de gás ou plasma, formado principalmente por prótons e elétrons. A viscosidade deste gás permite que o momento angular seja transferido para o exterior e que a matéria, aos poucos, mova-se em direção ao centro. O disco de acreção é um eficiente mecanismo para extrair energia da matéria e convertê-la em radiação. A velocidade angular Kepleriana  $\Omega_k$  implica a existência de uma rotação diferencial, isto é, o material num raio vizinho move-se com diferente velocidade angular. Os elementos do fluido nas linhas de corrente vizinha passarão um pelo outro, gerando as tensões de viscosidade chamadas viscosidade de cisalhamento.

Num modelo simples, planos de fluidos deslizam paralelos um ao outro e as colisões entre as partículas são relativamente pouco frequentes. Durante o movimento livre entre as colisões, as partículas se movem sob os efeitos da força de maré e da pseudo-força de Coriolis, descrevendo uma elipse na direção radial. As colisões entre as partículas tendem a circularizar a distribuição de velocidade, criando partículas com desvios maiores que a média, as quais tendem a se mover para fora, transportando o momento angular. As partículas com menores velocidades se moverão para dentro.

Num sistema de coordenadas polares cilíndricas  $(R, \phi, z)$ , considere o plano do disco situado em  $z = 0$  (fig. 4.2). Supondo um disco fino, onde a sua espessura  $H$  é muito menor que o seu raio  $R$ , o escoamento do gás ocorre próximo ao plano orbital do disco, de modo que pode-se considerá-lo como um sistema bidimensional. O gás acretado se move em órbitas quase-circulares com velocidade angular kepleriana (eq. 4.4) e velocidade azimutal ou orbital  $v_\phi = R\Omega_k(R)$  em torno do BN de massa  $M$  e raio  $r_S$ . Ele também

possui uma velocidade radial  $v_R$ , de pequeno valor. Para distâncias  $R \gg r_S$ , o disco de acreção será kepleriano. Para  $R \sim r_S$  a velocidade azimutal  $v_\phi$  desvia-se dos valores de Kepler até que em  $R = r_S$  a matéria é removida de sua órbita e pouco tempo depois ultrapassa o horizonte de eventos.

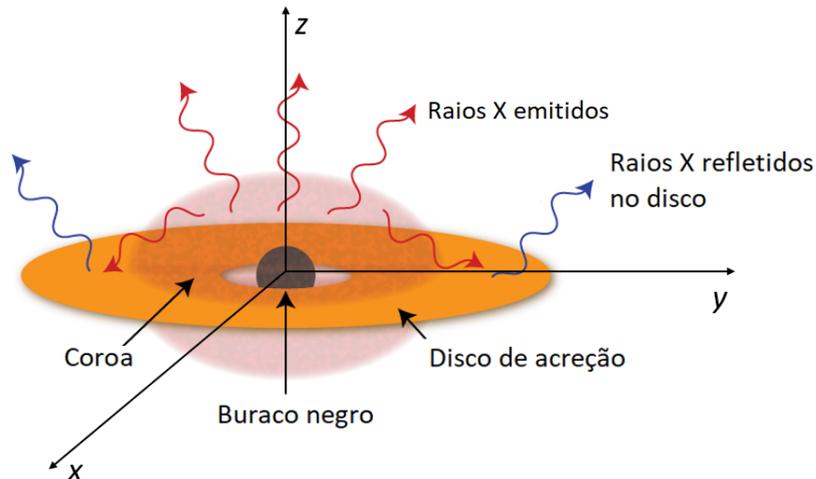


Figura 4.2: Esquema de um disco de acreção situado em  $z = 0$ . Modificado de [90].

Um parâmetro importante na caracterização do disco é a sua densidade superficial  $\Sigma(R, t)$ , que é uma função do raio  $R$  e do tempo  $t$ , tal que  $\Sigma(R, t) = m_{\text{disco}}/A_{\text{disco}}$ , onde  $m$  e  $A$  são a massa e a área do disco, respectivamente. Sendo  $\rho$  a densidade volumétrica e  $H$  a espessura do disco, tem-se

$$\Sigma(R, t) = \int_{-z}^{+z} \rho(R, z, t) dz, \quad (4.5)$$

onde  $H = 2z$ . Se o disco for fino, onde  $\rho$  praticamente não varia com  $z$ ,

$$\Sigma(R, t) = \rho(R, t)H(R, t). \quad (4.6)$$

Considerando os anéis com formato circulares, o torque total  $\Gamma$  exercido pelo anel externo sobre o interno é expresso como

$$\Gamma(R) = 2\pi R\nu\Sigma R^2\Omega', \quad (4.7)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade angular,  $\Omega' = d\Omega/dr$  e  $\nu$  a viscosidade. Se a rotação do disco for rígida,  $\Omega' = 0$  e  $\Gamma = 0$ . Se  $\Omega(R)$  diminui para fora,  $\Gamma(R)$  é negativo, os anéis internos perdem momento angular para os externos e o gás entra em espiral.

Considere um torque resultante sobre um anel de gás situado entre  $R$  e  $R + dR$ . Tem-se

$$\Gamma(R + dR) - \Gamma(R) = \frac{\partial\Gamma}{\partial R} dR, \quad (4.8)$$

o qual atua no sentido da velocidade angular. A partir desta vem que

$$\Omega \frac{\partial \Gamma}{\partial R} dR = \left[ \frac{\partial}{\partial R} (\Gamma \Omega) - \Gamma \Omega' \right] dR. \quad (4.9)$$

O termo  $\partial(\Gamma\Omega)dR/\partial R$  é a taxa de convecção de energia rotacional através do gás pelos torques e o termo  $-\Gamma\Omega'dR$  representa a taxa de perda de energia mecânica para o gás, a qual é convertida em energia interna. Os torques viscosos causam a dissipação viscosa dentro do gás a uma taxa  $\Gamma\Omega'dR$  por anel com raio  $dR$ . Essa energia será irradiada pelas faces do disco.

Sendo  $4\pi R dR$  a área plana de cada anel, a taxa de irradiação por unidade de área,  $D(R)$ , será

$$D(R) = \frac{\Gamma\Omega'}{4\pi R}. \quad (4.10)$$

Utilizando (4.7),  $D(R)$  é escrito como

$$D(R) = \frac{1}{2} \nu \Sigma (R \Omega')^2. \quad (4.11)$$

Com  $\Omega'$  dado a partir de (4.4),

$$\Omega'_k(R) = \left( \frac{GM}{R^5} \right)^{1/2}, \quad (4.12)$$

vem que

$$D(R) = \frac{9\nu\Sigma GM}{8R^3}, \quad (4.13)$$

o que mostra que a taxa de irradiação é proporcional à viscosidade e à densidade do disco.

## 4.4 Conservação da Massa e do Momento Angular

O momento angular do gás no disco é removido por tensões viscosas e transportado para fora, permitindo que o gás espirale em direção ao BN, convertendo sua energia gravitacional em radiação. A seguir vamos equacionar a conservação da massa e do momento angular no disco de acreção [63, 7, 62, 74].

Um anel do disco situado entre  $R$  e  $R + \Delta R$  possui massa total  $m_{\text{anel}} = 2\pi R \Delta R \Sigma$ . O fluxo de matéria entre dois anéis vizinhos é dado pela diferença de massa entre eles:

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma) = v_R(R, t) 2\pi R \Sigma(R, t) - v_R(R + \Delta R, t) 2\pi (R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma) = \\ - 2\pi \Delta R \left[ \frac{v_R(R + \Delta R, t) (R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t) - v_R(R, t) R \Sigma(R, t)}{\Delta R} \right], \quad (4.15) \end{aligned}$$

donde, de forma aproximada, vem

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma) \simeq -2\pi\Delta R\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R). \quad (4.16)$$

Se  $\Delta R \rightarrow 0$  obtém-se a equação da conservação da massa

$$R\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0. \quad (4.17)$$

Um anel do disco situado entre  $R$  e  $R + \Delta R$  possui momento angular  $L_{\text{anel}} = 2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega$ . Incluindo a eq. (4.7) e seguindo o procedimento semelhante à conservação da massa (eq. 4.14), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega) &= v_R(R, t)2\pi R\Sigma(R, t)R^2\Omega(R) - \\ &v_R(R + \Delta R, t)2\pi(R + \Delta R)\Sigma(R + \Delta R, t)(R + \Delta R)^2\Omega(R + \Delta R) + \frac{\partial\Gamma}{\partial R}\Delta R, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega) \simeq -2\pi\Delta R\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R R^2\Omega) + \frac{\partial\Gamma}{\partial R}\Delta R. \quad (4.19)$$

No limite  $\Delta R \rightarrow 0$ ,

$$R\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2\Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R R^2\Omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Gamma}{\partial R}. \quad (4.20)$$

Considerando  $\partial\Omega/\partial t = 0$  e utilizando a eq. (4.17), escreve-se (4.20) como

$$R\Sigma v_R(R^2\Omega)' = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Gamma}{\partial R}. \quad (4.21)$$

Levando (4.17) em (4.21) elimina-se a velocidade radial  $v_R$ , obtendo:

$$R\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{2\pi(R^2\Omega)'}\frac{\partial\Gamma}{\partial R}\right]. \quad (4.22)$$

Utilizando as eqs. (4.4) e (4.7), a eq. (4.22) fica

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}(\nu\Sigma R^{1/2})\right], \quad (4.23)$$

a qual governa a evolução temporal da densidade superficial de um disco kepleriano.

A partir de (4.23) e usando (4.7) e (4.21), escreve-se a velocidade radial  $v_R$  como

$$v_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}}\frac{\partial}{\partial R}(\nu\Sigma R^{1/2}). \quad (4.24)$$

A eq. (4.23) é linear em  $\Sigma$  se  $\nu$  for independente de  $\Sigma$ . Sua solução de é

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi R_0^2}\tau^{-1}x^{-1/4}\exp\left[-\frac{(1+x^2)}{\tau}\right]J\left(\frac{2x}{\tau}\right), \quad (4.25)$$

onde  $J(z)$  é a função de Bessel modificada,  $x = R/R_0$ ,  $\tau = 12\nu t/R_0^2$  e  $m$  a massa do anel localizado em  $R = R_0$ . Na exponencial de (4.25) faz-se  $(1+x^2)\tau^{-1} \sim x^2\tau^{-1} \sim 1$ , de modo

a obter que a viscosidade tem o efeito de fazer com que o gás se espalhe num anel de raio  $R$  numa escala de tempo denominada tempo viscoso, tal que

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (4.26)$$

em cada raio  $R$ . Sendo que  $\tau \sim t/t_{\text{visc}}(R_0)$ , da eq. (4.24) vem

$$v_R \sim \frac{\nu}{R}, \quad (4.27)$$

de modo que a eq. (4.26) pode ser escrita como

$$t_{\text{visc}} \sim \frac{R}{v_R}. \quad (4.28)$$

O  $t_{\text{visc}}$  é a escala de tempo de deriva viscosa ou radial, e fornece o tempo para um anel do disco se mover uma distância radial  $R$ .

A partir de (4.24) e (4.25) encontra-se também que

$$v_R \sim \frac{3\nu}{R_0} \left( \frac{1}{4x} + \frac{2x}{\tau} - \frac{2}{\tau} \right) > 0, \quad 2x \gg \tau, \quad (4.29)$$

$$v_R \sim -\frac{3\nu}{R_0} \left( \frac{1}{2x} - \frac{2x}{\tau} \right) < 0, \quad 2x \ll \tau, \quad (4.30)$$

mostrando que uma parte da matéria se move para fora, levando o momento angular, enquanto as partes internas movem-se em direção ao centro. Do total da massa, a maior parte é acretaada e apenas uma pequena fração é levada para fora.

## 4.5 Viscosidade

Um dos grandes problemas da teoria dos discos de acreção é descrever a viscosidade do material que o compõe, responsável pelo torque que remove o momento angular para a parte externa. A viscosidade determina a escala de tempo de evolução do disco e há uma incerteza na ordem de grandeza da sua intensidade [63, 86, 74, 62].

A natureza da viscosidade nos discos de acreção é pouco conhecida. Ela não pode ser de origem molecular porque é muito baixa para explicar os fenômenos de acreção observados. A viscosidade molecular consiste no atrito entre as camadas adjacentes de um fluido, e certamente está presente nos discos, pois eles apresentam rotação diferencial, mas seu valor é pequeno para produzir efeitos significativos. Como os discos são formados por plasmas e o fluxo deste gera campos magnéticos, provavelmente a viscosidade deva-se a turbulência magnetoidrodinâmica (MHD) e a instabilidade magneto-rotacional (MRI).

A determinação ou escolha do parâmetro de viscosidade é um dos problemas mais difíceis no disco de acreção [87]. Considera-se que a viscosidade é oriunda de um fluido turbulento que forma redemoinhos, que dissipam energia. Dessa forma, a viscosidade dos redemoinhos turbulentos  $\nu_{\text{red}}$  é

$$\nu_{\text{red}} \sim v_{\text{red}} l_{\text{red}} \quad (4.31)$$

onde  $v_{\text{red}}$  é a velocidade e  $l_{\text{red}}$  o tamanho dos redemoinhos, respectivamente. Se  $v_{\text{red}} > c_s$ , onde  $c_s$  é a velocidade do som no meio, a turbulência se dissipa rapidamente e, por isso, espera-se que  $v_{\text{red}} < c_s$ .

Em 1973 Shakura e Sunyaev propuseram a prescrição  $\alpha$ , onde as partículas do disco movem-se em órbitas circulares com pequena componente radial na direção central, devido à viscosidade do disco. Sendo que, se  $l_{\text{red}} < H$ , onde  $H$  é a altura do disco, tem-se que

$$\nu = \alpha c_s H \quad (4.32)$$

com  $\alpha \lesssim 1$ . Com a prescrição  $\alpha$  pode-se comparar as viscosidades de diferentes discos, mas não se esclarece a natureza do problema.

Nos discos de acreção finos, onde o resfriamento radioativo remove a energia de forma eficiente, estima-se que  $0,1 < \alpha < 0,4$ . Nos discos, em geral, comparando teoria e dados observacionais, acredita-se que  $\alpha \sim 0,1$ .

## 4.6 Tipos de Discos

Podemos classificar os discos de acreção quanto à sua geometria, sua profundidade óptica e à sua taxa de suprimento de massa (taxa de acreção).

### 4.6.1 Geometria

Quanto à sua geometria, os discos podem ser classificados em finos ou grossos. Nos discos finos a sua espessura  $H$  é muito menor que seu raio  $R$ ,  $H \ll R$ . Nos discos grossos, a espessura e o raio são da mesma ordem,  $H \sim R$ , de modo que se assemelham com um toroide [62].

### 4.6.2 Profundidade Óptica

A profundidade óptica ou opacidade está relacionada à atenuação da intensidade da radiação ao passar por um material. Sendo  $\tau$  o coeficiente de opacidade de um disco,

$$\tau = \rho H \kappa_R = \Sigma \kappa_R, \quad (4.33)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica e  $\kappa_R$  a opacidade de Rosseland<sup>1</sup>. Discos opacos ou opticamente espessos possuem  $\tau \gg 1$  e não são muito quentes. Discos transparentes ou opticamente finos possuem  $\tau \ll 1$ , temperaturas relativamente altas e densidades baixas [62].

Se a energia do disco é dissipada num tempo menor que o necessário para o gás fluir para o BN, o gás esfria rapidamente e forma-se um disco de acreção fino, cuja

<sup>1</sup>Para um gás ionizado com  $T \gtrsim 10^4$  K, a principal opacidade de espalhamento deve-se aos elétrons.

espessura é de até 3% do raio. Se o gás não conseguir irradiar facilmente, forma-se um disco quente e grosso, cuja espessura chega a cerca de 20% do seu raio [60, 80].

Se  $\tau \gg 1$  em direção perpendicular ao plano do disco, os fótons são absorvidos e espalhados muitas vezes antes de saírem do disco e pode-se considerar a existência de um equilíbrio térmico no local. Isso sugere a temperatura igual para elétrons e íons no plasma [80].

### 4.6.3 Taxa de Suprimento de Massa

Existe um limite para  $\dot{M}$  na qual um objeto compacto pode acumular matéria, o que conduz à taxa de acreção de Eddington, que produz a luminosidade de Eddington:  $\dot{M}_{\text{Edd}} \rightarrow L_{\text{Edd}}$ . Quanto à taxa de suprimento de massa, os discos podem ser sub-Eddington ( $\dot{M} < \dot{M}_{\text{Edd}}$ ) ou super-Eddington ( $\dot{M} > \dot{M}_{\text{Edd}}$ ). Os discos de acreção possuem tensões que podem neutralizar a pressão de radiação, de forma que, em algumas situações, eles podem irradiar em luminosidade super-Eddington ( $\dot{L} > \dot{L}_{\text{Edd}}$ ) [63].

Para baixas taxas de acreção ( $\dot{M} < 10^{-2}\dot{M}_{\text{Edd}}$ ) acredita-se que o fluxo é opticamente fino e radiativamente eficiente. Dessa forma, a energia que era dissipada pela turbulência permanece agora como energia interna e é advectada. O disco aquece até tornar-se geometricamente espesso. A condição radiativamente eficiente, quando toda a energia produzida é irradiada, ocorre quando  $\dot{M} < 0,3\dot{M}_{\text{Edd}}$ , levando naturalmente a um disco geometricamente fino e opticamente espesso [63, 44].

## 4.7 Discos Finos

Nesta seção descreveremos o modelo de disco fino de acreção em torno de um BN, baseando-se nas referências [86, 72, 87, 65, 85, 62]. Em relação aos modelos de discos, o disco fino é o mais simples e constitui o modelo padrão.

Supõe-se que o disco está situado no plano  $xy$ , tendo o eixo  $z$  perpendicular e passando pelo seu centro. Considerando-se também que  $(H/R) \ll 1 \sim 10^{(-3)-(-2)}$  e  $v_R \ll v_\phi$  e usa-se a mecânica newtoniana para descrevê-lo. As equações de fluxo bidimensionais podem ser desacopladas nas direções radial e vertical, simplificando a descrição.

### 4.7.1 Discos Finos Estáveis

Nos discos finos estáveis ou estacionário, o fluxo de gás é axialmente simétrico, de modo que suas propriedades não dependem do ângulo azimutal  $\phi$ , mas apenas de  $R$ . Comparando as velocidades no eixo  $z$ , a radial e a azimutal, tem-se

$$v_z \ll v_R \ll v_\phi. \quad (4.34)$$

As mudanças na estrutura do disco ocorrem na escala do tempo viscoso ( $t_{\text{visc}}$ ). Para estudar os discos estáveis considera-se  $\partial/\partial t = 0$  nas equações da conservação de

massa e de momento angular. A partir da eq. (4.17),

$$\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0, \quad (4.35)$$

donde vem

$$R\Sigma v_R = C, \quad (4.36)$$

onde  $C$  é uma constante. Sendo  $\dot{M}$  a taxa de acreção de massa e  $v_R < 0$ , a entrada de massa em cada ponto do disco é dada por

$$\dot{M} = -2\pi R\Sigma v_R. \quad (4.37)$$

Considerando a condição de estabilidade no disco, a partir da eq. (4.20) obtém-se

$$R\Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{\Gamma}{2\pi} + \frac{C_2}{2\pi}, \quad (4.38)$$

onde  $C_2$  também é uma constante e o termo em que ela aparece foi colocado propositalmente para simplificação posterior. Utilizando a eq. (4.7), que expressa o torque geral, vem

$$-\nu\Sigma\Omega' = \Sigma(-v_R)\Omega + \frac{C}{2\pi R^3}. \quad (4.39)$$

Supondo que o disco se estende até uma distância  $R_*$  do BN, numa situação real tem-se que  $\Omega(R_*) < \Omega_K(R_*)$ , ou seja, a estrutura gira mais devagar que sua velocidade Kepleriana. Dessa forma, a velocidade angular do disco permanece Kepleriana, aumentando para dentro, até começar a diminuir para um valor  $\Omega_* = \Omega(R_*)$ , numa camada limite. Existe um raio  $R = R_* + b$  no qual  $\Omega' = 0$ . Na realidade,  $b \ll R_*$  e o valor de  $\Omega$  está muito próximo do valor kepleriano no ponto onde  $\Omega' = 0$ :

$$\Omega(R_* + b) \simeq \left(\frac{GM}{R_*^3}\right)^{1/2}. \quad (4.40)$$

Dessa forma, levando (4.37) em (4.39) encontra-se o valor de  $C$ :

$$C = -\dot{M}(GMR_*)^{1/2}. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) em (4.39) e simplificando, vem

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right]. \quad (4.42)$$

Esta expressão é válida apenas quando o valor de  $C$  for dado por (4.41). Isso não ocorre, por exemplo, quando existe um campo magnético bastante forte que controla o fluxo de gás no disco de modo que  $v_\phi > v_{\phi_k}$ .

Considerando  $\Omega = \Omega_k$  na eq. (4.11), obtém-se que a taxa de dissipação viscosa por unidade de área do disco é

$$D(R) = \frac{9}{8} \frac{\nu}{\Sigma} GMR^3. \quad (4.43)$$

Substituindo a eq. (4.42) em (4.43),

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (4.44)$$

o que mostra que o fluxo radiativo nas faces de um disco fino e estável é independente da viscosidade. E isso é muito importante porque pouco se conhece sobre a viscosidade do material que forma o disco.

A luminosidade produzida entre os raios  $R_1$  e  $R_2$  do disco de acreção é dada por

$$L(R_1, R_2) = 2 \int_{R_1}^{R_2} D(R) 2\pi R dR, \quad (4.45)$$

onde o fator 2 deve-se às duas faces do disco. Relacionando (4.44) com (4.45) e integrando,

$$L(R_1, R_2) = \frac{3}{2} GM\dot{M} \left[ -\frac{1}{R_2} + \frac{2}{3} \left( \frac{R_*}{R_2^3} \right)^{1/2} + \frac{1}{R_1} - \frac{2}{3} \left( \frac{R_*}{R_1^3} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.46)$$

Fazendo  $R_1 = R_*$  (raio interno do disco) e  $R_2 \rightarrow \infty$ , vem que a luminosidade total do disco é

$$L_{\text{disco}} = \frac{GM\dot{M}}{2R_*} \quad (4.47)$$

Sendo  $L_{\text{ac}}$  a luminosidade de acreção dada por

$$L_{\text{ac}} = \frac{GM\dot{M}}{R_*}, \quad (4.48)$$

vem que

$$L_{\text{disco}} = \frac{1}{2} L_{\text{ac}}. \quad (4.49)$$

A relação (4.49) significa que apenas metade da energia é emitida na transição do gás até a borda interna do disco, limitada pelo raio de ISCO ( $r_I = R_*$ ). A outra metade é armazenada na forma de energia cinética do BN.

Na direção vertical do disco não há fluxo de gases, de modo que, numa situação de equilíbrio hidrostático, onde a pressão da radiação é equilibrada pela atração gravitacional, deve-se ter (componente  $z$  da equação de Euler):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.50)$$

Para um disco fino ( $z \ll H$ ), a eq. (4.50) se reduz à

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{GMz}{R^3} = -\rho \Omega_k^2 z. \quad (4.51)$$

Considerando  $z \sim H$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial z} \sim \frac{P}{H}. \quad (4.52)$$

Sendo  $c_s^2 = \gamma P / \rho$ , escreve-se a eq. (4.51) como

$$H \simeq c_s \left( \frac{R}{GM} \right)^{1/2} R, \quad (4.53)$$

de modo que  $c_s$  deve ser

$$c_s \ll \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}, \quad (4.54)$$

o que mostra que a velocidade angular local kepleriana (4.4) deve ser altamente supersônica.

A componente radial da equação de Euler é

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\phi^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM^2}{R} = 0. \quad (4.55)$$

Na eq. (4.55) negligencia-se o termo da pressão ao compará-lo com o termo gravitacional, pois  $P \sim \rho c_s^2$  e, então,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} \sim \frac{1}{R} c_s^2 \ll \frac{GM^2}{R}. \quad (4.56)$$

Usando as eqs. (4.37) e (4.42), a partir de (4.55) vem

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (4.57)$$

Para qualquer valor da viscosidade,  $v_R$  é altamente subsônico, sendo  $v_R \sim \nu/R$ . De acordo com a prescrição  $\alpha$  (eq. 4.32),

$$v_R \sim \frac{\alpha c_s H}{R} \ll c_s. \quad (4.58)$$

Levando em consideração a relação (4.54), a partir da eq. (4.55) vem que

$$v_\phi \simeq \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}, \quad (4.59)$$

o que mostra que a velocidade azimutal  $v_\phi$  é altamente supersônica.

Definindo  $\mathcal{M} = v_\phi/c_s$  como o número de Mach, reescreve-se as eqs. (4.53) e (4.58) como

$$H \sim \mathcal{M}^{-1} R, \quad (4.60)$$

$$v_R \sim \alpha \mathcal{M}^{-1} c_s. \quad (4.61)$$

A pressão  $P$  no disco é a soma da pressão do gás e da radiação

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T_c^4}{3c}, \quad (4.62)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica do gás,  $\sigma$  é a constante de Stephan-Boltzmann,  $T_c$  é a temperatura no centro do disco ( $z = 0$ ),  $k$  é a constante de Boltzmann,  $c$  é a velocidade da luz,  $m_p$  é a massa do próton e  $\mu$  é o peso molecular médio. Geralmente a pressão do gás é maior que a da radiação, exceto nas bordas internas do disco onde a temperatura é mais alta.

Sendo o disco fino, o fluxo de energia radiante através da superfície  $z = \text{constante}$  é dado por

$$F(z) = -\frac{16\rho T^3}{3\kappa_R\rho} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (4.63)$$

onde  $\kappa_R$  é a opacidade de Rosseland. O disco é opticamente espesso de modo que o coeficiente de opacidade (4.33) é  $\tau \gg 1$ . Se  $\tau \lesssim 1$  a radiação escapa diretamente do disco.

## 4.7.2 Conservação da Energia do Gás

Sendo  $Q_+$  e  $Q_-$  as taxas de aquecimento e resfriamento por unidade de volume, respectivamente, a conservação de energia do gás pode ser escrita como

$$Q_{\text{adv}} = Q_+ - Q_-, \quad (4.64)$$

onde  $Q_{\text{adv}}$  é a taxa de advecção radiativa, ou a energia térmica que permanece no gás.

No modelo padrão de disco de acreção fino o gás tem alta eficiência radiativa, de modo que

$$Q_+ \simeq Q_- \gg Q_{\text{adv}}. \quad (4.65)$$

Nesse caso,  $\dot{M} \gtrsim \dot{M}_{\text{crit}}$ . A energia gerada por dissipação viscosa no escoamento é irradiada localmente e a advecção de energia é desprezível. Dessa forma, o disco é geometricamente fino e opticamente espesso. Os discos finos são as fontes de radiação mais eficientes do universo. As temperaturas típicas do gás são da ordem de  $10^{3-5}$  K nos BNs supermassivos.

Existem também os discos que possuem baixa eficiência radiativa, nas quais a maior parte da energia térmica produzida por dissipação viscosa não é irradiada, permanecendo no gás, de modo que

$$Q_{\text{adv}} \simeq Q_+ \gg Q_-, \quad (4.66)$$

com  $\dot{M} \lesssim \dot{M}_{\text{crit}}$ . Nesse caso o gás é opticamente fino e tênue e não é capaz de irradiar de forma eficiente. Sendo  $H \sim R$ , a velocidade  $v_R$  é maior que no disco fino.

Sendo  $Q_+$  a taxa volumétrica de produção de energia por dissipação viscosa, tem-se que

$$Q_+ = \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (4.67)$$

Integrando, vem

$$F(H) - F(0) = \int_0^H Q_+(z) dz, \quad (4.68)$$

que é a taxa de dissipação total através da metade da estrutura vertical por unidade de área frontal ou, de acordo com a eq. (4.44),

$$D(R) = \int_0^H Q_+(z) dz. \quad (4.69)$$

A partir das eqs. (4.63) e (4.44),

$$F(z) \sim \left(\frac{4\sigma}{3\tau}\right) T^4(z). \quad (4.70)$$

Se a temperatura central excede a temperatura da superfície, o suficiente para que  $T_c^4 \gg T^4(H)$ , a partir de (4.68) e (4.69) vem que

$$D(R) = \left(\frac{4\sigma}{3\tau}\right) T_c^4. \quad (4.71)$$

### 4.7.3 Equações e Soluções do Modelo Padrão

As equações que descrevem um disco de acreção fino foram propostas inicialmente por Shakura e Sunyaev, e Novikov e Thorne em 1973, para valores de  $M$  e  $\dot{M}$  fixos [62, 74, 86]. São as seguintes:

$$\rho = \frac{\Sigma}{H}. \quad (4.72a)$$

$$H = \frac{c_s R^{3/2}}{(GM)^{1/2}}. \quad (4.72b)$$

$$c_s = \frac{P}{\rho}. \quad (4.72c)$$

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T_c^4}{3c}. \quad (4.72d)$$

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]. \quad (4.72e)$$

$$\tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c). \quad (4.72f)$$

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]. \quad (4.72g)$$

$$\nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha). \quad (4.72h)$$

Suas soluções são dadas em função dos seguintes parâmetros:  $f^4 = 1 - (R_*/R)^{1/2}$ ,  $R_{10} = (R/10^{10})$  cm,  $m_1 = M/M_\odot$ ,  $M_{16} = \dot{M}/10^{16}$  g/s,  $\mu = 0,615$  (valor mais adequado para os gases cósmicos) e  $f = [1 - (R_*/R)^{1/2}]^{1/4}$ .

$$\begin{aligned} \Sigma &= 5,2 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} \text{ g/cm}^2. \\ H &= 1,7 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm}. \\ \rho &= 3,1 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{14/5} \text{ g/cm}^3. \\ T_c &= 1,4 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}. \\ \tau &= 190 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5}. \\ \nu &= 1,8 \times 10^{14} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{3/4} f^{6/5} \text{ cm}^2/\text{s}. \\ v_R &= 2,7 \times 10^4 \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5} \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Ainda não se sabe ao certo como  $\alpha$  depende de  $M$ ,  $R$  e  $\dot{M}$ , não sendo obtido das equações (4.73). Apesar destas serem soluções exatas das eqs. (4.72), elas não refletem rigorosamente a realidade, sendo apenas uma aproximação.

Combinando as eqs. (4.72c), (4.72d) e (4.72e) e omitindo a pressão no gás, vem que

$$c_s^2 = \frac{3GM\dot{M}\tau}{8\pi R^3\rho c} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.74)$$

Sendo que a opacidade deve-se ao espalhamento de elétrons, das eqs. (4.72a) e (4.72f) vem

$$\tau = \Sigma\kappa_R \simeq \frac{\rho H\sigma_T}{m_p}. \quad (4.75)$$

A partir de (4.75) e (4.72b) escreve-se a espessura do disco (4.74) como

$$H \simeq \frac{3\sigma\dot{M}}{8\pi m_p c} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.76)$$

Sendo que a luminosidade de Eddington é dada por (1.20) e a luminosidade de acreção

$$L_{ac} = \frac{2\eta GM\dot{M}}{R_*}, \quad (4.77)$$

e sendo  $L_{ac} = 2L_{disco}$ , vem que a taxa crítica de acreção que fornecerá  $L_{Edd}$  no disco é

$$\dot{M}_{crit} = \frac{L_{Edd}R_*}{2\eta GM}. \quad (4.78)$$

Substituindo  $L_{Edd}$  em (4.78):

$$\dot{M}_{crit} = \frac{2\pi m_p c R_*}{\eta\sigma_T}. \quad (4.79)$$

Relacionando (4.79) com (4.76):

$$H \simeq \frac{3R_*\dot{M}}{4\eta\dot{M}_{crit}} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.80)$$

Pela análise da eq. (4.80) percebe-se que, quando  $\dot{M} \rightarrow \dot{M}_{crit}$ , o formato do disco deixa de ser fino perto do centro, tendendo para um formato esférico nas partes internas.

#### 4.7.4 Escalas de Tempo

Anteriormente discutimos sobre discos finos e estáveis. Agora exploraremos rapidamente alguns aspectos de discos finos dependentes do tempo, bem como as escalas de tempo relacionadas [63, 7].

A escala de tempo em que a matéria se difunde no disco através dos torques viscosos é dada a partir de (4.28)

$$t_{visc} \sim \frac{R}{v_R}. \quad (4.81)$$

A escala de tempo dinâmica é definida como

$$t_\phi \sim \frac{R}{v_\phi}, \quad (4.82)$$

que é o tempo no qual a força de pressão se ajusta às forças gravitacionais e centrífugas (tempo para o disco atingir o equilíbrio). O tempo dinâmico está relacionado com o período orbital  $T$  como

$$t_\phi = \Omega_k^{-1} = \frac{T}{2\pi}. \quad (4.83)$$

A comparação entre essas duas últimas escalas de tempo resulta em

$$\frac{t_{\text{visc}}}{t_\phi} \sim \frac{v_\phi}{v_R} \gg 1. \quad (4.84)$$

Através de alguns dados numéricos constata-se que a escala de tempo viscoso é muito grande, na ordem de  $10^{17}$  anos para um BN supermassivo. Isso mostra que a viscosidade devido às colisões não é eficiente como principal fonte de movimentos turbulentos. A turbulência no gás é possivelmente causada pela presença de campos magnéticos que agem no anéis do disco.

Desvios do equilíbrio hidrostático na direção vertical  $z$  são ajustados na escala de tempo

$$t_z = \frac{H}{c_s}. \quad (4.85)$$

De acordo com a relação (4.60) tem-se que

$$t_z \sim \frac{R}{\mathcal{M}c_s} = \frac{R}{v_\phi}. \quad (4.86)$$

A partir de (4.82) vem que

$$t_z \sim t_\phi. \quad (4.87)$$

Consideremos, agora, a escala de tempo térmica,  $t_{\text{term}}$ , que fornece o tempo para o reajuste do equilíbrio térmico, ou seja, o tempo no qual a taxa de dissipação é alterada. Ela é definida como a quantidade de calor (energia térmica) por unidade de área do disco dividido pela taxa de dissipação por unidade de área do disco

$$t_{\text{term}} = \frac{\text{calor/área}}{\text{taxa dissipada/área}}. \quad (4.88)$$

Seja a quantidade de calor por unidade de massa dada pela eq. (3.21)

$$\frac{Q}{m} = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_p}. \quad (4.89)$$

Sendo  $\Sigma$  a densidade de área, tem-se que a quantidade de calor por unidade de área é

$$\frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \frac{\Sigma kT}{\mu m_p}. \quad (4.90)$$

Utilizando a relação (3.17) e sendo  $c_s^2 = P/\gamma$ , constata-se que

$$\frac{Q}{A} \sim \Sigma c_s^2, \quad (4.91)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som.

A taxa de calor dissipada por unidade de área do disco é  $D(R)$  dada por (4.11). Dessa forma pode-se expressar a eq. (4.88) como

$$t_{\text{term}} \sim \frac{\Sigma c_s^2}{\nu \Sigma (R\Omega')^2 / 2}, \quad (4.92)$$

onde  $\Omega'$  é expresso pela eq. (4.12). Pode-se escrever (4.88) como

$$t_{\text{term}} \sim \frac{R^2 c_s^2}{v_\phi^2 \nu}. \quad (4.93)$$

Sendo  $\mathcal{M} = v_\phi/c_s$  e utilizando a relação (4.26),

$$t_{\text{term}} \sim \mathcal{M}^{-2} t_{\text{visc}}. \quad (4.94)$$

A partir da relação (4.26) e utilizando (4.32), (4.60) e (4.82),

$$t_{\text{visc}} \sim \alpha^{-1} \mathcal{M}^2 t_\phi. \quad (4.95)$$

Comparando  $t_\phi$ ,  $t_z$ ,  $t_{\text{term}}$  e  $t_{\text{visc}}$ , tem-se que

$$t_\phi \sim t_z \sim \alpha t_{\text{term}} \sim \alpha \left( \frac{H}{R} \right)^2 t_{\text{visc}}. \quad (4.96)$$

Assumindo que  $\alpha \lesssim 1$ ,

$$t_\phi \sim t_z \lesssim t_{\text{term}} \ll t_{\text{visc}}. \quad (4.97)$$

Numericamente estes tempos são obtidos a partir das equações de Shakura-Sunyaev, sendo que  $t_\phi$  e  $t_z$  são da ordem de minutos e  $t_{\text{visc}}$  da ordem de semanas [63].

## 4.8 Espectro

No processo de acreção a energia gravitacional é transformada em calor e irradiada na superfície do disco na forma de radiação eletromagnética. O disco comporta-se como um corpo negro que irradia com uma temperatura efetiva dada por [74, 44]

$$D(r) = \sigma T^4(R). \quad (4.98)$$

Sendo  $D(r)$  dado pela eq. (4.44), pode-se expressar a temperatura como

$$T(R) = \left[ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3 \sigma} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \right]^{1/4}, \quad (4.99)$$

A estrutura e o espectro da radiação emitida pelo disco dependem principalmente da taxa de acreção de matéria. Se  $\dot{M} = (0,1 - 3) \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$ , são gerados raios X com energia  $\sim 1 - 10 \text{ keV}$  e  $L \sim 10^{37-38} \text{ erg/s}$ . Se o fluxo de matéria diminuir, a temperatura efetiva da radiação e a luminosidade cairão. Se  $\dot{M} = 10^{-12} M_{\odot}/\text{ano}$ ,  $L \sim 10^{34} \text{ erg/s}$ , e são gerados raios ultravioleta e visíveis com energia  $\sim 10^{1-4} \text{ eV}$ . Quando  $\dot{M} > 10^{-9} M_{\odot}/\text{ano}$ , a luminosidade óptica do disco excederá o valor solar.

A luminosidade no visível é produzida principalmente pela reirradiação dos fótons de raios X e de ultravioleta que são oriundos das regiões internas de alta temperatura para as regiões externas. Emissão em raios X é proeminente na parte mais quente e mais interna do disco, enquanto que a emissão no ultravioleta e óptico domina nas partes mais externas e frias.

## 4.9 Estimativas de Luminosidades de Acreção

Nesta seção faremos algumas estimativas das luminosidades produzidas em discos de acreção, com base nas referências [87, 72, 60, 74, 91].

A eficiência com a qual o gás irradia é influenciada pela geometria e pela dinâmica do disco de acreção. Já foi mostrado anteriormente que o rendimento máximo da acreção é de 0,057 num BN com  $a = 0$  (BN de Schwarzschild) e 0,42 num BN com  $a = m$  (BN de Kerr extremo). A eficiência de acreção num BN de Schwarzschild geralmente é bem baixa, podendo ser um pouco maior quando o gás for um plasma magnetizado. As estrelas de nêutrons são um pouco mais eficientes que os BNs de Schwarzschild ao acretar material, pois elas possuem uma superfície dura e toda a energia potencial pode ser convertida em radiação, e não apenas a energia de ligação orbital. Uma estrela de nêutrons com  $M = 1 M_{\odot}$  e  $r_S = 10 \text{ km}$ , por exemplo, possui um rendimento máximo de 0,19.

Em 1974 Kip Thorne mostrou que a rotação máxima para um BN era de  $a = 0,998m$ , devido à aborção de fótons quentes do disco, que produz uma espécie de contra-torque<sup>2</sup>. Descontando a captura de radiação do BN constata-se que esse limite corresponde à eficiência máxima de cerca de 30% na conversão de massa em radiação [92, 93].

Num BN de Kerr, o raio do seu horizonte de eventos ( $r_H$ ), que define o tamanho do BN, fica compreendido no intervalo

$$\frac{GM}{c^2} \leq r_H \leq \frac{2GM}{c^2}, \quad (4.100)$$

dependendo do seu momento angular. O raio da órbita circular estável mais interna (raio de ISCO -  $r_I$ ) localiza-se em

$$\frac{GM}{c^2} \leq r_I \leq \frac{6GM}{c^2}. \quad (4.101)$$

Na região do equador a ergosfera (raio  $r_{S+}$ ) fica localizada entre o horizonte de eventos e

---

<sup>2</sup>Esse valor não é consenso entre os cientistas, e alguns apontam que o limite pode ser maior.

$r_S = 2GM/c^2$ :

$$r_H \leq r_{S+} \leq \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.102)$$

Isso significa que, para um BN com rotações elevadas a parte interna do disco de acreção, limitado por  $r_I$ , fica no interior da ergosfera.

Considere um BN de Schwarzschild. Sendo  $R_* = r_I = 6GM/c^2$ , a partir da eq. (4.47) vem que

$$L_{\text{disco}} = \frac{1}{12} \dot{M} c^2 \simeq 0,083 \dot{M} c^2. \quad (4.103)$$

Percebe-se que o rendimento newtoniano (0,083) é um pouco maior que o valor máximo relativístico (0,057) calculado no capítulo 2.

Suponha um BN Schwarzschild de massa estelar:  $M = 5 M_\odot$ . Considerando  $R_* = r_I = 6GM/c^2$  e  $\eta = 0,05$ , a partir da eq. (4.79) tem-se que a taxa máxima com a qual ele pode acretar é

$$\dot{M}_{\text{crit}} \sim 10^{17} \text{ kg/s} \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}. \quad (4.104)$$

Com isso, obtém-se que a luminosidade máxima de acreção é

$$L_{\text{ac}} \sim 10^{38} \text{ erg/s}. \quad (4.105)$$

Seja um BN de Kerr com  $M = 20 M_\odot$ , de baixa rotação. Considerando  $R_* = r_I = 5GM/c^2$  e  $\eta = 0,1$ , a taxa de acreção crítica é

$$\dot{M}_{\text{crit}} \sim 10^{16} \text{ kg/s} \sim 10^{-7} M_\odot/\text{ano}, \quad (4.106)$$

o que leva a uma luminosidade de acreção máxima também de

$$L_{\text{ac}} \sim 10^{38} \text{ erg/s}. \quad (4.107)$$

Suponha, agora, um BN de Kerr de massa estelar  $M = 25 M_\odot$ , com rotação extrema. Considerando  $R_* = r_I = GM/c^2$  e  $\eta = 0,3$ , a taxa de acreção crítica é

$$\dot{M}_{\text{crit}} \sim 10^{14} \text{ kg/s} \sim 10^{-8} M_\odot/\text{ano}. \quad (4.108)$$

A luminosidade de acreção máxima é

$$L_{\text{ac}} \sim 10^{37} \text{ erg/s}. \quad (4.109)$$

No capítulo 5 serão estimadas as luminosidades de acreção em BNs supermassivos, comparando os valores obtidos com dados observacionais.

## Capítulo 5

# Núcleos Ativos de Galáxias e Jatos

Neste capítulo serão abordados alguns fenômenos relacionados aos discos de acreção, em especial os núcleos galácticos ativos e a formação de jatos.

### 5.1 Núcleos Galácticos Ativos

Os Núcleos Ativos de Galáxias ou Núcleos Galácticos Ativos, AGN do inglês *Active Galactic Nuclei*, são núcleos de galáxias que emitem imensas quantidades de energia, que não pode ser explicada como sendo gerada unicamente nas estrelas presentes. Mas qual a origem dessa enorme quantidade de energia? Atualmente acredita-se que a energia emitida por um AGN é gerada a partir da transformação da energia potencial gravitacional em radiação, da matéria que é acreta em um buraco negro (BN) supermassivo através de um disco de acreção. As galáxias que possuem esses núcleos são chamadas de galáxias ativas [94, 2].

Os primeiros AGNs ativos foram descobertos ainda em 1943 por Carl Seyfert em galáxias espirais com núcleos luminosos pequenos. Esses núcleos são caracterizados por um contínuo não estelar e linhas de emissão altamente ionizadas [63, 2].

Os AGNs ficam ativos durante um curto tempo, quando comparado ao tempo de vida da galáxia. Um AGN que libera  $10^{54}$  erg de energia, por exemplo, consome  $5 \times 10^6 M_{\odot}$  em  $10^7$  anos, o que equivale a  $0,05 M_{\odot}/\text{ano}$  [95].

As galáxias ativas compreendem cerca de 10% de todas as galáxias, e incluem as galáxias Seyfert, as radiogaláxias, os objetos BL Lacertae, os LINERS e os quasares [2]. Neste capítulo será mais comentado sobre os quasares e as radiogaláxias. Apesar de possuírem características diferentes, sendo divididas em grupos, possivelmente todos os tipos de galáxias ativas são a consequência do fenômeno da acreção num BN supermassivo presente no seu centro.

### 5.1.1 Quasares

Os quasares são exemplos de AGNs de alta luminosidade. Quasar é a abreviação de *quasi-stellar object* ou objeto quase estelar, e corresponde a um AGN de tamanho maior que uma estrela mas menor que uma galáxia. Inicialmente os quasares referiam-se a objetos estelares que emitiam intensamente ondas de rádio, mas posteriormente observou-se que eles emitem radiação em todo o espectro eletromagnético. Além disso, constatou-se que a maioria dos quasares não emitem ou são fracos emissores de rádio, sendo que apenas 10% deles são fortes emissores [95, 94, 2].

O primeiro quasar foi descoberto em 1963 por Maarten Schmidt. Através da análise espectral da radiação emitida, cujas raias eram bastante deslocadas para o vermelho, pode-se estimar as distâncias das fontes, bem como as luminosidades por elas emitidas. O resultado apontava para uma luminosidade equivalente a centenas de galáxias, não podendo ser oriundo das reações de fusão nuclear estelares. A explosão de uma supernova até poderia gerar essa luminosidade, mas não de maneira contínua por longos períodos de tempo [96, 63].

As luminosidades típicas dos quasares são cerca de 100 vezes maiores do que as galáxias mais luminosas [94]. Eles possuem dimensões menores que 1 pc (parsec<sup>1</sup>), o que corresponde a um volume  $10^{12}$  vezes menor que o volume de uma galáxia normal. Os quasares ativos liberam cerca de  $10^{60-61}$  erg de energia em  $10^8$  anos. Por comparação, o Sol liberará  $10^{51}$  erg em  $10^{10}$  anos [95].

Os primeiros trabalhos a proporem que a energia dos quasares era oriunda do processo de acreção em BNs supermassivos localizados no centro de galáxias, foram desenvolvidos a partir de 1964, por Edwin Salpeter [97], Yakov B. Zel'dovich e I. D. Novikov [98], e por D. Lynden-Bell [99]. Pode-se dizer que as evidências da existência dos BNs supermassivos, com  $M = 10^{6-10} M_{\odot}$ , ocorreu através da descoberta dos quasares.

Os BNs supermassivos são observados no centro da maioria das galáxias, e possivelmente estão presentes em todas. A galáxia que o contém torna-se ativa quando existe material (gás e estrelas) ao seu redor para ser acretado. Isso pode ocorrer em certos intervalos de tempo da sua existência. Quando o alimento acaba, os núcleos se apagam e a galáxia torna-se normal (inativa) [100, 65].

Os quasares possuem um fluxo energético variável no tempo em diferentes comprimentos de onda, com luminosidades superiores a  $10^{46}$  erg/s e fótons com energias que vão de  $1 \mu\text{eV}$  até  $1 \text{ GeV}$ . A produção de energia em um quasar depende da massa do BN, da taxa de acreção e da eficiência energética. Uma luminosidade entre  $10^{46-47}$  erg/s requer um BN com  $M = 10^9 M_{\odot}$  acretando algumas poucas massas solares por ano [101].

A matéria acumulada pelo BN supermassivo do quasar geralmente está disponível numa distância  $\sim \text{pc}$  da galáxia hospedeira [7]. A quantidade total de matéria acumulada durante a vida útil do quasar é semelhante à do BN. A massa  $M$  de um quasar, que basicamente corresponde à massa do BN central, pode ser estimada a partir da dissipação

---

<sup>1</sup>1 pc = 3,26 anos-luz =  $3,086 \times 10^{16}$  m.

energética total do quasar durante toda a sua vida, a qual é dada por

$$M = \frac{L\Delta t}{\eta c^2}, \quad (5.1)$$

onde  $\eta$  é a eficiência da conversão da matéria em energia e  $c$  é a velocidade da luz. Se a fonte tem uma luminosidade  $L$  que irradiou durante um tempo  $\Delta t$ , então uma quantidade de massa  $M$  se acumulou em algum local. Considerando  $\eta \sim 0,1$ ,  $L \sim 10^{47}$  erg/s e  $\Delta t \sim 10^7$  anos-luz, encontra-se  $M \sim 10^8 M_\odot$  [63]. Acretando matéria na taxa de acreção de Eddington, os BNs crescem exponencialmente dobrando sua massa a cada  $10^7$  anos. Para atingir uma massa de  $10^9 M_\odot$ , um BN deve acretar matéria no mínimo por  $1 \times 10^9$  anos [73].

Os valores do tempo  $\Delta t$  são obtidos a partir dos lóbulos de radiogaláxias. Sendo  $D$  a distância entre os lóbulos, tem-se que  $\Delta t > D/c$ . A radiogaláxia Cygnus A, por exemplo, possui uma separação entre os lóbulos de 80 kpc, donde vem  $\Delta t \sim 4 \times 10^7$  anos e  $M \sim 10^8 M_\odot$  [63].

Grandes variações na radiação emitida por um quasar não podem ocorrer num tempo menor que a passagem de luz pelo disco de acreção:  $t \geq R/c$ . Sendo  $R = R_S = 2GM/c^2$ , tem-se que [63]

$$t \geq \frac{2GM}{c^3} \simeq 1 \times 10^{-5} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ s}. \quad (5.2)$$

### 5.1.2 Energia e Eficiência na Acreção

Os AGNs apresentam  $L \sim 10^{38-48}$  erg/s, irradiada de um volume cerca de  $\sim 10^{30}$  vezes menor que o da galáxia que os abriga. Os valores de  $L$  são até  $\sim 10^4$  vezes maior que a luminosidade de uma galáxia típica [60].

A produção de energia num AGN depende principalmente da taxa de matéria acretada e da eficiência no processo. Quasares de alta luminosidade com  $L \sim 10^{46-47}$  erg/s, por exemplo, requerem um BN com  $M \sim 10^9 M_\odot$  e taxas de acreção de  $\dot{M} \sim (1 - 100) M_\odot/\text{ano}$  [7, 63].

A eficiência radiativa  $\eta$  de um AGN é estimada a partir da massa total acretada e a radiação emitida por unidade de volume no universo integrado ao longo do tempo. Ela é determinada por

$$\eta = \frac{L}{\dot{M}c^2}, \quad (5.3)$$

onde  $L$  é a luminosidade emitida,  $\dot{M}$  a taxa de acreção e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. De maneira geral, a eficiência é maior nos quasares mais ativos do que nos menos ativos. Nos quasares com BNs que giram rapidamente, a eficiência é de no mínimo  $\sim 0,15$  e nos que giram lentamente é de  $\sim 0,06$  [102].

Há uma incerteza na determinação da eficiência de acreção, e isso deve-se, principalmente, à imprecisão na taxa de acreção, bem como no conhecimento da massa do BN central. Mesmo assim, o valor de  $\eta$  é relevante, o que evita a necessidade de altas taxas

de acreção. Porém, ainda existe o problema da origem do material a ser acretado, o qual deve também ter uma viscosidade mínima para poder migrar para o BN [63].

Considere uma região com um raio  $\sim 10$  pc no centro de uma galáxia. Supondo um número de  $10^9$  estrelas nessa região, numa situação normal de evolução todas elas liberam em média  $\sim 10^{-2} M_\odot/\text{ano}$ . A perda de massa do Sol, por exemplo, é de  $10^{-2} M_\odot$  ao longo de sua vida, sendo  $10^{-14} M_\odot/\text{ano}$ . Estrelas massivas com  $M > 20 M_\odot$  podem perder de  $10^{-7}$  a  $10^{-5} M_\odot/\text{ano}$  durante apenas um período de suas vidas [103, 63].

Algumas possíveis peculiaridades envolvidas no processo podem aumentar a taxa de captura de gás pelo BN, como órbitas de estrelas que passassem próximas de BN e fossem desintegradas (rasgadas) pela força de maré, liberando massa mais rapidamente. Porém, à medida que a massa do BN aumenta (acima de  $\sim 10^8 M_\odot$ ), as forças de maré não conseguem mais despedaçar a estrela [63].

Alguns modelos mostram que o disco de acreção não pode fornecer constantemente o combustível necessário, uma vez que levaria muito tempo para ser acretado. O gás presente no meio interestelar, fora do núcleo galáctico, levaria muito tempo para fluir para a região interna e alimentar o disco de acreção. Isso talvez pudesse ocorrer se existissem campos magnéticos de grandes escalas que atuassem sobre o gás e otimizassem o seu transporte. Além disso, discos de acreção finos tendem a ser gravitacionalmente instáveis em grandes raios e tendem a se despedaçar [63].

A seguir serão estimadas as taxas de acreção e as energias liberadas em BNs supermassivos. Considere um BN com  $M = 1 \times 10^6 M_\odot$ , girando lentamente. Supondo que o raio da órbita interna do disco  $R_*$  é  $r_I = 5GM/c^2$  e  $\eta = 0,15$ , a taxa de acreção crítica é dada a partir da eq. (4.79):

$$\dot{M}_{\text{crit}} \simeq 2,3 \times 10^{21} \text{ kg/s} \simeq 3,7 \times 10^{-2} M_\odot/\text{ano}, \quad (5.4)$$

de modo que o disco pode produzir uma luminosidade máxima de

$$L_{\text{ac}} \simeq 10^{41} \text{ erg/s}. \quad (5.5)$$

Suponha, agora, um BN com  $M = 6 \times 10^{10} M_\odot$ , semelhante aos maiores já detectados. Considerando que  $R_* = r_I = 5GM/c^2$  e  $\eta = 0,15$ , a taxa de acreção crítica é

$$\dot{M}_{\text{crit}} \simeq 1,4 \times 10^{26} \text{ kg/s} \simeq 2,2 \times 10^3 M_\odot/\text{ano}. \quad (5.6)$$

A luminosidade máxima que pode ser produzida pelo disco é

$$L_{\text{ac}} \simeq 10^{49} \text{ erg/s}. \quad (5.7)$$

A primeira imagem direta da sombra de um BN foi obtida do M87\*, um BN supermassivo com massa estimada em  $6,5 \times 10^9 M_\odot$  e parâmetro de rotação  $a \simeq 0,94$ , localizado no centro da galáxia Messier 87. O disco de acreção tem um diâmetro máximo de 0,39 anos-luz e o raio do seu horizonte de eventos é 0,0019 anos-luz. A luminosidade

observada do núcleo da galáxia é  $\sim 10^{40}$  erg/s e a potência dos seus jatos situa-se entre  $10^{42}$  e  $10^{43}$  erg/s. A taxa de acreção é  $\sim 0,1 M_{\odot}/\text{ano}$  e adota-se uma eficiência radiativa<sup>2</sup> de 0,1 [104, 49, 57]. Considerando  $\eta = 0,1$ ,  $R_* = r_I = 2GM/c^2$  e  $M = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$ , tem-se que a taxa máxima com a qual ele pode acretar é

$$\dot{M}_{\text{crit}} \simeq 9,0 \times 10^{24} \text{ kg/s} \simeq 143 M_{\odot}/\text{ano}. \quad (5.8)$$

A luminosidade correspondente a essa taxa de acreção é

$$L_{\text{ac}} \simeq 8 \times 10^{47} \text{ erg/s}, \quad (5.9)$$

que é um valor bem superior ao observado. Sendo o valor observado  $L \sim 10^{40}$  erg/s, então a taxa de acreção pode ser menor, da ordem de

$$\dot{M} \simeq 1,1 \times 10^{17} \text{ kg/s} \simeq 1,8 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}. \quad (5.10)$$

Segundo os últimos estudos a taxa de acreção é um pouco maior que este último valor, ficando em,  $(3 - 20) \times 10^{-4} M_{\odot}/\text{ano}$ . Essa diferença de massa acretada está relacionada à energia dos jatos produzidos [58].

### 5.1.3 Surtos de Raios Gama

Entre os fenômenos de extrema energia fazem parte os surtos ou explosões de raios gama (GRBs de *Gamma Ray Bursts*), que são as explosões mais luminosas do universo, onde há liberação de energia da ordem de  $10^{53}$  erg/s na forma de raios gama, durante algumas dezenas de segundos. Após os raios gama são emitidos também raios X, radiação visível e ondas de rádio. Os GRBs foram descobertos em 1967 por satélites militares norte-americanos que tinham como objetivo detectar radiação X e gama oriundas de possíveis explosões nucleares realizadas pela URSS (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas). Os GRBs ocorriam de forma aleatória no espaço e no tempo, indicando que eram de origem extragaláctica [7, 2, 3].

A duração dos GRBs é de 0,1 a 1000 s, e a radiação emitida possui energia entre 0,1 e 100 MeV, com fluxo entre 0,01 e 100 fótons/cm<sup>2</sup>.s. Alguns GRBs emitem, em 10 s, a mesma quantidade de energia que o Sol emitirá ao longo de 10 bilhões de anos em que ficará na sequência principal [7].

Os modelos atuais mais aceitos quanto à origem dos GRBs consistem: no processo de formação de um BN de massa estelar, onde os raios gama seriam oriundos do disco de acreção em alta rotação; na colisão entre BNs, entre um BN e uma estrela de nêutrons ou entre duas estrelas de nêutrons; na explosão de estrelas massivas [9, 3]. Porém, há necessidade de melhor compreender os mecanismos que desencadeiam a sua produção.

---

<sup>2</sup>Rejeitou-se modelos com rendimento superior a 0,2 [53].

## 5.2 Jatos

Em muitos AGNs são também produzidos jatos de partículas, cujos comprimentos são  $\sim$  kpc ou  $\sim$  Mpc. Acredita-se que os mesmos são formados pela torção das linhas de campo magnético no disco de acreção, que colima o fluxo de partículas de plasma ao longo do eixo de rotação.

Os jatos de partículas são observados em vários sistemas astrofísicos, como nos AGNs e em sistemas binários formados por estrelas de nêutrons e BNs. Eles carregam momento, massa, energia e campo magnético para longe de sua origem. Os jatos de BNs em binários de raios X são os chamados jatos de microquasar, se estendendo a uma distância  $\sim$  1 pc [105].

### 5.2.1 Formação

À medida que espirala na direção do horizonte de eventos do BN, o plasma é comprimido num volume menor no disco de acreção, o que aumenta a sua pressão. Isso faz com que o plasma se expanda, criando uma região em forma de um toroide. Quando o plasma se movimenta em direção ao BN, sua temperatura aumenta para milhões de graus, elevando ainda mais a pressão e fazendo com que sejam produzidos dois jatos que são expelidos para fora do plano do disco [2, 63].

Um esquema das regiões internas ao redor de um BN supermassivo num AGN está apresentado na fig. (5.1). Grandes quantidades de energia são liberadas no disco de acreção e parte dela é injetada na coroa onde, por meio da ação das linhas de campos magnéticos, superaquece as partículas. A coroa produz intensa radiação X e pode formar jatos de partículas, que são oriundos da região central do disco.

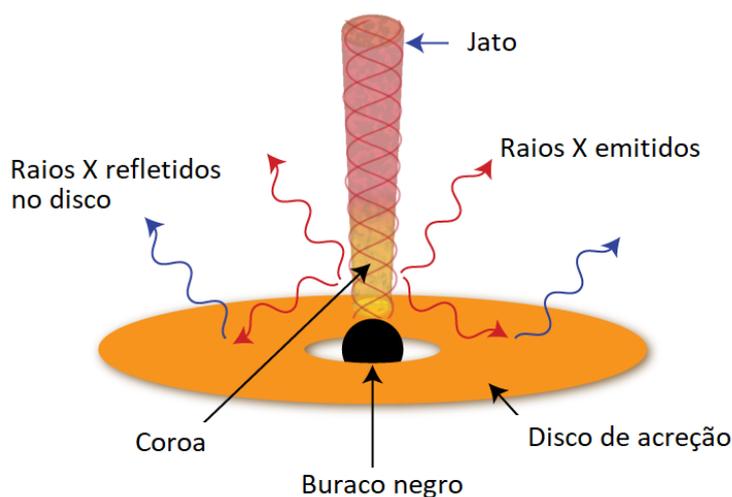


Figura 5.1: Esquema de um disco de acreção ao redor do BN supermassivo em um AGN com a formação de um jato de partículas [90].

O campo magnético do disco cria um campo elétrico perpendicular a ele. As linhas do campo magnético giram com o disco e o plasma é acelerado ao longo das linhas acima do disco. As linhas do campo magnético enrolam-se em torno do eixo de rotação, criando um canal estreito por onde o plasma passa, formando um feixe colimado. Esses jatos estendem-se no espaço por até milhares de anos-luz [2, 63, 95].

Análises observacionais apontam que os jatos são formados predominantemente por um plasma de elétrons e pósitrons, apesar de não ser descartado que sejam formados por elétrons e prótons. Tais partículas são aceleradas, pelos campos elétricos, na direção perpendicular ao disco, podendo alcançar velocidades relativísticas [106, 95].

Ao espiralarem ao redor das linhas do campo magnético criado pelo próprio jato, as partículas aceleradas emitem radiação síncrotron. O espectro da radiação emitida não é térmico (radiação de corpo negro), pois as partículas que produzem a radiação não se encontram em equilíbrio térmico com a vizinhança [63].

## 5.2.2 Características do Plasma

Para estudar alguns fenômenos envolvidos no processo de acreção é necessário descrever a matéria como um plasma, e não apenas como um gás. A maior parte da matéria do universo é formada por plasma. O gás interestelar é constituído em sua maioria por hidrogênio neutro, porém, próximo às estrelas e BNs com disco de acreção, o hidrogênio é ionizado pela radiação emitida, formando um plasma. A seguir serão descritas brevemente as principais características do plasma, baseado em [63, 107, 108].

Um plasma é formado por uma mistura de um gás de elétrons e um gás de íons, cujas partículas possuem massas  $m_e$  e  $m_i$ , respectivamente. Os elétrons e íons interagem eletromagneticamente e a intensidade da força é proporcional a  $1/r^2$ , sendo  $r$  é a distância entre eles.

O plasma é um bom condutor de eletricidade e de calor e seu estudo é mais complexo do que de um gás monoatômico. Isso deve-se a vários fatores, entre os quais a diferença significativa de massa entre os constituintes e ao fato que eles podem ter diferentes temperaturas. Além disso, as forças elétricas são de maior alcance, em relação às partículas colidindo num gás e, sendo formado por partículas carregadas eletricamente, o plasma também gera campos elétricos e magnéticos e sofre forças eletromagnéticas.

A dinâmica das partículas num plasma é governada pelos campos internos, devido ao movimento das partículas, e pela aplicação dos campos externos. A teoria cinética utiliza aproximações estatísticas para equacionar a distribuição de cada espécie de partículas que forma o plasma. O modelo magnetohidrodinâmico (MHD) considera o plasma como um fluido condutor onde a identificação de cada partícula é desprezível, sendo estudado como um todo a partir das equações da MHD, que inclui as propriedades hidrodinâmicas e eletromagnéticas.

Um plasma é um gás ionizado que tem um número grande o suficiente de partículas carregadas para blindar eletrostaticamente a si mesmo, numa pequena distância

comparada com outros comprimentos de interesse físico. Ele tende a manter a mesma densidade de íons e elétrons, e um pequeno desequilíbrio de cargas elétricas produz forças que tendem a restaurar a neutralidade. Mesmo um gás em que somente 1% das partículas estejam ionizadas, pode apresentar as características de um plasma.

Todos os plasmas estão sujeitos a pequenas perturbações, de natureza térmica e/ou eletromagnética de modo a oscilar numa frequência fundamental chamada frequência de plasma. Para calcular essas frequências considera-se um plasma uniforme com um pequeno excesso de elétrons em algumas regiões pequenas.

Os íons tem uma carga média  $Ze$  que é  $\simeq e$  pois  $Z$  geralmente é pequeno. Sejam as densidades do número de íons e elétrons

$$N_i \simeq N_0 \quad N_e = N_0 + N_1(\mathbf{v}, t) \quad (5.11)$$

com  $N_1 \ll N_0$  e  $N_1 = 0$  fora da pequena região. O excesso de carga  $N_1$  origina um campo elétrico  $\mathbf{E}$  tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} N_1 e. \quad (5.12)$$

Este campo elétrico movimenta as partículas do plasma e, sendo  $m_i \gg m_e$ , os elétrons movem-se muito mais rapidamente que os íons. Os elétrons movem-se como um fluido com velocidade  $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$ , sendo que  $|\mathbf{v}_e| \propto N_e$ . A equação de Euler (3.16) para o movimento dos elétrons é

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e\mathbf{E}. \quad (5.13)$$

O termo  $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$  foi omitido porque  $N_1$  é pequeno. A densidade de força é  $-N_e\mathbf{E}$  e a densidade de massa  $N_e m_e$ .

A conservação da carga transportada pelos elétrons exige que

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = 0. \quad (5.14)$$

A partir da eq.(5.11) tem-se

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0, \quad (5.15)$$

pois  $\partial N_0 / \partial t = 0$  e  $\nabla \cdot (N_1 \mathbf{v}_e)$  é desprezível.

Tomando o divergente da eq. (5.13) e a derivada temporal da eq. (5.15):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}_e) = \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}_e) = 0. \quad (5.17)$$

Subtraindo a eq. (5.16) da eq.(eq4.2plasma) e considerando (5.12), vem que

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} - \frac{N_0 e^2}{m_e \varepsilon_0} N_1 = 0, \quad (5.18)$$

de modo que o desequilíbrio de carga  $N_1$  oscila com uma frequência

$$\omega_p = \left( \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2}, \quad (5.19)$$

cujos valores numéricos são  $\omega_p = 5,7 \times 10^4 N_0^{1/2}$  rad/s ou  $\nu_p = 9,0 \times 10^3 N_0^{1/2}$  Hz. Um plasma que possui  $\nu_p$  é opaco à radiação eletromagnética de frequência  $\nu < \nu_p$  ou  $\omega < \omega_p$ .

O campo elétrico gerado pelo desequilíbrio de carga é limitado pelo efeito do fluxo de elétrons a um alcance denominado comprimento de Debye

$$\lambda_D \simeq \left( \frac{\varepsilon_0 k T_e}{N_0 e^2} \right)^{1/2}, \quad (5.20)$$

cujos valores numéricos são cerca de  $\lambda_D \simeq 7(T_e/N_0)^{1/2}$  cm. O comprimento de Debye é a distância na qual o plasma tende a blindar os campos elétricos e fornece a escala de comprimento de alcance para as interações elétricas no meio. Um gás ionizado será considerado plasma se  $\lambda_D$  for pequeno comparado com outras dimensões físicas de interesse.

É conveniente definir a esfera de Debye como uma esfera dentro do plasma com raio igual a  $\lambda_D$ . Cada carga no plasma interage coletivamente apenas com as cargas que se encontram dentro de sua esfera de Debye. O efeito da blindagem é o resultado do comportamento coletivo das partículas dentro de uma esfera de Debye. Entre os critérios para a definição do plasma, o número de partículas envolvidas na oscilação deve ser grande e suas grandezas não devem variar em comprimentos  $L$  menores que  $\lambda_D$ . Para isso,

$$L \gg \lambda_D, \quad N_e \lambda_D^3 \gg 1. \quad (5.21)$$

As interações elétricas (colisões) entre as partículas do plasma envolvem a aceleração de partículas, e a consequente emissão de radiação eletromagnética. No entanto, a perda de energia nas colisões é baixa, de modo que pode-se considerar as colisões como elásticas.

As partículas constituintes do plasma estão em constante movimento térmico e, através de processos de transporte, tendem a equilibrar o momento e a energia. O momento associado a um fluxo de plasma está localizado quase que totalmente nos íons, por causa da sua maior massa. Outro tipo de transporte existente é a condução térmica. A quantidade de energia térmica presente nos íons e nos elétrons é a mesma, mas estes últimos movem-se mais rápidos e dominam o transporte.

### 5.2.3 Campos Magnéticos

Os campos magnéticos são importantes e promissores para a produção de jatos porque são abundantes nos plasmas astrofísicos. Geralmente os astros presentes nos processos de acreção apresentam campos magnéticos intensos, e estes, ao interagirem com o plasma, produzem uma série de efeitos. A presença de correntes elétricas num plasma em

movimento altera o campo magnético, enquanto o campo eletromagnético atua sobre as cargas para produzir correntes.

Nos últimos anos houve um retorno do interesse em estudar campos magnéticos próximos aos BNs, principalmente pela sua relação com a produção e o acionamento dos jatos. Atualmente é quase um consenso que a matéria é impulsionada no disco de acreção pela turbulência magnetohidrodinâmica e pela instabilidade magnetorotacional. [7, 63, 109]. Até porque nem todos os discos de acreção em BN emitem jatos. Por isso, acredita-se que a existência deles deve-se à presença de um alto fluxo magnético no disco, que obstrui parcialmente a queda do plasma no horizonte de eventos e desencadeia a formação dos jatos [110].

Modelos sugerem que os discos geometricamente espessos sejam ideais para suportar intensos campos magnéticos e produzir os jatos relativísticos. Porém, a forma como eles interagem com o campo gravitacional do BN e geram os fluxos colimados de partículas, é algo que deve ser melhor compreendido [44].

O campo magnético  $\mathbf{B}$  é governado pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (5.23)$$

onde  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade magnética. Na eq. (5.23) foi desprezado o termo da corrente de deslocamento. Sendo  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente e  $\sigma$  a condutividade elétrica,

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.24)$$

Tomando o rotacional de (5.24) e utilizando (5.23),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.25)$$

Utilizando a identidade vetorial no lado esquerdo de (5.25),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}), \quad (5.26)$$

e considerando (5.22), bem como sendo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.27)$$

tem-se que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (5.28)$$

Na eq. (5.28) percebe-se que a taxa de variação temporal de  $\mathbf{B}$  é gerada pela difusão e pela convecção de  $\mathbf{B}$ . Numa escala de comprimento  $L$  pequena pode-se desprezar a difusão (último termo) se a condutividade  $\sigma$  for suficientemente grande.

Nos processos astrofísicos pode-se considerar a condutividade infinita, permitindo uma simplificação das equações. Fazendo  $\sigma \rightarrow \infty$ , a partir de (5.24) conclui-se que

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (5.29)$$

o qual é chamado condição magnetohidrodinâmica ideal. Da eq. (5.29) obtém-se a degeneração  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ . A alta condutividade tem como consequência o congelamento das linhas de fluxo magnético dentro do plasma, como será demonstrado a seguir.

A partir da relação de condutividade infinita (5.29) vem

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.30)$$

Relacionando com a lei de indução de Faraday (eq. 5.27) obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.31)$$

A integração da componente normal da variação temporal de  $\mathbf{B}$  sobre uma superfície fixa  $S$  é expressa como

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (5.32)$$

O teorema de Stokes para um campo vetorial  $\mathbf{F}$  é

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.33)$$

onde  $C$  é uma curva fechada que delimita a superfície  $S$ .

Aplicando (5.33) em (5.32) e sendo o fluxo magnético  $\Phi_B$  dado por

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (5.34)$$

tem-se que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}). \quad (5.35)$$

A integral  $\oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{v}$  pode ser considerada o aumento da área, por unidade de tempo, da superfície limitada por  $C$ , de modo que a última integral em (5.35) é o fluxo magnético associado a esta área aumentada. A eq. (5.35) mostra que a variação temporal do fluxo magnético através de  $C$  é a mesma que seria calculada geometricamente considerando que todas as linhas de fluxo se movem junto com o fluido. Dessa forma, conclui-se que as linhas de campo magnético estão congeladas no interior do plasma perfeitamente condutor.

A densidade de força magnética é definida por

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (5.36)$$

Relacionando (5.23) e (5.36) vem

$$\mathbf{f}_B = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (5.37)$$

Utilizando a identidade

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (5.38)$$

tem-se

$$\nabla(B^2) = 2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (5.39)$$

donde vem

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (5.40)$$

Dessa forma, a eq. (5.37) fica

$$\mathbf{f}_B = -\nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (5.41)$$

A quantidade entre parêntesis, que é a densidade de energia magnética, faz o papel da pressão magnética

$$P_B = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (5.42)$$

O termo  $-\nabla P_B$  fornece parte da força magnética e o último termo da eq. (5.41) é importante somente em casos especiais.

Analisando a ordem de magnitude da equação de Euler (3.16) constata-se que a pressão contrária (devido à inércia), a pressão do gás e a pressão magnética são

$$\rho v^2 \sim \rho c_s^2 \sim \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (5.43)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica,  $v$  é a velocidade do gás e  $c_s$  é a velocidade do som no meio. Se a pressão magnética for dominante, a velocidade do fluido é determinada pelo campo magnético. Se a pressão contrária for maior, então o campo magnético é arrastado pelo fluido. No caso intermediário tem-se

$$\rho v^2 \ll \frac{B^2}{2\mu_0} \ll \rho c_s^2. \quad (5.44)$$

Nessa situação, o campo magnético move o fluido mas é confinado pela pressão do gás. Igualando as densidades de energia cinética e magnética obtém-se a velocidade de Alfvén, que é a velocidade com que os distúrbios magnéticos se propagam no plasma,

$$v_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}. \quad (5.45)$$

Uma partícula carregada presente num campo magnético uniforme espirala em torno de  $\mathbf{B}$  com uma frequência angular

$$\Omega = \frac{qB}{m}, \quad (5.46)$$

conhecida como frequência de Larmor. O raio da espiral, denominado raio de Larmor, é

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega}, \quad (5.47)$$

onde  $v_{\perp}$  é a componente da velocidade da partícula ortogonal a  $\mathbf{B}$ .

Considerando que a partícula possui 1 grau de liberdade, a velocidade  $v_{\perp}$  é dada a partir de  $(1/2)mv_{\perp}^2 = (1/2)kT$ , donde vem

$$v_{\perp} = \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}, \quad (5.48)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura e  $m$  é a massa da partícula. A partir de (5.46) e (5.48), obtém-se  $r_L$  como

$$r_L = \frac{(mkT)^{1/2}}{qB}. \quad (5.49)$$

O valor de  $r_L$  limita a distância que uma partícula pode se movimentar no plasma numa direção ortogonal a  $\mathbf{B}$ .

A galáxia M87 foi observada por H. Curtis em 1918 que observou um raio reto curioso, aparentemente conectado com o núcleo por uma linha tênue de matéria. Esse raio é um jato que se estende por milhares de quilômetros, podendo ser observado em vários comprimentos de onda. A potência dos jatos foi estimada em  $10^{42-45}$  erg/s [49]. Na Fig.(5.2) tem-se o núcleo da galáxia M87, numa imagem registrada pelo Telescópio Espacial Hubble. Os lóbulos são alimentados por dois jatos relativísticos emitidos em direções opostas pelo núcleo, os quais estendem-se por cerca de 6 mil anos-luz e tem uma luminosidade óptica de  $10^{41}$  erg/s. A radiação síncrotron do jato, que vão das ondas de rádio até os raios X, sugere a presença de um disco de acreção magnetizado formado por plasma composto por elétrons relativísticos e por íons não-relativísticos. A radiação X do jato tem uma luminosidade cerca de 50 vezes maior que no óptico [49, 7, 95].

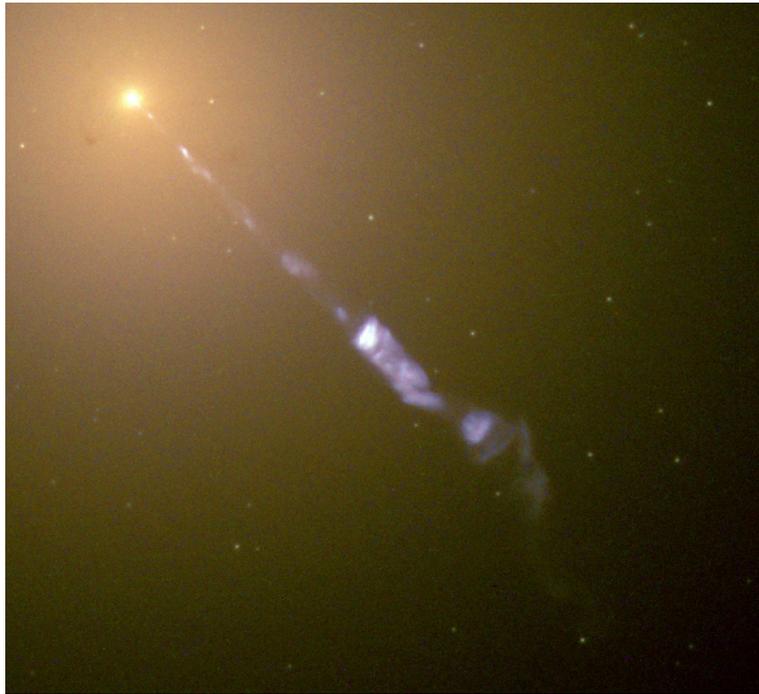


Figura 5.2: Jato emitido pelo BN supermassivo da galáxia M87 [111].

Alguns cientistas defendem que o campo magnético perto de um BN é fraco, fazendo com que a extração de sua energia seja insignificante. Por outro lado, supondo que o campo magnético seja fraco mas esteja quase que congelado no plasma e que o fluxo seja fortemente cortado dentro de um raio de estabilidade, haverá amplificação do campo a valores bem altos em relação à pressão térmica. Dessa forma, esses campos podem ser eficientes em extrair a energia rotacional do BN e/ou criar um fluxo de energia e momento angular para as partes externas do disco de acreção [7].

O campo magnético nas proximidades de um BN pode ser escrito em termos da taxa de acreção  $\dot{M}$  como

$$B^2 = \frac{2\dot{M}}{r^2} \quad (5.50)$$

onde  $r$  é o raio do BN. A estrutura das linhas de campo magnético são formadas por linhas abertas e fechadas (fig. 5.3). As linhas de fluxo abertas emanam do horizonte de eventos ou do disco e se estendem até o infinito, e as fechadas conectam o horizonte com o disco de acreção. O ângulo de abertura  $\theta_{\max}$  separa as linhas de campo abertas e fechadas em cada hemisfério. As linhas abertas emanam do horizonte pra  $0 < \theta < \theta_{\max}$ , e as fechadas conectam o horizonte ao disco entre  $\theta_{\max}$  e o plano equatorial [112].

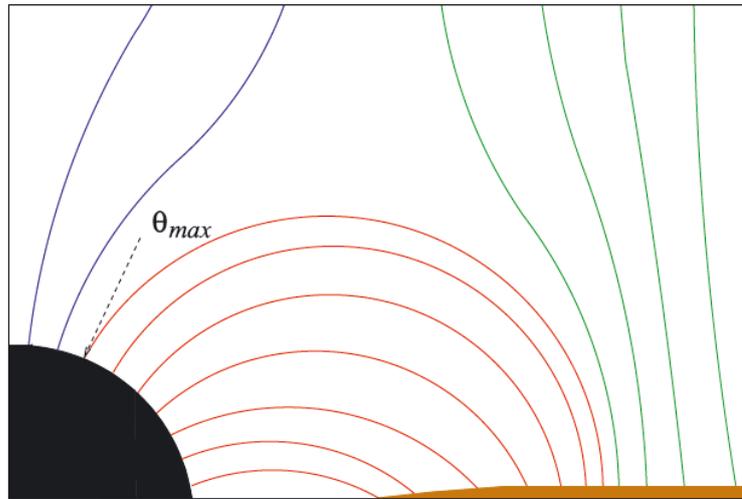


Figura 5.3: Estrutura de linhas de campo magnético num BN [112].

Simulações mostram que, nos jatos acionados magneticamente, as linhas de campo podem ser conectadas ao disco sem tocar no horizonte de eventos. Isso faz com que ocorra dissipação de energia e transferência de momento angular do disco para o jato. O jato é formado extraindo energia e momento angular do disco. A perda de matéria pelos jatos é

$$q_{\text{jato}} = \frac{\dot{M}_{\text{jato}}}{\dot{M}}, \quad (5.51)$$

onde  $\dot{M}_{\text{jato}}$  é a taxa de fluxo que escoo para o jato e  $\dot{M}$  a taxa de acreção do BN [112].

A rotação diferencial do plasma orbital faz com que as linhas de campo magnético radial atuem como um dínamo que gera um campo magnético poloidal  $\mathbf{B}_p$ . Este produz um fluxo de Poynting, que é o jato [112]. Em BNs de Kerr, os discos de acreção se estendem dentro da ergosfera, fazendo com que a matéria seja torcida. Na interação com os campos magnéticos, originam-se os jatos. Observa-se uma correlação entre a velocidade angular do disco e as velocidades dos seus jatos [101, 60].

Considere inicialmente o movimento de cargas elétricas individuais sob a ação da gravidade e de campos magnéticos. O movimento de um gás ionizado é governado pela equação de Euler (3.16). A densidade de força vem da eq. (5.13), sendo dada por

$$\mathbf{f} = -\rho\mathbf{g} + q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (5.52)$$

onde  $q$  é a densidade de carga elétrica [63].

As condições relevantes parecem ser o caso magnetostático, onde os campos magnéticos equilibram a gravidade, e a situação livre de forças, onde as cargas elétricas na magnetosfera são consideradas móveis para atuarem como fontes de campo. A condição livre de forças implica [63]

$$q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.53)$$

Assume-se que existem grandes forças de campo que dominam os outros termos da densidade de força. A condição livre de força requer uma densidade de carga  $q \neq 0$ , desde que

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{j} \times \mathbf{B} \neq 0. \quad (5.54)$$

A neutralidade geral pode ser mantida se existirem regiões de carga líquida oposta. O campo magnetostático é importante na determinação da estrutura de um disco de acreção magnetizado e a condição de força livre é apropriada para o modelo Blandford-Znajek, como será descrito adiante [63].

## 5.2.4 Disco, Campo Magnético e Jatos

A maioria dos modelos propostos para explicar os jatos relativísticos invocam a presença de campos magnéticos. No disco estes campos possibilitam que o plasma escape ao longo das linhas de campo, podendo ser acelerado e originando um jato relativístico [112, 109].

As partes internas do disco de acreção são forçadas a se alinhar com a rotação do BN. Dessa forma, os jatos produzidos podem estar alinhados com o momento angular. A escala de tempo para o alinhamento do disco com o BN depende diretamente do tempo para o disco transferir o momento angular na direção radial, sendo dado por

$$t_R \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (5.55)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade e  $R$  o raio do disco. A distorção provocada pelo disco propaga-se na mesma escala de tempo [113].

Há uma correlação entre as densidades de fluxos de ondas de rádio e raios X duros. Embora as variações no raio interno aparentemente não causem flutuações na potência do jato, há evidências do acoplamento entre o jato e o disco. As observações também mostram que há uma correlação entre o fluxo de matéria no disco e a sua temperatura com a densidade do fluxo de ondas de rádio emitidas. Constata-se também que não existe uma correlação entre o raio interno e a densidade do fluxo das ondas de rádio emitidas, bem como que a potência do jato não é modulada pelas mudanças no raio interno do disco de acreção. É possível que as variações na taxa de acreção de massa afetem principalmente a temperatura e o fluxo de gás no disco, mas não o seu raio interno [109].

Os dados sugerem que a produção do jato está ligada à ionização do disco. Uma explicação simples é que as linhas de campo magnético poloidal são mais facilmente ancoradas na superfície de um disco altamente ionizado do que num disco de baixa ionização. A taxa de acreção está correlacionada com o fluxo de ondas de rádio, e isso pode indicar um acoplamento simples entre a primeira e a potência do jato [109]. A relação entre a potência do jato emitido e a luminosidade do núcleo em ondas de rádio, baseada em observações e análise de alguns AGNs, é

$$P_{\text{jato}} \sim 1,6 \times 10^{36} \left( \frac{L_{\text{radio}}}{10^{30}} \right)^{0,81} \text{ erg/s.} \quad (5.56)$$

No estado suave (sem excitação) não observa-se jatos de ondas de rádio no núcleo. A diminuição da potência do jato principal pode ser responsável pela diminuição do fluxo das ondas de rádio no núcleo [64].

Os jatos binários de raios X dos BNs são revelados principalmente pela detecção de ondas de rádio. Ocorre também emissão de outras frequências do espectro, como os raios X, mas que se tornam difíceis de distinguir da emitida pelo processo de acreção [64].

### 5.2.5 Radiogaláxias

As radiogaláxias são galáxias que possuem uma intensa emissão em rádio, com  $L \sim 10^{40-45}$  erg/s. Quando observadas no óptico geralmente elas têm a aparência de uma galáxia elíptica. Porém, quando observadas em rádio, apresentam uma estrutura dupla com dois lóbulos emissores [2]. Muitas das radiogaláxias possuem lóbulos e a quase totalidade delas possui jatos. Os lóbulos são alimentados continuamente pelos jatos de partículas que canalizam a energia do centro do disco de acreção [96, 95].

Cygnus X-1 é uma das radiofontes mais intensas localizada na constelação de Cisne. Como já foi comentado no capítulo 4, Cygnus X-1 é formado por um BN com  $M = 21,2 M_{\odot}$  e uma estrela supergigante com  $M \simeq 40 M_{\odot}$ , que alimenta o disco de acreção. Através de observações constatou-se que o BN possui uma rotação extrema, a relação entre a espessura do disco e o seu raio é  $H/R < 0,03$  e a luminosidade emitida é  $L = 1,2 \times 10^{37}$  erg/s, o que equivale a  $L = 6 \times 10^{-3} L_{\text{Edd}}$  [109, 88].

As fontes de radio estendidas consistem num par de lóbulos separados em uma galáxia elíptica. No caso de Cygnus X-1, seus lóbulos encontram-se a 50 kpc de distância

da galáxia central e possuem cerca de 17 kpc de diâmetros. Sua emissão em rádio é de  $10^{45}$  erg/s [95].

Para manter a emissão de rádio nos lóbulos, é necessário a existência dos jatos relativísticos. Nestes, as partículas carregadas emitem radiação ao serem aceleradas em torno das linhas de campo magnético. A emissão de radiação síncrotron ocorre desde as ondas de rádio até os raios X e gama, sendo detectadas principalmente nas de primeiro tipo [101].

Uma importante fonte de raios X de alta energia é a galáxia ativa Cygnus A, presente na fig. (5.4). Esta imagem incorpora a visualização em diversos comprimentos de onda, registrados por diferentes telescópios. Cygnus A é a radiogaláxia mais potente, próxima à Terra, encontra-se a cerca de 600 milhões de anos-luz de distância e seus lóbulos estendem-se ao longo de um eixo por quase 300.000 anos-luz, alimentados por jatos de partículas relativísticas oriundos do BN central. Os pontos quentes provavelmente marcam as extremidades dos jatos, impactando o material frio e denso circundante [114].

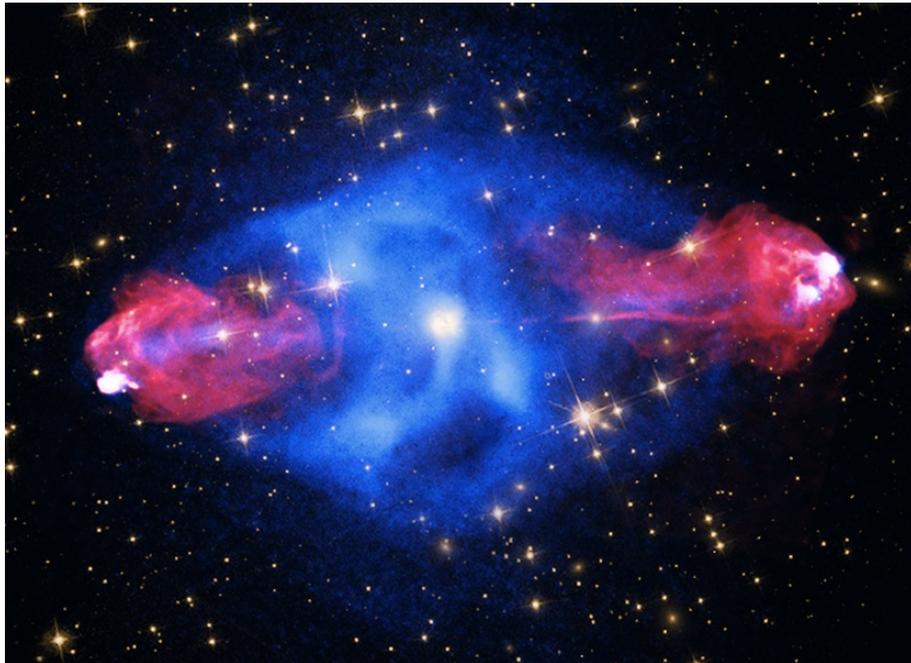


Figura 5.4: Imagem de Cynus A [114].

O BN de Cygnus A possui  $M \simeq 2,5 \times 10^9 M_{\odot}$  e seus jatos são impulsionados eletromagneticamente até uma distância  $\sim 10^{3-4} r_S$  [115]. As fontes de rádio de Cygnus A requerem uma energia mínima de  $10^{59}$  erg e um campo magnético de  $5 \times 10^{-5}$  G. Isso produz um tempo de vida de  $t_{\text{rad}} = 10^7$  anos e uma luminosidade  $L \sim 5 \times 10^{44}$  erg/s [63].

A fig. (5.5) representa a geometria cônica de um jato, onde  $B_{\parallel}$  é o campo magnético paralelo e  $B_{\perp}$  é o campo magnético perpendicular. Próximo ao núcleo o campo magnético é predominantemente paralelo ao eixo do jato ( $B_{\parallel}$ ) e, à medida que se afasta, tende a ser ortogonal ao eixo ( $B_{\perp}$ ) [63].

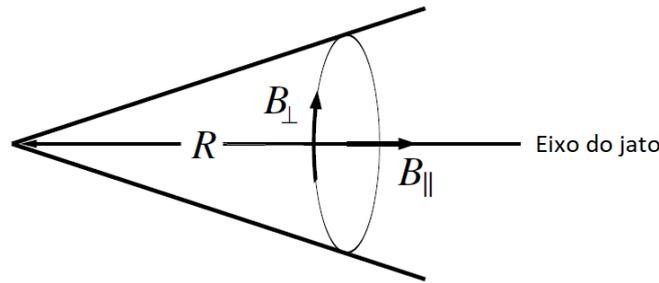


Figura 5.5: Geometria cônica de um jato [63].

A conservação do fluxo magnético a uma distância  $R$  da origem implica que

$$\Phi_B = \pi R^2 B_{\parallel} = C_1, \quad (5.57)$$

onde  $C_1$  é uma constante. Sendo  $B_{\perp}$  a componente do campo magnético que circunda o eixo, tem-se

$$\Phi_B = \oint B_{\perp} dl = 2\pi R B_{\perp} = C_2, \quad (5.58)$$

onde  $l$  é o comprimento da circunferência e  $C_2$  uma constante. Comparando as duas expressões anteriores constata-se que  $B_{\parallel}$  cai mais rapidamente que  $B_{\perp}$ . Dessa forma, grandes distâncias,  $B_{\perp}$  é dominante [63].

Na atualidade existem muitas dúvidas sobre a produção, constituição e aceleração dos jatos. Entre elas está a existência da assimetria em algumas ocasiões, onde os jatos são vistos em apenas um dos lados do núcleo. Além disso, alguns jatos observados não são retos e outros parecem se curvar sobre si mesmo, de modo que eles não poderiam ser confinados por campos magnéticos gerados por correntes nos jatos. Outra questão está relacionada ao problema do confinamento, pois, segundo estimativas de intensidade e pressão do campo magnético, de temperatura e densidade de partículas em núcleos de galáxias, os valores não seriam suficientes para confinar os jatos [63, 115].

## 5.2.6 Energia Eletromagnética

Se um BN de Kerr é rodeado por um campo magnético, pode ocorrer um acoplamento do material do disco em rotação com as linhas de campo magnético, podendo originar uma estrutura helicoidal do campo, cuja componente toroidal colimaria o fluxo e originaria o jato. Em 1977 os astrofísicos Roger Blandford e Roman Znajek elaboraram um modelo de extração de energia a partir da rotação de um BN rodeado por um disco de acreção magnetizado. Denominado processo ou mecanismo de Blandford-Znajek, atualmente é a descrição preferida para a formação dos jatos astrofísicos. Nele, as linhas de campo magnético, juntamente com as correntes do plasma no disco, induzem uma diferença de potencial. Se a intensidade do campo magnético for forte o suficiente ele

desencadeia a produção elétrons-pósitrons no vácuo da magnetosfera, que são colimados ao longo do eixo de rotação [116].

Nas últimas décadas o mecanismo de Blandford-Znajek vem sendo considerado o principal mecanismo para produção de jatos em AGNs e também responsável pelos surtos de raios gama [112, 117]. A potência de um BN em rotação é dada por

$$P_{BZ} \simeq \frac{1}{32} \Omega_B^2 B_{BN}^2 r_{BN}^2 a_* c \quad (5.59)$$

onde  $r_{BN}$  é o raio do horizonte de eventos,  $\Omega_B$  é a velocidade angular das linhas de campo magnético,  $\Omega_{BN}$  é a velocidade angular do BN,  $a^*$  é o parâmetro de rotação adimensional ( $0 \leq a^* \leq 1$ ),  $B_{BN}$  é a intensidade do campo magnético e  $c$  é a velocidade da luz. O termo  $\Omega_B^2$  é dado por

$$\Omega_B^2 = \frac{\Omega_B(\Omega_{BN} - \Omega_B)}{\Omega_{BN}^2}. \quad (5.60)$$

A eficiência máxima do mecanismo Blandford-Znajek implica que no horizonte de eventos do BN  $\Omega_B(r_{BN}) = \Omega_{BN}/2$  [7, 116].

A seguir será construído um modelo de extração de energia eletrodinâmica de um disco de acreção num campo gravitacional newtoniano, baseado em [63]. A descrição do mecanismo Blandford-Znajek utiliza a teoria da relatividade geral, e também leva em consideração a energia de rotação do BN. No nosso modelo, apenas será estimado a energia eletromagnética que estaria presente num disco de acreção.

Considere um campo de correntes movendo-se em círculos no plano  $z = 0$ . O campo magnético será estável, sendo  $B_\phi = 0$ ,  $B_R \neq 0$  e  $B_z \neq 0$ . Se a corrente elétrica na superfície do disco diminuir rapidamente com o aumento do raio  $R$ , será formado um *loop* circular de corrente e o campo magnético será aproximadamente dipolar, com as linhas de campo se abrindo perto do eixo. Se a intensidade da corrente cair mais lentamente com o aumento do raio  $R$ , os *loops* em raios maiores dominam. No eixo  $z$  pode-se esperar que as linhas de campo se dobrem em sua direção.

Supondo, agora, um disco de acreção magnetizado. A densidade de energia magnética do disco deve ser pequena em comparação as densidades de energia térmica e cinética de rotação. Espera-se também que o disco seja totalmente ionizado e tenha alta condutividade elétrica, de forma que o campo magnético move-se em conjunto com o material do disco.

Sejam  $\mathbf{B}_T$  e  $\mathbf{B}_P$  os campos magnéticos toroidal e poloidal, e  $\mathbf{E}_T$  e  $\mathbf{E}_P$  os campos elétricos toroidal e poloidal, respectivamente. Sendo  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$ , tem-se que  $\mathbf{B}_T = (0, B_\phi, 0)$  e  $\mathbf{B}_P = (B_R, 0, B_z) = \mathbf{B} - \mathbf{B}_T$ . O campo elétrico é representado como  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_P$ . Sendo o modelo estacionário, as grandezas presentes são independentes do tempo.

O fluxo magnético  $\Phi_B$  através de uma superfície que atravessa um círculo no eixo de simetria não depende do tempo e, pela lei de Faraday  $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$ , a força eletromotriz é nula. Dessa forma, vem que  $\mathbf{E}_T = 0$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_P$ .

Sendo que  $B_\phi$  independe de  $\phi$ , tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_T = 0. \quad (5.61)$$

Sendo que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , vem que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_P = 0. \quad (5.62)$$

Isso significa que pode-se considerar as linhas de campo separadamente nas componentes poloidais e toroidais. As linhas de campo  $\mathbf{B}_P$  podem ser consideradas por exemplo, como agindo juntamente com o material do disco. A velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}_B$  é constante em uma linha de campo. Condições suficientes para campos estacionários simétricos axialmente são a condição magnetohidrodinâmica (eq. 5.29) e a condição livre de força

$$q\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0. \quad (5.63)$$

Essa última condição significa que uma carga girando no disco não experimenta uma força, permanecendo em repouso nele com o passar do tempo. Isso faz com que o campo elétrico no sistema rotativo desapareça:  $\mathbf{E}' = 0$ . Sendo  $\boldsymbol{\Omega}_B$  a velocidade angular da linha de campo, de modo que  $\boldsymbol{\Omega}_B = (0, 0, \Omega_B)$ , tem-se que

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_P + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (5.64)$$

donde vem

$$\mathbf{E}_P = -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{B}_P. \quad (5.65)$$

Sendo  $\nabla \times \mathbf{E}_P = 0$  (consequência da independência de tempo de  $\mathbf{B}$ ) e considerando (5.62), vem que

$$\mathbf{B}_P \cdot \nabla \Omega_B = 0. \quad (5.66)$$

Isso mostra que  $\Omega_B$  não se altera ao longo das linhas de campo poloidais, possibilitando uma solução estacionária.

As linhas de força magnéticas são aproximadamente congeladas no material do disco. Mas este congelamento não pode ser exato, pois não haveria torque no disco e nenhuma extração de energia. Uma pequena velocidade relativa é necessário. Isso ocorre porque o campo está presente em material onde existe forças acima do plano do disco.

Na fig. (5.6) estão representados os fluxos de corrente em superfícies magnéticas no disco de acreção em torno de um BN. Ao longo de uma linha de campo poloidal  $\boldsymbol{\Omega}$  é constante, bem como independente de  $\phi$  por simetria. Essas linhas formam as chamadas superfícies magnéticas. Se essa superfície for um círculo centrado no eixo  $z$ , devido ao fato de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , o fluxo magnético  $\Phi_B$  independe da superfície e é constante nas superfícies magnéticas.

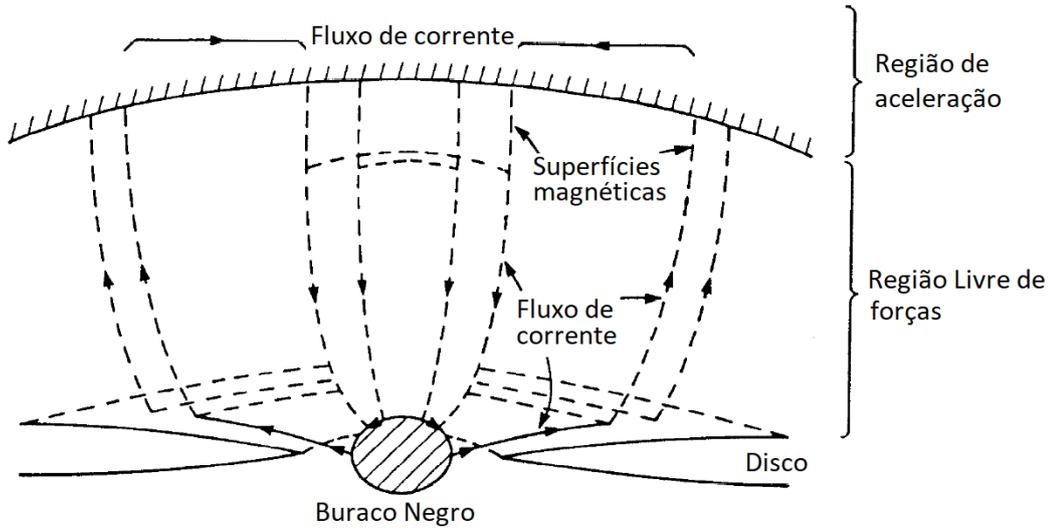


Figura 5.6: Fluxos de corrente em superfícies magnéticas no disco de acreção em torno de um BN [63].

Considere uma superfície magnética e  $z \geq 0$  limitada por um círculo de raio  $R$  no disco. Uma corrente  $I$  deve fluir no interior de qualquer superfície para gerar  $\mathbf{B}_T \neq 0$ , fornecendo um fluxo energético não-nulo. De acordo com a lei de Ampère aplicada num círculo centrado no eixo  $z$ , a intensidade de  $\mathbf{B}_T$  produzida por  $I$  é

$$B_T = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (5.67)$$

Considere agora duas superfícies magnéticas adjacentes delimitadas por círculos de raios  $R$  e  $R + dR$  no disco, e sejam  $I$  e  $I + dI$  as correntes fluindo para o interior dessas superfícies. Para evitar o acúmulo de carga, deve haver uma corrente radial  $I$  fluindo entre as duas superfícies e um retorno da corrente na região de aceleração. Isso é possível porque essas regiões não estão livres de forças de modo que a corrente não seja obrigada a fluir ao longo das superfícies magnéticas. Dessa forma, há uma dissipação de energia na região de aceleração que representa a energia transmitida do disco. Na região intermediária, livre de força, não há dissipação de energia.

A energia eletromagnética que flui através da região livre de força para a região de aceleração é dada pelo vetor de Poynting, que representa a densidade direcional do fluxo de energia,  $L/A$ :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_P \times \mathbf{B}_T, \quad (5.68)$$

pois  $\mathbf{E}_T$  e  $\mathbf{B}_P$  são nulos. Sendo  $\mathbf{E}_P$  dado pela eq. (5.65) a intensidade de  $\mathbf{S}$  é

$$S \sim \frac{1}{\mu_0} R \Omega B_P B_T. \quad (5.69)$$

$\mathbf{B}_P$  e  $\mathbf{B}_T$  são determinados nas regiões não livres de forças.

Assume-se que perto da região de aceleração as partículas movem-se para cima, junto com as linhas de campo, paralelas a  $\mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T$ , com velocidades da ordem de  $c$ , e uma velocidade circular  $v_\phi = R\Omega$  paralela com  $\mathbf{B}_T$ .

Através de um diagrama de velocidades relativas tem-se

$$\frac{B_P}{B_T} \sim \frac{(c^2 - R^2\Omega^2)^{1/2}}{R\Omega} \sim \frac{c}{R\Omega}, \quad (5.70)$$

de modo que pode-se escrever  $B_T$  como

$$B_T \sim \frac{R\Omega}{c} B_P. \quad (5.71)$$

Dessa forma a eq. (5.69) fica

$$S \sim \frac{1}{\mu_0} \frac{R^2\Omega^2}{c} B_P^2. \quad (5.72)$$

Sendo  $\mathbf{B}_P = \mathbf{B} - \mathbf{B}_T$  e  $\mathbf{B}_P > \mathbf{B}_T$ , vem  $B_P \simeq B$ , de modo que

$$S \sim \frac{1}{\mu_0 c} R^2\Omega^2 B^2. \quad (5.73)$$

A potência eletromagnética máxima que pode ser extraída do disco é dada por<sup>3</sup>

$$P_{\text{elet}} \sim \int_0^R S \cdot 2\pi R' dR'. \quad (5.74)$$

Sendo  $S$  dado por (5.73),

$$P_{\text{elet}} \sim \frac{2\pi\Omega^2 B^2}{\mu_0 c} \int_0^R R'^2 R' dR' = \frac{\pi\Omega^2 B^2 R^4}{2\mu_0 c}. \quad (5.75)$$

Sendo  $R \sim r_S = 2GM/c^2$  e  $\Omega = (GM/R^3)^{1/2}$ , a potência máxima será

$$P_{\text{elet}} \sim \frac{\pi G^2}{\mu_0 c^3} B^2 M^2, \quad (5.76)$$

ou

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{-39} B^2 M^2 \text{ J/s} \sim 10^{-32} B^2 M^2 \text{ erg/s}. \quad (5.77)$$

Sendo a massa  $M$  do BN dada em função da massa do Sol  $M_\odot$  e a intensidade do campo magnético  $B$  dada em gauss (G), onde  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ , tem-se

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{29} \left( \frac{B}{10^4} \right)^2 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{ erg/s}. \quad (5.78)$$

A seguir serão feitas algumas estimativas da potência eletromagnética em alguns BNs supermassivos, considerando os campos magnéticos situados no intervalo  $10^{-1} \text{ G} \lesssim B \lesssim 10^5 \text{ G}$ . Se  $M = 10^6 M_\odot$ ,

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{31-43} \text{ erg/s}. \quad (5.79)$$

<sup>3</sup>Sendo a área do disco  $A = \pi R^2$ , tem-se que  $dA/dR = 2\pi R$ , donde vem  $A = \int 2\pi R dR$ .

Para  $M = 10^8 M_\odot$ ,

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{35-47} \text{ erg/s.} \quad (5.80)$$

Sendo  $M = 10^{10} M_\odot$ ,

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{39-51} \text{ erg/s.} \quad (5.81)$$

No caso do BN supermassivo em M87\*, com  $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ , a taxa de acreção estimada é  $(3 - 20) \times 10^{-4} M_\odot/\text{ano}$ , a densidade de partículas  $N_e \sim 10^{4-7}/\text{cm}^3$ , a intensidade do campo magnético  $B \sim (1 - 30) \text{ G}$  e a temperatura dos elétrons do plasma em  $T_e \sim (1 - 12) \times 10^{10} \text{ K}$ . A potência do jato emitido foi estimada em [57]

$$P_{\text{jato}} \sim 10^{42-43} \text{ erg/s.} \quad (5.82)$$

De acordo com o nosso modelo (eq. 5.78), utilizando  $B \sim 10 \text{ G}$ , tem-se que a potência eletromagnética máxima que pode ser liberada pelo disco de acreção ao redor desse BN é

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{43} \text{ erg/s,} \quad (5.83)$$

tendo a mesma ordem de grandeza.

O mecanismo de Blandford-Znajek também funciona para BNs estelares. Dessa forma, será usado o modelo simplificado desenvolvido anteriormente para estimar a energia eletromagnética máxima para um BN estelar com  $M = 10 M_\odot$ , por exemplo. Para campos magnéticos situados no intervalo  $10^{-1} \text{ G} \lesssim B \lesssim 10^5 \text{ G}$ ,

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{21-33} \text{ erg/s,} \quad (5.84)$$

o que corresponde a um valor pequeno.

Analisando, agora, o caso de um BN pertencendo a um sistema binário juntamente com uma estrela de nêutrons do tipo magnetar. Um magnetar possui alta intensidade de campo magnético, chegando até  $\sim 10^{15} \text{ G}$ , bem como apresenta forte emissão de raios X e gama [118]. Esse tipo de sistema binário pode ser um poderoso mecanismo de geração de energia, produzindo luminosidades com picos de até  $10^{57} \text{ erg/s}$ , cujo valor é comparável às explosões mais energéticas de raios gama. Suponha que um BN com  $M = 20 M_\odot$  acrete o material da estrela. Considerando um intervalo mais elevado para os campos magnéticos, como  $10^6 \text{ G} \lesssim B \lesssim 10^{15} \text{ G}$ , vem que

$$P_{\text{elet}} \sim 10^{36-54} \text{ erg/s,} \quad (5.85)$$

cuja potência corresponde aos surtos de raios gama, porém, inferior aos picos mais energéticos.

## Considerações Finais

Neste trabalho estudamos o fenômeno da acreção em buracos negros (BNs), estimando as energias envolvidas. Quanto a sua massa  $M$ , os BNs são classificados, principalmente, em estelares e supermassivos. Os estelares são formados a partir de estrelas com  $M > 25 M_{\odot}$  e possuem  $M \simeq (3 - 25) M_{\odot}$ . Os BNs supermassivos estão presentes possivelmente no centro de todas as galáxias e possuem  $M \simeq 10^{6-10} M_{\odot}$ , sendo formados possivelmente por fusão de BNs estelares e pela agregação de material estelar.

Primeiramente fizemos uma descrição newtoniana de um BN, analisamos o movimento de uma partícula ao seu redor e encontramos que ela pode descrever uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. O nosso interesse esteve nas órbitas fechadas, em especial à circunferência, que ocorre quando a energia potencial do conjunto é mínima.

No capítulo 2 abordamos os BNs a partir da teoria da relatividade geral. Independentemente de como foram formados, todos os BNs são caracterizados por apenas 3 parâmetros: massa  $M$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$ . Um BN com massa  $M$  e que não rotaciona é chamado BN de Schwarzschild. Ele possui uma singularidade, onde está concentrada toda a sua massa, e um horizonte de eventos de raio  $r_S = 2GM/c^2$ , que representa a superfície fronteira do BN, a partir da qual tudo o que passar não conseguirá retornar. Analisando a trajetória de partículas massivas ao seu redor, se a trajetória for aberta a partícula poderá ou não ser capturada pelo BN, dependendo de como nele incide. Estudando as órbitas fechadas, encontramos o raio da órbita circular estável mais interna (ISCO),  $r_I = 6GM/c^2$ . Uma partícula com órbita  $r < r_I$  necessariamente acabará por atingir o horizonte de eventos.

Um BN que possui massa  $M$  e momento angular  $J$  é denominado BN de Kerr. Sua estrutura é mais complexa que o de Schwarzschild, apresentando uma singularidade na forma de anel, um horizonte de eventos cujo raio depende do seu momento angular, sendo menor quanto mais rapidamente girar, e uma ergosfera, região externa ao horizonte de eventos que força a matéria e a radiação que estiverem presentes a girar com ele. A sua ISCO possui valor que também depende do momento angular, sendo igual ou menor que o BN de Schwarzschild,  $(GM/c^2) \leq r_I \leq (6GM/c^2)$ .

Uma partícula em órbita num BN possui uma energia de ligação gravitacional e, ao se mover do infinito para a ISCO, a partícula pode liberar essa energia na forma de radiação. Isso corresponde a um valor máximo de 0,057 no BN de Schwarzschild e

0,42 num BN de Kerr. Tais valores são muito importantes pois limitam superiormente o rendimento nos processos de acreção.

Os estudos dos BNs se intensificaram muito nas últimas décadas. Além dos diversos indícios indiretos de suas existências, a detecção de ondas gravitacionais oriundas de fusões de BNs, bem como as imagens diretas do disco de acreção num BN supermassivo, vem comprovando as teorias científicas e dando um grande impulso nas pesquisas nessa área.

Após apresentar algumas características de um gás astrofísico, no capítulo 3 detalhamos o modelo de acreção esférica, obtendo expressões para a taxa de acreção em BNs bem como fizemos algumas estimativas de luminosidades máximas produzidas para BNs de Schwarzschild. Para um BN com  $M = 5 M_{\odot}$ , a sua taxa de acreção encontrada foi  $\sim 10^{-15} M_{\odot}/\text{ano}$ , sendo capaz de produzir uma luminosidade máxima  $\sim 10^{30} \text{ erg/s}$ . Um BN supermassivo com  $M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$  consegue acretar  $\sim 10^{-5} M_{\odot}/\text{ano}$ , sendo capaz de produzir  $\sim 10^{42} \text{ erg/s}$ , o que é um valor maior que o observado para alguns BNs dessa massa, mas bem abaixo de outros de maior atividade.

No capítulo 4 fizemos uma descrição dos discos de acreção, que são estruturas gasosas ao redor de um objeto central. Sendo que a maioria dos BNs e os outros corpos celestes possuem rotação, a matéria que deles se aproximam forma um disco, onde ela perde momento angular devido à viscosidade e migra para o BN. As tensões produzidas pela viscosidade no disco aumentam a sua temperatura, produzindo ondas eletromagnéticas que são irradiadas para o espaço, compondo a luminosidade total. Através de um modelo de disco fino e estável, que constitui o modelo padrão, demonstramos que a luminosidade emitida pelo disco é a metade da luminosidade de acreção, sendo que a outra parte acaba sendo armazenada na forma de energia cinética do BN. A seguir estimamos a energia liberada por BNs estelares com diferentes rotações e rendimentos. Num BN de Schwarzschild com  $M = 5 M_{\odot}$  e  $\eta = 0,05$ , a luminosidade máxima de acreção é  $\sim 10^{38} \text{ erg/s}$ . Para um BN de Kerr com  $M = 20 M_{\odot}$ , com baixa rotação e  $\eta = 0,1$ , a luminosidade máxima por ele produzida é  $\sim 10^{38} \text{ erg/s}$ . Um BN com rotação extrema,  $M = 25 M_{\odot}$  e  $\eta = 0,3$ , consegue produzir  $\sim 10^{37} \text{ erg/s}$ . Portanto, um BN estelar acretando na taxa máxima pode produzir no máximo uma luminosidade  $\sim 10^{38} \text{ erg/s}$ .

Os núcleos ativos de galáxias (AGNs) foram descobertas na década de 1940 e melhor estudados a partir da década de 1960. Acredita-se que sejam formados por um BN supermassivo localizado em seus centros, acretando material que esteja na sua redondeza. Quando ativos possuem  $L \sim 10^{38-48} \text{ erg/s}$ . No capítulo 5 exploramos os AGNs e a formação dos jatos, nos detendo nas energias envolvidas. Segundo estimativas, um BN com  $M = 1 \times 10^6 M_{\odot}$  girando lentamente consegue produzir até  $10^{41} \text{ erg/s}$ , enquanto um BN com  $M = 6 \times 10^{10} M_{\odot}$ , um dos maiores já detectados, produz até  $10^{49} \text{ erg/s}$ . Tais valores possuem a mesma ordem de grandeza dos divulgados pelos últimos estudos, como o do BN M87\*.

Em muitos AGNs, estrelas de nêutrons e em binários com BNs, também estão pre-

sentos os jatos, formados por elétrons e pósitrons, que são lançados no espaço até distâncias de milhares de anos-luz. Os jatos são produzidos pela interação do campo magnético com o plasma do disco, canalizando parte dele ao redor do eixo de rotação e acelerando-o até velocidades relativísticas. Nesse trabalho elaboramos um modelo para estimar a potência eletromagnética de um disco de acreção. Para BNs com  $M \simeq (6 - 10) M_{\odot}$ , o valor encontrado foi  $P \sim 10^{31-51}$  erg/s, dependendo da intensidade do campo magnético no disco, que variou entre  $10^{(-1)-5}$  G. Se toda essa potência for transmitida para o jato, consegue-se chegar aos valores da maioria dos jatos observados, como os emitidos por M87\*. No entanto, não consegue-se gerar as potências dos jatos mais energéticos e dos surtos de raios gama, que atingem até  $10^{57}$  erg/s. Para isso, a intensidade do campo magnético no disco de acreção ao redor dos BNs deve ser maior do que as estimadas atualmente. Campos magnéticos da ordem de até  $10^{15}$  G estão presentes em alguns tipos de estrelas de nêutrons. Dessa forma, jatos e surtos de raios gama com energia extrema poderiam ser produzidos quando um BN supermassivo acretasse estrelas com essas características.

Concluimos que alguns elementos da Relatividade Geral dos BNs conseguem reproduzir matematicamente e aproximadamente o fenômeno da acreção, a luminosidade dos AGNs e a potência dos jatos, com exceção dos picos mais energéticos, desde que os BNs tenham matéria disponível e suficiente para acretar.

## Referências Bibliográficas

- [1] Augusto DAMINELI NETO. *Estrelas. In: Astronomia: uma visão geral do universo*. 2.ed. São Paulo: Edusp, 2008.
- [2] Kepler de SOUZA FILHO; Maria de F. O. SARAIVA. *Astronomia e Astrofísica*. 2.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [3] Hannu KARTTUNER; Pekka KRÖGER; Heikki OJA; Markku POUTANEN; Karl J. DONNER (Eds.). *Fundamental Astronomy*. 5.ed. Berlin: Springer, 2007.
- [4] Jorge E. HORVATH. *Fundamentos da Evolução Estelar, Supernovas e Objetos Compactos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [5] Fridolin WEBER. *Introdução à Relatividade Geral e à Física de Estrelas Compactas*. Tradução de Emil de L. Medeiros. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- [6] Bernard F. SCHUTZ. *A First Course in General Relativity*. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [7] Max CAMENZING. *Compact Objects in Astrophysics: white dwarfs, neutron stars and black holes*. Springer: Heidelberg, 2007.
- [8] et. al. R. ABBOTT. Properties and Astrophysical Implications of the  $150 m_{\odot}$  Binary Black Hole Merger GW190521. *The Astrophysical Journal Letters*, 900(L13), (2020).
- [9] Jorge E. HORVATH; P. S. CUSTÓDIO. *Os Buracos Negros na Ciência Atual: um brevíssimo manual introdutório*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- [10] Ray D'INVERNO. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press Inc., 1998.
- [11] John TAYLOR. *Mecânica Clássica*. Tradução de Waldir Roque. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [12] Stephen T. THORNTON; Jerry B. MARION. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5.ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [13] Keith R. SYMON. *Mechanics*. 3.ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

- [14] Herbert GOLDSTEIN; Charles POOLE; John SAFKO. *Classical Mechanics*. 3.ed. San Francisco: Addison Wesley, 2010.
- [15] Grant R. FOWLES; George L. CASSIDAY. *Analytical Mechanics*. 7.ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2005.
- [16] Reiner M. DREIZLER; Cora S. LÜDDE. *Theoretical Mechanics. Theoretical Physics 1*. 1.ed. Frankfurt: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [17] L. LANDAU; E. LIFCHITZ. *Mechanics. Course of Theoretical Physics. v.1*. 2.ed. Oxford: Pergamon Press Ltd, 1969.
- [18] Marcus A. M. de AGUIAR. *Tópicos de Mecânica Clássica*. São Paulo: Editora Livraria da Física; Rio de Janeiro: CBPF: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2011.
- [19] R. Douglas GREGORY. *Classical Mechanics: an undergraduate text*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [20] Tom W. B. KIBBLE; Franck H. BERKSHIRE. *Classical Mechanics*. 5.ed. London: Imperial College Press, 2004.
- [21] Wolfgang RINDLER. *Relativity: special, general and cosmological*. 2.ed. New York: Oxford University Press, 2006.
- [22] James FOSTER; J. David NIGHTINGALE. *A Short Course in General Relativity*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [23] Charles MISNER; Kip S. THORNE; John A. WHEELER. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [24] Sean CARROLL. *Spacetime and Geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [25] James HARTLE. *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*. São Francisco: Addison Wesley, 2003.
- [26] Albert EINSTEIN. Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie (Fundamental Ideas of the General Theory of Relativity and the Application of this Theory in Astronomy). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1915):315, (1915).
- [27] Albert EINSTEIN. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (On the General Theory of Relativity). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1915):778,799, (1915).

- [28] Albert EINSTEIN. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie (Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1915):831, (1915).
- [29] Albert EINSTEIN. Feldgleichungen der gravitation (The Field Equations of Gravitation). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1915):844, (1915).
- [30] Albert EINSTEIN. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (The Foundation of the General Theory of Relativity). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (49):769, (1916).
- [31] M. P. HOBSON; G. P. EFSTATHIOU; A. N. LASENBY. *General Relativity: an introduction for physicists*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [32] K. SCHWARZSCHILD. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie (On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1916):189, (1916) Traduzido para o inglês por S. Antoci e A. Loinger. Disponível em <https://arxiv.org/abs/physics/9905030v1>. Acesso em: 21 Dez. 2021.
- [33] Alberto SAA. Cem Anos de Buracos Negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38(4), 2016.
- [34] K. SCHWARZSCHILD. Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit (On the Gravitational Field of a Sphere of Incompressible Fluid according to Einstein's Theory). *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, (1916):424, (1916) Traduzido para o inglês por S. Antoci. Disponível em <https://arxiv.org/abs/physics/9912033v1>. Acesso em: 21 Dez. 2021.
- [35] Yvonne CHOQUET-BRUHAT. *General Relativity and Einstein's Equations*. New York: Oxford University Press, 2009.
- [36] Valeri P. FROLOV; Andrei ZELNIKOV. *Introduction to Black Hole Physics*. New York: Oxford University Press, 2011.
- [37] Jorge CASTIÑEIRAS; Luís C. B. CRISPINO; George E. A. MATSAS. Horizonte de Eventos. *Scientific American Brasil. Edição Especial: Centenário dos Artigos que Revolucionaram a Física: Einstein e o futuro*, (29).
- [38] Jorge CASTIÑEIRAS; Luís C. B. CRISPINO; George E. A. MATSAS; Daniel A. T. VANZELLA. O Retrato do Monstrengo. *Scientific American Brasil. Edição Especial: Gênios da Ciência: Stephen Hawking: em busca do segredo do cosmos*.
- [39] Ta-Pei CHENG. *Relativity, Gravitation and Cosmology: a basic introduction*. New York: Oxford University Press, 2005.

- [40] Robert M. WALD. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [41] Matthías Ásgeir JÓNSSON. *Orbits of Particles Around Compact Objects: from newtonian theory to general relativity*. Degree in Physics. Faculty of Physics. University of Iceland, 2016.
- [42] Luciano REZZOLLA. *An Introduction to Astrophysical Black Holes and Their Dynamical Production*. In: *Astrophysical Black Holes*. Editores: F. Haardi; V. Gorini; U. Moschella; A. Treves; M. Colpi. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [43] Roy P. KERR. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, (11):237, (1963).
- [44] Christopher S. REYNOLDS. *Observational Constraints on Black Hole Spin*, Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2011.08948.pdf>>. Acesso em: 04 Mai. 2021.
- [45] Ronaldo R. de F. MOURÃO. *Dicionário Enciclopédico de Astronomia e Astronáutica*. Nova Fronteira: Rio de Janeiro, 1987.
- [46] A. OLEJAK; K. BELCZYNSKI; T. BULIK; M. SOBOLEWSKA. Synthetic Catalog of Black Holes in the Milky Way. *Astronomy and Astrophysics*, 638(A94), (2020).
- [47] Avery E. BRODERICK; Abraham LOEB. Retratos Possíveis de um Buraco Negro. *Scientific American Brasil*, (92).
- [48] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, PRL 116(061102), (2016).
- [49] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. the Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, L1(875):1–17, (2019).
- [50] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. array and Instrumentation. *The Astrophysical Journal Letters*, L2(875):1–28, (2019).
- [51] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. data Processing and Calibration. *The Astrophysical Journal Letters*, L3(875):1–32, (2019).
- [52] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. imaging the Central Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, L4(875):1–52, (2019).

- [53] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. physical Origin of the Asymmetric Ring. *The Astrophysical Journal Letters*, L5(875):1–31, (2019).
- [54] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. the Shadow and Mass of the Central Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, L6(875):1–44, (2019).
- [55] Shuo ZHANG; et al. Sagittarius A\* High-Energy X-Ray Flare Properties During Nustar Monitoring of the Galactic Center from 2012 to 2015. *The Astrophysical Journal*, 843(2):96, Jul 2017.
- [56] Tuan DO; et al. Unprecedented Near-Infrared Brightness and Variability of Sgr A\*. *The Astrophysical Journal*, 882(2):L27, Sep 2019.
- [57] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. magnetic Field Structure Near The Event Horizon. *The Astrophysical Journal Letters*, L13(910), (2021).
- [58] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring. *The Astrophysical Journal Letters*, L12(910), (2021).
- [59] Sandip K. CHAKRABARTI. *Study of Accretion Processes on Black Holes: fifty years of developments*, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0402562.pdf>>. Acesso em: 05 abr. 2021.
- [60] R. NARAYAN; E. QUATAERT. Black Hole Accretion. *Science*, (307), (2005).
- [61] Edward P. J. van den HEUVEL; Jan van PARADIJS. Binárias de Raios X. *Scientific American Brasil. Edição Especial: A Vida Secreta das Estrelas*, 2005.
- [62] Stuart L. SHAPIRO; Saul A. TEUKOLSKY. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: the physics of compact objects*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH e Co. kGaA, 2004.
- [63] Juhan FRANK; Andrew KING; Derek RAINE. *Accretion Power in Astrophysics*. 3.ed. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [64] Rob FENDER; Teo MUÑOZ-DARIAS. *The Balance of Power: accretion and feedback in stellar mass black holes*. In: *Astrophysical Black Holes*. Editores: F. Haardi; V. Gorini; U. Moschella; A. Treves; M. Colpi. Cham: Springer International Publishing, 2016.

- [65] B. KOCSIS; A. LOEB. *Menus for Feeding Black Holes. In: The Physics of Accretion onto Black Holes.* Editores: M. Falanga; T. Belloni; P. Casella; M. Gilfanov; P. Jonker; A. King. New York: Springer, 2015.
- [66] F. HOYLE; R. A. LYTTLETON. The Effect of Interstellar Matter on Climatic Variation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35:405–415, (1939).
- [67] F. HOYLE; R. A. LYTTLETON. On the Accretion Theory of Stellar Evolution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101:227–236, (1941).
- [68] F. HOYLE; R. A. LYTTLETON. On the Internal Constitution of the Stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 102:177–193, (1942).
- [69] H. BONDI; F. HOYLE. On the Mechanism of Accretion by Stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 104:273–282, (1944).
- [70] Richard EDGAR. *A Review of Bondi-Hoyle-Littleton Accretion*, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0406166.pdf>>. Acesso em: 05 abr. 2021.
- [71] H. BONDY. On Spherically Symmetrical Accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 112:195–204, (1942).
- [72] A. TREVES; L. MARASCHI; M. ABRAMOWICZ. Basic Elements of Theory of Accretion. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, (100):427–451, (1988).
- [73] Priyamrada NATARAJAN. Os Primeiros Buracos Negros Gigantescos. *Scientific American Brasil*, Abril de 2018.
- [74] N. I. SHAKURA; R. A. SUNYAEV. Black Holes in Binary Systems: observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, (24):337–355, (1973).
- [75] G. S. BISNOVATYI-KOGAN; Ya. M. KAZHDAN; A. A. KLYPIN; A. E. LUTSKII; N. I. SHAKURA. Accretion Onto a Rapidly Moving Gravitating Center. *Soviet Astronomy*, 23:201–205, (1979).
- [76] Stuart L. SHAPIRO. Accretion Onto Black Holes: the emergent radiation spectrum. *The Astrophysical Journal*, (180):531–546, (1973).
- [77] Stuart L. SHAPIRO. Accretion Onto Black Holes: the emergent radiation spectrum. ii. magnetic effects. *The Astrophysical Journal*, (185):69–81, (1973).
- [78] Stuart L. SHAPIRO; Alan P. LINGHTMAN; Douglas M. EARDLEY. A Two-Temperature Accretion Disk Model for Cygnus X-1: structure and spectrum. *The Astrophysical Journal*, (204):187–199, (1973).

- [79] Jason JACKIEWICZ. *Stellar Structure and Evolution - Notas de aula*, 2019. Disponível em <http://astronomy.nmsu.edu/jasonj/565/docs/notes.pdf>. Acesso em: 15 Jul. 2021.
- [80] G. LIPUNOVA; K. MALANCHEV; N. SHAKURA. *The Standard Model of Disc Accretion. In: Accretion Flows in Astrophysical*. Editor: Nikolay SHAKURA. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [81] V. F. SHVARTSMAN. Halos Around Black Holes. *Soviet Astronomy*, 15(3), (1971).
- [82] J. E. PRINGLE; M. J. REES. Accretion Disc Models for Compact X-Ray Sources. *Astronomy and Astrophysics*, 21:1–9, (1972).
- [83] J. E. PRINGLE; M. J. REES; A. G. PACHOLCZYK. Accretion Massive Black Holes. *Astronomy and Astrophysics*, 29:179–184, (1973).
- [84] N. I. SHAKURA. Disk Model of Gas Accretion on a Relativistic Star in a Close Binary System. *Soviet Astronomy*, 16(5):march–april, (1973).
- [85] N. I. SHAKURA; R. A. SUNYAEV. A Theory of the Instability of Disk Accretion on to Black Holes and the Variability of Binary x-ray Sources, Galactic Nuclei and Quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, (175):613–632, (1976).
- [86] Jean-Pierre LASOTA. *Black Hole Accretion Discs. In: Astrophysical Black Holes*. Editores: F. Haardi; V. Gorini; U. Moschella; A. Treves; M. Colpi. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [87] G.S. BISNOVATYI-KOGAN. Dynamic Processes During Accretion into a Black Hole. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 6:247–261, (2001).
- [88] Xueshan ZHAO; Lijun GOU; Yanting DONG; Xueying ZHENG; James F. STEINER; James C. A. MILLER-JONES; Arash BAHRAMIAN; Jerome A. OROSZ; Ye FENG. Re-estimating the Spin Parameter of the Black Hole in Cygnus X-1. *The Astrophysics Journal*, 908(2), (2021).
- [89] *Photo Album: Cygnus X-1*, Disponível em: <https://chandra.harvard.edu/photo/2011/cygx1/>>. Acesso em: 27 Abr. 2021.
- [90] *Gigantic X-Rays Flares Offer New Insight Into the Whirling Maelstrom Just Outside Supermassive Black Holes*, Disponível em: [encurtador.com.br/P2469](http://encurtador.com.br/P2469)>. Acesso em: 23 Jun. 2021.
- [91] Shane W. DAVIS; Ari LAOR. The Radiative Efficiency of Accretion Flows in Individual Active Galactic Nuclei. *The Astrophysics Journal*, 728(2), (2011).
- [92] Kip. S. THORNE. Disk-Accretion onto a Black Hole. II. Evolution of the Hole. *The Astrophysics Journal*, 191:507–5019, (1974).

- [93] Li-Xin LI; Bohdan PACZYNSKI. Extracting Energy from Accretion Into a Kerr Black Hole. *The Astrophysical Journal*, (534):197–198, (2000).
- [94] Paola MARZINI; Jack W. SULENTIC; Mauro D’ONOFRIO. *An Introduction to 50 Years of Research on Quasars. In: Fifty Years of Quasars: from early observations and ideas to future research.* Editores: M. D’Onofrio; P. MARZIANI; J. W. SULENTIC. Berlin: Springer, 2012.
- [95] Elizabete M. de G. Dal PINO; Vera JATENCO-PEREIRA. *Galáxias Ativas e Quasares. In: Astronomia: uma visão geral do universo.* 2.ed. São Paulo: Edusp, 2008.
- [96] Hannu KARTTUNER; Pekka KRÖGER; Heikki OJA; Markku POUTANEN; Karl J. DONNER (Eds.). *Fundamental Astronomy.* 6.ed. Berlin: Springer, 2017.
- [97] E. E. SALPETER. Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects. *The Astrophysics Journal*, 140:796–800, (1964).
- [98] ZEL’DOVICH; I. D. NOVIKOV Y, B. Mass of Quasi-Stellar Objects. *Soviet Physics Doklady*, 9:834, (1965).
- [99] D. LYNDEN-BELL. Galactic Nuclei as Collapsed old Quasars. *Nature*, 223:690–694, (1969).
- [100] Amâncio FRIAÇA. O Devorador Supermassivo. *Scientific American Brasil. Edição Especial: Gênios da Ciência: Stephen Hawking: em busca do segredo do cosmos.*
- [101] D. LYNDEN-BELL. *Jets at Birth and Death. In: The Formation and Disruption of Black Hole Jets.* Editores: I. Contopoulos; D. Gabuzda; N. Kylafis. Sam: Springer, 2015.
- [102] Wei-Hao BIAN; Yong-Heng ZHAO. Accretion Rates and the Accretion Efficiency in Agns. *Astronomical Society of Japan*, 55:599–603, (2003).
- [103] C. de LOORE; J. P. de GRÈVE; H. J. LAMERS. Evolution of Massive Stars with Mass Loss by Stellar Wind. *Astronomy and Astrophysics*, (61):251–259, (1977).
- [104] Tiziana Di MATTEO; Steven W. ALLEN; Andrew C. FABIAN; Andrew S. WILSON; Andrew J. YOUNG. Accretion Onto the Supermassive Black Hole in M87. *The Astrophysics Journal*, 582:133–140, (2003).
- [105] E. M. de Gouveia Dal PINO; P. P. PIOVEZAN; L. H. S. KADOWAKI. The Role of Magnetic Reconnection on Jet/Accretion Disk Systems. *Astronomy and Astrophysics*, 518, (2010).
- [106] C. S. REYNOLDS; A. C. FABIAN; A. CELOTTI; M. J. REES. The Matter Content of the Jet in M87: evidence for an electron-positron jet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, (283):873–880, (1996).

- [107] John R. REITZ; Frederick J. MILFORD; Robert W. CHRISTY. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Tradução de Renê B. Sander. Rio de Janeiro: Elsevier, 1982.
- [108] J. A. BITTENCOURT. *Fundamentals of Plasma Physics*. 3.ed. Springer: New York, 2004.
- [109] J. M. MILLER; G. G. POOLEY; A. C. FABIAN; M. A. NOWAK; R. C. REIS; E. M. CACKETT; K. POTTSCHMIDT; J. WILMS. On The Role of the Accretion Disk in Black Hole Disk-Jet Connections. *The Astrophysics Journal*, 757(20), (2012).
- [110] Alexander TCHEKHOVSKOY. *Launching of Active Galactic Nuclei Jets*. In: *The Formation and Disruption of Black Hole Jets*. Editores: I. Contopoulos; D. Gabuzda; N. Kylafis. Sam: Springer, 2015.
- [111] *Jato Oriundo do Buraco Negro da Galáxia M87*, Disponível em: <<https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/m87-jet.jpg>>. Acesso em: 05 Jun. 2021.
- [112] Zoltán KOVA'CS; László Á. GERGELY; Peter L. BIERMANN. Maximal Spin and Energy Conversion Efficiency in a Symbiotic System of Black Hole, Disc and Jet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416:991–1009, (2011).
- [113] P. NATARAJAN; J. E. PRINGLE. The Alignment of Disk and Black Hole Spins in Aactive Galactic Nuclei. *The Astrophysics Journal*, 506:L97–L100, (1998).
- [114] *Astronomy Picture of the Day*, Disponível em: <<https://apod.nasa.gov/apod/ap150124.html>>. Acesso em: 13 Jul. 2021.
- [115] B. BOCCARDI; T. P. KRICHBAUM; U. BACH; F. MERTENS; E. ROS; W. ALEF; J. A. ZENSUS. The Stratified Two-Sided Jet of Cygnus A: Acceleration and collimation. *Astronomy and Astrophysics*, (585):a33, (2016).
- [116] R. D. BLANDFORD; R. L. ZNAJEK. Electromagnetic Extraction of Energy from Kerr Black Holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179:433–456, (1977).
- [117] M. LIVIO; G. I. OGILVIE; J. E. PRINGLE. Extracting Energy from Black Holes: the relative importance of the Blandford-Znajek mechanism. *The Astrophysical Journal*, (512):100–104, (1999).
- [118] S. A. OLAUSEN; V. M. KASPI. The McGill Magnetar Catalog. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, (212), (2014).