

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DEMACIO COSTA DE OLIVEIRA

**Método de Pontos Interiores Aplicado ao
Problema de Fluxo de Potência Ótimo com
Demanda Incerta**

Campinas

2021

Demacio Costa de Oliveira

Método de Pontos Interiores Aplicado ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Demanda Incerta

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Demacio Costa de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4m Oliveira, Demacio Costa de, 1979-
Método de pontos interiores aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo com demanda incerta / Demacio Costa de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Métodos de pontos interiores. 2. Programação estocástica. 3. Fluxo de potência ótimo. I. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Interior-point method applied to the optimal power flow problem with uncertain demand

Palavras-chave em inglês:

Interior-point methods

Stochastic programming

Optimal power flow

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira [Orientador]

Rosângela Ballini

Silvia Maria Simões de Carvalho

Douglas Soares Gonçalves

Luciana Casacio

Data de defesa: 03-12-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-2767-676X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5761805367973399>

**Tese de Doutorado defendida em 03 de dezembro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). ROSÂNGELA BALLINI

Prof(a). Dr(a). SILVIA MARIA SIMÕES DE CARVALHO

Prof(a). Dr(a). DOUGLAS SOARES GONÇALVES

Prof(a). Dr(a). LUCIANA CASACIO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

A Deus por sua misericórdia e seu amor, que me trazem a paz, a alegria e a felicidade.

À minha família pelo amor, carinho e apoio que me deram. Com a ajuda deles tenho conseguido realizar sonhos que pareciam ser impossíveis para mim.

À Michelle, minha esposa, que juntos realizamos os esforços necessários para cumprir cada etapa deste trabalho. Ela é um presente de Deus em minha vida.

Aos amigos e colegas que me apoiaram e me incentivaram nos momentos difíceis. Eles me fortaleceram e me ajudaram a crescer como ser humano.

Aos amigos e colegas da UFRPE-UAST pelo apoio que tornou possível o meu afastamento para desenvolver esta pesquisa.

Ao Prof. Aurelio pela orientação, ensinamentos e amizade. Ele me ensinou conhecimentos matemáticos, profissionais e humanos, com simplicidade, transparência e leveza.

Aos colegas da Pós-Graduação de Matemática Aplicada, da UNICAMP-IMECC, pela convivência e aprendizagem. No curso de verão, ou durante as disciplinas, ou nos grupos de estudos para as qualificações ou no laboratório (LPOO), vivemos momentos gratificantes, cheios de partilha e trocas de experiências, que guardarei com carinho ao longo da vida.

À Profa. Rosângela Ballini, à Profa. Silvia Maria Simões de Carvalho, ao Prof. Douglas Soares Gonçalves e a Profa. Luciana Casacio pelas correções e sugestões em prol da melhoria deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O Problema de Fluxo de Potência Ótimo pode ser aplicado ao despacho econômico, à análise de confiabilidade de geração e transmissão, à análise de segurança e à programação da geração de curto prazo. Sendo assim, destacamos a importância desse problema em sistemas de potência. Além disso, as decisões no setor energético dependem de parâmetros incertos presentes nos planejamentos de curto e longo prazo. Desse modo, visando investigar se é relevante considerar a demanda incerta nesse problema, desenvolvemos uma aproximação para a função distribuição e, conseqüentemente, aproximações para o valor esperado do problema de segundo estágio. Apesar dessas simplificações, os testes numéricos apresentaram resultados importantes de limitação inferior, de limitação superior e de convergência. Além disso, propomos um modelo de Programação Estocástica Quadrática de Dois Estágios com Recurso Fixo para o Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Demanda Incerta, o qual foi resolvido pelo Método Seguidor de Caminhos, que é um Método de Pontos Interiores. As fontes de geração de potência ativa consideradas foram as usinas hidrelétricas e térmicas. Resultados numéricos obtidos nos problemas IEEE30, IEEE118, SSE1654, SSE1732 e BRASIL indicam que seria vantajoso considerar a solução estocástica.

Palavras-chave: Método de Pontos Interiores, Programação Estocástica, Fluxo de Potência Ótimo.

Abstract

The optimal power flow problem can be employed to economic dispatch, reliability analysis of generation and transmission, safety analysis and short-term generation programming. Therefore, we highlight the importance of this problem in power systems. Moreover, decisions made in the energy sector depend on uncertain parameters present in short and long-term planning. Thus, in order to investigate whether it is relevant to consider the uncertain demand in this problem, we developed an approximation for the distribution function and, consequently, approximations for the expected value of the second stage problem. Despite these simplifications, the numerical tests showed important results of limit inferior, limit superior and convergence. In addition, we proposed a Two-Stage Quadratic Stochastic Programming with Fixed Recourse model for the Optimal Power Flow Problem with Uncertain Demand, which was solved by the Path- Following Method, an Interior-Point Method. The considered sources of active power generation were hydroelectric and thermal power plants. The numerical results obtained on the problems IEEE30, IEEE118, SSE1654, SSE1732 and BRASIL indicate that it would be worthwhile to consider the stochastic solution.

Keywords: Interior-Point Method, Stochastic Programming, Optimal Power Flow.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Soma inferior.	55
Figura 2 – Soma superior.	56
Figura 3 – Soma de Riemann.	57
Figura 4 – Problema de Recurso (2.93), convergência das soluções RP_{min} , M , RP e RP_{max}	64
Figura 5 – Problema de Recurso (2.101), convergência das soluções RP_{min} , M , RP e RP_{max}	68
Figura 6 – IEEE30, valor objetivo por hora.	81
Figura 7 – IEEE118, valor objetivo por hora.	85
Figura 8 – SSE1654, valor objetivo por hora.	88
Figura 9 – SSE1732, valor objetivo por hora.	91
Figura 10 – BRASIL, valor objetivo por hora.	94

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores do $EVPI$ e VSS em função do rendimento	51
Tabela 2 – Percentual de rendimento anual da plantação.	62
Tabela 3 – Problema de Recurso (2.93), valor objetivo ótimo com rendimento aleatório em cada intervalo da partição.	63
Tabela 4 – Problema de Recurso (2.93), tempo de CPU e número de iterações das soluções RP e M	65
Tabela 5 – Problema de Recurso (2.93), Valor Esperado da Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica.	65
Tabela 6 – Percentual de rendimento anual do milho.	66
Tabela 7 – Percentual de rendimento anual da beterraba.	66
Tabela 8 – Problema de Recurso (2.101), Seguidor de Caminhos versus Preditor-Corretor.	67
Tabela 9 – Problema de Recurso (2.101), Valor Esperado da Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica.	68
Tabela 10 – Percentual do consumo e teste de Shapiro-Wilk.	76
Tabela 11 – Percentual do consumo, 01/10/2020.	77
Tabela 12 – IEEE30, otimizando a geração ou transmissão de energia, $P = 1$	77
Tabela 13 – IEEE30, otimizando a geração ou transmissão de energia, $P = 24$	77
Tabela 14 – IEEE30, Seguidor de Caminhos (SC) versus Preditor-Corretor (PC), planejamento $P = 1$	78
Tabela 15 – IEEE30, Seguidor de Caminhos versus Preditor-Corretor, $P = 24$	78
Tabela 16 – IEEE30, número de iterações.	79
Tabela 17 – IEEE30, tempo de CPU.	80
Tabela 18 – IEEE30, valor da solução estocástica por hora.	81
Tabela 19 – IEEE30, número de iterações, tempo de CPU e função objetivo, $P = 24$	82
Tabela 20 – IEEE30, valor da solução estocástica, $P = 24$	82
Tabela 21 – IEEE118, número de iterações.	83
Tabela 22 – IEEE118, tempo de CPU.	84
Tabela 23 – IEEE118, valor da solução estocástica por hora.	85
Tabela 24 – SSE1654, número de iterações.	86
Tabela 25 – SSE1654, tempo de CPU.	87

Tabela 26 – SSE1654, valor da solução estocástica por hora.	88
Tabela 27 – SSE1732, número de iterações.	89
Tabela 28 – SSE1732, tempo de CPU.	90
Tabela 29 – SSE1732, valor da solução estocástica por hora.	91
Tabela 30 – BRASIL, número de iterações.	92
Tabela 31 – BRASIL, tempo de CPU.	93
Tabela 32 – BRASIL, valor da solução estocástica por hora.	94
Tabela 33 – Consumo Elétrico em MWh/h	101
Tabela 34 – Coeficientes a_{in} de Shapiro - Wilk	102
Tabela 35 – Coeficientes a_{in} de Shapiro - Wilk	103
Tabela 36 – Percentual de pontos do teste Shapiro - Wilk	104
Tabela 37 – Percentual de pontos do teste Shapiro - Wilk	105

Sumário

Introdução	13
1 Método de Pontos Interiores	16
1.1 Programação Linear	16
1.2 Método Seguidor de Caminhos	18
1.2.1 Condições de Otimalidade	20
1.2.2 Direção de Newton	21
1.2.3 Propriedades:	27
1.2.4 Implementação	27
1.2.5 Resumo do Método Seguidor de Caminhos	29
1.3 Método Preditor-Corretor	30
1.3.1 Propriedades	32
1.3.2 Resumo do Método Preditor-Corretor	33
1.4 Programação Quadrática	34
1.4.1 Condições de Otimalidade	35
1.4.2 Resumo do Método Seguidor de Caminhos para PQ	38
2 Programação Estocástica de Dois Estágios com Recurso Fixo	39
2.1 Problema de Recurso	40
2.1.1 Condições de Otimalidade	43
2.2 Valor da Solução Estocástica	47
2.3 Problema de Recurso com Variável Aleatória Discreta	50
2.4 Problema de Recurso com Variável Aleatória Contínua	52
2.5 Problema de Recurso com uma Distribuição de Probabilidade Aproximada	54
2.5.1 Soma de Riemann	55
2.5.2 Teste de Shapiro-Wilk	57
2.5.3 Distribuição de Probabilidade Aproximada	59
2.5.3.1 Desigualdade de Jensen	59
2.5.3.2 Desigualdade de Edmundson-Madansky	60
2.5.3.3 Aplicação: Problema do Fazendeiro.	61
2.5.4 Resumo do Método Seguidor de Caminhos para o Problema de Recurso	70
3 Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Demanda Incerta	71
3.1 Problema de Fluxo de Potência Ótimo CC	72
3.1.1 Mudança de Variáveis	73
3.2 Problema Quadrático Estocástico de Dois Estágios com Recurso Fixo para o FPO	74
3.3 Aplicações:	75

3.3.1	IEEE30	77
3.3.2	IEEE118	82
3.3.3	SSE1654	86
3.3.4	SSE1732	89
3.3.5	BRASIL	92
4	Conclusões e Perspectivas Futuras	96
REFERÊNCIAS		98
APÊNDICE A		101
ANEXO A		102

Introdução

Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é um termo relacionado a uma classe de problemas do sistema energético nos quais se deseja otimizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições que representa os limites operacionais e as leis físicas da rede elétrica (MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999). O FPO pode ser aplicado ao despacho econômico, à análise de confiabilidade de geração e transmissão, à análise de segurança, ao planejamento de expansão da geração e transmissão, e à programação da geração de curto prazo. Neste trabalho, usaremos um modelo de fluxo de redes para o Fluxo de Potência Ótimo em Corrente Contínua (CC), o qual tem apresentado resultados satisfatórios nas aplicações (OLIVEIRA; SOARES; NEPOMUCENO, 2003). As decisões do setor energético dependem de parâmetros incertos presentes nos planejamentos de curto e longo prazo; os dados incertos, por sua vez, são classificados como parâmetros técnicos e econômicos. Os parâmetros técnicos são divididos em topológicos e operacionais. Parâmetros topológicos estão relacionados a rede de transmissão, como falhas ou interrupções de linhas, geradores ou dispositivos de medição. Parâmetros operacionais contemplam as decisões referentes à demanda ou ao valor de geração. Parâmetros econômicos são aqueles relacionados a índices econômicos estudados na microeconomia como incerteza no fornecimento de combustível, custos de produção, impostos empresariais e mão de obra; ou, ainda, àqueles estudados na macroeconomia como questões de regulação ou desregulação, políticas ambientais, crescimento econômico, taxa de desemprego, produto interno bruto e taxas de juros. Desse modo, a fim de tratar essas incertezas, foram desenvolvidos vários métodos de otimização, cuja principal diferença consiste na técnica escolhida para descrever a incerteza dos parâmetros de entrada. Esses métodos são classificados como abordagem probabilística, possibilística, probabilística-possibilística, teoria de decisão da informação do gap, otimização robusta e análise intervalar (SOROUDI; AMRAEE, 2013).

Um dos primeiros trabalhos sobre programação estocástica foi publicado em 1955 por Dantzig. Segundo o autor, a motivação do estudo surgiu de uma proposta de estender os métodos de programação linear para resolver problemas de alocação com demanda incerta. Dantzig afirma que a característica fundamental dos problemas sob incerteza é que as decisões são tomadas em dois ou mais estágios. Assim, as variáveis de primeiro estágio são as únicas que podem ser determinadas com antecedência, porque as

de segundo estágio e posteriores dependem dos eventos aleatórios (DANTZIG, 2004). Um problema estocástico possui um vetor de variáveis de decisão x que satisfaz um conjunto de restrições, um vetor aleatório ξ cujo valor será revelado após a escolha de x e uma função de avaliação em termos do resultado observado (WETS, 1996). Em geral, resolver problemas estocásticos aumenta a complexidade do problema, por isso eles são evitados na prática. Os parâmetros incertos são substituídos por aproximações ou valores esperados e, assim, problemas mais simples são resolvidos. Para avaliar a qualidade da solução de um problema estocástico, são usadas algumas medidas. Dentre elas, destacaremos neste trabalho o Valor da Solução Estocástica (*VSS*), que avalia o desempenho da solução do modelo determinístico em relação à solução do problema estocástico (BIRGE, 1982).

Os Métodos de Pontos Interiores (MPI) surgiram em 1967 com o trabalho de Dikin (TODD, 2002). Estes métodos são iterativos e possuem a característica de percorrer o interior da região factível em busca de uma solução ótima. Assim, a cada iteração, a solução é atualizada até que se atinja algum critério de parada. Em 1979, Khachiyan desenvolveu o método dos elipsóides e demonstrou que este método possui complexidade polinomial. Apesar disso, o método dos elipsóides não apresentou bons resultados na prática, sendo superado pelo Simplex na maioria das instâncias (LUENBERGER; YE, 2008). Em 1984, Karmarkar apresentou um MPI baseado em geometria projetiva e otimização sobre uma esfera, este método possui complexidade polinomial e pode ser visto como um aprimoramento do método dos elipsóides (GONDZIO, 2012; KARMARKAR, 1984). Dentre os avanços na classe dos MPI, destacamos os métodos primal-dual. As características destes métodos são: transformar o problema primal num problema de barreira equivalente, aplicar as condições de otimalidade de primeira ordem à função Lagrangiana e resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton. Dessa forma, esses métodos conseguem resolver os problemas primal e dual ao mesmo tempo (KOJIMA; MIZUNO; YOSHISE, 1989; GONDZIO, 2012; VANDERBEI, 2001). O método preditor-corretor foi apresentado em 1992. Este método é do tipo primal-dual, porém são calculadas duas direções de busca por iteração, a fim de obter uma direção resultante mais eficiente. O método preditor-corretor possui convergência quadrática (MEHROTRA, 1992; YE et al., 1993). Um método com múltiplas correções de centragem apresentou resultados superiores ao método preditor-corretor em vários problemas da Netlib¹, e aplicações da vida real, sendo capaz de reduzir o número de iterações entre 25% e 40%, e o tempo de processamento computacional entre 20% e 30% (GONDZIO, 1996). Os bons resultados apresentados pelos MPI têm motivado novas propostas, e implementações mais eficientes, usando método direto ou iterativo para resolver o sistema linear, sendo este o passo que demanda maior esforço computacional a cada iteração. Os MPI são usados na resolução de problema linear, não linear, convexo e não convexo. Na área de otimização da operação de sistemas de potência, os métodos de

¹ Netlib é uma coleção de softwares matemáticos, artigos e banco de dados.

pontos interiores têm desempenhado papel relevante, devido ao tamanho e características desses problemas (QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000).

Diante desse contexto, pretendemos investigar a incerteza da demanda, que é um parâmetro operacional, por meio de uma abordagem probabilística. Assim, propomos um modelo de programação quadrática estocástica de dois estágios com recurso fixo para o FPO com demanda incerta. Desse modo, será obtida uma aproximação da função distribuição por meio da análise do histórico de consumo. Em seguida, usaremos uma aproximação discreta do valor esperado do problema de segundo estágio para obter aproximações do problema contínuo, e analisar sua convergência. Os métodos de pontos interiores, Seguidor de Caminhos e Preditor-Corretor, foram escolhidos para resolução desse problema por apresentar bons resultados quando aplicados a sistemas de potência (OLIVEIRA; SOARES; NEPOMUCENO, 2003; QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000). Por fim, usaremos o parâmetro estocástico, valor da solução estocástica, para analisar a importância de se considerar a incerteza da demanda no FPO.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: Capítulo 1 - Métodos de Pontos Interiores: Programação Linear, Método Seguidor de Caminhos, Método Preditor-Corretor e Método Seguidor de Caminhos para Programação Quadrática; Capítulo 2 - Programação Estocástica: Problema Estocástico de Dois Estágios com Recurso Fixo, Definição do Valor da Solução Estocástica, Definição da aproximação da distribuição de probabilidade e Aplicações; Capítulo 3 - Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Demanda Incerta: Problema de Fluxo de Potência Ótimo, Problema Estocástico Quadrático de Dois Estágios com Recurso Fixo para o FPO com Demanda Incerta e Aplicações; Capítulo 4 - Conclusões e Perspectivas Futuras.

Capítulo 1

Método de Pontos Interiores

O Método de Pontos Interiores é um algoritmo iterativo usado para resolver problemas de otimização, este possui a característica de percorrer, ao longo das iterações, o interior da região factível. Na prática, o algoritmo cria uma sequência de soluções que converge para uma solução ótima (LUENBERGER; YE, 2008; VANDERBEI, 2001). Os Métodos de Pontos Interiores ganharam destaque com o trabalho de Karmarkar, no qual o autor apresentou um algoritmo capaz de resolver qualquer problema de programação linear (PPL), no pior caso, em tempo polinomial. Desde então, novos resultados foram obtidos, destacando o bom desempenho desses métodos, e inúmeros aprimoramentos vêm ocorrendo na classe dos Métodos de Pontos Interiores e, conseqüentemente, surgindo novos MPI. Neste capítulo, destacaremos os MPI: Seguidor de Caminhos e Preditor-Corretor.

1.1 Programação Linear

A Programação Linear é uma ferramenta importante para formular vários problemas do cotidiano, como por exemplo o problema da dieta, de transporte, de fabricação e de leilão combinatórios, entre outros. Esses modelos possuem em comum uma função objetivo linear que, dependendo do problema, se deseja minimizá-la ou maximizá-la, e um conjunto de restrições lineares, que envolvem igualdades, desigualdades ou ambas. Além disso, cada Problema de Programação Linear (PPL) possui um problema associado a ele, chamado de *problema dual*, do qual decorre os teoremas da dualidade e a relação de complementaridade (LUENBERGER; YE, 2008). Assim, o PPL original, chamado de *problema primal*, junto com seu dual conduzem às condições de otimalidade. Os resultados apresentados neste capítulo são válidos para PPL em geral, e mais informações podem ser obtidas em (LUENBERGER; YE, 2008; VANDERBEI, 2001; BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010; DANTZIG, 1963).

Definição 1.1. *Um problema de programação linear, com variáveis canalizadas, na forma*

padrão é definido por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && f(x, s) = c^T x \\
 & \text{Sujeito a} && Ax = b \\
 & && x + s = x_u \\
 & && (x, s) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, possui posto completo; $c, x, s \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ são vetores. Chamaremos esse PPL de problema primal.

A partir do problema (1.1), existe um problema correlacionado denominado de problema dual, que definiremos a seguir.

Definição 1.2. O Problema Dual é definido por

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} && g(y, z, w) = b^T y - x_u^T w \\
 & \text{Sujeito a} && A^T y - w + z = c \\
 & && y \text{ livre}, (z, w) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

sendo os vetores $z, w \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 1.3. (Dualidade)

- a) Dualidade Fraca: Sejam $f(x, s)$ e $g(y, z, w)$ as funções objetivos primal e dual, respectivamente. Se (x, s) é primal factível e (y, z, w) é dual factível, então $f(x, s) \geq g(y, z, w)$;
- b) Relação entre Ilimitação e Infactibilidade: Se o problema primal é ilimitado, então o problema dual é infactível e vice-versa;
- c) Dualidade Forte: Se ambos problemas primal e dual são factíveis, então ambos possuem soluções ótimas e $f(x, s) = g(y, z, w)$ (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006).

Demonstração: a) Suponhamos que (x, s) e (y, z, w) sejam primal e dual factíveis, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
 f(x, s) &= c^T x = x^T (A^T y + z - w) \\
 &= (Ax)^T y + x^T z - x^T w = b^T y + x^T z - w^T (x_u - s) \\
 &= b^T y - x_u^T w + x^T z + s^T w \\
 &\geq b^T y - x_u^T w \\
 &\geq g(y, z, w).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Portanto, $f(x, s) \geq g(y, z, w)$. Desse modo, a Dualidade Fraca estabelece uma relação de limitação para ambos problemas. Assim, quando os pontos forem primal e dual factíveis, o valor da função objetivo primal será sempre maior do que, ou igual, ao valor da função objetivo dual.

b) Assumamos que o problema primal é ilimitado. Suponhamos agora que o problema dual é factível. Assim, $g(y, z, w) = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como o

primal é ilimitado, existe uma solução factível (x_k, s_k) tal que $f(x_k, s_k) < k = g(y, z, w)$. Este resultado contradiz a Dualidade Fraca, então concluímos que o problema dual é infactível. Analogamente, mostra-se que se o problema dual é ilimitado, então o problema primal é infactível.

c) Dado que o problema primal é factível e finito, pois o dual também é factível, então existe uma solução ótima primal (\bar{x}, \bar{s}) . Desse modo, mostraremos que $f(\bar{x}, \bar{s}) = g(y, z, w)$. Seja $C = \{(r, d, p); r = tf(\bar{x}, \bar{s}) - c^T x, d = tb - Ax, p = -tx_u + x + s, t \geq 0, x \geq 0, s \geq 0\}$ um cone convexo (LUENBERGER; YE, 2008). Primeiro mostraremos que o ponto $(1, 0, 0) \notin C$. De fato, se $d = 0$, então $Ax = tb$. Para $t = 0$, $Ax = 0$; e para $t > 0$, $A(x/t) = b$. Por outro lado, se $p = 0$, então $x + s = tx_u$. Para $t = 0$, $s = x = 0$; e para $t > 0$, $(x/t) + (s/t) = x_u$. Concluímos que o ponto $[(x/t), (s/t)]$, com $t > 0$, é primal factível. Assim, se $r = 1$, então $1 = tf(\bar{x}, \bar{s}) - c^T x$; para $t = 0$, vimos que $x = 0$, e teremos então uma contradição $1 = 0$. Por outro lado, para $t > 0$, teremos $(1/t) = f(\bar{x}, \bar{s}) - c^T(x/t) \geq 0$, que contradiz o fato de $f(\bar{x}, \bar{s})$ ser a solução ótima do problema primal. Portanto, o ponto $(1, 0, 0) \notin C$.

Desde que C seja um conjunto convexo fechado, existe um hiperplano separando o ponto $(1, 0, 0)$ e C . Então, existe um vetor não nulo $(s, y, w) \in \mathbb{R}^{1+m+n}$ e uma constante c tal que

$$s < c = \inf\{sr + y^T d + w^T p; (r, d, p) \in C\}. \quad (1.4)$$

Como C é um cone, então $c \geq 0$. Pois se existisse um ponto $(r, d, p) \in C$ tal que $sr + y^T d + w^T p < 0$, então o ponto $\lambda(r, d, p)$, com $\lambda \geq 0$, poderia violar a desigualdade obtida pelo plano separador. Por outro lado, como o ponto $(0, 0, 0) \in C$, devemos ter $c \leq 0$. Assim, concluímos que $c = 0$. Como consequência, obteremos que $s < 0$, e podemos assumir que $s = -1$. Desse modo, teremos:

$$\begin{aligned} -r + y^T d + w^T p &\geq 0 \\ -[tf(\bar{x}, \bar{s}) - c^T x] + y^T(tb - Ax) + w^T(-tx_u + x + s) &\geq 0 \\ (c^T - y^T A + w^T)x - t[f(\bar{x}, \bar{s}) - y^T b + w^T x_u] + w^T s &\geq 0, \quad \forall (t, x, s) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para $t = 0$, então $(c^T - y^T A + w^T)x + w^T s \geq 0$. Como $(x, s) \geq 0$, então $A^T y - w \leq c$ e $w \geq 0$. Portanto, a solução (y, z, w) tal que $A^T y - w + z = c$, com $(z, w) \geq 0$, é dual factível. Para $x = 0, s = 0$ e $t = 1$, então $f(\bar{x}, \bar{s}) \leq b^T y - x_u^T w = g(y, z, w)$. Pela Dualidade Fraca, concluímos que $f(\bar{x}, \bar{s}) = g(y, z, w)$. Portanto, (y, z, w) é uma solução ótima do dual.

□

1.2 Método Seguidor de Caminhos

O método seguidor de caminhos é um MPI do tipo primal-dual. A ideia deste método consiste em transformar o PPL em uma família de problemas de barreira logarítmica, mantendo uma relação com o problema original. O objetivo desta transformação é

usar técnicas de otimização não linear para resolver PPL (LUENBERGER; YE, 2008). Nesta seção, apresentaremos o método seguidor de caminhos e suas propriedades.

Definição 1.4. *Um ponto é interior quando todas as variáveis não negativas são estritamente positivas. Por exemplo: $R_I = \{(x, s); x_i > 0 \text{ e } s_i > 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ é a região interior do PPL. Assim, a região interior factível do PPL é $R_{IF} = \{(x, s); Ax = b, x + s = x_u, x_i > 0 \text{ e } s_i > 0, \forall i = 1, \dots, n\}$.*

Definiremos abaixo o problema de barreira logarítmica, cuja ideia consiste em retirar uma restrição de desigualdade e adicionar um termo relacionado a essa restrição à função objetivo. Assim, retiramos cada restrição $x_j \geq 0$ e adicionamos o termo $-\mu \ln(x_j)$ à função objetivo, com $\mu > 0$, que é chamada de função de barreira. Notamos que, se um dado x_j se aproximar de zero a função de barreira tenderá ao infinito positivo, mas como o problema é de minimização, o método buscará soluções $x_j > 0$ ao longo das iterações. A convergência se dará atendendo a uma tolerância determinada, por exemplo $x_j \geq \epsilon$. Para cada μ , teremos um problema de barreira logarítmica diferente. Assim, o problema primal estará associado a uma família de problemas não lineares (VANDERBEI, 2001).

Definição 1.5. *O problema de barreira logarítmica associado ao problema primal é definido por:*

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f_\mu(x, s) &= c^T x - \mu \sum_j^n \ln(x_j) - \mu \sum_j^n \ln(s_j) \\ \text{Sujeito a } Ax &= b \\ x + s &= x_u, \end{aligned} \quad (1.6)$$

tal que μ é um parâmetro positivo.

Na verdade, μ representa uma sequência positiva decrescente $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a zero. Quando μ_k se aproxima de zero, a solução do problema de barreira logarítmica se aproxima de uma solução ótima do problema primal (VANDERBEI, 2001).

Definição 1.6. *A função Lagrangiana associada ao problema de barreira logarítmica é definida por:*

$$L(x, s, y, w) = c^T x - \mu \sum_j^n \ln(x_j) - \mu \sum_j^n \ln(s_j) + y^T(-Ax + b) + w^T(x + s - x_u). \quad (1.7)$$

Aplicando as condições de otimalidade de primeira ordem na função Lagrangiana, teremos:

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial x_j} = c_j - \mu x_j^{-1} - A(:, j)^T y + w_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial s_j} = -\mu s_j^{-1} + w_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial y_i} = -A(i, :)x + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial w_j} = x_j + s_j - x_{u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Definindo $z = \mu X^{-1}e$, tal que $e^T = (1, 1, 1, \dots, 1)$, e reescrevendo as equações acima na forma vetorial, obteremos as condições de otimalidade do problema de barreira logarítmica.

1.2.1 Condições de Otimalidade

Primal interior factível:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x + s &= x_u \\ (x, s) &> 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dual interior factível:

$$\begin{aligned} A^T y + z - w &= c \\ y \text{ livre}, (z, w) &> 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Relação de μ -complementaridade:

$$\begin{aligned} XZe &= \mu e \\ WSe &= \mu e \\ (x, s, w, z) &> 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde X, S, W e Z são matrizes diagonais cujas coordenadas correspondentes são respectivamente as coordenadas dos vetores x, s, w e z .

Teorema 1.7. *Existe uma solução para o problema de barreira logarítmica se, e somente se, as regiões factíveis primal e dual têm interior não vazio (VANDERBEI, 2001).*

Demonstração: Suponhamos que as regiões factíveis tenham interior vazio. Assim, para qualquer par (x, s) primal factível, existe pelo menos um $x_j = 0$ ou $s_k = 0$, com $(j, k) \in [1, n]$. Logo, (x, s) não pertence ao domínio de f_μ . Portanto, não existe solução para o problema de barreira logarítmica.

Suponhamos agora que as regiões factíveis primais e duais tenham interior não vazio. Sejam (x_0, s_0) e (y_0, z_0, w_0) pontos interiores primal e dual factíveis, respectivamente. Dado um ponto primal factível (x, s) qualquer, teremos:

$$\begin{aligned} x^T z_0 + s^T w_0 &= x^T (c + w_0 - A^T y_0) + w_0^T (x_u - x) \\ &= c^T x - b^T y_0 + w_0^T x_u \\ c^T x &= x^T z_0 + s^T w_0 + b^T y_0 - w_0^T x_u. \end{aligned} \quad (1.15)$$

A função objetivo do problema de barreira logarítmica pode ser reescrita, como:

$$f_\mu(x, s) = x^T z_0 + s^T w_0 + b^T y - w_0^T x_u - \mu \sum_j^n \ln(x_j) - \mu \sum_j^n \ln(s_j). \quad (1.16)$$

Aplicando as condições de otimalidade de primeira ordem em f_μ , teremos:

$$\frac{\partial f_\mu(x, s)}{\partial x_j} = z_{0j} - \mu x_j^{-1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f_\mu(x, s)}{\partial s_k} = w_{0k} - \mu s_k^{-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.18)$$

Escrevendo na forma vetorial o ponto crítico, temos: $x_c = \mu Z_0^{-1} e$ e $s_c = \mu W_0^{-1} e$. Aplicando agora as condições de otimalidade de segunda ordem em f_μ , teremos:

$$\frac{\partial^2 f_\mu(x, s)}{\partial x_j \partial x_j} = \mu x_j^{-2}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2 f_\mu(x, s)}{\partial s_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_\mu(x, s)}{\partial x_j \partial s_k} = 0, \quad (j, k) \in [1, n]; \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 f_\mu(x, s)}{\partial s_k \partial s_k} = \mu s_k^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.21)$$

Assim, obtemos a matriz Hessiana de f_μ

$$Hf_\mu(x, s) = \begin{bmatrix} \mu X^{-2} & 0 \\ 0 & \mu S^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow Hf_\mu(x_c, s_c) = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} Z_0^2 & 0 \\ 0 & W_0^2 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Desde que $\mu > 0$, a matriz $Hf_\mu(x_c, s_c)$ é positiva definida, pois, dado qualquer vetor não nulo $[a; b]$, temos: $[a; b]^T Hf_\mu(x, s)[a; b] = \frac{1}{\mu} (a^T Z_0^2 a + b^T W_0^2 b) > 0$. Portanto, o ponto (x_c, s_c) é um mínimo local e também mínimo global. Assim, concluímos a demonstração de existência de solução para o problema de barreira logarítmica.

1.2.2 Direção de Newton

A fim de determinarmos um ponto crítico da função Lagrangiana, precisamos resolver o sistema de equações não lineares abaixo:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x + s = x_u \\ A^T y + z - w = c \\ XZe = \mu e \\ SWe = \mu e. \end{cases} \quad (1.23)$$

Resolveremos esse sistema por aproximações sucessivas usando o método de Newton, que é um método iterativo para se determinar uma raiz de uma função. A ideia consiste de uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor,

$$F(\eta + \Delta\eta) \approx F(\eta) + J_F(\eta)\Delta\eta, \quad (1.24)$$

tal que

$$F(\eta) + J_F(\eta)\Delta\eta = 0. \quad (1.25)$$

Então,

$$J_F(\eta)\Delta\eta = -F(\eta), \quad (1.26)$$

onde $\Delta\eta$ é chamada de direção de Newton. Seja $F : \mathbb{R}^{4n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{4n+m}$ uma função não linear, definida por

$$F(x, s, y, z, w) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ x + s - x_u \\ A^T y + z - w - c \\ XZe - \mu e \\ SWe - \mu e \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Aplicando o método de Newton, na função F , obtemos que a matriz jacobiana de F no ponto $\eta = (x, s, y, z, w)$ é

$$J_F(\eta) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^T & I & -I \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & S \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Definindo o vetor dos resíduos $r = -F(\eta)$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^T & I & -I \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_s \\ r_y \\ r_z \\ r_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ x_u - x - s \\ c - A^T y - z + w \\ \mu e - XZe \\ \mu e - SWe \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} A\Delta x = r_x \\ \Delta x + \Delta s = r_s \\ A^T \Delta y + \Delta z - \Delta w = r_y \\ Z\Delta x + X\Delta z = r_z \\ W\Delta s + S\Delta w = r_w. \end{cases} \quad (1.30)$$

Para calcularmos a direção de Newton, precisamos resolver o sistema de equações lineares (1.30). Nos métodos de pontos interiores, o maior custo computacional ocorre na resolução de um ou mais sistemas de equações lineares a cada iteração do algoritmo. Desse modo, discutiremos a seguir três formas de resolução desse sistema linear obtido nos MPI.

Sistema de Karush-Kuhn-Tucker: é possível realizar um reordenamento das equações e das variáveis, do sistema linear (1.30), a fim de obtermos uma matriz em bloco simétrica. Considere as equações:

$$A\Delta x = r_x \quad (1.31)$$

$$\Delta x + \Delta s = r_s \quad (1.32)$$

$$A^T \Delta y + \Delta z - \Delta w = r_y \quad (1.33)$$

$$Z\Delta x + X\Delta z = r_z \quad (1.34)$$

$$W\Delta s + S\Delta w = r_w. \quad (1.35)$$

Multiplicando a equação (1.34) por Z^{-1} , obteremos:

$$\Delta x + Z^{-1}X\Delta z = Z^{-1}r_z. \quad (1.36)$$

Reordenando a equação (1.33), teremos:

$$\Delta z + A^T \Delta y - \Delta w = r_y. \quad (1.37)$$

Multiplicando a equação (1.32) por $-I$, obteremos:

$$-\Delta x - \Delta s = -r_s. \quad (1.38)$$

Multiplicando a equação (1.35) por $-S^{-1}$, e reordenado suas variáveis, teremos:

$$-\Delta w - S^{-1}W\Delta s = -S^{-1}r_w. \quad (1.39)$$

Assim, o sistema linear pode ser reescrito por:

$$\begin{bmatrix} Z^{-1}X & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ I & A^T & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & -I & -S^{-1}W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta y \\ \Delta x \\ \Delta w \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{-1}r_z \\ r_x \\ r_y \\ -r_s \\ -S^{-1}r_w \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Esse sistema de equações é chamado de Sistema de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplesmente sistema KKT. A matriz é não-singular, simétrica e indefinida. Neste caso, usando a fatoração LU , que a forma computacional mais comum para resolver um sistema linear, é possível reduzir o número de operações de ponto flutuante de $(2/3)(4n + m)^3$, da fatoração LU , para $(1/3)(4n + m)^3$, da fatoração LDL^T , onde D é uma matriz bloco diagonal 1×1

ou 2×2 , e reduzir o custo computacional da resolução do sistema KKT (TREFETHEN; BAU, 1997; GOLUB; LOAN, 1996).

Sistema KKT reduzido: Usando o método da substituição de variáveis, podemos obter o sistema KKT reduzido, com dimensão $n + m$. A matriz desse sistema mantém as propriedades do sistema KKT e acarreta menor custo computacional, pois possui dimensão menor.

Desde que $\Delta z = X^{-1}(r_z - Z\Delta x)$, $\Delta s = r_s - \Delta x$ e $\Delta W = S^{-1}[r_w - W(r_s - \Delta x)]$. Então, substituindo na equação (1.37), obteremos:

$$-(S^{-1}W + X^{-1}Z)\Delta x + A^T \Delta y = r_y + S^{-1}(r_w - Wr_s) - X^{-1}r_z. \quad (1.41)$$

Definindo $D = (S^{-1}W + X^{-1}Z)$ e $\bar{r}_y = r_y + S^{-1}(r_w - Wr_s) - X^{-1}r_z$, teremos o sistema KKT reduzido

$$\begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_y \\ r_x \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Sistema de equações normais: usando o método da substituição de variáveis, no sistema reduzido KKT, obteremos o sistema de equações normais. A matriz $AD^{-1}A^T$ é positiva definida e de ordem m .

A fim de resolver o sistema de equações lineares (1.42) nas variáveis Δx e Δy , teremos que $\Delta x = D^{-1}(A^T \Delta y - \bar{r}_y)$. Substituindo a expressão do Δx , obteremos:

$$A\Delta x = r_x \quad (1.43)$$

$$AD^{-1}(A^T \Delta y - \bar{r}_y) = r_x \quad (1.44)$$

$$AD^{-1}A^T \Delta y = r_x + AD^{-1}\bar{r}_y. \quad (1.45)$$

Como a matriz $AD^{-1}A^T$ é positiva definida, é possível utilizar a fatoração de Cholesky, cuja fatoração realiza aproximadamente $(1/3)m^3$ operações de ponto flutuante, para resolver o sistema de linear (1.45) (TREFETHEN; BAU, 1997).

Em particular, um fator importante a ser considerado nos sistemas de equações lineares é sua esparsidade. Assim, analisaremos a relação entre a esparsidade das matrizes A e $AD^{-1}A^T$. Como cada elemento da $AD^{-1}A^T$ é determinado por

$$(AD^{-1}A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}d_k^{-1}a_{kj}, \quad (1.46)$$

então essa forma é vantajosa em geral quando a matriz A não possui colunas densas. Vejamos dois exemplos:

Colunas esparsas:

que $x_j^{k+1} > 0$. Do contrário, quando $\Delta x_j^k < 0$, teremos:

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \alpha_{x_j}^k \Delta x_j^k > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{x_j}^k < -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.47)$$

Assim, α_x é definido por

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_x} &= \tau \min_j \left\{ -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k} : \Delta x_j^k < 0 \right\} \\ \alpha_x &= \min\{\overline{\alpha_x}, 1\}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

sendo τ um número próximo de um, por exemplo $\tau = 0,99995$ (LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1992). Esse parâmetro visa atender a desigualdade estabelecida em (1.47), ao garantir que o ponto seguinte da iteração seja interior. Analogamente, podemos definir α_s , α_z e α_w , tal que

$$\alpha_p = \min\{\alpha_x, \alpha_s\}, \quad (1.49)$$

$$\alpha_d = \min\{\alpha_z, \alpha_w\}. \quad (1.50)$$

Definição 1.8. *O gap de dualidade é definido por $\gamma = f(x, s) - g(y, z, w)$. Quando o ponto (x, s) é primal factível e (y, z, w) é dual factível, então,*

$$\begin{aligned} \gamma &= f(x) - g(y, w) = c^T x - (b^T y - x_u^T w) \\ \gamma &= x^T (A^T y + z - w) - b^T y + w^T (x + s) \\ \gamma &= (Ax)^T y + x^T z - x^T w - b^T y + w^T x + w^T s \\ \gamma &= x^T z + s^T w. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Definição 1.9. *O parâmetro de barreira μ é definido por um percentual da média dos produtos $x_j z_j$ e $s_j w_j$. De modo que:*

$$\mu = \sigma \left(\frac{\sum_{j=1}^n (x_j z_j + s_j w_j)}{2n} \right) \quad (1.52)$$

$$\mu = \sigma \left(\frac{x^T z + s^T w}{2n} \right)$$

$$\mu = \sigma \left(\frac{\gamma}{2n} \right),$$

com $\sigma \in (0, 1)$.

Na prática, o método funciona bem com $\sigma \approx 0,1$ (VANDERBEI, 2001). Contudo, usaremos a relação abaixo, que depende da dimensão do problema.

$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n < 100; \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \geq 100. \end{cases} \quad (1.53)$$

Reunindo as informações sobre o α e a direção de Newton, definimos a atualização da solução, na iteração k , por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p \Delta x^k, \quad (1.54)$$

$$s^{k+1} = s^k + \alpha_p \Delta s^k, \quad (1.55)$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d \Delta y^k, \quad (1.56)$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d \Delta z^k, \quad (1.57)$$

$$w^{k+1} = w^k + \alpha_d \Delta w^k. \quad (1.58)$$

1.2.3 Propriedades:

1. A cada iteração, as infactibilidades primal e dual são reduzidas por um fator $1 - \alpha$;
2. O número de iterações do método seguidor de caminhos é $O(\sqrt{n}L)$, onde L corresponde ao tamanho dos dados de entrada (MONTEIRO; ADLER, 1989).

1.2.4 Implementação

Uma implementação completa dos MPI verifica se existe ponto interior factível, se o problema é infactível ou ilimitado, e estabelece critérios de convergência. Apresentamos abaixo uma proposta de ponto interior inicial (LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1992). Definindo $\epsilon_2 = 1 + \|c\|_1$, teremos:

$$\bar{x} = A^T(AA^T)^{-1}b, \quad (1.59)$$

$$\epsilon_1 = \max \left\{ -\min_j \bar{x}_j, 100, \|b\|_1/100 \right\}, \quad (1.60)$$

$$x_j^0 = \max(\bar{x}_j, \epsilon_1), \quad (1.61)$$

$$s_j^0 = \max(\epsilon_1, u_j - x_j^0), \quad (1.62)$$

$$y^0 = 0, \quad (1.63)$$

$$z_j^0 = \begin{cases} -c_j, & c_j < -\epsilon_2, \\ \epsilon_2, & -\epsilon_2 \leq c_j < 0, \\ c_j + \epsilon_2, & c_j \geq 0, \end{cases} \quad (1.64)$$

$$w_j^0 = \begin{cases} -2c_j, & c_j < -\epsilon_2, \\ -c_j + \epsilon_2, & -\epsilon_2 \leq c_j < 0, \\ \epsilon_2, & c_j \geq 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

O Método Seguidor de Caminhos converge para um ponto interior, conforme o Teorema 1.7. Assim, no final do algoritmo, não é fornecida, normalmente, uma solução básica como no Simplex. Mas, quando tal solução é necessária, é possível usar uma combinação do MPI e Simplex, denominado Método Cross-over, a fim de atingir esse

objetivo. O Cross-over inicia com MPI até se aproximar de uma face ótima e por fim, usa o Simplex para encontrar uma solução básica factível nessa face (LUENBERGER; YE, 2008). Uma abordagem detalhada para determinar uma solução básica, a partir de uma solução ótima do MPI, pode ser encontrada em (MEGIDDO, 1991; BIXBY; SALTZMAN, 1993). A convergência dos MPI ocorre com uma certa tolerância predefinida, ou seja, as condições de otimalidade de primeira ordem são satisfeitas com erro ϵ . Apresentamos abaixo uma proposta de critério de convergência (ANDERSEN et al., 1996),

$$\frac{\|b - Ax^k\|_1}{\|b\|_1 + 1} \leq \epsilon, \quad (1.66)$$

$$\frac{\|x_u - x^k - s^k\|_1}{\|x_u\|_1 + 1} \leq \epsilon, \quad (1.67)$$

$$\frac{\|c - A^T y^k - z^k + w^k\|_1}{\|c\|_1 + 1} \leq \epsilon, \quad (1.68)$$

$$\frac{(x^k)^T z^k + (s^k)^T w^k}{|b^T y^k - x_u^T w^k| + 1} \leq \epsilon. \quad (1.69)$$

Ao longo deste trabalho, definimos $\epsilon = 10^{-5}$.

1.2.5 Resumo do Método Seguidor de Caminhos

Pseudocódigo 1 – Método Seguidor de Caminhos**Entrada:** $(x^0, s^0, z^0, w^0) > 0$, y^0 , $\tau < 1$, $\sigma \in (0, 1)$ **Saída:** $(x, s, z, w) > 0$ e y

1 início

2 para $k = 0, 1, 2, \dots$ até convergir faça

3 $\gamma^k = (x^k)^T z^k + (s^k)^T w^k$

4 $\mu^k = \sigma \left(\frac{\gamma^k}{2n} \right)$

5 $r_x^k = b - Ax^k$

6 $r_s^k = x_u - x^k - s^k$

7 $r_y^k = c - A^T y^k - z^k + w^k$

8 $r_z^k = \mu^k e - X^k Z^k e$

9 $r_w^k = \mu^k e - S^k W^k e$

10 $D^k = (X^k)^{-1} Z^k + (S^k)^{-1} W^k$

11 $\bar{r}_y^k = r_y^k + S^{-1}(r_w - W r_s^k) - X^{-1} r_z^k$

12 $\Delta y^k = (A(D^k)^{-1} A^T)^{-1} (r_x^k + A(D^k)^{-1} \bar{r}_y^k)$

13 $\Delta x^k = (D^k)^{-1} (A^T \Delta y^k - \bar{r}_y^k)$

14 $\Delta s^k = r_s^k - \Delta x^k$

15 $\Delta z^k = X^{-1} (r_z^k - Z \Delta x^k)$

16 $\Delta w^k = S^{-1} (r_w^k - W \Delta s^k)$

17 $\bar{\alpha}_x^k = \tau \min \left\{ -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k} : \Delta x_j^k < 0 \right\}$; $\bar{\alpha}_s^k = \tau \min \left\{ -\frac{s_j^k}{\Delta s_j^k} : \Delta s_j^k < 0 \right\}$

18 $\alpha_p^k = \min \left\{ 1, \bar{\alpha}_x^k, \bar{\alpha}_s^k \right\}$

19 $\bar{\alpha}_z^k = \tau \min \left\{ -\frac{z_j^k}{\Delta z_j^k} : \Delta z_j^k < 0 \right\}$; $\bar{\alpha}_w^k = \tau \min \left\{ -\frac{w_j^k}{\Delta w_j^k} : \Delta w_j^k < 0 \right\}$

20 $\alpha_d^k = \min \left\{ 1, \bar{\alpha}_z^k, \bar{\alpha}_w^k \right\}$

21 $x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k \Delta x^k$

22 $s^{k+1} = s^k + \alpha_p^k \Delta s^k$

23 $y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k \Delta y^k$

24 $z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k \Delta z^k$

25 $w^{k+1} = w^k + \alpha_d^k \Delta w^k$

26 fim

27 fim

1.3 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor foi apresentado em (MEHROTRA, 1992). Nesse método são calculadas duas direções de busca por iteração, a fim de obter uma direção resultante mais eficiente. Este método possui convergência quadrática (YE et al., 1993). A direção resultante é composta por duas direções: preditora e corretora. A direção preditora é a direção de Newton, com passo completo, que é obtida pelo Método Seguidor de Caminhos. A direção corretora é obtida pela adição de uma perturbação, chamada de direção de centragem, e uma correção não linear, que visa compensar a aproximação linear da direção preditora (MEHROTRA, 1992; WRIGHT, 1997).

Dado o problema com variáveis canalizadas em (1.1) e as condições de otimalidade em (1.2.1), a direção preditora, $\tilde{\Delta}$, do método seguidor de caminhos, é obtida pela resolução do sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} A\tilde{\Delta}x = r_x \\ \tilde{\Delta}x + \tilde{\Delta}s = r_s \\ A^T\tilde{\Delta}y + \tilde{\Delta}z - \tilde{\Delta}w = r_y \\ Z\tilde{\Delta}x + X\tilde{\Delta}z = r_z \\ W\tilde{\Delta}s + S\tilde{\Delta}w = r_w, \end{cases} \quad (1.70)$$

onde $r_z = -XZe$ e $r_w = -SWe$. Após a resolução do sistema linear, se usarmos $\alpha = 1$, ou seja, o passo completo de Newton, na atualização da solução, então na iteração seguinte teremos: $r_x^{k+1} = 0$, $r_s^{k+1} = 0$ e $r_y^{k+1} = 0$. Vejamos:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\Delta}x^k, \quad (1.71)$$

$$s^{k+1} = s^k + \tilde{\Delta}s^k, \quad (1.72)$$

$$y^{k+1} = y^k + \tilde{\Delta}y^k, \quad (1.73)$$

$$z^{k+1} = z^k + \tilde{\Delta}z^k, \quad (1.74)$$

$$w^{k+1} = w^k + \tilde{\Delta}w^k. \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} r_x^{k+1} &= b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \tilde{\Delta}x^k) \\ &= b - Ax^k - (A\tilde{\Delta}x^k) \\ &= r_x^k - r_x^k = 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} r_s^{k+1} &= x_u - x^{k+1} - s^{k+1} = x_u - (x^k + \tilde{\Delta}x^k) - (s^k + \tilde{\Delta}s^k) \\ &= x_u - x^k - s^k - (\tilde{\Delta}x^k + \tilde{\Delta}s^k) \\ &= r_s^k - r_s^k = 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned}
r_y^{k+1} &= c - A^T y^{k+1} - z^{k+1} + w^{k+1} \\
&= c - A^T (y^k + \tilde{\Delta} y^k) - (z^k + \tilde{\Delta} z^k) + (w^k + \tilde{\Delta} w^k) \\
&= c - A^T y^k - z^k + w^k - (A^T \tilde{\Delta} y^k + \tilde{\Delta} z^k - \tilde{\Delta} w^k) \\
&= r_y^k - r_y^k = 0.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Por outro lado, os resíduos r_z e r_w não se anulam, como consequência da aproximação linear realizada no cálculo da direção preditora. Esses resíduos serão usados na definição da direção corretora. Assim, sejam $\tilde{\Delta}X$, $\tilde{\Delta}S$, $\tilde{\Delta}Z$ e $\tilde{\Delta}W$ matrizes diagonais dos vetores $\tilde{\Delta}x$, $\tilde{\Delta}s$, $\tilde{\Delta}z$ e $\tilde{\Delta}w$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
r_z^{k+1} &= -X^{k+1} Z^{k+1} e \\
&= -(X^k + \tilde{\Delta}X^k)(Z^k + \tilde{\Delta}Z^k)e \\
&= -X^k Z^k e - (X^k \tilde{\Delta}z^k + Z^k \tilde{\Delta}x^k) - \tilde{\Delta}X^k \tilde{\Delta}Z^k e \\
&= r_z^k - r_z^k - \tilde{\Delta}X^k \tilde{\Delta}Z^k e \\
&= -\tilde{\Delta}X^k \tilde{\Delta}Z^k e.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}
r_w^{k+1} &= -S^{k+1} W^{k+1} e \\
&= -(S^k + \tilde{\Delta}S^k)(W^k + \tilde{\Delta}W^k)e \\
&= -S^k W^k e - (S^k \tilde{\Delta}w^k + W^k \tilde{\Delta}s^k) - \tilde{\Delta}S^k \tilde{\Delta}W^k e \\
&= r_w^k - r_w^k - \tilde{\Delta}S^k \tilde{\Delta}W^k e \\
&= -\tilde{\Delta}S^k \tilde{\Delta}W^k e.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

A direção corretora, $\hat{\Delta}$, será obtida pela solução do sistema de equações lineares abaixo, considerando a direção preditora e o ponto (x, s, y, z, w) da iteração corrente como dados de entrada. Desse modo, teremos:

$$\begin{cases}
A\hat{\Delta}x = 0 \\
\hat{\Delta}x + \hat{\Delta}s = 0 \\
A^T \hat{\Delta}y + \hat{\Delta}z - \hat{\Delta}w = 0 \\
Z\hat{\Delta}x + X\hat{\Delta}z = \sigma\mu e - \tilde{\Delta}X\tilde{\Delta}Z e \\
W\hat{\Delta}s + S\hat{\Delta}w = \sigma\mu e - \tilde{\Delta}S\tilde{\Delta}W e.
\end{cases} \tag{1.81}$$

O termo $\sigma\mu e$ é a direção de centragem, e os termos $\tilde{\Delta}X\tilde{\Delta}Z$ e $\tilde{\Delta}S\tilde{\Delta}W$ correspondem às correções não lineares. O parâmetro de centragem, σ , está relacionado ao progresso da direção preditora em relação à fronteira da região factível. A ideia se baseia em comparar o gap de dualidade antes e depois da direção preditora e, então, estimar o valor de σ . Seja γ_p o gap de dualidade da direção preditora. O objetivo é que, se a direção preditora for boa, ou seja, $\gamma_p \ll \gamma$, não será necessário corrigir a centragem, logo, deveríamos escolher $\sigma \approx 0$. Do contrário, se a direção preditora for ruim, ou seja, $\gamma_p \approx \gamma$, precisaríamos mover o ponto atual para próximo do caminho central, a fim de conseguir uma redução melhor do

gap de dualidade na iteração seguinte; então, deveríamos escolher $\sigma \approx 1$. Apresentaremos a seguir uma heurística para determinar o valor de σ (MEHROTRA, 1992; WRIGHT, 1997). Sejam $\gamma = x^T z + s^T w$ e $\gamma_p = (x + \bar{\alpha}_p \tilde{\Delta}x)^T (z + \bar{\alpha}_d \tilde{\Delta}z) + (s + \bar{\alpha}_p \tilde{\Delta}s)^T (w + \bar{\alpha}_d \tilde{\Delta}w)$, então σ é definido por:

$$\sigma = \left(\frac{\gamma_p}{\gamma} \right)^3. \quad (1.82)$$

A direção preditora-corretora resultará da soma das direções $\tilde{\Delta}$ e $\hat{\Delta}$, e será obtida pela resolução do sistema de equações lineares (1.83), resultante da soma das equações correspondentes nos sistemas lineares (1.70) e (1.81). Assim,

$$\begin{cases} A(\tilde{\Delta}x + \hat{\Delta}x) = r_x \\ (\tilde{\Delta}x + \hat{\Delta}x) + (\tilde{\Delta}s + \hat{\Delta}s) = r_s \\ A^T(\tilde{\Delta}y + \hat{\Delta}y) + (\tilde{\Delta}z + \hat{\Delta}z) - (\tilde{\Delta}w + \hat{\Delta}w) = r_y \\ Z(\tilde{\Delta}x + \hat{\Delta}x) + X(\tilde{\Delta}z + \hat{\Delta}z) = r_{cz} \\ W(\tilde{\Delta}s + \hat{\Delta}s) + S(\tilde{\Delta}w + \hat{\Delta}w) = r_{cw}, \end{cases} \quad (1.83)$$

onde $r_{cz} = r_z + \sigma\mu e - \tilde{\Delta}X\tilde{\Delta}Ze$ e $r_{cw} = r_w + \sigma\mu e - \tilde{\Delta}S\tilde{\Delta}Ze$. Como a direção preditora-corretora é definida por $\Delta = \tilde{\Delta} + \hat{\Delta}$, o sistema linear (1.83) pode ser reescrito por

$$\begin{cases} A\Delta x = r_x \\ \Delta x + \Delta s = r_s \\ A^T \Delta y + \Delta z - \Delta w = r_y \\ Z\Delta x + X\Delta z = r_{cz} \\ W\Delta s + S\Delta w = r_{cw}. \end{cases} \quad (1.84)$$

Desse modo, a obtenção da direção preditora-corretora, Δ , aumenta o número de operações de cada iteração, comparando com outros algoritmos que calculam apenas uma direção de busca. No entanto, como os dois sistemas lineares são resolvidos com a mesma matriz de coeficientes, o custo é reduzido. O custo extra por iterações é compensado, em geral, pela redução do número de iterações (WRIGHT, 1997).

1.3.1 Propriedades

- O Método Preditor-Corretor é um MPI primal-dual de segunda ordem;
- Os cálculos para determinar a correção de segunda ordem e a direção de centragem são combinados, tornando o algoritmo mais eficiente;
- Esse algoritmo não exige um ponto inicial primal e dual factível;
- O parâmetro de centragem é calculado por uma heurística adaptativa.

1.3.2 Resumo do Método Predictor-Corretor

Pseudocódigo 2 – Método Predictor-Corretor

Entrada: $(x^0, s^0, z^0, w^0) > 0$, y^0 , $\tau < 1$, $\sigma \in (0, 1)$

Saída: $(x, s, z, w) > 0$ e y

1 início

2 para $k = 0, 1, 2, \dots$ até convergir **faça**

3 Direção preditora

4 $\gamma^k = (x^k)^T z^k + (s^k)^T w^k$; $r_x^k = b - Ax^k$; $r_s^k = x_u - x^k - s^k$;

5 $r_y^k = c - A^T y^k - z^k + w^k$; $r_z^k = -X^k Z^k e$; $r_w^k = -S^k W^k e$;

6 $D^k = (X^k)^{-1} Z^k + (S^k)^{-1} W^k$; $\bar{r}_y^k = r_y^k + S^{-1}(r_w - W r_s^k) - X^{-1} r_z^k$;

7 $\tilde{\Delta} y^k = (A(D^k)^{-1} A^T)^{-1}(r_x^k + A(D^k)^{-1} \bar{r}_y^k)$; $\tilde{\Delta} x^k = (D^k)^{-1}(A^T \Delta y^k - \bar{r}_y^k)$;

8 $\tilde{\Delta} s^k = r_s^k - \Delta x^k$; $\tilde{\Delta} z^k = X^{-1}(r_z^k - Z \Delta x^k)$; $\tilde{\Delta} w^k = S^{-1}(r_w^k - W \Delta s^k)$;

9 $\alpha_{xc}^k = \min \left\{ -\frac{x_j^k}{\tilde{\Delta} x_j^k} : \tilde{\Delta} x_j^k < 0 \right\}$; $\alpha_{sc}^k = \min \left\{ -\frac{s_j^k}{\tilde{\Delta} s_j^k} : \tilde{\Delta} s_j^k < 0 \right\}$;

10 $\alpha_{zc}^k = \min \left\{ -\frac{z_j^k}{\tilde{\Delta} z_j^k} : \tilde{\Delta} z_j^k < 0 \right\}$; $\alpha_{wc}^k = \min \left\{ -\frac{w_j^k}{\tilde{\Delta} w_j^k} : \tilde{\Delta} w_j^k < 0 \right\}$;

11 $\alpha_p^k = \min \{1, \alpha_{xc}^k, \alpha_{sc}^k\}$; $\alpha_d^k = \min \{1, \alpha_{zc}^k, \alpha_{wc}^k\}$;

12 $\gamma_p^k = (x + \alpha_p^k \tilde{\Delta} x)^T (z + \alpha_d^k \tilde{\Delta} z) + (s + \alpha_p^k \tilde{\Delta} s)^T (w + \alpha_d^k \tilde{\Delta} w)$;

13 $\sigma^k = \left(\frac{\gamma_p^k}{\gamma^k} \right)^3$; $\mu^k = \frac{\gamma^k}{2n}$;

14 Direção preditora-corretora

15 $r_{cz} = r_z + \sigma \mu e - \tilde{\Delta} X \tilde{\Delta} Z e$; $r_{cw} = r_w + \sigma \mu e - \tilde{\Delta} S \tilde{\Delta} W e$;

16 $\bar{r}_y^k = r_y^k + S^{-1}(r_{cw} - W r_s^k) - X^{-1} r_{cz}^k$;

17 $\Delta y^k = (A(D^k)^{-1} A^T)^{-1}(r_x^k + A(D^k)^{-1} \bar{r}_y^k)$; $\Delta x^k = (D^k)^{-1}(A^T \Delta y^k - \bar{r}_y^k)$;

18 $\Delta s^k = r_s^k - \Delta x^k$; $\Delta z^k = X^{-1}(r_{cz}^k - Z \Delta x^k)$; $\Delta w^k = S^{-1}(r_{cw}^k - W \Delta s^k)$;

19 $\bar{\alpha}_x^k = \tau \min \left\{ -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k} : \Delta x_j^k < 0 \right\}$; $\bar{\alpha}_s^k = \tau \min \left\{ -\frac{s_j^k}{\Delta s_j^k} : \Delta s_j^k < 0 \right\}$;

20 $\bar{\alpha}_z^k = \tau \min \left\{ -\frac{z_j^k}{\Delta z_j^k} : \Delta z_j^k < 0 \right\}$; $\bar{\alpha}_w^k = \tau \min \left\{ -\frac{w_j^k}{\Delta w_j^k} : \Delta w_j^k < 0 \right\}$;

21 $\alpha_p^k = \min \{1, \bar{\alpha}_x^k, \bar{\alpha}_s^k\}$; $\alpha_d^k = \min \{1, \bar{\alpha}_z^k, \bar{\alpha}_w^k\}$;

22 $x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k \Delta x^k$; $s^{k+1} = s^k + \alpha_p^k \Delta s^k$; $y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k \Delta y^k$;

23 $z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k \Delta z^k$; $w^{k+1} = w^k + \alpha_d^k \Delta w^k$.

24 fim

25 fim

1.4 Programação Quadrática

Um Problema de Programação Quadrática (PQ) é um problema de otimização cuja função objetivo é quadrática e o conjunto de restrições é linear. A PQ é uma extensão da programação linear. O método Simplex para programação quadrática foi apresentado em (WOLFE, 1959). No seu trabalho, Wolfe menciona as seguintes aplicações de programação quadrática: problema de regressão, produção eficiente, problema de portfólio e programação convexa. No mesmo ano, Harry Markowitz apresentou um trabalho de programação quadrática sobre portfólio, o qual foi premiado 30 anos depois, em 1990, com o prêmio Nobel em Economia (VANDERBEI, 2001). Dentre outras aplicações de PQ, destacamos o Problema de Fluxo de Potência Ótimo CC, uma abordagem via fluxo em redes (CARVALHO; SOARES; OHISHI, 1988; COELHO; SANTOS; OLIVEIRA, 2015; OLIVEIRA; SOARES, 2003).

Definição 1.10. *Um problema de programação quadrática convexa, com variáveis canalizadas, na forma padrão é definido por:*

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x, s) = c^T x + (1/2)x^T Q x \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x + s = x_u \\ & (x, s) \geq 0, \end{aligned} \tag{1.85}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto-linha completo, x e c são vetores em \mathbb{R}^n e b é um vetor em \mathbb{R}^m . Por questão de simplicidade, chamaremos esse problema de programação quadrática de problema primal.

Definição 1.11. *O problema de barreira logarítmica associado ao problema primal é*

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f_\mu(x, s) = c^T x + (1/2)x^T Q x - \mu \sum_j^n \ln(x_j) - \mu \sum_j^n \ln(s_j) \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x + s = x_u, \end{aligned} \tag{1.86}$$

tal que μ é um parâmetro positivo, conforme definimos em (1.9).

Definição 1.12. *A função Lagrangiana associada ao problema de barreira logarítmica é*

$$\begin{aligned} L(x, s, y, w) = & c^T x + (1/2)x^T Q x - \mu \sum_j^n \ln(x_j) - \mu \sum_j^n \ln(s_j) + \\ & + y^T (-Ax + b) + w^T (x + s - x_u). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Aplicando as condições de otimalidade de primeira ordem na função Lagrangiana, teremos:

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial x_j} = c_j + Q(j, :)x_j - \mu x_j^{-1} - A(:, j)^T y + w_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial s_j} = -\mu s_j^{-1} + w_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial y_i} = -A(i, :)x + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1.90)$$

$$\frac{\partial L(x, s, y, w)}{\partial w_j} = x_j + s_j - x_{uj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.91)$$

Definindo $z = \mu X^{-1}e$, onde $e^T = (1, 1, 1, \dots, 1)$, e reescrevendo as equações acima na forma vetorial, obteremos as condições de otimalidade para o problema (1.86).

1.4.1 Condições de Otimalidade

Primal interior factível:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x + s &= x_u \\ (x, s) &> 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Dual interior factível:

$$\begin{aligned} -Qx + A^T y + z - w &= c \\ (x, y) \text{ livres}, (z, w) &> 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Relação de μ -complementaridade:

$$\begin{aligned} XZe &= \mu e \\ WSe &= \mu e \\ (x, s, w, z) &> 0. \end{aligned} \quad (1.94)$$

As matrizes X, S, W e Z são matrizes diagonais cujas coordenadas correspondentes são respectivamente as coordenadas dos vetores x, s, w e z . A partir das condições de otimalidade e usando o Teorema da Dualidade Fraca, definiremos o problema dual. Sejam (x, s) e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente. Desse modo, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^T \bar{z} + s^T \bar{w} \\ &= x^T (c + Q\bar{x} + A^T \bar{y} + \bar{w}) + (x_u - x)^T \bar{w} \\ &= c^T x + x^T Q\bar{x} + b^T \bar{y} + x_u^T \bar{w} \\ &\leq c^T x + (1/2)x^T Qx - (b^T \bar{y} - (1/2)\bar{x}^T Q\bar{x} - x_u^T \bar{w}) \\ &= f(x, s) - g(\bar{y}, \bar{z}, \bar{w}). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Na desigualdade (1.95), usamos o fato de que $(\bar{x} - x)^T Q(\bar{x} - x) \geq 0$, pois a matriz Q é semidefinida positiva, então $\bar{x}^T Qx \leq (1/2)\bar{x}^T Q\bar{x} + (1/2)x^T Qx$.

Definição 1.13. O Problema dual é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & g(y, z, w) = -(1/2)x^T Qx + b^T y - x_u^T w \\ \text{Sujeito a } & -Qx + A^T y + z - w = c \\ & (x, y) \text{ livres, } (z, w) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

A partir das condições de otimalidade, [subseção 1.4.1](#), definimos a função $F : \mathbb{R}^{4n+m} \mapsto \mathbb{R}^{4n+m}$, de modo que

$$F(x, s, y, z, w) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ x + s - x_u \\ -Qx + A^T y + z - w - c \\ XZe - \mu e \\ SWe - \mu e \end{bmatrix}. \quad (1.97)$$

Queremos encontrar, se for possível, uma raiz da função F , ou seja, encontrar um ponto (x, s, y, z, w) tal que $F(x, s, y, z, w) = 0$. Assim, aplicaremos o método de Newton na função F , em (1.97). A direção de Newton, $\Delta\eta$, é obtida pela resolução do sistema de equações lineares abaixo,

$$J_F(\eta)\Delta\eta = -F(\eta) = r, \quad (1.98)$$

desde que $J_F(\eta)$ seja a matriz jacobiana da função F , no ponto $\eta = (x, s, y, z, w)$, e $r \in \mathbb{R}^{(4n+m)}$ seja o vetor dos resíduos. Calculando a matriz jacobiana, teremos:

$$J_F(\eta)\Delta\eta = r \quad (1.99)$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & A^T & I & -I \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_s \\ r_y \\ r_z \\ r_w \end{bmatrix}. \quad (1.100)$$

Desse modo, para obtermos a direção de Newton, é necessário resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_x \\ \Delta x + \Delta s = r_s \\ -Q\Delta x + A^T \Delta y + \Delta z - \Delta w = r_y \\ Z\Delta x + X\Delta z = r_z \\ W\Delta s + S\Delta w = r_w. \end{cases} \quad (1.101)$$

Apresentaremos agora duas maneiras de resolver o sistemas linear (1.101) e obter a direção de Newton.

Sistema KKT reduzido: usando o processo de substituição de variáveis, podemos reduzir a dimensão do sistema original para $n + m$. A matriz do sistema KKT reduzido é simétrica e indefinida.

Desde que $\Delta z = X^{-1}(r_z - Z\Delta x)$, $\Delta s = r_s - \Delta x$ e $\Delta w = S^{-1}[r_w - W(r_s - \Delta x)]$, então, substituindo esses vetores na terceira equação de (1.101), adquirimos a equação

$$-(Q + X^{-1}Z + S^{-1}W)\Delta x + A^T \Delta y = r_y + S^{-1}(r_w - Wr_s) - X^{-1}r_z. \quad (1.102)$$

Definindo $D = (Q + X^{-1}Z + S^{-1}W)$ e $\bar{r}_y = r_y + S^{-1}(r_w - Wr_s) - X^{-1}r_z$, obteremos:

$$\begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_y \\ r_x \end{bmatrix}. \quad (1.103)$$

Sistema de equações normais: usando o método de substituição de variáveis no sistema KKT reduzido, obtemos o sistema de equações normais. A matriz $AD^{-1}A^T$ é positiva definida e de ordem m .

Desde que $\Delta x = D^{-1}(A^T \Delta y - \bar{r}_y)$, substituindo esse vetor na segunda equação de (1.103), resulta que

$$\begin{aligned} A\Delta x &= r_x \\ AD^{-1}(A^T \Delta y - \bar{r}_y) &= r_x \\ AD^{-1}A^T \Delta y &= r_x + AD^{-1}\bar{r}_y. \end{aligned} \quad (1.104)$$

A matriz $AD^{-1}A^T$ é positiva definida, logo, é possível usar a fatoração de Cholesky, que possui baixo custo computacional, para resolver esse sistema linear (TREFETHEN; BAU, 1997).

1.4.2 Resumo do Método Seguidor de Caminhos para PQ

Pseudocódigo 3 – Algoritmo Seguidor de Caminhos para PQ**Entrada:** $(x^0, s^0, z^0, w^0) > 0, y^0, \tau < 1, \sigma \in (0, 1)$ **Saída:** $(x, s, z, w) > 0$ e y 1 **início**2 **para** $k = 0, 1, 2, \dots$ até convergir **faça**

3
$$\gamma^k = (x^k)^T z^k + (s^k)^T w^k$$

4
$$\mu^k = \sigma \left(\frac{\gamma^k}{2n} \right)$$

5
$$r_x^k = b - Ax^k$$

6
$$r_s^k = x_u - x^k - s^k$$

7
$$r_y^k = c - A^T y^k - z^k + w^k$$

8
$$r_z^k = \mu^k e - X^k Z^k e$$

9
$$r_w^k = \mu^k e - S^k W^k e$$

10
$$D^k = Q + (X^k)^{-1} Z^k + (S^k)^{-1} W^k$$

11
$$\bar{r}_y^k = r_y^k + S^{-1}(r_w - W r_s^k) - X^{-1} r_z^k$$

12
$$\Delta y^k = (A(D^k)^{-1} A^T)^{-1} (r_x^k + A(D^k)^{-1} \bar{r}_y^k)$$

13
$$\Delta x^k = (D^k)^{-1} (A^T \Delta y^k - \bar{r}_y^k)$$

14
$$\Delta s^k = r_s^k - \Delta x^k$$

15
$$\Delta z^k = X^{-1} (r_z^k - Z \Delta x^k)$$

16
$$\Delta w^k = S^{-1} (r_w^k - W \Delta s^k)$$

17
$$\bar{\alpha}_x^k = \tau \min \left\{ -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k} : \Delta x_j^k < 0 \right\}; \bar{\alpha}_s^k = \tau \min \left\{ -\frac{s_j^k}{\Delta s_j^k} : \Delta s_j^k < 0 \right\}$$

18
$$\bar{\alpha}_z^k = \tau \min \left\{ -\frac{z_j^k}{\Delta z_j^k} : \Delta z_j^k < 0 \right\}; \bar{\alpha}_w^k = \tau \min \left\{ -\frac{w_j^k}{\Delta w_j^k} : \Delta w_j^k < 0 \right\}$$

19
$$\alpha^k = \min \left\{ 1, \bar{\alpha}_x^k, \bar{\alpha}_s^k, \bar{\alpha}_z^k, \bar{\alpha}_w^k \right\}$$

20
$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Delta x^k$$

21
$$s^{k+1} = s^k + \alpha^k \Delta s^k$$

22
$$y^{k+1} = y^k + \alpha^k \Delta y^k$$

23
$$z^{k+1} = z^k + \alpha^k \Delta z^k$$

24
$$w^{k+1} = w^k + \alpha^k \Delta w^k$$

25 **fim**26 **fim**

Capítulo 2

Programação Estocástica de Dois Estágios com Recurso Fixo

Um dos primeiros trabalhos sobre programação estocástica foi publicado em 1955 por Dantzig. Segundo o autor, a motivação do estudo surgiu de uma proposta de estender os métodos de programação linear para resolver problemas de alocação com demanda incerta. Dantzig afirma que a característica fundamental dos problemas sob incerteza é que as decisões são tomadas em dois ou mais estágios. Assim, as variáveis de primeiro estágio são as únicas que podem ser determinadas com antecedência, porque as de segundo estágio e posteriores dependem dos eventos aleatórios (DANTZIG, 2004). Um problema de programação estocástica possui uma variável de decisão x que satisfaz um conjunto de restrições, uma variável aleatória ξ cujo valor será determinado após a escolha de x e uma função de avaliação em termos do resultado observado (WETS, 1996). Em geral, resolver programas estocásticos aumenta a complexidade do problema, por isso, na prática, os parâmetros incertos são substituídos por aproximações ou valores esperados e, assim, problemas mais simples são resolvidos. Para avaliar a qualidade da solução de um problema estocástico, são usadas algumas medidas. Neste capítulo, destacaremos o Valor Esperado da Informação Perfeita (EVPI), que representa a quantidade máxima que o tomador de decisão pagaria para obter informações completas sobre as futuras realizações dos parâmetros incertos; e o Valor da Solução Estocástica (VSS), que avalia o desempenho da solução do modelo determinístico em relação à solução do problema estocástico (BIRGE, 1982). Apresentaremos, também, uma breve discussão sobre os programas estocásticos de dois estágios com recurso fixo linear e quadrático. Em seguida, analisaremos os casos onde a variável aleatória é discreta e contínua. E, por fim, construímos uma aproximação discreta da função distribuição baseada na Soma de Riemann. A partir dessa aproximação, realizamos testes numéricos com uma variável aleatória discreta e contínua e também com três variáveis aleatórias contínuas independentes, a fim de avaliar o desempenho da solução estocástica proposta com a literatura.

2.1 Problema de Recurso

Inicialmente, consideremos o espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{A}, P) tal que Ω é o espaço amostral, \mathbb{A} é uma σ -álgebra sobre Ω , e P é a medida de probabilidade. A incerteza será representada em termos de experimentos aleatórios denotados por ω . Para cada realização ω os vetores $q(\omega)$, $h(\omega)$ e $T(\omega)$ tornam-se conhecidos. Assim, reuniremos esses dados num vetor aleatório $\xi(\omega)$, definido por $\xi(\omega)^T = (q(\omega)^T, h(\omega)^T, T_1(\omega), \dots, T_{m_2}(\omega))$. Além disso, seja E o operador valor esperado.

Definição 2.1. *O problema linear estocástico de dois estágios com recurso fixo é definido por:*

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x + E_\xi[Q(x, \xi)] \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $Q(x, \xi) = \min\{q(\omega)^T y(\omega); Wy(\omega) = h(\omega) - T(\omega)x, y(\omega) \geq 0\}$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio. Ou, ainda,

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x + E_\xi\{\min[q(\omega)^T y(\omega)]\} \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega) \\ & (x, y(\omega)) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

no qual x e $c \in \mathbb{R}^{n_1}$, $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y(\omega)$ e $q(\omega) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $h(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2}$, $T(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ e $W \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$. As matrizes A e W possuem posto linha completo. A matriz W é chamada de matriz de recurso, como ela é fixa, neste caso, o problema estocástico em questão recebe o complemento recurso fixo. Denotaremos este problema estocástico por problema de recurso, ou simplesmente por *RP*.

O vetor x representa as variáveis de primeiro estágio, que correspondem ao conjunto de decisões que são tomadas antes da realização do experimento aleatório; e o período quando essas decisões são tomadas é chamado de primeiro estágio. O vetor $y(\omega)$ representa as variáveis de segundo estágio, ou seja, o conjunto de decisões tomadas após a realização do experimento, sendo o período correspondente chamado de segundo estágio.

Definição 2.2. *O problema estocástico quadrático de dois estágios com recurso fixo é definido por:*

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x + (1/2)x^T Cx + E_\xi\{\min[q(\omega)^T y(\omega) + (1/2)y(\omega)^T D(\omega)y(\omega)]\} \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega) \\ & (x, y(\omega)) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

desde que as matrizes C e $D(\omega)$ sejam semidefinidas positivas.

As definições e resultados que apresentaremos ao longo deste capítulo não diferem muito entre os Problemas de Recurso Linear ou Quadrático, pois os principais resultados estão relacionados ao fato de o problema possuir função objetivo convexa e restrições lineares. Assim, concentraremos a discussão no problema de recurso linear.

Seja $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ o suporte de ξ , ou seja, Ξ é o menor subconjunto fechado tal que $P(\Xi) = 1$. O conjunto factível das restrições de primeiro estágio é definido por $K_1 = \{x; Ax = b, x \geq 0\}$, este conjunto não depende das realizações do vetor aleatório. Por outro lado, para qualquer ξ , o conjunto factível elementar é definido por:

$$K_2(\xi) = \{x; \text{existe } y \geq 0 : Wy = h(\omega) - T(\omega)x\}. \quad (2.4)$$

Ou ainda, por:

$$K_2(\xi) = \{x; Q(x, \xi) < \infty\}. \quad (2.5)$$

Teorema 2.3. *Para um dado ξ , o conjunto elementar $K_2(\xi)$ é um poliedro convexo.*

Demonstração: Dado $x \in K_2(\xi)$, para ξ fixo. Logo, existe $y \geq 0$ tal que $Wy = h - Tx$, ou seja, $h - Tx \in \text{pos}W$, pois $\text{pos}W = \{t; Wy = t, y \geq 0\}$. Desde que $\text{pos}W$ é um cone convexo, existem n vetores v_i tais que $v_i^T t \geq 0, i = 1, \dots, n$. Desse modo, obteremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} (v_1^T T)x \leq v_1^T h \\ (v_2^T T)x \leq v_2^T h \\ (v_3^T T)x \leq v_3^T h \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (v_n^T T)x \leq v_n^T h. \end{cases} \quad (2.6)$$

Portanto, x pertence ao conjunto solução do sistema linear (2.6), então $K_2(\xi)$ é um poliedro convexo. \square

Como consequência deste teorema e devido à propriedade de que a interseção finita de poliedros convexos é um poliedro convexo, então, quando ξ for uma variável aleatória discreta finita, $K_2 = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi)$ é um poliedro convexo.

Seja $\mathcal{Q}(x) = E_\xi Q(x, \xi)$. De modo que, denotaremos por $Q(x, \xi) = -\infty$, se $Q(x, \xi)$ for ilimitada inferiormente; e por $Q(x, \xi) = +\infty$, se o problema de segundo estágio for infactível. Para completar a definição de $\mathcal{Q}(x)$, usaremos a convenção de que $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$.

Considerando ξ uma variável aleatória discreta finita, então, para $x \in K_2$, $Q(x, \xi)$ é finito para todo ξ e definimos

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi Q(x, \xi) = \sum_{k=1}^N p_k Q(x, \xi_k), \quad (2.7)$$

onde $k = 1, \dots, N$ são as realizações de ξ e $P(\xi_k) = p_k$. Desse modo, o problema de recurso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ & \text{Sujeito a} && x \in K_1 \cap K_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou, de forma mais detalhada, por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && c^T x + \sum_{i=1}^N p_i q_i^T y_i \\ & \text{Sujeito a} && Ax = b \\ & && T_i x + W y_i = h_i \\ & && (x, y_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Neste caso, o problema de recurso é equivalente a um PPL. A fim de escrever o problema (2.9) como um PPL, consideremos que

$$c_s = (c, p_1 q_1, p_2 q_2, p_3 q_3, \dots, p_N q_N)^T \quad (2.10)$$

$$x_s = (x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)^T \quad (2.11)$$

$$b_s = (b, h_1, h_2, h_3, \dots, h_N)^T \quad (2.12)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_1 & W & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_2 & 0 & W & 0 & \cdots & 0 \\ T_3 & 0 & 0 & W & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ T_N & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Assim, o problema de recurso pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && c_s^T x_s \\ & \text{Sujeito a} && A_s x_s = b_s \\ & && x_s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observando a matriz de restrições (2.13), percebemos que ela é esparsa. Desse modo, conforme vimos no capítulo 1, desenvolveremos o método seguidor de caminhos para problema de recurso (2.14), a fim de explorar a esparsidade desse problema e tornar o algoritmo mais eficiente.

Definição 2.4. O problema de barreira logarítmica associado ao problema primal é definido por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f_\mu(x, y_1, \dots, y_N) = c^T x + \sum_{i=1}^N p_i q_i^T y_i - \mu \sum_j \ln(w_j) \\ & \text{Sujeito a} && Ax = b \\ & && T_i x + W y_i = h_i \\ & && (x, y_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.15)$$

tal que μ é um parâmetro positivo, e $w = (x, y_1, \dots, y_N)$.

Definição 2.5. A função Lagrangiana associada ao problema de barreira logarítmica é definida por: $L(x, y_i, \lambda, \alpha_i)$, com $i = 1, \dots, N$,

$$L(x, y_i, \lambda, \alpha_i) = c^T x + \sum_{i=1}^N p_i y_i^T q - \mu \sum_{j=1}^{N_w} \ln(w_j) + \lambda^T (Ax - b) + \alpha_i^T (T_i x + W y_i - h_i). \quad (2.16)$$

Aplicando as condições de otimalidade de primeira ordem na função Lagrangiana, teremos:

$$L_x(x, y_i, \lambda, \alpha_i) = c - \mu x^{-1} + A^T \lambda + \sum_{i=1}^N T_i^T \alpha_i = 0; \quad (2.17)$$

$$L_{y_i}(x, y_i, \lambda, \alpha_i) = p_i q - \mu y_i^{-1} + W^T \alpha_i = 0; \quad (2.18)$$

definindo $z = \mu x^{-1}$ e $v_i = \mu y_i^{-1}$, descreveremos abaixo as condições de otimalidade do problema (2.15).

2.1.1 Condições de Otimalidade

Primal factível:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ T_i x + W y_i &= h_i \\ (x, y_i) &> 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dual factível:

$$\begin{aligned} -A^T \lambda - \sum_{i=1}^N T_i^T \alpha_i + z &= c \\ -W^T \alpha_i + v_i &= p_i q \\ (\lambda, \alpha_i) - \text{livres}, (z, v_i) &> 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Relação de μ -complementaridade:

$$\begin{aligned} X Z e_1 &= \mu e_1 \\ Y_i V_i e_2 &= \mu e_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A matriz X é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são as coordenadas do vetor x . Analogamente, foram definidas as matrizes diagonais Z , Y_i e V_i . Os vetores e_1 e e_2 possuem todas as coordenadas iguais a um, tais que $e_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $e_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. A função $F : \mathbb{R}^{N_t} \rightarrow \mathbb{R}^{N_t}$, onde $N_t = 2n_1 + m_1 + N(2n_2 + m_2)$, é definida por

$$F(x, y_i, \lambda, \alpha_i, z, v_i) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ T_i x + W y_i - h_i \\ -A^T \lambda - \sum_{i=1}^N T_i^T \alpha_i + z - c \\ -W^T \alpha_i + v_i - p_i q \\ X Z e_1 - \mu e_1 \\ Y_i V_i e_2 - \mu e_2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Com o objetivo de encontrar uma raiz da função F , usaremos o método de Newton:

$$J_F d = -F = r, \quad (2.23)$$

onde J_F é a matriz jacobiana de F , d é um vetor que corresponde a direção de busca e r é o vetor dos resíduos. Assim, teremos:

$$J_F = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_1 & W & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_N & 0 & & W & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -A^T & -T_1^T & \cdots & -T_N^T & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -W^T & & 0 & 0 & I & & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & -W^T & 0 & 0 & & I \\ Z & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & Y_1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & V_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & Y_N \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Desse modo, obteremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} Ad_1 = r_1 \\ T_i d_1 + W d_{2i} = r_{2i} \\ -A^T d_3 - \sum_{i=1}^N T_i^T d_{4i} + d_5 = r_3 \\ -W^T d_{4i} + d_{6i} = r_{4i} \\ Z d_1 + X d_5 = r_5 \\ V_i d_{2i} + Y_i d_{6i} = r_{6i}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Usaremos o método da substituição para resolver o sistema linear (2.25). A partir das equações $Zd_1 + Xd_5 = r_5$ e $V_i d_{2i} + Y_i d_{6i} = r_{6i}$, teremos:

$$d_5 = X^{-1}(r_5 - Zd_1) \quad \text{e} \quad d_{6i} = Y_i^{-1}(r_{6i} - V_i d_{2i}). \quad (2.26)$$

Substituindo d_{6i} na equação $-W^T d_{4i} + d_{6i} = r_{4i}$, obteremos:

$$d_{2i} = V_i^{-1} Y_i (-W^T d_{4i} + Y_i^{-1} r_{6i} - r_{4i}). \quad (2.27)$$

E substituindo d_{2i} na equação $T_i d_1 + W d_{2i} = r_{2i}$, teremos:

$$d_{4i} = (WV_i^{-1}Y_iW^T)^{-1}[-r_{2i} + T_i d_1 - WV_i^{-1}Y_i(r_{4i} - Y_i^{-1}r_{6i})]. \quad (2.28)$$

Agora, substituindo d_{4i} e d_5 na equação $-A^T d_3 - \sum_{i=1}^N T_i^T d_{4i} + d_5 = r_3$, obteremos:

$$d_1 = D^{-1}(-A^T d_3 - \bar{r}_3), \quad (2.29)$$

sendo $D = \sum_{i=1}^N T_i^T (WV_i^{-1}Y_iW^T)^{-1}T_i + X^{-1}Z$ e $\bar{r}_3 = r_3 - \sum_{i=1}^N T_i^T M^{-1}[r_{2i} + WV_i^{-1}Y_i(r_{4i} - Y_i^{-1}r_{6i})] - X^{-1}r_5$. Por fim, substituindo d_1 na equação $Ad_1 = r_1$, teremos:

$$d_3 = (AD^{-1}A^T)^{-1}(-AD^{-1}\bar{r}_3 - r_1). \quad (2.30)$$

Assim, concluímos a solução do sistema linear obtendo a direção de busca. No final deste capítulo, apresentaremos um resumo do Método Seguidor de Caminhos para o problema de recurso.

Apresentaremos a seguir as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema de recurso.

Teorema 2.6. *Para um dado ξ , a função $Q(x, \xi)$ é convexa em $x \in K_2$ (BIRGE; LOUVEAUX, 2011).*

Demonstração: Para um dado cenário ξ , os dados q , W , h e T são fixos, assim, podemos definir $Q(x) = \min\{q^T y; Wy = h - Tx, y \geq 0\}$. Sejam x_1 e x_2 vetores distintos e $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, com $\lambda \in (0, 1)$, uma combinação convexa; e suponhamos que o problema $Q(x_1)$ tenha solução ótima \bar{y}_1 e, analogamente, \bar{y}_2 seja a solução de $Q(x_2)$. Afirmamos que $\lambda\bar{y}_1 + (1 - \lambda)\bar{y}_2$ é uma solução factível para o problema $Q(x_\lambda)$. De fato, $W[\lambda\bar{y}_1 + (1 - \lambda)\bar{y}_2] = \lambda W\bar{y}_1 + (1 - \lambda)W\bar{y}_2 = \lambda(h - Tx_1) + (1 - \lambda)(h - Tx_2) = h - T[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = h - Tx_\lambda$. Para concluir a prova da convexidade de $Q(x)$, consideremos \bar{y}_λ uma solução ótima de $Q(x_\lambda)$. Assim, $Q[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = Q(x_\lambda) = q^T \bar{y}_\lambda \leq q^T [\lambda\bar{y}_1 + (1 - \lambda)\bar{y}_2] = \lambda q^T \bar{y}_1 + (1 - \lambda)q^T \bar{y}_2 = \lambda Q(x_1) + (1 - \lambda)Q(x_2)$. Portanto, $Q(x)$ é uma função convexa. \square

Teorema 2.7. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e S um conjunto convexo não vazio em \mathbb{R}^n . Considere o problema*

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \text{Sujeito a } x \in S. \end{aligned} \quad (2.31)$$

O ponto $\bar{x} \in S$ é uma solução ótima para este problema se, e somente se, f tiver um subgradiente η em \bar{x} tal que $\eta^T(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in S$ (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006).

Demonstração: Suponhamos que $\eta^T(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in S$, onde η é um subgradiente de f em \bar{x} . Pela definição de subgradiente de f em \bar{x} , teremos

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \eta^T(x - \bar{x}). \quad (2.32)$$

Como $\eta^T(x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in S$, implica-se que $f(x) \geq f(\bar{x}), \forall x \in S$. Assim, o valor funcional ótimo é $f(\bar{x})$. Portanto, \bar{x} é uma solução ótima para o problema.

Mostraremos agora a implicação restante. Seja \bar{x} uma solução ótima para o problema. Definimos os dois conjuntos

$$C_1 = \{(x - \bar{x}, y); x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\bar{x})\}, \quad (2.33)$$

$$C_2 = \{(x - \bar{x}, z); x \in S, z \leq 0\}. \quad (2.34)$$

1 Afirmação: Os conjuntos C_1 e C_2 são convexos e disjuntos.

Sejam p_1 e p_2 em C_1 , tal que $p_1 = (x_1 - \bar{x}, y_1)$ e $y_1 > f(x_1) - f(\bar{x})$, analogamente para p_2 . Dado $\lambda \in (0, 1)$, definimos $p_\lambda = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 = [\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - \bar{x}, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] = (x_\lambda - \bar{x}, y_\lambda)$. Então,

$$\lambda y_1 > \lambda f(x_1) - \lambda f(\bar{x}), \quad (2.35)$$

$$(1 - \lambda)y_2 > (1 - \lambda)f(x_2) - (1 - \lambda)f(\bar{x}). \quad (2.36)$$

Desde que, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 = y_\lambda$, obteremos:

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\bar{x}) \quad (2.37)$$

$$\geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] - f(\bar{x}) \quad (2.38)$$

$$= f(x_\lambda) - f(\bar{x}) \quad (2.39)$$

$$y_\lambda > f(x_\lambda) - f(\bar{x}). \quad (2.40)$$

Assim, $p_\lambda \in C_1$. Portanto, C_1 é convexo. Analogamente, podemos mostrar que C_2 também é convexo. Para mostramos que estes conjuntos não possuem elementos em comum, suponhamos que exista $\hat{p} = (\hat{x} - \bar{x}, \hat{y}) \in C_1 \cap C_2$. Assim, dado que $\hat{p} \in C_1$, então $\hat{y} > f(\hat{x}) - f(\bar{x})$; por outro lado, como $\hat{p} \in C_2$ implica $\hat{y} \leq 0$, então $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$. O que contradiz a hipótese de que \bar{x} é uma solução ótima. Portanto, C_1 e C_2 são disjuntos. Agora, usando o teorema de separação de conjuntos convexos, existe um vetor não nulo (η_0, μ) e um escalar α tal que

$$\eta_0^T(x - \bar{x}) + \mu y \leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\bar{x}), \quad (2.41)$$

$$\eta_0^T(x - \bar{x}) + \mu z \geq \alpha, \quad \forall x \in S, z \leq 0. \quad (2.42)$$

2 Afirmação: $\mu < 0$ e $\alpha = 0$.

Se $x = \bar{x}$ e $z = 0$, então $\alpha \leq 0$. Por outro lado, se $x = \bar{x}$ e $y = \epsilon$, com $\epsilon > 0$, então $\mu\epsilon \leq \alpha$. Esta desigualdade é válida para todos $\mu \leq 0$ e $\alpha \geq 0$. Logo, $\alpha = 0$. Contudo, suponhamos que $\mu = 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\eta_0^T(x - \bar{x}) \leq 0$. Seja $x^* = \bar{x} + \eta_0$, então $\|\eta_0\|^2 = \eta_0^T(x^* - \bar{x}) \leq 0$. Assim, $\eta_0 = \vec{0}$, mas como o vetor (η, α) é não nulo, concluímos que μ deve ser negativo, $\mu < 0$.

Dividindo as desigualdades (2.41) e (2.42) por $-\mu$ e definindo $\eta = -\eta_0/\mu$, obteremos:

$$\eta^T(x - \bar{x}) \leq y, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad y > f(x) - f(\bar{x}); \quad (2.43)$$

$$\eta^T(x - \bar{x}) \geq z, \quad \forall x \in S, \quad z \leq 0. \quad (2.44)$$

Seja $z = 0$, então $\eta^T(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in S$. Queremos agora mostrar que η é um subgradiente de f . Suponhamos que $\eta^T(x - \bar{x}) > f(x) - f(\bar{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, para $x = \bar{x}$, teremos: $0 = \eta^T(\bar{x} - \bar{x}) > f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$, que é um absurdo. Então,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \eta^T(x - \bar{x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.45)$$

Portanto, η é um subgradiente de f em \bar{x} com a propriedade de que $\eta^T(x - \bar{x}) \geq 0$, para todo $x \in S$. \square

Teorema 2.8. *Suponhamos que o problema de recurso tenha um valor ótimo finito. Uma solução $\bar{x} \in K_1$ é ótima se, e somente se, existir algum $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $\bar{z}^T \bar{x} = 0$ tal que $-c + A^T \bar{\lambda} + \bar{z} \in \partial \mathcal{Q}(\bar{x})$ (BIRGE; LOUVEAUX, 2011).*

Demonstração: Suponhamos que \bar{x} seja uma solução ótima do problema $f(x) = \min\{c^T x + \mathcal{Q}(x); Ax = b, x \geq 0\}$. A função Lagrangiana deste problema é dada por: $L(x, \lambda, z) = c^T x + \mathcal{Q}(x) + \lambda^T(b - Ax) + z^T(-x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1}$ e $z \in \mathbb{R}_+^{n_1}$. Como L é convexa em $x \in K_1$ e \bar{x} é solução ótima, então $\eta = 0$ é subgradiente de L em \bar{x} . O conjunto subdiferencial de L com relação a x é dado por $\partial L(x, \lambda, z) = \{c - A^T \lambda - z + \partial \mathcal{Q}(x)\}$. Por outro lado, usando a propriedade das funções convexas que se $g = g_1 + g_2$, onde g_1 e g_2 são funções convexas próprias, com $x_0 \in D(g_1) \cap D(g_2)$, e g_1 contínua, então $\partial g(x_0) = \partial g_1(x_0) + \partial g_2(x_0)$ (LAI; LIN, 1988). Assim, $0 \in \partial L(\bar{x}, \lambda, z)$, ou seja, existe um subgradiente em $\partial \mathcal{Q}(\bar{x})$ tal que $\bar{\eta} = -c + A^T \bar{\lambda} + \bar{z}$. Pelas condições de complementaridade, teremos: $\bar{x}^T \bar{z} = 0$. E assim, concluímos a primeira parte do teorema.

Agora suponhamos que existam $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1}$ e $z \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ tais que $(-c + A^T \lambda + z) \in \partial \mathcal{Q}(x_1)$ e $z^T x_1 = 0$, com $x_1 \in K_1$. Como $\partial f(x_1) = c + \partial \mathcal{Q}(x_1)$, então existe um subgradiente η_0 de f em x_1 , tal que $\eta_0 = A^T \lambda + z$. Logo, $\eta_0^T(x - x_1) = (A^T \lambda + z)^T(x - x_1) = \lambda^T(Ax - Ax_1) + z^T x - z^T x_1 = z^T x \geq 0$ para todo $x \in k_1$. Portanto, pelo Teorema 2.7, concluímos que x_1 é uma solução ótima. \square

2.2 Valor da Solução Estocástica

Considere $z(x, \xi) = c^T x + Q(x, \xi)$, tal que x é uma solução factível do problema de primeiro estágio.

Definição 2.9. *A solução Espere e Veja (WS) corresponde ao valor esperado da solução ótima de cada cenário. Essa solução considera que a incerteza é conhecida a priori,*

$$WS = E_\xi[\min_x z(x, \xi)]. \quad (2.46)$$

Definição 2.10. A solução do Problema de Recurso (RP) corresponde ao valor que minimiza a função objetivo considerando o valor esperado da solução de segundo estágio, ou seja, determina a melhor solução de primeiro estágio considerando todos os cenários possíveis,

$$RP = \min_x E_\xi[z(x, \xi)]. \quad (2.47)$$

Definição 2.11. O Valor Esperado da Informação Perfeita (EVPI) corresponde à diferença entre as soluções RP e WS. Assim, o EVPI mede o valor de se conhecer o futuro antes da tomada de decisão,

$$EVPI = RP - WS. \quad (2.48)$$

Definição 2.12. A solução do problema de Valor Esperado (EV) considera o valor esperado da variável aleatória ξ . Assim, o valor EV representa o contexto onde a incerteza é desprezada e se conforma com a solução do caso médio,

$$EV = \min_x z(x, \bar{\xi}). \quad (2.49)$$

Definição 2.13. O Resultado Esperado usando a solução do problema de Valor Esperado é denotado EEV, e é obtido da seguinte forma: considere $\bar{x}(\bar{\xi})$ a solução de EV; em seguida, resolva o problema de dois estágios assumindo $x = \bar{x}(\bar{\xi})$, ou seja, para cada cenário, apenas as variáveis de segundo estágio serão otimizadas, pois as variáveis de primeiro estágio foram fixadas a priori; por fim, calcula-se o valor esperado da função objetivo,

$$EEV = E_\xi[z(\bar{x}(\bar{\xi}), \xi)]. \quad (2.50)$$

Definição 2.14. O Valor da Solução Estocástica (VSS) é definido como a diferença entre os valores EEV e RP. Assim, o VSS determina o ganho obtido pela solução estocástica ou a perda por desconsiderar a incerteza na tomada de decisão,

$$VSS = EEV - RP. \quad (2.51)$$

Proposição 2.15. Todo problema de programação estocástica de dois estágios satisfaz as seguintes desigualdades:

$$WS \leq RP \leq EEV. \quad (2.52)$$

Demonstração: Primeiro, mostraremos que $WS \leq RP$. Dado um evento ξ , a solução ótima é $\bar{x}(\xi)$, e a solução estocástica é \bar{x} . Assim,

$$z(\bar{x}(\xi), \xi) \leq z(\bar{x}, \xi) \quad (2.53)$$

$$E_\xi[z(\bar{x}(\xi), \xi)] \leq E_\xi[z(\bar{x}, \xi)] \quad (2.54)$$

$$E_\xi[\min_x z(x, \xi)] \leq \min_x E_\xi[z(x, \xi)] \quad (2.55)$$

$$WS \leq RP. \quad (2.56)$$

A segunda desigualdade segue diretamente das definições de RP e EEV . Sabemos que $RP = \min_x E_\xi[z(x, \xi)] \leq E_\xi[z(\bar{x}(\bar{\xi}), \xi)] = EEV$. \square

A fim de expandir nossa discussão sobre as definições de WS , RP , EEV , $EVPI$ e VSS , apresentaremos a seguir um exemplo com o qual analisaremos a variação destes valores nos casos em que a variável aleatória seja discreta ou contínua.

Exemplo 2.16. *O Problema do Fazendeiro.*

Um fazendeiro europeu cultiva trigo, milho e beterraba numa área de 500 acres de terra. Durante o inverno ele precisa decidir quanto dessa área será destinada ao cultivo de cada cultura. O custo de plantação por acre de terra de trigo, milho e beterraba são 150, 230 e 260, respectivamente. Ele sabe que 200T de trigo e 240T de milho são necessárias para alimentação do seu rebanho de gado. Essas quantidades podem ser obtidas de sua plantação ou compradas no mercado. Qualquer produção excedente pode ser vendida. A média do preço de venda de trigo e milho, por tonelada, são \$ 170 e \$ 150, respectivamente. Os preços de compra são 40% mais caros do que os de venda, devido aos custos de transportes, armazenamento, margem de lucro do vendedor, etc. A beterraba pode ser vendida por \$ 36/T, desde que esteja dentro da cota definida pela Comissão Europeia. Qualquer quantidade excedente desta será vendida por \$ 10/T. A cota do fazendeiro para o próximo ano é de 6.000T. A média de rendimento por acre de trigo, milho e beterraba são 2, 5T, 3T e 20T, respectivamente. (BIRGE; LOUVEAUX, 2011)

Uma formulação para resolver este problema será apresentada abaixo. Antes, definiremos as variáveis de decisão: x_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$, representa a quantidade de acres de terra destinada para o trigo, milho e beterraba, nessa ordem; y_j , com $j \in \{1, 2\}$, corresponde a quantidade comprada de trigo e milho, respectivamente; w_k , com $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, representa a quantidade vendida de trigo, milho, beterraba nos preços favorável e desfavorável, nessa ordem; z_n , com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são variáveis de folga. Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } f(x, y, w) &= 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + \\
 &\quad + 210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
 \text{Sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + z_1 &= 500 \\
 2,5x_1 + y_1 - w_1 - z_2 &= 200 \\
 3x_2 + y_2 - w_2 - z_3 &= 240 \\
 -20x_3 + w_3 + w_4 + z_4 &= 0 \\
 w_3 + z_5 &= 6000 \\
 (x, y_j, w_k, z_n) &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Os testes computacionais apresentados ao longo deste trabalho foram realizados em um computador com sistema operacional Debian Linux 11; dois processadores Intel E5-2650 v3 de 2,3GHz, com 10 núcleos e 20 threads cada um; 128GB de memória RAM; e software MATLAB R2010a.

O problema (2.57) foi resolvido utilizando o Método Seguidor de Caminhos, cuja solução ótima corresponde a destinar 120 *acres* de terra para o plantio de trigo, 80 *acres* para o milho e 300 *acres* para a beterraba. Desse modo, seriam produzidas quantidades de trigo e milho suficientes para a alimentação do gado e, além disso, seriam vendidas 100T de trigo. Com a área destinada ao plantio da beterraba, seria possível vender toda a produção desta cultura pelo preço favorável. As demais variáveis são nulas. O lucro total seria de \$ 118.600,00.

2.3 Problema de Recurso com Variável Aleatória Discreta

Agora suponhamos que o rendimento percentual, α , das culturas sejam iguais em cada colheita, e consideremos três cenários: $r_1 = r_m(1 - \alpha)$, rendimento abaixo da média; $r_2 = r_m$, rendimento médio; $r_3 = r_m(1 + \alpha)$, acima da média. O vetor de probabilidade correspondente é $p = (1/3, 1/3, 1/3)$. Desse modo, o problema de recurso é representado por:

$$\begin{aligned}
\text{Minimize } & f(x, y, w) = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + (1/3)(238y_{11} + 210y_{21} - \\
& -170w_{11} - 150w_{21} - 36w_{31} - 10w_{41}) + (1/3)(238y_{12} + 210y_{22} - \\
& -170w_{12} - 150w_{22} - 36w_{32} - 10w_{42}) + (1/3)(238y_{13} + 210y_{23} - \\
& -170w_{13} - 150w_{23} - 36w_{33} - 10w_{43}) \\
\text{Sujeito a } & x_1 + x_2 + x_3 + z_{11} = 500 \\
& 2,5r_1x_1 + y_{11} - w_{11} - z_{21} = 200 \\
& 3r_1x_2 + y_{21} - w_{21} - z_{31} = 240 \\
& -20r_1x_3 + w_{31} + w_{41} + z_{41} = 0 \\
& w_{31} + z_{51} = 6000 \\
& 2,5r_2x_1 + y_{12} - w_{12} - z_{22} = 200 \\
& 3r_2x_2 + y_{22} - w_{22} - z_{32} = 240 \\
& -20r_2x_3 + w_{32} + w_{42} + z_{42} = 0 \\
& w_{32} + z_{52} = 6000 \\
& 2,5r_3x_1 + y_{13} - w_{13} - z_{23} = 200 \\
& 3r_3x_2 + y_{23} - w_{23} - z_{33} = 240 \\
& -20r_3x_3 + w_{33} + w_{43} + z_{43} = 0 \\
& w_{33} + z_{53} = 6000 \\
& (x, y, w, z) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

De acordo com a definição de EEV , assumimos que a decisão sobre a divisão da terra, variáveis de primeiro estágio, corresponde à solução do problema (2.57) referente ao rendimento médio, ou seja, $\bar{x}(\bar{\xi}) = (120, 80, 300)$. Assim, para cada cenário, o problema

(2.57) se reduz a

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } f(y, w) = 114400 + 238y_1 + 210y_2 - \\
 &\quad -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
 &\text{Sujeito a } y_1 - w_1 - z_2 = 100(2 - 3r_i) \\
 &\quad y_2 - w_2 - z_3 = 240(1 - r_i) \\
 &\quad w_3 + w_4 + z_4 = 6000r_i \\
 &\quad w_3 + z_5 = 6000 \\
 &\quad (y, w, z) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

com $i = 1, 2, 3$. Por outro lado, o valor WS é o valor esperado dos valores ótimos da função objetivo em cada cenário, a qual considera que a incerteza é conhecida. Assim, o problema (2.57) é resolvido com o rendimento correspondente. Logo,

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } f(x, y, w) = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + \\
 &\quad +210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
 &\text{Sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + z_1 = 500 \\
 &\quad 2.5r_ix_1 + y_1 - w_1 - z_2 = 200 \\
 &\quad 3r_ix_2 + y_2 - w_2 - z_3 = 240 \\
 &\quad -20r_ix_3 + w_3 + w_4 + z_4 = 0 \\
 &\quad w_3 + z_5 = 6000 \\
 &\quad (x, y, w, z) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Considerando variações de rendimento entre 5% e 25%, apresentaremos os resultados de EEV , RP , WS , $EVPI$ e VSS na tabela abaixo.

Tabela 1 – Valores do $EVPI$ e VSS em função do rendimento

r	5%	10%	15%	20%	25%
EEV	-1,1576	-1,1292	-1,1008	-1,0724	-1,0440
RP	-1,1577	-1,1307	-1,1064	-1,0839	-1,0630
WS	-1,1853	-1,1795	-1,1670	-1,1541	-1,1398
$EVPI$	0,0277	0,0487	0,0606	0,0702	0,0768
VSS	0,0001	0,0015	0,0056	0,0115	0,0190

* Todos os valores desta tabela são da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 1, o valor negativo decorre da mudança do problema original, de maximização, num problema equivalente de minimização. Constatamos a validade da desigualdade estocástica, ou seja, $WS \leq RP \leq EEV$. Consequentemente, $EVPI$ e VSS são ambos não negativos. Observamos ainda uma relação entre os valores de $EVPI$ e VSS com a variação do rendimento da plantação, pois, analisando maiores variações no

rendimento, obtivemos maiores resultados de *EVPI* e *VSS*. O *EVPI* indica quanto o fazendeiro poderia aumentar seu lucro se ele tivesse à sua disposição informações precisas sobre o clima e rendimento futuro da colheita. Assim, ele poderia investir um percentual desse valor para conseguir a informação perfeita, quando possível. O *VSS* corresponde à perda por ignorar a incerteza e resolver o problema *EEV*, mais simples por fixar as variáveis de primeiro estágio, e otimizar apenas as variáveis de segundo estágio.

2.4 Problema de Recurso com Variável Aleatória Contínua

Com o objetivo de resolver o Problema do Fazendeiro usando uma distribuição de probabilidade contínua, assumiremos as seguintes hipóteses: 1) As culturas possuem distribuições independentes; 2) Cada cultura possui distribuição uniforme no intervalo $[l_i, u_i]$; 3) O rendimento da colheita varia de -20% a 20% . Desse modo, o valor esperado será calculado por:

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{k=1}^3 E_{\xi} Q(x_k, \xi) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{Q}_k(x_k). \quad (2.61)$$

Assim, o problema de segundo estágio pode ser dividido em três problemas independentes. Descreveremos cada um deles abaixo,

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, \xi) = \text{Minimize} \quad & 238y_1(\xi) - 170w_1(\xi) \\ \text{Sujeito a} \quad & r_1(\xi)x_1 + y_1(\xi) - w_1(\xi) \geq 200 \\ & [y_1(\xi), w_1(\xi)] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

A solução de $Q_1(x_1, \xi)$ é $y_1(\xi) = \max\{0, -r_1(\xi)x_1 + 200\}$, que corresponde à quantidade de trigo comprada para alimentar o gado, se for necessário; e $w_1(\xi) = \max\{0, r_1(\xi)x_1 - 200\}$ é a quantidade de trigo vendida, caso a colheita supere a demanda. Assim, o valor do problema de segundo estágio $Q_1(x_1, \xi)$ é

$$Q_1(x_1, \xi) = \text{Minimize} \quad 238 \max\{0, -r_1(\xi)x_1 + 200\} - 170 \max\{0, r_1(\xi)x_1 - 200\}. \quad (2.63)$$

De acordo com a distribuição uniforme, teremos:

$$f(r) = \begin{cases} 1/(u-l), & \text{se } r \in [l, u] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.64)$$

Logo, como $r_1(\xi) \in [2, 3]$, isso implica que $2 \leq 200/x_1 \leq 3$ e $200/3 \leq x_1 \leq 100$. Assim,

$$Q_1(x_1) = \int_2^{200/x_1} 238(-rx_1 + 200)f(r)dr - \int_{200/x_1}^3 170(rx_1 - 200)f(r)dr \quad (2.65)$$

$$Q_1(x_1) = 119 \frac{(200 - 2x_1)^2}{x_1} - 85 \frac{(200 - 3x_1)^2}{x_1}. \quad (2.66)$$

Quando $r_i(\xi) \notin [l_i, u_i]$, usaremos $r_i(\xi) = (l_i + u_i)/2$. Então, para $x_1 < 200/3$, obteremos $r_1(\xi) = 2.5$ e

$$Q_1(x_1) = -595x_1 + 47600. \quad (2.67)$$

Analogamente, para $100 < x_1$, teremos:

$$Q_1(x_1) = -425x_1 + 34000. \quad (2.68)$$

Reunindo as informações de $Q_1(x_1)$, obteremos:

$$Q_1(x_1) = \begin{cases} -595x_1 + 47600, & x_1 < 200/3; \\ 119 \frac{(200 - 2x_1)^2}{x_1} - 85 \frac{(200 - 3x_1)^2}{x_1}, & 200/3 \leq x_1 \leq 100; \\ -425x_1 + 34000, & 100 < x_1. \end{cases} \quad (2.69)$$

Discutiremos agora o problema de segundo estágio $Q_2(x_2, \xi)$, definido por

$$\begin{aligned} Q_2(x_2, \xi) = \text{Minimize} \quad & 210y_2(\xi) - 150w_2(\xi) \\ \text{Sujeito a} \quad & r_2(\xi)x_2 + y_2(\xi) - w_2(\xi) \geq 240 \\ & [y_2(\xi), w_2(\xi)] \geq 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

cuja solução é $y_2(\xi) = \max\{0, -r_1(\xi)x_2 + 240\}$ e $w_2(\xi) = \max\{0, r_2(\xi)x_2 - 240\}$. O valor do problema de segundo estágio $Q_2(x_2, \xi)$ é

$$Q_2(x_2, \xi) = \text{Minimize} \quad 210 \max\{0, -r_2(\xi)x_2 + 240\} - 150 \max\{0, r_2(\xi)x_2 - 240\}. \quad (2.71)$$

Como $r_2(\xi) \in [2, 4; 3, 6]$, isso implica que $2, 4 \leq 240/x_2 \leq 3, 6$ e $200/3 \leq x_2 \leq 100$. Ao proceder de forma análoga ao que fizemos com $Q_1(x_1)$, obteremos:

$$Q_2(x_2) = \begin{cases} -630x_2 + 50400, & x_2 < 200/3; \\ 87.5 \frac{(240 - 2.4x_2)^2}{x_2} - 62.5 \frac{(240 - 3.6x_2)^2}{x_2}, & 200/3 \leq x_2 \leq 100; \\ -450x_2 + 36000, & 100 < x_2. \end{cases} \quad (2.72)$$

O problema de segundo estágio $Q_3(x_3, \xi)$ é definido por

$$\begin{aligned} Q_3(x_3, \xi) = \text{Minimize} \quad & -36w_3(\xi) - 10w_4(\xi) \\ \text{Sujeito a} \quad & -r_3(\xi)x_3 + w_3(\xi) + w_4(\xi) \leq 0 \\ & w_3(\xi) \leq 6000 \\ & [w_3(\xi), w_4(\xi)] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

A solução deste problema é $w_3(\xi) = \min\{6000, r_3(\xi)x_3\}$ e $w_4(\xi) = \max\{0, r_3(\xi)x_3 - 6000\}$. Assim, o valor do problema de segundo estágio $Q_3(x_3, \xi)$ é

$$Q_3(x_3, \xi) = \text{Minimize} \quad -36 \min\{6000, r_3(\xi)x_3\} - 10 \max\{0, r_3(\xi)x_3 - 6000\}. \quad (2.74)$$

Sabendo que $r_3(\xi) \in [16, 24]$, isso implica que $16 \leq 6000/x_3 \leq 24$ e $250 \leq x_3 \leq 375$. Ao proceder de forma análoga ao caso de $\mathcal{Q}_1(x_1)$, obteremos a função $\mathcal{Q}_3(x_3)$:

$$\mathcal{Q}_3(x_3) = \begin{cases} -720x_3, & x_3 < 250; \\ -720x_3 + 13 \frac{(6000 - 24x_3)^2}{8x_3}, & 250 \leq x_3 \leq 375; \\ -200x_3 - 156000, & 375 < x_3. \end{cases} \quad (2.75)$$

Agora podemos reescrever o problema de recurso, como:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x, y, w) = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \mathcal{Q}_1(x_1) + \mathcal{Q}_2(x_2) + \mathcal{Q}_3(x_3) \\ \text{Sujeito a } & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & (x_1, x_2, x_3) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Aplicando as condições de otimalidade KKT, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ c_i + \frac{\partial \mathcal{Q}_i(x_i)}{\partial x_i} + \lambda \geq 0 \\ x_i \left[c_i + \frac{\partial \mathcal{Q}_i(x_i)}{\partial x_i} + \lambda \right] = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.77)$$

Resolvemos o sistema não linear (2.77) usando o método da substituição, obtendo a solução $x_1 = 135,83$, $x_2 = 85,07$ e $x_3 = 279,10$, que correspondem, respectivamente, às áreas destinadas ao plantio de trigo, milho e beterraba. O valor da função objetivo é de \$ 111.237,40.

2.5 Problema de Recurso com uma Distribuição de Probabilidade Aproximada

Na seção anterior, mostramos um exemplo em que conseguimos expressar o valor esperado do problema de segundo estágio, $\mathcal{Q}(x)$, como uma função contínua e diferenciável por partes. Contudo, nem sempre é possível obter uma representação funcional para $\mathcal{Q}(x)$. Desse modo, procedimentos numéricos ou gráficos podem ser usados para se obter informações sobre a distribuição de probabilidade, e a Análise Matemática é usada para validar as aproximações e, quando possível, melhorar sua eficiência (WETS, 1996). As aproximações mais frequentes em Programação Estocástica consistem em encontrar um conjunto discreto com baixa cardinalidade de realizações (BIRGE; LOUVEAUX, 2011). Apresentaremos nesta seção uma proposta de aproximação de distribuição probabilidade com base na motivação geométrica e soma de Riemann.

2.5.1 Soma de Riemann

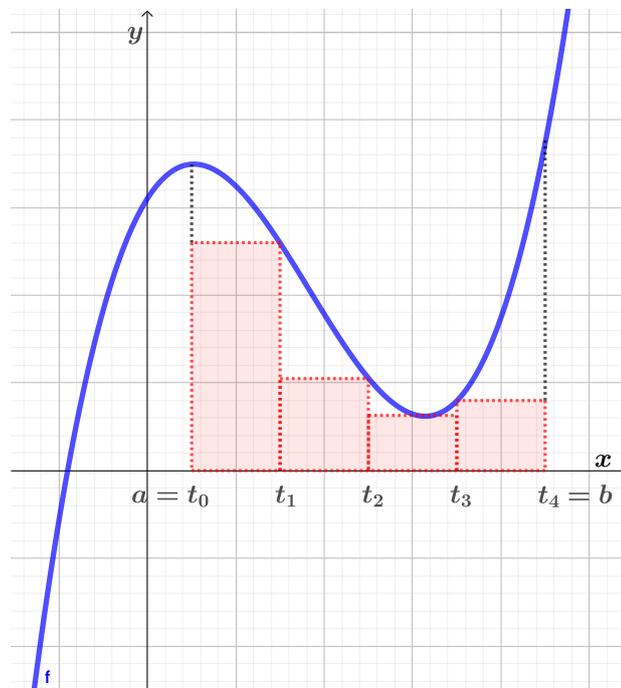
Seja f uma função contínua, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$, com a e b contidos em P . Dada uma partição $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$, estabelecemos que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Sejam m_i e M_i , respectivamente, o mínimo e o máximo de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (LIMA, 2009).

Definimos a soma inferior de f em relação à partição P por:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}). \quad (2.78)$$

A ideia geométrica da soma inferior é apresentada na Figura 1.

Figura 1 – Soma inferior.



Fonte: do autor.

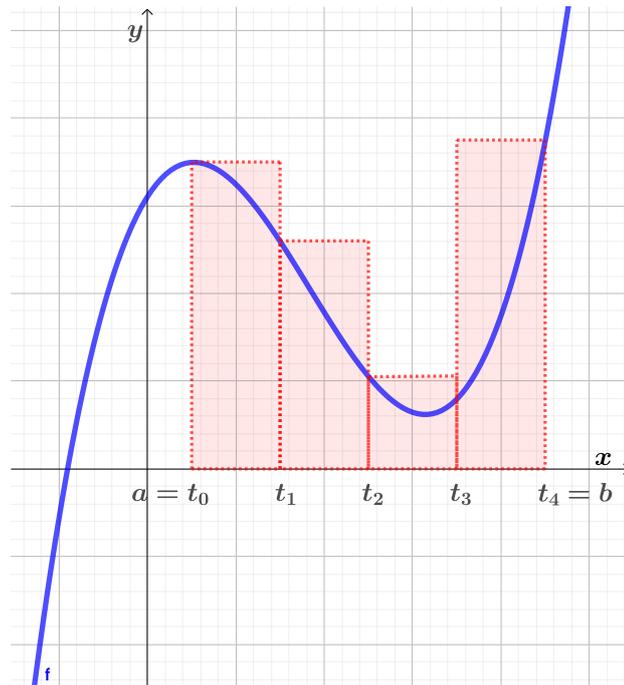
Na Figura 1, observamos que a área de cada retângulo, de base $t_i - t_{i-1}$ e altura m_i , é menor ou igual que a área abaixo da função f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Analogamente, a soma superior de f em relação à partição P é definida por:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}). \quad (2.79)$$

Na Figura 2, apresentamos a ideia geométrica da soma superior.

Figura 2 – Soma superior.



Fonte: do autor.

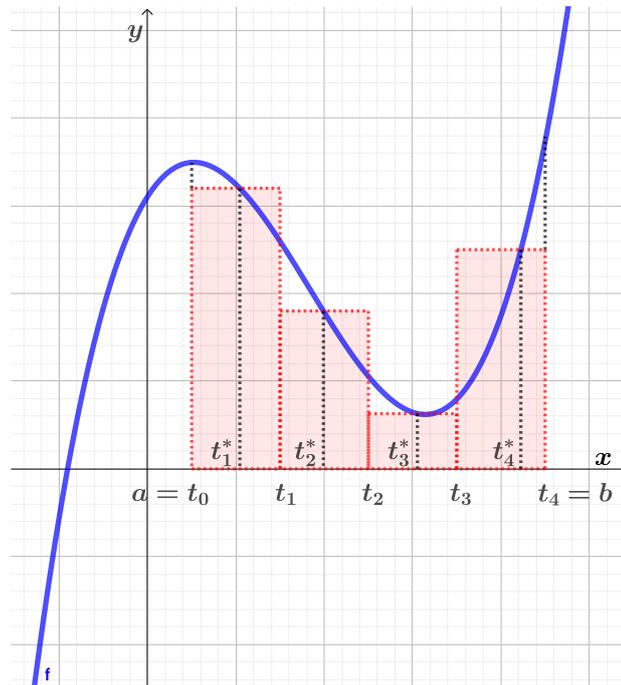
Na [Figura 2](#), observamos que a área de cada retângulo, de base $t_i - t_{i-1}$ e altura M_i , é maior ou igual que a área abaixo da função f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

A norma de uma partição é definida por $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}$, e uma partição pontilhada de P , denotada por P^* , corresponde a escolhermos um ponto t_i^* em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ cuja imagem $f(t_i^*)$ definirá a altura do retângulo neste intervalo. Assim, definimos a soma de Riemann por:

$$S_R(f, P^*) = \sum_{i=1}^n f(t_i^*)(t_i - t_{i-1}). \quad (2.80)$$

A ideia geométrica da soma de Riemann é apresentada na [Figura 3](#).

Figura 3 – Soma de Riemann.



Fonte: do autor.

Na Figura 2, observamos que em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $m_i \leq f(t_i^*) \leq M_i$. Portanto, como consequência da soma inferior, da superior e de Riemann, teremos:

$$s(f, P) \leq S_R(f, P^*) \leq S(f, P), \tag{2.81}$$

para toda partição P .

Por fim, a área da região limitada pela função f , $x = a$, $x \geq 0$ e $x = b$ é o número real I ,

$$I = \lim_{|P^*| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i^*)(t_i - t_{i-1}), \tag{2.82}$$

quando existir o limite da equação (2.82).

2.5.2 Teste de Shapiro-Wilk

A distribuição normal está presente em procedimentos estatísticos, como: teste- t , análises de regressão linear, discriminante e variância. Para verificar se uma variável aleatória independente provém de uma população com distribuição normal, é comum utilizar métodos gráficos, numéricos ou testes de normalidade. Dentre os testes de normalidade de Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors e Anderson-Darling, o teste de Shapiro-Wilk é o mais eficiente teste de normalidade (RAZALI; WAH, 2011). A estatística W é obtida pela divisão do quadrado de uma combinação linear da amostra estatística ordenada pela estimativa simétrica da variância da amostra (SHAPIRO; WILK, 1965). Desse modo, a

estatística W é um teste de hipótese, cuja hipótese nula, H_0 , considera que a amostra provém de uma distribuição normal, e a hipótese alternativa, H_1 , corresponde ao caso contrário.

Dada uma amostra aleatória de tamanho n , digamos $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, então o teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965) será definido da seguinte forma:

1. Defina o nível de significância α ;
2. Ordene as observações obtendo uma amostra $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$;
3. Calcule a soma dos quadrados dos desvios em relação à média \bar{y} ;

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2;$$

4. Quando n é par, ou seja, $n = 2k$, calcule

$$b = \sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (y_{n-i+1} - y_i),$$

onde os valores de a_{n-i+1} são dados na [Tabela 34](#) (Anexo A);

5. Quando n é ímpar, então $a_{k+1} = 0$. Assim, o cálculo de b é dado por

$$b = a_n (y_n - y_1) + \dots + a_{k+2} (y_{k+2} - y_k),$$

nesta expressão, o valor de y_{k+1} , que é a mediana da amostra, não é considerado;

6. Calcule a estatística do teste de Shapiro-Wilk;

$$W_o = \frac{b^2}{S^2}.$$

7. Se $W_o > W_{\alpha,n}$, então não se rejeita a hipótese H_0 . Do contrário, rejeita-se a hipótese H_0 .

Os valores de $W_{\alpha,n}$ são dados na [Tabela 36](#) (Anexo A). Para realizar o teste de Shapiro-Wilk, usaremos o software (R Core Team, 2020), o qual calcula W_o e o p -valor associado ao teste de hipóteses. O p -valor é a probabilidade de ocorrer um valor extremo ao observado supondo que H_0 é verdadeira. Assim, dado que p -valor baixo é evidência contra H_0 , então, para concluirmos se uma dada variável aleatória provém de uma população com distribuição normal, verificaremos duas condições: $W_o > W_{\alpha,n}$ e p -valor $> \alpha$.

2.5.3 Distribuição de Probabilidade Aproximada

Seja f uma função densidade de probabilidade, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e X uma variável aleatória contínua. Então,

1. $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$;
2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$;
3. $P(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Definição 2.17. *Seja \bar{P} uma restrição da distribuição de probabilidade P ao intervalo $[a, b]$, ou seja, $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\bar{P}(t_{i-1} \leq \bar{X} \leq t_i) = P(t_{i-1} \leq X \leq t_i) + \epsilon$. A constante ϵ representa a n -ésima parcela do erro, definida por $\epsilon = [1 - P(a \leq X \leq b)]/n$.*

Observamos da definição que $\bar{P}(a \leq \bar{X} \leq b) = 1$. Se definirmos $p_i = P(t_{i-1} \leq X \leq t_i)$ como a probabilidade de ocorrência do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, então, $\bar{p}_i = p_i + \epsilon$. Assim, os vetores p e \bar{p} possuem uma relação linear positiva perfeita, ou seja, $\text{Corr}(p, \bar{p}) = 1$ (RUPPERT; MATTESON, 2015).

Proposição 2.18. *Sejam F a função distribuição da variável aleatória X , tal que $X \in [a, b]$, e P uma partição de $[a, b]$ com n pontos. Se $E[\phi(t_{min})] = \sum_{i=1}^n t_{imin}\bar{p}_i$ e $E[\phi(t_{max})] = \sum_{i=1}^n t_{imax}\bar{p}_i$, então $E[\phi(t_{min})] \leq E[\phi(X)] \leq E[\phi(t_{max})]$.*

Demonstração: Por hipótese, o intervalo $[a, b]$ é o suporte da variável aleatória X , então, o ϵ da definição anterior é igual a zero e $\bar{p}_i = p_i$. Assim, pela definição do valor esperado, teremos:

$$E[\phi(X)] = \int_a^b t dF(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} t dF(t) \geq \sum_{i=1}^n t_{imin} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dF(t) = \sum_{i=1}^n t_{imin}\bar{p}_i. \quad (2.83)$$

Analogamente, mostra-se a outra desigualdade. Desse modo, o valor esperado $E[\phi(X)]$ é limitado inferiormente por $E[\phi(t_{min})]$ e superiormente por $E[\phi(t_{max})]$. \square

2.5.3.1 Desigualdade de Jensen

Seja X uma variável aleatória integrável, tal que $X \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, com função distribuição F e média finita μ_0 . Supondo que $\phi(X) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função convexa e integrável, então a desigualdade de Jensen será dada por

$$\phi(\mu_0) \leq \int_a^b \phi(t) dF(t) = E[\phi(X)]. \quad (2.84)$$

Desse modo, $\phi(\mu_0)$ é um limite inferior para o valor esperado de $\phi(X)$. Além disso, é possível melhorar esta aproximação do $E[\phi(X)]$ por uma combinação deste limite inferior, obtido pela desigualdade de Jensen, aplicada na decomposição do intervalo inicial em $(a, \mu_0]$ e $[\mu_0, b)$ (HUANG; ZIEMBA; BEN-TAL, 1977). Sejam c_{11} , c_{12} , μ_{11} e μ_{12} definidos abaixo:

$$c_{11} = \int_a^{\mu_0} dF(t) > 0; \quad (2.85)$$

$$c_{12} = 1 - c_{11} > 0; \quad (2.86)$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{c_{11}} \int_a^{\mu_0} t dF(t); \quad (2.87)$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{c_{12}} \int_{\mu_0}^b t dF(t). \quad (2.88)$$

Assim, definindo $\phi(\mu_0) = J_0$, obteremos a seguinte desigualdade:

$$J_0 \leq J_1 \equiv c_{11}\phi(\mu_{11}) + c_{12}\phi(\mu_{12}) \leq E[\phi(t)]. \quad (2.89)$$

O Teorema 2.19 corresponde a uma generalização da desigualdade de Jensen.

Teorema 2.19. *Dada uma partição P do intervalo (a, b) , onde $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Seja $J^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(\beta_i)$ o limite inferior generalizado de Jensen, onde $\alpha_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dF(t) > 0$, e $\beta_i = \alpha_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} t dF(t)$, $i = 1, \dots, n$. Então, assumindo que a partição com $k + 1$ pontos seja um refinamento da mesma partição com k pontos, com $k = 1, \dots, n - 1$, obteremos $J_0 \equiv J^1 \leq \dots \leq J^n \leq E[\phi(t)]$ (HUANG; ZIEMBA; BEN-TAL, 1977).*

2.5.3.2 Desigualdade de Edmundson-Madansky

A motivação geométrica da desigualdade de Edmundson-Madansky (E-M) é obtida pelo segmento de reta M unindo os pontos extremos do intervalo $[a, b]$, pois se ϕ é convexa em X , $X \in [a, b]$, então $\phi(t) \leq M(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Seja $\mu_0 = E(X)$, então M_0 é definido por:

$$M_0 \equiv \frac{(b - \mu_0)}{b - a} \phi(a) + \frac{(\mu_0 - a)}{b - a} \phi(b) \geq E(\phi(X)). \quad (2.90)$$

Assim, M_0 é um limite superior para o valor esperado de ϕ . É possível melhorar este limite superior aplicando a desigualdade de E-M sobre uma partição do intervalo $[a, b]$. O Teorema 2.20 corresponde a uma generalização da desigualdade (2.90).

Teorema 2.20. *Sejam P uma partição arbitrária de $[a, b]$ e $M^n \equiv \sum_{i=0}^n \delta_i \phi(t_i)$ o limite superior generalizado de E-M, onde $\delta_i = \alpha_i [(\beta_i - t_{i-1}) / (t_i - t_{i-1})] + \alpha_{i+1} [(t_{i+1} - \beta_{i+1}) / (t_{i+1} - t_i)]$, $i = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_i \equiv \int_{t_{i-1}}^{t_i} dF(t) > 0$, $\beta_i \equiv \alpha_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} t dF(t)$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_0 =$*

$\alpha_{n+1} \equiv 0$. Então, assumindo que a partição com $k+1$ pontos seja um refinamento da mesma partição com k pontos, com $k = 1, \dots, n-1$, obteremos $M_0 \equiv M^1 \geq \dots \geq M^n \geq E[\phi(X)]$ (HUANG; ZIEMBA; BEN-TAL, 1977).

O Teorema 2.21 reúne os limites inferior e superior, respectivamente, de Jensen e Edmundson-Madansky, a fim de obter um resultado de convergência.

Teorema 2.21. *Sejam ϕ uma função convexa contínua em $[a, b]$ e $E(X)$ finita. Então, $E[\phi(X)]$ é finito e $J^n \rightarrow E[\phi(X)] \leftarrow M^n$. Assumindo que cada subintervalo torna-se arbitrariamente pequeno quando n tende ao infinito (HUANG; ZIEMBA; BEN-TAL, 1977).*

O limite superior de Edmundson-Madansky e suas generalizações não podem ser usados quando existem várias variáveis aleatórias dependentes. Por outro lado, quando as variáveis aleatórias são independentes, é possível, sim, e apresentaremos a seguir expressões para J^n e M^n propostas por (HUANG; ZIEMBA; BEN-TAL, 1977).

Sejam X_1, \dots, X_m as variáveis aleatórias independentes, onde cada X_k está distribuída sobre o intervalo $[a_k, b_k]$ com função distribuição F_k e média finita μ_k . Seja P^k uma partição de $[a_k, b_k]$, tal que $a_k = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_k-1} < t_{n_k} = b_k$, $\alpha_i^k = \int_{t_{i-1}^k}^{t_i^k} dF_k(t) > 0$, $\beta_i^k = (1/\alpha_i^k) \int_{t_{i-1}^k}^{t_i^k} t dF_k(t)$, $i = 1, \dots, n_k$, $\delta_i^k = \alpha_i^k [(\beta_i^k - t_{i-1}^k)/(t_i^k - t_{i-1}^k)] + \alpha_{i+1}^k [(t_{i+1}^k - \beta_{i+1}^k)/(t_{i+1}^k - t_i^k)]$, $i = 0, 1, \dots, n_k$, onde $\alpha_{n_k+1}^k = 0$. Supondo que $\phi(X_1, \dots, X_m)$ seja convexa limitada sobre $\prod_{k=1}^m [a_k, b_k]$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=1}^m \alpha_{i_k}^k \right) \phi(\beta_{i_1}^1, \dots, \beta_{i_m}^m) &\leq E[\phi(X_1, \dots, X_m)] \\ &\leq \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \left(\prod_{k=1}^m \delta_{i_k}^k \right) \phi(t_{i_1}^1, \dots, t_{i_m}^m). \end{aligned} \quad (2.91)$$

2.5.3.3 Aplicação: Problema do Fazendeiro.

Retornando ao problema do Fazendeiro, discutiremos duas situações: 1) As três culturas possuem o mesmo rendimento a cada ano, ou seja, teremos uma única variável aleatória contínua; 2) As três culturas possuem rendimentos independentes, então, teremos três variáveis aleatórias contínuas.

1) Uma única variável aleatória contínua.

Suponhamos que o Fazendeiro possua o histórico de rendimento anual dos últimos trinta anos da sua plantação. Os dados da Tabela 2 foram criados apenas para validar o algoritmo.

Tabela 2 – Percentual de rendimento anual da plantação.

1,0824	0,8000	0,9108	0,8185	0,8389	1,1294
1,0779	0,9268	1,1801	0,8138	0,9755	0,9526
1,1062	1,1181	0,8747	0,9959	0,9782	1,0585
1,0837	1,1019	0,9104	1,0719	1,0620	0,9360
1,1376	0,9993	1,2000	0,9362	1,0341	0,8895

Fonte: do autor.

Seja X a amostra do percentual de rendimento anual. Aplicando o teste de Shapiro-Wilk em X , obtemos:

$$W_o = 0,96332 \quad \text{e} \quad p\text{-valor} = 37,55\%. \quad (2.92)$$

Definindo o nível de significância $\alpha = 5\%$ e como $n = 30$, o valor de referência do teste de Shapiro-Wilk é $W_{5\%,30} = 0,927$. Logo, verificamos que $W_o > W_{5\%,30}$ e $p\text{-valor} > 5\%$. Portanto, não rejeitaremos a hipótese nula de que a amostra X provém de uma população com distribuição normal. Assim, considerando a distribuição normal P , construiremos a distribuição aproximada \bar{P} . Logo, o problema de recurso pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x + \sum_{i=1}^N \bar{p}_i q_k^T y_i \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & T_i x + W y_i = h \\ & (x, y_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.93)$$

tal que $c = (150, 230, 260, 0)^T$, $q = (238, 210, -170, -150, -36, -10, 0, 0, 0, 0)^T$, $b = 500$, $h = (200, 240, 0, 6000)^T$, $\bar{p}_i = p_i + \epsilon$, $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $A = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$,

$$T_k = r_k \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Assim, a matriz de restrições A_s possui $1+4N$ linhas e $4+10N$ colunas, onde N corresponde

ao número de pontos da partição P ou número de cenários,

$$A_s = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_1 & W & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_2 & 0 & W & 0 & \cdots & 0 \\ T_3 & 0 & 0 & W & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ T_N & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

Apresentaremos na [Tabela 3](#) os resultados obtidos em 100 experimentos do problema de recurso, com r_i escolhido aleatoriamente. Destacaremos na tabela os valores máximo, mínimo, médio e percentual da desigualdade válida, para cada número de pontos da partição.

Tabela 3 – Problema de Recurso (2.93), valor objetivo ótimo com rendimento aleatório em cada intervalo da partição.

N	3	5	10	20	30	40	50
$max(RP)$	-0,9673	-1,0423	-1,0892	-1,1101	-1,1154	-1,1198	-1,1197
$mean(RP)$	-1,1197	-1,1172	-1,1253	-1,1230	-1,1231	-1,1231	-1,1229
$min(RP)$	-1,2767	-1,1946	-1,1468	-1,1340	-1,1285	-1,1269	-1,1255
DV	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

* Os valores de $max(RP)$, $mean(RP)$ e $min(RP)$ são todos da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

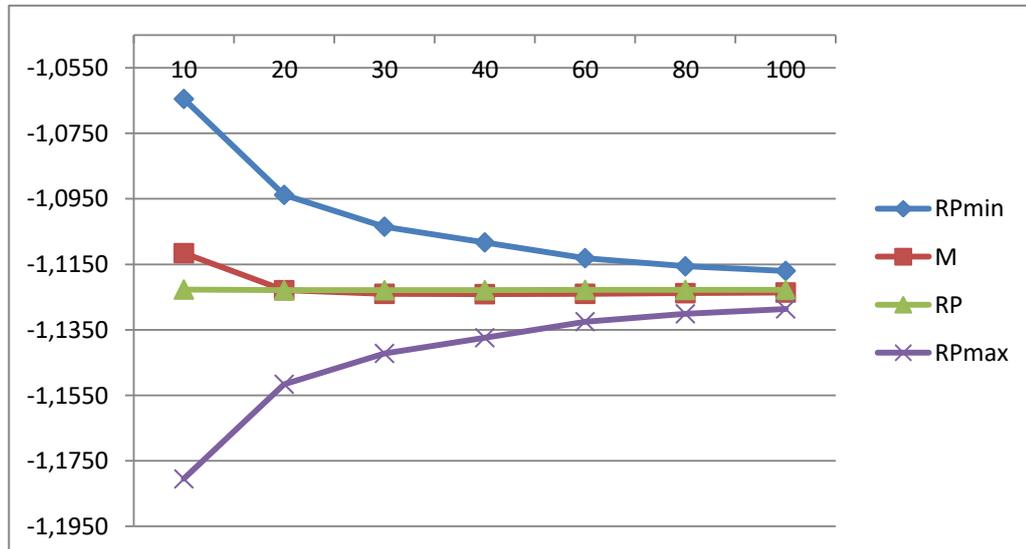
Na [Tabela 3](#), o percentual DV corresponde à verificação da desigualdade estocástica $WS \leq RP \leq EEV$. Observamos que o percentual DV atingiu 100% de sucesso em todos os números de cenários considerados.

Agora, testaremos valores fixos para o rendimento, como: $rmin_i = t_{i-1}$, $rmean_i = (t_{i-1} + t_i)/2$ e $rmax_i = t_i$, para $i = 1, \dots, N$. A solução M corresponde a uma aproximação do limite superior de Edmundson-Madansky. Denotaremos RP_{rmean} por RP , sendo essa a nossa proposta de solução para o problema de recurso, motivada pela soma de Riemann. Essa solução pode ser considerada uma aproximação do limite inferior de Jensen. As comparações dos resultados da literatura com a nossa proposta foram obtidas considerando

$$\alpha_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dF(t) \approx \bar{p}_i, \quad (2.97)$$

$$\beta_i = \alpha_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} t dF(t) \approx E(r_i) = rmean_i. \quad (2.98)$$

Figura 4 – Problema de Recurso (2.93), convergência das soluções RP_{min} , M , RP e RP_{max} .



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Figura 4, apresentamos o comportamento das opções de solução do problema de recurso em função do número de cenários. Observamos que as soluções RP_{min} e RP_{max} se comportaram como limites superior e inferior, respectivamente. A diferença $RP_{min} - RP_{max}$ diminui à medida em que N aumenta. Esta característica é coerente com a ideia da soma de Riemann usada na construção da aproximação da distribuição de probabilidade, \bar{p} . Esperávamos que a solução M fosse decrescente em função de N , de acordo com os resultados teóricos, e que $M \geq RP$ para todo N , mas falhou a partir de $N \geq 20$. Acreditamos que essas falhas sejam decorrentes das aproximações realizadas nas equações (2.97) e (2.98). Contudo, o nosso interesse é analisar a convergência de cada uma das soluções propostas em função do número de cenários. Assim, constatamos que as soluções RP e M apresentaram os melhores resultados de convergência, ou seja, se aproximaram da convergência com os menores números de cenários. Além disso, destacamos a solução RP que convergiu usando o menor número de cenário. Portanto, a solução RP foi escolhida como a solução do problema de recurso.

A Tabela 4 apresenta o tempo de CPU e o número de iterações obtidos por RP e M , na resolução do problema de recurso, para cada número de cenário escolhido.

Tabela 4 – Problema de Recurso (2.93), tempo de CPU e número de iterações das soluções RP e M .

N	10	20	30	40	60	80	100
$T_M(s)$	0,0199	0,0324	0,0493	0,0667	0,0879	0,1201	0,1540
K_M	13	13	14	15	14	15	15
$T_{RP}(s)$	0,0791	0,0880	0,1039	0,1163	0,1361	0,1679	0,2061
K_{RP}	13	12	13	13	14	14	14

Fonte: do autor.

Na Tabela 4, destacamos o tempo de CPU, menos de um segundo. Podemos atribuir essa característica ao fato de este problema possuir pequenas dimensões. Observamos, também, que o tempo de resolução aumentou de acordo com o número de cenários. Com relação ao número de iterações, não percebemos nenhuma relação com o número de cenários, pois a variação foi pequena e, em geral, realizou menos de dezesseis iterações.

Tabela 5 – Problema de Recurso (2.93), Valor Esperado da Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica.

N	10	20	30	40	60	80	100
EEV	-1,1143	-1,1149	-1,1151	-1,1151	-1,1151	-1,1151	-1,1151
RP	-1,1227	-1,1229	-1,1229	-1,1229	-1,1228	-1,1228	-1,1228
WS	-1,1748	-1,1750	-1,1750	-1,1749	-1,1750	-1,1750	-1,1750
$EVPI$	0,0521	0,0521	0,0521	0,0521	0,0521	0,0521	0,0521
VSS	0,0084	0,0080	0,0078	0,0078	0,0077	0,0077	0,0077

* Os valores desta tabela são todos da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 5, O $EVPI = 5210,00$ \$ representa o valor máximo que o fazendeiro investiria para obter informações sobre a previsão do tempo ou o rendimento de sua plantação. Por outro lado, na ausência de informações sobre o futuro, o valor da solução estocástica, $VSS = 770,00$ \$, indica o quanto ele poderá perder ao desconsiderar a incerteza presente no rendimento de sua plantação.

2) Três variáveis aleatórias contínuas independentes.

Suponhamos que a amostra X apresentada acima corresponda ao rendimento do trigo nos últimos trinta anos. Analogamente, a fim de validar o algoritmo, criamos as Tabelas 6 e 7 para representar as amostras Y e Z , que corresponderão aos rendimentos do milho e beterraba, respectivamente.

Tabela 6 – Percentual de rendimento anual do milho.

1,2536	0,7191	0,8662	0,7277	0,8493	0,7583
1,1941	1,1169	0,8903	1,2701	0,7207	0,9632
0,9289	1,1593	1,2771	0,8121	0,9939	0,9674
1,0878	1,1256	1,1528	0,8656	1,1078	1,0931
0,7976	0,7714	1,2990	1,2758	0,9042	1,0512

Fonte: do autor

Tabela 7 – Percentual de rendimento anual da beterraba.

1,0114	1,0581	0,9796	1,0169	1,0604	1,0401
1,0195	0,9853	0,9704	1,0518	0,9506	0,9243
1,0191	0,9467	0,9793	1,0248	0,9903	0,9394
0,9981	1,0034	1,0122	0,9676	0,9126	0,9343
1,0370	1,0429	1,0421	0,9808	1,0494	1,0517

Fonte: do autor

Ao aplicar o teste de Shapiro-Wilk nas amostras Y e Z , obtemos:

$$W_{oy} = 0,93637 \quad \text{e} \quad p_y - \text{valor} = 7,27\%; \quad (2.99)$$

$$W_{oz} = 0,94899 \quad \text{e} \quad p_z - \text{valor} = 15,88\%. \quad (2.100)$$

Definido o nível de significância $\alpha = 5\%$ e $n = 30$, obteremos o valor de referência do teste de Shapiro-Wilk $W_{5\%;30} = 0,927$. Assim, verificamos que $W_{oy} > W_{5\%;30}$ e $p_y - \text{valor} > 5\%$, então, pelo teste de Shapiro-Wilk, concluímos que a amostra Y provém de uma distribuição normal. De forma semelhante, concluímos que a amostra Z também provém de uma distribuição normal. Desse modo, as variáveis independentes X , Y e Z corresponderão às coordenadas x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, do problema de recurso (2.93). Assim, o problema de recurso com as três variáveis aleatórias contínuas é dado por

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x + \sum_{i=1}^N \bar{p}_i q_k^T y_i \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & T_i x + W y_i = h \\ & (x, y_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.101)$$

A diferença, nesse caso, é o aumento na dimensão do problema, pois sendo as variáveis X , Y e Z independentes, o problema de recurso (2.101) considera todas as possibilidades, ou seja, $N = N_x N_y N_z$; tal que N_x , N_y e N_z correspondem ao número de cenários considerados

em cada variável aleatória. Consequentemente, a matriz T_k será dada por

$$T_k = \begin{bmatrix} 2.5r_{xk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_{yk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20r_{zk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Desse modo, a dimensão da matriz de restrições é $A_s(1 + 4N, 4 + 10N)$. Decidimos considerar o mesmo número de cenários em cada variável aleatória. Assim, a dimensão da matriz de restrições será $A_s(1 + 4N_x^3, 4 + 10N_x^3)$.

Na [Tabela 8](#), apresentamos o tempo de CPU e o número de iterações obtidos na resolução do problema de recurso (2.101) usando os Métodos de Pontos Interiores: Seguidor de Caminhos e Preditor-Corretor.

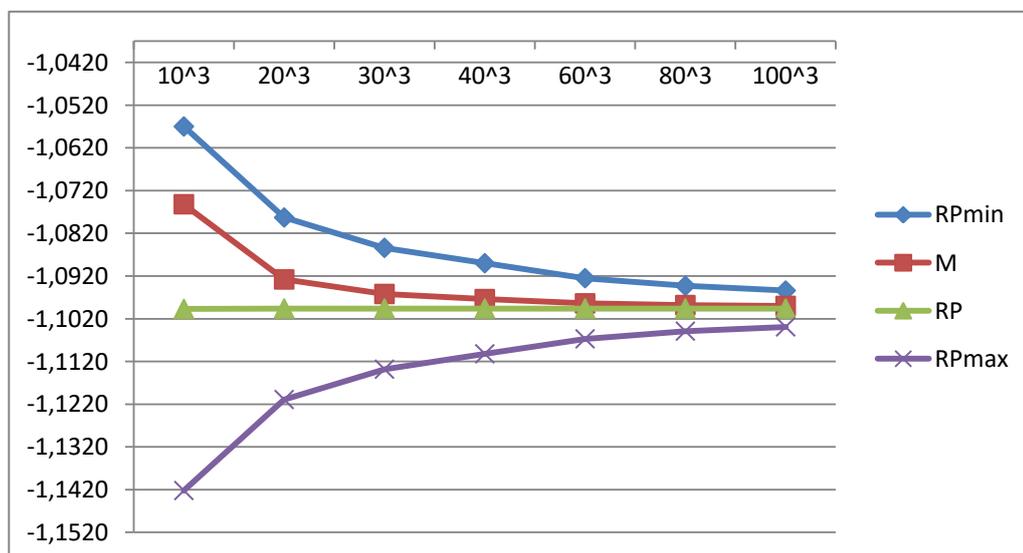
Tabela 8 – Problema de Recurso (2.101), Seguidor de Caminhos versus Preditor-Corretor.

N	10^3	20^3	30^3	40^3	60^3	80^3	100^3
$T_{SC}(s)$	3,44	45,23	307,97	813,09	5337,90	17804,00	—
K_{SC}	29	48	103	109	225	308	—
$T_{PC}(s)$	4,43	56,92	179,43	433,68	2163,70	6929,70	23305,00
K_{PC}	22	36	33	25	35	31	44

Fonte: do autor.

Analisando a [Tabela 8](#), percebemos que o Método Seguidor de Caminhos foi mais rápido nos problemas menores, com $N = 10^3$ e $N = 20^3$. No entanto, com $N = 100^3$, este método atingiu o limite máximo de iterações, $K_{max} = 400$, e não convergiu. Por outro lado, o Método Preditor-Corretor apresentou melhor desempenho nos problemas maiores, convergindo em menos de 60% do tempo do Método Seguidor de Caminhos. Uma vez que o Método Preditor-Corretor convergiu em todos os casos testados, e na maiorias das instâncias convergiu mais rápido, usaremos este método para obtermos as soluções $RPmin$, M , RP e $RPmax$.

Figura 5 – Problema de Recurso (2.101), convergência das soluções $RPmin$, M , RP e $RPmax$.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^5 .
 Fonte: do autor.

Na Figura 5, notamos o comportamento de limite superior das soluções $RPmin$ e M , e limite inferior da solução $RPmax$. Destacamos a solução RP que convergiu com o menor número de cenários. Usaremos esta solução como referência para calcularmos o $EVPI$ e VSS .

Tabela 9 – Problema de Recurso (2.101), Valor Esperado da Informação Perfeita e Valor da Solução Estocástica.

N	10^3	20^3	30^3	40^3	60^3	80^3	100^3
EEV	-1,0981	-1,0984	-1,0984	-1,0984	-1,0984	-1,0984	-1,0984
RP	-1,0997	-1,0997	-1,0996	-1,0996	-1,0996	-1,0996	-1,0996
WS	-1,1308	-1,1308	-1,1308	-1,1308	-1,1308	-1,1308	-1,1308
$EVPI$	0,0311	0,0311	0,0311	0,0312	0,0312	0,0312	0,0312
VSS	0,0016	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012

* Os valores desta tabela são todos da ordem de 10^5 .
 Fonte: do autor.

Podemos observar, na Tabela 9, que as soluções atenderam a desigualdade estocástica com sucesso para todos os cenários considerados, e isso é comprovado pela positividade de $EVPI$ e VSS . Nesse caso, o $EVPI = 3120$ \$ e o $VSS = 120$ \$. Estas

informações podem ajudar o tomador de decisão no momento de escolher um modelo que considere a incerteza ou não.

Os testes discutidos neste capítulo indicam que a aproximação proposta para a distribuição de probabilidade atingiu bons resultados, pois satisfaz a desigualdade estocástica e a convergência da solução. Dentre as opções para solução estocástica: RP_{min} , RP_{max} , RP e M , as soluções RP_{min} , RP_{max} e RP foram construídas a partir da ideia de soma de Riemann, com uma escolha específica do ponto em cada subintervalo da partição. Em particular, percebemos que é possível considerar a solução RP como uma aproximação do limite inferior de Jesen. Analogamente, a solução M é uma aproximação do limite superior de Edmundson-Madansky. As soluções RP e M apresentaram os melhores resultados de convergência em função do número de cenários. No entanto, a solução RP apresentou bons resultados considerando um baixo número de cenários e, também, convergiu com o menor número de cenários. Portanto, a solução RP foi a solução escolhida para o Problema de Recurso.

2.5.4 Resumo do Método Seguidor de Caminhos para o Problema de Recurso

Pseudocódigo 4 – Método Seguidor de Caminhos para o Problema de Recurso**Entrada:** $(x^0, y_i^0, z^0, v_i^0) > 0$, (λ^0, α^0) , $\tau < 1$, $\sigma \in (0, 1)$ **Saída:** $(x, y_i, z, v_i) > 0$ e (λ, α_i) 1 **início**2 **para** $k = 0, 1, 2, \dots$ até convergir **faça**

3
$$\gamma^k = (x^k)^T z^k + \sum_{i=1}^N (y_i^k)^T v_i^k; \mu^k = \sigma \left(\frac{\gamma^k}{n_1 + Nn_2} \right)$$

4
$$r_1^k = b - Ax^k; r_{2i}^k = h_i - T_i x^k - W y_i^k$$

5
$$r_3^k = c + A^T \lambda^k + \sum_{i=1}^N T_i^T \alpha_i^k - z^k; r_{4i}^k = p_i q + W^T \alpha_i^k - v_i^k$$

6
$$r_5^k = \mu^k e_1 - X^k Z^k e_1; r_{6i}^k = \mu^k e_2 - Y_i^k V_i^k e_2$$

7
$$D^k = \sum_{i=1}^N T_i^T (W V_i^{-k} Y_i^k W^T)^{-1} T_i + X^{-k} Z^k$$

8
$$\bar{r}_3^k = r_3^k - \sum_{i=1}^N T_i^T M^{-1} [r_{2i}^k + W V_i^{-k} Y_i^k (r_{4i}^k - Y_i^{-k} r_{6i}^k)] - X^{-k} r_5^k$$

9
$$d_3^k = (A(D^k)^{-1} A^T)^{-1} (-A(D^k)^{-1} \bar{r}_3^k - r_1^k); d_1^k = (D^k)^{-1} (-A^T d_3^k - \bar{r}_3^k)$$

10
$$d_{4i}^k = (W V_i^{-k} Y_i^k W^T)^{-1} [-r_{2i}^k + T_i d_1^k - W V_i^{-k} Y_i^k (r_{4i}^k - Y_i^{-k} r_{6i}^k)]$$

11
$$d_{2i}^k = V_i^{-k} Y_i^k (-W^T d_{4i}^k + Y_i^{-k} r_{6i}^k - r_{4i}^k)$$

12
$$d_5^k = X^{-k} (r_5^k - Z^k d_1^k); d_{6i}^k = Y_i^{-k} (r_{6i}^k - V_i^k d_{2i}^k)$$

13
$$\bar{\alpha}_x^k = \tau \min \left\{ -\frac{x_j^k}{\Delta x_j^k} : \Delta x_j^k < 0 \right\}; \bar{\alpha}_{y_i}^k = \tau \min \left\{ -\frac{y_{ij}^k}{\Delta y_{ij}^k} : \Delta y_{ij}^k < 0 \right\}$$

14
$$\bar{\alpha}_z^k = \tau \min \left\{ -\frac{z_j^k}{\Delta z_j^k} : \Delta z_j^k < 0 \right\}; \bar{\alpha}_{v_i}^k = \tau \min \left\{ -\frac{v_{ij}^k}{\Delta v_{ij}^k} : \Delta v_{ij}^k < 0 \right\}$$

15
$$\alpha_p^k = \min \left\{ 1, \bar{\alpha}_x^k, \bar{\alpha}_{y_i}^k \right\}; \alpha_d^k = \min \left\{ 1, \bar{\alpha}_z^k, \bar{\alpha}_{v_i}^k \right\}$$

16
$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k d_1^k; y_i^{k+1} = y_i^k + \alpha_p^k d_{2i}^k$$

17
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha_d^k d_3^k; \alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k + \alpha_d^k d_{4i}^k$$

18
$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k d_5^k; v_i^{k+1} = v_i^k + \alpha_d^k d_{6i}^k$$

19 **fim**20 **fim**

Capítulo 3

Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Demanda Incerta

Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é um termo relacionado a uma classe de problemas do sistema energético nos quais se deseja otimizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições que representa limites operacionais e leis físicas da rede elétrica (MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999). O FPO pode ser aplicado ao despacho econômico, à análise de confiabilidade de geração e transmissão, à análise de segurança, ao planejamento de expansão da geração e transmissão e à programação da geração de curto prazo. Neste trabalho, usaremos um modelo de fluxo de redes para o Fluxo de Potência Ótimo CC, o qual tem apresentado resultados satisfatórios nas aplicações (OLIVEIRA; SOARES; NEPOMUCENO, 2003). Contudo, as decisões do setor energético dependem de parâmetros incertos presentes nos planejamentos de curto e longo prazo; os dados incertos, por sua vez, são classificados como parâmetros técnicos e econômicos. Desse modo, a fim de tratar essas incertezas, sugeriram vários métodos de otimização, cuja principal diferença consiste na técnica escolhida para descrever a incerteza dos parâmetros de entrada. Esses métodos são classificados como abordagem probabilística, possibilística, probabilística-possibilística, teoria de decisão da informação do gap, otimização robusta e análise intervalar (SOROUDI; AMRAEE, 2013). Diante desse contexto, pretendemos investigar a incerteza da demanda, que é um parâmetro operacional, por meio de uma abordagem probabilística. Assim, propomos um modelo de programação estocástica quadrática de dois estágios, com recurso fixo, para o FPO com demanda incerta. Desse modo, será obtida uma aproximação da função distribuição por meio da análise do histórico de consumo. Em seguida, usaremos uma aproximação discreta do valor esperado do problema de segundo estágio para obter aproximações do problema contínuo, e analisar sua convergência. Os métodos de pontos interiores, Seguidor de Caminhos e Preditor-Corretor, foram escolhidos para resolução desse problema por apresentar bons resultados quando aplicados a sistemas de potência (OLIVEIRA; SOARES; NEPOMUCENO, 2003; QUINTANA; TORRES;

MEDINA-PALOMO, 2000). Por fim, usaremos o parâmetro estocástico, valor da solução estocástica, para analisar a importância de se considerar a incerteza da demanda no FPO.

3.1 Problema de Fluxo de Potência Ótimo CC

O problema de fluxo de potência ótimo CC pode ser formulado por um modelo de fluxo em redes cuja função objetivo resulta da soma de duas funções quadráticas separáveis, uma função representa as perdas no sistema de transmissão, e outra função corresponde aos custos de geração das usinas termelétricas e hidrelétricas. No conjunto de restrições, as leis de Kirchhoff dos nós e ramos, assim como os limites de geração e transmissão, são considerados (CARVALHO; SOARES; OHISHI, 1988; OLIVEIRA; SOARES; NEPOMUCENO, 2003). Assim, o FPO é dado por

$$\text{Minimize } \frac{\beta}{2} (p^T Q p + c_q^T p) + \frac{\alpha}{2} f^T R f \quad (3.1)$$

$$\text{Sujeito a } -E p + A f = -l \quad (3.2)$$

$$X f = 0 \quad (3.3)$$

$$p_l \leq p \leq p_u \quad (3.4)$$

$$f_l \leq f \leq f_u, \quad (3.5)$$

tal que β e α são escalares usados para especificar o objetivo da otimização. A matriz diagonal $Q \in \mathbb{R}^{g \times g}$ e o vetor $c_q \in \mathbb{R}^g$ representam os custos de geração. A matriz diagonal $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponde à resistência das linhas de transmissão. A matriz $E \in \mathbb{R}^{m \times g}$ é formada por colunas da matriz identidade, e cada coluna sua representa uma barra de geração. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n-m+1 \times n}$ correspondem à incidência e à reatância da rede de transmissão, respectivamente. O vetor $l \in \mathbb{R}^m$ denota a demanda de potência ativa. Os vetores p , p_l e p_u , de \mathbb{R}^g , representam a geração de potência ativa e seus limites inferior e superior, respectivamente. Analogamente, os vetores f , f_l e f_u , de \mathbb{R}^n , estão relacionadas ao fluxo de potência ativa.

3.1.1 Mudança de Variáveis

A fim de reescrever o problema de FPO na forma padrão, definimos $x = f - f_l$ e $g = p - p_l$. Assim,

$$\begin{aligned}
 F(p, f) &= \frac{\beta}{2} (p^T Q p + c_q^T p) + \frac{\alpha}{2} f^T R f \\
 &= \frac{\beta}{2} [(g + p_l)^T Q (g + p_l) + c_q^T (g + p_l)] + \frac{\alpha}{2} (x + f_l)^T R (x + f_l) \\
 &= \frac{\beta}{2} [g^T Q g + (2Q p_l + c_q)^T g] + \frac{\alpha}{2} [x^T R x + (2R f_l)^T x] + \\
 &\quad + \frac{\beta}{2} (p_l^T Q p_l + c_q^T p_l) + \frac{\alpha}{2} f_l^T R f_l \\
 &= \frac{\beta}{2} (g^T Q g + \bar{c}_q^T g) + \frac{\alpha}{2} (x^T R x + c_r^T x) + k \\
 &= \bar{F}(g, x) + k,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

desde que $\bar{c}_q = 2Q p_l + c_q$, $c_r = 2R f_l$ e $k = \frac{\beta}{2} (p_l^T Q p_l + c_q^T p_l) + \frac{\alpha}{2} f_l^T R f_l$. Além disso, juntando as equações (3.2) e (3.2), obteremos

$$\begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} -l \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Definindo $\bar{E} = \begin{bmatrix} E \\ Z \end{bmatrix}$, sendo $Z \in \mathbb{R}^{(n+1-m) \times g}$ uma matriz nula, $B = \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -l \\ z \end{bmatrix}$, onde $z \in \mathbb{R}^{(n+1-m)}$ é um vetor nulo, então a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$-\bar{E}p + Bf = b. \tag{3.8}$$

Realizando as mudanças de variáveis, teremos

$$-\bar{E}(g + p_l) + B(x + f_l) = b \tag{3.9}$$

$$-\bar{E}g + Bx = b + \bar{E}p_l - Bf_l \tag{3.10}$$

$$-\bar{E}g + Bx = \bar{b}, \tag{3.11}$$

tal que $\bar{b} = b + \bar{E}p_l - Bf_l$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ é próxima de uma matriz quadrada. Desse modo, a fim de obter uma matriz \bar{B} invertível e, assim, melhorar as propriedades da equação (3.11) realizaremos algumas mudanças de variáveis adicionais, como: $\bar{R} = [R; 0]$, $\bar{c}_r = [c_r; 0]$, $\bar{x}_u = [x_u; 0]$ e $\bar{B} = [B \ e_{n+1}]$, sendo e_{n+1} um vetor canônico. Assim,

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} \quad \frac{\beta}{2} (g^T Q g + \bar{c}_q^T g) + \frac{\alpha}{2} (\bar{x}^T \bar{R} \bar{x} + \bar{c}_r^T \bar{x}) + k \\
 &\text{Sujeito a} \quad -\bar{E}g + \bar{B}\bar{x} = \bar{b} \\
 &\quad \quad \quad g + v = g_u \\
 &\quad \quad \quad \bar{x} + u = \bar{x}_u \\
 &\quad \quad \quad (g, \bar{x}, v, u) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por simplicidade, eliminaremos as barras sobre as variáveis ao longo do texto.

3.2 Problema Quadrático Estocástico de Dois Estágios com Recurso Fixo para o FPO

Nesse modelo, consideramos a geração das hidrelétricas como variáveis de primeiro estágio, g_1 , enquanto a geração das termelétricas, g_{2j} , e o fluxo de transmissão, x_j , são variáveis de segundo estágio. O vetor de probabilidade será denotado por $a_j = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_N)$, tal que N corresponde ao número de cenários. A fim de evitar confusão com a definição do problema de segundo estágio, substituiremos a matriz diagonal Q e o vetor c_q , que representam os custos de geração das hidrelétrica e termelétricas, por M e c_m , respectivamente. A matriz E relacionada as barras de geração será substituída por F , porque na definição do problema de recurso a letra E apresenta o operador valor esperado. Além disso, com o objetivo de diferenciar as variáveis de primeiro e de segundo estágio usaremos os índices 1 e 2 nas matrizes, nos vetores e nas variáveis. De modo que, o índice 1 será associado as informações das hidrelétricas, e o índice 2 as termelétricas.

Definição 3.1. *Um problema quadrático estocástico de dois estágios com recurso fixo para o fluxo de potência ótimo é apresentado abaixo,*

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\beta_1}{2} (g_1^T M_1 g_1 + c_{1m}^T g_1) + E_\xi Q(g_1, \xi) \\ \text{s. a} \quad & g_1 + v_1 = g_{1u} \\ & (g_1, v_1) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

tal que o problema de segundo estágio é dado por:

$$\begin{aligned} Q(g_1, \xi) &= \min \left\{ \frac{\beta_2}{2} [g_2(\omega)^T M_2 g_2(\omega) + c_{2m}^T g_2(\omega)] + \frac{\alpha_i}{2} [x(\omega)^T R x(\omega) + c_r^T(\omega)] \right\} \\ \text{s. a} \quad & -F_1 g_1 - F_2 g_2(\omega) + B x(\omega) = b(\omega) \\ & g_2(\omega) + v_2(\omega) = g_{2u} \\ & x(\omega) + u(\omega) = x_u \\ & [g_2(\omega), x(\omega), v_2(\omega), u(\omega)] \geq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Denotaremos este problema como fluxo de potência ótimo com demanda incerta ou problema de recurso. O problema (3.13) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\beta_1}{2} (g_1^T M_1 g_1 + c_{1m}^T g_1) + \sum_{j=1}^N a_j \left[\frac{\beta_2}{2} (g_{2j}^T M_2 g_{2j} + c_{2m}^T g_{2j}) + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} (x_j^T R x_j + c_r^T x_j) \right] \\ \text{s. a} \quad & -F_1 g_1 - F_2 g_{2j} + B x_j = b_j \\ & g_1 + v_1 = g_u \\ & g_{2j} + v_{2j} = g_{2u} \\ & x_j + u_j = x_u \\ & (g_1, g_{2j}, x_j, v_1, v_{2j}, u_j) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Definiremos abaixo uma generalização para o modelo proposto para o FPO com demanda incerta. Seja g_h o vetor que representará a meta diária das usinas hidrelétricas.

Definição 3.2. *Definimos o problema de fluxo de potência ótimo com demanda incerta para um planejamento de P horas por:*

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i=1}^P \left\{ \frac{\beta_{1i}}{2} (g_{1i}^T M_1 g_{1i} + c_{1m}^T g_{1i}) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[\frac{\beta_{2i}}{2} (g_{2ij}^T M_2 g_{2ij} + c_{2m}^T g_{2ij}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha_i}{2} (x_{ij}^T R x_{ij} + c_r^T x_{ij}) \right] \right\} + K \\
\text{S. a} \quad & \sum_{i=1}^P g_{1i} = g_h \\
& -F_1 g_{1i} - F_2 g_{2ij} + B x_{ij} = b_{ij} \\
& g_{1i} + v_{1i} = g_u \\
& g_{2ij} + v_{2ij} = g_{2u} \\
& x_{ij} + u_{ij} = x_u \\
& (g_{1i}, g_{2ij}, x_{ij}, v_{1i}, v_{2ij}, u_{ij}) \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

tal que K é uma constante resultante das mudanças de variáveis,

$$\begin{aligned}
K = \quad & \sum_{i=1}^P \left\{ \frac{\beta_{1i}}{2} (p_{1li}^T M_1 p_{1li} + c_{1m}^T p_{1li}) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[\frac{\beta_{2i}}{2} (p_{2lij}^T M_2 p_{2lij} + c_{2m}^T p_{2lij}) + \frac{\alpha_i}{2} (f_{lij}^T R f_{lij}) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A matriz de restrições do problema (3.16) possui $n_t = 2P[g_1 + N(g_2 + n + 1)]$ colunas e $m_t = g_1 + P[g_1 + N(g_2 + 2n + 2)]$ linhas.

3.3 Aplicações:

Nos testes numéricos, definimos uma decomposição da capacidade de geração de potência ativa da seguinte forma: 2/3 da capacidade de geração correspondendo às usinas hidrelétricas e o restante da capacidade de geração às usinas termelétricas. O limite inferior dos geradores sendo nulo para hidrelétricas e termelétricas. O limite superior do fluxo de potência ativa foi definido de acordo com cada sistema de potência, não ultrapassando 50% da capacidade total de geração, e o limite inferior igual ao negativo do limite superior. Os custos de geração de potência ativa das usinas termelétricas foram considerados como quinze vezes os custos de geração das usinas hidrelétricas.

O vetor de probabilidade foi obtido, como definido no Capítulo 2, usando o histórico de consumo disponibilizado pelo ONS ([OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO, 2020](#)). Escolhemos o dia 01 de outubro de 2020 como referência de estudo. Em seguida, coletamos os dados de trinta dias e aplicamos o teste de normalidade, mas

no decorrer da análise houve falhas em alguns horários. Nesse caso, uma falha significa que um horário da amostra não atendeu ao critério de uma distribuição normal. Assim, reduzimos para 25, 20, 15, 10 e 5 dias, o tamanho da amostra até que o critério do teste de Shapiro-Wilk fosse atendido. Diante disso, os dados do consumo energético horário do dia 25 a 30 de setembro foram selecionados para o presente trabalho.

Tabela 10 – Percentual do consumo e teste de Shapiro-Wilk.

Hora	26/Set	27/Set	28/Set	29/Set	30/Set	W_o	$p - valor$
1	1,0309	0,9524	1,0282	1,0634	1,0136	0,9132	0,4870
2	1,0331	0,9586	1,0301	1,0566	1,0161	0,8890	0,3522
3	1,0270	0,9618	1,0377	1,0533	1,0117	0,9162	0,5056
4	1,0197	0,9572	1,0499	1,0501	1,0105	0,8750	0,2873
5	1,0145	0,9527	1,0587	1,0510	1,0111	0,9073	0,4513
6	0,9926	0,9407	1,0966	1,0442	1,0089	0,9937	0,9909
7	0,9577	0,9129	1,1739	1,0302	1,0089	0,9301	0,5970
8	0,9230	0,8802	1,2621	1,0278	1,0041	0,8866	0,3401
9	0,9053	0,8664	1,3265	1,0131	1,0136	0,8433	0,1743
10	0,9053	0,8653	1,3414	1,0052	1,0189	0,8425	0,1718
11	0,8991	0,8681	1,3448	0,9984	1,0278	0,8439	0,1760
12	0,9048	0,8784	1,3202	0,9970	1,0318	0,8488	0,1906
13	0,9107	0,8856	1,3025	0,9992	1,0323	0,8520	0,2009
14	0,8798	0,8832	1,3481	0,9995	1,0359	0,8285	0,1356
15	0,8612	0,8917	1,3542	1,0068	1,0447	0,8662	0,2513
16	0,8600	0,9017	1,3366	1,0113	1,0451	0,8823	0,3198
17	0,8774	0,9180	1,2928	1,0139	1,0414	0,8887	0,3507
18	0,9264	0,9393	1,1751	1,0241	1,0307	0,8896	0,3553
19	0,9816	0,9479	1,0852	1,0168	1,0210	0,9685	0,8654
20	0,9886	0,9573	1,0735	1,0138	1,0226	0,9819	0,9446
21	0,9814	0,9822	1,0736	1,0110	1,0312	0,9038	0,4313
22	0,9536	1,0004	1,0989	1,0120	1,0284	0,9581	0,7948
23	0,9442	1,0200	1,0903	1,0130	1,0340	0,9549	0,7721
24	0,9494	1,0242	1,0763	1,0128	1,0383	0,9570	0,7866

Fonte: Do autor.

A estatística do teste de Shapiro-Wilk com cinco elementos é $W_{5\%;5} = 76,2\%$. Assim, na Tabela 10, verificamos que $W_o > W_{5\%;5}$ e $p - valor > 5\%$, para cada amostra analisada. Portanto não rejeitaremos a hipótese nula de que a amostra X_i , com $i = 1, \dots, 24$, provém de uma população com distribuição normal.

Tabela 11 – Percentual do consumo, 01/10/2020.

Hora	Índice	Hora	Índice	Hora	Índice	Hora	Índice
1	0,9286	7	0,8353	13	1,0356	19	1,0838
2	0,8849	8	0,8973	14	1,0815	20	1,0943
3	0,8531	9	0,9699	15	1,1238	21	1,0869
4	0,8355	10	1,0087	16	1,1348	22	1,0964
5	0,8316	11	1,0390	17	1,1273	23	1,0760
6	0,8323	12	1,0456	18	1,0733	24	1,0245

Fonte: do autor.

Na [Tabela 11](#), verificamos que às 4 horas da manhã foi registrado o menor consumo. Por outro lado, o maior consumo foi registrado às 3 horas da tarde.

3.3.1 IEEE30

Este problema representa uma aproximação do Sistema de Potência Elétrica Americano, no Meio-oeste dos EUA. A capacidade de geração é de 280 MW, com 6 geradores. Assim, definimos $g_1 = 4$ e $g_2 = 2$. Como o número de linhas de transmissão é 41, resulta que a matriz de restrições terá dimensões $A(4 + 86N, 8 + 88N)$.

Tabela 12 – IEEE30, otimizando a geração ou transmissão de energia, $P = 1$.

Objetivo da otimização	$RP(um)$
Geração	$3,6088 \cdot 10^4$
Transmissão	$1,3630 \cdot 10^4$
Geração e Transmissão	$4,9798 \cdot 10^4$

Fonte: Do autor.

Na [Tabela 12](#), analisamos o comportamento do problema de recurso com valores específicos para β_1 , β_2 e α . Desse modo, a fim de minimizar os custos de geração de energia basta assumir $\alpha = 0$ e especificar o valor de β_1 e β_2 , nesse teste definimos ambos iguais a um. Analogamente, com o objetivo de minimizar os custos de transmissão de energia definimos $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$ e $\alpha = 1$. Por fim, realizamos o teste com essas constantes iguais a um, que otimiza conjuntamente os custos de geração e transmissão de energia.

Tabela 13 – IEEE30, otimizando a geração ou transmissão de energia, $P = 24$.

Objetivo da otimização	$RP(um)$
Geração	$1,2477 \cdot 10^6$
Transmissão	$4,1343 \cdot 10^5$
Geração e Transmissão	$1,6629 \cdot 10^6$
Geração e Transmissão (c/c)	$1,7113 \cdot 10^6$

Fonte: do autor.

Na [Tabela 13](#), verificamos o desempenho do problema de recurso num planejamento de 24 horas. Repetimos os testes específicos de otimização e, além disso, testamos a possibilidade dos custos de geração variarem de acordo com a média de consumo (c/c). Nesse caso, usamos a média de consumo diário como referência, assim, nos horários abaixo da média os custos β_{1i} e β_{2i} são menores, o que implicará numa cobrança menor pela geração de energia no horário i . Analogamente, nos horários em que o consumo for acima da média acarretará num custo maior pela geração de energia nesses horários. Assim, destacamos que no teste Geração e Transmissão (c/c) houve um aumento de 2,91% na função objetivo em comparação ao caso no qual o custo é o mesmo em todos os horários.

Tabela 14 – IEEE30, Seguidor de Caminhos (SC) versus Preditor-Corretor (PC), planejamento $P = 1$.

<i>MPI</i>	<i>SC</i>		<i>PC</i>	
	<i>K</i>	<i>T(s)</i>	<i>K</i>	<i>T(s)</i>
Objetivo da otimização				
Geração	9	0,23	7	0,26
Transmissão	8	0,23	6	0,23
Geração e Transmissão	8	0,26	7	0,33
Geração e Transmissão (c/c)	8	0,22	7	0,24

Fonte: do autor.

Na [Tabela 14](#), destacamos que o método Seguidor de Caminhos resolveu o problema de recurso mais rápido que o Preditor-Corretor na maioria dos casos testados. Portanto, usaremos o SC nas aplicações com planejamento de uma hora.

Tabela 15 – IEEE30, Seguidor de Caminhos versus Preditor-Corretor, $P = 24$.

<i>MPI</i>	<i>SC</i>		<i>PC</i>	
	<i>K</i>	<i>T(s)</i>	<i>K</i>	<i>T(s)</i>
Objetivo da otimização				
Geração	48	6,61	16	3,53
Transmissão	38	5,23	11	2,54
Geração e Transmissão	56	7,62	—	—
Geração e Transmissão (c/c)	59	8,07	15	3,34

Fonte: do autor.

Na [Tabela 15](#), observamos que o PC convergiu mais rápido do que o SC em três instâncias e não convergiu em uma instância, pois atingiu o limite superior de iterações, $k_{max} = 100$. Desse modo, como o SC convergiu em todos os casos testados, usaremos o método Seguidor de Caminhos nos demais testes ao longo do deste capítulo.

Definição 3.3. *A solução do problema de recurso com o consumo averiguado no dia de*

referência de estudo, 01/10/2020, será denotado por *REAL*. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{\beta_1}{2} (g_1^T M_1 g_1 + c_{1m}^T g_1) + \frac{\beta_2}{2} (g_2^T M_2 g_2 + c_{2m}^T g_2) + \\
 & + \frac{\alpha}{2} (x^T R x + c_r^T x) \\
 \text{s. a} \quad & -E_1 g_1 - E_2 g_2 + Bx = b^* \\
 & g_1 + v_1 = g_u \\
 & g_2 + v_2 = g_{2u} \\
 & x + u = x_u \\
 & (g_1, g_2, x, v_1, v_2, u) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde b^* representa o consumo do dia de referência de estudo.

O problema (3.18) é equivalente em termos de dimensão ao problema de recurso com um único cenário, ou ainda, ao FPO original.

Tabela 16 – IEEE30, número de iterações.

Hora	EV	EEV		RP	REAL
	K_{EV}	$K_{min_{EEV}}$	$K_{max_{EEV}}$	K_{RP}	K_{REAL}
1	16	7	7	14	16
2	16	7	7	14	13
3	16	7	7	18	13
4	16	7	7	17	8
5	16	7	7	17	8
6	16	7	7	17	13
7	16	7	7	17	11
8	16	7	7	14	12
9	16	7	8	15	16
10	16	7	8	16	16
11	16	7	8	16	16
12	16	7	8	16	17
13	16	7	8	16	16
14	17	7	8	17	14
15	16	7	8	18	14
16	14	7	9	18	14
17	14	7	8	17	14
18	17	7	8	16	14
19	14	7	7	17	14
20	14	7	7	17	14
21	14	7	7	17	14
22	14	7	8	17	14
23	15	7	7	16	14
24	16	7	7	16	16

Fonte: do autor.

Na [Tabela 16](#), identificamos que os números de iterações do problema *EEV* variaram no intervalo [7, 9], sendo o problema *EEV* o de menor dimensão. Os problemas *EV* e *REAL* possuem as mesmas dimensões, e apresentaram números de iterações no intervalo [8, 17]. Por fim, dado que consideramos dez cenários, o problema com maior dimensão é o *RP*, e este apresentou números de iterações no intervalo [14, 18]. Desse modo, houve uma pequena relação entre o número de iterações e a dimensão dos problemas *EEV*, *EV*, *REAL* e *RP*.

Tabela 17 – IEEE30, tempo de CPU.

	EV	EEV	RP	REAL
Hora	$T_{EV}(s)$	$T_{EEV}(s)$	$T_{RP}(s)$	$T_{REAL}(s)$
1	0,1056	0,2308	0,1238	0,0104
2	0,0104	0,0499	0,0476	0,0082
3	0,0102	0,0504	0,0559	0,0083
4	0,0105	0,0507	0,0533	0,0056
5	0,0106	0,0498	0,0556	0,0055
6	0,0107	0,0498	0,0546	0,0088
7	0,0107	0,0475	0,0567	0,0075
8	0,0100	0,0468	0,0442	0,0076
9	0,0101	0,0491	0,0503	0,0101
10	0,0101	0,0484	0,0493	0,0100
11	0,0129	0,0506	0,0540	0,0099
12	0,0102	0,0477	0,0536	0,0109
13	0,0099	0,0475	0,0547	0,0100
14	0,0106	0,0485	0,0577	0,0087
15	0,0100	0,0481	0,0579	0,0087
16	0,0087	0,0475	0,0614	0,0089
17	0,0088	0,0468	0,0518	0,0088
18	0,0105	0,0477	0,0542	0,0088
19	0,0088	0,0453	0,0565	0,0088
20	0,0088	0,0455	0,0568	0,0087
21	0,0088	0,0453	0,0573	0,0088
22	0,0087	0,0458	0,0562	0,0088
23	0,0093	0,0458	0,0540	0,0088
24	0,0099	0,0465	0,0517	0,0099

Fonte: do autor.

Na [Tabela 17](#), destacamos que o baixo tempo de resolução apresentado em todas as soluções é devido à baixa dimensão do problema *IEEE30*. Vale ressaltar que o T_{EEV} corresponde a resolução de dez problemas de segundo estágio. Os maiores tempos de resolução foram apresentados pela solução *RP*. As soluções *EV* e *REAL* apresentaram tempos de resolução próximos, essa característica pode ser explicada porque ambos os problemas possuem a mesma dimensão.

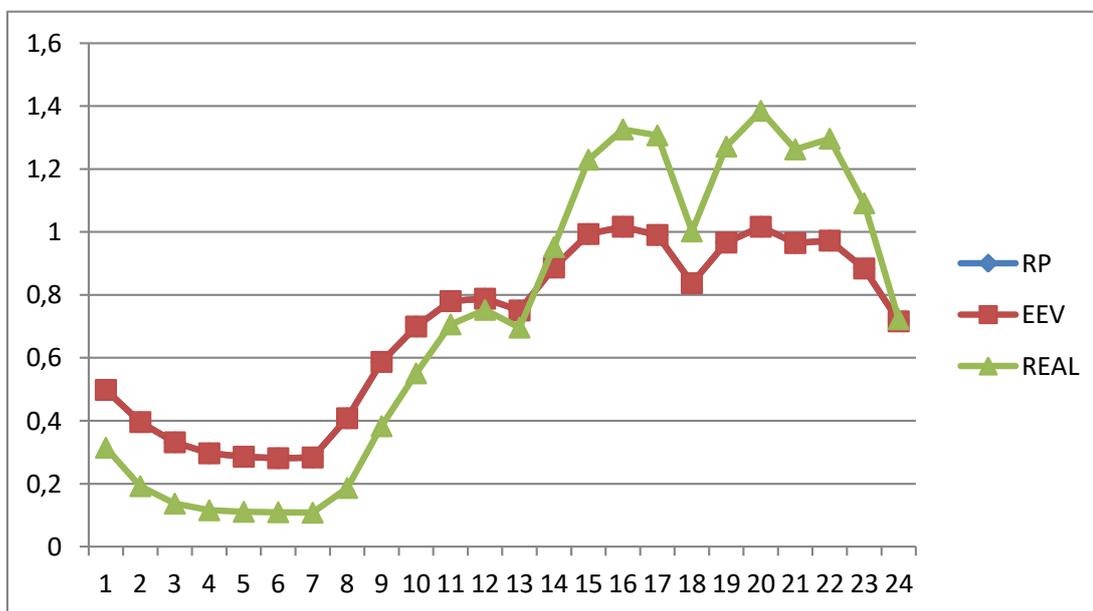
Tabela 18 – IEEE30, valor da solução estocástica por hora.

Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)
1	1,3449	9	0,9532	17	0,4671
2	1,2308	10	0,9121	18	0,4709
3	1,0894	11	0,8294	19	0,2391
4	0,9608	12	0,8609	20	0,0899
5	0,9376	13	0,9308	21	0,2730
6	0,9182	14	0,3321	22	0,2520
7	0,8800	15	0,0976	23	0,6179
8	1,0219	16	0,4957	24	1,2243

Fonte: do autor.

Na Tabela 18, observamos que $VSS > 0$, em todos os horários. Assim, a desigualdade estocástica, $RP \leq EEV$, foi atendida com sucesso e $0,08 \text{ um} \leq VSS \leq 1,34 \text{ um}$. Diante disso, o baixo valor da solução estocástica indica que a solução EEV poderia ser adotada, e isso não acarretaria em grandes perdas, nesse caso.

Figura 6 – IEEE30, valor objetivo por hora.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Figura 6, destacamos a sobreposição das soluções EEV e RP . Isso se justifica pelo baixo valor da solução estocástica em cada horário.

Tabela 19 – IEEE30, número de iterações, tempo de CPU e função objetivo, $P = 24$.

	K	$T(s)$	$F(um)$
EV	49	1,3064	$1,5525 \cdot 10^6$
EEV	7	0,8479	$1,6629 \cdot 10^6$
RP	56	11,6133	$1,6629 \cdot 10^6$
$REAL$	51	1,3496	$1,7206 \cdot 10^6$

Fonte: do autor.

Na [Tabela 19](#), observamos que o tempo de resolução do problema de recurso foi quántuplo da solução EEV , considerando a soma dos tempos das soluções EV e EEV . Comparando os números de iterações, notamos que, em média, cada iteração da solução RP demorou mais tempo, isso é consequência da dimensão do problema RP .

Tabela 20 – IEEE30, valor da solução estocástica, $P = 24$

P	$VSS(um)$
24	1,8567

Fonte: do autor.

Na [Tabela 20](#), destacamos que o valor da solução estocástica foi positivo, mesmo sendo baixo. Isso mostra que a proposta de solução estocástica juntamente com o modelo atenderam satisfatoriamente a desigualdade estocástica.

3.3.2 IEEE118

Este problema representa uma aproximação do Sistema de Potência Elétrica Americano, no Meio-oeste dos EUA. A capacidade de geração é de 4379,10 MW, com 53 geradores. Assim, definimos $g_1 = 38$ e $g_2 = 15$. Como o número de linhas de transmissão é 179, resulta que a matriz de restrições terá dimensões $A(38 + 375N, 76 + 390N)$.

Tabela 21 – IEEE118, número de iterações.

Hora	EV	EEV		RP	REAL
	K_{EV}	$K_{min_{EEV}}$	$K_{max_{EEV}}$	K_{RP}	K_{REAL}
1	23	8	9	31	22
2	22	8	9	31	21
3	22	8	9	31	19
4	22	8	9	30	19
5	22	8	9	30	18
6	21	8	9	31	18
7	21	8	9	30	18
8	22	8	10	31	21
9	23	9	13	31	22
10	23	9	12	32	23
11	23	9	13	38	23
12	23	8	13	35	24
13	23	9	13	37	23
14	24	9	14	39	26
15	25	8	17	39	28
16	25	8	17	38	27
17	25	8	15	39	27
18	24	8	10	33	26
19	26	8	9	32	28
20	26	8	9	32	28
21	26	8	9	32	28
22	27	8	9	32	27
23	25	8	9	33	28
24	24	8	9	31	24

Fonte: do autor.

Na [Tabela 21](#), observamos que os números de iterações da solução RP variou no intervalo $[30, 39]$, sendo esta a solução que realizou mais iterações. A solução EEV foi a que apresentou os mais baixos números de iterações, no intervalo $[8,17]$. Os números de iterações das soluções EV e $REAL$ foram equivalentes e variaram no intervalo $[18,28]$.

Tabela 22 – IEEE118, tempo de CPU.

	EV	EEV	RP	REAL
Hora	$T_{EV}(s)$	$T_{EEV}(s)$	$T_{RP}(s)$	$T_{REAL}(s)$
1	0,2404	0,5016	1,1070	0,0897
2	0,0631	0,1902	0,6780	0,0524
3	0,0530	0,1824	0,6571	0,0461
4	0,0526	0,1788	0,6290	0,0454
5	0,0525	0,1802	0,6294	0,0431
6	0,0501	0,1780	0,6539	0,0429
7	0,0502	0,1792	0,6258	0,0429
8	0,0522	0,1841	0,6474	0,0503
9	0,0548	0,1938	0,6494	0,0525
10	0,0548	0,1965	0,6727	0,0547
11	0,0548	0,1992	0,7933	0,0548
12	0,0547	0,1965	0,7321	0,0570
13	0,0549	0,1952	0,7722	0,0546
14	0,0570	0,2048	0,8225	0,0619
15	0,0601	0,2138	0,8173	0,0667
16	0,0598	0,2117	0,7956	0,0647
17	0,0595	0,2058	0,8167	0,0647
18	0,0572	0,1905	0,6899	0,0620
19	0,0619	0,1908	0,6698	0,0667
20	0,0618	0,1906	0,6690	0,0667
21	0,0618	0,1910	0,6693	0,0667
22	0,0642	0,1933	0,6713	0,0640
23	0,0597	0,1886	0,6910	0,0667
24	0,0573	0,1863	0,6499	0,0571

Fonte: do autor.

Na [Tabela 22](#), percebemos que os tempos de resolução obtidos pelas soluções *EV* e *REAL* foram os menores. Isso ocorreu devido à baixa dimensão desses problemas, pois em ambos se otimiza um único cenário. Nesses testes, estamos considerando dez cenários, assim, como esperado, os maiores tempos de CPU foram observados na solução *RP*. O problema *EEV* é resolvido em duas etapas, considerando a solução do problema *EV* a primeira etapa, então somando os tempos de resolução dessas soluções percebemos que o resultado é, ainda, menor do que tempo da solução *RP* correspondente.

Tabela 23 – IEEE118, valor da solução estocástica por hora.

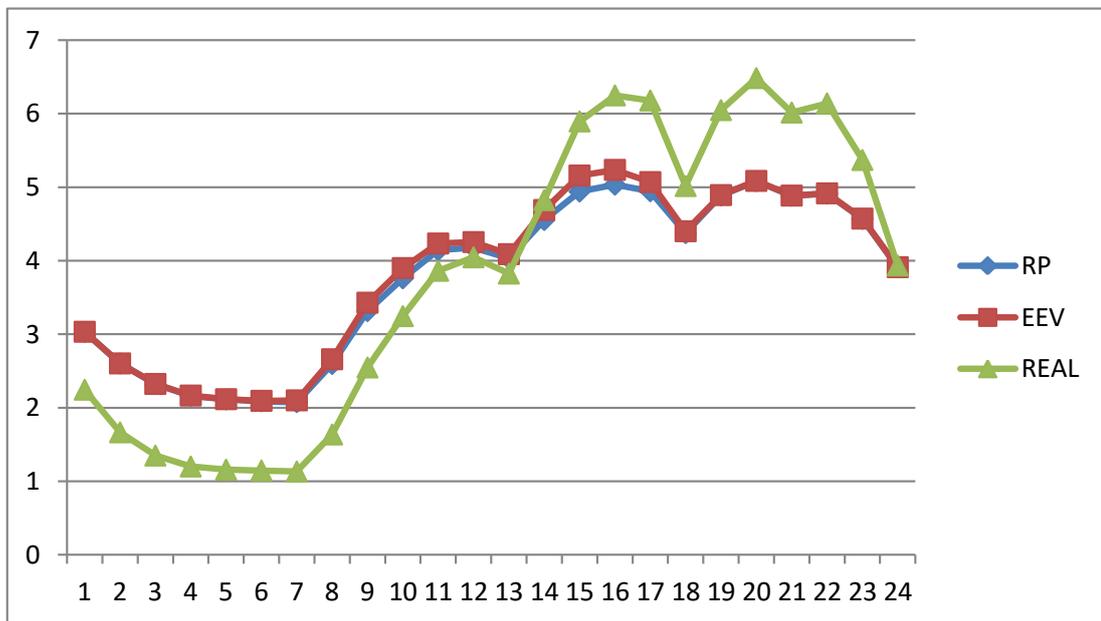
Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)
1	0,0300	9	1,1452	17	1,2479
2	0,0145	10	1,3984	18	0,2571
3	0,0167	11	0,9036	19	0,0473
4	0,0260	12	0,7517	20	0,0322
5	0,0320	13	0,5716	21	0,0190
6	0,0723	14	1,3603	22	0,0527
7	0,2437	15	2,1769	23	0,0392
8	0,6468	16	2,0095	24	0,0274

* VSS é da ordem de 10^6 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 23, destacamos que o valor da solução estocástica foi positivo em todos os horários, e $1,45 \cdot 10^4 \text{ um} \leq VSS \leq 2,17 \cdot 10^6 \text{ um}$. Diante disso, o valor da solução estocástica indica que adotar a solução *RP* seria vantajoso.

Figura 7 – IEEE118, valor objetivo por hora.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^7 .

Fonte: do autor.

Na Figura 7, observamos que nos horários entre às 7 horas e às 17 horas o valor da solução estocástica apresentou seus maiores resultados, pois notamos nesse intervalo uma diferença maior entre as soluções *EEV* e *RP*.

3.3.3 SSE1654

Este problema representa o Sistema de Potência Elétrica de três regiões brasileira: Sul, Sudeste e Centro-Oeste. A capacidade de geração é de 33613 MW, com 124 geradores. Assim, definimos $g_1 = 86$ e $g_2 = 38$. Como o número de linhas de transmissão é 2063, resulta que a matriz de restrições terá dimensões $A(88 + 4164N, 176 + 4200N)$.

Tabela 24 – SSE1654, número de iterações.

Hora	EV	EEV		RP	REAL
	K_{EV}	K_{minEEV}	K_{maxEEV}	K_{RP}	K_{REAL}
1	49	22	29	75	44
2	46	21	27	65	35
3	44	17	25	61	33
4	43	15	25	59	31
5	42	13	25	59	32
6	43	11	25	59	32
7	42	8	27	61	32
8	44	8	34	89	35
9	48	8	43	102	44
10	50	9	46	94	50
11	53	8	47	96	54
12	54	8	46	98	54
13	53	8	44	93	54
14	54	8	47	94	55
15	56	8	47	99	57
16	55	9	47	104	57
17	55	13	47	106	57
18	55	22	43	95	56
19	55	29	40	92	57
20	56	30	40	93	61
21	55	30	36	92	57
22	55	29	40	94	57
23	55	27	36	89	57
24	54	26	33	86	54

Fonte: do autor.

Na Tabela 24, observamos que os números de iterações da solução RP variaram no intervalo $[59, 106]$, sendo esta solução a que realizou mais iterações. Os menores números de iterações foram atingidos pela solução EV , e variaram no intervalo $[8, 47]$. As soluções EV e $REAL$ apresentaram números de iterações equivalentes, dentro do intervalo $[31, 61]$. Em vista disso, podemos dizer que houve um aumento do número de iterações em função da dimensão do problema.

Tabela 25 – SSE1654, tempo de CPU.

	EV	EEV	RP	REAL
Hora	$T_{EV}(s)$	$T_{EEV}(s)$	$T_{RP}(s)$	$T_{REAL}(s)$
1	14,5576	56,2518	197,5995	12,3722
2	12,8369	63,0340	213,8896	9,8148
3	15,5086	62,1993	202,3206	11,6580
4	15,1258	57,7210	196,4190	10,8519
5	14,8365	57,4572	196,3564	11,4020
6	15,3952	55,5936	203,9374	11,4569
7	14,8435	53,0632	202,3955	11,2905
8	15,6129	61,2826	294,3677	12,3262
9	16,9190	73,1776	340,6776	15,5044
10	17,9312	75,8679	319,6506	17,8945
11	18,6875	79,8969	326,4332	19,2944
12	19,2936	82,7557	329,9590	19,2916
13	18,9584	77,9204	312,0575	19,3051
14	19,1998	84,9372	320,3322	19,4947
15	20,1356	86,1536	338,4566	20,5268
16	19,3837	85,9027	343,9060	20,1359
17	19,2552	87,5896	351,2051	19,9777
18	19,2965	87,8850	320,7970	19,6449
19	19,7631	90,3770	315,6621	20,4482
20	19,7417	92,8681	318,1105	21,4823
21	19,2419	90,6336	308,9288	19,9569
22	19,3215	91,9184	323,7198	20,2771
23	19,6860	92,4648	302,7099	20,4082
24	19,4146	84,9533	292,7077	19,2930

Fonte: do autor.

Na [Tabela 25](#), destacamos que os tempos de resolução da solução RP foram maiores do que a soma dos tempos das soluções EV e EEV , correspondentes; e que, em alguns casos, $T_{RP} > 3 \cdot (T_{EV} + T_{EEV})$.

Tabela 26 – SSE1654, valor da solução estocástica por hora.

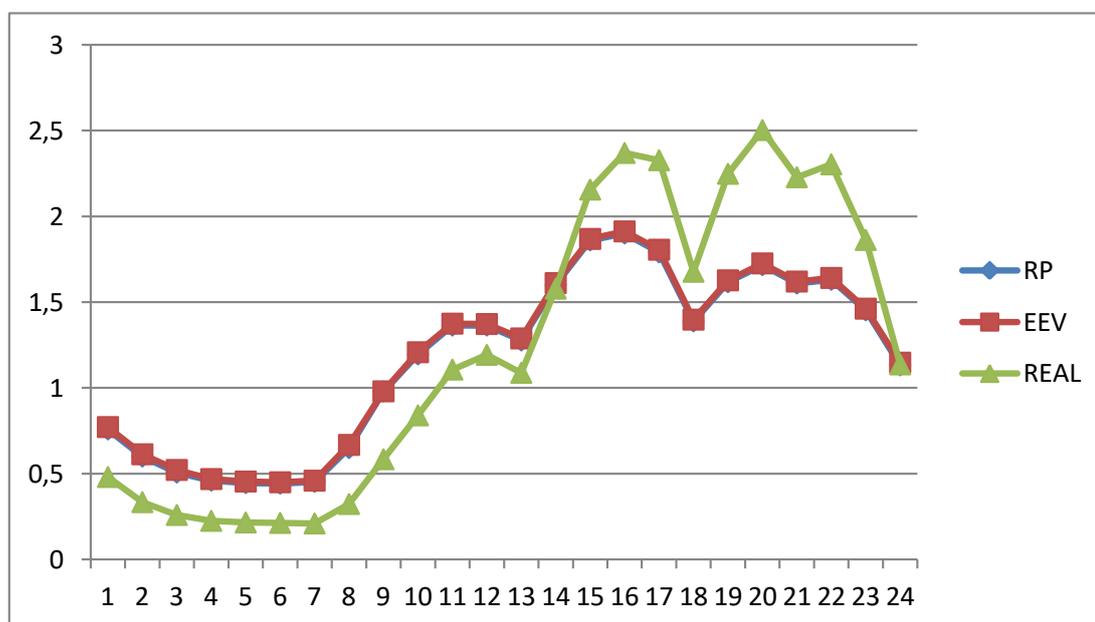
Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)
1	1,3847	9	0,0768	17	1,6019
2	1,3360	10	1,2791	18	1,0580
3	1,5541	11	1,1202	19	1,1013
4	0,9375	12	0,8762	20	1,0128
5	0,9067	13	1,2184	21	1,1644
6	0,8197	14	1,0665	22	1,0988
7	0,6816	15	0,8459	23	0,9938
8	1,8737	16	1,2176	24	1,5765

* VSS é da ordem de 10^6 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 26, destacamos que o valor da solução estocástica foi positivo em todos os horários, com $7,68 \cdot 10^4 \text{ um} \leq VSS \leq 1,8737 \cdot 10^6 \text{ um}$. Diante disso, o valor da solução estocástica indica que adotar a solução *RP*, no problema *SSE1654*, seria vantajoso.

Figura 8 – SSE1654, valor objetivo por hora.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^8 .

Fonte: do autor.

Na Figura 8, observamos a sobreposição das soluções *RP* e *EEV*, que é consequência do baixo valor proporcional do valor da solução estocástica.

3.3.4 SSE1732

Este problema representa o Sistema de Potência Elétrica de três regiões brasileira: Sul, Sudeste e Centro-Oeste. A capacidade de geração é de 32135 MW, com 115 geradores. Assim, definimos $g_1 = 88$ e $g_2 = 27$. Como o número de linhas de transmissão é 2160, resulta que a matriz de restrições terá dimensões $A(87 + 4350N, 174 + 4378N)$.

Tabela 27 – SSE1732, número de iterações.

Hora	EV	EEV		RP	REAL
	K_{EV}	$K_{min_{EEV}}$	$K_{max_{EEV}}$	K_{RP}	K_{REAL}
1	67	27	30	121	64
2	66	25	30	120	58
3	64	22	29	114	53
4	63	21	29	110	48
5	62	21	29	108	49
6	62	19	29	109	49
7	62	12	30	106	49
8	65	11	36	116	58
9	67	11	41	129	66
10	67	11	41	132	67
11	68	11	41	139	68
12	68	13	41	138	68
13	68	17	41	135	68
14	69	12	42	140	73
15	72	14	41	141	75
16	72	17	41	141	75
17	72	20	42	149	75
18	69	26	40	139	72
19	73	29	39	153	75
20	72	30	39	158	75
21	73	30	39	152	75
22	73	29	39	152	75
23	72	29	39	148	74
24	68	29	36	140	69

Fonte: do autor.

Na Tabela 27, identificamos que os números de iterações apresentaram uma relação de crescimento em função da dimensão de cada problema. Os números de iterações do problema *EEV* variaram no intervalo [11, 42]. Os problemas *EV* e *REAL* apresentaram números de iterações no intervalo [48, 75]. Por fim, os maiores números de iterações ocorreram no problema *RP*, e variaram no intervalo [106, 158].

Tabela 28 – SSE1732, tempo de CPU.

	EV	EEV	RP	REAL
Hora	$T_{EV}(s)$	$T_{EEV}(s)$	$T_{RP}(s)$	$T_{REAL}(s)$
1	28,1309	100,0066	472,4023	26,7602
2	26,8804	94,4789	461,3859	23,2059
3	26,3441	92,3360	446,0822	22,0567
4	25,9577	90,6392	433,5651	19,8742
5	25,9888	87,3283	420,1402	19,9942
6	25,0208	85,8525	426,7550	20,2938
7	24,8120	80,9646	415,8664	20,0029
8	26,2592	86,8176	443,8209	23,2071
9	26,9172	95,5853	495,3027	26,5075
10	26,8527	97,0748	502,2004	26,8093
11	27,3081	101,0236	539,9345	27,4825
12	27,2198	102,1251	529,3086	27,2059
13	27,2082	101,6522	519,4823	27,2092
14	27,5768	102,9466	538,4678	29,2100
15	29,0008	105,3975	538,8932	30,0110
16	28,8309	89,0314	526,4198	30,0093
17	22,5132	84,8739	439,6169	23,4384
18	21,5255	83,0235	408,7351	22,4019
19	22,7659	87,9305	449,4284	23,3863
20	22,4320	90,1220	463,8329	23,3670
21	22,7238	89,7210	446,9415	23,3498
22	22,7854	88,0047	446,7853	23,3502
23	22,4129	86,0370	434,6872	23,0491
24	21,2109	80,7877	411,4006	21,5055

Fonte: do autor.

Na [Tabela 28](#), observamos que a solução *RP* demorou mais tempo para convergir, em todos os horários. A semelhança nos tempos de resolução obtidos pelas soluções *EV* e *REAL* se justifica porque ambos possuem as mesmas dimensões. O problema que possui menor dimensão é o *EEV*, mas o T_{EEV} corresponde à soma dos tempos de resolução de dez problemas *EEV*.

Tabela 29 – SSE1732, valor da solução estocástica por hora.

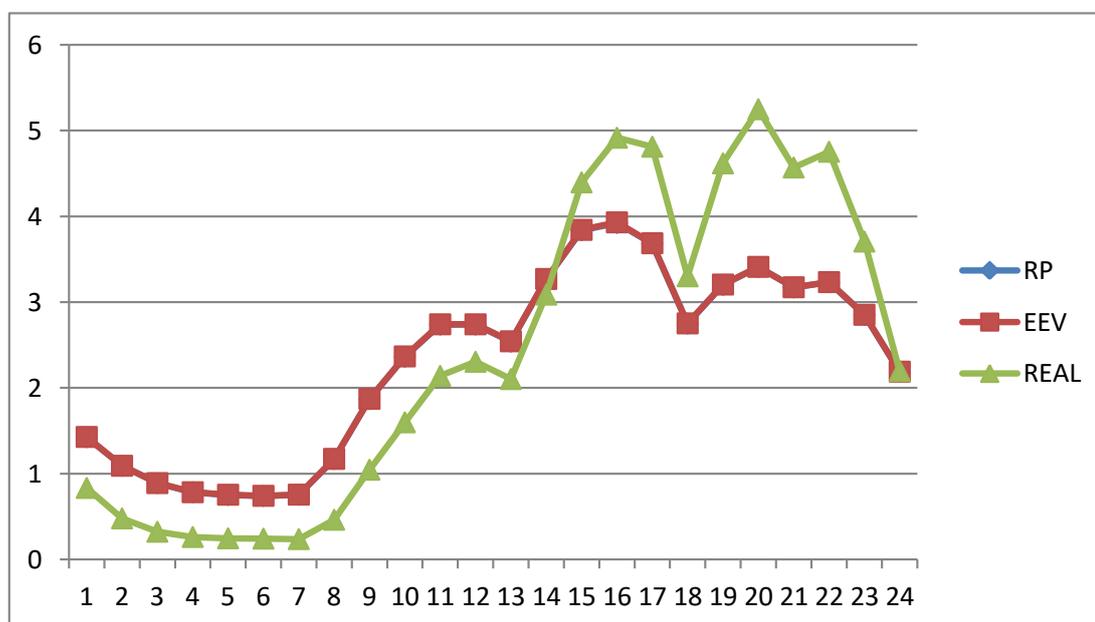
Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)
1	2,7537	9	2,7357	17	2,9682
2	1,3753	10	4,1611	18	2,6695
3	0,4805	11	3,8520	19	3,2658
4	0,5053	12	3,1742	20	1,5044
5	3,1819	13	4,2781	21	2,5714
6	2,2574	14	1,9905	22	2,1899
7	1,5111	15	3,4768	23	2,4466
8	1,5846	16	7,2626	24	2,2032

* VSS é da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 29, observamos que o valor da solução estocástica variou de $4,80 \cdot 10^4 \text{ um} \leq VSS \leq 7,26 \cdot 10^5 \text{ um}$. Claramente, a desigualdade estocástica foi atendida com sucesso. E além disso, o valor da solução estocástica indica que seria lucrativo adotar a solução *RP*.

Figura 9 – SSE1732, valor objetivo por hora.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^8 .

Fonte: do autor.

Na Figura 9, destacamos que as soluções *RP* e *EEV* estão sobrepostas devido ao baixo valor proporcional do valor da solução estocástica.

3.3.5 BRASIL

Este problema representa o Sistema de Potência Elétrica interligado do Brasil. A capacidade de geração é de 36827 MW, com 151 geradores. Assim, definimos $g_1 = 80$ e $g_2 = 71$. Como o número de linhas de transmissão é 2476, resulta que a matriz de restrições terá dimensões $A(80 + 5025N, 160 + 5096N)$.

Tabela 30 – BRASIL, número de iterações.

Hora	EV	EEV		RP	REAL
	K_{EV}	K_{minEEV}	K_{maxEEV}	K_{RP}	K_{REAL}
1	68	33	40	94	58
2	67	25	37	90	55
3	60	24	36	79	51
4	57	23	36	77	48
5	56	21	36	77	48
6	56	16	37	77	49
7	55	15	38	80	48
8	63	14	45	96	55
9	68	12	60	110	67
10	70	16	64	119	68
11	71	15	63	119	72
12	72	14	63	122	72
13	71	12	64	118	72
14	72	14	64	125	75
15	75	15	66	128	81
16	75	14	65	129	82
17	75	18	63	128	82
18	73	30	58	117	76
19	75	40	52	118	82
20	76	40	51	121	84
21	75	40	50	117	82
22	75	40	51	119	82
23	75	38	50	115	80
24	72	37	43	104	72

Fonte: do autor.

Na Tabela 30, observamos que os números de iterações do problema *EEV* variaram no intervalo [55, 76]. Os problemas *EV* e *REAL* apresentaram números de iterações no intervalo [48, 84]. Por fim, os maiores números de iterações ocorreram no problema *RP*, e variaram no intervalo [77, 129].

Tabela 31 – BRASIL, tempo de CPU.

	EV	EEV	RP	REAL
Hora	$T_{EV}(s)$	$T_{EEV}(s)$	$T_{RP}(s)$	$T_{REAL}(s)$
1	38,9772	168,2774	487,3945	32,8817
2	36,5683	153,9576	471,3092	30,1808
3	32,2449	138,6944	406,0672	27,4395
4	30,7879	133,5540	399,0489	25,6094
5	30,7310	131,7309	402,4493	26,4091
6	30,7981	130,0086	403,7893	27,0115
7	30,2520	126,6877	415,5311	26,4060
8	34,6957	143,3899	498,0608	30,1385
9	37,2492	160,9617	564,9569	36,3420
10	37,8549	174,9308	618,5468	36,7547
11	40,4078	179,7185	629,8731	40,1137
12	39,9635	178,5604	648,7142	40,1167
13	39,6132	141,8487	612,6602	40,0329
14	30,8644	138,2293	506,1626	32,1577
15	32,1482	144,7426	518,8494	34,7480
16	32,1784	147,1158	522,3123	35,1514
17	32,1560	147,8028	518,6214	35,1573
18	31,3301	144,1276	474,6652	32,6217
19	32,1698	149,4770	477,9329	35,2538
20	32,5685	150,7518	490,0547	36,0451
21	32,1801	147,5590	473,7285	35,2935
22	32,1717	148,7819	481,8574	35,1467
23	32,2456	145,3727	468,9876	34,2998
24	30,7497	136,1505	419,5056	30,7061

Fonte: do autor.

Na [Tabela 31](#), percebemos que os tempos de resolução obtidos pelas soluções *EV* e *REAL* foram os menores, essa característica era esperada devido à baixa dimensão desses problemas. O problema *RP*, que considera dez cenários, possui dimensão maior e, conseqüentemente, apresentou os maiores tempos de resolução.

Tabela 32 – BRASIL, valor da solução estocástica por hora.

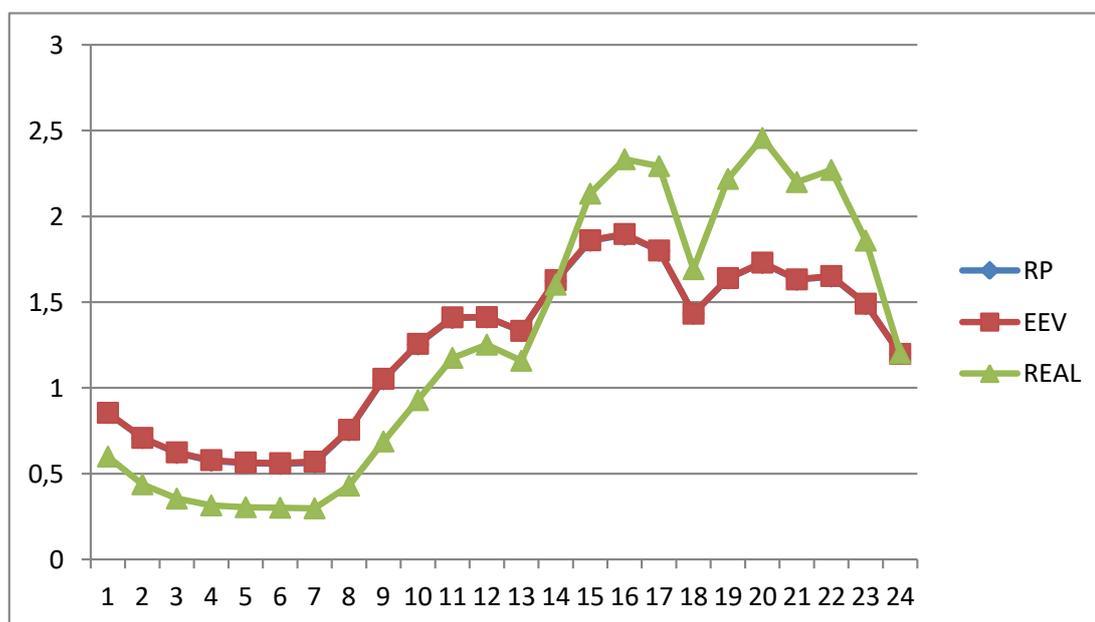
Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)	Hora	VSS(um)
1	1,3965	9	3,5769	17	2,1723
2	1,4343	10	4,1570	18	1,0404
3	4,3714	11	4,9581	19	3,0018
4	4,4870	12	1,7517	20	2,7040
5	4,0177	13	2,0849	21	2,6874
6	4,5977	14	5,8340	22	2,9875
7	6,2346	15	3,3057	23	2,5616
8	3,4391	16	5,5294	24	1,1937

* VSS é da ordem de 10^5 .

Fonte: do autor.

Na Tabela 32, observamos que o valor da solução estocástica foi positivo em todos os horários, e isso garante a validade da desigualdade estocástica, e que $1,04 \cdot 10^6 \text{ um} \leq VSS \leq 6,23 \cdot 10^6 \text{ um}$. Diante disso, o valor da solução estocástica indica que seria lucrativo adotar a solução *RP*.

Figura 10 – BRASIL, valor objetivo por hora.



* Os valores do eixo vertical são da ordem de 10^8 .

Fonte: do autor.

Na Figura 10, destacamos que a sobreposição das soluções *RP* e *EEV* é devido ao baixo valor proporcional do *VSS*.

Neste capítulo destacamos que o modelo proposto para o FPO com demanda incerta, $P = 1$, atingiu a solução ótima em todos os casos testados. E ainda, quando estabelecemos objetivos distintos de otimização o modelo apresentou resultados coerentes. Por exemplo: o valor ótimo de otimizar as perdas na transmissão de potência ativa adicionado ao valor ótimo de otimizar os custos de geração de potência ativa foi igual, aproximadamente, ao valor ótimo de otimizar a transmissão e geração de potência ativa simultaneamente. As dimensões do problema de FPO com demanda incerta apresenta uma relação de crescimento em função do número de cenários considerados. Essa é uma característica dos problemas estocásticos de dois estágios. Assim, motivados pela análise realizada no capítulo 2, definimos o número de cenário igual a dez, em todos os casos testados. A justificativa dessa escolha se deve ao fato que a solução RP apresentou resultados com três casas decimais de precisão com dez cenários, e que para conseguir uma precisão maior seria necessário aumentar o número de cenários, e isto acarretaria em aumentar, ainda mais, as dimensões do problema. Destacamos que o valor da solução estocástica foi positivo nos sistemas de potência testados, isso indica que seria lucrativo adotar a solução estocástica. O VSS apresentou o menor resultado no problema $IEEE30$, $VSS = 1,34 \text{ um}$. E o maior VSS ocorreu no problema $IEEE118$, $VSS = 2,17 \cdot 10^6 \text{ um}$. O valor proporcional da solução estocástica em cada sistema de potência, em relação à solução EEV , (VSS/EEV), foi: 0,0027% no $IEEE30$; 4,22% no $IEEE118$; 2,8054% no $SSE1654$; 0,1848% no $SSE1732$; 1,093% no $BRASIL$. Desse modo, acreditamos que a variação do VSS percebida nos testes realizados seja decorrente da estrutura de cada sistema de potência. Além disso, uma generalização do modelo de FPO com demanda incerta, para um planejamento maior do que uma hora, foi apresentado e testado no problema $IEEE30$, com $P = 24$. O modelo apresentou resultados consistentes sob diferentes objetivos de otimização e, também, resultou no valor da solução estocástica positivo. Infelizmente, não conseguimos obter o valor ótimo desse modelo generalizado nos demais sistemas de potência considerados. Portanto, resolver o problema de fluxo de potência ótimo com demanda incerta, com $P = 24$, será objeto de novos estudos.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas Futuras

Fluxo de Potência Ótimo é um termo que corresponde a uma classe de problemas do sistema energético que visam otimizar uma função objetivo atendendo a um conjunto de restrições. Esse problema apresenta parâmetros incertos, classificados como técnicos e econômicos. Assim, ao longo deste trabalho, desenvolvemos as ferramentas necessárias para investigar se seria importante considerar a demanda incerta no FPO. A partir disso, optamos por uma abordagem probabilística para conduzir nossa pesquisa. Por outro lado, o bom desempenho dos Métodos de Pontos Interiores nas aplicações de FPO nos motivou a buscar uma combinação entre MPI e Programação Estocástica para desenvolver nosso estudo. Assim, propomos um Modelo de Programação Estocástica Quadrática de Dois Estágios com Recurso Fixo para o FPO com demanda incerta. Na verdade, nossa proposta é uma aproximação discreta do problema, pois, a partir do histórico de consumo, aplicamos o teste de Shapiro-Wilk e definimos uma aproximação da função distribuição de cada horário. Em seguida, usamos a ideia da soma de Riemann para definir uma aproximação discreta para o valor esperado do problema de segundo estágio. Apesar dessas simplificações, os resultados numéricos demonstraram uma relação de limitação inferior, de limitação superior e de convergência, para o valor objetivo do problema de recurso. Esses resultados foram semelhantes aos limite inferior de Jensen e superior de Edmundson-Madansky, existentes na literatura. Além disso, a solução proposta convergiu com o menor número de cenários, sendo este um resultado importante, pois uma das dificuldades da solução estocástica é o número de cenários considerados, o que implica no aumento da dimensão do problema e, conseqüentemente, no aumento do tempo de resolução. Destacamos que a solução proposta atendeu, com sucesso, a desigualdade estocástica e, assim, podemos garantir que a solução estocástica conduz a um resultado melhor, ou igual, do que a solução que despreza a incerteza. Assim, sempre que o $VSS > 0$ indica que seria lucrativo adotar a solução estocástica.

Nas aplicações dos sistemas de potência, a capacidade de geração das usinas hidrelétricas foi definida como $2/3$ da capacidade total de geração, e o restante da capacidade

de geração para as termelétricas. O custo de geração das termelétricas foi definido como quinze vezes o custo das hidrelétricas, e foram considerados dez cenários. Diante disso, percebemos que, em geral, a solução estocástica demorou mais tempo para convergir. O modelo proposto apresentou resultados coerentes quando comparamos diferentes objetivos de otimização. Em relação ao período de planejamento de uma hora, $P = 1$, todos os problemas convergiram. Por outro lado, no planejamento de vinte e quatro horas, $P = 24$, apenas o problema *IEEE30* convergiu. Destacamos que os maiores valores da solução estocástica obtidos foram: no problema *IEEE30* de $1,34 \text{ um}$, no *IEEE118* de $2,17 \cdot 10^6 \text{ um}$, no *SSE1654* de $1,87 \cdot 10^6 \text{ um}$, no *SSE1732* de $7,26 \cdot 10^5 \text{ um}$ e no *BRASIL* de $6,23 \cdot 10^6 \text{ um}$. Com isso, percebemos que o valor da solução estocástica depende das características de cada sistema de potência. Portanto, o *VSS* indica que seria vantajoso considerar a solução estocástica, mesmo quando este apresenta baixo valor proporcional.

Como continuidade deste estudo pretendemos:

- Melhorar a implementação dos métodos de pontos interiores no MATLAB, ou na linguagem de programação C++, a fim de reduzir o tempo de resolução;
- Investigar o modelo proposto de FPO com demanda incerta, com $P > 1$, com o objetivo de conseguir a convergência de problemas maiores como: *IEEE118*, *SSE1654*, *SSE1732* e *BRASIL*;
- Investigar outros métodos de otimização para resolver o FPO com demanda incerta.

Referências

- ANDERSEN, E. D.; GONDZIO, J.; MÉSZÁROS, C.; XU, X. *Implementation of Interior Point Methods for Large Scale Linear Programming*, in: T. Terlaky, ed., *Interior Point Methods in Mathematical Programming*. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1996. 189–252 p.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear Programming and Network Flows, 4th Edition*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, 3th Edition*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- BIRGE, J. R. The value of the stochastic solution in stochastic linear programs with fixed recourse. *Mathematical Programming*, v. 24, p. 314–325, 1982.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming, 2th Edition*. New York, NY, USA: Springer, 2011.
- BIXBY, R. E.; SALTZMAN, M. J. Recovering an optimal LP basis from an interior point solution. *Operations Research Letters*, v. 15, n. 4, p. 169–178, 1993.
- CARVALHO, M. F.; SOARES, S.; OHISHI, T. Optimal active power dispatch by network flow approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 3, p. 1640–1647, 1988.
- COELHO, M. V.; SANTOS, A.; OLIVEIRA, A. R. L. Relaxation by modified logarithmic barrier applied to the problem of optimal power flow DC with overload. *IEEE Latin America Transactions*, v. 13, p. 673–678, 2015.
- DANTZIG, G. *Linear Programming and Extensions*. [S.l.]: Princeton University Press, 1963.
- DANTZIG, G. B. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, v. 50, n. 12 Supplement, p. 1764–1769, December 2004.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations Third Edition*. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- GONDZIO, J. Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming. *Computational Optimization and Applications*, v. 6, p. 137–156, 1996.
- _____. Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, v. 218, p. 587–601, 2012.

- HUANG, C. C.; ZIEMBA, W. T.; BEN-TAL, A. Bounds on the expectation of a convex function of a random variable: With applications to stochastic programming. *Operations Research*, v. 25, n. 02, p. 315–325, 1977.
- KARMAKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.
- KOJIMA, M.; MIZUNO, S.; YOSHISE, A. A primal-dual interior-point method for linear programming. progress in mathematical programming, interior-point and related methods, Springer-Verlag, new york. p. 29–47, 1989.
- LAI, H.-C.; LIN, L.-J. Moreau-Rockafellar type theorem for convex set functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 132, p. 558–571, 1988.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise; v.1. 12.ed.* Rio de Janeiro, BR: IMPA, 2009.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming, 3rd Edition.* Stanford, CA, USA: Springer, 2008.
- LUSTIG, I. J.; MARSTEN, R. E.; SHANNO, D. F. On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 2, p. 435–449, 1992.
- MEGIDDO, N. On finding primal- and dual-optimal bases. *ORSA Journal on Computing*, v. 3, p. 63–65, 1991.
- MEHROTRA, S. Implementations of affine scaling methods: Approximate solutions of systems of linear equations using preconditioned conjugate gradient methods. *ORSA Journal on Computing*, v. 4, p. 103–118, 1992.
- MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part I: Nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 96–104, February 1999.
- MONTEIRO, R. D. C.; ADLER, I. Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming. *Mathematical Programming*, v. 44, p. 27–41, 1989.
- OLIVEIRA, A. R. L. *Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear - Estudo e Implementação.* Campinas SP: Dissertação de Mestrado FEEC UNICAMP, 1989.
- OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC. *SBA: Controle & Automação*, v. 14, n. 3, p. 278–285, 2003.
- OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S.; NEPOMUCENO, L. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 4, p. 1235–1240, November 2003.
- OLIVEIRA, A. R. L.; SORENSEN, D. C. A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 394, p. 1–24, 2005.
- OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO. *Curva de carga Horária.* [S.l.], 2020. Disponível em: <http://www.ons.org.br/Paginas/resultados-da-operacao/historico-da-operacao/curva_carga_horaria.aspx>.

QUINTANA, V. H.; TORRES, G. L.; MEDINA-PALOMO, J. Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 1, p. 170–176, 2000.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RAZALI, N. M.; WAH, Y. B. Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, v. 02, n. 01, p. 21–33, 2011.

RUPPERT, D.; MATTESON, D. S. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering with R examples, 2th edition*. New York, NY, USA: Springer, 2015.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, v. 52, p. 591–611, 1965.

SOROUDI, A.; AMRAEE, T. Decision making under uncertainty in energy systems: State of the art. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 28, p. 376–384, 2013.

TODD, M. J. The many facets of linear programming. *Mathematical Programming*, v. 91, p. 417–436, 2002.

TREFETHEN, L.; BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

VANDERBEI, R. J. *Linear Programming – Foundations and Extensions, 2th Edition*. Boston, USA: Kluwer Academics Publishers, 2001.

WETS, R. J.-B. Challenges in stochastic programming. *Mathematical Programming*, v. 75, p. 115–135, 1996.

WOLFE, P. The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, v. 27, n. 3, p. 382–398, 1959.

WRIGHT, S. J. *Primal–Dual Interior–Point Methods*. Philadelphia, PA, USA: SIAM Publications, SIAM, 1997.

YE, Y.; GULER, O.; TAPIA, R. A.; ZHANG, Y. A quadratically convergent $o(\sqrt{nL})$ -iteration algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, v. 59, p. 151–162, 1993.

APÊNDICE A

Tabela 33 – Consumo Elétrico em MWh/h

Hora	25/Set	26/Set	27/Set	28/Set	29/Set	30/Set	01/Out
1	73087,6790	63828,1230	60790,2790	62503,4580	66462,1570	67365,7240	69947,6300
2	72904,2440	60553,0630	58048,6430	59793,8020	63174,6680	64189,5460	66449,7100
3	70976,5680	58187,0380	55963,9490	58076,4680	61169,6200	61887,4750	64232,8300
4	67537,8360	56841,3570	54407,7910	57120,5890	59977,4270	60610,0510	63017,8000
5	63828,1230	56282,9780	53619,5740	56769,3510	59661,8280	60324,1160	62332,4600
6	60553,0630	55554,2580	52262,3610	57312,2010	59841,5900	60373,9800	62162,4000
7	58187,0380	54405,8910	49665,4670	58302,0630	60059,7120	60597,1900	61910,0900
8	56841,3570	56781,5860	49976,6480	63075,8760	64825,0340	65093,6620	66414,6600
9	56282,9780	59616,2530	51653,5960	68519,1950	69417,4380	70359,0090	71418,9900
10	55554,2580	61592,5450	53297,4190	71492,5710	71859,7940	73175,2880	74214,1100
11	54405,8910	62939,7210	54637,5030	73477,0970	73356,9280	75369,5150	76197,9900
12	56781,5860	63586,6260	55853,6220	73735,6400	73511,5880	75847,0790	76352,6000
13	59616,2530	63144,6610	55917,9090	72834,4930	72773,8510	75124,9570	75823,3600
14	61592,5450	63647,0600	56211,1040	75775,8400	75738,7180	78456,5250	79554,9600
15	62939,7210	64183,5800	57233,7760	77507,8140	78036,6920	81521,1670	82344,9500
16	63586,6260	64625,7310	58270,3190	77886,9230	78768,0000	82324,1860	83008,5200
17	63144,6610	65264,5380	59911,7950	77453,6140	78529,3070	81776,6100	82528,1800
18	63647,0600	66850,4930	62793,8310	73787,5910	75560,5870	77857,1350	78442,5300
19	64183,5800	73649,0000	69808,7950	75757,7210	77029,7420	78622,7500	79201,6400
20	64625,7310	74527,7580	71342,5220	76584,0900	77641,1340	79381,6300	80080,1600
21	65264,5380	71727,3580	70448,4970	75633,1030	76464,4800	78842,7820	79155,3200
22	66850,4930	69524,6970	69553,4220	76435,2160	77349,2060	79531,8970	80389,3000
23	73649,0000	67016,6410	68356,7160	74526,4900	75492,3970	78056,5110	79424,3200
24	74527,7580	64118,1800	65671,8100	70682,3090	71583,6380	74322,3630	76456,5500

Fonte: (OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO, 2020)

ANEXO A

Tabela 34 – Coeficientes a_{in} de Shapiro - Wilk

i \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	—
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	—
2	—	0,0000	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	—
3	—	—	—	0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	—
4	—	—	—	—	—	0,0000	0,0561	0,0947	0,1224	—
5	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0399	—
i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7	—	—	0,0000	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8	—	—	—	—	0,0000	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0163	0,0303	0,0422
10	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0140
i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	—	—	0,0000	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	—	—	—	—	0,0000	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0084	0,0159	0,0227
15	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0076

Fonte: (SHAPIRO; WILK, 1965)

Tabela 35 – Coeficientes a_{in} de Shapiro - Wilk

i \ n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	0,2921	0,2898	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737
3	0,2475	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,2380	0,2368
4	0,2145	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110	0,2104	0,2098
5	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,1880	0,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,1520	0,1526
8	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356	0,1366	0,1376
9	0,1066	0,1093	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211	0,1225	0,1237
10	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075	0,1092	0,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824	0,0848	0,0870
13	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706	0,0733	0,0759
14	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592	0,0622	0,0651
15	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481	0,0515	0,0546
16	0,0000	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17	—	—	0,0000	0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264	0,0305	0,0343
18	—	—	—	—	0,0000	0,0057	0,0110	0,0158	0,0203	0,0244
19	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0053	0,0101	0,0146
20	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0049
i \ n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3751
2	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1865	0,1862	0,1859	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	0,0000	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22	—	—	0,0000	0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23	—	—	—	—	0,0000	0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0037	0,0071	0,0104
25	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0035

Fonte: (SHAPIRO; WILK, 1965)

n	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947	0,975	0,980	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	0,975	0,980	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	0,980	0,983	0,987	0,989
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	0,980	0,984	0,987	0,989
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	0,981	0,984	0,987	0,989
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963	0,981	0,984	0,987	0,989
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	0,981	0,985	0,988	0,989
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	0,982	0,985	0,988	0,989
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965	0,982	0,985	0,988	0,990
28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967	0,983	0,985	0,988	0,990
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967	0,983	0,986	0,988	0,990
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968	0,983	0,986	0,988	0,990
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968	0,983	0,986	0,989	0,990
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969	0,983	0,986	0,989	0,990
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969	0,984	0,986	0,989	0,990
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970	0,984	0,986	0,989	0,990
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970	0,984	0,987	0,989	0,990
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971	0,984	0,987	0,989	0,990
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971	0,984	0,987	0,989	0,991
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991

Fonte: (SHAPIRO; WILK, 1965)

Tabela 37 – Percentual de pontos do teste Shapiro - Wilk

n	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973	0,985	0,988	0,990	0,991
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991

Fonte: (SHAPIRO; WILK, 1965)