UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DAVIDSON FREITAS NOGUEIRA

Operadores multilineares somantes por blocos e definidos por transformações de sequências vetoriais: os casos isotrópico e anisotrópico

Campinas

2021

Davidson Freitas Nogueira

Operadores multilineares somantes por blocos e definidos por transformações de sequências vetoriais: os casos isotrópico e anisotrópico

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Coorientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Davidson Freitas Nogueira e orientada pelo Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

N689o

Nogueira, Davidson Freitas, 1990-
Operadores multilineares somantes por blocos e definidos por transformações de sequências vetoriais : os casos isotrópico e anisotrópico / Davidson Freitas Nogueira. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Coorientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços de Banach. 2. Espaços clássicos de Banach. 3. Operadores absolutamente somantes. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Summing multilinear operators by block and defined transformation of vector-valued sequences : isotropic and anisotropic cases
Palavras-chave em inglês:
Banach spaces
Classic Banach spaces
Absolutely summing operators
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho [Orientador]
Sergio Antonio Tozoni
Daniela Mariz Silva Vieira
Nacib André Gurgel e Albuquerque
Jamilson Ramos Campos
Data de defesa: 16-12-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-3112-0294
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5207130400564201

Tese de Doutorado defendida em 16 de dezembro de 2021 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Prof(a). Dr(a). NACIB ANDRÉ GURGEL E ALBUQUERQUE

Prof(a). Dr(a). JAMILSON RAMOS CAMPOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A minha mãe, Maria do Rosário de Freitas e
a minha querida esposa, Izabela Paiva Martins.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a minha mãe e minha esposa pelo apoio em todos os momentos, fornecendo forças para continuar.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, por ser minha referência como pessoa, professor e orientador. Por me guiar nesses últimos 7 anos. Por sua paciência, sem a qual este trabalho não seria possível.

A minha coorientadora Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara, por nos acolher quando mais precisamos.

A banca examinadora por aceitar o nosso convite.

Aos colegas do Doutorado: Altair Santos de Oliveira Tosti, Monisse Postigo Alves, Giane Casari Rampasso, Norman Francisco Noguera Salgado, Miguel Alfredo Del Rio Palma, Juliana Honda Lopes, Felipe Augusto Guedes da Silva, Matheus Silva Costa, Charles Ferreira Dos Santos, Leonardo Kenji Kashimoto, Miqueias de Melo Lobo, Rodrigo Labiak, Danilo de Rezende Santiago e Heraclio Ledgar López Lázaro por compartilhar momentos de descontração, sem os quais seria impossível a sobrevivência no IMECC.

Aos amigos que levarei para a vida: José Lucas e Guilherme Dias.

Aos meus amigos e colegas de trabalho: Aderval Santos, Marcelo Bezerra, Dassael Santos, Júlio César Ferreira, Cláudio Umberto e, em especial, o casal Jucelino Cardoso e Cristiane Santos Cardoso, por compartilhar muitos momentos de descontração e boa conversa.

Aos meus amigos de Campos Belos: Karine Dias, Laise Cabral Nascimento, Ana Maria Pereira, Thiago Coelho, Flavio Silva de Oliveira e Flor, Diego Carlos Pereira, Maria Eugenia de Oliveira Ferreira, Chirley Mendes, Thalita Citra e João Rufino.

A todos os meus professores, que foram indispensáveis para essa jornada, dedico os meus mais sinceros agradecimentos.

Ao Instituto Federal Goiano pelo afastamento que possibilitou a conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Muito do que nos acontece - êxito na carreira, nos investimentos e nas decisões pessoais, grandes ou pequenas - resulta tanto de fatores aleatórios quanto de habilidade, preparação e esforço. Portanto, a realidade que percebemos não é um reflexo direto das pessoas ou circunstâncias que a compõem, e sim uma imagem borrada pelos efeitos randomizantes de forças externas imprevisíveis ou variáveis. Isso não quer dizer que a habilidade não importe - ela é um dos fatores ampliadores das chances de êxito -, mas a conexão entre ações e resultados não é tão direta quanto gostaríamos de acreditar"

(O andar do Bêbado, Leonard Mlodinow)

RESUMO

Apresentamos neste trabalho duas propostas de unificação das diversas classes de operadores multilineares entre espaços de Banach do tipo somante que são definidos, ou caracterizados, pela transformação de sequências vetoriais e que têm sido estudadas separadamente nos últimos anos. Essas unificações abrangem classes de sequências variadas, somabilidade por blocos e os casos isotrópico e anisotrópico. Provamos que os casos gerais dessas unificações são ideais de Banach de operadores multilineares e mostramos, para cada uma das duas construções, como recuperar as classes já estudadas como casos particulares. Apresentamos também aplicações das construções gerais para o estudo de teoremas de coincidência e para a teoria de coerência de ideais.

Palavras-chave: Espaços de Banach; espaços de sequências; ideais de operadores lineares e multilineares; classes de sequências; coerência e compatibilidade; operadores absolutamente somantes; operadores múltiplo somantes.

ABSTRACT

In this work we present two approaches to unify the several classes of summing-type multilinear operators between Banach spaces which are defined, or characterized, by the transformation of vector-valued sequences that have been studied, each on its own, in recent years. These unifications encompass plenty of different sequence classes, summability by blocks and the isotropic and anistropic cases. We prove that the general cases of these unifications are Banach ideals of multilinear operators and we show, for each of these two constructions, how to recover the already studied classes as particular instances. We also provide applications of these general constructions to the study of coincidence theorems and to the theory of coherent ideals.

Keywords: Banach spaces; sequence spaces; ideals of linear and multilinear operators; sequence classes; coherence and compatibility; absolutely summing operators; multiple summing operators.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{K}$	O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.
E, F, H, G	Espaços de Banach.
$\|x\|_E$	Norma do vetor x no espaço normado E.
B_E	Bola unitária fechada de E.
$E = F$	Espaços normados isomorfos topologicamente.
$E \overset{1}{\hookrightarrow} F$	E é subespaço vetorial de F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$.
$E \overset{1}{=} F$	Se $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ e $F \overset{1}{\hookrightarrow} E$.
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$	Espaço vetorial de todos os operadores d-lineares contínuos entre $E_1 \times \cdots \times E_d$ e F.
$\mathcal{L}(^d E; F)$	O espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ quando $E_1 = \cdots = E_d := E$.
$\mathcal{L}(E; F)$	Espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de E em F.
E^*	Dual topológico de E.
BAN	Classe formada por todos os espaços de Banach, reais ou complexos.
$E^{\mathbb{N}}$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E.
e_j	Sequência canônica de escalares cuja j-ésima posição é igual a 1 e as demais são iguais a 0.
$x \cdot e_j$	Sequência cujo j-ésimo termo é igual ao elemento x e os demais são iguais a 0.
$x * e_j$	d-upla cujo j-ésimo termo é igual ao elemento x e os demais são iguais a 0.

$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b$	Operador d-linear entre espaços os $E_1 \times \cdots \times E_d$ e F definido por $$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b(x^1, \ldots, x^d) = \varphi_1(x^1) \cdots \varphi_d(x^d)b,$$ onde $\varphi_1 \in E_1^*, \ldots, \varphi_d \in E_d^*$ são funcionais lineares e $b \in F$.
$\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_d; F)$	Classe formada por todos os operadores d-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F de tipo finito.
$c_{00}(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são eventualmente nulas.
$c_0(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que convergem a 0.
$\ell_p(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são p-somáveis.
$\ell_p^w(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são fracamente p-somáveis.
$\ell_p^u(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são incondicionalmente p-somáveis.
$\mathrm{Rad}(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são quase incondicionalmente somáveis.
$\ell_\infty(E)$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são limitadas.
$\ell_p\langle E\rangle$	Espaço vetorial formado por todas as sequências em E que são Cohen fortemente p-somáveis.
$D(\mathbb{N}^d)$	Diagonal de $\mathbb{N}^d$ definida por $\{(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : j_1 = \cdots = j_d\}$.
X, Y, Z	Classes de sequências vetoriais.
I^d	Operador d-linear contínuo de $\mathbb{K}^d$ em $\mathbb{K}$ definido por $I^d(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \lambda_1 \cdots \lambda_d$.
$(x_j)_{j\in N}$	Sequência cuja j-ésima coordenada é igual x_j, se $j \in N$ e, caso contrário, será igual a 0, onde $N \subseteq \mathbb{N}$.
$B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$	$\{j_d \in \mathbb{N} : (j_1, \ldots, j_d) \in B\}$, onde $B \subseteq \mathbb{N}^d$.
$B_{\mathcal{I}}$	$\left\{\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} j_{n_s}^r * e_r \in \mathbb{N}^d : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\right\}$, onde $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_j\}$ é uma partição ordenada de $\{1, \ldots, d\}$.
$\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$	Classe de todos operadores d-lineares e contínuos que são $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somantes.
$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}$	Classe de todos operadores d-lineares e contínuos que são $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes.

$\prod_{q;p_1,\ldots,p_d}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são absolutamente $(q;p_1,\ldots,p_d)$-somantes.
$\prod_{q_1,\ldots,q_d;p_1,\ldots,p_d}^{m,d}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são múltiplo $(q_1,\ldots,q_d;p_1,\ldots,p_d)$-somantes.
$\prod_{\mathbf{q};\mathbf{p}}^{k,m,d}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\mathbf{q};\mathbf{p})$-somantes.
$\mathcal{C}_q^d$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos de cotipo q.
$\mathcal{L}_{ws,(q;p_1,\ldots,p_d)}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são $(q;p_1,\ldots,p_d)$-fracamente somantes.
$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}^{B_{\mathcal{I}}}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são $(B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k)$-somantes.
$\gamma_s(\cdot;\mathbb{N})$	Classe de d-sequências.
$\mathcal{L}_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}^{m}$	Classe de todos os operadores d-lineares e contínuos que são múltiplo $\gamma_{s,X_1,\ldots,X_d}$-somantes.
$\prod_{q;p}^{\Lambda}$	Classe de todos os operadores Λ-$(q;p)$-somantes.

Sumário

Introdução

A teoria de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach foi proposta por A. Pietsch em [71] para o caso linear e, pouco tempo depois, foi generalizada por ele mesmo para o contexto multilinear em [72]. Essa área de estudo tem se mostrado bastante frutífera e ganhado muitas contribuições nas últimas quatro décadas (veja, por exemplo, [1, 3, 4, 10, 14, 16, 23, 24, 25, 36, 47, 61, 76] e também os trabalhos referidos nesses artigos). Por exemplo, uma das linhas de desenvolvimento da teoria é criar classes de operadores multilineares cujos casos lineares são ideais de operadores. A alta relevância alcançada pelo ideal dos operadores absolutamente p-somantes (veja [46]) fez com que as generalizações multilineares desse ideal se tornassem alvo dos pesquisadores desde o início. Dessas pesquisas resultou que o ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes possui várias generalizações para o caso multilinear, entre elas estão os operadores multilineares absolutamente somantes [72] e os operadores multilineares múltiplo somantes [54]. Isso evidencia que é possível reinterpretar um ideal de operadores lineares no contexto multilinear em mais de uma forma. Essa multiplicidade de generalizações multilineares de um ideal de operadores linear tem sido muito explorada nas últimas décadas.

Nesta tese estamos interessados nas muitas classes presentes na literatura de operadores multilineares que generalizam o ideal dos operadores absolutamente p-somantes. A primeira dessas generalizações já apareceu no artigo inaugural de Pietsch [72], em que um operador d-linear contínuo $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é dito absolutamente $(q;p_1,\cdots,p_d)$-somante, com $q,p_1,\ldots,p_d \in [1,\infty)$ e $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d}$, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|A(x_j^1,\ldots,x_j^d)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot \prod_{r=1}^{d} \sup_{\varphi_r \in B_{E_r^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_r(x_j^r)|^{p_r}\right)^{\frac{1}{p_r}} \tag{1}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todas sequências finitas $x_j^r \in E_r$, $j = 1,\ldots,m$, $r = 1,\ldots,d$. Aqui estamos denotando por E^* o dual topológico do espaço de Banach E e B_E denota sua bola unitária fechada.

A classe mais estudada e que conta com mais aplicações talvez seja aquela proposta por Matos em 2003 (ver [54]), introduzida também de maneira independente em 2004 por Bombal, Villanueva e Pérez-García em [19]. Diz-se que um operador d-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ é *fully absolutely* $(q;p_1,\ldots,p_d)$-*summing*, hoje conhecido como operador múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somante, com $q \geq p_r$, $r = 1, \ldots, d$, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_d=1}^{m} \|A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot \prod_{r=1}^{d} \sup_{\varphi_r \in B_{E_r^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_r(x_j^r)|^{p_r} \right)^{\frac{1}{p_r}}, \tag{2}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todas sequências finitas $x_j^r \in E_r$, $j = 1, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, d$.

Além do desenvolvimento e aplicações das duas classes descritas acima, na literatura podemos encontrar muitas outras classes relacionadas, a maioria delas sendo diferentes generalizações dos operadores absolutamente somantes e outras sendo generalizações de outros ideais de operadores relacionados.

Nos dias atuais a teoria está se desenvolvendo em várias direções, dentre as quais destacamos as seguintes:

(i) Foi rapidamente observado que a abordagem (1) proposta por Pietsch é equivalente ao operador A transformar sequências fracamente somáveis em sequências absolutamente somáveis, no sentido de que para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, tem-se $\big(A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\big)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$, onde $\ell_{p_r}^w(E_r)$ e $\ell_q(F)$ representam, respectivamente, o espaço das sequências fracamente somantes p_r-somáveis em E_r e o espaço das sequências absolutamente q-somáveis em F. Substituindo esses espaços de sequências por outros, novas classes multilineares surgiram em vários trabalhos, muitas delas como generalizações multilineares de outros ideais de operadores lineares. Por exemplo: operadores multilineares p-dominados [34, 74]; operadores multilineares quase somantes [20, 62, 67]; operadores multilineares sequencialmente fracamente contínuos [63]; operadores multilineares Cohen fortemente somantes [2, 36, 56]. Todos esses trabalhos levaram Botelho e Campos a buscarem em [24] uma unificação de todas essas classes de operadores multilineares inspiradas em (1) que são definidas, ou caracterizadas, pela transformação de sequências vetoriais.

(ii) A proposta de Matos descrita na expressão (2) aproveita do fato de ser possível considerar os índices $j_1, \ldots, j_d$ de forma independente, em contraponto com a proposta de Pietsch (1) que considera $j_1 = \cdots = j_d := j$, ou seja, isso significa que, no lugar da soma $\sum_{j=1}^{k} \|A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\|^q$, considera-se a soma $\sum_{j_1,\ldots,j_d=1}^{k} \|A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\|^q$. Essa direção se mostrou bastante proveitosa e uma grande quantidade de trabalhos teóricos e também aplicações apareceram ao longo dos anos. Alguns exemplos ilustrativos são os trabalhos [16, 45, 57, 70].

(iii) No caso da abordagem (1), os índices nos quais a soma incide são os elementos da diagonal $D(\mathbb{N}^d) := \{(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : j_1 = \cdots = j_d\}$ de $\mathbb{N}^d$, enquanto que na abordagem (2) a soma incide sobre todo o $\mathbb{N}^d$. É natural então considerar outros conjuntos intermediários a esses dois, ou mesmo subconjuntos arbitrários de $\mathbb{N}^d$, chamados de blocos de $\mathbb{N}^d$. Operadores multilineares absolutamente somantes por blocos foram considerados, por exemplo, em [3, 6, 13, 17, 32, 81].

(iv) Por fim, tem-se estudado somas iteradas, ou mistas, no sentido de que a soma $\sum\limits_{j_1,\ldots,j_d=1}^{k} \|A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\|^q$ com um único parâmetro q é substituída pela soma iterada

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\left(\sum_{j_d=1}^{\infty}\|A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\|^{d_d}\right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}}\cdots\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

com parâmetros $q_1,\ldots,q_d$ eventualmente distintos. Essa situação é chamada de caso anisotrópico, enquanto que as demais são chamadas de casos isotrópicos. É claro que o caso $q_1=\cdots=q_d$ recupera o caso isotrópico. Essa abordagem anisotrópica tem sido muito explorada, especialmente no estudo de desigualdades clássicas, tipo Bohnenblust-Hille e Hardy-Littlewood, por exemplo. As referências [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 61] atestam a atividade no tema.

Deve ser mencionada também a direção de pesquisa na qual os operadores absolutamente somantes são generalizados para o contexto não linear, tendo os teoremas de fatoração e de dominação como fio condutor. Não entraremos em detalhes a esse respeito, pois não trataremos dessa direção nesta tese. Remetemos o leitor interessado para as referências [28, 33, 53, 65].

Como mostram as referências indicadas, cada uma das quatro direções detalhadas acima gera muitas novas classes de operadores, e as diversas combinações das direções geram muito mais ainda. O resultado é que muitas classes de operadores multilineares do tipo somantes têm sido exploradas, cada uma separadamente, nos últimos anos. O objetivo central deste trabalho é oferecer um tratamento unificado que abranja cada uma dessas classes estudadas na literatura como caso particular. É claro que esse tratamento unificado também enseja o estudo de novas classes.

Esse objetivo central da tese foi alcançado em duas etapas. Na primeira etapa, desenvolvida no Capítulo 2, construiremos um aparato abstrato, razoavelmente simples do ponto de vista técnico, que unifica muitas e importantes classes estudadas na literatura, incluindo os casos isotrópico e anisotrópico, várias classes de sequências vetoriais e blocos arbitrários do $\mathbb{N}^d$. A simplicidade paga um preço, e neste caso é não abranger algumas das classes já estudadas. Por causa disso, construímos um novo aparato, mais complicado tecnicamente, no Capítulo 3 que, esse sim, abrange todas as classes já consideradas. Nos dois capítulos provaremos que as classes geradas são ideais de Banach de operadores multilineares, mostraremos explicitamente quais classes são recuperadas como casos particulares e também mostraremos que os ideais gerados gozam de boas propriedades, principalmente relativas a coerência e teoremas de coincidência. Um capítulo final foi incluído para que o leitor seja situado em relação à abrangência das duas abordagens e às vantagens e desvantagens de cada uma delas.

No primeiro capítulo iremos apresentar, brevemente, conceitos e resultados que serão essenciais em todo o texto. Precisaremos de conhecimentos prévios e manipulação de operadores multilineares entre espaços de Banach, entender o conceito de classes de sequências introduzido por Botelho e Campos em [24] e, por fim, os introduzir o conceito alvo do nosso trabalho, que são os ideais Banach de operadores multilineares.

Os resultados do Capítulo 2 foram publicados na referência [26] e os resultados do Capítulo 3 estão submetidos para publicação (veja arxiv.org/abs/2110.11428v2 [math.FA], 2021).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. Algumas definições, notações e proposições que serão pouco utilizadas serão apresentadas no momento oportuno.

Usaremos a terminologia padrão e as notações usuais da Análise Funcional Linear e da Teoria dos Espaços de Banach (veja, por exemplo, [35, 55]). Para a teoria de operadores multilineares nos referimos a [48, 58] e para ideais de operadores lineares a [44, 71].

1.1 Operadores multilineares

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos da teoria de operadores multilineares e algumas de suas propriedades. Para maiores informações nos referimos aos livros de Dineen [48] e Mujica [58].

Nesta seção, a menos de menção contrária, iremos considerar $E, E_1, \ldots, E_d$ e F como sendo espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se um espaço vetorial E for também um espaço normado, iremos representar a norma em E pela notação $\|\cdot\|_E$. Um elemento do produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_d$ será representado, ao longo de todo o texto, por $(x^1, \ldots, x^d)$. A bola unitária fechada do espaço normado E será representada por B_E, isto é, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Definição 1.1.1. Dizemos que um operador $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ é *d-linear* (*multilinear*) se é linear em cada coordenada. Mais precisamente, se para cada $m \in \{1, \ldots, d\}$ e vetores fixados $x_r \in E_r$, $r \neq m$, o operador

$$A_{(x^1,\ldots,x^{m-1},x^{m+1},\ldots,x^d)}\colon E_m \longrightarrow F$$

dado por

$$A_{(x^1,\ldots,x^{m-1},x^{m+1},\ldots,x^d)}(y) = A(x^1, \ldots, x^{m-1}, y, x^{m+1}, \ldots, x^d)$$

é linear.

Os resultados apresentados a seguir são bem conhecidos na teoria e serão constantemente utilizados neste trabalho. Eles serão utilizados no decorrer do texto sem menção explícita.

Proposição 1.1.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços normados e $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ um operador d-linear. São equivalentes:*

1. *A é contínuo.*
2. *A é contínuo na origem.*
3. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*
$$\|A(x^1, \ldots, x^d)\|_F \leq C \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r}$$
para todos $x^1 \in E_1, \ldots, x^d \in E_d$.
4. $\|A\| := \sup\{\|A(x^1, \ldots, x^d)\|_F \colon x_r \in B_{E_r}, r = 1, \ldots, d\} < \infty$.

Demonstração. Veja [79, Proposição 2.7]. □

Proposição 1.1.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços normados e $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ um operador d-linear contínuo. Então*

1. $\|A(x^1, \ldots, x^d)\|_F \leq \|A\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r}$ *para todo* $(x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$.
2. $\|A\| = \inf\{C > 0 : \|A(x^1, \ldots, x^d)\|_F \leq C \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r}, \forall (x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d\}$.

Demonstração. Veja [79, Proposição 2.8]. □

Um teorema muito útil na verificação da continuidade de um operador multilinear é o Teorema do Gráfico Fechado. Dados espaços normados $E_1, \ldots, E_d$ e F, dizemos que um operador d-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ tem gráfico fechado se

$$G(A) = \left\{(x^1, \ldots, x^d, y) \colon (x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d \text{ e } y = A(x^1, \ldots, x^d)\right\}$$

é um subconjunto fechado em $E_1 \times \cdots \times E_d \times F$, ou seja, se para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in E_r^{\mathbb{N}}$, $r = 1, \ldots, d$, tais que cada $(x_j^r)_{j=1}^{\infty}$ converge para $x^r \in E_r$ e existe um elemento y em F tal que $A(x_j^1, \ldots, x_j^d) \xrightarrow{j} y$, então $y = A(x^1, \ldots, x^d)$.

Teorema 1.1.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços de Banach e $A\colon E_1 \times \ldots \times E_d \longrightarrow F$ um operador d-linear. Se A tem gráfico fechado, então A é contínuo.*

Demonstração. Ver [49]. □

Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ o conjunto de todos os operadores d-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F e definimos, para quaisquer $A_1, A_2, A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e λ um escalar, as operações

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \colon E_1 \times \cdots \times E_d &\longrightarrow F, \\ (A_1 + A_2)(x^1, \ldots, x^d) &:= A_1(x^1, \ldots, x^d) + A_2(x^1, \ldots, x^d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda A \colon E_1 \times \cdots \times E_d &\longrightarrow F, \\ (\lambda A)(x^1, \ldots, x^d) &:= \lambda A(x^1, \ldots, x^d). \end{aligned}$$

No caso linear, isto é, $d = 1$, escrevemos $\mathcal{L}(E; F)$, e quando $F = \mathbb{K}$ denotamos o dual topológico de E por E^*, isto é, $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$.

Proposição 1.1.5. *Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços normados.*

1. *$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações definidas acima.*
2. *A função $A \mapsto \|A\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$.*
3. *Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é um espaço de Banach munido com a norma do item 2.*

Demonstração. Veja [79, Proposições 2.10 e 2.11]. □

Exemplo 1.1.6. Sejam $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços normados, $\varphi_r \in E_r^*$, $r = 1, \ldots, d$, e $b \in F$. Definimos o operador d-linear contínuo

$$\begin{aligned} \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b \colon E_1 \times \cdots \times E_d &\longrightarrow F \\ (x^1, \ldots, x^d) &\mapsto \varphi_1(x^1) \cdots \varphi_d(x^d) b. \end{aligned}$$

Prova-se que

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_d\| \cdot \|b\|,$$

(veja [79, Exemplo 2.14]).

Definição 1.1.7. O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ gerado pelos operadores definidos acima será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_d; F)$ e seus elementos serão chamados de *operadores de tipo finito.*

1.2 Classes de sequências

O conceito de classes de sequências foi introduzido por Botelho e Campos em [24] e será essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

Por BAN denotaremos a classe de todos os espaços de Banach (reais ou complexos). Dados dois espaços vetoriais normados E e F usaremos o símbolo $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ para significar que E é um subespaço vetorial de F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$. Por $E^{\mathbb{N}}$ entendemos o espaço vetorial formado por todas as sequências com elementos em E munido das operações algébricas usuais, isto é, coordenada a coordenada. Para cada $j \in \mathbb{N}$, por $e_j \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ entendemos a sequência canônica de escalares em que o j-ésimo termo é igual a 1 e os demais são iguais a 0. Para $x \in E$, o símbolo $x \cdot e_j \in E^{\mathbb{N}}$ denotará a sequência $(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$ que tem na j-ésima posição o elemento x e as demais são iguais a 0.

Por $c_{00}(E)$ e $\ell_\infty(E)$ denotaremos, respectivamente, os espaços de todas as sequências em E que são eventualmente nulas e limitadas, isto é,

$$c_{00}(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \text{ existe } j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0 \text{ para todo } j \geq j_0\right\}$$

e

$$\ell_\infty(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E < \infty\right\}.$$

No espaço $\ell_\infty(E)$ consideramos a norma $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E$, que é completa se E for um espaço de Banach.

Definição 1.2.1. [24, Definition 2.1] Uma *classe de sequências* é uma regra $X\colon \mathrm{BAN} \longrightarrow \mathrm{BAN}$ que a cada espaço de Banach E associa a um espaço de Banach $X(E)$ formado por sequências em E, com as operações usuais de sequências, tal que:

1. $c_{00}(E) \subset X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ para todo E,

2. $\|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

A classe de sequências X é dita *linearmente estável* se para quaisquer E e F espaços de Banach e para qualquer $u \in \mathcal{L}(E; F)$ tem-se

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in X(E).$$

e o operador linear induzido

$$\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow X(F)\ ,\ \widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = (u(x_j))_{j=1}^\infty,$$

é contínuo com $\|\widehat{u}\| = \|u\|$ (veja [24, Definition 3.2]).

Muitos exemplos de classes de sequências podem ser encontrados em [24, 25, 37, 76, 77]; mencionamos apenas algumas delas: para $p \geq 1$, a classe $\ell_p(\cdot)$ das sequências absolutamente p-somáveis, a classe $\ell_p^w(\cdot)$ das sequências fracamente p-somáveis, a classe $c_0(\cdot)$ das sequências convergentes a 0 em norma, a classe $\ell_\infty(\cdot)$ das sequências limitadas, a classe $\ell_p^u(\cdot)$ das sequências incondicionalmente p-somáveis e a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ das sequências Cohen fortemente p-somáveis. Para exemplos de classes de sequências que não são linearmente estáveis veja, por exemplo, [24, 50].

Neste trabalho estaremos interessados em considerar iteradas de classes de sequências. Isso significa que, considerando k um número natural e classes de sequências $Y_1, \ldots, Y_k$, podemos aplicar a um espaço de Banach E a classe de sequência Y_k e retornar um espaço de Banach $Y_k(E)$. Neste, aplicamos a classe de sequência Y_{k-1} e obtemos o espaço de Banach $Y_{k-1}(Y_k(E))$ e, sucessivamente, obtemos o espaço de Banach $Y_1(\cdots Y_{k-1}(Y_k(E))\cdots)$. Por exemplo, para $p, q \geq 1$, $\ell_p(\ell_q(E))$ é o espaço de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_q(E)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{\ell_q(E)}^p < \infty.$$

Denotando, para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j = (x_{j,i})_{i=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, temos $(x_j)_{j=1}^\infty = ((x_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{\ell_q(E)}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \|(x_{j,i})_{i=1}^\infty\|_{\ell_q(E)}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{j,i}\|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Logo,

$$\ell_p(\ell_q(E)) = \left\{((x_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in (E^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{j,i}\|^q\right)^{\frac{p}{q}} < \infty\right\}$$

munido com a norma

$$\|((x_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p(\ell_q(E))} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{j,i}\|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Quando trabalhamos com espaços do tipo $Y(F)$ dizemos que estamos no caso isotrópico, e quando trabalhamos com espaços do tipo $Y_1(\cdots Y_{k-1}(Y_k(E))\cdots)$, $k \geq 2$, dizemos que estamos no caso anisotrópico.

A próxima proposição será essencial no decorrer do texto.

Proposição 1.2.2. [24, Lemma 2.4] *Se X é uma classe de sequências linearmente estável, então $\|x \cdot e_j\|_{X(E)} = \|x\|_E$ para todo espaço de Banach E, qualquer vetor $x \in E$ e todo natural $j \in \mathbb{N}$.*

1.3 Ideais de operadores multilineares

A teoria de ideais de operadores multilineares tem suas raízes no trabalho de Pietsch [72] de 1983. A seguir apresentaremos os conceitos básicos desta teoria.

Definição 1.3.1. Um *ideal de operadores d-lineares* é uma subclasse $\mathcal{M}_d$ da classe de todos os operadores d-lineares e contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d$ e F, a componente

$$\mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F) \cap \mathcal{M}_d$$

satisfaz:

(Ma) $\mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ que contém os operadores de tipo finito.

(Mb) Propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$, $u_r \in \mathcal{L}(G_r; E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{M}_d(G_1, \ldots, G_d; H)$.

Mais ainda, $\mathcal{M}_d$ é um ideal normado de operadores d-lineares se existir uma aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_d} \colon \mathcal{M}_d \longrightarrow [0, \infty)$ que satisfaz:

(M1) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_d}$ restrita a $\mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$ é uma norma.

(M2) $\|I^d \colon \mathbb{K}^d \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ I^d(\lambda^1, \ldots, \lambda^d) = \lambda^1 \cdots \lambda^d\|_{\mathcal{M}_d} = 1$.

(M3) Se $A \in \mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$, $u_r \in \mathcal{L}(G_r; E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|A\|_{\mathcal{M}_d} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}_d} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_d\|.$$

Por fim, um ideal normado de operadores d-lineares é dito de Banach se todas as componentes $\mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$ são completas com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_d}$.

Seja $(\mathcal{M}_d, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_d})_{d=1}^{\infty}$ uma sequência em que cada $(\mathcal{M}_d, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_d})$ é um ideal normado (de Banach) de operadores d-lineares. Então

$$\mathcal{M} := \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{M}_d$$

é chamado *ideal normado (de Banach) de operadores multilineares* ou simplesmente *multi-ideal normado (de Banach)*.

Proposição 1.3.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços de Banach. As seguintes afirmações são sempre satisfeitas por um ideal normado de operadores d-lineares $(\mathcal{M}_d, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_d})$:*

1. *$\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}_d}$ para todo $A \in \mathcal{M}_d(E_1, \ldots, E_d; F)$.*

2. *Para quaisquer* $\varphi_r \in E_r^*$, $r = 1, \ldots, d$, *e* $b \in F$ *tem-se*

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b\|_{\mathcal{M}_d} = b \cdot \prod_{r=1}^{d} \|\varphi_r\|.$$

Demonstração. Veja [79, Proposição 4.18]. □

Muitos exemplos de multi-ideais de Banach serão vistos nos próximos capítulos do trabalho. Para maiores informações sobre multi-ideais nos referimos a [1, 21, 24, 36, 62, 63, 64, 72, 76, 78].

Capítulo 2

A primeira construção

Neste capítulo apresentaremos uma primeira proposta de um aparato abstrato para unificar classes de operadores multilineares que são somantes por blocos e definidos, ou caracterizados, por meio de transformações de sequências. O objetivo é recuperar, em um mesmo ambiente, muitas classes de operadores multilineares do tipo somante que têm sido estudados separadamente na literatura. Iniciaremos com a construção, exibiremos os principais exemplos contidos na literatura e finalizaremos com um resultado de coincidência. Todos os resultados deste capítulo foram publicados em [26].

2.1 A construção

Dado um subconjunto N de $\mathbb{N}$ e uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E, o símbolo $(x_j)_{j\in N}$ denotará a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ em E cujo termo na j-ésima posição é igual a x_j caso $j \in N$, e 0 caso $j \notin N$, isto é,

$$y_j = \begin{cases} x_j, & \text{se } j \in N, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, se $N = \emptyset$, então $(x_j)_{j\in N}$ é a sequência identicamente nula em E para qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$. Além disso, é imediato verificar que se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ são sequências em E, então

$$(x_j)_{j\in N} + (y_j)_{j\in N} = (x_j + y_j)_{j\in N}.$$

Nesse capítulo, d é um número natural fixado e um subconjunto não vazio B de $\mathbb{N}^d$ será chamado de *bloco*. Além disso, dados $j_1, \ldots, j_{d-1} \in \mathbb{N}$ denotaremos

$$B^{j_1,\ldots,j_{d-1}} = \{j_d \in \mathbb{N} : (j_1, \ldots, j_{d-1}, j_d) \in B\}$$

e observe que

$$B = \bigcup_{j_1,\ldots,j_{d-1}=1}^{\infty} \bigcup_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} \{(j_1, \ldots, j_d)\}.$$

Proposição 2.1.1. *Sejam $X_1, \dots, X_d$, $Y_1, \dots, Y_d$ classes de sequências e $B \subseteq \mathbb{N}^d$ um bloco. As seguintes condições são equivalentes para um operador d-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_d; F)$:*

(i) Se $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(E_1)$, …, $(x_j^d)_{j=1}^\infty \in X_d(E_d)$, então

$$\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1, \dots, j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \in Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots).$$

(ii) O operador induzido

$$\widehat{A}_B : X_1(E_1) \times \cdots \times X_d(E_d) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)$$

dado por

$$\widehat{A}_B\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^\infty, \dots, \left(x_j^d\right)_{j=1}^\infty\right) = \left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1, \dots, j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty,$$

está bem definido, é d-linear e contínuo.

Demonstração. A implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ segue apenas do fato de $\widehat{A}_B$ ser bem definido. Na outra direção, a boa definição de $\widehat{A}_B$ também é clara. A linearidade de $\widehat{A}_B$ segue diretamente da linearidade de A e das operações usuais de sequências. Para não sobrecarregar a notação faremos, apenas para ilustração, o caso em que $d = 2$ e somente na primeira coordenada. O caso geral é totalmente análogo. Para isso, fixada uma sequência $(x_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(E_2)$, então para quaisquer sequências $(x_j^1)_{j=1}^\infty, (y_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(E_1)$ e todo escalar λ temos

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_B\left((x_j^1 + \lambda y_j^1)_{j=1}^\infty, (x_j^2)_{j=1}^\infty\right) &= \left(\left(A\left(x_{j_1}^1 + \lambda y_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right)\right)_{j_2 \in B^{j_1}}\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \left(\left(A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right) + \lambda A\left(y_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right)\right)_{j_2 \in B^{j_1}}\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \left(\left(A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right)\right)_{j_2 \in B^{j_1}}\right)_{j_1=1}^\infty + \lambda\left(\left(A\left(y_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right)\right)_{j_2 \in B^{j_1}}\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \widehat{A}_B\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^\infty, \left(x_j^2\right)_{j=1}^\infty\right) + \lambda\widehat{A}_B\left(\left(y_i^1\right)_{j=1}^\infty, \left(x_j^2\right)_{j=1}^\infty\right).
\end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade de $\widehat{A}_B$ utilizaremos o Teorema do Gráfico Fechado para operadores multilineares enunciado no Teorema 1.1.4. Para isso, considere sequências $\overline{x}_l^r = (x_{l,j}^r)_{j=1}^\infty$ e $\overline{x}^r = (x_j^r)_{j=1}^\infty$ em $X(E_r)$, para cada $r \in \{1, \dots, d\}$ e para todo $l \in \mathbb{N}$, tais que

$$(\overline{x}_l^1, \dots, \overline{x}_l^d) \xrightarrow{l} (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^d) \text{ em } X_1(E_1) \times \cdots \times X_d(E_d), \tag{2.1}$$

e

$$\widehat{A}_B(\overline{x}_l^1, \dots, \overline{x}_l^d) \xrightarrow{l} \left(\cdots (z_{j_1, \dots, j_d})_{j_d=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \text{ em } Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots). \tag{2.2}$$

Segue de (2.1) que $\overline{x}_l^r \xrightarrow{l} \overline{x}^r$ em $X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. A condição $X_r(\cdot) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\cdot)$ garante que convergência em classes de sequências implica em convergência coordenada a coordenada, portanto $x_{l,j}^r \xrightarrow{l} x_j^r$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como A é contínua,

$$A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right) \xrightarrow{l} A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right) \text{ em F} \tag{2.3}$$

para quaisquer $j_1, \ldots, j_d \in \mathbb{N}$ e, em particular, para quaisquer $(j_1, \ldots, j_d) \in B$.

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\widehat{A}_B(\overline{x}_l^1, \ldots, \overline{x}_l^d) &= \widehat{A}_B((x_{l,j}^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_{l,j}^d)_{j=1}^\infty) \\ &= \left(\cdots\left(\left(A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty,\end{aligned}$$

de (2.2) segue que

$$\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \xrightarrow{l} \left(\cdots (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty$$

em $Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)$. Então para quaisquer $j_1, \ldots, j_{d-1} \in \mathbb{N}$, novamente da convergência coordenada a coordenada aplicada às classes de sequências $Y_1, \ldots, Y_{d-1}$, segue que

$$\left(A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} \xrightarrow{l} (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^\infty \text{ em } Y_d(F). \tag{2.4}$$

Agora iremos olhar convergência coordenada a coordenada em (2.4). Note que, se $j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$, o que equivale a $(j_1, \ldots, j_d) \in B$, então a j_d-ésima coordenada da sequência $\left(A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}$ é igual a $A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)$, para todo $l \in \mathbb{N}$, e convergente a $z_{j_1,\ldots,j_d}$. No caso contrário, ou seja, se $j_d \notin B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$, então a j_d-ésima coordenada de $\left(A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}$ é igual a 0, para todo $l \in \mathbb{N}$, e convergente para $z_{j_1,\ldots,j_d}$. Portanto, $z_{j_1,\ldots,j_d} = 0$ quando $(j_1, \ldots, j_d) \notin B$, e

$$A\left(x_{l,j_1}^1, \ldots, x_{l,j_d}^d\right) \xrightarrow{l} z_{j_1,\ldots,j_d} \text{ em } F, \tag{2.5}$$

para qualquer $(j_1, \ldots, j_d) \in B$. Da unicidade do limite em F aplicada as convergências (2.3) e (2.5) obtemos que $A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right) = z_{j_1,\ldots,j_d}$ para qualquer $(j_1, \ldots, j_d) \in B$. Por fim, como $z_{j_1,\ldots,j_d} = 0$ quando $(j_1, \ldots, j_d) \notin B$, então

$$\begin{aligned}\left(\cdots (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty &= \left(\cdots (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \\ &= \left(\cdots \left(A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \\ &= \widehat{A}_B(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^d),\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 2.1.2. Sejam $X_1, \ldots, X_d$, $Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências. Dizemos que um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somante se valem as condições equivalentes da Proposição 2.1.1. Neste caso, definimos a norma $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somante de A por

$$\|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} = \|\widehat{A}_B\|.$$

Denotamos por $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ a classe de todos os operadores d-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F que são $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somantes. Além disso, usaremos as seguintes simplificações:

- $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d)$ no caso em que $F = \mathbb{K}$.
- $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}({}^dE; F)$ no caso em que $E_1 = \cdots = E_d = E$.
- $\mathcal{L}_{B;{}^dX;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ no caso em que $X_1 = \cdots = X_d = X$.
- $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$ no caso em que $Y_1 = \cdots = Y_d = Y$.

Combinações óbvias dessas simplificações também serão utilizadas.

O próximo objetivo é provar, com o mínimo de hipóteses, que

$$\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} := \bigcup_{\substack{E_1,\ldots,E_d,F \\ \text{Banach}}} \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F),$$

é um ideal de Banach de operadores d-lineares. Começamos com a primeira parte da propriedade (Ma) da definição 1.3.1.

Proposição 2.1.3. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências. Para quaisquer espaços de Banach E_1, …, E_d e F o conjunto $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e λ um escalar. Dadas $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, como

$$\begin{aligned}
&(A_1 + \lambda A_2)_B^\wedge \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) = \\
&= \left(\cdots \left(\left((A_1 + \lambda A_2)(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \left(\cdots \left(\left(A_1(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d) + \lambda A_2(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \left(\cdots \left(\left(A_1(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} + \lambda \left(A_2(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \\
&= \left(\cdots \left(\left(A_1(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty + \\
&+ \lambda \left(\cdots \left(\left(A_2(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty
\end{aligned}$$

$$= \widehat{(A_1)}_B \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) + \lambda\widehat{(A_2)}_B \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right),$$

temos $A_1 + \lambda A_2 \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e $(A_1 + \lambda A_2)_B^\wedge = \widehat{(A_1)}_B + \lambda\widehat{(A_2)}_B$. $\square$

Para verificar que os operadores de tipo finito pertencem à $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ precisaremos usar a propriedade de ideal (Mb). Por isso a provaremos primeiro.

Proposição 2.1.4. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências, um operador d-linear $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e operadores lineares $u_r \in \mathcal{L}(G_r; E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, e $v \in \mathcal{L}(F; H)$.*

1. *Se $X_1, \ldots, X_d$ são linearmente estáveis, então*

$$A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(G_1, \ldots, G_d; F).$$

2. *Se $Y_1, \ldots, Y_d$ são linearmente estáveis, então $v \circ A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; H)$.*

3. *Se $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ são linearmente estáveis, então*

$$v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(G_1, \ldots, G_d; H) \text{ e}$$

$$\|v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d)\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} \leq \|v\| \cdot \|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} \cdot \prod_{r=1}^{d} \|u_r\|.$$

Demonstração. 1. Dadas sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(G_r)$, $r = 1, \ldots, d$, como a classe de sequências X_r é linearmente estável e o operador u_r é contínuo, tem-se $(u_r(x_j))_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$. Como $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$, então

$$\left(\ldots\left(\left(A(u_1, \ldots, u_d)(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \ldots\right)_{j_1=1}^\infty =$$

$$= \left(\ldots\left(\left(A(u_1(x_{j_1}), \ldots, u_d(x_{j_d}))\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \ldots\right)_{j_1=1}^\infty \in Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)$$

e, portanto, $A(u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(G_1 \ldots, G_n; F)$. Além disso, a igualdade anterior mostra que

$$(A \circ (u_1, \ldots, u_d))_B^\wedge = \widehat{A}_B \circ (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_d).$$

2. Sendo as classes de sequências $Y_1, \ldots, Y_d$ linearmente estáveis e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, o operador induzido $\widehat{v}\colon Y_d(F) \longrightarrow Y_d(H)$ está bem definido, é linear, contínuo e $\|\widehat{v}\| = \|v\|$. O mesmo acontece com $\widehat{v}^2 := \widehat{\widehat{v}}\colon Y_{d-1}(Y_d(F)) \longrightarrow Y_{d-1}(Y_d(H))$ e com seus sucessivos operadores induzidos, até chegarmos a um operador induzido,

$$\widehat{v}^d\colon Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_d(H)\cdots),$$

$$\widehat{v}^d\left(\cdots(y_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}=\left(\cdots(v(y_{j_1,\ldots,j_d}))_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty},$$

que é linear, contínuo e $\|\widehat{v}^d\|=\|\widehat{v}^{d-1}\|=\cdots=\|\widehat{v}^2\|=\|v\|$. Assim, para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}\in X_r(E_r)$, $r=1,\ldots,d$, como $A\in\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ temos

$$\widehat{A}_B\left((x_j^1)_{j=1},\ldots,(x_j^d)_{j=1}\right)\in Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}Y_1(\cdots Y_d(H)\cdots)\ni\widehat{v}^d\circ\widehat{A}_B&\left((x_j^1)_{j=1},\ldots,(x_j^d)_{j=1}\right)\\&=\widehat{v}^d\left(\left(\cdots\left(\left(A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right)\\&=\left(\cdots\left(\left(v\circ A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Logo, $v\circ A\in\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;H)$. Além disso, conclui-se da igualdade anterior que $(v\circ A)_B^{\wedge}=\widehat{v}^d\circ\widehat{A}_B$.

3. Utilizando os itens 1. e 2. temos

$$(v\circ A(u_1,\cdots,u_d))_B^{\wedge}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty},\cdots,(x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right)=\widehat{v}\circ\widehat{A}_B(\widehat{u_1},\ldots,\widehat{u_d})\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty},\cdots,(x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right),$$

para quaisquer $(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\in X_r(G_r)$, $r=1,\ldots,d$. Logo

$$\begin{aligned}\|v\circ A(u_1,\cdots,u_d))\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}&=\|(v\circ A(u_1,\cdots,u_d))_B^{\wedge}\|\\&=\|\widehat{v}\circ\widehat{A}_B(\widehat{u_1},\ldots,\widehat{u_d})\|\\&\leq\|\widehat{v}\|\cdot\|\widehat{A}_B\|\cdot\prod_{r=1}^{d}\|\widehat{u_r}\|\\&=\|v\|\cdot\|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}\cdot\prod_{r=1}^{d}\|u_r\|.\end{aligned}$$

□

Apresentaremos a seguir uma condição necessária para uma teoria não trivial.

Proposição 2.1.5. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d$ classes de sequências linearmente estáveis e $E_1,\ldots,E_d,F$ espaços de Banach. Se existir $A\in\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ não nulo, então*

$$\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\in Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots),\tag{2.6}$$

para quaisquer sequências de escalares $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ um operador não nulo. Então existe uma d-upla $(x^1\ldots,x^d)$ em $E_1\times\cdots\times E_d$ tal que $A(x^1,\ldots,x^d)\neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional $\psi\in F^*$ que satisfaz $\psi(A(x^1,\ldots,x^d)) = \|A(x^1,\ldots,x^d)\|$. Como as classes de sequências $Y_1,\ldots,Y_d$ são linearmente estáveis, segue do argumento utilizado na demonstração do item 2. da Proposição 2.1.4 que, tomando sucessivos operadores induzidos a partir de ψ, o operador $\widehat{\psi}^k : Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)$ dado por

$$\widehat{\psi}^d\left(\cdots(y_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty} = \left(\cdots(\psi(y_{j_1,\ldots,j_d}))_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}$$

está bem definido, é linear e contínuo. Para cada $r=1,\ldots,d$ podemos considerar os operadores lineares e contínuos $u_r\in\mathcal{L}(\mathbb{K};E_r)$ definidos por $u_r(\lambda)=\lambda x^r$. Como as classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$ são linearmente estáveis, o operador linear induzido $\widehat{u}_r\colon X(\mathbb{K})\longrightarrow X(E_r)$ está bem definido, é linear e contínuo. Pelo item 2 da Proposição 2.1.4 segue que $\psi\circ A\circ(u_1,\ldots,u_d)\in\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}({}^d\mathbb{K};\mathbb{K})$. Então, para quaisquer $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\in X_r(\mathbb{K})$, tem-se

$$\begin{aligned}
Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)\ni(\psi\circ A\circ(u_1,\ldots,u_d))_B^{\wedge}\left((\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty},\ldots,(\lambda_j^d)_{j=1}^{\infty}\right) &=\\
&=\widehat{\psi}^d\circ\widehat{A}_B\left(\widehat{u}_1((\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty}),\ldots,\widehat{u}_d((\lambda_j^d)_{j=1}^{\infty})\right)\\
&=\widehat{\psi}^d\circ\widehat{A}_B((\lambda_j^1x^1)_{j=1}^{\infty},\ldots,(\lambda_j^dx^d)_{j=1}^{\infty})\\
&=\widehat{\psi}^d\left(\left(\cdots\left(\left(A\left(\lambda_{j_1}^1x^1,\ldots,\lambda_{j_d}^dx^d\right)\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right)\\
&=\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\psi\circ A\left(x^1,\ldots,x^d\right)\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\\
&=\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\|A\left(x^1,\ldots,x^d\right)\|\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\\
&=\|A\left(x^1,\ldots,x^d\right)\|\cdot\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Como $Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)$ é um espaço vetorial e $\|A(x^1,\ldots,x^d)\|\neq 0$ segue que

$$\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\in Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots).$$

$\square$

A proposição acima evidencia que a condição (2.6) é necessária para que $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ seja não trivial. A próxima proposição mostrará que ela é também uma condição suficiente para que essa classe contenha os operadores de tipo finito.

Proposição 2.1.6. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d$ classes de sequências linearmente estáveis que satisfazem a condição (2.6). Então a classe $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ contém os operadores de tipo finito.*

Demonstração. A condição (2.6) garante que o operador $I^d\colon \mathbb{K}^d \longrightarrow \mathbb{K}$, definido na condição (M2) da definição 1.3.1, pertence a $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}({}^d\mathbb{K};\mathbb{K})$. Dados $\varphi_r \in E_r^*$, $r = 1,\ldots,d$, e $b \in F$, considerando o operador linear e contínuo $u\colon \mathbb{K} \longrightarrow F$ definido por $u(\lambda) = \lambda b$, temos

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b = u \circ I^d \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_d).$$

Pela Proposição 2.1.4 segue que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Portanto, $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ contém os operadores de tipo finito, pois é um espaço vetorial. □

Na perspectiva das últimas duas proposições vemos a necessidade de supormos a condição (2.6) para o desenvolvimento de nosso ambiente. Além disso, como ainda não tratamos da aplicação $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$, se torna esperado também exigir a desigualdade de normas correspondente para acompanhar a condição (2.6).

Definição 2.1.7. Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências. Dizemos que a $2d$-upla $(X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d)$ é *B-compatível* (ou que $(B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d)$ é *compatível*) se, para quaisquer $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(\mathbb{K})$, $r = 1,\ldots,d$, tem-se

$$\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty \in Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)$$

e

$$\left\|\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots\right)_{j_1=1}^\infty\right\|_{Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)} \le \prod_{r=1}^d \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{X_r(\mathbb{K})}.$$

A imposição dessa condição de compatibilidade do tipo Hölder (veja ...) garante que a classe contenha os operadores de tipo finito. Seguindo com a verificação que a classe $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ é um ideal de Banach de operadores d-lineares, veremos na sequência que a aplicação $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ é de fato uma norma neste espaço. Para isso, precisaremos verificar a proposição a seguir, que relaciona a norma usual de operadores com a norma $(B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d)$-somante.

Proposição 2.1.8. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d$ classes de sequências linearmente estáveis. Para todo operador $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ vale*

$$\|A\| \le \|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}.$$

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$, $(x^1,\ldots,x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$ e $(j_1',\ldots,j_d') \in B$. Para cada $r = 1,\ldots,d$, considere as sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty := x^r \cdot e_{j_r'} \in X_r(E_r)$. Aplicando repetidas vezes a Proposição 1.2.2, temos

$$\|\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\|_{Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(\cdots \left(\left(A\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \right\|_{Y_1(\cdots(Y_d(F))\cdots)} \\
&= \left\| \left(\cdots \left(\left(A\left(x^1_{j_1'}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1',\ldots,j_{d-1}}} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_2=1}^{\infty} \cdot e_{j_1'} \right\|_{Y_1(\cdots(Y_d(F))\cdots)} \\
&= \left\| A\left(x^1_{j_1'}, \ldots, x^d_{j_d'}\right) \cdot e_{j_d'} \cdots e_{j_2'} \cdot e_{j_1'} \right\|_{Y_1(\cdots(Y_d(F))\cdots)} \\
&= \left\| A\left(x^1_{j_1'}, \ldots, x^d_{j_d'}\right) \right\|_F \\
&= \| A\left(x^1, \ldots, x^d\right) \|_F .
\end{aligned}
$$

Agora, como $\widehat{A}_B$ é contínuo,

$$
\begin{aligned}
\| A\left(x^1, \ldots, x^d\right) \|_F &= \| \widehat{A}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \|_{Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)} \\
&\leq \|\widehat{A}_B\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|(x^r_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X_r(E_r)} \\
&= \|\widehat{A}_B\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r \cdot e_{j_r'}\|_{X_r(E_r)} \\
&\overset{\text{Prop. 1.2.2}}{=} \|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r},
\end{aligned}
$$

donde segue a desigualdade desejada. □

Proposição 2.1.9. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências. Para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d$ e F a aplicação $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$. Por um lado, se A for identicamente nulo, então $\widehat{A}_B$ também o será; e portanto $\|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} = \|\widehat{A}_B\| = 0$. Por outro, a Proposição 2.1.8 garante que se $\|A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} = 0$, então $\|A\| = 0$ e, sendo assim, A é identicamente nulo.

Todos os demais axiomas de normas seguem automaticamente da linearidade da correspondência $A \mapsto \widehat{A}_B$ constatada na demonstração da Proposição 2.1.3. □

Agora podemos completar a verificação de que, com as hipóteses de estabilidade linear e compatibilidade das classes de sequências, $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ é um multi-ideal de Banach munido com a norma $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$.

Teorema 2.1.10. *Sejam $X_1, \ldots, X_d$, $Y_1, \ldots, Y_d$ classes de sequências linearmente estáveis e B-compatíveis. Então $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$ é um ideal Banach de operadores d-lineares munido da norma $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$.*

Demonstração. Por tudo que fizemos nas Proposições 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6 e 2.1.9, resta apenas mostrar que vale a igualdade $\|I^d\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}= 1$ e que $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é completo com a norma $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$, para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_d,F$.

Para a igualdade, note que a Proposição 2.1.8 garante que

$$1 = \|I^d\| \leq \|I^d\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}.$$

Sendo $(X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d)$ classes de sequências B-compatíveis, então vale a desigualdade

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{(I^d)}_B\left((\lambda_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(\lambda_j^d)_{j=1}^\infty\right)\| = \\
&= \left\|\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty\cdots\right)_{j_1=1}^\infty\right\|_{Y_1(\cdots Y_d(\mathbb{K})\cdots)} \\
&\leq \prod_{r=1}^d \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{X_r(\mathbb{K})},
\end{aligned}$$

sempre que $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$, ou seja, $\|I^d\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}= \|\widehat{(I^d)}_B\| \leq 1$.

Agora, sejam $E_1,\ldots,E_d,F$ espaços de Banach e $(A_l)_{l=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$, pela Proposição 2.1.8, segue que $(A_l)_{l=1}^\infty$ é de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Existe então $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ tal que

$$A_l \xrightarrow{l} A \text{ em } \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F). \tag{2.7}$$

Devemos provar que $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ e que vale a convergência $A_l \xrightarrow{l} A$ na norma $\|\cdot\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}$.

Por um lado, a correspondência

$$A \in \mathcal{L}_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1,\ldots,E_d;F) \mapsto \widehat{A}_B \in \mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots))$$

é uma imersão isométrica. Logo, denotando por $\widehat{A}_{l,B}$ o operador induzido por A_l, a sequência $(\widehat{A}_{l,B})_{l=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots))$, que por sua vez é um espaço de Banach. Podemos então considerar um operador $S \in \mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots))$ que é limite de tal sequência, ou seja,

$$\widehat{A}_{l,B} \xrightarrow{l} S \text{ em } \mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)). \tag{2.8}$$

Dessa forma,

$$\left(\cdots\left(\left(A_l\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d\in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty\cdots\right)_{j_1=1}^\infty \xrightarrow{l} S\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right),$$

em $Y_1(\cdots Y_d(F)\cdots)$ para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r=1,\ldots,d$. Denotando

$$S\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right) := \left(\cdots(z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^\infty\cdots\right)_{j_1=1}^\infty$$

e aplicando a convergência coordenada a coordenada nas classes de sequências $Y_1, \ldots, Y_{d-1}$, temos

$$\left(A_l\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} \xrightarrow{l} (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^{\infty} \text{ em } Y_d(F)$$

para quaisquer $j_1, \ldots, j_{d-1} \in \mathbb{N}$. Mas, para todo $l \in \mathbb{N}$, por definição, se $j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$, então a j_d-ésima coordenada de $\left(A_l\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}$ é igual a $A_l\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)$. Aplicando mais uma vez a convergência coordenada a coordenada obtemos

$$A_l\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right) \xrightarrow{l} z_{j_1,\ldots,j_d} \text{ em } F.$$

Da unicidade do limite em F segue que $z_{j_1,\ldots,j_d} = A(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d})$ sempre que $j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$. Por outro lado, se $j_d \notin B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$, então a j_d-ésima coordenada da sequência $\left(A_l\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}$ é nula, para todo $l \in \mathbb{N}$, e converge para $z_{j_1,\ldots,j_d}$. Logo, $z_{j_1,\ldots,j_d} = 0$ sempre que $j_d \notin B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}$. Concluímos que

$$(z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^{\infty} = \left(A(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d})\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}$$

e daí

$$\begin{aligned} S\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) &= \left(\cdots (z_{j_1,\ldots,j_d})_{j_d=1}^{\infty} \cdots\right)_{j_1=1}^{\infty} \\ &= \left(\cdots \left(\left(A\left(x^1_{j_1}, \ldots, x^d_{j_d}\right)\right)_{j_d \in B^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

ou seja, $A \in \mathcal{L}_{B;x_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d}(E_1, \ldots, E_d; F)$. Mais ainda, $\widehat{A}_B = S$ e, consequentemente,

$$\|A_l - A\|_{B;X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_d} = \|(\widehat{A_l - A})_B\| = \|\widehat{A}_{l,B} - \widehat{A}_B\| = \|\widehat{A}_{l,B} - S\| \xrightarrow{l} 0.$$

□

2.2 Exemplos de classes estudadas na literatura

Nessa seção iremos recuperar muitos exemplos importantes tratados na literatura como casos particulares da nossa construção geral. Iremos dividi-la em três partes. A primeira será dedicada ao caso em que o conjunto de índices é a diagonal de $\mathbb{N}^d$, a segunda ao próprio $\mathbb{N}^d$ e a terceira a um caso intermediário.

2.2.1 A diagonal

A diagonal de $\mathbb{N}^d$, denotada por D, é o bloco $\{(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : j_1 = \cdots = j_d\}$. Neste caso, para quaisquer $j_1, \ldots, j_{d-1} \in \mathbb{N}$, temos

$$D^{j_1,\ldots,j_{d-1}} = \begin{cases} \{j\}, & \text{se } j_1 = \cdots = j_{d-1} =: j, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, dado um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty$ em E_r, $r = 1, \ldots, d$, é verdade que

$$\left(\cdots \left(\left(A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in D^{j_1,\ldots,j_{d-1}}} \right)_{j_{d-1}=1}^\infty \cdots \right)_{j_1=1}^\infty = \left(A\left(x_j^1, \ldots, x_j^d\right) \cdot e_j \cdot \overset{d-1}{\cdots} \cdot e_j \right)_{j=1}^\infty . \tag{2.9}$$

2.2.1.1 Os operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes

Os operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes, onde $X_1, \ldots, X_d$ e Y são classes de sequências, foram introduzidas em 2017 por Botelho e Campos no trabalho [24]. Pretendia-se unificar ali os exemplos de ideal de operadores d-lineares que eram definidos, ou podiam ser caracterizados, por meio de transformações de sequências vetoriais. É importante ressaltar que para conseguirmos resgatar os operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes como caso particular da abordagem construída neste capítulo será necessário impor uma condição sobre as classes de sequências (Definição 2.2.5). Essa condição permite alcançar muitas classes já estudadas, mas não a totalidade das classes obtidas em [24]. Isso será resolvido com a construção a ser feita no próximo capítulo.

Definição 2.2.1. [24, Definition 3.1] Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y$ classes de sequências. Um operador d-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somante se

$$\left(A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\right)_{j=1}^\infty \in Y(F)$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. O conjunto de todos esses operadores é denotado por $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$, que é um espaço de Banach munido com a norma dada por $\|A\|_{X_1,\ldots,X_d;Y} = \|\widehat{A}\|$, onde $\widehat{A}$ é o seguinte operador d-linear contínuo induzido por A:

$$\widehat{A} : X_1(E_1) \times \cdots \times X_d(E_d) \longrightarrow Y(F) \ , \ \widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) = \left(A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\right)_{j=1}^\infty ,$$

(veja [24, Theorem 2.4]).

A condição a ser imposta sobre as classes de sequências se apresenta no próximo resultado.

Teorema 2.2.2. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y$ classes de sequências e $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços de Banach.*

1. *Se existe uma classe de sequências Z tal que:*

   $$(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty \in Y(Z(H)) \Rightarrow (y_j)_{j=1}^\infty \in Y(H) \ e \ \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(H)} \leq \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(Z(H))},$$

   para qualquer espaço de Banach H, então

   $$\mathcal{L}_{D;X_1,\ldots,X_d;Y,Z,\overset{d-1}{\cdots},Z}(E_1, \ldots, E_d; F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F).$$

2. *Se existe uma classe de sequências Z tal que*

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(H) \Rightarrow (y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(Z(H)) \ e \ \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(Z(H))} \leq \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(H)},$$

para qualquer espaço de Banach H, então

$$\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_d;Y}(E_1,\dots,E_d;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{D;X_1,\dots,X_d;Y,Z,\overset{d-1}{\dots},Z}(E_1,\dots,E_d;F).$$

Demonstração. 1. Sejam $A \in \mathcal{L}_{D;X_1,\dots,X_d;Y,Z\overset{d-1}{\dots},Y_d}(E_1,\dots,E_d;F)$ e $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1,\dots,d$. Utilizando a igualdade (2.9), temos

$$\left(A\left(x_j^1,\dots,x_j^d\right) \cdot e_j \cdot \overset{d-1}{\cdots} \cdot e_j\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(Z(\cdots Z(F)\cdots)).$$

Aplicando a hipótese iteradamente obtemos $\left(A(x_j^1,\dots,x_j^d)\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$, provando que $A \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_d;Y}(E_1,\dots,E_d;F)$. Além disso, usando a desigualdade $\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(H)} \leq \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(Z(H))}$, novamente de forma iterada, segue que

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty},\dots,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{Y(F)} = \\
&= \left\|\left(A(x_j^1,\dots,x_j^d)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)} \\
&\leq \left\|\left(A\left(x_j^1,\dots,x_j^d\right) \cdot e_j \cdot \overset{d-1}{\cdots} \cdot e_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots))} \\
&= \left\|\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in D^{j_1,\dots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots))} \\
&= \left\|\widehat{A}_D\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty},\dots,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots))},
\end{aligned}$$

donde concluímos que $\|A\|_{X_1,\dots,X_d;Y} \leq \|A\|_{D;X_1,\dots,X_d;Y,Z,\dots,Z}$.

2. Dados um operador $A \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_d;Y}(E_1,\dots,E_d;F)$ e sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1,\dots,d$, temos

$$\left(A(x_j^1,\dots,x_j^d)\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(F).$$

Aplicando a hipótese $[(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(H) \Rightarrow (y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(Z(H))]$ $d-1$ vezes, segue que

$$\begin{aligned}
Y(Z(\overset{d-1}{\cdots} Z(F)\cdots) \ni \left(A\left(x_j^1,\dots,x_j^d\right) \cdot e_j \cdot \overset{d-1}{\cdots} \cdot e_j\right)_{j=1}^{\infty} &= \\
= \left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in D^{j_1,\dots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}&.
\end{aligned}$$

Agora, para a desigualdade de normas, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{A}_D\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty},\dots,(x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots)} = \\
&= \left\|\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in D^{j_1,\dots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots)} \\
&= \left\|\left(A\left(x_j^1,\dots,x_j^d\right) \cdot e_j \cdot \overset{d-1}{\cdots} \cdot e_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(Z(\cdots Z(F)\cdots)}
\end{aligned}$$

$$\leq \| \big(A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\big)_{j=1}^{\infty} \|_{Y(F)}$$
$$= \left\| \widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)}.$$

Portanto, $\|A\|_{D;X_1,\ldots,X_d;Y,Z,\ldots,Z} \leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_d;Y}$. $\square$

Para o próximo resultado, que mostra casos concretos em que vale o teorema acima, precisaremos de dois fatos. O primeiro é uma forma muito útil de calcular a norma no espaço das sequências fracamente p-somáveis (veja [46, p. 36]). Dados um espaço de Banach E e uma sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então

$$\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(E)} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{j=1}^{N} a_j y_j \right\|_F, \tag{2.10}$$

onde p^* é o conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$.

O segundo fato permite permutar a ordem de supremos em uma expressão no seguinte sentido: para dois conjuntos A e B não vazios e $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, é verdade que

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y). \tag{2.11}$$

Uma verificação deste fato pode ser encontrada em [50, Lema 2.4.10].

Definição 2.2.3. [80, Definição 3.1.1] Sejam $q, p_1, \ldots, p_d \in [1, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_d}$. Um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito $(q; p_1, \ldots, p_d)$-*fracamente somante*, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\| \big(A(x_j^1, \ldots, x_j^d)\big)_{j=1}^{m} \|_{w,q} \leq C \prod_{r=1}^{d} \|(x_j^r)_{j=1}^{m}\|_{w,p_r}, \tag{2.12}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer sequências finitas $(x_j^r)_{j=1}^{m} \in E_r$, $r = 1, \ldots, d$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}(E_1, \ldots, E_d; F)$ o espaço vetorial formado por todos operadores $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ que são $(q; p_1, \ldots, p_d)$-fracamente somantes e por $\|A\|_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}$ o ínfimo das constantes que satisfazem (2.12). A expressão $\|\cdot\|_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}$ define uma norma completa no espaço $\mathcal{L}_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}(E_1, \ldots, E_d; F)$. Sendo a classe de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ finitamente determinada para qualquer $p \geq 1$ (ver [24, Definition 2.1], por [24, Proposition 2.4] tem-se

$$\mathcal{L}_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}(E_1, \ldots, E_d; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_{p_1}^w(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}^w(\cdot);\ell_q^w(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F).$$

Logo, temos o seguinte corolário do Teorema 2.2.2:

Corolário 2.2.4. *Sejam $q, p_1, \ldots, p_d \in [1, \infty)$ tais que $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d}$. Então, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d, F$, tem-se*

(a) $\mathcal{L}_{D;\ell_{p_1}^w(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}^w(\cdot);\ell_q^w(\cdot),\ell_1(\cdot),\ldots,\ell_1(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}(E_1, \ldots, E_d; F)$.

(b) $\mathcal{L}_{ws,(q,p_1,\ldots,p_d)}(E_1, \ldots, E_d; F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{D;\ell_{p_1}^w(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}^w(\cdot);\ell_q^w(\cdot),\ell_\infty(\cdot),\ldots,\ell_\infty(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F)$.

Demonstração. Seja $(y_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em F.

1. Se $(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(\ell_1(F))$. Lembrando que p^* denota o conjugado de p, de

$$
\begin{aligned}
\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(F)} &\overset{(2.10)}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{j=1}^N a_j y_j \right\|_F \\
&\leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \sum_{j=1}^N \|a_j y_j\|_F \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{j=1}^N a_j y_j \cdot e_j \right\|_{\ell_1(F)} \\
&\overset{(2.10)}{=} \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(\ell_1(F))},
\end{aligned}
$$

concluímos que $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(F)$ e $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(F)} \leq \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(\ell_1(F))}$. Portanto, o resultado segue da parte 1. do Teorema 2.2.2.

2. Se $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(F)$, então de

$$
\begin{aligned}
\|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(\ell_\infty(F))} &\overset{(2.10)}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \left\| \sum_{j=1}^N a_j y_j \cdot e_j \right\|_{\ell_\infty(F)} \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{1\leq k\leq N} \|a_k y_k\|_F \\
&\overset{(2.11)}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq k\leq N} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \|a_k y_k\|_F \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq k\leq N} \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} |a_k| \cdot \|y_k\|_F \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq k\leq N} \|y_k\|_F \left(\sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} |a_k| \right) \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq k\leq N} \|y_k\|_F \\
&= \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(F)} \leq \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(F)},
\end{aligned}
$$

concluímos que $(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(\ell_\infty(F))$ e $\|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(\ell_\infty(F))} \leq \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(F)}$. O resultado segue da parte 2. do Teorema 2.2.2. $\square$

Definição 2.2.5. Uma classe de sequências Y é *diagonalizável em relação à classe de sequências Z*, ou simplesmente Y é *Z-diagonalizável*, se para qualquer espaço de Banach

H e qualquer sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in H^{\mathbb{N}}$ vale:

$$(y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(Z(H)) \Longleftrightarrow (y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(H) \text{ e } \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(H)} = \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(Z(H))}.$$

Exemplo 2.2.6. As classes de sequências $c_0(\cdot)$, $\ell_\infty(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$ são Z-diagonalizáveis para qualquer classe de sequências linearmente estável Z. De fato, se H é um espaço de Banach, como a igualdade $\|y \cdot e_j\|_{Z(H)} = \|y\|_H$ é sempre verdadeira para qualquer $y \in H$ temos, por exemplo,

$$\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p(H)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|_H^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \cdot e_j\|_{Z(H)}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(y_j \cdot e_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p(Z(H))},$$

donde segue o resultado para a classe $\ell_p(\cdot)$. Para as demais classes citadas vale raciocínio análogo.

Para não trivializar o espaço $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1,\ldots,E_d;F)$, em [24] é imposta a seguinte hipótese tipo Hölder sobre as classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$ e Y: diz-se que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$ se

$$\left(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^d\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(\mathbb{K}) \tag{2.13}$$

e

$$\|\left(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^d\right)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{X_r(\mathbb{K})}$$

sempre que tomamos sequências de escalares $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(\mathbb{K})$, $r = 1,\ldots,d$. Repetindo o argumento usado na demonstração do Teorema 2.2.2, prova-se que essa hipótese, no caso em que existe uma classe de sequências Z tal que Y é Z-diagonalizável, é equivalente a $(D; X_1,\ldots,X_d; Y, Z,\ldots,Z)$ ser compatível. Combinando essa equivalência com o Teorema 2.2.2, recuperamos os casos estudados em [24] como casos particulares da nossa construção no caso em que Y é Z-diagonalizável:

Corolário 2.2.7. *Sejam $X_1,\ldots,X_d, Y$ classes de sequências com Y sendo Z-diagonalizável. Para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_d$ e F tem-se*

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1,\ldots,E_d;F) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{D;X_1,\ldots,X_d;Y,Z,\overset{d-1}{\ldots},Z}(E_1,\ldots,E_d;F).$$

Veremos a seguir dois exemplos concretos.

2.2.1.2 Operadores absolutamente somantes

Conforme dito na introdução, a classe estudada nesta subseção foi a primeira classe de operadores multilineares do tipo somante estudada na literatura e muita pesquisa foi feita sobre essa classe.

Definição 2.2.8. Para $p_1, \ldots, p_d, q \in [1, \infty)$ com $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d}$, um operador d-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito *absolutamente* $(q; p_1, \ldots, p_d)$*-somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| A(x_j^1, \ldots, x_j^d) \|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{r=1}^{d} \| (x_j^r)_{j=1}^m \|_{w, p_r}$$

para qualquer natural $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer sequências finitas $x_j^r \in E_r$, $r = 1, \ldots, d$ e $j = 1, \ldots, m$.

O espaço de todos os operadores d-lineares A de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F que são absolutamente $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somantes é denotado por $\prod_{q; p_1, \ldots, p_d} (E_1, \ldots, E_d; F)$ e o ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade acima define uma norma completa neste espaço, denotada por $\pi_{q; p_1, \ldots, p_d}(\cdot)$. É bem conhecido que essa definição é equivalente ao fato do operador A ser $(\ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot); \ell_q(\cdot))$-somante e $\pi_{q; p_1, \ldots, p_d}(A) = \|A\|_{X_1, \ldots, X_d; Y}$ para todo $A \in \prod_{q; p_1, \ldots, p_d} (E_1, \ldots, E_d; F)$.

No Exemplo 2.2.6 vimos que a classe de sequências $\ell_q(\cdot)$ é Z-diagonalizável, qualquer que seja a classe de sequências Z linearmente estável. Logo, um operador multilinear contínuo A é absolutamente $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somante se, e somente se, para qualquer classe de sequências linearmente estável Z, A é

$$(D; \ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot); \ell_q(\cdot), Z, \ldots, Z)\text{-somante}$$

e as normas correspondentes coincidem.

2.2.1.3 Operadores de cotipo q

Os operadores analisados nesta subseção foram introduzidos em [23].

Definição 2.2.9. Dado $1 \leq q < \infty$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ tem *cotipo* q se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todas d-uplas $(x_j^1, \ldots, x_j^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\| \left(A(x_j^1, \ldots, x_j^d) \right)_{j=1}^m \|_q \leq C \prod_{r=1}^{d} \| (x_j^r)_{j=1}^m \|_{\mathrm{Rad}(E_r)}.$$

O ínfimo das constantes C define uma norma no espaço $\mathcal{C}_q^d(E_1, \ldots, E_d; F)$ de todos os operadores d-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F que possuem cotipo q. Com a notação da Definição 2.2.1 em mente, em [23, Theorem 2.6] é provado que

$$\mathcal{C}_q^d(E_1, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}_{\mathrm{Rad}(\cdot), \ldots, \mathrm{Rad}(\cdot); \ell_q(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F)$$

com igualdade de normas. Dado que $\ell_q(\cdot)$ é Z-diagonalizável, para qualquer classe de sequências linearmente estável Z, pelo Corolário 2.2.7, temos

$$\mathcal{C}_q^d(E_1,\ldots,E_d;F) = \mathcal{L}_{D;\mathrm{Rad}(\cdot),\ldots,\mathrm{Rad}(\cdot);\ell_q(\cdot),Z,\ldots,Z}(E_1,\ldots,E_d;F)$$

e as normas correspondentes coincidem.

2.2.2 Operadores múltiplo somantes: o bloco $\mathbb{N}^d$

Nessa seção iremos considerar o conjunto de índices como sendo o bloco $\mathbb{N}^d$. Neste caso, para quaisquer $j_1\ldots,j_{d-1}\in\mathbb{N}$, temos

$$(\mathbb{N}^d)^{j_1,\ldots,j_{d-1}} = \mathbb{N}.$$

Logo, dado um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ e sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty$ em E_r, $r=1,\ldots,d$, temos

$$\begin{aligned}\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d\in(\mathbb{N}^d)^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^\infty\cdots\right)_{j_1=1}^\infty &=\\ =\left(\cdots\left(A\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d=1}^\infty\cdots\right)_{j_1=1}^\infty&.\end{aligned} \tag{2.14}$$

A primeira definição de operador múltiplo somante surge no trabalho [54] de M. Matos, e de forma independente e quase simultânea, na tese de doutorado [68] de D. Pérez-García (os principais resultados da tese foram publicados em [19, 69]). Essa talvez seja a classe de operadores multilineares somantes mais estudada na literatura.

Definição 2.2.10. Sejam $1\le p_1,\ldots,p_d\le q<\infty$. Um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é dito *múltiplo* $(q;p_1,\ldots,p_d)$*-somante* se existir uma constante $C>0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_d=1}^{m_1,\ldots,m_d}\|A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\prod_{r=1}^d\|(x_j^r)_{j=1}^{m_r}\|_{w,p_r}$$

para quaisquer $m_1,\ldots,m_d\in\mathbb{N}$ e sempre que tomamos sequências finitas $x_{j_r}^r\in E_r$, para $r=1,\ldots,d$ e $j_r=1,\ldots,m_r$.

Esta definição é equivalente ao operador A satisfazer

$$\left(A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^\infty\in\ell_q(F)$$

para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty\in\ell_{p_r}^w(E_r)$, $r=1,\ldots,d$.

A classe descrita acima se encaixa no caso isotrópico. Estudaremos primeiro o caso anisotrópico e depois veremos que o caso isotrópico acima é recuperado como caso particular. O caso anisotrópico definido abaixo foi estudado, por exemplo, em [3, 6, 7, 13].

Definição 2.2.11. Dados $1 \leq p_1, \ldots, p_d, q_1, \ldots, q_d < \infty$ com $p_r \leq q_r$, $r = 1, \ldots, d$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é *múltiplo* $(q_1, \ldots, q_d; p_1, \ldots, p_d)$*-somante* se vale a seguinte implicação: $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$ implica que

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\cdots\left(\sum_{j_d=1}^{\infty}\|A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\|_F^{q_d}\right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}<\infty.$$

Procedendo exatamente como fizemos em (1.1) e aplicando (2.14) para este caso específico, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\cdots\left(\sum_{j_d=1}^{\infty}\|A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\|_F^{q_d}\right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\\
&=\left\|\left(\cdots\left(A\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{q_1}(\cdots\ell_{q_d}(F)\cdots)}^{q_1}\\
&=\left\|\left(\cdots\left(\left(A\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d\in(\mathbb{N}^d)^{j_1,\ldots,j_{d-1}}}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{q_1}(\cdots\ell_{q_d}(F)\cdots)}^{q_1}.
\end{aligned}$$

Concluímos então que A é múltiplo $(q_1, \ldots, q_d; p_1, \ldots, p_d)$-somante se, e somente se, A é $(\mathbb{N}^d; \ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_d}(\cdot))$ -somante. Mais ainda, a norma é dada pela norma do operador induzido

$$\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\colon \ell_{p_1}^w(E_1)\times\cdots\times\ell_{p_d}^w(E_d)\longrightarrow\ell_{q_1}(\cdots\ell_{q_d}(F)\cdots),$$

$$\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)=\left(\cdots\left(A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_d}^d)\right)_{j_d=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}.$$

Resgatamos assim a classe dos operadores múltiplo $(q_1, \ldots, q_d; p_1, \ldots, p_d)$-somantes como caso particular da nossa construção. Resta apenas verificar que a hipótese sobre os parâmetros na Definição 2.2.11 é equivalente à condição de compatibilidade das classes de sequências envolvidas.

Proposição 2.2.12. *Sejam* $p_1, \ldots, p_d, q_1, \ldots, q_d \in [1, \infty)$*. Então* $p_m \leq q_m$*,* $m = 1, \ldots, d$ *se, e somente se,* $(\mathbb{N}^d; \ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot), \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_d}(\cdot))$ *é compatível.*

Demonstração. Por um lado, se $(\ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot), \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_d}(\cdot))$ é $\mathbb{N}^d$-compatível, então para quaisquer sequências $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(\mathbb{K}) = \ell_{p_r}$, $r = 1, \ldots, d$ tem-se

$$\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d=1}^{\infty}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\in\ell_{q_1}(\cdots\ell_{q_d}(\mathbb{K})\cdots)$$

e

$$\left\|\left(\cdots\left(\left(\lambda_{j_1}^1\cdots\lambda_{j_d}^d\right)_{j_d=1}^{\infty}\right)_{j_{d-1}=1}^{\infty}\cdots\right)_{j_1=1}^{\infty}\right\|_{\ell_{q_1}(\cdots\ell_{q_d}(\mathbb{K})\cdots)}\leq\prod_{r=1}^{d}\|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}^w(\mathbb{K})}.$$

Em particular, considerando $m \in \{1, \ldots, d\}$, $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty} = e_1$, para $r \in \{1, \ldots, d\} \backslash \{m\}$, e $(\lambda_j^m)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_m}$ uma sequência de escalares qualquer, temos

$$\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d = \begin{cases} \lambda_{j_m}^m, & \text{se } j_r = 1, r \in \{1, \ldots, d\} \backslash \{m\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\infty > \|(\lambda_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{p_m} &= \|(\lambda_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_{p_m}^w(\mathbb{K})} = \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_{p_r}^w(\mathbb{K})} \\
&\geq \left\| \left(\cdots \left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_d}(\mathbb{K}) \cdots)} \\
&= \left\| \left(\cdots \left(\lambda_{j_m}^m \ldots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_m=1}^{\infty} \cdot e_1 \cdot \overset{m-1}{\cdots} \cdot e_1 \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_d}(\mathbb{K}) \cdots)} \\
&= \left\| \left(\ldots \left(\lambda_{j_m}^m \ldots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_m=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_m}(\cdots \ell_{q_d}(\mathbb{K}) \cdots)} \\
&= \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{\infty} \cdots \left(\sum_{q_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_m}^m \ldots \lambda_{j_d}^d|^{q_d} \right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}} \cdots \right)^{\frac{q_m}{q_{m+1}}} \right)^{\frac{1}{q_m}} = \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} |\lambda_{j_m}^m|^{q_m} \right)^{\frac{1}{q_m}},
\end{aligned}$$

ou seja, $(\lambda_j^m)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_m}$. Portanto, $\ell_{p_m} \subseteq \ell_{q_m}$ e, consequentemente, $p_m \leq q_m$.

Por outro lado, dadas $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_r}^w(\mathbb{K}) = \ell_{p_r} \subseteq \ell_{q_r}$, $r = 1, \ldots, d$, e fixados $j_1, \ldots, j_{d-1} \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d|^{q_d} = |\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_{d-1}}^{d-1}|^{q_d} \cdot \sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_d}^d|^{q_d} < \infty,$$

ou seja, $\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d\right)_{j_d=1}^{\infty} \in \ell_{q_d}$ e

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\cdots \left(\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\ell_{q_2} \cdots (\ell_{q_d}) \cdots)}^{q_d} = \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \cdots \left(\sum_{j_{d-1}=1}^{\infty} \left\| \left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \right\|_{q_d}^{q_{d-1}} \right)^{\frac{q_{d-2}}{q_{d-1}}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \cdots \left(\sum_{j_{d-1}=1}^{\infty} \left(\sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d|^{q_d} \right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}} \right)^{\frac{q_{d-2}}{q_{d-1}}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} |\lambda_{j_1}^1|^{q_1} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} |\lambda_{j_2}^2|^{q_2} \cdots \left(\sum_{j_{d-1}=1}^{\infty} |\lambda_{j_{d-1}}^{d-1}|^{q_{d-1}} \left(\sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_d}^d|^{q_d} \right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}} \right)^{\frac{q_{d-2}}{q_{d-1}}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} |\lambda_{j_1}^1|^{q_1} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} |\lambda_{j_2}^2|^{q_2} \cdots \left(\sum_{j_{d-1}=1}^{\infty} |\lambda_{j_{d-1}}^{d-1}|^{q_{d-1}} \right)^{\frac{q_{d-2}}{q_{d-1}}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_d}^d|^{q_d} \right)^{\frac{1}{q_d}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} |\lambda_{j_1}^1|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\sum_{j_d=1}^{\infty} |\lambda_{j_d}^d|^{q_d} \right)^{\frac{1}{q_d}} \\
&= \|(\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty}\|_{q_1} \cdots \|(\lambda_j^d)_{j=1}^{\infty}\|_{q_d} \leq \|(\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty}\|_{p_1} \cdots \|(\lambda_j^d)_{j=1}^{\infty}\|_{p_d} < \infty,
\end{aligned}
$$

comprovando que

$$
\left(\cdots \left(\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \in \ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_d}(\mathbb{K}) \cdots)
$$

e

$$
\left\| \left(\cdots \left(\left(\lambda_{j_1}^1 \cdots \lambda_{j_d}^d \right)_{j_d=1}^{\infty} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_d}(\mathbb{K}) \cdots)} \leq \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_{p_r}^w(\mathbb{K})}.
$$

□

Retornando ao caso isotrópico da Definição 2.2.10, ao aplicar o caso anisotrópico para $q_1 = \cdots = q_d = q$, obtemos que um operador A é múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somante se, e somente se, A é $(\mathbb{N}^d; \ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot); {}^d\ell_q(\cdot))$-somante, e a normas coincidem. Assim, recuperamos também os operadores $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somantes como caso particular do nosso aparato geral.

2.2.3 Caso intermediário

Nesta seção iremos abordar o caso dos operadores parcialmente somantes introduzidos na tese de doutorado [13], e posteriormente desenvolvido em [3, 6]. Esse é também um caso anisotrópico, mas que considera um subconjunto próprio do $\mathbb{N}^d$, por isso o chamamos de caso intermediário.

Dado $d \in \mathbb{N}$, por partição do conjunto $\{1, \ldots, d\}$ entendemos uma coleção ordenada $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de subconjuntos não vazios dois a dois disjuntos de $\{1, \ldots, d\}$ cuja união é igual a $\{1, \ldots, d\}$. Usaremos a notação $x * e_r$ para denotar a d-upla cujo r-ésimo termo é igual ao elemento x e os demais são iguais a 0.

Definição 2.2.13. [13, Definition 5.1] Fixada uma partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de $\{1, \ldots, d\}$ e dado $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := (p_1, \ldots, p_d, q_1, \ldots, q_k) \in [1, \infty)^{d+k}$, diz-se que um operador d-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_d \longrightarrow F$ é *$\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p})$-somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \left\| A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_s}^r * e_r \right) \right\|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \cdot \prod_{r=1}^{d} \|(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{w, p_r}
$$

para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$.

O ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade acima é denotado por $\pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(A)$. O espaço de todos os operadores que são $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\mathbf{q};\mathbf{p})$-somantes é denotado por $\prod_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,d,\mathcal{I}}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e este é um espaço de Banach munido com a norma $\pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(\cdot)$.

Para todo operador $A \in \prod_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,d,\mathcal{I}}(E_1, \ldots, E_d; F)$, a definição implica que

$$\left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_s}^r * e_r \right) \right)_{j_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \in \ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_k}(F) \cdots) \tag{2.15}$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Assim está bem definido, é d-linear e contínuo o operador induzido $\widehat{A}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})} \colon \ell_{p_1}^w(E_1) \times \cdots \times \ell_{p_d}^w(E_d) \longrightarrow \ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_k}(F) \cdots)$ definido por

$$\widehat{A}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})} \left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^{\infty} \right) = \left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_s}^r * e_r \right) \right)_{j_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty}.$$

Além disso, $\pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}(A) = \|\widehat{A}_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}\|$.

Na definição acima, o conjunto de índices considerado é dado por

$$B = \left\{ \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_s * e_r : j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{N}^d,$$

onde $j_s * e_r$ significa o elemento de $\mathbb{N}^d$ que tem j_s na r-ésima coordenada e 0 nas demais. Então, se considerarmos $d = 1$ resgatamos os operadores lineares absolutamente $(q;p)$-somantes. Quando $d = 2$ e $k = 1$ resgatamos os operadores bilineares absolutamente $(q; p_1, p_2)$-somantes. Se $d = 2$ e $k = 2$ teremos os operadores bilineares múltiplo $(q_1, q_2; p_1, p_2)$-somantes. Logo, para obtermos casos intermediários entre os absolutamente somantes e os múltiplo somantes devemos considerar $d \geq 3$ com $k \neq 1$ e $k \neq d$, pois no caso $k = 1$ recaímos nos operadores absolutamente somantes e no caso $k = d$ recaímos nos operadores múltiplo somantes. Para facilitar a compreensão, veremos no exemplo a seguir alguns exemplos concretos de blocos considerados nesta construção.

Exemplo 2.2.14. Considere o caso em que $d = 3$ e $k = 2$. Então são partições de $\{1, 2, 3\}$ as coleções $\mathcal{I}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ e $\mathcal{I}_3 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$. Associados a essas partições temos, respectivamente, os blocos

- $B_{\mathcal{I}_1} = \left\{ \sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} j_s * e_r : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ (j_1, j_1, j_2) \in \mathbb{N}^3 : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\},$

- $B_{\mathcal{I}_2} = \left\{ \sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} j_s * e_r : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ (j_1, j_2, j_1) \in \mathbb{N}^3 : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\}$ e
- $B_{\mathcal{I}_3} = \left\{ \sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} j_s * e_r : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ (j_2, j_1, j_1) \in \mathbb{N}^3 : j_1, j_2 \in \mathbb{N} \right\}$.

A seguir mostramos dois casos em que os operadores parcialmente somantes são recuperados como casos particulares do nosso aparato geral.

Exemplo 2.2.15. Considere $1 \leq p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 < \infty$, a partição $\mathcal{I} = \{\{1,3\},\{2\}\}$ de $\{1,2,3\}$ e o bloco de $\mathbb{N}^d$ dado por $B = \{(j_1, j_2, j_1) : j_1, j_2 \in \mathbb{N}\}$. Então, neste caso, para cada $j_1 \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$B^{j_1,j_2} = \{j_3 \in \mathbb{N} : (j_1, j_2, j_3) \in B\} = \{j_3 \in \mathbb{N} : j_3 = j_1\} = \{j_1\}.$$

Logo, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3; F)$ é $(B; \ell_{p_1}^w(\cdot), \ell_{p_2}^w(\cdot), \ell_{p_3}^w(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ell_{q_2}(\cdot), \ell_\infty(\cdot))$-somante se para quaisquer sequências $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_1}^w(E_1)$, $(x_j^2)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_2}^w(E_2)$ e $(x_j^3)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_3}^w(E_3)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\ell_{q_1}(\ell_{q_2}(\ell_\infty(F))) \ni \left(\left(\left(A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, x_{j_3}^3\right) \right)_{j_3 \in B^{j_1,j_2}} \right)_{j_2=1}^\infty \right)_{j_1=1}^\infty &= \\
= \left(\left(\left(A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, x_{j_3}^3\right) \right)_{j_3 \in \{j_1\}} \right)_{j_2=1}^\infty \right)_{j_1=1}^\infty & \\
= \left(\left(A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, x_{j_1}^3\right) \cdot e_{j_1} \right)_{j_2=1}^\infty \right)_{j_1=1}^\infty &,
\end{aligned}$$

o que equivale a dizer que

$$\begin{aligned}
\infty &> \left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, x_{j_1}^3\right) \cdot e_{j_1} \right\|_{\ell_\infty(F)}^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, x_{j_1}^3\right) \right\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(x_{j_1}^1 * e_1 + x_{j_2}^2 * e_2 + x_{j_1}^3 * e_3\right) \right\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(\sum_{r \in \{1,3\}} \left(x_{j_1}^r * e_r\right) + \sum_{r \in \{2\}} \left(x_{j_2}^r * e_r\right) \right) \right\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(\sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} x_{j_s}^r * e_r \right) \right\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, o operador induzido $\widehat{A}_B$ está bem definido, é 3-linear e contínuo. Consequentemente

$$\left(\sum_{j_1=1}^\infty \left(\sum_{j_2=1}^\infty \left\| A\left(\sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} x_{j_s}^r * e_r \right) \right\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(\left(\left(A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, x^3_{j_3} \right) \right)_{j_3 \in B^{j_1,j_2}} \right)_{j_2=1}^{\infty} \right)_{j_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\ell_{q_2}(\ell_\infty(F)))} \\
&\leq \|\widehat{A}_B\| \prod_{r=1}^{3} \|(x^r_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p_r},
\end{aligned}
$$

ou seja, A é $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(q_1, q_2; p_1, p_2, p_3)$-somante.

Exemplo 2.2.16. Trocando a partição do exemplo anterior por $\mathcal{I} = \{\{1,2\},\{3\}\}$ e o bloco por $B = \{(j_1, j_1, j_2) : j_1, j_2 \in \mathbb{N}\}$ temos

$$
B^{j_1,j_2} = \{j_3 \in \mathbb{N} : (j_1, j_2, j_3) \in B\} = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{se } j_1 = j_2, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Assim, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3; F)$ é $(B; \ell^w_{p_1}(\cdot), \ell^w_{p_2}(\cdot), \ell^w_{p_3}(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ell_\infty(\cdot), \ell_{q_2}(\cdot))$-somante se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
\infty &> \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left\| \left(\left(A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, x^3_{j_3} \right) \right)_{j_3 \in B^{j_1,j_2}} \right)_{j_2=1}^{\infty} \right\|^{q_1}_{\ell_\infty(\ell_{q_2}(F))} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left\| \left(A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_1}, x^3_{j_3} \right) \right)_{j_3=1}^{\infty} \cdot e_{j_1} \right\|^{q_1}_{\ell_\infty(\ell_{q_2}(F))} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left\| \left(A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_1}, x^3_{j_3} \right) \right)_{j_3=1}^{\infty} \right\|^{q_1}_{\ell_{q_2}(F)} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_3=1}^{\infty} \left\| A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_1}, x^3_{j_3} \right) \right\|^{q_2}_{F} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left\| A\left(x^1_{j_1}, x^2_{j_1}, x^3_{j_2} \right) \right\|^{q_2}_{F} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left\| A\left(\sum_{s=1}^{2} \sum_{r \in I_s} x^r_{j_s} * e_r \right) \right\|^{q_2}_{F} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned}
$$

para quaisquer sequências $(x^1_j)_{j=1}^\infty \in \ell^w_{p_1}(E_1)$, $(x^2_j)_{j=1}^\infty \in \ell^w_{p_2}(E_2)$ e $(x^3_j)_{j=1}^\infty \in \ell^w_{p_3}(E_3)$, ou seja, A é $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(q_1, q_2; p_1, p_2, p_3)$-somante.

Os dois últimos exemplos mostram o caminho para que, dada uma partição e seu respectivo bloco, consigamos recuperar como caso particular da nossa construção os operadores parcialmente múltiplo somante com respeito à partição dada. Porém não conseguimos uma justificativa geral que faça esse trabalho para qualquer partição. Essa limitação, de nossa parte, e também a restrição de diagonalização imposta na Seção 2.2.1.1, abrem caminho para a nossa segunda proposta, a ser construída no Capítulo 3, que superará

2.3 Um teorema de coincidência

Tanto na teoria linear quanto na teoria não linear de classes especiais de operadores, os teoremas de coincidência é um tema central. São teoremas que estabelecem condições, sobre os parâmetros ou sobre os espaços, para que todos os operadores lineares/multilineares pertençam a uma determinada classe especial de operadores. O primeiro resultado de coincidência conhecido na teoria multilinear, conhecido como Teorema de Defant-Voigt, afirma que toda forma multilinear, ou seja, todo operador multilinear tomando valores no corpo de escalares, é absolutamente $(1; 1, \ldots, 1)$-somante (veja [12] ou [30, Corollary 3.2]). Muitos outros teoremas de coincidência surgiram desde então e, na verdade, essa linha de pesquisa tem sido uma das forças motrizes do desenvolvimento da teoria.

O objetivo desta seção é mostrar que nossa abordagem pode ser usada para obter resultados gerais de coincidência. Fazemos isso generalizando o caso bilinear de um teorema da coincidência provado em [31] para operadores múltiplo somantes.

Continuamos denotando por BAN a classe de todos os espaços de Banach (reais ou complexos). Dadas classes de sequências X e Y e um espaço de Banach F, adotaremos a seguinte terminologia:

$$\mathcal{B}(X, Y, F) = \{E \in \mathrm{BAN}; \mathcal{L}(E; Y(F)) = \mathcal{L}_{X,Y}(E; Y(F))\},$$
$$\mathcal{C}(X, Y, F) = \{E \in \mathrm{BAN}; \mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)\}.$$

O resultado a seguir mostra como coincidências lineares implicam em coincidências bilineares.

Teorema 2.3.1. *Sejam X_1, X_2, Y classes de sequências, $B = \mathbb{N}^2$, F um espaço de Banach, $E_1 \in \mathcal{B}(X_1, Y, F)$ e $E_2 \in \mathcal{C}(X_2, Y, F)$. Então todo operador bilinear contínuo de $E_1 \times E_2$ em F é $(\mathbb{N}^2; X_1, X_2; Y, Y)$-somante. Mais ainda, se existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $\|u\|_{X_1;Y} \leq C_1\|u\|$ e $\|v\|_{X_2;Y} \leq C_2\|v\|$ para quaisquer $u \in \mathcal{L}(E_1; Y(F))$ e $v \in \mathcal{L}(E_2; F)$, então $\|A\|_{\mathbb{N}^2;X_1,X_2;Y,Y} \leq C_1C_2\|A\|$ para todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.*

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(E_1)$ e $(x_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(E_2)$. Para $x \in E_1$, considere o operador linear contínuo

$$A_x \colon E_2 \longrightarrow F \ , \ A_x(y) = A(x, y).$$

Como, por hipótese, $E_2 \in \mathcal{C}(X_2, Y, F)$, temos $\mathcal{L}(E_2; F) = \mathcal{L}_{X_2;Y}(E_2; F)$. Logo, $A_x \in \mathcal{L}_{X_2;Y}(E_2; F)$ e, consequentemente, $(A_x(x_j^2))_{j=1}^\infty \in Y(F)$. Segue que o operador

$$T \colon E_1 \longrightarrow Y(F) \ , \ T(x) = (A_x(x_j^2))_{j=1}^\infty,$$

está bem definido e, devido à bilinearidade de A, é linear. Para concluir que T é contínuo, considere $(z_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência convergente a z em E_1 tal que $T(z_j) \xrightarrow{j} w = (a_1, a_2, \ldots)$

em $Y(F)$. Da condição $Y(F) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(F)$ segue que convergência em $Y(F)$ implica convergência coordenada a coordenada. Logo, $A(z_j, x^2_{j_2}) = A_{z_j}(x^2_{j_2}) \xrightarrow{j} a_{j_2}$, para todo $j_2 \in \mathbb{N}$. Mas, a continuidade de A implica em $A(z_j, x^2_{j_2}) \xrightarrow{j} A(z, x^2_{j_2}) = A_z(x^2_{j_2})$. Logo, pela unicidade do limite, $A_z(x^2_{j_2}) = a_{j_2}$, para todo $j_2 \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$T(z) = (A_z(x^2_{j_2}))_{j_2=1}^\infty = (a_{j_2})_{j_2=1}^\infty = w$$

e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, T é contínuo.

Da hipótese $E_1 \in \mathcal{B}(X_1, Y, F)$ e da conclusão $T \in \mathcal{L}(E_1; Y(F))$ segue que $T \in \mathcal{L}_{X_1;Y}(E_1; Y(F))$. Logo, dado que $(x^1_j)_{j=1}^\infty \in X_1(E_1)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\left(A(x^1_{j_1}, x^2_{j_2})\right)_{j_2=1}^\infty\right)_{j_1=1}^\infty &= \left(\left(A_{x^1_{j_1}}(x^2_{j_2})\right)_{j_2=1}^\infty\right)_{j_1=1}^\infty \\ &= \left(A(x^1_{j_1})\right)_{j_1=1}^\infty \in Y(Y(F)).\end{aligned}$$

Portanto $A \in \mathcal{L}_{B;X_1,X_2,{}^2Y}(E_1, E_2; F)$. A desigualdade de normas segue de

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{A}_B\left((x^1_j)_{j=1}^\infty, (x^2_j)_{j=1}^\infty\right)\right\| &= \left\|\left(\left(A(x^1_{j_1}, x^2_{j_2})\right)_{j_2=1}^\infty\right)_{j_1=1}^\infty\right\| \\
&= \left\|\left(T(x^1_{j_1})\right)_{j_1=1}^\infty\right\| \\
&= \left\|\widehat{T}((x^1_j)_{j=1}^\infty)\right\| \\
&\le \|\widehat{T}\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&= \|T\|_{X_1;Y} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&\le C_1 \cdot \|T\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&= C_1 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|T(x)\|_{Y(F)} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&= C_1 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|\left(A_x(x^2_j)\right)_{j=1}^\infty\|_{Y(F))} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&= C_1 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|\widehat{A}_x\left((x^2_j)_{j=1}^\infty\right)\|_{Y(F))} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&\le C_1 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|\widehat{A}_x\| \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \\
&= C_1 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|A_x\|_{X_2;Y} \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)} \\
&\le C_1C_2 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \|A_x\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)} \\
&= C_1C_2 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \sup_{y \in B_{E_2}} \|A_x(y)\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)} \\
&= C_1C_2 \cdot \sup_{x \in B_{E_1}} \sup_{y \in B_{E_2}} \|A(x,y)\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)} \\
&= C_1C_2 \cdot \|A\| \cdot \|(x^1_j)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)} \cdot \|(x^2_j)_{j=1}^\infty\|_{X_2(E_2)}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|A\|_{B;X_1;X_2;{}^2Y} = \|\widehat{A}_B\| \le C_1C_2 \cdot \|A\|$. □

No corolário a seguir, considerando $X_1 = \ell_p^w(\cdot)$, $X_2 = \ell_r^w(\cdot)$ e $Y = \ell_q(\cdot)$ no teorema acima, e também a recuperação dos operadores múltiplo somantes na nossa construção feita na Seção 2.2.2, recuperamos o caso bilinear do resultado [31, Theorem 2.1] e todas as suas consequências.

Corolário 2.3.2. *Sejam $p, r \in [1, q]$ e F um espaço de Banach. Se todo operador linear de E_1 em $\ell_q(F)$ é absolutamente $(q; r)$-somante e todo operador linear de E_2 em F é absolutamente $(q; p)$-somante, então todo operador bilinear de $E_1 \times E_2$ em F é múltiplo $(q; r, p)$- somante.*

Capítulo 3

A segunda construção

Neste capítulo apresentaremos a segunda proposta de construção dos operadores multilineares somantes por blocos definidos por transformações de sequências vetoriais. As motivações para esse estudo foram as limitações encontradas no capítulo anterior para recuperar algumas classes de operadores já estudados na literatura. Com o estudo empreendido neste capítulo seremos capazes de recuperar todos os casos já estudados.

3.1 A construção

A partir de agora, d e k são números naturais com $1 \leq k \leq d$, $(j^1, \ldots, j^d)$ é um elemento de $\mathbb{N}^d$, $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ é uma partição de $\{1, \ldots, d\}$, isto é, uma coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, d\}$ dois a dois disjuntos cuja união é igual a $\{1, \ldots, d\}$.

Por $x \cdot e_j$ denotaremos a sequência $(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$ que possui x na j-ésima coordenada e 0 nas demais, e por $x * e_j$ denotaremos a d-upla $(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$ onde o elemento x aparece na j-ésima posição.

Iremos dividir essa seção em duas partes. Na primeira explicaremos o que entendemos por bloco de $\mathbb{N}^d$, enquanto na segunda iremos apresentar os operadores que são $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somantes, onde $B_{\mathcal{I}}$ é o que denominaremos de bloco.

3.1.1 Os blocos de $\mathbb{N}^d$

Definição 3.1.1. Considere a partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de $\{1, \ldots, d\}$ fixada e também d sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, tais que a correspondência

$$(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mapsto \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r \in \mathbb{N}^d \tag{3.1}$$

seja injetiva. A imagem dessa correspondência, isto é, o subconjunto de $\mathbb{N}^d$ definido por

$$B_{\mathcal{I}} = \left\{ \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r \in \mathbb{N}^d : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.2}$$

é chamado de *bloco de* $\mathbb{N}^d$ *associado à partição* $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ *e às sequências* $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$.

Quando escrevermos simplesmente que B é um *bloco de* $\mathbb{N}^d$ estará implícito que B é um bloco de $\mathbb{N}^d$ associado a alguma partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ e algum conjunto de sequências $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$.

A compreensão da construção empreendida neste capítulo depende fortemente do entendimento da expressão $\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r$ que aparece na Definição (3.1.1). Essa soma finita representa um elemento $(j_{m_1}^1, \ldots, j_{m_d}^d) \in \mathbb{N}^d$, onde $m_n = m_l = n_s$ para algum $s \in \{1, \ldots, k\}$ e sempre que $n, l \in I_s$, ou seja, cada número natural $j_{m_r}^r$ está indexado pelo índice $m_r = n_s$ para todo $r \in I_s$. Além disso, a exigência de injetividade se faz necessária para que cada posição do bloco seja percorrida apenas uma única vez (veja, por exemplo, seção 3.3). A intenção dessa abordagem não é a verificação exaustiva da injetividade da expressão (3.1). Estaremos interessados em, dado um subconjunto B de $\mathbb{N}^d$, encontrar uma partição de $\{1, \ldots, d\}$ e d sequências de números naturais tais que B seja um bloco de $\mathbb{N}^d$ associado à partição e às sequências.

Vejamos alguns exemplos de blocos que serão essenciais para a continuidade do trabalho e que também contribuirão para um melhor entendimento da expressão $\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r$.

Exemplo 3.1.2. Considerando uma partição qualquer $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de $\{1, \ldots, d\}$ e as sequências $(j_n^1)_{n=1}^{\infty} = \cdots = (j_n^d)_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$, a correspondência (3.1) tem a forma

$$\begin{aligned}(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mapsto \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r &= \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} n_s * e_r \\ &= \sum_{r \in I_1} n_1 * e_r + \cdots + \sum_{r \in I_k} n_k * e_r,\end{aligned}$$

que é injetiva, pois se

$$\sum_{r \in I_1} n_1 * e_r + \cdots + \sum_{r \in I_k} n_k * e_r = \sum_{r \in I_1} m_1 * e_r + \cdots + \sum_{r \in I_k} m_k * e_r,$$

comparando coordenada a coordenada, temos $n_1 = m_1$ para todo $r \in I_1, \ldots,$ $n_k = m_k$ para todo $r \in I_k$, ou seja, $(n_1, \ldots, n_k) = (m_1, \ldots, m_k)$.

No caso de uma partição qualquer, o bloco

$$B_{\mathcal{I}} = \left\{ \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} n_s * e_r : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\}$$

será utilizado na Seção 3.2.3. Esse bloco também será utilizado no caso de duas partições específicas. Denotando por $\mathcal{I}_t := \{\{1, \ldots, d\}\}$ a partição trivial, temos

$$B_{\mathcal{I}_t} := D(\mathbb{N}^d) = \{(j, \ldots, j) \in \mathbb{N}^d\},$$

que é a diagonal em $\mathbb{N}^d$. No extremo oposto, denotando por $\mathcal{I}_d := \{\{r\} : r = 1, \dots, d\}$ a partição discreta, o bloco correspondente é todo o $\mathbb{N}^d$, isto é, $B_{\mathcal{I}_d} = \mathbb{N}^d$.

Exemplo 3.1.3. Vejamos que, fixada uma partição $\mathcal{I}$, nem todo subconjunto B de $\mathbb{N}^d$ é um bloco associado a $\mathcal{I}$. Por exemplo, se a diagonal $D(\mathbb{N}^3)$ fosse um bloco associado à partição $\mathcal{I} = \{\{1,2\},\{3\}\}$, existiriam sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1,2,3$, tais que $D(\mathbb{N}^3)$ seria um bloco associado a $\mathcal{I}$ e essas sequências. Nesse caso, para cada $j \in \mathbb{N}$ existiria um único $(n_1(j), n_2(j)) \in \mathbb{N}^2$ tal que $(j,j,j) = (j^1_{n_1(j)}, j^2_{n_1(j)}, j^3_{n_2(j)})$, ou seja, $j^1_{n_1(j)} = j^2_{n_1(j)} = j^3_{n_2(j)} = j$ para todo j. Assim, a imagem de $(n_1(1), n_2(2)) \in \mathbb{N}^2$ pela correspondência (3.1) seria $(j^1_{n_1(1)}, j^2_{n_1(1)}, j^3_{n_2(2)}) = (1,1,2) \notin D(\mathbb{N}^3)$.

Exemplo 3.1.4. Veremos agora que, felizmente, todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}^d$ é um bloco no sentido da Definição 3.1.1. Vejamos, por exemplo, que para qualquer subconjunto infinito B de $\mathbb{N}^d$ existem sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1, \dots, d$, tais que B é um bloco associado à partição trivial $\mathcal{I}_t$ e às sequências $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1, \dots, d$. De fato, sendo B infinito existe uma bijeção $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow B$ e para cada $(j^1, \dots, j^d) \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(j^1, \dots, j^d) = \sigma(n)$. Para todos $r \in \{1, \dots, d\}$ e $n \in \mathbb{N}$, defina j_n^r como sendo a r-ésima coordenada de $\sigma(n)$. Logo, a correspondência (3.1) tem a forma

$$n \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{r=1}^{d} j_n^r * e_r = j_n^1 * e_1 + \cdots + j_n^d * e_d = (j_n^1, \dots, j_n^d) = \sigma(n) \in B,$$

ou seja, é a própria bijeção σ. Temos dai a injetividade e $B_{\mathcal{I}_t} = \{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}^d\} = B$.

Em particular, toda *linha* e toda *coluna* de $\mathbb{N}^d$ são blocos.

Formalmente, pelo exemplo acima, podemos nos restringir à partição trivial. Não faremos isso pois muitas vezes, como veremos, é mais fácil reconhecer um determinado subconjunto de $\mathbb{N}^d$ como bloco associado a uma outra partição.

O último exemplo nos mostra que nem todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}^d$ pode ser visto como um bloco associado à partição discreta.

Exemplo 3.1.5. Chamemos de B a primeira coluna em $\mathbb{N}^2$, isto é, $B = \{(j,1) : j \in \mathbb{N}\}$. Pelo exposto no Exemplo 3.1.4, tomando $j_n^1 = n$ e $j_n^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, B se torna um bloco associado à partição $\mathcal{I}_t$ e às sequências $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1,2$. De fato,

$$B_{\mathcal{I}_t} = \left\{ \sum_{r \in \{1,2\}} j_n^r * e_r : n \in \mathbb{N} \right\} = \{(j_n^1, j_n^2) : n \in \mathbb{N}\} = \{(n,1) : n \in \mathbb{N}\} = B.$$

Por outro lado, vejamos que não existem sequências $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1,2$, tais que B se torna um bloco associado à partição discreta $\mathcal{I}_d$ e às sequências $(j_n^r)_{n=1}^\infty$. Com efeito, se existissem tais sequências, então existiria um único (n_1, n_2) tal que $(j^1_{n_1}, j^2_{n_2}) = (2,1)$, e portanto $j^1_{n_1} = 2$ e $j^2_{n_2} = 1$. Porém, a imagem de (n_1, n_1) por meio da correspondência (3.1) é $(j^1_{n_1}, j^2_{n_1}) = (2, j^2_{n_1})$. Isso implica que $j^2_{n_1} = 1$, o que é um absurdo pois viola a injetividade da correspondência.

A partir de agora estão fixados os naturais $1 \leq k \leq d$, uma partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de $\{1, \ldots, d\}$, sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, satisfazendo as condições da Definição 3.1.1 e, consequentemente, o bloco $B_{\mathcal{I}}$ associado a essa partição e a essas sequências.

3.1.2 Operadores $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somantes

As principais inspirações para a próxima definição são os trabalhos de Araújo e Pellegrino [13, 14], de Alburquerque e outros [3, 11] e também na seção do Capítulo 2 sobre operadores parcialmente somantes.

A partir de agora, $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$, com $k \leq d$, são classes de sequências fixadas.

Definição 3.1.6. Um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d;\ Y_1, \ldots, Y_k)$-somante se

$$\left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \in Y_1(\cdots Y_k(F) \cdots), \tag{3.3}$$

para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$.

Novamente, quando a partição $\mathcal{I}$ é a partição trivial $\mathcal{I}_t$, isto é, $k = 1$ e $\mathcal{I}_t = \{1, \ldots, d\}$, dizemos que estamos no caso isotrópico. Os outros casos são chamados de anisotrópicos.

Na d-upla $\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r \in E_1 \times \cdots \times E_d$ que aparece em (3.3), para cada $s \in \{1, \ldots, k\}$ os elementos que estão nas coordenadas r, para $r \in I_s$, estão sendo indexados por $j_{n_s}^r$ e cada um destes está indexados por n_s, ou seja, os índices das coordenadas r estão indexados pelo mesmo valor n_s. Os próximos exemplos ajudam a entender melhor a expressão $\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r$, e também serão usados no decorrer do trabalho.

Nos exemplos a seguir estamos supondo que as sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, estão dadas.

Exemplo 3.1.7. Considerando $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ uma partição qualquer de $\{1, \ldots, d\}$ e as d sequências de números naturais $(j_n^1)_{n=1}^{\infty} = \cdots = (j_n^d)_{j=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$, a expressão (3.3) tem a forma

$$\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r = \sum_{r \in I_1} x_{n_1}^r * e_r + \cdots + \sum_{r \in I_k} x_{n_k}^r * e_r,$$

ou seja, todos os vetores que estão na coordenada $r \in I_s$ estão indexados por n_s, para todo $s = 1, \ldots, k$.

Tomemos a partição trivial $\mathcal{I}_t$. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_n^r \in E_r$, $r = 1, \ldots, d$,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r &= \sum_{r \in \{1,\ldots,d\}} x_n^r * e_r \\ &= x_n^1 * e_1 + \cdots + x_n^d * e_d \\ &= (x_n^1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n^d) \\ &= (x_n^1, \ldots, x_n^d).\end{aligned}$$

Tomemos agora a partição discreta $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$, isto é, $\mathcal{I}_d = \{I_1, \ldots, I_d\}$ com $I_r = \{r\}$, $r = 1, \ldots, d$. Para quaisquer $n_r \in \mathbb{N}$ e $x^r_{n_r} \in E_r$, $r = 1, \ldots, d$,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r &= \sum_{s=1}^{d} \sum_{r \in I_s} x^r_{n_s} * e_r \\ &= \sum_{r \in I_1} x^r_{n_1} * e_r + \cdots + \sum_{r \in I_d} + x^r_{n_d} * e_r \\ &= \sum_{r \in \{1\}} x^r_{n_1} * e_r + \cdots + \sum_{r \in \{d\}} x^r_{n_d} * e_r \\ &= x^1_{n_1} * e_1 + \cdots + x^d_{n_d} * e_d \\ &= (x^1_{n_1}, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x^d_{n_d}) \\ &= (x^1_{n_1}, \ldots, x^d_{n_d}).\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.8. Considere a partição trivial $\mathcal{I}_t$ de $\{1, 2\}$ e as sequências $j_n^1 = n$ e $j_n^2 = 1$ para todo n natural. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $x_n^1 \in E_1$ e $x_1^2 \in E_2$, temos

$$\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r = \sum_{r \in \{1,2\}} x^r_{j^r_n} * e_r = (x^1_{j^1_n}, x^2_{j^2_n}) = (x_n^1, x_1^2) \in E_1 \times E_2.$$

Por $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ denotaremos a classe de todos os operadores $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ que são $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somantes. As seguintes simplificações serão adotadas:

- $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d)$ no caso em que $F = \mathbb{K}$.
- $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}({}^dE; F)$ no caso em que $E_1 = \cdots = E_d = E$.
- $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{{}^dX;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ no caso em que $X_1 = \cdots = X_d = X$.
- $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;{}^kY}(E_1, \ldots, E_d; F)$ no caso em que $Y_1 = \cdots = Y_k = Y$.

Combinações óbvias dessas simplificações também serão usadas.

Observação 3.1.9. Note que, na Definição 3.1.6, a classe $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ depende da partição tomada e das sequências $(j_n^r)_{j=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, uma vez que a construção do bloco $B_{\mathcal{I}}$ depende também de todos esses elementos. No caso isotrópico, onde a partição tomada é a trivial, para B infinito e conforme descrito no Exemplo 3.1.4, podemos construir as sequências correspondentes de números naturais fixando uma bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow B$. Neste caso, em (3.3) temos uma sequência cujos termos são $A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)$ com $(j_1, \ldots, j_d) \in B$, mas a ordem em que esses termos aparecem na sequência depende de σ. Um caso em que essa dependência da bijeção σ deixa de existir é quando a classe de sequências Y é *simétrica* no seguinte sentido: para qualquer espaço de Banach F e qualquer sequência $(y_j)_{j=1}^\infty$ em F, tem-se $(y_j)_{j=1}^\infty \in Y(F)$ se, e somente se, $(y_{s(j)})_{j=1}^\infty \in Y(F)$ para qualquer permutação $s\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e, sendo assim, $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(F)} = \|(y_{s(j)})_{j=1}^\infty\|_{Y(F)}$. Por exemplo, as classes de sequências $c_0(\cdot), \ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$, $1 \le p \le \infty$, são simétricas. A simetria de espaços de sequências escalares foi tratada em [43].

Observação 3.1.10. Ainda na Definição 3.1.6, nos casos anisotrópicos (ou com somas mistas, ou somas intercaladas), ou seja, onde a partição tomada não é a trivial, temos uma iteração de classes de sequências, $Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$, que surge do número de conjuntos que formam a partição escolhida. Essa iteração, à medida que k cresce, faz com que a manipulação da expressão fique cada vez mais complexa. Essa complexidade ficará evidente na Seção 3.3.2.

A próxima proposição mostra que todo operador $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante induz, de maneira natural, um operador d-linear e contínuo. A existência de tal operador será usada para definir uma norma na classe $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}^{B_{\mathcal{I}}}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e torná-lo um espaço de Banach.

Proposição 3.1.11. *$A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante se, e somente se, o operador induzido*

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\colon X_1(E_1) \times \cdots \times X_d(E_d) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots),$$

definido por

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) = \left(\cdots\left(A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty,$$

está bem definido, é d-linear e contínuo.

Demonstração. Uma implicação é óbvia. Para a implicação inversa, suponha que A seja $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante. É claro que o operador induzido $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ está bem definido. Vejamos, primeiramente, que $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ é linear na m-ésima coordenada, $m \in \{1, \ldots, d\}$. Para isso, sejam λ um escalar e $(x_j^m)_{j=1}^\infty$ e $(y_j^m)_{j=1}^\infty$ sequências em $X_m(E_m)$. Dado que $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ forma uma partição de $\{1, \ldots, d\}$, existe $t \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $m \in I_t$ e, sendo assim, temos

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^m)_{j=1}^\infty+\lambda(y_j^m)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)=$$
$$=\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^m+\lambda y_j^m)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)$$
$$=\left(\cdots\left(A\left((x^m_{j^m_{n_t}}+\lambda y^m_{j^m_{n_t}})*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$=\left(\cdots\left(A\left(x^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\lambda y^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$=\left(\cdots\left(A\left(x^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\lambda A\left(y^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$=\left(\cdots\left(A\left(x^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$+\left(\cdots\left(\lambda A\left(y^m_{j^m_{n_t}}*e_m+\sum_{r\in I_t-\{m\}}x^r_{j^r_{n_t}}*e_r+\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}-\{t\}}\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$=\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^m)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)+\lambda\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(y_j^m)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right),$$

donde concluímos que $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ é linear na m-ésima coordenada. Como m é arbitrário segue que $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ é d-linear.

Para mostrar a continuidade de $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ utilizaremos o Teorema do Gráfico Fechado para operadores multilineares (Teorema 1.1.4). Considere sequências $\overline{x}_l^r=(x_{l,j}^r)_{j=1}^\infty$ e $\overline{x}^r=(x_j^r)_{j=1}^\infty$ em $X(E_r)$ para cada $r\in\{1,\ldots,d\}$ e para todo $l\in\mathbb{N}$, tais que

$$(\overline{x}_l^1,\ldots,\overline{x}_l^d)\xrightarrow{l}(\overline{x}^1,\ldots,\overline{x}^d)\text{ em }X_1(E_1)\times\cdots\times X_d(E_d),\tag{3.4}$$

e

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}(\overline{x}_l^1,\ldots,\overline{x}_l^d)\xrightarrow{l}\left(\cdots(z_{n_1,\ldots,n_k})_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty\text{ em }Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots).\tag{3.5}$$

Para cada $r=1,\ldots,d$, de (3.4) temos $\overline{x}_l^r\xrightarrow{l}\overline{x}^r$ em $X_r(E_r)$. A condição $X_r(\cdot)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(\cdot)$ garante que convergência em classes de sequências implica em convergência coordenada a coordenada. Segue que $x_{l,j}^r\xrightarrow{l}x_j^r$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Como A é contínua, $A\left(x^1_{l,j^1},\ldots,x^d_{l,j^d}\right)\xrightarrow{l}A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)$ em F para quaisquer $j^1,\ldots,j^d\in\mathbb{N}$. Em particular, como $j^r_{n_s}\in\mathbb{N}$, para todo $s\in\{1,\ldots,k\}$ e todo $r\in I_s$,

$$A\left(\sum_{s=1}^k\sum_{r\in I_s}x^r_{l,j^r_{n_s}}*e_r\right)\xrightarrow{l}A\left(\sum_{s=1}^k\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\text{ em }F\tag{3.6}$$

para quaisquer $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}(\overline{x}_l^1, \ldots, \overline{x}_l^d) &= \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}((x_{l,j}^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_{l,j}^d)_{j=1}^{\infty}) \\ &= \left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{l,j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty},\end{aligned}$$

de (3.5) segue que

$$\left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{l,j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \xrightarrow{l} \left(\cdots (z_{n_1,\ldots,n_k})_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty}$$

em $Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$. Então, para quaisquer $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, da convergência coordenada a coordenada segue que

$$A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{l,j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \xrightarrow{l} z_{n_1,\ldots,n_k} \text{ em } F \tag{3.7}$$

e da unicidade do limite em F alinhada com as expressões (3.6) e (3.7) concluímos que $A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r \right) = z_{n_1,\ldots,n_k}$, para quaisquer $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}\left(\cdots (z_{n_1,\ldots,n_k})_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} &= \left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x_{j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \\ &= \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^d),\end{aligned}$$

provando que $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$ é contínuo. □

Utilizaremos a proposição anterior para definir uma norma, que verificaremos ser completa, em $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ por meio do operador induzido.

Definição 3.1.12. Definimos a norma $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante de um operador $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ por

$$\|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} = \|\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\|. \tag{3.8}$$

Considerando

$$\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} := \bigcup_{\substack{E_1, \ldots, E_d, F \\ \text{Banach}}} \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F),$$

o objetivo desta seção é, com poucas e razoáveis hipóteses, mostrar que $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ forma um ideal de Banach de operadores d-lineares munido com a norma (3.8), ou seja, satisfaz todas as condições da Definição 1.3.1. As propriedades serão verificadas em uma ordem conveniente.

Proposição 3.1.13. *Para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d, F$, o conjunto de operadores $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e λ um escalar. Se $(x^r_j)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, então

$$\left(\cdots\left((A_1 + \lambda A_2)\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty =$$
$$= \left(\cdots\left(A_1\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right) + \lambda A_2\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$= \left(\cdots\left(A_1\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty +$$
$$+ \lambda\left(\cdots\left(A_2\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$
$$= \widehat{A_1}_{B_{\mathcal{I}}}((x^1_j)_{j=1}^\infty, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^\infty) + \lambda \widehat{A_2}_{B_{\mathcal{I}}}((x^1_j)_{j=1}^\infty, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^\infty) \in Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots).$$

Isso prova que $(A_1 + \lambda A_2) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$. $\square$

Proposição 3.1.14. *Sejam $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$, $u_r \in \mathcal{L}(G_r; E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, e $v \in \mathcal{L}(F; H)$.*

1. *Se $X_1, \ldots, X_d$ são linearmente estáveis, então*
$$A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(G_1, \ldots, G_d; F).$$
2. *Se $Y_1, \ldots, Y_k$ são linearmente estáveis, então $v \circ A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; H)$.*
3. *Se $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$ são linearmente estáveis, então*
$$v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(G_1, \ldots, G_d; H) \text{ e}$$
$$\|v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d)\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} \leq \|v\| \cdot \|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} \cdot \prod_{r=1}^d \|u_r\|.$$

Demonstração. 1. Para cada $r \in \{1, \ldots, d\}$, dada uma sequência $(x^r_j)_{j=1}^\infty \in X_r(G_r)$, como X_r é linearmente estável e $u_r \in \mathcal{L}(G_r; E_r)$, tem-se $(u_r(x^r_j))_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$. Como $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$, segue que

$$Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots) \ni \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\left((u_1(x^1_j))_{j=1}^\infty, \ldots, (u_d(x^d_j))_{j=1}^\infty\right) =$$
$$= \left(\cdots\left(A\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r\in I_s} u_r(x^r_{j^r_{n_s}}) * e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty$$

$$= \left(\cdots \left(A \circ (u_1, \ldots, u_d) \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty}$$

e isso prova que $A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(G_1, \ldots, G_d; F)$. A igualdade anterior também mostra que

$$(A \circ (u_1, \ldots, u_d))^{\wedge}_{B_{\mathcal{I}}} = \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \circ (\widehat{u_1}, \ldots, \widehat{u_d}),$$

onde, para cada $r = 1, \ldots, d$, $\widehat{u}_r \colon X_r(E_r) \longrightarrow X(F)$ é o operador linear induzido por u_r, isto é, $\widehat{u}_r \left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) = (u_r(x_j))_{j=1}^{\infty}$.

2. Como as classes de sequências $Y_1, \ldots, Y_k$ são linearmente estáveis e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, o operador induzido $\widehat{v} \colon Y_k(F) \longrightarrow Y_k(H)$ está bem definido, é linear, contínuo e $\|\widehat{v}\| = \|v\|$. O mesmo acontece com $\widehat{v}^2 := \widehat{\widehat{v}} \colon Y_{k-1}(Y_k(F)) \longrightarrow Y_{k-1}(Y_k(H))$ e com seus sucessivos operadores induzidos, até chegarmos a um operador induzido $\widehat{v}^k \colon Y_1(\cdots Y_k(F) \cdots) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_k(H) \cdots)$,

$$\widehat{v}^k \left(\cdots (y_{j_1,\ldots,j_k})_{j_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} = \left(\cdots (v(y_{j_1,\ldots,j_k}))_{j_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty},$$

que é linear, contínuo e $\|\widehat{v}^k\| = \|\widehat{v}^{k-1}\| = \cdots = \|\widehat{v}^2\| = \|v\|$. Assim, para quaisquer sequências $(x^r_j)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, como $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$, segue que

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty} \right) \in Y_1(\cdots Y_k(F) \cdots)$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} Y_1(\cdots Y_k(H) \cdots) \ni \widehat{v}^k \circ \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} & \left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty} \right) \\ &= \left(\cdots \left(v \circ A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Logo, $v \circ A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; H)$ e conclui-se da igualdade anterior que $(v \circ A)^{\wedge}_{B_{\mathcal{I}}} = \widehat{v}^k \circ \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$.

3. Sendo X_1, …, X_d, Y_1, …, Y_k linearmente estáveis, dos itens 1. e 2. segue que

$$v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(G_1, \ldots, G_d; H).$$

Já para a desigualdade de normas, também do que foi provado nos itens 1 e 2,

$$\begin{aligned} \|v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d)\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} &= \|(v \circ A \circ (u_1, \ldots, u_d))^{\wedge}_{B_{\mathcal{I}}}\| \\ &= \|\widehat{v}^k \circ \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \circ (\widehat{u_1}, \ldots, \widehat{u_d})\| \\ &\leq \|\widehat{v}^k\| \cdot \|\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|\widehat{u}_r\| \end{aligned}$$

$$= \|v\| \cdot \|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} \cdot \prod_{r=1}^{d} \|u_r\|,$$

o que finaliza a demostração da propriedade de ideal (Mb) da Definição 1.3.1. $\square$

O próximo passo é verificar que a classe $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ contém os operadores de tipo finito. Mas, antes de conter os operadores de tipo finito, para todos $E_1,\ldots,E_d$ e F diferentes de $\{0\}$, o espaço vetorial $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$ deve ser diferente de $\{0\}$. Veremos no próximo resultado uma condição necessária para que isso aconteça, no caso em que as classes de sequências são linearmente estáveis.

Proposição 3.1.15. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_k$ classes de sequências linearmente estáveis e $E_1,\ldots,E_d,F$ espaços de Banach. Se existir $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$ não nulo, então*

$$\left(\cdots \left(\prod_{s=1}^{k} \prod_{r\in I_s} \lambda^r_{j^r_{n_s}} \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \in Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots) \tag{3.9}$$

para quaisquer sequências de escalares $(\lambda^r_j)_{j=1}^\infty \in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$.

Demonstração. Se A é um operador não nulo na classe $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$, então podemos considerar um vetor $(x^1,\ldots,x^d) \in E_1\times\cdots\times E_d$ tal que $A(x^1,\ldots,x^d)\neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional $\psi \in F^*$ que satisfaz $\psi(A(x^1,\ldots,x^d)) = \|A(x^1,\ldots,x^d)\|$. Sendo as classes de sequências $Y_1,\ldots,Y_k$ linearmente estáveis, segue do argumento usado na demonstração do item (2) da Proposição 3.1.14 que, tomando sucessivos operadores induzidos a partir de ψ, o operador $\widehat{\psi}^k\colon Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots) \longrightarrow Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots)$ dado por

$$\widehat{\psi}^k \left(\cdots (y_{j_1,\ldots,j_k})_{j_k=1}^\infty \cdots \right)_{j_1=1}^\infty = \left(\cdots (\psi(y_{j_1,\ldots,j_k}))_{j_k=1}^\infty \cdots \right)_{j_1=1}^\infty,$$

está bem definido, é linear e contínuo. Para cada $r=1,\ldots,d$, podemos considerar os operadores lineares e contínuos $u_r \in \mathcal{L}(\mathbb{K};E_r)$ definidos por $u_r(\lambda) = \lambda x^r$. Como as classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$ são linearmente estáveis, cada operador linear induzido $\widehat{u_r} \in \mathcal{L}(X(\mathbb{K}),X(E_r))$ está bem definido, é linear e contínuo. Pela propriedade de ideal (Mb) provada na Proposição 3.1.14, segue que $\psi\circ A\circ(u_1,\ldots,u_d) \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}({}^d\mathbb{K};\mathbb{K})$. Então, para quaisquer $(\lambda^r_j)_{j=1}^\infty \in X_r(\mathbb{K})$, tem-se

$$\begin{aligned}
Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots) \ni (\psi\circ A\circ(u_1,\ldots,u_d))^{\wedge}_{B_{\mathcal{I}}} &\left((\lambda^1_j)_{j=1}^\infty, \ldots, (\lambda^d_j)_{j=1}^\infty \right) \\
&= \widehat{\psi}^k \circ \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \left(\widehat{u_1}((\lambda^1_j)_{j=1}^\infty), \ldots, \widehat{u_d}((\lambda^d_j)_{j=1}^\infty) \right) \\
&= \widehat{\psi}^k \circ \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} ((\lambda^1_j x^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\lambda^d_j x^d)_{j=1}^\infty) \\
&= \widehat{\psi}^k \left(\left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} \lambda^r_{j^r_{n_s}} x^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^\infty \cdots \right)_{n_1=1}^\infty \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\cdots\left(\psi\circ A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}x^r * e_r\right)\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\\
&= \left(\cdots\left(\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)\psi\circ A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s}x^r * e_r\right)\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\\
&= \left(\cdots\left(\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)\psi\left(A(x^1,\ldots,x^d)\right)\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\\
&= \psi\left(A(x^1,\ldots,x^d)\right)\cdot\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\\
&= \|A(x^1,\ldots,x^d)\|\cdot\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}.
\end{aligned}
$$

Como $Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots)$ é um espaço vetorial e $\|A(x^1,\ldots,x^d)\|\neq 0$ segue que

$$
\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\in Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots).
$$

$\square$

Agora que sabemos que a condição (3.9) é necessária para uma teoria não trivial, vejamos que ela é suficiente para que a classe $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ contenha os operadores de tipo finito.

Proposição 3.1.16. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_k$ classes de sequências linearmente estáveis satisfazendo a condição (3.9). Então a classe $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ contém os operadores de tipo finito.*

Demonstração. Seja $I^d\colon\mathbb{K}^d\longrightarrow\mathbb{K}$ o operador da condição (M2). Dadas sequências de escalares $(\lambda^r_j)_{j=1}^{\infty}\in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$,

$$
\begin{aligned}
I^d\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right) &= I^d\left(\sum_{r\in I_1}\lambda^r_{j^r_{n_1}} * e_r+\cdots+\sum_{r\in I_k}\lambda^r_{j^r_{n_k}} * e_r\right)\\
&= \left(\prod_{r\in I_1}\lambda^r_{j^r_{n_1}}\right)\cdots\left(\prod_{r\in I_k}\lambda^r_{j^r_{n_k}}\right)\\
&= \prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}$. Da condição (3.9) segue que

$$
\left(\cdots\left(I^d\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}=\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty} \tag{3.10}
$$

pertence a $Y_1(\cdots Y_k(\mathbb{K})\cdots)$, provando que I^d é $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante.

Dados $\varphi_r \in E_r^*$, $r = 1, \ldots, d$, e $b \in F$, considerando o operador linear e contínuo $u\colon \mathbb{K} \longrightarrow F$ definido por $u(\lambda) = \lambda b$, temos

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b = u \circ I^d \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_d).$$

Pela Proposição 3.1.14 segue que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes b \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$. O resultado segue pois $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é espaço vetorial. $\square$

Imaginamos que, a essa altura, o leitor esteja convencido da necessidade de supormos a condição (3.9). Como temos ainda que tratar da norma $\|\cdot\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$, nada mais esperado que exigir também a desigualdade de normas associada à condição (3.9).

Definição 3.1.17. Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$ classes de sequências. Dizemos que a $(d+k)$-upla $(X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k)$ é *$B_{\mathcal{I}}$-compatível* se, para quaisquer sequências de escalares $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(\mathbb{K})$, $r = 1, \ldots, d$, ocorrer que

$$\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty} \in Y_1(\cdots(Y_k(\mathbb{K})\cdots) \tag{3.11}$$

e

$$\left\|\left(\cdots\left(\prod_{s=1}^{k}\prod_{r\in I_s}\lambda^r_{j^r_{n_s}}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}\right\|_{Y_1(\cdots(Y_k(\mathbb{K})\cdots)} \le \prod_{r=1}^{d}\|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{X_r(\mathbb{K})}. \tag{3.12}$$

Em alguns casos particulares a condição de compatibilidade soa bem familiar:

Exemplo 3.1.18. Dados $q, p_1, \ldots, p_d \ge 1$, a Desigualdade de Hölder nos diz que a desigualdade $\dfrac{1}{q} \le \dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_d}$ é equivalente ao fato da $(n+1)$-upla $(\ell_{p_1}(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}(\cdot); \ell_q(\cdot))$ ser $\mathbb{N}^d$-compatível.

Veremos mais exemplos disso mais adiante nas Proposições 3.2.1, 3.2.5 e 3.2.15.

Caminharemos agora no sentido de verificar as condições (M1) e (M2) da Definição 1.3.1. Para isso, precisaremos verificar que a norma usual de operadores é sempre menor ou igual a norma $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante, propriedade que é sempre satisfeita para um multi-ideal normado.

Na demostração da próxima proposição precisaremos enxergar um vetor qualquer de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em termos da partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ da seguinte forma: para qualquer $(x^1, \cdots, x^d) \in E_1 \times \ldots \times E_d$ observe que

$$\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x^r * e_r = \sum_{r\in I_1} x^r * e_r + \cdots + \sum_{r\in I_k} x^r * e_r = (x^1, \ldots, x^d). \tag{3.13}$$

Proposição 3.1.19. *Se $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$ são classes de sequências linearmente estáveis, então*

$$\|A\| \leq \|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$$

para todo operador $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$.

Demonstração. Lembremos que $B_{\mathcal{I}}$ é o bloco de $\mathbb{N}^d$ associado à partição $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ e às sequências $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, ou seja, a aplicação (3.1) é injetiva e

$$B_{\mathcal{I}} = \left\{ \sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} j_{n_s}^r * e_r \in \mathbb{N}^d : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dado $(x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$ não nulo, considere as sequências $(y_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$ definidas por

$$y_j^r = \begin{cases} x^r, & \text{se } j = j_1^r \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $r = 1, \ldots, d$, ou seja, $(y_j^r)_{j=1}^{\infty} = x^r \cdot e_{j_1^r}$. Assim, o vetor $\displaystyle\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} y_{j_{n_s}^r}^r * e_r$ possui alguma coordenada nula quando $n_s \neq 1$, para algum $s \in \{1, \ldots, k\}$. Quando $n_1 = \cdots = n_k = 1$, temos $\displaystyle\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} y_{j_{n_s}^r}^r * e_r = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} x^r * e_r$. Dessa forma, aplicando o Lema 1.2.2 repetidas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \left((y_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (y_j^d)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)} = \\
&\qquad = \left\| \left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} y_{j_{n_s}^r}^r * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)} \\
&\qquad = \left\| \left(\cdots \left(\left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} y_{j_1^r}^r * e_r \right) \right) \cdot e_1 \right) \cdots \right) \cdot e_1 \right\|_{Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)} \\
&\qquad = \left\| A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r\in I_s} x^r * e_r \right) \right\|_F \\
&\qquad = \left\| A \left(x^1, \ldots, x^d \right) \right\|_F,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem de (3.13). Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
\left\| A \left(x^1, \ldots, x^d \right) \right\|_F &= \left\| \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}} \left((y_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (y_j^d)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)} \\
&\leq \|\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|(y_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{X_r(E_r)} \\
&= \|\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r \cdot e_{j_1^r}\|_{X_r(E_r)}
\end{aligned}$$

$$= \|\widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}\| \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r}$$
$$= \|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} \cdot \prod_{r=1}^{d} \|x^r\|_{E_r}.$$

Caso $(x^1, \ldots, x^d)$ seja nulo a desigualdade acima segue trivialmente. Sendo assim, como $(x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$ é arbitrário, a desigualdade almejada segue. $\square$

Agora estamos em condições de mostrar que a expressão $\|\cdot\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ é de fato uma norma em $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d$ e F.

Proposição 3.1.20. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$ classes de sequências linearmente estáveis e $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços de Banach. Então a expressão (3.8) define uma norma em $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$. Por um lado, é claro que se A é identicamente nulo, então

$$\|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} = 0.$$

Por outro lado, se $\|A\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} = 0$, pela Proposição 3.1.19 segue que $\|A\| = 0$, e portanto $A = 0$.

Os demais axiomas de norma seguem imediatamente da linearidade da correspondência $A \mapsto \widehat{A}_{B_{\mathcal{I}}}$. $\square$

Finalizamos esta seção provando que $\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ é um multi-ideal Banach de operadores d-lineares, munido com a norma $\|\cdot\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$.

Teorema 3.1.21. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_k$ classes de sequências linearmente estáveis e $B_{\mathcal{I}}$-compatíveis. Então $(\mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}, \|\cdot\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k})$ é um ideal Banach de operadores d-lineares.*

Demonstração. Tendo em vista o que foi provado nas Proposições 3.1.13, 3.1.16, 3.1.14 e 3.1.20, basta apenas provar a igualdade $\|I^d\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} = 1$ e a completude das componentes.

Para a igualdade, note que

$$1 = \|I^d\| \leq \|I^d\|_{B_{\mathcal{I}};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k} \leq 1,$$

onde a primeira desigualdade vem da Proposição 3.1.19 e a segunda vem de uma combinação óbvia da igualdade (3.10) com a desigualdade (3.12).

Por fim, vejamos que o espaço $\mathcal{L}^{B_\mathcal{I}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{B_\mathcal{I};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ é completo, para quaiquer $E_1,\ldots,E_d,F$. Para isso, considere $(A_l)_{l=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^{B_\mathcal{I}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Pela Proposição 3.1.19 temos $\|\cdot\|\leq\|\cdot\|_{B_\mathcal{I};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$ e, portanto, a sequência $(A_l)_{l=1}^\infty$ também é de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Existe, então, um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ tal que $A_l\xrightarrow{l}A$ em $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Devemos mostrar que $A\in\mathcal{L}^{B_\mathcal{I}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)$ e que $A_l\xrightarrow{l}A$ na norma $\|\cdot\|_{B_\mathcal{I};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$. Por um lado, da definição de operador d-linear $(B_\mathcal{I};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k)$-somante sabemos que a correspondência

$$A\in\mathcal{L}^{B_\mathcal{I}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1,\ldots,E_d;F)\longrightarrow\widehat{A}_{B_\mathcal{I}}\in\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)) \tag{3.14}$$

é uma imersão isométrica linear. Denotando por $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I},l}}$ o operador induzido por A_l, segue que a sequência $(\widehat{A}_{B_{\mathcal{I},l}})_{l=1}^\infty$ é de Cauchy no espaço $\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$, que também é um espaço de Banach. Podemos então tomar um operador d-linear $S\in\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$ tal que

$$\widehat{A}_{B_{\mathcal{I},l}}\xrightarrow{l}S \text{ em } \mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)). \tag{3.15}$$

Dessa forma, dadas $(x_j^r)_{j=1}^\infty\in X_r(E_r), r=1,\ldots,d$, tem-se

$$\left(\cdots\left(A_l\left(\sum_{s=1}^k\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty\xrightarrow{l}S\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right)$$

em $Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$. A condição $Y_1(\cdot)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(\cdot)$ garante que convergência no espaço de sequências $Y_1(\cdot)$ implica em convergência coordenada a coordenada. Então, denotando

$$S\left((x_j^1)_{j=1}^\infty,\ldots,(x_j^d)_{j=1}^\infty\right):=\left(\cdots(z_{n_1,\ldots,n_k})_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_1=1}^\infty\in Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots)$$

e aplicando convergência coordenada a coordenada em $Y_1(\cdot)$, segue que

$$\left(\cdots\left(A_l\left(\sum_{s=1}^k\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\right)_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_2=1}^\infty\xrightarrow{l}\left(\cdots(z_{n_1,\ldots,n_k})_{n_k=1}^\infty\cdots\right)_{n_2=1}^\infty$$

em $Y_2(\cdots Y_k(F)\cdots)$ para qualquer $n_1\in\mathbb{N}$. Analogamente, aplicando convergência coordenada a coordenada iteradamente obtemos

$$A_l\left(\sum_{s=1}^k\sum_{r\in I_s}x^r_{j^r_{n_s}}*e_r\right)\xrightarrow{l}z_{n_1,\ldots,n_k} \tag{3.16}$$

em F para quaisquer $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}$. Mas, por outro lado, da convergência $A_l\xrightarrow{l}A$ em $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$, segue que

$$A_l(x^1,\ldots,x^d)\xrightarrow{l}A(x^1,\ldots,x^d)$$

em F para qualquer $(x^1, \ldots, x^d) \in E_1 \times \cdots \times E_d$. Em particular

$$A_l\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right) \xrightarrow{l} A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right) \tag{3.17}$$

em F para todos $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Sendo o limite de sequências único em F, de (3.16) e (3.17) concluímos que

$$z_{n_1,\ldots,n_k} = A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)$$

para todos $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left(\cdots\left(A\left(\sum_{s=1}^{k}\sum_{r\in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty} = \left(\cdots\left(z_{n_1,\ldots,n_k}\right)_{n_k=1}^{\infty}\cdots\right)_{n_1=1}^{\infty}$$
$$= S\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right) \in Y_1(\cdots Y_k(F)\cdots),$$

donde $A \in \mathcal{L}^{B_\mathcal{I}}_{X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e $S = \widehat{A}_{B_\mathcal{I}}$. Como $\widehat{A}_{B_{\mathcal{I},l}} \xrightarrow{l} S$, por meio da imersão isométrica (3.14), concluímos que $A_l \longrightarrow A$ na norma $\|\cdot\|_{B_\mathcal{I};X_1,\ldots,X_d;Y_1,\ldots,Y_k}$, o que completa a demonstração. $\square$

3.2 Classes já estudadas

Nesta seção mostraremos que as classes de operadores multilineares do tipo somante, definidas ou caracterizadas por transformação de sequências vetoriais, que já foram consideradas na literatura são casos particulares da nossa construção geral. Sendo assim, todas as classes alcançadas pela construção do capítulo anterior são também alcançadas aqui. Além disso, mostraremos algumas classes a mais que são casos particulares dessa segunda construção e não o são da primeira.

3.2.1 Operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes

Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y$ classes de sequências. Vimos na Seção 2.2.1.1 que os operadores d-lineares $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes, estudados em [24], são recuperados como casos particulares do aparato construído no Capítulo 2, desde que a classe de sequências Y seja Z-diagonalizável em relação a alguma classe de sequências Z. Isso nos permitiu recuperar algumas importantes classes abrangidas pelo estudo feito em [24], mas não o caso geral, ou seja, algumas classes tratadas em [24] não foram recuperadas no Capítulo 2. Veremos nesta subseção que, na nova abordagem proposta neste capítulo, a hipótese de diagonalização não é mais necessária e, consequentemente, todos os ideais de operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes estudados em [24], que, como vimos, incluem muitos exemplos clássicos, são casos particulares de operadores $(B_\mathcal{I}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somantes.

Relembremos que um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somante se $\left(A\left(x_n^1, \ldots, x_n^d\right)\right)_{n=1}^{\infty} \in Y(F)$ sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Nesse caso, o operador induzido $\widehat{A}\colon X(E_1) \times \cdots \times X(E_d) \longrightarrow Y(F)$ definido por

$$\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(A\left(x_n^1, \ldots, x_n^d\right)\right)_{n=1}^{\infty},$$

é d-linear, contínuo e define-se $\|A\|_{X_1,\ldots,X_d;Y} = \|\widehat{A}\|$. O espaço formado por esses operadores é denotado por $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$, que se torna um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_d;Y}$.

Para obter uma teoria não trivial e para garantir que essa classe contenha os operadores de tipo finito, em [24] é imposta a seguinte condição sobre as classes de sequências envolvidas: $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$, o que significa dizer que $(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^d)_{j=1}^{\infty} \in Y(\mathbb{K})$ e $\|(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^d)_{j=1}^{\infty}\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{X_r(\mathbb{K})}$ sempre que $(\lambda_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(\mathbb{K})$, $r = 1, \ldots, d$.

Relembremos o bloco diagonal $D(\mathbb{N}^d) = \{(j, \ldots, j) : j \in \mathbb{N}\}$, do Exemplo 3.1.2, que é o bloco associado à partição trivial e às sequências $(j_n^1)_{n=1}^{\infty} = \cdots = (j_n^d)_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposição 3.2.1. *Sejam $X_1, \ldots, X_d$ e Y classes de sequências linearmente estáveis. Então*

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}^{D(\mathbb{N}^d)}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$$

com igualdade de normas, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d$ e F. Mais ainda, a condição $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$ equivale à $(d+1)$-upla $(X_1, \ldots, X_d, Y)$ ser $D(\mathbb{N}^d)$-compatível.

Demonstração. Estamos no caso isotrópico em que $k = 1$ e a partição é a trivial $\mathcal{I}_t = \{I_1\}$, onde $I_1 = \{1, \ldots, d\}$. Para um dado operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$, temos que $A \in \mathcal{L}^{D(\mathbb{N}^d)}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$ se, e somente se, para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$,

$$\begin{aligned} Y(F) \ni \left(A\left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r\right)\right)_{n_1=1}^{\infty} &= \left(A\left(\sum_{r \in \{1,\ldots,d\}} x^r_{j^r_{n_1}} * e_r\right)\right)_{n_1=1}^{\infty} \\ &= \left(A\left(\sum_{r \in \{1,\ldots,d\}} x^r_{n_1} * e_r\right)\right)_{n_1=1}^{\infty} \\ &= \left(A\left(x_n^1, \ldots, x_n^d\right)\right)_{n=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

ou seja, A é um operador $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somante. Isso fornece a igualdade entre os espaços e também a igualdade $\widehat{A} = \widehat{A}_{D(\mathbb{N}^d)}$, donde segue a igualdade de normas.

Para a segunda afirmação, note que:

$$X_1(\mathbb{K}) \cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K}) \iff \text{ o operador } I^d \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(\mathbb{K}^d; \mathbb{K}) \text{ e}$$

$$\|I^d\|_{X_1,\ldots,X_d;Y} \leq 1 \Longleftrightarrow (X_1,\ldots,X_d,Y) \text{ é } D(\mathbb{N}^d) - \text{compatível.}$$

□

Uma vez recuperados os operadores $(X_1,\ldots,X_d;Y)$-somantes, recupera-se automaticamente todas as classes que já tinham sido recuperadas em [26, Section 3.1], por exemplo:

• A classe dos operadores absolutamente $(q;p_1,\ldots,p_d)$-somantes, $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d}$, introduzida por Pietsch [72] e estudada posteriormente por vários autores (veja [64] e suas referências). Na notação deste capítulo, essa é a classe de todos os operadores $(D(\mathbb{N}^d);\ell_{p_1}^w(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}^w(\cdot);\ell_q(\cdot))$-somantes.

• A classe dos operadores multilineares de cotipo q, $q \geq 1$, estudada em [23], que na notação deste capítulo é a classe dos operadores $(D(\mathbb{N}^d);\mathrm{Rad}(\cdot),\ldots,\mathrm{Rad}(\cdot));\ell_q(\cdot))$-somantes.

As duas classes acima também eram recuperadas no Capítulo 2. Por causa da hipótese da diagonalização, as duas classes abaixo não eram recuperadas no Capítulo 2, mas são recuperadas agora com a construção deste capítulo.

• A classe dos operadores d-lineares fracamente $(q;p_1,\ldots,p_d)$-somantes, $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d}$, estudada por vários autores (veja, por exemplo, [18, 24, 52, 73, 80]). Essa é a classe dos operadores $(D(\mathbb{N}^d);\ell_{p_1}^w(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}^w(\cdot);\ell_q^w(\cdot))$-somantes.

• A classe dos operadores d-lineares de tipo $(p_1,\ldots,p_d)$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_d} < 1$, estudada em [23]. Essa é a classe dos operadores $(D(\mathbb{N}^d);\ell_{p_1}(\cdot),\ldots,\ell_{p_d}(\cdot);\mathrm{Rad}(\cdot))$-somantes.

O motivo de não termos recuperado essas duas últimas classes no Capítulo 2 é que não sabemos se as classes de sequências $\ell_q^w(\cdot)$ e $\mathrm{Rad}(\cdot)$ são diagonalizáveis.

3.2.2 Operadores múltiplo $(\gamma_s;X_1,\ldots,X_d)$-somantes

Nesta seção mostraremos que todas as classes de operadores multilineares estudadas no trabalho de Ribeiro e Santos [76] são casos particulares da construção geral feita neste capítulo. Isso é mais uma comprovação de que essa construção avança em relação à do capítulo anterior, pois lá apenas algumas das classes de [76] eram recuperadas como casos particulares. Mais precisamente, a classe dos operadores múltiplo $(q;p_1,\ldots,p_d)$-somantes, recuperada no final da Seção 2.2.2, é a única classe abrangida pela construção de [76] que é alcançada no Capítulo 2.

Em [76] busca-se introduzir uma abordagem abstrata para o estudo de classes de operadores multilineares entre espaços de Banach que são múltiplo somantes. Na nossa linguagem são casos isotrópicos, sem somas intercaladas, em que o bloco associado é todo o $\mathbb{N}^d$. Entre os exemplos de classes de operadores que foram alcançadas na abordagem proposta pelos autores estão os já citados operadores múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_d)$-somantes (ver [16, 22, 45, 57, 70, 31]) e também, na linguagem deles, os operadores múltiplo misto (s, q, p)-somantes e os operadores múltiplo fortemente misto (s, q, p)-somantes. Para se alcançar os objetivos lá propostos, foi construído um ambiente abstrato, denominado *classes de d-sequências*, que generaliza o conceito de classes de sequências proposto em [24]. Para mostrar que a abordagem deste capítulo abrange o caso geral da construção lá feita, precisamos apresentar o conceito classes de d-sequências.

Definição 3.2.2. [76, Definition 2.1] Dado $d \in \mathbb{N}$, uma *d-sequência* em um espaço de Banach E é uma função $g \colon \mathbb{N}^d \longrightarrow E$. Escrevendo

$$g(j^1, \ldots, j^d) = x_{j^1,\ldots,j^d} \text{ para todos } j^1, \ldots, j^d \in \mathbb{N},$$

a d-sequência g pode ser representada por $(x_{j^1,\ldots,j^d})_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}$.

Para a próxima definição, representamos por

$$c_{00}(E; \mathbb{N}^d) := \left\{ (x_{j^1,\ldots,j^d})_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} : x_{j^1,\ldots,j^d} \neq 0 \text{ somente para um número finito de } j^1, \ldots, j^d \right\}$$

a classe das d-sequências em E eventualmente nulas e por

$$\ell_\infty(E; \mathbb{N}^d) := \left\{ (x_{j^1,\ldots,j^d})_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} : \sup_{j^1,\ldots,j^d \in \mathbb{N}} \|x_{j^1,\ldots,j^d}\|_E < \infty \right\}$$

a classe das d-sequências em E limitadas. Além disso, para $k^1, \ldots, k^d \in \mathbb{N}$, $e_{k^1,\ldots,k^d} \colon \mathbb{N}^d \longrightarrow \mathbb{K}$ representa a d-sequência em $\mathbb{K}$ definida por

$$e_{k^1,\ldots,k^d}(j^1, \ldots, j^d) = \begin{cases} 1, & \text{se } j^1 = k^1, \ldots, j^d = k^d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 3.2.3. [76, Definition 2.2] Uma *classe de d-sequências a valores vetoriais*, ou simplesmente *classe de d-sequências*, é uma aplicação $\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^d)$ que associa cada espaço de Banach E a um espaço de Banach $\gamma_s(E; \mathbb{N}^d)$ formado por d-sequências em E satisfazendo as seguintes condições:

1. $\gamma_s(E; \mathbb{N}^d)$ é um subespaço vetorial do espaço formado por todas as d-sequências em E com as operações coordenada a coordenada;

2. $c_{00}(E; \mathbb{N}^d) \subset \gamma_s(E; \mathbb{N}^d) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E; \mathbb{N}^d)$ e

3. $\|e_{k^1,\ldots,k^d}\|_{\gamma_s(\mathbb{K}; \mathbb{N}^d)} = 1$ para todos $k^1, \ldots, k^d \in \mathbb{N}$.

Por fim, dadas uma classe de d-sequências $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d)$ e classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$, de acordo com [76], um operador d-linear contínuo $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é dito *múltiplo* $(\gamma_s;X_1,\ldots,X_d)$*-somante* se

$$\left(A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^d)$$

sempre que $\left(x^r_j\right)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r=1,\ldots,d$. O espaço de todos esses operadores d-lineares é denotado por $\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$. Todo operador $A \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$ induz um operador $\widehat{A} \in \mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_d(E_d);\gamma_s(F;\mathbb{N}^d))$ definido por

$$\widehat{A}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty},\ldots,(x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty},$$

que é multilinear e contínuo. A norma de um operador A em $\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$, que o torna um espaço de completo, é definida como sendo a norma do operador induzido $\widehat{A}$ e é denotada por $\|A\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s;,X_1,\ldots,X_d}}$.

O objetivo dessa seção é mostrar que todas essas classes de operadores múltiplo $\gamma_{s,X_1,\ldots,X_d}$-somantes de [76] são casos particulares das classes construídas neste capítulo. Neste sentido, precisaremos transitar entre os conceitos de classe de sequências e classe de d-sequências. Consideraremos o bloco $B=\mathbb{N}^d$ como no Exemplo 3.1.4, definido a partir de uma bijeção $\sigma\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}^d$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ podemos denotar $\sigma(n)=(j^1_n,\ldots,j^d_n)$ e assim construir d sequências de números naturais $(j^r_n)_{n=1}^{\infty}$, $r=1,\ldots,d$. Essa bijeção será fixada até o fim desta seção.

Lema 3.2.4. *Dada uma classe de* d*-sequências* $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d)$*, a correspondência* Y *que a cada espaço de Banach* E *faz corresponder*

$$Y(E) := \left\{(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : g \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^d)\right\}\ ,\ \|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)} := \|g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}, \tag{3.18}$$

é uma classe de sequências.

Demonstração. Seja E um espaço de Banach fixado.

(1) $Y(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$: Dadas $(g_1\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}, (g_2\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} \in Y(E)$ e um escalar λ, temos $g_1,g_2\in\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)$, e portanto $(g_1+\lambda g_2)\in\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)$. Daí,

$$(g_1\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} + \lambda\,(g_2\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} = ((g_1+\lambda g_2)\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} \in Y(E),$$

provando que $Y(E)$ é subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$.

(2) $Y(E)$ é um espaço normado:

(i) $\|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)} = \|g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)} \geq 0$ e

$$0 = \|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)} = \|g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)} \Longleftrightarrow g=0 \Longleftrightarrow (g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\|\lambda\,(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)} &= \|((\lambda g)\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}\\ &= \|\lambda g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}\\ &= |\lambda|\cdot\|g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}\\ &= |\lambda|\cdot|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\|(g_1\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}+(g_2\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)} &= \|((g_1+g_2)\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}\\ &= \|g_1+g_2\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}\\ &\le \|g_1\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}+\|g_2\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}\\ &= \|(g_1\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}+\|(g_2\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}.\end{aligned}$$

(3) $c_{00}(E)\subset Y(E)$: Dada $s\in c_{00}(E)$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $s(n)=0$ para todo $n\ge n_0$. Então $N:=\{\sigma(n): n<n_0\}$ é finito e $s\circ\sigma^{-1}\colon\mathbb{N}^d\longrightarrow E$ é tal que $(s\circ\sigma^{-1})(z)=0$ para todo $z\notin N$. Isso prova que

$$s\circ\sigma^{-1}\in c_{00}(E;\mathbb{N}^d)\subset\gamma_s(E;\mathbb{N}^d),$$

e portanto $s=(s\circ\sigma^{-1})\circ\sigma\in Y(E)$.

(4) $Y(E)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E)$: Dada $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in Y(E)$, temos $g\in\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E;\mathbb{N}^d)$. Daí, como $\sigma(\mathbb{N})=\mathbb{N}^d$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|(g\circ\sigma)(n)\|_E=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|g(\sigma(n))\|_E=\sup_{z\in\mathbb{N}^d}\|g(z)\|_E=\|g\|_{\ell_\infty(E;\mathbb{N}^d)}<\infty.$$

Segue que $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty(E)$ e

$$\|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{\ell_\infty(E)}=\|g\|_{\ell_\infty(E;\mathbb{N}^d)}\le\|g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}=\|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}.$$

(5) Para todo natural m, $\|e_m\|_{Y(\mathbb{K})}=1$: Defina $g_m\colon\mathbb{N}^d\longrightarrow\mathbb{K}$ por $g(\sigma(m))=1$ e $g(z)=0$ para todo $z\neq\sigma(m)$. Chamando $\sigma(n)=(k^1,\ldots,k^d)$, pelo terceiro axioma de classes de d-sequências temos

$$\|e_m\|_{Y(\mathbb{K})}=\|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(\mathbb{K})}=\|g\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)}=\|e_{k^1,\ldots,k^d}\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)}=1.$$

(6) $Y(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{Y(E)}$: Seja $(s_j)_{j=1}^{\infty}:=((g_j\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $Y(E)$. Como, para todo $j\in\mathbb{N}$, $\|(g_j\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)}=\|g_j\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)}$, temos que $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)$, que por sua vez é espaço de Banach. Existe então $g\in\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)$ tal que $g_j\xrightarrow{j}g$. Por definição, é claro que $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in Y(E)$. De

$$\|s_j-(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}=\|(g_j\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}-(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\,\|_{Y(E)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(g_j \circ \sigma(n) - g \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)} \\
&= \|((g_j - g) \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y(E)} \\
&= \|g_j - g\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^d)} \xrightarrow{j} 0,
\end{aligned}
$$

segue que $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ converge a $(g \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty}$ em $Y(E)$. $\square$

A classe de sequências Y associada à classe de d-sequências $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d)$ na forma do lema anterior será denotada por Y_{γ_s}.

Como é usual, para garantir que os operadores d-lineares contínuos de tipo finito pertençam à classe $\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}$, em [76] é imposta a seguinte condição do tipo Hölder sobre as classes de sequências e a classe de d-sequências envolvidas: dadas classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$ e uma classe de d-sequências $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d)$, escrevemos

$$X_1(\mathbb{K})\cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)$$

para denotar que $\left(\lambda^1_{j_1}\cdots\lambda^d_{j_d}\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)$ e

$$\left\| \left(\lambda^1_{j_1}\cdots\lambda^d_{j_d}\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)} \leq \prod_{r=1}^{d} \left\| \left(\lambda^r_j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X_r(\mathbb{K})}$$

sempre que $\left(\lambda^r_j\right)_{j=1}^{\infty} \in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$.

Agora estamos em condições de mostrar que a construção geral de [76] é caso particular da nossa construção e também que a condição de compatibilidade lá imposta implica na nossa condição de compatibilidade.

Relembre que estamos fixando uma bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^d$ e que estamos considerando $\mathbb{N}^d$ como o bloco associado à partição trivial e às sequências $(j^r_n)_{n=1}^{\infty}$, $r=1,\ldots,d$, onde $\sigma(n) = (j^1_n,\ldots,j^d_n)$ para todo n. Mais ainda, como $X_1,\ldots,X_d$ e Y_{γ_s} são classes de sequências, podemos considerar, de acordo com a construção deste capítulo, a classe $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y_{\gamma_s}}$ dos operadores $(\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_s;Y_{\gamma_s})$-somantes.

Proposição 3.2.5. *Sejam $X_1,\ldots,X_d$ classes de sequências e $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d)$ uma classe de d-sequências tais que $X_1(\mathbb{K})\cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)$. Então as $(d+1)$-classes de sequências $X_1,\ldots,X_d$ e Y_{γ_s} são $\mathbb{N}^d$-compatíveis e*

$$\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y_{\gamma_s}}(E_1,\ldots,E_d;F) = \mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$$

com igualdade de normas, para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_d,F$.

Demonstração. Para provar a compatibilidade, considere $\left(\lambda^r_j\right)_{j=1}^{\infty} \in X_r(\mathbb{K})$, $r=1,\ldots,d$. Da hipótese $X_1(\mathbb{K})\cdots X_d(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)$ segue que $\left(\lambda^1_{j_1}\cdots\lambda^d_{j_d}\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)$. Definindo

$$g\colon \mathbb{N}^d \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ g(j^1,\ldots,j^d) = \lambda^1_{j^1}\cdots\lambda^d_{j^d},$$

por (3.18) temos $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in Y_{\gamma_s}(\mathbb{K})$. Daí,

$$\left(\lambda^1_{j^1_n}\cdots\lambda^d_{j^d_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(g(j^1_n,\ldots,j^d_n)\right)_{n=1}^{\infty}=(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in Y_{\gamma_s}(\mathbb{K}),$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda^1_{j^1_n}\cdots\lambda^d_{j^d_n}\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{Y_{\gamma_s}(\mathbb{K})}&=\|(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\|_{Y_{\gamma_s}(\mathbb{K})}\\&=\|g\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)}\\&=\left\|\left(\lambda^1_{j_1}\cdots\lambda^d_{j_d}\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^d)}\\&\le\prod_{r=1}^{d}\left\|\left(\lambda^r_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X_r(E_r)},\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $X_1,\ldots,X_d,Y_{\gamma_s}$ são $\mathbb{N}^d$-compatíveis.

Para a igualdade dos espaços, considere sequências $(x^r_j)_{j=1}^{\infty}\in X_r(E_r)$, $r=1,\ldots,d$. Por um lado, se $A\in\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y_{\gamma_s}}(E_1,\ldots,E_d;F)$ então

$$\left(A\left(x^1_{j^1_n},\ldots,x^d_{j^d_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}\in Y_{\gamma_s}(F),$$

e portanto existe $g\in\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)$ tal que $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}=\left(A\left(x^1_{j^1_n},\ldots,x^d_{j^d_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$. Segue que $g\circ\sigma(n)=A\left(x^1_{j^1_n},\ldots,x^d_{j^d_n}\right)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como σ é uma bijeção, para todo $(j^1,\ldots,j^d)\in\mathbb{N}^d$ existe um único natural n tal que $(j^1,\ldots,j^d)=\sigma(n)$, e portanto

$$A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)=g\circ\sigma(n)=g(j^1,\ldots,j^d).$$

Segue que

$$\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)\ni(g(j^1,\ldots,j^d))_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}=\left(A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty},$$

o que prova que $A\in\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$.

Por outro lado, se $A\in\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}(E_1,\ldots,E_d;F)$, então definindo

$$g\colon\mathbb{N}^d\longrightarrow F\ ,\ g(j^1,\ldots,j^d)=A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right),$$

temos $g\in\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)$. Pela construção da classe de sequências Y_{γ_s},

$$\begin{aligned}Y(F)\ni(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}&=\left(g(j^1_n,\ldots,j^d_n)\right)_{n=1}^{\infty}\\&=\left(A\left(x^1_{j^1_n},\ldots,x^d_{j^d_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty},\end{aligned}$$

provando que $A\in\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y_{\gamma_s}}(E_1,\ldots,E_d;F)$ e estabelecendo a igualdade dos espaços. Como $g=\left(A\left(x^1_{j^1},\ldots,x^d_{j^d}\right)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}$, a igualdade de normas segue de

$$\|A\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s;X_1,\ldots,X_d}}=\|\widehat{A}:X_1(E_1)\times\cdots\times X_d(E_d)\longrightarrow\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\{\|\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)}, r = 1, \ldots, d\} \\
&= \sup\{\|\left(A\left(x_{j^1}^1, \ldots, x_{j^d}^d\right)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)}, r = 1, \ldots, d\} \\
&= \sup\{\|g\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^d)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)}, r = 1, \ldots, d\} \\
&= \sup\{\|(g \circ \sigma(n))_{n=1}^\infty\|_{Y_{\gamma_s}(F)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r), r = 1, \ldots, d\} \\
&= \sup\left\{\left\| \left(A\left(x_{j_n^1}^1, \ldots, x_{j_n^d}^d\right)\right)_{n=1}^\infty \right\|_{Y_{\gamma_s}(F)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)}, r = 1, \ldots, d\right\} \\
&= \sup\left\{\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\|_{Y_{\gamma_s}(F)} \colon (x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)}, r = 1, \ldots, d\right\} \\
&= \|A\|_{\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_d;Y_{\gamma_s}}.
\end{aligned}
$$

□

É consequência imediata da proposição anterior que todos os exemplos listados em [76] seguem como exemplos da construção aqui proposta. É importante salientar que, para reinterpretar um exemplo de operador que é múltiplo $(\gamma_s; X_1, \ldots, X_d)$-somante como sendo um operador $(\mathbb{N}^d; X_1, \ldots, X_d; Y_{\gamma_s})$-somante, é preciso determinar a classe de sequências Y_{γ_s} associada à classe de d-sequências $\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^d)$ por meio do Lema 3.2.4. Para exemplificar, faremos isso para cinco dos seis exemplos que se encontram em [76]. Começamos determinando as classes de sequências associadas a certas classes de d-sequências.

Exemplo 3.2.6. A classe das d-sequências que são p-somáveis, $1 \leq p < \infty$, é definida por

$$
\ell_p(E; \mathbb{N}^d) := \left\{ g \in E^{\mathbb{N}^d} : \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty \|g(j^1, \ldots, j^d)\|^p < \infty \right\}
$$

para todo espaço de Banach E com a norma

$$
\|g\|_p := \left(\sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty \|g(j^1, \ldots, j^d)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Sua classe de sequências associada pelo Lema 3.2.4 é dada por

$$
Y_{\ell_p}(E) = \left\{ (g \circ \sigma(n))_{n=1}^\infty : g \in \ell_p(E; \mathbb{N}^d) \right\}.
$$

Vejamos que esse espaço coincide isometricamente com o espaço das sequências em E que são p-somáveis, ou seja, com o espaço $\ell_p(E)$. Por um lado, se $(g \circ \sigma(n))_{n=1}^\infty \in Y_{\ell_p}(E)$, então $g \in \ell_p(E; \mathbb{N}^d)$, ou seja, $\displaystyle\sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty \|g(j^1, \ldots, j^d)\|^p < \infty$. Logo, temos

$$
\sum_{n=1}^\infty \|g \circ \sigma(n)\|^p = \sum_{n=1}^\infty \|g(j_n^1, \ldots, j_n^d)\|^p = \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty \|g(j^1, \ldots, j^d)\|^p < \infty,
$$

pois a série $\displaystyle\sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^\infty \|g(j^1, \ldots, j^d)\|^p$ é incondicionalmente convergente e σ é uma enumeração de $\mathbb{N}^d$. Daí, $(g \circ \sigma(n))_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Por outro lado, dada uma sequência $s \in \ell_p(E)$, temos

$\sum_{n=1}^{\infty}\|s(n)\|^p < \infty$. Como

$$s = s \circ \sigma^{-1} \circ \sigma = (s \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma,$$

para que s pertença a $Y_{\ell_p}(E)$, precisamos verificar que $s \circ \sigma^{-1} \in \ell_p(E; \mathbb{N}^d)$. Mas isso segue de

$$\sum_{j^1,\dots,j_d=1}^{\infty} \|s \circ \sigma^{-1}(j^1,\dots,j^d)\|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\|s \circ \sigma^{-1}(j_n^1,\dots,j_n^d)\|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\|s(n)\|^p < \infty.$$

Segue que $Y_{\ell_p}(E) = \ell_p(E)$ e a igualdade das normas é imediata.

Exemplo 3.2.7. A classe das d-sequências que são fracamente p-somáveis, $1 \le p < \infty$, é definida por

$$\ell_p^w(E; \mathbb{N}^d) := \left\{ g \in E^{\mathbb{N}^d} \colon \sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |\varphi(g(j^1,\dots,j^d))|^p < \infty \text{ para todo } \varphi \in E^* \right\}$$

para todo espaço de Banach E com a norma

$$\|g\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |\varphi(g(j^1,\dots,j^d))|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A essa classe temos associada, pelo Lema 3.2.4, a classe de sequências

$$Y_{\ell_p^w}(E) = \left\{ (g \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty} : g \in \ell_p^w(E; \mathbb{N}^d) \right\}.$$

Vejamos que $Y_{\ell_p^w}(E) \stackrel{1}{=} \ell_p^w(E)$. Se $(g \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty} \in Y_{\ell_p^w(E;\mathbb{N}^d)}(E)$, então g é uma d-sequência em $\ell_p^w(E; \mathbb{N}^d)$, ou seja, $\sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |\varphi(g(j^1,\dots,j^d))|^p < \infty$ para todo $\varphi \in E^*$. Como E^* é um espaço de Banach, essas séries são incondicionalmente convergentes, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(g \circ \sigma(n))|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(g(j_n^1,\dots,j_n^d))|^p = \sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |\varphi(g(j^1,\dots,j^d))|^p < \infty,$$

e portanto $(g \circ \sigma(n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Por outro lado, dada $s \in \ell_p^w(E)$, de $s = (s \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma$ segue que, para qualquer $\varphi \in E^*$,

$$\sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |\varphi(s \circ \sigma^{-1}(j^1,\dots,j^d))|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(s \circ \sigma^{-1}(j_n^1,\dots,j_n^d))|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(s(n))|^p < \infty.$$

Portanto $Y_{\ell_p^w(E;\mathbb{N}^d)}(E) \stackrel{1}{=} \ell_p^w(E)$ e é claro que as normas coincidem.

Exemplo 3.2.8. A classe das d-sequências que são Cohen p-somáveis, $1 \le p < \infty$, é definida por

$$\ell_p\langle E; \mathbb{N}^d\rangle = \left\{ g \in E^{\mathbb{N}^d} \colon \sum_{j^1,\dots,j^d=1}^{\infty} |h(j^1,\dots,j^d) g(j^1,\dots,j^d)| < \infty, \forall h \in \ell_{p^*}^w(E^*; \mathbb{N}^d) \right\},$$

para todo espaço de Banach E com a norma

$$\|g\|_{Coh,p} := \sup_{h\in B_{\ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d)}} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |h(j^1,\ldots,j^d)g(j^1,\ldots,j^d)|.$$

Utilizando novamente a convergência incondicional obtemos

$$\ell_p\langle E;\mathbb{N}^d\rangle = \left\{ g\in E^{\mathbb{N}^d} : \sum_{n=1}^{\infty} |h\circ\sigma(n)(g\circ\sigma(n))| < \infty, \forall h\in \ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d) \right\}.$$

Como feito anteriormente, $h\in \ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d)$ se, e somente se, $(h\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in \ell^w_{p^*}(E^*)$ e, portanto,

$$\ell_p\langle E;\mathbb{N}^d\rangle = \left\{ g\in E^{\mathbb{N}^d} : \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(g\circ\sigma(n))| < \infty, \forall (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in \ell^w_{p^*}(E^*) \right\}$$

e

$$\|g\|_{Coh,p} = \sup_{h\in B_{\ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d)}} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |h(j^1,\ldots,j^d)g(j^1,\ldots,j^d)| = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell^w_{p^*}(E^*)}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(g\circ\sigma(n))|.$$

Dessa forma, a classe de sequências associada é dada por

$$\begin{aligned} Y_{\ell_p\langle\cdot\rangle}(E) &= \left\{ (g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} : g\in \ell_p\langle E;\mathbb{N}^d\rangle \right\} \\ &= \left\{ (g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty} : g\in E^{\mathbb{N}^d} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(g\circ\sigma(n))| < \infty, \forall (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in \ell^w_{p^*}(E^*) \right\}. \end{aligned}$$

Vejamos que esse espaço coincide com o espaço $\ell_p\langle E\rangle$ das sequências Cohen fortemente p-somáveis. De fato, se $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}\in Y_{\ell_p\langle\cdot\rangle}(E)$, então g é uma d-sequência tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(g\circ\sigma(n))| < \infty$ para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in \ell^w_{p^*}(E^*)$, o que é exatamente a definição de $(g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}$ pertencer a $\ell_p\langle E\rangle$, ou seja, $Y_{\ell_p\langle\cdot\rangle}(E)\subset \ell_p\langle E\rangle$. Por outro lado, considerada uma sequência $s\in \ell_p\langle E\rangle$ devemos exibir uma d-sequência $g\in \ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d)$ tal que $s = (g\circ\sigma(n))_{n=1}^{\infty}$. Como $s=(s\circ\sigma^{-1})\circ\sigma$, apenas precisamos mostrar que $s\circ\sigma^{-1}$ pertence a $\ell^w_{p^*}(E^*;\mathbb{N}^d)$. Isso é verdade pois, para toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in \ell^w_{p^*}(E^*)$,

$$\begin{aligned} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |\varphi_n(s\circ\sigma^{-1}(j^1,\ldots,j^d))| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s\circ\sigma^{-1}(j^1_n,\ldots,j^d_n))| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s(n))| < \infty. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.9. A partir dos espaços de sequências introduzidos em [51], a classe das sequências mid p-somáveis $\ell_p^{\text{mid}}(E)$, $1\le p<\infty$, foi definida em [25] da seguinte forma: uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E pertence a $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ se $\left((\varphi_m(x_j))_{j=1}^{\infty}\right)_{m=1}^{\infty}\in \ell_p(\ell_p)$ para toda sequência $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}\in \ell_p^w(E^*)$, e nesse espaço define-se a norma por

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{mid},p} := \sup_{(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_m(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seguindo essa linha, a classe das d-sequências em E que são mid p-somáveis é definida por

$$\ell_p^{\mathrm{mid}}(E;\mathbb{N}^d) := \left\{ g \in E^{\mathbb{N}^d} : \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} \|\varphi_m(g(j^1,\ldots,j^d))\|^p < \infty, \forall (\varphi_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*) \right\}$$

com a norma

$$\|g\|_{\mathrm{mid},p} := \sup_{(\varphi_m)_{m=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |\varphi_m(g(j^1,\ldots,j^d))|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |\varphi_m(g(j^1,\ldots,j^d))|^p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_m(g\circ\sigma(n))|^p$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} |\varphi_m(s\circ\sigma^{-1}(j^1,\ldots,j^d))|^p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_m(s(n))|^p$$

para quaisquer $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*)$ e $s \in \ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$, argumentando como nos exemplos anteriores segue que a classe de sequências associada a essa classe de d-sequências, a qual denotamos por $Y_{\ell_p^{\mathrm{mid}}}$ coincide isometricamente com $\ell_p^{\mathrm{mid}}(\cdot)$.

Apresentaremos agora, como casos particulares da nossa construção, os exemplos concretos recuperados pela abordagem de [76].

Exemplo 3.2.10. [Operadores múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_d)$-somantes] Com outra terminologia, como visto na seção 2.2.2, um operador d-linear e contínuo $A\colon E_1\times\cdots\times E_d \longrightarrow F$ é múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_d)$-somante, com $q \geq p_r$, $r = 1, \ldots, d$, se a d-sequência $\left(A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\right)_{j_1,\ldots,j_d=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_p(E;\mathbb{N}^d)$ para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, ou seja, se A é múltiplo $(\gamma_s; X_1, \ldots, X_d)$-somante com $\gamma_s(E;\mathbb{N}^d) = \ell_p(E;\mathbb{N}^d)$ e $X_r(E_r) = \ell_{q_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Pela Proposição 3.2.5 e pelo Exemplo 3.2.6, na nossa construção essa classe coincide com a classe dos operadores que são $(\mathbb{N}^d; \ell_{q_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{q_d}^w(\cdot); \ell_p(\cdot))$-somantes.

Exemplo 3.2.11. [Operadores múltiplo Cohen fortemente somantes] Impulsionado pelo sucesso dos operadores múltiplos somantes, Campos [36] introduziu em 2014 a classe dos operadores multilineares múltiplo Cohen fortemente p-somantes da seguinte forma: dados $1 < p, p^* \leq \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$, e $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços de Banach, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito múltiplo Cohen fortemente p-somante se

$$\left(A(x_{j^1}^1, \ldots, x_{j^d}^d)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Em [76] essa classe é resgatada considerando $X_r(\cdot) = \ell_p(\cdot)$, $r = 1, \ldots, d$, e $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^d) = \ell_p\langle\cdot;\mathbb{N}^d\rangle$. Então, pela Proposição 3.2.5 e pelo Exemplo 3.2.8, na nossa construção essa classe coincide com a classe dos operadores $(\mathbb{N}^d; \ell_p(\cdot), \stackrel{(d)}{\cdots}, \ell_p(\cdot); \ell_p\langle\cdot\rangle)$-somantes.

Exemplo 3.2.12. [Operadores múltiplo fracamente mid $(p;q_1,\ldots,q_d)$-somantes] De acordo com [25], um operador linear e contínuo entre espaços de Banach $u\colon E\longrightarrow F$ é dito fracamente mid $(p;q)$-somante, $1\leq q\leq p<\infty$, se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\in\ell_p^{mid}(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_q^w(E)$. Na busca de transpor esses operadores para o contexto múltiplo somante, em [76] foi definida a classe de d-sequências $\ell_p^{\text{mid}}(E;\mathbb{N}^d)$, aqui vista no Exemplo 3.2.9. Definiu-se então que um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é múltiplo fracamente mid p-somante se

$$\left(A(x_{j^1}^1,\ldots,x_{j^d}^d)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}\in\ell_p^{\text{mid}}(F;\mathbb{N}^d)$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E_r)$, $r=1,\ldots,d$ (veja [76, Section 5.6]). Pela Proposição 3.2.5 e pelo Exemplo 3.2.9, na nossa construção essa classe coincide com a classe dos operadores $(\mathbb{N}^d;\ell_p^w(\cdot),\ldots,\ell_p^w(\cdot);\ell_p^{\text{mid}}(\cdot))$-somantes.

Exemplo 3.2.13. [Operadores múltiplo fortemente (s,q,p)-misto somantes]. Sejam $1\leq q\leq s\leq\infty$ e $p\leq q$. De acordo com [76], um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é dito múltiplo fortemente (s,q,p)-misto somante se

$$\left(A(x_{j^1}^1,\ldots,x_{j^d}^d)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}\in\ell_p(F;\mathbb{N}^d)$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s,q)}(E_r)$, $r=1,\ldots,d$. O símbolo $\ell_{m(s,q)}(E)$ representa o espaço de Banach de todas as sequências em E que são misto (s,q)-somáveis, ou seja, todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in E^{\mathbb{N}}$ tais que $x_j=\tau_j x_j^0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, onde $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q)^*}$, $\dfrac{1}{s(q)^*}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{q}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\in\ell_s^w(E)$. Denotando por $\ell_{m(s,q)}(\cdot)$ a classe de sequências misto (s,q)-somáveis, pela Proposição 3.2.5 e pelo Exemplo 3.2.6, na nossa construção os operadores múltiplo fortemente (s,q,p)-misto somantes são exatamente os operadores $(\mathbb{N}^d;\ell_{m(s,q)}(\cdot),\overset{d}{\ldots},\ell_{m(s,q)}(\cdot);\ell_p(\cdot))$-somantes.

Exemplo 3.2.14. [Operadores múltiplo fortemente mid p-somantes] Para $1\leq p<\infty$, de acordo com [76], um operador $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ é dito múltiplo fortemente mid p-somante se

$$\left(A(x_{j^1}^1,\ldots,x_{j^d}^d)\right)_{j^1,\ldots,j^d=1}^{\infty}\in\ell_p(F;\mathbb{N}^d)$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p^{\text{mid}}(E_r)$, $r=1,\ldots,d$. Usando mais uma vez a Proposição 3.2.5 e o Exemplo 3.2.6, na nossa construção essa classe coincide com a classe dos operadores que são $(\mathbb{N}^d;\ell_p^{\text{mid}}(\cdot),\overset{d}{\ldots},\ell_p^{\text{mid}}(\cdot);\ell_p(\cdot))$-somantes.

Para finalizar esta seção é muito importante ressaltar que, em relação aos casos concretos recuperados em [76], apenas o caso dos operadores múltiplo $(p,q_1,\ldots,q_d)$-somantes era alcançado pela abordagem proposta no capítulo anterior, o que evidencia, mais uma vez, a maior eficácia da construção empreendida neste capítulo, uma vez que agora recuperamos o caso geral de [76], e portanto todos os seus casos particulares.

3.2.3 Operadores parcialmente múltiplo somantes

Na Seção 2.2.3 recuperamos alguns casos dos operadores parcialmente somantes a partir da construção do Capítulo 2. Relembrando rapidamente, o estudo dos operadores parcialmente múltiplo somantes foi introduzido Araújo e Albuquerque [13] e posteriormente desenvolvido em [3, 6] e, como dito anteriormente, foi uma das motivações para a Definição 3.1.6. Um dos objetivos daqueles autores era alcançar conjuntos de índices intermediários à diagonal $D(\mathbb{N}^d)$ e todo o $\mathbb{N}^d$, casos estes que já haviam sido estudados com os nomes de operadores absolutamente somantes e operadores múltiplo somantes. No Capítulo 2, por limitação nossa, foi possível verificar que os operadores parcialmente múltiplo somantes são casos particulares da abordagem ali proposta somente para alguns casos concretos (veja Seção 2.2.3). Veremos nesta seção que a abordagem proposta neste capítulo recupera, de maneira quase que imediata, todos os operadores parcialmente múltiplo somantes. Para relembrar a definição de um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ ser $\mathcal{I}$-parcialmente múltiplo $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somante remetemos o leitor para a Definição 2.2.13.

O leitor deve estar atento ao fato de que esta é a terceira situação em que recuperamos aqui casos que não eram recuperados no Capítulo 2.

Proposição 3.2.15. *Sejam $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) := (p_1, \ldots, p_d, q_1, \ldots, q_k) \in [1, \infty)^{d+k}$ e $\mathcal{I}$ uma partição de $\{1, \ldots, d\}$. Para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d, F$,*

$$\prod_{(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p})}^{k,d,\mathcal{I}} (E_1, \ldots, E_d; F) \overset{1}{=} \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{(\ell^w_{p_1}(\cdot), \ldots, \ell^w_{p_d}(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_k}(\cdot))}(E_1, \ldots, E_d; F),$$

onde $B_{\mathcal{I}}$ é o bloco associado à partição $\mathcal{I}$ e às d sequências de números naturais $(j^1_n)_{j=1}^\infty = \cdots = (j^d_n)_{j=1}^\infty = (n)_{n=1}^\infty$. Além disso, a condição $\dfrac{1}{q_s} \leq \displaystyle\sum_{r \in I_s} \dfrac{1}{p_r}$ para todo $s \in \{1, \ldots, k\}$ equivale à $(d+k)$-upla $(\ell^w_{p_1}(\cdot), \ldots, \ell^w_{p_d}(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_k}(\cdot))$ ser $B_{\mathcal{I}}$-compatível.

Demonstração. Sejam $E_1, \ldots, E_d$ e F espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$. Temos $A \in \mathcal{L}^{B_{\mathcal{I}}}_{\ell^w_{p_1}(\cdot), \ldots, \ell^w_{p_d}(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_k}(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \ell_{q_1}(\ldots \ell_{q_k}(F) \ldots) \ni \left(\cdots \left(A\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r \right) \right)_{n_k=1}^\infty \cdots \right)_{n_1=1}^\infty &= \\ = \left(\cdots \left(A\left(\sum_{s=1}^k \sum_{r \in I_s} x^r_{n_s} * e_r \right) \right)_{n_k=1}^\infty \cdots \right)_{n_1=1}^\infty&, \end{aligned}$$

sempre que $(x^r_j)_{j=1}^\infty \in \ell^w_{p_r}(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Mas, pela expressão (2.15), isso equivale a $A \in \prod_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^{k,d,\mathcal{I}} (E_1, \ldots, E_d; F)$. Como os operadores induzidos coincidem, as normas também coincidem.

Para a segunda afirmação, dadas sequências escalares $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(\mathbb{K}) = \ell_{p_r}(\mathbb{K}) = \ell_{p_r}$, $r = 1, \ldots, d$, e pondo $I_s = \{r_1^s, \ldots, r_{m_s}^s\}$ para todo $s = 1, \ldots, k$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\cdots \left(\prod_{s=1}^{k} \prod_{r \in I_s} \lambda_{n_s}^r \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_k}(\mathbb{K})\cdots)} = \\
&= \left(\sum_{n_1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{n_k=1}^{\infty} \left\| \prod_{s=1}^{k} \prod_{r \in I_s} \lambda_{n_s}^r \right\|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{n_1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{n_k=1}^{\infty} \left\| \prod_{r \in I_1} \lambda_{n_1}^r \right\|^{q_k} \cdots \left\| \prod_{r \in I_k} \lambda_{n_k}^r \right\|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= \left(\sum_{n_1}^{\infty} \left\| \prod_{r \in I_1} \lambda_{n_1}^r \right\|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\sum_{n_k}^{\infty} \left\| \prod_{r \in I_k} \lambda_{n_k}^r \right\|^{q_k} \right)^{\frac{1}{q_k}} \\
&= \left\| \left(\prod_{r \in I_1} \lambda_{n_1}^r \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}} \cdots \left\| \left(\prod_{r \in I_k} \lambda_{n_k}^r \right)_{n_k=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_k}} \\
&= \left\| \left(\prod_{i=1}^{m_1} \lambda_{n_1}^{r_i^1} \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}} \cdots \left\| \left(\prod_{i=1}^{m_k} \lambda_{n_k}^{r_i^k} \right)_{n_k=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder e as desigualdades das normas ℓ_p, as desigualdades $\dfrac{1}{q_s} \leq \displaystyle\sum_{r \in I_s} \frac{1}{p_r} = \sum_{i=1}^{m_s} \frac{1}{p_{r_i^s}}$, $s = 1, \ldots, k$, são equivalentes a

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\prod_{i=1}^{m_s} \lambda_{n_s}^{r_i^s} \right)_{n_s=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_s}} &\leq \prod_{i=1}^{m_s} \|(\lambda_j^{r_i^s})_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_{r_i^s}}} \\
&= \prod_{r \in I_s} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}}, \forall s = 1, \ldots, k,
\end{aligned}$$

que, pelo que foi feito anteriormente, é equivalente a

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\cdots \left(\prod_{s=1}^{k} \prod_{r \in I_s} \lambda_{n_s}^r \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_k}(\mathbb{K})\cdots)} &\leq \prod_{r \in I_1} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}} \cdots \prod_{r \in I_k} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}} \\
&= \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}}.
\end{aligned}$$

Combinando tudo isso, as desigualdades $\dfrac{1}{q_s} \leq \displaystyle\sum_{r \in I_s} \frac{1}{p_r} = \sum_{i=1}^{m_s} \frac{1}{p_{r_i^s}}$ para todo $s = 1, \ldots, k$, equivalem a

$$\left\| \left(\cdots \left(\prod_{s=1}^{k} \prod_{r \in I_s} \lambda_{n_s}^r \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{q_1}(\cdots \ell_{q_k}(\mathbb{K})\cdots)} \leq \prod_{r=1}^{d} \|(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_{p_r}}$$

para todas sequências escalares $(\lambda_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(\mathbb{K}) = \ell_{p_r}(\mathbb{K}) = \ell_{p_r}$, $r = 1, \ldots, d$, o que corresponde a definição da $(d+k)$-upla ser $(\ell_{p_1}^w(\cdot), \ldots, \ell_{p_d}^w(\cdot); \ell_{q_1}(\cdot), \ldots, \ell_{q_k}(\cdot))$ ser $B_{\mathcal{I}}$-compatível. □

A próxima classe que recuperamos como caso particular de nosso estudo foi estudada em [3, 6, 7, 13] como uma generalização dos operadores múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somantes de [19, 54].

Exemplo 3.2.16. Para $1 \leq p_1, \ldots, p_d, q_1, \ldots, q_d < \infty$ com $p_r \leq q_r$, $r = 1, \ldots, d$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é múltiplo $(q_1, \ldots, q_d; p_1, \ldots, p_d)$-somante se

$$\sum_{n_1=1}^\infty \left(\sum_{n_2=1}^\infty \cdots \left(\sum_{n_d=1}^\infty \|A(x_{n_1}^1, \ldots, x_{n_d}^d)\|_F^{q_d} \right)^{\frac{q_{d-1}}{q_d}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} < \infty,$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Essa classe é o caso da classe estudada na proposição anterior para a partição discreta. Mais precisamente, basta tomar $X_r = \ell_{p_r}^w(\cdot)$, $Y_r = \ell_{q_r}(\cdot)$, $r = 1, \ldots, d$, o bloco $\mathbb{N}^d$ associado à partição discreta $\mathcal{I}_d$ e às sequências de números naturais $(j_n^1)_{n=1}^\infty = \cdots = (j_n^d)_{n=1}^\infty = (n)_{n=1}^\infty$ para recuperar essa classe como caso particular do nosso estudo.

No caso mais particular ainda em que $q_1 = \cdots = q_d = q$, recuperamos novamente, por um caminho diferente, a célebre classe dos operadores múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_d)$-somantes, que são aqueles operadores $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ tais que

$$\sum_{n_1, \ldots, n_d=1}^\infty \|A(x_{n_1}^1, \ldots, x_{n_d}^d)\|_F^q < \infty$$

sempre que $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_{p_r}^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$.

3.2.4 Operadores Λ-(r, p)-somantes

Veremos nesta seção que a classe de operadores multilineares recentemente estudada, de forma independente, por Bayart, Pellegrino e Rueda [17] e Popa [75] também é caso particular do nosso estudo. Cabe mencionar que essa classe também pode ser recuperada pela construção feita no Capítulo 2, e isso não foi mencionado lá pois tomamos conhecimento dessa classe apenas após o término daquela pesquisa. Isso evidencia grande quantidade de trabalho nesta área de pesquisa.

Definição 3.2.17. Dados $p, q \geq 1$ e $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é dito Λ-(q,p)-*somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que para todas sequências $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$, tem-se

$$\left(\sum_{(j^1, \ldots, j^d) \in \Lambda} \|A(x_{j^1}^1, \ldots, x_{j^d}^d)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{r=1}^d \|(x_j^r)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^w(E_r)}. \tag{3.19}$$

A classe dos operadores Λ-(q,p)-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_d$ em F é denotada por $\prod_{q,p}^{\Lambda}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e o ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem (3.19) define uma norma nesse espaço que é denotada por $\pi_{q,p}^{\Lambda}(\cdot)$.

No caso em que $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ é conjunto infinito, utilizando o Exemplo 3.1.4 tomamos uma bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \Lambda$ e consideramos, para cada $r = 1, \ldots, d$, a sequência $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$ na qual j_n^r é a r-ésima coordenada da d-upla $\sigma(n) \in \Lambda$. Fazendo assim, Λ é um bloco associado à partição trivial $\mathcal{I}_t$ e às sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, e dessa forma será considerado na proposição a seguir. Note que a bijeção σ está fixada mas a construção independe de σ uma vez que a classe se sequências $\ell_q(\cdot)$ é simétrica (veja Observação 3.1.9).

Proposição 3.2.18. *Sejam $p, q \in [1, +\infty)$ e $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ infinito. Então*

$$\prod_{q,p}^{\Lambda}(E_1, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}^{\Lambda}_{\ell_p^w(\cdot), \overset{d}{\ldots}, \ell_p^w(\cdot); \ell_q(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F)$$

com igualdade de normas, para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_d$ e F.

Demonstração. Dadas sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E_r)$, $r = 1, \ldots d$, e um operador $A \in \prod_{q,p}^{\Lambda}(E_1, \ldots, E_d; F)$, por definição existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{(j_1, \ldots, j_d) \in \Lambda} \|A(x_{j^1}^1, \ldots, x_{j^d}^d)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{r=1}^{d} \|(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(E_r)}. \tag{3.20}$$

Como a série $\sum_{(j_1, \ldots, j_d) \in \Lambda} \|A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d)\|^q$ é incondicionalmente convergente e σ é uma ordenação de Λ, isso equivale a dizer que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(x_{j_n^1}^1, \ldots, x_{j_n^d}^d)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{r=1}^{d} \|(x_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(E_r)}. \tag{3.21}$$

Assim,

$$A \in \prod_{q,p}^{\Lambda}(E_1, \ldots, E_d; F) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{L}^{\Lambda}_{\ell_p^w(\cdot), \overset{d}{\ldots}, \ell_p^w(\cdot); \ell_q(\cdot)}(E_1, \ldots, E_d; F),$$

e, mais ainda,

$$\begin{aligned} \pi_{q,p}^{\Lambda}(A) &= \inf\{C > 0 : C \text{ satisfaz } (3.20)\} \\ &= \inf\{C > 0 : C \text{ satisfaz } (3.21)\} \\ &= \|\widehat{A}_{\Lambda}\| = \|A\|_{\Lambda; \ell_p^w(\cdot), \overset{d}{\ldots}, \ell_p^w(\cdot); \ell_q(\cdot)}. \end{aligned}$$

$\square$

3.3 Coerência para baixo e resultados de coincidência

Coerência de multi-ideais e resultados de coincidência são temas recorrentes no estudo de classes de operadores multilineares (veja, por exemplo, [40, 41, 42, 62, 63, 78, 77]). São esses temas que relacionam multi-ideais com ideais de polinômios e com tipos de holomorfia (veja [21, 36, 40, 42]). Além disso, ideais coerentes têm sido usados frequentemente em dinâmica linear (veja aplicações recentes em [38, 39, 59, 60]). Nesta seção apresentaremos algumas aplicações da nossa construção para esses temas.

Dividiremos nossas aplicações em duas partes e em ambas o bloco considerado, por questões técnicas, será sempre $\mathbb{N}^d$. A primeira parte refere-se ao caso isotrópico, onde a partição tomada é a partição trivial $\mathcal{I}_t$, e a segunda refere-se os caso anisotrópico com a partição tomada sendo a discreta $\mathcal{I}_d$.

A ideia de coerência tem a ver com a possibilidade de se transitar entre os níveis de multilinearidade de um multi-ideal. Para subir o grau, multiplica-se o operador por um funcional linear e para descer fixa-se uma variável. Estamos interessados aqui na coerência para baixo, e por isso introduzimos a seguinte notação: o símbolo $[.\overset{r}{\because}.]$ indica que a coordenada r não está envolvida. Por exemplo,

$$E_1 \times [.\overset{r}{\because}.] \times E_d = E_1 \times \cdots E_{r-1} \times E_{r+1} \times \cdots \times E_d.$$

Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$, para $r = 1, \ldots, d$ e fixado $x^r \in E_r$, define-se

$$A_{x^r} \colon E_1 \times [.\overset{r}{\because}.] \times E_d \longrightarrow F \ , \ \ A_{x^r}(x^1, [.\overset{r}{\because}.], x^d) = A(x^1, \ldots, x^d).$$

É claro que A_{x^r} é $(d-1)$-linear, contínuo e $\|A_{x^r}\| \leq \|A\| \cdot \|x^r\|$.

A coerência para baixo de um multi-ideal de Banach $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ significa que se um operador $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_d; F)$, então para todos $r = 1, \ldots, d$ e $x^r \in E_r$ é verdade que $A_{x^r} \in \mathcal{M}(E_1, [.\overset{r}{\because}.], E_d; F)$ e $\|A_{x^r}\|_{\mathcal{M}} \leq \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|x^r\|$. Essa condição foi primeiramente estudada em [29] e posteriormente foi refinada, desenvolvida e aplicada, conforme mostram as referências citadas acima.

3.3.1 Caso isotrópico

Ao longo desta subseção consideraremos $\mathbb{N}^d$ como sendo o bloco associado à partição trivial $\mathcal{I}_t$ e às d sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1, \ldots, d$, definidas por uma bijeção $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^d$ como fizemos no Exemplo 3.1.4. Denotamos $\sigma(n) = (j_n^1, \ldots, j_n^d)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como passaremos de operadores d-lineares para operadores $(d-1)$-lineares, precisamos entender $\mathbb{N}^{d-1}$ como um bloco associado à partição trivial e a algumas sequências de naturais que estão relacionadas, de forma conveniente, às sequências $(j_n^r)_{n=1}^\infty$, $r = 1, \ldots, d$. Para isso, para cada $m \in \{1, \ldots, d\}$ fixado, considere o conjunto

$$B = \{(j^1, \ldots, j^d) \in \mathbb{N}^d \colon j^m = 1\}, \tag{3.22}$$

e defina

$$\begin{aligned}
&n_1 = \min\{n : \sigma(n) \in B\},\\
&n_2 = \min\{n \neq n_1 : \sigma(n) \in B\},\\
&\quad\vdots\\
&n_k = \min\{n : n \notin \{n_1, \cdots, n_{k-1}\} \text{ e } \sigma(n) \in B\},\\
&\quad\vdots
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Construímos assim uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais, pois B é infinito e σ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}^d$. Para cada $m \in \{1, \ldots, d\}$, consideremos as subsequências $(j^r_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(j^r_n)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, [\overset{m}{\ldots}], d$. Vejamos que $\mathbb{N}^{d-1}$ é um bloco associado à partição trivial e a essas subsequências. Devemos provar que a correspondência

$$k \in \mathbb{N} \mapsto (j^1_{n_k}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_k}) \in \mathbb{N}^{d-1}$$

é uma bijeção.

i) A correspondência é injetora: dados $(j^1_{n_{k_1}}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_{k_1}})$ e $(j^1_{n_{k_2}}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_{k_2}})$ tais que $(j^1_{n_{k_1}}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_{k_1}}) = (j^1_{n_{k_2}}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_{k_2}})$, temos $j^r_{n_{k_1}} = j^r_{n_{k_2}}$ para todo $r = 1, [\overset{m}{\ldots}], d$. Além disso, como $\sigma(n_{k_1})$ e $\sigma(n_{k_2})$ pertencem a B, por definição segue que $j^m_{n_{k_1}} = j^m_{n_{k_2}} = 1$. Logo,

$$\sigma(n_{k_1}) = (j^1_{n_{k_1}}, \ldots, j^d_{n_{k_1}}) = (j^1_{n_{k_2}}, \ldots, j^d_{n_{k_2}}) = \sigma(n_{k_2}).$$

Como σ é uma bijeção temos $n_{k_1} = n_{k_2}$, donde segue que $k_1 = k_2$.

ii) A correspondência é sobrejetora, isto é, $\mathbb{N}^{d-1} = \{(j^1_{n_k}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_k}) \in \mathbb{N}^{d-1} \colon k \in \mathbb{N}\}$: seja $(i^1, \ldots, i^{m-1}, i^{m+1}, \ldots, i^d) \in \mathbb{N}^{d-1}$. Devemos mostrar que existe um natural k tal que $(i^1, \ldots, i^{m-1}, i^{m+1}, \ldots, i^d) = (j^1_{n_k}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_k})$. Como σ é uma bijeção, existe um único natural $\overline{n}$ tal que

$$(i^1, \ldots, i^{m-1}, 1, i^{m+1}, \ldots, i^d) = \sigma(\overline{n}) = (j^1_{\overline{n}}, \ldots, j^d_{\overline{n}}),$$

ou seja, $\sigma(\overline{n}) \in B$ e $i^r = j^r_{\overline{n}}$, $r = 1, [\overset{m}{\ldots}], d$. Considere o conjunto finito $N = \{n_k : k \in \mathbb{N} \text{ e } n_k < \overline{n}\}$. Se $N = \emptyset$, então $n_k \geq \overline{n}$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $n_1 \geq \overline{n} \in \{n : \sigma(n) \in B\}$, e portanto $n_1 = \min\{n : \sigma(n) \in B\} = \overline{n}$. Neste caso,

$$(j^1_{n_1}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{n_1}) = (j^1_{\overline{n}}, [\overset{m}{\ldots}], j^d_{\overline{n}}) = (i^1, \ldots, i^{m-1}, i^{m+1}, \ldots, i^d),$$

e portanto ocorre o que desejamos. Se $N \neq \emptyset$, então chame

$$n_{\overline{k}} = \max(N) = \max\{n_k : k \in \mathbb{N} \text{ e } n_k < \overline{n}\}$$

e vejamos que $\overline{n} = n_{\overline{k}+1}$. Por um lado, é claro que $\overline{n} \leq n_{\overline{k}+1}$. Por outro, sendo $\overline{n} > n_1, \ldots, \overline{n} > n_{\overline{k}}$, segue que $\overline{n} \notin \{n_1, \ldots, n_{\overline{k}}\}$, ou seja,

$$\overline{n} \in \{n : n \notin \{n_1, \cdots, n_{\overline{k}}\} \text{ e } \sigma(n) \in B\}.$$

Logo, $\overline{n} \geq n_{\overline{k}+1} = \min\{n : n \notin \{n_1, \cdots, n_{\overline{k}}\} \text{ e } \sigma(n) \in B\}$. Portanto,

$$(j^1_{n_{\overline{k}+1}}, [\overset{m}{\cdots}], j^d_{n_{\overline{k}+1}}) = (j^1_{\overline{n}}, [\overset{m}{\cdots}], j^d_{\overline{n}}) = (i^1, \ldots, i^{m-1}, i^{m+1}, \ldots, i^d),$$

mostrando que, também neste caso, ocorre o que desejamos.

Para cada $m \in \{1, \ldots, d\}$, a partir de agora consideraremos $\mathbb{N}^d$ e $\mathbb{N}^{d-1}$ como blocos associados, respectivamente, às partições triviais $\{1, \ldots, d\}$ e $\{1, \ldots, d-1\}$ e às sequências $(j^r_n)_{n=1}^\infty$, $r = 1, \ldots, d$, e $(j^r_{n_k})_{k=1}^\infty$, $r = 1, [\overset{m}{\cdots}], d$.

Definição 3.3.1. Uma classe de sequências X é dita *0-invariante* se para todo espaço de Banach E e qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E tem-se

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \iff (x_j^0)_{j=1}^\infty \in X(E) \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{X(E)},$$

onde $(x_j^0)_{j=1}^\infty$ representa a sequência livre de zeros de $(x_j)_{j=1}^\infty$. Isso significa que x_j^0 é a j-ésima coordenada não nula de $(x_j)_{j=1}^\infty$ se tal coordenada existir, ou zero caso contrário (veja [27, Definition 3.1] ou, no caso de espaços de sequências escalares, [43]).

A maioria das classes de sequências consideradas nesta tese são 0-invariantes.

A coerência para baixo das classes de operadores por nós estudadas vale com uma única hipótese.

Proposição 3.3.2. *Sejam $X_1, \ldots, X_d$ e Y classes de sequências com Y sendo 0-invariante, $1 \leq m \leq d$, $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços de Banach e $a^m \in E_m$. Se $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$, então*

$$A_{a^m} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_1,[\overset{m}{\cdots}],X_d;Y}(E_1, [\overset{m}{\cdots}], E_d; F) \quad \text{e} \quad \|A_{a^m}\|_{\mathbb{N}^{d-1};X_1,[\overset{m}{\cdots}],X_d;Y} \leq \|A\|_{\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_d;Y} \cdot \|a^m\|.$$

Demonstração. É claro que podemos supor $a^m \neq 0$. Sejam $(x^r_j)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r = 1, [\overset{m}{\cdots}], d$. Definimos $(x^m_j)_{j=1}^\infty := a^m \cdot e_1 \in X_m(E_m)$ como sendo a sequência cuja primeira coordenada é a^m e as demais são iguais a 0. Como $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F)$, temos

$$\begin{aligned} Y(F) \ni \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x^1_j)_{j=1}^\infty, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^\infty\right) &= \left(A(x^1_{j^1_n}, \ldots, x^d_{j^d_n})\right)_{n=1}^\infty \\ &= \left(A_{x^m_{j^m_n}}(x^1_{j^1_n}, [\overset{m}{\cdots}], x^d_{j^d_n})\right)_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Utilizando o conjunto B definido em (3.22) e a construção da subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ em (3.23), note que:

• Para todo $k \in \mathbb{N}$, $A_{x^m_{j^m_{n_k}}}(x^1_{j^1_n}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_n}) = A_{a^m}(x^1_{j^1_n}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_n})$ pois $j^m_{n_k} = 1$ e $x^m_1 = a^m$.

• Para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, $A_{x^m_{j^m_n}}(x^1_{j^1_n}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_n}) = 0$ pois $j^m_n \neq 1$ e $x^m_j = 0$ para todo $j \neq 1$.

Assim, definindo $y = \left(A_{x^m_{j^m_n}}(x^1_{j^1_n}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_n})\right)_{n=1}^{\infty}$ e $z = \left(A_{a^m}(x^1_{j^1_{n_k}}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_{n_k}})\right)_{k=1}^{\infty}$, temos que z é uma subsequência de y e todos os termos de y que eventualmente não pertençam a z são nulos. Segue que o n-ésimo termo não nulo de z é igual ao n-ésimo termo não nulo de y, ou seja, $y^0 = z^0$. Como Y é 0-invariante, temos

$$y \in Y(F) \iff y^0 \in Y(F) \iff z^0 \in Y(F) \iff z \in Y(F)$$

e

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)} &= \|y\|_{Y(F)} = \|y^0\|_{Y(F)} = \|z^0\|_{Y(F)} = \|z\|_{Y(F)} \\
&= \left\| \left(A_{a^m}(x^1_{j^1_{n_k}}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], x^d_{j^d_{n_k}})\right)_{k=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)} \\
&= \left\| (A_{a^m})^{\wedge}_{\mathbb{N}^{d-1}}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)}.
\end{aligned}$$

Isso prova que $A_{a^m} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_1,[\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}],X_d;Y}(E_1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], E_d; F)$ e também que, tomando $b = \dfrac{a^m}{\|a^m\|}$ no lugar de a^m,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\| &= \sup_{\substack{(x^r_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_r(E_r)} \\ r = 1, \ldots, d}} \left\| \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)} \\
&\geq \sup_{\substack{(x^r_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_r(E_r)} \\ r = 1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], d}} \left\| \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^{m-1}_j)_{j=1}^{\infty}, b \cdot e_1, (x^{m+1}_j)_{j=1}^{\infty}, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)} \\
&= \frac{1}{\|a^m\|} \sup_{\substack{(x^r_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_r(E_r)} \\ r = 1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], d}} \left\| \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x^{m-1}_j)_{j=1}^{\infty}, a^m \cdot e_1, (x^{m+1}_j)_{j=1}^{\infty}, (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)} \\
&= \frac{1}{\|a^m\|} \sup_{\substack{(x^r_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_r(E_r)} \\ r = 1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], d}} \left\| (A_{a^m})^{\wedge}_{\mathbb{N}^{d-1}}\left((x^1_j)_{j=1}^{\infty}, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], (x^d_j)_{j=1}^{\infty}\right) \right\|_{Y(F)} \\
&= \frac{\|(A_{a^m})^{\wedge}_{\mathbb{N}^{d-1}}\|}{\|a^m\|},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|(A_{a^m})^{\wedge}_{\mathbb{N}^{d-1}}\| \leq \|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\| \cdot \|a^m\|$. Portanto,

$$\|A_{a^m}\|_{\mathbb{N}^{d-1};X_1,[\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}],X_d;Y} = \|(A_{a^m})^{\wedge}_{\mathbb{N}^{d-1}}\| \leq \|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\| \cdot \|a^m\| = \|A\|_{\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_d;Y} \cdot \|a^m\|.$$

□

Corolário 3.3.3. *Sejam $X_1, \ldots, X_d$ classes de sequências e Y uma classe de sequências 0-invariante. Se $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$, então $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_1,[\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}],X_d;Y}(E_1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], E_d; F) = \mathcal{L}(E_1, [\overset{m}{\cdot\cdot\cdot}], E_d; F)$ para todo $m = 1, \ldots, d$.*

Demonstração. Basta mostrar que $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_1,[\overset{m}{\because}],X_d;Y}(E_1,[\overset{m}{\because}],E_d;F) \supseteq \mathcal{L}(E_1,[\overset{m}{\because}],E_d;F)$. Para isso seja $B \in \mathcal{L}(E_1,[\overset{m}{\because}],E_d;F)$. Escolhido e fixado $y \in E_m\backslash\{0\}$ com $\|y\|= 1$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional $\varphi \in E_m^*$ tal que $\|\varphi\|= 1$ e $\varphi(y) = \|y\|= 1$. Considerando o operador $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$ definido por

$$A(x^1,\ldots,x^d) = B(x^1,[\overset{m}{\because}],x^d)\cdot\varphi(x^m),\ x^1 \in E_1,\ldots,x^d \in E_d,$$

temos

$$A_y(x^1,[\overset{m}{\because}],x^d) = A(x^1,\ldots,x^{m-1},y,x^{m+1},\ldots,x^d) = B(x^1,[\overset{m}{\because}],x^d)$$

para quaisquer $x^s \in E_s$, $s \in \{1,\ldots,d\}\backslash\{r\}$, ou seja, $B = A_y$. Por hipótese, $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1,\ldots,E_d;F)$ e, pela proposição anterior, segue que

$$B = A_y \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_1,[\overset{m}{\because}],X_d;Y}(E_1,[\overset{m}{\because}],E_d;F),$$

concluindo o argumento. □

Aplicando o corolário anterior repetidas vezes obtemos coincidências lineares a partir de uma coincidência multilinear.

Corolário 3.3.4. *Sejam $X_1,\ldots,X_d,Y$ classes de sequências com Y sendo 0-invariante. Se $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;Y}(E_1,\ldots,E_d;F) = \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F)$, então $\mathcal{L}_{X_r;Y}(E_r;F) = \mathcal{L}(E_r;F)$ para todo $r = 1,\ldots,d$.*

Por $\Pi_{q;p}(E;F)$ denotamos o espaço dos operadores lineares absolutamente (q,p)-somantes de E em F. Como $\ell_q(\cdot)$ é 0-invariante e $\prod\limits^{m,d}_{q,\overset{d}{\ldots},q;p_1,\ldots,p_d}(E_1,\ldots,E_d;F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{\ell^w_{p_1}(\cdot),\ldots,\ell^w_{p_d}(\cdot);\ell_q(\cdot)}(E_1,\ldots,E_d;F)$, recuperamos o seguinte resultado de Pellegrino e Souza [66] como caso particular do corolário acima.

Corolário 3.3.5. [66, Corollary 3.4] *Sejam $q,p_1,\ldots,p_d \geq 1$. Se $E_1,\ldots,E_d,F$ são espaços de Banach tais que $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_d;F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{\ell^w_{p_1}(\cdot),\ldots,\ell^w_{p_d}(\cdot);\ell_q(\cdot)}(E_1,\ldots,E_d;F)$, então $\Pi_{q;p_r}(E_r;F) = \mathcal{L}(E_r;F)$ para todo $r = 1,\ldots,d$.*

3.3.2 Caso anisotrópico

Nesta seção finalizaremos o trabalho buscando resultados de coerência para baixo e de coincidência no caso em que a partição tomada é a discreta de $\{1,\ldots,d\}$ e o bloco é $\mathbb{N}^d$, ou seja, estamos considerando $\mathbb{N}^d$ como sendo o bloco associado à partição discreta e às sequências $(j^1_n)^\infty_{n=1} = \cdots = (j^d_n)^\infty_{n=1} = (n)^\infty_{n=1}$. De mesma forma, estaremos considerando $\mathbb{N}^{d-1}$ como sendo o bloco associado à partição discreta de $\{1,\ldots,d-1\}$ e às sequências $(j^1_n)^\infty_{n=1} = \cdots = (j^{d-1}_n)^\infty_{n=1} = (n)^\infty_{n=1}$.

Proposição 3.3.6. *Sejam* $X_1, \ldots, X_d$ *e* Y *classes de sequências,* Y *linearmente estável, e* $E_1, \ldots, E_d, F$ *espaços de Banach. Se* $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$*, então* $A_a \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_2,\ldots,X_d;{}^{d-1}Y}(E_2, \ldots, E_d; F)$ *e*

$$\|A_a\|_{\mathbb{N}^{d-1};X_2,\ldots,X_d;{}^{d-1}Y} \leq \|A\|_{\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_d;{}^dY} \cdot \|a\|$$

para qualquer $a \in E_1$*.*

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$, a um vetor fixado em E_1 e sequências $(x_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(E_2), \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty \in X_d(E_d)$. O caso $a = 0$ é imediato, suponhamos então $a \neq 0$. Considere a sequência $(x_j^1)_{j=1}^\infty := a \cdot e_1 \in X_1(E_1)$, onde a primeira coordenada é a e as demais são iguais a 0. Pela definição de $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$ temos

$$\begin{aligned}
Y(\overset{d}{\cdots} Y(F) \cdots) \ni \widehat{A}_{\mathbb{N}^d} \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)
&= \left(\cdots \left(A(x_{n_1}^1, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_1=1}^\infty \\
&= \left(\left(\cdots \left(A(a, x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty, 0, 0, 0, \ldots\right) \\
&= \left(\left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty, 0, 0, 0, \ldots\right) \\
&= \left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty \cdot e_1.
\end{aligned}$$

Como, por definição, cada coordenada da sequência $\left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty \cdot e_1$ pertence a $Y(\overset{d-1}{\cdots} Y(F) \cdots)$ temos que

$$\left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \cdots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty \in Y(\overset{d-1}{\cdots} Y(F) \cdots)$$

e como $\|y \cdot e_1\|_{Y(F)} = \|y\|_F$ para todo $y \in F$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d} \left(a \cdot e_1, (x_j^2)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\right\| &= \left\|\left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \cdots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty \cdot e_1\right\| \\
&= \left\|\left(\cdots \left(A_a(x_{n_2}^2, \ldots, x_{n_d}^d)\right)_{n_d=1}^\infty \cdots\right)_{n_2=1}^\infty\right\| \\
&= \left\|(A_a)^\wedge_{\mathbb{N}^{d-1}} \left((x_j^2)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\right\|
\end{aligned}$$

para quaisquer $(x_j^r)_{j=1}^\infty \in X_r(E_r)$, $r \in \{2, \ldots, d\}$. Isso nos permite concluir que $A_a \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_2,\ldots,X_d;{}^{d-1}Y}(E_2, \ldots, E_d; F)$ e, aplicando essa igualdade para o vetor $\frac{a}{\|a\|}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\| &= \sup_{\substack{(x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)} \\ r \in \{1, \ldots, d\}}} \left\|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d} \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\right\| \\
&\geq \sup_{\substack{(x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)} \\ r \in \{2, \ldots, d\}}} \left\|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d} \left(\frac{a}{\|a\|} \cdot e_1, (x_j^2)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right)\right\|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|a\|} \sup_{\substack{(x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)} \\ r \in \{2,\ldots,d\}}} \left\| \widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\left(a \cdot e_1, (x_j^2)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) \right\|$$

$$= \frac{1}{\|a\|} \sup_{\substack{(x_j^r)_{j=1}^\infty \in B_{X_r(E_r)} \\ r \in \{2,\ldots,d\}}} \left\| (A_a)^\wedge_{\mathbb{N}^{d-1}}\left((x_j^2)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^d)_{j=1}^\infty\right) \right\|$$

$$= \frac{\|(A_a)^\wedge_{\mathbb{N}^{d-1}}\|}{\|a\|}$$

e portanto

$$\|A_a\|_{\mathbb{N}^{d-1};X_2,\ldots,X_d;Y} = \|(A_a)^\wedge_{\mathbb{N}^{d-1}}\| \leq \|\widehat{A}_{\mathbb{N}^d}\| \cdot \|a\| = \|A\|_{\mathbb{N}^d;X_1,\ldots,X_d;Y} \cdot \|a\|.$$

□

O leitor certamente notou que trabalhamos acima fixando a primeira coordenada. Coerência é uma noção normalmente aplicada para classes de polinômios homogêneos, que estão por definição associados aos operadores multilineares simétricos. Veremos a seguir que, para operadores simétricos, a coerência para baixo funciona fixando qualquer variável.

Relembre que um operador d-linear $A\colon E^d \longrightarrow F$ é simétrico se

$$A(x^1, \ldots, x^d) = A(x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(d)})$$

para qualquer $(x^1, \ldots, x^d) \in E^d$ e qualquer permutação α dos n primeiros números naturais.

Dados um operador d-linear $A \in \mathcal{L}(^dE; F)$, $a \in E$ e $m \in \{1, \ldots, d\}$, por A_a^m denotamos o operador $(d-1)$-linear obtido fixando-se a na m-ésima coordenada, isto é,

$$A_a^m\colon E^{d-1} \longrightarrow F \ , \ A_a^m(x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d) = A(x^1, \ldots, x^{m-1}, a, x^{m+1}, \ldots, x^d).$$

Corolário 3.3.7. *Sejam X e Y classes de sequências, Y linearmente estável, $a \in E$ e $m \in \{1, \ldots, d\}$. Se $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{^dX;^dY}(^dE; F)$ é um operador simétrico, então $A_a^m \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{^{d-1}X;^{d-1}Y}(^{d-1}E; F)$ e*

$$\|A_a^m\|_{\mathbb{N}^{d-1};^{d-1}X;^{d-1}Y} \leq \|A\|_{\mathbb{N}^d;^dX;^dY} \cdot \|a\|.$$

Demonstração. Considere a permutação $\alpha\colon \{1, \ldots, d\} \longrightarrow \{1, \ldots, d\}$ dada por

$$\alpha(r) := \begin{cases} m & , \text{ se } r = 1 \\ r-1 & , \text{ se } r = 2, \ldots, m \\ r & , \text{ se } r > m. \end{cases}$$

Para todo $(x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d) \in E^1 \times [\overset{m}{\ldots}] \times E^d$ e chamando $a := x^m$, da simetria de A temos

$$A_a^m(x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d) = A_{x^m}^m(x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d)$$

$$
\begin{aligned}
&= A(x^1, x^2 \ldots, x^{m-1}, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^d) \\
&= A(x^{\alpha(1)}, x^{\alpha(2)}, \ldots, x^{\alpha(m-1)}, x^{\alpha(m)}, x^{\alpha(m+1)}, \ldots, x^{\alpha(d)}) \\
&= A(x^m, x^1, \ldots, x^{m-2}, x^{m-1}, x^{m+1}, \ldots, x^d) \\
&= A(a, x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d) \\
&= A_a^1(x^1, [\overset{m}{\ldots}], x^d),
\end{aligned}
$$

o que prova que $A_a^m = A_a^1$. Da Proposição 3.3.6 segue que $A_a^m = A_a^1 \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{d-1X;d-1Y}({}^{d-1}E; F)$ e

$$\|A_a^m\|_{\mathbb{N}^{d-1};{}^{d-1}X;{}^{d-1}Y} = \|A_a^1\|_{\mathbb{N}^{d-1};{}^{d-1}X;{}^{d-1}Y} \leq \|A\|_{\mathbb{N}^d;{}^dX;{}^dY} \cdot \|a\|.$$

□

Vejamos agora alguns resultados de coincidência.

Proposição 3.3.8. *Sejam $X_1, \ldots, X_d, Y$ classes de sequências, Y linearmente estável, e $E_1, \ldots, E_d, F$ espaços de Banach. Se $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$, então $\mathcal{L}(E_2, \ldots, E_d; F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_2,\ldots,X_d;{}^{d-1}Y}(E_2, \ldots, E_d; F)$.*

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_d; F)$. Podemos considerar um vetor $a \in E_1 \backslash \{0\}$ de norma igual a 1 e um funcional $\varphi \in E_1^*$ tal que $\varphi(a) = 1$. Assim, fica bem definido o operador $A = \varphi \otimes B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ dado por

$$A(x^1, x^2, \ldots, x^d) = \varphi(x^1) B(x^2, \ldots, x^d).$$

Observe que $B = A_a$. Por hipótese, $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{X_1,\ldots,X_d;{}^dY}(E_1, \ldots, E_d; F)$ e, pela proposição anterior, $B = A_a \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{d-1}}_{X_2,\ldots,X_d;{}^{d-1}Y}(E_2, \ldots, E_d; F)$. □

Corolário 3.3.9. *Sejam X, Y classes de sequências, Y linearmente estável, e E, F espaços de Banach. Se $\mathcal{L}({}^dE; F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{{}^dX;{}^dY}({}^dE; F)$ para algum $d \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$.*

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{L}(E; F)$ podemos considerar um vetor $a \in E \backslash \{0\}$ e um funcional $\varphi \in E^*$ tais que $\varphi(a) = 1$. Definindo $A \colon E^d \longrightarrow F$ por

$$A(x^1, \ldots, x^d) = \varphi(x^1) \cdots \varphi(x^{d-1}) u(x^d),$$

temos $A \in \mathcal{L}({}^dE; F) = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^d}_{{}^dX;{}^dY}({}^dE; F)$. Denotando $A_{a,a} = (A_a)_a$, $A_{a,a,a} = (A_{a,a})_a$ e assim sucessivamente, aplicando recursivamente $d-1$ vezes a proposição anterior concluímos que $u = A_{a,\overset{d-1}{\ldots},a} \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$. □

Observação 3.3.10. Se houver necessidade da coerência para baixo no caso anisotrópico, fixando uma coordenada que não a primeira e para um operador multilinear não simétrico, acreditamos que será necessário acrescentar alguma hipótese adicional sobre a classe de sequências Y.

Capítulo 4

Considerações finais

Para finalizar nosso trabalho, faremos uma análise comparativa entre a construção dos operadores $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somantes, proposta no Capítulo 2, e a dos operadores $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somantes, feita no Capítulo 3, que doravante passaremos a nos referir somente de "primeira construção" e "segunda construção", respectivamente.

Os elementos essenciais para a primeira construção foram as classes de sequências $X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d$ e o bloco de índices B, que era apenas um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}^d$. Assim, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é chamado de $(B; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_d)$-somante quando satisfaz

$$\left(\cdots \left(\left(A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right) \right)_{j_d \in B^{j_1, \ldots, j_{d-1}}} \right)_{j_{d-1}=1}^{\infty} \cdots \right)_{j_1=1}^{\infty} \in Y_1(\cdots Y_d(F) \cdots)$$

para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$. Por um lado, a iteração dos espaços de sequências é um elemento que dificulta um pouco a compreensão. Por outro lado, a simplicidade da sequência $\left(A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_d}^d\right)\right)_{j_d \in B^{j_1, \ldots, j_{d-1}}}$ faz com que, no geral, essa primeira construção tenha uma notação pouco pesada, seja de compreensão relativamente simples e de manipulação razoavelmente fácil. Mesmo assim, o resultado alcançado por essa primeira construção é plenamente satisfatório, uma vez que recupera um grande número de casos previamente estudados, incluindo os casos mais trabalhados na literatura.

Já para a segunda construção, é necessário fornecer um número natural $1 \leq k \leq d$, uma partição ordenada $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de $\{1, \ldots, d\}$ e d sequências de números naturais $(j_n^r)_{n=1}^{\infty}$, $r = 1, \ldots, d$, para as quais a correspondência

$$(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mapsto \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r$$

seja injetiva. O bloco de índices, associado à partição $\mathcal{I}$ e às d sequências de números naturais, é dado por

$$B_{\mathcal{I}} = \left\{ \sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j_{n_s}^r * e_r \in \mathbb{N}^d : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\}$$

e um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_d; F)$ é chamado de $(B_{\mathcal{I}}; X_1, \ldots, X_d; Y_1, \ldots, Y_k)$-somante se a condição

$$\left(\cdots \left(A \left(\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} x^r_{j^r_{n_s}} * e_r \right) \right)_{n_k=1}^{\infty} \cdots \right)_{n_1=1}^{\infty} \in Y_1(\cdots Y_k(F) \cdots)$$

é satisfeita para quaisquer sequências $(x_j^r)_{j=1}^{\infty} \in X_r(E_r)$, $r = 1, \ldots, d$.

É evidente que, nessa segunda proposta, a notação é mais pesada, a compreensão é mais difícil por causa da expressão $\sum_{s=1}^{k} \sum_{r \in I_s} j^r_{n_s} * e_r$ e a manipulação é mais complicada pelo mesmo motivo. Além disso, essa mesma expressão faz com que essa segunda construção seja menos intuitiva que a primeira. Todos esses aspectos são compensados pela extrema aplicabilidade dessa segunda construção, que, conforme vimos, recupera todas as classes já estudadas, incluindo todas as classes alcançadas pela primeira e algumas classes que por ela não eram recuperadas. Para situar o leitor em relação às classes recuperadas pela segunda construção que não foram recuperadas na primeira, lembramos que:

1. Enquanto que na primeira construção precisamos da hipótese da classe de sequências Y ser diagonalizável para recuperar os operadores operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes de [24], na segunda não precisamos mais dessa hipótese. Ou seja, na segunda construção recuperamos o caso geral dos operadores $(X_1, \ldots, X_d; Y)$-somantes, enquanto que na primeira recuperamos apenas os casos em que Y é diagonalizável. Isso é um ganho muito importante, pois não sabemos se muitas classes conhecidas na literatura são ou não diagonalizáveis.

2. Na primeira construção, por limitação de nossa parte, foi possível recuperar apenas alguns casos concretos dos operadores parcialmente múltiplo somantes (veja [26, Seção 3.3]), enquanto que na segunda construção o caso geral desses operadores é recuperado de maneira quase que imediata. Isso também é um ganho importante, pois o desenvolvimento atual da teoria aponta para uma maior exploração dos operadores parcialmente somantes.

3. Entre os casos particulares dos operadores $\gamma_{s;X_1,\ldots,X_d}$-somantes de [76], apenas os operadores múltiplo somantes foram obtidos como caso particular da primeira construção, enquanto que a segunda recupera o caso geral, e portanto todos os seus casos particulares. Assim, a grande generalidade dos resultados de [76], que estava comprometida na primeira construção, foi totalmente recuperada na segunda.

Deve ser dito também que, apesar de alcançar um número menor de classes, os resultados provados no Capítulo 2 não são casos particulares dos resultados do Capítulo 3, uma vez que tratam de ambientes diferentes.

Nossa aposta é que as duas construções sejam úteis no futuro, a primeira com o atrativo da acessibilidade e a segunda com o apelo da generalidade. É importante enfatizar que, além das classes introduzidas nos últimos anos e que motivaram nosso estudo, os operadores estudados na Seção 3.2.4 apareceram durante a execução deste trabalho, mais precisamente após a pesquisa da primeira construção ter sido finalizada e durante a elaboração da segunda. Isso mostra o quão atual é o presente trabalho e também indica claramente que, em futuro próximo, os matemáticos e as matemáticas considerarão classes de operadores multilineares do tipo somante que hoje são desconhecidas. Nosso propósito é oferecer as duas construções a esses e essas colegas, cada um e cada uma escolhendo a construção que for mais adequada para a classe específica que estiver sendo estudada.

Referências

[1] Achour, D., Dahia, E., Rueda, P. and Sánchez Pérez, E. A. *Factorization of strongly (p, σ)-continuous multilinear operators.* Linear Multilinear Algebra **62** (2014), no. 12, 1649–1670.

[2] Achour, D. and Mezrag, L. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), no. 1, 550–563.

[3] Albuquerque, N., Araújo, G., Cavalcante, W., Nogueira, T., Núñez, D., Pellegrino, D. and Rueda, P. *On summability of multilinear operators and applications.* Ann. Funct. Anal. **9** (2018), no. 4, 574–590.

[4] Albuquerque, N., Araújo, G., Pellegrino, D. and Rueda, P. *A note on multiple summing operators and applications.* Linear Multilinear Algebra **67** (2019), no. 4, 660–671.

[5] Albuquerque, N., Araújo, G., Pellegrino, D. and Seoane-Sepúlveda, J. B. *Hölder's inequality: some recent and unexpected applications.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **24** (2017), no. 2, 199–225.

[6] Albuquerque, N., Araújo, G., Rezende, L. and Santos, J. *A summability principle and applications.* arXiv:1904.04549 [math], 2019.

[7] Albuquerque, N., Bayart, F., Pellegrino, D. and Seoane-Sepúlveda, J. B. *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality.* J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3726–3740.

[8] Albuquerque, N., Bayart, F., Pellegrino, D. and Seoane-Sepúlveda, J. B. *Optimal Hardy-Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators.* Israel J. Math. **211** (2016), no. 1, 197–220.

[9] Albuquerque, N., Nogueira, T., Núñez-Alarcón, D., Pellegrino, D. and Rueda, P. *Some applications of the Hölder inequality for mixed sums.* Positivity **21** (2017), no. 4, 1575–1592.

[10] Albuquerque, N., Núñez-Alarcón, D., Santos, J. and Serrano-Rodríguez, D. M. *Absolutely summing multilinear operators via interpolation.* J. Funct. Anal. **269** (2015), no. 6, 1636–1651.

[11] Albuquerque, N. and Rezende, L. *Anisotropic regularity principle in sequence spaces and applications.* Commun. Contemp. Math. **20** (2018), no. 7, 1750087, 14.

[12] Alencar, R. and Matos, M. *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces.* Publicaciones Departamento Anásisis Matemático, Unviversidad Complutense Madrid, 12 (1989).

[13] Araújo, G. *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions.* Tese de Doutorado, UFPB, João Pessoa, 2016.

[14] Araújo, G. and Pellegrino, D. *Optimal Hardy-Littlewood type inequalities for m-linear forms on ℓ_p spaces with* $1 \leq p \leq m$. Arch. Math. (Basel) 105 (2015), no. 3, 285–295.

[15] Aron, R. M., Núñez-Alarcón, D., Pellegrino, D. M. and Serrano-Rodríguez, D. M. *Optimal exponents for Hardy-Littlewood inequalities for m-linear operators.* Linear Algebra Appl. **531** (2017), 399–422.

[16] Bayart, F. *Multiple summing maps: coordinatewise summability, inclusion theorems and p-Sidon sets.* J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 4, 1129–1154.

[17] Bayart, F., Pellegrino, D. and Rueda, P. *On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1-spaces and cotype.* Collect. Math. **71** (2020), no. 2, 301–318.

[18] Blasco, O., Botelho, G., Pellegrino, D. and Rueda, P. *Coincidence results for summing multilinear mappings.* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **59** (2016), no. 4, 877–897.

[19] Bombal, F., Pérez-García, D. and Villanueva, I. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* Q. J. Math. **55** (2004), no. 4, 441–450.

[20] Botelho, G., Braunss, H.-A. and Junek, H. *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings.* Arch. Math. (Basel) **76** (2001), no. 2, 109–118.

[21] Botelho, G., Braunss, H.-A., Junek, H. and Pellegrino, D. *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings.* Studia Math. **177** (2006), no. 1, 43–65.

[22] Botelho, G., Braunss, H.-A., Junek, H. and Pellegrino, D. *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 3, 991–1000.

[23] Botelho, G. and Campos, J. R. *Type and cotype of multilinear operators.* Rev. Mat. Complut. **29** (2016), no. 3, 659–676.

[24] Botelho, G. and Campos, J. R. *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators.* Monatsh. Math. **183** (2017), no. 3, 415–435.

[25] Botelho, G., Campos, J. R. and Santos, J. *Operator ideals related toabsolutely summing and Cohen strongly summing operators.* Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 1–17.

[26] Botelho, G. and Freitas, D. *Summing multilinear operators by blocks: the isotropic and anisotropic cases.* J. Math. Anal. Appl. **490** (2020), no. 1, 124203, 21 p.

[27] Botelho, G. and Luiz, J. L. P. *Complete latticeability in vector-valued sequence spaces*, Math. Nachr, to appear. Disponível em arXiv:2004.01604 [math], 2020.

[28] Botelho, G., Maia, M., Pellegrino, D. and Santos, J. *A unified factorization theorem for Lipschitz summing operators.* Q. J. Math. **70** (2019), no. 4, 1521–1533.

[29] Botelho, G. and Pellegrino, D. *Two new properties of ideals of polynomials and applications.* Indag. Math. (N.S.) **16** (2005), no. 2, 157–169.

[30] Botelho, G. and Pellegrino, D. *Coincidence situations for absolutely summing non-linear mappings.* Port. Math. **64** (2007), no. 2, 175–191.

[31] Botelho, G. and Pellegrino, D. *When every multilinear mapping is multiple summing.* Math. Nachr. **282** (2009), no. 10, 1414–1422.

[32] Botelho, G., Pellegrino, D. and Rueda, P. *Summability and estimates for polynomials and multilinear mappings.* Indag. Math. (N. S.) **19** (2008), no. 1, 23–31.

[33] Botelho, G., Pellegrino, D. and Rueda, P. *A unified Pietsch domination theorem.* J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), no. 1, 269–276.

[34] Botelho, G., Pellegrino, D. and Rueda, P. *On Pietsch measures for summing operators and dominated polynomials.* Linear Multilinear Algebra **62** (2014), no. 7, 860–874.

[35] Botelho, G., Pellegrino, D. and Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 2a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[36] Campos, J. R. *Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators.* Linear Multilinear Algebra **62** (2014), no. 3, 322–346.

[37] Campos, J. R. and Santos, J., *An anisotropic approach to mid summable sequences.* Colloq. Math. **161** (2020), no. 1, 35–49.

[38] Caraballo, B. M. and Fávaro, V. V. *Chaos for convolution operators on the space of entire functions of infinitely many complex variables.* Bull. Soc. Math. France **148** (2020), no. 2, 237–251.

[39] Caraballo, B. M. and Fávaro, V. V. *Strongly mixing convolution operators on Fréchet spaces of entire functions of a given type and order.* Integral Equations Operator Theory **92** (2020), no. 4, Paper No. 31, 27 pp.

[40] Carando, D., Dimant, V. and Muro, S. *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces.* Math. Nachr. **282** (2009), no. 8, 1111–1133.

[41] Carando, D., Dimant, V. and Muro, S. *Every Banach ideal of polynomials is compatible with an operator ideal.* Monatsh. Math. **165** (2012), no. 1, 1–14.

[42] Carando, D., Dimant, V. and Muro, S. *Holomorphic functions and polynomial ideals on Banach spaces.* Collect. Math. **63** (2012), no. 1, 71–91.

[43] Carando, D., Mazzitelli, M. and Sevilla-Peris, P. *A note on the symmetry of sequence spaces*, Math. Notes, to appear (disponível em arXiv:1905.11621, 2019).

[44] Defant, A. and Floret, K. *Tensor norms and operator ideals,* North-Holland Mathematics Studies 176, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[45] Defant, A., Popa, D. and Schwarting, U. *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces.* J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 1, 220–242.

[46] Diestel, J., Jarchow, H. and Tonge, A. *Absolutely summing operators,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43. Cambridge University Press,Cambridge, 1995.

[47] Dimant, V. and Villafañe, R. *Diagonal multilinear operators on Köthe sequence spaces.* Linear Multilinear Algebra **67** (2019), no. 2, 248–266.

[48] Dineen, S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

[49] Fernández, C. S. *The closed graph theorem for multilinear mappings.* Internat. J. Math. Math. Sci. **19** (1996), no. 2, 407–408.

[50] Freitas, D. N. *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

[51] Karn, A. K. and Sinha, D. P. *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasg. Math. J. **56** (2014), 427–437.

[52] Kim, S. G. *Multiple weakly summing multilinear mappings and polynomials.* Kyungpook Math. J. **47** (2007), no. 4, 501–517.

[53] Macedo, R. and Santos, J. *Some properties of almost summing operators.* J. Math. Anal. Appl. **504** (2021), no. 2, Paper No. 125431, 11 pp.

[54] Matos, M. C. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.* Collect. Math. **54** (2003), no. 2, 111–136.

[55] Megginson, R. E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[56] Mezrag, L. and Saadi, K. *Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **16** (2009), no. 1, 1–11.

[57] Montanaro, A. *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory.* J. Math. Phys. **53** (2012), no. 12, 122206, 15 pp.

[58] Mujica, J. *Complex Analysis in Banach Spaces,* Dover Publications, 2010.

[59] Muro, S., Pinasco, D. and Savransky, M. *Hypercyclic behavior of some non-convolution operators on* $H(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. J. Operator Theory **77** (2017), no. 1, 39–59.

[60] Muro, S., Pinasco, D. and Savransky, M. *Dynamics of non-convolution operators and holomorphy types.* J. Math. Anal. Appl. **468** (2018), 622–641

[61] Núñez-Alarcón, D., Pellegrino, D. and Serrano-Rodríguez, D. M. *Sharp anisotropic Hardy-Littlewood inequality for positive multilinear forms.* Results Math. **74** (2019), no. 4, Paper No. 193, 10 pp.

[62] Pellegrino, D. and Ribeiro, J. *On almost summing polynomials and multilinear mappings.* Linear Multilinear Algebra **60** (2012), no. 6, 397–413.

[63] Pellegrino, D. and Ribeiro, J. *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility.* Monatsh. Math. **173** (2014), no. 3, 379–415.

[64] Pellegrino, D. and Santos, J. *Absolutely summing multilinear operators: a panorama.* Quaest. Math. **34** (2011), no. 4, 447–478.

[65] Pellegrino, D., Santos, J. and Seoane-Sepúlveda, Juan B. *Some techniques on nonlinear analysis and applications.* Adv. Math. **229** (2012), no. 2, 1235–1265.

[66] Pellegrino, D. and Souza, M. *Fully summing multilinear and holomorphic mappings into Hilbert spaces.* Math. Nachr. **278** (2005), no. 7-8, 877–887.

[67] Pellegrino, D. M. and Souza, M. L. V. *Fully and strongly almost summing multilinear mappings.* Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), no. 2, 683–698.

[68] Pérez-García, D. *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Univ. Complutense de Madrid, 2003.

[69] Pérez-García, D. and Villanueva, I. *Multiple summing operators on banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **285** (2003), no. 1, 86–96.

[70] Pérez-García, D., Wolf, M. M., Palazuelos, C., Villanueva, I. and Junge, M. *Unbounded violation of tripartite Bell inequalities.* Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 2, 455–486.

[71] Pietsch, A. *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.

[72] Pietsch, A. *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory).* In Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983)(1984), vol. 67 of Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, pp. 185–199.

[73] Popa, D. *Mixing multilinear operators.* Illinois J. Math. **56** (2012), no. 3, 885–903.

[74] Popa, D. *Composition results for strongly summing and dominated multilinear operators.* Open Math. **12** (2014), no. 10, 1433–1446.

[75] Popa, D. *Operators with the Maurey–Pietsch multiple splitting property.* Linear Multilinear Algebra **68** (2020), no. 6, 1201–1217.

[76] Ribeiro, J. and Santos, F. *Generalized multiple summing multilinear operators on Banach spaces.* Mediterr. J. Math. **16** (2019), no. 5, Paper No. 108, 20.

[77] Ribeiro, J. and Santos, F. *Absolutely summing polynomials.* Methods Funct. Anal. Topology **27** (2021), 74–87.

[78] Ribeiro, J., Santos, F. and Torres, E. R. *Coherence and compatibility: a stronger approach.* Linear Multilinear Algebra (2020). https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1710103.

[79] Silva, A. R. d. *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[80] Souza, M. L. V. *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes.* Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, Campinas, 2003.

[81] Zalduendo, I. *An estimate for multilinear forms on l^p-spaces.* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93** (1993), no. 1, 137–142.