UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOHN FRANK MATOS ASCONA

Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas: Um Estudo das Condições de Otimalidade

Campinas

2021

John Frank Matos Ascona

Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas: Um Estudo das Condições de Otimalidade

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira

Coorientador: Roberto Andreani

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno John Frank Matos Ascona e orientada pelo Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M428p Matos Ascona, John Frank, 1985-
Problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas : um estudo das condições de otimalidade / John Frank Matos Ascona. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira.
Coorientador: Roberto Andreani.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Controle ótimo. 2. Condições de otimalidade. 3. Condições de qualificação. I. Oliveira, Valeriano Antunes de. II. Andreani, Roberto, 1961-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discrete optimal control problems with mixed constraints : a study of the conditions of optimality
Palavras-chave em inglês:
Optimal control
Optimality conditions
Constraint qualifications
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Valeriano Antunes de Oliveira [Orientador]
Geraldo Nunes Silva
Lucelina Batista dos Santos
Gilson do Nascimento Silva
Camila Isoton
Data de defesa: 17-12-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-6454-9137
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8121012158433720

Tese de Doutorado defendida em 17 de dezembro de 2021 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). VALERIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). GERALDO NUNES SILVA

Prof(a). Dr(a). LUCELINA BATISTA DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). GILSON DO NASCIMENTO SILVA

Prof(a). Dr(a). CAMILA ISOTON

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças para poder concluir mais um projeto.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Valeriano por ter acreditado em mim, pela confiança, ajuda, compreensão e paciência ao longo deste tempo, vou sentir muita saudade de todas nossas reuniões das sextas-feiras.

Agradeço ao meu co-orientador, Prof. Roberto pelo apoio que deu para mim durante todo meu doutorado, por também ter acreditado em mim, pelos conselhos e pela confiança.

Agradeço ao Prof. Aurélio pelos conselhos que deu para mim quando eu mais precisava.

Agradeço a minha namorada Lizet, por toda paciência, compreensão e amor que ela dá todos os dias, pela força que me deu nos momentos mais difíceis, desejo que continuemos nosso caminho juntos.

Agradeço aos meus pais Rosa e Guillermo, pelas ligações e apoio que deram para mim naqueles momentos difíceis.

Agradeço a minha irmã Maryori, por me acompanhar e entender ao longo deste caminho. Agradeço também aos meus irmãos Miguel, Guillermo.

Agradeço aos meus grandes amigos Heraclio e Jackeline, pela amizade, pelos momentos de alegria que compartilhamos, eles viraram pessoas importantes na minha vida.

Agradeço aos meus amigos Rui e Marina pelo apoio que me deram durante o tempo que morei em Picos e pela amizade. Ao Vitaliano pela amizade durante o período do doutorado.

Agradeço aos membros da banca, os professores Geraldo, Lucelina, Gilson, Camila, e ao professor Renato, por aceitaram o convite e pelas sugestões e contribuições no dia da defesa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Todos os nossos sonhos podem se tornar realidade
se tivermos a coragem de persegui-los.”
(Walt Disney)

Resumo

Nesta tese, são obtidas condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas de igualdade e desigualdade usando as abordagens do formalismo de Dubovitskii-Milyutin e da teoria dada por Ben-Tal e Zowe. Sob condições de regularidade do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido e Ben-Tal-Zowe relaxado são obtidas condições não degeneradas. Além disso, condições não degeneradas para certos problemas particulares foram também obtidas por meio de uma outra abordagem. Essencialmente, esta abordagem diferente consiste em descartar restrições redundantes (mistas e de contorno) e, fazendo uso do Teorema da Função Implícita, embutir as restrições restantes na dinâmica e na função objetivo do problema. Com os problemas trabalhados, estas condições podem ser vistas como uma generalização das condições já obtidas em trabalhos recentes.

Palavras-chave: Problemas de Controle Ótimo Discreto. Restrições Mistas. Condições não Degeneradas. Princípio do Máximo Discreto.

Abstract

In this thesis, first and second order necessary optimality conditions are obtained for discrete optimal control problems with mixed equality and inequality constraints using the approaches of the Dubovitskii-Milyutin formalism and the theory given by Ben-Tal and Zowe. Under regularity conditions of the extended Mangasarian–Fromovitz and relaxed Ben-Tal-Zowe types, non-degenerate conditions are obtained. Furthermore, non-degenerate conditions for certain particular problems were also obtained through a different approach. Essentially, this other approach consists in discarding redundant constraints (both mixed and boundary) and, by making use of the Implicit Function Theorem, embed the remaining constraints in the dynamics and in the objective function of the problem. With the problems worked out, these conditions can be seen as a generalization of the conditions already obtained in recent works.

Keywords: Discrete Optimal Control Problems. Mixed Constraints. Non-Degenerate Conditions. Discrete Maximum Principle.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial n-dimensional sobre o conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n_+$	Octante não negativo do $\mathbb{R}^n$.
$\nabla h(x, u)$	Matriz Jacobiana de h no ponto (x, u).
$\nabla_x h(x, u)$	Matriz Jacobiana parcial de h no ponto (x, u) com relação à variável x.
Im h	Imagem da aplicação h.
Nu h	Núcleo da aplicação h.
int Q	Interior do conjunto Q.
Fr Q	Fronteira do conjunto Q.
$\cong$	Isomorfismo canônico entre espaços.
I	Matriz identidade.
$\|A\|$	Representa o número de elementos do conjunto finito A.
C^*	Representa o cone dual do conjunto C.
$co(A)$	Representa o envoltório convexo do conjunto A.
$D(F_0, (x^*, u^*))$	Conjunto de direções de descida do funcional F_0 a partir do processo (x^*, u^*).
$V(Q_I, (x^*, u^*))$	Conjunto de direções factíveis em relação ao conjunto Q_I no processo (x^*, u^*).
$T(Q_E, (x^*, u^*))$	Conjunto de direções tangentes a Q_E no processo (x^*, u^*).
$D^2(F_0, (x^*, u^*), (s, t))$	Conjunto de direções de descida de segunda ordem de F_0 no processo (x^*, u^*) em relação ao vetor (s, t).
$V^2(Q_I, (x^*, u^*), (s, t))$	Conjunto de direções factíveis de segunda ordem de Q_I no processo (x^*, u^*) em relação ao vetor (s, t).
$V^2(Q_I, (x^*, u^*), (s, t))$	Conjunto de direções tangentes de segunda ordem de Q_E no processo (x^*, u^*) em relação ao vetor (s, t).

$\delta^*(\cdot\|S)$	Função suporte ao conjunto S.
$\Lambda(S)$	Domínio efetivo de $\delta^*(\cdot\|S)$.

Sumário

Introdução

Problemas de controle ótimo discreto (ou problemas de controle ótimo com tempo discreto) aparecem no estudo da simulação de sistemas práticos controlados onde as mudanças no estado e no controle podem acontecer em períodos de tempo. Estes tipos de problemas tem grande importância do ponto de vista prático, pois podem ser aplicados na economia, engenharia, pesquisa operacional, e em diversas outras áreas (ver [1], [2], [3], [4], [5]). Assim, do ponto de vista prático, o estudo de problemas de controle ótimo discreto (COD) é muito importante. Entretanto, do ponto de vista teórico, pode-se pensar a priori que eles não são muito relevantes, pois constituem um caso particular dos problemas de programação matemática. Ainda que os problemas COD possam ser reduzidos a um problema de programação matemática, eles tem características próprias (a dinâmica, os períodos de tempo). Assim, é razoável esperar que as condições de otimalidade também sejam formuladas de maneira particular. Por exemplo, as condições de otimalidade são expressas por meio da função Hamiltoniana; enquanto que em problemas de programação não-linear, as condições necessárias de otimalidade são expressas por meio da função Lagrangeana. No contexto de problemas de controle ótimo em tempo contínuo, uma ferramenta importante no desenvolvimento das condições necessárias de otimalidade é o Princípio do Máximo de Pontryagin (ver [6]). Foram feitas muitas provas com a finalidade de estender este princípio para o caso discreto (ver [7], [8], [9], [10], [11]).

Em 1959, Rozonoer foi o primeiro a provar uma versão discreta do Princípio do Máximo de Pontryagim, ele trabalhou um problema COD no qual tanto a função objetivo como o sistema discreto são lineares (ver [7]). Butkovski em 1963, deu um exemplo onde o princípio do máximo discreto não se cumpre, neste exemplo foi considerado a dinâmica não linear (ver [8]). Em 1964, Jordan e Polak consideraram um problema COD com restrições de estado inicial e final em forma separada e restrições de controle abstratas. Nesse artigo foram obtidas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, demonstraram que as técnicas usadas na construção do princípio do máximo podem ser usadas para obter uma condição de tipo máximo local ou estacionariedade (ver [12]). No mesmo ano, Halkin prova o princípio do máximo discreto sob hipótese de convexidade no controle (ver [11]). Em 1966, Gabasov obteve condições necessárias de otimalidade de primeira ordem na forma do princípio do quase-máximo para tempo discreto (ver [10]). Em 1970, Canon, Cullum e Polak, usaram ferramentas de programação matemática e obtiveram condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (ver [9]).

Em 1975, Magnanti acrescentou restrições de estado para cada período ao problema dado em [12], obtendo assim condições necessárias de otimalidade de primeira ordem. Estas condições foram obtidas usando resultados da programação não linear sob a hipótese de posto completo nas restrições de estado (ver [13]).

Em 1978, Boltyanskii, um dos autores do princípio do máximo em tempo contínuo, foi quem apresentou em [2] um estudo mais minucioso da teoria de controle ótimo discreto para diferentes tipos de problemas. Os problemas COD também podem ser obtidos por meio de uma discretização de problemas de controle ótimo contínuo (ver [9], [14]). Sob a hipótese de que a função objetivo é convexa em relação às variáveis de controle, foram estabelecidas condições de otimalidade necessárias de primeira ordem para problemas COD com restrições de controle descritas por conjuntos (restrições abstratas) (ver [14]).

Em 1983, Nahorski, Ravn e Vidal apresentaram o princípio do máximo para problemas COD não lineares com restrições abstratas no controle utilizando a abordagem do limite superior (ver [15]).

Em 1993, Wright implementou algoritmos para problemas COD com restrições mistas por período e restrições de estado final, ambas de desigualdade, utilizando o método de pontos interiores (ver [16]).

Em 2002, Hilscher e Zeidan trabalharam problemas COD com restrições de contorno de igualdade, e empregando uma condição de regularidade de posto completo, obtiveram condições necessárias e suficientes de segunda ordem (ver [17]).

Em 2008, Marinkovíc obteve condições necessárias de otimalidade necessárias de primeira e segunda ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições de igualdade e desigualdade no controle e nas restrições de contorno (ver [18]), este resultado foi generalizado em [19]. Em 2015, Toan, Ansari e Yao obtiveram condições necessárias de segunda ordem para problemas COD com função objetivo não convexa e restrições de controle abstratas (ver [20]). Toan e Thuy acrescentaram restrições mistas sem considerar restrições de controle abstratas ao problema, estes resultados foram aplicados nos casos onde a dinâmica do problema é linear; usando uma condição de regularidade tipo MFCQ obtiveram condições necessárias de segunda ordem (ver [21]). Ainda citamos [12], onde os autores chegaram à conclusão de que as condições necessárias dos problemas COD não lineares estão relacionadas com as condições do princípio do máximo de Pontryagin para problemas de controle ótimo contínuo da seguinte maneira: as condições de transversalidade permanecem idênticas, enquanto a exigência de um máximo global da função Hamiltoniana se torna uma condição de máximo local ou de estacionariedade.

Na literatura foram tratados problemas COD sob a hipótese de regularidade do tipo independência linear (ver [9], [13]). Em [20], [21], [22] e [23], pode-se encontrar o caso em que as hipóteses de regularidade são tipo Abadie ou MFCQ, onde foram consideradas restrições mistas por período e restrições de estado e controle de forma separada.

Levando em consideração os trabalhos feitos até agora surgiu o interesse de estudar as condições de otimalidade necessárias de primeira e segunda ordem para diferentes tipos de problemas COD com restrições mistas, os quais podem ser aplicados por exemplo em problemas de planejamento de produção (ver [3]).

O principal objetivo desta tese é apresentar o Princípio do Máximo Discreto para os seguintes tipos de problemas COD:

(a) Problemas COD com restrições mistas gerais:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k),\ k = 0,\ldots,N, \\ & b(x,u) = 0, \\ & g(x,u) \leqslant 0, \\ & \varphi(x_0,x_{N+1}) = 0, \\ & \phi(x_0,x_{N+1}) \leqslant 0, \end{array} \tag{P_1}$$

e alguns casos particulares.

(b) Problemas COD com restrições mistas gerais e abstratas:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k),\ k = 0,\ldots,N, \\ & b(x,u) = 0, \\ & g(x,u) \leqslant 0, \\ & \varphi(x_0,x_{N+1}) = 0, \\ & \phi(x_0,x_{N+1}) \leqslant 0, \\ & u_k \in U_k,\ \ k = 0,\ldots,N. \end{array} \tag{P_A}$$

O princípio do máximo discreto para problemas do tipo (P_1) e (P_A) serão obtidos via formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Este formalismo foi dado no final de 1962 por Dubovitskii e Milyutin, o qual fornece condições necessárias de otimalidade na forma de uma equação definida na linguagem da análise funcional. Para obter condições não degeneradas, será utilizada a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz estendido, a qual foi definida em [24] para problemas de programação não-linear, mas que ainda não tinha sido considerada no contexto de cotrole ótimo discreto. Além disso, para o problema (P_1), serão obtidas condições de otimalidade de primeira e segunda ordem usando adaptações da teoria que foi desenvolvida em [25], que pode ser vista como uma generalização do formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Neste caso, as condições não-degeneradas foram estabelecidas usando uma adaptação da condição de regularidade dada em [25], que chamamos condição de Ben-Tal e Zowe relaxada. Convém ressaltar que esta condição ainda não havia sido tratada na literatura de problemas COD. No entanto, para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período, os quais são um caso particular do problema (P_A), o Princípio do Máximo Discreto será provado usando uma abordagem alternativa, já trabalhada em problemas de controle ótimo em tempo contínuo (ver [26], [27], [28] e [29]). Esta abordagem diferente consiste em descartar restrições redundantes (mistas e de contorno) e, fazendo uso do Teorema da Função Implícita, embutir as restrições restantes na dinâmica e na função objetivo do problema. As condições não degeneradas serão obtidas sob uma condição de qualificação que envolve somente as restrições mistas por período e restrições de estado inicial ao passo que as condições de Mangasarian-Fromovitz estendida e de Ben-Tal e Zowe relaxada envolvem também a dinâmica do sistema de controle.

Esta tese está dividida em três capítulos:

No Capítulo 1, serão apresentados alguns conceitos de programação não linear. Em seguida, será estudado o formalismo de Dubovitskii-Milyutin e finalmente serão apresentados adaptações da teoria trabalhada em [25], os quais serão de primordial importância no desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 2, apresentamos os problemas COD, os quais são problemas de otimização com um tipo de estrutura particular. Em seguida, será dado o Princípio do Máximo Discreto para o problema (P_1). Além disso, usando a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz estendido (que pressupõe posto constante para as restrições de igualdade e a existência de um elemento no núcleo da matriz jacobiana da aplicação que associa todas as restrições de igualdade, tal que o produto interno desse elemento com o gradiente de cada restrição de desigualdade ativa é estritamente não negativa), serão obtidas condições necessárias de primeira ordem não degeneradas. Apresentaremos um exemplo ilustrativo. Depois, estudamos alguns casos particulares do problema (P_1). No que segue, obteremos o Princípio do Máximo Discreto para o problema (P_A), e usando uma condição do tipo Mangasarian-Fromovitz estendido, obtemos as condições não degeneradas de primeira ordem. Por último, os casos particulares do problema (P_A) serão discutidos utilizando uma abordagem alternativa, sob a qual a condição de posto constate será utilizada apenas nas restrições mistas e de contorno de modo a obter condições necessárias não degeneradas de primeira ordem. Em seguida será dado um exemplo ilustrativo.

No Capítulo 3, apresentaremos condições de primeira e segunda ordem para o problema (P_1), as quais serão obtidas usando a generalização do formalismo de Dubovitskii-Milyutin dada no Capítulo 1, que é uma adaptação da teoria que foi trabalhada em [25]. Por meio de resultados de programação não linear, apresentaremos condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para os casos particulares do problema (P_1), os quais são, problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período tanto de igualdade como desigualdade sob a hipótese de independência linear no controle, e problemas com restrições mistas por período de igualdade sob uma condição do tipo posto constante.

1 Preliminares

O propósito deste capítulo é apresentar fundamentos teóricos da programação não linear, do formalismo de Dubovitskii-Milyutin e sua generalização. Os quais serão fundamentais no desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Condições de Qualificação para Problemas de Programação não Linear

Consideremos o seguinte problema de programação não linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F_0(x) \\ \text{sujeito a} & F_E(x) = 0, \\ & F_I(x) \leqslant 0, \end{array} \qquad (PNL)$$

onde $F_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, F_E = (F_E^1, \ldots, F_E^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, F_I = (F_I^1, \ldots, F_I^l) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ são funções de classe C^2 e definimos o conjunto factível como $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F_E(x) = 0, F_I(x) \leqslant 0\}$.

Definição 1.1. *Seja $x^* \in \Omega$. Uma restrição de desigualdade $F_I^j, j \in \{1, \ldots, l\}$, é dita ativa em x^* se $F_I^j(x^*) = 0$. Caso $F_I^j(x^*) < 0$, dizemos que F_I^j é inativa em x^*. Denotemos por $I_{F_I}(x^*)$ o conjunto de índices das restrições de desigualdade ativas em um ponto $x^* \in \Omega$, isto é,*

$$I_{F_I}(x^*) = \{j \in \{1, \ldots, l\} : F_I^j(x^*) = 0\}.$$

Definição 1.2. *Dizemos que $x^* \in \Omega$ é um minimizador local de F_0 em Ω, se existe uma vizinhança V de x^*, tal que $F_0(x^*) \leqslant F_0(x)$ para todo $x \in V \cap \Omega$.*

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são condições necessárias de otimalidade para o problema de programação não linear se alguma condição de qualificação é satisfeita. Uma condição de qualificação é uma propriedade das restrições do problema de programação não linear para que serve para garantir que um minimizador local satisfaz as condições KKT neste ponto.

Teorema 1.1. *(Karush-Kuhn-Tucker) Seja $x^* \in \Omega$ um minimizador local do problema de Programação Não Linear (PNL) e suponha que alguma condição de qualificação (CQ) é* *satisfeita. Então existem vetores* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *e* $\mu^* \in \mathbb{R}^l$ *tais que*

$$\begin{aligned} -\nabla F_0(x^*) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla F_E^i(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \mu_j^* \nabla F_I^j(x^*), \\ \mu_j^* &\geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, l, \\ \mu_j^* F_I^j(x^*) &= 0, \quad j = 1, \ldots, l. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [30].

A condição de qualificação mais conhecida na literatura é a independência linear dos gradientes das restrições de igualdade e das restrições ativas no ponto.

Definição 1.3. *[30] Dizemos que a condição de qualificação de independência linear (LICQ) é satisfeita em um ponto* $x^* \in \Omega$ *se*

$$\{\nabla F_E^i(x^*)\}_{i=1}^m \cup \{\nabla F_I^j(x^*)\}_{j \in I_{F_I(x^*)}} \text{ é LI.}$$

Esta condição de qualificação garante a existência e unicidade dos multiplicadores de Lagrange.

Definição 1.4. *[30] Dizemos que a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) é satisfeita em um ponto* $x^* \in \Omega$ *quando os* $\{\nabla F_E^i(x^*)\}_{i=1}^m$ *são linearmente independentes e existe um vetor* $d \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\nabla F_E^i(x^*)^\top d = 0 \quad \text{ e } \quad \nabla F_I^j(x^*)^\top d < 0$$

para todo $i = \{1, \ldots, m\}$ *e* $j \in I_{F_I}(x^*)$.

Ainda que um minimizador local satisfaça a condição de MFCQ, não podemos garantir a unicidade dos multiplicadores de Lagrange (ver [31]). Outro fato importante é que condição de MFCQ não se verifica quando as restrições de igualdade $F_E^i(x) = 0$ são substituídas por duas restrições de desigualdade, isto é, $F_E^i(x) \leqslant 0$ e $-F_E^i(x) \leqslant 0$.

Definição 1.5. *[32] Dizemos que a condição de posto constante (CRCQ) vale em* x^* *se existe uma vizinhança* V *de* x^* *tal que para todo* $K \subset \{1, \ldots, m\}$, *e* $J \subset I_{F_I}(x^*)$, *o conjunto dos vetores gradientes*

$$\{\nabla F_E^i(x)\}_{i \in K} \cup \{\nabla F_I^j(x)\}_{j \in J}$$

permanece com o posto constante em V.

Isto significa que x^* satisfaz a condição de posto constante se o posto de qualquer subconjunto dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas não muda em uma vizinhança V de x^*. É interessante observar que a MFCQ não é satisfeita para restrições do tipo $F_E^i(x) \leqslant 0$ e $-F_E^i(x) \leqslant 0$, mas sim pode-se cumprir a condição de posto constante. A versão de CRCQ relaxada foi dada em [33] e nesse trabalho foi provado que é uma condição de qualificação (ver Definição 1.6). O lema a seguir será de grande utilidade quando estudarmos o problema de controle ótimo discreto com restrições mistas para cada período. Especificamente, será utilizado para eliminar restrições redundantes.

Lema 1.1. *Sejam $f, f_1, \cdots, f_q : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções continuamente diferenciáveis, $x \in D$ e D um conjunto aberto. Assumimos que $\nabla f_1(x), \cdots, \nabla f_q(x)$ são linearmente independentes e que $\nabla f(y)$ é uma combinação linear de $\nabla f_1(y), \cdots, \nabla f_q(y)$ para todo $y \in D$. Em particular,*

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \nabla f_i(x). \tag{1.1}$$

Então, existem $D_2 \subset \mathbb{R}^q$, uma vizinhança aberta de $(f_1(x), \cdots, f_q(x))$, e uma função $\varphi : D_2 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(D_2)$, tais que, para todo $y \in D$, temos que $(f_1(y), \cdots, f_q(y)) \in D_2$ e

$$f(y) = \varphi(f_1(y), \cdots, f_q(y)).$$

Além disso, para todo $i = 1, \cdots, q$,

$$\lambda_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(f_1(x), \cdots, f_q(x)). \tag{1.2}$$

Demonstração: Ver [34], Lema 1.4.2.

Observação 1.1. *No Lema 1.1, se $f, f_1, \ldots, f_q$ são de classe C^k, então φ é de classe C^k.*

Definição 1.6. *[35] Dizemos que um ponto $x^* \in \Omega$ satisfaz a condição de qualificação de posto constante relaxada (RCRCQ) se existe uma vizinhança V de x^* tal que, para qualquer subconjunto de índices $J \subset I(x^*)$, a família de vetores gradientes $\{\nabla F_E^i(x)\}_{i=1}^m \cup \{\nabla F_I^j(x)\}_{j \in J}$ tem o mesmo posto em todos os pontos x na vizinhança V de x^*.*

A seguir enunciamos o Teorema da Função Implícita o qual será utilizado neste capítulo.

Teorema 1.2. *Seja $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Suponhamos que no ponto $p = (a, b)$, com $f(p) = c$, a matriz $n \times n$*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p)\right](i, j = 1, \ldots, n)$$

seja inversível. Então existem $Z \subset U$, aberto contendo p, $V \subset \mathbb{R}^m$, aberto contendo a, e $\xi : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, com $\xi(a) = p$, tais que $f(x, \xi(x)) = c$, para todo $x \in V$. Além disso, $\xi'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z)$.

Demonstração: Ver [36], pag. 490.

Por último, enunciamos o Teorema de Alternativa de Motzkin, o qual será usado no Capítulo 2 e 3.

Teorema 1.3. *(Teorema de Alternativa de Motzkin) Para quaisquer matrizes* $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}, i = 0, 1, 2,\ A_0 \neq 0$, *um, e somente um, dos seguintes dois sistemas possui solução:*

$$A_0 x > 0, \quad A_1 x = 0, \quad A_2 x \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou

$$\begin{gathered} A_0^\top y^0 + A_1^\top y^1 + A_2^\top y^2 = 0, \\ (y^0, y^1, y^2) \in (\mathbb{R}_+^{m_0} \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2}). \end{gathered}$$

Demonstração: Ver [37], Teorema 3.3.1 .

1.2 Cones Duais

A seguir vamos dar algumas definições de cones e cones duais que serão importantes no Formalismo de Dubovitskii-Milyutin (D-M). Consideremos $\mathbf{Y}$ um espaço vetorial topológico.

Definição 1.7. *Seja K um subconjunto de $\boldsymbol{Y}$. Dizemos que K é um cone com vértice na origem se para cada $d \in K$ tem-se que $\lambda d \in K$ para todo $\lambda \geqslant 0$.*

Observação 1.2.

- *O interior, o fecho e o envoltório convexo (co) de K também são cones.*
- *Um cone que é um conjunto convexo é chamado de cone convexo.*

Definição 1.8. *Seja K um cone em $\boldsymbol{Y}$ com vértice na origem. O cone dual $K^* \subset \boldsymbol{Y}^*$ é definido por*

$$K^* = \{l \in \boldsymbol{Y}^* : l(x) \geqslant 0 \quad \textit{para todo } x \in K\},$$

ou seja, K^* é definido como o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos não negativos em K, onde $\boldsymbol{Y}^*$ é o dual topológico do espaço Y. Note que K^* é um cone convexo com vértice na origem.

Observação 1.3. *As seguintes afirmações são satisfeitas:*

- *Para qualquer conjunto de índices I, temos*

$$\left(\bigcup_{i \in I} K_i \right)^* = \bigcap_{i \in I} K_i^*$$

onde os $K_i \subset Y$, $i \in I$, são cones com vértice na origem em Y.
(Ver Lema 5.4,Girsanov [38]).

- *Dados K_1, K_2 cones com vértice na origem em Y. Se $K_1 \subset K_2$, então $K_2^* \subset K_1^*$ (Ver Lema 5.5, Girsanov [38]).*

- *$K^{**} = co(\overline{K})$, onde o último conjunto é o fecho fraco do envoltório convexo e*

$$K^{**} = \{x \in E : l(x) \geqslant 0 \text{ para todo } l \in K^*\}.$$

(Ver Lema 5.6, Girsanov [38]).

Sabemos que a seguinte igualdade sempre se cumpre (ver [38], pag. 34):

$$\mathrm{co}(\bigcup_{i \in I} K_i^*) = \sum_{i \in I} K_i^*,$$

onde para $i \in I$, K_i são cones convexos, $\sum_{i \in I} K_i^*$ denota o conjunto de todas as somas finitas $f_{i_1} + \ldots + f_{i_n}$, $f_{i_\tau} \in K_{i_\tau}^*$, $i_\tau \in I$, e I denota um conjunto arbitrário de índices. Pode-se notar que

$$\left(\bigcap_{i \in I} K_i \right)^* \supset \sum_{i \in I} K_i^*. \tag{1.3}$$

Uma questão importante é sob que condições se cumpre a igualdade em (1.3). Os seguintes resultados são dados em [38], onde foi provado sob que hipóteses a igualdade é satisfeita em (1.3).

Lema 1.2. *Sejam $K_i, i \in I$, cones convexos, fechados fracamente. Então*

$$\left(\bigcap_{i \in I} K_i \right)^* = \overline{co(\sum_{i \in I} K_i^*)},$$

ou seja, cone dual da interseção é o fecho fraco do envoltório convexo da soma dos cones duais.*

Demonstração: Ver [38], Lema 5.8.

Corolário 1.1. *Se os cones $K_i, i \in I$, são convexos fechados fracamente e $\sum_{i \in A} K_i^*$ é fechado fracamente, então*

$$\left(\bigcap_{i \in I} K_i \right)^* = \sum_{i \in I} K_i^*.$$

Lema 1.3. *Se K é um cone convexo com vértice na origem e A um subespaço tal que $K \cap A \neq \varnothing$, então*

$$(K \cap A)^* = K^* + L^*.$$

Demonstração: Ver [38], Lema 5.9.

Lema 1.4. *Se $K_1, \ldots, K_n$ são cones convexos abertos tais que $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$, então*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Demonstração: Ver [38], Lema 5.10.

Teorema 1.4. *Se K é um subespaço de Y. Então*

$$K^* = \{l \in Y^* : l(x) = 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

Demonstração: Ver [38], Teorema 10.1.

Teorema 1.5. *Sejam*

$$l \in Y^*, K_1 = \{x : l(x) = 0\}, K_2 = \{x : l(x) \geqslant 0\}, K_3 = \{x : l(x) > 0\}.$$

Então,

$$K_1^* = \{\lambda l, -\infty < \lambda < \infty\}, K_2^* = \{\lambda l, 0 \leqslant \lambda \leqslant \infty\}, K_3^* = \begin{cases} Y^*, & l = 0, \\ K_2^*, & l \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [38], Teorema 10.2.

A seguir apresentamos um resultado fundamental para obter condições necessárias via formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

Lema 1.5. *Sejam $Q_0, \ldots, Q_{N+1}$ cones convexos com vértice em 0, onde os Q_i são abertos para todo $i = 0, \ldots, N$. Então $\bigcap_{i=0}^{N+1} Q_i = \varnothing$ se, e somente se, existem funcionais lineares $l_i \in Q_i^*$, $i = 0, \ldots, N+1$, não todos nulos, tais que $l_0 + l_1 + \ldots + l_{N+1} = 0$.*

Demonstração: Ver [38], Lema 5.11.

1.3 Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Nesta seção apresentamos a teoria desenvolvida por Dubovitskii-Milyutin, que será uma das ferramentas usadas para obter o Princípio do Máximo Discreto. O Formalismo de Dubovitskii- Milyutin fornece condições necessárias de otimalidade para o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F_0(x) \\ \text{sujeito a} & x \in Q \cap V, \end{array} \tag{P}$$

onde $F_0 : X \to \mathbb{R}$, X é um espaço de Banach, V é uma vizinhança da solução ótima, e $Q = \bigcap_{i=1}^{l+1} Q_i$, onde Q_i, para $i = 1, \ldots, l$, tem interior não vazio e são conjuntos dados pelas restrições de desigualdade, Q_{l+1} tem interior vazio e é dado por um sistema de restrições de igualdade.

Observação 1.4. *Nosso interesse nesta tese é trabalhar com problemas do tipo (P), mas na teoria geral X pode não ser um espaço de Banach, basta ser um espaço vetorial topológico, e os Q_i podem não ser dados por sistemas de igualdade e de desigualdade, podem ser restrições abstratas. Além disso, como este formalismo fornece condições necessárias na forma de uma equação definida na linguagem da análise funcional, isto permite abordar diversos problemas utilizando o Formalismo de Dubovitskii- Milyutin.*

A seguir enunciaremos alguns resultados importantes, que serão utilizados para a obtenção das condições necessárias de primeira ordem para o problema (P) por meio do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin (ou simplesmente Formalismo de D-M).

Definição 1.9. *[38] Dizemos que $d \in X$ é uma direção de descida do funcional $F_0 : X \to \mathbb{R}$ no ponto $x^* \in X$, se existem um escalar $\epsilon^* > 0$, uma vizinhança V do vetor d e um número $\alpha = \alpha(F_0, x^*, d), \alpha < 0$, tais que, para todo $0 < \epsilon < \epsilon^*$ e qualquer $\overline{d} \in V$,*

$$F_0(x^* + \epsilon\overline{d}) \leqslant F_0(x^*) + \epsilon\alpha. \tag{1.4}$$

Denotamos por $D(F_0, x^*)$ o conjunto de todas as direções de descida do funcional F_0 no ponto x^*. Note que $D(F_0, x^*)$ é um cone aberto com vértice na origem 0. Dizemos que o funcional F_0 é regularmente de descida se suas direções de descida no ponto x^* formam um conjunto convexo, isto é, $D(F_0, x^*)$ é convexo.

Definição 1.10. *[38] Sejam X um espaço normado e $F_0 : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que F_0 é Fréchet diferenciável em $x^* \in X$ se existe uma aplicação linear contínua, denotada por $\nabla F_0(x^*)$, tal que*

$$F_0(x) = F_0(x^*) + \nabla F_0(x^*)(x - x^*) + r(x - x^*),$$

onde $r(x-x^*) = o(\|x-x^*\|)$, o que significa que $r(x-x^*)/\|x-x^*\| \to 0$ quando $\|x-x^*\| \to 0$.

Teorema 1.6. *Se F_0 é Frechet diferenciável em x^* e $\nabla F_0(x^*)$ é não nulo, então $D(F_0, x^*)$ é um cone aberto convexo e $D(F_0, x^*) = \{d : \nabla F_0(x^*)^\top d < 0\}$.*

Demonstração: Ver [38], Teorema 7.5.

Denotamos os conjuntos das restrições de igualdade e desigualdade por Q_E e Q_I, respetivamente.

Definição 1.11. *[38] Seja $Q_I \subset X$, com int $Q_I \neq \varnothing$. Dizemos que $d \in X$ é uma direção factível em relação ao conjunto Q_I no ponto $x^* \in Q_I$ se existe uma vizinhança U do vetor d e um escalar $\epsilon^* > 0$ tais que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ e todo $\overline{d} \in U$, $x^* + \epsilon\overline{d} \in Q_I$.*

Denotamos por $V(Q_I, x^*)$ ao conjunto das direções factíveis em relação ao conjunto Q_I no ponto x^*.

Observação 1.5.

- *Se $x^* \in int\ Q_I$ então $V(Q_I, x^*) = X$.*
- *Se Q_I é determinado por um funcional $F_I : X \to \mathbb{R}^l$, isto é, $Q_I = \{x \in X : F_I^j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, l\}$, então o cone das direções de descida de F_I sempre está contido no cone das direções factíveis. (Ver [38], Lema 8.1)*
- *Se $Q_I = \{x \in X : F_I^j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, l\}$ é determinado por funcionais $F_I^j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, l$, que são diferenciáveis em x^* e $\nabla F_I^j(x^*) \neq 0$, então o cone factível a Q_I no ponto $x^* \in Fr\ (Q_I)$ coincide com a interseção dos cones de direções de descida de F_I^j, $\quad j = 1, \ldots, l$, no ponto $x^* \in Fr\ (Q_I)$, isto é,*

$$V(Q_I, x^*) = \{v \in X : \nabla F_I^j(x^*)v < 0, j \in I_{F_I}(x^*)\}, \tag{1.5}$$

  onde $I_{F_I}(x^*) = \{j \in \{1, \ldots, l\} : F_I^j(x^*) = 0\}$ é o conjunto das restrições ativas de F_I. Além disso, por (1.5), segue que $V(Q_I, x^*)$ é aberto e convexo.
  (Ver [38], Corolário do Teorema 8.1)
- *Se $Q_{I_1}, \ldots, Q_{I_l}$ são subconjuntos de X tais que $x^* \in Q_{I_j}$, para $j = 1, \ldots, l$, então*

$$\bigcap_{j=1}^{l} V(Q_{I_j}, x^*) = V\left(\bigcap_{j=1}^{l} Q_{I_j}, x^*\right).$$

  (Ver [38], Lema 5.10)

Para obter uma condição suficiente para garantir que $V\left(\bigcap_{j=1}^{l} Q_j, x^*\right) \neq \varnothing$, precisamos da seguinte definição.

Teorema 1.7. *Se Q é um conjunto convexo, então o cone das direções factíveis $V(Q, x^*)$ no ponto x^* é dado por*

$$V(Q, x^*) = \{v \in X : v = \alpha(x - x^*), \ \ x \in int(Q), \alpha > 0\}.$$

Demonstração: Ver [39], Teorema 2.16.

Definição 1.12. *[38] Seja $Q_E \subset X$. Dizemos que um vetor $v \in X$ é uma direção tangente a Q_E no ponto x^* se existem $\epsilon^* > 0$ e uma função $r : (0, \epsilon^*) \to X$ tais que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ temos*

$$x^* + \epsilon v + r(\epsilon) \in Q, \quad \|r(\epsilon)\| = o(\epsilon).$$

Denotaremos ao conjunto das direções tangente a Q_E no ponto x^* por $T(Q_E, x^*)$. Dizemos que o conjunto Q_E é regular no ponto x^* se o cone $T(Q_E, x^*)$ é convexo.

Observação 1.6. *Da definição de direção tangente podemos observar que:*

- *$T(Q_E, x^*)$ é um cone com vértice em 0. No entanto, este cone, em geral, não é fechado nem aberto.*
- *Se v é uma direção factível, então v é uma direção tangente. A recíproca é falsa.*

Observação 1.7. *Em geral, se $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ são subconjuntos de X tais que $x^* \in Q_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então*

$$\bigcap_{i=1}^{n} T(Q_i, x^*) \supset T\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i, x^*\right).$$

A seguir apresentamos um teorema importante que caracteriza o cone das direções tangentes quando o posto é completo.

Teorema 1.8. *(Teorema de Lyusternik) Sejam X, Y dois espaços de Banach, U uma vizinhança do ponto $x^* \in X$ e $F : U \to Y$ um operador Fréchet diferenciável. Suponha que F é regular em x^*, isto é,*

$$Im \nabla F(x^*) = Y,$$

e que sua derivada é contínua em x^*. Então, o cone tangente do conjunto

$$Q_E = \{x \in U : F(x) = F(x^*)\}$$

no ponto x^* coincide com o núcleo do operador $\nabla F(x^*)$,

$$T(Q_E, x^*) = Nu \nabla F(x^*).$$

Além disso, existem uma vizinhança $U' \subset U$ do ponto x^*, um número $K > 0$, e uma aplicação $\chi : U' \to X$ tal que

$$F(\theta + \chi(\theta)) = F(x^*),$$
$$\|\chi(\theta)\| \leqslant K \|F(\theta) - F(x^*)\|$$

para todo $\theta \in U'$.

Demonstração: Ver [14], pag. 30.

Normalmente para caracterizar o cone das direções tangentes $(T(Q_E, x^*))$ é usado o Teorema de Lyusternik que pede uma condição de regularidade tipo posto completo, neste trabalho vamos usar a condição de regularidade tipo posto constante para caracterizar o cone tangente. A seguir provaremos uma proposição que será de grande utilidade na construção do cone tangente.

Proposição 1.1. *Se $\nabla F_E(x)$ tem o mesmo posto em uma vizinhança de $x^* \in Q_E(x) := \{x \in \mathbb{R}^n : F_E(x) = 0\}$, então*

(i) $T(Q_E, x^*) = Nu\nabla F_E(x^*)$.

(ii) Para qualquer $d \in Nu\nabla F_E(x^*)$ existe um número $\epsilon^* > 0$ e uma função continuamente diferenciável $r(\epsilon)$ tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{r(\epsilon)}{\epsilon} = 0, \quad r(0) = 0, \quad F_E(x^* + \epsilon d + r(\epsilon)) = 0, \quad \epsilon \in [-\epsilon^*, \epsilon^*].$$

Demonstração:

(i) $T(Q_E, x^*) \subset \mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*)$

Seja $d \in T(Q_E, x^*)$. Então existem $\epsilon^* > 0$ e uma função $r : (0, \epsilon^*) \to \mathbb{R}^n$ tais que para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, $x^* + \epsilon d + r(\epsilon) \in Q_E$, onde $\|r(\epsilon)\| = o(\epsilon)$. Assim, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, temos

$$F_E^i(x^* + \epsilon d + r(\epsilon)) = 0, \qquad \epsilon \in (0, \epsilon^*).$$

Como F_E^i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, é continuamente diferenciável, então

$$F_E^i(x^* + \epsilon d + r(\epsilon)) = F_E^i(x^*) + \nabla F_E^i(x^*)^\top(\epsilon d + r(\epsilon)) + o(\epsilon d + r(\epsilon)).$$

Pelo fato que $x^*, x^* + \epsilon d + r(\epsilon) \in Q_E$, temos que

$$\epsilon \nabla F_E^i(x^*)^\top d + \nabla F_E^i(x^*)^\top(r(\epsilon)) + o(\epsilon d + r(\epsilon)) = 0. \tag{1.6}$$

Temos que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\|r(\epsilon)\|}{\epsilon} = 0$ e $\lim_{\epsilon \to 0^+} o(\epsilon d + r(\epsilon)) = 0$, este último acontece pois

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\epsilon\|\epsilon d + r(\epsilon)\|}.\|\epsilon d + r(\epsilon)\| \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\|\epsilon d + r(\epsilon)\|}.\|d + \frac{r(\epsilon)}{\epsilon}\| \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\|\epsilon d + r(\epsilon)\|}. \lim_{\epsilon \to 0^+} \|d + \frac{r(\epsilon)}{\epsilon}\|, \end{aligned}$$

e $\|\epsilon d + r(\epsilon)\| \leqslant \epsilon[\|d\| + \|\dfrac{r(\epsilon)}{\epsilon}\|] \to 0^+$ quando $\epsilon \to 0^+$, de onde

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\epsilon} = \lim_{\|\epsilon d + r(\epsilon)\|\to 0^+} \frac{o(\epsilon d + r(\epsilon))}{\|\epsilon d + r(\epsilon)\|}.\|d\| = 0. \tag{1.7}$$

Logo, pelas equações (1.6) e (1.7) obtemos

$$\nabla F_E^i(x^*)^\top d = 0.$$

Assim, concluímos que $T(Q_E, x^*) \subset \mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*)$.

ii) Provaremos que $\mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*) \subset T(Q_E, x^*)$. Seja $d \in \mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*)$, então $\nabla F_E(x^*)d = 0$. Definimos a seguinte função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$F(\epsilon, r) = (F_E^1(x^* + \epsilon d + r), F_E^2(x^* + \epsilon d + r), \ldots, F_E^m(x^* + \epsilon d + r))$$

e consideremos o sistema

$$F(\epsilon, r) = 0,$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} F_E^1(x^* + \epsilon d + r) & = & 0, \\ F_E^2(x^* + \epsilon d + r) & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_E^{m-1}(x^* + \epsilon d + r) & = & 0, \\ F_E^m(x^* + \epsilon d + r) & = & 0. \end{array} \tag{1.8}$$

Logo, $F(0,0) = 0$ e $\nabla_r F(0,0) = \nabla F_E(x^*)$. Suponhamos que $\nabla F_E(x^*)$ tem posto p, então $\nabla_r F(0,0)$ tem posto p. A seguir analisamos os seguintes casos.

Caso 1: Se $p = m$, então aplicando o Teorema 1.2, temos que existem constantes $\epsilon^* > 0$, $\beta > 0$ e vizinhanças B_{ϵ^*} de $\epsilon = 0$ e B_β de $r = 0$ tais que

(a) $r(0) = 0$;

(b) $F(\epsilon, r(\epsilon)) = 0$ para todo $\epsilon \in B_{\epsilon^*}$;

(c) $r'(0) = (\nabla_r F(0,0))^{-1}\nabla_\epsilon F(0,0)$.

Temos que $\nabla_\epsilon F(0,0) = \nabla F_E(x^*)d = 0$, pois $d \in Nu(\nabla F_E(x^*))$. Logo,

$$r'(0) = 0 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{r(\epsilon) - r(0)}{\epsilon}.$$

Assim, obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{r(\epsilon)}{\epsilon} = 0. \tag{1.9}$$

Portanto, dos itens (a)-(b) e da equação (1.9) obtemos o resultado desejado.

Caso 2: Se $p < m$, então para cada $(\epsilon, r) \in \overline{V}$, $\overline{V}$ uma vizinhança de $(0,0)$, temos que $\nabla_r F(\epsilon, r) = [\nabla_r F_E^1(x^* + \epsilon d + r) \quad \ldots \quad \nabla_r F_E^m(x^* + \epsilon d + r)]^\top$ tem posto p, pois pela hipótese o posto é o mesmo em uma vizinhança do ponto x^*. Pelo Lema 1.1 temos que p funções de $\{F_E^1, \cdots, F_E^m\}$ (sem perda de generalidade podemos supor que $F_E^1, \cdots, F_E^p$) são independentes e as outras funções dependem de $F_E^1, \cdots, F_E^p$ em uma vizinhança V de x^*. Isto é, para todo $x \in V$,

$$F_E^{p+k}(x) = \phi_k(F_E^1(x), \cdots, F_E^p(x)), \quad k = 1, \ldots, m-p, \tag{1.10}$$

onde ϕ_k, $k = 1, \ldots, m-p$, são funções continuamente diferenciáveis. Logo, no sistema (1.8) temos que

$$\begin{array}{rcl} F_E^1(x^* + \epsilon d + r) & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_E^p(x^* + \epsilon d + r) & = & 0, \\ \phi_1(F_E^1(x^* + \epsilon d + r), & \cdots & , F_E^p(x^* + \epsilon d + r)) = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{m-p}(F_E^1(x^* + \epsilon d + r), & \cdots & , F_E^p(x^* + \epsilon d + r)) = 0. \end{array} \tag{1.11}$$

Note que $\phi_k(F_E^1(x^*), \ldots, F_E^p(x^*)) = 0$, $k = 1, \cdots, m-p$, de modo que $\phi_k(0, \cdots, 0) = 0$, $k = 1, \cdots, m-p$. Suponhamos sem perda de generalidade que $[\nabla F_E^1(x^* + \epsilon d + r), \ \ldots \ \nabla F_E^p(x^* + \epsilon d + r)]^\top$ tem posto p em relação as primeiras p coordenadas. Definimos a função $\overline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ dada por

$$\overline{F}(\epsilon, r_1, r_2) = (F_E^1(x_1^* + \epsilon d_1 + r_2, x_2^* + \epsilon d_2 + r_1), \ldots, F_E^p(x_1^* + \epsilon d_1 + r_2, x_2^* + \epsilon d_2 + r_1)),$$

onde $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, $d = (d_1, d_2)$, $x_1, d_1 \in \mathbb{R}^p$ e $x_2, d_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$.
Logo, $\overline{F}(0,0,0) = 0$ e $\nabla_{r_2}\overline{F}(0,0,0) = [\nabla_{x_1} F_E^1(x_1^*, x_2^*) \quad \ldots \quad \nabla_{x_1} F_E^p(x_1^*, x_2^*)]^\top$ tem posto p. Então pelo Teorema 1.2, existem escalares $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, vizinhanças $\mathbb{B}_{\alpha_1}, \mathbb{B}_{\alpha_2}$ de $(\epsilon, r_1), r_2$, respectivamente, e uma função diferenciável $\overline{r} : \mathbb{B}_{\alpha_1} \to \mathbb{B}_{\alpha_2}$ tais que

(i) $\overline{r}(0,0) = 0$;

(ii) $\overline{F}(\epsilon, r_1, \overline{r}(\epsilon, r_1)) = 0$ para cada $(\epsilon, r_1) \in \mathbb{B}_{\alpha_1}$;

(iii) $\nabla \overline{r}(0,0) = (\nabla_{r_2}\overline{F}(0,0,0))^{-1} \nabla_{(\epsilon, r_1)} \overline{F}(0,0,0)$.

Considerando $\tilde{r}(\epsilon) = \overline{r}(\epsilon, 0)$ temos que $\tilde{r}'(0) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \dfrac{\tilde{r}(\epsilon) - \tilde{r}(0)}{\epsilon} = \nabla_\epsilon \overline{r}(0,0)$.
Por (iii) e como $\nabla_\epsilon \overline{F}(0,0) = \nabla F_E(x^*)d$, $d \in Nu\nabla F_E(x^*)$, temos que $\tilde{r}'(0) = 0$.
Então,

$$\overline{F}(\epsilon, 0, \tilde{r}(\epsilon)) = (F_E^1(x_1^* + \epsilon d_1 + \tilde{r}(\epsilon), x_2^* + \epsilon d_2), \ldots, F_E^p(x_1^* + \epsilon d_1 + \tilde{r}(\epsilon), x_2^* + \epsilon d_2)) = 0,$$

ou seja,

$$F_E^i(x^* + \epsilon d + (\tilde{r}(\epsilon), 0)) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{1.12}$$

Além disso, pela equação (1.10), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e para cada $k = 1, \ldots, m-p$, temos

$$\begin{aligned} F_E^{p+k}(x^* + \epsilon d + (\tilde{r}(\epsilon), 0)) &= \phi_k(F_E^1(x^* + \epsilon d + (\tilde{r}(\epsilon), 0)), \ldots, \\ & \qquad F_E^p(x^* + \epsilon d + (\tilde{r}(\epsilon), 0))). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Logo, pelas equações (1.12) e (1.13) temos que a função $r(\epsilon) = (\tilde{r}(\epsilon), 0)$ satisfaz o sistema (1.8) e $\dfrac{r(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. ∎

Seja Q um conjunto em um espaço vetorial topológico X, $x_0 \in Q$, $V(Q, x_0)$ o cone das direções factíveis para Q em x_0 e $T(Q, x_0)$ o cone das direções tangentes para Q em x_0. Acontece que, em alguns casos, os duais desses cones coincidem com o conjunto de funcionais lineares que são suportes para Q no ponto x_0, $Q*$, com $Q^* = \{f \in X^* : f(x) \geqslant f(x_0) \text{ para todo } x \in Q\}$.

Teorema 1.9. *Seja Q um conjunto convexo e fechado, se $x^* \in Q$, então*

$$T(Q, x^*)^* = Q^*.$$

Além disso, se $int(Q) \neq \varnothing$, então,

$$V(Q, x^*)^* = Q^*.$$

Demonstração: Ver [38], Teorema 8.2.

Definição 1.13. *[37] Sejam $Q \in \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $x^* \in Q$. O cone normal (cone de direções normais) no ponto x^* em relação ao conjunto Q é dado por:*

$$N_Q(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : (x - x^*)^\top d \leqslant 0, \ \ \forall x \in Q\}.$$

O teorema a seguir será usado para obter o Princípio do Máximo para problemas de controle ótimo com tempo discreto.

Teorema 1.10. *(Dubovitskii-Milyutin) Suponha que o funcional F_0 assume um mínimo local em $Q = \bigcap_{i=1}^{l+1} Q_i$ no ponto $x^* \in Q$. Suponha ainda que F_0 é regular de descida em x^*, com direções de descida no cone $D(F_0, x^*)$, as restrições de desigualdade Q_i, $i = 1, \ldots, l$, são regulares em x^* com direções factíveis no cone $V(Q_i, x^*)$, a restrição de igualdade Q_{l+1} também é regular em x^*, com direções tangentes no cone $T(Q_{l+1}, x^*)$. Então existem funcionais lineares contínuos $\chi_0 \in D(F_0, x^*)^*$, $\chi_i \in V(Q_i, x^*)^*$, $i = 1, \ldots, l$ e $\chi_{l+1} \in T(Q_{l+1}, x^*)^*$, não todos nulos, que satisfazem a equação de Euler-Lagrange*

$$\sum_{i=0}^{l+1} \chi_i = 0.$$

Ideia da demonstração. Para provar o teorema, primeiro mostra-se que se x^* é minimizador local do problema, então não existe uma direção de descida que seja factível e tangente (ou seja, $D(F_0, x^*) \cap \left(\cap_{i=1}^{\ell} V(Q_i, x^*) \right) \cap T(Q_{\ell+1}, x^*) = \varnothing$). Esta afirmação é válida, basta considerar uma direção de descida que seja factível e tangente, e pelas definições dos cones factíveis, tangente e de descida, podemos obter um ponto próximo de x^* que fornece um valor para a função objetivo menor que $f(x^*)$, o que contradiz a hipótese que x^* seja minimizador do problema. Logo, o Lema 1.5 pode ser aplicado, obtendo o resultado desejado. Para maiores detalhes ver Teorema 6.1 de [38].

Observação 1.8. *Nas condições do teorema anterior temos os seguintes resultados:*

- *Uma condição suficiente para assegurar $\chi_0 \neq 0$ é que exista ao menos uma direção factível e uma direção tangente, isto é,*

$$\bigcap_{i=1}^{\ell+1} Q_i \neq \varnothing.$$

  De fato, suponhamos que $\chi_0 = 0$. Pela equação de Euler- Lagrange temos que $\chi_0 + \sum_{i=1}^{\ell+1} \chi_i = 0$, então $\sum_{i=1}^{\ell+1} \chi_i = 0$, onde os $\chi_i \in Q_i^*, i = 1, \ldots, \ell+1$, não todos nulos. Logo, pelo Lema 1.5, temos que $\bigcap_{i=1}^{\ell+1} Q_i = \varnothing$. Isto contradiz a hipótese que $\bigcap_{i=1}^{\ell+1} Q_i \neq \varnothing$. A conclusão é válida para qualquer χ_i, $i = 1, \ldots, \ell+1$.

- *A condição $\bigcap_{i=0}^{\ell+1} Q_i = \varnothing$ é uma condição necessária para que o ponto x^* seja uma solução ótima de f ainda que os cones Q_i, $i = 1, \ldots, \ell+1$, sejam não convexos. Além disso, uma condição necessária e suficiente para se obter a equação de Euler-Lagrange é que os cones sejam convexos, isto é, x^* é um ponto mínimo então $\bigcap_{i=0}^{\ell+1} Q_i = \varnothing$ se e somente se se cumpre a equação de Euler-Lagrange.*

1.4 Generalizações do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Nesta seção apresentamos algumas adaptações dos resultados estudados em [25]. Consideremos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F_0(x) \\ \text{sujeito a} \quad & F_I(x) \leqslant 0, \\ & F_E(x) = 0, \end{aligned} \tag{P}$$

onde $F_0 : X \to \mathbb{R}$, X é um espaço de Banach, $F_I : X \to \mathbb{R}^\ell$, $F_E : X \to \mathbb{R}^m$. Consideremos $Q_E = \{x \in \mathbb{R}^n : F_E(x) = 0\}$ e $Q_I = \{x \in \mathbb{R}^n : F_I(x) \leqslant 0\}$.

Observação 1.9. *Nosso interesse nesta tese é trabalhar com problemas do tipo (P), mas na teoria geral (descrita em Ben-Tal e Zowe [25]) X pode não ser um espaço de Banach, basta ser um espaço vetorial topológico, e as restrições podem não ser por sistemas de igualdade e de desigualdade, podem ser restrições abstratas.*

As seguintes definições são necessárias para apresentar um importante teorema que será usado para as condições de segunda ordem.

Definição 1.14. *[25] Seja $d \in X$. Dizemos que d é uma direção de quasi-decrescimento da função objetivo F_0 no ponto $x \in X$, se para qualquer $u > 0$ existe algum número real $\epsilon^* > 0$ tal que*

$$F_0(x + \epsilon d) \leqslant F_0(x) + \epsilon u, \quad 0 < \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

O conjunto de todas as direções de quasi-decrescimento em x é denotado por $D_{F_0}(x)$.

Definição 1.15. *[25] Dizemos que d é uma direção quasi-factível ao conjunto Q_I no ponto $x \in X$, se para cada $v \in int(\mathbb{R}^\ell_+)$ existe um número real ϵ^* tal que*

$$F_I(x + \epsilon^* d) \leqslant \epsilon v \quad 0 < \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

O conjunto de todas as direções quasi-factíveis em x é denotado por $D_{F_I}(x)$.

Definição 1.16. *[25] Dizemos que $z \in X$ é uma direção de descida de segunda ordem de F_0 em x^* em relação ao vetor $d \in X$, se existem $u > 0$, uma vizinhança U de z e algum número real $\epsilon^* > 0$ tais que*

$$F_0(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 \bar{z}) \leqslant F_0(x^*) - \epsilon^2 u \quad \textit{para todo } \bar{z} \in U \quad e \quad 0 < \epsilon \leqslant \epsilon^*. \tag{1.14}$$

Denotaremos ao conjunto de todas as direções de descida de segunda ordem como $D^2(F_0, x^*, d)$. Dizemos que F_0 é d-regular em x^* se $D^2(F_0, x^*, d)$ é não vazio e convexo.

Definição 1.17. *[25] Dizemos que $z \in X$ é uma direção factível de segunda ordem de Q_I em x^* em relação ao vetor $d \in X$ se existem $v \in int(\mathbb{R}^\ell_+)$, uma vizinhança U de z e um número real $\epsilon^* > 0$, tais que*

$$F_I(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 \bar{z}) + \epsilon^2 v \leqslant 0 \quad \textit{para todo} \quad \bar{z} \in U \quad e \quad 0 < \epsilon < \epsilon^*. \tag{1.15}$$

O conjunto de todas as direções factíveis de segunda ordem será denotado por $V^2(Q_I, x^*, d)$. Dizemos que F_I é d-regular se $V^2(Q_I, x^*, d)$ é não vazio e convexo.

Definição 1.18. *[25] Uma função $r(\cdot) : (0, \infty) \to X$ é uma curva de ordem $o(\epsilon^k)$ e será denotada por $r(\epsilon) \sim o(\epsilon^k)$, se existe um número real $\epsilon_1 > 0$ tal que*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{r(\epsilon)}{\epsilon^k} = 0 \quad \textit{para} \quad 0 < \epsilon \leqslant \epsilon_1.$$

Definição 1.19. *[25] Um vetor $z \in X$ é chamado uma direção tangente de segunda ordem ao conjunto Q_E em x^* em relação a um vetor $d \in X$ se existe um numero real $\epsilon^* > 0$ e uma curva $r(\epsilon) \sim o(\epsilon^2)$ tais que*

$$F_E(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) = 0 \quad para \quad 0 < \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

O conjunto de todas as direções tangentes de segunda ordem é denotado por $T^2(Q_E, x^*, d)$. Dizemos que F_E é d-regular se $T^2(Q_E, x^*, d)$ é não vazio e convexo.

Observação 1.10. *Das definições acima pode-se ver que:*

- *$D^2(F_0, x^*, d)$ e $V^2(Q_I, x^*, d)$ são abertos.*
- *$D(F_0, x^*) = D^2(F_0, x^*, 0)$, onde $D(F_0, x^*)$ é o cone de direções de descida.*
- *$V(Q_I, x^*) = V^2(Q_I, x^*, 0)$, sendo $V(Q_I, x^*)$ o cone das direções factíveis.*
- *$T(Q_E, x^*) = T^2(Q_E, x^*, 0)$, com $T(Q_E, x^*)$ o cone das direções tangentes.*
- *$D^2(F_0, x^*, d) = X$, para $d \in D(F_0, x^*)$, e $V^2(Q_I, x^*, d) = X$, quando $d \in V(Q_I, x^*)$.*

Definição 1.20. *[25] Seja $S \subset X$. O funcional suporte a S, denotado por $\delta^*(\cdot|S)$, definido no dual topológico X^* de X com valores na reta estendida $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ é dado como:*

$$\delta^*(x^*|S) = \sup_{x \in S} x^* x, \quad x^* \in X^*.$$

Se $S = \emptyset$, então, por convenção, $\delta^*(\cdot|S) = -\infty$. O domínio efetivo de $\delta^*(\cdot|S)$ é denotado por $\Lambda(S)$, isto é,

$$\Lambda(S) = \{x^* \in X^* : \delta^*(x^*|S) < \infty\}.$$

Note que, $\delta^*(\cdot|S)$ é uma função convexa, fechada e positivamente homogênea.

O cone polar de S, denotado por S^+, é definido como

$$S^+ = \{x^* \in X^* : x^* x \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad x \in S\}.$$

Então, se S é um cone,

$$\Lambda(S) = -S^+,$$
$$\delta^*(x^*|S) = \begin{cases} 0, \text{ se } x^* \in \Lambda(S), \\ \infty, \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Teorema 1.11. *Seja x^* um ponto ótimo para o problema (P). Então para cada d satisfazendo*

$$d \in D_{F_0}(X^*) \bigcap D_{F_I}(X^*) \bigcap T(Q_E, x^*),$$

em que F_0, F_I e F_E são d-regulares, existem funcionais lineares contínuos em X:

$$l_{F_0} \in \Lambda(D^2(F_0, x^*, d)), \quad l_{F_I} \in \Lambda(V^2(F_I, x^*, d)), \quad l_{F_E} \in \Lambda(T^2(F_E, x^*, d)), \tag{1.16}$$

não todos nulos, que satisfazem a equação de Euler-Langrange

$$l_{F_0} + l_{F_I} + l_{F_E} = 0 \tag{1.17}$$

e a desigualdade de Legendre

$$\delta^*(l_{F_0}|D^2(F_0, x^*, d)) + \delta^*(l_{F_I}|V^2(F_I, x^*, d)) + \delta^*(l_{F_E}|T^2(F_E, x^*, d)) \leqslant 0. \tag{1.18}$$

Demonstração: Ver Ben-Tal e Zowe [25], Teorema 2.1.

Lema 1.6. *Seja $S_1, \ldots, S_n, S_{n+1}$ subconjuntos convexos não vazios de X, onde $S_1, \ldots, S_n$ são abertos. Então*

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} S_i = \varnothing,$$

se e somente se, existem $x_i^* \in \Lambda(S_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$, não todos nulos, tais que

$$x_1^* + x_2^* + \cdots + x_{n+1}^* = 0, \tag{1.19}$$

$$\delta^*(x_1^*|S_1) + \delta^*(x_2^*|S_2) + \cdots + \delta^*(x_{n+1}^*|S_{n+1}) \leqslant 0. \tag{1.20}$$

Demonstração: Ver [25], Lema 3.2.

Observação 1.11. *Se $\bigcap_{i=2}^{n+1} S_i \neq \varnothing$, então $x_1^* \neq 0$ no Lema 1.6.*

De fato, suponhamos que $x_1^* = 0$. Seja $x \in \bigcap_{i=2}^{n+1} S_i$, definamos $\bar{S}_i = S_i - x$ para $i = 2, \ldots, n+1$. Então, $0 \in \bar{S}_i$, assim, $\delta^*(x_i^*|\bar{S}_i) \geqslant 0$ para todo $i = 2, \ldots, n+1$. Agora $x_j^* \neq 0$ para ao menos um $j \leqslant n$ (pois caso contrário $x_2^* = \cdots = x_n^* = 0$ e pela equação (1.19) temos que $-x_{n+1} = x_2^* + \cdots + x_n^*$ então $x_{n+1} = 0$, isto contradiz o fato do Lema 1.6 que diz que $x_1^*, \ldots, x_{n+1}^*$ são não todos nulos). Como S_j é aberto e $0 \in \bar{S}_j$, então $0 \in int\bar{S}_j$. Assim, $\delta^*(x_j^*|\bar{S}_j) > 0$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta^*(x_i^*|S_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta^*(x_i^*|\bar{S}_i) + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^* x.$$

Mas, pela equação (1.19) temos que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^* x = 0$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta^*(x_i^*|S_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta^*(x_i^*|\bar{S}_i) > 0.$$

Isto contradiz a equação (1.20).

Lema 1.7. *Sejam X, U espaços de Banach, $A : X \to U$ um operador linear com imagem $Im(A)$ e seja S um subconjunto convexo não vazio de U. Definimos*

$$A^{-1}S := \{x \in X : Ax \in S\}$$

e suponhamos $x^* \in \Lambda(A^{-1}S)$. Se alguma das seguintes condições for válida

- $Im(A) \cap intS \neq \emptyset$;
- *A é aberto;*

então,

$$\delta^*(x^*|A^{-1}S) = \min\{\delta^*(u^*|S) : x^* = u^* \circ A, u^* \in \Lambda(S)\}.$$

Demonstração: Ver [25], Lema 3.4.

Proposição 1.2. *Sejam F_0, F_I funções duas vezes Fréchet diferenciáveis. Se $x^*, d \in \mathbb{R}^n$, então:*

(i) *Se* $\nabla F_0(x^*)^\top d \leqslant 0$,

$$D^2(F_0, x^*, d) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_0(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_0(x^*)(d,d) < 0\}.$$

(ii) *Se* $F_I(x^*) \leqslant 0$ *e* $F_I'(x^*, d) \leqslant 0$,

$$V^2(Q_I, x^*, d) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_I(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_I(x^*)(d,d) < 0\}.$$

Demonstração: Ver [25], Proposição 6.2.

Observação 1.12. *Dos itens $(i) - (ii)$ pode ser visto que os conjuntos $D^2(F_0, x^*, d)$ e $V^2(Q_I, x^*, d)$ são convexos.*

Observação 1.13. *A caracterização do conjunto $T^2(Q_E, x^*, d)$ para o caso em que F_E esta definida em um espaço de Banach X pode ser encontrada em [25]. Na Proposição 1.3 abaixo, tal caracterização será feita para o caso particular em que F_E está definida entre espaços de dimensão finita.*

A seguir mostraremos que sob a hipótese de posto constante nos gradientes das restrições de igualdade a Proposição 7.2 em [25] se cumpre.

Proposição 1.3. *Seja uma aplicação $F_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que é duas vezes diferenciável em uma vizinhança V_1 de um ponto x^* com $F_E(x^*) = 0$. Suponha que existe uma vizinhança $V_2 \subset V_1$ de x^* tal que $\nabla F_E(x)$ tem posto constante para cada $x \in V_2$. Então*

$$T(Q_E, x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E(x^*)d = 0\}, \quad (1.21)$$

$$T^2(Q_E, x^*, d) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = 0\}, \; d \in T(Q_E, x^*). \quad (1.22)$$

Demonstração: A igualdade (1.21) segue da Proposição 1.3. A seguir mostraremos a igualdade (1.22). Primeiro mostraremos que

$$T^2(Q_E, x^*, d) \subset \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = 0\}, \;\; d \in T(Q_E, x^*).$$

Sejam $d \in Nu\nabla F_E(x^*)$ e $z \in T^2(Q_E, x^*, d)$. Então $\nabla F_E(x^*)d = 0$ e existem $\epsilon^* > 0$ e uma curva $r(\epsilon) \sim o(\epsilon^2)$ tais que

$$F_E(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) = 0, \quad 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

Pela expansão de Taylor, para $i = 1, \ldots, m$, temos que

$$\begin{aligned} F_E^i(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) &= F_E^i(x^*) + \nabla F_E^i(x^*)^\top(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon))^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) + o_i(\epsilon^2), \end{aligned}$$

onde $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{o_i(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0$. Logo, pelo fato que $F_E(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) = 0$, $F_E(x^*) = 0$ e $\nabla F_E^i(x^*)^\top d = 0$, $\quad i = 1, \ldots, m$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \nabla F_E^i(x^*)^\top z + \nabla F_E^i(x^*)^\top r(\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}\Big[d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon))\Big] \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2}\Big[z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon))\Big] + \frac{1}{2}\Big[r(\epsilon)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)(\epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon))\Big] + o_i(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Arranjando termos, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^2 \nabla F_E^i(x^*)^\top z + \nabla F_E^i(x^*)^\top r(\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon^2 d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^3 d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)r(\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon^3 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^4 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}\epsilon^2 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)r(\epsilon) \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon r(\epsilon)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^2 r(\epsilon)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}r(\epsilon)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)r(\epsilon) + o_i(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Dividindo por ϵ^2, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla F_E^i(x^*)^\top z + \nabla F_E(x^*)^\top \frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)\frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} + \frac{1}{2}\epsilon z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^2 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}\epsilon^2 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)\frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon \frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2}^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2}^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}r(\epsilon)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)\frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} + \frac{o_i(\epsilon^2)}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Aplicando limite quando $\epsilon \to 0^+$, obtemos

$$0 = \nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d.$$

Isto acontece para cada $i = 1, \ldots, m$. Portanto,

$$T^2(Q_E, x^*, d) \subset \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = 0\}.$$

Agora mostraremos a segunda inclusão, ou seja,

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = 0\} \subset T^2(Q_E, x^*, d), \quad d \in T(Q_E, x^*).$$

Sejam $z \in \mathbb{R}^n$ e $d \in T(Q_E, x^*)$ tais que $\nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = 0$. Definimos a função $\bar{F}_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\bar{F}_E(\epsilon, r) = (F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r), \ldots, F_E^m(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)).$$

Consideremos o sistema

$$\bar{F}_E(\epsilon, r) = 0,$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r) & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_E^m(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r) & = & 0. \end{array} \tag{1.23}$$

Temos que $\bar{F}_E(0,0) = 0$ e $\nabla_r \bar{F}_E(0,0) = \nabla F_E(x^*)$ onde $F_E(x) = (F_E^1(x), \ldots, F_E^m(x))$.
Por hipótese existe uma vizinhança V_2 de x^* tal que $\nabla F_E(x)$ tem posto p para cada $x \in V_2$. Então, existe uma vizinhança de U de $(0,0)$ tal que $\nabla_r \bar{F}_E(\epsilon, r)$ tem posto p para cada $(\epsilon, r) \in U$.
Caso 1: Se $p = m$, ou seja, $\nabla F_E(x^*)$ é sobrejetiva, então aplicando o Teorema 1.8 (Teorema de Ljusternik), temos que existem uma vizinhança $V' \subset V_2$ do ponto x^*, um número $K > 0$, e uma aplicação $\chi : V' \to X$ tais que

$$\begin{aligned} &F_E(\theta + \chi(\theta)) = F_E(x^*), \\ &\|\chi(\theta)\| \leqslant K\|F_E(\theta) - F_E(x^*)\|, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in V'$. Consideremos $\epsilon^* > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\theta = x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z \in V', \quad 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

Definindo $r(\epsilon) := \chi(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z)$, como $F_E(\theta + \chi(\theta)) = F_E(x^*)$, obtemos

$$F_E(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) = 0, \quad 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon^*.$$

Falta mostrar que $\dfrac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} \to 0$. Como $\|\chi(\theta)\| \leqslant K\|F_E(\theta) - F_E(x^*)\|$, temos

$$\begin{aligned} \|r(\epsilon)\| &\leqslant K\sum_{i=1}^m \|F_E^i(\theta) - F_E^i(x^*)\| \\ &= K\sum_{i=1}^m \|\nabla F_E^i(x^*)^\top(\epsilon d + \epsilon^2 z) + \frac{1}{2}(\epsilon d + \epsilon^2 z)^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)(\epsilon d + \epsilon^2 z) + o_i(\epsilon)\| \\ &= K\sum_{i=1}^m \|\epsilon \nabla F_E^i(x^*)^\top d + \epsilon^2 \nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}\epsilon^2 d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^3 d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^3 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)^\top d + \frac{1}{2}\epsilon^4 z^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)z + o_i(\epsilon)\|. \end{aligned}$$

Levando em conta que $d \in T(Q_E, x^*) = \mathrm{Nu}\,\nabla F_E(x^*)$ e dividindo por ϵ^2, temos

$$\left\|\frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2}\right\| \leqslant K\sum_{i=1}^{m}\|\nabla F_E^i(x^*)^\top z + \frac{1}{2}d^\top\nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon d^\top\nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}\epsilon z^\top\nabla^2 F_E^i(x^*)d + \frac{1}{2}\epsilon^2 z^\top\nabla^2 F_E^i(x^*)z + \frac{o_i(\epsilon)}{\epsilon^2}\|.$$

Aplicando limite quando $\epsilon \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0.$$

Portanto, temos que $F(x^*+\epsilon d+\epsilon^2 z+r(\epsilon)) = 0$ com $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\dfrac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0$. Isto é, $z \in T^2(Q_E, x^*, d)$.
Caso 2: Se $p < m$. Então, para cada $(\epsilon, r) \in U_1$, onde U_1 é uma vizinhança apropriada de $(0,0)$, tem-se que

$$\nabla_r \bar{F}_E(\epsilon, r) = [\nabla_r F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z)\cdots\nabla_r F_E^m(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z)]^\top$$

tem posto p, pois pela hipótese o posto é o mesmo em uma vizinhança do ponto x^*. Pelo Lema 1.1, temos que p funções dentre $\{F_E^1, \ldots, F_E^m\}$ são linearmente independentes e as outras funções dependem destas p funções em uma vizinhança $V_3 \subset V_2$ de x^*. Sem perda de generalidade podemos supor que $F_E^1, \ldots, F_E^p$ são linearmente independentes. Então, para cada $x \in V_3$, temos

$$F_E^{p+k}(x) = \Phi_k(F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x)), \quad k = 1\ldots, m-p,$$

onde $\Phi_k, \quad k = 1, \ldots, m-p$, são funções de classe C^2. Logo, no sistema (1.23) temos

$$\begin{array}{rcl}
F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r) & = & 0,\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
F_E^p(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r) & = & 0\\
\Phi_1(F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r), \ldots, F_E^p(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)) & = & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\Phi_{m-p}(F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r), \ldots, F_E^p(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)) & = & 0.
\end{array} \tag{1.24}$$

Note que (1.24) implica em $\Phi_k(0, \ldots, 0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m-p$. Como a seguinte matriz

$$[\nabla F_E^1(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)\cdots\nabla F_E^p(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)]^\top$$

tem posto p, possui uma submatriz não singular $p \times p$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que essa submatriz é formada pelas p primeiras linhas e as primeiras p colunas.
Definimos $\hat{F}_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}^p$ dada por

$$\hat{F}_E(\epsilon, r_1, r_2) = \hat{b}(x_1^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + r_1, x_2^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2 + r_2),$$

onde $\hat{b}(x) = (F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x))$, $x^* = (x_1, x_2)$, $d = (d_1, d_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $r = (r_1, r_2)$, $x_1, d_1, z_1, r_1 \in \mathbb{R}^p$, $x_2, d_2, z_2, r_2 \in \mathbb{R}^{m-p}$. Logo, para cada $i = 1, \ldots, p$, derivando $\hat{F}_E^i$ em relação a ϵ, r_1, r_2, temos

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \hat{F}_E^i(\epsilon, r_1, r_2) &= \nabla \hat{b}^i(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r)^\top (d + 2\epsilon z), \quad i = 1, \ldots, p, && (1.25)\\ \nabla_{r_1} \hat{F}_E(\epsilon, r_1, r_2) &= \nabla_{x_1} \hat{b}(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r), && (1.26)\\ \nabla_{r_2} \hat{F}_E(\epsilon, r_1, r_2) &= \nabla_{x_2} \hat{b}(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r). && (1.27) \end{aligned}$$

Como $d \in Nu\nabla F_E(x^*)$, segue que $\nabla b^i(x^*)^\top(d) = 0$. Então, aplicando o ponto $(0, 0, 0)$ nas equações (1.25) – (1.27) segue que

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \hat{F}_E^i(0, 0, 0) &= 0, \quad i = 1, \ldots, p, && (1.28)\\ \nabla_{r_1} \hat{F}_E(0, 0, 0) &= \nabla_{x_1} \hat{b}(x^*), && (1.29)\\ \nabla_{r_2} \hat{F}_E(0, 0, 0) &= \nabla_{x_2} \hat{b}(x^*). && (1.30) \end{aligned}$$

Note que temos $\hat{F}_E(0, 0, 0) = 0$ e $\nabla_{r_1} \hat{F}_E(0, 0, 0) = \nabla_{x_1} \hat{b}(x^*)$. Então, pelo Teorema 1.2, existem escalares $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, vizinhanças B_{α_1} e B_{α_2} de $(0, 0)$ e 0, respectivamente, e uma função duas vezes diferenciável $\hat{r} : B_{\alpha_1} \to B_{\alpha_2}$ tais que

1. $\hat{r}(0, 0) = 0$,
2. $\hat{F}_E(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, r_2), r_2) = 0$ para cada $(\epsilon, r_2) \in B_{\alpha_1}$,
3. $\nabla \hat{r}(0, 0) = [\nabla_{r_1} \hat{F}_E(0, 0, 0)]^{-1} \nabla_{\epsilon, r_2} \hat{F}_E(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & [\nabla_{r_1} \hat{F}_E(0, 0, 0)]^{-1} \nabla_{r_2} \hat{F}_E(0, 0, 0) \end{bmatrix}$.

Consideremos $\tilde{r}(\epsilon) = \hat{r}(\epsilon, 0)$. Note que $\tilde{r}(\epsilon) \in \mathbb{R}^p$. Pela expansão de Taylor temos que

$$\tilde{r}_i(\epsilon) = \tilde{r}_i(0) + \epsilon \tilde{r}_i'(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \tilde{r}_i''(0) + o_i(\epsilon), \qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o_i(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

ou seja,

$$\hat{r}_i(\epsilon, 0) = \hat{r}_i(0, 0) + \nabla \hat{r}_i(0, 0)^\top (\epsilon, 0) + \frac{1}{2} (\epsilon, 0)^\top \nabla^2 \hat{r}_i(0, 0)(\epsilon, 0) + o_i(\epsilon),$$

onde $\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o_i(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0$. Como $\hat{r}(0, 0) = 0$ e $\nabla_\epsilon \hat{r}(0, 0) = 0$, então

$$\tilde{r}_i(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon^2 \nabla^2_{\epsilon, \epsilon} \hat{r}_i(0, 0) + o_i(\epsilon), \quad i = 1, \ldots, p.$$

Afirmamos que $\nabla^2_{\epsilon, \epsilon} \hat{r}_i(0, 0) = 0$ (a prova será feita a seguir na Observação 1.14). Então,

$$\tilde{r}(\epsilon) = o(\epsilon), \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\tilde{r}(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0.$$

Além disso, no item 2 acima, considerando ϵ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{F}_E(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, 0), 0) \\ &= \hat{F}_E(\epsilon, \tilde{r}(\epsilon), 0) \\ &= (F_E^1({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \tilde{r}(\epsilon), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2), \ldots, \\ &\quad F_E^p({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \tilde{r}(\epsilon), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_E^i(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + (\tilde{r}(\epsilon), 0)) = 0, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Logo, em (1.24), para cada $k = 1, \ldots, m-p$, temos

$$\begin{aligned} F_E^{p+k}(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + (\tilde{r}(\epsilon), 0)) &= \Phi_k(F_E^1({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \tilde{r}(\epsilon), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2), \ldots, \\ &\quad F_E^p({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \tilde{r}(\epsilon), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2)) \\ &= \Phi_k(0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

Assim, a função $r(\epsilon) = (\tilde{r}(\epsilon), 0)$ satisfaz a seguintes condições

$$F_E(x^* + \epsilon d + \epsilon^2 z + r(\epsilon)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{r(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0.$$

Portanto, temos que $z \in T^2(Q_E, x^*, d)$. ∎

Observação 1.14. *A seguir vamos demonstrar a afirmação* $\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0) = 0$. *Temos*

$$\hat{F}_E^i(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, r_2), r_2) = \hat{b}^i({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \hat{r}(\epsilon, r_2), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2 + r_2),$$

onde $\hat{b}(x) = (F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x))$. *Derivando em relação a* ϵ *temos*

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \hat{F}_E^i(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, r_2), r_2) &= \nabla_{x_1}\hat{b}^i({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \hat{r}(\epsilon, r_2), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2 + r_2)^\top \Big[d_1 + 2\epsilon z_1 \\ &\quad + \nabla_\epsilon \hat{r}(\epsilon, r_2)\Big] \\ &\quad + \nabla_{x_2}\hat{b}^i({x_1}^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \hat{r}(\epsilon, r_2), {x_2}^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2 + r_2)^\top \\ &\quad \Big[d_2 + 2\epsilon z_2\Big]. \end{aligned}$$

Logo, no ponto $(0,0,0)$ *temos*

$$\nabla_\epsilon \hat{F}_E^i(0,0,0) = \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top d_1 + \nabla_{x_2}\hat{b}^i(x^*)^\top d_2 + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla_\epsilon \hat{r}(0,0).$$

Como $0 = \nabla \hat{b}^i(x^*)^\top d = \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top d_1 + \nabla_{x_2}\hat{b}^i(x^*)^\top d_2$ *e* $\nabla_\epsilon \hat{r}(0,0) = 0$, *temos*

$$\nabla_\epsilon \hat{F}_E^i(0,0,0) = 0.$$

A seguir vamos determinar $\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{F}_E$. *Como* $\hat{F}_E(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, r_2), r_2) = 0$ *para cada* $(\epsilon, r_2) \in B_{\alpha_1}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{F}_E^i(\epsilon, \hat{r}(\epsilon, r_2), r_2) \\ &= \Big[\nabla^2_{x_1,x_1}\hat{b}^i(w_1, w_2)(d_1 + 2\epsilon z_1 + \nabla_\epsilon \hat{r}(\epsilon, r_2)) + \nabla_{x_1,x_2}\hat{b}^i(w_1, w_2)(d_2 + 2\epsilon z_2)\Big]^\top \\ &\quad (d_1 + 2\epsilon z_1 + \nabla_\epsilon \hat{r}(\epsilon, r_2)) + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(w_1, w_2)^\top (2z_1 + \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(\epsilon, r_2)) \\ &\quad + \Big[\nabla^2_{x_2,x_1}\hat{b}^i(w_1, w_2)(d_1 + 2\epsilon z_1 + \nabla_\epsilon \hat{r}(\epsilon, r_2)) + \nabla^2_{x_2,x_2}\hat{b}^i(w_1, w_2)(d_2 + 2\epsilon z_2)\Big]^\top \\ &\quad (d_2 + 2\epsilon z_2) + 2\nabla_{x_2}\hat{b}^i(w_1, w_2)^\top z_2, \end{aligned}$$

onde $(w_1, w_2) = (x_1^* + \epsilon d_1 + \epsilon^2 z_1 + \bar{r}(\epsilon, r_1), x_2^* + \epsilon d_2 + \epsilon^2 z_2 + r_2)$. *Logo, aplicando no ponto* $(0,0,0)$ *obtemos*

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{F}^i_E(0,0,0)) &= \Big[\nabla^2_{x_1,x_1}\hat{b}^i(x^*)(d_1 + \nabla_\epsilon \hat{r}(0,0)) + \nabla^2_{x_1,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2\Big]^\top (d_1 + \nabla_\epsilon \hat{r}(0,0)) \\ &\quad + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top(2z_1 + \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0)) + \\ &\quad \Big[\nabla^2_{x_2,x_1}\hat{b}^i(x^*)(d_1 + \nabla_\epsilon \bar{r}(0,0)) + \nabla^2_{x_2,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2\Big]^\top d_2 + 2\nabla_{x_2}\hat{b}^i(x*)^\top z_2.\end{aligned}$$

Como $\nabla_\epsilon \hat{r}(0,0) = 0$, *temos*

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{F}^i_E(0,0,0)) &= \Big[\nabla^2_{x_1,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_1 + \nabla^2_{x_1,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2\Big]^\top d_1 + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top(2z_1 + \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0)) \\ &\quad + \Big[\nabla^2_{x_2,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_1 + \nabla^2_{x_2,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2\Big]^\top d_2 + 2\nabla_{x_2}\hat{b}^i(x*)^\top z_2 \\ &= d_1^\top \nabla^2_{x_1,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_1 + d_2^\top \nabla_{x_1,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_1 + 2\nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top z_1 + \\ &\quad \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0)) + d_1^\top \nabla^2_{x_2,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_2 + d_2^\top \nabla^2_{x_2,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2 + \\ &\quad 2\nabla_{x_2}\hat{b}^i(x*)^\top z_2 \\ &= d_1^\top \nabla^2_{x_1,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_1 + d_2^\top \nabla_{x_1,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_1 + d_1^\top \nabla^2_{x_2,x_1}\hat{b}^i(x^*)d_2 + \\ &\quad d_2^\top \nabla^2_{x_2,x_2}\hat{b}^i(x^*)d_2 + 2\nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top z_1 + 2\nabla_{x_2}\hat{b}^i(x*)^\top z_2 + \\ &\quad \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0)) \\ &= d^\top \nabla^2 \hat{b}^i(x^*)d + 2\nabla \hat{b}^i(x^*)z + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0) \\ &= 2\Big[\nabla \hat{b}^i(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 \hat{b}^i(x^*)d\Big] + \nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0).\end{aligned}$$

Sabemos que $\nabla \hat{b}(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 \hat{b}(x^*)(d,d) = 0, \quad d \in T(Q_E, x^*)$. *Assim, obtemos*

$$\nabla_{x_1}\hat{b}^i(x^*)^\top \nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0) = 0, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Logo,

$$\nabla_{x_1}\hat{b}(x^*)\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0) = 0.$$

Sabemos que $\nabla_{x_1}\hat{b}(x^*)$ *é não singular. Portanto,* $\nabla^2_{\epsilon,\epsilon}\hat{r}(0,0) = 0$.
Assim, concluímos o que queríamos mostrar. ■

Observação 1.15. *Podemos notar que:*

- *De (1.22) temos que* $T^2(Q_E, x^*, d)$ *é convexo. Além disso,*

$$\nabla F_E(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*)(d,d) = \begin{pmatrix} \nabla F^1_E(x^*)^\top z \\ \vdots \\ \nabla F^m_E(x^*)^\top z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d^\top \nabla^2 F^1_E(x^*)^\top d \\ \vdots \\ d^\top \nabla^2 F^m_E(x^*)^\top d \end{pmatrix},$$

onde $\; d^\top \nabla^2 F^\tau_E(x^*)^\top d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F^\tau_E}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)d_i d_j, \;\; \tau = 1, \ldots, m.$

A seguinte observação mostra que a caracterização de $T^2(Q_E, x^*, d)$ pode ser reduzida em função das primeiras p funções de F_E, onde p é o posto de $\nabla F_E(x)$, para cada $x \in V_2$, sendo V_2 uma vizinhança de x^*.

Observação 1.16.

$$T^2(Q_E, x^*, d) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 F_E^i(x^*)(d,d) = 0, \;\; i = 1, \ldots, p\}, \;\; d \in T(Q_E, x^*).$$

Vamos supor que existe uma vizinhança U de x^* tal que $\{\nabla F_E^1(x), \ldots, \nabla F_E^m(x)\}$ tem posto constante para todo $x \in U$. Pelo Lema 1.1, temos que p funções de $\{F_E^1, \ldots, F_E^m\}$ são linearmente independentes e as outras funções dependem destas p funções em uma vizinhança $U_1 \subset U$ de x^*. Sem perda de generalidade podemos supor que $F_E^1, \ldots, F_E^p$ são linearmente independentes. Então, para cada $x \in U_1$, temos

$$F_E^{p+k}(x) = \Phi_k(F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x)), \quad k = 1 \ldots, m-p, \tag{1.31}$$

onde Φ_k, $k = 1, \ldots, m-p$, são funções de classe C^2. Logo, considerando

$$\hat{b}(x) = (F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x))$$

e derivando a equação (1.31) temos

$$\begin{aligned}
\nabla F_E^{p+i}(x^*) &= \nabla \hat{b}(x^*)^\top \nabla \Phi_i(\hat{b}(x^*)), \\
\nabla^2 F_E^{p+i}(x^*) &= \nabla \hat{b}(x^*)^\top \nabla^2 \Phi_i(\hat{b}(x^*)) \nabla \hat{b}(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(\hat{b}(x^*)) \nabla^2 \hat{b}^j(x^*).
\end{aligned}$$

Como $\hat{b}(x^*) = 0$, resulta

$$\nabla F_E^{p+i}(x^*) = \nabla \hat{b}(x^*)^\top \nabla \Phi_i(0), \tag{1.32}$$

$$\nabla^2 F_E^{p+i}(x^*) = \nabla \hat{b}(x^*)^\top \nabla^2 \Phi_i(0) \nabla \hat{b}(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(\hat{b}(x^*)) \nabla^2 \hat{b}^j(x^*). \tag{1.33}$$

Fazendo o produto interno entre z e a equação (1.32), temos

$$\nabla F_E^{p+i}(x^*)^\top z = \nabla \Phi_i(0)^\top \nabla \hat{b}(x^*) z. \tag{1.34}$$

Agora, da equação (1.33), obtemos

$$d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*) d = (\nabla \hat{b}(x^*) d)^\top \nabla^2 \Phi_i(0) \nabla \hat{b}(x^*) d + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(\hat{b}(x^*)) d^\top \nabla^2 \hat{b}^j(x^*) d. \tag{1.35}$$

Como $\nabla F_E(x^*) d = 0$ e $\nabla F_E(x^*) = [\nabla \hat{b}(x^*)^\top \quad \nabla F_E^{p+1}(x^*) \quad \cdots \quad \nabla F_E^m(x^*)]^\top$ segue que $\nabla \hat{b}(x^*) d = 0$. Assim, na equação (1.35) segue

$$d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*) d = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(\hat{b}(x^*)) d^\top \nabla^2 \hat{b}^j(x^*) d. \tag{1.36}$$

Isto equivale a

$$d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*)d = \nabla \Phi_i(0)^\top \nabla^2 \hat{b}(x^*)(d,d). \tag{1.37}$$

Consideremos

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d = 0, \quad 1,\dots,m\}, \quad d \in T(Q_E, x^*),$$
$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d = 0, \quad 1,\dots,p\}, \quad d \in T(Q_E, x^*).$$

Vamos mostrar que $\Omega_1 = \Omega_2$

- $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *é trivial.*
- $\Omega_2 \subset \Omega_1$.
  Seja $z \in \Omega_2$, *então*

$$\nabla F_E^i(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^i(x^*)d = 0, \quad 1,\dots,p, \quad d \in T(Q_E, x^*).$$

Falta mostrar que $\nabla F_E^{p+i}(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*)d = 0$, $i = 1,\dots,m-p$, $d \in T(Q_E, x^*)$. *Pelas equações* (1.34) *e* (1.37) *obtemos*

$$\nabla F_E^{p+i}(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*)d = \nabla \Phi_i(0)^\top [\nabla \hat{b}(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 \hat{b}(x^*)(d,d)],$$

e como $\nabla \hat{b}(x^*)z + \frac{1}{2}\nabla^2 \hat{b}(x^*)(d,d) = 0$, *temos*

$$\nabla F_E^{p+i}(x^*)z + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 F_E^{p+i}(x^*)d = 0.$$

Portanto, $\Omega_2 \subset \Omega_1$. *Concluímos que* $\Omega_1 = \Omega_2$.

Proposição 1.4. *Sejam* $F_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $F_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *funções duas vezes diferenciáveis. Sejam* $x, d \in \mathbb{R}^n$.

1. *Suponhamos que* $\nabla F_0(x)^\top d \leqslant 0$ *e* $D^2(F_0, x, d) \neq \varnothing$. *Então, para* $l_{F_0} \in \Lambda(D^2(F_0, x, d))$, *existe algum* $\xi \geqslant 0$ *tal que*

$$l_{F_0} = \xi \nabla F_0(x), \quad \xi \nabla F_0(x)^\top d = 0,$$
$$\delta^*(l_{F_0}|D^2(F_0, x, d)) = -\frac{1}{2}\xi d^\top \nabla^2 F_0(x)d.$$

2. *Suponhamos que* $F_I(x) \leqslant 0$, $\nabla F_I(x)d \leqslant 0$ *e* $D^2(F_I, x, d) \neq \varnothing$. *Então para* $l_{F_I} \in \Lambda(V^2(Q_I, x, d))$ *existe algum* $\mu \in (\mathbb{R}^p_+)$ *tal que*

$$l_{F_I} = \mu^\top \nabla F_I(x), \quad \mu^\top \nabla F_I(x)d = 0, \quad \mu_j F_I^j(x) = 0, \quad j = 1,\dots,p,$$
$$\delta^*(l_{F_I}|V^2(Q_I, x, d)) = -\frac{1}{2}\mu^\top \nabla^2 F_I(x)(d,d).$$

3. *Suponhamos que* $\{\nabla F_E^1(y), \ldots, \nabla F_E^m(y)\}$ *tem posto constante para cada* $y \in U$, *para alguma vizinhança* U *de* x. *Se* $F_E(x) = 0$ *e* $\nabla F_E(x)d = 0$, *então, para* $l_{F_E} \in \Lambda(T^2(Q_E, x, d))$, *existe algum* $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^*$ *tal que*

$$l_{F_E} = \lambda^\top \nabla F_E(x),$$
$$\delta^*(l_{F_E} | T^2(Q_E, x, d)) = -\frac{1}{2}\lambda^\top \nabla^2 F_E(x)(d, d).$$

Demonstração: A prova dos itens 1 e 2 é feita da mesma forma que na Proposição 8.2 em [25]. A seguir mostraremos o item 3. Por hipótese temos que $\{\nabla F_E^1(x), \ldots, \nabla F_E^m(x)\}$ tem posto constante para todo $x \in U$, suponhamos sem perda de generalidade que $\{\nabla F_E^1(x), \ldots, \nabla F_E^p(x)\}$ é um conjunto maximal linearmente independente. Definimos a função $\hat{F}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $\hat{F}_E(x) = (F_E^1(x), \ldots, F_E^p(x))$. Podemos notar que $\hat{F}_E(x)$ é sobrejetiva. Então, considerando $A = \nabla \hat{F}_E(x)$, $S = -\frac{1}{2}\lambda^\top \nabla^2 \hat{F}_E(x)(d, d)$ e $A^{-1}S = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla \hat{F}_E(x)z \in S\}$, ou seja, $\nabla \hat{F}_E(x)z + \frac{1}{2}\nabla^2 \hat{F}_E(x)(d, d) = 0$. Então, pela Proposição 1.3 e aplicando o Lema 1.7 temos

$$l_{F_E} = \lambda^\top \nabla \hat{F}_E(x) \quad \text{e} \quad \delta^*(l_{F_E} | T^2(Q_E, x, d)) = -\frac{1}{2}\lambda^\top \nabla^2 F_E(x)(d, d).$$

■

2 Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto

Neste capítulo, primeiramente apresentaremos alguns conceitos básicos do controle ótimo discreto. Depois, serão obtidas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para o problema de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais (ou seja, restrições que envolvam todas as variáveis de estado e controle). Tais condições necessárias serão obtidas por meio do formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Isto é, o problema de controle ótimo discreto com restrições gerais será formulado no formato adequado para a aplicação do formalismo, caracterizaremos os cones de descida, tangente, factível e seus duais. Usaremos uma condição de regularidade com a finalidade de obter condições necessárias de primeira ordem não degeneradas. As condições de otimalidade encontradas podem ser vistas como uma versão do Princípio do Máximo Discreto. Em seguida, adicionaremos ao problema anterior restrições abstratas e novamente, com base no formalismo de Dubovitskii-Milyutin obteremos as condições de otimalidade. Por último, discutiremos os problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período e restrições abstratas no controle. Neste caso, as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem serão obtidas por meio de uma abordagem alternativa, em que as restrições de igualdade são embutidas na dinâmica e as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade através da inclusão de variáveis de folga não-negativas. A utilização desta segunda abordagem possibilita o uso de uma condição de regularidade menos restritiva (em comparação com a primeira que se baseia no formalismo via formalismo de D-M).

2.1 Problema de Controle Ótimo Discreto

A seguir vamos definir alguns conceitos básicos que serão usados nos problemas de Controle Ótimo discreto.

Neste trabalho, denotaremos os estágios ou períodos de tempo por k, os quais geralmente se iniciam no tempo $k = 0$. A variável de estado num período é uma variável n-dimensional que é representada por $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, e $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N+1})$ é chamado de trajetória. A variável de controle é uma variável m-dimensional representada por $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^m)$ e $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ é o controle associado à trajetória correspondente.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} \quad & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), \ \ k = 0,\ldots,N, \qquad (2.1) \\ & (x,u) \in \Delta, \qquad (2.2) \end{aligned}$$

onde $\psi_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $k = 0,\ldots,N$, $\psi_{N+1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $k = 0,\ldots,N$, $\Delta \subset \mathbb{R}^{n(N+2)+m(N+1)}$. A equação (2.1) é o sistema dinâmico e estabelece as relações de mudança dinâmica das variáveis de estado segundo os valores dados nas variáveis de controle, isto é, estabelece a dinâmica das variáveis de estado. Na equação (2.2) Δ pode ser representado por restrições mistas gerais (isto é, restrições do tipo $b(x,u)$), restrições de contorno (ou seja, restrições do tipo $\varphi(x_0, x_{N+1})$) ou restrições abstratas de controle, e será especificado oportunamente.

Neste problema vamos considerar $N \in \mathbb{N}$ um número fixo. Podemos ter a mesma duração para cada estágio (período) de tempo k ou diferente duração para estágios (períodos) diferentes. Por exemplo, em modelos de fornecimento de energia de longo alcance, o horizonte de planejamento pode ser de 100 anos, o que forma um horizonte de 10 períodos com cinco períodos iguais a 6 anos, três períodos iguais a 10 anos e dois períodos iguais a 20 anos.
Definiremos, no que segue, o conceito de processo ótimo local para o problema COD.

Definição 2.1. *Um processo factível é um par (x,u) que satisfaz as restrições (2.1) e (2.2) do problema COD. Além disso, dizemos que (x^*,u^*) é um processo ótimo local do problema COD se for factível e existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*,u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}),$$

para todo processo factível (x,u) que satisfaz

$$\|x_k - x_k^*\| < \epsilon, \ \ k = 0,\ldots,N+1, \qquad e \qquad \|u_k - u_k^*\| < \epsilon, \ \ k = 0,\ldots,N,$$

onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma em $\mathbb{R}^q$, $q = n, m$.

A seguir apresentamos um exemplo de uma aplicação de problema de COD o qual pode ser encontrado em [2].

Exemplo 2.1. *Uma fazenda tem um rebanho de gado. A cada ano, parte do rebanho é comercializada para carne e o restante é mantido na fazenda para reprodução. O lucro da venda do gado ao frigorífico é expresso como uma função $\varphi(x)$, onde x é o número de gado vendido (a função $\varphi(x)$ pode, por exemplo, ter o formato mostrado na Figura 1: entregas de carne maiores que a quantidade especificada d exigem um preço mais alto).*

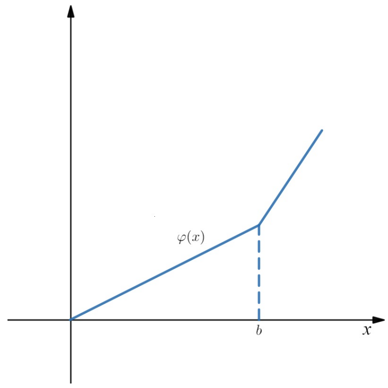

Figura 1 – Lucro da venda do gado ao frigorífico.

O número de bovinos remanescentes na fazenda para reprodução aumenta em um fator de α (onde $\alpha > 1$) no ano seguinte (até o início da comercialização). Como a fazenda pode obter o lucro máximo por um período de N anos, se as quantidades mínimas anuais de carne comercializada forem iguais a β?.

Seja x_0 o número inicial de gado na fazenda e x_k é o número de gado restante na fazenda até o final do ano k $(k = 1, 2, \ldots, N)$. O número de bovinos vendidos como carne bovina durante o ano k é u_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Durante o ano $(k-1)$, o número de gado igual a x_{k-1} foi mantido na fazenda para reprodução. Consequentemente, durante o ano (antes da comercialização) o número de bovinos na fazenda será αx_{k-1}, desse número, u_k será comercializado para carne bovina, enquanto o restante, ou seja, $\alpha x_{k-1} - u_k$, permanecerá na fazenda para procriar até o final do ano k. Portanto,

$$x_k = \alpha x_{k-1} - u_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, N.$$

O lucro da fazenda em N anos será

$$J = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \cdots + \varphi(u_N) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(u_k).$$

Levando em consideração as entregas contratadas, impomos ao parâmetro de controle u_k as seguintes restrições:

$$u_k \geqslant \beta, \;\; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Além disso, devido à natureza do problema, a coordenada de fase x (ou seja, o número de bovinos mantidos para reprodução) não é negativa:

$$x_k \geqslant 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Portanto, maximizar o lucro de uma fazenda de gado durante um período de N anos pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Maximizar} & F_0(u) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varphi(u_k) \\ \textit{sujeito a} & x_k & = & \alpha x_{k-1} - u_k, \;\; k = 1, \ldots, N, \\ & x_0 & = & c, \\ & u_k & \geqslant & \beta, \;\; k = 1, \ldots, N, \\ & x_k & \geqslant & 0, \;\; k = 1, \ldots, N. \end{array}$$

2.2 Condições Necessárias de Primeira Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas Gerais

Nesta seção apresentaremos condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais, tais condições podem ser entendidas como uma versão discreta do Princípio do Máximo.

Consideremos o seguinte problema de controle discreto com restrições mistas gerais:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0, x_{N+1}) = 0, \\ & b(x_0, x_1, ..., x_{N+1}, u_0, ..., u_N) = 0, \\ & g(x_0, x_1, ..., x_{N+1}, u_0, ..., u_N) \leqslant 0, \\ & \phi(x_0, x_{N+1}) \leqslant 0, \end{array} \tag{P_1}$$

onde $\psi_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, para todo $k = 0, \ldots, N$, $\psi_{N+1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{r_b}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $g : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{r_g}$, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\phi}$, são funções continuamente diferenciáveis em relação a x e u.

Consideremos os seguintes conjuntos de índices:

- $I_\phi(x^*, u^*) = \{j \in \{1, \ldots, r_\phi\} : \phi^j(x^*, u^*) = 0\}$,
- $I_g(x^*, u^*) = \{j \in \{1, \ldots, r_g\} : g^j(x^*, u^*) = 0\}$.

Observação 2.1. *Quando não houver perigo de confusão, vamos denotar I_ϕ em vez de $I_\phi(x^*, u^*)$ e I_g em vez de $I_g(x^*, u^*)$.*

O conjunto dos processos factíveis do problema (P_1) será denotado por:

$$Q = Q_E \cap Q_I,$$

onde Q_E e Q_I são conjuntos com interior vazio e interior não vazio, respectivamente, os quais são definidos por:

$$\begin{aligned} Q_E &= \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), k = 0,\ldots,N;\ \varphi(x_0,x_{N+1}) = 0; \\ &\qquad b(x_0,\ldots,x_{N+1},u_0,\ldots,u_N) = 0\Big\}, \\ Q_I &= \Big(\bigcap_{j\in I_\phi} Q^j_{I_1}\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{j\in I_g} Q^j_{I_2}\Big); \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} Q^j_{I_1} &= \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \phi^j(x_0,x_{N+1}) \leqslant 0\Big\},\ \ j \in I_\phi; \\ Q^j_{I_2} &= \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : g^j(x_0,...,x_{N+1},u_0,...,u_N) \leqslant 0\Big\},\ \ j \in I_g. \end{aligned}$$

Podemos reescrever o problema (P_1) como o seguinte problema de Programação Não Linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F_0(x,u) \\ \text{sujeito a} & F_E(x,u) = 0, \\ & F_I(x,u) \leqslant 0, \end{array} \qquad (\bar{P}_1)$$

onde

- $F_0 : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1});$$

- $F_E : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}^{r_b}$ é dada por

$$F_E(x,u) = (F_{E_0}(x,u), F_{E_1}(x,u), \ldots, F_{E_N}(x,u), F_{E_{N+1}}(x,u), F_{E_{N+2}}(x,u)),$$

  com

$$\begin{aligned} F_{E_k}(x,u) &= x_{k+1} - f_k(x_k,u_k),\ \ k = 0,\ldots,N, \\ F^i_{E_k}(x,u) &= x^i_{k+1} - f^i_k(x_k,u_k),\ \ k = 0,\ldots,N,\ \ i = 1,\ldots,n, \\ F_{E_{N+1}}(x,u) &= \varphi(x_0,x_{N+1}), \\ F^i_{E_{N+1}}(x,u) &= \varphi^i(x_0,x_{N+1}),\ \ i = 1,\ldots,r_\varphi, \\ F_{E_{N+2}}(x,u) &= b(x,u), \\ F^i_{E_{N+2}}(x,u) &= b^i(x,u),\ \ i = 1,\ldots,r_b; \end{aligned}$$

- $F_I : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{r_\phi} \times \mathbb{R}^{r_g}$ é determinada por

$$F_I(x,u) = (F_{I_1}(x,u), F_{I_2}(x,u)),$$

  com

$$\begin{aligned} F_{I_1}(x,u) &= \phi(x_0,x_{N+1}), \\ F^j_{I_1}(x,u) &= \phi^j(x_0,x_{N+1}),\ \ j = 1,\ldots,r_\phi, \\ F_{I_2}(x,u) &= g(x,u), \\ F^j_{I_2}(x,u) &= g^j(x,u),\ \ j = 1,\ldots,r_g. \end{aligned}$$

Dado que as funções coordenadas do problema (P_1) são continuamente diferenciáveis, segue que a função objetivo F_0 e as aplicações F_E, F_I também são continuamente diferenciáveis.

Seja (x^*, u^*) um processo factível, a derivada de ψ em (x^*, u^*) definida como $\nabla\psi(x^*, u^*) : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}$ é dada, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, da seguinte forma

$$\nabla\psi(x^*, u^*)(s,t) = \sum_{k=0}^{N}(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)t_k) + \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}.$$

Sendo $F_E(x,u) = (F_{E_0}(x,u), F_{E_1}(x,u), \ldots, F_{E_N}(x,u), F_{E_{N+1}}(x,u), F_{E_{N+2}}(x,u))$, temos

$$\nabla F_E(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} A_0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_N & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_N \\ \varphi_{x_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{x_{N+1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{x_0} & b_{x_1} & b_{x_2} & 0 & \cdots & b_{x_N} & b_{x_{N+1}} & b_{u_0} & b_{u_1} & b_{u_2} & \cdots & b_{u_{N-1}} & b_{u_N} \end{pmatrix},$$

onde

- $A_k = -\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad B_k = -\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\quad k = 0, \cdots, N$;
- $\varphi_{x_0} = \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*) \in \mathbb{R}^{r_\varphi\times n}$, $\quad \varphi_{x_{N+1}} = \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*) \in \mathbb{R}^{r_\varphi\times n}$;
- $b_{x_k} = \nabla_{x_k} b(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^{r_b\times n}$, $k = 0, \ldots, N+1$, $\quad b_{u_k} = \nabla_{u_k} b(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^{r_b\times m}$, $k = 0, \ldots, N$;
- $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz identidade.

Observação 2.2. *Pode se notar que a matriz jacobiana* $[\nabla F_{E_0}(x^*, u^*) \ \cdots \ \nabla F_{E_N}(x^*, u^*)]$ *tem posto* $n(N+1)$.

Seja $\nabla F_E(x^*, u^*) : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_\varphi}$ a derivada de F_E em (x^*, u^*), a qual é definida por

$$\nabla F_E(x^*, u^*)(s,t) \;=\; (\nabla F_{E_0}(x^*, u^*)(s,t), \nabla F_{E_1}(x^*, u^*)(s,t), \ldots, \nabla F_{E_{N+2}}(x^*, u^*)(s,t)),$$

com

$$\begin{aligned} \nabla F_{E_k}(x^*, u^*)(s,t) &= s_{k+1} - (\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k), \text{ para } k = 0, \ldots, N, \\ \nabla F_{E_{N+1}}(x^*, u^*)(s,t) &= \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}, \\ \nabla F_{E_{N+2}}(x^*, u^*)(s,t) &= \nabla_{x_0} b(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_1} b(x^*, u^*)s_1 + \cdots + \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*)s_{N+1} \\ &\quad +\nabla_{u_0} b(x^*, u^*)t_0 + \nabla_{u_1} b(x^*, u^*)t_1 + \cdots + \nabla_{u_N} b(x^*, u^*)t_N. \end{aligned}$$

A derivada de F_I em (x^*, u^*), $\nabla F_I(x^*, u^*) : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{r_g} \times \mathbb{R}^{r_\phi}$, é dada por

$$\nabla F_I(x^*, u^*)(s, t) = (\nabla F_{I_1}(x^*, u^*)(s, t), \nabla F_{I_2}(x^*, u^*)(s, t)),$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla F_{I_1}(x^*, u^*)(s, t) &= \nabla_{x_0}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}, \\ \nabla F_{I_2}(x^*, u^*)(s, t) &= \nabla_{x_0}g(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_1}g(x^*, u^*)s_1 + \cdots + \nabla_{x_{N+1}}g(x^*, u^*)s_{N+1} \\ &\quad + \nabla_{u_0}g(x^*, u^*)t_0 + \nabla_{u_1}g(x^*, u^*)t_1 + \cdots + \nabla_{u_N}g(x^*, u^*)t_N. \end{aligned}$$

2.2.1 Condição de regularidade para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais

A seguir introduziremos um conceito de regularidade que será utilizado no decorrer da seção.

Definição 2.2. *Seja (x^*, u^*) um processo factível de (P_1), dizemos que (x^*, u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido se:*

1. *Existe uma vizinhança V de (x^*, u^*) tal que $\nabla F_E(x, u)$ tem o mesmo posto para cada $(x, u) \in V$.*
2. *Existe $(s, t) \in Nu\nabla F_E(x^*, u^*)$ tal que*

$$\nabla g^j(x^*, u^*)^\top (s, t) < 0, \quad j \in I_g, \tag{2.3}$$

$$\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} < 0, \quad j \in I_\phi, \tag{2.4}$$

onde $s = (s_0, \ldots, s_{N+1})$, $t = (t_0, \ldots, t_N)$.

Observação 2.3. *Note que, o item 2 da Definição 2.2 assegura que*

$$\nabla\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*) \neq 0, \;\; j \in I_\phi, \quad \nabla g^j(x^*, u^*) \neq 0, \;\; j \in I_g.$$

Para obter condições necessárias de primeira ordem para o problema (P_1) usando o formalismo de Dubovitskii-Milyutin precisamos determinar, no processo ótimo (x^*, u^*), os cones das direções de descida da função objetivo $(D(F_0, (x^*, u^*)))$, das direções tangentes a Q_E $(T(Q_E, (x^*, u^*)))$ e das direções factíveis a Q_I $(V(Q_I, (x^*, u^*)))$, juntamente com seus cones duais denotados por $D(F_0, (x^*, u^*))^*$, $T(Q_E, (x^*, u^*))^*$ e $V(Q_I, (x^*, u^*))^*$. Os quais serão determinados a seguir.

2.2.2 Construção do cone de descida $D(F_0, (x^*, u^*))$ e seu dual

O conjunto $D(F_0, (x^*, u^*))$ é um cone aberto com vértice na origem, gerado pelas direções de descida de F_0 em (x^*, u^*). Como F_0 é diferenciável em (x^*, u^*), se $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$, então pelo Teorema 1.6. o cone de descida é definido por

$$\begin{aligned} D(F_0, (x^*, u^*)) &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla F_0(x^*, u^*)(s,t) < 0\} \\ &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \sum_{k=0}^{N} (\nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top s_k \\ &\quad + \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top t_k) + \nabla_{x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} < 0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pelo Teorema 1.5, seu cone dual é dado por

$$\begin{aligned} D(F_0, (x^*, u^*))^* &= \{l_0 \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^* : l_0(s,t) = -\xi \nabla F_0(x^*, u^*)(s,t), \xi \geqslant 0\} \\ &= \{l_0 \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^* : l_0(s,t) = -\xi \Big(\sum_{k=0}^{N} (\nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top s_k \\ &\quad + \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top t_k) + \nabla_{x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} \Big),\ \xi \geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.3 Construção do cone factível $V(Q_I, (x^*, u^*))$ e seu dual

Nesta subseção, vamos determinar o cone factível $V(Q_I, (x^*, u^*))$, para isso, precisamos construir os cones factíveis de $V(Q_{I_1}, (x^*, u^*))$ e $V(Q_{I_2}, (x^*, u^*))$. Suponhamos que $\nabla g^j(x^*, u^*) \neq 0$, para todo $j \in I_g$ e $\nabla \phi^j(x^*, u^*) \neq 0$, para todo $j \in I_\phi$. Com estas suposições, aplicamos a Observação 1.5 para determinar os cones factíveis $V(Q_{I_1}, (x^*, u^*))$ e $V(Q_{I_2}, (x^*, u^*))$. Assim

$$V(Q_I, (x^*, u^*)) = V(Q_{I_1}(x^*, u^*)) \bigcap V(Q_{I_2}, (x^*, u^*)), \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{aligned} V(Q_{I_1}, (x^*, u^*)) &= \bigcap_{j \in I_\phi} V(Q_{I_2}^j, (x^*, u^*)), \\ V(Q_{I_2}, (x^*, u^*)) &= \bigcap_{j \in I_g} V(Q_{I_1}^j, (x^*, u^*)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} V(Q_{I_1}^j, (x^*, u^*)) &= \Big\{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 \\ &\quad + \nabla_{x_{N+1}} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} < 0 \Big\},\ \ j \in I_\phi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} V(Q_{I_2}^j, (x^*, u^*)) &= \Big\{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla_x g^j(x^*, u^*)^\top s \\ &\quad + \nabla_u g^j(x^*, u^*)^\top t < 0, \Big\},\ \ j \in I_g. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Os cones $V(Q_{I_1}^j, (x^*, u^*)$ para todo $j \in I_\phi$ e $V(Q_{I_2}^j(x^*, u^*)$ para todo $j \in I_g$ foram obtidos usando o item 3 da Observação 1.5. Agora aplicando o Teorema 1.5 temos que

$$V(Q_{I_1}, (x^*, u^*)^* = \Big(\bigcap_{j \in I_\phi} V(Q_{I_1}^j, (x^*, u^*)) \Big)^* = \sum_{j \in I_\phi} V(Q_{I_1}^j, (x^*, u^*))^*,$$

com

$$V(Q_{I_1}^j,(x^*,u^*))^* \;=\; \Big\{\bar{l}_2^j \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^* : \bar{l}_2^j(s,t) = -\eta^j(\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}), \eta^j \geqslant 0\Big\}, \;\; j \in I_\phi.$$

Assim, se $\bar{l}_2 \in V(Q_{I_1},(x^*,u^*))^*$, dado $(s,t) \in V(Q_{I_1},(x^*,u^*))$, temos

$$\begin{aligned}\bar{l}_2(s,t) &= \sum_{j\in I_\phi} \bar{l}_2^j(s,t)\\ &= \sum_{j\in I_\phi} -\eta^j\Big(\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}\Big),\end{aligned}$$

onde $\eta^j \geqslant 0, \;\; j \in I_\phi$. Analogamente, para $V(Q_{I_2},(x^*,u^*))$, se $\tilde{l}_2 \in V(Q_{I_2},(x^*,u^*))^*$ segue que

$$\begin{aligned}\tilde{l}_2(s,t) &= \sum_{j\in I_g} \tilde{l}_2^j(s,t)\\ &= \sum_{j\in I_g} -\mu^j\Big(\nabla_x g^j(x^*,u^*)^\top s + \nabla_x g^j(x^*,u^*)^\top t\Big), \;\; \mu^j \geqslant 0, \;\; j \in I_g.\end{aligned}$$

Logo, se $V(Q_I,(x^*,u^*)) \neq \varnothing$, podemos aplicar o Lema 1.4 na equação (2.7). Assim, se $l_2 \in V(Q_I,(x^*,u^*))^*$, dado $(s,t) \in V(Q_{I_1},(x^*,u^*))$, temos

$$\begin{aligned}l_2(s,t) &= \sum_{j\in I_\phi} -\eta^j\Big(\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}\Big)\\ &\quad + \sum_{j\in I_g} -\mu^j\Big(\nabla_x g^j(x^*,u^*)^\top s + \nabla_u g^j(x^*,u^*)^\top t\Big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2.4 Construção do cone tangente $T(Q_E,(x^*,u^*))$ e seu dual

Por hipótese para cada $k = 0,\ldots,N+2$, F_{E_k} é continuamente diferenciável. Então, segue que F_E é continuamente diferenciável, ou seja,

$$\nabla F_E(x^*,u^*)(s,t) = \Big(\nabla F_{E_0}(x^*,u^*)(s,t),\ldots,\nabla F_{E_{N+2}}(x^*,u^*)(s,t)\Big) \tag{2.11}$$

é contínuo e diferenciável. Suponhamos que $\nabla F_E(x^*,u^*)$ satisfaz a condição de posto constante, então pela Proposição 1.1, temos

$$T(Q_E,(x^*,u^*)) = \mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*,u^*). \tag{2.12}$$

Para determinar o cone dual de $T(Q_E,(x^*,u^*))$, vamos considerar o operador $\bar{W} : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+1)+r_\varphi+r_b}$, definido por

$$\bar{W}(s,t) = (\bar{W}_0(s,t), \bar{W}_1(s,t)\ldots,\bar{W}_{N+2}(s,t)),$$

onde

- $\bar{W}_k(s,t) = s_{k+1} - (\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k), \;\; k = 0, \dots, N,$
- $\bar{W}_{N+1}(s,t) = \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1},$
- $\bar{W}_{N+2}(s,t) = \nabla_x b(x^*, u^*)s + \nabla_u b(x^*, u^*)t.$

Note que $\bar{W}$ é linear e contínuo para todo $k = 0, \dots, N$, e por (2.12), temos

$$T(Q_E, (x^*, u^*)) = \mathrm{Nu}\bar{W}. \tag{2.13}$$

Logo,

$$T(Q_E, (x^*, u^*))^* = (\mathrm{Nu}\bar{W})^*.$$

Seja $\bar{W}^* : (\mathbb{R}^{n(N+1)+r_\varphi+r_b})^* \to (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^*$ o operador adjunto de $\bar{W}$, sabemos que $\mathrm{Im}\bar{W}^* = (\mathrm{Nu}\bar{W})^\perp = (\mathrm{Nu}\bar{W})^*$, onde a última igualdade segue aplicando o Teorema 1.4. na equação (2.13). Assim, para todo $\bar{l}_1 \in \Big(T(Q_E, (x^*, u^*))\Big)^*$, existe $(\overline{p}, \gamma, \lambda) \in (\mathbb{R}^{n(N+1)+r_\varphi+r_b})^* \cong \mathbb{R}^{n(N+1)+r_\varphi+r_b}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\overline{p} = (\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_{N+1}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{r_b}$, tal que $\bar{l}_1 = \bar{W}^*(-\overline{p}, -\gamma, -\lambda)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{l}_1(s,t) &= \langle \bar{W}^*(-\overline{p}, -\gamma, -\lambda), (s,t)\rangle = \langle (-\overline{p}, -\gamma, -\lambda), \bar{W}(s,t)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N} \langle -\overline{p}_{k+1}, \bar{W}_k(s,t)\rangle + \langle -\gamma, \bar{W}_{N+1}(s,t)\rangle + \langle -\lambda, \bar{W}_{N+2}(s,t)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N} \langle -\overline{p}_{k+1}, s_{k+1} - (\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k)\rangle \\
&\quad + \langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle + \langle -\lambda, \nabla b(x^*, u^*)(s,t)\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
T(Q_E, (x^*, u^*))^* = \Big\{ &\bar{l}_1 \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^* : \\
&\bar{l}_1(s,t) = \sum_{k=0}^{N} \langle \bar{p}_{k+1}, \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k - s_{k+1}\rangle \\
&+ \langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle \\
&+ \langle -\lambda, \nabla b(x^*, u^*)(s,t)\rangle \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

2.2.5 Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem

Nesta subseção apresentamos condições necessárias de primeira ordem para o problema (P_1), as quais são uma versão discreta do Princípio do Máximo. Tais condições são obtidas via formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

Definimos a função Hamiltoniana associada ao problema (P_1) por $H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_g} \to \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, N$, definida por

$$H_k(x, u, p, \xi, \lambda, \mu) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k, u_k) - \sum_{i=1}^{r_b} \lambda_i b_i(x,u) - \sum_{j=1}^{r_g} \mu_j g_j(x,u).$$

O seguinte teorema é um dos resultados importantes deste capítulo, pois é uma versão discreta do princípio do máximo fraco. Além disso, as condições de primeira ordem obtidas são mais gerais que na literatura (ver por exemplo [20], [21], [23], [40], [41]) pois consideramos o problema (P_1) o qual é um problema de controle ótimo discreto com restrições que envolvem todos os estados e controles.

Teorema 2.1. *(Princípio do Máximo Fraco Discreto) Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_1). Então, existe $(p, \xi, \lambda, \gamma, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}^{r_g} \times \mathbb{R}^{r_\phi}$, não todos nulos, $\xi \geqslant 0$, $\mu^j \geqslant 0$, $i = 1, \dots, r_g$, $\eta^j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, r_\phi$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu), \;\; k = 1, \dots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*), \\
p_{N+1} &= -\Big[\sum_{i=1}^{r_b} \lambda^i \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*) + \sum_{j=1}^{r_g} \mu^j \nabla_{x_{N+1}} g^j(x^*, u^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla_{x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j \nabla_{x_{N+1}} \phi_j(x_0^*, x_{N+1}^*) \Big] \\
&\quad - \xi \nabla_{x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).
\end{aligned}$$

(iii) ***Condição de estacionaridade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) = 0, \;\; k = 0, \dots, N.$$

(iv) ***Condição de complementaridade:***

$$\mu^j g^j(x^*, u^*) = 0, \;\; j = 1, \dots, r_g,$$

$$\eta^j \phi^j(x^*, u^*) = 0, \;\; j = 1, \dots, r_\phi.$$

Demonstração: Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_1). Para provar este teorema vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: Se a derivada da função objetivo for nula (ou seja, $\nabla F_0(x^*, u^*) = 0$), considerando $\xi = 1$, $p = 0$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, $\mu = 0$, $\eta = 0$, as condições $(i) - (iv)$ do teorema são satisfeitas.

Caso 2: Se a derivada da função objetivo não for nula (ou seja, $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$) e (x^*, u^*) não é um processo regular, temos dois sub-casos:

- **Caso 2.1:** Suponhamos que o item 1 da Definição 2.2 não é satisfeito. Consideremos que o posto$\Big(\nabla F_E(x^*, u^*)\Big) = p$. Então, para toda vizinhança V de (x^*, u^*) existe $(x, u) \in V$ tal que posto$(\nabla F_E(x, u)) > p$. Deste modo, existe uma sequência $(x^\tau, u^\tau) \xrightarrow[\tau \to \infty]{} (x^*, u^*)$ tal que

$$\text{posto}(\nabla F_E(x^*, u^*)) < \text{posto}(\nabla F_E(x^\tau, u^\tau)).$$

Consideremos I_τ como o subconjunto de índices dos vetores linhas que são linearmente independentes de $\nabla F_E(x^\tau, u^\tau)$, assim $|I_\tau| > \text{posto}(\nabla F_E(x^*, u^*))$. Seja C o conjunto de índices das componentes da função F_E, ou seja,

$$\begin{aligned} C &= \{k_i : k = 0, \ldots, N;\;\; i = 1, \ldots, n\} \cup \{k_i : k = N+1;\;\; i = 1, \ldots, r_\varphi\} \cup \\ &\quad \{k_i : k = N+2;\;\; i = 1, \ldots, r_b\}. \end{aligned}$$

Sabemos que C é finito, assim o número total de subconjuntos é $2^{|C|}$ e como $I_\tau \subset C$, então existe um subconjunto $\mathscr{M} \subset \mathbb{N}$, tal que $I_\tau = \bar{I}$ para todo $\tau \in \mathscr{M}$, para um certo $\bar{I}$ com $|\bar{I}| > \text{posto}(\nabla F_E(x^*, u^*))$. Como $|\bar{I}| \leqslant n(N+1) + r_\varphi + r_b$ e

$$|\bar{I}| \leqslant n(N+1) + r_\varphi + r_b = \dim \text{Im}\nabla F_E(x^*, u^*) + \dim \text{Im}\nabla F_E(x^*, u^*)^\perp,$$

então,

$$\text{Im}(\nabla F_E(x^*, u^*))^\perp \neq \{0\}.$$

Como $\text{Nu}\nabla F_E(x^*, u^*)^\top = \text{Im}(\nabla F_E(x^*, u^*))^\perp$, então existe $(l_1, l_2, l_3) \neq (0,0,0)$ tal que $\nabla F_E(x^*, u^*)^\top (l_1, l_2, l_3) = 0$ com $l_1 \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $l_2 \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $l_3 \in \mathbb{R}^{r_b}$. Lembremos que

$$\nabla F_E(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} A_0 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_1 & I & \ldots & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_N & I & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_N \\ \varphi_{x_0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_{x_{N+1}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{x_0} & b_{x_1} & b_{x_2} & \ldots & b_{x_N} & b_{x_{N+1}} & b_{u_0} & b_{u_1} & b_{u_2} & \ldots & b_{u_N} \end{pmatrix}$$

onde $A_k = -\nabla_{x_k} f_k(x_k, u_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 0, \ldots, N$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade; $B_k = -\nabla_{u_k} f_k(x_k, u_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}, k = 0, \ldots, N$; $b_{x_k} = \nabla_{x_k} b(x, u) \in \mathbb{R}^{r_b \times n}$, $k = 0, \ldots, N+1$; $b_{u_k} = \nabla_{u_k} b(x, u) \in \mathbb{R}^{r_b \times m}$, $k = 0, \ldots, N$; $\varphi_{x_0} = \nabla_{x_0} \varphi(x_0, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{r_\varphi \times n}$, $\varphi_{x_{N+1}} = \nabla_{x_{N+1}} \varphi(x_{,0}\,, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{r_\varphi \times n}$.
Assim, considerando $\xi = 0$, $p = l_1$, $\gamma = l_2$, $\lambda = l_3$, $\eta = 0$, $\mu = 0$, as condições $(i) - (iv)$ são satisfeitas.

- **Caso 2.2:** Suponhamos que na Definição 2.2. o item 1 se cumpre mas o item 2 não se cumpre. Então, pelo item 1 e pela Proposição 1.1, temos que

$$\text{Nu}\,\nabla F_E(x^*, u^*) = T(Q_E, (x^*, u^*)).$$

Assim, o seguinte sistema

$$\begin{array}{rcl} \nabla F_E(x^*,u^*)(s,t) & = & 0, \\ \nabla G(x^*,u^*)(s,t) & < & 0, \end{array}$$

onde $\nabla G(x^*,u^*) = \begin{bmatrix} \nabla g^j(x^*,u^*)|_{j\in I_g} \\ \nabla \phi^j(x^*,u^*)|_{j\in I_\phi} \end{bmatrix}$ não possui solução. Pelo Teorema 1.3, temos que existem $(l_1,l_2,l_3,l_4,l_5) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}_+^{|I_g|} \times \mathbb{R}_+^{|I_\phi|}$, tais que

$$\nabla F_E(x^*,u^*)^\top(l_1,l_2,l_3) + \nabla G(x^*,u^*)^\top(l_4,l_5) = 0.$$

Assim, considerando $\xi = 0$, $p = l_1$, $\gamma = l_2$, $\lambda = l_3$,

$$\mu^j = \begin{cases} l_4^j, & \text{para } j \in I_g, \\ 0, & \text{para } j \in \{1,\dots,r_g\}\backslash I_g, \end{cases}$$

$$\eta^j = \begin{cases} l_5^j, & \text{para } j \in I_\phi, \\ 0, & \text{para } j \in \{1,\dots,r_\phi\}\backslash I_\phi, \end{cases}$$

as condições $(i) - (iv)$ do teorema são satisfeitas.

Caso 3: Agora consideremos o caso em que $\nabla F_0(x^*,u^*) \neq 0$ e (x^*,u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido, ou seja, (x^*,u^*) satisfaz a Definição 2.2. Note que, o cone das direções de descida, cone das direções factíveis, o cone das direções tangentes com seus respectivos cones duais, são dados da seguinte forma:

- Como $F_0(x^*,u^*)$ é continuamente diferenciável e $\nabla F_0(x^*,u^*)$ é não nulo, então por (2.5), temos que

$$\begin{aligned} D(F_0,(x^*,u^*)) &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla F_0(x^*,u^*)(s,t) < 0\} \\ &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \sum_{k=0}^{N} (\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top s_k \\ &\quad + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top t_k) + \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1})^\top s_{N+1} < 0\}. \end{aligned}$$

  O dual segue de (2.6), ou seja,

$$\begin{aligned} D(F_0,(x^*,u^*))^* &= \Big\{ l_0 \in \left(\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}\right)^* : l_0(s,t) = -\xi\nabla F_0(x^*,u^*)(s,t), \xi \geqslant 0 \Big\} \\ &= \Big\{ l_0 \in \left(\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}\right)^* : \\ &\qquad l_0(s,t) = -\xi \sum_{k=0}^{N} (\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top t_k) \\ &\qquad\qquad -\xi \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1})^\top s_{N+1},\ \xi \geqslant 0 \Big\}. \end{aligned}$$

- O cone das direções factíveis foi determinado por (2.7) o qual é da seguinte forma

$$V(Q_I,(x^*,u^*)) = \Big[\bigcap_{j\in I_\phi} V(Q^j_{I_1},(x^*,u^*))\Big]\bigcap\Big[\bigcap_{j\in I_g} V(Q^j_{I_2},(x^*,u^*))\Big],$$

onde $V(Q^j_{I_1},(x^*,u^*))$ e $V(Q^j_{I_2},(x^*,u^*))$ foram determinados pelas equações (2.8) e (2.9), respectivamente. Tais cones são dados por:

  – para cada $j \in I_\phi$,

$$\begin{aligned} V(Q^j_I,(x^*,u^*)) \;=\; & \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla_{x_0}\phi^j(x^*_0, x^*_{N+1})^\top s_0 \\ & +\nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x^*_0, x^*_{N+1})^\top s_{N+1} < 0\}, \end{aligned}$$

  – para cada $j \in I_g$,

$$\begin{aligned} V(Q^j_{I_2},(x^*,u^*)) \;=\; & \Big\{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \nabla_x g^j(x^*,u^*)^\top s \\ & +\nabla_u g^j(x^*,u^*)^\top t < 0\Big\},\;\; j \in I_g(x^*,u^*). \end{aligned}$$

Por (2.10), temos que o dual é dado como

$$\begin{aligned} V(Q_I,(x^*,u^*))^* \;=\; & \sum_{j\in I_\phi} -\eta^j\Big(\nabla_{x_0}\phi^j(x^*_0,x^*_{N+1})^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x^*_0,x^*_{N+1})^\top s_{N+1}\Big) \\ & + \sum_{j\in I_g} -\mu^j\Big(\nabla_x g^j(x^*,u^*)^\top s + \nabla_u g^j(x^*,u^*)^\top t\Big). \end{aligned}$$

- O cone tangente a Q_E foi determinado por (2.12), o qual é da seguinte forma:

$$T(Q_E,(x^*,u^*)) = \mathrm{Nu}\nabla F_E(x^*,u^*).$$

Seu dual segue de (2.14), ou seja,

$$\begin{aligned} T(Q_E,(x^*,u^*))^* \;=\; & \Big\{\bar{l}_1 \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)})^* : \\ & \bar{l}_1(s,t) = \sum_{k=0}^{N}\langle \bar{p}_{k+1}, \nabla_{x_k} f_k(x^*_k,u^*_k)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x^*_k,u^*_k)t_k - s_{k+1}\rangle \\ & +\langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x^*,u^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x^*,u^*)s_{N+1}\rangle \\ & +\langle -\lambda, \nabla b(x^*,u^*)(s,t)\rangle\Big\}. \end{aligned}$$

Pela convexidade dos cones, o Teorema 1.10 pode ser aplicado. Assim, temos que existem $l_0 \in D(F_0,(x^*,u^*))^*$, $l_1 \in T(Q_E,(x^*,u^*))^*$ e $l_2 \in V(Q_I,(x^*,u^*))^*$, não todos identicamente nulos, tais que

$$l_0 + l_1 + l_2 = 0.$$

Para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, temos

$$l_0(s,t) + l_1(s,t) + l_2(s,t) = 0. \tag{2.15}$$

Dado que $l_0 \in D(F_0, (x^*, u^*))^*$, $l_1 \in T(Q_E, (x^*, u^*))^*$ e $l_2 \in V(Q_I, (x^*, u^*))^*$, substituindo na equação (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\xi\Big[\langle \nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*), s_0\rangle + \sum_{k=1}^{N}\langle \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), s_k\rangle + \sum_{k=0}^{N}\langle \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), t_k\rangle \\
&+\langle \psi_{N+1}(x_{N+1}^*), s_{N+1}\rangle\Big] + \sum_{k=0}^{N}\langle p_{k+1}, \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k - s_{k+1}\rangle \\
&+\langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle + \langle -\lambda, \nabla b(x^*, u^*)(s,t)\rangle \\
&+\sum_{j\in I_\phi} -\eta^j\Big(\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}\Big) \\
&+\sum_{j\in I_g} -\mu^j\Big(\nabla_x g^j(x^*, u^*)^\top s + \nabla_u g^j(x^*, u^*)^\top t\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Considerando $\eta_j = 0$ para $j \notin I_\phi$ e $\mu_j = 0$ para $j \notin I_g$, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\xi\Big[\langle \nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*), s_0\rangle + \sum_{k=1}^{N}\langle \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), s_k\rangle + \sum_{k=0}^{N}\langle \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), t_k\rangle \\
&+\langle \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*), s_{N+1}\rangle\Big] + \sum_{k=0}^{N}\langle p_{k+1}, \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k - s_{k+1}\rangle \\
&+\langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x^*, u^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle + \langle -\lambda, \nabla b(x^*, u^*)(s,t)\rangle \\
&+\langle -\eta, \nabla_{x_0}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}\rangle \\
&+\langle -\mu, \nabla_x g(x^*, u^*)s + \nabla_u g(x^*, u^*)t\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Logo, desenvolvendo cada produto interno, e pelas propriedades de operadores adjuntos, segue que

$$\begin{aligned}
&-\xi\Big[\langle \nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*), s_0\rangle + \sum_{k=1}^{N}\langle \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), s_k\rangle + \sum_{k=0}^{N}\langle \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*), t_k\rangle \\
&+\langle \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*), s_{N+1}\rangle\Big] + \langle p_1, \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)s_0\rangle + \langle -p_1, s_1\rangle + \sum_{k=1}^{N}\langle -p_{k+1}, s_{k+1}\rangle \\
&+\sum_{k=1}^{N}\langle p_{k+1}, \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k\rangle + \sum_{k=0}^{N}\langle p_{k+1}, \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k\rangle + \langle -\lambda, \nabla_{x_0} b(x^*, u^*)s_0\rangle \\
&+\langle -\lambda, \sum_{k=1}^{N}\nabla_{x_k} b(x^*, u^*)s_k\rangle + \langle -\lambda, \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle + \langle -\lambda, \sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k} b(x^*, u^*)t_k\rangle \\
&+\langle -\mu, \nabla_{x_0} g(x^*, u^*)s_0\rangle + \langle -\mu, \sum_{k=1}^{N}\nabla_{x_k} g(x^*, u^*)s_k\rangle + \langle -\mu, \nabla_{x_{N+1}} g(x^*, u^*)s_{N+1}\rangle \\
&+\langle -\mu, \sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k} g(x^*, u^*)t_k\rangle + \langle -\gamma, \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0\rangle + \langle -\gamma, \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}\rangle \\
&+\langle -\eta, \nabla_{x_0}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0\rangle + \langle -\eta, \nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Rearranjando termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\xi\langle\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*),s_0\rangle-\langle p_1,\nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)s_0\rangle+\langle\lambda,\nabla_{x_0}b(x^*,u^*)s_0\rangle\\
&+\langle\mu,\nabla_{x_0}g(x^*,u^*)s_0\rangle+\langle\gamma,\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0\rangle+\langle\eta,\nabla_{x_0}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0\rangle\\
&+\xi\sum_{k=1}^{N}\langle\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*),s_k\rangle+\sum_{k=1}^{N}\langle p_k,s_k\rangle-\sum_{k=1}^{N}\langle p_{k+1},\nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)s_k\rangle\\
&+\langle\lambda,\sum_{k=1}^{N}\nabla_{x_k}b(x^*,u^*)s_k\rangle+\langle\mu,\sum_{k=1}^{N}\nabla_{x_k}g(x^*,u^*)s_k\rangle+\xi\langle\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*),s_{N+1}\rangle\\
&+\langle p_{N+1},s_{N+1}\rangle+\langle\lambda,\nabla_{x_{N+1}}b(x^*,u^*)s_{N+1}\rangle+\langle\mu,\nabla_{x_{N+1}}g(x^*,u^*)s_{N+1}\rangle\\
&+\langle\gamma,\nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1}\rangle+\langle\eta,\nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1}\rangle\\
&+\xi\sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}\langle\psi_k(x_k^*,u_k^*),t_k\rangle-\sum_{k=0}^{N}\langle p_{k+1},\nabla_{u_k}f_k(x_k^*,u_k^*)t_k\rangle+\langle\lambda,\sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}b(x^*,u^*)t_k\rangle\\
&+\langle\mu,\sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}g(x^*,u^*)t_k\rangle=0.
\end{aligned}
$$

Em continuação, agrupamos em relação a $s_0, s_k, s_{N+1}, t_0, t_k$ e t_N,

$$
\begin{aligned}
&\langle\xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*)-\nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1+\nabla_{x_0}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_0}g(x^*,u^*)^\top\mu\\
&+\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_0}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta,s_0\rangle+\sum_{k=1}^{N}[\langle\xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)\\
&+p_k-\nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1}+\nabla_{x_k}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_k}g(x^*,u^*)^\top\mu,s_k\rangle]\\
&+\langle p_{N+1}+\xi\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)+\nabla_{x_{N+1}}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_{N+1}}g(x^*,u^*)^\top\mu\\
&+\nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta,s_{N+1}\rangle+\sum_{k=0}^{N}\langle\xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)\\
&-\nabla_{u_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1}+\nabla_{u_k}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{u_k}g(x^*,u^*)^\top\mu,t_k\rangle=0.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

A igualdade (2.16) se cumpre para todo $(s,t)\in\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{m(N+1)}$. Em particular, se $(s,t)=(s,0)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\langle\xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*)-\nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1+\nabla_{x_0}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_0}g(x^*,u^*)^\top\mu\\
&+\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_0}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta,s_0\rangle+\sum_{k=1}^{N}\langle\xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)\\
&+p_k-\nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1}+\nabla_{x_k}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_k}g(x^*,u^*)^\top\mu,s_k\rangle\\
&+\langle p_{N+1}+\xi\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)+\nabla_{x_{N+1}}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_{N+1}}g(x^*,u^*)^\top\mu\\
&+\nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta,s_{N+1}\rangle=0.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Consideremos $M=[M_0\quad M_1\quad\cdots\quad M_{N+1}]$ e $s=[s_0\quad s_1\quad\cdots\quad s_{N+1}]^\top$ onde

$$
\begin{aligned}
M_0&=\xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*)-\nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1+\nabla_{x_0}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_0}g(x^*,u^*)^\top\mu+\\
&\quad\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_0}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta,\\
M_k&=\xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)+p_k-\nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1}+\nabla_{x_k}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\\
&\quad\nabla_{x_k}g(x^*,u^*)^\top\mu,\quad\text{para } k=1,\dots,N,\\
M_{N+1}&=p_{N+1}+\xi\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)+\nabla_{x_{N+1}}b(x^*,u^*)^\top\lambda+\nabla_{x_{N+1}}g(x^*,u^*)^\top\mu\\
&\quad+\nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\gamma+\nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top\eta.
\end{aligned}
$$

Logo, $Ms = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^{n(N+2)}$, então $M = 0$, ou seja, $M_k = 0, \quad k = 0, \ldots, N+1$. Isto significa que

$$\begin{aligned} \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \gamma + \nabla_{x_0}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \eta &= \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi \nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*) \\ &\quad -\nabla_{x_0} b(x^*, u^*)^\top \lambda - \nabla_{x_0} g(x^*, u^*)^\top \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{x_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda \\ &\quad -\nabla_{x_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, \quad \text{para } k = 1, \ldots, N, \\ p_{N+1} &= -\xi \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*) - \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*)^\top \lambda - \nabla_{x_{N+1}} g(x^*, u^*)^\top \mu \\ &\quad -\nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \gamma - \nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \eta. \end{aligned}$$

Portanto, a equação adjunta e a condição de transversalidade são satisfeitas.
De maneira análoga, considerando agora $(s, t) = (0, t)$ na igualdade (2.16), obtemos

$$\sum_{k=0}^{N} \langle \xi \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} + \nabla_{u_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda + \nabla_{u_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, t_k \rangle = 0.$$

Consideremos $\tilde{M} = [\tilde{M}_0 \quad \tilde{M}_1 \quad \cdots \quad \tilde{M}_N]$ e $t = [t_0 \quad t_1 \quad \cdots \quad t_N]^\top$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{M}_k &= \xi \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} + \nabla_{u_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda \\ &\quad +\nabla_{u_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, \text{ para } k = 0, \ldots, N. \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{M}t = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$. Então $\tilde{M} = 0$, ou seja, $\tilde{M}_k = 0$ para $k = 0, \ldots, N$. Isto significa que, para $k = 0, \ldots, N$,

$$\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda - \nabla_{u_k} g(x^*, u^*)^\top \mu = 0.$$

Portanto, a condição de estacionariedade é satisfeita.
A condição de complementaridade segue pelo fato que

$$\eta^j = 0, \;\; j \in \{1, \ldots, r_\phi\} \backslash I_\phi \;\text{ e }\; \mu^j = 0, \;\; j \in \{1, \ldots, r_g\} \backslash I_g.$$

■

Pode-se notar na demostração do Teorema 2.1 que se (x^*, u^*) é um processo regular de tipo Mangasarian-Fromovitz estendido, então o multiplicador associado à função objetivo é não nulo. Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local do problema (P_1) satisfazendo a Definição 2.2. Então, as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.1 são cumpridas com $\xi > 0$.*

Demonstração: Se $\nabla F_0(x^*, u^*) = 0$ segue pelo caso (1) da prova do Teorema 2.1 que $\xi > 0$. Se $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$, da Definição 2.2 temos que existe $(s, t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ tal que $\nabla F_E(x^*, u^*)(s, t) = 0$ e $\nabla F_I(x^*, u^*)(s, t) < 0$, ou seja,

$$T(Q_E, (x^*, u^*)) \bigcap V(Q_I, (x^*, u^*)) \neq \varnothing.$$

Então, pela Observação 1.8, temos que $l_0 \neq 0$, isto é,

$$\xi \nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0.$$

Como $\xi \geqslant 0$ e $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$, segue que $\xi > 0$. ■ A seguir, apresentamos um exemplo de processo regular de tipo Mangasarian-Fromovitz estendido.

Exemplo 2.2.

$$\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & (x_0^{(1)})^2 + (x_0^{(2)})^2 + (u_0^{(1)})^2 + (u_0^{(2)})^2 + (u_1^{(1)})^2 + (u_1^{(2)})^2 \\
\textit{sujeito a} \quad & x_1^{(1)} = x_0^{(1)} + u_0^{(1)}, \\
& x_1^{(2)} = x_0^{(2)} + u_0^{(2)}, \\
& x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + u_1^{(1)}, \\
& x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + u_1^{(2)}, \\
& x_0^{(1)} + x_2^{(2)} = 0, \\
& (x_0^{(1)} + x_2^{(2)})^2 = 0, \\
& x_0^{(2)} + x_1^{(1)} + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} = 0, \\
& x_0^{(2)} - x_1^{(2)} - x_2^{(1)} - u_0^{(2)} - u_1^{(1)} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

onde $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, 2$, *e* $u_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1$.

Pode-se notar que $(x^*, u^*) = (0, 0)$ *é um processo ótimo. Mostraremos que a Definição 2.2 é satisfeita. Temos que* $\nabla F_E(x, u)$ *é dada por*

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2(x_0^{(1)} + x_2^{(2)}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_0^{(1)} + x_2^{(2)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

É fácil ver que esta matriz tem posto constante 6 em uma vizinhança do processo factível $(0, 0)$. *Além disso,*

$$Nu\nabla F_E(0, 0) = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

onde $v_1 = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0)^\top$, $v_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^\top$, $v_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)^\top$, $v_4 = (0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top$.
Por outro lado, temos que $\nabla F_I(0, 0) = (0, 1, 0, -1, -1, 0, 0, -1, -1, 0)$. *Assim, considerando* $z = v_2 + v_3$, *segue que* $z \in Nu\nabla F_E(0, 0)$ *e*

$$\nabla F_I(0, 0)^\top z = -4 < 0.$$

Logo, a Definição 2.2 é satisfeita. Então, pelo Corolário 2.1, existem $p \in \mathbb{R}^4$, $\gamma \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\xi > 0$, tais que as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.1 são satisfeitas. Em particular, podemos considerar $p = 0, \xi = 1, \lambda = 0, \gamma = (0 \quad 1)^\top$ e $\mu = 0$.

Note que na Definição 2.2 o item 1 verifica a condição de posto constante em todo o conjunto que envolve as restrições de igualdade. Assim, se este item for substituído por cada subconjunto que envolve as restrições de igualdade, ele tem o mesmo posto em um vizinhança de (x^*, u^*), as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.1 são satisfeitas.

Definição 2.3. *Seja (x^*, u^*) um processo factível de (P_1). Dizemos que (x^*, u^*) é um processo regular do tipo posto constante-Mangasarian–Fromovitz (PC–MF) se:*

1. *Existe uma vizinhança V de (x^*, u^*) tal que todo subconjunto de*

$$\Big\{\nabla F^1_{E_0}(x,u), \ldots, \nabla F^n_{E_0}(x,u), \ldots, \nabla F^1_{E_N}(x,u), \ldots, \nabla F^n_{E_N}(x,u),$$
$$\nabla F^1_{E_{N+1}}(x,u), \ldots, \nabla F^{r_b}_{E_{N+1}}(x,u), \nabla F^1_{E_{N+2}}(x,u), \ldots, \nabla F^{r_\varphi}_{E_{N+2}}(x,u)\Big\}$$

   tem posto constante para cada (x, u) em V.

2. *Existe $(s, t) \in Nu \nabla F_E(x^*, u^*)$ tal que*

$$\nabla g^j(x^*, u^*)^\top (s, t) < 0, \quad j \in I_g, \tag{2.18}$$
$$\nabla_{x_0} \phi^j(x^*, u^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}} \phi^j(x^*, u^*)^\top s_{N+1} < 0, \quad j \in I_\phi, \tag{2.19}$$

   onde $s = (s_0, \ldots, s_{N+1})$, $t = (t_0, \ldots, t_N)$.

Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2. *Se (x^*, u^*) é uma solução ótima do problema (P_1) satisfazendo a Definição 2.3, então as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.1 são cumpridas com $\xi > 0$.*

Observação 2.4. *Podemos ver que a Definição 2.3 implica a Definição 2.2. Por isso a demonstração do Corolário 2.2 é trivial.*

As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem obtidas no Teorema 2.1 estão em função da Hamiltoniana e esta depende de todos os estados e controles ótimos em cada período, isto acontece, pelo fato que as restrições mistas são dadas de forma geral. Além disso, as condições não degeneradas, foram obtidas usando uma definição de regularidade que envolve a dinâmica. Uma pergunta interessante é: Com a estrutura do problema de controle ótimo discreto podemos obter condições não degeneradas por período (isto é, a função Hamiltoniana dependa de cada estado e controle por período), considerando uma definição de processo regular somente sob as restrições sem envolver a dinâmica explicitamente? Os seguintes corolários respondem esta pergunta.

Consideremos o problema de controle ótimo discreto com restrições mistas por período, de igualdade e desigualdade

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\
\text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), \;\; k=0,\ldots,N, \\
& \varphi(x_0) = 0, \\
& b_k(x_k,u_k) = 0, \;\; k=0,\ldots,N, \\
& g_k(x_k,u_k) \leqslant 0, \;\; k=0,\ldots,N, \\
& \phi(x_0) \leqslant 0,
\end{array}
\qquad (P_2)
$$

onde $b_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $g_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{r_{g_k}}$, $k = 0,\ldots,N$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\varphi}$ $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\phi}$, e as outras funções são definidas como no problema (P_1). Definamos os seguintes conjuntos de índices:

$$
\begin{aligned}
I_{g_k}(x^*,u^*) &= \Big\{ j \in \{1,\ldots,r_{g_k}\} : g_k(x_k^*,u_k^*) = 0 \Big\}, \\
\bar{I}_\phi(x^*,u^*) &= \{ j \in \{1,\ldots,r_\phi\} : \phi(x_0^*) = 0 \}.
\end{aligned}
$$

Observação 2.5. *Sem perda de generalidade, possivelmente rearranjando índices, suponhamos que os conjuntos das restrições ativas é dado por:*

$$
\begin{aligned}
I_{g_k} &= \{1,\ldots,|I_{g_k}|\}, \;\; k=0,\ldots,N; \\
\bar{I}_\phi &= \{1,\ldots,|\bar{I}_\phi|\}.
\end{aligned}
$$

Consideremos as seguintes hipóteses:

S_1: O conjunto $\Big\{ \nabla\varphi^1(x_0^*),\ldots,\nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0^*), \nabla\phi^1(x_0^*),\ldots,\nabla\phi^{|\bar{I}_\phi|}(x_0^*) \Big\}$ é linearmente independente.

S_2 : Para cada $k = 0,\ldots,N$, a seguinte matriz

$$
\Big[\nabla_u b_k^1(x_k^*,u_k^*) \;\; \cdots \;\; \nabla_u b_k^{r_{b_k}}(x_k^*,u_k^*) \;\; \nabla_u g_k^1(x_k^*,u_k^*) \;\; \cdots \;\; \nabla_u g_k^{|I_{g_k}|}(x_k^*,u_k^*) \Big]
$$

tem posto completo.

Lema 2.1. *Se (x^*,u^*) é um processo factível de (P_2) e valem as hipóteses S_1 e S_2, então (x^*,u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido.*

Demonstração: De fato, o problema (P_2) pode ser reescrito como o seguinte problema de Programação Não Linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & F_0(x,u) \\
\text{sujeito a} & F_E(x,u) = 0, \\
& F_I(x,u) \leqslant 0,
\end{array}
\qquad (\bar{P}_2)
$$

onde

- $F_0 : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1});$$

- $F_E : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+2)+r_\varphi} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\ldots+r_{b_N})}$ é dada por

$$F_E(x,u) \;=\; (\bar{F}_E(x,u), \hat{F}_E(x,u)),$$

com

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}_E(x,u) & = & (\bar{F}_{E_0}(x,u), \bar{F}_{E_1}(x,u), \ldots, \bar{F}_{E_{N+1}}(x,u)), \\ \bar{F}_{E_k}(x,u) & = & x_{k+1} - f_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \\ \bar{F}^i_{E_k}(x,u) & = & x^i_{k+1} - f^i_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \;\; i = 1,\ldots,n, \\ \bar{F}_{E_k}(x,u) & = & \varphi(x_0), \;\; k = N+1, \\ \bar{F}^i_{E_k}(x,u) & = & \varphi^i(x_0), \;\; k = N+1, \;\; i = 1,\ldots,r_\varphi; \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \hat{F}_E(x,u) & = & (\hat{F}_{E_0}(x,u), \hat{F}_{E_1}(x,u), \ldots, \hat{F}_{E_N}(x,u)), \\ \hat{F}_{E_k}(x,u) & = & b_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \\ \hat{F}^i_{E_k}(x,u) & = & b^i_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \;\; i = 1,\ldots,r_{b_k}; \end{array}$$

- $F_I : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{r_\phi} \times \mathbb{R}^{(r_{g_0}+\ldots+r_{g_k})}$ é determinada por:

$$F_I(x,u) \;=\; (\bar{F}_I(x,u), \hat{F}_I(x,u))$$

com

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}_I(x,u) & = & \phi(x_0), \\ \bar{F}^j_I(x,u) & = & \phi^j(x_0), \;\; j = 1,\ldots,|\bar{I}_\phi|; \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \hat{F}_I(x,u) & = & (\hat{F}_{I_0}(x,u), \hat{F}_{I_1}(x,u), \ldots, \hat{F}_{I_N}(x,u)), \\ \hat{F}_{I_k}(x,u) & = & g_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \\ \hat{F}^j_{I_k}(x,u) & = & g^j_k(x_k,u_k), \;\; k = 0,\ldots,N, \;\; j = 1,\ldots,|I_{g_k}|. \end{array}$$

Mostraremos que (x^*,u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido:

- $\nabla F_E(x,u)$ tem posto constante.
  De fato, pelas hipóteses S_1 e S_2, temos que

$$\mathrm{Nu}(\nabla F_E(x,u))^\top = \{0\}.$$

Assim, posto$(\nabla F_E(x,u)) = n(N+1) + r_\varphi + (r_{b_0} + \ldots + r_{b_N}))$ para cada $(x,u) \in V$, onde V é uma vizinhança de (x^*, u^*). Isto acontece pois,

$$\nabla F_E(x^*,u^*) = \begin{pmatrix} A_0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_N & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_N \\ \varphi_{x_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{C}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{C}_N \end{pmatrix},$$

onde

- $A_k = -\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B_k = -\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad k = 0, \cdots, N;$
- $\varphi_{x_0} = \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*) \in \mathbb{R}^{r_\varphi \times n};$
- $I \in \mathbb{M}^{n\times n}$ é a matriz identidade;
- $C_k = [\nabla_{x_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{x_k} b_k^{r_{b_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top,$
  $\bar{C}_k = [\nabla_{u_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{u_k} b_k^{r_{b_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top, \quad k = 0, \ldots, N.$

Portanto, a condição (i) da Definição 2.2 é satisfeita.

- Existe $(s,t) \in \text{Nu}\nabla F_E(x^*,u^*)$ tal que

$$\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*)^\top s_0 < 0, \quad j \in \bar{I}_\phi, \tag{2.20}$$

$$\nabla_{x_k} g^j(x_k^*, u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} g^j(x_k^*, u_k^*)^\top t_k < 0, \quad j \in I_{g_k}, \quad k = 0, \ldots, N, \tag{2.21}$$

onde $s = (s_0, \ldots, s_{N+1})$, $t = (t_0, \ldots, t_N)$.
Isto segue do fato que o seguinte sistema

$$QQ^\top z = v,$$

onde

- $Q = \begin{pmatrix} \nabla F_E(x^*,u^*) \\ \nabla F_I(x^*,u^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\beta)\times(n(N+2)+m(N+1))},$
  $\alpha = n(N+1) + r_\varphi + \sum_{k=0}^{N} r_{b_k}, \quad \beta = |\bar{I}_\phi| + \sum_{k=0}^{N} |I_{g_k}|;$
- $z \in \mathbb{R}^{\alpha+\beta};$

– $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}^\beta$, com

$$\begin{aligned} v_1^i &= 0, \ i = 1, \ldots, n(N+1) + r_\varphi + \sum_{k=0}^{N} r_{b_k}, \\ v_2^j &= -1, \ j = 1, \ldots, |\bar{I}_\phi| + \sum_{k=0}^{N} |I_{g_k}|), \end{aligned}$$

tem solução única, pois $QQ^\top$ é não singular. Assim, existe $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ da forma $(s,t) = Q^\top z$, tal que

$$\begin{aligned} \nabla F_E(x^*, u^*)(s,t) &= 0, \\ \nabla \phi(x_0^*) s_0 &< 0, \\ \nabla_{x_k} g^j(x_k^*, u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} g^j(x_k^*, u_k^*)^\top t_k &< 0, \ j \in I_{g_k}, \ k = 0, \ldots, N. \end{aligned}$$

Logo, a condição (ii) da Definição 2.2 é satisfeita.

■

Seja $H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\ldots+r_{b_k})} \times \mathbb{R}^{(r_{g_0}+\ldots+r_{g_k})} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função Hamiltoniana associada ao problema (P_2), definida por

$$H_k(x, u, p, \xi, \lambda, \mu) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi \psi_k(x_k, u_k) - \lambda_k^\top b_k(x_k, u_k) - \mu_k^\top g_k(x_k, u_k),$$

para cada $k = 0, \ldots, N$.

O seguinte resultado é uma consequência direta do Corolário 2.1. Porém, as condições necessárias de otimalidade não degeneradas de primeira ordem são obtidas sob as hipóteses S_1 e S_2, as quais são condições que não envolvem a dinâmica explicitamente.

Corolário 2.3. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_2). Suponhamos que a hipóteses S_1 e S_2 são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, $\mu_k \in \mathbb{R}^{r_{g_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu), \ k = 1, \ldots, N,$$

isto é,

$$\begin{aligned} p_k = &\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k) \\ &- \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k, \ k = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0} \varphi(x_0^*)^\top \gamma + \nabla_{x_0} \phi(x_0^*)^\top \eta = \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma + \nabla_{x_0}\phi(x_0^*)^\top\eta &= \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*)^\top \\ &\quad -\nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top\lambda_0 - \nabla_{x_0} g_0(x_0^*, u_0^*)^\top\mu_0,\end{aligned}$$

e

$$p_{N+1} = -\xi\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N,$$

isto significa que, para cada $k = 0, \ldots, N$, *temos*

$$\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top\lambda_k - \nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top\mu_k = 0.$$

(iv) ***Condição de folga e de não-negatividade:***

$$\begin{aligned}\mu_k^j g_k^j(x_k^*, u_k^*) &= 0, \;\; \mu_k^j \geqslant 0, \;\; j = 1, \ldots, r_{g_k}, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ \eta^j\phi^j(x_0^*) &= 0, \;\; \eta^j \geqslant 0, \;\; j = 1, \ldots, r_\phi.\end{aligned}$$

Demonstração: Como (x^*, u^*) é um processo ótimo do problema (P_2) satisfazendo as hipóteses S_1 e S_2, então pelo Lema 2.1 temos que (x^*, u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido. Portanto, o Corolário 2.3 é consequência direta do Corolário 2.1. ■

No Corolário 2.3 foram obtidas condições não degeneradas sob a independência linear dos gradientes das restrições mistas em relação ao controle. Continuaremos trabalhando somente com as restrições mistas de igualdade mas sob a condição de posto constante nas derivadas parciais com relação ao controle. Neste caso vamos considerar o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{array}{rl}\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{n+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & b_k(x_k, u_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0) = 0,\end{array} \qquad (P_3)$$

onde as funções são definidas como no problema (P_2). Seja $(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, consideremos a hipótese:

S_3 : Existe um escalar $\rho > 0$ e uma vizinhança B_ρ de x_0^* tais que a matriz

$$\begin{bmatrix}\nabla\varphi^1(x_0) & \cdots & \nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0)\end{bmatrix}$$

tem posto constante para todo $x_0 \in B_\rho$.

Definição 2.4. *Seja posto*$(\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)) = \alpha_k, k = 0, \ldots, N$. *A condição de posto constante no processo* (x^*, u^*) *é satisfeita se existem* $\delta_k > 0$, $k = 0, \ldots, N$, *e uma submatriz contendo* α_k *linhas de* $\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)$, *isto é,*

$$\Gamma_k = [\nabla_{u_k} b_k^{i_1}(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{u_k} b_k^{i_{\alpha_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top, \ \{i_1, \ldots, i_{\alpha_k}\} \in \{1, \ldots, r_{b_k}\},$$

tais que

(a) *det*$(\Gamma_k \Gamma_k^\top) \neq 0$.

(b) $\{\nabla b_k^j(x_k, u_k)\} \cup \{\nabla b_k^{i_\tau}(x_k, u_k)\}_{\tau=1}^{\alpha_k}$, *tem posto constante igual a* α_k *para cada* $(x_k, u_k) \in B_{\delta_k}$, $j \in \{1, \ldots, r_{b_k}\} \backslash \{i_1, \ldots, i_{\alpha_k}\}$.

Lema 2.2. *Seja* (x^*, u^*) *um processo factível de* (P_3). *Se a hipótese* S_3 *e a condição de posto constante no processo* (x^*, u^*) *são satisfeitas, então* (x^*, u^*) *é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido.*

Demonstração: Reescrevemos o problema (P_3) como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F_0(x,u) \\ \text{sujeito a} & F_E(x,u) = 0, \end{array} \qquad (\bar{P}_3)$$

onde

- $F_0 : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F_0(x,u) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1});$$

- $F_E : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \to \mathbb{R}^{n(N+2)+r_\varphi} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\ldots+r_{b_N})}$ é definida como

$$F_E(x,u) \ = \ (\bar{F}_E(x,u), \hat{F}_E(x,u)),$$

  com

$$\begin{aligned} \bar{F}_E(x,u) &= (\bar{F}_{E_0}(x,u), \bar{F}_{E_1}(x,u), \ldots, \bar{F}_{E_{N+1}}(x,u)), \\ \bar{F}_{E_k}(x,u) &= x_{k+1} - f_k(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \\ \bar{F}_{E_k}^i(x,u) &= x_{k+1}^i - f_k^i(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = 1, \ldots, n, \\ \bar{F}_{E_k}(x,u) &= \varphi(x_0), \ \ k = N+1, \\ \bar{F}_{E_k}^i(x,u) &= \varphi^i(x_0), \ \ k = N+1, \ \ i = 1, \ldots, r_\varphi; \end{aligned}$$

  e

$$\begin{aligned} \hat{F}_E(x,u) &= (\hat{F}_{E_0}(x,u), \hat{F}_{E_1}(x,u), \ldots, \hat{F}_{E_N}(x,u)), \\ \hat{F}_{E_k}(x,u) &= b_k(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \\ \hat{F}_{E_k}^i(x,u) &= b_k^i(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = 1, \ldots, r_{b_k}. \end{aligned}$$

Mostraremos que o processo factível (x^*, u^*) do problema (P_3) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido.
Segue diretamente da hipótese S_3, da Definição 2.4 e da estrutura de $\nabla F_E(x^*, u^*)$, que é dada por

$$\nabla F_E(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} A_0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_N & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_N \\ \varphi_{x_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{C}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{C}_N \end{pmatrix}$$

onde $A_k, \bar{A}_k, B_k, \bar{B}_k, \varphi_{x_0}, C_k, \bar{C}_k$, $k = 0, \ldots, N$, são as mesmas como na prova do Lema 2.1.

■

A função Hamiltoniana associada ao problema (P_3) é denotada como:
$H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\ldots+r_{b_N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H_k(x, u, p, \xi, \lambda) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k, u_k) - \lambda_k^\top b_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

O seguinte resultado mostra que o Teorema 2.3 para o caso particular de restrições mistas por período de igualdade permanece válido sob a hipótese de posto constante no controle.

Corolário 2.4. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_3). Suponhamos que a hipótese S_3 e a condição de posto constante no processo (x^*, u^*) são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k \;\; = \;\; \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda), \;\; k = 1, \ldots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma \;\; = \;\; \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda),$$

e

$$p_{N+1} = -\xi\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda) = 0, \quad k = 0, \ldots, N.$$

Demonstração: Como (x^*, u^*) é um processo ótimo do problema (P_3) satisfazendo a hipótese S_3 e a Definição 2.4, então pelo Lema 2.2 temos que (x^*, u^*) satisfaz a Definição 2.2. Portanto, é consequência direta do Corolário 2.1. ■

O Corolário 2.4 é muito importante pois podemos trabalhar com quantidade grandes de restrições mistas e de contorno sem importarmos pela redundância, pois elas podem ser colocadas em função de um conjunto de funções linearmente independentes.

A seguir apresentaremos alguns problemas de controle ótimos discreto onde as hipóteses S_1, S_2, S_3 e a condição tipo posto constante se cumprem.

Exemplo 2.3. *O seguinte problema satisfaz as hipóteses S_1 e S_2.*

$$\begin{array}{rl}
\textit{Minimizar} & x_0^{(1)} + x_0^{(2)} + (u_0^{(1)})^2 + (u_0^{(2)})^2 + (u_1^{(1)})^2 + (u_1^{(2)})^2 \\
\textit{sujeito a} & x_1^{(1)} = (x_0^{(1)})^2 + (u_0^{(1)})^2, \;\; x_1^{(2)} = (x_0^{(2)})^2 + (u_0^{(2)})^2, \\
& x_2^{(1)} = (x_1^{(1)})^2 + (u_1^{(1)})^2, \;\; x_2^{(2)} = (x_1^{(2)})^2 + (u_1^{(2)})^2, \\
& x_0^{(1)} + \left(u_0^{(1)}\right)^2 + u_0^{(2)} = 0, \\
& (x_1^{(1)})^2 + u_1^{(1)} = 0, \\
& x_0^{(1)} + x_0^{(2)} + u_0^{(1)} + (u_0^{(2)})^2 \leqslant 0, \\
& (x_1^{(2)})^2 + (u_1^{(1)})^2 + u_1^{(2)} \leqslant 0, \\
& x_0^{(1)} - (x_0^{(2)})^2 = 0, \;\; x_0^{(1)} - x_0^{(2)} \leqslant 0,
\end{array}$$

onde $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, 2$, e $u_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1$. Pode-se notar que $(x^*, u^*) = (0, 0)$ é um processo ótimo. Temos

$$\begin{array}{l}
b_0^1(x_0, u_0) = x_0^{(1)} + \left(u_0^{(1)}\right)^2 + u_0^{(2)}; \;\; b_1^1(x_1, u_1) = (x_1^{(1)})^2 + u_1^{(1)}, \\
g_0^1(x_0, u_0) = x_0^{(1)} + x_0^{(2)} + u_0^{(1)} + (u_0^{(2)})^2; \;\; g_1^1(x_1, u_1) = (x_1^{(2)})^2 + (u_1^{(1)})^2 + u_1^{(2)}, \\
\varphi^1(x_0) = x_0^{(1)} - (x_0^{(2)})^2; \;\; \phi^1(x_0) = x_0^{(1)} - x_0^{(2)}.
\end{array}$$

Então,

$$\begin{array}{ll}
\nabla_{u_0} b_0^1(x_0, u_0) = (2u_0^{(1)}, 1)^\top, & \nabla_{u_1} b_1^1(x_1, u_1) = (1, 0)^\top, \\
\nabla_{u_0} g_0^1(x_0, u_0) = (1, 2u_0^{(2)})^\top, & \nabla_{u_1} g_1^1(x_1, u_1) = (2u_1^{(1)}, 1)^\top, \\
\nabla_{x_0} \varphi^1(x_0) = (1, -2x_0^{(2)})^\top, & \nabla_{x_0} \phi^1(x_0, u_0) = (1, -1)^\top.
\end{array}$$

Assim, temos que

(a) $\{\nabla_{x_0} \varphi^1(0), \nabla_{x_0} \phi^1(0)\}$ *são linearmente independentes.*

(b) $\{\nabla_{u_0} b_0^1(x_0, u_0), \nabla_{u_0} g_0^1(0, 0)\}$ *são linearmente independentes.*

(c) $\{\nabla_{u_1} b_1^1(0, 0), \nabla_{u_1} g_1^1(0, 0)\}$ *são linearmente independentes.*

Assim, de (a) *temos que a hipótese* S_1 *é satisfeita e de* $(c)-(d)$ *segue que a hipótese* S_2 *é satisfeita. Portanto, as condições* $(i)-(iv)$ *do Teorema 2.3 são satisfeitas.*

Exemplo 2.4. *O seguinte exemplo verifica a condição de posto constante e* S_3*.*

$$\begin{array}{rl}
\textit{Minimizar} & x_0^{(1)}+x_0^{(2)}+(u_0^{(1)})^2+(u_0^{(2)})^2+(u_1^{(1)})^2+(u_1^{(2)})^2 \\
\textit{sujeito a} & x_1^{(1)}=(x_0^{(1)})^2+(u_0^{(1)})^2,\ \ x_1^{(2)}=(x_0^{(2)})^2+(u_0^{(2)})^2, \\
& x_2^{(1)}=(x_1^{(1)})^2+(u_1^{(1)})^2,\ \ x_2^{(2)}=(x_1^{(2)})^2+(u_1^{(2)})^2, \\
& x_0^{(1)}+u_0^{(2)}=0,\ \ (x_0^{(1)}+u_0^{(2)})^2=0, \\
& (x_1^{(1)})^2+u_1^{(1)}=0,\ \ (x_1^{(1)})^2+(u_1^{(1)})^2=0, \\
& x_1^{(2)}+(u_1^{(1)}+u_1^{(2)})^2=0,\ \ x_1^{(2)}+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}=0, \\
& x_0^{(1)}+x_0^{(2)}=0,\ \ (x_0^{(1)}+x_0^{(2)})^2=0,
\end{array}$$

onde $x_k=(x_k^{(1)},x_k^{(2)})\in\mathbb{R}^2,\ \ k=0,1,2,$ *e* $u_k=(u_k^{(1)},u_k^{(2)})\in\mathbb{R}^2,\ \ k=0,1.$ *Pode-se notar que* $(x^*,u^*)=(0,0)$ *é um processo ótimo. Temos*

$$\begin{array}{l}
b_0^1(x_0,u_0)=x_0^{(1)}+u_0^{(2)},\quad b_0^2(x_0,u_0)=(x_0^{(1)}+u_0^{(2)})^2, \\
b_1^1(x_1,u_1)=(x_1^{(1)})^2+u_1^{(1)},\quad b_1^2(x_1,u_1)=(x_1^{(1)})^2+(u_1^{(1)})^2, \\
b_1^3(x_1,u_1)=x_1^{(2)}+(u_1^{(1)}+u_1^{(2)})^2,\quad b_1^4(x_1,u_1)=x_1^{(2)}+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}, \\
\varphi^1(x_0)=x_0^{(1)}+(x_0^{(2)}),\quad \varphi^2(x_0)=(x_0^{(1)}+x_0^{(2)})^2.
\end{array}$$

Então,

$$\begin{array}{l}
\nabla_{u_0}b_0^1(x_0,u_0)=(0,1)^\top,\ \ \nabla_{u_0}b_0^2(x_0,u_0)=(0,2(x_0^{(1)}+u_0^{(2)}))^\top, \\
\nabla_{u_1}b_1^1(x_1,u_1)=(1,0)^\top,\ \ \nabla_{u_0}b_1^2(x_1,u_1)=(2u_1^{(1)},0)^\top, \\
\nabla_{u_1}b_1^3(x_1,u_1)=(2(u_1^{(1)}+u_1^{(2)}),2(u_1^{(1)}+u_1^{(2)}))^\top,\ \ \nabla_{u_1}b_1^4(x_1,u_1)=(1,1)^\top, \\
\nabla_{x_0}\varphi^1(x_0)=(1,1)^\top\ \ \nabla_{x_0}\varphi^2(x_0)=(2(x_0^{(1)}+x_0^{(2)}),2(x_0^{(1)}+x_0^{(2)}))^\top.
\end{array}$$

Logo, temos

(a) $\{\nabla_{x_0}\varphi^1(0),\nabla_{x_0}\varphi^2(0)\}$ *tem posto 1 para todo* x_0 *em uma vizinhança de* x_0^*;

(b) $\{\nabla_{u_0}b_0^1(x_0,u_0),\nabla_{u_0}b_0^2(x_0,u_0)\}$ *tem posto 1 para todo* (x_0,u_0) *em uma vizinhança de* $(0,0)$;

(c) $\{\nabla_{u_1}b_1^1(x_1,u_1),\nabla_{u_1}b_1^2(x_1,u_1),\nabla_{u_1}b_1^3(x_1,u_1),\nabla_{u_1}b_1^4(x_1,u_1)\}$ *tem posto 2 para todo* (x_0,u_0) *em uma vizinhança de* $(0,0)$.

Logo, de (a) *segue que a hipótese* S_3 *é satisfeita, e a Definição 2.4 é satisfeita de* (b)*-*(c)*. Portanto, as condições* (i)*-*(iv) *do Teorema 2.4 são satisfeitas.*

Na seguinte seção adicionaremos ao problema (P_1) restrições abstratas de controle, e serão obtidas condições de otimalidade para este tipo de problemas.

2.3 Condições Necessárias de Primeira Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas e Abstratas no Controle

Nesta seção, obteremos condições necessárias de primeira ordem para o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0, x_{N+1}) = 0, \\ & b(x_0, x_1, ..., x_{N+1}, u_0, ..., u_N) = 0, \\ & g(x_0, x_1, ..., x_{N+1}, u_0, ..., u_N) \leqslant 0, \\ & \phi(x_0, x_{N+1}) \leqslant 0, \\ & u_k \in U_k, \ \ k = 0, \ldots, N, \end{array} \tag{P_A}$$

onde U_k é um conjunto convexo, fechado com interior não vazio, para cada $k = 0, \ldots, N$. As demais funções são definidas como no problema (P_1).

O conjunto dos processos factíveis do problema (P_A) será denotado por:

$$\tilde{Q} = Q_E \cap Q_I \cap Q_A,$$

onde Q_E e Q_I são definidos como no problema $(\bar{P}_1)$ e

$$Q_A = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : u \in U, \ \ k = 0, \ldots, N\},$$

com $U = U_0 \times \cdots \times U_N$.

Consideremos o seguinte problema que localmente é equivalente ao problema (P_A) por:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F_0(x, u) \\ \text{sujeito a} & (x, u) \in \tilde{Q} \cap V, \end{array} \tag{$\bar{P}_A$}$$

onde V é uma vizinhança de (x^*, u^*).

2.3.1 Condição de regularidade para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas e restrições abstratas

Introduziremos um conceito de regularidade para problemas do tipo (P_A), que será utilizado no decorrer da seção.

Definição 2.5. *Seja (x^*, u^*) um processo factível de (P_A), dizemos que (x^*, u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido para o problema (P_A) se:*

1. *Existe uma vizinhança V de (x^*, u^*) tal que $\nabla F_E(x,u)$ tem o mesmo posto para cada $(x,u) \in V$.*

2. *Existe $(s,t) \in Nu\nabla F_E(x^*, u^*)$ com $t = \alpha(u - u^*)$, $u \in int(U)$, $\alpha > 0$, tal que*

$$\nabla g^j(x^*, u^*)^\top (s,t) < 0, \quad j \in I_g, \tag{2.22}$$

$$\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} < 0, \quad j \in I_\phi, \tag{2.23}$$

onde $s = (s_0, \ldots, s_{N+1})$, $t = (t_0, \ldots, t_N)$.

Note que, $D(F_0, (x^*, u^*))$, $V(Q_I, (x^*, u^*))$ e $T(Q_E, (x^*, u^*))$, com seus respectivos duais foram determinados nas subseções 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4, respectivamente.

A seguir caracterizamos o cone factível $V(Q_A, (x^*, u^*))$ e seu dual.

2.3.2 Construção do cone factível $V(Q_A, (x^*, u^*))$ e seu dual

Pelo Teorema 1.7, temos que

$$V(Q_A, (x^*, u^*)) = \{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} : u = \alpha(u - u^*),\ (x,u) \in int(Q_A)\}. \tag{2.24}$$

Logo, pelo Teorema 1.9, segue que

$$\begin{aligned} V(Q_A, (x^*, u^*))^* \;=\; &\{l_A \in (\mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)})^* : l_A(s,t) = (0, l_u(t)), \\ &l_u \in (\mathbb{R}^{n(N+1)})^* \quad \text{e} \quad l_u(u^*) \leqslant l_u(u),\ u \in U\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.3.3 Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem

Nesta subseção apresentamos condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para o problema (P_A), usamos o formalismo de Dubovitskii-Milyutin para obter tais condições.

Definimos a função Hamiltoniana para cada período $k = 0, \ldots, N$, associada ao problema (P_A) por
$H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_g} \to \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, N$, definida por

$$H_k(x,u,p,\xi,\lambda,\mu) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k,u_k) - \sum_{i=1}^{r_b} \lambda_i b_i(x,u) - \sum_{j=1}^{r_g} \mu_j g_j(x,u).$$

O seguinte teorema pode ser visto como uma generalização do Teorema 2.1 pois são acrescentadas restrições abstratas no controle ao problema (P_1).

Teorema 2.2. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_A). Então, existe $(p, \xi, \lambda, \gamma, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}^{r_g} \times \mathbb{R}^{r_\phi}$, não todos nulos, $\xi \geqslant 0$, $\mu^j \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, r_g$, $\eta^j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, r_\phi$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu), \;\; k = 1, \ldots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*), \\
p_{N+1} &= -\Big[\sum_{i=1}^{r_b} \lambda^i \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*) + \sum_{j=1}^{r_g} \mu^j \nabla_{x_{N+1}} g^j(x^*, u^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla_{x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j \nabla_{x_{N+1}} \phi_j(x_0^*, x_{N+1}^*) \Big] \\
&\quad - \xi \nabla_{x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).
\end{aligned}$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

(iv) ***Condição de complementaridade:***

$$\mu^j g^j(x^*, u^*) = 0, \;\; j = 1, \ldots, r_g,$$

$$\eta^j \phi^j(x^*, u^*) = 0, \;\; j = 1, \ldots, r_\phi.$$

Demonstração: Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_A). Para provar este teorema vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: Se a derivada da função objetivo for nula (ou seja, $\nabla F_0(x^*, u^*) = 0$), considerando $\xi = 1$, $p = 0$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, $\mu = 0$, $\eta = 0$, as condições $(i) - (iv)$ do teorema são satisfeitas.

Caso 2: Se a derivada da função objetivo não for nula (ou seja, $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$) e (x^*, u^*) não é um processo regular, temos os seguintes sub-casos.

- **Caso 2.1:** Suponhamos que o item 1 da Definição 2.5 não é satisfeito. Pelo Caso 2.1 da prova do Teorema 2.1, considerando os mesmos $\xi, p_{k+1}, \gamma, \lambda, \mu, \eta$, como em tal caso, temos que, as condições $(i) - (iv)$ são satisfeitas.

- **Caso 2.2:** Suponhamos que na Definição 2.5. o item 1 se cumpre mas para todo $(s, t) \in Nu\nabla F_E(x^*, u^*)$, mas não existe $t = \alpha(u - u^*)$, $\;u \in int(U)$, tal que ao menos (2.22) ou (2.23) não são satisfeitas, então pelo Caso 2.2 do Teorema 2.1 as condições $(i) - (iv)$ são satisfeitas.

Caso 3: Agora consideremos o caso em que $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$ e (x^*, u^*) é um processo regular do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido para o problema (P_A), ou seja, (x^*, u^*) satisfaz a Definição 2.5. Pela convexidade de $D(F_0,(x^*,u^*))$, $V(Q_I,(x^*,u^*))$, $T(Q_E,(x^*,u^*))$, e $V(Q_A,(x^*,u^*))$ que foram determinados nas subseções 2.2.2 - 2.2.4 e 2.3.2, o Teorema 1.10 pode ser aplicado. Assim, temos que existem $l_0 \in D(F_0,(x^*,u^*))^*$, $l_1 \in T(Q_E,(x^*,u^*))^*$, $l_2 \in V(Q_I,(x^*,u^*))^*$ e $l_A \in V(Q_A,(x^*,u^*)^*$, não todos identicamente nulos, tais que

$$l_0 + l_1 + l_2 + l_A = 0.$$

Para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, temos

$$l_0(s,t) + l_1(s,t) + l_2(s,t) + l_A(s,t) = 0. \tag{2.26}$$

Então,

$$l_A(s,t) = -l_0(s,t) - l_1(s,t) - l_2(s,t).$$

Logo, por (2.25) segue que

$$(0, l_u(t)) = -l_0(s,t) - l_1(s,t) - l_2(s,t),$$

com $l_u(u^*) \leqslant l_u(u)$ para todo $u \in U$. Por (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}
(0, l_u(t)) \;\;=\;\; & \langle \xi \nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*) - \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 + \nabla_{x_0} b(x^*, u^*)^\top \lambda + \nabla_{x_0} g(x^*, u^*)^\top \mu \\
& + \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \gamma + \nabla_{x_0}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \eta, s_0\rangle + \sum_{k=1}^{N} [\langle \xi \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\
& + p_k - \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} + \nabla_{x_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda + \nabla_{x_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, s_k\rangle] \\
& + \langle p_{N+1} + \xi \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*) + \nabla_{x_{N+1}} b(x^*, u^*)^\top \lambda + \nabla_{x_{N+1}} g(x^*, u^*)^\top \mu \\
& + \nabla_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \gamma + \nabla_{x_{N+1}}\phi(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top \eta, s_{N+1}\rangle + \sum_{k=0}^{N} \langle \xi \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\
& - \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} + \nabla_{u_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda + \nabla_{u_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, t_k\rangle.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

As condições $(i), (ii)$ e (iv) são obtidas da mesma forma que no Caso 2.3 do Teorema 2.1. Por outro lado, para $(s,t) = (0,t)$ em (2.27), temos que

$$\begin{aligned}
l_u(t) \;\;=\;\; & \sum_{k=0}^{N} \langle \xi \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} + \nabla_{u_k} b(x^*, u^*)^\top \lambda \\
& + \nabla_{u_k} g(x^*, u^*)^\top \mu, t_k\rangle.
\end{aligned}$$

Note que $l_u(t) = -\sum_{k=0}^{N} \langle \nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu), t_k\rangle$. Como $l_u(u) \geqslant l_u(u^*)$ para todo $u \in U$, em particular para $u = (u_0^*, \ldots, u_{k-1}^*, u_k, u_{k+1}^*, \ldots, u_N^*)$, $u_k \in U_k, k \in \{0, \ldots, N\}$, segue que $\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) \in N_{U_k}(u_k^*)$, ou seja,

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) + N_{U_k}(u_k^*).$$

Portanto, as condições $(i) - (iv)$ são satisfeitas.

■

Corolário 2.5. *Se (x^*, u^*) é uma processo ótimo local do problema (P_A) satisfazendo a Definição 2.5. Então, as condições $(i) - (iv)$ do Teorema 2.2 são cumpridas com $\xi > 0$.*

Demonstração: Se $\nabla F_0(x^*, u^*) = 0$, então, pelo Caso 1 da prova do Teorema 2.2 temos que $\xi > 0$. Suponhamos que $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$. Então, pela Definição 2.5 existe $(s, t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ tal que $\nabla F_E(x^*, u^*)(s, t) = 0, \nabla F_I(x^*, u^*)(s, t) < 0$ e $t = \alpha(u - u^*)$, $u \in int(U)$, isto é,

$$T(Q_E, (x^*, u^*)) \bigcap V(Q_I, (x^*, u^*)) \bigcap V(Q_A, (x^*, u^*)) \neq \emptyset.$$

Então, pela Observação 1.8 temos que $l_0 \neq 0$, ou seja,

$$\xi \nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0.$$

Dado que $\xi \geqslant 0$ e $\nabla F_0(x^*, u^*) \neq 0$, então, $\xi > 0$. ■

2.4 Condições Necessárias de Primeira Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas por Período e Restrições Abstratas de Controle: Uma Abordagem Alternativa

Nesta seção, vamos obter condições necessárias de primeira ordem para problemas COD com restrições mistas por período de igualdade e desigualdade usando o método aplicado em [26] - [29]. Primeiro serão obtidas condições necessárias não degeneradas de primeira ordem para um problema do tipo (P_A), onde serão consideradas apenas a dinâmica e as restrições abstratas de controle. Estas condições de otimalidade serão obtidas sem nenhuma hipótese de regularidade. Depois, adicionando ao problema anterior as restrições de estado inicial e sob a hipótese de posto constante nos gradientes destas restrições obtemos condições necessárias não degeneradas de primeira ordem. Seguidamente, neste último problema serão adicionadas as restrições mistas por período de igualdade e sob a hipótese de posto constante tanto dos gradientes das restrições do estado inicial como os gradientes em relação ao controle das restrições mistas por período, as condições não degeneradas de otimalidade são verificadas. Finalmente, obtemos condições de otimalidade para um problema de controle ótimo discreto com restrições abstratas de controle, de estado inicial, mistas de igualdade e desigualdade, sob a mesmas hipóteses do problema anterior.

2.4.1 Condições necessárias de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições abstratas de controle

Nesta subseção, obteremos condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\
&\text{sujeito a} && x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \dots, N, \\
& && u_k \in U_k, \;\; k = 0, \dots, N,
\end{aligned}
\tag{P_{A_1}}
$$

onde U_k é um conjunto convexo, fechado com interior não vazio para cada $k = 0, \dots, N$. As demais funções são definidas como no problema (P_1).

Definimos a função Hamiltoniana associada ao problema (P_{A_1}) como $H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, N$, definida por

$$H_k(x, u, p, \xi) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi \psi_k(x_k, u_k).$$

No seguinte resultado, condições não-degeneradas de otimalidade para o problema (P_{A_1}) são obtidas sem nenhuma hipótese de regularidade.

Corolário 2.6. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_{A_1}). Então, existe $(p, \xi) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}$, com $\xi > 0$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi), \;\; k = 1, \dots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi) &= 0, \\
p_{N+1} &= -\xi \nabla_{x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).
\end{aligned}
$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \dots, N,$$

onde $N_{U_k}(u_k^*)$ é o cone normal ao conjunto U_k no ponto u_k^*.

Demonstração: A existência de $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$ e $\xi \geqslant 0$, não todos nulos, satisfazendo as condições $(i) - (iii)$, segue do Teorema 2.2. Agora para mostrar que $\xi > 0$, suponhamos que $\xi = 0$, então da equação adjunta e da condição de transversalidade temos que $p_k = 0$, $k = 1, \dots, N+1$, isto contradiz o fato que $(p, \xi) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}$ não são todos nulos. Portanto, $\xi > 0$.

■

2.4.2 Condições necessárias de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições abstratas de controle e restrições de estado inicial

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) & \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, & (P_{A_2}) \\ & \varphi(x_0) = 0, & \\ & u_k \in U_k, \;\; k = 0, \ldots, N, & \end{array}$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\varphi}$ é uma função continuamente diferenciável. As demais funções são definidas como no problema (P_1).

Lembramos a hipótese S_3:

S_3 : Existe um escalar $\rho > 0$ e uma vizinhança B_ρ de x_0^* tais que a matriz

$$\begin{bmatrix} \nabla\varphi^i(x_0) & \cdots & \nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0) \end{bmatrix}$$

tem posto constante para todo $x_0 \in B_\rho$.

Neste caso, a função Hamiltoniana associada ao problema (P_{A_2}) coincide com a função Hamiltoniana associada ao problema (P_{A_1}), ou seja, é dada por:

$$H_k(x, u, p, \xi) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Teorema 2.3. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_{A_2}). Suponha que a hipótese S_3 é satisfeita. Então, existe $(\xi, p, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\xi > 0$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi), \;\; k = 1, \ldots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi) = \nabla\varphi(x_0^*)^\top\gamma,$$

e

$$p_{N+1} = -\xi\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_k}(u^*), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Demonstração: Como (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_2}) então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1})$$

para todo processo factível (x, u) com

$$\|x_k - x_k^*\| \leqslant \epsilon, \quad k = 0, \ldots, N+1, \quad \text{e} \quad \|u_k - u_k^*\| \leqslant \epsilon, \quad k = 0, \ldots, N.$$

Passo 1: (Colocando restrições redundantes em função de um conjunto linearmente independente de restrições) Da hipótese S_3 e considerando $\rho_1 = \min\{\rho, \epsilon\}$ temos que $\nabla\varphi(x_0)$ tem posto constante, digamos r_1, para todo $x_0 \in B_{\rho_1}$. Sem perda de generalidade podemos supor que os primeiros r_1 gradientes são linearmente independentes $(\nabla\varphi_1(x_0), \ldots, \nabla\varphi_{r_1}(x_0))$. Logo, para cada $\tau = r_1 + 1, \ldots, r_\varphi$, $\nabla\varphi_\tau(x_0)$ é uma combinação linear de $\nabla\varphi_1(x_0), \ldots, \nabla\varphi_{r_1}(x_0)$ para todo $x_0 \in B_{\rho_1}$. Além disso, para cada $i = 1, \ldots, r_\varphi$, $\varphi_i(x_0)$ são continuamente diferenciáveis para todo $x_0 \in B_{\rho_1}$. Aplicando o Lema 1.1 temos que existem $\rho_2 > 0$, $\rho_3 > 0$, vizinhanças B_{ρ_2}, B_{ρ_3} de $(\varphi_1(x_0^*), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0^*))$ e x_0^*, respectivamente, e funções continuamente diferenciáveis $\Phi_i : B_{\rho_2} \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x_0 \in B_{\rho_3}$ temos que $(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0)) \in B_{\rho_2}$ e

$$\varphi_{r_1+i}(x_0) = \Phi_i(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0)), \;\; i = 1, \ldots, r_\varphi - r_1. \tag{2.28}$$

Logo, para cada $x_0 \in B_{\rho_4}$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) \; = \; & (\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0), \Phi_1(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0)), \ldots, \\ & \Phi_{r_\varphi - r_1}(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0))),\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\rho_4 = \min\{\rho_1, \rho_3\}$. Além disso, para cada $i = 1, \cdots, r_\varphi - r_1$, temos

$$\Phi_i(\varphi_1(x_0^*), \ldots, \varphi_{r_1}(x_0^*)) = \varphi_{r_1+i}(x_0^*) = 0,$$

de modo que,

$$\Phi_i(0, \cdots, 0) = 0. \tag{2.30}$$

Passo 2: (Restrições de igualdade englobadas por uma função implícita) Definamos as seguintes funções $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_1}$ por:

$$b(x_0) = (\varphi_1(x_0), \ldots . \varphi_{r_1}(x_0)),$$

e $\chi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_1} \to \mathbb{R}^{r_1}$ como:

$$\chi(x_0, y) = b(x_0^* + x_0 + C^\top y),$$

onde $C^\top = [\nabla\varphi_1(x_0^*) \quad \cdots \quad \nabla\varphi_{r_1}(x_0^*)]$.

Podemos ver que $\chi(0,0) = b(x_0^*) = (\varphi_1(x_0^*), \ldots . \varphi_{r_1}(x_0^*)) = 0$ e $\nabla_y\chi(0,0) = CC^\top$ é não singular. Então, aplicando o Teorema da Função Implícita (Teorema 1.2), temos que existem escalares $\sigma > 0, \theta > 0$, vizinhanças B_σ de $0 \in \mathbb{R}^n$, B_θ de $0 \in \mathbb{R}^{r_1}$ e uma função $d : B_\sigma \to B_\theta$ tais que

$$d(0) = 0, \tag{2.31}$$
$$\chi(x_0, d(x_0)) = 0, \text{ para } x_0 \in B_\sigma, \tag{2.32}$$
$$\nabla d(0) = -[CC^\top]^{-1}\nabla b(x_0^*). \tag{2.33}$$

Escolhemos $\sigma_1 > 0$ e $\theta_1 > 0$ satisfazendo

$$\sigma_1 < \min\{\rho_4, \sigma\}, \;\; \theta_1 < \min\{\theta, \frac{\epsilon}{2}\}, \;\; \sigma_1 + \|C\|\theta_1 < \epsilon. \tag{2.34}$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar a função implícita $d : B_{\sigma_1} \to B_{\theta_1}$.
Passo 3 (Problema auxiliar) Seja dado o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \psi_0(x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0) + \sum_{k=1}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_1 = f_0(x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0), \\ & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 1, \dots, N, \\ & u_k \in U_k, \;\; k = 0, \dots, N, \\ & (x - x^*, u - u^*) \in B_{\sigma_1}. \end{array} \tag{$\bar{P}_{A_2}$}$$

Mostraremos que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_{A_2})$.

i) Mostraremos que (x^*, u^*) é um processo factível de $(\bar{P}_{A_2})$.

   Dado que (x^*, u^*) é um processo ótimo de (P_{A_2}), então

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= f_k(x_k^*, u_k^*), \;\; k = 0, \dots, N, \\ u_k &\in U_k, \;\; k = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

   Como $d(0) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} x_1^* &= f_0(x_0^* + C^\top d(0), u_0^*), \\ x_{k+1}^* &= f_k(x_k^*, u_k^*), \;\; k = 1, \dots, N, \\ u_k &\in U_k, \;\; k = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

   Assim, (x^*, u^*) é um processo factível de $(\bar{P}_{A_2})$.

ii) Agora mostraremos que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_{A_2})$. Suponhamos que existe um processo factível $(\tilde{x}, \tilde{u})$ com

$$\|\tilde{x}_0 - x_0^*\| < \sigma_2, \;\; 0 < \sigma_2 < \sigma_1, \tag{2.35}$$
$$\|\tilde{x}_k - x_k^*\| < \sigma_2, \;\; 0 < \sigma_2 < \sigma_1, \;\; k = 1, \dots, N+1, \tag{2.36}$$
$$\|\tilde{u}_k - u_k^*\| < \epsilon_1, \;\; 0 < \epsilon_1 < \epsilon, \;\; k = 1, \dots, N, \tag{2.37}$$

tais que

$$\begin{aligned}\psi_0(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*), u_0) \quad &+ \quad \sum_{k=1}^{N} \psi_k(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k) + \psi_{N+1}(\tilde{x}_{N+1}) \\ &< \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \qquad (2.38)\end{aligned}$$

Como $(\tilde{x}, \tilde{u})$ é um processo factível do problema $(\bar{P}_{A_2})$, então

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= f_0(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*), \tilde{u}_0), \\ \tilde{x}_{k+1} &= f_k(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k), \;\; k = 1, \dots, N, \\ \tilde{u}_k &\in U_k, \;\; k = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= \tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*), \\ \hat{x}_k &= \tilde{x}_k, \;\; k = 1, \dots, N+1.\end{aligned}$$

Por (2.34) e (2.35), temos que

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_0 - x_0^*\| &= \|\tilde{x}_0 - x_0^* + C_0^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)\| \\ &\leqslant \|\tilde{x}_0 - x_0^*\| + \|C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)\| \\ &< \sigma_1 + \|C^\top\| \|d(\tilde{x}_0 - x_0^*)\| \\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

de (2.36), segue que

$$\|\hat{x}_k - x_k^*\| = \|\tilde{x}_k - x_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 1, \dots, N+1,$$

e por último de (2.37) temos

$$\|\tilde{u}_k - u_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 1, \dots, N.$$

Pela própria definição dos estados $\hat{x}_k, \;\; k = 0, \dots, N+1$, a estrutura da dinâmica do problema $(\bar{P}_{A_2})$ é satisfeita, ou seja,

$$\hat{x}_{k+1} = f_k(\hat{x}_k, \tilde{u}_k), \;\; k = 0, \dots, N.$$

De (2.29), (2.32) e (2.35), a condição de contorno $\varphi(\hat{x}_0) = 0$ é satisfeita, pois

$\tilde{x}_0 \in B_{\sigma_2} \subset B_{\sigma_1}$ e

$$\begin{aligned}
\varphi(\hat{x}_0) &= \varphi(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)) \\
&= (\varphi_1(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \ldots, \varphi_{r_\varphi}(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*))) \\
&= (b(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \Phi_1(b(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \ldots, \\
&\quad\; \Phi_{r_{\bar{\varphi}}-r_1}(b(\tilde{x}_0 + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)))) \\
&= (b(x_0^* + \tilde{x}_0 - x_0^* + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \Phi_1(b(x_0^* + \tilde{x}_0 - x_0^* + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \\
&\quad\; \ldots, \Phi_{r_{\bar{\varphi}}-r_1}(b(x_0^* + \tilde{x}_0 - x_0^* + C^\top d(\tilde{x}_0 - x_0^*)))) \\
&= (\chi(\tilde{x}_0 - x_0^*, d(\tilde{x}_0 - x_0^*)), \Phi_1(\chi(\tilde{x}_0 - x_0^*, d(\tilde{x}_0 - x_0^*))), \\
&\quad\; \ldots, \Phi_{r_{\bar{\varphi}}-r_1}(\chi(\tilde{x}_0 - x_0^*, d(\tilde{x}_0 - x_0^*)))) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue das equações (2.30) e (2.32). Assim, $(\hat{x}, \tilde{u})$ é um processo factível de $(\bar{P}_{A_2})$ e

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(\hat{x}_k, \tilde{u}_k) + \psi_{N+1}(\hat{x}_{N+1}) < \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*),$$

contradizendo o fato que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_2}). Portanto, (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_{A_2})$.

Passo 4:(Condições necessárias não degeneradas de primeira ordem) Consideremos a seguinte função Hamiltoniana para cada período:

$$\begin{aligned}
H_k(x, u, p, \xi) &= p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi \psi_k(x_k, u_k), \;\; k = 1, \ldots, N, \\
\tilde{H}_0(x, u, p, \xi) &= p_1^\top f_0(x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0) \\
&\quad -\xi \psi_0(x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0).
\end{aligned}$$

Assim, para $k = 1, \ldots, N$, temos que

$$\nabla_{x_k} H_k(x, u, p, \xi) = \nabla_{x_k} f_k(x_k, u_k)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k), \tag{2.39}$$

$$\nabla_{u_k} H_k(x, u, p, \xi) = \nabla_{u_k} f_k(x_k, u_k)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k, u_k). \tag{2.40}$$

Para $k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_0} \tilde{H}_0(x, u, p, \xi) &= (I + C^\top \nabla d(x_0 - x_0^*))^\top [\nabla_{x_0} f_0((x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0)^\top p_1 \\
&\quad -\xi \nabla_{x_0} \psi_0((x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0)],
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{u_0} \tilde{H}_0(x, u, p, \xi) &= \nabla_{u_0} f_0((x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0)^\top p_1 - \\
&\quad \xi \nabla_{u_0} \psi_0((x_0 + C^\top d(x_0 - x_0^*), u_0).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Definindo $H_0(x, u, p, \xi) = p_1^\top f_0(x_0, u_0) - \xi \psi_0(x_0, u_0)$, derivando H_0 em relação a x_0 e u_0 em (x^*, u^*, p, ξ), substituindo em (2.41) e (2.42), respectivamente, obtemos

$$\nabla_{x_0} \tilde{H}_0(x^*, u^*, p, \xi) = (I + C^\top \nabla d(0))^\top \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi). \tag{2.43}$$

$$\nabla_{u_0} \tilde{H}_0(x^*, u^*, p, \xi) = \nabla_{u_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi). \tag{2.44}$$

Vamos aplicar o Corolário 2.6 ao problema $(\bar{P}_{A_2})$. Como (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_{A_2})$, então, existe $(\xi, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\xi > 0$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Equação adjunta

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.45}$$

(ii) Condição de transversalidade

$$\nabla_{x_0} \tilde{H}_0(x^*, u^*, p, \xi) = 0, \tag{2.46}$$

e

$$p_{N+1} = -\xi \nabla \psi_{N+1}(x^*_{N+1}). \tag{2.47}$$

(iii) Condição de estacionariedade

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_k}(u^*_k), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.48}$$

e

$$0 \in -\nabla_{u_0} \tilde{H}_0(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_0}(u^*_0). \tag{2.49}$$

A Equação adjunta do problema original é a mesma do problema auxiliar e é dada pela equação (2.45). Substituindo a equação (2.43) em (2.46), obtemos

$$\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi) + \nabla d(0)^\top C \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi) = 0.$$

Logo, por (2.33) e considerando

$$\gamma = ((CC^\top)^{-1} C \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi), 0) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{R}^{r_\varphi - r_1},$$

obtemos,

$$\nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi) = \nabla \varphi(x^*_0)^\top \gamma. \tag{2.50}$$

Portanto, a condição de transversalidade é dada pelas equações (2.47) e (2.50). Por último, pelas equações (2.40), (2.44), (2.48) e (2.49), temos a condição de estacionariedade, ou seja,

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_k}(u^*_k), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Assim, fica provado o teorema. ■

Observação 2.6. *No Passo 3 do problema auxiliar $(\bar{P}_{A_2})$, não caracterizamos o cone factível de B_{σ_1} em $(x^* - x^*, u^* - u^*)$, pois $(0,0) \in int(B_{\sigma_1})$, então $V(B_{\sigma_1}, (x^*, u^*)) = \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, ou seja, qualquer direção é factível.*

2.4.3 Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições abstratas de controle e restrições de estado inicial e mistas por período de igualdade

A seguir consideremos o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & b_k(x_k, u_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0) = 0, \\ & u_k \in U_k, \;\; k = 0, \ldots, N, \end{array} \tag{P_{A_3}}$$

onde $b_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, e as demais funções são definidas como no problema (P_{A_2}). Consideremos a função Hamiltoniana associado ao problema (P_{A_3}) por $H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\ldots+r_{b_N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H_k(x, u, p, \xi, \lambda) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k, u_k) - \lambda_k^\top b_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

O teorema a seguir é um dos resultados importantes deste capítulo, pois são obtidas condições não degeneradas, considerando condições de qualificação nas restrições mistas e de contorno sem envolver a dinâmica.

Teorema 2.4. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_{A_3}). Suponhamos que a hipótese S_3 e a condição de posto constante no processo (x^*, u^*) são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k \;\; = \;\; \nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda), \;\; k = 1, \ldots, N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma \;\; = \;\; \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda),$$

e

$$p_{N+1} = -\xi\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$0 \in -\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda) + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Demonstração: Sabendo que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_3}), então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1})$$

para todo processo factível (x, u) que satisfaz

$$\|x_k - x_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 0, \ldots, N+1, \;\; \text{e} \;\; \|u_k - u_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Consideremos $\bar{\delta} = \min\{\epsilon, \delta_k, \;\; k = 1, \ldots, N\}$. Pela condição (i) da Definição 2.4, temos que para cada $k = 0, \ldots, N$, o conjunto

$$\left\{\nabla_u b_k^{i_1}(x_k^*, u_k^*), \cdots, \nabla_u b^{i_{\alpha_k}}(x_k^*, u_k^*)\right\},$$

é linearmente independente, onde $\{i_1, \ldots, i_{\alpha_k}\} \in \{1, \ldots, r_{b_k}\}$. Sem perda de generalidade, possivelmente rearranjando índices, suponhamos que

$$\left\{\nabla_u b_k^1(x_k^*, u_k^*), \cdots, \nabla_u b^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\right\}$$

é linearmente independente. Assim,

$$\left\{\nabla b_k^1(x_k^*, u_k^*), \cdots, \nabla b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\right\} \tag{2.51}$$

é um conjunto linearmente independente.

Passo 1: (Colocando restrições redundantes em função de um conjunto de funções linearmente independentes) Por (2.51) e da condição (ii) da Definição 2.4, temos, para cada $k = 0, ..., N$,

$$\nabla b_k^{\tau_k}(x_k, u_k) \; = \sum_{i=1}^{\alpha_k} c_k^i \nabla b_k^i(x_k, u_k), \;\; \tau_k = \alpha_k + 1, \ldots, r_{b_k}.$$

Temos que $b_k, \; k = 0, \ldots, N$, são continuamente diferenciáveis para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}}$. Então, aplicando o Lema 1.1 para cada τ_k, temos que existem escalares $\bar{\delta}_k^1, \bar{\delta}_k^2$, vizinhanças de $B_{\bar{\delta}_k^1}, B_{\bar{\delta}_k^2}$ de $\Big(b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big)$ e (x_k^*, u_k^*), respectivamente, e funções continuamente diferenciáveis $\Phi_k^i : B_{\bar{\delta}_k^1} \to \mathbb{R}$, tais que $\Big(b_k^1(x_k, u_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k, u_k)\Big) \in B_{\bar{\delta}_k^1}$ para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}_k^2}$, satisfazendo

$$b_k^{\alpha_k+i}(x_k, u_k) = \Phi_k^i(b_k^1(x_k, u_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k, u_k)), \;\; i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k. \tag{2.52}$$

Por conseguinte, para cada $i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k$, obtemos

$$\Phi_k^i\Big(b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big) = 0.$$

Assim,

$$\Phi_k^i(0, \ldots, 0) = 0, \;\; i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k. \tag{2.53}$$

Da mesma forma este passo é repetido para $k = 0, \dots, N$.

Passo 2: (Restrições de igualdade englobadas por uma função implícita)

Definamos as seguintes funções $\chi_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r_{\alpha_k}} \to \mathbb{R}^{r_{\alpha_k}}$ dadas por

$$\chi_k(x_k, u_k, z_k) = \Big(b_k^1(x_k^* + x_k, u_k^* + u_k + D_k^\top z_k), \dots, b_k^{\alpha_k}(x_k^* + x_k, u_k^* + u_k + D_k^\top z_k)\Big), \tag{2.54}$$

onde $D_k^\top = \Big[\nabla_u b_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_u b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big]$, $k = 0, \dots, N$. Note que

$$\chi_k(0,0,0) = \Big(b_k^1(x_k^*, u_k^*), \dots, b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big) = 0$$

e $\nabla_{z_k}\chi_k(0,0,0) = D_k D_k^\top$ é não singular, pois D_k tem posto completo, $k = 0, \dots, N$. Aplicando o Teorema da Função Implícita, temos que existem escalares $\hat{\delta}_k^1 > 0, \hat{\delta}_k^2 > 0$, vizinhanças $B_{\hat{\delta}_k^1}$ de $0 \in \mathbb{R}^{n+m}$, $B_{\hat{\delta}_k^2}$ de $0 \in \mathbb{R}^m$ e uma função $d_k : B_{\hat{\delta}_k^1} \to B_{\hat{\delta}_k^2}$, $k = 0, \dots, N$, tais que

$$d_k(0,0) = 0, \tag{2.55}$$

$$\chi_k(x_k, u_k, d_k(x_k, u_k)) = 0, \text{ para } (x_k, u_k) \in B_{\hat{\delta}_k^1}, \tag{2.56}$$

$$\nabla d_k(0,0) = -[D_k D_k^\top]^{-1} \nabla_{x_k, u_k} \chi_k(0,0,0). \tag{2.57}$$

Escolhemos $\tilde{\delta} > 0$ e $\tilde{\beta} > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} &< \min\{\bar{\delta}, \epsilon/2, \hat{\delta}_k^1, \ k = 0, \dots, N\}, \\ \tilde{\beta} &< \min\{\epsilon/2, \hat{\delta}_k^2, \ k = 0, \dots, N\}, \\ \tilde{\delta} + \|D_k\|\tilde{\beta} &< \epsilon, \ k = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar as funções implícitas $d_k : B_{\tilde{\delta}} \to B_{\tilde{\beta}}$.

Passo 3: (Problema auxiliar) Consideremos o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \bar{\psi}_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = \bar{f}_k(x_k, u_k), \ k = 0, \dots, N, \\ & \varphi(x_0) = 0, \\ & u_k \in U_k, \ k = 0, \dots, N, \\ & (x - x^*, u - u^*) \in B_{\tilde{\delta}}, \end{array} \tag{$\bar{P}_{A_3}$}$$

onde

- $\bar{\psi}_k(x_k, u_k) = \psi_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - u_k^*))$, $k = 0, \dots, N$,
- $\bar{f}_k(x_k, u_k) = f_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - u_k^*))$, $k = 0, \dots, N$.

Mostraremos que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_{A_3})$. Vemos claramente que (x^*, u^*) é um processo factível de $(\bar{P}_{A_3})$. Suponhamos que existem um escalar ϵ_1 com

$\epsilon_1 < \tilde{\delta} = \min\{\bar{\delta}, \hat{\delta}, \sigma_2, \bar{\delta}_k^2, \ \ k = 0, \ldots, N\}$ e um processo factível $(\bar{x}, \bar{u})$ com

$$\|\bar{x}_k - x_k^*\| < \epsilon_1, \ \ k = 0, \ldots, N+1, \tag{2.59}$$

$$\|\bar{u}_k - u_k^*\| < \epsilon_1, \ \ k = 1, \ldots, N, \tag{2.60}$$

tais que

$$\sum_{k=0}^{N} \bar{\psi}_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) + \psi_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) < \sum_{k=0}^{N} \bar{\psi}_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \tag{2.61}$$

Dado que $(\bar{x}, \bar{u})$ é factível para $(\bar{P}_{A_3})$, se cumprem

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= f_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k), \ \ k = 0, \ldots, N, & (2.62)\\ \varphi(\bar{x}_0) &= 0, & (2.63)\\ \bar{u}_k &\in U_k, \ \ k = 0, \ldots, N, & (2.64)\\ (\bar{x} - x^*, \bar{u} - u^*) &\in B_{\tilde{\delta}}. & (2.65) \end{aligned}$$

Consideremos $\hat{u}_k = \bar{u}_k + D_k^\top d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*), \ \ k = 0, \ldots, N$. Por (2.58) e (2.60), obtemos

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_k - u_k^*\| &= \|\bar{u}_k + D_k^\top d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*) - u_k^*\| \\ &< \|\bar{u}_k - u_k^*\| + \|D_k^\top\| \|d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*)\| \\ &< \epsilon, \ \ k = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Por (2.56) e (2.65), para cada $\ k = 0, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*, d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*)) \\ &= \Big(b_k^1(x_k^* + \bar{x}_k - x_k^*, u_k^* + \bar{u}_k - u_k^* + D_k^\top d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*)), \ldots, \\ &\quad b_k^{\alpha_k}(x_k^* + \bar{x}_k - x_k^*, u_k^* + \bar{u}_k - u_k^* + D_k^\top d_k(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*))\Big). \end{aligned}$$

Assim, resulta que

$$b_k^i(\bar{x}_k, \hat{u}_k) = 0, \ \ i = 1, \ldots, \alpha_k, \ \ k = 0, \ldots, N. \tag{2.67}$$

Logo, por (2.52), temos

$$\begin{aligned} b_k^{\alpha_k+i}(\bar{x}_k, \hat{u}_k) &= \Phi_k^i\Big(b_k^1(\bar{x}_k, \hat{u}_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(\bar{x}_k, \hat{u}_k)\Big) \\ &= 0, \ \ i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k, \ \ k = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Por conseguinte, das equações (2.62) – (2.68) segue que $(\bar{x}, \hat{u})$ é um processo factível de (P_{A_3}). Assim, das equações (2.59) – (2.61) e (2.66), temos uma contradição ao fato de que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_3}). Portanto (x^*, u^*) é um processo ótimo local do problema $(\bar{P}_{A_3})$.

Passo 4:(Condições necessárias não degeneradas de primeira ordem) Agora vamos obter condições necessárias de primeira ordem para o problema $(\bar{P}_{A_3})$. Para isso aplicaremos o Teorema 2.3 no problema $(\bar{P}_{A_3})$.

Consideremos para cada período $k = 0, \ldots, N$, a seguinte função Hamiltoniana associada ao problema auxiliar: $\bar{H}_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \bar{H}_k(x,u,p,\xi) &= p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*)) \\ &\quad -\xi\psi_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*)). \end{aligned} \tag{2.69}$$

Antes de obter condições necessárias de otimalidade para o problema $(\bar{P}_{A_3})$, vamos derivar a função hamiltoniana em relação a x_k e u_k :

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k}\bar{H}_k(x,u,p,\xi) &= \nabla_{x_k} f_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*))^\top p_{k+1} \\ &\quad -\xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*)) \\ &\quad -\nabla_{x_k} d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*)^\top D_k \\ &\quad \Big(-\nabla_{u_k} f_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*))^\top p_{k+1} \\ &\quad +\xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*))\Big), \\ \nabla_{u_k}\bar{H}_k(x,u,p,\xi) &= \Big(I + D_k^\top \nabla_{u_k} d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*)\Big)^\top \\ &\quad \Big[\nabla_{u_k} f_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*))^\top p_{k+1} \\ &\quad -\xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k, u_k + D_k^\top d_k(x_k - x_k^*, u_k - x_k^*))\Big]. \end{aligned}$$

De (2.57), temos

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k} d_k(0,0) &= -\Big(D_k D_k^\top\Big)^{-1}\Big[\nabla_{x_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, \nabla_{x_k} b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*),\Big]^\top, \\ \nabla_{u_k} d_k(0,0) &= -\Big(D_k D_k^\top\Big)^{-1}\Big[\nabla_{u_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, \nabla_{u_k} b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big]^\top. \end{aligned}$$

Aplicando no processo ótimo (x_k^*, u_k^*), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k}\bar{H}_k(x^*,u^*,p,\xi) &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad -\Big[\nabla_{x_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, \nabla_{x_k} b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big]\Big(D_k D_k^\top\Big)^{-1} D_k \\ &\quad \Big[\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big], \\ \nabla_{u_k}\bar{H}_k(x^*,u^*,p,\xi) &= \Big(I - [\nabla_{u_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, \nabla_{u_k} b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)][D_k D_k^\top]^{-1} D_k\Big) \\ &\quad \Big[\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big]. \end{aligned}$$

Definindo $\bar{\lambda}_k = (D_k D_k)^{-1} D_k\Big(\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big) \in \mathbb{R}^{\alpha_k}$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k}\bar{H}_k(x^*,u^*,p,\xi) &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{\alpha_k}\bar{\lambda}_k^i \nabla_{x_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*), \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{u_k}\bar{H}_k(x^*,u^*,p,\xi) &= \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{\alpha_k}\bar{\lambda}_k^i \nabla_{u_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Consideremos

$$\lambda_k = (\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^{r_{b_k}}), \;\; \lambda_k^i = \bar{\lambda}_k^i, \;\; i = 1, \ldots, \alpha_k, \;\; \lambda_k^{\alpha_k + i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, r_{b_k} - q_k.$$

Logo, nas equações (2.70) e (2.71) temos

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k} \bar{H}_k(x^*, u^*, p, \xi) &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k, \qquad (2.72) \\ \nabla_{u_k} \bar{H}_k(x^*, u^*, p, \xi) &= \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k. \qquad (2.73) \end{aligned}$$

A seguir, obtemos condições necessárias de primeira ordem para o problema $(\bar{P}_{A_3})$. Como a hipótese S_4 é satisfeita e (x^*, u^*) é um processo ótimo do problema $(\bar{P}_{A_3})$, podemos aplicar o Teorema 2.3 ao problema auxiliar $(\bar{P}_{A_3})$. Então, existem $(\xi, p, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Equação adjunta:

$$p_k = \nabla_{x_k} \bar{H}_k(x^*, u^*, p, \xi), \;\; k = 1, \ldots, N. \qquad (2.74)$$

(ii) Condição de transversalidade:

$$\nabla_{x_0} \bar{H}_0(x^*, u^*, p, \xi) = \nabla \varphi(x_0^*)^\top \gamma, \qquad (2.75)$$

e

$$p_{N+1} = -\xi \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \qquad (2.76)$$

(iii) Condição de estacionariedade:

$$0 \in -\nabla_{u_k} \bar{H}_k(x^*, u^*, p, \xi) + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \ldots, N. \qquad (2.77)$$

Substituindo a equação (2.72) em (2.74) e (2.75), obtemos

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k, \;\; k = 1, \ldots, N, \qquad (2.78) \\ \nabla \varphi(x_0^*)^\top \gamma &= \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi \nabla_{x_0} \psi_0(x_0^*, u_0^*) \\ &\quad - \nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top \lambda_0. \qquad (2.79) \end{aligned}$$

Agora, substituindo a equação (2.73) em (2.77), temos que

$$\begin{aligned} 0 \;\in\; & -(\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k) \\ & + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \ldots, N. \qquad (2.80) \end{aligned}$$

Portanto, da equação (2.78) temos a condição (i), das equações (2.76) e (2.79) obtemos a condição (ii), e da equação (2.80) temos a condição (iii). Assim, o teorema fica provado.

■

2.4.4 Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições abstratas de controle, de estado inicial e mistas por período de igualdade e desigualdade

No problema a seguir, vamos obter condições de otimalidade não degeneradas. Estas condições serão obtidas da seguinte forma: primeiro estendemos a dimensão das restrições de desigualdade completando com zeros até chegar à dimensão da maior restrição de desigualdade, depois a estas restrições serão adicionadas variáveis de controle auxiliares, obtendo assim um problema do tipo (P_{A_3}) e aplicando o Teorema 2.4, obtemos tais condições. Vale ressaltar que não foi imposta hipótese alguma nas restrições de desigualdade.

Consideremos o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\
\text{sujeito a} \quad & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), \ \ k=0,\dots,N, \\
& b_k(x_k,u_k) = 0, \ \ k=0,\dots,N, \\
& g_k(x_k,u_k) \leqslant 0, \ \ k=0,\dots,N, \\
& \varphi(x_0) = 0, \\
& u_k \in U_k, \ \ k=0,\dots,N.
\end{aligned} \tag{P_{A_4}}
$$

Lembrando, o conjunto das restrições ativas é dado por:

$$
I_{g_k} = \{j \in \{1,\dots,r_{g_k}\} : g_k^j(x_k^*,u_k^*) = 0\}.
$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $I_{g_k} = \{1,\dots,|I_{g_k}|\}$. Definimos a função Hamiltoniana associada ao problema (P_{A_4}) por:
$H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\dots+r_{b_N})} \times \mathbb{R}^{(r_{g_0}+\dots+r_{g_N})} \to \mathbb{R}$ dada por

$$
H_k(x,u,p,\xi,\lambda,\mu) = p_{k+1}^\top f_k(x_k,u_k) - \xi\psi_k(x_k,u_k) - \lambda_k^\top b_k(x_k,u_k) - \mu_k^\top g_k(x_k,u_k),
$$

para cada $k=0,\dots,N$.

Teorema 2.5. *Seja (x^*,u^*) um processo ótimo local de (P_{A_4}). Suponhamos que a hipótese S_3 e a Definição 2.4 são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k=0,\dots,N$, $\mu_k \in \mathbb{R}^{r_{g_k}}$, $k=0,\dots,N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$
p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu), \ \ k=1,\dots,N,
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
p_k = {} & \nabla_{x_k} f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k,u_k) \\
& - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*,u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{x_k} g_k(x_k^*,u_k^*)^\top \mu_k, \ \ k=1,\dots,N.
\end{aligned}
$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma = \nabla_{x_0}H_0(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma = {} & \nabla_{x_0}f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*)^\top \\ & -\nabla_{x_0}b_0(x_0^*, u_0^*)^\top\lambda_0 - \nabla_{x_0}g_0(x_0^*, u_0^*)^\top\mu_0,\end{aligned}$$

e

$$p_{N+1} = -\xi\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$0 \in -\nabla_{u_k}H_k(x^*, u^*, p, \xi, \lambda, \mu) + N_{U_k}(u_k^*), \;\; k = 0, \ldots, N,$$

isto significa que, para cada $k = 0, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned}0 \in {} & -(\nabla_{u_k}f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k}b_k(x_k^*, u_k^*)^\top\lambda_k - \nabla_{u_k}g_k(x_k^*, u_k^*)^\top\mu_k) \\ & +N_{U_k}(u_k^*).\end{aligned}$$

(iv) ***Condição de folga e de não-negatividade:***

$$\mu_k^j g_k^j(x_k^*, u_k^*) = 0, \;\; \mu_k^j \geqslant 0, \;\; j = 0, \ldots, r_{g_k}, \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Demonstração: Sabendo que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_4}), então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N}\psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) \leqslant \sum_{k=0}^{N}\psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1})$$

para todo processo factível (x, u) que satisfaz

$$\|x_k - x_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 0, \ldots, N+1, \;\; \text{e} \;\; \|u_k - u_k^*\| < \epsilon, \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Seja $\hat{k} \in \{0, \ldots, N\}$ tal que $|I_{g_{\hat{k}}}| = \max\{|I_{g_k}|, k = 0, \ldots, N\}$. Assim, para cada $k = 0, \ldots, N$, definimos a seguinte função $\bar{g}_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{|I_{g_{\hat{k}}}|}$, dada por

$$\bar{g}_k^j(x_k, u_k) = \begin{cases} g_k^j(x_k, u_k), & \text{se } j \in I_{g_k}, \\ 0, & \text{se } j \notin I_{g_k}. \end{cases}$$

Para demonstrar o teorema vamos considerar os seguintes passos:

Passo 1: (Problema auxiliar) Consideremos o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & b_k(x_k, u_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \bar{g}_k(x_k, u_k) + z_k = 0, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0) = 0, \\ & z_k \in \mathbb{R}_+^{|I_{g_{\hat{k}}}|}, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & u_k \in U_k, \;\; k = 0, \ldots, N. \end{array} \qquad (\bar{P}_{A_4})$$

Mostraremos que $((x^*, u^*), z^*)$ é um processo ótimo de $\bar{P}_{A_4}$, onde $z_k^{*j} = 0,\ \ j \in \{1, \ldots, |I_{g_{\hat{k}}}|\}$, $k = 0, \ldots, N$.

(i) Claramente $((x^*, u^*), z^*)$ é um processo factível de $(\bar{P}_{A_4})$.

(ii) $((x^*, u^*), z^*)$ é um processo ótimo de $(\bar{P}_{A_4})$.
Demonstração por absurdo, suponhamos que $((x^*, u^*), z^*)$ não é um processo ótimo de $(\bar{P}_{A_4})$, isto é, existem $\bar{\epsilon} > 0$ com $0 < \bar{\epsilon} < \epsilon$ e um processo factível $((\bar{x}, \bar{u}), \bar{z})$ de $(\bar{P}_{A_4})$ tais que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) + \psi_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) < \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*),$$

com $\|((\bar{x}, \bar{u}), \bar{z}) - ((x^*, u^*), z^*)\| < \bar{\epsilon}$. Como $((\bar{x}, \bar{u}), \bar{z})$ é um processo factível de $(\bar{P}_{A_4})$, então

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{k+1} &= f_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k),\ \ k = 0, \ldots, N, && (2.81)\\
b_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) &= 0,\ \ k = 0, \ldots, N, && (2.82)\\
\bar{g}_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) + \bar{z}_k &= 0,\ \ k = 0, \ldots, N, && (2.83)\\
\varphi(\bar{x}_0) &= 0, && (2.84)\\
\bar{z}_k &\in \mathbb{R}_+^{|I_{g_{\hat{k}}}|}, && (2.85)\\
\bar{u}_k &\in U_k,\ \ k = 0, \ldots, N. && (2.86)
\end{aligned}$$

De (2.83) e (2.85), segue que

$$g_k^j(\bar{x}_k, \bar{u}_k) = -\bar{z}_k^j \leqslant 0,\ \ k = 0, \ldots, N,\ \ j \in I_{g_k}. \tag{2.87}$$

e

$$\bar{z}_k^j = 0,\ \ k = 0, \ldots, N,\ \ j \notin I_{g_k}.$$

Além disso, pela continuidade de g_k^j (podemos diminuir $\bar{\epsilon}$ se necessário), temos que

$$g_k^j(\bar{x}_k, \bar{u}_k) < 0,\ \ k = 0, \ldots, N,\ \ j \in \{1, \ldots, r_{g_k}\} \backslash I_{g_k}. \tag{2.88}$$

Portanto, de (2.81), (2.82), (2.84) e (2.86) – (2.88), temos que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo factível de $(\bar{P}_{A_4})$ com

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) + \psi_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) < \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

Isto contradiz o fato que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_{A_4}). Concluímos assim que $((x^*, u^*), z^*)$ é um processo ótimo de $(\bar{P}_{A_4})$.

Passo 2: Vamos verificar que as restrições de estado inicial do problema $(\bar{P}_{A_4})$ satisfazem a hipótese S_3 e as restrições mistas de igualdade do problema $(\bar{P}_{A_4})$ satisfazem a Definição 2.4.

Do enunciado do teorema, S_3 é satisfeita. Considerando

$$\hat{b}_k(x_k, u_k, z_k) = (b_k(x_k, u_k), \bar{g}_k(x_k, u_k) + z_k),$$

então

$$\nabla_{u_k, z_k} \hat{b}_k((x_k, u_k), z_k) = \begin{bmatrix} \nabla_{u_k} b_k(x_k, u_k) & 0 \\ \nabla_{u_k} \bar{g}_k(x_k, u_k) & I \end{bmatrix}.$$

Da matriz anterior podemos notar que as últimas $r_{g_{\hat{k}}}$ linhas são linearmente independentes em relação a qualquer linha e qualquer processo factível $((x_k, u_k), z_k)$. Assim, para $k = 0, \ldots, N$, para que a restrição $\hat{b}_k(x_k, u_k, z_k)$ satisfaça a Definição 2.4 é suficiente que a Definição 2.4 seja satisfeita em $b_k(x_k, u_k)$. Isto segue diretamente da hipótese.

Passo 3: (Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem) A função Hamiltoniana do problema $(\bar{P}_{A_4})$ é definida como:

$H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{(|I_{g_{\hat{k}}}|(N+1))} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0} + \ldots + r_{b_N}) + (|I_{g_{\hat{k}}}|(N+1))} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$H_k(x, u, z, p, \xi, \hat{\lambda}) = f_k(x_k, u_k)^\top p_{k+1} - \xi \psi_k(x_k, u_k) - \hat{b}_k(x_k, u_k, z_k)^\top \hat{\lambda}_k.$$

Aplicando o Teorema 2.4 no problema $(\bar{P}_{A_4})$, temos que existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\hat{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{r_{\hat{b}_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Equação adjunta:

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k) \\ &\quad - \nabla_{x_k} \hat{b}_k(x_k^*, u_k^*)^\top \hat{\lambda}_k, \ k = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.89}$$

(ii) Condição de transversalidade:

$$\nabla_{x_0} \varphi(x_0^*)^\top \gamma = \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi \nabla_{x_0} \psi_0(x_0^*, u_0^*)^\top - \nabla_{x_0} \hat{b}_0(x_0^*, u_0^*)^\top \hat{\lambda}_0, \tag{2.90}$$

e

$$p_{N+1} = -\xi \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \tag{2.91}$$

(iii) Condição de estacionariedade:

$$\begin{aligned} (0,0) \in -\Big(&\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} \hat{b}_k(x_k^*, u_k^*)^\top \hat{\lambda}_k, \\ &- \nabla_{z_k} \hat{b}_k(x_k^*, u_k^*)^\top \hat{\lambda}_k\Big) + N_{U_k}(u_k^*) \times \mathbb{R}_-^{|I_{g_{\hat{k}}}|}, \ k = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Dado que $\hat{b}_k(x_k, u_k, z_k) = (b_k(x_k, u_k), \bar{g}_k(x_k, u_k) + z_k) \in \mathbb{R}^{r_{b_k} + |I_{g_{\hat{k}}}|}$, $k = 0, \ldots, N$, e considerando $\hat{\lambda}_k = (\lambda_k, \bar{\mu}_k) \in \mathbb{R}^{r_{b_k} + |I_{g_{\hat{k}}}|}$, $k = 0, \ldots, N$, por (2.89) temos

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k) \\ &\quad - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{x_k} \bar{g}_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{\mu}_k, \ k = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.93}$$

De (2.90) resulta

$$\begin{aligned}\nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma &= \nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1 - \xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*)^\top \\ &\quad -\nabla_{x_0}b_0(x_0^*,u_0^*)^\top\lambda_0 - \nabla_{x_0}\bar{g}_0(x_0^*,u_0^*)^\top\bar{\mu}_0. \qquad (2.94)\end{aligned}$$

Dado que, para cada $k = 0,\ldots,N$, temos

$$\bar{g}_k^j(x_k,u_k) = g_k^j(x_k,u_k),\ 1 \leqslant j \leqslant |I_{g_k}|, \quad \text{e} \quad \bar{g}_k(x_k,u_k) = 0,\ |I_{g_k}|+1 \leqslant j \leqslant |I_{g_{\hat{k}}}|,$$

definindo $\bar{\mu}_k = (\mu_k,\tilde{\mu}_k) \in \mathbb{R}^{|I_{g_k}|} \times \mathbb{R}^{|I_{g_{\hat{k}}}|-|I_{g_k}|}$, $k = 0,\ldots,N$, em (2.93) e (2.94), segue que

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k,u_k) \\ &\quad -\nabla_{x_k}b_k(x_k^*,u_k^*)^\top\lambda_k - \nabla_{x_k}g_k(x_k^*,u_k^*)^\top\mu_k,\ \ k = 1,\ldots,N, \qquad (2.95) \\ \nabla_{x_0}\varphi(x_0^*)^\top\gamma &= \nabla_{x_0}f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1 - \xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*)^\top \\ &\quad -\nabla_{x_0}b_0(x_0^*,u_0^*)^\top\lambda_0 - \nabla_{x_0}g_0(x_0^*,u_0^*)^\top\mu_0. \qquad (2.96)\end{aligned}$$

Por (2.92) e lembrando que a variável de controle para cada período neste caso é (u_k,z_k), $k = 0,\ldots,N$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\in -(\nabla_{u_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) \\ &\quad -\nabla_{u_k}b_k(x_k^*,u_k^*)^\top\lambda_k - \nabla_{u_k}\bar{g}_k(x_k^*,u_k^*)^\top\mu_k) + N_{U_k}(u_k^*),\ \ k = 0,\ldots,N, \qquad (2.97) \\ 0 &= \bar{\mu}_k^j + w_k^j,\ \ w_k^j \in \mathbb{R}_-,\ \ k = 0,\ldots,N,\ \ j = 1,\ldots,|I_{g_{\hat{k}}}|. \qquad (2.98)\end{aligned}$$

Tomando em consideração como foi definido $\bar{g}_k$ e $\bar{\mu}_k$, em (2.97), segue que

$$\begin{aligned} 0 &\in -(\nabla_{u_k}f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) \\ &\quad -\nabla_{u_k}b_k(x_k^*,u_k^*)^\top\lambda_k - \nabla_{u_k}g_k(x_k^*,u_k^*)^\top\mu_k) + N_{U_k}(u_k^*),\ \ k = 0,\ldots,N. \qquad (2.99)\end{aligned}$$

Da forma que foi definido $\bar{\mu}_k$, $k = 0,\ldots,N$, e como $|I_{g_k}| \leqslant |I_{g_{\hat{k}}}|$, $k = 0,\ldots,N$, em (2.98), temos que

$$\mu_k^j \geqslant 0,\ \ k = 0,\ldots,N,\ \ j = 1,\ldots,|I_{g_k}|.$$

Além disso, considerando $\mu_k^j = 0, j \in \{1,\ldots,r_{g_k}\}\backslash I_{g_k}$, resulta

$$\mu_k^j g_k^j(x_k^*,u_k^*) = 0,\ \ \mu_k^j \geqslant 0,\ \ j = 0,\ldots,r_{g_k},\ \ k = 0,\ldots,N. \qquad (2.100)$$

Portanto, de (2.91), (2.95), (2.96),(2.99) e (2.100) as condições do teorema são satisfeitas.

■

No próximo capítulo serão obtidas condições necessárias de segunda ordem para problemas de controle discreto tanto para restrições mistas gerais como para restrições mistas por período.

3 Condições Necessárias de Otimalidade de Segunda Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto

Neste capítulo estudaremos condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para os problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas do tipo $(P_1) - (P_4)$. Primeiramente, obteremos condições necessárias de primeira e segunda ordem para o problema (P_1) segundo a teoria desenvolvida em [25], para isso determinaremos os conjuntos de direções de descida de segunda ordem $(D^2(F_0, (x^*, u^*), (s,t)))$, de direções factíveis de segunda ordem $(V^2(Q_I, (x^*, u^*), (s,t)))$, de direções tangentes de segunda ordem $(T^2(Q_E, (x^*, u^*), (s,t)))$, e seus respectivos funcionais suporte, com base no Teorema 1.11 tais condições serão obtidas. Além disso, usaremos uma condição de regularidade a qual, será utilizada na obtenção das condições necessárias não degeneradas. Por último, serão obtidas condições necessárias de segunda ordem para os problemas $(P_2) - (P_4)$, por meio de um problema auxiliar e a Proposição 1.1. Além disso, será dado um exemplo.

3.1 Condições Necessárias de Otimalidade de Segunda Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas Gerais

Nesta seção vamos obter condições necessárias de segunda ordem para o problema (P_1). Estas condições serão obtidas usando os conjuntos de direções de descida, factíveis e tangentes, todos de segunda ordem, os quais foram estabelecidos nas Definições 1.16, 1.17 e 1.19, respectivamente, e será aplicado o Teorema 1.11. Para assegurar que o multiplicador associado à função objetivo seja não nulo, será utilizada uma condição de regularidade envolvendo a dinâmica, restrições mistas gerais e restrições de contorno, tanto de igualdade como de desigualdade.

Antes de determinar os conjuntos de segunda ordem, vamos relembrar algumas notações que foram usadas no Capítulo 2 para o problema (P_1):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k),\ \ k=0,\dots,N, \\ & \varphi(x_0,x_{N+1}) = 0, \\ & b(x_0,x_1,...,x_{N+1},u_0,...,u_N) = 0, \\ & g(x_0,x_1,...,x_{N+1},u_0,...,u_N) \leqslant 0, \\ & \phi(x_0,x_{N+1}) \leqslant 0. \end{array} \tag{P_1}$$

Todas as funções são duas vezes continuamente diferenciáveis em relação a x e u.
O conjunto dos processos factíveis do problema (P_1) foi denotado por:

$$Q = Q_E \cap Q_I,$$

onde

- $Q_E = \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : x_{k+1} = f_k(x_k,u_k),\ \ k=0,\dots,N,$
  $\varphi(x_0,x_{N+1}) = 0,\ \ b(x_0,\dots,x_{N+1},u_0,\dots,u_N) = 0\Big\};$

- $Q_I = \Big(\bigcap_{j\in I_\phi} Q^j_{I_1}\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{j\in I_g} Q^j_{I_2}\Big)$, com

$$\begin{array}{lcl} I_\phi & = & \{j \in \{1,\dots,r_\phi\} : \phi^j(x^*,u^*) = 0\}; \\ I_g & = & \{j \in \{1,\dots,r_g\} : g^j(x^*,u^*) = 0\}; \\ Q^j_{I_1} & = & \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \phi^j(x_0,x_{N+1}) \leqslant 0\Big\},\ \ j \in I_\phi; \\ Q^j_{I_2} & = & \Big\{(x,u) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : g^j(x_0,...,x_{N+1},u_0,...,u_N) \leqslant 0\Big\},\ \ j \in I_g. \end{array}$$

O problema (P_1) foi reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F_0(x,u) \\ \text{sujeito a} & F_E(x,u) = 0, \\ & F_I(x,u) \leqslant 0, \end{array} \tag{$\bar{P}_1$}$$

onde

- $F_0(x,u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1});$

- $F_E(x,u) = (F_{E_0}(x,u), F_{E_1}(x,u), \dots, F_{E_N}(x,u), F_{E_{N+1}}(x,u), F_{E_{N+2}}(x,u)),$

$$\begin{array}{lcl} F_{E_k}(x,u) & = & x_{k+1} - f_k(x_k,u_k),\ \ k=0,\dots,N, \\ F^i_{E_k}(x,u) & = & x^i_{k+1} - f^i_k(x_k,u_k),\ \ k=0,\dots,N,\ \ i=1,\dots,n, \\ F_{E_{N+1}}(x,u) & = & \varphi(x_0,x_{N+1}), \\ F^i_{E_{N+1}}(x,u) & = & \varphi^i(x_0,x_{N+1}),\ \ i=1,\dots,r_\varphi, \\ F_{E_{N+2}}(x,u) & = & b(x,u), \\ F^i_{E_{N+2}}(x,u) & = & b^i(x,u),\ \ i=1,\dots,r_b; \end{array}$$

- $F_I(x,u) = (F_{I_1}(x,u), F_{I_2}(x,u))$,

$$\begin{aligned} F_{I_1}(x,u) &= \phi(x_0, x_{N+1}), \\ F_{I_1}^j(x,u) &= \phi^j(x_0, x_{N+1}), \;\; j = 1,\ldots,r_\phi, \\ F_{I_2}(x,u) &= g(x,u), \\ F_{I_2}^j(x,u) &= g^j(x,u), \;\; j = 1,\ldots,r_g. \end{aligned}$$

Consideremos ainda os seguintes conjuntos de índices:

- Dado $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ tal que

$$\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} \leqslant 0, \;\; j \in I_\phi,$$

definimos

$$\begin{aligned} J_\phi((x^*,u^*),(s,t)) &= \{j \in I_\phi : \nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 \\ &\qquad + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} = 0\}; \end{aligned}$$

- Dado $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} g^j(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} g^j(x^*,u^*)^\top t_k \leqslant 0, \;\; j \in I_g,$$

definimos

$$\begin{aligned} J_g((x^*,u^*),(s,t)) &= \{j \in I_g : \sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} g^j(x^*,u^*)^\top s_k \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} g^j(x^*,u^*)^\top t_k = 0\}. \end{aligned}$$

Observação 3.1. *Quando não houver perigo de confusão, vamos denotar $J_\phi((x^*,u^*),(s,t))$ por J_ϕ e $J_g((x^*,u^*),(s,t))$ por J_g.*

A seguir, vamos caracterizar os conjuntos $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))$, $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))$, $D^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))$ e seus respectivos funcionais suportes.

3.1.1 Caracterização de $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))$ e $\delta^*(l_{F_0}|D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)))$

Consideremos que $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \emptyset$ e suponhamos que a seguinte condição é satisfeita:

$$\sum_{k=0}^{N} \Big[\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top t_k\Big] + \nabla\psi_{N+1}(x_{N+1})^\top s_{N+1} \leqslant 0.$$

Então, pela Proposição 1.2, temos

$$\begin{aligned} D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)) = \Big\{ & (w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\ & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2}\Big[s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) t_k \\ & + 2 s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) t_k \Big] + \frac{1}{2} s_{N+1}^\top \nabla^2 \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) s_{N+1} \\ & + \sum_{k=0}^{N} \Big[\nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top w_k + \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top v_k \Big] \\ & + \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1})^\top w_{N+1} < 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso, pela Proposição 1.4, temos que, para $l_{F_0} \in \Lambda(D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)))$, existe algum $\xi \geqslant 0$, tal que

$$l_{F_0}(s,t) = \sum_{k=0}^{N} \xi \Big[\nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top t_k \Big] + \xi \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1})^\top s_{N+1}, \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned} \delta^*(l_{F_0} | D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))) = -\frac{1}{2}\xi \Big[& \sum_{k=0}^{N} \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) t_k \\ & + 2 s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} \psi_k(x_k^*,u_k^*) t_k \Big) \\ & + s_{N+1}^\top \nabla^2 \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) s_{N+1} \Big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1.2 Caracterização de $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))$ e $\delta^*(l_{F_I} | V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)))$

Suponhamos que $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \varnothing$, e as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} & \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*) \leqslant 0,\ j \in I_\phi,\ \ \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_{N+1} \leqslant 0,\ \ j \in I_\phi; \\ & g^j(x^*,u^*) \leqslant 0,\ j \in I_g,\ \ \sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} g^j(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} g^j(x^*,u^*)^\top t_k \leqslant 0,\ \ j \in I_g. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 1.2, resulta

$$V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)) = V^2(Q_{I_1},(x^*,u^*),(s,t)) \bigcap V^2(Q_{I_2},(x^*,u^*),(s,t)), \tag{3.4}$$

onde

$$\begin{aligned} V^2(Q_{I_1},(x^*,u^*),(s,t)) = \bigcap_{j \in I_\phi} \Big\{ & (w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\ & \frac{1}{2}\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*) s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*) s_{N+1} \\ & + 2 s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_0} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*) s_0 \Big] + \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_0 \\ & + \nabla_{x_{N+1}} \phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_{N+1} < 0 \Big\}, \end{aligned}$$

e

$$V^2(Q_{I_2},(x^*,u^*),(s,t)) = \bigcap_{j\in I_g}\Big\{(w,v)\in\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{m(N+1)} : \frac{1}{2}(s,t)^\top\nabla^2 g^j(x^*,u^*)(s,t) + \sum_{k=0}^{N+1}\Big[\nabla_{x_k}g^j(x^*,u^*)^\top w_k + \sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}g^j(x^*,u^*)^\top v_k\Big] < 0\Big\}.$$

Além disso, pela Proposição 1.4, temos que, para $l_{F_I}\in\Lambda(V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)))$, existem $\mu^j\geqslant 0,\ \ j\in I_g$, e $\ \eta^j\geqslant 0,\ \ j\in I_\phi$, tais que

$$\begin{aligned} l_{F_I}(s,t) \;=\; & \sum_{j\in I_g}\mu^j\Big[\sum_{k=0}^{N+1}\nabla_{x_k}g^j(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}g^j(x^*,u^*)^\top t_k\Big] \\ & + \sum_{j\in I_\phi}\eta^j\Big[\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}\Big], \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \delta^*(l_{F_I}|V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))) \;=\; & -\frac{1}{2}s_0^\top\Big[\sum_{j\in I_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_0 \\ & -\frac{1}{2}s_{N+1}^\top\Big[\sum_{j\in I_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_{N+1} \\ & -s_0^\top\Big[\sum_{j\in I_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_{N+1} \\ & -\frac{1}{2}(s,t)^\top\Big[\sum_{j\in I_g}\mu^j\nabla^2 g^j(x^*,u^*)\Big](s,t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observação 3.2. *Sabemos que os conjuntos $V^2(Q_{I_1},(x^*,u^*),(s,t))$ e $V^2(Q_{I_2},(x^*,u^*),(s,t))$ são convexos e não vazios. Assim, o conjunto $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))$ é também convexo e não vazio.*

3.1.3 Caracterização de $T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))$ e $\delta^*(l_{F_0}|T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t)))$

Consideremos $T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))\neq\varnothing$ e suponhamos que $\nabla F_E(x,u)$ tem posto constante para cada $(x,u)\in U$, onde U é uma vizinhança de (x^*,u^*), $F_E(x^*,u^*)=0$ e $(s,t)=(s_0,\dots,s_{N+1},t_0,\dots,t_N)$ satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} s_{k+1} \;&=\; \nabla_{x_k}f_k(x_k^*,u_k^*)s_k + \nabla_{u_k}f_k(x_k^*,u_k^*)t_k,\ \ k=0,\dots,N; \\ 0 \;&=\; \sum_{k=0}^{N+1}\nabla_{x_k}b^i(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N}\nabla_{u_k}b^i(x^*,u^*)^\top t_k,\ \ i=1,\dots,r_b; \\ 0 \;&=\; \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + \nabla^2_{x_{N+1}}\varphi(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1},\ \ i=1,\dots,r_\varphi. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 1.3, temos

$$
\begin{aligned}
T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t)) = \Big\{ & (w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\
& 0 = \frac{1}{2}\Big[s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) s_k + 2 s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) t_k \\
& \quad + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) t_k \Big] - w_{k+1} + \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top w_k \\
& \quad + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top v_k, \;\; i = 1,\dots,n, \;\; k = 0,\dots,N; \\
& 0 = \frac{1}{2}(s,t)^\top \nabla^2 b^i(x^*,u^*)(s,t) + \nabla b^i(x^*,u^*)^\top (w,v), \;\; i = 1,\dots,r_b; \\
& 0 = \frac{1}{2}\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) s_{N+1} \Big] \\
& \quad + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_0} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) s_0 + \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_0 \\
& \quad + \nabla_{x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}, \;\; i = 1,\dots,r_\varphi \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Além disso, pela Proposição 1.4, temos que, para $l_{F_E} \in \Lambda(T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t)))$, existem $p_k \in \mathbb{R}^n, \;\; k = 1,\dots,N+1, \; \lambda \in \mathbb{R}^{r_b}, \; \gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$ tais que

$$
\begin{aligned}
l_{F_E}(s,t) \;\; = \;\; & -\sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k} f_k(x_k^*,u_k^*) s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*,u_k^*) t_k \Big)^\top p_{k+1} + \sum_{k=1}^{N+1} s_k^\top p_k \\
& + \Big(\sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} b^i(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} b^i(x^*,u^*)^\top t_k \Big)^\top \lambda \\
& + \Big(\nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) s_0 + \nabla_{x_{N+1}} \varphi(x_0^*,x_{N+1}^*) s_{N+1} \Big)^\top \gamma,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^*(l_{F_E} | T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))) = & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2}\Big[s_k^\top \Big(\sum_{i=0}^{n} p_{k+1}^i \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) \Big) s_k \\
& + 2 t_k^\top \Big(\sum_{i=0}^{n} p_{k+1}^i \nabla^2_{u_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) \Big) s_k \\
& + t_k^\top \Big(\sum_{i=0}^{n} p_{k+1}^i \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*) \Big) t_k \Big] \\
& - \frac{1}{2}(s,t)^\top \Big(\sum_{i=1}^{r_b} \lambda^i \nabla^2 b^i(x^*,u^*) \Big)(s,t) \\
& - \frac{1}{2}\Big[s_0^\top \Big(\sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla^2_{x_0,x_0} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) \Big) s_0 \\
& + 2 s_0^\top \Big(\sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla^2_{x_0,x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) s_{N+1} \Big) \\
& + s_{N+1}^\top \Big(\sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) \Big) s_{N+1} \Big].
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

3.1.4 Condição de regularidade do tipo Ben-Tal−Zowe relaxada

Definimos o cone crítico associado ao problema (P_1) por:

$$
\begin{aligned}
L(Q,(x^*,u^*)) = \Big\{&(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\
&0 \geqslant \sum_{k=0}^{N} \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top t_k + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}; \\
&s_{k+1} = \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k,\ k=0,\dots,N,\ i=1,\dots,n; \\
&0 = \sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} b^i(x^*,u^*)s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} b^i(x^*,u^*)t_k,\ \ i=1,\dots,r_b; \\
&0 \geqslant \sum_{k=0}^{N+1} \nabla_{x_k} g^j(x^*,u^*)^\top s_k + \sum_{k=0}^{N} \nabla_{u_k} g^j(x^*,u^*)^\top t_k,\ \ j \in I_g; \\
&0 = \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1},\ \ i=1,\dots,r_\varphi; \\
&0 \geqslant \nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1},\ \ j \in I_\phi\Big\}.
\end{aligned}
$$

Consideremos a seguinte condição de regularidade.

Definição 3.1. *Seja (x^*,u^*) um processo factível. Dizemos que (x^*,u^*) é um processo regular do tipo Ben-Tal−Zowe relaxado se:*

(i) Existe uma vizinhança V de (x^*,u^*) tal que $\nabla F_E(x,u)$ tem o mesmo posto para cada $(x,u) \in V$.

(ii) Para cada vetor $(s,t) \in L(Q,(x^*,u^*))$, existe um vetor $(w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$, $(w,v) \neq (0,0)$, satisfazendo

$$
\begin{aligned}
0 \ =\ & s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k \\
& -w_{k+1}^i + \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top w_k + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top v_k,\ \ i=1,\dots,n,\ \ k=0,\dots,N; \\
0 \ =\ & (s,t)^\top \nabla^2 b^i(x^*,u^*)(s,t) + \nabla b^i(x^*,u^*)^\top (w,v),\ \ i=1,\dots,r_b; \\
0 \ >\ & (s,t)^\top \nabla^2 g^j(x^*,u^*)(s,t) + \nabla g^j(x^*,u^*)^\top (w,v),\ \ j \in J_g((x^*,u^*)(s,t)); \\
0 \ =\ & s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} \\
& +2s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} + \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_0 \\
& +\nabla_{x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_{N+1},\ \ i=1,\dots,r_\varphi; \\
0 \ >\ & s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} \\
& +2s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} + \nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_0 \\
& +\nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)^\top w_{N+1},\ \ \ j \in J_\phi((x^*,u^*),(s,t)).
\end{aligned}
$$

Observação 3.3. *Na Definição 3.1 o item (ii) assegura que $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \varnothing$.*

3.1.5 Condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordem

Lembrando que a função Hamiltoniana associada ao problema (P_1) é dada por: $H_k : \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_g} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$H_k(x,u,p,\xi,\lambda,\mu) = p_{k+1}^\top f_k(x_k,u_k) - \xi\psi_k(x_k,u_k) - \lambda^\top b(x,u) - \mu^\top g(x,u), \;\; k = 0,\ldots,N.$$

A seguir enunciamos um dos teoremas mais importantes deste capítulo.

Teorema 3.1. *Sejam (x^*,u^*) um processo ótimo local de problema (P_1), com $L(Q,(x^*,u^*)) \neq \{0\}$ e $(s,t) = (s_0,\ldots,s_{N+1},t_0,\ldots,t_N) \in L(Q,(x^*,u^*))$. Então existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{r_b}$, $\mu \in \mathbb{R}^{r_g}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, com $\xi \geqslant 0$, $\mu^j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,r_g$, $\eta^j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,r_\phi$, tais que*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu), \;\; k = 1,\ldots,N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_0} H_0(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu) \;&=\; \sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla_{x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*),\\
p_{N+1} \;&=\; -\Big[\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\nabla_{x_{N+1}}b^i(x^*,u^*) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\nabla_{x_{N+1}}g^j(x^*,u^*)\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla_{x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*) + \sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla_{x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]\\
&\quad -\xi\nabla_{x_{N+1}}\psi(x_{N+1}^*).
\end{aligned}$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu) = 0, \;\; k = 0,\ldots,N.$$

(iv) ***Condição de complementaridade:***

$$\mu^j g^j(x^*,u^*) = 0, \;\; j = 1,\ldots,r_g,$$

$$\eta^j \phi^j(x^*,u^*) = 0, \;\; j = 1,\ldots,r_\phi.$$

(v) ***Condição de segunda ordem de não negatividade:***

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_k + t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k\Big]\\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k - \sum_{\substack{\tau=0\\ k\neq\tau}}^{N} s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_\tau\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{\tau=0\\k\neq\tau}}^{N}\Big[2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_\tau+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_\tau\Big]\\
&+2\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_{N+1}}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_{N+1}+t_k^\top\nabla^2_{u_k,x_{N+1}}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_{N+1}\Big]\\
&+s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_0\\
&+s_{N+1}^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\\
&+\xi\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi(x_{N+1}^*)+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}b^i(x^*,u^*)+\sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}g^j(x^*,u^*)\Big]s_{N+1}\\
&+2s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_{N+1}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Seja (x^*,u^*) um processo ótimo local de (P_1) e $(s,t)\in L(\Omega,(x^*,u^*))$. Para provar este teorema vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: Se $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))=\varnothing$. Então, para todo $(w,v)\in\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{n(N+1)}$, temos

$$
\begin{aligned}
0\ \leqslant\ &\sum_{k=0}^{N}\Big[\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top w_k+\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top v_k\Big]+\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1})^\top w_{N+1}\\
&+\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k+s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k+t_k^\top\nabla^2_{u_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k\\
&+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big]+s_{N+1}^\top\nabla^2\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Em particular, para (w,v) que satisfaz

$$
\sum_{k=0}^{N}\Big[\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top w_k+\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)^\top v_k\Big]+\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}\leqslant 0,
\tag{3.11}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
0\ \leqslant\ &\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k+s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k+t_k^\top\nabla^2_{u_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k\\
&+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big]+s_{N+1}^\top\nabla^2\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)&=0,\ \ k=0,\dots,N,\\
\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)&=0,\ \ k=0,\dots,N,\\
\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)&=0.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

De fato, considerando $\alpha(w,v)$, em que $\alpha>0$ e (w,v) satisfazendo (3.11) com desigualdade estrita, substituindo na equação (3.10) e fazendo $\alpha\to\infty$, temos

$$
0\ \leqslant\ -\infty,
$$

o que é absurdo.
Portanto, tomando $\xi = 1$, $p = 0$, $\gamma = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\eta = 0$, temos

$$H_k(x, u, p, \xi, \lambda, \mu) = -\psi_k(x_k, u_k), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Logo, por (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_k} H_k(x^*, u^*, p_{k+1}, \lambda, \mu) &= 0, \quad k = 0, \ldots, N, \\
\nabla_{u_k} H_k(x^*, u^*, p_{k+1}, \lambda, \mu) &= 0, \quad k = 0, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Assim, as condições $(i) - (iv)$ do teorema são satisfeitas. Por outro lado, a condição (v) segue da equação (3.12). Portanto, todas as condições do teorema são satisfeitas.
Caso 2: Este caso será dividido em dois sub-casos:

- **Caso 2.1** Suponhamos que a condição (i) da Definição 3.1 não é satisfeita, ou seja, não existe uma vizinhança V de (x^*, u^*) tal que $\nabla F_E(x, u)$ tem o mesmo posto para cada $(x, u) \in V$. Então, a prova das condições $(i) - (iv)$ se reduz ao Caso 2.1 da prova do Teorema 2.1. Assim, existem $\bar{p} \in \mathbb{R}^{n(N+2)}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{r_b}$, $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, tais que

  $$\nabla F_E(x^*, u^*)^\top (\bar{p}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}) = 0.$$

  Isto é,

  $$\begin{aligned}
  -\nabla_{x_0} f_0(x_0, u_0)^\top \bar{p}_1 + \nabla_{x_0} \varphi(x_0, x_{N+1})^\top \bar{\gamma} + \nabla_{x_0} b(x, u)^\top \bar{\lambda} &= 0, \\
  \bar{p}_k - \nabla_{x_k} f_k(x_k, u_k)^\top \bar{p}_{k+1} + \nabla_{x_k} b(x, u)^\top \bar{\lambda} &= 0, \quad k = 1, \ldots, N, \\
  -\nabla_{u_k} f_k(x_k, u_k)^\top \bar{p}_{k+1} + \nabla_{u_k} b(x, u)^\top \bar{\lambda} &= 0, \quad k = 0, \ldots, N.
  \end{aligned}$$

  Logo, considerando $(\xi, p, \gamma, \lambda, \mu, \eta) = (0, \bar{p}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}, 0, 0)$, as condições $(i) - (iv)$ são satisfeitas. Seja $(s, t) \in L(Q, (x^*, u^*))$. Para mostrar a condição (v), basta fazer o produto interno entre y e z, onde:

  $$\begin{aligned}
  y &= (\bar{y}, \tilde{y}, \hat{y}), \\
  \bar{y} &= (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N), \\
  \bar{y}_i &= (\bar{y}_i^1, \ldots, \bar{y}_i^n), \quad i = 1, \ldots, N \\
  \bar{y}_i^j &= (s_0^\top \nabla^2_{x_0, x_0} f_i^j(x_0^*, u_0^*) s_0 + 2 s_0^\top \nabla^2_{x_0, u_0} f_i^j(x_0^*, u_0^*) t_0 \\
  &\quad + t_0^\top \nabla^2_{u_0, u_0} f_i^j(x_0^*, u_0^*) t_0), \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, n, \\
  \tilde{y} &= (\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^{r_b}), \\
  \tilde{y}^j &= (s, t)^\top \nabla^2 b^j(x^*, u^*)(s, t), \quad j = 1, \ldots, r_b, \\
  \hat{y} &= (\hat{y}^1, \ldots, \hat{y}^{r_\varphi}), \\
  \hat{y}^j &= s_0^\top \nabla_{x_0, x_0} \varphi^j(x_0, x_{N+1}) s_0 + 2 s_0^\top \nabla_{x_0, x_{N+1}} \varphi^j(x_0, x_{N+1}) s_{N+1} \\
  &\quad + s_{N+1}^\top \nabla_{x_{N+1}, x_{N+1}} \varphi^j(x_0, x_{N+1}) s_{N+1},
  \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &= (\bar{z}, \tilde{z}, \hat{z}),\\
\bar{z} &= (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N),\\
\bar{z}_i^j &= p_i^j, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, n,\\
\tilde{z} &= (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^{r_b}),\\
\tilde{z}^j &= \lambda^j, \quad j = 1, \ldots, r_b,\\
\hat{z} &= (\hat{z}^1, \ldots, \hat{z}^{r_\varphi})\\
\hat{z}^j &= \gamma^j, \quad j = 1, \ldots, r_\varphi.
\end{aligned}
$$

Assim, temos os seguintes casos:

- Se o resultado desse produto é maior do que ou igual a zero, então a condição (v) é satisfeita considerando $(\xi, p, \gamma, \lambda, \mu, \eta) = (0, \bar{p}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}, 0, 0)$.
- Se o resultado desse produto é menor que zero, então a condição (v) é satisfeita considerando $(\xi, p, \gamma, \lambda, \mu, \eta) = (0, -\bar{p}, -\bar{\gamma}, -\bar{\lambda}, 0, 0)$. Note que as condições $(i) - (iv)$ continuam sendo satisfeitas após esta re-definição dos multiplicadores.

- **Caso 2.2** Suponhamos que na Definição 3.1 a condição (i) é satisfeita mas a condição (ii) não é satisfeita. Como a condição (i) da Definição 3.1 é cumprida, então pela Proposição 1.3, obtemos

$$
T(Q_E, (x^*, u^*)) = Nu(\nabla F_E(x^*, u^*)). \tag{3.14}
$$

Além disso, para todo $(s, t) \in T(Q_E, x^*)$, temos que

$$
\begin{aligned}
T^2(Q_E, (x^*, u^*), (s, t)) = \{z \in \mathbb{R}^{n(N+2)+m(N+1)} &: \nabla F_E(x^*, u^*)z\\
&+ \frac{1}{2}\nabla^2 F_E(x^*, u^*)((s, t), (s, t)) = 0\}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

De (3.14), se $(s, t) \in T(Q_E, (x^*, u^*))$, então

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k, \;\; k = 0, \ldots, N,\\
0 &= \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top s_{N+1}, \;\; i = 1, \ldots, r_\varphi,\\
0 &= \nabla b^i(x^*, u^*)^\top (s, t), \;\; i = 1, \ldots, r_b.
\end{aligned}
$$

Além disso, se $(w, v) \in T^2(Q_E, (x^*, u^*), (s, t))$ por (3.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 = \; & s_k^\top \nabla^2_{x_k, x_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)s_k + s_k^\top \nabla^2_{x_k, u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)t_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k, x_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)s_k +\\
& t_k^\top \nabla^2_{u_k, u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)t_k - w_{k+1} + \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)^\top w_k + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)^\top v_k,\\
& i = 1, \ldots, n, \;\; k = 0, \ldots, N; \qquad (3.16)\\
0 = \; & s_0^\top \nabla^2_{x_0, x_0}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + s_0^\top \nabla^2_{x_0, x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}\\
& + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1}, x_0}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1}, x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)s_{N+1}\\
& + \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_0 + \nabla_{x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}, \;\; i = 1, \ldots, r_\varphi; \qquad (3.17)\\
0 = \; & (s, t)^\top \nabla^2 b^i(x^*, u^*)(s, t) + \nabla b^i(x^*, u^*)^\top (w, v), \;\; i = 1, \ldots, r_b. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, dado que a condição (ii) da Definição 3.1 não é satisfeita, então não existe $(w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ satisfazendo (3.16)-(3.18), tal que

$$0 \;>\; (s,t)^\top \nabla^2 g^j(x^*,u^*)(s,t) + \nabla g^j(x^*,u^*)^\top (w,v), \;\; j \in J_g$$

e

$$\begin{aligned} 0 \;>\; & s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*) s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*) s_{N+1} \\ & + s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*) s_{N+1} + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*) s_0 \\ & + \nabla_{x_0} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_0 + \nabla_{x_{N+1}} \phi^j(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}, \;\; j \in J_\phi, \end{aligned}$$

para algum $(s,t) \in L(Q,(x^*,u^*))$. Isto implica que existe algum $\hat{j} \in J_g$ ou $\tilde{j} \in J_\phi$, tal que para todo $(w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)}$ satisfazendo (3.16)-(3.18), temos

$$0 \leqslant (s,t)^\top \nabla^2 g^{\hat{j}}(x^*,u^*)(s,t) + \nabla g^{\hat{j}}(x^*,u^*)^\top (w,v) \tag{3.19}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 \;\leqslant\; & s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*) s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*) s_{N+1} \\ & + s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*) s_{N+1} + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_0} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*) s_0 \\ & + \nabla_{x_0} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_0 + \nabla_{x_{N+1}} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que na equação (3.19) não podemos ter $\nabla g^{\hat{j}}(x^*,u^*)^\top (w,v) < 0$ para todo $(w,v) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)}$. Assim, considerando em particular $(w,v) = (s,t) \in T(Q_E,(x^*,u^*))$, temos que pelo menos um dos seguintes sistemas não possui solução:

$$\begin{aligned} 0 &= -w_{k+1} + \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*) w_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*) v_k, \;\; i = 1,\dots,n, \;\; k = 0,\dots,N; \\ 0 &= \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) w_0 + \nabla_{x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) w_{N+1}, \;\; i = 1,\dots,r_\varphi; \\ 0 &= \nabla b^i(x^*,u^*)(w,v), \;\; i = 1,\dots,r_b; \\ 0 &> \nabla g^{\hat{j}}(x^*,u^*)^\top (w,v); \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} 0 &= -w_{k+1} + \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*) w_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*) v_k, \;\; i = 1,\dots,n, \;\; k = 0,\dots,N; \\ 0 &= \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) w_0 + \nabla_{x_{N+1}} \varphi^i(x_0^*, x_{N+1}^*) w_{N+1}, \;\; i = 1,\dots,r_\varphi; \\ 0 &= \nabla b^i(x^*,u^*)(w,v), \;\; i = 1,\dots,r_b; \\ 0 &> \nabla_{x_0} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_0 + \nabla_{x_{N+1}} \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*)^\top w_{N+1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.3, temos que existe $(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}_+$, tal que

$$\nabla F_E(x^*,u^*)^\top (l_1,l_2,l_3) + l_4(\nabla g^{\hat{j}}(x^*,u^*)) = 0,$$

ou existe $(l_1,l_2,l_3,l_5) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_b} \times \mathbb{R}^{r_\varphi} \times \mathbb{R}_+$, tal que

$$\nabla F_E(x^*,u^*)^\top (l_1,l_2,l_3) + l_5(\nabla \phi^{\tilde{j}}(x_0^*, x_{N+1}^*)) = 0.$$

Assim, considerando $\xi = 0$, $p = l_1$,$\gamma = l_2$, $\lambda = l_3$, $\eta = 0$ e

$$\mu_j = \begin{cases} l_4, & \text{para } \hat{j}, \\ 0, & \text{para } j \in \{1, \ldots, r_g\} \backslash \hat{j}, \end{cases}$$

ou, $\xi = 0$, $p = l_1$,$\gamma = l_2$, $\lambda = l_3$, $\mu = 0$ e

$$\eta_j = \begin{cases} l_4, & \text{para } \tilde{j}, \\ 0, & \text{para } j \in \{1, \ldots, r_\phi\} \backslash \tilde{j}. \end{cases}$$

As condições $(i) - (iv)$ do teorema são satisfeitas. Podemos ver que a condição (v) é satisfeita, multiplicando cada coordenada de l_1 com a equação (3.16), de l_2 com a equação (3.17), de l_3 com a equação (3.18) e l_4 com a equação (3.19) ou l_5 com a equação (3.20). Logo, somando os resultados obtemos a condição (v) do teorema.

Caso 3: Neste caso, vamos supor que vale a condição de regularidade dada na Definição 3.1, dado $(s,t) \in L(Q,(x^*,u^*))$, vamos considerar que $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \varnothing$, $V^2(F_I,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \varnothing$ (esta última segue da condição (ii) da Definição 3.1) e $\nabla F_E(x,u)$ tem posto constante para cada $(x,u) \in V$, onde V é uma vizinhança de (x^*,u^*). Assim, $D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))$, $V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))$ e $T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))$ são convexos e foram determinados pelas equações (3.1), (3.4) e (3.7), respectivamente. Então, aplicando o Teorema 1.11, existem $l_{F_0} \in \Lambda(D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t)))$, $l_{F_I} \in \Lambda(V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)))$ e $l_{F_E} \in \Lambda(T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t)))$, não todos nulos, que satisfazem a equação de Euler-Lagrange

$$l_{F_0} + l_{F_I} + l_{F_E} = 0 \tag{3.21}$$

e a desigualdade de Legendre

$$\begin{aligned} 0 \;\geqslant\; & \delta^*(l_f|D^2(F_0,(x^*,u^*),(s,t))) + \delta^*(l_f|V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t))) \\ & + \delta^*(l_f|T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t))). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Assim, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ na equação (3.21), temos

$$l_{F_0}(s,t) + l_{F_I}(s,t) + l_{F_E}(s,t) = 0.$$

Logo, considerando as equações (3.2), (3.5) e (3.8), de maneira análoga ao que foi feito no Caso 3 na prova do Teorema 2.1, temos as condições $(i) - (iv)$ do teorema.
Mostraremos a condição (v). Das equações (3.3), (3.6), (3.9) e (3.22) temos

$$\begin{aligned} 0 \;\leqslant\; & \xi\Big[\sum_{k=0}^{N}\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) \\ & + s_{N+1}^\top \nabla^2\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big] + \sum_{j=1}^{|I_g|}\mu^j\Big[(s,t)^\top \nabla^2 g^j(x^*,u^*)(s,t)\Big] \\ & + \sum_{j=1}^{|I_\phi|}\eta^j\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big] + \sum_{k=0}^{N}\Big[-\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k \\
&+t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)\Big] + \sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big[(s,t)^\top \nabla^2 b^i(x^*,u^*)(s,t)\Big] \\
&+\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_0 + s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1} \\
&+2s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big].
\end{aligned}
$$

Logo, considerando $\mu^j = 0,\ j \notin I_g,\ \eta^j = 0,\ j \notin I_\phi$, e rearranjando termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant\ & \sum_{k=0}^{N}\Big[-\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k\Big) + \xi\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b^i(x^*,u^*)s_k\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} g^j(x^*,u^*)s_k\Big)\Big] \\
&+\sum_{k=0}^{N}\Big[-\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) + \xi\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) + \\
&+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b^i(x^*,u^*)t_k\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} g^j(x^*,u^*)t_k\Big)\Big] \\
&+\sum_{k=0}^{N}2\Big[-\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) + \xi\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) + \\
&+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} b^i(x^*,u^*)t_k\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} g^j(x^*,u^*)t_k\Big)\Big] \\
&+\sum_{k=0}^{N}\Big[\sum_{\substack{\tau=0\\ k\neq\tau}}^{N}\Big[\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_\tau} b^i(x^*,u^*)s_\tau\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_\tau} g^j(x^*,u^*)s_\tau\Big)\Big]\Big] \\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{\tau=0\\ k\neq\tau}}^{N}\Big[2\Big[\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_\tau} b^i(x^*,u^*)t_\tau\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_\tau} g^j(x^*,u^*)t_\tau\Big)\Big] \\
&+\Big[\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_\tau} b^i(x^*,u^*)t_\tau\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_\tau} g^j(x^*,u^*)t_\tau\Big)\Big]\Big] \\
&+2\sum_{k=0}^{N}\Big[\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_{N+1}} b^i(x^*,u^*)s_{N+1}\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_{N+1}} g^j(x^*,u^*)s_{N+1}\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_{N+1}} b^i(x^*,u^*)s_{N+1}\Big) + \sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_{N+1}} g^j(x^*,u^*)s_{N+1}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_0\\
&+s_{N+1}^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\\
&+\xi\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi(x_{N+1}^*)+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}b^i(x^*,u^*)+\sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}g^j(x^*,u^*)\Big]s_{N+1}\\
&+2s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_{N+1}.
\end{aligned}
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_k+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k\Big]\\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k-\sum_{\substack{\tau=0\\k\neq\tau}}^{N}s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_\tau\Big]\\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{\tau=0\\k\neq\tau}}^{N}\Big[2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_\tau+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_\tau}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_\tau\Big]\\
&+2\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_{N+1}}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_{N+1}+t_k^\top\nabla^2_{u_k,x_{N+1}}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_{N+1}\Big]\\
&+s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_0\\
&+s_{N+1}^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\\
&+\xi\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi(x_{N+1}^*)+\sum_{i=1}^{r_b}\lambda^i\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}b^i(x^*,u^*)+\sum_{j=1}^{r_g}\mu^j\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}g^j(x^*,u^*)\Big]s_{N+1}\\
&+2s_0^\top\Big[\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\varphi^i(x_0^*,x_{N+1}^*)+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\nabla^2_{x_0,x_{N+1}}\phi^j(x_0^*,x_{N+1}^*)\Big]s_{N+1}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a condição (v) é satisfeita.

■

Na demostração do Teorema 3.1 podemos notar que se a Definição 3.1 é cumprida, por conseguinte o multiplicador associado à função objetivo é não nulo. Portanto, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Seja (x^*,u^*) um processo ótimo local do problema (P_1) satisfazendo a Definição 3.1. Então, as condições $(i)-(v)$ do Teorema 3.1 se cumprem com $\xi>0$.*

Demonstração: Se $\nabla F_0(x^*,u^*)=0$ segue pelo caso (1) da prova do Teorema 3.1 que $\xi>0$. Se $\nabla F_0(x^*,u^*)\neq 0$, da Definição 3.1 temos que existe $(s,t)\in\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{m(N+1)}$

tal que

$$T^2(Q_E,(x^*,u^*),(s,t)) \bigcap V^2(Q_I,(x^*,u^*),(s,t)) \neq \emptyset.$$

Então, pela Observação 1.11 temos que $l_{F_0} \neq 0$, ou seja,

$$\xi \nabla F_0(x^*,u^*) \neq 0.$$

Dado que $\xi \geqslant 0$ e $\nabla F_0(x^*,u^*) \neq 0$, temos que $\xi > 0$. ■

A seguir, apresentamos um exemplo de processo regular do tipo Ben-Tal−Zowe relaxado.

Exemplo 3.1.

$$\begin{array}{ll}
\textit{Minimizar} & (x_0^{(1)})^2 + (x_0^{(2)})^2 + (u_0^{(1)})^2 + (u_0^{(2)})^2 + (u_1^{(1)})^2 + (u_1^{(2)})^2 \\
\textit{sujeito a} & x_1^{(1)} = x_0^{(1)} + u_0^{(1)}, \quad x_1^{(2)} = x_0^{(2)} + u_0^{(2)}, \\
& x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + u_1^{(1)}, \quad x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + u_1^{(2)}, \\
& x_0^{(2)} + x_1^{(1)} + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} = 0, \\
& x_0^{(1)} + x_2^{(2)} = 0, \quad (x_0^{(1)} + x_2^{(2)})^2 = 0, \\
& -(x_0^{(1)})^2 - (x_0^{(2)})^2 - (x_1^{(1)})^2 - (x_1^{(2)})^2 - (x_2^{(1)})^2 - (x_2^{(2)})^2 - (u_0^{(1)})^2 - (u_0^{(2)})^2 \\
& -(u_1^{(1)})^2 - (u_1^{(2)})^2 \leqslant 0,
\end{array}$$

onde $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 0,1,2, \quad e \quad u_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 0,1.$

Pode-se notar que $(x^*,u^*) = (0,0)$ *é um processo ótimo. Mostraremos que a Definição 3.1 é satisfeita. Temos que*

$$\nabla F_E(x,u) = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2(x_0^{(1)} + x_2^{(2)}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_0^{(1)} + x_2^{(2)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

tem posto constante 6 em uma vizinhança do processo factível $(0,0)$, $\nabla^2 F_E^i(x,u) = 0, \quad i =$

$1, \ldots, 6$, *e*

$$\nabla^2 F_E^7(x,u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a condição (i) da Definição 3.1 é satisfeita. Além disso,

$$Nu\nabla F_E(0,0) = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

onde

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1,1,-1,1,-1,1,0,0,0,0)^\top, \\ v_2 &= (0,-1,0,0,0,0,0,1,0,0)^\top, \\ v_3 &= (0,0,0,0,1,0,0,0,1,0)^\top, \\ v_4 &= (0,-1,0,-1,0,0,0,0,0,1)^\top. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\nabla F_I(x,u) = (-2x_0^1, -2x_0^2, -2x_1^1, -2x_1^2, -2x_2^1, -2x_2^2, -2u_0^1, -2u_0^2, -2u_1^1, -2u_1^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla F_I(0,0) &= 0, \\ \nabla^2 F_I(0,0) &= -2I. \end{aligned}$$

Assim, considerando $z = v_2 + v_3$, segue que $z \in Nu\nabla F_E(0,0)$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s,t)^\top \nabla^2 F_E^i(0,0)(s,t) + \nabla F_E^i(0,0)z &= 0, \quad i = 1,\ldots,7, \\ \frac{1}{2}(s,t)^\top \nabla^2 F_I^i(0,0)(s,t) + \nabla F_E^i(0,0)z &< 0, \end{aligned}$$

para todo $(s,t) \in L(Q,(0,0))$, onde $L(Q,(0,0))$ é dado por:

$$\begin{aligned} L(Q,(0,0)) = \{&(s,t) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^4 : s_1^{(1)} = s_0^{(1)} + t_0^{(1)},\ s_1^{(2)} = s_0^{(2)} + t_0^{(2)},\ s_2^{(1)} = s_1^{(1)} + t_0^{(1)}, \\ &s_2^{(2)} = s_1^{(2)} + t_0^{(2)},\ 0 = s_0^{(2)} + s_1^{(1)} + t_0^{(2)} + t_1^{(2)},\ 0 = s_0^{(1)} + s_2^{(2)}\} \end{aligned},$$

sendo $(s,t) = (s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_2^{(1)}, s_2^{(2)}, t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)})$. Assim, a Definição 3.1 é satisfeita. Então, pelo Corolário 3.1 existem $p \in \mathbb{R}^4$, $\gamma \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \geqslant 0$ e $\xi > 0$, tais que as condições $(i) - (v)$ são satisfeitas.

Observação 3.4. *Pode-se notar que o Exemplo 3.1 satisfaz a Definição 3.1 mas a Definição 2.2 não é satisfeita, isto segue do fato que $\nabla F_I(0,0) = 0$.*

3.2 Condições de Segunda Ordem para Problemas de Controle Ótimo Discreto com Restrições Mistas por Período

Nesta seção apresentamos condições necessárias de segunda ordem para problemas do tipo (P_2), os quais são problemas com restrições mistas por período. Relembrando que o problema (P_2) é dado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k,u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), \;\; k=0,\dots,N, \\ & b_k^i(x_k,u_k) = 0, \;\; k=0,\dots,N, \;\; i=1,\dots,r_{b_k}, \\ & g_k^j(x_k,u_k) \leqslant 0, \;\; k=0,\dots,N, \;\; j=1,\dots,r_{g_k}, \\ & \varphi^i(x_0)=0, \;\; i=1,\dots,r_\varphi, \\ & \phi^j(x_0) \leqslant 0, \;\; j=1,\dots,r_\phi, \end{array} \tag{P_2}$$

e a função Hamiltoniana

$$H_k : \mathbb{R}^{n(+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(r_{b_0}+\cdots+r_{b_N})} \times \mathbb{R}^{(r_{g_0}+\cdots+r_{g_N})} \to \mathbb{R}$$

é definida por:

$$\begin{aligned} H_k(x,u,p,\xi,\lambda,\mu) \;\; = \;\; & p_{k+1}^\top f_k(x_k,u_k) - \xi\psi_k(x_k,u_k) \\ & -\lambda_k^\top b_k(x_k,u_k) - \mu_k^\top g_k(x_k,u_k), \;\; k=0,\dots,N. \end{aligned}$$

Consideremos o seguinte conjunto de direções críticas:

$$\begin{aligned} C(x^*,u^*) \;\; = \;\; & \Big\{(s,t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\ & s_{k+1}^i = \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)^\top t_k, \;\; i=1,\dots,n, \;\; k=0,\dots,N, \\ & 0 = \nabla_{x_k} b_k^i(x_k^*,u_k^*) s_k + \nabla_{u_k} b_k(x_k^*,u_k^*) t_k, \;\; i=1,\dots,r_{b_k}, \;\; k=0,\dots,N, \\ & 0 = \nabla_{x_k} g_k^j(x_k^*,u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} g_k^j(x_k^*,u_k^*)^\top t_k, \;\; j \in I_{g_k}, \;\; k=0,\dots,N, \\ & 0 = \nabla_{x_0}\varphi^i(x_0)^\top s_0, \;\; i=1,\dots,r_\varphi, \\ & 0 = \nabla_{x_0}\phi^j(x_0) s_0, \;\; j \in \bar{I}_\phi \Big\}, \end{aligned}$$

onde

- $I_{g_k}{=}I_{g_k}(x^*,u^*) = \{j \in \{1,\dots,r_{g_k}\} : g_k^j(x_k^*,u_k^*) = 0\}$,
- $I_\phi = I_\phi(x^*,u^*) = \{j \in \{1,\dots,r_\phi\} : \phi^j(x_0^*) = 0\}$.

Definição 3.2. *Dizemos que (x^*,u^*) é um MP-processo do problema (P_2) se (x^*,u^*) é um processo factível que satisfaz as condições do princípio do máximo discreto para o problema (P_2), dadas no Corolário 2.3. Se o multiplicador associado a função objetivo é não nulo dizemos que (x^*,u^*) é MP-processo não degenerado do problema (P_2).*

Antes de enunciar o teorema que traz as condições necessárias de segunda ordem vamos mostrar a proposição a seguir:

Proposição 3.1. *Sejam* (x^*, u^*) *um MP-processo não degenerado do problema* (P_2) *e* $(s,t) \in C(x^*, u^*)$. *Então,*

$$\sum_{k=0}^{N} \Big[s_k^\top \nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + t_k^\top \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \Big] + s_{N+1}^\top \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1}) = 0.$$

Demonstração: Como (x^*, u^*) é um MP-processo do problema (P_2), então existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, $\mu_k \in \mathbb{R}^{r_{g_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:
Equação adjunta:

$$\begin{aligned} p_k &= \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k) \\ &\quad - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k, \ \ k = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Condição de transversalidade:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_0} \varphi(x_0^*)^\top \gamma + \nabla_{x_0} \phi(x_0^*)^\top \eta &= \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi \nabla_{x_0} \psi_0(x_0^*, u_0^*)^\top \\ &\quad - \nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top \lambda_0 - \nabla_{x_0} g_0(x_0^*, u_0^*)^\top \mu_0, \end{aligned}$$

e

$$p_{N+1} = -\xi \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

Condição de estacionariedade: Para cada $k = 0, \ldots, N$, temos

$$\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k = 0.$$

Condição de folga e de não-negatividade:

$$\begin{aligned} \mu_k^j g_k^j(x_k^*, u_k^*) &= 0, \ \ \mu_k^j \geqslant 0, \ \ j = 1, \ldots, r_{g_k}, \ \ k = 0, \ldots, N, \\ \eta^j \phi^j(x_0^*) &= 0, \ \ \eta^j \geqslant 0, \ \ j = 1, \ldots, r_\phi. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno da equação adjunta com s_k para cada $k = 0, \ldots, N$, obtemos

$$\begin{aligned} s_k^\top p_k &= s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} \Big) - \xi \Big(s_k^\top \nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \Big) \\ &\quad - s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k \Big) - s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k \Big). \end{aligned}$$

Logo, somando todas as equações de $k = 0, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} s_k^\top p_k &= \sum_{k=1}^{N} \Big[s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} \Big) - \xi \Big(s_k^\top \nabla_{x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) \Big) \\ &\quad - s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k \Big) - s_k^\top \Big(\nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k \Big) \Big]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Analogamente, fazendo o produto interno de cada equação da condição de estacionariedade com t_k para cada $k = 0, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1}\Big) - \xi\Big(t_k^\top \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big) \\ &\quad - t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k\Big) - t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k\Big). \end{aligned}$$

Daí, somando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{N}\Big[\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) \\ &\quad - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top \mu_k\Big]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora, do produto interno de s_0 e s_{N+1} com as equações da condição de transversalidade do estado inicial e estado final, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} s_0^\top\Big(\nabla\varphi(x_0^*)^\top\gamma + \nabla\phi(x_0^*)^\top\eta\Big) &= s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1\Big) - \xi\Big(s_0^\top\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*)\Big) \\ &\quad - s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top\lambda_0\Big) - s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} g_0(x_0^*, u_0^*)^\top\mu_0\Big), \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$s_{N+1}^\top p_{N+1} = -\xi s_{N+1}^\top \nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \tag{3.26}$$

Logo, somamos as equações (3.23)-(3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} s_k^\top p_k &= \sum_{k=1}^{N}\Big[s_k^\top\Big(\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1}\Big) - \xi\Big(s_k^\top\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big) \\ &\quad - s_k^\top\Big(\nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top\lambda_k\Big) - s_k^\top\Big(\nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top\mu_k\Big)\Big] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N}\Big[t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1}\Big) - \xi\Big(t_k^\top\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big) \\ &\quad - t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top\lambda_k\Big) - t_k^\top\Big(\nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)^\top\mu_k\Big)\Big] \\ &\quad + s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1\Big) - \xi\Big(s_0^\top\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*, u_0^*)\Big) \\ &\quad - s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top\lambda_0\Big) - s_0^\top\Big(\nabla_{x_0} g_0(x_0^*, u_0^*)^\top\mu_0\Big) \\ &\quad - \xi\Big(s_{N+1}^\top\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)\Big) - \Big(\nabla\varphi(x_0^*)s_0\Big)^\top\gamma - \Big(\nabla\phi(x_0^*)s_0\Big)^\top\eta. \end{aligned}$$

Rearranjando termos, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} s_k^\top p_k &= \sum_{k=0}^{N}\Big(\nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)t_k\Big)^\top p_{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N}\xi\Big(s_k^\top\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*) + t_k^\top\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\Big) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N}\Big(\nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)t_k\Big)^\top\lambda_k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N}\Big(\nabla_{x_k} g_k(x_k^*, u_k^*)s_k + \nabla_{u_k} g_k(x_k^*, u_k^*)t_k\Big)^\top\mu_k \\ &\quad - \xi s_{N+1}^\top\nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}^*) - \Big(\nabla\varphi(x_0^*)s_0\Big)^\top\gamma - \Big(\nabla\phi(x_0^*)s_0\Big)^\top\eta. \end{aligned}$$

Se $(s,t) = (s_0,\ldots,s_{N+1},t_0,\ldots,t_N) \in C(x^*,u^*)$, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} s_k^\top p_k &= \sum_{k=0}^{N}\Big[s_{k+1}^\top p_{k+1}\Big] - \sum_{k=0}^{N}\xi\Big[s_k^\top \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) + t_k^\top \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)\Big]\\ &\quad -\xi s_{N+1}^\top \nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}).\end{aligned}$$

Portanto, para todo $(s,t) = (s_0,\ldots,s_{N+1},t_0,\ldots,t_N) \in C(x^*,u^*)$, segue que

$$\sum_{k=0}^{N}\Big[s_k^\top \nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) + t_k^\top \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)\Big] + s_{N+1}^\top \nabla\psi_{N+1}(x_{N+1}) = 0.$$

Obtendo, assim o resultado desejado. ■

Lembremos as hipóteses S_1 e S_2 do Corolário 2.3:

S_1: O conjunto $\Big\{\nabla\varphi^1(x_0^*),\ldots,\nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0^*),\nabla\phi^1(x_0^*),\ldots,\nabla\phi^{|\bar{I}_\phi|}(x_0^*)\Big\}$ é linearmente independente.

S_2 : Para cada $k = 0,\ldots,N$, a seguinte matriz

$$\Big[\nabla_u b_k^1(x_k^*,u_k^*) \ \cdots \ \nabla_u b_k^{r_{b_k}}(x_k^*,u_k^*) \ \nabla_u g_k^1(x_k^*,u_k^*) \ \cdots \ \nabla_u g_k^{|I_{g_k}|}(x_k^*,u_k^*)\Big]$$

tem posto completo.

Teorema 3.2. *Seja (x^*,u^*) um processo ótimo local de (P_2), e suponhamos que S_1 e S_2 são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0,\ldots,N$, $\mu_k \in \mathbb{R}^{r_{g_k}}$, $k = 0,\ldots,N$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, com $\xi > 0$, tais que as seguinte condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k = \nabla_{x_k} H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu), \ \ k = 1,\ldots,N.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\begin{aligned}\nabla_{x_0} H_0(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu) &= \nabla\varphi(x_0^*)^\top\gamma + \nabla\phi(x_0^*)^\top\eta,\\ p_{N+1} &= -\xi\nabla\psi(x_{N+1}^*).\end{aligned}$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu) = 0, \ \ k = 0,\ldots,N.$$

(iv) ***Condição de folga e não negatividade:***

$$\begin{aligned}\mu_k^j g_k^j(x_k^*,u_k^*) &= 0, \ \ \mu_k^j \geqslant 0, \ \ j = 1,\ldots,r_{g_k}, \ \ k = 0,\ldots,N,\\ \eta^j\phi^j(x_0^*) &= 0, \ \ \eta^j \geqslant 0, \ \ j = 1,\ldots,r_\phi.\end{aligned}$$

(v) ***Condição de segunda ordem de não negatividade:***

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\left[s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*)s_0\right]+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\left[s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*)s_0\right]\\
&+\xi\left[s_{N+1}^\top\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\right]-\sum_{k=0}^{N}s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)s_k\\
&-\sum_{k=0}^{N}t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k-2\sum_{k=0}^{N}s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}H_k(x^*,u^*,p,\xi,\lambda,\mu)t_k\geqslant 0
\end{aligned}$$

para todo $(s,t)=(s_0,\ldots,s_{N+1},t_0,\ldots,t_N)\in C(x^*,u^*)$, *ou seja,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\Big[s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*)s_0\Big]+\sum_{j=1}^{r_\phi}\eta^j\left[s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*)s_0\right]\\
&+\xi\Big[s_{N+1}^\top\nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big]\\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[\sum_{i=1}^{n}p_{k+1}^i\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k\Big)-\xi\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda_k^i\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}b_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k\Big)-\sum_{j=1}^{r_{g_k}}\mu_k^j\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}g_k^j(x_k^*,u_k^*)s_k\Big)\Big]\\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[\sum_{i=1}^{n}p_{k+1}^i(t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k)-\xi(t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k)\\
&-\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda_k^i\Big(t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}b_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)-\sum_{j=1}^{r_{g_k}}\mu_k^j\Big(t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}g_k^j(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)\Big]\\
&-\sum_{k=0}^{N}2\Big[\sum_{i=1}^{n}p_{k+1}^i\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)-\xi\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda_k^i\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}b_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)-\sum_{j=1}^{r_{g_k}}\mu_k^j\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}g_k^j(x_k^*,u_k^*)t_k\Big)\Big]\geqslant 0,
\end{aligned}$$

para todo $(s,t)=(s_0,\ldots,s_{N+1},t_0,\ldots,t_N)\in C(x^*,u^*)$.

Demonstração: A prova das condições $(i)-(iv)$ segue do Corolário 2.3, resta mostrar a condição (v). Note que as condições $(i)-(iv)$ valem com $\xi>0$, de modo que (x^*,u^*) é um MP-processo não degenerado.

Consideremos as seguintes funções:

- $\bar{F}_E:\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{m(N+1)}\to\mathbb{R}^{n(N+1)}\times\mathbb{R}^{r_\varphi}\times\mathbb{R}^{|I_\phi|}$, definido por

$$\begin{aligned}
\bar{F}_E(x,u)\ =\ &\Big(x_1^1-f_0^1(x_0,u_0),\ldots,x_1^n-f_0^n(x_0,u_0),\ldots,x_{N+1}^1-f_N^1(x_N,u_N),\ldots,\\
&x_{N+1}^n-f_N^n(x_N,u_N),\varphi^1(x_0),\ldots,\varphi^{r_\varphi}(x_0),\phi^1(x_0),\ldots,\varphi^{|I_\phi|}(x_0)\Big);
\end{aligned}$$

- $\hat{F}_E:\mathbb{R}^{n(N+2)}\times\mathbb{R}^{m(N+1)}\to\mathbb{R}^{r_{b_0}}\times\ldots\times\mathbb{R}^{r_{b_N}}\times\mathbb{R}^{|I_{g_0}|}\times\cdots\times\mathbb{R}^{|I_{g_N}|}$, dado por

$$\begin{aligned}
\hat{F}_E(x,u)\ =\ &\Big(b_0^1(x_0,u_0),\ldots,b_0^{r_{b_0}}(x_0,u_0),\ldots,b_N^1(x_N,u_N),\ldots,b_N^{r_{b_N}}(x_N,u_N),\\
&g_0^1(x_0,u_0),\ldots,g_0^{|I_{g_0}|}(x_0,u_0),\ldots,g_N^1(x_N,u_N),\ldots,g_N^{|I_{g_N}|}(x_N,u_N)\Big).
\end{aligned}$$

As restrições inativas serão desconsideradas, pois da continuidade temos a factibilidade em alguma vizinhança do processo ótimo. Assim, definimos o seguinte conjunto factível

$$\begin{aligned} Q \;=\; \{(x,u) : & \; x_{k+1} = f_k(x_k,u_k), \;\; k=0,\dots,N, \;\; \varphi^i(x_0)=0, \;\; i=0,\dots,r_\varphi, \\ & \phi^j(x_0)=0, \;\; j=0,\dots,|I_\phi|, \;\; b_k^i(x_k,u_k)=0, \;\; k=0,\dots,N, \;\; i=0,\dots,r_{b_k}, \\ & g_k^j(x_k,u_k)=0, \;\; k=0,\dots,N, \;\; j=0,\dots,|I_{g_k}|\}. \end{aligned}$$

Deste modo, o conjunto factível Q é representado da seguinte forma:

$$Q = \{(x,u) : \mathcal{F}_E(x,u) = 0\},$$

onde $\mathcal{F}_E(x,u) = (\bar{F}_E(x,u), \tilde{F}_E(x,u))$. Pela hipótese S_1 temos que o conjunto

$$\left\{\nabla\varphi^1(x_0^*),\dots,\nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0^*)\right\} \bigcup \left\{\nabla\phi^1(x_0^*),\dots,\nabla\phi^{|\bar{I}_\phi|}(x_0^*)\right\}$$

é linearmente independente. Então,

$$\left\{\nabla\bar{F}_E^i(x^*,u^*)\right\}_{i=1,\dots,n(N+2)+r_\varphi+|\bar{I}_\phi|} \tag{3.27}$$

é linearmente independente. Pela hipótese S_2 segue que, para cada k,

$$\left\{\nabla_{u_k} b_k^i(x_k^*,u_k^*)\right\}_{\,i\,=\,1,\dots,r_{b_k}} \bigcup \left\{\nabla_{u_k} g_k^j(x_k^*,u_k^*)\right\}_{\,j\,=\,1,\dots,|I_{g_k}|} \tag{3.28}$$

é um conjunto linearmente independente. Temos que $\nabla\mathcal{F}_E(x^*,u^*)$ é dada por:

$$\nabla\mathcal{F}_E(x^*,u^*) = \begin{pmatrix}
A_0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & A_1 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_N & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_N \\
\varphi_{x_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\phi_{x_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
C_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{C}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & C_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{C}_N \\
D_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{D}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & D_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & D_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{D}_N
\end{pmatrix},$$

onde

- $A_k = \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)$, $B_k = \nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)$, $k = 0, \ldots, N$,
- $\varphi_{x_0} = [\nabla_{x_0}\varphi^1(x_0^*), \ldots, \nabla_{x_0}\varphi^{r_\varphi}(x_0^*)]^\top$,
  $\phi_{x_0} = [\nabla_{x_0}\phi^1(x_0^*), \ldots, \nabla_{x_0}\phi^{|I_\phi|}(x_0^*)]^\top$,
- $C_k = [\nabla_{x_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{x_k} b_k^{r_{b_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top$, $k = 0, \ldots, N$,
  $\bar{C}_k = [\nabla_{u_k} b_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{u_k} b_k^{r_{b_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top$, $k = 0, \ldots, N$,
- $D_k = [\nabla_{x_k} g_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{x_k} g_k^{|I_{g_k}|}(x_k^*, u_k^*)]^\top$, $k = 0, \ldots, N$,
  $\bar{D}_k = [\nabla_{u_k} g_k^1(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{u_k} g_k^{|I_{g_k}|}(x_k^*, u_k^*)]^\top$, $k = 0, \ldots, N$.

Logo, de (3.27), (3.28) e da estrutura de $\nabla\mathcal{F}_E(x^*, u^*)$, temos que $\nabla\mathcal{F}_E(x^*, u^*)$ tem posto completo. Isto implica que $\nabla F_E(x^*, u^*)$ tem posto constante. Então, pela Proposição 1.1, temos que

$$T(Q, (x^*, u^*)) = Nu(\nabla\mathcal{F}_E(x^*, u^*)).$$

Além disso, para qualquer $(s, t) \in T(Q, (x^*, u^*))$, existem um número $\epsilon^* > 0$ e uma função continuamente diferenciável $r = (\bar{r}, \tilde{r})$, tais que

$$(x^*, u^*) + \epsilon(s, t) + (\bar{r}(\epsilon), \tilde{r}(\epsilon)) \in Q, \;\; 0 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon^*, \quad (\bar{r}0), \tilde{r}(0)) = 0, \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{(\bar{r}(\epsilon), \tilde{r}(\epsilon))}{\epsilon} = 0.$$

Denotaremos $\theta(\epsilon) = (x^*, u^*) + \epsilon(s, t) + (\bar{r}(\epsilon), \tilde{r}(\epsilon)) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)}$ com

$$\theta(\epsilon) = (\bar{\theta}_0(\epsilon), \ldots, \bar{\theta}_{N+1}(\epsilon), \tilde{\theta}_0(\epsilon), \ldots, \tilde{\theta}_N(\epsilon)).$$

Consideremos o seguinte problema de otimização (P_{aux}):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \Psi(\epsilon) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(\bar{\theta}_k(\epsilon), \tilde{\theta}_k(\epsilon)) + \psi_{N+1}(\bar{\theta}_{N+1}(\epsilon)) \\ \text{sujeito a} & 0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*. \end{array} \tag{P_{aux}}$$

Temos que $\theta(\epsilon)$ é um processo factível de (P_2) para todo $0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*$ e (x^*, u^*) é um processo ótimo de (P_2). Então, $\epsilon = 0$ é um minimizador local de (P_{aux}). Pela expansão de Taylor, temos

$$\Psi(\epsilon) = \Psi(0) + \epsilon\Psi'(0) + \frac{1}{2}\epsilon^2\Psi''(0) + o(\epsilon), \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0.$$

Assim, para $0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*$ (diminuímos ϵ^*, se necessário), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi(\epsilon) - \Psi(0) = \epsilon\Big[& \sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{\theta}_k'(0) + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \tilde{\theta}_k'(0) \Big) \\ & + \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top \bar{\theta}_{N+1}'(0) \Big] + \frac{\epsilon^2}{2}\Big[\sum_{k=0}^{N} \Big(\bar{\theta}_k'(0)^\top \nabla^2_{x_k, x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\bar{\theta}_k'(0) \\ & + 2\bar{\theta}_k'(0)^\top \nabla^2_{x_k, u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\tilde{\theta}_k'(0) + \tilde{\theta}_k'(0)^\top \nabla^2_{u_k, u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)\tilde{\theta}_k'(0) \Big) \\ & + \bar{\theta}_{N+1}'(0)^\top \nabla^2_{x_{N+1}, x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)\bar{\theta}_{N+1}'(0) + \sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{\theta}_k''(0) \\ & + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \tilde{\theta}_k''(0) \Big) + \nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top \bar{\theta}_{N+1}''(0) \Big] + o(\epsilon) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Logo, para $0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*$, temos que

$$\begin{aligned}\Psi(\epsilon) - \Psi(0) = \epsilon\Big[&\sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top (s_k + \bar{r}_k'(0)) + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top (t_k + \tilde{r}_k'(0)\Big) \\ &+\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top (s_{N+1} + \bar{r}_{N+1}'(0))\Big] \\ &+\frac{\epsilon^2}{2}\Big[\sum_{k=0}^{N} \Big((s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)(s_k + \bar{r}_k'(0)) \\ &+2(s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)(t_k + \tilde{r}_k'(0)) \\ &+(t_k + \tilde{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)(t_k + \tilde{r}_k'(0))\Big) \\ &+(s_{N+1} + \bar{r}_{N+1}'(0))^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)(s_{N+1} + \bar{r}_{N+1}'(0)) \\ &+\sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{r}_k''(0) + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \tilde{r}_k''(0)\Big) \\ &+\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top \bar{r}_{N+1}''(0)\Big] + o(\epsilon) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Como $(s,t) \in C(x^*, u^*) = Nu(\nabla F_E(x^*, u^*))$, $\lim_{\epsilon \to 0^+} \dfrac{(\bar{r}(\epsilon), \tilde{r}(\epsilon))}{\epsilon} = 0$, e $(\bar{r}(0), \tilde{r}(0)) = 0$, segue da Proposição 3.1 que

$$\begin{aligned}&\frac{\epsilon^2}{2}\Big[\sum_{k=0}^{N} \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)s_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)t_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)t_k\Big) + \\ &s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{r}_k''(0) + \nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \tilde{r}_k''(0)\Big) \\ &+\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top \bar{r}_{N+1}''(0)\Big] + o(\epsilon) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Dividindo por ϵ^2, tomando o limite quando $\epsilon \to 0^+$, e multiplicando por $2\xi > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N} \xi\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)s_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)t_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)t_k\Big) \\ &+\xi\Big(s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big) + \sum_{k=0}^{N} \xi\Big(\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \bar{r}_k''(0) \\ &+\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*, u_k^*)^\top \tilde{r}_k''(0)\Big) + \xi\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)^\top \bar{r}_{N+1}''(0) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por outro lado, para $0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*$, $\quad \theta(\epsilon) = (\bar{\theta}(\epsilon), \tilde{\theta}(\epsilon)) \in Q$, por conseguinte,

$$\begin{aligned}R(\epsilon) \;=\; &\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(\bar{\theta}_{k+1}^i(\epsilon) - f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon), \tilde{\theta}_k(\epsilon)\Big) + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i\Big(b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon), \tilde{\theta}_k(\epsilon)\Big) + \\ &\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|} \mu_k^j\Big(g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon), \tilde{\theta}_k(\epsilon)\Big) + \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i\varphi^i(\bar{\theta}_0(\epsilon)) + \sum_{j=1}^{|I_\phi|} \eta^j\varphi^j(\bar{\theta}_0(\epsilon)) = 0, \quad 0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*.\end{aligned}$$

Logo, derivando duas vezes, obtemos

$$
\begin{aligned}
R''(\epsilon) = & \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^{i}\Big(\bar{\theta}_{k+1}^{i\,\prime\prime}(\epsilon) - \bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\bar{\theta}_k'(\epsilon) \\
& -\tilde{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon) - 2\bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon) \\
& + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i\Big(\bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\bar{\theta}_k'(\epsilon) + \tilde{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon) \\
& +2\bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,u_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon)\Big) + \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|} \mu_k^i\Big(\bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,x_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\bar{\theta}_k'(\epsilon) \\
& +\tilde{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{u_k,u_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon) + 2\bar{\theta}_k'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_k,u_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))\tilde{\theta}_k'(\epsilon)\Big) \\
& + \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \bar{\theta}_0'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(\epsilon))\bar{\theta}_0'(\epsilon) + \sum_{j=1}^{|I_\phi|} \eta^j \bar{\theta}_0'(\epsilon)^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(\epsilon))\bar{\theta}_0'(\epsilon) \\
& - \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^{i}\Big(\nabla_{x_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \bar{\theta}_k''(\epsilon) + \nabla_{u_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \tilde{\theta}_k''(\epsilon)\Big) \\
& + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i\Big(\nabla_{x_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \bar{\theta}_k''(\epsilon) + \nabla_{u_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \tilde{\theta}_k''(\epsilon)\Big) \\
& + \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|} \mu_k^j\Big(\nabla_{x_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \bar{\theta}_k''(\epsilon) + \nabla_{u_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top \tilde{\theta}_k''(\epsilon)\Big) \\
& + \sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \nabla_{x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(\epsilon))^\top \bar{\theta}_0''(\epsilon) + \sum_{j=1}^{|I_\phi|} \eta^j \nabla_{x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(\epsilon))^\top \bar{\theta}_0''(\epsilon) = 0, \quad 0 \leqslant \epsilon < \epsilon^*. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Como $\theta(\epsilon) = (x^*, u^*) + \epsilon(s,t) + (\bar{r}(\epsilon), \tilde{r}(\epsilon))$, temos

$$
\begin{aligned}
R''(\epsilon) = & \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^{i}\Big(\bar{r}_k^{i\,\prime\prime}(\epsilon) - (s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(s_k + \bar{r}_k'(0)) \\
& -(t_k + \tilde{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k + \tilde{r}_k'(0)) \\
& -(s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k + \tilde{r}_k'(0))\Big) \\
& + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i\Big((s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(s_k + \bar{r}_k'(0)) \\
& +(t_k + \tilde{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k + \tilde{r}_k'(0)) \\
& +2(s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,u_k} b_k^i(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k + \tilde{r}_k'(0))\Big) \\
& + \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|} \mu_k^j\Big((s_k + \bar{r}_k'(0))^\top \nabla^2_{x_k,x_k} g_k^j(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(s_k + \bar{r}_k'(0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(t_k+\tilde{r}'_k(0))^\top\nabla^2_{u_k,u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k+\tilde{r}'_k(0))\\
&+2(s_k+\bar{r}'_k(0))^\top\nabla^2_{x_k,u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))(t_k+\tilde{r}'_k(0))\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i(s_0+\bar{r}'_0(0))^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(\epsilon))(s_0+\bar{r}'_0(0))\\
&+\sum_{j=1}^{|I_\phi|}\eta^j(s_0+\bar{r}'_0(0))^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(\epsilon))(s_0+\bar{r}'_0(0))\\
&-\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n}p^i_{k+1}\Big(\nabla_{x_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\bar{r}''_k(\epsilon)+\nabla_{u_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\tilde{r}''_k(\epsilon)\Big)\\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda^i_k\Big(\nabla_{x_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\bar{r}''_k(\epsilon)+\nabla_{u_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\tilde{r}''_k(\epsilon)\Big)\\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|}\mu^j_k\Big(\nabla_{x_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\bar{r}''_k(\epsilon)+\nabla_{u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(\epsilon),\tilde{\theta}_k(\epsilon))^\top\tilde{r}''_k(\epsilon)\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla_{x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(\epsilon))^\top\bar{r}''_0(\epsilon)+\sum_{j=1}^{|I_\phi|}\eta^j\nabla_{x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(\epsilon))^\top\bar{\theta}''_0(\epsilon)=0,\quad 0\leqslant\epsilon<\epsilon^*. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Para $\epsilon=0$ e como $(\bar{r}'(0),\tilde{r}'(0))=0$, segue que

$$
\begin{aligned}
R''(0) \;=\; &\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n}p^i_{k+1}\Big(\bar{r}^{i\,\prime\prime}_{k+1}(0)-s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))s_k-t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k\\
&-s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k+\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda^i_k\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))s_k\\
&+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k+2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k\Big)\\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|}\mu^j_k\Big(s_k^\top\nabla^2_{x_k,x_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))s_k+t_k^\top\nabla^2_{u_k,u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k\\
&+2s_k^\top\nabla^2_{x_k,u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))t_k\Big)+\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(0))s_0\\
&+\sum_{j=1}^{|I_\phi|}\eta^j s_0^\top\nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(0))s_0-\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n}p^i_{k+1}\Big(\nabla_{x_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\bar{r}''_k(0)\\
&+\nabla_{u_k}f^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\tilde{r}''_k(0)\Big)+\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}}\lambda^i_k\Big(\nabla_{x_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\bar{r}''_k(0)\\
&+\nabla_{u_k}b^i_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\tilde{r}''_k(0)\Big)+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{|I_{g_k}|}\mu^j_k\Big(\nabla_{x_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\bar{r}''_k(0)+\\
&\nabla_{u_k}g^j_k(\bar{\theta}_k(0),\tilde{\theta}_k(0))^\top\tilde{r}''_k(0)\Big)+\sum_{i=1}^{r_\varphi}\gamma^i\nabla_{x_0}\varphi^i(\bar{\theta}_0(0))^\top\bar{r}''_0(0)\\
&+\sum_{j=1}^{|I_\phi|}\eta^j\nabla_{x_0}\phi^j(\bar{\theta}_0(0))^\top\bar{r}''_0(0)=0,\quad 0\leqslant\epsilon<\epsilon^*. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Somando as equações (3.29) e (3.32), arranjando as segundas derivadas e considerando $\mu_k^j = 0,\ \ j \notin I_{g_k}$, $\eta^j = 0,\ \ j \notin \bar{I}_\phi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} \xi\Big[s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k\Big] \\
&+\xi\Big(s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big) + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i\Big(-s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k \\
&-t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k - 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) \\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k^i(x_k^*,u_k^*)s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} b_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) \\
&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{r_{g_k}} \mu_k^j\Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} g_k^j(x_k^*,u_k^*)s_k + t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} g_k^i(x_k^*,u_k^*)t_k + 2s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} g_k^j(x_k^*,u_k^*)t_k\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*)s_0 + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*)^\top s_0 - \sum_{k=1}^{N}\Big[\nabla_{x_k} f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} \\
&-\xi\nabla_{x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*,u_k^*)^\top \lambda_k - \nabla_{x_k} g_k(x_k^*,u_k^*)^\top \mu_k - p_k\Big]^\top \bar{r}_k''(0) \\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[\nabla_{u_k} f_k(x_k^*,u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi\nabla_{u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*) - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*,u_k^*)^\top \lambda_k \\
&-\nabla_{u_k} g_k(x_k^*,u_k^*)^\top \mu_k\Big]^\top \tilde{r}_k''(0) \\
&+\Big[p_{N+1} + \xi\nabla_{x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)\Big]^\top \bar{r}_{N+1}''(0) - \Big[\nabla_{x_0} f_0(x_0^*,u_0^*)^\top p_1 - \xi\nabla_{x_0}\psi_0(x_0^*,u_0^*) \\
&-\nabla_{x_0} b_0(x_0^*,u_0^*)^\top \lambda_0 - \nabla_{x_0} g_0(x_0^*,u_0^*)^\top \mu_0 - \nabla_{x_0}\varphi_0(x_0^*)^\top \gamma - \nabla_{x_0}\phi_0(x_0^*)^\top \eta\Big]^\top \bar{r}_0''(0) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Pelas condições $(i) - (iii)$ do teorema, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r_\varphi} \eta^i\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\varphi^i(x_0^*)s_0\Big] + \sum_{j=1}^{r_\phi} \eta^j\Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0}\phi^j(x_0^*)^\top s_0\Big] + \\
&\xi\Big[s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}}\psi_{N+1}(x_{N+1}^*)s_{N+1}\Big] \\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[p_{k+1}^\top(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k(x_k^*,u_k^*)s_k) - \xi(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k) \\
&-\lambda_k^\top(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k(x_k^*,u_k^*)s_k) - \mu_k^\top(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k(x_k^*,u_k^*)s_k)\Big] \\
&-\sum_{k=0}^{N}\Big[p_{k+1}^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k(x_k^*,u_k^*)t_k) - \xi(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)t_k) \\
&-\lambda_k^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b_k(x_k^*,u_k^*)t_k) - \mu_k^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} g_k(x_k^*,u_k^*)t_k)\Big] \\
&-\sum_{k=0}^{N} 2\Big[p_{k+1}^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_k} f_k(x_k^*,u_k^*)s_k) - \xi(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_k}\psi_k(x_k^*,u_k^*)s_k) \\
&-\lambda_k^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_k} b_k(x_k^*,u_k^*)s_k) - \mu_k^\top(t_k^\top \nabla^2_{u_k,x_k} g_k(x_k^*,u_k^*)s_k)\Big] \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Assim, fica demonstrado o teorema.

■

No Teorema 3.2, obtivemos condições necessárias de otimalidade de segunda ordem não degeneradas, sob a hipótese de que os gradientes em relação ao controle das restrições mistas tanto de igualdade como desigualdade ativas, sejam linearmente independentes. Agora, vamos obter estas condições sob a hipótese de posto constante. Trabalharemos com o problema (P_3).

Relembrando o problema (P_3), a hipótese S_3, a Definição 2.4, e a função Hamiltoniana associada a este problema que foram definidas na Seção 2.2:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & b_k(x_k, u_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & \varphi(x_0) = 0. \end{array} \tag{P_3}$$

S_3 : Existe um escalar $\rho > 0$ e uma vizinhança B_ρ de x_0^* tais que a matriz

$$\begin{bmatrix} \nabla\varphi^1(x_0) & \cdots & \nabla\varphi^{r_\varphi}(x_0) \end{bmatrix}$$

tem posto constante para todo $x_0 \in B_\rho$.

Definição 3.3. *Seja posto*$(\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)) = \alpha_k, k = 0, \ldots, N$. *A condição de posto constante no processo* (x^*, u^*) *é satisfeita se existem* $\delta_k > 0$, $k = 0, \ldots, N$, *e uma submatriz contendo* α_k *linhas de* $\nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)$, *isto é,*

$$\Gamma_k = [\nabla_{u_k} b_k^{i_1}(x_k^*, u_k^*) \cdots \nabla_{u_k} b_k^{i_{\alpha_k}}(x_k^*, u_k^*)]^\top, \;\; \{i_1, \ldots, i_{\alpha_k}\} \in \{1, \ldots, r_{b_k}\},$$

tais que

(a) $det(\Gamma_k \Gamma_k^\top) \neq 0$.

(b) $\{\nabla b_k^j(x_k, u_k)\} \cup \{\nabla b_k^{i_\tau}(x_k, u_k)\}_{\tau=1}^{\alpha_k}$, *tem posto constante igual a* α_k *para cada* $(x_k, u_k) \in B_{\delta_k}$, $j \in \{1, \ldots, r_{b_k}\} \backslash \{i_1, \ldots, i_{\alpha_k}\}$.

A função Hamiltoniana $H_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r_{b_k}} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$H_k(x_k, u_k, p_{k+1}, \xi, \lambda_k) = p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k) - \xi\psi_k(x_k, u_k) - \lambda_k^\top b_k(x_k, u_k), \;\; k = 0, \ldots, N.$$

Neste caso o conjunto de direções críticas é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{C}(x^*, u^*) \;\; = \;\; \Big\{ & (s, t) \in \mathbb{R}^{n(N+2)} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} : \\ & s_{k+1}^i = \nabla_{x_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)^\top s_k + \nabla_{u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*)^\top t_k, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & 0 = \nabla_{x_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*) s_k + \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*) t_k, \;\; i = 1, \ldots, r_{b_k}, \;\; k = 0, \ldots, N, \\ & 0 = \nabla_{x_0} \varphi^i(x_0)^\top s_0, \;\; i = 1, \ldots, r_\varphi \Big\}. \end{aligned}$$

O seguinte resultado mostra que o Teorema 3.2, para o caso particular de restrições mistas por período de igualdade, permanece válido sob a hipótese de posto constante.

Corolário 3.2. *Seja (x^*, u^*) um processo ótimo local de (P_3). Suponhamos que a hipótese S_3 e a Definição 3.3 são satisfeitas. Então, existem $\xi \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{r_{b_k}}$, $k = 0, \ldots, N$, com $\xi > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) ***Equação adjunta:***

$$p_k \;\; = \;\; \nabla_{x_k} H_k(x_k^*, u_k^*, p_{k+1}, \xi, \lambda_k), \;\; k = 1, \ldots, N,$$

ou seja, para cada $k = 1, \ldots, N$, temos que

$$p_k \;\; = \;\; \nabla_{x_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{x_k} \psi_k(x_k, u_k) - \nabla_{x_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k.$$

(ii) ***Condição de transversalidade:***

$$\nabla_{x_0} \varphi(x_0^*)^\top \gamma \;\; = \;\; \nabla_{x_0} H_0(x^*, u^*, p_1, \xi, \lambda_0),$$

isto é,

$$\nabla_{x_0} \varphi(x_0^*)^\top \gamma \;\; = \;\; \nabla_{x_0} f_0(x_0^*, u_0^*)^\top p_1 - \xi \nabla_{x_0} \psi_0(x_0^*, u_0^*)^\top - \nabla_{x_0} b_0(x_0^*, u_0^*)^\top \lambda_0,$$

e

$$p_{N+1} = -\xi \nabla \psi_{N+1}(x_{N+1}^*).$$

(iii) ***Condição de estacionariedade:***

$$\nabla_{u_k} H_k(x_k^*, u_k^*, p_{k+1}, \xi, \lambda_k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, N,$$

isto significa que, para cada $k = 0, \ldots, N$, temos

$$\nabla_{u_k} f_k(x_k^*, u_k^*)^\top p_{k+1} - \xi \nabla_{u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) - \nabla_{u_k} b_k(x_k^*, u_k^*)^\top \lambda_k = 0.$$

(iv) ***Condição de segunda ordem de não negatividade:***

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r_\varphi} \gamma^i \left[s_0^\top \nabla^2_{x_0, x_0} \varphi^i(x_0^*) s_0 \right] + \xi \left[s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1}, x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) s_{N+1} \right] \\
&- \sum_{k=0}^{N} s_k^\top \nabla_{x_k, x_k} H_k(x_k^*, u_k^*, p_{k+1}, \xi, \lambda_k) s_k - \sum_{k=0}^{N} t_k^\top \nabla_{u_k, u_k} H_k(x_k^*, u_k^*, p_{k+1}, \xi, \lambda_k) t_k \\
&- 2 \sum_{k=0}^{N} s_k^\top \nabla_{x_k, u_k} H_k(x_k^*, u_k^*, p_{k+1}, \xi, \lambda_k) t_k \geqslant 0,
\end{aligned}$$

para todo $(s,t) = (s_0, \ldots, s_{N+1}, t_0, \ldots, t_N) \in C(x^*, u^*)$, *ou seja,*

$$\sum_{i=1}^{r_\varphi} \eta^i \Big[s_0^\top \nabla^2_{x_0,x_0} \varphi^i(x_0^*) s_0 \Big] + \xi \Big[s_{N+1}^\top \nabla^2_{x_{N+1},x_{N+1}} \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) s_{N+1} \Big]$$
$$- \sum_{k=0}^{N} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*) s_k \Big) - \xi \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) s_k \Big)$$
$$- \sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,x_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*) s_k \Big) \Big] - \sum_{k=0}^{N} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i (t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*) t_k)$$
$$- \xi \Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) t_k \Big) - \sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i \Big(t_k^\top \nabla^2_{u_k,u_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*) t_k \Big) \Big]$$
$$- 2 \sum_{k=0}^{N} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_{k+1}^i \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} f_k^i(x_k^*, u_k^*) t_k \Big) - \xi \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} \psi_k(x_k^*, u_k^*) t_k \Big)$$
$$- \sum_{i=1}^{r_{b_k}} \lambda_k^i \Big(s_k^\top \nabla^2_{x_k,u_k} b_k^i(x_k^*, u_k^*) t_k \Big) \Big] \geqslant 0$$

para todo $(s,t) = (s_0, \ldots, s_{N+1}, t_0, \ldots, t_N) \in C(x^*, u^*)$.

Demonstração: Podemos mostrar este resultado usando o Corolário 2.4 e fazendo o mesmo raciocínio da prova do Teorema 3.2. Porém, vamos demonstrar de uma forma alternativa.

Sabendo que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_3), então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1})$$

para todo processo factível (x, u) que satisfaz

$$\|x_k - x_k^*\| < \epsilon, \quad k = 0, \ldots, N+1, \quad \text{e} \quad \|u_k - u_k^*\| < \epsilon, \quad k = 0, \ldots, N.$$

Consideremos $\bar{\delta} = \min\{\epsilon, \delta_k, \ \ k = 1, \ldots, N\}$. Pela Definição 3.3, temos que para cada $k = 0, \ldots, N$, a matriz

$$\Big[\nabla_{u_k} b_k^1(x_k, u_k) \quad \cdots \quad \nabla_{u_k} b_k^{r_{b_k}}(x_k, u_k) \Big] \tag{3.33}$$

tem posto constante α_k para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}}$. Sem perda de generalidade, possivelmente rearranjando índices, suponhamos que o conjunto

$$\Big\{ \nabla_{u_k} b_k^1(x_k, u_k), \cdots, \nabla_{u_k} b^{\alpha_k}(x_k, u_k) \Big\}$$

é linearmente independente para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}}$, onde $\alpha_k \leqslant r_{b_k}$. Logo,

$$\Big\{ \nabla b_k^1(x_k, u_k), \cdots, \nabla b_k^{\alpha_k}(x_k, u_k) \Big\} \tag{3.34}$$

é um conjunto linearmente independente para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}}$. Analogamente, definamos $\hat{\delta} = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \rho\}$. Pela hipótese S_3 segue que

$$\Big[\nabla \varphi^1(x_0) \quad \cdots \quad \nabla \varphi^{r_\varphi}(x_0) \Big]$$

tem posto constante r para todo $x_0 \in B_\rho$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o conjunto

$$\Big\{\nabla\varphi^1(x_0), \cdots, \nabla\varphi^r(x_0)\Big\} \tag{3.35}$$

é linearmente independente para todo $x_0 \in B_{\hat{\delta}}$.

Passo 1: (Colocando algumas restrições em função de um conjunto de funções linearmente independentes) Pela Definição 3.3, temos, para cada $k, \ldots, N$,

$$\nabla b_k^{\tau_k}(x_k, u_k) = \sum_{i=1}^{\alpha_k} c_k^i \nabla b_k^i(x_k, u_k), \ \ \tau_k = \alpha_k + 1, \ldots, r_{b_k}.$$

Temos que b_k, $k = 0, \ldots, N$, são continuamente diferenciáveis para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}}$. Então, aplicando o Lema 1.1 para cada τ_k temos que existem escalares $\bar{\delta}_k^1, \bar{\delta}_k^2$, vizinhanças de $B_{\bar{\delta}_k^1}, B_{\bar{\delta}_k^2}$ de $\Big(b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big)$ e (x_k^*, u_k^*), respectivamente, e funções continuamente diferenciáveis $\Phi_k^i : B_{\bar{\delta}_k^1} \to \mathbb{R}$, tais que $\Big(b_k^1(x_k, u_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k, u_k)\Big) \in B_{\bar{\delta}_k^1}$ para todo $(x_k, u_k) \in B_{\bar{\delta}_k^2}$, tais que

$$b_k^{\alpha_k+i}(x_k, u_k) = \Phi_k^i(b_k^1(x_k, u_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k, u_k)), \quad i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k. \tag{3.36}$$

Por conseguinte, para cada $i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k$, obtemos

$$\Phi_k^i\Big(b_k^1(x_k^*, u_k^*), \ldots, b_k^{\alpha_k}(x_k^*, u_k^*)\Big) = 0,$$

isto é,

$$\Phi_k^i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k. \tag{3.37}$$

Da mesma forma este passo é repetido para $k = 0, \ldots, N$.
Analogamente, por (3.35), segue que

$$\nabla\varphi^\tau(x_0) = \sum_{i=1}^{r} \bar{c}^i \nabla\varphi^i(x_0), \ \ \tau = r + 1, \ldots, r_\varphi.$$

Sabemos que φ^i, $\quad i = 1, \ldots, r_\varphi$, são continuamente diferenciáveis para todo $x_0 \in B_{\hat{\delta}}$. Logo, pelo Lema 1.1, exitem $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, vizinhanças $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ de $\Big(\varphi^1(x_0^*), \ldots, \varphi^r(x_0^*)\Big)$ e x_0^*, respectivamente, e funções continuamente diferenciáveis $\Psi^i : B_{\sigma_1} \to \mathbb{R}$ tais que $(\varphi^1(x_0^*), \ldots, \varphi^r(x_0^*)) \in B_{\sigma_1}$,

$$\varphi^{r+i}(x_0) = \Psi^i\Big(\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^r(x_0)\Big), \ i = 1, \ldots, r_\varphi - r, \tag{3.38}$$

para todo $x_0 \in B_{\sigma_2}$. Assim, para cada $i = 1, \ldots, r_\varphi - r$, temos que $\Psi^i(\varphi^1(x_0^*), \ldots, \varphi^r(x_0^*)) = 0$, de modo que,

$$\Psi^i(0, \cdots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, r_\varphi - r. \tag{3.39}$$

Passo 2: (Problema auxiliar)

Seja dado o seguinte problema de controle ótimo discreto:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k, u_k) + \psi_{N+1}(x_{N+1}) \\ \text{sujeito a} \quad & x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \\ & b_k^i(x_k, u_k) = 0, \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = 1, \ldots, \alpha_k, \\ & \varphi^i(x_0) = 0, \ \ i = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{$\bar{P}_3$}$$

Mostraremos que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de $(\bar{P}_3)$. Vemos claramente que (x^*, u^*) é um processo factível de $(\bar{P}_3)$. Suponhamos que existem um escalar ϵ_1 com $\epsilon_1 < \tilde{\delta} = \min\{\bar{\delta}, \hat{\delta}, \sigma_2, \bar{\delta}_k^2, \ \ k = 0, \ldots, N\}$ e um processo factível $(\bar{x}, \bar{u})$ com

$$\|\bar{x}_k - x_k^*\| \ < \ \epsilon_1, \ \ k = 0, \ldots, N+1, \tag{3.40}$$

$$\|\bar{u}_k - u_k^*\| \ < \ \epsilon_1, \ \ k = 1, \ldots, N, \tag{3.41}$$

tais que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) + \psi_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) < \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x_k^*, u_k^*) + \psi_{N+1}(x_{N+1}^*). \tag{3.42}$$

Dado que $(\bar{x}, \bar{u})$ é factível para $(\bar{P}_3)$, se cumpre

$$\bar{x}_{k+1} \ = \ f_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k), \ \ k = 0, \ldots, N, \tag{3.43}$$

$$b_k^i(\bar{x}_k, \bar{u}_k) \ = \ 0, \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = 1, \ldots, \alpha_k, \tag{3.44}$$

$$\varphi^i(\bar{x}_0) \ = \ 0, \ \ i = 1, \ldots, r. \tag{3.45}$$

Como $(\bar{x}_k - x_k^*, \bar{u}_k - u_k^*) \in B_{\tilde{\delta}}$, por (3.36)-(3.37) e (3.44), temos que

$$\begin{aligned} b_k^{\alpha_k + i}(\bar{x}_k, \bar{u}_k) \ &= \ \Phi_k^i\Big(b_k^1(\bar{x}_k, \bar{u}_k), \ldots, b_k^{\alpha_k}(\bar{x}_k, \bar{u}_k)\Big), \\ &= \ 0, \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = 1, \ldots, r_{b_k} - \alpha_k. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Além disso, por (3.38)-(3.39) e (3.45),

$$\begin{aligned} \varphi^{r+i}(x_0) \ &= \ \Psi^i\Big(\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^r(x_0)\Big), \\ &= 0, \ i = 1, \ldots, r_\varphi - r. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Por conseguinte, das equações (3.43)-(3.47) segue que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo factível de (P_3). Assim, das equações (3.40)-(3.42), temos uma contradição ao fato de que (x^*, u^*) é um processo ótimo local de (P_3). Portanto (x^*, u^*) é um processo ótimo local do problema $(\bar{P}_3)$. Como o problema auxiliar $(\bar{P}_3)$ satisfaz as hipóteses S_1, S_2, e (x^*, u^*) é um processo ótimo local deste problema, aplicando o Teorema 3.2 ao problema $(\bar{P}_3)$, as condições (i)-(iv) do teorema são satisfeitas considerando

$$\begin{aligned} & \lambda_k^i = 0, \ \ k = 0, \ldots, N, \ \ i = \alpha_k + 1, \ldots, r_{b_k}, \\ & \gamma^i = 0, \ \ i = r+1, \ldots, r_\varphi. \end{aligned}$$

Assim, fica provado o teorema.

■

4 Conclusões

Nesta tese, apresentamos as condições necessárias de primeira e segunda ordens não degeneradas para problemas de controle ótimo discreto. Iniciamos nossa tese com o estudo do formalismo de Dubovitskii-Milyutin, no qual assumimos uma condição de regularidade do tipo Mangasarian–Fromovitz estendido que foi dada em [24] e por meio do formalismo, obtemos condições necessárias de primeira ordem não degeneradas para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais. Após isso, aproveitando a estrutura da dinâmica obtemos condições necessárias de otimalidade não degeneradas para problema de controle ótimo discreto com restrições mistas por período, usando condições de regularidade somente nas restrições mistas de cada período junto com as restrições de contorno. Também por meio do formalismo obtemos condições necessárias de otimalidade para problema de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais e abstratas no controle, e por meio de uma abordagem alternativa logramos obter condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período.

Apresentamos também, uma segunda condição de regularidade do tipo Ben-Tal−Zowe, a qual foi chamada de Condição de Ben-Tal−Zowe relaxada e finalmente adaptando a teoria desenvolvida em [25] obtemos condições de primeira e segunda ordem para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas gerais.

Por último, obtemos condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para problemas de controle ótimo com restrições mistas por período, sob a condição de regularidade de independência linear no controle. Além disso, foram obtidas estas condições para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período e de contorno, ambas de igualdade, sob a condição de posto constante no controle para as restrições mistas e no estado para as de contorno.

Concluindo, podemos ressaltar que com este trabalho, obtivemos contribuições importantes para o estudo da teoria de controle discreto tanto para problemas com restrições mistas gerais como para restrições mistas por período.

5 Trabalhos futuros

Com base nos resultados obtidos nesta tese, acreditamos que podemos desenvolver os seguintes trabalhos:

- **Condição de qualificação do tipo dependência linear positiva constante relaxada (RCPLD), posto constante do subespaço componente (CRSC), entre outras**: Consideramos que, sob adaptações da condição de RCPLD ou outras de programação não linear (ver [35], [42], [43]), podemos obter condições necessárias de otimalidade não degeneradas para problemas particulares do tipo (P_A) por meio da abordagem alternativa dada no Capítulo 2.

- **Condições de qualificação sequenciais e de segunda ordem**: Cremos que podem ser adaptadas as condições de qualificação sequenciais (ver [44], [45]) para problemas de controle ótimo discreto com restrições mistas por período, obtendo assim condições que satisfazem aproximadamente o princípio do máximo discreto, além das condições de segunda ordem.

- **Problemas de controle ótimo discreto multiobjetivo**: Em [22], [46], foram estudados problemas de controle ótimo discreto multiobjetivos, onde foi usada uma técnica de escalarização. Aparentemente, por meio da técnica citada, nossos resultados podem ser estendidos para problemas multiobjetivos.

- **Problemas de controle ótimo discreto com atrasos:** Problemas de controle ótimo discreto com atrasos foram estudados em diversos artigos (ver [47], [48], [49]). Analisamos que os resultados obtidos nesta tese podem ser estendidos para este tipo de problemas.

Referências

1 TU, P. N. V. *Introductory Optimization Dynamics*. 2. ed. Berlin: Springer, 1991.

2 BOLTYANSKII, V. G. *Optimal control of discrete systems*. New York, NY: Wiley, 1978.

3 KLEINDORFER, P. R.; KRIEBEL, C.; THOMPSON, G.; KLEINDORFER, G. Discrete optimal control of production plans. *Management Science*, v. 22, n. 261-273, 1975.

4 LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. *Optimal control*. 3. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, 2012.

5 GAYA, R. M. *La teoría del control óptimo en tiempo discreto. modelos financieros Aplicados a las pensiones de jubilación*. Tese (Doutorado) — Universitat de Valencia, 1996.

6 PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISHCHENKO, E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Interscience, 1962.

7 ROZONOER, L. I. The maximum principle of L.S. Pontryagin in the theory of optimal systems. *Automation and Remote Control*, v. 20, p. 1517–1532, 1959.

8 BUTKOVSKI, A. G. Necessary and sufficient conditions of optimality of discrete control systems. *Automation and Remote Control*, v. 24, n. 8, p. 963–970, 1963.

9 CANON, M. D.; CULLUM, C. D.; POLAK, E. *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*. New York: McGraw-Hill, 1970.

10 GABASOV, R.; KIRILLOVA, F. Extending l.s pontryagins maximum discrete systems. *Automation and Remote Control*, v. 27, n. 11, p. 1878– 1882, 1966.

11 HALKIN, H. On the necessary condition for optimal control of non-linear systems. *J. Anal. Math.*, v. 12, p. 1–82, 1964.

12 JORDAN, B.; POLAK, E. Theory of a class of discrete optimal control systems. *J. Elec. Ctrl.*, v. 17, p. 697–711, 1964.

13 MAGNANTI, T. L. Non-linear programming and the maximum principle for discrete time optimal control problems. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, v. 9, n. V3, p. 75–91, 1975.

14 IOFFE, A. D.; TIHOMIROV, V. M. *Theory of Extremal Problems*. Amsterdam-New York: North-Holland Publishing Co., 1979.

15 NAHORSKI, Z.; RAVN, H.; V.VIDAL, R. V. *Optimization of discrete-time systems, the upper boundary approach, Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

16 WRIGHT, S. J. Interior point methods for optimal control of discrete time systems. *Journal of Optimization Theory and Applications volume*, v. 77, n. 1, p. 161–187, 1993.

17 HILSCHER, R.; ZEIDAN, V. Discrete optimal control: second order optimality condictions,. *J. Differ. Equations Appl*, v. 8, n. 10, p. 875–896, 2002.

18 MARINKOVIĆ, B. Optimality conditions for discrete optimal control problems with equality and inequality type constraints. *Positivity*, v. 12, p. 535–545, 2008.

19 MARINKOVIĆ, B. Optimality conditions in discrete optimal control problems. *Optim Methods Softw.*, v. 22, p. 959–969, 2007.

20 TOAN, N. T.; ANSARI, Q. H.; YAO, J.-C. Second-order necessary optimality conditions for a discrete optimal control problem. *J. Optim Theory Appl.*, v. 165, n. 3, p. 812–836, 2015.

21 TOAN, N. T.; THUY, L. Q. Second-order necessary optimality conditions for a discrete optimal control problem with mixed constraints. *J Glob Optim.*, v. 64, p. 533–562, 2016.

22 ISOTON, C. *Algumas contribuições em controle ótimo discreto.* Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

23 ROJAS-MEDAR, M. A.; ISOTON, C.; dos SANTOS, L. B.; VIVANCO-ORELLANA, V. Optimality conditions for discrete-time control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 185, p. 115–113, 2020.

24 MINCHENKO, L.; STAKHOVSKI, S. About generalizing the Mangasarian–Fromovitz regularity condition. *In: Dokl. BGUIR*, v. 8, p. 104–109, 2010.

25 BEN-TAL, A.; ZOWE, J. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. *Math. Programming Stud.*, v. 19, p. 39–76, 1982.

26 de PINHO, M. R. ; ILCHMANN, A. Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints. *Nonlinear Anal.*, n. 48, p. 1179–1196, 2002.

27 ANDREANI, R.; de OLIVEIRA, V. A. ; PEREIRA, J. T.; Silva, G.N. A weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints under a constant rank condition. *IMA J. Math. Control Inform.*, v. 37, p. 1021–1047, 2020.

28 do MONTE, M.R.C; de OLIVEIRA, V.A. Necessary conditions for continuous-time optimization under the Mangasarian–Fromovitz constraint qualification. *Optimization*, v. 69, n. 4, p. 777–798, 2020.

29 do MONTE, M.R.C; de OLIVEIRA, V.A. A constant rank constraint qualification in continuous-time nonlinear programming. *Set-Valued Var. Anal.*, v. 29, p. 61–81, 2021.

30 RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais.* São Paulo: Cengage Learning, 2013.

31 BERTSEKAS, D. *Nonlinear Programming.* 2. ed. Massachussets, USA: Athena Scientific, Belmont, 1999.

32 JANIN, R. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Math. Program. Stud.*, v. 21, p. 110–126, 1984.

33 MINCHENKO, L.; STAKHOVSKI, S. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization.*, v. 60, p. 429–440, 2011.

34 SCHUVERDT, M. L. *Métodos de Lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante.* Tese (Doutorado) — Unicamp, 2006.

35 ANDREANI, R.; HAESER, G.; SCHUVERDT, M. L.; SILVA, P. J. S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Math. Program., Ser. A*, v. 135, p. 255–273, 2012.

36 ZORICH, V. A. *Mathematical Analysis*. Moscow: Nauka, 1982.

37 IZMAILOV, A.; SODOLOV, M. *Otimização-volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. 2. ed. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2009.

38 GIRSANOV, I. V. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag, 1972.

39 CHOROBURA, A. P. Condições de otimalidade para problemas com um e com vários objetivos: abordagem através do formalismo de dubovitskii-milyutin. *Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Paraná, Curitiba*, 2014.

40 MARINKOVIĆ, B. Optimality conditions in discrete optimal control problems with state constraints. *Numerical Functional Analysis and Optimization.*, v. 28, n. 7-8, 2007.

41 MARINKOVIĆ, B. Optimality conditions in discrete optimal control problems. *Optim. Methods Softw.*, v. 22, n. 959-969, 2007.

42 ANDREANI, R.; HAESER, G.; SCHUVERDT, M. L.; SILVA, P. J. Two new weak constraint qualifications and applications. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 22, n. 3, p. 1109–1135, 2012.

43 HAESER, G.; RAMOS, A. New constraint qualifications with second-order properties in nonlinear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 184, n. 2, p. 494–506, 2020.

44 ANDREANI, R.; MARTINEZ, J. M.; RAMOS, A.; SILVA, P. J. Strict constraint qualifications and sequential optimality conditions for constrained optimization. *Mathematics of Operations Research*, INFORMS, v. 43, n. 3, p. 693–717, 2018.

45 ANDREANI, R.; MARTÍNEZ, J. M.; RAMOS, A.; SILVA, P. J. A cone-continuity constraint qualification and algorithmic consequences. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 26, n. 1, p. 96–110, 2016.

46 TOAN, N. T.; THUY, L. Q.; TUYEN, N. V.; XIAO, Y.-B. Second-order KKT optimality conditions for multiobjective discrete optimal control problems. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 79, n. 1, p. 203–231, 2021.

47 MARIANI, L.; NICOLETTI, B. Optimal discrete systems with pure delays. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 18, n. 3, p. 311–313, 1973.

48 DOLEŽAL, J. Necessary conditions for discrete dynamical systems with delays and general constraints. *Kybernetika*, Institute of Information Theory and Automation AS CR, v. 17, n. 5, p. 425–434, 1981.

49 MARDANOV, M. J.; MALIK, S. T. Necessary first-and second-order optimality conditions in discrete systems with a delay in control. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Springer, v. 25, n. 1, p. 29–43, 2019.