



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

PAULO IGOR LUPATINI

Funções Analíticas na Esfera

Campinas

2021

Paulo Igor Lupatini

Funções Analíticas na Esfera

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Paulo Igor Lupatini e orientada pelo Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

L973f Lupatini, Paulo Igor, 1990-
Funções analíticas na esfera / Paulo Igor Lupatini. – Campinas, SP : [s.n.],
2021.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções analíticas. 2. Esfera complexa. 3. Harmônicos esféricos. I.
Tozoni, Sergio Antonio, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analytic functions on the sphere

Palavras-chave em inglês:

Analytic functions

Complex Sphere

Spherical harmonics

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Sergio Antonio Tozoni [Orientador]

Mario Henrique de Castro

Sahibzada Waleed Noor

Data de defesa: 22-12-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-0338-6108>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8599705327663765>

**Dissertação de Mestrado defendida em 22 de dezembro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). MARIO HENRIQUE DE CASTRO

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais por estarem sempre presentes, mesmo com toda a distância. Agradeço meu orientador, Sergio Antonio Tozoni, por sua paciência, confiança e total disponibilidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é encontrar caracterizações simples de conjuntos de funções analíticas sobre a esfera real, esfera complexa e sobre o toro. Também estudamos conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre estes espaços. Um outro objetivo é demonstrar a Desigualdade de Young para as esferas real e complexa. Para realizar estes objetivos fazemos um estudo de resultados sobre harmônicos esféricos reais e complexos.

Palavras-chave: esfera real, esfera complexa, toro, funções suaves, funções analíticas, harmônicos esféricos, operadores multiplicadores.

Abstract

The main goal of this thesis is to find simple characterizations of sets of analytic functions on the real sphere, complex sphere and the torus. We also study sets of finitely and infinitely differentiable functions on these spaces. Another goal is to prove the Young Inequality for the real and complex spheres. To achieve these goals we carry out a study of results on real and complex spherical harmonics.

Keywords: real sphere, complex sphere, torus, smooth functions, analytic functions, spherical harmonics, multiplier operators.

Lista de símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais sem o zero, p.13.
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos inteiros não negativos, p.13.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais, p.13.
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos, p.13.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno em \mathbb{R}^d e \mathbb{C}^d , p.13.
$ \cdot $	Norma Euclidiana em \mathbb{R}^d e \mathbb{C}^d , p.13.
\mathbb{S}^d	Esfera unitária real contida em \mathbb{R}^{d+1} , p.13.
Ω_d	Esfera unitária complexa contida em \mathbb{C}^d , p.13.
$C^k(X)$	Espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis, p.13.
$L^p(X)$	Espaços de funções p -integráveis com domínio em X , p.14.
$\ \cdot\ _p$	Norma p em $L^p(X)$, p.14.
$\ \cdot\ _\infty$	Norma do supremo em $L^\infty(X)$, p.14.
$U_p(X), U_p$	Bola unitária de $L^p(X)$, p.14.
$O(d)$	Grupo Ortogonal, p.16.
$U(d)$	Grupo Unitário, p.16.
$SO(d)$	Grupo Especial Ortogonal, p.16.
m_d	A medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d , p.17.
σ_d, σ	A medida de Lebesgue normalizada em \mathbb{S}^d , p.17.
$K * f$	Convolução entre K e f , ver Definições 1.3.1, 1.3.9, 3.3.2 e 4.1.3 p.18, 24, 68, 74.
$\partial^\alpha, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$	Derivada parcial, p.25.
Δ	O operador Laplaciano, p.29.
$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$	Espaço dos polinômios k -homogêneos, p.30.
$\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$	Espaço dos polinômios harmônicos k -homogêneos, p.30.

$\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$	Espaço dos harmônicos esféricos reais de grau k , p.30.
$M(k, b)$	Dimensão do espaço $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$, p.33.
$N(k, d)$	Dimensão dos espaços $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, p.33.
$\Delta_{\mathbb{S}}$	Operador de Laplace-Beltrami, p.34
$[\cdot]$	Função maior inteiro, p.37.
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{d+1})$	Espaço das funções polinomiais em \mathbb{R}^{d+1} , p.38.
$\mathcal{P}(\mathbb{S}^d)$	Espaço das funções polinomiais na esfera \mathbb{S}^d , p.38.
$P_{k,d}$	O polinômio de Legendre de grau k e dimensão $d + 1$, p.46.
$Z^{(k)}$	Ver Notação 2.4.6, p.56.
Λ	Operador multiplicador, p.56.
Ψ	Homomorfismo canônico entre \mathbb{C}^d e \mathbb{R}^{2d} , p.62,
ν, ν_d	Medida em Ω_d , p.62.
$\Delta_{(2d)}$	Laplaciano Complexo, p.63.
$\mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$	Polinômios bihomogêneos, p.63.
$\mathcal{P}^{m,n}(\Omega_d)$	Polinômios bihomogêneos restritos a Ω_d , p.63.
$\mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$	Harmônicos sólidos complexos, p.63.
$\mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$	Harmônicos esféricos complexos, p.63.
\mathbb{D}	O disco unitário em \mathbb{C} , p.67,
μ_d	Medida de Borel normalizada em \mathbb{D} , p.67,
$\pi_{m,n}$	Projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$, p.69,
$P_k^{(\alpha,\beta)}$	O polinômio de Jacobi com parâmetro (α, β) , p.69,
$R_{m,n}^\alpha$	Ver Definição 3.4.4, p.70,
$\tilde{Z}^{(m,n)}$	Ver Teorema 3.4.6, p.70,
\mathbb{T}^d	O Toro d -dimensional, p.74.

Sumário

	Introdução	11
1	PRELIMINARES	13
1.1	Notações	13
1.2	Integração na Esfera Real	14
1.3	A Desigualdade de Young	18
1.4	Preliminares Analíticas	25
1.5	Funções Analíticas na Esfera \mathbb{S}^d	27
2	FUNÇÕES ANALÍTICAS NA ESFERA REAL	29
2.1	Harmônicos Esféricos	29
2.2	O Operador de Laplace-Beltrami	34
2.3	Núcleos de Reprodução e Teorema da Adição	40
2.4	Funções Suaves e Analíticas em \mathbb{S}^d	53
3	O CASO DA ESFERA COMPLEXA	62
3.1	Análise Harmônica na Esfera Complexa	62
3.2	Decomposição de $L^2(\Omega_d)$	64
3.3	A Desigualdade de Young	67
3.4	Funções Suaves e Analíticas em Ω_d	69
4	FUNÇÕES ANALÍTICAS NO TORO \mathbb{T}^d	74
4.1	Análise Harmônica no Toro \mathbb{T}^d	74
4.2	Conjuntos de Funções Suaves e Analíticas no Toro	76
	Índice	79
	REFERÊNCIAS	80

Introdução

O objetivo central deste trabalho é encontrar caracterizações simples de conjuntos de funções analíticas sobre a esfera real, esfera complexa e sobre o toro.

Teoremas que caracterizam funções analíticas sobre as esferas real e complexa e sobre o toro foram demonstrados por Seeley [20] e Hashizume-Minemura-Okamoto [8], como aplicação de um resultado, nada simples, de Lions-Magenes [11], que trata de um isomorfismo linear topológico, de um espaço vetorial topológico, munido da topologia limite indutivo de uma família de espaços de funções holomorfas. Esses teoremas, para a esfera real, foram apresentados por M. Morimoto em [12] e [13].

Nas Seções 2.4, 3.4 e 4.2, demonstramos teoremas que nos permitem caracterizar conjuntos de funções analíticas sobre a esfera real, esfera complexa e sobre o toro. O teorema sobre o toro, demonstrado em 4.2, se encontra demonstrado em [16]. Nas seções 2.4 e 3.4 também são estudados conjuntos de funções finitamente diferenciáveis e infinitamente diferenciáveis. Os teoremas demonstrados que caracterizam funções infinitamente diferenciáveis sobre a esfera real podem ser encontrados em Morimoto [12, 13] e aqueles que tratam de funções finitamente diferenciáveis se encontram demonstrados em Castro [4]. Os conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis e conjuntos de funções analíticas, apresentados em 2.4, 3.4 e 4.2, foram estudados respectivamente em [9], [2] e [10, 21].

Um outro objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar a Desigualdade de Young para o espaço euclidiano \mathbb{R}^d , para a esfera real \mathbb{S}^d , para a esfera complexa Ω_d e para o toro \mathbb{T}^d . Em [5] encontramos a demonstração para o caso de \mathbb{R}^d . A demonstração para o toro \mathbb{T}^d é obtida como no caso de \mathbb{R}^d . Não conhecemos demonstrações para os casos da esfera real \mathbb{S}^d e da esfera complexa Ω_d . Quando precisamos usar essa desigualdade nesses casos, costumamos dizer que se encontra em [5]. As demonstrações para a esfera real e para a esfera complexa se encontram respectivamente nas Seções 1.3 e 3.3. A Desigualdade de Young é uma desigualdade bastante útil quando trabalhamos com análise harmônica nas esferas real e complexa.

No Capítulo 1 apresentamos alguns dos resultados básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Principalmente, apresentamos os resultados básicos de integração, como construção de medidas e propriedades presentes na integração dos espaços de nosso interesse. Apresentamos também uma demonstração para o Teorema de Interpolação de Riesz, este que será utilizado para demonstração da Desigualdade de Young.

O segundo capítulo representa a parte central do trabalho. Apresentamos os resultados da teoria dos espaços de Harmônicos Esféricos. Estes espaços serão essenciais

à nossa tarefa. A grosso modo, o espaço das funções de quadrado integrável na esfera pode ser decomposto como soma direta de espaços de funções polinomiais homogêneas e harmônicas, que restritas à esfera são os harmônicos esféricos. As condições necessárias para suavidade e analiticidade serão obtidas em termos do decaimento destas funções. Demonstraremos também alguns teoremas importantes desta teoria, como o Teorema de Funk-Hecke e a Fórmula da Adição.

Completando nossos estudos para a esfera real, passamos no Capítulo 3 a realizar estudos para a esfera complexa, análogos aos realizados para a esfera real. A maior partes dos resultados sobre análise harmônica na esfera complexa não se encontram demonstrados. A Desigualdade de Young é demonstrada na Seção 3.3. Conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis e de funções analíticas são estudados na Seção 3.4 e os resultados desta seção seguem dos resultados análogos obtidos no caso da esfera real.

No Capítulo 4 estudamos conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis e analíticas definidas sobre o toro, tendo como base a tese de doutorado de J.G. Oliveira [16].

1 Preliminares

Como de costume em trabalhos deste tipo, este capítulo serve a dois propósitos. O primeiro é introduzir ao leitor a notação que será utilizada no restante do texto, e o segundo é apresentar alguns dos resultados básicos que serão utilizados adiante. Demonstraremos resultados que não forem suficientemente elementares, no sentido apenas de que não é esperado que sejam vistos em um curso de regular de mestrado, e apenas enunciaremos com a devida referência resultados que o forem, de forma a tornar o texto útil para leitores não familiarizados com os assuntos abordados.

1.1 Notações

Estabelecemos algumas notações que serão utilizadas durante o trabalho.

1. Denotamos por \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos, e por \mathbb{Z}_+ o conjunto dos inteiros não negativos.
2. \mathbb{R} e \mathbb{C} denotam os conjuntos dos números reais e complexos, respectivamente.
3. Um ponto arbitrário do espaço euclidiano \mathbb{R}^{d+1} será denotado por $x = (x_1, \dots, x_{d+1})$.
4. O produto interno usual em \mathbb{R}^{d+1} é $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_{d+1} y_{d+1}$, e $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é a norma Euclidiana.
5. Denotamos o produto interno em \mathbb{C}^d por $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^d z_j \bar{w}_j$, e a norma em \mathbb{C}^d por $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$;
6. $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$ é a esfera unitária d -dimensional real.
7. $\Omega_d = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| = 1\}$ é a esfera unitária d -dimensional complexa.
8. Se X é um espaço topológico, $C(X)$ denotará o espaço vetorial das funções contínuas definidas em X e com valores complexos. Se X for compacto consideramos $C(X)$ com a norma do supremo.
9. Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d , $C^k(U)$ será o espaço vetorial das funções k vezes continuamente diferenciáveis com valores complexos definidas em U . Definimos $C^\infty(U) = \bigcap_k C^k(U)$.

1.2 Integração na Esfera Real

Iniciamos esta seção fixando nossas notações relativas a integração.

Se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida, e $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é p -integrável se

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Denotamos por $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ o conjunto formado por todas as funções p -integráveis, tal que, duas funções que difiram em um conjunto de medida nula sejam consideradas como o mesmo elemento deste espaço. Com essa identificação a função $\|\cdot\|_p$ passa a ser uma norma para o espaço $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Estes espaços são *Espaços de Banach*. Isto é, espaços vetoriais normados completos.

Tratamos o caso $p = \infty$ similarmente, no entanto a norma $\|f\|_\infty$ de uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é o supremo essencial de f , definido por

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}((\alpha, \infty))) = 0\}, \quad (1.1)$$

neste caso obtemos o espaço de Banach $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Quando não houver ambiguidade, seguiremos a convenção de que L^p ou $L^p(X)$ denota o espaço $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Um caso particular, que será de muita importância para nós, ocorre quando $p = 2$. A função $(\cdot, \cdot) : L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(f, g) = \int_X f \bar{g} d\mu, \quad (1.2)$$

define um produto interno em $L^2(X, \mathcal{A}, d\mu)$. Além disso, $(f, f) = \|f\|_2^2$. Este espaço é um *Espaço de Hilbert*, isto é, um espaço de Banach em relação a norma advinda de um produto interno. A demonstração de tais fatos pode ser encontrada em [17], Capítulo 3.

Ainda relacionado aos espaços $L^p(X)$, faremos uso da bola unitária em $L^p(X)$. Para referência futura, definimos a seguir:

Definição 1.2.1. *A bola unitária fechada em $L^p(X)$ é o conjunto $U_p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_p \leq 1\}$. Quando não houver risco de ambiguidade denotaremos $U_p(X)$ por U_p .*

Uma outra observação importante em relação aos espaços L^p , é que quando trabalhamos com espaços de medida finita, vale a inclusão $L^r \subset L^s$, sempre que $s \leq r$. Este fato é consequência da seguinte proposição:

Proposição 1.2.2. *Se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$, sempre que $s \leq r$ vale a inclusão*

$$L^r(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^s(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Em particular, $\|f\|_s \leq \|f\|_r$.

Precisaremos do seguinte resultado sobre espaços de Hilbert:

Teorema 1.2.3 ([17], Teorema 4.18). *Seja $\{e_i : i \in I\}$, para algum conjunto de índices I , um subconjunto ortonormal do espaço de Hilbert H , com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|$. São equivalentes:*

(i) $\{e_i : i \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo.

(ii) O conjunto de todas combinações lineares de $\{e_i : i \in I\}$ é denso em H .

(iii) Vale a igualdade

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$$

para todo $x \in H$.

(iv) Vale a igualdade

$$\sum_{i \in I} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} = (x, y),$$

para quaisquer $x, y \in H$.

Corolário 1.2.4. *Sejam X um espaço de Hilbert e $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ um subconjunto ortonormal completo de X . Se $x \in X$, então*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^k |(x, e_i)|^2 \end{aligned}$$

pois os termos à direita na primeira equação acima são ortogonais entre si. Logo, ao tomarmos o limite, o teorema anterior implica o resultado. \square

Definição 1.2.5. *Um Grupo Topológico é um grupo G equipado com uma topologia que torna as operações de grupo $(g, h) \mapsto gh$ e $g \mapsto g^{-1}$ contínuas. Um Grupo Topológico é compacto, quando G é um conjunto compacto em relação a sua topologia.*

O teorema a seguir garante que sempre podemos introduzir uma medida de Borel, com massa total 1 (isto é, uma medida de probabilidade) e invariante pelas operações de grupo em um grupo topológico compacto. Tais medidas são chamadas de *medidas de Haar*.

Teorema 1.2.6 ([18], Teorema 5.14). *Em todo grupo topológico compacto G existe uma única medida de Borel Regular e de probabilidade σ , invariante à esquerda, no sentido de que*

$$\int_G f(g) d\sigma(g) = \int_G f(sg) d\sigma(g), \quad s \in G, f \in C(G).$$

A medida σ também é invariante à direita, isto é,

$$\int_G f(g) d\sigma(g) = \int_G f(gs) d\sigma(g), \quad s \in G, f \in C(G)$$

e satisfaz a relação

$$\int_G f(g) d\sigma(g) = \int_G f(g^{-1}) d\sigma(g), \quad f \in C(G).$$

Definição 1.2.7. *O Grupo Ortogonal $O(d, \mathbb{R}) = O(d)$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas d -dimensionais com coeficientes em \mathbb{R} tais que $AA^t = \mathbb{I}_d$, munido da operação usual de produto de matrizes, onde \mathbb{I}_d denota a matriz identidade d -dimensional.*

Definição 1.2.8. *O Grupo Unitário $U(d, \mathbb{C}) = U(d)$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas d -dimensionais com coeficientes em \mathbb{C} tais que $A\bar{A}^t = \mathbb{I}_d$, com o produto usual de matrizes.*

Definição 1.2.9. *O Grupo Especial Ortogonal $SO(d, \mathbb{R}) = SO(d)$ é o subgrupo de $O(d)$ que consiste das matrizes com determinante igual a 1.*

Observação 1.2.10. O grupo $O(d)$ é um grupo compacto, pois a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ definida por $\Psi(A) = A\bar{A}^t$ é contínua, e $O(d) = \Psi^{-1}(\mathbb{I}_n)$, logo é subconjunto fechado. Além disso, também é limitado, pois $O(d) \subset B = \{A \in \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R}) : \|A\| \leq 1\}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma de operador. Como normas em um espaço de dimensão finita são equivalentes, temos que $O(d)$ é também limitado e portanto compacto pelo Teorema de Heine-Borel. De forma semelhante demonstramos que $SO(d)$ é um subgrupo fechado de $O(d)$ e consequentemente também é compacto.

Definição 1.2.11. *Dado um grupo G e um conjunto X uma ação de G em X é uma aplicação $\alpha : (g, x) \mapsto gx$ tal que*

$$(i) \quad \alpha(1, x) = x, \forall x \in X,$$

$$(ii) \quad \alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(gh, x), \forall g, h \in G, \forall x \in X.$$

Definição 1.2.12. *Para um elemento $x \in X$, a órbita de x é o conjunto $o(x) = \{gx : g \in G\}$. Uma ação é chamada transitiva se possuir uma única órbita.*

Observação 1.2.13. O Grupo $SO(d + 1)$, quando munido da topologia induzida de $\mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$ é um grupo topológico compacto. Além disso, ao fixarmos o polo norte $e = e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$, obtemos o subgrupo cujos elementos são da forma

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

com $A \in SO(d)$, podemos fazer assim a identificação deste subgrupo com $SO(d)$. Isto é, podemos olhar para $SO(d)$ como subgrupo de $SO(d + 1)$. Pode ser demonstrado que $SO(d + 1)/SO(d)$ é homeomorfo a \mathbb{S}^d . De fato, considerando o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} SO(d + 1) & & \\ \downarrow q & \searrow g & \\ SO(d + 1)/SO(d) & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^d \end{array}$$

onde q é a aplicação quociente definida por $q(A) = A SO(d)$, e g é a aplicação definida por $g(A) = Ae$. Assim, f é a aplicação induzida por g , isto é, $g = f \circ q$. Pode-se facilmente verificar que f é bijetiva, usando o fato que a ação $(A, x) \mapsto Ax$ de $SO(d + 1)$ em \mathbb{S}^d é transitiva. Também obtemos a continuidade da f pela propriedade universal da aplicação quociente. Como f é uma aplicação fechada, sua inversa é contínua. Portanto f é um homeomorfismo.

Espaços que são obtidos desta forma, isto é, variedades em que algum grupo G age transitivamente, são denominados *Espaços Homogêneos*. Outro exemplos de espaço homogêneo é a esfera complexa $\Omega_d \cong U(d)/U(d - 1)$.

Notação 1.2.14. Denotaremos:

1. A medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d por m_d ;
2. O volume da esfera \mathbb{S}^d , obtido pela restrição da medida de Lebesgue à \mathbb{S}^d é denotado por $|\mathbb{S}^d|$;
3. A medida de Lebesgue normalizada em \mathbb{S}^d será denotada por σ_d ;
4. A medida de Haar em $SO(d)$ por μ_d .

Observação 1.2.15. Sempre que não houver risco de confusão, omitiremos o índice ao denotarmos uma medida.

Um resultado básico sobre a medida de Lebesgue em \mathbb{S}^d :

Proposição 1.2.16 ([15], Teorema 1.1.4). *A medida σ em \mathbb{S}^d é invariante por rotações. Isto é para quaisquer E Borel mensurável e $A \in \text{SO}(d+1)$, $\sigma(AE) = \sigma(E)$. Além disso, se $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(A^{-1}x) d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(x) d\sigma(x).$$

Podemos relacionar as medidas σ_d e μ_d definidas acima da seguinte maneira:

Proposição 1.2.17 ([15], Teorema 1.1.5). *Considere $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$ e a aplicação \tilde{f} definida em $\text{SO}(d+1)$ por $\tilde{f}(A) = f(Ae)$, onde $e = e_{d+1}$ é o polo norte de \mathbb{S}^d . Então, $\tilde{f} \in L^1(\text{SO}(d+1))$ e*

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x) d\sigma(x) = \int_{\text{SO}(d+1)} \tilde{f}(A) d\mu(A).$$

Também podemos relacionar a medida σ_{d+1} com a medida σ_d . Para isto, consideremos a base canônica $\{e_j\}$ de \mathbb{R}^{d+1} . Usando a ortogonalidade desta, podemos representar um ponto $\omega \in \mathbb{S}^d$ como

$$\omega = \sum_{j=0}^{d+1} \langle \omega, e_j \rangle e_j = \langle \omega, e_{d+1} \rangle e_{d+1} + \sum_{j=0}^n \langle \omega, e_j \rangle e_j$$

denotando assim, $t = \langle \omega, e_{d+1} \rangle \in [-1, 1]$ e $y = \omega - te_{d+1}$, obtemos $|y| = \sqrt{1-t^2}$ e y é um elemento do subespaço vetorial d -dimensional de \mathbb{R}^{d+1} gerado por $\{e_1, \dots, e_d\}$. Fazendo a identificação deste espaço com \mathbb{R}^d , o vetor $\omega' := y/|y|$ pode ser visto como um ponto de \mathbb{S}^{d-1} , e podemos reescrever a equação acima como

$$\omega = te_{d+1} + \sqrt{1-t^2}\omega'. \tag{1.3}$$

Podemos usar esta expressão para demonstrar a seguinte identidade:

$$|\mathbb{S}^d| d\sigma_d(\omega) = |\mathbb{S}^{d-1}| (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt d\sigma_{d-1}(\omega'), \tag{1.4}$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [14] páginas 5-7.

1.3 A Desigualdade de Young

O objetivo dessa seção é demonstrar a Desigualdade de Young. Esta desigualdade se encontra demonstrada em [22], mas somente para o caso do espaço \mathbb{R}^d . Vamos demonstrar nesta seção que ela permanece válida no caso da esfera real. Em capítulos seguintes vamos demonstrar essa desigualdade para a esfera complexa e para o toro.

Definição 1.3.1. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. A convolução de f e g é definida como a função*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dm_d(y).$$

*Segue como consequência do Teorema de Fubini que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, e portanto $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstraremos que a Desigualdade de Young no caso euclidiano (ver Teorema 1.3.8) decorre de um resultado de interpolação de operadores, o Teorema de Convexidade de M. Riesz. Nesta subseção seguimos a referência [22]. Antes de demonstrar o teorema de Convexidade de Riesz, enunciamos alguns lemas e definições que nos ajudam nesta tarefa.

Teorema 1.3.2 (Desigualdade Integral de Minkowski). *Sejam (X, \mathcal{A}_1, μ) e $(Y, \mathcal{A}_2, \lambda)$ dois espaços de medida σ -finitos, e f uma função real não negativa mensurável em $X \times Y$. Se $1 \leq p < \infty$, então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\lambda(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left[\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\lambda(y).$$

Demonstração. Primeiro, note que para $p = 1$, é o teorema de Fubini, então não há nada a fazer. Sejam p e q tais que $1 < p < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Considere o operador

$$\begin{aligned} T : L^p(X) &\longrightarrow (L^q(X))^* \\ h &\longmapsto T_h \end{aligned}$$

onde $T_h(g) = \int_X h(x)g(x) d\mu(x)$.

É resultado de Análise Funcional que T é uma isometria ([17], Teorema 6.16), isto é

$$\|T_h\|_{(L^q)^*} := \sup\{|T_h(g)| : g \in L^q(X), \|g\|_q \leq 1\} = \|h\|_p.$$

Para toda $g \in L^q(X)$ e $h(x) = \int_Y f(x, y) d\lambda(y)$ temos

$$\begin{aligned} |T_h(g)| &= \left| \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\lambda(y) \right] g(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_Y \int_X f(x, y)g(x) d\mu(x)d\lambda(y) \right| \\ &\leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p \|g\|_q d\lambda(y) \\ &= \|g\|_q \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\lambda(y), \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder. Portanto

$$\|h\|_p = \|T_h\|_{(L^q)^*} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\lambda(y).$$

E isto é equivalente à desigualdade enunciada. \square

Alguns casos particulares da Desigualdade de Young são de demonstração simples, como o caso a seguir.

Teorema 1.3.3. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, então $h = f * g$ é bem definida e $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Além disso,*

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Demonstração. O caso $p < \infty$ é aplicação direta da Desigualdade Integral de Minkowski, de fato

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_1. \end{aligned}$$

O caso $p = \infty$ é mais simples, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_1. \end{aligned}$$

Logo $\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$. □

Definição 1.3.4. *Um operador T definido em $L^p(X, \mathcal{A}_1, \mu)$, com imagem em $L^q(Y, \mathcal{A}_2, \lambda)$ é de tipo (p, q) se existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$\|Tf\|_q \leq k \|f\|_p.$$

A menor constante k para a qual esta desigualdade vale é a norma (p, q) do operador T . Se o operador é de tipos $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$ podemos escrevê-lo como

$$T : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \longrightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y)$$

ou, quando não houver risco de ambiguidade,

$$T : L^{p_0} + L^{p_1} \longrightarrow L^{q_0} + L^{q_1}.$$

A ideia principal por trás da demonstração do Teorema de Convexidade de M. Riesz é dada pelo seguinte lema:

Lema 1.3.5 (Teorema das Três Retas). *Suponha que F é uma função contínua, com valores complexos, limitada na faixa $S = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$ e analítica no interior de S . Se $|F(iy)| \leq k_0$ e $|F(1 + iy)| \leq k_1$ para todo y , então $|F(x + iy)| \leq k_0^{1-x} k_1^x$ para todo $x + iy \in S$.*

Demonstração. Primeiro, demonstramos para o caso em que $k_0 = k_1 = 1$ e $\lim_{|y| \rightarrow \infty} F(x+iy) = 0$. Neste caso, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta = y_0 > 0$, tal que

$$|y| \geq y_0 \implies |F(x+iy)| \leq 1$$

Portanto, $|F(x+iy)| \leq 1$ fora do retângulo de vértices $\{iy_0, -iy_0, 1+iy_0, 1-iy_0\}$. Por outro lado, F é analítica no interior deste retângulo e contínua em todo o retângulo. Segue então pelo princípio do módulo máximo que o valor máximo de $|F(x+iy)|$ ocorre na fronteira deste retângulo e assim temos que $|F(x+iy)| \leq 1$ em todo ponto $x+iy$ do retângulo. Assim podemos concluir que a função é limitada por 1 em toda a faixa S .

No caso em que F não se aproxime uniformemente de zero, consideremos as funções $F_n(z) = F(z)e^{(z^2-1)/n}$. Como F é limitada por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \lim_{|y| \rightarrow \infty} |F_n(z)| &\leq \lim_{|y| \rightarrow \infty} \|F\|_\infty e^{-y^2/n} e^{(x^2-1)/n} \\ &= \|F\|_\infty e^{(x^2-1)/n} \lim_{|y| \rightarrow \infty} e^{-y^2/n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo n temos $|F_n(z)| \leq 1$. Tomando agora o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos $|F(z)| \leq 1$.

Para o caso em que k_0, k_1 são constantes positivas quaisquer, aplicamos o discutido acima a uma função $G(z) = F(z)/(k_0^{1-z}k_1^z)$ e obtemos o resultado. \square

Lema 1.3.6. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado. Se $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, então*

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_X fg \, d\mu \right|.$$

Demonstração. É um resultado de dualidade, pois $\|g\|_q = \|T_g\|_{(L^p)^*}$. Para o operador $T_g : L^p \rightarrow (L^p)^*$, definido por $f \mapsto \int_X fg \, d\mu$. \square

Teorema 1.3.7 (De Convexidade de Riesz). *Suponha que um operador linear é de tipo (p_i, q_i) , com norma $(p_i, q_i) = k_i$, $i = 0, 1$ (ver Definição 1.3.4). Se $1/p = (1-t)/p_0 + t/p_1$ e $1/q = (1-t)/q_0 + t/q_1$, para algum $0 \leq t \leq 1$, então o operador T é de tipo (p, q) com norma $k_t \leq k_0^{1-t}k_1^t$.*

Demonstração. Primeiro mostramos que o teorema é válido para funções simples. Para isto, estimamos $\|Tf\|_q$, quando f é simples. Pelo lema anterior, temos que se $1/q + 1/q' = 1$ é válido que

$$\|Tf\|_q = \sup \left\{ \left| \int_Y (Tf)g \, d\lambda \right| : \|g\|_{q'} = 1, \quad g \text{ simples em } L^{q'}(Y, \mathcal{A}_2, \lambda) \right\}$$

pois o conjunto formado pelas funções simples é denso em $L^{q'}(Y, \mathcal{A}_2, \lambda)$.

Segue desta observação que para o nosso propósito, é suficiente mostrar que o valor absoluto da integral no conjunto acima é menor do que ou igual a $k_0^{1-t}k_1^t\|f\|_p$ para qualquer que seja a função simples g com $\|g\|_{q'} = 1$. Além disso, fica claro que podemos assumir $\|f\|_p = 1$, pois caso não o seja, consideramos $\tilde{f} = f/\|f\|_p$, o que podemos fazer sempre que $\|f\|_p \neq 0$.

Fixando notação, denotamos $\alpha_j = 1/p_j$, $\beta_j = 1/q_j$, $j = 0, 1$, e para $z \in \mathbb{C}$ definimos $\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$, $\beta(z) = (1-z)\beta_0 + z\beta_1$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$. Definimos também, $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$ e $g = \sum_{k=1}^d b_k \chi_{F_k}$, onde $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$ e $b_k = |b_k|e^{i\phi_k}$ são constantes complexas. Assim f e g são funções simples satisfazendo as condições discutidas no parágrafo anterior e $E_j \cap E_l = \emptyset$ para $1 \leq j, l \leq m$, $j \neq l$; $F_k \cap F_n = \emptyset$ para $1 \leq k, n \leq d$, $k \neq n$.

Definimos também, quando $\alpha > 0$ e $\beta < 1$, isto é, $p < \infty$ e $q > 1$,

$$\begin{aligned} f_z &= \sum_{j=1}^m |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}, \\ g_z &= \sum_{k=1}^d |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} e^{i\phi_k} \chi_{F_k}, \\ F(z) &= \int_Y (Tf_z)g_z \, d\lambda. \end{aligned}$$

Observe que por definição de $\alpha(z)$ e $\beta(z)$, temos $F(t) = \int_Y (Tf)g \, d\lambda$, além disso, por linearidade do operador e da integral, obtemos

$$F(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} e^{i(\theta_j+\phi_k)} \int (T\chi_{E_j})\chi_{F_k} \, d\lambda.$$

Também, como a soma acima é finita e cada termo do somatório é uma função inteira, F é inteira. Além disso, é de fácil verificação que é limitada quando $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1$. Utilizando a hipótese e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |F(iy)| &\leq \int_Y |(Tf_{iy})| |g_{iy}| \, d\lambda \\ &\leq \|Tf_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \\ &\leq k_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0}. \end{aligned}$$

Agora utilizando as definições de $\alpha(z)$ e $\beta(z)$, obtemos

$$\begin{aligned} |f_{iy}|^{p_0} &= |f|^{(\text{Re}(\alpha(iy))p_0)/\alpha} = |f|^p, \\ |g_{iy}|^{q'_0} &= |g|^{\text{Re}((1-\beta(iy))q'_0)/(1-\beta)} = |g|^{q'} \end{aligned}$$

e portanto $\|f_{iy}\|_{p_0} = \|f\|_p^{p/p_0} = 1$ e $\|g_{iy}\|_{q'_0} = \|g\|_{q'}^{q'/q'_0} = 1$. Concluimos assim que $|F(iy)| \leq k_0$. De forma análoga, concluimos que $|F(1+iy)| \leq k_1$. Consequentemente, pelo lema das

três retas,

$$|F(t)| = \left| \int_Y (Tf)g \, d\lambda \right| \leq k_0^{1-t} k_1^t.$$

Isto conclui a demonstração no caso em que f é uma função simples.

Suponhamos agora $p_0 \leq p_1$ e que $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja não negativa. Consideremos $f = f^0 + f^1$, onde f^0, f^1 são truncamentos de f definidos por

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 1, \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad f^1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq 1, \\ 0 & \text{se } f(x) > 1. \end{cases}$$

Portanto, obtemos $(f^0)^{p_0} \leq f^p$, $(f^1)^{p_1} \leq f^p$ e assim, $f^0 \in L^{p_0}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f^1 \in L^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se (s_m) é uma sequência crescente de funções simples que converge para f , o teorema da convergência monótona garante que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - s_m\|_p = 0$. Além disso, se s_m^0 e s_m^1 são os truncamentos de s_m , definidos analogamente aos de f , obtemos pela mesma razão que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m^0 - f^0\|_{p_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m^1 - f^1\|_{p_1} = 0$. Usando o fato que o operador T é de tipo (p_i, q_i) , obtemos então $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T s_m^0 - T f^0\|_{q_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T s_m^1 - T f^1\|_{q_1} = 0$. Como convergência em norma L^p implica na existência de subsequências que convergem em quase todo ponto, extraímos uma subsequência de $(T s_m^0)$ que converge em quase todo ponto para $T f^0$. Considerando apenas os índices desta subsequência, extraímos uma nova subsequência $(T s_{m_d}^1)$ que converge em quase todo ponto para $T f^1$. Obtemos assim uma sequência (f_d) , $f_d = s_{m_d}^0 + s_{m_d}^1$, subsequência de (s_m) que converge em L^p para f , e $\lim_{d \rightarrow \infty} (T f_d)(x) = T f(x)$ q.t.p. Assim, pelo lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &= \left\| \lim_{d \rightarrow \infty} (T f_d) \right\|_q \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \|T f_d\|_q \\ &\leq \lim_{d \rightarrow \infty} k_0^{1-t} k_1^t \|f_d\|_p \\ &\leq k_0^{1-t} k_1^t \|f\|_p. \end{aligned}$$

Se $p_0 > p_1$, então temos $(f^0)^{p_1} \leq f^p$ e $(f^1)^{p_0} \leq f^p$. Assim este caso segue de forma análoga ao caso $p_0 < p_1$, ou seja, o resultado é válido para f positiva. Estendemos para f qualquer, separando em partes reais, complexas, positivas e negativas.

Resta apenas demonstrar os casos: $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $\alpha > 0$ e $\beta = 1$, e $\alpha = 0$ e $\beta < 1$. Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, as hipóteses implicam que $(p, q) = (p_0, q_0)$ ou $(p, q) = (p_1, q_1)$, e não há nada a se fazer. Se $\alpha > 0$ e $\beta = 1$, a prova acima é válida, substituindo g_z por g , e se $\alpha = 0$ e $\beta < 1$, basta substituir f_z por f . \square

Finalmente, demonstramos a Desigualdade de Young.

Teorema 1.3.8 (Desigualdade de Young para \mathbb{R}^d). *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, e $(1/q) = (1/p) + (1/r) - 1$, temos $f * g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ e além disso*

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r.$$

Demonstração. Consideramos o operador $T : g \mapsto f * g$. Já observamos que é um operador de tipo $(1, p) = (p_0, q_0)$ no Teorema 1.3.3 e é aplicação direta da desigualdade de Hölder, que é de tipo $(p', \infty) = (p_1, q_1)$, onde p' é expoente conjugado de p . Além disso, em ambos os casos, a norma do operador é limitada por $\|f\|_p$. Então, é consequência imediata do teorema de Convexidade de Riesz que T é de tipo (r, q) ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1} = 1-t + \frac{t}{p'} = 1 - \frac{t}{p}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{p}, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq 1$. Das duas equações acima, obtemos

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{p} = \frac{1}{p} - \frac{t}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1,$$

o que conclui a demonstração do teorema. \square

Definição 1.3.9. *Seja $K(t)$ uma função mensurável definida no intervalo $[-1, 1]$ e seja $\bar{K}(x) = K(\langle x, e \rangle)$, $x \in \mathbb{S}^d$, onde $e = e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$ é o polo norte de \mathbb{S}^d . Se $\bar{K}, f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, definimos a convolução de K e f por*

$$K * f(x) = \int_{\mathbb{S}^d} K(\langle x, y \rangle) f(y) d\sigma(y).$$

Observação 1.3.10. Consideremos K, \bar{K} e f como na Definição 1.3.9. Fixado $x \in \mathbb{S}^d$, seja $A \in \text{SO}(d+1)$ tal que $x = Ae$. Aplicando a Proposição 1.2.16,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} |K(\langle x, y \rangle)| d\sigma(y) &= \int_{\mathbb{S}^d} |K(\langle Ae, y \rangle)| d\sigma(y) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} |K(\langle e, A^{-1}y \rangle)| d\sigma(y) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} |K(\langle e, y \rangle)| d\sigma(y) \\ &= \|\bar{K}\|_1. \end{aligned}$$

Segue pelo Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \|K * f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{S}^d} |K(\langle x, y \rangle)| d\sigma(x) \right) d\sigma(y) \\ &= \|\bar{K}\|_1 \|f\|_1 \end{aligned}$$

e portanto $K * f \in L^1(\mathbb{S}^d)$. Se $\bar{K} \in L^p(\mathbb{S}^d)$, usando o Teorema 1.3.2, podemos mostrar, como na demonstração do Teorema 1.3.3, que $\|K * f\|_p \leq \|\bar{K}\|_p \|f\|_1$. Pela demonstração do Teorema 1.3.8, é de fácil verificação que a Desigualdade de Young vale para a convolução em \mathbb{S}^d .

Teorema 1.3.11 (Desigualdade de Young para \mathbb{S}^d). *Seja $K(t)$ como na Definição 1.3.9 e sejam $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tais que $(1/q) = (1/p) + (1/r) - 1$. Se $\bar{K} \in L^r(\mathbb{S}^d)$ e $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, então $K * f$ está definida para quase todo $x \in \mathbb{S}^d$, $K * f \in L^q(\mathbb{S}^d)$ e*

$$\|K * f\|_q \leq \|\bar{K}\|_r \|f\|_p.$$

Observação 1.3.12. Uma vantagem da utilização da Desigualdade de Young em demonstrações é que ela é válida em um contexto mais abstrato. Por exemplo, quando trabalharmos com os espaços $L^p(\mathbb{S}^d)$, $L^p(\Omega_d)$ e $L^p(\mathbb{T}^d)$, temos a Desigualdade de Young como uma ferramenta valiosa para realizar nossos estudos nestes espaços.

1.4 Preliminares Analíticas

Teorema 1.4.1 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em X . Suponha que existam constantes $\{M_n\}$ tais que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Então $\sum f_n$ converge uniformemente em X se $\sum M_n$ é convergente.

Teorema 1.4.2 ([5], Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Se X é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^d , as restrições à X das funções polinomiais reais em \mathbb{R}^d formam um conjunto denso em $C(X, \mathbb{R})$.*

Definição 1.4.3. *Um multi-índice é uma d -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Para um multi-índice α , definimos sua ordem $|\alpha|$ e o fatorial $\alpha!$, por*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$$

Também, dado $x \in \mathbb{R}^d$, definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d},$$

e o operador diferencial

$$D^\alpha = \partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}},$$

Sobre a simetria das derivadas parciais, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.4.4 (Teorema de Schwarz). *Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d . Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Teorema 1.4.5 ([6], Teorema 2.68). *Sejam U um aberto convexo de \mathbb{R}^d e $f \in C^{k+1}(U)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Então*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha + R_k(x), \quad x, x_0 \in U,$$

onde $R_k(x)$ é o Resto de Taylor, dado por

$$R_k(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + c(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha, \quad \text{para algum } c \in (0, 1).$$

Definição 1.4.6. *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^d , $f \in C^\infty(U)$ e $x_0 \in U$. A série de Taylor de f em x_0 é a série*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha.$$

Se existe $R > 0$ tal que a série de Taylor de f em x_0 converge para $f(x)$ para todo x tal que $|x - x_0| < R$, dizemos que f é analítica em x_0 .

Teorema 1.4.7 ([3], Proposição 2.1, p.122). *A soma de uma série de potências é uma função analítica em seu domínio de convergência. Em particular, se*

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} c_\alpha x^\alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $|x| < R$, onde $R > 0$, então a função f é analítica em todo ponto x tal que $|x| < R$.

Teorema 1.4.8 (Fórmula de Green). *Sejam U um aberto limitado de \mathbb{R}^d e u, v funções de $C^2(\bar{U})$. Então,*

$$\int_U \left(u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) \right) dx = \int_{\partial U} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) dx$$

onde $\partial/\partial n$ é a derivada direcional na direção do vetor normal exterior à fronteira de U .

Teorema 1.4.9 ([17], Teorema 8.8). *Sejam (X, \mathcal{S}, μ) e $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ espaços de medida σ -finitos, e seja f uma função $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ mensurável em $X \times Y$.*

(i) *Se $0 \leq f \leq \infty$, e se*

$$\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\lambda(y), \quad \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad (x \in X, y \in Y),$$

então φ é \mathcal{S} -mensurável, ψ é \mathcal{T} -mensurável, e

$$\int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) = \int_Y \psi(y) d\lambda(y).$$

(ii) *Se f tem valores complexos e se*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|(x, y) d\lambda(y) \quad e \quad \int_X \varphi^*(x) d\mu(x) < \infty,$$

então f está em $L^1(X \times Y)$.

(iii) *Se $f \in L^1(X \times Y)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo $x \in X$, $f(\cdot, y) \in L^1(X)$ para quase todo $y \in Y$. As funções φ e ψ são integráveis, e a equação do item (i) vale.*

Lema 1.4.10 ([5], Teorema 2.4.9). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ e sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Então,*

$$\int_{r_1 \leq |x| \leq r_2} f(x) dx = |\mathbb{S}^d| \int_{r_1}^{r_2} \int_{\mathbb{S}^d} f(r\omega) r^d d\sigma_d(\omega) dr.$$

1.5 Funções Analíticas na Esfera \mathbb{S}^d

Claramente, para falarmos sobre funções analíticas, precisamos definir exatamente o que isto significa. Usamos esta seção para dar sentido a este conceito no caso da esfera.

Dizemos que uma função g definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é analítica em um ponto $x \in U$ se sua série de Taylor (ver Definição 1.4.6) converge para g em uma vizinhança do ponto x , isto é, se o limite do resto de Taylor é zero em todos os pontos desta vizinhança. Observe que precisamos falar de conjuntos abertos em seu domínio, para que possamos derivar a função g . Seria natural então, dizer que uma função f definida em \mathbb{S}^d é analítica se satisfaz a mesma condição. No entanto isto não é possível, pois não sabemos derivar sobre esferas da mesma forma que derivamos em \mathbb{R}^d . Em geometria, definiríamos a analiticidade de tais funções utilizando cartas analíticas. Isto é, uma função f , definida em \mathbb{S}^d , é analítica em um ponto x de seu domínio, se existe uma parametrização de \mathbb{S}^d por uma carta analítica $\varphi : W \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ (observe que φ esta definida em um aberto de um espaço euclidiano e que $x \in \varphi(W)$), tal que $f \circ \varphi$, definida no aberto $W \subset \mathbb{R}^d$, é analítica no sentido tradicional no ponto $y \in W$, $\varphi(y) = x$. Esta resposta não é sempre satisfatória. Não desejamos introduzir uma nova função, ou família de funções, toda vez que queiramos checar se alguma propriedade é satisfeita, a não ser que isto seja de fato necessário. Uma outra maneira de olhar para o problema é “engordar” o conjunto em que a função é definida, de forma que possamos derivar a função como de costume. De fato é isto que faremos. Diremos que a função é analítica se sua extensão radial é analítica. Deixaremos isto mais preciso abaixo.

Definição 1.5.1. *Se f é uma função definida em \mathbb{S}^d , sua extensão radial é a função \tilde{f} , definida por em $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ por*

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Definição 1.5.2. *Seja g uma função definida em uma vizinhança de \mathbb{S}^d , definimos a restrição de g à \mathbb{S}^d como a função ρg , isto é,*

$$\rho g = g|_{\mathbb{S}^d}.$$

Definição 1.5.3. *Uma função f definida em \mathbb{S}^d é k vezes diferenciável se a sua extensão radial \tilde{f} é k vezes diferenciável em $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$. O espaço vetorial formado por estas funções será denotado por $C^k(\mathbb{S}^d)$. Além disso, para um multi-índice α , definimos $\partial^\alpha f = \rho(\partial^\alpha \tilde{f})$.*

Definição 1.5.4. *Uma função f definida em \mathbb{S}^d é denominada analítica em um ponto $x \in \mathbb{S}^d$, se sua extensão radial \tilde{f} é uma função analítica neste ponto x . Será analítica em \mathbb{S}^d se \tilde{f} for analítica em um aberto que contenha \mathbb{S}^d . Se \tilde{f} for uma função inteira, dizemos que f é inteira.*

Proposição 1.5.5 ([4], Lema 2.7.2). *Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $\{f_n\}$ uma sequência de funções de $C^r(\mathbb{S}^d)$. Se f_n converge uniformemente a f , e $\partial^\alpha f_n$ converge uniformemente a g_α para todo $|\alpha| \leq r$, então $\partial^\alpha f = g_\alpha$.*

2 Funções Analíticas na Esfera Real

Neste capítulo, seguimos principalmente o livro “Analytic Functionals on the Sphere” de M. Morimoto [13]. Enunciamos e demonstramos os resultados que serão utilizados. As primeiras seções têm muito em comum com a dissertação de F. Oliveira [15]. Também utilizamos alguns resultados sobre integração e sobre o operador de Laplace-Beltrami que podem ser encontrados no livro de Müller [14]. Sempre que necessário, será indicada a referência utilizada.

O teorema central do capítulo nos dá condições suficientes para que uma função definida na esfera seja analítica. Para chegar a este resultado serão necessários alguns resultados de Análise Harmônica. Enunciaremos e demonstraremos grande parte dos resultados que serão utilizados. Dentre estes, demonstraremos o Teorema da Adição e a Fórmula de Funk-Hecke.

2.1 Harmônicos Esféricos

O objetivo desta seção é apresentar conjuntos de funções que servirão como peças importantes nas construções futuras. Os principais serão os conjuntos de *Harmônicos Esféricos*. Eles serviram para que possamos decompor os espaços de funções estudados, em espaços mais simples. Iniciamos esta tarefa com algumas definições.

Definição 2.1.1. *O operador diferencial*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2}$$

é o Laplaciano em \mathbb{R}^{d+1} .

Definição 2.1.2. *Uma função complexa f definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ é dita Harmônica se $f \in C^2(U)$ e*

$$\Delta f = 0.$$

Observação 2.1.3. Em algumas ocasiões, utilizaremos o laplaciano em \mathbb{R}^d e em \mathbb{R}^{d+1} simultaneamente. Nestes casos vamos denotar o laplaciano em \mathbb{R}^{d+1} por Δ e em \mathbb{R}^d por Δ' , e faremos a seguinte identificação,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} + \Delta'.$$

Definição 2.1.4. *Uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é homogênea de grau k ou k -homogênea se para todo $t > 0$ temos $f(tx) = t^k f(x)$.*

Definição 2.1.5. Definimos os conjuntos $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$ por:

- (i) $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ é o conjunto de todos os polinômios k -homogêneos de $d + 1$ variáveis com valores complexos;
- (ii) $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1}) = \{H_k \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) : \Delta H_k = 0\}$ é o conjunto dos polinômios harmônicos k -homogêneos, ou harmônicos sólidos de grau k .

Observação 2.1.6. Utilizando a notação de multi-índices, podemos representar um polinômio P k -homogêneo em \mathbb{R}^{d+1} de maneira simples

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha.$$

Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, podemos escrevê-lo como $x = r\omega$, onde $r \in [0, \infty)$, $\omega \in \mathbb{S}^d$, e considerando um polinômio $H_k \in \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$, temos $H_k(x) = H_k(r\omega) = r^k H_k(\omega)$. Portanto a restrição deste à esfera \mathbb{S}^d é um polinômio sobre a esfera. Inspirados nisto, faremos a seguinte definição:

Definição 2.1.7. Dado um polinômio $H_k \in \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$, sua restrição à esfera \mathbb{S}^d é um harmônico esférico. A totalidade destes é denotada por $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$.

Os espaços vetoriais $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ serão importantes pois mostraremos que é possível decompor o espaço $L^2(\mathbb{S}^d)$ como soma direta destes.

É obvio que tanto o conjunto $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, quanto $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$, são espaços vetoriais de dimensão finita. Adiante iremos calcular suas dimensões. Antes disto demonstraremos dois lemas, o primeiro é apenas um lema técnico e o segundo, nos dá uma relação de ortogonalidade entre os espaços $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, variando o índice k .

Lema 2.1.8. Para $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, temos $S_k(-\omega) = (-1)^k S_k(\omega)$.

Demonstração. Como S_k é a restrição de um polinômio homogêneo à esfera \mathbb{S}^d , o resultado é claro. \square

Lema 2.1.9. Para $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ e $S_l \in \mathcal{H}^l(\mathbb{S}^d)$, com $k \neq l$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^d} S_k(\omega) S_l(\omega) d\sigma(\omega) = 0. \quad (2.1)$$

Demonstração. Dados S_k e S_l como no enunciado, considere os polinômios $H_k, H_l \in \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$ tais que $S_k = H_k|_{\mathbb{S}^d}$ e $S_l = H_l|_{\mathbb{S}^d}$. Observe que ao diferenciarmos estas funções em relação ao vetor normal exterior à esfera, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_l}{\partial r}(x) &= \frac{\partial H_l}{\partial r}(r\omega) = lr^{l-1} S_l(\omega), \\ \frac{\partial H_k}{\partial r}(x) &= \frac{\partial H_k}{\partial r}(r\omega) = kr^{k-1} S_k(\omega). \end{aligned}$$

Além disso, como são funções harmônicas, temos com ajuda de Teorema 1.4.8 que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{|x| \leq 1} \left(H_k(x) \Delta H_l(x) - H_l(x) \Delta H_k(x) \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{S}^d} \left(H_k(\omega) \frac{\partial H_l}{\partial n}(\omega) - H_l(\omega) \frac{\partial H_k}{\partial n}(\omega) \right) |\mathbb{S}^d| d\sigma(\omega) \\
 &= |\mathbb{S}^d| \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\omega) S_l(\omega) (l - k) d\sigma(\omega)
 \end{aligned}$$

e assim concluímos a demonstração do lema. \square

Teorema 2.1.10. *Se $M(k, d) = \dim \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ e $N(k, d) = \dim \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$, então*

$$M(k, d) = \frac{(k+d)!}{k!d!}, \quad (2.2)$$

$$N(k, d) = \frac{(k+d-2)!(2k+d-1)}{k!(d-1)!}, \quad (2.3)$$

e existe uma constante $C > 1$, dependendo somente de d , tal que

$$k^d \leq M(k, d) \leq Ck^d, \quad k^{d-1} \leq N(k, d) \leq Ck^{d-1}.$$

Demonstração. Já foi mencionado que um polinômio $H_k \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ pode ser escrito de forma simples com a notação de multi-índice. Também podemos o expandir como soma de polinômios homogêneos de grau menor. Observe, dado H_k e multi-índice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d, j)$, obtemos

$$H_k(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_d^{\beta_d} x_{d+1}^j.$$

Note que podemos ter $j = 0, 1, \dots, k$. Denotamos $x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ multi-índice obtido através de β . Então $|\alpha| = |\beta| - j$, e para uma escolha de constantes a_α ,

$$\begin{aligned}
 H_k(x) &= \sum_{|\beta|=k} b_\beta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_{d+1}^j = \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j \left(\sum_{|\alpha|=k-j} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j A_{k-j}(x_1, \dots, x_d)
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde temos claramente $A_{k-j} \in \mathcal{P}^{k-j}(\mathbb{R}^d)$. Também é claro que esta expansão é única. Obtemos a seguinte relação

$$M(k, d) = \sum_{j=0}^k M(j, d-1).$$

Além disso, temos também $M(k, 0) = \dim \mathcal{P}^k(\mathbb{R}) = \dim \langle x^k \rangle = 1$.

Mostraremos que $M(k, d)$ é o coeficiente da expansão de uma função analítica em série de Taylor. Definindo para $x \in (-1, 1)$ a função

$$h_{d+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} M(k, d) x^k,$$

temos que $h_1(x) = \frac{1}{1-x}$ e para h_{d+1} ,

$$\begin{aligned} h_{d+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k M(j, d-1) \right] x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} M(j, d-1) x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} M(j, d-1) \sum_{k=j}^{\infty} x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} M(j, d-1) x^j \frac{1}{1-x} \\ &= h_d(x) \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento para h_d, \dots, h_2 , obtemos

$$h_{d+1}(x) = \frac{1}{(1-x)^{d+1}},$$

que é uma função analítica, com série de Taylor

$$h_{d+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+d)!}{k!d!} x^k.$$

Por comparação com a definição de h_{d+1} , obtemos (2.2).

Calculamos $N(k, d)$ de forma semelhante. Considerando a expansão de $H_k \in \mathcal{P}_{\Delta}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ dada em (2.4) e a decomposição do laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} + \Delta'$,

$$\begin{aligned} 0 = \Delta H_k(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} \left(\sum_{j=0}^k x_{d+1}^j A_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \right) + \Delta' \left(\sum_{j=0}^k x_{d+1}^j A_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \right) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} (x_{d+1}^j) A_{k-j}(x_1, \dots, x_d) + \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j \Delta' A_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)(j+2) x_{d+1}^j A_{k-j-2}(x_1, \dots, x_d) + \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j \Delta' A_{k-j}(x_1, \dots, x_d). \end{aligned}$$

Obtemos assim,

$$\Delta' A_{k-j} = -(j+2)(j+1) A_{k-j-2}, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, k-2.$$

e portanto A_{k-1} e A_k determinam os A_{k-j} para $j = 2, \dots, k$. Obtemos então a relação

$$N(k, d) = M(k, d-1) + M(k-1, d-1). \quad (2.5)$$

E disto, junto a equação (2.2), segue que

$$\begin{aligned} N(k, d) &= \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} + \frac{(k+d-2)!}{(k-1)!(d-1)!} \\ &= \frac{(k+d-2)!(k+d-1) + (k+d-2)!k}{k!(d-1)!} \\ &= \frac{(k+d-2)!(2k+d-1)}{k!(d-1)!} \end{aligned}$$

e assim obtemos (2.3). Resta calcular a ordem das expressões em (2.2) e (2.3). Para a primeira, observe que, para $k \geq d$,

$$\begin{aligned} \frac{(k+d)!}{k!d!} &= \frac{(k+1) \cdots (k+d)}{d!} \leq \frac{(k+d)^d}{d!} = \frac{1}{d!} \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} k^{d-j} d^j \\ &\leq \frac{1}{d!} \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} k^{d-j} k^j \leq \frac{k^d}{d!} \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \leq Ck^d, \end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$ apropriada. De forma semelhante, para a outra expressão, e $k > d-1$,

$$\begin{aligned} \frac{(2k+d-1)(k+d-2)!}{k!(d-1)!} &= \frac{(2k+d-1)(k+1) \cdots (k+d-2)}{(d-1)!} \\ &\leq \frac{(2k+d-1)^{d-1}}{(d-1)!} \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} (2k)^{d-j-1} (d-1)^j \\ &\leq Ck^{d-1}. \end{aligned}$$

Podemos também verificar facilmente que as seguintes desigualdades se verificam: $M(k, d) \geq k^d$ e $N(k, d) \geq k^{d-1}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. O Teorema está demonstrado. \square

Corolário 2.1.11. *A dimensão do espaço $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ é $N(k, d)$.*

Demonstração. Observe que a aplicação de restrição ρ

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{P}_{\Delta}^k(\mathbb{R}^{d+1}) &\longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d) \\ H_k &\longmapsto H_k|_{\mathbb{S}^d} := S_k \end{aligned}$$

é bijeção linear. De fato, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $H_k^1, H_k^2 \in \mathcal{P}_{\Delta}^k(\mathbb{R}^{d+1})$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\alpha H_k^1 + \beta H_k^2)(\omega) &= (\alpha H_k^1 + \beta H_k^2)(\omega) \\ &= \alpha H_k^1(\omega) + \beta H_k^2(\omega) \\ &= \alpha \rho(H_k^1)(\omega) + \beta \rho(H_k^2)(\omega) \end{aligned}$$

e portanto, $\rho(\alpha H_k^1 + \beta H_k^2) = \alpha\rho(H_k^1) + \beta\rho(H_k^2)$. É sobrejetiva por definição de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. Para injetividade, dados quaisquer $S_k^1 = \rho(H_k^1)$ e $S_k^2 = \rho(H_k^2)$, se $S_k^1 = S_k^2$, temos

$$\begin{aligned} S_k^1(\omega) = S_k^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{S}^d &\iff H_k^1(\omega) = H_k^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{S}^d \\ &\iff r^k H_k^1(\omega) = r^k H_k^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{S}^d, \quad \forall r \in [0, \infty) \\ &\iff H_k^1(x) = H_k^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ é exatamente a mesma de $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$. \square

2.2 O Operador de Laplace-Beltrami

Nesta seção definimos o Operador de Laplace-Beltrami, e calculamos seus autovalores e autoespaços.

Definição 2.2.1. *Seja f uma função em $C^2(\mathbb{S}^d)$ e F sua extensão radial. O operador de Laplace-Beltrami, denotado por $\Delta_{\mathbb{S}}$, é definido por*

$$\Delta_{\mathbb{S}}f = \rho(\Delta(F)). \quad (2.6)$$

Lema 2.2.2. *Sejam $f, g \in C^2(\mathbb{S}^d)$. Então*

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}g(\omega) \, d\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{S}^d} g(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega) \, d\sigma(\omega). \quad (2.7)$$

Demonstração. Sejam $F = \tilde{f}$ e $G = \tilde{g}$, onde \tilde{f}, \tilde{g} são respectivamente as extensões radiais de f e g . Então é claro que F e G são 0-homogêneas. Também, verifica-se facilmente que ΔF e ΔG são (-2)-homogêneas, pois por aplicação direta da regra da cadeia, obtemos $\frac{\partial}{\partial x_i}F(tx) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x_i}F(tx)$. Repetindo o processo, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(tx) = \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(tx)$, a afirmação segue pois o laplaciano é combinação linear das derivadas parciais de F .

Pelo Teorema 1.4.8, integrando sobre $A = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ obtemos

$$\int_A \left(G(x)\Delta F(x) - F(x)\Delta G(x) \right) dx = \int_{\partial A} \left(G(x)\frac{\partial F}{\partial r}(x) - F(x)\frac{\partial G}{\partial r}(x) \right) |\mathbb{S}^d| \, d\sigma(x) = 0$$

pois $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial r} = 0$. Além disso, pelo Lema 1.4.10 temos que

$$\begin{aligned} &\int_A \left(G(x)\Delta F(x) - F(x)\Delta G(x) \right) dx \\ &= \iint_{\mathbb{S}^d \times [1,2]} \left(G(r\omega)\Delta F(r\omega) - F(r\omega)\Delta G(r\omega) \right) r^d |\mathbb{S}^d| \, d\sigma(\omega) dr \\ &= \int_1^2 r^{d-2} \, dr \int_{\mathbb{S}^d} \left(g(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega) - f(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}g(\omega) \right) |\mathbb{S}^d| \, d\sigma(\omega) \\ &= \left[\frac{2^{d-1} - 1}{d-1} |\mathbb{S}^d| \right] \int_{\mathbb{S}^d} \left(g(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega) - f(\omega)\Delta_{\mathbb{S}}g(\omega) \right) \, d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Comparando as duas equações, segue o resultado. \square

Lema 2.2.3. *Seja F uma função k -homogênea de classe C^2 e seja f a restrição de F à esfera \mathbb{S}^d . Então temos $F(x) = r^k f(\omega)$, $x = r\omega$, $|x| = r$, e*

$$\Delta F(x) = k(k + d - 1)r^{k-2}f(\omega) + r^{k-2}\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega). \quad (2.8)$$

Demonstração. Consideremos as funções definidas por $h(x) = |x|^k$ e $\tilde{f}(x) = f(x/|x|)$, $x \neq 0$. É fácil verificar que

$$\Delta F = \Delta(h\tilde{f}) = h\Delta\tilde{f} + 2\langle\nabla h, \nabla\tilde{f}\rangle + \tilde{f}\Delta h. \quad (2.9)$$

Calculando as derivadas parciais de h , obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = kx_j|x|^{k-2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x) = k|x|^{k-2} + k(k-2)x_j^2|x|^{k-4},$$

consequentemente

$$\nabla h(x) = kr^{k-2}x, \quad \Delta h(x) = k(d+k-1)r^{k-2}.$$

Além disso, como \tilde{f} é 0-homogênea, e $\Delta\tilde{f}$ é (-2) -homogênea, temos

$$\Delta\tilde{f}(x) = r^{-2}\Delta\tilde{f}(\omega) = r^{-2}\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega).$$

Por definição de \tilde{f} , as superfícies de nível $\tilde{f}^{-1}(c)$ são uniões retas que passam pela origem. O gradiente é ortogonal a estas superfícies. Em particular, dado $x \in \mathbb{R}^d$ se considerarmos $c = \tilde{f}(x)$, obtemos $\langle x, \nabla\tilde{f}(x) \rangle = 0$. Logo

$$\langle\nabla h(x), \nabla\tilde{f}(x)\rangle = \langle kr^{k-2}x, \nabla\tilde{f}(x)\rangle = kr^{k-2}\langle x, \nabla\tilde{f}(x)\rangle = 0.$$

Impondo estas condições à equação (2.9),

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= h(x)\Delta\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x)\Delta h(x) \\ &= k(k+d-1)r^{k-2}f(\omega) + r^{k-2}\Delta_{\mathbb{S}}f(\omega) \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração do lema. \square

Teorema 2.2.4. *$\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ é o auto espaço do operador $\Delta_{\mathbb{S}}$ associado ao autovalor $-k(k+d-1)$, isto é, se $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, temos*

$$\Delta_{\mathbb{S}}S_k = -k(k+d-1)S_k. \quad (2.10)$$

Demonstração. Por definição de \mathcal{H}^k , $S_k = H|_{\mathbb{S}^d}$, com $H \in \mathcal{P}_{\Delta}^k(\mathbb{R}^{d+1})$. Portanto, $\Delta H = 0$ e assim o resultado segue ao aplicar o Lema 2.2.3 em H . \square

A fim de decompor $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ em subespaços ortogonais, precisamos definir um produto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ neste espaço vetorial. Para esta tarefa, é conveniente utilizar a notação de multi-índices feita na Definição 1.4.3. Com isto em mente, quaisquer polinômios $P, Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ podem ser escritos na forma

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad Q(x) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha, \quad (2.11)$$

para alguma escolha de constantes a_α, b_α . Também podemos definir para cada polinômio $P \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$, o seguinte operador diferencial

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha. \quad (2.12)$$

Em particular, se $P(x) = x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 = |x|^2$ temos $P(D) = \Delta$. Feitas estas considerações, definimos a seguir a o produto inteiro que nos dará a decomposição desejada.

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) \times \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (P, Q) &\longmapsto \langle\langle P, Q \rangle\rangle = P(D)\bar{Q} = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! a_\alpha \bar{b}_\alpha. \end{aligned}$$

Proposição 2.2.5. *A aplicação $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é um produto interno em $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$.*

Demonstração. Como a soma é finita, claramente temos a linearidade na primeira coordenada. Também é óbvio que $\langle\langle P, Q \rangle\rangle = \overline{\langle\langle Q, P \rangle\rangle}$, e $\langle\langle cP, Q \rangle\rangle = c\langle\langle P, Q \rangle\rangle$ qualquer que seja a constante c . Além disso,

$$\langle\langle P, P \rangle\rangle = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! |a_\alpha|^2 \geq 0,$$

o que também deixa claro que se anula apenas quando $P = 0$. □

Lema 2.2.6. *O Laplaciano, quando visto como aplicação definida em $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$, e imagem em $\mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$ é aplicação sobrejetiva. Isto é*

$$\Delta : \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) \longrightarrow \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$$

é sobrejetiva.

Demonstração. É óbvio que é uma aplicação linear. Observe que o núcleo de Δ é exatamente $\mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$. Por Álgebra Linear temos

$$\dim \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) = \dim \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1}) + \dim \Delta(\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})).$$

Portanto, utilizando o Teorema 2.1.10,

$$\begin{aligned}
\dim \Delta(\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})) &= \dim \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1}) - \dim \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1}) \\
&= M(k, d) - N(k, d) \\
&= \frac{(k+d)!}{k!d!} - \frac{(2k+d-1)(k+d-2)!}{k!(d-1)!} \\
&= \frac{(k+d-2)!}{(k-2)!d!} \\
&= \dim \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1}).
\end{aligned}$$

Como $\Delta(\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})) \subset \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$ temos o resultado. \square

Lema 2.2.7. *É válida a seguinte decomposição, de acordo com a forma bilinear $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$,*

$$\mathcal{P}^j(\mathbb{R}^{d+1}) = \mathcal{P}_\Delta^j(\mathbb{R}^{d+1}) \oplus \|x\|^2 \mathcal{P}^{j-2}(\mathbb{R}^{d+1}). \quad (2.13)$$

Demonstração. Denotamos $B^j = \{\|x\|^2 Q(x) : Q \in \mathcal{P}^{j-2}(\mathbb{R}^{d+1})\} = \|x\|^2 \mathcal{P}^{j-2}(\mathbb{R}^{d+1})$. Vamos mostrar que $(B^j)^\perp = \mathcal{P}_\Delta^j(\mathbb{R}^{d+1})$. Note que, qualquer que seja $\tilde{Q} \in B^j$, temos

$$\tilde{Q}(x) = |x|^2 Q(x) = (x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2) \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha, \quad Q \in \mathcal{P}^{j-2}(\mathbb{R}^{d+1}),$$

logo

$$\tilde{Q}(D) = \Delta Q(D).$$

Portanto para qualquer que seja $P \in \mathcal{P}_\Delta^j(\mathbb{R}^{d+1})$ temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \tilde{Q}, P \rangle\rangle &= \Delta Q(D) \bar{P} \\
&= Q(D) \Delta \bar{P} \\
&= \langle\langle Q, \Delta P \rangle\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isto é, os espaços $\mathcal{P}_\Delta^j(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\|x\|^2 \mathcal{P}^{j-2}(\mathbb{R}^{d+1})$ são ortogonais. Para checar que de fato é uma soma direta, basta verificar que a soma das dimensões destes espaços é igual a dimensão de $\mathcal{P}^j(\mathbb{R}^{d+1})$. O que de fato ocorre, pois

$$\begin{aligned}
N(j, d) + M(j-2, d) &= \frac{(j+d-2)!(2j+d-1)}{j!(d-1)!} + \frac{(j+d-2)!}{(j-2)!d!} \\
&= \frac{(j+d-2)!(2j+d-1)d + j(j-1)(j+d-2)!}{j!d!} \\
&= M(j, d),
\end{aligned}$$

que conclui a demonstração do resultado. \square

Notação 2.2.8. Para $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x .

Teorema 2.2.9. *Cada $Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ pode ser escrito na forma*

$$Q(x) = Q_0(x) + \|x\|^2 Q_1(x) + \|x\|^4 Q_2(x) + \cdots + \|x\|^{2\lfloor k/2 \rfloor} Q_{\lfloor k/2 \rfloor}(x) \quad (2.14)$$

onde $Q_j \in \mathcal{P}_{\Delta}^{k-2j}(\mathbb{R}^{d+1})$, $j = 0, 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$.

Demonstração. Note que se $k \leq 2$, todo polinômio é harmônico não há nada a fazer. Assumimos então que $k > 2$. Consideremos então $Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$. Pelo lema anterior,

$$Q(x) = Q_0(x) + \|x\|^2 R_0(x), \quad Q_0 \in \mathcal{P}_{\Delta}^k(\mathbb{R}^{d+1}), R_0 \in \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Se $k - 2 < 2$, paramos aí. Caso contrário, consideramos

$$R_0(x) = Q_1(x) + \|x\|^2 R_1(x), \quad Q_1 \in \mathcal{P}_{\Delta}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1}), R_1 \in \mathcal{P}^{k-4}(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Neste caso, temos

$$Q(x) = Q_0(x) + \|x\|^2 Q_1(x) + \|x\|^4 R_1(x).$$

Se $k - 4 < 2$, o processo acaba. Caso contrário, o repetimos quantas vezes forem necessárias. Como k é um número finito, o processo sempre tem fim. \square

Um corolário deste resultado é que o espaço de todos os polinômios sobre a esfera $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ pode ser escrito como soma dos espaços de harmônicos esféricos $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. Formalizamos esta observação.

Definição 2.2.10. *Definimos os seguintes espaços:*

- (1) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{d+1})$ é o espaço de todos os polinômios de $d + 1$ variáveis.
- (2) $\mathcal{P}(\mathbb{S}^d) = \rho(\mathcal{P}(\mathbb{R}^{d+1}))$, onde ρ é a aplicação de restrição sobre a esfera \mathbb{S}^d , é o conjunto de todos os polinômios na esfera.

Corolário 2.2.11. *Temos que*

$$\mathcal{P}(\mathbb{S}^d) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d) \right).$$

Mais precisamente,

$$\rho \left(\sum_{j=0}^k \mathcal{P}^j(\mathbb{R}^{d+1}) \right) = \sum_{j=0}^k \mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d).$$

Demonstração. Dado $Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$, temos

$$Q(x) = Q_0(x) + \|x\|^2 Q_1(x) + \|x\|^4 Q_2(x) + \cdots + \|x\|^{2\lfloor k/2 \rfloor} Q_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)$$

onde $Q_j \in \mathcal{P}_\Delta^{k-2j}(\mathbb{R}^{d+1})$. Logo

$$\rho(Q) = \rho(Q_0) + \rho(Q_1) + \rho(Q_2) + \cdots + \rho(Q_{\lfloor k/2 \rfloor}) \in \sum_{j=0}^k \mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d),$$

o que demonstra uma inclusão. A inclusão no sentido contrário é consequência imediata da definição dos espaços $\mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d)$. \square

Também obtemos um resultado simples sobre polinômios harmônicos.

Corolário 2.2.12. *Um polinômio $Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ é harmônico se e somente se para todo $R \in \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$ temos*

$$\int_{\mathbb{S}^d} Q(\omega)R(\omega) d\sigma(\omega) = 0. \quad (2.15)$$

Demonstração. Como anteriormente, dada a decomposição de $Q \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{d+1})$ de acordo com o Teorema 2.2.9, consideramos sua restrição à esfera

$$Q(\omega) = Q_0(\omega) + Q_1(\omega) + Q_2(\omega) + \cdots + Q_{\lfloor k/2 \rfloor}(\omega).$$

Tendo em mente a relação de ortogonalidade do Lema 2.1.9, obtemos para todo $j = 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$

$$\int_{\mathbb{S}^d} Q(\omega)\overline{Q_j(\omega)} d\sigma(\omega) = \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \int_{\mathbb{S}^d} Q_n(\omega)\overline{Q_j(\omega)} d\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{S}^d} |Q_j(\omega)|^2 d\sigma(\omega).$$

Portanto se a hipótese é válida, temos

$$\int_{\mathbb{S}^d} |Q_j(\omega)|^2 d\sigma(\omega) = 0 \implies Q_j(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{S}^d,$$

pois $|x|^2\overline{Q_1(x)}, |x|^4\overline{Q_2(x)}, \dots, |x|^{2\lfloor k/2 \rfloor}\overline{Q_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)} \in \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$. Logo $Q = Q_0 \in \mathcal{P}_\Delta^k(\mathbb{R}^{d+1})$. Para a recíproca, considere $R \in \mathcal{P}^{k-2}(\mathbb{R}^{d+1})$,

$$R(x) = R_0(x) + \|x\|^2 R_1(x) + \cdots + \|x\|^{2\lfloor (k-2)/2 \rfloor} R_{\lfloor (k-2)/2 \rfloor}(x), \quad R_j \in \mathcal{P}_\Delta^{k-2-2j}(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Então o Lema 2.1.9 implica que

$$\int_{\mathbb{S}^d} Q(\omega)R(\omega) d\sigma(\omega) = \sum_{j=0}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \int_{\mathbb{S}^d} Q(\omega)R_j(\omega) d\sigma(\omega) = 0,$$

pois $\rho(R_j) \in \mathcal{H}^{k-2-2j}(\mathbb{S}^d)$ para $j = 0, 1, \dots, \lfloor (k-2)/2 \rfloor$, $\rho(Q) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ e $k-2-2j \neq k$ para todo j . \square

2.3 Núcleos de Reprodução e Teorema da Adição

Nesta seção definimos os núcleos de Reprodução, demonstramos o teorema da Adição e a fórmula de Funk-Hecke. São resultados importantes na Análise Harmônica e serão utilizados livremente nos capítulos restantes do Trabalho.

Pelos resultados apresentados no Capítulo 1, sabemos que $L^2(\mathbb{S}^d)$ é um Espaço de Hilbert. Os espaços vetoriais de harmônicos esféricos $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ são subespaços vetoriais de $L^2(\mathbb{S}^d)$, e pelo Teorema 2.1.10 e Corolário 2.1.11, são subespaços de dimensão $N(k, d)$. Além disso, para $k \neq l$, temos pela relação de ortogonalidade do Lema 2.1.9, que

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d) \perp \mathcal{H}^l(\mathbb{S}^d).$$

Fixemos agora uma base ortonormal

$$\{S_{k,1}, S_{k,2}, \dots, S_{k,N(k,d)}\}$$

de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, isto é, é um subconjunto de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ e vale a seguinte relação

$$(S_{k,i}, S_{k,j}) = \delta_{ij} \quad (\text{Delta de Kronecker}).$$

Em seguida definimos o núcleo de reprodução para $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$.

Definição 2.3.1. A função F_k definida abaixo é o Núcleo de Reprodução para $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$

$$F_k : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\omega, \tau) \longmapsto F_k(\omega, \tau) = \sum_{j=1}^{N(k,d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)}.$$

Note que utilizamos uma base particular para a definição de F_k . É natural nos perguntarmos se a definição dada é boa, isto é, se ela independe da base escolhida. O resultado a seguir nos responde está pergunta afirmativamente.

Lema 2.3.2. A função F_k definida acima não depende da escolha de base ortonormal $\{S_{k,j}\}$ de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$.

Demonstração. A demonstração é essencialmente Álgebra Linear. Consideremos a base $\{S_{k,j}\}$ dada acima e uma base $\{T_{k,j}\}$ ortonormal arbitrária de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. Mostraremos que

$$F_k(\omega, \tau) = \sum_{j=1}^{N(k,d)} T_{k,j}(\omega) \overline{T_{k,j}(\tau)}.$$

Para cada j , existem constantes $c_{ij} \in \mathbb{C}$ tais que

$$T_{k,j}(\omega) = \sum_{i=1}^{N(k,d)} c_{ij} S_{k,i}(\omega),$$

e a matriz definida por $C = (c_{ij})$ é unitária (isto é $C\overline{C^t} = I$), pois

$$\begin{aligned} \delta_{j,r} &= (T_{k,j}, T_{k,r}) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{N(k,d)} c_{mj} S_{k,m}(\omega), \sum_{n=1}^{N(k,d)} c_{nr} S_{k,n}(\omega) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{N(k,d)} \sum_{n=1}^{N(k,d)} c_{mj} \overline{c_{nr}} \delta_{m,n} \\ &= \sum_{m=1}^{N(k,d)} c_{mj} \overline{c_{mr}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(k,d)} T_{k,j}(\omega) \overline{T_{k,j}(\tau)} &= \sum_{j=1}^{N(k,d)} \left[\left(\sum_{m=1}^{N(k,d)} c_{mj} S_{k,m}(\omega) \right) \overline{\left(\sum_{n=1}^{N(k,d)} c_{nj} S_{k,n}(\tau) \right)} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{N(k,d)} \sum_{n=1}^{N(k,d)} \left[\left(\sum_{j=1}^{N(k,d)} c_{mj} \overline{c_{nj}} \right) S_{k,m}(\omega) \overline{S_{k,n}(\tau)} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{N(k,d)} \sum_{n=1}^{N(k,d)} \delta_{m,n} S_{k,m}(\omega) \overline{S_{k,n}(\tau)} \\ &= \sum_{m=1}^{N(k,d)} S_{k,m}(\omega) \overline{S_{k,m}(\tau)} \\ &= F_k(\omega, \tau), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Lema 2.3.3. *Para qualquer matriz ortogonal $A \in \text{SO}(d+1)$ temos*

$$F_k(A\omega, A\tau) = F_k(\omega, \tau).$$

Demonstração. Decorre do fato que $d\omega$ é invariante por rotações, então se $\{S_{k,j}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, temos que $\{S_{k,j} \circ A\}$ também é, pois pela Proposições 1.2.16

$$\begin{aligned} (S_{k,j} \circ A, S_{k,l} \circ A) &= \int_{\mathbb{S}^d} S_{k,j}(A\omega) \overline{S_{k,l}(A\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,l}(\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= (S_{k,j}, S_{k,l}), \end{aligned}$$

portanto, o resultado segue do lema anterior. □

Lema 2.3.4. *Sejam $\omega, \omega', \tau, \tau'$ pontos de \mathbb{S}^d . São equivalentes:*

- (i) *existe uma matriz $A \in \text{SO}(d+1)$ tal que $A\omega = \omega'$ e $A\tau = \tau'$;*
- (ii) $\langle \omega, \tau \rangle = \langle \omega', \tau' \rangle$.

Demonstração.

(i) \implies (ii) : Como A é ortogonal e $\det A = 1$, $\langle \omega', \tau' \rangle = A\omega \cdot A\tau = (\det A)\langle \omega, \tau \rangle$.

(ii) \implies (i) : É fato que $\text{SO}(d+1)$ age sobre \mathbb{S}^d transitivamente, no sentido que dados $x, x' \in \mathbb{S}^d$, existe $A \in \text{SO}(d+1)$ tal que $Ax = x'$. Portanto existe $A_1 \in \text{SO}(d+1)$ tal que $A_1\omega = \omega'$, assim

$$\langle \omega', \tau' \rangle = \langle \omega, \tau \rangle = \langle \omega, (A_1^t A_1)\tau \rangle = \langle A_1\omega, A_1\tau \rangle = \langle \omega', A_1\tau \rangle.$$

Isto é, $A_1\tau$ e τ' estão em um mesmo hiperplano H , gerado por ω' . Portanto, podemos encontrar uma rotação $A_2 \in \text{SO}(d+1)$ que fixa ω' e $A_2(A_1\tau) = \tau'$. Para concluir, basta considerar $A = A_2A_1$. \square

Lema 2.3.5. Para $S_j \in \mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d)$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^d} S_j(\tau) F_k(\omega, \tau) d\sigma(\tau) = \delta_{jk} S_j(\omega). \quad (2.16)$$

Demonstração. Pelas relações de ortogonalidade e definição de F_k , se $j \neq k$, a integral é zero, e não há nada a fazer. Se $j = k$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau) F_k(\omega, \tau) d\sigma(\tau) &= \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau) \left(\sum_{i=1}^{N(k,d)} S_{k,i}(\omega) \overline{S_{k,i}(\tau)} \right) d\sigma(\tau) \\ &= \sum_{i=1}^{N(k,d)} S_{k,i}(\omega) (S_k, S_{k,i}) \\ &= S_k(\omega), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de $\{S_{k,i}\}$ ser base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ \square

Observação 2.3.6. Sejam X um conjunto arbitrário e H um espaço de Hilbert de funções com domínio em X e imagem em \mathbb{R} . H é dito ser um *Espaço de Hilbert com Núcleo de Reprodução*, se a aplicação $L_x : f \mapsto f(x)$ é contínua. Neste caso, pode se demonstrar, utilizando o Teorema de Representação de Riesz, que para cada $x \in X$ existe uma única função K_x em H tal que $L_x(f) = f(x) = \langle f, K_x \rangle_H$. Isto é, podemos recuperar o valor de $f(x)$ utilizando o produto interno de H com K_x . Esta função K_x é o *Núcleo de Reprodução* de H .

O Lema anterior, portanto, somado a desigualdade de Cauchy-Schwarz, nos garante que

$$|L_\omega(S_k)| = |S_k(\omega)| \leq \|S_k\|_2 \|F(\omega, \cdot)\|_2.$$

Logo, $\|L_\omega\| \leq \|F(\omega, \cdot)\|_2 < \infty$, que é finita em vista do fato de \mathbb{S}^d ser conjunto compacto, e F_k combinação linear de polinômios restritos a \mathbb{S}^d . Isto é, a aplicação $L_\omega : S_k \mapsto S_k(\omega)$ é contínua quando restrita ao espaço dos Harmônicos Esféricos. Assim, fica completamente justificada a nomenclatura atribuída a F_k .

Observação 2.3.7. É importante observar que $L^2(\mathbb{S}^d)$ não é propriamente um espaço de funções, mas sim um espaço de classes de equivalências de funções. Só em um contexto em que identifiquemos funções iguais em quase todo ponto podemos falar sobre os Núcleos de Reprodução como feito na observação anterior.

Ainda sobre o Núcleo de Reprodução de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$,

Corolário 2.3.8. *Existe uma função φ de uma variável real tal que*

$$F_k(\omega, \tau) = \varphi(\langle \omega, \tau \rangle). \quad (2.17)$$

Demonstração. É simplesmente questão de definir a função φ pela equação (2.17) e verificar que é bem definida. Então, se $\langle \omega, \tau \rangle = \langle \omega', \tau' \rangle$, pelo Lema 2.3.4 existe uma matriz $A \in \text{SO}(d+1)$ tal que $A\omega = \omega'$ e $A\tau = \tau'$, portanto pelo Lema 2.3.3

$$\begin{aligned} \varphi(\langle \omega, \tau \rangle) &= F_k(\omega, \tau) \\ &= F_k(A\omega, A\tau) \\ &= F_k(\omega', \tau') \\ &= \varphi(\langle \omega', \tau' \rangle), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Teorema 2.3.9. *Fixado $\tau \in \mathbb{S}^d$, supomos que um polinômio k -homogêneo harmônico L_k satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $L_k(\tau) = 1$;
- (ii) se uma rotação $A \in \text{SO}(d+1)$ satisfaz $A\tau = \tau$, então $L_k(Ax) = L_k(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Então L_k é unicamente determinado, e temos

$$L_k(x) = |x|^k P_{k,d} \left(\left\langle \frac{x}{|x|}, \tau \right\rangle \right) \quad (2.18)$$

onde $P_{k,d}(t)$ é um polinômio de uma variável.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\tau = e_{d+1}$, pois sempre conseguimos encontrar \tilde{L}_k que satisfaz (i) e (ii) para e_{d+1} . De fato, considere a matriz $B \in \text{SO}(d+1)$ tal que $B^{-1}\tau = e_{d+1}$, e defina $\tilde{L}_k(x) = L_k(Bx)$. Então obtemos,

$$\tilde{L}_k(e_{d+1}) = L_k(Be_{d+1}) = L_k(\tau) = 1$$

e se $C \in \text{SO}(d+1)$ satisfaz $Ce_{d+1} = e_{d+1}$,

$$\begin{aligned}\tilde{L}_k(Cx) &= L_k(BCx) \\ &= L_k(BCB^{-1}Bx) \\ &= L_k(Bx) \\ &= \tilde{L}_k(x)\end{aligned}$$

pois $BCB^{-1}\tau = BCe_{d+1} = Be_{d+1} = \tau$. Suponhamos que a partir de agora as hipóteses sejam satisfeitas para L_k e $\tau = e_{d+1}$.

Uma observação sobre matrizes ortogonais que fixam $\tau = e_{d+1}$. Se $A = (a_{ij}) \in \text{SO}(d+1)$ é matriz com esta propriedade, ela é da forma

$$\left[\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

onde $A' \in \text{SO}(d)$ (veja Observação 1.2.13).

Também, como L_k é um polinômio k -homogêneo em $x = (x_1, \dots, x_{d+1})$, podemos escrevê-lo na forma

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j P_{k-j}(x_1, \dots, x_d)$$

onde $P_{k-j} \in \mathcal{P}^{k-j}(\mathbb{R}^d)$. Denotando $x' = (x_1, \dots, x_d)$ e como por hipótese L_k é invariante sobre $A \in \text{SO}(d+1)$ que fixa e_{d+1} , temos

$$\begin{aligned}L_k(x) = L_k(Ax) &\iff \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j P_{k-j}(x') = \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j P_{k-j}(A'x') \\ &\iff P_{k-j}(x') = P_{k-j}(A'x') \quad (j = 0, 1, \dots, k),\end{aligned}$$

isto é, cada P_{k-j} é invariante por A' . Portanto, os P_{k-j} são invariantes por rotações em \mathbb{R}^d . Em outras palavras, são funções constantes sobre esferas de \mathbb{R}^d com centro na origem. Assim podemos escrevê-los como funções do raio de esferas $r\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^d$, ou seja

$$P_{k-j}(x') = C_{k-j}|x'|^{k-j} = C_{k-j}(x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{k-j}{2}}.$$

Em particular, como são polinômios, a equação acima implica que se $k-j$ for ímpar, $C_{k-j} = 0$. Denotando Δ' o Laplaciano em \mathbb{R}^d , temos $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} + \Delta'$ e levanto em

consideração que por hipótese L_k é harmônico,

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta L_k(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} \left(\sum_{j=0}^k x_{d+1}^j P_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \right) + \Delta' \left(\sum_{j=0}^k x_{d+1} P_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} (x_{d+1}^j) P_{k-j}(x') + \left(\sum_{j=0}^k x_{d+1}^j \Delta' (P_{k-j}(x')) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^k j(j-1) x_{d+1}^{j-2} P_{k-j}(x') + \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j C_{k-j} \Delta' (|x'|^{k-j}) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)(j+2) x_{d+1}^j C_{k-j-2} |x'|^{\frac{k-j-2}{2}} + \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j C_{k-j} \Delta' (|x'|^{k-j}).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_{k-j} \Delta' (|x'|^{k-j}) = -(j+1)(j+2) C_{k-j-2} |x'|^{\frac{k-j-2}{2}} \quad (2.19)$$

e também, por cálculo direto

$$\Delta' (x_1^2 + \dots + x_d^2)^m = [2md + 4m(m-1)] (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{m-1}. \quad (2.20)$$

Comparando as Equações (2.19) e (2.20), obtemos que as constantes estão relacionadas de modo que

$$(k-j)(d+k-j-2) C_{k-j} = -(j+2)(j+1) C_{k-j-2},$$

isto é, sabendo que $C_0 = L_k(\tau) = 1$, podemos calcular todas as constantes, e determinamos o polinômio L_k ,

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^k x_{d+1}^j C_{k-j} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{k-j}{2}},$$

lembrando que $C_{k-j} = 0$ se $k-j$ for ímpar. Para concluir o resultado, consideramos agora um ponto $\omega \in \mathbb{S}^d$, para $t = \omega \cdot e_{d+1}$ como feito em (1.3), podemos escrevê-lo na seguinte forma:

$$\omega = \sqrt{1-t^2} \omega' + t e_{d+1}$$

onde $\omega' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Então, definimos $P_{k,d}(t)$, $t \in [-1, 1]$, por

$$L_k(\omega) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ (k-j) \text{ é par}}} C_{k-j} t^j (1-t^2)^{\frac{k-j}{2}} := P_{k,d}(t),$$

e verificamos facilmente que (2.18) é satisfeita pra $\tau = e_{d+1}$.

Consideremos agora o caso geral. Sejam L_k e τ como nas hipóteses do teorema, e sejam $B \in \text{SO}(d+1)$ e \tilde{L}_k tais que $B^{-1}\tau = e_{d+1}$ e $\tilde{L}_k(x) = L_k(Bx)$. Como \tilde{L}_k verifica as

hipóteses do teorema para $\tau = e_{d+1}$, a Equação (2.18) é válida. Então

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \tilde{L}_k(B^{-1}x) \\ &= |B^{-1}x|^k P_{k,d} \left(\left\langle \frac{B^{-1}x}{|B^{-1}x|}, e_{d+1} \right\rangle \right) \\ &= |x|^k P_{k,d} \left(\left\langle \frac{x}{|x|}, B e_{d+1} \right\rangle \right) \\ &= |x|^k P_{k,d} \left(\left\langle \frac{x}{|x|}, \tau \right\rangle \right), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração do teorema. \square

Definição 2.3.10. *O polinômio $P_{k,d}$ definido no Teorema 2.3.9 é o Polinômio de Legendre de grau k e dimensão $d + 1$.*

Observação 2.3.11. Algumas propriedades do polinômio de Legendre podem ser deduzidas imediatamente do resultado anterior. Note que $P_{k,d}(1) = 1$. Se k é par, é uma função par, e se k é ímpar, é uma função ímpar. Em particular, temos $P_{k,d}(-1) = (-1)^k$.

No próximo resultado relacionamos o Polinômio de Legendre com o Núcleo de Reprodução de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$.

Teorema 2.3.12 (Teorema da Adição). *Seja $\{S_{k,j}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ e seja $P_{k,d}$ o Polinômio de Legendre de grau k e dimensão $d + 1$. Então*

$$P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) = \frac{1}{N(k,d)} \sum_{j=1}^{N(k,d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)}. \quad (2.21)$$

Demonstração. Considerando uma base ortonormal dada, temos

$$\begin{aligned} N(k,d) &= \sum_{j=1}^{N(k,d)} (S_{k,j}, S_{k,j}) = \sum_{j=1}^{N(k,d)} \int_{\mathbb{S}^d} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{j=1}^{N(k,d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} F_k(\omega, \omega) d\sigma(\omega) \\ &= F_k(\tau, \tau) \int_{\mathbb{S}^d} d\sigma(\omega) = F_k(\tau, \tau) \end{aligned}$$

donde a última igualdade é válida, pois F_k é invariante por rotações, logo constante na esfera, e a medida σ é normalizada. Para τ fixo, seja

$$L_k(\omega) = \frac{F_k(\omega, \tau)}{N(k,d)}, \omega \in \mathbb{S}^d.$$

Como $F_k(\cdot, \tau)$ é um harmônico esférico de grau k , $L_k(x) = |x|^k L_k(x/|x|)$, $x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$, é um polinômio k -homogêneo que satisfaz as condições do Teorema 2.3.9. Portanto,

$$L_k(\omega) = P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle), \omega \in \mathbb{S}^d.$$

Comparando as duas equações obtemos

$$P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) = \frac{F_k(\omega, \tau)}{N(k, d)} = \frac{1}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k,d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)}$$

e portanto o resultado segue. □

Corolário 2.3.13. *Os coeficientes do Polinômio de Legendre são reais. Isto é*

$$P_{k,d}(t) = \overline{P_{k,d}(t)}, \quad t \in [-1, 1].$$

Demonstração. Diretamente do teorema anterior, para $\omega, \tau \in \mathbb{S}^d$,

$$P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) = \overline{P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)},$$

o que implica que os coeficientes de $P_{k,d}$ são reais. □

Corolário 2.3.14. *Se $\{S_{k,j}\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}^k , temos*

$$\sum_{j=1}^{N(k,d)} |S_{k,j}(\omega)|^2 = N(k, d).$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 2.3.12

$$1 = P_{k,d}(\langle \omega, \omega \rangle) = \frac{1}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k,d)} |S_{k,j}(\omega)|^2,$$

e assim segue o resultado do corolário. □

Algumas propriedades do Polinômio de Legendre são enunciadas a seguir.

Proposição 2.3.15. *Seja $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ e $P_{k,d}$ o polinômio de Legendre de grau k e dimensão $d + 1$. Temos*

$$(i) \quad S_k(\omega) = N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) S_k(\tau) \, d\sigma(\tau);$$

$$(ii) \quad P_{k,d}(1) = 1 \text{ e } -1 \leq P_{k,d}(t) \leq 1 \text{ para } -1 \leq t \leq 1, \text{ em particular}$$

$$\sup_{\omega \in \mathbb{S}^d} |P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)| = 1, \quad \tau \in \mathbb{S}^d;$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{S}^d} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)^2 \, d\sigma(\omega) = \frac{1}{N(k, d)}, \tau \in \mathbb{S}^d;$$

$$(iv) |S_k(\omega)| \leq \sqrt{N(k, d)} \|S_k\|_2.$$

Demonstração. A propriedade (i) segue imediatamente do Lema 2.3.5, com $j = k$. Já foi estabelecido que $P_{k,d}(1) = 1$ na Observação 2.3.11. Se $t \in [-1, 1]$, considere $\omega, \tau \in \mathbb{S}^d$, tais que $\langle \omega, \tau \rangle = t$. Temos pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} |P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)|^2 &= \left| \frac{1}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k, d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)} \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k, d)} |S_{k,j}(\omega)|^2 \right) \left(\frac{1}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k, d)} |S_{k,j}(\tau)|^2 \right) \\ &= P_{k,d}(\langle \omega, \omega \rangle) P_{k,d}(\langle \tau, \tau \rangle) \\ &= 1, \end{aligned}$$

o que concluí a demonstração de (ii).

A propriedade (iii) segue como aplicação do Teorema da Adição:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)^2 d\sigma(\omega) &= \frac{1}{N(k, d)^2} \int_{\mathbb{S}^d} \left| \sum_{j=1}^{N(k, d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)} \right|^2 d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{N(k, d)^2} \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{j, j'=1}^{N(k, d)} S_{k,j}(\omega) \overline{S_{k,j}(\tau)} \overline{S_{k,j'}(\omega)} S_{k,j'}(\tau) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{N(k, d)^2} \sum_{j, j'=1}^{N(k, d)} S_{k,j'}(\tau) \overline{S_{k,j'}(\tau)} (S_{k,j}, S_{k,j'}) \\ &= \frac{1}{N(k, d)^2} \sum_{j, j'=1}^{N(k, d)} S_{k,j'}(\tau) \overline{S_{k,j'}(\tau)} \delta_{j, j'} \\ &= \frac{1}{N(k, d)^2} \sum_{j=1}^{N(k, d)} S_{k,j}(\tau) \overline{S_{k,j}(\tau)} = \frac{1}{N(k, d)}. \end{aligned}$$

O item (iv) segue de (i), (iii), Lema 2.3.5, Teorema 2.3.12 e pela desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} |S_k(\omega)|^2 &= \left| N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) S_k(\omega) d\sigma(\omega) \right|^2 \\ &\leq N(k, d)^2 \left(\int_{\mathbb{S}^d} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle)^2 d\sigma(\omega) \right) \|S_k\|_2^2 \\ &= N(k, d) \|S_k\|_2^2. \end{aligned}$$

O resultado de (iv) segue tomando a raiz em ambos os membros da desigualdade acima. \square

Corolário 2.3.16. Para $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ temos

$$\|S_k\|_2 \leq \|S_k\|_\infty \leq \sqrt{N(k, d)} \|S_k\|_2.$$

Demonstração. A primeira desigualdade é imediata e a segunda decorre do item (iv) da proposição anterior. \square

Lema 2.3.17. Para uma sequência $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de polinômios na esfera $S_k \in \mathcal{P}^k(\mathbb{S}^d)$, temos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|S_k\|_2} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|S_k\|_\infty}, \quad (2.22)$$

e

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k! \|S_k\|_2} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k! \|S_k\|_\infty}. \quad (2.23)$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.10, existe uma constante $M > 1$ que depende apenas de d tal que $k^{d-1} \leq N(k, d) \leq Mk^{d-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$(\sqrt[k]{k})^{(d-1)/2} \leq \sqrt[2k]{N(k, d)} \leq \sqrt[2k]{M} (\sqrt[k]{k})^{(d-1)/2},$$

e como $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{M} = 1$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{N(k, d)} = 1.$$

Para cada inteiro positivo k seja $S_k \in \mathcal{P}^k(\mathbb{S}^d)$. Pelo Teorema 2.2.9, podemos representar S_k da seguinte forma,

$$S_k = \sum_{j=k-2\lfloor k/2 \rfloor}^k \bar{S}_j, \quad \bar{S}_j \in \mathcal{H}^j(\mathbb{S}^d).$$

Logo, pelo Corolário 2.3.16 e como $\|S_k\|_2 \geq \|\bar{S}_j\|_2$, temos que

$$\begin{aligned} \|S_k\|_\infty &\leq \sum_{j=k-2\lfloor k/2 \rfloor}^k \|\bar{S}_j\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=k-2\lfloor k/2 \rfloor}^k \sqrt{N(j, d)} \|\bar{S}_j\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{j=k-2\lfloor k/2 \rfloor}^k \sqrt{N(j, d)} \right) \|S_k\|_2 \\ &\leq (\lfloor k/2 \rfloor + 1) \sqrt{N(k, d)} \|S_k\|_2 \\ &\leq k \sqrt{N(k, d)} \|S_k\|_2 \end{aligned}$$

e assim obtemos

$$\|S_k\|_2 \leq \|S_k\|_\infty \leq k \sqrt{N(k, d)} \|S_k\|_2.$$

Considerando o limite calculado acima e estas desigualdades obtemos as equações (2.22) e (2.23). \square

Teorema 2.3.18 (Funk-Hecke). *Seja f uma função mensurável definida em $[-1, 1]$ tal que*

$$\int_{-1}^1 |f(t)|(1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt < \infty.$$

Se $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, temos que

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) S_k(\tau) d\sigma(\tau) = \left[\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} \int_{-1}^1 f(t) P_{k,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \right] S_k(\omega). \quad (2.24)$$

Demonstração. Demonstramos primeiro para o caso particular $S_k(\tau) = P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle)$. Para este fim, considere a aplicação F definida por

$$F(\omega, \tau') = \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle) d\sigma(\tau).$$

Podemos observar alguns fatos sobre a aplicação F . Primeiro, como função de τ' , é um elemento de \mathcal{H}^k , pois se $\{S_{k,j}\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}^k , podemos escrever F como combinação linear destas funções. De fato,

$$\begin{aligned} F(\omega, \tau') &= \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle) d\sigma(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) \frac{1}{N(k,d)} \left[\sum_{j=1}^{N(k,d)} S_{k,j}(\tau') \overline{S_{k,j}(\tau)} \right] d\sigma(\tau) \\ &= \sum_{j=1}^{N(k,d)} \left[\frac{1}{N(k,d)} \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) \overline{S_{k,j}(\tau)} d\sigma(\tau) \right] S_{k,j}(\tau') \\ &= \sum_{j=1}^{N(k,d)} c_j S_{k,j}(\tau'). \end{aligned}$$

Além disso, como a medida em \mathbb{S}^d é invariante por rotações, podemos escrever,

$$F(A\omega, A\tau') = F(\omega, \tau'), \quad \forall A \in \text{SO}(d+1).$$

F também pode ser escrita em função de $P_{k,d}$, de fato temos

$$F(\omega, \tau') = F(\omega, \omega) P_{k,d}(\langle \omega, \tau' \rangle).$$

Para isto, basta considerarmos a aplicação L definida por

$$L(x) = \frac{F(\omega, x)}{F(\omega, \omega)}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1},$$

onde $F(\omega, x) = |x|^k F(\omega, x/|x|)$ para $x \neq 0$ e $F(0, 0) = 0$. É fácil ver que L satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.3.9 (com $\tau = \omega$), e portanto, obtemos $L(\tau') = P_{k,d}(\langle \omega, \tau' \rangle)$ e em seguida que $F(\omega, \tau') = F(\omega, \omega) P_{k,d}(\langle \omega, \tau' \rangle)$. Feito isto seja $A \in \text{SO}(d+1)$ tal que

$A\omega = e_{d+1}$. Temos pela relação (1.4) que

$$\begin{aligned}
 F(\omega, \omega) &= F(A\omega, A\omega) = F(e_{d+1}, e_{d+1}) \\
 &= \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle e_{d+1}, \tau \rangle) P_{k,d}(\langle e_{d+1}, \tau \rangle) d\sigma_d(\tau) \\
 &= \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle e_{d+1}, \tau \rangle) P_{k,d}(\langle e_{d+1}, \tau \rangle) |\mathbb{S}^d| d\sigma_d(\tau) \\
 &= \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{-1}^1 f(t) P_{k,d}(t) (1-t^2)^{(d-2)/2} |\mathbb{S}^{d-1}| dt d\sigma_{d-1}(\tau') \\
 &= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} \int_{-1}^1 f(t) P_{k,d}(t) (1-t^2)^{(d-2)/2} dt.
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 F(\omega, \tau') &= F(\omega, \omega) P_{k,d}(\langle \omega, \tau' \rangle) \\
 &= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} P_{k,d}(\langle \omega, \tau' \rangle) \int_{-1}^1 |f(t)| P_{k,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt,
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração no caso $S_k(\tau) = P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle)$. Para o caso geral, dado $S_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, temos pela Proposições 2.3.15 que

$$S_k(\tau) = N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau') P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle) d\sigma(\tau'),$$

portanto, o teorema de Fubini garante que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) S_k(\tau) d\sigma(\tau) &= \\
 &= \int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) \left[N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau') P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle) d\sigma(\tau') \right] d\sigma(\tau) \\
 &= N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau') \left[\int_{\mathbb{S}^d} f(\langle \omega, \tau \rangle) P_{k,d}(\langle \tau, \tau' \rangle) d\sigma(\tau) \right] d\sigma(\tau') \\
 &= N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau') \left[\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} P_{k,d}(\omega, \tau') \int_{-1}^1 |f(t)| P_{k,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \right] d\sigma(\tau') \\
 &= \left[\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} \int_{-1}^1 |f(t)| P_{k,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \right] N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} S_k(\tau') P_{k,d}(\omega, \tau') d\sigma(\tau') \\
 &= \left[\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^d|} \int_{-1}^1 f(t) P_{k,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \right] S_k(\omega),
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Como prometido anteriormente, iremos decompor o espaço $L^2(\mathbb{S}^d)$ como uma soma direta de espaços harmônicos esféricos.

Lema 2.3.19. *Toda função contínua sobre \mathbb{S}^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.*

Demonstração. Todo polinômio é uma soma finita de polinômios homogêneos, e pelo Teorema 2.2.9, a restrição de um polinômio k -homogêneo à esfera \mathbb{S}^d é uma soma finita de harmônicos esféricos, portanto todo elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{S}^d)$ é uma soma finita de harmônicos esféricos. Logo segue do Teorema 1.4.2 que toda função contínua sobre \mathbb{S}^d pode ser aproximada uniformemente por somas finitas de harmônicos esféricos. \square

Lema 2.3.20. *O subespaço gerado por $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^d)$.*

Demonstração. Como $C(\mathbb{S}^d)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^d)$ (ver [17], Teorema 3.14), este resultado decorre de Lema 2.3.19. \square

Teorema 2.3.21. *$L^2(\mathbb{S}^d)$, como espaço de Hilbert, pode ser decomposto na forma*

$$L^2(\mathbb{S}^d) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d).$$

Em outras palavras, dada $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existe uma única $f_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ tal que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

onde a convergência ocorre na topologia de $L^2(\mathbb{S}^d)$. Além disso,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_2^2.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ seja $\{S_{k,j}\}_{j=1}^{N(k,d)}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. O conjunto

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \bigcup_{j=1}^{N(k,d)} \{S_{k,j}\},$$

é um sistema ortogonal completo pelo Teorema 1.2.3 e o Lema 2.3.20. Assim, o Corolário 1.2.4 permite escrever para cada $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(k,d)} (f, S_{k,j}) S_{k,j}.$$

Denotando $f_k = \sum_{j=1}^{N(k,d)} (f, S_{k,j}) S_{k,j}$, obtemos a expansão em harmônicos esféricos desejada. A segunda afirmação também decorre do Teorema 1.2.3, pois

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(k,d)} |(f, S_{k,j})|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_2^2, \end{aligned}$$

completando assim a demonstração do teorema. \square

Observação 2.3.22. Denominamos os elementos f_k da expressão acima, os k -componentes esféricos de f . Considerando bases ortonormais $\{S_{k,j}\}$ de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, podemos também escrever f em sua *Expansão de Fourier*, isto é, na forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(k,d)} (f, S_{k,j}) S_{k,j}.$$

A expansão nesta forma é possível devido aos k -componentes esféricos são elementos de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. Denotamos por $\hat{f}_{k,j} = (f, S_{k,j})$ os *Coefficientes de Fourier* de f .

Também, observe que se $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, e $1/p + 1/q = 1$, a desigualdade de Hölder garante que

$$|(f, S_{k,j})| \leq \|S_{k,j}\|_q \|f\|_p < \infty.$$

Portanto podemos falar da expansão de Fourier de f mesmo quando esta não está em L^2 . O que não temos de imediato é a convergência da série acima para f em $L^p(\mathbb{S}^d)$.

Proposição 2.3.23. *Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$. Então o k -ésimo componente esférico de f é dado por*

$$f_k(\omega) = N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau).$$

Demonstração. Decorre imediatamente das relações de ortogonalidade entre os espaços \mathcal{H}^k e da Proposições 2.3.15. De fato,

$$\begin{aligned} N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) &= N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}_j(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) \right] d\sigma(\tau) \\ &= N(k, d) \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^d} \hat{f}_j(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) \\ &= f_k(\omega), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

2.4 Funções Suaves e Analíticas em \mathbb{S}^d .

Nesta seção apresentamos os resultados principais deste trabalho.

Definição 2.4.1. *Uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ é de decaimento rápido se*

$$\sup\{|k|^j |x_k|; k \in \mathbb{Z}_+\} < \infty, \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Definição 2.4.2. *Dadas duas sequências de números reais $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$, escreveremos $x_k = O(y_k)$ quando*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|y_k|} < \infty.$$

Teorema 2.4.3 ([4], Teorema 2.6.4). *Dados $k \in \mathbb{N}$ e $\{S_{k,j}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se $k \neq 0$, existe uma constante $C(d)$ tal que*

$$|S_{k,j}(\omega)| \leq C(d)k^{\frac{d-1}{2}}, \quad \omega \in \mathbb{S}^d.$$

(ii) *Se α é um multi-índice e $|\alpha| + k > 0$, então existe uma constante $C(d, |\alpha|)$ tal que*

$$|\partial^\alpha[|x|^k S_{k,j}(x/|x|)]| \leq C(d, |\alpha|)k^{|\alpha| + \frac{d-1}{2}} |x|^{k-|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}.$$

Teorema 2.4.4. *Sejam $r \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, e $\{S_{k,1}, \dots, S_{k,N(k,d)}\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$. Se $|(f, S_{k,j})| = O(k^{-2r})$, $j \in \{1, \dots, N(k,d)\}$, e $4r \geq 3(d+1) - 2$, então existe uma função g em $C^s(\mathbb{S}^d)$, tal que $g = f$ q.t.p, onde $s = \lfloor (4r - 3(d+1) + 2)/2 \rfloor$.*

Demonstração. A condição $4r \geq 3(d+1) - 2$ implica que $s \geq 0$. Considere a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(k,d)} (f, S_{k,j}) \partial^\alpha S_{k,j} \tag{2.25}$$

onde α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq s$. Aqui $\partial^\alpha S_{k,j}$ segue a convenção estabelecida na Definição 1.5.3.

Usando a definição de s obtemos que $|\alpha| + (d-1)/2 - 2r \leq -(d+1)$. Pelo Teorema 2.1.10, existe uma constante $C_2 > 1$, dependendo somente de d , tal que $N(k,d) \leq C_2(k^{d-1})$, e pelo Teorema 2.4.3 existe uma constante $C_1 > 0$, dependendo somente de d e s , tal que $|\partial^\alpha S_{k,j}(\omega)| \leq C_1 k^{\alpha + (d-1)/2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq N(k,d)$ e $\omega \in \mathbb{S}^d$. Assim, podemos estimar a série acima da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{N(k,d)} (f, S_{k,j}) \partial^\alpha S_{k,j}(\omega) \right| &\leq \sum_{j=1}^{N(k,d)} |(f, S_{k,j}) \partial^\alpha S_{k,j}(\omega)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N(k,d)} k^{-2r} C_1 k^{|\alpha| + \frac{d-1}{2}} \\ &= C_1 N(k,d) k^{|\alpha| + \frac{d-1}{2} - 2r} \\ &\leq C_1 C_2 k^{d-1} k^{|\alpha| + \frac{d-1}{2} - 2r} \\ &= C_3 k^{-2}. \end{aligned}$$

Portanto o Teorema 1.4.1 nos garante que a série dada em (2.25) converge uniformemente em \mathbb{S}^d para uma função g_α contínua. Em particular, tomando $g = g_0$, a Proposição 1.5.5 implica que $g \in C^r(\mathbb{S}^d)$. Como a função g é contínua, e a esfera é compacta, temos $g \in L^2(\mathbb{S}^d)$. Por unicidade de sua expansão em harmônicos esféricos, segue que $g = f$ q.t.p. \square

Teorema 2.4.5. *Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$ e f_k o k -componente esférico harmônico de f . Então para qualquer $m = 0, 1, 2, \dots$, temos*

$$\sup\{k^m \|f_k\|_2; k = 0, 1, 2, \dots\} < \infty; \quad (2.26)$$

isto é, a sequência $\{\|f_k\|_2\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ é de decaimento rápido.

Reciprocamente, se $\{f_k\}$ é uma sequência de esféricos harmônicos $f_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$, e $\{\|f_k\|_2\}$ é de decaimento rápido, então a função

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

é tal que a série converge uniformemente, $f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$ e o k -componente esférico harmônico de f é f_k .

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$ e considere f_k o k -componente esférico de f . Dado um m inteiro par, denotamos $F = (-\Delta_{\mathbb{S}})^{m/2} f$. É óbvio que $F \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$. Se denotamos por F_k seu k -componente esférico, obtemos, utilizando a Proposições 2.3.23, Lema 2.2.2 e Teorema 2.2.4,

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} (-\Delta_{\mathbb{S}})^{\frac{m}{2}} f(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) \\ &= N(k, d) \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) (-\Delta_{\mathbb{S}})^{\frac{m}{2}} P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) \\ &= N(k, d) (k(k+d-1))^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) \\ &= (k(k+d-1))^{\frac{m}{2}} f_k(\omega), \end{aligned}$$

e conseqüentemente, obtemos a relação

$$\|F_k\|_2 = (k(k+d-1))^{\frac{m}{2}} \|f_k\|_2 \geq k^m \|f_k\|_2.$$

Portanto, o Teorema 2.3.21 implica

$$k^m \|f_k\|_2 \leq \|F\|_2 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Caso m seja ímpar, consideramos $m+1$, e a desigualdade acima se mantém. Concluimos assim que a sequência $\{\|f_k\|_2\}$ é de decaimento rápido.

Para a recíproca, observe que se a sequência $\{\|f_k\|_2\}$ é de decaimento rápido, então $\{\|f_k\|_\infty\}$ também possui esta propriedade. De fato, pelo Teorema 2.1.10 e Corolário 2.3.16, obtemos para todo m ,

$$\begin{aligned} k^m \|f_k\|_\infty &\leq k^m \sqrt{N(k, d)} \|f_k\|_2 \\ &\leq k^m C k^{\frac{d-1}{2}} \|f_k\|_2 \\ &\leq C k^{\frac{2m+d-1}{2}} \|f_k\|_2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Isto nos permite demonstrar que sequência $\{f^N\}$ definida por

$$f^N = \sum_{k=0}^N f_k$$

é de Cauchy. De fato, tomando $m = 2$ e inteiros não negativos N e M , $M < N$, o decaimento rápido de $\{\|f_k\|_\infty\}$ garante que

$$\begin{aligned} |f^N(\omega) - f^M(\omega)| &\leq \sum_{k=M+1}^N |f_k(\omega)| \\ &\leq \sum_{k=M+1}^N \frac{C}{k^2}. \end{aligned}$$

Logo, temos que a sequência é de Cauchy. Além disso como cada $f_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$ é contínua e a convergência é uniforme, temos que o limite uniforme f é uma função contínua.

Resta mostrar que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$ e possui a expansão em harmônicos esféricos desejada. Repetindo o argumento acima para a sequência $\{(-\Delta_{\mathbb{S}})^{m/2} f^N\}$, com m par, e como pelo Teorema 2.2.4

$$(-\Delta_{\mathbb{S}})^{m/2} f^N(\omega) = \sum_{k=0}^N (k(k+d-1))^{m/2} f_k(\omega),$$

obtemos que esta converge uniformemente em \mathbb{S}^d para uma função contínua g_m . Utilizando a Proposições 1.5.5 observamos que $(-\Delta_{\mathbb{S}})^{m/2} f = g_m$ para qualquer m par, o que nos permite concluir que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$. O Teorema 2.3.21 garante unicidade da decomposição, logo f_k é o k -componente esférico de f para todo k . Isto conclui a demonstração do teorema. □

Notação 2.4.6. Denotamos por $Z^{(k)}$ a função definida em $[-1, 1]$ por $Z^{(k)}(t) = N(k, d)P_{k,d}(t)$.

Observação 2.4.7. De acordo com a Definição 1.3.9, Notação 2.4.6 e a Proposição 2.3.23, uma função $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$ pode ser escrita como

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(k)} * f.$$

Esta observação simplificará o enunciado dos próximos resultados.

Definição 2.4.8. Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de números complexos e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(\mathbb{S}^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{S}^d)$ com expansão formal em harmônicos esféricos

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^{(k)} * \varphi,$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty,$$

onde $U_p = \{f \in L^p(\mathbb{S}^d) : \|f\|_p \leq 1\}$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$.

Exemplo 2.4.9. Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de números reais não negativos tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} < 1.$$

Vamos mostrar que Λ é um operador limitado de $L^p(\mathbb{S}^d)$ em $L^q(\mathbb{S}^d)$, para todo $p, q \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$.

De fato, seja $A_n = \sup\{\sqrt[k]{\lambda_k} : k \geq n\}$. Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} < b < 1$$

para algum $0 < b < 1$. Portanto existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \leq b$ para $n \geq n_0$ e assim

$$\lambda_k \leq b^k, \quad k \geq n_0, \quad 0 < b < 1.$$

Agora, para $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, $\|f\|_1 = 1$ e $\omega \in \mathbb{S}^d$ temos

$$\begin{aligned} |\lambda_k Z^{(k)} * f(\omega)| &\leq \lambda_k \|Z^{(k)}\|_\infty \|f\|_1 \\ &\leq \lambda_k M k^{d-1} \\ &\leq C b^k k^{d-1}, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\begin{aligned} \|\Lambda f\|_\infty &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\lambda_k Z^{(k)} * f\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} C b^k k^{d-1} \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = C_2, \end{aligned}$$

implicando que Λ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{S}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{S}^d)$. Se $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$ então $\|\Lambda f\|_q \leq \|\Lambda f\|_\infty, \|f\|_1 \leq \|f\|_p, \|\Lambda f\|_\infty \leq C_2 \|f\|_1$ e assim segue o resultado desejado.

Teorema 2.4.10. *Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}$ uma sequência limitada de números reais não negativos. Seja também Λ o operador multiplicador em $L^2(\mathbb{S}^d)$ definido por*

$$\Lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^{(k)} * f.$$

Se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} < 1,$$

então para todo $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, Λ está bem definido como operador limitado de $L^p(\mathbb{S}^d)$ em $L^q(\mathbb{S}^d)$, e ΛU_p é um conjunto de funções analíticas sobre \mathbb{S}^d . Se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} = 0,$$

ΛU_p é um conjunto de funções inteiras sobre \mathbb{S}^d .

Demonstração. Pelo Exemplo 2.4.9, Λ é um operador limitado de $L^p(\mathbb{S}^d)$ em $L^q(\mathbb{S}^d)$. Seja $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$ e seja f_k o k -componente esférico de f . Pela Observação 2.4.7 temos que

$$f_k(\omega) = \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) Z^{(k)}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau).$$

Seja P_k o único polinômio harmônico e homogêneo de grau k cuja restrição à esfera é o harmônico esférico f_k . Considere a função F definida por

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k(x) \quad (2.27)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ onde a série converge. Observe que para $\omega \in \mathbb{S}^d$, $F(\omega) = \Lambda f(\omega)$, e portanto, se mostrarmos que F é analítica em $B(0, s)$ para algum $s > 1$, vamos poder concluir que Λf é analítica em \mathbb{S}^d .

Agora, dado $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, escrevemos $x = r\omega$, $\omega \in \mathbb{S}^d$, $r = |x|$. Aplicando o Teorema 2.1.10 e a Proposições 2.3.15, obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda_k P_k(x)| &= |\lambda_k r^k P_k(\omega)| \\ &= \lambda_k r^k |f_k(\omega)| \\ &= \lambda_k r^k N(k, d) \left| \int_{\mathbb{S}^d} f(\tau) P_{k,d}(\langle \omega, \tau \rangle) d\sigma(\tau) \right| \\ &\leq \lambda_k r^k N(k, d) \|P_{k,d}\|_{\infty} \|f\|_p \\ &\leq \lambda_k r^k M k^{d-1} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Supomos $\|f\|_p = 1$, e assim obtemos

$$|\lambda_k P_k(x)| \leq M \lambda_k r^k k^{d-1} := b_k, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Seja $c = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k}$. Temos por nossas hipóteses que $0 \leq c < 1$.

Primeiro, se $c > 0$, consideremos s tal que $1 < s < 1/c$. Logo, se $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $|x| = r \leq s$, temos $rc \leq sc < 1$. Feito isto, obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M} \sqrt[k]{\lambda_k} r (\sqrt[k]{k})^{d-1} \\ &= r \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} \\ &= rc < 1. \end{aligned}$$

Portanto a série em (2.27) converge uniformemente na bola fechada $\overline{B}(0, s) = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| \leq s\}$. Assim a função F definida em (2.27) pode ser representada por sua série de Taylor ao redor de 0 para todo x tal que $|x| \leq s$, isto é,

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha F(0) x^\alpha,$$

onde

$$\lambda_k P_k(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha F(0) x^\alpha.$$

Utilizando Teorema 1.4.7 podemos concluir que F é analítica em $B(0, s)$. Como observado anteriormente, isto implica que Λf é analítica em \mathbb{S}^d .

De forma semelhante, se $c = 0$, temos que para qualquer $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, com norma r , obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M} \sqrt[k]{\lambda_k} r (\sqrt[k]{k})^{d-1} \\ &= r \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por observação semelhante a anterior, a Série de Taylor de F converge uniformemente em $B(0, r)$ para qualquer $r > 0$. Isto é, o raio de convergência da série que define F é infinito. Podemos assim concluir que F é uma função inteira em \mathbb{R}^d e por definição f é inteira em \mathbb{S}^d .

□

Exemplo 2.4.11. Considere o operador multiplicador $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, onde $\lambda_k = k^{-\gamma} (\log k)^{-\xi}$ para $k \geq 2$, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, e $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\xi \geq 0$. Afirmamos que ΛU_2 é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis sobre \mathbb{S}^d . Especificamente, para $s = [(2\gamma - 3(d+1) + 2)/2]$ temos $\Lambda U_2 \subset C^s(\mathbb{S}^d)$.

De fato, seja $g = \Lambda f$, $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$, $\|f\|_2 \leq 1$. Temos, levando em consideração a Observação 2.3.22, e $\{S_{k,j}\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^d)$,

$$\begin{aligned} g &= \Lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^{(k)} * f \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\gamma} (\log k)^{-\xi} Z^{(k)} * f \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(k,d)} k^{-\gamma} (\log k)^{-\xi} (f, S_{k,j}) S_{k,j}. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} |(g, S_{k,j})| &= |k^{-\gamma}(\log k)^{-\xi}(f, S_{k,j})| \\ &\leq k^{-\gamma}\|f\|_2\|S_{k,j}\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 k^{-\gamma} \\ &\leq Ck^{-\gamma}. \end{aligned}$$

A afirmação segue do Teorema 2.4.4, se $\gamma \geq (3d + 1)/2$.

Exemplo 2.4.12. Considere o operador multiplicador $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}$, $\gamma > 0$, $r > 0$. Então

- (i) Quando $r < 1$ o conjunto ΛU_p esta contido em $C^\infty(\mathbb{S}^d)$;
- (ii) Se $r \geq 1$ o conjunto ΛU_p consiste de funções analíticas;
- (iii) Se $r > 1$ o conjunto ΛU_p consiste de funções inteiras.

Consideremos $g \in \Lambda U_p$, $g = \Lambda f$, $0 < r < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Mostraremos que os seus k -componentes esféricos formam uma sequência de decaimento rápido. Assim o Teorema 2.4.5 garante o resultado. A função g pode ser descrita como

$$\Lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^{(k)} * f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma k^r} Z^{(k)} * f. \quad (2.28)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma k^r} Z^{(k)} * f\|_2 &\leq \|e^{-\gamma k^r} Z^{(k)} * f\|_\infty \\ &\leq e^{-\gamma k^r} \|Z^{(k)} * f\|_\infty \\ &\leq e^{-\gamma k^r} \|Z^{(k)}\|_\infty \|f\|_1 \\ &\leq e^{-\gamma k^r} N(k, d) \|f\|_p \\ &\leq C e^{-\gamma k^r} k^{d-1}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde as desigualdades se justificam pelo Teorema 2.1.10. Portanto, para qualquer que seja $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sup\{|k|^j \|e^{-\gamma k^r} Z^{(k)} * f\|_2 : k \in \mathbb{Z}_+\} \leq \sup\{C e^{-\gamma k^r} k^{d+j-1} : k \in \mathbb{Z}_+\} < \infty.$$

Isto é $\{\|e^{-\gamma k^r} Z^{(k)} * f\|_2\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de decaimento rápido, e pelo Teorema 2.4.5, $\Lambda f \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$.

Para mostrar analiticidade, quando $r \geq 1$, invocamos o Teorema 2.4.10. Temos que

$$\sqrt[k]{\lambda_k} = (e^{-\gamma k^r})^{1/k} = e^{-\gamma k^{r-1}} \leq e^{-\gamma}$$

e portanto,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} \leq e^{-\gamma} < 1,$$

o que demonstra nossa afirmação.

Caso $r > 1$, podemos escrever $r = 1 + \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Logo

$$\sqrt[k]{\lambda_k} = (e^{-\gamma k^r})^{1/k} = e^{-\gamma k^\varepsilon}$$

e assim

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda_k} = 0,$$

o resultado segue do Teorema [2.4.10](#).

3 O Caso da Esfera complexa

Neste capítulo fazemos um estudo para a esfera complexa Ω_d , análogo ao que foi feito nos Capítulos 1 e 2 para a esfera real \mathbb{S}^d , mas com menos detalhes. A maior parte dos resultados aqui apresentados sobre análise harmônica na esfera complexa estão sem demonstração e podem ser encontrados com suas demonstrações na dissertação [19].

Um primeiro objetivo é fazer a demonstração da Desigualdade de Young para a esfera complexa, resultado este que não encontramos demonstrado na literatura.

Um segundo objetivo é fazer um estudo de funções suaves e analíticas na esfera complexa Ω_d , dando exemplos de conjuntos de funções finitamente diferenciáveis, infinitamente diferenciáveis, analíticas e inteiras em Ω_d . Estes resultados seguem como consequência simples dos resultados do mesmo tipo obtidos para a esfera real no Capítulo 2.

3.1 Análise Harmônica na Esfera Complexa

Nesta seção fornecemos as notações, definições e resultados básicos da Análise Harmônica na Esfera Complexa que necessitaremos nas seções seguintes. Não demonstramos nenhum dos resultados aqui apresentados por se acharem demonstrados em [19].

Utilizaremos a identificação de \mathbb{C}^d com \mathbb{R}^{2d} dada pela aplicação linear Ψ definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (z_1, \dots, z_d) &\longmapsto (x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $x_k = \operatorname{Re}(z_k)$ e $y_k = \operatorname{Im}(z_k)$. Com as topologias usuais de \mathbb{C}^d e \mathbb{R}^{2d} , fica claro que Ψ é também homeomorfismo. Esta aplicação será a forma com que traremos resultados do caso real ao caso complexo. Observe que a imagem da esfera complexa Ω_d por Ψ é exatamente a esfera \mathbb{S}^{2d-1} . Isto nos permite definir uma medida em Ω_d , utilizando a medida já definida em \mathbb{S}^{2d-1} . Temos portanto a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *A medida $\nu = \nu_d$ será a medida de Borel em Ω_d definida por*

$$\nu_d(E) = \sigma_{2d-1}(\Psi(E)).$$

Observação 3.1.2. Dada uma função Borel mensurável f definida em Ω_d com valores complexos, dizemos que ela é integrável se $f \circ \Psi^{-1}$ é integrável na esfera \mathbb{S}^{2d-1} , e sua integral é dada por

$$\int_{\Omega_d} f(z) d\nu_d(z) = \int_{\mathbb{S}^{2d-1}} f \circ \Psi^{-1}(\omega) d\sigma_{2d-1}(\omega).$$

É também importante lembrar que um resultado análogo ao demonstrado na Observação 1.2.13 é válido para Ω_d , sendo a única diferença o grupo considerado. Ao invés de $\text{SO}(d+1)$, consideramos $\text{U}(d)$, o grupo das matrizes unitárias com coeficientes complexos, isto é, as matrizes A tais que $AA^* = A^*A = I$, onde A^* é a matriz adjunta a A . Simbolicamente, temos o homeomorfismo $\Omega_d \cong \text{U}(d)/\text{U}(d-1)$. Desta forma garantimos resultados de integração análogos aos obtidos pelas Proposições 1.2.16, 1.2.17.

Definição 3.1.3. *Sejam $z = (z_1, \dots, z_d)$, $x_k = \text{Re}(z_k)$ e $y_k = \text{Im}(z_k)$. Definimos os operadores diferenciais*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right).\end{aligned}$$

Definição 3.1.4. *Dizemos que uma função $f : \Omega_d \rightarrow \mathbb{C}$ pertence à classe $C^k(\Omega_d)$ se $f \circ \Psi^{-1}$ pertence à classe $C^k(\mathbb{S}^{2d-1})$, e f pertence à classe $C^\infty(\Omega_d)$ se $f \circ \Psi^{-1}$ pertence à classe $C^\infty(\mathbb{S}^{2d-1})$.*

Definição 3.1.5. *Dizemos que uma função $f : \Omega_d \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em Ω_d se $f \circ \Psi^{-1}$ for analítica em \mathbb{S}^{2d-1} . Se $f \circ \Psi^{-1}$ for inteira em \mathbb{S}^{2d-1} dizemos que f é inteira em Ω_d .*

Definição 3.1.6. *Seja $U \subset \mathbb{C}^d$ um conjunto aberto e $f \in C^2(U)$. O Laplaciano Complexo de f é definido por*

$$\Delta_{(2d)}f = 4 \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}.$$

A função f é Harmônica se $\Delta_{(2d)}f = 0$.

Seja Δ o laplaciano em \mathbb{R}^{2d} . Se $f \in C^2(U)$, U aberto de \mathbb{C}^d , então vale a igualdade

$$\Delta_{(2d)}f = \left(\Delta (f \circ \Psi^{-1}) \right) \circ \Psi.$$

Definição 3.1.7. *Dados $m, n \in \mathbb{Z}_+$, uma função f complexa com domínio em \mathbb{C}^d é dita bihomogênea de bigrau (m, n) se para todo $z \in \mathbb{C}^d$ temos*

$$f(\lambda z) = \lambda^m \bar{\lambda}^n f(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Definição 3.1.8. *A seguir estabelecemos algumas notações*

- (i) O conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos é denotado por $\mathbb{P}(\mathbb{C}^d)$;
- (ii) $\mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$ é o conjunto de todos os polinômios bihomogêneos de bigrau (m, n) em \mathbb{C}^d ;
- (iii) $\mathcal{P}^{m,n} = \mathcal{P}^{m,n}(\Omega_d) = \left\{ f|_{\Omega_d} : f \in \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d) \right\}$;

(iv) O espaço dos Harmônicos Sólidos Complexos de bigrau (m, n) é o conjunto

$$\mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d) = \{f \in \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d) : \Delta_{(2d)}f = 0\};$$

(v) O espaço dos Harmônicos Esféricos Complexos de bigrau (m, n) é o conjunto

$$\mathcal{H}^{m,n} = \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d) = \{f|_{\Omega_d} : f \in \mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d)\}.$$

Quando não houver risco de ambiguidade, \mathbb{C}^d e Ω_d serão omitidos.

Todos os conjuntos definidos acima são claramente espaços vetoriais. Tal como no caso real (Corolário 2.1.11) temos que $\dim \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d) = \dim \mathcal{P}^{m,n}(\Omega_d)$, e $\dim \mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d) = \dim \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$. Também é possível decompor $\mathbb{P}(\mathbb{C}^d)$ e $\mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$ em subespaços ortogonais de forma análoga ao Teorema 2.2.9. Estes resultados estão demonstrados na dissertação [19], Capítulo 2. Enunciamos aqui para referência futura.

Proposição 3.1.9. *É válido o seguinte isomorfismo*

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^d) \cong \bigoplus_{m,n \geq 0} \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d).$$

Proposição 3.1.10. *Temos que:*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{P}^{m,n}(\Omega_d) &= \binom{d+m-1}{m} \binom{d+n-1}{n}, \\ d_{m,n} = \dim \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d) &= \binom{m+d-1}{m} \binom{n+d-1}{n} - \binom{m+d-2}{m-1} \binom{n+d-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Observação 3.1.11. Se $f \in \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$ então $\Delta_{(2d)}f \in \mathbb{P}^{m-1,n-1}(\mathbb{C}^d)$.

Teorema 3.1.12. *Vale a decomposição*

$$\mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d) \oplus |z|^2 \mathbb{P}^{m-1,n-1}(\mathbb{C}^d).$$

Além disso, $\mathbb{P}^{m,0}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{H}^{m,0}(\mathbb{C}^d)$ e $\mathbb{P}^{0,n}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{H}^{0,n}(\mathbb{C}^d)$.

Corolário 3.1.13. *Se $f \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^d)$, então existem f_1, f_2, \dots, f_r , onde $r = \min\{m, n\}$, tais que $f_j \in \mathbb{H}^{m-j,n-j}(\mathbb{C}^d)$ para todo $j = 0, 1, \dots, r$ e*

$$f(z) = f_0(z) + |z|^2 f_1(z) + \dots + |z|^{2r} f_r(z).$$

3.2 Decomposição de $L^2(\Omega_d)$

Nesta seção nossa tarefa é demonstrar um resultado análogo ao Teorema 2.3.21, isto é, demonstrar que o espaço $L^2(\Omega_d)$ pode ser descrito como soma direta de subespaços de harmônicos esféricos complexos.

Proposição 3.2.1. Se $f \in \mathbb{H}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$, então $f \circ \Psi^{-1} \in \mathcal{P}_{\Delta}^{m+n}(\mathbb{R}^{2d})$.

Demonstração. Temos

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=n} c_{\alpha\beta} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta},$$

portanto,

$$f \circ \Psi^{-1}(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) = \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=n} \left(c_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^d (x_j + iy_j)^{\alpha_j} (x_j - iy_j)^{\beta_j} \right).$$

O fato de que $f \circ \Psi$ é elemento de $\mathcal{P}_{\Delta}^{m+n}(\mathbb{R}^{2d})$ decorre imediatamente desta equação e do fato que $\Delta_{(2d)} f = \left(\Delta \left(f \circ \Psi^{-1} \right) \right) \circ \Psi$ \square

Tal como no caso real, também há uma relação de ortogonalidade entre os espaços $\mathcal{H}^{m,n}$.

Proposição 3.2.2. Sejam $f \in \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$ e $g \in \mathcal{H}^{k,l}(\Omega_d)$. Se $(m, n) \neq (k, l)$ então $(f, g) = 0$.

Demonstração. Primeiro, se $m + n \neq k + l$, e denotando $(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) = \omega$,

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\Omega_d} f(z) \overline{g(z)} \, d\nu_d(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2d-1}} f \circ \Psi^{-1}(\omega) \overline{g \circ \Psi^{-1}(\omega)} \, d\sigma_{2d}(\omega) \\ &= (f \circ \Psi^{-1}, g \circ \Psi^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto o resultado segue neste caso pela Proposições 3.2.1 e pelo Lema 2.1.9.

Caso $s = m + n = k + l$, temos que $f \in \mathcal{H}^{j,s-j}$ e $g \in \mathcal{H}^{l,s-l}$, com $j \neq l$. Segue diretamente do fato de f, g serem bihomogêneas, que para qualquer $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\Omega_d} f(z) \overline{g(z)} \, d\nu_d(z) \\ &= \int_{\Omega_d} f(e^{i\theta} z) \overline{g(e^{i\theta} z)} \, d\nu_d(z) \\ &= e^{(i\theta)j} e^{(-i\theta)(s-j)} e^{(-i\theta)l} e^{(i\theta)(s-l)} \int_{\Omega_d} f(z) \overline{g(z)} \, d\nu_d(z) \\ &= e^{2i(j-l)\theta} (f, g) \end{aligned}$$

o que implica que $(f, g) = 0$. Isto conclui a demonstração. \square

Teorema 3.2.3. Temos o seguinte isomorfismo:

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^{2d-1}) \cong \bigoplus_{j=0}^k \mathcal{H}^{j,k-j}(\Omega_d).$$

Demonstração. Pelas relações de ortogonalidade, segue que a soma $\sum_{j=1}^k \mathcal{H}^{j,k-j}(\Omega_d)$ é direta, portanto, junto à Proposição 3.2.1, temos que ela é isomorfa a um subespaço de $\mathcal{H}^k(\mathbb{S}^{2d-1})$. Logo precisamos mostrar apenas que a aplicação linear,

$$T : \bigoplus_{j=0}^k \mathcal{H}^{j,k-j}(\Omega_d) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^{2d-1})$$

$$f \longmapsto f \circ \Psi^{-1}$$

é bijetiva.

Como Ψ_d^{-1} não se anula sobre \mathbb{S}^{2d-1} , temos que $Tf = 0$ apenas quando f é a função identicamente nula. Logo, T é injetiva. Para sobrejetividade, seja $h \in \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^{2d-1})$. Mostraremos que $h = Tf$ para alguma f . Como toda h desta forma é restrição de algum harmônico sólido real H , é suficiente mostrar que $H \circ \Psi = F = \sum F_j$ para $F_j \in \mathbb{H}^{j,k-j}(\mathbb{C}^d)$. Consideremos tal H ,

$$H(x, y) = H(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

como $x_j = (1/2)(z_j + \bar{z}_j)$, e $y_j = (1/2i)(z_j - \bar{z}_j)$, podemos escrever $H \circ \Psi$ como um polinômio na forma:

$$H \circ \Psi(z) = \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{|\mu|=j \\ |\nu|=k-j}} c_{\nu\mu} z^\mu \bar{z}^\nu.$$

Assim, se definirmos

$$F_j = \sum_{\substack{|\mu|=j \\ |\nu|=k-j}} c_{\nu\mu} z^\mu \bar{z}^\nu,$$

fica claro que cada F_j é polinômio bihomogêneo complexo de bigrau $(j, k-j)$. Além disso, F_0 e F_k são harmônicos trivialmente. Para concluir o resultado, basta mostrar que F_j é harmônico para $1 \leq j \leq k-1$, mas isso decorre do fato de H ser harmônico,

$$\begin{aligned} 0 = \Delta H &= \Delta_{(2d)} H \circ \Psi \\ &= \sum_{j=0}^k \Delta_{(2d)} F_j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_{(2d)} F_j. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(\mathbb{C}^d) = \bigoplus \mathbb{P}^{m,n}(\mathbb{C}^d)$ e pela Observação 3.1.11 $\Delta_{(2d)} F_j \in \mathbb{P}^{j-1, k-j-1}(\mathbb{C}^d)$, temos que a expressão acima é combinação linear de funções linearmente independentes. Logo cada uma deve ser nula, isto é, $F_j \in \mathcal{H}^{j,k-j}(\mathbb{C}^d)$. \square

Lema 3.2.4. *O subespaço gerado por $\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$ é denso em $L^2(\Omega_d)$.*

Demonstração. De fato, o conjunto das funções contínuas é denso em $L^2(\Omega_d)$, e o conjunto dos polinômios em Ω_d é denso neste. O resultado segue então do Corolário 3.1.13. \square

Teorema 3.2.5. *Temos*

$$L^2(\Omega_d) = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d),$$

isto é, se $f \in L^2(\Omega_d)$, então existem únicos $h^{(m,n)} \in \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$ tais que

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} h^{(m,n)},$$

na topologia de $L^2(\Omega_d)$. Além disso, vale

$$\|f\|_2^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \|h^{(m,n)}\|_2^2.$$

Demonstração. Dados m, n inteiros não negativos e $\{h_1^{(m,n)}, \dots, h_{d_{m,n}}^{(m,n)}\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$, temos pela Proposição 3.2.2 e Lema 3.2.4 que $\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \{h_1^{(m,n)}, \dots, h_{d_{m,n}}^{(m,n)}\}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega_d)$. Assim, se definirmos

$$h^{(m,n)} = \sum_{j=0}^{d_{m,n}} (f, h_j^{(m,n)}) h_j^{(m,n)},$$

segue do Teorema 1.2.3, que

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{j=0}^{d_{m,n}} (f, h_j^{(m,n)}) h_j^{(m,n)} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} h^{(m,n)},$$

e também,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{j=0}^{d_{m,n}} |(f, h_j^{(m,n)})|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \|h^{(m,n)}\|_2^2,$$

o que conclui a demonstração. \square

3.3 A Desigualdade de Young

O nosso objetivo nesta seção é enunciar e demonstrar a Desigualdade de Young no caso da esfera complexa.

Observação 3.3.1. Denotamos por \mathbb{D} o disco unitário

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Consideramos \mathbb{D} munido da medida de Borel normalizada μ_d definida por

$$\mu_d(E) = \frac{d-1}{\pi} \int_E (1 - |z|^2)^{d-2} d\zeta(z)$$

onde $d > 1$ e $\zeta \circ \Psi_1^{-1} = m_2$ é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 e $\Psi_1(x + iy) = (x, y)$.

Definição 3.3.2. Sejam $K \in L^1(\mathbb{D}, \mu_d)$ e $f \in L^1(\Omega_d)$. Definimos a convolução de f com K como sendo a função $f * K$ definida para $\omega \in \Omega_d$ por

$$f * K(\omega) = \int_{\Omega_d} f(z) \overline{K(\langle z, \omega \rangle)} d\nu_d(z).$$

Teorema 3.3.3 ([19], Teorema 1.3.13). Para cada $z \in \mathbb{C}^d$, existem e são unicamente determinados $\theta \in [0, \pi/2)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\tilde{z} \in \Omega_{d-1}$ tais que

$$z = (e^{i\phi} \cos \theta, \text{sen } \theta \tilde{z}).$$

Além disso, para toda $f \in L^1(\Omega_d)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_d} f(z) d\nu_d(z) &= \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{2d-3}|}{|\mathbb{S}^{2d-1}|} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega_{d-1}} f(e^{i\phi} \cos \theta, \text{sen } \theta \tilde{z}) d\nu_{d-1}(\tilde{z}) d\phi \text{sen}^{2d-3} \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.4. Seja $K \in L^1(\mathbb{D}, \mu_d)$. Então $K(\langle \cdot, \omega \rangle) \in L^1(\Omega_d)$ para todo $\omega \in \Omega_d$ e

$$\int_{\Omega_d} K(\langle z, \omega \rangle) d\nu_d(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z) d\mu_d(z).$$

Demonstração. Seja $A \in U(d)$ tal que $\omega = Ae_1$. Segue pelo análogo da Proposição 1.2.16 para a esfera complexa que

$$\int_{\Omega_d} K(\langle z, \omega \rangle) d\nu_d(z) = \int_{\Omega_d} K(\langle A^{-1}z, e_1 \rangle) d\nu_d(z) = \int_{\Omega_d} K(\langle z, e_1 \rangle) d\nu_d(z).$$

Agora, aplicando o Teorema 3.3.3 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_d} K(\langle z, \omega \rangle) d\nu_d(z) &= \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{2d-3}|}{|\mathbb{S}^{2d-1}|} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega_{d-1}} K(e^{i\phi} \cos \theta) \text{sen}^{2d-3} \theta \cos \theta d\nu_{d-1}(\tilde{z}) d\phi d\theta \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{2d-3}|}{|\mathbb{S}^{2d-1}|} \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(re^{i\phi}) (1-r^2)^{d-2} r d\phi dr \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{2d-3}|}{|\mathbb{S}^{2d-1}|} \int_{\mathbb{D}} K(z) (1-|z|^2)^{d-2} d\zeta(z) \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{2d-3}|}{|\mathbb{S}^{2d-1}|} \frac{\pi}{d-1} \int_{\mathbb{D}} K(z) d\mu_d(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} K(z) d\mu_d(z) \end{aligned}$$

pois $\pi|\mathbb{S}^{2d-3}| = |\mathbb{S}^{2d-1}|(d-1)$ (ver [19], Observação 1.3.15). \square

Observação 3.3.5. Sejam K e f como na Definição 3.3.2. Segue pela Proposição 3.3.4 que

$$\begin{aligned} \|f * K\|_1 &\leq \int_{\Omega_d} |f(z)| \left(\int_{\Omega_d} |K(\langle z, \omega \rangle)| d\nu_d(\omega) \right) d\nu_d(z) \\ &= \|f\|_1 \|K\|_{1, \mu_d} \end{aligned}$$

e portanto $f * K \in L^1(\Omega_d)$.

Teorema 3.3.6 (Desigualdade de Young para Ω_d). *Sejam $K \in L^p(\mathbb{D}, \mu_d)$, $f \in L^r(\Omega_d)$ com $1/q + 1 = 1/p + 1/r$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Então $f * K \in L^q(\Omega_d)$ e*

$$\|f * K\|_q \leq \|f\|_r \|K\|_{p, \mu_d}.$$

Demonstração. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $r = 1$. Para $p < \infty$, pelo Teorema 1.3.2 e Proposição 3.3.4

$$\begin{aligned} \|f * K\|_p &\leq \int_{\Omega_d} \left(\int_{\Omega_d} |f(z)K(\langle z, \omega \rangle)|^p d\nu_d(\omega) \right)^{1/p} d\nu_d(z) \\ &= \int_{\Omega_d} \left(\int_{\Omega_d} |K(\langle z, \omega \rangle)|^p d\nu_d(\omega) \right)^{1/p} |f(z)| d\nu_d(z) \\ &= \|f\|_1 \|K\|_{p, \mu_d}. \end{aligned}$$

Para o caso $p = \infty$ essa desigualdade segue trivialmente.

Considere agora o operador $T : f \mapsto f * K$. Vimos acima que tal operador é de tipo $(1, p)$, $1 \leq p \leq \infty$. Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\|f * K\|_\infty \leq \|K\|_{p, \mu_d} \|f\|_{p'}$$

e assim T também é do tipo (p', ∞) . Observamos que em ambos os casos a norma do operador é limitada por $\|K\|_{p, \mu_d}$. Sendo assim, o resultado segue como consequência do Teorema de Convexidade de Riesz (ver demonstração do Teorema 1.3.8). \square

3.4 Funções Suaves e Analíticas em Ω_d

Nesta seção estudamos conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis e também conjuntos de funções analíticas na esfera complexa Ω_d , de forma análoga ao que foi feito na Seção 2.4 para a esfera real \mathbb{S}^d .

Definição 3.4.1. *Dado $(m, n) \in \mathbb{Z}_+^2$, denotamos a projeção ortogonal de $L^2(\Omega_d)$ sobre $\mathcal{H}^{m, n}$ por $\pi_{m, n}$.*

Definição 3.4.2. *Sejam $\alpha, \beta > -1$. Os polinômios de Jacobi com parâmetro (α, β) são definidos como os elementos da sequência $(P_k^{(\alpha, \beta)})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ tal que cada $P_k^{(\alpha, \beta)}$ é um polinômio de grau k e vale a relação de ortogonalidade*

$$\int_{-1}^1 P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \overline{P_l^{(\alpha, \beta)}(x)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0, \quad \text{se } k \neq l,$$

com a normalização

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + k)}{k!}.$$

Teorema 3.4.3 ([23], Teorema 4.2.2). *Uma expressão para o k -ésimo polinômio de Jacobi de parâmetro (α, β) é*

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \prod_{l=1}^j (\alpha + \beta + k + l) \prod_{l=j+1}^n (\alpha + l) \left(\frac{x-1}{2} \right)^j.$$

Definição 3.4.4. *Dados $\alpha > -1$ e $m, n \in \mathbb{Z}_+$, o polinômio no disco de bigrau (m, n) e parâmetro α , denotado por $R_{m,n}^\alpha$ é definido para $z \in \mathbb{D}$ por*

$$R_{m,n}^\alpha(z) = \begin{cases} \frac{1}{P_n^{(\alpha, m-n)}(1)} z^{m-n} P_n^{(\alpha, m-n)}(2|z|^2 - 1), & \text{se } m \geq n \\ \frac{1}{P_m^{(\alpha, n-m)}(1)} \bar{z}^{n-m} P_n^{(\alpha, n-m)}(2|z|^2 - 1), & \text{se } m < n. \end{cases}$$

Definição 3.4.5. *Definimos $\tilde{Z}^{(m,n)}$ como a função*

$$\tilde{Z}^{(m,n)}(t) = d_{m,n} R_{m,n}^{d-2}(t), \quad t \in \mathbb{D}.$$

Teorema 3.4.6 ([19], Teorema 3.2.8). *Dada uma base ortonormal $\{h_1, \dots, h_{d_{m,n}}\}$ de $\mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$, para quaisquer $w, z \in \Omega_d$, vale*

$$\tilde{Z}^{(m,n)}(\langle z, w \rangle) = \sum_{k=1}^{d_{m,n}} \overline{h_k(w)} h_k(z).$$

As funções $Z^{(m,n)}$ permitem rescrevermos o Teorema 3.2.5 na seguinte forma:

Teorema 3.4.7. *Seja $f \in L^2(\Omega_d)$. Então*

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} f * \tilde{Z}^{(m,n)},$$

onde a série converge para f na norma de $L^2(\Omega_d)$ e $\pi_{m,n} f = f * \tilde{Z}^{m,n} \in \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)$.

Proposição 3.4.8. *Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ seja $Z^{(k)}(t) = N(k, 2d-1) P_{k, 2d-1}(t)$ (ver Notação 2.4.6). Então, para quaisquer $z, w \in \Omega_d$, temos*

$$Z^{(k)}(\langle \Psi(z), \Psi(w) \rangle) = \sum_{m+n=k} \tilde{Z}^{(m,n)}(\langle z, w \rangle).$$

Notação 3.4.9. Para $(m, n) \in \mathbb{Z}_+^2$, denotamos $|(m, n)|_1 = |m| + |n|$.

Notação 3.4.10. Denotamos por $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ o espaço vetorial gerado por $\cup_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{(m,n)}(\Omega_d)$ e por $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial gerado por $\cup_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^{2d-1})$.

Proposição 3.4.11. *Se $f \in C^\infty(\Omega_d)$, com expansão em harmônicos esféricos complexos*

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} h^{(m,n)}, \quad h^{(m,n)} \in \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d),$$

então temos

$$\sup\{k^j \|\sum_{m+n=k} h^{(m,n)}\|_2 : k \in \mathbb{Z}_+\} < \infty, \quad \text{para qualquer } j \in \mathbb{N}.$$

Reciprocamente, dada uma seqüência de harmônicos esféricos complexos

$$\{h^{(m,n)} : h^{(m,n)} \in \mathcal{H}^{m,n}(\Omega_d)\}_{m,n \in \mathbb{Z}_+}$$

tal que a seqüência $\{\|\sum_{m+n=k} h^{(m,n)}\|_2\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ é de decaimento rápido, a função $f = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} h^{(m,n)}$ é de classe $C^\infty(\Omega_d)$. Além disso, temos $h^{m,n} = f * \tilde{Z}^{(m,n)}$ para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Temos que $f \in C^\infty(\Omega_d)$ se e somente se $f \circ \Psi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{S}^{2d-1})$. O Teorema 2.4.5 garante que isto ocorre se e somente se os k -componentes esféricos harmônicos de $f \circ \Psi^{-1}$ formam uma seqüência de decaimento rápido na norma de $L^2(\mathbb{S}^{2d-1})$. Mas estes componentes são $Z^{(k)} * (f \circ \Psi^{-1})$. Portanto, se $\Psi(z) = x$, utilizando a Proposição 3.4.8, a Observação 3.1.2 e o fato que Ψ é isomorfismo obtemos

$$\begin{aligned} Z^{(k)} * (f \circ \Psi^{-1})(\Psi(z)) &= \int_{\mathbb{S}^{2d-1}} \overline{Z^{(k)}(\langle x, y \rangle)} f \circ \Psi^{-1}(y) d\sigma_{2d-1}(y) \\ &= \int_{\Omega_d} \left(\sum_{k=m+n} \overline{\tilde{Z}^{(m,n)}(\langle z, \omega \rangle)} \right) f(\omega) d\nu_d(\omega) \\ &= \sum_{k=m+n} \tilde{Z}^{(m,n)} * f(z) \\ &= \sum_{k=m+n} h^{(m,n)}(z), \end{aligned}$$

assim

$$\|Z^{(k)} * (f \circ \Psi^{-1})\|_2 = \|\sum_{m+n=k} h^{(m,n)}\|_2.$$

Logo basta aplicar o Teorema 2.4.5 à seqüência $\{Z^{(k)} * (f \circ \Psi^{-1})\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

□

Definição 3.4.12. Seja $\Lambda = \{\lambda_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}_+}$ uma seqüência de números complexos, e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para cada $\varphi \in L^p(\Omega_d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(\Omega_d)$ com expansão formal em harmônicos esféricos

$$f \sim \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \lambda_{m,n} \varphi * \tilde{Z}^{(m,n)},$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty,$$

dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$.

Proposição 3.4.13 ([1], Proposição 2.3.3). *Seja $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e para $m, n, k \in \mathbb{Z}_+$, sejam $\lambda_{m,n}^* = \lambda(|(m, n)|_1)$, $\lambda_k = \lambda(k)$. Considere os operadores multiplicadores associados às sequências $\Lambda^* = \{\lambda_{m,n}^*\}_{m,n \in \mathbb{Z}_+}$ e $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ definidos respectivamente sobre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e suponhamos que Λ^* seja limitado de $L^p(\Omega_d)$ em $L^q(\Omega_d)$. Então*

$$\Lambda^* f = \left(\Lambda(f \circ \Psi^{-1}) \right) \circ \Psi, \quad f \in L^p(\Omega_d).$$

Teorema 3.4.14. *Seja $\{\lambda_{m,n}^*\}_{m,n \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de números reais não negativos e Λ^* o operador multiplicador sobre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ definido por*

$$\Lambda^* \varphi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \lambda_{m,n}^* \varphi * \tilde{Z}^{(m,n)}. \quad (3.2)$$

Se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{m+n=k} \lambda_{m,n}^* \right)^{1/k} < 1, \quad (3.3)$$

então para todo $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, Λ^* está bem definido como operador de $L^p(\Omega_d)$ em $L^q(\Omega_d)$, e $\Lambda^* U_p$ é um conjunto de funções analíticas sobre Ω_d . Se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{m+n=k} \lambda_{m,n}^* \right)^{1/k} = 0, \quad (3.4)$$

$\Lambda^* U_p$ é um conjunto de funções inteiras sobre Ω_d .

Demonstração. Definimos $\lambda_k = \sum_{m+n=k} \lambda_{m,n}^*$ e $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ operador multiplicador como o do Teorema 2.4.10. Estas definições nos permitem fazer a seguinte observação

$$\begin{aligned} \Lambda^* \varphi &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \lambda_{m,n}^* \varphi * \tilde{Z}^{(m,n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=m+n} \lambda_k \tilde{Z}^{(m,n)} * \varphi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi * \left(\sum_{k=m+n} \tilde{Z}^{(m,n)} \right). \end{aligned}$$

Portanto utilizando a Proposições 3.4.8, podemos estabelecer a convergência em norma da série acima, utilizando a convergência da série

$$\Lambda(\varphi \circ \Psi^{-1}) = \Lambda^* \varphi \circ \Psi^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^{(k)} * (\varphi \circ \Psi^{-1}).$$

Logo o Teorema 2.4.10 e a forma com que definimos o operador Λ garantem que $\Lambda^* \varphi \circ \Psi^{-1}$ é analítica quando requeremos (3.3), e inteira caso seja imposta a condição (3.4). Pela Definição 3.1.5 temos o resultado. \square

Exemplo 3.4.15. Considere $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{m,n}^*\}$, $\lambda_{m,n}^* = \lambda^{(1)}(|(m,n)|_1)$, onde $\lambda^{(1)}$ é a função $\lambda^{(1)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda^{(1)}(t) = \begin{cases} t^{-\gamma}(\log t)^{-\xi}, & \text{se } t > 1, \\ 0, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\xi \geq 0$. Para $f \in U_p(\Omega_d)$, utilizando a Proposições 3.4.13,

$$\Lambda_*^{(1)} f \circ \Psi^{-1} = \Lambda(f \circ \Psi^{-1}), \quad f \circ \Psi^{-1} \in U_p(\mathbb{S}^{2d-1}),$$

onde Λ é o operador multiplicador utilizado no Exemplo 2.4.11. Portanto a Definição 3.1.4 garante que $\Lambda_*^{(1)}(\Omega_d)$ é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis.

Exemplo 3.4.16. Considere $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{m,n}^*\}$, $\lambda_{m,n}^* = \lambda^{(2)}(|(m,n)|_1)$, onde $\lambda^{(2)}$ é a função definida para números reais positivos por $\lambda^{(2)}(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma, r > 0$. Como no exemplo anterior, a Proposições 3.4.13 garante que

$$\Lambda_*^{(2)} f \circ \Psi^{-1} = \Lambda^{(2)}(f \circ \Psi^{-1}), \quad f \circ \Psi^{-1} \in U_p(\mathbb{S}^{2d-1}),$$

onde Λ é o operador multiplicador definido em Exemplo 2.4.12. Portanto, também reduzimos este ao caso real, e assim a Definição 3.1.4 garante que $\Lambda_*^{(2)}U_p(\Omega_d)$ é conjunto de funções infinitamente diferenciáveis se $0 < r < 1$ e a Definição 3.1.5 um conjunto de funções analíticas se $r \geq 1$ e um conjunto de funções inteiras se $r > 1$.

4 Funções Analíticas no Toro \mathbb{T}^d

Neste capítulo damos exemplos de conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis e de funções analíticas no toro. Todos os resultados aqui apresentados, demonstrados ou não, se encontram na tese de doutorado [16]. Para outros resultados e notações sobre análise no toro, indicamos a referência [7].

4.1 Análise Harmônica no Toro \mathbb{T}^d

Nesta seção apresentamos algumas definições e alguns resultados, todos sem demonstração, sobre análise harmônica no toro. Todos esses resultados podem ser encontrados em [16].

O toro d -dimensional \mathbb{T}^d , $d \in \mathbb{N}$, é definido como sendo o grupo quociente $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Pode ser visto como o produto cartesiano $[-\pi, \pi]^d$ com seus lados opostos identificados ou como o produto cartesiano de d -vezes o círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [-\pi, \pi]\}$. Usando estes fatos, podemos associar a \mathbb{T}^d uma única medida de Haar normalizada, de acordo com o Teorema 1.2.6. Tal medida será denotada por ν . Não haverá risco de confusão com a medida definida no capítulo anterior, pois esta não será utilizada neste capítulo.

Os conjuntos de funções que estudaremos serão definidos através de operadores multiplicadores específicos. Sendo assim, precisaremos de alguns resultados sobre da Teoria de Fourier que daremos em seguida.

Definição 4.1.1. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ e $m \in \mathbb{Z}^d$. O m -ésimo Coeficiente de Fourier de f é*

$$\hat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i\langle m, x \rangle} d\nu(x).$$

A série de Fourier de f é definida por

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(m) e^{i\langle m, x \rangle}.$$

Proposição 4.1.2. *Se $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$,*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1.$$

Definição 4.1.3. *A convolução de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ é definida como sendo a função*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x - y) g(y) d\nu(y), \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

Teorema 4.1.4 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $1/q + 1 = 1/p + 1/r$ e sejam $f \in L^p(\mathbb{T}^d), g \in L^r(\mathbb{T}^d)$. Então $f * g \in L^q(\mathbb{T}^d)$ e*

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é obtida exatamente como a demonstração do Teorema 1.3.8. \square

Notação 4.1.5. Neste capítulo denotaremos por $|\cdot|_2$ a norma euclidiana, e por $|\cdot|_\infty$ a norma do máximo em \mathbb{R}^d , isto é, para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$|x|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2)^{1/2}$$

e

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}.$$

Notação 4.1.6. Seja X um conjunto finito. $\#X$ denota o número de elementos no conjunto X .

Definição 4.1.7. Para $l \in \mathbb{Z}_+$ definimos

$$A_l^{(2)} = \{k \in \mathbb{Z}^d : |k|_2 \leq l\}, \quad A_l^{(\infty)} = \{k \in \mathbb{Z}^d : |k|_\infty \leq l\},$$

para $l = -1$

$$A_{-1}^{(2)} = \emptyset = A_{-1}^{(\infty)},$$

e também

$$d_l^{(2)} = \#(A_l^{(2)} - A_{l-1}^{(2)}), \quad d_l^{(\infty)} = \#(A_l^{(\infty)} - A_{l-1}^{(\infty)}).$$

Proposição 4.1.8. *Existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que para todo $l \in \mathbb{N}$*

$$C_1 l^{d-1} \leq d_l^{(2)}, d_l^{(\infty)} \leq C_2 l^{d-1}.$$

A partir de agora, $|\cdot|$ denotará a norma $|\cdot|_2$ ou $|\cdot|_\infty$. Se $|\cdot|$ denotar a norma $|\cdot|_i$ ($i = 2$ ou $i = \infty$) então escreveremos $A_l = A_l^{(i)}$ e $d_l = d_l^{(i)}$.

Definição 4.1.9. *Sejam α e r reais positivos. Definimos o núcleo K por*

$$K(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|k|^r} e^{i\langle k, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

Observação 4.1.10. Seja K o núcleo da Definição 4.1.9. Temos pela Proposição 4.1.8 que

$$\begin{aligned} \|K\|_\infty &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in A_n \setminus A_{n-1}} e^{-\alpha|k|^r} \\ &\leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} e^{-\alpha(n-1)^r} \\ &\leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} e^{-\alpha n^r} \\ &\leq C_4 < \infty \end{aligned}$$

e assim $K \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Para qualquer $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^d)$

$$K * \varphi \leq \|K\|_\infty \|\varphi\|_1$$

e portanto o operador T definido por $T(\varphi) = K * \varphi$ é limitado de $L^1(\mathbb{T}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

4.2 Conjuntos de Funções Suaves e Analíticas no Toro

Nesta seção damos exemplos de conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis e de conjuntos de funções analíticas no toro.

Teorema 4.2.1. *Seja K como na Definição 4.1.9 e seja $\varphi \in U_1$. Então $K * \varphi$ é uma função infinitamente diferenciável. Em particular, para cada $1 \leq p \leq \infty$, $K * U_p$ é um conjunto de funções infinitamente diferenciáveis, onde $K * U_p = \{K * \varphi : \varphi \in U_p\}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que a série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|k|^r} \hat{\varphi}(k) (ik)^\beta e^{i\langle k, x \rangle} \quad (4.1)$$

converge uniformemente para qualquer multi-índice β . Como $|\hat{\varphi}(k)| \leq \|\varphi\|_1 \leq 1$, aplicando a Proposições 4.1.8 obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left| e^{-\alpha|k|^r} \hat{\varphi}(k) (ik)^\beta \right| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|k|^r} |k|^{|\beta|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in A_n \setminus A_{n-1}} e^{-\alpha|k|^r} |k|^{|\beta|} \\ &\leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha(n-1)^r} n^{|\beta|+d-1} \\ &\leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^r} n^{|\beta|+d-1} \\ &\leq C_4 < \infty. \end{aligned}$$

Logo a série dada na equação (4.1) converge uniformemente em \mathbb{T}^d . Conseqüentemente,

$$\partial^\beta (K * \varphi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|k|^r} \hat{\varphi}(k) (ik)^\beta e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Temos assim que $K * \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Como cada $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d) \subset L_1(\mathbb{T}^d)$, obtemos que $K * U_p$ é um conjunto de funções infinitamente diferenciáveis em \mathbb{T}^d . \square

Lema 4.2.2. *Para $p \in \mathbb{N}$,*

$$\int_0^\infty t^p e^{-\alpha t} dt = \frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

Demonstração. Usando o método de integração por partes,

$$\int_0^\infty t^p e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} t^p \right]_0^\infty + \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-\alpha t} dt.$$

Repetindo o processo p vezes, obtemos

$$\int_0^\infty t^p e^{-\alpha t} dt = \frac{p!}{\alpha^p} \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

□

O resultado principal do capítulo é enunciado abaixo.

Teorema 4.2.3. *Seja K como definido na Definição 4.1.9, com $r \geq 1$, e seja $\varphi \in U_1$. Então $K * \varphi$ é uma função analítica. Consequentemente, para $1 \leq p \leq \infty$, $K * U_p$ é um conjunto de funções analíticas em \mathbb{T}^d .*

Demonstração. Considerando a estimativa obtida na demonstração do Teorema 4.2.1 e aplicando o Lema 4.2.2 obtemos para um multi-índice qualquer β ,

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta(K * \varphi)\|_\infty &\leq C_1 \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha n^r} n^{|\beta|+d-1} \\ &\leq C_1 \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha n} n^{|\beta|+d-1} \\ &\leq C_1 \int_0^\infty t^{|\beta|+d-1} e^{-\alpha t} dt \\ &= C_1 \frac{(|\beta| + d - 1)!}{\alpha^{d+|\beta|}}. \end{aligned}$$

Seja $x \in \mathbb{T}^d$. Vamos mostrar que a serie de Taylor de $K * \varphi$ em x converge em uma vizinhança de x . Seja R_n o n -ésimo Resto de Taylor da função $K * \varphi$ (ver Teorema 1.4.5). Se $|h| < \delta$, para algum $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} |R_n(x+h)| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} |h^\beta| \|\partial^\beta(K * \varphi)\|_\infty \\ &\leq \frac{C_1}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} \delta^{n+1} \frac{(|\beta| + d - 1)!}{\alpha^{d+|\beta|}} \\ &= \frac{C_1}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} \delta^{n+1} \frac{(n+d)!}{\alpha^{d+n+1}} \\ &= \frac{C_1 \delta^{n+1} (d+n)!}{\alpha^{d+n+1} (n+1)!} \frac{(n+d)!}{(d-1)!(n+1)!} \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &= C_2 \frac{\delta^{n+1}}{\alpha^{d+n+1}} \left(\frac{(n+d)!}{(n+1)!} \right)^2 \\ &= C_2 \frac{\delta^{n+1} n^{2(d-1)}}{\alpha^{d+n+1}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Observe que a igualdade (4.2) decorre do fato de que o número de termos na soma é $\binom{n+d}{d-1}$. Portanto, se considerarmos $\delta = \alpha/e$ em (4.3), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x+h)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2 n^{2d-2}}{\alpha^d e^{n+1}} = 0.$$

Isto implica que se $|h| < \delta$, a Série de Taylor converge para a função $K * \varphi$, isto é,

$$K * \varphi(x+h) = K * \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} h^\alpha \partial^\alpha (K * \varphi)(x).$$

Portanto a função $K * \varphi$ é analítica em x para qualquer $x \in \mathbb{T}^d$. Consequentemente, o conjunto $K * U_p$ é um conjunto de funções analíticas em \mathbb{T}^d para qualquer $r \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$. \square

Índice

- Ação de Grupos, 18
- Coefficientes de Fourier, 88
- Convolução no Toro, 89
- Delta de Kronecker, 47
- Desigualdade
 - Integral de Minkowski, 21
- Desigualdade de Young
 - para Ω_d , 81
 - para \mathbb{R}^d , 27
 - para \mathbb{S}^d , 29
 - para \mathbb{T}^d , 89
- Espaço de Hilbert, 15
- Espaços de Bannach, 15
- Espaços Homogêneos, 19
- Extensão Radial, 32
- Função Harmônica, 34, 75
- Função Homogênea, 35
- Fórmula
 - de Funk-Hecke, 59
 - de Taylor, 30
- Grupo Ortogonal, 18
- Grupo Special Ortogonal, 18
- Grupo Topológico, 17
- Grupo Unitário, 18
- Harmônicos Esféricos, 35
- Harmônicos Esféricos Complexos, 75
- Harmônicos Sólidos Complexos, 75
- Harmônicos Sólidos, 35
- Laplaciano, 34
- Laplaciano Complexo, 75
- Medidas de Haar, 17
- Multiplicadores complexos, 85
- Núcleo de Reprodução, 47, 50
- Operador de Laplace-Beltrami, 40
- Operadores de Tipo (p, q) , 23
- Operadores Multiplicadores, 67
- Polinômio de Legendre, 54
- Polinômios Esféricos, 45
- Resto de Taylor, 30
- Sequências
 - de Decaimento Rápido, 63
- Sistema Ortogonal Completo, 62, 79
- Série de Fourier, 88
- Séries de Taylor, 37
- Teorema
 - de Aproximação de Weierstrass, 29
 - de Convexidade de Riesz, 25
 - de Fubini, 31
 - de Funk-Hecke, 58
 - de Green, 30
 - de Schwarz, 30
 - de Taylor, 30
- Teste M de Weierstrass, 29
- Toro, 88
- Transformada de Fourier no Toro, 88

Referências

- [1] ALEANS, D. J. J., *n-Larguras e Números de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves sobre Esferas Complexas*. Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, 2019. [72](#)
- [2] ALEANS, D. J. J.; TOZONI, S. A., *Estimates for n-widths of sets of smooth functions on complex spheres*, J. Complexity 64 (2021), 1–30. [11](#)
- [3] CARTAN, H., *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Publications, New York, 1995. [26](#)
- [4] CASTRO, M. H., *Diferentes Noções de Diferenciabilidade para Funções Definidas na Esfera*. Dissertação de Mestrado, ICMC/USP, São Carlos, 2007. [11](#), [28](#), [54](#)
- [5] FOLLAND, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. John Wiley & Sons, 2nd ed., 1999. [11](#), [25](#), [26](#)
- [6] FOLLAND, G. B., *Advanced Calculus*. Pearson, 2001. [25](#)
- [7] GRAFAKOS, L., *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2nd ed., 2008. [74](#)
- [8] HASHIZUME, M.; MINEMURA, K.; OKAMOTO, K., *Harmonic functions on hermitian hyperbolic spaces*, Hiroshima Math. J. 3 (1973), 81–108. [11](#)
- [9] KUSHPEL, A.; TOZONI, S. A., *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*, Constr. Approx. 35 (2012), 137–180. [11](#)
- [10] KUSHPEL, A.; STÁBILE, R. L. B.; TOZONI, S. A., *Estimates for n-widths of sets of smooth functions on the torus \mathbb{T}^d* , J. Approx. Theory 183 (2014), 45–71. [11](#)
- [11] LIONS, J. L.; MAGENES, E., *Problèmes aux limites non-homogènes*, Ann. Mat. Pura Appl. 63 (1963), 201–224. [11](#)
- [12] MORIMOTO, M., *Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations*, Complex Analysis, Banach Center Publ. 11 (1983), PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 223–350. [11](#)
- [13] MORIMOTO, M., *Analytic Functionals on the Sphere*. American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs 178, Providence, 1998. [11](#), [29](#)
- [14] MÜLLER, C., *Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces*. Applied Mathematical Sciences 129, Springer-Verlag, New York, 1998. [18](#), [29](#)

-
- [15] OLIVEIRA, F. M. D., *Análise Harmônica na Esfera d -Dimensional Real*. Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP, Campinas, 2005. [18](#), [29](#)
- [16] OLIVEIRA, J. G., *Aproximações Ótimas por Splines sobre o Toro*. Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, Campinas, 2020. [11](#), [12](#), [74](#)
- [17] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd ed., New York, 1987. [14](#), [15](#), [19](#), [26](#), [52](#)
- [18] RUDIN, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 2nd ed., New York, 1991. [16](#)
- [19] SANTOS, C. F., *Análise Harmônica na Esfera Complexa*. Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP, Campinas, 2017. [62](#), [64](#), [68](#), [70](#)
- [20] SEELEY, R. T., *Eigenfunction expansions of analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 734–738. [11](#)
- [21] STÁBILE, R. L. B.; TOZONI, S. A., *Estimates for entropy numbers of sets of smooth functions on the torus \mathbb{T}^d* , J. Approx. Theory 235 (2018), 92–115. [11](#)
- [22] STEIN, E.; WEISS, G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, 1971. [18](#), [19](#)
- [23] SZEGÖ, G., *Orthogonal Polynomials*. Colloquium Publications, 4th ed., American Mathematical Society, 1975. [70](#)