UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

(UNICAMP)

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

MILENA SOLDÁ POLICASTRO

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NOS TÓPICOS DE DIVISÃO E DO TEMA DE MEDIDA: ABORDAGEM PARA UMA TEORIZAÇÃO DE CONEXÕES MATEMÁTICAS

CAMPINAS

2021

MILENA SOLDÁ POLICASTRO

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NOS TÓPICOS DE DIVISÃO E DO TEMA DE MEDIDA: ABORDAGEM PARA UMA TEORIZAÇÃO DE CONEXÕES MATEMÁTICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Educação, na área de concentração de Educação.

Orientador: Dr. CARLOS MIGUEL DA SILVA RIBEIRO.

Coorientador: Dr. DARIO FIORENTINI.

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA MILENA SOLDÁ POLICASTRO E ORIENTADA PELO PROFESSOR DOUTOR CARLOS MIGUEL DA SILVA RIBEIRO

CAMPINAS

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Faculdade de Educação
Rosemary Passos - CRB 8/5751

P758c Policastro, Milena Soldá, 1979-
Conhecimento especializado do professor nos tópicos de divisão e do tema de medidas : abordagem para uma teorização de conexões matemáticas / Milena Soldá Policastro. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Carlos Miguel da Silva Ribeiro.
Coorientador: Dario Fiorentini.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Conhecimento especializado do professor de matemática. 2. Divisão (Aritmética). 3. Grandezas e Medidas. 4. Conexões (Matemática). 5. Formação de professores. I. Ribeiro, Carlos Miguel da Silva, 1978-. II. Fiorentini, Dario, 1950-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Teacher's specialized knowledge on measurement and division topics: : an approach to a theorization on mathematical connections
Palavras-chave em inglês:
Mathematics teacher's specialised knowledge
Division (Arithmetic)
Quantities and Measures
Connections (Mathematics)
Teacher education
Área de concentração: Educação
Titulação: Doutora em Educação
Banca examinadora:
Carlos Miguel da Silva Ribeiro [Orientador]
Ceneida Fernández Verdú
Nuria de Los Angeles Climent
Alessandro Jacques Ribeiro
Victor Augusto Giraldo
Data de defesa: 14-12-2021
Programa de Pós-Graduação: Educação

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/ 0000-0003-2437-255
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7288791955373985

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NOS TÓPICOS DE DIVISÃO E DO TEMA DE MEDIDA: ABORDAGEM PARA UMA TEORIZAÇÃO DE CONEXÕES MATEMÁTICAS

TEACHER'S SPECIALISED KNOWLEDGE ON MEASUREMENT AND DIVISION TOPICS: AN APPROACH TO A THEORIZATION ON MATHEMATICAL CONNECTIONS

MILENA SOLDÁ POLICASTRO

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro (Presidente - Orientador)

Profa. Drª Ceneida Fernández Verdú, Universidad de Alicante

Profa. Drª Nuria de Los Angeles Climent, Universidad de Huelva

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo, Universidade Federal do Rio de Janeiro

CAMPINAS

2021

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros da banca examinadora encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação.

Dedicatória

Aos meus pais (em memória), Neusa e José Luiz que, de onde estão, sei que vibram com cada conquista da "Tita".

Agradecimentos

Aos meus pais, Neusa e José Luiz que, mesmo não estando fisicamente presentes ao longo de todo o percurso deste doutorado, estiveram a todo o tempo comigo, com o amor que me ensinaram a cultivar.

Ao Danilo, a quem honro e amo incondicionalmente, minha gratidão por ser meu irmão.

Às primas, Priscila e Melissa, que sempre me apoiaram com todo amor, carinho e cuidados típicos de mães.

A todos os familiares – tio Júnior, tia Emília, primas e primos – que, mesmo à distância, acompanharam minhas conquistas e souberam compreender minhas ausências.

Ao Miguel Ribeiro, o orientador do trabalho, por ter me incentivado a me envolver com um mundo que parecia estar tão distante das minhas perspectivas, por ter me ensinado a ser pesquisadora e a fazer pesquisa.

Ao professor Dario Fiorentini, coorientador deste trabalho, que, com sensibilidade, generosidade e experiência, me apoiou quando (finalmente!) me encontrei na temática investigativa e que, com suas contribuições, me ajudou a ampliar olhares e percepções sobre a pesquisa em Educação Matemática.

À amiga Kelly, mulher forte, potente, que me inspira, e que me salvou de todas as formas que uma pessoa pode ser salva na vida, antes e durante esse período do doutorado, me ajudando a construir o lastro necessário para enfrentar esse e tantos outros desafios.

Aos amigos Déa, Laís, Vivi e Wlad, por terem sido minha "torcida", por terem sido minha sustentação emocional e espiritual e por nunca me deixarem esquecer de quem eu sou e do que eu sou capaz!

À amiga Joana, mulher inspiradora e guerreira, que acompanhou (e viveu junto!) os dramas, as delícias e as dores desse período. Por ter me ensinado a "olhar o outro lado do cogumelo", pelas conversas sempre iluminadas e por todo o incentivo, minha eterna gratidão, amiga!

À Dri, amiga, parceira, irmã, por sempre acreditar em mim, e por ter me apoiado, escutado, e me acalmado em todos os momentos mais difíceis ao longo deste percurso.

À amiga Rosa, pelo seu amor sempre transmitido em palavras e ações, pelas incontáveis horas em que esteve comigo, me escutando, me incentivando e me ajudando a pensar com clareza! Grazie mille!

Aos amigos Renata e Marcos, que foram tão importantes e cuidaram de mim numa das fases mais difíceis dessa jornada! Minha gratidão eterna!

À amiga Marlova, pela sua potência inspiradora como pesquisadora e pela força que sempre me transmitiu, me motivando a concluir essa jornada e por ter, nos últimos momentos, segurado em minhas mãos!

À amiga Alessandra, pelo suporte e encorajamento em tempos de instabilidade e incertezas.

À corrente de amigas e amigos, meus irmãos de alma e de Fé, por terem me sustentado espiritualmente em todo o tempo.

Às amigas Mariana, Carla e Gabriela por todo o suporte intelectual, emocional e técnico que me ofereceram, principalmente durante a pesquisa de campo.

A todos os membros do grupo de pesquisa e formação CIEspMat, pelas oportunidades de discussões e por suas contribuições para as mudanças de perspectivas e olhares para a Matemática e seu ensino.

À querida professora Maria Mellone, por ter me acolhido na Univeristà degli Studi di Napoli Federico II, durante os dias de trabalho na Itália, e por ter me ajudado a usar outras "lentes" para enfrentar esse desafio que é fazer pesquisa.

Às queridas professoras e aos queridos professores que contribuíram com a pesquisa, por sua dedicação, sua entrega e generosidade ao me permitirem realizar a investigação no seu contexto de formação. A vocês, toda a minha admiração e gratidão!

Às funcionárias e aos funcionários da Faculdade de Educação, sempre solícitos e disponíveis para me ajudar, meus sinceros agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

RESUMO:

A maior parte das investigações no Brasil que assumem como foco o professor de e que ensina Matemática não se aprofunda nas especificidades do seu conhecimento para o ensino, centrando-se nas generalidades dos processos de ensino e aprendizagem ao não considerar especificamente o conteúdo a ser ensinado, ou ao se centrar no papel do professor enquanto aprendiz de Matemática, desconsiderando as particularidades do ensino desta disciplina. Assumindo-se o importante papel que o conhecimento do professor exerce no desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades matemáticas dos alunos, esta pesquisa foca-se nas especificidades desse conhecimento docente, encarando-as segundo a lente teórico-analítica do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), que considera a espcialização do conhecimento do professor, tanto na sua dimensão matemática quanto na dimensão pedagógica. Assim, objetiva-se, por um lado, caracterizar o conhecimento especializado do professor, ao explorar e descrever as especificidades desse conhecimento no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida. E, por outro lado, objetiva-se mapear e descrever as relações que se observam entre o conteúdo do conhecimento especializado no âmbito destes tópicos, de modo a evidenciar conexões matemáticas do tipo intra-conceituais e interconceituais. Dessa forma, busca-se resposta à questão: *Que conhecimento especializado revelam professores participantes de um Programa de Formação Continuada, focada nas especificidades do conhecimento do professor de e que ensina matemática, sobretudo em relação a elementos estruturais e estruturantes da matemática no âmbito dos tópicos de Medidas e de divisão*? Para isso, adotamos uma metodologia qualitativa, do tipo estudo de caso instrumental. Dois tipos de informações foram utilizadas na pesquisa, sendo o primeiro referente às produções (registros escritos e comentários orais e gestuais) dos professores para as Tarefas para Formação (TpF), implementadas no contexto de um Programa de Formação Continuada (PFC), na modalidade curso de Especialização em Matemática, em que cada um dos sete módulos do curso (cinco encontros por módulo) foi também oferecido como curso de extensão, pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. A coleta dessas informações foi feita por meio de gravações de áudio e de vídeo de duas sessões de formação (8 horas cada), além dos registros escritos dos professores para as tarefas com foco no tópico de divisão e nos tópicos de Medida. A análise foi feita a partir das transcrições das gravações dos encontros de formação, além dos registros escritos dos professores para as tarefas. Dessa análise, emergiram descritores do conhecimento especializado do professor relacionado aos tópicos (KoT) de divisão e do tema de Medida, que foram apresentados nos artigos que compõem esta tese. O segundo tipo de informação utilizada se relaciona com os próprios descritores do conhecimento emergentes do conteúdo das produções dos professores. A análise do conteúdo desses descritores permitiu evidenciar um conjunto de elementos estruturantes e ideias unificadoras que dão forma a uma arquitetura do conhecimento matemático do professor associado aos tópicos de divisão e do tema de Medida. Nesse sentido, propusemos uma teorização das conexões matemáticas associadas ao conhecimento especializado do professor, apresentadas na forma de "pacotes de conhecimento especializado".

Palavras-chave: Conhecimento especializado do professor de Matemática. Divisão (Aritmética). Grandezas e Medidas. Conexões (Matemáticas). Pacotes de conhecimento especializado. Formação de professores.

ABSTRACT:

Most of the investigations in Brazil that focus on the teacher does not consider the specifics of their knowledge for teaching, focusing on the general aspects of the teaching and learning processes by not specifically considering the content to be taught, or by focusing on the role of the teacher as a Mathematics learner, disregarding the particularities of teaching this subject. Assuming the important role that teacher knowledge plays in the development of students' mathematical knowledge and skills, this research focuses on the specificities of this teaching knowledge, considering them according to the theoretical and analytical lens of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), which considers the specialization of the teacher's knowledge, both in its mathematical and pedagogical dimensions. Thus, the objective is, on the one hand, to characterize the teacher's specialized knowledge, by exploring and describing the specifics of such knowledge within the scope of the topics of division and Measurement. On the other hand, the objective is to map and describe the relationships that are observed between the content of such a specialized knowledge within these topics, in order to highlight intra-conceptual and inter-conceptual mathematical connections. Thus, it seeks to answer the question: What specialized knowledge reveal teachers participating in a Teachers Training Program, focused on the specifics of teacher's knowledge, especially in relation to structural and structuring elements of mathematics, within the topics of Measurement and division? For this, we adopted a qualitative research methodology which is an instrumental case study type. Two types of information were used in the research, the first one referring to the productions (written records and oral and gestural comments) of the teachers for the Training Tasks (TT), implemented in the context of a Teachers Training Program (TTP), in a specialization course in Mathematics, in which each of the seven modules of the course (five meetings per module) was also offered as an extension course, by the Faculty of Education of the State University of Campinas. The data was gathered through audio and video recordings of two training sessions (8 hours each), in addition to the teachers' written records for the tasks focusing on the topic of division and on the topics of Measurement. The analysis was carried out based on transcripts of the recordings of the training sessions, in addition to the teachers' written records for the tasks. From this analysis, descriptors of the teacher's specialized knowledge related to the topics (KoT) of division and the theme of Measurement emerged, and it was presented in the papers that make up this thesis. The second type of information used is related to the descriptors of teacher's knowledge emerging from the content of teachers' productions. The analysis of the content of these descriptors revealed a set of structuring elements and unifying ideas that form an architecture of the teacher's mathematical knowledge, associated with the topic of division and the topics of Measurement. In this sense, we proposed a theorization of mathematical connections associated with the teacher's specialized knowledge, presented in the form of "specialized knowledge packages".

Keywords: Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Division. Measurement. Mathematical connections. Specialized knowledge packages. Teacher Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BOLEMA – Boletim de Educação Matemática

CAPES – Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CCK – Common Content Knowledge

CIEspMat – Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor de Matemática

HCK – Horizon Content of Knowledge

KoT – Knowldge of Topics

KPM – Knowledge of Pratices of Mathematics

KSM – Knowledge of the Structures of Mathematics

KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics

KMLS – Knowledge of Mathematics Teaching

KMT – Knowledge of Mathematics Learning Standards

KQ – Knowledge Quartet

MK – Mathematical Knowledge

MKT – Mathematical Knowledge for Teaching

MTSK – Mathematics Teacher's Specialized Knowledge

PCK – Pedagogical Content Knowledge

PFC – Programa de Formação Continuada

PRAPEM – Práticas Pedagógicas em Matemática

SMK – Subject Matter Knowledge

SCK – Subject Content Knowledge

TF – Tarefas Formativas

TSK – Teacher's Specialized Knoweledge

TpF – Tarefas para Formação

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde os trabalhos de Shulman e colaboradores (por exemplo, SHULMAN, 1986; WILSON; SHULMAN; RICHERT, 1987), muitas pesquisas no âmbito da Educação Matemática assumem a centralidade do conhecimento do professor[1] (conteúdo, natureza e tipo), reconhecendo o impacto desse conhecimento em sua prática (BLÖMEKE et al., 2008; CHARALAMBOUS, 2015; HILL et al., 2008; KUNTER et al., 2013; SANTAGATA; LEE, 2021).

Ao mesmo tempo, outras diversas frentes de investigações se concentram em identificar as relações existentes entre o conhecimento do professor e o desenvolvimento das aprendizagens e capacidades matemáticas dos alunos (ver por exemplo, BOYD et al., 2009; DARLING-HAMMOND, 2000; GROSSMAN, 2010; NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004).

Esse conhecimento do professor tem implicações, dentre outros fatores, nos tipos de tarefa que elabora (CHARALAMBOUS, 2010) e nos tipos (e forma) de discussão que propõe em sala de aula (DA PONTE; QUARESMA, 2016; POLICASTRO et al., 2020; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008), quando se trata de favorecer a compreensão por parte dos alunos daquilo que fazem (ou devem fazer) e do porquê o fazem (ou devem fazer) a cada momento quando lidam com a matemática. Além disso, é precisamente esse conhecimento do professor que o ajuda a atribuir significado aos comentários, produções, resoluções, conjecturas e outras formas de manifestações e comunicações matemáticas formuladas pelos alunos (DREHER; KUNTZE, 2015; FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; LEE; CROSS FRANCIS, 2018; RIBEIRO et al., 2017), perspectivando a futura tomada de decisões e ações pedagógicas (HILL; ROWAN; BALL, 2005; MA, 1999), no sentido de desenvolver seus conhecimentos matemáticos.

Assim, a centralidade que o conhecimento do professor exerce no âmbito de sua prática profissional e o papel que representa nas e para as aprendizagens e resultados dos alunos (HILL; BALL; SCHILLING, 2008), justificam as diversas frentes de investigação

[1] Por considerarmos a natureza especializada do conhecimento do professor, nesta pesquisa não diferenciamos “professor de matemática” de “professor que ensina matemática” e, nesse sentido, sempre nos referimos a “professor”, incluindo todos aqueles que possuem Licenciatura (em Pedagogia e/ou em Matemática) e que desenvolvem o seu labor profissional relacionado com o ensino da matemática.

que vêm sendo desenvolvidas com maior intensidade nas últimas três décadas, e que colocam em evidência as dimensões, as características e o conteúdo próprios desse conhecimento, em particular, no caso do professor que desenvolve o seu labor profissional no âmbito do ensino da matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BROMME, 1994; CARRILLO et al., 2018; DAVIS; SIMMT, 2006; FENNEMA; FRANKE, 1992; GODINO et al., 2017; ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005).

No Brasil, as investigações que têm tido como objeto de estudo os conhecimentos do professor no âmbito da Matemática vêm, gradativamente, ocupando maior atenção dos pesquisadores na área, como mostraram Fiorentini e Crecci (2017), em uma metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada desses professores[2]. Nesse estudo, os autores identificaram que, dentre os 858 trabalhos de pesquisa[3] produzidos entre 2001 e 2012, 46 teses de doutorado tinham como foco de estudo a Formação Continuada de professores de e que ensinam Matemática. No entanto, dessas 46 teses, apenas 13 abordavam os saberes e conhecimentos profissionais fundamentando-se, em sua maioria, nos referenciais teóricos propostos por Shulman (1986) e Tardif (2002), cujas abordagens se detêm em aspectos gerais do ensino, deixando à margem as especificidades do conhecimento do professor. Apenas uma das pesquisas encontradas nesse rol de investigações considerou essas especificidades, tendo utilizado como aporte teórico a conceitualização do *Mathematical Knowledge for Teaching* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Atualmente, no âmbito nacional, encontramos pesquisas com foco nas especificidades do conhecimento do professor, já concluídas ou em desenvolvimento, no âmbito dos grupos de pesquisa CIEspMat e TSK Group[4], mas que não se fundamentam na conceitualização do *Mathematical Knowledge for Teaching*. Ainda assim, podemos considerar que, em termos nacionais, a quantidade de pesquisas acadêmicas do tipo teses e

---

[2] Este estudo compôs parte de um projeto maior intitulado “Mapeamento e Estado da Arte da Pesquisa Brasileira sobre o Professor que Ensina Matemática” e teve como objetivo principal “mapear, descrever e sistematizar as pesquisas brasileiras – produzidas no âmbito dos programas de Pós-Graduação stricto sensu das áreas de Educação e Ensino da CAPES, no período de 2001 a 2012 – que tiveram como foco de estudo o Professor de e que Ensina Matemática” (FIORENTINI; CRECCI, 2017).

[3] Todos os trabalhos sendo teses e dissertações, tratando especificamente sobre o professor que ensina matemática.

[4] Grupos sediados, respectivamente, na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), no estado de São Paulo, e no Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT), na cidade de Cuiabá, e coordenados, respectivamente, pelos professores doutores Miguel Ribeiro e Jeferson Moriel Gomes Junior.

dissertações com esse foco investigativo é ainda pouco significativa, não possibilitando que os entendimentos relacionados com as especificidades do conhecimento do professor sejam aprofundados, em termos nacionais.

Quando ampliamos[5] o rol de tipos de pesquisas desenvolvidas no âmbito nacional, inserindo nesse conjunto os artigos publicados e vinculados à base de dados Scielo, confirmamos a escassez de investigações com foco no conhecimento do professor. Por exemplo, quando restringimos a busca[6] à área temática *Educação e pesquisa educacional* com os parâmetros *conhecimento do professor* e *matemática*, obtivemos os seguintes resultados: 1) quando os parâmetros foram inseridos sem aspas, o que indica que a busca não retorna os resultados em que todos os termos aparecem exatamente como conteúdo dos textos, foram encontrados 28 trabalhos, todos artigos de periódicos, publicados entre 2002 e 2018; 2) quando os parâmetros foram inseridos entre aspas, somente um trabalho retornou da busca, sendo que este já estava considerado no rol de trabalhos elencados na busca anterior.

Uma leitura dos 28 trabalhos, partindo-se dos resumos, palavras-chave e referências bibliográficas utilizadas, nos permitiu confirmar que existe uma lacuna na literatura nacional em relação ao conhecimento professor, já que, apenas três trabalhos (RIBEIRO, 2012; SERRAZINA, 2014; TRIVILIN; RIBEIRO, 2015) consideram as especificidades do conhecimento do professor tomando como referenciais teóricos os estudos desenvolvidos por Ball e colaboradores (2008). Ressalta-se que, dentre esses três trabalhos, o de Serrazina (2014) não foi realizado no âmbito nacional.

Num levantamento de todas as publicações ocorridas entre os anos de 2012 e 2018 no periódico BOLEMA[7] sobre a temática "conhecimento do professor", utilizando os parâmetros de busca com os termos "professor; professores; *maestro; profesor*; *teacher*;

---

[5] A opção pelo foco narrativo desse trabalho, em primeira pessoa do plural, justifica-se pela necessidade de serem levados em conta os diferentes (e inúmeros) momentos de discussões realizadas nos âmbitos dos grupos de pesquisa coordenados, respectivamente, pelo orientador e coorientador dessa tese, a saber, o grupo Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de/que ensina Matemática (CIEspMat) e o grupo Práticas Pedagógicas em Matemática (PRAPEM), além das incontáveis horas de discussão com os próprios orientadores e demais colegas que colaboraram significativamente com todo o percurso trilhado ao longo desta pesquisa.

[6] Última busca realizada em agosto de 2019.

[7] O periódico "Boletim de Educação Matemática" (BOLEMA) foi classificado pela fundação "Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior" (CAPES) com *qualis* A1, no ano de 2018, tanto para a área de Educação quanto para a área de Ensino, duas áreas centrais no contexto da Formação de Professores.

ensino; matemática; conhecimento; aluno", Caldatto, Policastro e Ribeiro (2019) concluíram que mais da metade (aproximadamente 51%) das pesquisas publicadas nesse periódico (um total de 453 trabalhos entre artigos e resenhas) não trata das especificidades do conhecimento do professor para o ensino de matemática. Isso porque boa parte dessas pesquisas (38%) foca-se nas aprendizagens dos alunos, deixando à margem o conhecimento do professor nesse processo. A outra parcela dos trabalhos (13%), segundo a pesquisa, considera as relações professor-aluno sem a presença do conteúdo a ser ensinado (conhecimento pedagógico geral, portanto) ou considera a relação do professor (enquanto aprendiz) com a Matemática, sem considerar o ensino desta.

Quando ampliamos o horizonte para o campo internacional das pesquisas relacionadas com as especificidades e particularidades que configuram as dimensões do conhecimento do professor, deparamo-nos com uma diversidade de perspectivas sob as quais tal conhecimento é investigado (ver por exemplo, BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BAUMERT et al., 2010; CARRILLO et al., 2018; DAVIS; SIMMT, 2006; GODINO et al., 2017; GOOS, 2008; ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005). Dessa forma, e seguindo as tendências internacionais, fica evidente a necessidade de incrementar, no Brasil, o investimento em pesquisas que levem em conta também essa perspectiva de abordagem investigativa com relação ao conhecimento do professor.

Nesse sentido, com esta pesquisa, pretendemos impulsionar a ampliação de discussões que envolvem as especificidades do conhecimento do professor, no contexto brasileiro, além de fornecer elementos que podem contribuir para a melhoria da formação e consequentemente da prática letiva do professor (POTARI et al., 2013).

A seguir, passamos a apresentar os principais elementos nos quais nos amparamos para a constituição da problemática da pesquisa, justificando, então, a nossa escolha pelo foco da investigação.

A constituição da problemática investigativa

Dentre a diversidade de conceitualizações divulgadas internacionalmente acerca do conhecimento do professor, no que se refere à natureza e às especificidades desse conhecimento, damos destaque, particularmente, às perspectivas teóricas do *Mathematical*

Knowledge for Teaching[8] (MKT), do *Knowledge Quartet* (KQ) e do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)*, formuladas, respectivamente, por Ball et al. (2008), Rowland et al. (2005) e Carrillo et al. (2018).

Com efeito, o MKT é uma perspectiva que considera o conhecimento do professor partindo de três das sete categorias propostas por Shulman (1986)[9], quais sejam, o *Subject Matter Knowledge* (SMK), o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e o *Curricular Knowledge* (CK) – que se integra ao PCK –, e subdivide cada uma das duas dimensões em três subdomínios. Um dos elementos centrais na perspectiva do MKT se relaciona com encarar uma dimensão do conhecimento matemático do professor como sendo especializada, isto é, como tendo uma natureza distinta do conhecimento matemático que uma pessoa qualquer que tenha sido escolarizada possui. Isso inclui, também, aqueles profissionais que tenham algum tipo de formação em um nível matemático que se consideraria como sendo mais "avançado" – por exemplo, um matemático puro, um engenheiro ou um físico.

Além disso, o MKT considera que a especificidade inerente ao conhecimento matemático do professor corresponde a "o que" e "como" ele conhece cada um dos tópicos que irá ensinar e ao modo como ele organiza, fundamenta os conceitos e estabelece relações entre os tópicos distribuídos ao longo do currículo. Outro ponto central nessa perspectiva é o fato de se considerar conhecimentos pedagógicos específicos do professor, ou seja, seus conhecimentos sobre o ensino, a aprendizagem e o currículo, sempre relacionados especificamente com a matemática escolar.

Com relação a conceitualização proposta por Rowland e colaboradores (2005), o *Knowledge Quartet* (KQ), essa também tem a sua base no trabalho seminal de Shulman (1986) já que, assim como no MKT, esse modelo toma como ponto de partida as categorias SMK e PCK a fim de compreender especificamente os aspectos relacionados com conhecimento do professor. Assim, o KQ nasce da premissa de que as escolhas e ações do

---

[8] Neste trabalho, optamos por não traduzir termos ou expressões de língua estrangeira que sejam conhecidos internacionalmente, por considerarmos que as traduções podem, em alguns casos, desvirtuar os sentidos originais empregados pelos seus autores e empobrecer a essência das ideias contidas nas expressões usadas, como pretendidas por eles.

[9] No referido trabalho, são consideradas as categorias: *Subject Matter Knowledge*; *Pedagogical Content Knowledge*; *General Pedagogical Knowledge*; *Curriculum Knowledge*; *Knowledge of Learners and their characteristics*; *Knowledge of Educational Contexts*; *Knowledge of Educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds*.

professor durante uma aula são influenciadas pelo seu SMK e PCK. Dessa forma, a partir de uma análise minuciosa de diversos episódios de aula, os pesquisadores descreveram como o conhecimento do conteúdo (conhecimentos matemático e pedagógico) entra em jogo numa aula, tendo para isso identificado um conjunto de códigos. A partir de um agrupamento desses códigos, os autores identificaram quatro dimensões sob as quais o conhecimento do professor pode ser compreendido: *foundation*, *transformation*, *connection* e *contingency* (ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005).

As conceitualizações do MKT e do KQ nos possibilitam compreender, por um lado, no caso do MKT, a potencialidade de se considerar diferentes dimensões do conhecimento do professor de Matemática, em particular, uma delas sendo de natureza especializada. Por outro lado, no caso do KQ, a importância de se considerar uma perspectiva que assume explicitamente os aspectos relacionados ao conhecimento do professor quando este se encontra em situações de prática letiva.

Embora a perspectiva teórica do MKT seja reconhecida internacionalmente como um modelo potente para investigar e até mesmo avaliar o conhecimento e a prática do professor (ROCHE; CLARKE, 2013; SANTAGATA; LEE, 2021; SCHOEN et al., 2017), em determinados aspectos essa perspectiva apresenta algumas limitações (RIBEIRO, 2010; SOSA, 2011). Para o foco do nosso estudo, consideramos que a principal dessas limitações reside no fato de que se torna bastante problemático, em alguns casos, o discernimento entre as categorias *Common Content Knowledge* (CCK) e *Specialised Content Knoweldge* (SCK), algo que já havia sido destacado pelos próprios autores desse modelo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), e que vem sendo discutido em diferentes contextos e momentos, na última década (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013; RIBEIRO; MONTEIRO; CARRILLO, 2010; VASCO et al., 2013).

Na apresentação da conceitualização do modelo MKT, o trabalho que o professor deve desenvolver com os alunos é considerado como sendo pautado pelo seu conhecimento especializado e está associado a um tipo de "descompactação" da matemática, algo que não seria necessário para o trabalho em que o processo de ensino[10] não está em jogo (BALL;

[10] Quando falamos dos "processos de ensino da matemática" não estamos nos referindo somente aos momentos de ensino na sala de aula, mas também a todo o conjunto de reflexões e ações que um professor emprega antes e depois desse momento específico do ensino *in loco*. Por exemplo, quando prepara a sua aula e quando, posteriormente, reflete sobre ela, o professor encontra-se nesse "processo de ensino da matemática".

THAMES; PHELPS, 2008). Por exemplo, de acordo com essa conceitualização do conhecimento do professor, fornecer diferentes exemplos para determinadas situações matemáticas é parte da dimensão especializada desse conhecimento (SCK). Mas, ao mesmo tempo, no MKT, considera-se que saber efetuar um determinado cálculo é uma atividade que se relaciona com o conhecimento comum que é compartilhado com outros indivíduos escolarizados (CCK).

Entretanto, se considerarmos uma situação de ensino específica, digamos, a partir de um problema que envolve, por exemplo, a resolução de uma operação de divisão envolvendo números naturais, poderíamos nos questionar se é de natureza especializada (ou não) o conhecimento de que essa operação pode ser resolvida, para além do algoritmo tradicionalmente conhecido, efetuando-se a decomposição do dividendo em partes, as quais seriam divididas pelo divisor, e cujos resultados dessas divisões deveriam ser somados, para compor o quociente. Ou ainda, que essa divisão pode ser resolvida por meio da "distribuição" equitativa de parcelas resultantes da decomposição do dividendo, em uma quantidade de grupos corresponde ao divisor.

Assim, a questão central é: conhecer procedimentos distintos do algoritmo "tradicional" para a resolução de uma operação do tipo $536 \div 4$ (ver Figura 1), por exemplo, seria ou não um conhecimento de natureza especializada do professor, quando este se encontra numa situação específica de ensino?

Figura 1 – Duas resoluções distintas para a operação $536 \div 4$ feitas por professores em formação

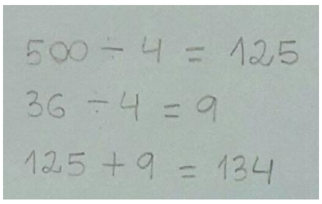


Imagem 1

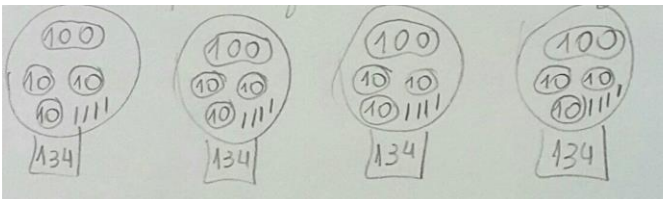


Imagem 2

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Segundo a perspectiva do MKT, a resposta para essa indagação seria naturalmente fornecida no sentido de negar a natureza especializada desse conhecimento, associando-o ao subdomínio CCK.

No entanto, alternando essa perspectiva e passando a encarar como especializado para o professor o conhecimento desses distintos procedimentos de resolução da divisão, poderemos esperar que ele compreenda (e assuma) que, no caso do procedimento que se apoia na "distribuição" equitativa (Imagem 2 da Figura 1) das quantidades que compõem o dividendo em uma quantidade de grupos correspondente ao divisor, a divisão estaria sendo interpretada a partir de um de seus sentidos, qual seja, o de partilha equitativa (CHARLES; NASON, 2000; LAMON, 1996).

Já no caso do procedimento que se apoia na decomposição (ou partição) do dividendo em parcelas que, por sua vez, são divididas pelo divisor (Imagem 1 da Figura 1), a divisão poderia estar sendo interpretada a partir de outro sentido – o de medida – e, nesse caso, esse professor poderia assumir que é possível estabelecer uma conexão entre os tópicos de divisão e os de medida, relacionando esse procedimento (e a verbalização que se emprega ao efetuá-lo) com aquilo que se faz (e se pensa) quando se está efetuando uma medição: uma comparação entre magnitudes de uma mesma grandeza, em termos da quantificação de uma em função da outra. Em termos mais específicos associados a este procedimento, a conexão a ser estabelecida se ampara no entendimento de que o dividendo pode ser assumido como uma magnitude a ser medida (o todo), que deverá ser particionada, e cujas partes serão medidas com uma unidade que, no cálculo da divisão, é representada pelo divisor. Com isso, o quociente da divisão será interpretado como a soma (ou acúmulo) dos resultados obtidos das medidas efetuadas quando se comparou e se quantificou o número de vezes que o divisor (unidade de medida) coube em cada uma das partes nas quais foi particionado o todo a ser medido – dividendo – (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; SQUIRE; BRYANT, 2002).

Esse tipo de conhecimento a respeito das conexões que se pode estabelecer entre tópicos matemáticos distintos é esperado – e importante para o trabalho – de um professor, mas não necessariamente de um indivíduo qualquer que tenha passado por um processo de escolarização[11], mesmo que tenha tido contato com uma formação matemática de nível superior. Justamente por isso consideramos que, quando se pretende investigar as particularidades do conhecimento do professor e, em casos mais específicos, quando se pretende promover o desenvolvimento desse conhecimento em contextos de formação inicial e continuada, é fundamental que se busque por outras formas de encarar o conhecimento do

[11] Em um mundo ideal, todos os alunos e adultos têm o direito e a oportunidade de serem detentores deste conhecimento. Mas, pelas especificidades do contexto em que vivemos, essa não é a realidade e, por isso, há que se considerá-lo um conhecimento especializado do professor para que se possa contribuir para tornar isso realidade em algum momento no futuro.

professor que sejam menos problemáticas no sentido de estabelecer (ou enxergar) essas diferenciações sugeridas pelo modelo MKT.

Carrillo, Montes, Contreras e Climent (2017), nesse sentido, contribuem para ampliar o entendimento a respeito dessa perspectiva de conhecimento especializado do professor, destacando que se refere àquele conhecimento para o desenvolvimento de sua prática profissional em contextos de ensino e de aprendizagem. Note-se que alguns elementos desse conhecimento podem ser compartilhados com outros indivíduos escolarizados ou com profissionais que lidam com a matemática e/ou que a utilizam como instrumento – inclui, assim, obviamente, o que no MKT seria considerado de Conhecimento Comum do Conteúdo.

De fato, essa mudança na forma de encarar as especificidades do conhecimento do professor pressupõe assumir o conhecimento desse profissional desde um ponto de vista intrínseco (SCHEINER et al., 2017), já que o principal fator que determina a especialização de seu conhecimento é justamente a disciplina que ensina. Tal perspectiva é um dos elementos chave na conceitualização da lente teórico-analítica do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

O MTSK é uma conceitualização que assume que todo o conhecimento do professor é especializado, tanto na dimensão do conhecimento matemático quanto na dimensão do conhecimento pedagógico. A partir dessas duas dimensões, propõe-se a exploração do conteúdo do conhecimento do professor, considerando-se seis subdomínios do conhecimento. Tais subdomínios, por sua vez, configuram-se a partir de categorias que, dentre outros objetivos, pretendem tornar mais explícitas as especificidades desse conhecimento relacionadas a cada tópico matemático, seu ensino e aprendizagem. Além disso, no MTSK considera-se, em uma dimensão do conhecimento especializado do professor, as crenças do professor sobre a matemática e sobre o seu ensino e aprendizagem.

Esse modo de encarar as especificidades do conhecimento do professor e, em particular, o modo como essas especificidades são descritas em termos do conteúdo do conhecimento do professor e associadas a cada um dos subdomínios, possibilita uma visão mais ampla e ao mesmo tempo mais profunda da natureza e tipo desse conhecimento, em relação a cada tópico matemático.

Além disso, por ser uma ferramenta que possibilita examinar detalhadamente e descrever o conteúdo do conhecimento especializado do professor, o MTSK nos permite compreender como o conteúdo desse conhecimento se relaciona e de que forma essa(s) relação(relações) poderá(poderão) orientar a prática docente. Como consequência dessa potencialidade de exploração do conteúdo do conhecimento do professor, o MTSK pode ser utilizado como uma ferramenta para a conceitualização de tarefas para a formação de professores que tenham como objetivo explícito o desenvolvimento do conhecimento especializado do professor (CALDATTO et al., 2019; POLICASTRO et al., 2019; RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021; RIBEIRO; GIBIM; ALVES, 2021).

Essa diversidade de aspectos com que a lente teórico-analítica do MTSK se mostra efetiva nas diferentes abordagens e contextos relacionados com o conhecimento do professor, quer seja para análise do conteúdo desse conhecimento, ou para a conceitualização de tarefas para a formação com foco no desenvolvimento do conhecimento especializado, foi determinante na nossa opção por assumi-la como principal referencial teórico e analítico para o desenvolvimento desta investigação.

Outro elemento importante no processo da escolha do referencial teórico para o desenvolvimento da investigação com foco no conhecimento do professor, relacionou-se com o fato de que as três perspectivas teóricas sobre o conhecimento do professor (MKT, KQ e MTSK) consideram que as conexões que este profissional realiza (ou pode realizar) representam um pilar sustentador de uma estrutura orgânica para o ensino e a aprendizagem matemática dos alunos.

Por exemplo, no MKT, o conhecimento do professor relacionado com as conexões está considerado a partir da categoria *Horizon Content Knowledge* (HCK) que, segundo os autores, se refere a "uma consciência do professor sobre como os tópicos matemáticos estão relacionados entre si ao longo de sua distribuição curricular" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403). Tal consciência contribui para que o professor desenvolva um trabalho intencionalmente orientado no sentido de fundamentar a matemática com conceitos e noções requeridos no desenvolvimento de conhecimentos futuros, tendo sempre em consideração os conhecimentos prévios (BALL et al., 2008).

O KQ, por sua vez, considera uma dimensão do conhecimento do professor associada às conexões e atribui a ela um papel crucial nas práticas desse profissional, seja para o estabelecimento de uma coerência no plano de trabalho e nas diferentes tarefas elaboradas e implementadas (ROWLAND et al., 2009), seja na atividade de atribuição de sentido às produções dos alunos como ponto de partida para ampliar e aprofundar o conhecimento matemático dos estudantes.

Na conceitualização do MTSK, as conexões são entendidas a partir de duas perspectivas. Por um lado, consideram-se as relações entre construtos ou conceitos dentro de um mesmo tópico (conexões intra-conceituais) e, por outro lado, consideram-se as relações entre tópicos distintos (conexões interconceituais). Para cada uma dessas perspectivas, as conexões são tratadas como conteúdo do conhecimento do professor associado a distintos subdomínios, considerando-se as particularidades de serem do tipo intra ou interconceituais (CARRILLO et al., 2018).

Note-se que nas três conceitualizações do conhecimento do professor, as conexões são entendidas como parte de uma dimensão ou mesmo assumindo toda uma dimensão do conhecimento deste profissional. Além disso, nessas conceitualizações, as conexões assumem um papel crucial na prática do professor, já que, de modo implícito ou explícito, são consideradas essenciais no processo de ensino da matemática com foco nas estruturas[12] conceituais e procedimentais. É este foco que ajuda o professor a desenvolver nos alunos um entendimento mais coerente e profundo da matemática, ou como Mason (2003) referiu, um pensamento matemático estrutural.

De fato, a ideia de que o conhecimento matemático se configura como uma grande rede de *links* entre conceitos vem sendo explorada há décadas no contexto do ensino, com a perspectiva de que "as relações permeiam os fatos e proposições individuais de modo que todas as informações estão conectadas a alguma rede" (HIEBERT; LEFEVRE, 1986, pp. 3–4).

Segundo Skemp (1989), um conceito é uma representação mental elaborada pelos indivíduos, a partir de experiências vividas, nas quais eles são capazes de identificar elementos e propriedades comuns, e o processo de conceituação é denominado abstração. Nesse sentido, "conceitos não representam experiências isoladas, mas se constituem a partir de regularidades abstraídas destas" (SKEMP, 1989, p. 52). A característica principal de um processo de "aprendizagem inteligente" (*ibidem*, p. 52), nos quais as conexões assumem um papel fundamental, se baseia, portanto, na identificação dessas regularidades e similaridades, as quais deverão ser dispostas e organizadas dentro de uma estrutura conceitual.

[12] Quando falamos de estruturas matemáticas, não estamos nos referindo às estruturas algébricas, mas sim à estrutura matemática que integra a forma como as redes de relações entre conceitos, fundamentos, propriedades e procedimentos matemáticos se dão e se organizam como elemento sustentador da matemática – em um tipo de analogia associado a estrutura que sustenta um qualquer elemento físico ou mesmo teórico.

Nessa mesma direção, Mason, Stephens e Watson (2009) apontam que esse pensamento estrutural está associado a um tipo de raciocínio pautado na “identificação de propriedades gerais que são instanciadas em situações particulares em forma de relações entre elementos ou subconjuntos de elementos de um conjunto” (p. 10). Ainda que seja importante e desejável que os alunos sejam capazes de estabelecer conexões espontaneamente, não se pode “assumir que as conexões serão realizadas sem alguma intervenção” (WEINBERG, 2001, p. 26) por parte do professor. Inclusive, não se pode assumir que, pelo fato de os livros didáticos tratarem de alguns tópicos de forma a mostrar que certas representações e procedimentos são similares ou mesmo correspondentes, então os alunos serão capazes de compreender sozinhos que, por trás dessas similaridades, existem conexões matemáticas (WEINBERG, 2001).

Nesse sentido, para desenvolver o conhecimento dos alunos com foco nas estruturas matemáticas de cada um dos tópicos e nas conexões matemáticas, não basta que o professor relacione os tópicos segundo uma organização curricular proposta numa perspectiva acadêmica da disciplina, que é tipicamente compartimentada. Para além dessa perspectiva, é necessário que o professor se paute em “ideias centrais que determinam como o conhecimento é gerado e organizado dentro da disciplina” (SCHMIDT; HOUANG; COGAN, 2002, p. 9), o que implica que ele próprio conheça ampla e profundamente (MA, 1999) um conjunto de conceitos, propriedades, fundamentos e suas conexões dentro de um mesmo tópico e entre tópicos distintos, e conheça modos de evidenciá-las, dando forma à estrutura da disciplina (DE GAMBOA et al., 2020).

Com efeito, para Vale, McAndrew e Krishnan (2010), o desenvolvimento de uma consciência das estruturas da matemática, do entendimento das conexões matemáticas e do conhecimento de como organizar os tópicos numa distribuição curricular de modo a evidenciar essas conexões, deveriam ser elementos centrais nos programas de formação de professores que desenvolvem ou irão desenvolver a sua prática no âmbito do ensino da matemática. É justamente por isso que pesquisas com foco no conhecimento do professor relacionado às conexões matemáticas devem ser ampliadas, particularmente no caso brasileiro, em que são evidentes as lacunas existentes em relação a essa temática de investigação[13].

---

[13] Numa busca na base de dados de teses e dissertações da CAPES, não encontramos qualquer pesquisa associada a tal temática. No âmbito internacional, no entanto, encontramos pesquisas que têm sido desenvolvidas com foco no conhecimento do professor sobre conexões há pelo menos uma década, como é

Neste ponto, cabe destacarmos algo central no desenvolvimento dessa investigação, que se relaciona com a clarificação do que se assume por conhecimento, visto que este é um trabalho em que se pretende colocar em evidência o conhecimento do professor. Assumimos a definição de Schoenfeld (2010), que considera que o conhecimento de um indivíduo é toda a informação que ele possui disponível para resolver problemas, alcançar metas ou desempenhar qualquer tarefa. Seguindo esta perspectiva, quando identificamos ou discutimos o conhecimento do professor "tal conhecimento não necessariamente precisa estar correto" (SCHOENFELD, 2010, p. 25).

A definição apresentada por Schoenfeld (2010) vem ao encontro da perspectiva que assumimos acerca do conhecimento mobilizado e revelado[14] pelo professor nos diferentes contextos nos quais entram em jogo os processos de ensino e de aprendizagem. Isso porque, embora haja linhas de investigação que buscam avaliar e medir o conhecimento "necessário" ao professor para o ensino de matemática (ver por exemplo, HILL et al., 2008; HILL; CHIN, 2018; TCHOSHANOV, 2011), no caso desta pesquisa, o conhecimento do professor não será medido e tampouco avaliado. Isto significa que, ao assumir a perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) para caracterizar o conhecimento do professor, nos propomos a explorar, descrever e detalhar a natureza e os tipos das especificidades deste conhecimento.

De forma mais específica, essa caracterização se concretiza a partir da descrição do conteúdo do conhecimento do professor relacionado com cada um dos tópicos (o que e como ele conhece cada tópico) e que conexões estabelece (ou pode vir a estabelecer) entre conceitos, fundamentos, propriedades, representações e procedimentos dentro de um mesmo tópico ou entre tópicos distintos, seja numa perspectiva de conectar os conhecimentos prévios

o caso, por exemplo das pesquisas em nível de doutoramento de Businskas (2008) e de Gamboa (2015), realizadas, respectivamente, no Canadá e na Espanha.

[14] Nesse trabalho, assumiremos sempre as expressões "conhecimento mobilizado e revelado" ou "conhecimento mobilizado e manifestado", quando fizermos referência ao conhecimento que o professor efetivamente explicita, seja em forma de registro escrito ou de comentário efetuado. Isso porque, por um lado, reconhecemos a impossibilidade de aceder à totalidade do conhecimento do professor; por outro lado, reconhecemos, também, que aquilo que o professor revela pode não ser (e consideramos que quase sempre é assim) tudo aquilo que ele mobilizou de seu conhecimento. Assim, o emprego dessas expressões nos parece mais acertado para evitar possíveis interpretações de que podemos estar prescrevendo uma lista de tudo o que o professor conhece ou, numa interpretação mais rígida, tudo aquilo que é *necessário* que o professor conheça.

e futuros dos alunos (DE GAMBOA; BADILLO; RIBEIRO, 2015) ou numa perspectiva de relacionar esses conhecimentos, criando uma rede de *links*, como forma de promover o pensamento estrutural dos alunos.

Nesse sentido, ao descrever o que e como o professor conhece particularmente em relação a cada tópico, se torna possível detalhar o conteúdo do conhecimento do professor, configurando-se, assim, dimensões mais bem definidas deste conhecimento – algo que no MKT, por exemplo, não se verifica. Em última instância, esse detalhamento é capaz de contribuir, por exemplo, para a elaboração de um mapeamento da natureza e tipo desse conhecimento, constituindo-se a partir de descritores do conteúdo do conhecimento do professor, relacionados a cada tópico.

Por sua vez, um mapeamento desse tipo é capaz de contribuir, essencialmente, para evidenciar três elementos caracterizadores da natureza do conhecimento especializado do professor: i) densidade e coesão; ii) profundidade dos conhecimentos matemáticos aplicados e suas implicações na constituição de um Conhecimento Pedagógico do Conteúdo; iii) relevância do conhecimento dos professores acerca das etapas que os alunos percorrem no desenvolvimento do seu conhecimento relativamente a determinado tema (MUÑOZ-CATALÁN; LIÑAN; RIBEIRO, 2017).

Com relação a i) densidade e coesão como elementos caracterizadores da natureza do conhecimento do professor, Muñoz-Catálan, Liñan e Ribeiro (2017) destacam que essas duas propriedades se evidenciam pela variedade de elementos que constituem o conteúdo do conhecimento do professor, bem como pelas conexões que este estabelece entre esses elementos. Assim, consideramos que um professor mobiliza o seu conhecimento com densidade e coesão quando é capaz de compreender que o enredamento entre ideias, conceitos, construtos e procedimentos forma uma composição de conhecimentos fundamentais e estruturantes, que podem ser agrupados e reagrupados em "pacotes" – na linha do *knowledge package*, discutido por Ma (1999) –, de acordo com as especificidades dos contextos em que cada tópico entra em jogo no processo de ensino e de aprendizagem.

Ao mesmo tempo, com relação a ii) profundidade dos conhecimentos matemáticos aplicados e suas implicações no conhecimento pedagógico do conteúdo, podemos considerar, na perspectiva do MTSK, em particular, as relações entre os subdomínios da dimensão do conhecimento matemático com os da dimensão do conhecimento pedagógico (ESCUDERO-ÁVILA; MORA; AGUILAR-GONZÁLEZ, 2017).

Nesse sentido, um professor que possui um conhecimento fundamentado em termos de densidade e coesão e que é capaz de mobilizar seus conhecimentos matemáticos para tomar decisões pedagógicas informadas (HILL; ROWAN; BALL, 2005; MA, 1999), será capaz de criar condições de aprendizagem mais interconectada e integrada para seus alunos, favorecendo suas aprendizagens futuras, algo que se relaciona com o conhecimento que esse professor possui acerca das iii) etapas que os alunos percorrem no desenvolvimento do seu conhecimento relativamente a determinado tema.

Assim, cabe aqui destacar que, assumir o MTSK como conceitualização do conhecimento do professor implica, necessariamente, considerar esses três elementos caracterizadores da natureza desse conhecimento (MUÑOZ-CATALÁN; LIÑAN; RIBEIRO, 2017). Particularmente, isso implica em considerar que o conhecimento do professor é composto por diversas dimensões, e nesta investigação nos focamos naquelas que se ocupam das conexões matemáticas que o professor manifesta conhecer ou que podem ser desenvolvidas de forma intencional nos contextos de formação de professores.

Tais conexões se associam, entre outros aspectos, a oportunizar situações de aprendizagem que permitam aos alunos "estabelecer ou fortalecer a compreensão das relações entre ideias matemáticas, conceitos, cadeias ou representações dentro de uma rede mental" (ELI; MOHR-SCHROEDER; LEE, 2011). Para que essas oportunidades de aprendizagem ofertadas aos alunos sobre a existência de conexões e sobre como promovê-las sejam efetivadas, é obviamente fundamental que o próprio professor conheça e estabeleça conexões para si mesmo (DE GAMBOA et al., 2020) ou, em última instância, que tenha seu conhecimento a respeito delas desenvolvido nos contextos de formação de que participa.

Com efeito, para De Gamboa e Figueiras (2014), as conexões estão associadas "com o caráter inter-relacional da matemática escolar" (p. 339) e têm relação com as redes estruturantes (definições, propriedades, representações) vinculadas a um conceito matemático, que permitem "avançar no conhecimento da estrutura global" (*ibidem*, p. 339). Segundo estes autores, tais conexões poderão ser de dois tipos: (a) "extra-matemáticas" e (b) "intra-matemáticas". As conexões extra-matemáticas – tipo (a) – são aquelas efetuadas entre os conteúdos da matemática e situações da vida cotidiana, entre conteúdos matemáticos e outras disciplinas curriculares ou entre conteúdos matemáticos e modelos elaborados a partir de referências reais, como por exemplo os "modelos de deslocamento associado à aritmética com inteiros" (*ibidem*, p. 341). As conexões intra-matemática – tipo (b) –, por sua vez, envolvem processos e raciocínios tipicamente matemáticos como generalizações ou processos heurísticos de resolução de problemas, e correspondem, dentre outros aspectos, ao estabelecimento de relações entre características de conceitos, tipos de representações, procedimentos, propriedades.

De fato, já desde 1989 que o *National Council for Teaching Mathematics* no *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, 1989) sugere que o ensino da matemática seja pautado a partir desses dois tipos de conexões matemáticas. Um conhecimento destas conexões (“extra” e “intra-matemáticas”) deverá contribuir para que os professores respondam aos questionamentos do tipo “por que”, “como” e “quando” (que envolvem, entre outros, procedimentos, definições, propriedades, tipos de representação, papel dos símbolos e da linguagem formal) efetuados pelos alunos, bem como para avaliar suas conjecturas, além de potencializar o estabelecimento de relações entre os diferentes conteúdos ao longo do currículo escolar.

Embora já exista certo consenso sobre a necessidade de aprofundar e ampliar o conhecimento matemático dos professores, no sentido de que possam estabelecer conexões (por exemplo, VALE; MCANDREW; KRISHNAN, 2010; ZAZKIS; MAMOLO, 2011), ao efetuarmos um levantamento das pesquisas que abordam essa temática, não encontramos um conjunto de resultados que nos possibilitasse obter um entendimento organizado e consistente sobre como se dá o desenvolvimento da dimensão do conhecimento do professor relacionado às conexões matemáticas. Torna-se, assim, essencial a ampliação das pesquisas que permitam aprofundar o entendimento acerca da problemática relacionada com as conexões matemáticas e o conhecimento do professor, permitindo explorar e melhor entender os tipos, naturezas e focos destas conexões; os momentos e os contextos mais propícios para a tomada de consciência por parte do professor da existência de conexões matemáticas e da possibilidade de promover o conhecimento dos alunos baseado nessas conexões; e as possíveis implicações disso no desenvolvimento do conhecimento, habilidades e capacidades matemáticas dos alunos.

Com a perspectiva, portanto, de que o conhecimento do professor é especializado, tanto no que se refere ao domínio do conhecimento matemático quanto ao conhecimento pedagógico, nos propusemos conduzir uma investigação com foco particularmente no conhecimento desse professor relacionado aos tópicos e às estruturas matemáticas, quando está inserido em um contexto de formação continuada, que tem como principal objetivo desenvolver esse conhecimento especializado do professor, por meio de discussões de Tarefas para Formação – TpF – (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

Uma vez que assumimos o MTSK como principal referencial teórico-analítico para a exploração do conhecimento do professor, e por ser essa uma conceitualização que tem como objetivo contribuir para que se tenha uma visão mais ampla e mais profunda de como se constitui e se organiza o conhecimento que o professor coloca em prática nos mais variados contextos (CARRILLO et al., 2018), uma implicação direta dessa determinação do referencial teórico se relaciona com a escolha do(s) tópico(s) matemático(s) que nos ajudarão a explorar e detalhar o conteúdo do conhecimento do professor com foco nas conexões matemáticas. Isso porque, sem que se especifique(m) o(s) tópico(s) matemático(s) a partir do(s) qual(quais) será feita tal exploração, corre-se o risco de se efetuar uma abordagem generalista (e simplista), o que não se coaduna com a própria essência epistemológica de uma conceitualização teórica que assume como ponto de partida as especificidades e particularidades do conhecimento do professor, ou seja, o caráter intrínseco da especialização desse conhecimento (SCHEINER et al., 2017).

Aqui cabe, em caráter explicativo, comentar o que entendemos pelo termo “tópicos matemáticos”. Em concordância com a conceitualização do MTSK, assumimos que tópicos são itens de conteúdo no âmbito das áreas do conhecimento da matemática (temas), quais sejam, Números e Operações; Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, definidas segundo os *standards* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Cabe ressaltar que, por serem itens específicos dentro dessas áreas do conhecimento, os tópicos podem variar de um país para outro. No Brasil, atualmente, as áreas do conhecimento da matemática (temas) para o ensino seguem a mesma categorização assumida pelos *standards* do NCTM (2000) e a organização e distribuição dos tópicos a serem desenvolvidos com os alunos são definidos segundo os programas curriculares de matemática assumidos no âmbito dos estados e municípios brasileiros, mas sempre com base no documento oficial que orienta a elaboração desses currículos, a denominada Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018a).

Assim, nesse contexto de determinação dos tópicos matemáticos nos quais nos centraríamos para o desenvolvimento da pesquisa, o momento profissional pelo qual passava a autora desta pesquisa proporcionou elementos decisivos nesse processo de escolha. Atuando como formadora de professores da Educação Infantil e Anos Iniciais em uma escola da rede privada no município de Campinas[15], no interior de São Paulo, e assumindo a perspectiva de que a formação e a prática profissionais devem permanecer em constante diálogo, pareceu-lhe apropriado que a investigação fosse desenvolvida com professores que atuam nessas duas etapas escolares, ainda que os sujeitos participantes da investigação não fossem necessariamente seus parceiros de trabalho na escola.

Justamente por isso, a escolha pelos tópicos matemáticos que estariam em foco na investigação se basearam essencialmente em dois critérios: i) deveriam ser tópicos que, do ponto de vista das conexões, permitissem explorar aquilo que se denomina por *big ideas* em matemática (NCTM, 2000) e que, por isso, fossem fundamentais na constituição de algumas estruturas matemáticas; ii) deveriam ser tópicos considerados “problemáticos” do ponto de vista do ensino e das aprendizagens nas etapas educativas da Educação Infantil e dos Anos Iniciais.

Com efeito, uma *big idea* em matemática pode ser considerada como a proposição de uma ideia que é central na fundamentação dos entendimentos matemáticos, porque conecta conceitos e processos (CHARLES, 2005), de modo a compor uma rede estruturante de conhecimentos matemáticos. Os tópicos do tema de Medida e o tópico de divisão, por exemplo, oportunizam o desenvolvimento de algumas *big ideas* em matemática, tais como “comparação”, “quantificação”, “agrupamentos”, “equivalência”, “proporcionalidade”, “estimação”, “aproximação” (CHARLES, 2005), entre outras.

Além disso, do ponto de vista do ensino e das aprendizagens, os tópicos de Medida e de divisão são considerados “problemáticos” porque, habitualmente, são introduzidos aos alunos a partir de um enfoque instrumentalizador e logo são abordados exclusivamente a partir de um enfoque procedimental. Por exemplo, no caso dos tópicos do tema de Medida, habitualmente os alunos são introduzidos às ideias de medição de comprimento, envolvendo instrumentos e unidades de medidas não padronizados (SMITH; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; TEPPO, 2011). No entanto, depois dessa introdução, os alunos são apresentados às unidades de medida padronizadas, e todas as demais grandezas que normalmente são tratadas nos Anos Iniciais (área, capacidade, massa, volume e tempo), passam a ser discutidas sem que se considerem as particularidades das naturezas de cada uma como sendo elementos cruciais para o seu entendimento (RIBEIRO; POLICASTRO, 2021;

[15] Escola Comunitária de Campinas (ECC).

SARAMA et al., 2011; SZILAGYI; CLEMENTS; SARAMA, 2013). Algo similar ocorre com o tópico de divisão, ao qual os alunos são apresentados exclusivamente a partir da ideia de divisão como partilha equitativa – deixando-se de lado a ideia de divisão como medida –, e na sequência, são introduzidos ao algoritmo "tradicional" por meio de regras que devem memorizar sem que tenham qualquer significado para eles (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; FÁVERO; NEVES, 2012; RIBEIRO et al., 2018).

Considerando, portanto, o papel crucial que os tópicos do tema de Medida e o tópico da divisão exercem no desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos, e pela problemática associada ao seu ensino e aprendizagem, optamos por focar, nesta investigação, na exploração das especificidades e particularidades do conhecimento do professor para compreender o que este conhece e como estrutura e organiza esse conhecimento, com relação aos conceitos, fundamentos, procedimentos, propriedades, tipos de representação, entre outros aspectos, associados a cada um desses tópicos (Conhecimento dos Tópicos); e o seu conhecimento acerca das (possíveis) conexões existentes entre eles, que o permitem explicitar o modo como tais tópicos se organizam e se estruturam dentro da disciplina (Conhecimento das Estruturas).

Dessa forma, configurou-se como nosso objeto de investigação o *conhecimento especializado do professor, relacionado com os elementos estruturais e estruturantes da matemática no âmbito dos tópicos do tema de Medida e de divisão*.

Uma vez determinados o foco investigativo, o tema e os tópicos matemáticos centrais para a investigação, o nosso próximo passo se deu no sentido de compreender como esses tópicos estão considerados no âmbito dos documentos oficiais que orientam a elaboração dos currículos atualmente no Brasil. Essa opção nos pareceu coerente, pois se pretendemos nos aprofundar no que se entende sobre o conhecimento do professor para o ensino desses tópicos, com foco específico nas conexões matemáticas, consideramos pertinente buscar na proposta de organização curricular elementos que nos indicassem (implícita ou explicitamente) como o ensino dos tópicos do tema de Medida e de divisão têm sido considerado em termos de possibilidades de estabelecimento de conexões.

Obviamente que essa busca nos documentos oficiais nos pareceu pertinente, também, por assumirmos a perspectiva de que o conhecimento especializado do professor contempla o conhecimento curricular dos conteúdos (CARRILLO et al., 2018). Ao mesmo tempo, assumimos a premissa de que é o conhecimento matemático especializado que dará ao professor possibilidades de desenvolver um trabalho pedagógico intencional (FLORES; ESCUDERO; CARRILLO, 2013) a partir do estabelecimento de uma coerência em seu plano de ensino e nas diferentes tarefas elaboradas e implementadas, tendo como um dos objetivos o desenvolvimento do pensamento estrutural dos alunos (MASON, 2003).

Portanto, tomamos como ponto de partida a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018a) – e, também, um documento comentado da Base (BRASIL, 2018b), que está indicado como orientador para a redação dos currículos municipais em nível federal. Ao optar por tomar a BNCC como ponto de partida, não estivemos interessados em discutir nossos próprios posicionamentos, eventualmente contrários ou a favor do documento, bem como da forma como este documento está proposto e organizado. O intuito era poder discutir algumas das dimensões relativas ao que é esperado que o professor aborde com os alunos, relativamente a cada um dos tópicos, desde a Educação Infantil até o final dos Anos Iniciais.

Além disso, nesse levantamento buscamos compreender e explicitar como (e se) estão propostas nas orientações curriculares relações/conexões entre conceitos, propriedades e fundamentos matemáticos associados a cada um dos tópicos, e entre eles.

Os tópicos do tema de Medida e de divisão nos documentos oficiais brasileiros

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018a) aborda os tópicos de Medida na Educação Infantil (EI) propondo o trabalho associado ao campo experiencial "Espaços, Tempos, Quantidades, Relações e Transformações". O documento sugere que o trabalho envolvendo noções primitivas acerca do que é medir (comparações entre grandezas mensuráveis e associação com um vocabulário apropriado, como maior/menor; alto/baixo) já deve ser iniciado desde a faixa etária de 1 ano e 7 meses. A partir dos 4 anos, a BNCC sugere que o trabalho com os tópicos de Medida já deverá ser feito de modo mais intencional, porém garantindo o aspecto lúdico das atividades propostas, possibilitando aos alunos situações em que participem de atividades de culinária que envolvam a resolução de problemas envolvendo unidades de medida (BRASIL 2018b).

Note-se que, embora o documento destaque o papel da unidade de medida, que é um conceito fundamental no trabalho com as Medidas, e proponha o trabalho a partir de atividades do cotidiano, a BNCC não parece considerar a importância de se discutir, nesta etapa educativa, os princípios que sustentam a atividade de medir, tais como: o que significa ter uma unidade de medida? Para que serve esta unidade de medida? O que fazemos com ela? Como fazemos para medir algo usando essa unidade de medida? A unidade de medida precisa sempre ser a mesma, sempre que vamos medir uma determinada grandeza?

Ainda considerando a EI, a partir dos 4 anos, o documento comentado da Base (BRASIL, 2018b) segue sugerindo uma proposta de trabalho que envolve instrumentos de medição, porém, aparentemente, sem se preocupar com a garantia de algum rigor no desenvolvimento conceitual relacionado com a escolha desses instrumentos, já que propõe um trabalho em que se oportunizem “brincadeiras livres” com objetos e ferramentas de medida, convencionais ou não, para estabelecerem “distância, comprimento, capacidade (litro) e massa, usar notas e moedas” (BRASIL, 2018b, p. 51). Nota-se que a Base não se preocupa em sugerir um trabalho com foco no desenvolvimento do conhecimento dos alunos relativamente às distintas grandezas, ou seja, com relação aos tipos e naturezas de cada uma (comprimento, capacidade, massa, tempo). Com efeito, resultados de pesquisa mostram que um trabalho desde a EI focado em distinguir a natureza das grandezas deve ser associado ao trabalho com os procedimentos e respectivos instrumentos de medida adequados para medição dessas grandezas, a fim de contribuir para dar sentido e significado a cada uma delas ao longo do processo de escolarização das crianças (PASSALAIGUE; MUNIER, 2015).

De toda forma, o desenvolvimento de atividades de medição desde a EI possibilita a criação de um vínculo direto entre a matemática e o cotidiano do aluno e propicia que os temas matemáticos estudados se tornem mais concretos e significativos, contribuindo para dar significado ao mundo em que as crianças estão inseridas (SILVA; BELLEMAIN; BORBA, 2016). No entanto, é fundamental que este trabalho se paute nos fundamentos da atividade de medir (CLEMENTS; SARAMA, 2009), mesmo que alguns dos conceitos que são decorrentes de uma abordagem nessa perspectiva possam não ser ainda profundamente explorados, como é o caso de relações de equivalência e proporcionalidade.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os tópicos do tema de Medida são abordados a partir da unidade temática “Grandezas e Medidas”. No documento comentado sobre a BNCC (BRASIL, 2018b), sugere-se que o trabalho dê ênfase ao desenvolvimento da noção de que para medir é necessário comparar grandezas de mesma natureza. Além disso, o documento segue apontando a necessidade de desenvolvimento do trabalho com os princípios que sustentam a atividade de medir, abordando, inclusive, o uso de unidades de medida não padronizadas. Outro ponto importante sugerido pelo documento se refere à busca por problematizações de diferentes situações em que as medidas e a atividade de medir estejam envolvidas.

No 1.º ano, o trabalho é sugerido a partir das experiências de medição de grandezas como massa, comprimento e capacidade. Novamente, destaca-se a referência que faz a BNCC sobre as noções primitivas que sustentam a atividade de medir – comparar grandezas que são comparáveis e escolher uma unidade de medida. Ainda no 1.º ano, a Base destaca a importância da associação de termos que expressem de forma adequada tanto a grandeza que está sendo medida quanto a comparação que está sendo feita: mais cumprido, mais curto; mais vazio, mais cheio; mais largo, mais estreito, etc.

De toda forma, ainda que se destaque, em especial, a escolha da unidade de medida, o papel que esta unidade representada no processo de medição, e os procedimentos associados ao ato de medir usando a unidade continuam não sendo considerados nesta etapa educativa. Isso significa que, segundo o documento, até esta etapa educativa os alunos ainda não deverão ser colocados em situações que lhes permitam compreender efetivamente o que é medir, como se mede e quais são os elementos centrais presentes nos processos de medição (unidade de medida e todo a ser medido), bem como o papel que cada um deles desempenha nesse processo.

Somente a partir do 2.º ano dos AI, a Base propõe um trabalho em que os princípios da atividade de medir são abordados de forma explícita e formal. Essa proposta de trabalho é feita com foco maior na grandeza comprimento, explorando unidades de medida padronizadas e não padronizadas (BRASIL, 2018a).

Assim mesmo, se o trabalho com as unidades de medidas e instrumentos de medição não padronizados já tiver sido iniciado no 1.º ano – o que, segundo o documento não é sugerido, ficando a cargo do professor que atua com esta série a opção sobre o foco que dará para este trabalho –, entendemos que não será um problema que a discussão sobre unidades de medida padronizadas para o comprimento seja contemplada nesta etapa educativa. Principalmente se esse trabalho for desenvolvido de forma conectada à discussão sobre o sentido de número, sobre a noção de contagem por agrupamentos para composição de unidades que contenham mais de um elemento (*unitizing*) e sobre o valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal (MIX; SMITH; CRESPO, 2019; ULRICH; NORTON, 2019) – embora essa também seja uma discussão que se associa à noções de multiplicação e divisão (YOUNG-LOVERIDGE; BICKNELL, 2018), como abordaremos mais adiante.

No entanto, ao explorarmos um pouco mais o documento oficial, verificamos que esta articulação não é de modo algum sugerida pela Base e, pelo contrário, se apresenta de forma bastante difusa no que se refere à conexão entre algumas noções centrais relacionadas aos fundamentos da atividade de medir com outros tópicos que os alunos deverão aprender. Isso fica bastante evidente quando verificamos a sugestão dada pelo documento de que se desenvolva um trabalho com o sistema monetário (para o 2.º ano), em que a proposta é a de que se discuta a equivalência de valores entre moedas e cédulas: "(EF02MA20) estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário para resolver situações do cotidiano" (BRASIL, 2018a, p.285). No entanto, a discussão formal sobre a relação de igualdade como equivalência está sugerida somente para o 3.º ano, na unidade temática de Álgebra: "(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença" (BRASIL, 2018a, p. 287).

Além disso, destacamos que, para a Base, o estabelecimento de equivalência entre os valores monetários se dá simplesmente pelo fato de se "conhecer cada uma das moedas e cédulas, saber nomeá-las e identificar como fazer as trocas" (BRASIL, 2018b, p.285).

De fato, o conhecimento e os processos cognitivos associados a esses procedimentos se sustentam na noção de unidade e na sua relação com a noção de quantidade (CLEMENTS; SARAMA, 2009). Assim, quando a BNCC faz referência ao trabalho com as unidades do sistema monetário sem considerar todas as suas complexidades e potencialidades de conexões com outros tópicos que estão em evidência naquela etapa educativa ou em outras posteriores, acaba por não favorecer o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos, seja para lidar com problemas e situações escolares, seja para lidar com situações do próprio cotidiano (RIBEIRO; POLICASTRO, 2021).

É somente no 3.º ano que o papel da unidade de medida ganhará destaque nas discussões dentro do tópico de Medidas, a partir de habilidade que propõem a ênfase na relação entre o resultado de uma medida e a unidade de medida utilizada e a escolha do instrumento mais apropriado para medições de determinadas grandezas: "(EF03MA17) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada" e "(EF03MA18) Escolher a unidade de medida e o instrumento mais apropriado para medições de comprimento, tempo e capacidade" (BRASIL, 2018a, p. 289).

Entretanto, destacamos, mais uma vez, que o foco da BNCC está nas relações de equivalência entre as unidades de medida padronizadas, evidenciando uma preocupação utilitarista das atividades envolvendo medidas: "(EF03MA20) Estimar e medir capacidade e massa, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (litro, mililitro, quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros" (*ibidem*, p.289)

Embora pareça um "avanço" proposto pela BNCC a sugestão de trabalho envolvendo estimativas de comprimento nesta etapa educativa do 3.º ano, em nenhum momento o documento menciona qual a relação (ou diferença) entre estimar e medir uma determinada grandeza (HOGAN; BREZINSKI, 2003; JORAM; SUBRAHMANYAM; GELMAN, 1998), ainda que essa noção de estimativa já tenha sido mencionada no documento dentro da unidade temática de Números, na etapa do 2.º ano, sem que se tenha feito qualquer referência à unidade de Grandezas e Medidas.

O que podemos afirmar sobre o modo como a Base propõe o trabalho com Medidas desde a EI até ao 3.º ano dos AI é que existe uma desarticulação e certa incoerência nas propostas de abordagem deste tópico, deixando algumas lacunas importantes no desenvolvimento do conhecimento dos alunos, por exemplo, como já foi destacado, sobre o papel da unidade de medida e dos procedimentos associados aos fundamentos da atividade de medir, o que certamente deverá ter implicações no desenvolvimento de conhecimentos futuros que estão conectados com essas ideias centrais.

No 4.º ano, a Base propõe outro "avanço" quando sugere envolver medidas de área de figuras planas representadas em malhas quadriculadas, a partir da "contagem de quadradinhos" ou de "metades de quadradinho" (BRASIL, 2018a, p. 293). Segundo a habilidade proposta, esta seria uma forma de desenvolver com os alunos a noção de que figuras com formatos diferentes podem ter mesma área: "(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área" (BRASIL, 2018a, p. 293).

No entanto, pelo fato de a BNCC não ter explicitamente sugerido um trabalho com os procedimentos de medida envolvendo a grandeza área até esse ponto, assumimos que o documento toma como premissa que os alunos serão capazes, por conta própria, de estabelecer as devidas relações entre os procedimentos utilizados para medida de comprimento e aqueles utilizados para medida de área.

No entanto, o trabalho com os princípios que fundamentam a atividade de medir devem ser (re)considerados sempre que uma nova grandeza for introduzida, já que é essencial que se discuta a natureza da grandeza que se está medindo, muito antes de efetivamente medi-la (PASSALAIGUE; MUNIER, 2015), particularmente no que se referem a grandezas como massa, capacidade e tempo (BERKA, 1983). Consideramos essa como uma evidência de que a BNCC não assume a necessidade de se estabelecer conexões, nem mesmo dentro de um mesmo tópico matemático.

Além disso, a malha quadriculada poderá ser um potente recurso pedagógico que contribui para conectar o tópico de Medidas com o de divisão e os de Números Racionais, em particular, no estudo de frações. No entanto, a proposta da Base para o 4.º ano sobre o estudo de divisão e de frações não menciona qualquer tipo de relação com o trabalho sugerido acima. Isso evidencia, mais uma vez, a falta de conexão entre tópicos distintos na proposta curricular da BNCC.

Para o 5.º ano, a proposta do documento no tópico de Medidas envolve a elaboração e resolução de problemas envolvendo diferentes grandezas (massa, área, perímetro); a discussão, a partir de investigações, da existência (ou não) de uma relação entre área e perímetro de uma figura plana e entre área e perímetro de duas figuras. Também se insere nesta etapa educativa a discussão com unidades de volume. Chama-nos a atenção de que a discussão sobre medidas de ângulos está proposta na unidade temática de Geometria, parecendo não ter qualquer relação com a unidade de Grandezas e Medidas, o que, mais uma vez, evidencia uma pouca preocupação com o estabelecimento de conexões entre tópicos matemáticos (TALLMAN; FRANK, 2020).

Relativamente à divisão, as noções fundamentais relacionadas com esse tópico não são abordadas explicitamente pela BNCC antes do 2.º ano dos Anos Iniciais. De acordo com o documento, é somente neste ano desta etapa educativa que as noções de metade e terça parte deverão ser exploradas em conexão com as noções de dobro e triplo, respectivamente: “(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais” (BRASIL, 2018a, p.283).

Ao mesmo tempo, a Base propõe que a exploração dos conceitos de metade e terça parte seja feita numa relação direta com as ideias de divisão por dois e três, respectivamente. Aqui destacamos uma questão relacionada a um problema conceitual importante: no documento comentado da Base, afirma-se que a compreensão das noções de metade e terça parte podem ser subsidiadas por um trabalho que se apoie na exploração de objetos que "podem ou não podem ser divididos em duas ou três partes iguais" (BRASIL, 2018b, p. 283). No entanto, essa afirmação poderá, equivocadamente, levar à interpretação de que a divisão por dois ou por três pode não existir, em alguns casos.

De fato, isso só seria verdade se estivéssemos tratando da divisão (sem resto) somente no campo dos números naturais, em que o dividendo (objeto a ser dividido) deverá ser múltiplo do divisor (partes em que o objeto será dividido). No 2.º ano dos AI, o trabalho com os números e operações está estritamente focado no campo dos inteiros positivos (naturais, portanto). Porém, ao trazer no documento a sugestão acima, o trabalho com a divisão envolvendo quantidades contínuas, algo que será abordado nas etapas posteriores (a partir do 4.º ano), não será devidamente fundamentado, o que certamente terá implicações na compreensão, por exemplo, dos elementos que compõem o conjunto dos números racionais. Nesse sentido, podemos afirmar que a Base não se preocupa em propor um trabalho longitudinal com a matemática, isto é, um trabalho que perspectiva as aprendizagens dos alunos ao longo de todo o processo educativo, de forma coesa.

Ainda com relação ao trabalho envolvendo as noções de metade e terça parte, as representações pictóricas assumem um lugar de destaque na proposta sugerida pela BNCC no 2.º ano, mas sempre numa perspectiva de que tais representações deverão evidenciar as divisões e as partes obtidas dessas divisões (BRASIL, 2018b). No entanto, por não explicitar se as representações pictóricas deverão corresponder a quantidades discretas ou contínuas sendo divididas em partes, o documento deixa a critério do leitor o entendimento sobre esse ponto. Como tal leitor poderá ser um professor, para a nossa investigação esse é um ponto extremamente relevante, uma vez que o papel que as representações possuem na atribuição de significado aos conceitos, bem como das relações entre cada um dos tipos de representação (AINSWORTH; BIBBY; WOOD, 2002) correspondem a um conteúdo do conhecimento especializado do professor.

A partir do 3.º ano, a sugestão da Base é a de ampliar a discussão sobre a divisão propondo um trabalho com divisões com resto igual a zero e diferente de zero, entre números naturais de até duas ordens. Neste ponto, já se faz referência aos dois sentidos assumidos para a divisão (partilha equitativa e medida) que devem ser trabalhados com os alunos: “(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais” (BRASIL, 2018a, p. 287).

Novamente, no documento comentado da Base é possível encontrar uma referência ao trabalho com as representações de distintos tipos, porém, sem o estabelecimento das devidas relações entre cada um dos tipos, de modo a dar significado a cada um dos sentidos da divisão. Além disso, o documento faz referência à necessidade de estabelecimento de relações com a multiplicação e, mais uma vez, parece considerar tal relação como sendo natural e óbvia, já que não articula essa discussão com o tópico de multiplicação em nenhum outro ponto do documento.

De fato, as conexões entre as operações de multiplicação e divisão representam papéis cruciais no entendimento das relações parte-todo presentes na estrutura multiplicativa (FOSNOT; DOLK, 2001; HULBERT et al., 2017). Exatamente por isso, sem uma explicitação no documento dos tipos de conexões existentes entre as duas operações, o trabalho nesse sentido será deixado a critério do professor, segundo, obviamente, seus próprios conhecimentos de cada um desses tópicos e das conexões entre eles.

Ainda no 3.º ano, o trabalho com a divisão segue numa perspectiva que parece estar alinhada com a ideia de ampliar a discussão que se iniciou no 2.º ano, com a habilidade que envolvia os conceitos de metade e terça parte. No entanto, ao consultar o documento comentado da Base, foi possível verificar que a proposta com essa habilidade não está necessariamente em concordância com aquilo que se comentava no mesmo documento, em relação à habilidade correspondente ao 2.º ano. Isso porque, enquanto naquele comentário o documento sugeria que o trabalho com as noções de metade e terça parte estavesse pautado no entendimento de fração como parte-todo, com relação a habilidade para o 3.º ano, a Base considera outro sentido para a fração, qual seja, o de quociente: “(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes” (BRASIL, 2018a, p. 287).

Nesse contexto, a Base sugere que se associem as frações a quocientes com resto zero e que sejam apresentadas representações numéricas em correspondência, tais como “12:3=4 e 12/3=4” (BRASIL, 2018b, p. 287)[16]. Embora esse não seja necessariamente um equívoco conceitual, na proposta da Base, consideramos a necessidade de se tomar atenção para o fato de que, de uma etapa educativa para outra, ou seja, do 2.º para o 3.º ano, a BNCC admite uma ampliação na complexidade de formas de se abordar frações, o que não seria um problema caso a intencionalidade de se propor tal complexidade fosse explicitada pelo documento. Assim, existem algumas lacunas na forma como o documento propõe o trabalho com o tópico de divisão e que, como veremos adiante, caso o professor não conheça alguns conceitos centrais desse tópico e suas conexões com outros tópicos, poderá desenvolver um trabalho com os alunos muito mais pautado em regras de memorização do que nos entendimentos dos porquês associados a cada uma dessas regras (LAMON, 2020).

A partir do 4.º ano, a Base propõe um trabalho com a divisão que, numa primeira análise, parece caminhar na direção de discutir algumas conexões importantes entre as quatro operações e, em particular, entre a multiplicação e a divisão: “(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo” e “(EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo” (BRASIL, 2018a, p. 291). Entretanto, na consulta ao documento comentado (BRASIL, 2018b), verificou-se que a perspectiva assumida pela Base caminha mais no sentido de desenvolvimento de um trabalho com foco na memorização de algumas regras relacionadas com estas operações, do que no estabelecimento de relações entre fundamentos e propriedades matemáticas que sustentam essas regras. Para mencionar um exemplo, o documento sugere que a “utilização” de relações entre a multiplicação e a divisão é uma implicação do conhecimento de que se “$a \times b = c$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$) então $c \div a = b$ e $c \div b = a$” (BRASIL, 2018b, p. 291).

Novamente, não consideramos que seja um problema que a Base proponha um trabalho em que se discutam algumas propriedades importantes relacionadas com as conexões entre as operações. No entanto, quando o documento comenta que um trabalho com essa perspectiva ajudará no desenvolvimento de “estratégias de cálculo” e na “construção de fatos básicos”, entendemos que se trata de uma proposta muito mais instrumentalizadora, porque está pautada em memorização de regras, e muito menos relacional, porque deveria se

[16] Note-se que a simbologia apresentada segue exatamente a mesma apresentada no documento comentado da Base.

pautar em entendimentos dos porquês associados a cada um dos “fatos” que a Base chama de “básicos”. E, nesse sentido, para a investigação a que nos propusemos desenvolver, essa questão é efetivamente relevante, porque nos aproxima mais ainda da necessidade de se colocar luz nas especificidades do conhecimento do professor acerca das conexões entre tópicos e mesmo dentro de um único tópico.

Dando continuidade na análise do documento da BNCC, quando olhamos para a unidade temática “Álgebra” no 4.º ano, encontramos, numa das habilidades propostas, algo que poderá confirmar a hipótese de que a sugestão do trabalho parece estar focada na memorização de regras: “(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas” (BRASIL, 2018a, p. 291). No comentário para esta habilidade, o olhar que se dá para as relações de inversibilidade entre as operações de divisão e multiplicação não considera as propriedades e fundamentos matemáticos que sustentam o argumento da validade de tais relações, pois segundo o documento, o reconhecimento dessas relações se daria apenas por saber que “se $a \times b = c$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então, $c \div a = b$ e $c \div b = a$. Por exemplo, se $5 \times 6 = 30$, então, $30 \div 5 = 6$ e $30 \div 6 = 5$” (BRASIL, 2018b, p. 291).

Além disso, destacamos o fato de que essa habilidade está proposta na unidade temática de Álgebra, o que entendemos ser pertinente do ponto de vista dos raciocínios que se evocam em investigações como as que estão ali sugeridas, e que são fundamentais no processo de aprendizagem da matemática e no desenvolvimento do conhecimento dos alunos sobre as estruturas contidas em determinados processos matemáticos (MULLIGAN; MITCHELMORE, 2009). No entanto, pela forma como o trabalho está sugerido pelo documento comentado da Base, a proposta parece estar completamente desarticulada da unidade temática “Números”, onde estão indicadas as habilidades que envolvem os tópicos das operações e, em particular, a divisão.

Ainda no 4.º ano destacamos uma das habilidades que refere ser uma ampliação do trabalho iniciado no 3.º ano: “(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos” (BRASIL, 2018a, p. 291). No entanto, no documento comentado, a sugestão dada pela BNCC enfatiza que tal ampliação “se dá na ordem de grandeza dos números envolvidos no divisor” e “nas estratégias de calcular, que agora incluem, além do cálculo mental e estimativas, o algoritmo convencional” (BRASIL, 2018b, p.291).

Essa noção de que a ampliação do trabalho iniciado no 3.º ano estará focada no aumento da ordem de grandeza do número envolvido no divisor, deixa, mais uma vez, explícita a perspectiva de uma abordagem instrumentalizadora para a aplicação do algoritmo, como se o procedimento de divisão de uma quantidade por um número com ordem de grandeza 10^0 fosse diferente do procedimento de divisão de uma quantidade por um número com ordem de grandeza 10^1 ou 10^2 ou 10^n (com $n \in \mathbb{Z}$).

Além disso, a Base menciona o trabalho com o algoritmo da divisão, mas não faz qualquer referência aos cuidados que se deve ter em relação ao modo como devem ser abordados os procedimentos e representações (verbais e escritas) associadas ao algoritmo.

No documento comentado da BNCC, encontra-se, inclusive, um equívoco quando este refere que a noção (ou imagem mental) associada a resolução de um problema de divisão, cujo sentido evocado é o de medida, seria a de distribuição de objetos em grupos: “e para a medida (distribuir 10 objetos em grupos de modo que cada grupo tenha 2 objetos, resulta em 5 grupos)” (BRASIL, 2018b, p. 291).

Novamente, destacamos a necessidade de se considerar os aspectos relacionados com os papéis que os distintos tipos de representações têm no processo de entendimento de um conceito e, nesse caso em particular, associar a noção de medida com o verbo “distribuir” é um equívoco conceitual importante, que deveria ser evitado principalmente num documento que, embora se refira não fazer parte da Base, serve de apoio para a redação dos currículos e, principalmente, para os professores que estão interessados em conhecer as perspectivas teóricas por trás da elaboração da redação de cada uma das habilidades.

No 5.º ano, o tópico de divisão é abordado somente em contextos envolvendo Números Racionais. Particularmente no que se refere às frações, uma das habilidades que envolve a noção de divisão propõe que se discutam as frações a partir dos construtos parte-todo e quociente (embora o documento apenas refira “divisão”).

Uma das habilidades do 5.º ano que aborda explicitamente o conceito de divisão refere-se à resolução de problemas que envolvem esta operação com números decimais finitos: “(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" (BRASIL, 20018a, p. 295).

Mais uma vez, destacamos que o foco da BNCC para este trabalho está centrado nos procedimentos de cálculo, em particular no "algoritmo convencional" que, como já visto anteriormente, tem um trabalho proposto com base em um equívoco conceitual importante.

Ao realizar o levantamento sobre o modo como os tópicos de Medida e de divisão são abordados na BNCC, estávamos preocupados em compreender se (e como) o documento propõe um trabalho que prioriza o estabelecimento de conexões entre conceitos, propriedades e fundamentos, seja dentro do mesmo tópico ou entre tópicos. De fato, constatamos que a Base não deixa claro, em nenhum momento, quais conexões podem ser estabelecidas. Por exemplo, o trabalho com os tópicos de Medida não é retomado de forma alguma quando a divisão é tratada como medida, o que seria natural em um contexto de ensino em que se busca que o aluno entenda o que faz e porque o faz, sendo potenciado pelo estabelecimento de conexões entre conceitos, procedimentos e fundamentos.

Questão de pesquisa e suas subquestões

A premissa assumida na constituição da problemática desta investigação é a de que o conhecimento do professor é especializado, tanto na dimensão do conteúdo quanto na dimensão pedagógica. Dentre os diversos elementos que compõem as particularidades e especificidades desse conhecimento, enfatizamos as conexões matemáticas como elementos centrais para uma prática que objetiva desenvolver nos alunos uma compreensão do tipo relacional (SKEMP, 1989) e, consequentemente, desenvolver o seu pensamento estrutural (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009). Ao mesmo tempo, entendemos que é com base nesse conhecimento das conexões matemáticas que o professor será capaz de analisar criticamente as orientações curriculares e propostas dos livros didáticos que fomentam (ou não) o trabalho com foco no desenvolvimento dessa compreensão relacional dos alunos.

Como apresentado anteriormente, as orientações para elaboração dos currículos brasileiros e, potencialmente, para a elaboração dos livros didáticos no país – uma vez que estes se apoiam na BNCC para a composição e estruturação de seu conteúdo – não evidenciam as conexões matemáticas que podem e devem ser efetuadas dentro de um mesmo tópico e tampouco entre tópicos distintos, particularmente, no caso dos tópicos do tema de Medida e de divisão. Nesse sentido, a fim de promover um ensino com foco no desenvolvimento de uma compreensão relacional e do pensamento estrutural dos alunos, cumpre ao professor um conhecimento dos elementos estruturais da matemática que potencializam o estabelecimento das conexões nos e entre os distintos tópicos.

Diante desse cenário, delineou-se o problema de pesquisa que se apresenta por meio da seguinte pergunta de investigação:

> *Que conhecimento especializado revelam professores participantes de um Programa de Formação Continuada, focada nas especificidades do conhecimento do professor de e que ensina matemática, sobretudo em relação a elementos estruturais e estruturantes da matemática, no âmbito dos tópicos de Medidas e de divisão?*

A partir desta questão, buscamos explorar, descrever e detalhar o conteúdo do conhecimento especializado do professor, no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida, além de evidenciar os elementos estruturantes do conteúdo desse conhecimento, para compreender os tipos e focos das conexões matemáticas que se observam a partir das relações entre esses elementos. Com isso, estamos interessados em:

i. Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) no âmbito da divisão, mobilizado e revelado por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação;
ii. Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) relacionados ao tema de Medida, mobilizados e revelados por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação;
iii. Mapear e descrever as possíveis relações que ocorrem entre o conteúdo do conhecimento associado aos tópicos de Medida e ao tópico de divisão, de modo a evidenciar o caráter estrutural e estruturante desses tópicos, numa perspectiva de “descompactação” desse conhecimento.

Justamente por isso, entendemos que seria necessário desmembrar a questão principal em sub-questões que nos permitissem conduzir essa investigação de forma mais acurada. Assim, nos propusemos a investigar:

1) *Que elementos caracterizam o conhecimento do tópico de divisão de professores que participam de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor?*
2) *Que conhecimento do conteúdo dos tópicos de Medida revelam professores participantes de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor?*
3) *Que elementos se destacam no conteúdo do conhecimento de professores participantes de um contexto de Formação Continuada, evidenciados pelos descritores desse conhecimento especializado, associados aos tópicos do tema de Medida e de divisão?*
4) *Que relações se observam entre o conteúdo do conhecimento especializado de professores participantes de um contexto de Formação Continuada nos tópicos de divisão e no tema de Medidas?*

Considerando, portanto, essa forma de orientar a investigação a partir de sub-questões vinculadas à questão principal, e com o objetivo de um maior alcance destes resultados e problemáticas envolvidas – e possibilitando ir recebendo comentários e feedback que contribuam para melhorar aa qualidade da própria pesquisa que se foi desenvolvendo –, optamos por apresentar os resultados no relatório final da tese em formato *multipaper híbrido*. Denominamos dessa forma, uma vez que as discussões e articulação de uma parte dos resultados finais da tese não estão apresentadas em um artigo – como habitualmente ocorre nas teses deste tipo –, mas em uma sub-seção do capítulo em que se apresentam as análises e discussões das informações coletadas. Dessa maneira, este trabalho está organizado a partir de cinco grandes seções.

Na **Introdução** foram apresentadas as bases para justificar como se configuraram a problemática investigativa, a formulação do problema e os objetivos da pesquisa. Nesse sentido, além da questão principal da pesquisa, apresentamos as quatro sub-questões orientadoras da investigação.

No **Capítulo 1** são apresentados os fundamentos teóricos da investigação, que se pautam essencialmente em dois eixos, ambos conceituais. Um deles, relacionado com as bases teóricas em que se assentam o tema e tópico matemáticos que estão em foco nessa investigação: tema de Medida e tópico de divisão. O outro relacionado com a conceitualização do conhecimento do professor assumida para exploração das especificidades e particularidades desse conhecimento no que se refere à Medida e à divisão: a conceitualização do *Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge* – MTSK.

Com relação aos tópicos de Medida e de divisão, apresentamos as perspectivas teóricas segundo as quais são encarados e justificamos a sua escolha com base no reconhecimento do papel que ambos exercem nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática (FISCHBEIN et al., 1985; HAREL et al., 1994; HIEBERT, 1984; LAMON, 1996; WILKINS; NORTON, 2018), particularmente na Educação Infantil e nos Anos Iniciais. Além disso, justificamos a sua inclusão por considerar que as conexões matemáticas existentes entre esses tópicos, ao serem evidenciadas, se tornam potencialmente contributivas para ampliar e aprofundar os entendimentos que atualmente se detêm acerca do conhecimento do professor (ASKEW, 2019; DE GAMBOA et al., 2020; ELI; MOHR-SCHROEDER; LEE, 2011; TCHOSHANOV, 2011; TIMMERMAN, 2014; VALE; MCANDREW; KRISHNAN, 2010) e, em última instância, para promover uma problematização dos processos formativos facultados atualmente.

No caso do conhecimento do professor, essa justificativa se pauta, por um lado, na perspectiva assumida acerca da natureza especializada desse conhecimento para a sua prática profissional. Por outro lado, justificamos a escolha pela conceitualização do MTSK (CARRILLO et al., 2018) com base nas suas potencialidades, tanto para modelar o conhecimento do professor, quanto para investigar metodológica e analiticamente as particularidades e especificidades desse conhecimento (CALDATTO et al., 2019; RIBEIRO; CALDATTO; POLICASTRO, 2019).

O **Capítulo 2** dedicamos ao detalhamento do contexto e da metodologia e nele apresentamos a perspectiva a partir da qual pautamos essa investigação, buscando caracterizar o contexto e percursos desenhados para a coleta de informações, além dos procedimentos empregados no tratamento e análise dessas informações.

O **Capítulo 3**, por sua vez, está dedicado à análise e discussão das informações coletadas. Assim, serão apresentados dois artigos em que se discute o conhecimento do professor relacionado aos tópicos de divisão e de Medida. O primeiro artigo, intitulado "***Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão***" (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b), se dedica a explorar o conhecimento matemático especializado (KoT) do professor no âmbito da divisão, a partir da identificação e descrição do conteúdo do conhecimento dos tópicos manifestado em um contexto de Formação Continuada. Nesse artigo, buscou-se responder à seguinte pergunta: *Que elementos caracterizam o conhecimento do tópico de divisão de professores que participam de um contexto de Formação Continuada?* O recorte da investigação orientado por essa sub-questão nos permitiu identificar alguns elementos caracterizadores do conhecimento do professor, no âmbito do tópico de divisão, que são estruturantes quanto a uma arquitetura da matemática, numa perspectiva das conexões. Esses elementos referem-se, dentre outros fatores: às distintas formas de se interpretar a operação de divisão; aos construtos dividendo, divisor e quociente e às relações numéricas (natureza e tipo) que se estabelecem entre esses construtos.

O segundo artigo, intitulado "***Caracterização do Conhecimento Especializado do professor nos tópicos de Medida***" (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a), foi norteado pela pergunta: *Que conhecimento do conteúdo dos tópicos de Medida revelam os professores de e que ensinam matemática participantes de um contexto formativo?",* e se dedicou à exploração do conhecimento matemático especializado do professor no âmbito dos tópicos de Medida, a partir da identificação e descrição do conteúdo do Conhecimento dos Tópicos (KoT) também manifestado no contexto de uma Formação Continuada. Com este recorte da investigação, foi possível compreender o caráter estruturante que os tópicos do tema de Medidas exercem no conteúdo do conhecimento do professor.

Ainda no terceiro capítulo, com base nos resultados expressos nos dois artigos, e atendendo ao nosso objetivo de mapear o conteúdo de conhecimento do professor associado aos tópicos em foco nesta investigação, apresentamos em uma seção específica, uma proposta de teorização das conexões matemáticas, evidenciando e descrevendo as relações entre os conteúdos de conhecimento dentro de um mesmo tópico e entre os tópicos no tema de Medida e de divisão.

Por fim, nas **Conclusões**, apresentamos as respostas à pergunta de pesquisa, ao mesmo tempo em que refletimos criticamente sobre o percurso e resultados desta investigação, além de apontarmos perspectivas futuras para a continuidade do trabalho investigativo com foco nas especificidades do conhecimento do professor.

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

Neste capítulo apresentam-se as bases teóricas que sustentam nossas argumentações e são, portanto, orientadoras dessa investigação. Esta é uma investigação com um foco específico no conhecimento do professor, em relação a determinados tópicos matemáticos – aqui, os tópicos no tema de Medidas e de divisão –, e este capítulo teórico está organizado a partir de três seções.

Nas duas primeiras seções, apresentam-se os fundamentos teóricos do tema de Medida e do tópico de divisão, destacando os elementos centrais dos construtos e conceitos intrínsecos a cada um deles. Além disso, incluímos nessa discussão alguns aspectos relacionados com as dificuldades enfrentadas tanto por alunos quanto por professores, quando se tratam, respectivamente, das aprendizagens e do ensino do tema e do tópico que estão em foco na investigação.

Na terceira seção, apresenta-se a conceitualização teórica assumida para a exploração das especificidades do conhecimento do professor, e dando-se destaque ao foco nas conexões matemáticas. Ainda nessa terceira seção, os aspectos matemáticos destacados nas duas primeiras seções são discutidos do ponto de vista do conhecimento especializado do professor, segundo a conceitualização assumida.

Algumas notas teóricas sobre os tópicos no tema de Medida, seu ensino e aprendizagem

O tema de Medida contempla um conjunto de conhecimentos que conectam a Matemática ao mundo real, pois as medidas estão associadas a atividade humana de encontrar formas para compreender quantitativamente conceitos e atributos de natureza qualitativa.

No âmbito das medidas, os elementos fundamentais da atividade de medição, quais sejam, a unidade de medida e todo a ser medido, além dos processos mentais (raciocínios) mobilizados a partir dos procedimentos de medição, assumem um papel preponderante nas aprendizagens matemáticas dos alunos. Isso porque tais elementos e processos favorecem o envolvimento com noções de quantidades, notadamente no que se refere à coordenação entre as quantidades discretas e contínuas (SMITH; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; TEPPO, 2011), e contribuem para o desenvolvimento de fundamentos matemáticos relacionados aos processos aritméticos, ao raciocínio proporcional, aos construtos e conceitos associados aos números racionais e, nas etapas de ensino mais adiantadas, à noção de variáveis algébricas (SARAMA et al., 2011; SZILAGYI; CLEMENTS; SARAMA, 2013).

Os tópicos de Medidas deveriam, por isso, ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares, desde a Educação Infantil, uma vez que são constituídos por noções e conceitos fundamentais para o desenvolvimento de ideias fulcrais na Matemática. Mais precisamente, o "senso de medida" (STEPHAN; CLEMENTS, 2003, p. 14) deveria ser um dos focos centrais nos processos de ensino, pois, a partir de seu desenvolvimento, os alunos podem ser envolvidos com algumas das *big ideas* em Matemática (NCTM, 2000). No entanto, o trabalho com os tópicos de Medida, especificamente na Educação Infantil e nos Anos Iniciais, tende a se focar no ensino das unidades de medida padronizadas, sem explorar com a devida atenção os procedimentos de medição para cada tipo de grandeza, e pouco (ou quase nada) se exploram os conceitos subjacentes aos processos (mentais) em que se pauta a atividade de medir (STEPHAN; CLEMENTS, 2003).

No contexto dos tópicos de Medida, destacam-se as noções de "grandeza" e "magnitude" que, em muitos casos, por questões linguísticas[17], são tomadas como sinônimos, mas aqui serão devidamente diferenciadas. Assume-se que grandeza é o atributo de um objeto ou fenômeno físico que pode ser quantificado por meio de um processo de medição, enquanto a magnitude é assumida como sendo a variação quantitativa deste atributo (BERKA, 1983).

Ainda nesse contexto, outro termo que merece clarificação é "quantidade". Com efeito, uma quantidade é um montante que pode ser determinado numericamente a partir de uma contagem ou a partir de uma medição. No primeiro caso, denominamos por "quantidade discreta" o valor determinado e, no segundo caso, falamos em "quantidade contínua" (GODINO; BATANERO; ROA, 2002). As grandezas físicas (e.g., comprimento, área, volume, capacidade, tempo), possuem magnitudes expressas por quantidades contínuas. Mas a cardinalidade – número de elementos – de um conjunto, por exemplo, será sempre expressa por uma quantidade discreta. Dessa forma, tratamos as magnitudes como quantidades necessariamente associadas às medidas.

[17] Muitos textos utilizam o termo "magnitude" – no inglês e no espanhol, com a mesma grafia da língua portuguesa – para designar "medida". Outros ainda utilizam este termo para designar "quantidade" ou, de forma mais abrangente, "tamanho". Entretanto, o mais comum é encontrar o uso do termo "magnitude" como sinônimo de "grandeza".

Com efeito, a medição, na sua essência, caracteriza-se como uma atividade física e, justamente por isso, alguns processos mentais associados a ela, na maior parte das vezes, ficam ocultos. De um ponto de vista puramente experimental, o ato de medir está associado com a atribuição de um valor numérico a um atributo mensurável de objetos, fenômenos ou processos (BERKA, 1983). Este valor numérico é obtido quando se comparam magnitudes de uma mesma grandeza e se quantifica o número de vezes que uma delas deve ser repetida até que se consiga, por acumulação, obter a magnitude da outra (BERKA, 1983; CLEMENTS; STEPHAN, 2004). Essa forma mais primitiva de se efetuar medições por comparação seguida de quantificação, remonta aos tempos mais antigos da história da humanidade e prevalece até os dias atuais em inúmeros contextos, particularmente no âmbito escolar.

Considerando, então, este contexto escolar, verifica-se que os alunos habitualmente são introduzidos primeiro às ideias de medição de comprimento, envolvendo instrumentos e unidades de medidas não padronizados (SMITH; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; TEPPO, 2011). No entanto, a partir dessa introdução, os alunos são apresentados às unidades de medida padronizadas de comprimento, e todas as demais grandezas que normalmente são tratadas nos Anos Iniciais, tais como área, capacidade, massa, volume e tempo[18], passam a ser discutidas sem que se levem em conta as particularidades das naturezas de cada uma como sendo elementos cruciais para o seu entendimento (SARAMA et al., 2011; SZILAGYI; CLEMENTS; SARAMA, 2013). De fato, as crianças deveriam, desde pequenas, ser engajadas a "desenvolverem uma teoria sobre as medidas, ao invés de simplesmente efetuar medições" (LEHRER; JASLOW; CURTIS, 2003, p. 100) e a conceitualização de cada uma das grandezas, atráves da comparação e classificação, deveria introduzir esse trabalho (PASSALAIGUE; MUNIER, 2015).

É comum, por exemplo, que a grandeza área seja explorada com crianças da Educação Infantil a partir de tarefas em que se propõe a cobertura de uma região retangular, utilizando quadrados (unidades quadradas), seguindo-se com a quantificação (por contagem) dos quadrados usados para essa cobertura. No entanto, alguns aspectos considerados centrais para o entendimento da noção de área não são priorizados nesse contexto de ensino. Como

[18] Levando-se em conta os currículos brasileiros, formulados a partir da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018a).

exemplo, podemos citar que o fato de que, habitualmente, os alunos não são levados a tomar atenção para a estrutura linha *versus* coluna (OUTHRED; MITCHELMORE, 2000; PARNORKOU, 2020) e tampouco são levados a, conscientemente, associar o valor obtido pela contagem das unidades quadradas com a área da região (CULLEN; BARRETT, 2019).

A massa é outro exemplo de grandeza em que normalmente as discussões com os alunos ocorrem de forma pouco potente do ponto de vista das explorações de conceitos e ideias essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático (CHEESEMAN; MCDONOUGH; FERGUSON, 2013), tais como comparação e equivalência, duas *big ideas* em Matemática (CHARLES, 2005).

Com efeito, os processos associados à atividade de medir estão fundamentados em alguns princípios que foram descritos originalmente com foco na grandeza comprimento (CLEMENTS; STEPHAN, 2004). Tais princípios correspondem à:

(i) partição – relaciona-se com a atividade mental de dividir o objeto em unidades menores e de mesmo comprimento –, considerando aqui o caso particular de a unidade ser menor que o objeto que se vai medir;

(ii) unidade de iteração – corresponde à habilidade de pensar em um comprimento como referência para se deslocar em todo o comprimento do objeto, de modo a que ambas as extremidades (final e inicial) desse comprimento de referência coincidam no processo de iteração, o que implica não deixar espaços entre duas unidades subsequentes, nem sobrepor unidades adjacentes;

(iii) transitividade – corresponde ao processo de, por meio de estimativa ou dedução, obter uma relação de igualdade ou desigualdade (superior ou inferior) de quantidade relacionada a uma determinada grandeza e estendê-la a outros dois ou mais objetos;

(iv) conservação – associa-se à compreensão de que qualquer movimento (translação ou rotação) no objeto que será/foi medido manterá os comprimentos;

(v) acumulação da distância – corresponde ao entendimento de que, no processo de iteração de uma unidade de comprimento ao longo do comprimento do objeto que se mede, se realiza a quantificação de iterações, e o valor numérico (quantidade de repetições da unidade) corresponde ao espaço coberto por essas unidades contadas até aquele ponto;

(vi) relação da medida com um valor numérico – associa-se à reorganização da compreensão, pelo indivíduo, do processo de quantificação, de quantidades discretas para quantidades contínuas.

Ainda que esses seis princípios estejam pautados nos processos mentais e físicos associados às medições unidimensionais, eles podem ser transpostos para grandezas de outros tipos, uma vez efetuadas algumas adaptações relacionadas às naturezas dessas grandezas (HEUVEL-PANHUIZEN; ELIA, 2011).

A possibilidade de se efetuar essa transposição se sutenta no fato de que quase todas as grandezas[19] abordadas com alunos nos Anos Iniciais (comprimento, área, massa, volume, capacidade e tempo), obedecem a três regras básicas (BERKA, 1983):

i) regra da igualdade: relaciona-se com a percepção de que duas magnitudes são iguais quando, ao serem comparadas uma à outra, não se verifica a diferença entre elas (e.g., dois objetos, quando colocados em pratos diferentes de uma balança, equilibram a haste se as magnitudes de suas massas forem equivalentes);

ii) regra aditiva: relaciona-se com a compreensão de que, quando duas magnitudes, A e B, são comparadas e percebe-se que A é maior do que B, pode-se considerar a adição de magnitudes à B, até que a soma das magnitudes compostas com B se iguale à magnitude de A (cf. a regra da igualdade);

iii) regra da unidade de medida: refere-se a compreensão de que, para qualquer grandeza, sempre pode ser atribuída uma unidade de medida padronizada e, consequentemente, poderão ser determinados múltiplos e submúltiplos dessa unidade, tomando-se, respectivamente, porções ou partes dela.

Com efeito, a unidade de medida, enquanto um construto, ocupa um lugar de destaque nas aprendizagens matemáticas dos alunos, não somente porque é um elemento principal no processo de medição, mas, especialmente, porque é a partir deste construto que se fundamentam vários outros conceitos, como os de fração unitária, de inteiro (o todo) e de

---

[19] A temperatura, por exemplo, é uma das grandezas discutidas nos Anos Iniciais que não se comporta segundo a ii) regra aditiva (BERKA, 1983). Por esse motivo, e também pela natureza mais abstrata da temperatura – assim como são a massa e o tempo – o trabalho envolvendo essa grandeza deveria ser cuidadosamente fundamentado nos conceitos e processos mentais que se desenvolvem com o trabalho envolvendo, principalmente, as grandezas comprimento, área e capacidade, já que estas são grandezas em que os processos de medição direta ficam explícitos.

unidade composta – unidade de unidades – (NORTON; BOYCE, 2015). E aqui a noção de *unitizing* apresenta-se como um construto fundamental para o entendimento do que é e de como se constitui uma unidade de medida. De fato, *unitizing* define-se como uma operação mental na qual um agrupamento de quantidades passa a ser interpretado como uma unidade (STEFFE, 2003).

Além da unidade de medida, a iteração é outro construto fundamental no desenvolvimento dos raciocínios associados às medidas. De fato, a iteração, no âmbito das medidas, se refere a uma ação (física e/ou mental) na qual se repete uma unidade (ou composição de unidades) até que se consiga obter uma magnitude equivalente à magnitude do todo que está sendo medido (CLEMENTS; STEPHAN, 2004).

Tanto a unidade de medida quanto a iteração podem ser entendidas como fundamentos da atividade de medir, pois estão presentes nos contextos de medição de qualquer grandeza. No entanto, algumas particularidades relacionadas a cada tipo de grandeza levam a que os alunos apresentem mais ou menos dificuldades na compreensão de cada uma delas, ao longo dos processos de ensino.

Por exemplo, para a grandeza área, Cullen e Barret (2019) propõem o desenvolvimento progressivo do conhecimento dos alunos em sete níveis, a partir de uma abordagem que garanta essencialmente três aspectos: i) que os alunos reconheçam a área como uma grandeza, ou seja, um atributo das regiões bidimensionais, que poderá ser quantificado a partir de comparações com magnitudes de mesma natureza; ii) que identifiquem e visualizem uma estrutura coordenada entre linhas e colunas, constituídas de composições de unidades de medida; iii) que desenvolvam a imagem mental de uma composição de unidades como uma única unidade, manipulando-a no sentido de criar outra imagem mental de uma “matriz” sobreposta à região, que corresponde à área. Os autores discutem os resultados do trabalho com unidades de medida de área com formato não quadrangulares – triangulares e retangulares, por exemplo –, um tipo de trabalho que se mostra pontente para o desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos: relativamente à (de)composição da área de uma região em área menores; das relações entre as unidades, numa perspectiva de fundamentar as noções de múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida (BARRETT et al., 2011; BERKA, 1983; BRAGG; OUTHRED, 2004; NORTON; BOYCE, 2015); e quanto a superação das dificuldades dos alunos com relação à distinção entre os conceitos de área e perímetro (BARRETT; CLEMENTS; SARAMA, 2017).

De fato, é bastante comum que tanto os alunos quanto os professores enfrentem dificuldades para diferenciar "área" de "perímetro". Essas dificuldades decorrem, primeiramente, da não compreensão de qual o atributo (grandeza) a ser medido (BATURO; NASON, 1996). Mas, associado a isso, encontra-se o não conhecimento da definição dos conceitos de perímetro e de área. Com efeito, área é definida como sendo a magnitude de uma superfície bidimensional contida por uma fronteira, e o perímetro, por sua vez, é definido como sendo a magnitude dessa fronteira (CLEMENTS; SARAMA, 2009). De toda forma, uma vez que os alunos não compreendem que o conceito de área está subordinado a uma coordenação entre duas dimensões (PARNORKOU, 2020) e que o perímetro se relaciona com uma medida unidimensional (IRWIN; ELL; VISTRO-YU, 2004), eles provavelmente terão dificuldades em diferenciar a grandeza "área" da grandeza "comprimento da fronteira que delimita essa área (perímetro)".

Ainda se tratando da natureza das grandezas, podemos destacar a dificuldade que enfrentam os alunos e professores para distinguir "volume" de "capacidade". De fato, essas dificuldades também derivam da não compreensão do que é que se quer medir quando se fala em capacidade e, particularmente, de quais procedimentos se devem empregar quando se deseja medir volume ou medir capacidade (HO; MCMASTER, 2019). Outro aspecto que influencia nessa dificuldade em distinguir os dois conceitos se refere ao fato de que os termos "volume" e "capacidade" são, em muitos casos, tomados como sinônimos (RIBEIRO; POLICASTRO, 2021), pois são entendidos como o "espaço interno de um recipiente" e, de fato, nos contextos de ensino, muitas vezes se associam as mesmas unidades de medida (padronizadas) às duas grandezas (HO; MCMASTER, 2019). Ainda que seja importante em certo momento do trabalho com os alunos estabelecer as devidas relações de equivalência entre as unidades padronizadas de volume e de capacidade, é fundamental que essa discussão ocorra após um trabalho que priorize a conceitualização dessas grandezas (PASSALAIGUE; MUNIER, 2015), e favoreça o entendimento do que é o volume e do que é a capacidade, o que pode ser realizado a partir de um trabalho com unidades de medida não padronizadas de cada uma dessas grandezas.

Ainda se pode considerar como um fator de impacto nas aprendizagens dos alunos relacionadas à distinção entre "volume" e "capacidade" o fato de que o ensino ocorra a partir de discussões que se pautam essencialmente no cálculo do valor da medida do volume por meio de fórmulas matemáticas (PARNORKOU, 2021), outro tipo de abordagem que deixa de lado a conceitualização da grandeza, pois se assume que calcular o valor de uma medida seja o mesmo que efetuar a sua medição. Com efeito, enquanto a compreensão da grandeza área se fundamenta na noção de coordenação de duas dimensões, a compreensão do volume está fundamentada na coordenação de três dimensões (PARNORKOU, 2020). Assumir que o cálculo de uma medida por meio de uma fórmula seja o suficiente para conceitualizar a grandeza à qual essa medida está associada, significa ignorar a potencialidade de que os alunos se apropriem dos entendimentos de cada uma das grandezas efetuando relações entre os procedimentos que se empregam quando se está medindo cada uma delas e, principalmente, do conceito de cada grandeza em si (HO; MCMASTER, 2019).

De fato, quando se discute com os alunos os procedimentos de medição utilizando primeiro as unidades não padronizadas, eles são capazes de se apropriar muito mais significativamente dos conceitos de cada uma das grandezas (BRAGG; OUTHRED, 2004; CHEESEMAN; MCDONOUGH; FERGUSON, 2013; NORTON; BOYCE, 2015; STEPHAN; CLEMENTS, 2003). Além disso, esse tipo de abordagem contribui significativamente para o desenvolvimento do conhecimento dos alunos da noção de que toda medida é dada por uma magnitude expressa necessariamente por uma quantidade contínua, já que a quantificação das iterações da unidade de medida poderá ser associada a um valor numérico não inteiro (BRAGG; OUTHRED, 2004).

Nesse sentido, assumir um trabalho com as medições a partir de unidades de medida não padronizadas é (ou deveria ser), desde uma perspectiva longitudinal do ensino (BALL, 1993), uma forma de "abrir portas" para as aprendizagens futuras dos alunos relacionadas, por exemplo, com os tópicos de divisão (BICKNELL et al., 2015), dos números decimais e das frações (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2006; REN; GUNDERSON, 2019). Em particular, este trabalho com as unidades de medida não padronizadas é fundamental no desenvolvimento dos conhecimentos das relações numéricas entre o todo a ser medido e a unidade de medida, o que contribuirá para que os alunos desenvolvam um tipo de raciocínio associado a representação de uma mesma quantidade a partir de múltiplas e flexíveis formas (JUNG et al., 2013).

Ainda se tratando das potencialidades de uma abordagem pedagógica envolvendo as unidades de medida não padronizadas, destaca-se que quando se realiza esse trabalho associando-se a noção de *unitizing* (composição de unidades em uma unidade), pode-se levar os alunos a se apropriarem dos conceitos de múltiplos e submúltiplos de uma unidade de forma mais significativa o que, posteriormente, os ajudará a estabelecer conexões com noções envolvendo: as operações (múltiplos e divisores de um número, por exemplo); as frações; e até mesmo com o Pensamento Algébrico (NORTON; BOYCE, 2015).

Com isso, destaca-se que um trabalho focado nos fundamentos da atividade de medir (os princípios e os elementos centrais nesse processo), que priorize a conceitualização de cada uma das grandezas, dando maior ênfase aos procedimentos de medição com unidades de medida não padronizadas, tem um papel estruturante no desenvolvimento dos entendimentos dos alunos relacionado com algumas das *big ideas* em Matemática: "quantificação", "comparação", "equivalência", "agrupamentos", "proporcionalidade", "estimação", "aproximação" (CHARLES, 2005).

E, de fato, pode-se dizer que uma abordagem que contempla o desenvolvimento dessas grandes ideias matemáticas está pautada no princípio pedagógico de estabelecer conexões entre construtos e conceitos, dentro de um mesmo tópico ou entre tópicos distintos, numa perspectiva de evidenciar uma arquitetura estrutural da Matemática (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009), não só enquanto disciplina escolar, mas, principalmente, como área de conhecimento.

Algumas notas teóricas sobre o tópico de divisão, seu ensino e aprendizagem

Dentre as quatro operações básicas[20] formalmente trabalhadas nos Anos Iniciais, a divisão é considerada mais complexa quando comparada com as outras três operações (MA, 1999) e, por isso, o trabalho escolar com a divisão é habitualmente desenvolvido somente após o trabalho com a adição e com a subtração, algo que já pode ser indicativo de um entendimento superficial acerca da importância de se evidenciar as conexões existentes entre as quatro operações (KENEDI et al., 2019; LEE; WHEELER, 1989; YOUNG-LOVERIDGE; BICKNELL, 2018).

Além disso, as dificuldades dos alunos em relação a essa operação são numerosamente reportadas por pesquisas, nacionais e internacionais na área (por exemplo, BICKNELL et al., 2015; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; DOWNTON, 2009;

[20] Note-se que, formalmente, têm-se duas operações, a adição e a multiplicação. No entanto, no contexto escolar (que alguns denominam de matemática escolar) é usual referirem-se a quatro operações.

FISCHBEIN et al., 1985; LAUTERT; SPINILLO, 2011; MORO, 2005; SQUIRE; BRYANT, 2002).

Essas dificuldades de aprendizagem associadas à divisão relacionam-se, dentre outros fatores, com o (não) entendimento acerca do papel de cada um dos elementos envolvidos na operação – dividendo, divisor, quociente e resto (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998) –, bem como sobre os processos envolvidos no algoritmo – os porquês de cada um dos passos e os significados de cada um dos resultados obtidos (RIBEIRO et al., 2018).

Ao mesmo tempo, não é equivocado afirmar que as dificuldades relacionadas com a divisão são encontradas também entre professores. Roche e Clarke (2013) mostraram que, mesmo depois de participarem de um programa de formação que tinha como objetivos explícitos desenvolver seus conhecimentos em matemática, os conhecimentos dos participantes a respeito dos sentidos da divisão e do estabelecimento de uma correspondência entre cada um dos sentidos e representações adequadas ainda não estavam totalmente consolidados. O que chama a atenção é que já no início da década de 1980, Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985) apontavam para o mesmo tipo de dificuldade, porém, seus resultados estavam relacionados aos alunos.

Embora as evidências sugiram que boa parte das dificuldades dos professores e dos alunos em relação ao tópico de divisão sejam similares e até do mesmo tipo (FOSNOT; DOLK, 2001; RIZVI, 2007), pela natureza distinta que o conhecimento do professor possui em relação ao conhecimento dos alunos, é fundamental demarcar a fronteira que define as implicações que essas dificuldades oferecem aos processos de ensino e, principalmente, para as aprendizagens dos alunos. Por exemplo, no caso dos professores, o não entendimento (ou não reconhecimento) das distintas formas de se interpretar a operação de divisão (os sentidos), associado a ausência de atribuição de significado aos raciocínios empregados nos cálculos (algorítmicos ou não) – o que inclui, dentre outros aspectos, o uso de representações adequadas –, poderá levar a que o trabalho com essa operação se paute exclusivamente no ensino mecanizado do algoritmo, sem focar a atenção na necessária fundamentação de conceitos subjacentes ao entendimento do que seja dividir (ROBINSON; LEFEVRE, 2012).

E, de fato, conforme mostraram Fávero e Neves (2012) numa revisão sistemática de dez anos de pesquisa dedicada ao ensino e à aprendizagem da divisão e dos racionais, a prática do professor, quando se refere ao ensino desses tópicos, está centrada ou “restrita na exposição de regras, em detrimento do conceito e, consequentemente, voltada à memorização, em detrimento do raciocínio" (p. 60). Esse tipo de abordagem associa-se a uma prática que tem como principal objetivo o desenvolvimento do conhecimento relacionado ao "saber fazer", e não ao entender, ou seja, um tipo de ensino instrumentalizador e não voltado a uma *aprendizagem inteligente* (SKEMP, 1989) pautada no estabelecimento de relações.

É importante dizer que, da perspectiva que assumimos, reconhecemos que o trabalho com os algoritmos tem a sua importância no processo de aprendizagem dos alunos (BROCARDO; SERRAZINA; KRAEMER, 2003). No entanto, entendemos que priorizar os processos algorítmicos, sem antes desenvolver um trabalho consistente sobre os sentidos desta operação e articular essas discussões com as distintas formas de se representar (ROCHE; CLARKE, 2013; TIMMERMAN, 2014) o fenômeno *divisão* como uma operação (mental) matemática, não trará contribuições significativas para o desenvolvimento do conhecimento e capacidades matemáticas dos alunos.

Pelo contrário, sem essas discussões fundamentais e estruturantes, será pouco provável que, quando os alunos estiverem efetuando o cálculo de uma divisão a partir do algoritmo tradicional[21], compreendam o que estão fazendo, quando e porque devem proceder de determinada forma (CLARKE, 2005; KAMII; DOMINICK, 1998; RIBEIRO et al., 2018) e as conexões matemáticas envolvendo as outras operações presentes nesse processo (KENEDI et al., 2019; YOUNG-LOVERIDGE; BICKNELL, 2018). E será menos provável ainda que, nas etapas escolares futuras, esses alunos consigam atribuir significado aos procedimentos empregados em contextos em que essa operação está envolvida, como, por exemplo, no caso dos algoritmos de divisão entre frações[22] ou da divisão entre polinômios.

Nesse contexto, o que está em jogo se relaciona com o desenvolvimento do que Hiebert e Lefevre (1986) denominaram por *procedural knowledge* e *conceptual knowledge*[23].

---

[21] Quando falamos em algoritmo tradicional, estamos nos referindo ao algoritmo euclidiano de divisão, ou sejam aquele popularmente chamado de "divisão na chave", e que se fundamenta na relação matemática expressa algebricamente por: $D = d.q + r$, onde "D" é o dividendo, "d" é o divisor, "q" é o quociente e "r" é o resto.

[22] Nesse caso, estamos nos referindo ao algoritmo no qual a fração correspondente ao divisor é invertida, e o dividendo passa a ser multiplicado por essa nova fração. Em termos simbólicos, estamos nos referindo ao algoritmo expresso na relação: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, onde "a", "b", "c" e "d" são números inteiros e "b" e "d" não são nulos.

[23] Em tradução literal, "conhecimento procedimental" e "conhecimento conceitual", respectivamente.

O conhecimento procedimental está associado a um “conhecer como” e o conhecimento conceitual se refere a um “conhecer o porquê”. Esse conhecimento procedimental se sustenta a partir do domínio dos objetos e símbolos matemáticos e na capacidade de operar simbolicamente. Já o conhecimento conceitual é sustentado pelo estabelecimento de relações entre aquilo que o indivíduo já conhece e os conhecimentos novos que estão sendo desenvolvidos – o que no campo da Psicologia da Educação se reconhece por assimilação (PIAGET, 1972). Assim, quando o trabalho relacionado com a divisão – ou com qualquer outra operação ou tópico matemático – prioriza os procedimentos em detrimento dos conceitos, é muito mais provável que os alunos recorram a memorizações e acabem desenvolvendo “rotinas computacionais” destituídas de significado (SKEMP, 1987).

Quando falamos dessas memorizações sem significado, estamos nos referindo ao emprego de procedimentos mecânicos e repetitivos, que não contribuem para o desenvolvimento dos raciocínios implícitos nos processos de conceituação. Skemp (1989) definiu *conceito* como sendo a representação mental que um indivíduo forma de propriedades comuns que encontra em situações ou objetos previamente conhecidos. Assim, não são as experiências vivenciadas isoladamente que permitem ao indivíduo apreender um conceito, mas sim as abstrações que este indivíduo realiza a partir das regularidades que encontra nos contextos em que esse conceito está presente. Entretanto, no caso da Matemática, os conceitos, em sua essência, são abstratos e, justamente por isso, não são facilmente apreendidos a partir de situações experimentadas no cotidiano da vida real (SKEMP, 1987). Portanto, a compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos dependerá, necessariamente, de contextos criados intencionalmente pelos professores, a partir dos quais esse alunos poderão identificar *classes* de situações para, então, realizarem as abstrações.

É necessário esclarecer que esses contextos que os professores podem criar ou propor aos alunos não devem (ou não deveriam) se limitar a uma mera apresentação de “modelos” sobre como proceder para encontrar os resultados seguida de uma sequência de outros cálculos “parecidos” para os alunos efetuarem “seguindo o modelo”[24].

A priorização dos processos instrumentalizadores, focados excessivamente nos procedimentos, pode levar os alunos a reforçarem equívocos conceituais bastante comuns

[24] As aspas aqui têm um caráter de enfatizar os termos que podem surgir nos diferentes contextos (ou materiais didáticos) em que o foco está no desenvolvimento dos conhecimentos procedimentais.

que, no caso da divisão, por exemplo, se relacionam com a noção de que essa operação "diminui" o número, ou de que a divisão deve sempre ser efetuada entre um número maior e outro menor, nessa ordem (ver por exemplo, BELL; FISCHBEIN; GREER, 1984; FISCHBEIN et al., 1985; MCINTOSCH et al., 1997).

De fato, o desenvolvimento dos conhecimentos conceitual e procedimental devem ocorrer conjuntamente e de modo a se complementarem (BAROODY, 2003; LASKI et al., 2016; ROBINSON; LEFEVRE, 2012). E, em particular no caso da divisão, é fundamental que no processo de ensino se dê especial atenção aos papéis que desempenham divisor, dividendo e quociente em cada um dos contextos em que essa operação pode ocorrer, a fim de atribuir significado a esses elementos numa correspondência direta com o sentido da divisão que está em evidência, o que, reforçamos, certamente não ocorrerá a partir de um ensino focado nos procedimentos do algoritmo.

Embora o termo "dividir" seja amplamente utilizado no cotidiano escolar, desde a Educação Infantil, em situações sociais, como, por exemplo, quando o professor pede que os alunos dividam a massinha com algum colega, uma folha sulfite ou um alimento, a abordagem que se dá nessa perspectiva de trabalho com a "divisão" favorece o entendimento da noção de dividir como um ato que está associado a decompor quantidades (separar em partes), o que nem sempre acontecerá de forma equitativa e, especialmente, de forma sistematizada. De fato, a *decomposição de quantidades* é um construto matemático importante para o entendimento da divisão, mas é fundamental que se evidencie que essa decomposição está intimimamente relacionada com outro construto matemático, que é a *partição equitativa* (TIMMERMAN, 2014).

Além disso, a compreensão mais ampla e mais profunda da divisão se sustenta na construção de uma imagem mental (TALL; VINNER, 1981) de que, ao efetuar essa operação, podemos estar fazendo uma constante *comparação* entre dividendo, divisor e quociente, algo que vai além da compreensão da *distribuição* de elementos expressos por números e que se encontra presente tradicionalmente em problemas e operações do tipo "arme e efetue" (LAUTERT; OLIVEIRA; CORREA, 2017).

A *comparação* é considerada uma das *big ideas* em Matemática (CHARLES, 2005), pois, assim como qualquer outra "grande ideia", ela é estruturante na aprendizagem matemática, já que exerce a função de conectar noções, construtos, conceitos ou entendimentos, evidenciando o caráter inter-relacional da Matemática. Por exemplo, a *comparação* está presente em contextos em que as cardinalidades de conjuntos são verificadas no sentido de se determinar a diferença entre elas – nos contextos em que a operação de subtração está envolvida; mas também está presente em situações em que magnitudes de uma mesma grandeza são quantificadas, uma em função da outra, como é o caso dos conextos envolvendo medições (BERKA, 1983; CLEMENTS; STEPHAN, 2004).

Quando tratamos da divisão no contexto da matemática escolar, é preciso que se desenvolva com os alunos o conceito de divisão em partes iguais. Desde a Educação Infantil, quando as propostas de trabalho envolvem a ideia de "dividir", será fundamental que o professor discuta diferentes formas de dividir (particionar) um conjunto e, gradativamente, introduza a noção de divisão em partes iguais, a fim de que as crianças avancem de uma noção de divisão em termos semânticos (ou decomposição) para uma noção de divisão enquanto processo matemático de obtenção de partes correspondentes a quantidades equivalentes. A divisão representa, portanto, nesse contexto, uma operação matemática efetuada essencialmente de forma equitativa (em partes iguais).

Para garantir que os alunos efetivamente compreendam a divisão enquanto um fenômeno, isto é, como uma operação mental que envolve distintos raciocínios e que, portanto, possui distintas formas de ser interpretada, é preciso que este trabalho se foque, em primeiro lugar, nos sentidos da operação de divisão.

Dentre os distintos sentidos que a divisão pode assumir[25], entendemos que os sentidos de *partilha equitativa* e de *medida* são os mais apropriados para o trabalho desde a Educação Infantil (FISCHBEIN et al., 1985). Assim, tanto por serem esses os dois sentidos assumidos pela BNCC (BRASIL, 2018a), quanto por se tratar de uma perspectiva que se coaduna com a que assumimos no contexto desta investigação, a discussão que segue envolve especificamente esses dois sentidos.

O sentido de *partilha equitativa* tem significado nos contextos em que, dada uma quantidade de elementos de um conjunto (dividendo), deseja-se partilhar (distribuir) de forma equitativa essa quantidade entre um determinado número de conjuntos (divisor). Com isso, após a partilha equitativa, os conjuntos entre os quais a quantidade inicial foi partilhada

[25] Em seu trabalho intitulado "*Mathematics as an educational task*", Freudenthal (1973) critica o fato de se considerar a divisão com apenas os dois sentidos assumidos tradicionalmente e apresenta outros sentidos relacionados com velocidade, área, volume, entre outros.

deverão conter a mesma quantidade de elementos cada um, ou em termos mais formais, estes conjuntos deverão conter a mesma cardinalidade ao final da partilha.

Em geral, esse sentido é o que mais comumente é abordado nos contextos escolares, visto que se perguntamos a qualquer indivíduo escolarizado "O que é dividir?", em geral, a primeira resposta que obtemos é "dividir é repartir uma quantidade em partes iguais"[26].

O outro sentido que se pode assumir para a divisão é o de *medida*[27]. Como visto na seção anterior, a noção de *medida* está associada à 1) comparação entre quantidades que expressam grandezas de mesma natureza; e à 2) quantificação (contagem). Além disso, também vimos que, para medir, é necessário que se atendam a alguns princípios[28] (CLEMENTS; STEPHAN, 2004), considerados fundamentais no contexto da divisão: i) escolha da unidade de medida; ii) partição do todo a ser medido; iii) iteração (repetição) da unidade de medida dentro do todo; iv) acumulação da quantidade; v) atribuição de um valor numérico, correspondente à quantificação de vezes que a unidade foi repetida dentro do todo a ser medido.

No contexto em que a divisão deverá ser interpretada como *medida*, o raciocínio subjacente ao processo de dividir se associa com comparar o divisor (a unidade de medida) com o dividendo (todo a ser medido) e quantificar as vezes que este divisor (magnitude da unidade) precisa ser repetido (iterado) até completar a quantidade correspondente ao dividendo (magnitude do todo). Note-se que é bastante intuitiva a interpretação de que a unidade, sendo iterada repetidas vezes, completará o todo e, por isso, a divisão tomada como *medida* pode ser facilmente entendida quando o divisor (unidade de medida) for menor do que o dividendo (todo). No entanto, destacamos que, ao se assumir a divisão como *medida*

---

[26] Essa foi uma das respostas obtidas em um dos contextos nos quais as informações foram coletadas. Ver com mais detalhes no artigo intitulado *Conhecimento Especializado do professor que ensina Matemática, relativo ao tópico de divisão* (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b), apresentado no Capítulo 3 desse trabalho.

[27] Há quem denomine este sentido de *medida* por "divisão por quotas", provavelmente para se aproximar de uma tradução mais literal para a expressão *quotative division* (FISCHBEIN et al., 1985), utilizada na língua inlgesa. No contexto desta investigação, a utilização do termo "medida" se deve não somente ao fato de que queremos deixar explícita a conexão existente entre o tópico de divisão e os tópicos de Medida, mas essencialmente, pelos tipos de raciocínios que se empregam quando os contextos matemáticos envolvem esse sentido da divisão, e que são correspondentes aos raciocínios envolvidos num contexto de medição.

[28] Estes princípios atendem aos processos de medição de quase todas as grandezas, isto é, grandezas como comprimento, área, volume, capacidade, tempo, etc, mas, para isso, são necessários algumas adaptações, considerando as particularidades de cada uma. Para maiores detalhes, consultar nota de rodapé n.º18.

quando o divisor é maior que o dividendo, ultrapassam-se as limitações do conjunto numérico dos naturais, ficando claro que abrem-se portas para a conceitualização do conjunto dos Números Racionais – algo que não detalharemos aqui, por não ser um dos temas matemático em foco na pesquisa.

Outro ponto importante é que tanto no sentido de *partilha equitativa* quanto no sentido de *medida*, o que dará possibilidade para a interpretação adequada para a divisão será o contexto em que esta operação for evocada. Dito de outra forma, somente a partir de um problema será possível identificar qual dos dois sentidos da divisão está sendo evocado (FISCHBEIN et al., 1985).

De fato, num problema como *"Maria tem 6 doces e quer dividi-los igualmente em 3 pacotes. Com quantos doces cada um dos pacotes ficará?*", a quantidade total de elementos – os doces – de um conjunto (o dividendo) deverá ser *partilhada* (distribuída) entre um determinado número de subconjuntos – os pacotes – (o divisor), de modo que cada um dos subconjuntos receberá a mesma quantidade de elementos. Portanto, fica evidente o sentido de *partilha equitativa* para essa situação.

Entretanto, em um problema como *"Maria tem 6 doces e quer colocá-los em pacotes de modo que, em cada pacote, sejam colocados 3 doces. Quantos pacotes Maria conseguirá formar?"*, a quantidade de elementos de um conjunto (divisor) – os 3 doces – é tomada como unidade de medida para se comparar com a quantidade de elementos de outro conjunto (dividendo) – o total de doces –, identificando-se, assim, quantas vezes esta unidade corresponde ao todo. Dessa forma, verifica-se que a ideia de distribuição não se aplica a esse contexto, uma vez que o que se pretende efetuar é uma comparação entre duas quantidades que expressam grandezas de mesma natureza (conjunto de 6 doces e conjunto – ou quotas – de 3 doces), seguida de uma quantificação (contagem da quantidade de subgrupos de 3 doces que são necessários compor para perfazer um grupo de 6 doces). Esse raciocínio, como visto anteriormente, está baseado nos fundamentos da atividade de medir.

Complementamos que, do mesmo modo que o contexto, o registro de representação verbal ajuda a indicar o sentido que se atribui à divisão. Por exemplo, a expressão $6\div3=2$ não expressa, em si, nenhum dos dois sentidos, *partilha* ou *medida*, mas a verbalização que usualmente se associa ao algoritmo "quantas vezes o três cabe em seis?" tem correspondência com o sentido de medida.

Além desse, outros registros de representação, tais como o pictórico ou o numérico, também são elementos muito importantes para a intepretação da divisão no contexto da resolução de um problema. De fato, as múltiplas representações exercem um papel crucial no processo de ensino e na aprendizagem da Matemática, pois elas são responsáveis por contribuir para a organização interna do conhecimento através de um processo cognitivo (IZSÁK, 2003; PAPE; TCHOSHANOV, 2001). Isso porque, é por meio das representações que somos capazes de modelar nossos processos mentais (JANVIER, 1987) e atribuir sentido aos raciocínios que estamos empregando em cada situação, o que nos ajuda a dar significado a cada um dos conceitos e/ou construtos matemáticos que estão envolvidos nos problemas a que essas representações estão associadas (LESSER; TCHOSHANOV, 2005). As representações poderão assumir as formas: verbal, pictórica, icônica, numérica, simbólica, algébrica ou gráfica. O trabalho com distintos registros de representação e, em particular, a associação entre esses distintos registros (AINSWORTH; BIBBY; WOOD, 2002; GOLDEN; SHTEINGOLD, 2001; RIBEIRO, 2011) exerce, portanto, um papel fundamental no desenvolvimento do conhecimento de conexões entre conceitos, fundamentos matemáticos e propriedades matemáticas, não somente no âmbito do tópico de divisão, mas em relação a qualquer tópico matemático.

O Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e as especificidades do conhecimento do professor nos tópicos do tema de Medida e de divisão

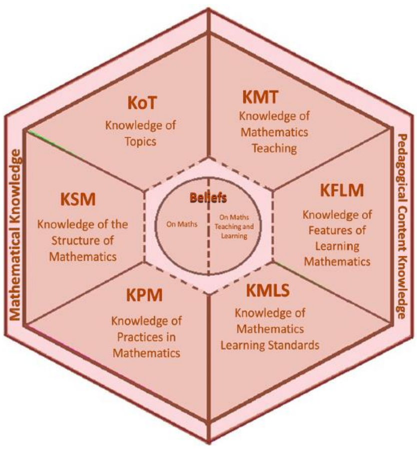
Assumindo-se que a natureza do conhecimento do professor é especializada (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CARRILLO et al., 2013; CONTRERAS et al., 2017; FLORES-MEDRANO et al., 2014; SCHEINER et al., 2017), os "tipos" de conhecimento especializado envolvem traços ou características comuns a certos subdomínios deste conhecimento.

Por exemplo, o conhecimento do professor dos distintos sentidos assumidos pela divisão ou o conhecimento dos princípios que fundamentam a atividade de medir, compõem parte do conteúdo do conhecimento matemático que este profissional possui, nestes casos, no âmbito do tópico de divisão e dos tópicos de Medida. No entanto, conhecer quais as dificuldades dos alunos ao lidar com a operação de divisão ou com os procedimentos de medição de uma grandeza qualquer, compõem parte do conteúdo do conhecimento pedagógico que este professor possui sobre as características de aprendizagem dos alunos em relação a cada um dos tópicos.

Diante das várias conceitualizações acerca das especificidades do conhecimento do professor de matemática que têm sido desenvolvidas ao longo das últimas duas décadas – por exemplo, o *Knowledge Quartet* (ROWLAND *et al.*, 2009); o *Mathematical Knowledge for Teaching* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK[29] (CARRILLO et al., 2018) – assumimos a conceitualização do MTSK como uma ferramenta teórica e ao mesmo tempo analítica para a exploração e entendimento das especificidades do conhecimento do professor.

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (Figura 2) considera diferentes elementos e dimensões do conhecimento do professor apresentando-se como uma lente teórica que modela o conhecimento nuclear do conhecimento profissional do professor (CARRILLO et al., 2018). Ao mesmo tempo, apresenta-se como uma potente ferramenta metodológica e analítica (CALDATTO et al., 2019) para investigar as distintas práticas do professor de matemática a partir de seis subdomínios do seu conhecimento e suas categorias (FLORES-MEDRANO et al., 2014). Note-se ainda que as categorias já existentes correspondem a uma possibilidade de aprofundamento no entendimento das especificidades do conhecimento do professor em diversos temas e conteúdos matemáticos, não devendo ser consideradas em um sentido restritivo e limitador, mas sim como um refinamento da lente teórica, pois ajudam a tipificar essas especificidades do conhecimento do professor.

Figura 2 – Domínios do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*



Fonte: (CARRILLO et al., 2018, p. 241)

[29] Como já dito na nota de rodapé 8, os termos em inglês não foram traduzidos neste trabalho. Em particular no caso da discussão do modelo MTSK, além das justificativas já mencionadas anteriormente, também optamos por manter as nomenclaturas utilizadas conforme originalmente apresentadas, por ser esta uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente.

O modelo MTSK está organizado a partir de três dimensões: o *Mathematical Knowledge* (MK), o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e *Beliefs*. O MK se relaciona com conhecimento matemático do professor; o PCK se relaciona com o conhecimento pedagógico do conteúdo do professor; e *Beliefs* é uma dimensão que se refere às crenças que o professor possui tanto da Matemática enquanto área do conhecimento quanto sobre o ensino e aprendizagem desta área.

Em cada um dos dois grandes domínios (MK e PCK), são considerados três subdomínios, atendendo, cada um, às especificidades do conhecimento do professor. É importante dizer que a organização do modelo em subdomínios deve ser entendida de modo operacional e, nesse sentido, faz-se necessário que sejam assumidas e evidenciadas suas inter-relações, tendo sempre como pano de fundo a matemática, o seu ensino e aprendizagem, além das crenças do professor.

Com base, portanto, na conceitualização do MTSK, assumimos que o conhecimento matemático do professor permitirá que ele proporcione aos alunos o entendimento do que fazem, de como fazem e porque o fazem a cada momento, tendo sempre como perspectiva as futuras aprendizagens – aquelas diretamente relacionadas à matemática, mas não só –, mas também sustentado nas aprendizagens anteriores. Esse conhecimento matemático deve ser complementar – e, nesse sentido, mais amplo e mais profundo – ao que se espera que os alunos aprendam, bem como deve se relacionar aos fundamentos matemáticos, procedimentos “tradicionais” e alternativos e às distintas formas de representação dos conceitos, contrutos e raciocínios, no âmbito de cada um dos tópicos.

Dessa forma, uma das dimensões desse conhecimento inclui o conhecimento do professor relativamente a cada um dos tópicos. Isso inclui o conhecimento relacionado com: as múltiplas definições para um mesmo conceito – quando houver mais de uma; os distintos sentidos associados a certos construtos; as distintas formas de dar significado aos procedimentos utilizados em situações que envolvam conceitos daquele tópico, ou seja, dar significado ao que se faz, como se faz e porque se faz de determinada forma; os diferentes tipos de registro de representação associados aos procedimentos e aos sentidos utilizados em situações que envolvam cada um dos construtos relacionados a algum tópico; as características de um determinado resultado; e com o modo como determinados fenômenos, fatos e regras podem ser organizados para gerar novos conhecimentos matemáticos (*Knowledge of Topics* – KoT).

Em relação aos tópicos de Medida, podemos mencionar como alguns exemplos de conteúdo do conhecimento, incluídos no subdomínio KoT, conhecer: as definições para o conceito de medida, de grandeza e de unidade de medida; os princípios que fundamentam a atividade de medir e os procedimentos associados a essa atividade; que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza; que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos; como são estabeleicidos os múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida, em particular, nos casos de serem dadas em uma estrutura decimal (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

Ainda neste subdomínio, destaca-se o conhecimento do professor da necessidade de se considerar uma relação intrínseca entre os construtos a "unidade", "todo a ser medido" e "quantidade" (magnitude), assumindo-os como pilares que sustentam a noção transversal de *comparação* (DI BERNARDO et al., 2018). Também está associado ao KoT o conhecimento do uso adequado da linguagem simbólica e oral para se referir às grandezas e unidades de medida (padronizadas ou não), no que se refere à atribuição de significados a essas grandezas e suas respectivas unidades, quando está em jogo o processo de medição (DI BERNARDO et al., 2018; POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a), e também para dar suporte às discussões matemáticas com os alunos (POLICASTRO et al., 2020).

Com relação ao tópico de divisão, inclui-se neste subdomínio conhecer: os dois sentidos da divisão; a necessidade de formulação de problemas e de articulação com tipos de representação distintos que ajudam a evocar cada um dos dois sentidos; os distintos procedimentos que podem ser empregados para a resolução de uma divisão, incluindo o algoritmo convencional e as verbalizações adequadas associadas (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b).

De modo complementar ao KoT, considera-se um subdomínio associado à estrutura da matemática, que inclui um conhecimento matemático amplo e profundo sobre cada um dos temas, assumindo uma perspectiva da sua integração, distribuição/exibição ao longo dos anos de escolaridade, bem como suas relações com estruturas mais amplas ou mesmo com outras estruturas consideradas auxiliares ao pensamento matemático. Tal conhecimento sustenta uma prática letiva na qual o professor pode trabalhar a matemática elementar de um ponto de vista superior e vice-versa (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM).

Por exemplo, com relação aos tópicos de Medida, considera-se conteúdo do conhecimento do professor no subdomínio KSM as relações que ele estabelece entre o trabalho com a comparação entre a unidade de medida e o todo a ser medido, associando a noção da quantidade obtida dessa comparação com a discussão sobre proporcionalidade (que é uma noção transversal a toda a matemática). Já no tópico de divisão, por exemplo, estão incluídos no KSM conhecer: os fundamentos matemáticos que sustentam e justificam a relação de inversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão (GREER, 2011); os sentidos do número como "quantificador" e como "medida" (CEBOLA, 2002), para dar suporte à interpretação do sentido da divisão partilha equitativa e como medida ou para dar significado a cada um dos elementos envolvidos na operação de divisão; a relação entre divisor com a unidade de medida e entre o dividendo com o todo a ser medido.

Ainda incluído nas dimensões do conhecimento matemático, considera-se o conhecimento associado às formas de fazer matemática. Dentre essas formas, podem ser referidas as diferentes maneiras de demonstrar, os critérios a estabelecer para que uma generalização seja válida, o significado de definição ou o conhecimento da sintaxe matemática, incluindo também os conhecimentos de diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem (*Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM). Note-se que pelo foco desta investigação – o conhecimento do professor dos elementos estruturais e estruturantes em relação aos tópicos de Medida e de divisão –, não nos deteremos em abordar exemplos das especificidades do conhecimento do professor relacionados com este subdomínio, assim como não o faremos com os outros três subdomínios associados ao conhecimento pedagógico, que serão apresentados a seguir.

Com relação aos subdomínios relativos ao conhecimento pedagógico, consideram-se os aspectos que se associam às características de aprendizagem dos estudantes que são inerentes ao conteúdo matemático. Assim, representam papéis importantes as dimensões do conhecimento do professor acerca dos possíveis modos de apreensão dos conteúdos em si mesmo, além das teorias sobre o desenvolvimento cognitivo dos estudantes; os erros, obstáculos e dificuldades associados aos raciocínios e procedimentos que os estudantes habitualmente utilizam e também as percepções que o professor tem acerca das dificuldades e facilidades que os próprios estudantes associam às distintas áreas da matemática (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM).

Associado à dimensão anterior, está um subdomínio que contempla os aspectos do conhecimento do professor dos recursos, materiais, modos de se apresentar determinados conteúdos e o potencial de contribuições para a aprendizagem dos alunos, além de um conhecimento associado aos distintos – e mais adequados – exemplos para as discussões relacionadas com cada conteúdo abordado, bem como a sequência de abordagem dos temas que ele opta por seguir, no sentido de promover a aprendizagem dos alunos (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT).

Ainda na dimensão do PCK, considera-se o subdomínio do conhecimento especializado do professor associado ao seu conhecimento acerca do currículo para o ensino de matemática, isto é, dos conteúdos matemáticos propriamente ditos a serem ensinados, relacionados com os respectivos níveis de escolaridade mais adequados em que devem ser abordados; o que ele pode esperar dos estudantes – em termos conceituais e procedimentais da matemática – em cada etapa do ensino e o nível de aprofundamento com que deverá abordar cada tópico matemático (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS).

Dos seis subdomínios propostos e descritos no modelo MTSK, o *Knowledge of Topics* (KoT) e o *Knowledge of Structures of Mathematics* (KSM) são os dois que, de forma mais explícita, permitem encarar e explorar o conhecimento do professor com foco nas conexões matemáticas. Isso porque, por um lado, no MTSK as conexões são tratadas dentro de um mesmo tópico e, nesse caso, denominadas por conexões intra-conceituais (CARRILLO et al., 2018), associadas ao KoT. Essas conexões intra-conceituais são evidenciadas a partir das relações que um professor estabelece entre os fundamentos e propriedades matemáticas, nos limites de um conceito ou construto, o que acaba por tornar tal conceito mais imbuído de significado (CARRILLO et al., 2018).

Por exemplo, uma conexão intra-conceitual que está relacionada com um fundamento do tópico de divisão é o conhecimento do professor de que, a depender do contexto em que a operação está envolvida, o divisor pode (ou tem de) ser assumido como: i) a quantidade de subconjuntos entre os quais o dividendo será partilhado ou ii) como unidade de medida com a qual o dividendo será medido. Ou ainda, no âmbito dos tópicos de Medida, considera-se um exemplo desse tipo de conexão o conhecimento do professor de que a congruência entre as naturezas da unidade de medida e do todo a ser medido fundamenta o conhecimento de que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos, em que estes são obtidos por relações de equivalência entre unidade e todo.

Por outro lado, no MTSK as conexões podem ser consideradas entre tópicos distintos, sendo, neste caso, denominadas por conexões interconceituais (CARRILLO et al., 2018), associadas ao KSM. Destaca-se como um exemplo de conteúdo do conhecimento associado a esse tipo de conexão – e aqui, especificamente, uma conexão entre os tópicos do tema de Medida e o de divisão –, o conhecimento de que a natureza contínua da unidade de medida e do todo a ser medido fundamentam a atribuição de significado aos construtos divisor e dividendo enquanto magnitudes, o que implica que, particularmente quando o divisor for expresso por uma quantidade decimal ou fracionária não inteira, a operação de divisão deverá ser interpretada a partir do sentido de medida.

Embora sejam diferentes as interpretações atribuídas às conexões, bem como os modos de concebê-las como dimensões do conhecimento do professor (e/ou incluídas como parte delas), diversos modelos que analisam o conhecimento desse profissional consideram o papel central que as conexões exercem nos contextos de ensino e de aprendizagem da matemática.

De um ponto de vista das aprendizagens dos alunos, a explicitação das conexões matemáticas, a partir de um trabalho intencionalmente focado no estabelecimento de relações entre ideias e conceitos; nas distintas formas de se representar um mesmo conceito, a partir de suas imagens (TALL; VINNER, 1981); e na identificação de similaridades e diferenças entre aspectos associados a cada um dos tópicos matemáticos, são formas de favorecer o desenvolvimento de um conhecimento matemático mais profundo, pois prioriza o pensamento matemático relacional (SKEMP, 1989) associado às estruturas da matemática (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009).

Ao mesmo tempo, do ponto de vista do ensino, é crucial o papel que as conexões representam (devem representar) nas práticas dos professores, seja para o estabelecimento de uma coerência no plano de trabalho e nas diferentes tarefas elaboradas e implementadas pelo professor (TURNER; ROWLAND, 2011), seja na atividade de atribuição de sentido às produções dos alunos (DI MARTINO; MELLONE; RIBEIRO, 2020; JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014) como ponto de partida para ampliar e aprofundar seus o conhecimentos matemáticos. Em termos do conhecimento do professor, as conexões podem ser compreendidas em diferentes perspectivas. Por exemplo, Ball, Thames e Phelps (2008), no modelo MKT, associam as conexões à categoria *Horizon Content of Knowledge* (HCK), quando referem a um conhecimento a partir do qual o professor está consciente de que certos conceitos e procedimentos matemáticos relacionados ao contexto com o qual está trabalhando em um determinado momento terão implicações nas aprendizagens futuras dos alunos, mesmo que tais conceitos e procedimentos não estejam contemplados no currículo do nível de escolaridade daquele momento específico.

Numa tentativa de reconceitualização do *Horizon Content of Knowledge*, Zazkis e Mamolo (2011), associaram as conexões com o conhecimento matemático mais "avançado", considerando aspectos intra e extra matemáticos (de um ponto de vista de uma matemática de nível superior). Jakobsen *et al*. (2013), por sua vez, ao buscarem uma melhor interpretação a respeito do HCK, consideram que as conexões estão associadas ao conhecimento que permite que o professor atribua sentido ao que os alunos estão comunicando, para poder atuar com consciência das conexões entre os diferentes tópicos associados ou não ao currículo escolar.

Para Rowland *et al*. (2005), na perspectiva do KQ, as conexões são consideradas explicitamente como sendo um domínio do conhecimento do professor e estão associadas com as relações que o professor estabelece entre conceitos ou procedimentos, numa perspectiva de dar "coerência" (p. 262) aos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Para Gamboa e Figueiras (2014), as conexões estão associadas "com o caráter inter-relacional da matemática escolar" (p. 339) e têm relação com as redes estruturantes (definições, propriedades, representações) vinculadas a um conceito matemático, que permitem "avançar no conhecimento da estrutura global" (GAMBOA; FIGUEIRAS, 2014, p. 339). A partir da análise da prática de professores dos Anos Iniciais e Anos Finais (o foco era a transição dos alunos entre as etapas), os autores organizaram uma proposta de classificação para as conexões, concluindo que sua tipologia permitia categorizá-las em duas grandes dimensões: conexões intra-matemáticas (aspectos internos relacionados às próprias estruturas abstratas da matemática) e conexões extra-matemáticas (aspectos externos relacionados com o mundo real).

As conexões "extra-matemáticas", referem-se aos aspectos substancialmente distintos daqueles relacionados às atividades da matemática escolar; tipo de discurso diferente do que se utiliza numa aula de matemática; os usos de linguagem e simbologias que diferem daqueles utilizados em outros contextos que envolvem a matemática. Nesta categoria incluem-se as conexões entre os conteúdos matemáticos e as situações da vida cotidiana e conexões entre os conteúdos matemáticos e outras disciplinas do currículo (GAMBOA; FIGUEIRAS, 2014).

Para as conexões denominadas “intra-matemáticas”, os autores categorizam duas dimensões distintas, uma relativa aos processos transversais e outra relativa às conexões conceituais. As conexões relacionadas com os processos transversais estão associadas às relações que se estabelecem entre um conceito matemático e um processo matemático vinculado a todos os conteúdos (por exemplo, classificar ou definir um objeto matemático). Na dimensão das conexões conceituais, estão englobadas as relações que se estabelecem entre “representações, procedimentos ou técnicas associadas a um conceito ou a conceitos diferentes” (GAMBOA; FIGUEIRAS, 2014, p. 342).

Note-se, portanto, que há diveras formas de se encarar as conexões matemáticas no âmbito do ensino e das aprendizagens, e a maior parte dos estudos desenvolvidos a respeito do tema tem um foco específico nos alunos (ver, por exemplo, CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; DOWNTON; SULLIVAN, 2017; JUNG et al., 2013; KENEDI et al., 2019; LEE; WHEELER, 1989; PAYTON, 2019; WEINBERG, 2001; YOUNG-LOVERIDGE; BICKNELL, 2018; ZENGIN, 2019), enquanto que o professor e o seu conhecimento a respeito das conexões tem sido substancialmente menos investigado (ver ASKEW, 2019; BUSINSKAS, 2008; DE GAMBOA et al., 2020; ELI; MOHR-SCHROEDER; LEE, 2011; IZSÁK, 2003; TCHOSHANOV, 2011; TIMMERMAN, 2014). De toda forma, qualquer que seja o foco das investigações, faz-se necessária uma clarificação a respeito do que se entende por “conexão matemática”, no sentido de situar teoricamente, no contexto investigativo, a conceitualização assumida.

Em linhas gerais, pode-se se dizer que as conexões matemáticas são encaradas a partir de três perspectivas: i) como características intrínsecas das matemáticas (acadêmica ou escolar); ii) como uma construção ou elaboração mental dos aprendizes de matemática; e iii) como um processo de estabelecimento de associações a partir da observação e busca por relações entre elementos[30] matemáticos (BUSINSKAS, 2008). A diferença principal entre as formas de encarar as conexões matemáticas em ii) e iii) está na natureza da atividade que permite estabelecer as conexões, qual seja, em ii) trata-se de uma atividade mental que ocorre

[30] Aqui, “elementos” são entendidos de maneira bastante ampla, podendo se referir a conceitos, procedimentos, fundamentos, ideias e noções matemáticas incluídas em contextos matemáticos ou não matemáticos.

em nível cognitivo, num processo de “abstração” (SKEMP, 1989); já em iii) encara-se essa atividade de um ponto de vista mais mecânico, isto é, as conexões são identificadas por meio de um processo deliberado de busca e observação de relações (BOALER, 2002).

Assim, se por um lado uma conexão matemática pode ser entendida como um produto de relações intrínsecas entre elementos, ou seja, de relações que existem em si mesmas[31], independentemente de estarem evidenciadas ou não para um indivíduo, por outro lado, pode-se compreender que uma conexão matemática é um produto de uma relação que um indivíduo estabelece de forma consciente e deliberada (ou não) entre esses elementos, pautado nos seus conhecimentos matemáticos.

Nesse contexto, para que se possa explorar o conhecimento do professor em termos das conexões matemáticas, apenas será necessário compreendê-las e assumi-las como sendo “produtos”, isto é, “objetos mentais” (BUSINSKAS, 2008, p. 17), que podem ser identificados, construídos, lembrados e/ou discutidos.

Além disso, assumimos, por um lado, a classificação dos dois tipos de conexões, as intra-matemáticas e as extra-matemáticas (GAMBOA; FIGUEIRAS, 2014), mas voltaremos nosso foco de atenção às conexões do primeiro tipo, já que nos interessam os aspectos estruturais da matemática (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009), isto é, as relações entre elementos, objetos, conceitos, propriedades etc. internas à própria matemática.

Por outro lado, assumimos que as conexões são componentes do conhecimento especializado do professor (CARRILLO, et al., 2018) e, por isso, as encaramos como parte de uma dimensão (conexões intra-conceituais) ou como toda uma dimensão (conexões interconceituais) desse conhecimento. Entendemos que, nos dois casos, as conexões são produtos das relações que se estabelecem entre diferentes construtos, conceitos, propriedades ou fundamentos dentro de um mesmo tópico e/ou entre diferentes tópicos, a fim de desenvolver o conhecimento dos alunos associado a um entendimento estrutural da Matemática.

---

[31] Embora estejamos conscientes de que essa discussão envolve questões filosóficas, não cabe, no contexto dessa investigação, discutir a natureza da Matemática, tal como um produto de descoberta ou de invenção humanas. Na verdade, para o foco que se considera para o conhecimento do professor, relacionado com as conexões matemáticas, como veremos mais adiante no Capítulo 3, não há implicações, nem do ponto de vista das discussões que fazemos das especificidades do conhecimento do professor, nem em termos das aplicações práticas dos resultados que encontramos com esta investigação, quando assumimos uma perspectiva ou outra a respeito da natureza da Matemática.

Mais especificamente, assumimos que as conexões são produtos de relações entre elementos estruturantes e unificadores no âmbito de cada um dos tópicos, que podem se apresentar com características distintas, mas com propriedades invariantes.

Por exemplo, os conceitos “*algoritmo*”, no contexto da divisão, e “*iteração*”, no contexto dos tópicos de Medida, são considerados estruturantes, porque são responsáveis por ajudar a organizar um conjunto de ideias (matemáticas) presentes em situações que envolvem “procedimentos”, no âmbito desses tópicos. Ao mesmo tempo, embora possuam características bastante peculiares quando encarados exclusivamente nos contextos dos tópicos aos quais estão vinculados, há uma ideia unificadora que nos permite conectá-los: a “*generalização*”. Isto é, a ideia de repetição de um processo, sempre da mesma forma, até que se obtenha um determinado resultado, consitutui a essência dos conceitos “*algoritmo*” e “*iteração*” e, nesse sentido, a “*generalização*” desse processo é a ideia que conecta esses conceitos.

Algo similar ocorre com os pares de construtos “*dividendo* e *todo a ser medido*” e “*divisor* e *unidade de medida*”. Em particular quando a divisão for interpretada com o sentido de medida, ao se analisar as características instrínsecas desses construtos e os papéis que exercem nos contextos dos tópicos aos quais se referem, observa-se, nas fronteiras desses tópicos, uma relação que se pode estabelecer, quando nos apoiamos nas noções de “*comparação*”, “*quantificação*” e “*proporcionalidade*” para sustentar essa conexão.

Nesse sentido, a tipologia de conexões (intra e interconceituais), como proposta pelo MTSK, fornece um ponto de partida para explorar as especificidades e particularidades do conhecimento do professor com foco nas conexões matemáticas. No entanto, essa exploração requer uma abordagem do conhecimento do professor também de um ponto de vista estrutural (VALE; MCANDREW; KRISHNAN, 2011) e a partir de uma perspectiva do “horizonte” (BALL; BASS, 2009).

Dessa maneira, antes mesmo de se explorar quais conexões matemáticas o professor estabelece (ou pode estabelecer), aqui relacionadas com os tópicos de Medida e o de divisão, é necessário explorar o próprio conhecimento matemático especializado do professor no âmbito desses tópicos, a fim de se obter uma espécie de descompactação desse conhecimento (MA, 1999) e evidenciar os elementos estruturantes que permitem identificar as conexões. Essa busca por uma descompactação do conhecimento do professor pressupõe o entendimento de que tal conhecimento está (ou pode ser) organizado em “pacotes” de elementos inter-relacionados, e não em pequenas partes disjuntas que são eventualmente organizadas e sequenciadas especificamente para cada contexto de ensino.

Os “pacotes de conhecimento” que Ma (1999) discutiu ao comparar o que os professores de Matemática na China e nos Estados Unidos conhecem e o modo como mobilizam esse conhecimento nos contextos de ensino, são descritos como agrupamentos de tópicos matemáticos que, segundo os próprios professores chineses que participaram daquele estudo, estão relacionados uns com os outros, tendo sempre como elemento central desses agrupamentos algum tópico que esteja em evidência no momento do ensino. Um dos principais resultados desse estudo mostra que os professores que conseguem conscientemente compor esses “pacotes de conhecimento” são capazes de descrever os elementos que estão neles incluídos e, além disso, são esses professores que “estão mais atentos para a estrutura dessa rede de relações, e do lugar que cada elemento ocupa nela” (MA, 1999, p. 18).

Como nesta pesquisa temos como intuito efetuar uma exploração das especificidades do conhecimento do professor numa perspectiva de descrever esse conhecimento e “descompactá-lo”, compreendemos a necessidade de esclarecer o significado que daremos, a partir daqui, para a noção de “pacotes de conhecimento”, e que se pauta em um refinamento que nos permitimos realizar da noção original de Ma (1999).

De fato, como referido anteriormente, os “pacotes de conhecimento” são originalmente entendidos como o conhecimento de agrupamentos de tópicos matemáticos que se encontram relacionados uns com os outros, e que, nos contextos de ensino, são conscientemente evocados, a depender dos conhecimentos dos professores relativamente a ideias e procedimentos vinculados ao tópico em foco em um determinado momento de ensino.

Entretanto, quando apenas se evidenciam as relações entre os tópicos, sem se destacar os elementos estruturais que permitem afirmar que determinado tópico se relaciona com outro, e o porquê dessas relações, torna-se mais difícil de se explorar as especificidades do conhecimento do professor, em particular, quando se busca evidenciar essas especificades de conhecimento em relação às conexões matemáticas. Mais especificamente, desde uma perspectiva que assume a centralidade do conhecimento do professor para e na sua prática letiva, importa detalhar e descrever quais são os conceitos, fundamentos e propriedades matemáticas associadas a cada um dos tópicos, e como eles estão relacionados uns com os outros.

É assim, portanto, que buscando um refinamento da noção de “pacotes de conhecimento”, articulamos o entendimento original de MA (1999) com a perspectiva teórica que considera as especificidades do conhecimento do professor (CARRILLO et al., 2018), e passamos a assumir que esses “pacotes de conhecimento especializado” são compostos pelas relações que ocorrem (ou devem ocorrer) entre as diferentes constituintes do conteúdo do conhecimento especializado do professor, no âmbito de cada tópico matemático ou entre tópicos distintos.

Nesse sentido, a exploração do conteúdo do conhecimento associado a cada um dos tópicos começa pela organização em subdomínios proposta pela conceitualização do MTSK e, particularmente, pela categorização sugerida para cada um desses subdomínios. Tal categorização permite tornar evidente o tipo (conteúdo) do conhecimento incluído em cada um dos subdomínios dessa conceitualização.

Assim, por exemplo, no subdomínio *Knowledge of Topics* (KoT) são originalmente identificadas quatro categorias[32]: *Definitions, properties and foundations*; *Procedures; Registers of representation*; *Phenomenology and applications*. Já no subdomínio *Knowledge of Structures of Mathematics* (KSM), as categorias incluídas são: *Connections based on simplification*; *Connections based on increased complexity*; *Auxiliary connections*; *Transverse connections*.

As categorias incluídas nos outros quatro subdomínios[33] não serão aqui apresentadas por não serem foco dessa investigação. Entretanto, vale destacar que, no caso de todos os subdomínios, as categorias contribuem para organizar o conteúdo do conhecimento do professor para que se possa melhor detalhar esse conteúdo. Esse detalhamento permitirá caracterizar esse conhecimento especializado do professor, e relacioná-lo com as

[32] Optamos por manter a nomenclatura das categorias em inglês pelos motivos enunciados na nota de rodapé n.º 8.

[33] Originalmente, o KPM era o único subdomínio em que não se propunha qualquer categorização. No entanto, recentemente, em sua tese de doutorado, Delgado-Rebolledo (2020) propôs uma categorização para este subdomínio, ao investigar as especificidades do conhecimento do professor universitário. As categorias propostas pela autora são denominadas, conforme o texto original, por: *Conocimiento de la práctica de demonstrar; Conocimiento de la prática de definir*; *Conocimiento de la práctica de resolver problemas*; e *Conocimiento del papel da lenguaje matemático*.

oportunidades de aprendizagens matemáticas que poderá promover (HIEBERT; GROUWS, 2007).

A seguir, passamos a especificar cada uma das categorias incluídas no KoT e no KSM, apresentando alguns exemplos que clarificam as especificidades do conteúdo do conhecimento do professor que se inclui em cada uma.

As categorias do Knowledge of Topics

Originalmente *Definitions*, *properties and foundations*, foi considerada como uma única categoria, e nela se incluiu o conteúdo do conhecimento do professor relacionado com os conceitos mais elementares da matemática e com a forma como esses conceitos estão organizados em termos hierárquicos e lógicos, no sentido de fundamentar conceitos mais complexos e/ou de caracterizar as definições matemáticas de conceitos. Além disso, associou-se a essa categoria o conhecimento das propriedades matemáticas relacionadas a cada conceito e também das características estruturais dos construtos e dos conceitos relacionados a um mesmo tópico.

No entanto, uma vez que nos propomos a explorar o conteúdo do conhecimento do professor, buscando compreender as especificidades desse conhecimento, verificamos a importância de detalhar as características e os elementos que constituem essas especificidades (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, 2021b). Nesse sentido, ao considerar o conteúdo do conhecimento do professor associado à *Definitions, properties and foundations*, identificamos a possibilidade de ocorrência de confusões a respeito do que corresponderia a um conteúdo do conhecimento relacionado com propriedades ou com fundamentos, por exemplo.

Assim, ao longo desta pesquisa, e já como um dos seus resultados teóricos, optamos por encarar as especificidades do conhecimento do professor relacionadas com as definições, com as propriedades e com os fundamentos, de forma separada (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a), isto é, em categorias distintas, as quais nomeamos *Definitions*, *Properties* e *Foundations*, alinhados com a nomenclatura original do modelo MTSK (CARRILLO et al., 2018). A seguir, passamos a descrever as particularidades do tipo de conhecimento incluído em cada um das seis – e não mais quatro – categorias assumidas no subdomínio KoT.

Definitions

As definições são importantes para apresentar os objetos de uma teoria, capturando a essência dos conceitos ao comunicarem suas propriedades caracterizadoras (MARIOTTI; FISCHBEIN, 1997; ZASLAVSKY; SHIR, 2005), além de evidenciarem os elementos fundamentais para a formação desses conceitos (VINNER, 2002). Com efeito, são as definições que contribuem para a fundamentação das provas e das resoluções de problemas (WEBER, 2002), uma vez que se cria, por meio delas, uma uniformidade das ideias matemáticas mais importantes (ZAZKIS; LEIKIN, 2008). É reconhecida a influência que as definições que um professor conhece exerce nas aprendizagens dos alunos (ZAZKIS; LEIKIN, 2008), porque, apoiado nessas definições, o professor poderá lançar mão de certos recursos para o estabelecimento de correspondência entre a imagem de um conceito e a definição desse conceito (TALL; VINNER, 1981).

Nesse sentido, considera-se como conteúdo do conhecimento do professor as diferentes definições (quando houver mais de uma) para um mesmo conceito e, essencialmente, o seu conhecimento dos elementos constituintes de uma definição para determinado conceito.

Assim, no caso do tópico e divisão, pode-se considerar como exemplo de conteúdo do conhecimento associado à categoria *Definitions* conhecer uma definição para o conceito de de divisão[34]: operação matemática efetuada entre duas quantidades comumente denominadas “dividendo” e “divisor” e, aqui, expressas por por “D” e “d”, respectivamente. Dessa operação, resulta uma terceira quantidade, denominada “quociente”, indicada aqui por “q”, de tal modo que $D = d \times q$.

Já no âmbito dos tópicos do tema de Medida, pode-se considerar como conteúdo incluído nessa categoria conhecer que o conceito de medida se define como a comparação entre magnitudes de uma mesma grandeza, seguida da quantificação de uma delas – unidade de medida – em função da outra – o todo a ser medido – (BERKA, 1983); ou ainda conhecer que a unidade de medida pode ser definida como a magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza.

[34] Note-se que, formalmente, na Teoria dos Números, define-se a divisibilidade entre dois números inteiros e não necessariamente a operação de divisão. Dessa definição, e de outros teoremas, axiomas e propriedades, conceitua-se a operação de divisão entre dois números reais.

Foundations

Os fundamentos matemáticos exercem o papel de conectar conceitos e construtos matemáticos, ou seja, são responsáveis por criar elementos unificadores desses construtos e conceitos, dando forma ao conhecimento matemático.

Como exemplo de conteúdo do conhecimento no tópico de divisão, relacionado a essa categoria, pode-se mencionar o conhecimento da natureza dos construtos divisor e dividendo quando a divisão é interpretada em cada um dos seus dois sentidos (*partilha equitativa* e *medida*): na *partilha equitativa*, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na *medida*, dividendo corresponde ao todo a ser medido e divisor, à unidade de medida. Outro exemplo de conteúdo associado a essa categoria, é o conhecimento de que em uma divisão, o divisor não pode ser nulo (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

No caso dos tópicos de Medida, inclui-se nesta categoria, por exemplo, conhecer: a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição; que os construtos “comparar”, “iterar”, “acumular” e “quantificar” (BERKA, 1983; CLEMENTS; STEPHAN, 2004) são fundamentos da atividade de medida qualquer grandeza; que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza; o papel que as unidades não padronizadas assumem para fundamentar noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas (BARRETT et al., 2011; BRAGG; OUTHRED, 2004); e que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos/ações que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado (CLEMENTS; STEPHAN, 2004).

Properties

As propriedades são “relações entre elementos ou subconjuntos de elementos de um conjunto, que são instanciadas em situações particulares” (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009, p. 10). Naturalmente, pode-se afirmar que a natureza das propriedades matemáticas varia de uma área para outra da disciplina: uma propriedade geométrica não é de mesma natureza de uma propriedade aritmética, por exemplo. Entretanto, o papel que as propriedades exercem no entendimento dos conceitos e construtos matemáticos aos quais estão vinculadas é essecialmente o mesmo: organizar e descrever um conjunto de atributos e características relacionados especificamente a certos objetos ou entes matemáticos, de modo a que fiquem evidentes as relações entre eles. O reconhecimento dessas relações, a capacidade de explicá-las e estabelecer conexões entre elas é o que caracteriza uma disposição para o pensamento estrutural na matemática (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009).

No tópico de divisão, um exemplo de conteúdo incluído nessa categoria é o conhecimento do professor de que, dadas três quantidades, D, d e q, se D for divisível por d e o resultado dessa divisão for q ($D \div d = q$), então D será divisível por q, e o resultado dessa divisão será d ($D \div q = d$); ou de que o dividendo e o quociente são quantidades inversamente proporcionais, quando o divisor for mantido constante. Já no âmbito dos tópicos de Medida, pode-se citar como exemplos de conteúdo de conhecimento das propriedades, conhecer: que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua; que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada; as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10) (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

Procedures

Esta categoria refere-se ao conhecimento do professor sobre o que se faz, como se faz, dos porquês de de empregar determinados procedimentos em cada momento, de quando se pode (ou não) empregar esses procedimentos, além das características dos resultados obtidos após a aplicação de um procedimento. Em termos de exemplos no tópico de divisão, nessa categoria inclui-se o conhecimento do professor dos diferentes procedimentos que se pode empregar para se resolver uma divisão: adições sucessivas do divisor até atingir a quantidade equivalente ao dividendo; subtrações sucessivas do divisor em relação ao dividendo, até chegar em uma quantidade menor que o divisor ou em zero; distribuição de um em um, dois em dois ou quantidades múltiplas de uma determinada quantidade; decomposição da quantidade que representa o dividendo, seguida da divisão pelo divisor, das partes decompostas, com posterior adição das quantidades resultantes de cada um das divisões; algoritmo euclidiano, entre outros procedimentos convencionais ou não convencionais. Tambem se pode incluir nessa categoria o conhecimento da natureza dos resultados de uma divisão, quando esta for interpretada como *partilha equitativa* ou como *medida* (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b).

Já com relação aos tópicos de Medida, nessa categoria, incluem-se como exemplos conhecer: os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza isto é, a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração; que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza; a característica do resultado de uma medição, onde o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido (v = d/u); que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing* (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

Registers of representation

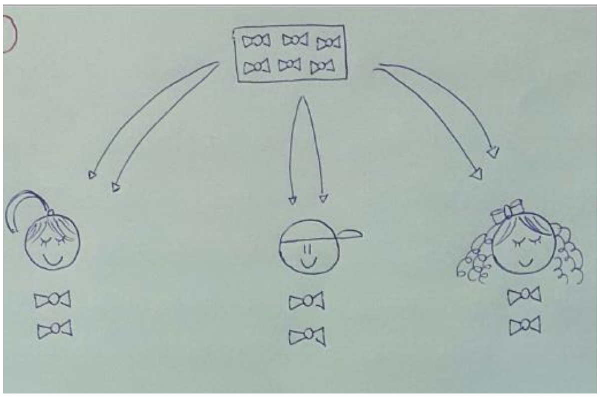
A exteriorização do conhecimento matemático é realizada por meio das distintas formas de se representar os conceitos e definições, os fundamentos, as propriedades e os procedimentos. Essas múltiplas e distintas formas correspondem a registros de representação (AINSWORTH, 2006; PAPE; TCHOSHANOV, 2001) que são do tipo: registros numéricos, pictóricos, gráficos, verbais – em linguagem oral ou escrita. Dessa forma, considera-se nesta categoria o conhecimento do professor dos distintos sistemas representacionais para dar significado a um conceito ou fundamentos que sustentam determinados construtos. Também se considera nessa categoria o conhecimento do professor que possibilita uma navegação frutífera (RIBEIRO, 2011) entre os distintos sistemas representacionais.

Por exemplo, no caso do tópico de divisão, um problema do tipo "*Uma caixa contém 6 bombons para serem dividos igualmente para 3 crianças. Quantos bombons cada criança receberá?*"[35], que evoca o sentido de *partilha equitativa*, só poderá estar associado a uma representação que transmita a ideia de que se está realizando uma distribuição dos seis

[35] Este foi um dos problemas formulados por um grupo de professores durante a coleta das informações. Uma discussão mais aprofundada encontra-se no artigo Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b), apresentado no terceiro capítulo deste trabalho.

bombons entre conjuntos, neste caso, representados por cada uma das três crianças (Figura 3).

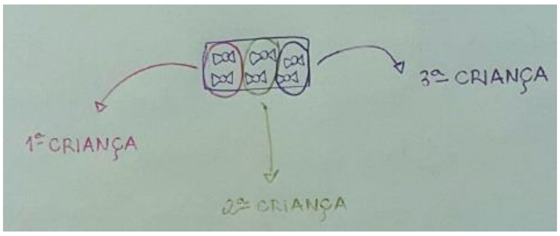
Figura 3 – Exemplo de representação pictórica associada a um problema que evoca o sentido de partilha equitativa da divisão



Fonte: POLICASTRO; RIBEIRO (2019, p. 214)

Ou então, um problema do tipo "*Uma caixa contém 6 bombons para serem divididos igualmente. Cada criança recebrá 2 bombons. Quantas crianças receberão bombons?*"[36], que evoca o sentido de *medida* da divisão, terá de ser associado a uma representação que sugira agrupamentos de dois bombons, em uma caixa contendo seis bombons (Figura 4).

Figura 4 – Exemplo de representação pictórica associada a um problema que evoca o sentido de medida da divisão



Fonte: POLICASTRO; RIBEIRO (2019, p. 214)

Dessa forma, como elementos desta categoria no âmbito do tópico de divisão, inclui-se, por exemplo, conhecer: a relação e a adequação dos tipos de representação pictórica, associadas a cada um dos sentidos da divisão, isto é, na partilha equitativa, indicando distribuição e na medida, indicando agrupamentos; ou do significado atribuído ao símbolo "÷": relaciona-se com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades

---

[36] Este foi outro problema formulado por um dos grupos de professores durante a coleta de informações para a pesquisa. As discussões também se encontram no artigo mencionado na nota acima.

equivalentes, quando a operação for tomada como partilha equitativa; o símbolo "÷" está associado ao estabelecimento de uma relação de comparação entre quantidades (medidas) (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b).

Já no contexto dos tópicos de Medida, inclui-se nessa categoria, por exemplo, conhecer as nomenclaturas adequadas para se referir a cada uma das grandezas, ou ainda, o seu conhecimento acerca das nomenclaturas e simbologias mais adequada para referir às unidades padronizadas ou não padronizadas (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

Phenomenology and applications

Nessa categoria estão considerados os conhecimentos do professor acerca dos fenômenos, contextos e características estruturais de um construto, além de aplicações de conceitos ou problemas para os quais se busca uma resposta (GÓMEZ; CAÑADAS, 2016).

No caso da divisão, considera-se como componente do conhecimento do professor associado a essa categoria os dois sentidos atribuídos à divisão, quais sejam, a *partilha equitativa* e a *medida* e, em termos de aplicações, considera-se o conhecimento dos tipos de problemas em que cada um dos dois sentidos é evocado (POLICASTRO, RIBEIRO, 2021b).

Por sua vez, nos tópicos de Medida, inclui-se nesta categoria o conhecimento da medida enquanto um fenômeno que se interpreta como a comparação de magnitudes de uma mesma grandeza seguida da quantificação de uma dessas magnitudes em função da outra (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

As categorias do Knowledge of Structures of Mathematics

Nesse subdomínio incluem-se os conhecimentos do professor associados às conexões que se pode efetuar entre tópicos distintos. Assim, para detalhar as especificidades do conhecimento associado a este subdomínio, no modelo MTSK, são propostas quatro categorias: *Connections based on simplification*; *Connections based on increased complexity*; *Auxiliary connections*; e *Transverse connections*.

Como os tópicos matemáticos em foco nesta investigação são o de divisão e os do tema de Medida, a seguir, exemplificam-se componentes do conhecimento do professor relacionadas com cada uma das categorias, em termos das conexões matemáticas que podem ocorrer entre esses tópicos.

Connections based on simplification

Nessa categoria, considera-se o conhecimento do professor de que os conceitos mais avançados estão fundamentados e contextualizados a partir de conceitos mais elementares. Assim, por exemplo, no âmbito da divisão, inclui-se o conhecimento do professor de que a operação deverá ser tomada com o sentido de *medida*, quando o divisor for representado por um número racional positivo e não inteiro. O que sustenta esse conhecimento e, portanto, se encontra conectado a ele, é um conteúdo do conhecimento associado aos tópicos de Medida, qual seja, o de que a natureza contínua da unidade de medida e do todo a ser medido fundamentam a atribuição de significado aos construtos divisor e dividendo enquanto magnitudes. Assim, pode-se dizer que esse conhecimento associado aos tópicos de Medida se consitui de elementos mais fundamentais, que dão sustentação à compreensão do construto divisor num contexto da divisão interpretada com o sentido de *medida*.

Ao mesmo tempo, encontra-se outra conexão desse tipo quando se interpreta a divisão como *partilha equitativa*, já que o divisor, neste caso, representa a quantidade de conjuntos entre os quais o todo (dividendo) deve ser partilhado e, justamente por isso, não pode ser expresso por uma quantidade que não seja inteira e positiva. Aqui, o que fundamenta o conhecimento de que a divisão deve ser tomada com o sentido de *partilha equitativa*, é a condição de existência dos conjuntos (sempre em quantidades naturais) entre os quais se partilha o todo.

Note-se que no exemplo da conexão que fundamenta a interpretação da divisão como *medida*, temos uma relação interconceitual, efetuada entre um tópico no tema de Medida e o tópico de divisão. Já no segundo caso, essa relação interconceitual ocorre entre os tópicos de “conjuntos numéricos” e “divisão”.

Connections based on increased complexity

Aqui se considera o conhecimento do professor de que um tópico (conceitos, fundamentos, propriedades etc.) está relacionado com um outro tópico, subsequente, de modo que esse tópico mais elementar é considerado de um ponto de vista mais avançado, numa perspectiva de ser um facilitador para aprendizagens futuras. Assim, pode-se considerar como um exemplo de conhecimento de conexão entre os tópicos do tema de Medida e o de divisão, conhecer as características do resultado de uma medição como fundamentação para dar significado ao valor numérico obtido em uma operação de divisão, particularmente quando esta for interpretada com o sentido de medida, isto é, o quociente é o resultado (numérico) de uma determinada relação quantitativa efetuada entre o dividendo (todo) e o divisor (unidade de medida): quantas vezes o primeiro cabe no segundo.

Auxiliary connections

A categoria contempla o conhecimento do professor acerca de conceitos, fundamentos ou propriedades dentro de um tópico que podem ser utilizados para fundamentar conceitos, procedimentos ou propriedades de outros tópicos, em processos maiores. Como exemplo de conhecimento de uma conexão desse tipo entre os tópicos de Medida e o de divisão, refere-se a conhecer que a iteração, por ser um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado, fundamenta a compreensão do que é, em termos essenciais, um algoritmo.

No caso particular do algoritmo da divisão, em que divisor for uma magnitude, expresso por uma quantidade decimal não nula, ao associar os conhecimentos referidos acima com os conhecimentos de que a unidade de medida pode ser constituída por agrupamentos de unidades (noção de *unitizing*) e de que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplo, pode-se atribuir significado aos procedimentos tradicionalmente efetuados nesse algoritmo (RIBEIRO et al., 2018), em que igualam-se as quantidade de casas decimais do dividendo e do divisor e “eliminam-se” as vírgulas de cada uma das representações numéricas dessas quantidades.

Tranverse connections

Considera-se incluído nesta categoria o conteúdo do conhecimento do professor de tópicos que são distintos, mas que possuem características comuns entre si. Como exemplo de conhecimento de uma conexão desse tipo entre os tópicos de Medida e o de divisão, refere-se a conhecer que os construtos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar", por serem fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza, contribuem para dar significado ao sentido de divisão como medida.

Conforme referimos, a categorização proposta na conceitualização do MTSK, em cada um dos subdomínios, contribui para um melhor entendimento das especificidades e particularidades do conhecimento especializado do professor no âmbito de cada um dos tópicos.

Com efeito, ao se buscar uma descrição dos conteúdos do conhecimento do professor no âmbito de Medidas e de divisão, tomando-se como ponto de partida as categorias dos subdomínios *Knowledge of Topics* (KoT) e *Knowledge of Structures of Mathematics* (KSM), por um lado, torna-se possível identificar o que faz com que esses conhecimentos sejam, ao mesmo tempo, específicos e inter-relacionados. Por outro lado, essas especificidades descritas permitem que se possa articular esses conhecimentos, identificar relações entre eles e, consequentemente, clarificar possíveis conexões matemáticas que o professor realiza (ou pode realizar).

CAPÍTULO 2: CONTEXTO E MÉTODO

Este capítulo destina-se à apresentação da abordagem e dos procedimentos metodológicos empregados no decorrer da investigação, bem como do contexto em que ocorreu a coleta das informações que utilizamos para responder à pergunta de pesquisa.

Nesse sentido, o capítulo estará dividido em quatro grandes seções. A primeira, em que faremos uma apresentação do paradigma investigativo assumido, além das opções e justificativas para a abordagem metodológica que empregamos nessa investigação. Na segunda seção, apresentaremos, em detalhes, o Programa de Formação Continuada, contexto no qual ocorreu a coleta das informações. Na terceira seção, detalhamos os procedimentos de coleta das informações em campo e, na quarta e última seção, apresentamos a abordagem metodológica para o tratamento e análise das informações que nos conduziram à busca pela resposta a nossa pergunta de pesquisa.

Recorde-se, então, que esta investigação está norteada pela seguinte pergunta:

> *Que conhecimento especializado revelam professores participantes de um Programa de Formação Continuada, focada nas especificidades do conhecimento do professor de e que ensina matemática, sobretudo em relação a elementos estruturais e estruturantes da matemática, no âmbito dos tópicos de Medidas e de divisão?*

Além disso, como esta tese está organizada e se apresenta no formato *multipaper híbrido*, outras quatro sub-questões estão vinculadas à pergunta principal, e são elas as norteadoras dos recortes da investigação, alguns deles apresentados nos dois artigos que compõem a tese.

1) *Que elementos caracterizam o conhecimento do tópico de divisão de professores que participam de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento?*

2) *Que conhecimento do conteúdo dos tópicos de Medida revelam professores participantes de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor?*

3) *Que elementos se destacam no conteúdo do conhecimento de professores participantes de um contexto de Formação Continuada, evidenciado pelos descritores desse conhecimento especializado associados aos tópicos do tema de Medida e de divisão?*

4) *Que relações se observam entre o conteúdo do conhecimento especializado de professores participantes de um contexto de Formação Continuada nos tópicos de divisão e no tema de Medidas?*

Todas as informações obtidas para o desenvolvimento desta pesquisa (produções escritas, discussões em grupo; etc.) foram coletadas no contexto de um Progama de Formação Continuada (PFC). Essa coleta foi realizada em duas etapas – dois cursos de formação que formam parte do PFC –, que transcorreram em períodos distintos. A primeira etapa ocorreu em julho de 2018, e a segunda, ocorreu entre os meses de outubro de 2019 e março de 2020. Na primeira etapa, o material coletado se relacionou com o tópico de divisão, e na segunda etapa, o foco incidiu nos tópicos do tema de Medidas.

O PFC corresponde a um curso de Especialização (com duração de dois anos – total de 380 horas), oferecido no formato de módulos (com cinco sessões de 8 horas cada) na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a coordenação do orientador desta pesquisa. Desse programa, participaram de forma itinerante[37] professores que atuam desde a Educação Infantil até o Ensino Superior.

As informações coletadas corresponderam às produções dos professores para as Tarefas para Formação (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021) que foram implementadas nos encontros relacionados com o tópico de divisão e os tópicos do tema de Medida. Denominam-se produções dos professores às manifestações destes (verbais, pictóricas e/ou gestuais), captadas por meio dos registros escritos e pelas gravações em áudio e vídeo dos encontros de formação.

Portanto, a coleta das informações para a investigação foi realizada por meio de gravações de áudio e vídeo e dos registros escritos dos professores para as Tarefas para a Formação, que foram implementadas em cada uma das sessões formativas, ao longo dos dois módulos do curso de Especialização, onde ocorreram as etapas da pesquisa de campo.

As Tarefas para Formação (TpF) que correspondem, portanto, a um dos instrumentos de coleta de informação, e compõem parte de um conjunto de documentos, denominado por Tarefas Formativas – TF (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021), que são

[37] O curso de Especialização em Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP é composto por oito módulos, sendo sete deles relacionados com os tópicos matemáticos considerados mais problemáticos nos contextos do ensino e das aprendizagens dos alunos, e um módulo destinado à produção de um trabalho monográfico. Como cada um dos módulos é oferecido de forma independente, no formato de curso de extensão e, por isso, a quantidade de participantes pode não ser constante de um módulo para o outro.

conceitualizados segundo uma perspectiva particular, desenvolvida no âmbito do grupo Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor de e que ensina Matemática (CIEspMat)[38]. Com efeito, uma TF é um conjunto de três documentos, composto por: (i) uma Tarefa para a Formação de professores; (ii) um Documento do Formador; e (iii) um Documento do Professor. Em (i), estão propostas as questões e problemas relacionados à matemática, seu ensino e sua aprendizagem, que são discutidos com os professores durante a sessão de formação, com objetivos explícitos de acessar e desenvolver o seu conhecimento; em (ii) se apresenta uma discussão detalhada de cada uma dessas questões e problemas que compõem a tarefa para formação, em que se abordam os objetivos formativos e de desenvolvimento do Conhecimento Especializado e Interpretativo[39] dos participantes. Além disso, esse documento contém antecipações de possíveis produções dos professores para cada uma das questões, de modo a que se possa, em certa medida, traçar alguns dos possíveis caminhos a serem percorridos na dinamização das discussões durante a implementação da tarefa. Obviamente que tais caminhos têm sempre como pano de fundo os objetivos formativos delineados para a TpF.

Em (iii), estão sintetizadas e formalizadas todas as discussões matemáticas realizadas ao longo do(s) encontro(s) que corresponderam à dinamização da(s) TpF e que são consideradas centrais no que se refere ao Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor, relacionado com o(s) tópico(s) matemático(s) em foco na(s) tarefa(s). Além disso, inclui-se nesse documento uma discussão que articula esses elementos centrais do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor com a sua prática letiva, sempre buscando relacionar esse trabalho com o que está proposto nos documentos oficiais (BNCC, por exemplo). Ou seja, o Documento do Professor[40] sistematiza toda a discussão que, se espera, seja desenvolvida durante a formação, tendo sempre como foco o conhecimento do professor para o ensino do(s) tópico(s) matemático(s) abordado(s) naquele momento

[38] Para maiores informações sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo, acesse a página www.ciespmat.com.br

[39] Para maiores detalhes, consultar, por exemplo o trabalho de Jakobsen, Ribeiro e Mellone (2014).

[40] Por exemplo, para o módulo de cinco sessões em que se discutiram os tópicos de Medida, os Documentos do Professor foram reunidos em uma discussão articulada e ampliada que está publicada em formato de livro, intitulado ***As Medidas e as especificidades do conhecimento do professor para que os alunos aprendam matemática com significado*** (RIBEIRO; POLICASTRO, 2021).

específico de formação, mas considerando também uma perspectiva mais global da formação e da prática como um todo.

Para a nossa pesquisa, interessam apenas as TpF (i), enquanto instrumentos de coleta das informações no contexto do PFC. De forma mais específica, as informações coletadas no PFC correspondem às produções (registros escritos e comentários orais e gestuais) dos professores obtidas durante as discussões sobre as TpF.

O tratamento do material coletado levou em conta a particularidade de cada tipo de material. No caso dos comentários orais e escritos, obtidos pelas gravações de áudio e de vídeo das sessões de formação, foram realizadas as transcrições na íntegra de todas as discussões captadas em áudio. Posteriormente, essas transcrições foram complementadas a partir da visualização das gravações em vídeo das respectivas sessões. Essa abordagem teve como intuito clarificar algum tipo de comentário, produção ou ação dos professores ou dos formadores que eventualmente não tenham ficados explícitos apenas com a transcrição do áudio. Os registros escritos dos professores, associados à resolução das tarefas, foram digitalizados, não tendo sido necessário efetuar transcrições – mas, posteriormente, para a discussão, efetuamos a transcrição do que se encontra escrito nessas produções para que fique mais claro para o leitor.

A análise do conteúdo emergente das produções[41] dos professores sobre as TpF fundamentou-se no modelo MTSK, uma vez que o nosso foco era explorar e descrever o conteúdo do conhecimento especializado mobilizado e revelado pelos professores. Essa análise integra, obviamente, tanto os aspectos teóricos relacionados com cada um dos tópicos matemáticos em foco (o de divisão e os tópicos do tema de Medida) quanto com o seu ensino e aprendizagem, sempre em uma relação direta com o conteúdo do conhecimento especializado do professor.

A seleção do marco teórico respeitante ao conhecimento do professor se deu, por um lado, por considerarmos as potencialidades do MTSK como uma ferramenta teórico-analítica do conhecimento especializado do professor, ao fornecer um agrupamento por categorias do conteúdo do conhecimento do professor, relacionado a cada um dos subdomínios

[41] A partir de agora, sempre que utilizarmos a expressão "produções dos professores" estaremos nos referindo aos registros escritos e/ou comentários verbais ou gestuais fornecidos pelos participantes.

considerados nessa conceitualização. Esse agrupamento permite uma maior especificação seguida de uma descrição desse conteúdo do conhecimento do professor.

Foi justamente esse processo que nos possibilitou a elicitação de um conjunto de descritores do conhecimento especializado do professor (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, 2021b), relativamente ao subdomínio KoT, no âmbito dos tópicos de Medida e de divisão, na mesma perspectiva que foi realizado o trabalho anterior de, por exemplo, Zakaryan e Ribeiro (2018).

Por outro lado, o modelo MTSK já mostrou ser uma ferramenta potente para analisar o conhecimento do professor em diferentes contextos (ver, por exemplo, CALDATTO et al., 2019; DI BERNARDO et al., 2018; ESCUDERO-AVILA et al., 2015; POLICASTRO et al., 2019). Por isso, a sua escolha como elemento da dimensão teórica considerada na investigação se coaduna com a necessidade de, cada vez mais, também no Brasil, se focar nos objetivos e intencionalidade dos programas de Formação (Inicial e/ou Continuada) que se facultam aos professores de e que ensinam Matemática (CALDATTO; RIBEIRO, 2020). Esses focos se referem essencialmente a levar em conta o conhecimento matemático dos professores para o desenvolvimento de uma prática matemática significativa para a aprendizagem dos alunos.

A seguir, apresentamos em detalhes o paradigma investigativo e as abordagens metodológicas assumidos na investigação. Na sequência, apresentamos o contexto no qual se deu a coleta das informações, bem como os instrumentos e procedimentos envolvidos nessa coleta e nas análises das informações.

O paradigma investigativo e as abordagens metodológicas

Uma investigação no campo da Educação deverá servir não apenas para apontar possíveis falhas nos processos educativos, mas, efetivamente, contribuir para gerar novos conhecimentos e entendimentos válidos e úteis para uma explicitação de novos caminhos que podem ser adotados para melhoria da qualidade dessa educação. Nessa linha, a Educação Matemática pode ser vista como uma ciência do *design*, cuja “missão coletiva” abrange o desenvolvimento, o teste e a revisão de conjecturas elaboradas, com vistas a contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem (COBB, 2007).

Ao mesmo tempo, toda investigação – e, consequentemente, o investigador – está assentada sobre um paradigma que, por sua vez, se trata de um conjunto de entendimentos básicos ou princípios fundamentais que compõem uma rede coerente de compreensões (um panorama) sobre como se dá e se apresenta o mundo (GUBA; LINCOLN, 1994). Os paradigmas investigativos são, segundo Guba e Lincoln (1994), orientados por três questões fundamentais: i) uma questão ontológica, que está relacionada com a forma e com a natureza da realidade observada; ii) uma questão epistemológica, que se relaciona com o modo como se busca conhecer essa realidade, considerando-se, dentro dessa realidade, as relações existentes entre os sujeitos investigadores e os objetos investigados; iii) uma questão metodológica, que tem relação com os procedimentos que serão empregados pelo investigador para compreender algo específico no âmbito dessa realidade. Essas três questões fundamentais estão de tal forma imbricadas que as respostas obtidas para qualquer uma delas, em qualquer ordem, impactará nas respostas que serão obtidas para as demais (GUBA; LINCOLN, 1994).

No contexto dessa investigação, assumimos o paradigma construtivista que, do ponto de vista (i) ontológico, compreende o mundo não a partir de uma realidade dada, pronta ou concluída, mas sim como uma construção social/coletiva e produto de inter-relações entre os indivíduos historicamente situados (GERGEN, 1992). Segundo essa perspectiva, "o processo de compreensão (da realidade) não é automaticamente dirigido por forças da natureza, mas é resultado de ativo e cooperativo empreendimento de indivíduos em relações uns com os outros" (*idem*, p. 267). Alinhados com essa perspectiva ontológica, em termos (ii) epistemológicos, assumimos que as relações entre o investigador e fenômeno investigado estão interativamente estabelecidas, de tal forma que o conhecimento acerca do fenômeno investigado vai se produzindo no decorrer da investigação, num processo contínuo de interpretação e reconstrução de significados (LATORRE; RINCÓN; ARNAL, 1997).

Dadas, portanto, as perspectivas ontológica e epistemológica assumidas, em termos (iii) metodológicos, nos pareceu conveniente adotarmos um conjunto de procedimentos que nos permitissem abstrair entendimentos a partir de aproximações sistemáticas, indutivas e comparativas estabelecidas com as informações coletadas (VOLLSTEDT; REZAT, 2019),de tal modo que neste processo fôssemos capazes de obter elementos para constituição de uma teoria a respeito do fenômeno estudado, qual seja, o conhecimento do professor. Nesse sentido, a *Grounded Theory* (CHARMAZ, 2001; STRAUSS; CORBIN, 1994) se configurou como a nossa opção metodológica para o desenvolvimento da investigação.

Com efeito, os métodos associados ao desenvolvimento de uma investigação conduzida com base na *Grounded Theory* envolvem, em linhas gerais, procedimentos de codificação que são baseados em constante comparação com novas informações que são continuamente coletadas e incluídas no conjunto em análise, como forma de ampliação e refinamento dos entendimentos construídos ao longo do processo investigativo (VOLLSTEDT; REZAT, 2019).

Diante das perspectivas e do paradigma assumidos, é importante ressaltar que concordamos com Bogdan e Biklen (1994) quando esses autores assumem que o pesquisador representa um papel importante nas interpretações realizadas. Isso porque, no processo de desenvolvimento de uma pesquisa, há dois elementos relevantes e que devem ser considerados por parte dos pesquisadores: a sensibilidade teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994), que é resultado de suas experiências em âmbito pessoal e investigativo, e a sensibilidade fenomenológica (GEELAN, 2003), que se refere ao modo como o pesquisador percebe os eventos através das experiências dele e de outros.

Nesse contexto, mesmo que o nosso foco principal fosse o de aceder e melhor compreender alguns dos elementos que constituem o conhecimento do professor, estivemos, no decorrer de toda a investigação, conscientes da impossibilidade de generalização de qualquer ordem, com relação aos resultados obtidos. Isso significa que, ainda que tivéssemos como perspectiva melhor compreender o que alguns professores conhecem, sabíamos que nossa empreitada se limitaria a explorar e descrever, em determinados aspectos, o conteúdo do conhecimento desses professores. Ou seja, estivemos interessados em explorar o que conhecem os professores e, eventualmente, como organizam tal conhecimento, captando, por meio de instrumentos específicos (ver seção ***A coleta de informações no PFC: dos instrumentos e procedimentos***), o conhecimento mobilizado e revelado por esses professores, quando estão inseridos em um contexto formativo. E, nesse sentido, nosso trabalho se concentrou em estabelecer possíveis relações entre o conteúdo de conhecimento especializado identificado, de modo a fornecer hipóteses que poderão ser (re)testadas para desenvolver categorias e teorias locais.

Com isso, concluímos que, dada a natureza do objeto de estudo e da questão de pesquisa, a nossa investigação é do tipo interpretativa envolvendo um estudo de caso instrumental (STAKE, 2005), uma vez que investigamos o conteúdo do conhecimento matemático especializado mobilizado e revelado por professores que atuam desde a

Educação Infantil até o Ensino Superior (o objeto de estudo), em uma experiência peculiar ocorrida em um Programa de Formação Continuada. Assim, a opção por uma abordagem a partir de um estudo de caso instrumental para esta investigação se caracteriza pelo nosso interesse em compreender o objeto de estudo, e não o caso em si, uma vez que nos concentramos nas informações que poderão ser agradas à teoria e pela sua possibilidade de generalização dos entendimentos associados a este objeto de estudo (STAKE, 2005).

Nesse sentido, nosso intuito foi o de produzir formas de abordar esse objeto de estudo (o conhecimento do professor), que nos permitissem conhecer, entender e explicar mais profundamente a temática relacionada com a entidade em estudo (a formação do professor), isto é, conhecer *o como* e *o porquê* das situações específicas (YIN, 1993).

O contexto

O contexto em que as informações foram coletadas refere-se a um Programa de Formação Continuada (PFC)[42] para professores[43] que atuam desde a Educação Infantil até os Anos Finais. Esse PFC é oferecido na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, e consiste em um curso de Especialização com duração de 2 anos (total de 380 horas). A primeira turma deste curso teve início em fevereiro de 2018 e concluiu o programa em março de 2020. O curso se organiza a partir de sete módulos presencias[44] relacionados com o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo[45] e Especializado do Professor de e que Ensina Matemática, e um módulo relacionado com a pesquisa sobre a própria prática. Esses sete módulos versam sobre temáticas variadas, tais como Pensamento Numérico,

---

[42] Da responsabilidade de integrantes do grupo de pesquisa e formação CIEspMat.

[43] No contexto desse trabalho, o gênero dos professores participantes não é considerado por nós como sendo relevante para o foco da investigação ou das discussões efetuadas. Por isso, optamos por nos referir aos participantes da pesquisa sempre pelo pronome pessoal masculino, no singular ou no plural, em concordância com a norma culta vigente da língua no momento da escrita do relatório final da tese.

[44] Em caráter excepcional, a segunda turma do curso, que iniciou em outubro de 2020, foi oferecida no modelo remoto, em virtude das orientações e protocolos de distanciamento social, decorrentes do contexto da pandemia global de COVID-19.

[45] O Conhecimento Interpretativo é outra perspectiva acerca do conhecimento do professor e que está fundamentada na noção de que ao professor cumpre um conhecimento matemático específico que o possibilita atribuir significado às produções e comentários dos alunos. Para saber mais sobre essa perspectiva, consultar, por exemplo os trabalhos de Jakobsen, Ribeiro e Mellone (2014), Ribeiro, Mellone e Jakobsen (2016), Di Martino et al., (2020), Ribeiro et al., (2021).

Frações, Pensamento Algébrico, Pensamento Estatístico, Classificação e Conceitualização em Geometria, Visualização e Medidas.

Cada um dos sete módulos[46] foi oferecido ao longo de cinco encontros presenciais (total de 40 horas), quinzenalmente, aos sábados. Como cada módulo em que realizamos a coleta das informações para esta pesquisa também foi oferecido em caráter de curso de extensão, a quantidade de participantes por encontro variou. No entanto, de maneira frequente, participaram do PFC nove professores, dos quais um já está fora do mercado de trabalho (aposentado), sete atuam desde a Educação Infantil até os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e um atua nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Vale destacar que, no PFC, a pesquisadora desta investigação é também a formadora responsável pela preparação e dinamização de cada um dos encontros nos quais as informações para a pesquisa foram coletadas[47].

Para esta investigação, nos detivemos especificamente em alguns dos encontros relativos a dois dos módulos do curso de Especialização, a saber, o de Pensamento Numérico e o de Medidas. Essa opção se deu pelo fato de que tais encontros contemplaram discussões e trabalhos com os professores relacionados diretamente com os tópicos matemáticos que são foco de estudo desta investigação. No caso do módulo de Pensamento Numérico[48], o material coletado se relacionou com o último encontro (com duração de 8 horas) em que o tópico matemático específico discutido foi o da divisão.

No caso do módulo de Medidas[49], a coleta das informações ocorreu ao longo dos cinco encontros e, para a presente investigação, optamos por apresentar nas nossas análises apenas o material coletado no primeiro encontro. Essa opção se deu, por um lado, pelos objetivos investigativos que foram delineados e que, em termos gerais, se relacionam com descrever e detalhar o conteúdo do conhecimento especializado do professor, relativamente a elementos

[46] Exceto o módulo relacionado com a pesquisa sobre a própria prática, sendo que as horas correspondentes ao cumprimento deste módulo são distribuídas ao longo dos dois anos de curso da Especialização.

[47] Enquanto membro do grupo CIEspMat, a pesquisadora desta investigação participou de outros encontros relacionados com outros temas abordados durante o curso de Especialização, distintos dos que se abordam nesta pesquisa, tendo nestes outros encontros, inclusive, se responsabilizado pela conceitualização das Tarefas Formativas e implementação das Tarefas para Formação.

[48] Período de realização de abril a junho de 2018.

[49] Período de realização de outubro de 2019 a março de 2020.

estruturais e estruturantes do tópico de divisão e dos de Medida. Nesse sentido, as discussões que ocorreram neste primeiro encontro do módulo de Medidas contemplam essas dimensões nas quais nos pretendemos focar para as análises. Entretanto, estamos conscientes de que essas mesmas dimensões emergiram em outros momentos, ao longo de todo o módulo[50]. Assim, o outro motivo que nos levou a optar por focar apenas no material coletado no primeiro encontro se associou a uma limitação de tempo para o processamento das análises e posterior discussão dos resultados.

Nesse contexto do PFC, o material coletado para análise se caracteriza pelas produções dos professores participantes de cada um dos módulos, relativamente às Tarefas de Formação (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021) que são discutidas e resolvidas em cada um dos encontros.

Note-se que, em todos os encontros do PFC, a dinamização do trabalho com os professores e as discussões por e com eles efetuadas, ocorreram em dois momentos bem definidos. Esses momentos merecem destaque nesta contextualização, por se configurarem a partir de formas e etapas de implementação que se alinham com os objetivos formativos delineados para cada encontro e, consequentemente, com os objetivos investigativos traçados para a pesquisa. Um dos momentos se refere à resolução da tarefa pelos professores e o outro momento se refere à discussão plenária efetuada com os formadores[51].

Para resolverem as tarefas, em cada um dos encontros os participantes trabalharam em grupos ou individualmente, a depender de cada um dos momentos e dos objetivos formativos traçados para o encontro.

---

[50] De fato, nossa intenção inicial era a de utilizar as informações coletadas em três dos cinco encontros (encontros I, IV e V, respectivamente). Com o decorrer das análises, fomos entendendo que o conteúdo de conhecimento do professor que era manifestado e revelado não se alterava significativamente tanto em termos das discussões desenvolvidas a partir das propostas de tarefas implementadas quanto em relação aos objetivos investigativos que havíamos delineado. Assim, optamos por nos concentrar exclusivamente no material do encontro I, uma vez que a quantidade de resultados que fomos obtendo a partir desse material foi suficiente para alcançar os nossos objetivos investigativos.

[51] Embora a pesquisadora também seja a formadora nas sessões de formação, pelo tipo de trabalho que se desenvolve no âmbito do grupo CIEspMat, em todos os encontros sempre estão presentes ao menos dois formadores que conhecem a tarefa e estão preparados para discuti-la com os professores participantes. Essa opção por desenvolver as sessões de formação com a presença de mais de um formador se apresenta como uma forma de maximizar a qualidade das discussões e de garantir que o formador responsável se mantenha focado sempre nos objetivos formativos, não tendo que se preocupar com questões técnicas como a captação das imagens e sons das discussões.

Nas próximas seções, passamos a apresentar o percurso metodológico que foi desenvolvido na pesquisa, incluindo os procedimentos de coleta, tratamento e análises das informações obtidas no contexto do PFC e também das informações que passaram a ser consideradas para a abordagem que propomos no processo de teorização das conexões matemáticas que se observam a partir de relações no conteúdo do conhecimento do professor.

O percurso metodológico da pesquisa

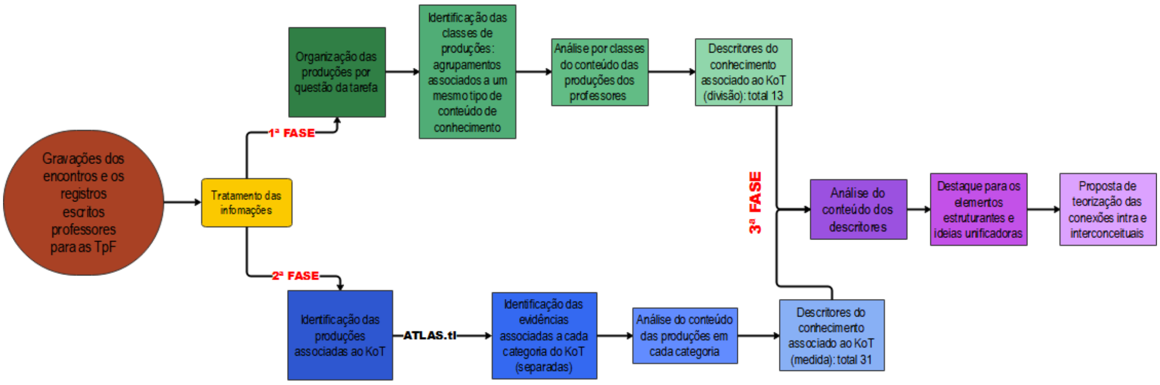
A fonte primária de informações coletadas para a pesquisa corresponde ao material obtido durante os encontros no PFC. Este material corresponde, por sua vez, às produções dos professores captadas a partir das discussões desencadeadas pelas TpF. Como todos os encontros são gravados em áudio e vídeo, o material coletado nesse contexto do PFC corresponde, portanto, ao conjunto de gravações e aos registros escritos dos professores.

Nesse sentido, tanto o material coletado no encontro do módulo de Pensamento Numérico – foco na divisão – quanto o material coletado nos encontros do módulo de Medidas foram tratados de forma idêntica, sendo que as análises de cada material também foi do mesmo tipo, mas houve um aspecto que, no caso do material coletado no módulo de Medidas nos permitiu empregar um processo de análises mais integrado e, por isso, mais refinado. Este aspecto se refere com a inclusão de um *software* de análises qualitativas[52] – o ATLAS.ti – que nos permitiu lidar com o volume de material obtido nesta fase da etapa de pesquisa de campo.

Assim, pode-se dizer que esta pesquisa se constituiu a partir de três fases bem definidas. As duas primeiras, relacionadas com a etapa de pesquisa de campo, onde foram coletadas e devidamente analisdas as informações relacionadas com o PFC. Numa terceira fase da investigação, os conjuntos de resultados das análises das duas primeiras fases – apresentados em forma de descritores do conteúdo do conhecimento do professor – passaram a ser encarados como fonte secundária de informações, nas quais nos baseamos para apresentar a nossa abordagem para a proposta de teorização das conexões matemáticas intra-conceituais e interconceituais.

[52] Mais adiante, esta ferramenta e o seu papel nos procedimentos analíticos serão melhor detalhados.

Figura 5 – Diagrama do percurso metodológico desenvolvimento na pesquisa



Fonte: autora da tese (2021)

O diagrama acima ilustra, portanto, as três fases da pesquisa, possibilitanto compreender, de forma global, esse percurso metodológico desenvolvido.

A partir da próxima seção, passamos a detalhar cada uma dessas fases, organizando essa apresentação a partir das etapas de coleta e tratamento das informações e dos procedimentos analíticos empregues em cada uma das fases.

A coleta de informações no PFC: dos instrumentos e procedimentos

No contexto do PFC, um dos instrumentos de coleta de informações refere-se às TpF. Com efeito, no âmbito do grupo CIEspMat, todas as tarefas para a formação, que formam parte do conjunto de três documentos denominado Tarefas Formativas, são conceitualizadas a partir de uma série de objetivos formativos previamente definidos. Tais objetivos estão, ao mesmo tempo, estreitamente vinculados a algum(ns) objetivo(s) investigativo(s) e a uma pergunta de investigação (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

A Tarefa para a Formação é conceitualizada e implementada com uma intencionalidade concreta e explícita de desenvolver o Conhecimento Especializado e Interpretativo do Professor de Matemática, no âmbito do(s) tópico(s) matemático(s) selecionado(s). No entanto, quando associamos especificamente os seus objetivos formativos a uma investigação ampla[53] – e, consequentemente, a objetivos investigativos –, passamos a encarar a sua conceitualização de forma muito mais direcionada. Esse direcionamento se refere particularmente aos focos que se pretende dar no decorrer da formação, em termos das

[53] Ampla no sentido de que toda TF está associada a (pelo menos) uma questão de investigação, mas que se vincula especificamente ao trabalho a ser desenvolvido nessa TF, e não em uma perspectiva longitudinal.

dimensões que se deseja desenvolver do conhecimento especializado do professor (POLICASTRO et al., 2019; RIBEIRO; CALDATTO; POLICASTRO, 2019).

Naturalmente que a escolha desses focos tem origem na revisão da literatura relacionada com o modo como os alunos interagem com os tópicos matemáticos e sobre suas dificuldades em relação a cada um deles, e aqui, nesta investigação, esse foco recai particularmente no tópico de divisão e nos tópicos de Medida (ver, por exemplo, BARRET et al., 2012; BARRETT et al., 2011; CLEMENTS; SARAMA, 2009; HEUVEL-PANHUIZEN; ELIA, 2011; HULBERT et al., 2017; JORAM; SUBRAHMANYAM; GELMAN, 1998; SMITH; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; TEPPO, 2011; SZILAGYI; CLEMENTS; SARAMA, 2013; WEINBERG, 2001; YOUNG-LOVERIDGE; BICKNELL, 2018). Para além da origem nas interações e dificuldade dos alunos, a escolha do foco é também orientada pelos resultados de pesquisas anteriores relacionadas com o conhecimento do professor no âmbito das temáticas abordadas em cada uma das TpF (ver, por exemplo, BUSINSKAS, 2008; DE GAMBOA et al., 2020; DI BERNARDO et al., 2018; EKDAHL; VENKAT; RUNESSON, 2016; LAMON, 2020; POLICASTRO; RIBEIRO; FIORENTINI, 2019; POLICASTRO et al., 2020; TCHOSHANOV, 2011; ZAKARYAN; RIBEIRO, 2018).

Esse processo de conceitualização da tarefa para a formação contribuiu para ampliar a sensibilidade teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994) da pesquisadora – que, como já referido, nesta investigação, é também a formadora –, porque favorecia a ocorrência de *insights*, deixando-a mais "sintonizada", potenciando a captação de questões, fatos ou eventos relevantes para o desenvolvimento da investigação (CORBIN; STRAUSS, 2014), por exemplo, a partir das produções escritas e comentários dos professores durante as sessões de formação.

Em termos de estrutura, as TpF são conceitualizadas, essencialmente, em duas[54] partes (Parte I e Parte II), respectivamente relacionadas com o Conhecimento Especializado e com o Conhecimento Interpretativo do professor. Além disso, normalmente, inclui-se, na Parte I, uma tarefa para alunos, a qual os professores são convidados a resolver no decorrer da formação. Note-se que, embora os conhecimentos matemáticos mobilizados a partir de uma tarefa para alunos sejam de um nível distinto do conhecimento do professor, quando

[54] Em algumas tarefas específicas consideram-se três partes onde a Parte Inicial das discussões prévias busca contribuir para discutir o entendimento inicial dos participantes relativamente ao tópico que se aborda na tarefa.

uma tarefa é conceitualizada para formação com o intuito de desenvolver esse conhecimento, assumimos, na perspectiva do MTSK, que todo o conhecimento é especializado, o que nos leva a ter que considerar todos os níveis de profundidade no qual tal conhecimento é (pode ser) mobilizado. Ao mesmo tempo, em termos da dimensão pedagógica, envolver os professores, no contexto formativo, em discussões a partir de uma tarefa para alunos, favorece o desenvolvimento de seu conhecimento pedagógico especializado.

Com efeito, uma vez conceitualizadas as TpF, o trabalho em campo também possui especificidades e particularidades que devem ser explicitadas no contexto desta investigação.

Assim, algo que também foi comum para qualquer momento do trabalho de campo, refere-se à maneira como as informações foram coletadas. Nesse sentido, durante as sessões de formação, as interações dos professores foram gravadas em áudio e vídeo, considerando os recursos tecnológicos disponíveis na ocasião dos encontros[55]. Quando da organização dos professores em grupo (com no máximo quatro integrantes), sempre que possível, essa captação foi realizada com um gravador disposto sobre a mesa de cada agrupamento de professores. Além disso, sempre que possível, uma câmera também era posicionada com foco em cada um dos grupos, de modo a captar as ações de cada integrante do grupo.

Com intuito de captar o cenário global da sessão de formação, sempre que possível, uma câmera permaneceu posicionada de forma fixa, em um local mais afastado dos grupos, focando essencialmente a prática do formador, mas de tal forma que permitia captar, também, as ações e comentários dos professores durante as discussões plenárias. Além disso, um gravador também era posicionado de forma fixa no centro da sala em que ocorria o encontro, de modo a captar as discussões no âmbito geral.

Essa opção por captar em imagem os microcenários, isto é, o que ocorria em cada um dos grupos de professores, se deu com o intuito de minimizar as perdas de comunicações não verbais que pudessem interessar para o conjunto de evidências de conhecimento especializado revelado por cada um dos professores. Isso contribuiu significativamente, durante as análises das informações, no processo de descrição com maior refinamento do conteúdo desse conhecimento manifestado.

[55] Uma vez que os recursos tecnológicos utilizados para a captação das imagens e áudios eram compartilhados entre dois grupos de pesquisa (CIEspMat e PRAPEM), por conta das agendas de trabalho desses dois grupos, a quantidade de câmeras e gravadores disponíveis em cada encontro variou, o que teve implicações na quantidade e na qualidade do material coletado em cada encontro.

Ao optarmos pelo posicionamento de uma câmera com foco no macro cenário, tínhamos por objetivo obter uma mais ampla visão do que ocorria durante a sessão de formação. Essa visão contribuiu para complementar as evidências de conteúdo do conhecimento revelado pelos professores, em forma de comentário verbal e/ou gestual, particularmente durante a discussão plenária, mas também quando os professores eram convocados a trabalhar individualmente sobre a tarefa.

Com relação à identificação dos professores participantes da pesquisa, optamos por não identificá-los pelos seus nomes próprios, e sim a partir de um pseudônimo com a nomenclatura “Pn”, em que “n” é uma numeração atribuída em ordem crescente e que atende exclusivamente ao seguinte critério: primeira manifestação desse participante no primeiro encontro do módulo de Medidas. E, no caso de o participante ter estado presente apenas no encontro com foco na divisão, a numeração atribuída seguiu a sequência iniciada no encontro de Medida. Embora os encontros do módulo de Medidas tenham ocorrido após o encontro com foco na divisão, adotamos esse critério para identificação dos professores porque a quantidade de participantes do primeiro encontro no módulo de Medidas (17) foi substancialmente maior do que no encontro com foco na divisão (9). Assim, os participantes desses encontros, separados segundo a sua atuação profissional, correspondem a: atuantes na Educação Infantil – P1, P17 e P18; nos Anos Iniciais: P2, P3, P4, P6, P8, P9, P11, P13, P19 e P20; nos Anos Finais: P5, P7 e P14; atuante no Ensino Médio e Superior: P10; fora do mercado de trabalho – P15; estudantes de Pedagogia – P12 e P16.

A partir desse ponto, para que se entenda melhor as especificidades de cada momento da coleta de informações, nas próximas duas seções apresentamos detalhadamente a sessão de formação do tópico de divisão e a primeira sessão de formação dedicada ao tema de Medidas.

A sessão de formação do tópico de divisão

Esta sessão de formação fez parte do primeiro módulo do PFC no âmbito do Pensamento Numérico e o encontro em que se discutiu especificamente o tópico de divisão durou oito horas e ocorreu na última sessão formativa do módulo, em julho de 2018. Nas quatro sessões anteriores, as discussões centraram-se no conhecimento do professor associado aos tópicos de adição, subtração e multiplicação. Esses encontros que antecederam a sessão de divisão, tiveram como focos principais desenvolver o conhecimento especializado do professor associado: aos distintos sentidos de cada uma das operações; à formulação de problemas para evocar cada um dos sentidos; às distintas formas de representação que se podem associar à resolução de problemas e que contribuem para dar significado ao sentido evocado para a operação; à modelação das operações com o uso de recursos didáticos (como ábaco e material dourado); aos algoritmos (convencional e não convencional) e algumas propriedades matemáticas intrínsecas a eles.

No encontro em que se discutiu a divisão, estiveram presentes nove professores que trabalharam, durante a resolução da tarefa, em grupos de três integrantes: Grupo 1 – um professor dos Anos Finais (P14) e dois dos Anos Iniciais (P11 e P20); Grupo 2 – três professores dos Anos Iniciais (P3, P4 e P8); e Grupo 3 – um professor da Educação Infantil (P18) e dois dos Anos Iniciais (P19 e P2).

A TpF conceitualizada para esse encontro seguiu a estrutura habitual das tarefas formuladas e implementadas no âmbito do grupo CIEspMat (ver por exemplo, POLICASTRO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2017; RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021). A tarefa específica implementada no encontro continha sete questões, incluídas na Parte I, e o foco específico desta parte era o Conhecimento Especializado do professor – Figura 6.

Figura 6 – Tarefa implementada no encontro do tópico de divisão

Divisão – Sentidos, representações, modelação e algoritmos: conexões

PARTE I

1. *O que é dividir*? Responda por você mesmo, enquanto professor(a) que ensina matemática e sem considerar um contexto escolar.
2. Imagine agora que você está no intervalo da aula na escola e um aluno lhe pergunta: "*O que é dividir?*" O que você responderia se esse aluno...
    a. Fosse do 2º ano dos Anos Iniciais?
    b. Fosse do 6º ano dos Anos Finais?
3. Por que é comum afirmar que a divisão é a operação inversa da multiplicação?
4. Considere a expressão 6÷3 para responder as questões a seguir:

a. Determine o resultado dessa operação e descreva os procedimentos e passos realizados para encontrar a resposta.
b. Indique em que ano escolar você considera ser mais adequado começar a explorar a(s) ideia(s) de divisão?
c. Suponha que você queira explorar com os seus alunos do 3º ano o que é dividir e necessite preparar uma tarefa introdutória para este tópico matemático. Qual seria a tarefa que você iria propor e por quê? (Justifique sua resposta considerando os objetivos matemáticos a serem perseguidos com essa tarefa, bem como os recursos que iria utilizar). Aqui você deverá gravar um vídeo mostrando a exploração que faria com os alunos. Vocês poderão encenar a situação no grupo, de modo a que um dos integrantes represente o papel de professor e os demais, o papel de aluno. É importante, portanto, que os dois papeis sejam representados de forma mais próxima à realidade, ou seja, por meio de diálogos que efetivamente poderiam ocorrer numa sala de aula do 3º ano.
d. Na escola da professora Renata os professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais estão reunidos para traçar um percurso de ensino que considere a matemática numa perspectiva longitudinal. A professora Andrea, que trabalha com alunos de 5 anos, quer discutir a divisão com as crianças, mas deseja abordar esse tópico de forma diferente daquela que os colegas do 3º ano disseram que iriam fazer – como partilha equitativa –, pautados pela BNCC.
    i. Será possível a professora Andrea conseguir discutir com os seus alunos de 5 anos esse tópico matemático, de modo a que as crianças comecem a compreender o que é dividir? Se for possível, proponha uma tarefa com a qual a professora possa fazer essa discussão. Se não for possível, justifique por quê.
    ii. Qual(quais) seria(m) a(s) principal(ais) ideia(s) sobre divisão que poderia(m) ser explorada(s) com crianças de 5 anos, de modo a que se possa criar bases para que estes alunos entendam o que é dividir?
e. Formule 2 problemas distintos para os quais a resolução implique em efetuar a operação indicada.
f. Resolva cada um dos problemas que formulou anteriormente apresentando, sempre que possível, duas representações distintas que permita atribuir significado à resposta e entender o processo/raciocínio seguido.
g. Como considera que um aluno do 2º ano resolveria cada um dos problemas formulados no item anterior? (Descreva os procedimentos e passos que esse aluno utilizaria para efetuar essa operação)

5. Resolva por si mesmo(a) (enquanto professor/a) as operações a seguir de DUAS formas **distintas**, descrevendo e justificando, em cada caso, o passo-a-passo do(s) procedimento(s) utilizados. Vocês devem gravar um vídeo para cada uma das resoluções, de modo a que os procedimentos e etapas de cada resolução sejam explicitadas (e verbalizadas).
    a. 536÷4=
    b. 536÷3,2=
    c. 0,536÷4=
    d. 258÷4=
    e. 11,9÷3,4=
6. Considerando as operações da questão 5, estabeleça uma ordem de dificuldade (a sua) para resolver. Apresente argumentos para justificar porque classificou as questões de acordo com essa ordem.

Muito fácil: Justificativa:
Fácil: Justificativa:
Médio: Justificativa:
Difícil: Justificativa:
Muito difícil: Justificativa:

7. Ainda em relação às operações da questão 5, qual ou quais delas você considera que um aluno do 5º ano teria mais dificuldades para resolver? Por quê?

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Já a Parte II focava-se em aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor a partir da discussão de produções de alunos relacionadas com os subitens de uma das questões da Parte I (a quinta questão) – aqui não vamos nos deter a essa Parte II, por não ser foco dessa pesquisa.

Portanto, aqui vamos nos concentrar somente nas discussões ocorridas durante a dinamização da Parte I. Essa dinamização, que incluiu a resolução e discussão das questões que compunham a Parte I da TpF, foi realizada em duas etapas. Na primeira, com duração de 3 horas e 30 minutos, os professores, em trios, resolveram as sete questões da Parte I da tarefa. Posteriormente foi efetuada uma discussão plenária considerando as produções e raciocínios dos grupos.

Essa etapa inicial de resolução da tarefa foi estruturada de modo a que as três primeiras questões foram distribuídas entre os professores, uma na sequência da outra. Assim, uma questão só era entregue ao grupo após a discussão da questão anterior ter sido encerrada e os professores terem realizado seus registros na folha de respostas do grupo. Ao concluírem as discussões e registros associados às primeiras três questões, os grupos foram convocados a resolver a quarta questão, também um item por vez. Cada item era projetado em um diapositivo e o mesmo procedimento de discussão seguida de registro escrito do grupo era solicitado. Após terem concluído as discussões da questão quatro e realizado os registros escritos, os trios receberam as três questões que encerravam a Parte I da tarefa.

A opção por essa forma de propor a dinâmica de resoluções, discussões e registros dos grupos foi tomada tendo em vista que os tipos de questões incluídas na Parte I da TpF poderiam influenciar no conhecimento mobilizado dos professores (e revelado), caso estes se detivessem na leitura de todas as questões, antes de refletirem e discutirem cada uma em particular.

Neste encontro, estavam dinamizando as discussões duas formadoras, sendo que uma delas é a autora dessa pesquisa. Durante todo o período em que os professores se dedicaram à resolução da Parte I da tarefa, as duas formadoras circularam entre os grupos fazendo, em determinados momentos, intervenções já com foco no desenvolvimento do conhecimento especializado dos professores, mas sem fornecerem as respostas às questões da tarefa.

Na segunda etapa da dinamização das discussões relacionadas com a Parte I da tarefa, foi realizada a discussão plenária. Essa etapa teve duração de 1 hora e 45 minutos e, ao longo desse período a formadora, que é a autora dessa pesquisa, desenvolveu uma discussão articulada das sete questões da Parte I da tarefa. Essa discussão não seguiu a estrutura linear, segundo a qual as sete questões estavam propostas na primeira parte da TpF, mas teve como elementos geradores a busca pela articulação dos objetivos formativos (ver **Quadro 1**) associados a tarefa para a formação.

Quadro 1 - Objetivos formativos delineados para a tarefa de divisão

i. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado aos dois sentidos da divisão: como partilha, e como medida;
ii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do papel da formulação de problemas em contextos de divisão;
iii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor das formas de efetuar a divisão recorrendo a outras operações – fazendo uso dos seus “efetivos” sentidos: como subtração sucessiva da mesma quantidade; como adições sucessivas de uma mesma quantidade;
iv. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado ao nível conceitual e procedimental esperado dos alunos em relação a divisão em etapas educativas distintas;
v. Desenvolver o conhecimento especializado do professor das relações entre as formas de representação e os sentidos das operações associadas – adição, como acrescentar; subtração como retirar; multiplicação como configuração retangular;
vi. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado as potencialidades de cada um dos recursos (tampinhas, material dourado e ábaco) para representação e atribuição de sentido para divisão;
vii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor das formas de representar uma divisão, por meio de desenhos ou cálculos, envolvendo outras operações (como adição e subtração);
viii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do algoritmo e suas (im)possíveis modelações com recursos como ábaco e material dourado;
ix. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado ao papel da unidade de medida, quando a divisão for entendida com este sentido, a fim de “abrir portas” para a discussão da divisão entre unidades múltiplas e submúltiplas de uma mesma grandeza e também para a divisão de frações.

Fonte: autora da tese (2018)

Esses objetivos formativos estão associados exclusivamente ao primeiro objetivo específico dessa pesquisa, ou seja, buscam formas de “*Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) no âmbito da divisão, mobilizado e revelado por professores quando discutem Tarefas para a Formação*”. Justamente por isso, cada uma das questões incluídas na tarefa para formação se associava, em termos do objetivo investigativo a ser perseguido, a conteúdos específicos do Conhecimento Especializado do professor, segundo a conceitualização do MTSK.

Com efeito, a primeira questão estava vinculada ao primeiro objetivo formativo (i), que se relacionava com os dois sentidos atribuídos à divisão. A segunda e terceira questões foram formuladas em correspondência aos objetivos formativos (ii), (iii) e (iv), que se relacionavam com o papel da formulação de problemas em contextos de divisão, os procedimentos de resolução para uma operação de divisão e o nível conceitual e procedimental esperado dos alunos em relação à divisão em etapas educativas distintas.

A quarta questão que estava composta por sete subitens, se associava aos objetivos relacionados com (i) os dois sentidos da operação, (ii) a formulação de problemas, (iii) os procedimentos de resolução da operação, (iv) o nível de desenvolvimento procedimental e conceitual dos alunos, (v) as relações entre representações e sentidos da divisão, (vi) o uso de recursos, (vii) os tipos distintos de representação de uma divisão, (viii) o(s) algoritmo(s) da divisão e as (im)possibilidades de se modelar a operação com ábaco e material dourado e (ix) o papel da unidade de medida quando a divisão for tomada com esse sentido.

Note-se que os primeiros quatro objetivos formativos foram retomados nessa quarta questão, por um lado, para garantir, em termos formativos, que o conteúdo do conhecimento especializado do professor a que se referiam fossem devidamente desenvolvidos durante a sessão de formação. Por outro lado, em termos do objetivo investigativo, para que os professores pudessem mobilizar seu conhecimento especializado a partir de diferentes pontos de partida. Dessa forma, entendemos que ficariam ampliadas as possibilidades de que os professores manifestassem tais conhecimentos, tanto por meio dos registros escritos, quanto a partir de comentários efetuados enquanto resolviam e discutiam as questões da tarefa.

A quinta questão se associava com os objetivos (i) dos sentidos, (iii) dos procedimentos de resolução da operação, (v) das relações entre representações e sentidos da divisão, (vi) do uso de recursos, (vii) dos tipos distintos de representação de uma divisão e (viii) o(s) algoritmo(s) da divisão e as (im)possibilidades de se modelar a operação com ábaco e material dourado.

Como foi o caso da quarta questão, a quinta questão também retomava alguns dos objetivos formativos já perseguidos por outras questões, mas nesse caso, a intencionalidade formativa estava relacionada com a forma como as discussões seriam encaminhadas com os professores, particularmente no momento da plenária.

A sexta e sétima questões estavam associadas também aos objetivos formativos (iii) dos procedimentos de resolução da operação, (v) das relações entre representações e sentidos da divisão, (vii) dos tipos distintos de representação de uma divisão, (viii) o(s) algoritmo(s) da divisão e as (im)possibilidades de se modelar a operação com ábaco e material dourado e (ix) do papel da unidade de medida quando a divisão for tomada com esse sentido, o que, mais uma vez, se relaciona com a busca pela ampliação das possibilidades de captação dos conhecimentos especializados dos professores mobilizados com relação ao tópico da divisão.

Como referido anteriormente, os objetivos delineados para a formação estavam alinhados ao primeiro objetivo específico da nossa pesquisa. Por isso, para a TpF intitulada “Divisão – Sentidos, representações, modelação e algoritmo: conexões”, foram associadas duas questões investigativas, correspondentes, respectivamente, às sub-questões 1 e 3 da pesquisa: 1) *Que elementos caracterizam o conhecimento do tópico de divisão de professores que participam de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor?;* e 3) *Que elementos se destacam no conteúdo do conhecimento de professores participantes de um contexto de Formação Continuada, evidenciado pelos descritores desse conhecimento especializado associado aos tópicos do tema de Medida e de divisão?*

A primeira subquestão norteou a análise das informações coletadas a partir das produções dos professores para a resolução da tarefa, bem como dos comentários realizados na discussão em grupos e na plenária, relacionados com a Parte I da tarefa. Esse trabalho resultou no artigo 1 dessa pesquisa, intitulado ***Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão*** (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b). A outra subquestão norteou as análises dos resultados dos dois artigos que compuseram a tese, e as discussões a esse respeito estão apresentadas no Capítulo 3.

A sessão de formação dos tópicos de Medidas

Os cinco encontros do módulo relacionado com o tema de Medida, no PFC, estiveram orientados a partir de um conjunto de objetivos formativos que foram sistematicamente retomados no processo de conceitualização das TpF que desencadearam as discussões em cada sessão. Ao todo, três tarefas para a formação foram conceitualizadas e implementadas no módulo, mas nesta investigação, vamos focar em apenas uma delas.

Nesse sentido, os objetivos formativos (ver

Quadro 2) delineados para o encontro o qual nos focamos nessa pesquisa estiveram alinhados com o segundo objetivo da investigação, qual seja, "*Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) relacionados ao tema de Medida, mobilizados e revelados por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação*".

Quadro 2 – Objetivos formativos delineados para o módulo de Medidas

i. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado aos princípios que sustentam a atividade de medir;
ii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado aos distintos tipos de grandezas[56]
iii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor relacionado com a noção do que significa “medir” cada um desses tipos de grandeza – foco nos procedimentos e nos instrumentos de medição;
iv. Desenvolver o conhecimento especializado do professor relacionado com o papel das unidades de medida e dos procedimentos padronizados e não padronizados de medição na conceitualização de grandezas, e nas ideias de múltiplos e submúltiplos de unidades de medida;
v. Desenvolver o conhecimento especializado do professor acerca dos papéis da unidade de medida e do todo a ser medido – relações entre esses dois elementos – e estabelecer conexões com o tópico de divisão;
vi. Desenvolver o conhecimento especializado do professor acerca dos conceitos de múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida e para estabelecer conexões com outros tópicos como múltiplos e divisores de um número;
vii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado aos três pilares (unidade, grandeza e quantidade) que sustentam um dos construtos que fundamentam a atividade de medir, qual seja, o de comparação;
viii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado a como um foco nas conexões entre esses três pilares sustenta o desenvolvimento do conhecimento de conceitos como equivalência (e o papel do símbolo “=”) e proporcionalidade, por exemplo.
ix. Desenvolver o conhecimento especializado do professor associado aos níveis conceituais e procedimentais dos alunos em determinadas etapas educativas, com relação aos fundamentos da atividade de medir
x. Desenvolver o conhecimento especializado do professor dos conceitos de área e perímetro;
xi. Desenvolver o conhecimento especializado do professor acerca da conservação da área (duas figuras de formas diferentes podem ter a mesma área) e da não conservação do perímetro;
xii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor com relação a não linearidade da relação entre as medidas dos lados de um polígono e suas áreas (se dobro os lados, a área quadruplica);
xiii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do papel de cada um dos elementos em uma divisão quando esta deve ser entendida com o sentido de medida – o todo (dividendo), a unidade (divisor) e a quantidade de vezes que a unidade cabe no todo (quociente);
xiv. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do tipo de contexto que se deve criar para evocar o sentido de medida.
xv. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do papel e os tipos mais adequados das representações pictóricas para atribuição de significado ao sentido de medida.
xvi. Desenvolver o conhecimento especializado do professor da distinção entre a noção de uma fração como medida e uma divisão de frações (na divisão entre frações, o sentido da medida está relacionado com a divisão e não com as frações, uma vez que estas são tomadas como parte de um todo – o mesmo todo).
xvii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor dos papéis que o dividendo, o divisor e o quociente assumem em uma operação de divisão envolvendo frações e das conexões que se pode estabelecer entre cada um desses construtos em correspondência com alguns dos fundamentos das medidas.
xviii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor do significado do procedimento (algoritmo) habitualmente efetuado para a divisão entre frações a/b : c/d = a/b x d/c.
xix. Desenvolver o conhecimento especializado do professor a respeito das formas como se pode modelar uma operação de divisão entre frações para atribuição de significado ao algoritmo.

[56] Particularmente, comprimento, área, capacidade, volume e massa, pois são algumas das grandezas abordadas pela Base Nacional Comum Curricular dos Anos Iniciais.

xx. Desenvolver o conhecimento especializado do professor relacionado com o papel que cada um dos elementos envolvidos na operação de divisão entre frações assume numa modelação dessa operação com materiais manipuláveis. xxi. Desenvolver o conhecimento especializado do professor das conexões entre os contextos que envolvem medida e as operações de divisão (particularmente, divisões do tipo $1:\frac{1}{2}$; $1:\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$; e $\frac{1}{4}:\frac{1}{16}$) xxii. Desenvolver o conhecimento especializado do professor dos tipos de recursos e materiais manipuláveis que favorecem as discussões matemáticas com foco nessas conexões

Fonte: autora da tese (2019)

Como ocorreu em todos os módulos do PFC, cada encontro relacionado com os tópicos de Medida foi desenvolvido em sessões com oito horas de duração. Como referido anteriormente, a participação dos professores em cada módulo podia variar por conta do tipo de oferecimento do curso (como módulo da Especialização e como curso de Extensão, simultaneamente), e por isso, no caso do módulo de Medidas, contou-se com a participação efetiva de 12 professores, que atuavam desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. Desses 12 professores, 10 eram matriculados no curso de Especialização, tendo esses, portanto, frequentado os módulos anteriores ao de Medidas.

À exceção dos demais encontros do curso, no primeiro encontro do módulo de Medidas, que será foco nesta investigação, a sessão de formação também foi ofertada no formato de *workshop* e, por isso, puderam se inscrever e participar professores e profissionais que atuam na área da educação, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior, além de estudantes da graduação, o que levou a que a quantidade de participantes fosse, exclusivamente neste encontro, equivalente a 17.

Nesse encontro, os professores foram convidados a refletir sobre a TPF intitulada **A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos** e, para isso, os 17 participantes da sessão foram organizados em quatro grupos: Grupo 1 – três professores atuantes nos Anos Iniciais (P3, P4 e P11) e um estudante de pedagogia (P13); Grupo 2 – quatro professores atuantes nos Anos Iniciais (P2, P8, P9 e P17) e um professor atuante no Ensino Médio e Superior (P10); Grupo 3 – um professor atuante na Educação Infantil (P1); dois professores atuantes nos Anos Finais (P5 e P7) e um estudante de pedagogia (P16); Grupo 4 – um professor atuante na Educação Infantil e Anos Iniciais (P6), um professor atuante nos Anos Iniciais (P13), um professor atuante nos Anos Finais (P14) e um professor que não atua mais no mercado de trabalho (P15).

A tarefa foi conceitualizada contendo somente a Parte I com foco no conhecimento especializado do professor, e estava composta por quatro questões iniciais (questões 1 a 4) –

Figura 7; uma tarefa para alunos (**Tarefa: Rotação por estações – vamos medir?**) – Figura 8; e mais uma questão para os professores (questão 5) vinculada à proposta de tarefa para alunos – Figura 7.

Figura 7 – Primeiras questões da tarefa discutida no encontro I

A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos

Parte I

1) Responda individualmente cada uma das questões a seguir. Para isso, considere que você não está em um contexto escolar, ou seja, você não deverá responder às questões imaginando como faria para ensinar os objetos de conhecimento abordados nessas questões. Portanto, as suas respostas devem apenas revelar aquilo que você conhece sobre esses objetos de conhecimento. Você poderá utilizar palavras, desenhos, esquemas ou qualquer outro tipo de representação para explicitar o seu raciocínio.
   a) O que é medir?
   b) O que se pode medir?
   c) Como efetuamos uma medida?
   d) Com o que podemos medir?

2) Em qual ano/série ou etapa escolar você leciona? Considerando a série/ano ou etapa escolar em que leciona e sendo o foco principal em Medidas, que trabalho(s) você costuma desenvolver com os seus alunos? Apresente algum(ns) exemplo(s). Caso considere que não desenvolve nenhum tipo de trabalho com esse foco, comente os motivos que o(a) levam a não fazê-lo.

3) Quais são os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir?

4) Você considera que existem relações entre os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir e conceitos matemáticos de outros tópicos? Em caso afirmativo, especifique quais. Em caso negativo, explique o porquê.

5) Considera a tarefa "**Rotação por estações – Vamos medir?**", conforme apresentada anteriormente:
   a) Resolva a tarefa por si mesmo, enquanto professor, mas sem considerar que tenha a necessidade de desenvolver essa tarefa com os seus alunos. Isso significa que você deve registrar os seus próprios raciocínios, não se apoiando nas possíveis produções que seus alunos (ou alunos que você imagina) poderiam fornecer.

   b) Que conceitos, fundamentos e propriedades matemáticas considera que podem ser discutidos/abordados com os alunos a partir dessa tarefa? Apresente sua resposta fornecendo exemplos que podem estar baseados em situações da sua prática letiva. Nesse caso, especifique para qual ano/etapa educativa você leciona (ou em qual ano/etapa educativa você está se baseando).

Fonte: arquivo da pesquisa (2019)

Figura 8 – Tarefa para alunos incluída na tarefa para formação

Tarefa 1: Rotação por estações – Vamos medir?

Você está diante de um conjunto de quatro estações de trabalho. Em cada estação, você encontrará uma tira de papel contendo uma instrução. Você deverá seguir as instruções contidas nessa tira de papel, sem trocar qualquer tipo de informação com os seus colegas. Depois de executar o que se pede na tira de papel, você seguirá para a próxima estação, procedendo da mesma forma, até a última estação.

1. Agora que você já finalizou o trajeto pelas estações, solicite a ficha de registro ao(à) professor(a). Preencha a ficha de acordo com as instruções a seguir

Instruções para preenchimento da ficha:
Em cada coluna da ficha você deve explicar o seu raciocínio a partir de uma descrição com o máximo de detalhes que conseguir. Você pode fazê-lo usando esquemas, desenhos, palavras, cálculos,...

2. Sente-se com mais dois colegas e, no trio, comparem e discutam sobre os registros que cada um de vocês efetuou em sua própria ficha.
   a. Quais foram as semelhanças e as diferenças nos registros de cada um? Por que vocês acham que essas semelhanças e essas diferenças ocorreram?
   b. Considerando os procedimentos empregados para medir em cada uma das estações, vocês acham que são semelhantes ou distintos? Especifique as semelhanças (e/ou diferenças) que consideraram.

Considerem a unidade de medida utilizada na estação 1. Vocês acham que é possível efetuar as medições propostas nas estações 2, 3 e 4 utilizando essa unidade de medida? Se sim, expliquem, em cada caso, como fariam essas medições. Caso vocês considerem que não seja possível efetuar essas medições, apresentem justificativas dos porquês consideram tal impossibilidade.

Fonte: arquivo da pesquisa (2019)

A resolução da tarefa ocorreu em duas etapas: na primeira etapa, com duração de duas horas e meia, os professores resolveram e discutiram em grupo as quatro primeiras questões, sendo que uma breve discussão plenária foi realizada antes de passarem à segunda etapa. Na segunda etapa de resolução, que também durou duas horas e meia, os professores foram convidados a resolverem a tarefa para os alunos e também a quinta questão da tarefa de formação. Na última 1,5 hora de encontro, foi realizada uma discussão plenária.

Para resolverem a primeira questão da tarefa, cada subitem foi projetado, um na sequência do outro, para que os professores pudessem refletir e responder, individualmente, em sua folha pessoal de respostas. Um subitem só era projetado quando todos os professores já tivessem refletido e fornecido uma resposta para o subitem anterior. Essa opção se deu por conta dos objetivos formativos que foram delineados para o encontro e que se associam com alguns objetivos investigativos, mas, particularmente, por conta do modo como as questões estavam formuladas e que, se propostas todas de uma só vez, teria impacto no conhecimento mobilizado e revelado pelos profesores.

Depois de resolverem a primeira questão, os professores foram convidados, ainda individualmente, a resolverem as questões 2, 3 e 4, mantendo ainda os registros pessoais. Ao término da resolução das quatro questões por parte de todos os professores, as discussões coletivas, no âmbito de cada grupo, foram iniciadas. Nesse momento, os professores foram orientados a compartilhar suas reflexões e registros pessoais no grupo e buscar um consenso entre os integrantes, acerca das ideias envolvidas em cada uma das questões. Um registro dessas reflexões no grupo também foi solicitado.

A opção por solicitarmos aos professores que efetuassem um registro individual e outro registro coletivo, no âmbito do grupo, se deu pelas experiências pregressas em outros contextos formativos nos quais estivemos envolvidos, onde nossa sensibilidade fenomenológica (GEELAN, 2003) foi sendo desenvolvida, nos permitindo perceber que alguns aspectos relacionados com o conhecimento do professor são manifestados de forma diferente em cada tipo de registro, individual ou coletivo. Nesse sentido, optamos por buscar garantir que uma visão mais ampla e mais profunda do conhecimento manifestado pelos professores fosse captada por meio desses diferentes registros.

Após o término das discussões e dos registros nos grupos relacionados com as quatro primeiras questões da tarefa, deu-se início à discussão plenária que encerrou a primeira etapa do encontro.

Na segunda etapa do encontro, os professores receberam as instruções para a realização da tarefa para alunos (**Tarefa 1: Rotação por estações – Vamos medir?**), iniciando pela questão 1, na qual era solicitado que passassem por quatro estações distintas para efetuar medições, seguindo as instruções contidas em uma tira de papel e usando os materiais disponíveis na estação. As estações de medição estavam organizadas conforme as indicações apresentadas na Figura 9.

Figura 9 – Orientações para a montagem das estações de medição

Tarefa: Rotação por estações – Vamos medir?

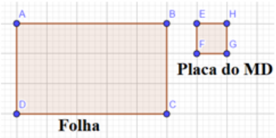
Orientações para o professor: As estações deverão ser montadas sem que os alunos vejam os materiais em cada uma delas. É preferível que haja algum tipo de material (papelão) que possa bloquear a visão dos estudantes do que há em cada uma das estações.

Material para a montagem das estações

Estação 1: um pedaço de barbante (ou qualquer outro material que se assemelhe a um fio) de comprimento "x" e um paralelepípedo com dimensões x/10, x/5 e x/2.

Tira de papel da estação 1: Meça o comprimento do fio usando o paralelepípedo. Registre a sua medição na folha.

Estação 2: Uma placa do material dourado e uma folha cuja área seja equivalente a 5x3 placas (maior superfície da placa)



Tira de papel da estação 2: Meça a folha usando a placa. Registre a sua medição na folha.

Estação 3: Uma balança de pratos (montagem pode ser adaptada com cabide, fios e pratinhos de jardinagem); uma balança digital; uma placa do material dourado e diversos objetos idênticos (em quantidade suficiente para que a massa da placa possa ser comparada com a massa de um desses objetos quando o procedimento for empregado com a balança de pratos)

Tira de papel da estação 3: Meça a massa da placa do material dourado usando os objetos. Registre a sua medição na folha.

Estação 4: Um recipiente qualquer, um copinho (ou qualquer outro recipiente menor que o primeiro) e uma garrafa d'agua cheia. No recipiente, deve haver uma marcação para determinar a quantidade de água a ser depositada no interior – sugestão: a marca no recipiente pode ser a que determina que a quantidade de água a ser depositada corresponde a três unidade do copinho.

Tira de papel da estação 4: Meça a capacidade de água do recipiente até a marca indicada, usando o copinho.

Fonte: arquivo da pesquisa (2019)

Os professores receberam, também, uma comanda individual (**Figura 10**) para efetuar anotações enquanto percorriam as quatro estações e, após efetuarem as medições, receberam uma ficha de registro individual (

Figura 11) para apresentarem suas reflexões a respeito das medições efetuadas.

Figura 10 – Comanda individual entregue aos professores ao transitarem pelas estações de medição

Comanda individual para registro das medições em cada estação

Estação	Medição efetuada
1	
2	
3	
4	

Fonte: arquivo da pesquisa (2019)

Figura 11 – Ficha de registro entregue aos professores após transitarem pelas estações de medição

FICHA DE REGISTRO DA TAREFA "**Rotação por estações – Vamos medir?**"

Nome:____ Data:____/____/____

Estação	O que você mediu?	Como você mediu? (descreva passo-a-passo os procedimentos empregados para efetuar a medição e faça um desenho para representar esse processo)	Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?	Registro da sua medição (o que escreveu na comanda que estava com você durante o trajeto pelas estações)
1					
2					

Fonte: arquivo da pesquisa (2019)

Ao concluírem o percurso pelas estações e todos os registros na ficha individual, os professores deveriam continuar trabalhando na tarefa para alunos, respondendo, em grupo, a questão 2, itens "a", "b" e "c". As reflexões do grupo foram registradas em uma folha. Após concluírem a tarefa para alunos, os professores foram orientados a resolver o item "b" da questão 5 da TpF, desta vez, discutindo somente de forma coletiva, no âmbito do grupo. Ao concluírem todas as discussões e registros, iniciou-se a segunda parte da discussão plenária do encontro.

Com relação aos objetivos investigativos associados a cada uma das questões, temos que a primeira questão da tarefa se relaciona com aceder ao conhecimento especializado do professor relativamente (i) aos princípios que fundamentam a atividade de medir; (ii) aos distintos tipos de grandeza; (iii) aos procedimentos e instrumentos de medição e (iv) ao papel das unidades de medida e procedimentos padronizados ou não padronizados de medição na conceitualização de grandezas e nas ideias de múltiplos e submúltiplos de unidades de medida. Todos esses objetivos se vincularam diretamente com os quatro primeiros objetivos formativos delineados para o módulo de Medidas (cf.

Quadro 2), mas que, para o contexto de formação, se relacionam ao desenvolvimento desse conteúdo do conhecimento especializado do professor.

A questão 2 da tarefa de formação se associa, em termos investigativos, com aceder ao conteúdo do conhecimento do professor em relação aos níveis conceituais e procedimentais dos alunos em determinadas etapas educativas, com relação aos fundamentos da atividade de medir, algo que se vincula com o objetivo formativo indicado por “ix.”, no

Quadro 2. De todo modo, ainda que esse conteúdo do conhecimento especializado do professor se relacione, segundo o MTSK, com a dimensão pedagógica, e, sendo o nosso foco investigativo estritamente associado com a dimensão matemática, não deixamos de considerar, no processo analítico, as produções (comentários e registros escritos) dos professores associadas a essa questão, por verificarmos evidências de conhecimento matemático especializado mobilizado e manifestado em tais produções (ver discussão mais detalhada no artigo 2 da tese intitulado ***Caracterização do Conhecimento Especializado do professor de matemática em tópicos de Medida***).

A questão 3, por sua vez, foi incluída na tarefa por se associar, em termos investigativos, com aceder ao conteúdo do conhecimento do professor relacionado com os (i) princípios que sustentam a atividade de medir; (ii) e (iii) os distintos tipos de grandeza e procedimentos e instrumentos mais adequados que são usados para medição de cada uma, respectivamente; (iv) os papéis das unidades de medida e procedimentos de medição na conceitualização de grandezas e nas ideias de múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida; e (vii) os pilares que sustentam os construtos que fundamentam a atividade de medir.

Já a quarta questão da tarefa foi incluída por se relacionar, no âmbito da investigação, com aceder ao conhecimento do professor relativamente (v) aos papéis das unidades de medida e do todo a ser medido, em conexão com o tópico de divisão; (vi) as conexões das noções de múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida com os tópicos de multiplicação e divisão (particularmente em relação aos conceitos de múltiplos e divisores); e (viii) ao papel que os três pilares (unidade, grandeza e quantidade) possuem na fundamentação de conceitos como equivalência.

Ao incluirmos uma tarefa para alunos na tarefa de formação e solicitarmos que os professores a resolvessem (enquanto professores) – ver questão 5 na **Figura 7** –, tínhamos como intuito retomar os objetivos investigativos acima descritos, mas numa perspectiva de que poder aceder ao conhecimento especializado do professor em um contexto de resolução de problemas, algo que se relaciona com a dimensão matemática de seu conhecimento especializado. Ao mesmo tempo, as propostas incluídas na tarefa para alunos estavam profundamente vinculadas, em particular, com a primeira questão da TpF. Nesse sentido, tínhamos como objetivo ampliar as possibilidades de aceder ao conhecimento do professor, particularmente no que se relaciona com os princípios, fundamentos e procedimentos associados à atividade de medir, uma vez que assumimos como pressuposto que esses são elementos centrais no contextos do ensino e das aprendizagens matemáticas relacionadas aos tópicos de Medida, com foco nas conexões.

O item "b" da quinta questão da TpF, por sua vez, foi incluído nas discussões por possibilitar que acedêssemos ao conhecimento especializado relacionado com as conexões matemáticas que (eventualmente) os professores identificam que podem estabelecer num contexto de ensino com os alunos em determinadas etapas educativas. Nesse sentido, ao mesmo tempo em que poderíamos explorar o conhecimento dos professores acerca das conexões matemáticas que eles próprios mobilizam (e manifestam), poderíamos explorar o seu conhecimento relacionado com as conexões matemáticas que consideram que os alunos podem efetuar.

A TpF "**A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos**", discutida no primeiro encontro do módulo de Medidas, estava associada particularmente com o segundo objetivo específico desta investigação, a saber, "*Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) relacionados ao tema de Medida, mobilizados e revelados por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação*". Nesse sentido, foram associadas duas questões investigativas vinculadas à tarefa e que se relacionam, respectivamente, às subquestões 2 e 3 da pesquisa: 2) *Que conhecimento do conteúdo dos tópicos de Medida revelam professores participantes de um contexto de Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor?* 3) *Que elementos se destacam no conteúdo do conhecimento dos professores participantes de um contexto de Formação Continuada evidenciado pelos descritores desse conhecimento especializado associado aos tópicos de Medida e de divisão?*

A segunda subquestão investigativa foi respondida com as discussões efetuadas no segundo artigo (***Caracterização do Conhecimento Especializado do professor de matemática em tópicos de Medida***) da tese e a terceira subquestão, como dito antes, norteia as discussões articuladas dos resultados dos dois primeiros artigos, que são apresentados no Capítulo 3.

O tratamento das informações e posterior análise

Na seção anterior, foram detalhados, em termos procedimentais e cronológicos, o processo e etapas de coleta das informações para esta investigação. Conforme apresentado, essas duas etapas ocorreram em dois períodos distintos, com um intervalo de um ano e três meses entre eles. Nesse sentido, algumas diferenças ocorreram na forma como foi conduzido o processo analítico do material coletado em cada etapa. Entendemos que essas diferenças foram influenciadas essencialmente por dois fatores.

O primeiro deles – e, no nosso entendimento, o principal – ocorreu pelo desenvolvimento natural (e esperado) da sensibilidade teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994) da pesquisadora, uma vez que o processo contínuo de revisão da literatura, tanto teórica quanto metodológica, lhe permitiu refinar o olhar para aspectos envolvidos no processo de exploração do conhecimento especializado do professor. Em particular, a escrita de artigos, não somente dos que se vincularam a essa tese, mas de outros que estão relacionados com contextos investigativos diversos em que o MTSK é a conceitualização assumida para a exploração do conhecimento do professor, contribuiu significativamente com esse processo de desenvolvimento de sua sensibilidade teórica[57].

O segundo fator que consideramos ter impactado nas diferenças ocorridas no processo de análise se relaciona com a quantidade de informações coletadas em cada uma das etapas. No caso das informações coletas no encontro do módulo de Medidas (segunda etapa da coleta, portanto), essa quantidade de material foi substancialmente maior do que aquela coletada no encontro em que se discutiu o tópico de divisão. Com isso, para que fosse possível efetuar uma análise efetivamente integrada das informações e segundo a perspectiva metodológica que assumimos nesse trabalho, recorremos ao *software* de análises qualitativas ATLAS.ti[58].

Vale destacar, entretanto, que as diferenças a que nos referimos anteriormente se relacionam exclusivamente com o processo analítico do material coletado, sendo que o método utilizado para a coleta de informação e para o tratamento desse material foi idêntico nas duas etapas. A seguir, passamos a descrever os procedimentos de análise do material coletado em cada uma das etapas.

Organização e procedimentos de análise do material da primeira etapa de coleta – a sessão com foco na divisão

[57] Em Di Bernardo et al., (2018) Policastro et al., (2020); Ribeiro et al., (2021) encontram-se alguns exemplos desses artigos que contribuíram para esse refinamento teórico e que discutem o conhecimento de professores ou futuros professores.

[58] www.atlasti.com

Como referido anteriormente, o material coletado no PFC corresponde às produções dos professores para as tarefas exploradas nas sessões de formação. Assim, com relação aos registros escritos dos professores para as tarefas, estes foram inicialmente digitalizados e mantidos em arquivo pela autora da tese. No caso das gravações de áudio[59] das sessões de formação, estas foram transcritas integralmente. Note-se que, no caso das gravações em áudio, optamos por não realizar suas transcrições literais, uma vez que nosso objetivo não era empregar uma análise linguística, mas apenas focada no sentido e significado dos comentários dos participantes. No entanto, nessa transcrição não literal optamos por corrigir questões de adequação linguística. Assim, ao longo das transcrições, as expressões verbais incorretas que não continham impacto no conteúdo do discurso foram corrigidas. Por exemplo, contrações linguísticas que normalmente são empregadas nos contextos de comunicação verbal informal, tais como, “né” foram trocadas para “não é”. Também optamos por corrigir, nessas transcrições, eventuais questões relacionadas a concordâncias gramaticais decorrentes do emprego coloquial da língua.

Optamos por realizar as transcrições linha por linha (SCHOENFELD, 2000), e entendemos que essa forma de organização contribuiu para a identificação de relações entre manifestações do conteúdo do conhecimento do professor evidenciadas em diferentes momentos das interações entre os professores durante a resolução das tarefas e nas discussões plenárias. Além disso, essa forma de organização também foi essencial no processo de estabelecimento de relações entre o conteúdo do conhecimento do professor revelado durante as discussões, uma vez que um dos nossos objetivos investigativos se relacionava com o mapeamento dessas (eventuais) relações.

A indicação das linhas nas transcrições, no caso dos comentários dos professores captados durante o encontro em que se discutiu o tópico de divisão, foi feita com a seguinte nomenclatura: para as discussões ocorridas nos grupos, as linhas das transcrições foram indicadas com “p.q Pn”, no qual “p” se refere ao grupo em que tal comentário ocorreu, “q” representa a linha da transcrição, e “Pn”[60], o pseudônimo associado ao professor que

[59] As gravações de vídeo das sessões de formação complementaram, sempre que necessário, este processo de análise, a partir da averiguação das ações dos professores, nos fornecendo uma imagem mais próxima do que efetivamente ocorreu durante as discussões.

[60] Em Pn, “n” indica a numeração que foi associada a cada um dos professores sem, contudo, possuir um caráter de discriminação hierárquica entre eles. A opção por atribuir a numeração desta forma se deu durante o processo analítico do material relacionado com os tópicos de Medida que, como dissemos na seção anterior, foi o mais robusto em temos de quantidade de informações. Por isso, embora o material coletado durante as

pronunciou tal comentário. Além disso, os formadores presentes nos encontros também foram identificados segundo a nomenclatura F1, F2, F3, etc e, nesse caso, F1 corresponde sempre à pesquisadora deste trabalho. Quando um conjunto de linhas das transcrições não interessava para o processo analítico, por exemplo, por não apresentar conteúdo significativo de evidências do conhecimento revelado pelo professor, optamos por suprimir sua apresentação no quadro de agrupamentos de comentários. Nesse caso, utilizamos a simbologia [. . .] para indicar que não foram incluídas algumas linhas da transcrição integral, conforme exemplo de registro apresentado no **Quadro 3**.

Quadro 3 - Exemplo de organização e nomenclatura utilizada na transcrição das discussões em grupo

[2.195]	F1: *Tudo bem. Descreve o que...? Que imagem você forma na cabeça quando*
[2.196]	*vai fazer seis dividido por três?*
[2.197]	P4: *Eu formo três... três partes com... quero dizer, duas partes com três.*
[2.198]	P8: *Duas!*
[2.199]	P4: *Não! Três partes com dois (elementos) em cada uma.*
[. . .]	
[2.209]	P8: *É, mas eu acho que é isso mesmo que a gente pensa. Você acaba somando 2 + 2 + 2.*
[2.210]	*E, se a gente fosse pensar no cálculo mental com o que ela falou, 36, a gente podia*
[2.211]	*pegar primeiro as dezenas...depois as unidades...*

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

No caso das transcrições das discussões em plenária, a nomenclatura utilizada foi “PLn”, em que “PL” indica plenária e “n” a linha da transcrição. Nesse caso, o conteúdo de cada linha também foi associado a cada um dos participantes da formação que proferia o comentário, seguindo a nomenclatura adotada, tanto no caso dos professores, como no caso dos formadores. Vale destacar que as ações (gestos ou expressões não verbais) efetuadas pelos participantes e que tinham importância para dar sentido aos seus comentários, também foram descritas e incluídas em linhas numeradas ao longo das transcrições, tanto das discussões ocorridas em grupo quanto das discussões plenárias, e encontram-se, ao longo das transcrições, indicadas entre parênteses (ver exemplo no **Quadro 4**).

Quadro 4 – Exemplo de organização e nomenclatura utilizada na transcrição da discussão plenária ocorrida no encontro do tópico de divisão

PL326	P14: *A gente desenhou seis bolinhas e circulou de três em três.*
PL327	F1: *Então, espera!*

---

discussões do tópico de divisão tenha sido analisado muito antes do material coletado nos encontros dos tópicos de Medida, a numeração associada aos pseudônimos dos professores não segue a sequência que se poderia esperar no caso de termos empregado essa forma de identificação dos professores anteriormente. Os critérios de associação numérica a cada um dos participantes foi explicitado na seção acima, intitulada “A coleta das informações”.

PL328	(Formadora representa seis círculos na lousa)
PL329	*Você fez seis bolinhas...*
PL330	P14: *É, e circulei de três em três.*
PL331	P19: *Não!*
PL332	P18: *Fez dois grupos, então?*
PL333	P4: *Não, foi de duas em duas!*
PL334	P19: *Não, de duas em duas.*
PL335	P14: *De três em três!*
PL336	(Formadora circula dois grupos de três elementos )
PL337	F1: *Fez assim?*
PL338	(Formadora desenha mais seis círculos e circula três grupos de dois elementos )
PL339	F1: *Ou fez assim?*
PL340	P18: *Mas era para dividir por três...*
PL341	P14: *Então, seis bolinhas...*
PL342	P19: *Era para dividir por três!*
PL343	P14: *Dividido por três... de três em três. É isso que eu fiz!*
PL344	*Seis bolinhas, circuladas de três em três.*
PL345	P4: *Vão dar dois grupos!*
PL346	P14: *Vão dar quantos grupos? Dois!*

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Com relação aos registros escritos dos professores, decorrentes de suas resoluções para a TpF, no caso das produções relacionadas com a tarefa com foco no tópico de divisão, esse material foi tratado a partir de transcrições *ipsis litteris*, os quais foram incluídos no conjunto agrupado de produções dos professores nos quadros elaborados para a análise.

Após o tratamento do material coletado no encontro do tópico de divisão, partimos para a sua organização e emprego dos procedimentos analíticos. Todas as produções dos professores foram organizadas em quadros, em que se podiam confrontar os registros escritos fornecidos pelos grupos e os comentários dos professores captados durante a resolução da tarefa em pequenos grupos e durante a plenária.

Optamos por organizar essas informações em quadros, agrupando as produções relacionadas especificamente a cada uma das questões da tarefa discutida na formação. Como comentado na seção anterior, cada questão específica é incluída na tarefa a partir de objetivos formativos delineados para o desenvolvimento do conhecimento do professor, mas que estão necessariamente vinculados aos objetivos investigativos. Portanto, ao incluirmos cada questão, atentamos para aspectos específicos do conhecimento do professor associado a cada um dos subdomínios, conforme a conceitualização do MTSK.

Assim, por exemplo, como a primeira questão da tarefa de formação (*O que é dividir? Responda por você mesmo(a), enquanto professor(a) que ensina matemática e sem considerar um contexto escolar*), estava associada aos objetivos de aceder e desenvolver o conhecimento do professor relativamente aos sentidos da divisão, antecipamos que as produções dos professores pudessem evidenciar conteúdo do conhecimento relacionado com o subdomínio KoT, particularmente associado aos fenômenos e às características estruturais de construtos (na categoria *Phenomenology and applications*, portanto).

Então, para cada quadro elaborado contendo todas as produções dos professores associadas a cada uma das questões, passamos à análise, buscando similaridades e diferenças em termos do conteúdo de conhecimentos associados ao subdomínio que estava em foco quando da inclusão daquela questão na tarefa.

Dessa forma, para cada produção em que identificávamos conhecimento revelado, destacávamos, com cores iguais, aquelas cujo conteúdo era considerado do mesmo tipo e, com cores diferentes, aquelas com conteúdo de tipo distinto, fosse porque se associava a outra categoria, ou porque, embora estivesse contemplado em uma mesma categoria, tratava-se de outras particularidades do conhecimento do professor (ver **Quadro 5**).

Quadro 5 – Exemplo de agrupamento das produções para a questão 1 da tarefa de divisão e identificação por cores da distinção do tipo de conhecimento

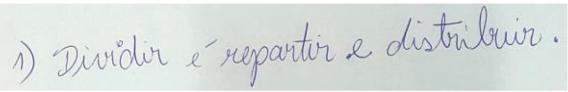
Trecho da discussão no Grupo 2

2.1 P8: Repartir... não necessariamente em partes iguais.
2.2 *Professora aponta para o símbolo ÷ registrado em uma das folhas*
2.3 Agora, se ela tivesse colocado o símbolo, aí já seria em partes iguais.

Trecho da discussão no Grupo 3

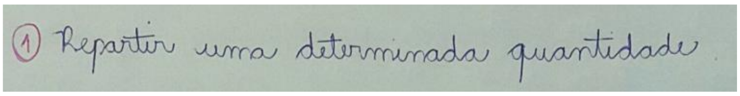
3.1 P18: Bom, então vamos lá. Primeira questão o que é dividir? Responda por você mesmo
3.2 sem considerar o contexto escolar.
3.3 P2: Dividir é repartir.
3.4 P20: É
3.5 P18: Eu acho também
3.6 P20: E, para mim, dividir é repartir em partes iguais.
3.7 P18: Sem ser professor, para mim, eu falaria que é...
3.8 P20: Mas aqui é assim ó: " responda por si mesmo enquanto professor que ensina matemática,
3.9 mas sem considerar o contexto (escolar)". Você é um professor!
3.10 P18: Então tá.
3.11 P2: Eu falaria, eu sempre falei com as crianças que é distribuir.
3.12 P20: Então coloca isso!
3.13 P18: Coloca aí "dividir e repartir em parcelas iguais"
3.14 e coloca outro tópico, "é distribuir". É o que a gente pensa!

Registro escrito no Grupo 1


1) Dividir é repartir e distribuir.

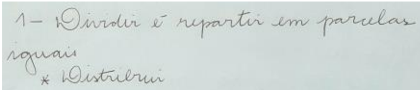
Dividir é repartir e distribuir

Registro escrito no Grupo 2


① Repartir uma determinada quantidade

Repartir uma determinada quantidade

Registro escrito do Grupo 3


1 – Dividir é repartir em parcelas iguais
* Distribuir

1 – Dividir é repartir em parcelas iguais

** Distribuir*

Trechos da discussão plenária

[PL2] P4: Aqui a gente colocou que é repartir em uma determinada quantidade.
[. . .]

[PL5] P14: Para nós foi que dividir é repartir e distribuir.
[. . .]

[PL12] P2: Para nós, a gente colocou que é repartir em parcelas iguais
[PL13] e colocamos também que é distribuir.
[PL14] Formadora: Ok. Então é “repartir e distribuir” (dando ênfase na palavra “e”)? Ou é “repartir
[PL15] ou distribuir”? (dando ênfase na palavra “ou”)
[PL16] P2: É... porque a gente colocou um asterisco no “distribuir”. Então...
[PL17] P18: É repartir e distribuir. É isso que a gente colocou, como sendo outro item.

Fonte: autora da tese (2019)

Dada a natureza da investigação, bem como das informações coletadas, a análise foi realizada tendo como ponto de partida as categorias consideradas a partir do referencial teórico do conhecimento especializado do professor (CARRILLO et al., 2018), particularmente no que se refere aos subdomínios do *Knowledge of Topics* (KoT) e do *Knowledge of Structures of Mathematics* (KSM), já que esses subdomínios tratam das conexões intra e interconceituais, respectivamente.

Nesse sentido, para podermos diferenciar o conteúdo de conhecimento revelado associado a cada um dos subdomínios, KoT e KSM, pautando-nos no nosso próprio conhecimento acerca das conexões à época em que nos detivemos nessa análise, em primeira instância, buscávamos por evidências nas quais os professores explicitamente referiam tópicos distintos ao de divisão, mas que buscavam estabelecer relações com este tópico.

No entanto, conforme os ciclos de análise (STRAUSS; CORBIN, 1994) do material iam ocorrendo, ficava cada vez mais explícito para nós que, por um lado, a quantidade de evidências do conhecimento associado ao subdomínio KoT era substancialmente maior do que aquela associada ao KSM. E, por outro lado, percebíamos que as evidências associadas ao subdomínio KSM não tratavam apenas de conexões que os professores efetuavam entre os tópicos de divisão e os de Medidas – nosso foco de investigação –, mas incluíam, também, e em sua maioria, outros tópicos, como os de adição, subtração e multiplicação, por exemplo. No capítulo 3 desse trabalho, vamos nos deter nas discussões dos motivos pelos quais compreendemos que essa situação ocorreu.

O importante aqui é comentar que, com base nessas percepções e entendimentos que foram ocorrendo durante esse processo analítico, e inclusive pelo desenvolvimento de nossas próprias sensibilidades teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994) e fenomenológica (GEELAN, 2003), em decorrência da produção do primeiro artigo que compõe a tese (ver em ***Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão***), optamos por nos concentrar, prioritariamente, na identificação de evidências do conhecimento dos professores associadas ao subdomínio KoT, com o intuito de poder explorar ampla e profundamente as particularidades do conhecimento consideradas a partir de todas as categorias desse subdomínio.

Assim, nos quadros de agrupamentos das produções, cada uma das cores utilizadas referiam-se a "classes" (como se fossem classes de equivalência) das evidências que revelavam tipos distintos de conteúdo do conhecimento do professor associado ao KoT.

Dessa maneira, por exemplo, para a primeira questão da tarefa, foram identificadas evidências de conteúdo do conhecimento do professor relacionadas a três possíveis classes, indicadas no **Quadro 5** com as cores verde, rosa e azul. Note-se que as cores que indicavam cada uma das produções eram modificadas sempre que um conteúdo do conhecimento contivesse uma característica muito particular, estando ou não associado a uma categoria distinta dentro do subdomínio. Por exemplo, no caso de um conteúdo do conhecimento do professor no âmbito da divisão associado à categoria *Procedures*, foram indicadas, com cores distintas, as evidências de conteúdo do conhecimento revelado pelo professor que estavam relacionadas com as "formas de proceder para resolver uma operação" (rosa, no **Quadro 5**) e com "as características do resultado da operação" (verde, no **Quadro 5**).

Esse mesmo procedimento foi adotado para os agrupamentos de produções relacionadas para cada uma das questões da tarefa, sempre associando-se cores iguais a evidências que nos parecessem apresentar elementos similares relacionados ao conteúdo do conhecimento do professor. Numa etapa seguinte, passamos a efetuar análises transversais desses quadros e, dessa forma, as evidências foram reagrupadas em suas classes correspondentes, sendo possível ter uma visão mais focada e, ao mesmo tempo, global, do conteúdo comum de conhecimento existente entre elas, possibilitando-se exclusões ou inserções de novas evidências nessas classes. Esse processo se deu de forma cíclica exaustiva, até atingirmos a saturação.

Quadro 6 – Exemplo de reagrupamento das evidências, incluindo a análise e os descritores de conhecimento emergentes

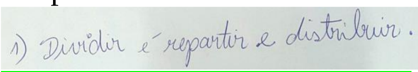
<table>
<tr><th>Evidências de conteúdo de conhecimento revelado nas produções</th><th>Análise de todo o material</th><th>Refinamento da descrição do conteúdo do conhecimento – como resultado final da análise</th></tr>
<tr><td>Discussões em grupo

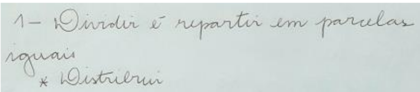
[2.3] P8: Agora, se ela tivesse colocado o símbolo, aí já seria em partes iguais.</td><td rowspan="3">Reconhecimento de que o símbolo associado à operação de divisão (÷) possui um papel de denotar que a operação seja tomada pelo sentido de partilha equitativa e, neste caso, que o resultado da operação corresponderá a conjuntos com mesma cardinalidade.

No entanto, não atribuem significado ao papel que este símbolo possui nos contextos da divisão como medida. Isso ocorre certamente em virtude do não conhecimento dos professores de que a divisão pode ser interpretada a partir de mais de um sentido.

No decorrer das discussões em plenária, os professores tomam consciência de que os raciocínios envolvidos em alguns contextos da divisão são distintos da ideia de distribuição. Assim, reconhecem, pelo tipo de verbalização e ações que se emprega nos contextos envolvendo o sentido de medida, que o resultado da operação já não corresponde mais à quantidade de elementos do conjunto após a distribuição, e</td><td rowspan="3">KoTrp2: conhecer o significado do símbolo “÷”, i.e., que, no caso da partilha equitativa, ele se relaciona com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes; e, para o sentido de medida, ele deve ser interpretado como uma relação de comparação entre quantidades – medidas

KoTmp1: Conhecimento da natureza do resultado quando a divisão é entendida como partilha equitativa: o valor numérico obtido corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos entre os quais o todo foi dividido (repartir em partes iguais).</td></tr>
<tr><td>Registros escritos

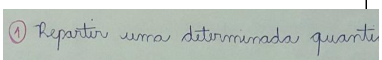
Grupo 1:


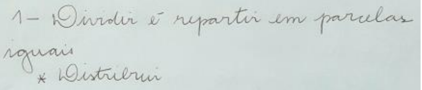
1) Dividir é repartir e distribuir
Grupo 3:


* Distribuir</td></tr>
<tr><td>Discussão plenária

[PL5] P14: Para nós foi que dividir é repartir e distribuir.
[PL16] P2: É... porque a gente colocou um asterisco no “distribuir”. Então...
[PL17] P18: É repartir e distribuir. É isso que a gente colocou, como sendo outro item.</td></tr>
</table>

[PL698] P14: A criança pode comparar... [PL699] F1: Vamos pegar essa ideia de comparar. O que você... Como é que eu... [PL700] (P15 apontando para um conjunto de tampinhas que dispôs sobre a mesa) [PL701] P15:: Olha aqui: eu tenho seis. E aqui eu tenho de três em três [PL702] P15: apontando outro conjunto de tampinhas que dispôs sobre a mesa. [PL703] Então a criança vai comparar. Quantas vezes esse (conjunto de três tampinhas) cabe [PL704] dentro desse (conjunto de seis tampinhas)? [PL705] (P15: pega 3 tampinhas do segundo conjunto itera sobre as tampinhas do primeiro conjunto) [PL706] Uma vez, duas vezes. [PL707] P20: Na hora que ela comparou, ela achou total.	sim da quantificação de vezes que o divisor cabe no dividendo.	KoTmp2: Conhecimento da natureza do resultado quando a divisão é entendida como medida: o valor numérico obtido corresponde à quantidade de vezes que a unidade de referência coube no todo (divisão do todo em partes de mesma medida).
Discussões em grupo [2.185]F2: De todo modo, e se fosse qualquer outro valor, se fossem quaisquer outros [2.186] números que vocês imaginam ali, sei lá, 36 dividido por 3. Como vocês fariam? [2.187]P4: Com o algoritmo! [risos] [2.188]F2: O algoritmo? [2.189]P3: É! [2.190]P4: Faria três dividido por três, um. [2.191]F1: Por que é que o... [2.192]P4: E, seis dividido por três, dois. [2.193]P8: Eu acho que eu ia	Reconhecem que uma operação dde divisão pode ser resolvida por mais de um procedimento, por exemplo: adições sucessivas do divisor até atingir a quantidade equivalente ao dividendo; subtrações sucessivas do divisor em relação ao dividendo, até chegar em uma quantidade menor que o divisor ou em zero; distribuição de um em um, dois em dois ou quantidades múltiplas; decomposição do número e divisão das partes decompostas com posterior adição das quantidades resultantes de cada um das divisões.	KoTmp3 – Conhecimento das distintas formas de proceder para resolver uma operação de divisão (por exemplo: adições sucessivas do divisor até atingir a quantidade equivalente ao dividendo; subtrações sucessivas do divisor em relação ao dividendo, até chegar em uma quantidade menor que o divisor ou em zero; distribuição de um em um, dois em dois ou quantidades múltiplas; decomposição do número e divisão das partes decompostas com posterior adição das quantidades resultantes de cada um das divisões).

pegar 30 primeiro e dividir por três. Depois pegava seis e dividia [2.194] por três. [2.195]F1: Tudo bem. Descreve o que...? Que imagem você forma na cabeça quando [2.196] vai fazer seis dividido por três? [2.197]P4: Eu formo três... três partes com... quero dizer, duas partes com três. [2.198]P8: Duas! [2.199]P4: Não! Três partes com dois (elementos) em cada uma. [. . .] [2.212] P8: É, mas eu acho que é isso mesmo que a gente pensa. Você acaba somando 2 + 2 + 2. [2.213] E, se a gente fosse pensar no cálculo mental com o que ela falou, 36, a gente podia pegar primeiro as dezenas...depois as unidades [3.3] P2: Dividir é repartir. [3.11] P2: Eu falaria, eu sempre falei com as crianças que é distribuir. [3.14] e coloca outro tópico, "é distribuir". É o que a gente pensa!		
Registros escritos Grupo 2:  *Repartir uma determinada quantidade*		
Discussão plenária		

[PL2] P4: Aqui a gente colocou que é repartir em uma determinada quantidade. [PL13] P2: e colocamos também que é distribuir. [PL673] P20: Quando eu falo quantas vezes o 3 está dentro do 6, ou cabe dentro do seis, eu tenho que [PL674] decompor. É isso? Não? [PL675] F1: O que é decompor? Quando você fala decompor, a quê você se refere? [PL676] [. . .] [PL677] P20: Na multiplicação! [PL678] F1: Hum... Diz para mim, o que eu escrevo? [PL679] P20: Aditiva, ainda. Três mais três... [PL680] (F1 registra na lousa a expressão 3+3=6) [PL681] F1: Três mais três que dá seis. [PL682] P20: É!		
Discussões em grupo [2.1] P8: Repartir... não necessariamente em partes iguais. [3.6] P20: E, para mim, dividir é repartir em partes iguais. [3.13] P18: Coloca aí "dividir e repartir em parcelas iguais"	Os professores revelam conhecer somente o sentido de partilha equitativa, associada à operação de divisão. Esse sentido é conhecimento pelos professores com base na ideia de distribuição.	KoTph1 – conhecer o fenômeno divisão como partilha equitativa
Registro escrito Grupo 3 		KoTph2 – conhecer o fenômeno da divisão como medida

1 – Dividir é repartir em parcelas iguais	Durante as discussões plenárias, com as intervenções da formadora, os professores passaram a reconhecer que as formas de se raciocinar em alguns contextos da divisão são distintas da ideia de distribuição. Passam a reconhecer o construto comparação como um elemento estruturante do raciocínio para resolução da divisão.	
Discussão plenária [PL12] P2: Para nós, a gente colocou que é repartir em parcelas iguais [PL708] P20: Mas para comparar, ela usou uma adição [PL709] F1: Ela só comparou? [. . .] [PL715] P15: É, ela adicionou, 3 mais 3. [PL716] F1: Ela não adicionou nada...olha... [PL717] P15: Não? [PL718] F1: Quero dizer, claro que ela adicionou... Mas olha só o que ela fez [PL719] (F1 pega um conjunto de 3 tampinhas e efetua o procedimento de iteração desse [PL720] conjunto sobre as seis tampinhas, considerando-o como unidade de medida) [PL721] F1: Quantas vezes esse conjunto (de três tampinhas) aqui na minha mão cabe aqui [PL722] dentro? Cabe uma vez, duas vezes. [PL723] P4: É o mesmo número. [PL724] F1: Ela nem mexeu no (conjunto de) três. [. . .] [PL727] F1: Vocês entendem o que eu fiz? Ela não somou o três... Ela contou... [. . .]		

[PL 728] P20: Nossa, então a divisão não está só relacionada com a multiplicação! [. . .] [PL763] F1: Em que outra situação da vida a gente usa esse processo? [PL764] Eu escolho um negócio e comparo. [PL765] P20: Na multiplicação. [PL766] P14: Dividir é medir também? [PL767] F1: Por que medir? [PL768] (P14 estica os braços como se tivesse um cordão na mão). [PL769] P14: Porque eu pego alguma coisa [PL770] P8: Uma referência [PL771] P14: E eu comparo... Isso, uma referência. O metro. [. . .] [PL779] P14: Aí você chega aqui e descobre que a divisão é uma medida!		

Fonte: autora (2019)

Desse movimento, elementos característicos das especificidades do conhecimento do professor emergiram, sendo possível elicitar um conjunto de descritores do conhecimento especializado associado ao KoT. A denominação de cada um dos descritores foi atribuída segundo a categoria à qual encontravam-se associados, seguindo trabalho anterior de Zarakyan e Ribeiro (2018).

Quadro 7 – Nomenclatura atribuída aos descritores do conhecimento associados às categorias do KoT

Subdomínio	***Knowledge of Topics* (KoT)**	*Definitions, properties and foundations* (d)	*Phenomenology and applications* (ph)	*Procedures* (mp)	*Registers of representation* (rp)
		KoTd1; KoTd2; …	KoTph1; KoTph2; KoTph3, …	KoTmp1; KoTmp2; KoTmp3, …	KoTrp1; KoTrp2; KoTrp3, …

Fonte: arquivo da pesquisa (2020)

No caso de ocorrência de mais de um descritor associado a cada categoria, optamos por atribuir uma numeração em cada descritor, de acordo com a ordem em que foram surgindo na análise (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b).

Neste ponto da investigação, já estávamos conscientes de que as informações coletadas durante a sessão em que se discutiu o tópico de divisão não nos forneceriam elementos suficientes para podermos discutir o conhecimento do professor relacionado com o subdomínio KSM, especificamente no que se referia às conexões entre o tópico de divisão e os tópicos de Medida. Além disso, porque o processo de coleta e análise do material associado ao módulo de Medidas no contexto do PFC já se encontrava em pleno andamento, assumimos que seria necessário nos aprofundarmos na análise desse material como um todo, até que pudéssemos obter uma visão mais global do conjunto de evidências obtidas.

Organização e procedimentos de análise do material da segunda etapa de coleta – a sessão de formação com foco nos tópicos de Medida

Como comentado anteriormente, no caso do material coletado nos encontros do módulo de Medidas, o tratamento efetuado para organização e posterior análise foi realizado essencialmente nos mesmos moldes do que se fez com o material coletado na primeira etapa. Dessa maneira, as transcrições das discussões em grupo e plenária foram realizadas seguindo a mesma estrutura já apresentada, à exceção da nomenclatura utilizada para nos referirmos a cada uma das linhas na transcrição.

Enquanto íamos tratanto o material que era coletado ao longo dos cinco encontros do módulo de Medidas, ainda não tínhamos clareza da quantidade de informações que efetivamente entrariam para as discussões nesta investigação, ou seja, não sabíamos se seriam utilizadas informações coletadas em mais de um encontro. Por isso, adotamos a seguinte nomenclatura para as transcrições[61]: cada linha da transcrição foi indicada com “[N.p.q]” seguida do pseudônimo do indivíduo que proferiu o comentário. Nesse caso, “N” indica a numeração (em algarismos romanos) associada ao encontro em que ocorreu a discussão; “p” indica o grupo no qual o comentário foi feito e “q” indica a linha da transcrição. No caso das discussões plenárias, a nomenclatura usada foi [N.q], em que “N” e “q” assumem os mesmos

[61] Mais adiante, a nomenclatura usada é alterada, em virtude da adequação dos procedimentos empregados quando incorporamos o software ATLAS.ti na análise.

papéis descritos acima. Assim, por exemplo, em "[I.1.83] P11: *Você colocou a questão do instrumento...*" temos um comentário na 83.ª linha da transcrição, feito pelo professor P11, que participava do grupo 1 no encontro I. Ou então, em "[V.106] P9: *Eu acho que eles têm que entender qual é a unidade de referência (...)*", exemplifica-se, na 106.ª linha da transcrição, o comentário do professor P9 durante a plenária do 5.º encontro. Quanto aos registros escritos dos professores associados às resoluções das tarefas, estes foram digitalizados e não precisaram passar por qualquer outra forma de tratamento antes de serem analisados.

Iniciamos a primeira fase de análise desse material de forma manual, ainda sem o auxílio do *software* ATLAS.ti. Nessa etapa, nos concentramos apenas nos documentos contendo as transcrições das gravações de áudio dos subgrupos e das plenárias, e fomos em busca de evidências de conteúdo do conhecimento especializado manifestado pelos professores que se relacionavam com os subdomínios KoT e KSM (CARRILLO et al., 2018).

Note-se que nesta fase, optamos por nos concentrar inicialmente apenas nas transcrições, pois a vivência como formadora responsável no módulo combinada com a atividade de pesquisadora possibilitou que, ao organizar as produções dos professores, identificássemos semelhanças em termos do conteúdo do conhecimento. Assim, verificamos que nas discussões em grupo e nas plenárias, essas semelhanças eram muito mais significativas, em termos de densidade e coesão (MUÑOZ-CATALÁN; LIÑAN; RIBEIRO, 2017), pela variedade de elementos constituintes do conteúdo do conhecimento revelado,

A essa altura do processo investigativo, pela experiência desenvolvida ao longo da etapa anterior, já recorríamos a um conjunto de procedimentos mais criteriosos para identificação das evidências do conteúdo do conhecimento revelado, logo na primeira etapa de análise do material, algo que consideramos estar relacionado com o desenvolvimento, durante esse estudo, de nossas sensibilidades teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994) e fenomenológica (GEELAN, 2003). Nesse sentido, elaboramos um conjunto de perguntas e (possíveis) respostas que nos auxiliaram durante o processo de vinculação de cada produção dos professores a determinado subdomínio (cf. **Quadro 8**). Esse processo correspondeu ao primeiro ciclo de codificação (SALDAÑA, 2009) das informações contidas no material em análise.

Quadro 8 – Perguntas e respostas norteadoras para auxiliar na associação com os subdomínios KoT e KSM

<table>
<tr><th>Subdomínio do MTSK</th><th>Perguntas orientadoras para associação ao subdomínio</th><th>Respostas que auxiliam na associação a cada subdomínio</th></tr>
<tr><td>KoT</td><td rowspan="2">O que está sendo realizado?

Como está sendo realizado?

Que relações são estabelecidas?

O que os professores assumem nessa produção?</td><td><u>Dentro de um mesmo tópico, os profesores</u>
• Tentam definir ou definem um conceito;
• Tentam descrever ou descrevem características de conceitos/construtos/objetos;
• Tentam resolver ou resolvem operações matemáticas;
• Apresentam justificativas (ou tentam apresentar) para obtenção de determinados resultados;
• Verbalizam ou tentam encontrar formas adequadas de verbalizar o que estão fazendo e como estão fazendo;
• Representam conceitos/ideias/construtos/noções;
• Apresentam (ou tentam apresentar) distintas formas de representação de um mesmo conceito, ideia, construto, noção;
• Estabelecem relações entre distintas formas de representação de um mesmo conceito;
• Enunciam (ou tentam enunciar) propriedades de objetos ou entes matemáticos.</td></tr>
<tr><td>KSM</td><td><u>Entre tópicos distintos, os professores</u>
• Usam conceitos, propriedades e/ou fundamentos de um determinado tópico para resolver, simplificar, justificar, explicar, fundamentar ou definir conceitos, propriedades e/ou fundamentos de outro tópico;
• Reconhecem características comuns entre conceitos/construtos/propriedades de objetos ou entes matemáticos;
• Estabelecem relações entre representações de conceitos de tópicos distintos;
• Usam representações de conceitos pertencentes a um determinado tópico para resolver, simplificar, justificar, explicar, fundamentar ou definir conceitos em outro tópico;
• Usam procedimentos empregados em um determinado tópico para resolver, simplificar, justificar, explicar ou fundamentar procedimentos a serem empregados em outro tópico.</td></tr>
</table>

Fonte: autora (2021)

Note-se que as perguntas norteadoras elaboradas para nos auxiliar na correspondência de cada evidência de conhecimento revelado a um determinado subdomínio (KoT ou KSM) são essencialmente as mesmas. O que efetivamente auxilia nesse estabelecimento de correspondência a cada subdomínio é a natureza e o tipo de resposta que encontramos. Em particular, quando essas respostas apresentam elementos associados a tópicos matemáticos distintos, mas que estão, de algum modo, relacionados uns com os outros, então, imediatamente, as evidências são associadas ao KSM. Além disso, essas perguntas foram formuladas especialmente com foco nas conexões intra-conceituais e interconceituais que os professores estabelecem (ou podem estabelecer), uma vez que estávamos interessados em explorar os conhecimentos desses professores relativamente aos elementos estruturais e estruturantes, aqui, particularmente no âmbito dos tópicos do tema de Medida.

Esse processo correspondeu ao primeiro ciclo de codificação (SALDAÑA, 2009) das informações contidas no material em análise. A codificação, na metodologia da *Grounded Theory*, consiste em um processo de abstração conceitual no qual se atribui conceitos mais gerais (códigos) a incidências específicas presentes nas informações que estão sendo analisadas (VOLLSTEDT; REZAT, 2019). Assim, passamos a identificar evidências nos comentários dos professores que davam conta do conteúdo do conhecimento relacionado a cada subdomínio. Optamos por colorir de verde os trechos associados ao KoT, e de azul, os associados ao KSM. Note-se que estas cores já não estão relacionadas com as utilizadas anteriormente, já que, para a análise conjunta dos resultados, foi utilizado um outro processo, que descreveremos mais adiante.

Quadro 9 – Exemplo de trechos associados ao KoT (verde) e ao KSM (azul) a partir da transcrição de uma discussão em grupo

Trechos de discussão em um dos grupos	**Primeiros comentários da análise**
[I.1.459] P11: Como efetuamos e com o quê, não é? [I.1.460] P3: Eu acho que é a mesma coisa. Eu vou responder uma vez só e a gente fala que é a [I.1.461] mesma coisa. [I.1.462] Ps: Tá. [I.1.463] P3: Com instrumentos em geral, desde que determine um valor de referência. [I.1.464] P4: Com instrumentos, coloca padrão ou não. [I.1.465] P11: Padrão ou não, exatamente.	Instrumentos padronizados e não padronizados Confusão entre procedimento (como) e unidade/instrumento (com o que)
[I.1.466] P3: Desde que eu mantenha também a medição completa, não é? O que ela falou, não [I.1.467] posso começar a medir com borracha e terminar com outra coisa. [I.1.468] P4: Então, utilizando a mesma unidade de referência. [I.1.469] P11: Sim [I.1.470] P12: Sim [I.1.471] P4: Se você utilizou borracha, você tem que terminar com borracha.	Unidade de medida deve ser única e preservada ao longo da medição OBS: Atentar para o fato de que uma unidade de medida pode ser um múltiplo ou um submúltiplo dessa mesma unidade.
[I.1.472] P3: Ah, é que eu coloquei: determinando um valor.	Características do resultado de uma medição: um valor

[I.1.473] P4: Tá... valor ou unidade de referência, acho que é a mesma coisa.	numérico correspondente à quantas vezes a unidade de medida foi iterada, seguida de uma "marca" (nome) desta unidade.
[I.1.474] P3: Não! Olha, eu coloquei assim: com qualquer instrumento, desde que eu [I.1.475] determine um valor de referência. Por exemplo, quando é a unidade ou a [I.1.476] dezena ou centena. Isso aqui vai valer um. Eu determino o que aquilo vai [I.1.477] valer. E eu tenho que medir... são duas coisas diferentes, não são? Eu tenho [I.1.478] que medir, do início ao fim, com a mesma coisa.	Características comuns entre a composição de uma quantidade numérica em agrupamentos de 10 (propriedade em que se fundamenta o SND) e a unidade de medida. Nesse caso, os agrupamentos de 10 seriam as unidades de medida com as quais uma quantidade está sendo determinada. Unitizing: a noção de agrupamentos muitos para um como fundamento para constituição de uma propriedade do SND. O que conecta essas ideias é essencialmente a noção de agrupamento.
[I.1.479] P4: Não, eu acho que a partir do momento que... [I.1.480] P3: Primeiro eu tenho que atribuir um valor. [I.1.481] P4: Não, eu acho que a partir do momento que... [I.1.482] P3: Primeiro eu tenho que atribuir um valor. [I.1.483] (P3 pega a régua que está sobre a mesa e com os dedos polegares delimita a marca de [I.1.484] 1 cm na régua) [I.1.485] P3: Olha, isso aqui vai ser um centímetro. E depois, outra coisa é eu medir só [I.1.486] com os centímetros o objeto todo. [I.1.487] P4: Eu acho que é a mesma coisa! Você determinou o que você vai usar. [I.1.488] (P4 pega a régua da mão de P3, e com os polegares, indica 1 cm na régua) [I.1.489] Isso aqui é o seu instrumento. Seu instrumento é 1 centímetro. E agora você [I.1.490] tem que usar o mesmo valor durante toda a medida. O que você está falando [I.1.491] como valor de referência, eu acho que é o instrumento. Se você pegar, por [I.1.492] exemplo, a barrinha, isso aqui (pega um cubinho), isso aqui não é o seu valor [I.1.493] de referência. Isso aqui é o seu instrumento. E aí, você tem que usar ele como	Confusão entre unidade de medida e instrumento. Diferença entre unidade de medida e instrumento (particularmente no caso da grandeza comprimento)

[I.1.494] valor de referência durante toda a medida, entendeu? Por isso que eu acho que, [I.1.495] é a mesma coisa, praticamente. [I.1.496] Eu acho que você está querendo separar... Não entendi muito bem o que você [I.1.497] quis dizer... O que muda esse valor de referência para instrumento? [I.1.498]	

Fonte: arquivo da pesquisa (2020)

Este procedimento foi igualmente realizado para todas as transcrições das discussões em grupo e das plenárias. Após essa primeira etapa, implementamos a segunda etapa analítica, na qual passamos a recorrer ao *software* ATLAS.ti para nos auxiliar no processo de refinamento da análise, e, consequentemente, viabilizar a emergência dos descritores do conteúdo do conhecimento do professor associado a cada uma das categorias dos subdomínios KoT e KSM, respectivamente.

Assim, todos os documentos das transcrições das discussões em subgrupos e plenárias, além dos registros escritos dos professores – que já estavam digitalizados –, foram inseridos como arquivos no programa. Como dissemos, até esse momento, não tínhamos clareza sobre quais seriam as informações que efetivamente utilizaríamos para compor as discussões da pesquisa. Por isso, inserimos no programa todos os arquivos dos três encontros[62] que, julgávamos, seriam utilizados como fonte de informações para análise.

Neste ponto é importante clarificar que, por conta da forma como o programa ATLAS.ti articula as informações contidas nos documentos, foi necessário modificar a nomenclatura usada nas transcrições, a fim de deixá-las visualmente menos poluídas. Assim, retiramos as indicações "[N.p.q]", já que o ATLAS.ti numera automaticamente as linhas, e nomeamos cada arquivo das transcrições por "ME.N.p" em que "N" representa o número do encontro (I, IV ou V) e "p" o grupo a que se refere a discussão. No caso das transcrições das plenárias, a nomenclatura usada foi "ME.PL.N", em que "N" assume o mesmo papel anterior. Para as tarefas digitalizadas, a nomenclatura usada foi "T.N.p", com a mesma indicação para "N" e "p".

Nesse momento, passamos a associar as evidências do conhecimento revelado pelos professores às categorias previamente definidas pelo modelo MTSK, relacionadas com cada

[62] Na nota de rodapé n.º 50 tratamos dessa questão com maior detalhamento.

um dos subdomínios em análise – KoT e KSM. Assim, consideramos as categorias relacionadas ao KoT, a saber, *Definitions, properties and foundations*; *Phenomenology and applications*; *Mathematical procedures* e *Systems of representations*; e ao KSM, *Auxiliary connections, Connections of complexification*, *Connections of simplification* e *Transversal connections.*

Para tanto, nesta etapa, elaboramos outro conjunto de perguntas que nos auxiliaram a identificar, nas produções dos professores, elementos que nos permitissem associá-las às categorias de cada subdomínio.

Quadro 10 – Perguntas que auxiliaram na associação com cada uma das categorias do KoT e do KSM

Categorias do KoT	Perguntas orientadoras para inclusão nas categorias
Definitions	• Como explicam/definem um conceito/objeto matemático? • Que aspectos, elementos, características e/ou propriedades identificam/recorrem ao definir um conceito?
Properties	• Que propriedades matemáticas relacionadas com o tópico conhecem? • Que propriedades matemáticas que não se aplicam ao tópico conhecem?
Foundations	• Que ideias/noções fundamentais identificam/associam a um conceito?
Phenomenology and applications	• Como interpretam um fenômeno ou que significados atribuem a um fenômeno? • Quais constructos/ideias/significados reconhecem que estão presentes em tipos específicos de contextos? • Quais (distintos) significados de um constructo/ideia/fenômeno evocam por meio de contextos?
Registers of representations	• Como verbalizam um conceito/ideia/noção/procedimento? • Como representam pictoricamente um conceito/ideia/noção/procedimento? • Como representam numericamente um conceito/ideia/noção/procedimento • Como representam simbolicamente um conceito/ideia/noção/procedimento? • Como representam graficamente um conceito/ideia/noção/procedimento? • Como representam esquematicamente um conceito/ideia/noção/procedimento? • Que imagem mental possuem de determinado conceito/ideia/noção/elemento? • Que relações estabelecem entre distintas representações? • Que relações entre distintas representações para um mesmo conceito conhecem?
Mathematical procedures	• Como resolvem determinada operação/transformação? • Que procedimentos (distintos) empregam para resolver uma operação? • Como explicitam/explicam/justificam o que estão fazendo (ou devem fazer) quando empregam determinados procedimentos? • Como justificam a obtenção de determinados resultados quando empregam procedimentos específicos?

	• Que condições consideram ser necessárias e suficientes para se empregar determinados procedimentos?
Categorias do KSM	**Perguntas orientadoras para inclusão nas categorias**
Auxiliary connections	✓ Que conceitos/propriedades/fundamentos/procedimentos relacionados a um determinado tópico que não estava em jogo são evocados/utilizados para agregar/resolver/responder/justificar/validar/explicar conceitos, propriedades ou procedimentos do tópico que está em jogo?
Connections of complexification	✓ Que conceitos, propriedades ou procedimentos conhece/evoca/utiliza para fundamentar conhecimentos mais complexos a serem desenvolvidos no futuro?
Connections of simplification	✓ Que conceitos/propriedades/procedimentos considerados fundamentais relacionados a um tópico trabalhando em momento anterior conhece/evoca/utiliza para explicar/justificar/validar conceitos, propriedades ou procedimentos em um tópico que está em jogo naquele momento?
Transversal connections	✓ Que conceitos/propriedades/fundamentos/procedimentos relacionados a um determinado tópico identificam como tendo caraterísticas comuns a conceitos/propriedades/fundamentos/procedimentos relacionados a outro terminado tópico?

Fonte: arquivo da pesquisa (2020)

É importante destacar que essas questões que auxiliam na associação do conteúdo de conhecimento revelado pelos professores a cada uma das categorias relacionadas com KoT e KSM foram por nós elaboradas, a partir de uma combinação das informações obtidas em campo com a literatura decorrente dos estudos relativos ao MTSK.

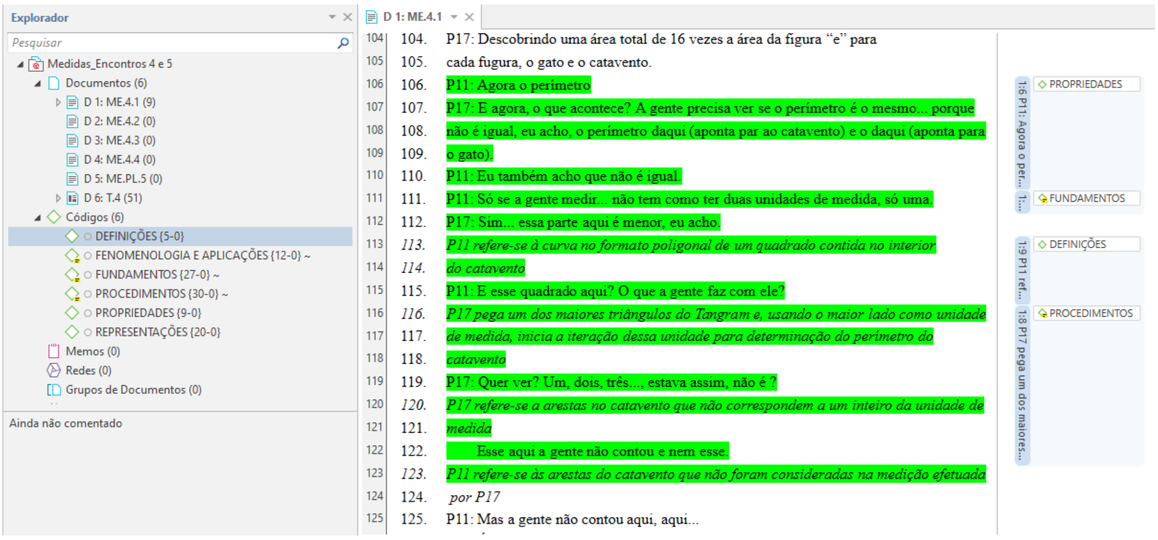
Note-se que, já nesse processo, passamos a identificar separadamente a categoria "*Definitions, properties and foundations*" em três categorias distintas. De fato, essa escolha metodológica foi tomada no momento em que havíamos concluído o primeiro artigo que compõe essa tese (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b) e, simultaneamente, nos encontrávamos em pleno processo analítico do material do módulo de Medidas. Mais adiante, apresentaremos a nossa justificativa por essa opção metodológica de separação das categorias.

O ATLAS.ti é um programa que permite que, após a identificação de todas as evidências e correspondente análise, o usuário possa acessar simultaneamente todos os documentos e gerenciá-los de forma dinâmica e integrada.

Dessa forma, criamos no programa códigos identificados com a nomenclatura usada para as categorias do KoT e KSM e iniciamos, ainda no ATLAS.ti, o segundo ciclo de codificação, empregando o recurso "Aplicar códigos". Cada trecho codificado pelo programa é denominado por "citação". Para nós, uma "citação" corresponde a uma produção de um professor, podendo ser, portanto, um comentário ou um registro escrito (ver **Figura 12**). Além disso, o que se denomina por "código", no contexto do programa, não está necessariamente associado a uma sequência numérica. Para o nosso contexto, denominaremos por “código” os nomes das classes em que as evidências foram agrupadas.

Particularmente para o subdomínio KoT, que pelo modelo do MTSK é organizado em quatro categorias, optamos por atribuir, no caso da categoria “*Definitions, properties and foundations*”, um código para cada item dessa categoria, ou seja, nomeamos as classes (codificamos) “Definições”, “Propriedades” e “Fundamentos” separadamente, mas não necessariamente de forma disjunta, como se discute mais adiante, na análise.

Figura 12 – Exemplos de citações associadas às categorias do KoT na transcrição de uma discussão em grupo e na resolução de uma tarefa por um professor



Fonte: arquivo da pesquisa (2020)

Recorde-se que o nosso objetivo é caracterizar o conhecimento do professor e, em particular o que o torna especializado, a partir da identificação e descrição do conteúdo desse conhecimento relacionado a cada um dos subdomínios. Em particular, considerando que o KoT se relaciona com “o que” o professor conhece e “como” o conhece a respeito de cada um dos tópicos matemáticos, considerávamos essencial que as identificações e descrições de conteúdo do conhecimento do professor pudessem, por um lado, efetivamente clarificar e tornar explícita, para qualquer leitor interessado em utilizar a ferramenta analítica do MTSK, uma forma de abordagem metodológica para obtenção dessa caracterização do conhecimento do professor relacionado a qualquer tópico.

Por outro lado, no caso particular dos tópicos relacionados ao tema de Medida, pretendíamos tornar evidente a natureza do conteúdo do conhecimento do professor que se considera associado a cada um dos subdomínios e correspondentes classes e, nesse sentido, em particular para o caso das “propriedades” e dos “fundamentos” matemáticos que constituem e estruturam cada um dos tópicos no tema de Medida, consideramos ainda mais importante essa descrição de forma explicitamente separada por forma a refinar a nossa própria atenção quanto ao seu conteúdo.

Depois de codificados todos os trechos relacionados com as categorias do KoT e do KSM, efetuamos uma confrontação das citações vinculadas a uma mesma classe. Esse processo de confrontação, consistiu em incluir, excluir ou reagrupar citações em cada categoria, tanto do KoT quanto do KSM, até que atingimos a saturação teórica (TEPPO, 2015), ponto em que se considerou que qualquer alteração não acrescentaria conteúdo relevante ou contundente para o nosso próprio entendimento das propriedades de cada classe.

Com isso, para o subdomínio KoT, considerando-se seis categorias e não apenas as quatro indicadas por Carrillo et al., (2018), já que a categoria “*Definitions, Foundations and Properties*” foi destrinçada em três, a quantidade de citações associadas a cada uma dessas categorias se apresenta na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1 – Incidência de citações associadas às categorias do KoT no material do encontro I do módulo de Medidas

Categorias do KoT	Citações no encontro I
Definitions	51
Foundations	218
Properties	42
Phenomenology and applications	14
Mathematical procedures	121
Registers of representation	27
Total	473

Fonte: autora da tese (2021)

A esta etapa do processo analítico já podíamos compreender, por um lado, que o material coletado no módulo de Medidas a ser efetivamente utilizado para as discussões da pesquisa, se relacionava exclusivamente com aquele obtido apenas no encontro I. Por outro lado, também já estávamos conscientes de que, assim como havia ocorrido com as evidências de conhecimento revelado associado ao KSM, identificadas no material coletado no encontro com foco no tópico de divisão, neste material, a quantidade de evidências do conteúdo do conhecimento dos professores associados ao KSM, em particular quando se consideravam as conexões entre os tópicos de Medida e de divisão, era insuficiente para contemplar objetivos investigativos que buscassem explorar o conteúdo do conhecimento do professor relacionado ao subdomínio KSM no âmbito desses tópicos.

Por isso, assumimos que passaríamos a encarar somente as evidências associadas ao subdomínio KoT e, assim como havíamos realizado no caso do tópico de divisão, buscaríamos elicitar um conjunto de descritores do conhecimento do professor associado a esse subdomínio, no âmbito dos tópicos de Medida.

Dessa maneira, passamos à terceira etapa analítica deste material, na qual nos detivemos separadamente em cada categoria e buscamos descrever as características do conteúdo dos conhecimentos revelados no conjunto de citações ali vinculadas. Esse processo de descrição das características do conteúdo de conhecimento identificado a partir das citações em cada categoria contribui para a emergência dos descritores do conteúdo do conhecimento especializado do professor. Isso porque, ainda que estejam associadas a uma mesma categoria, diferentes citações podem revelar elementos distintos do conteúdo do conhecimento especializado do professor.

Nesse ponto, passamos a indicar os descritores que se consideravam associados em uma determinada categoria por um acrônimo que se constitui da sigla do subdomínio ao qual pertenciam (KoT), seguida de uma sigla associada ao nome da categoria: (*Definitions* (d); *Foundations* (f); *Properties* (pp); *Phenomenology and Applications* (ph)*; Procedures* (mp); *Registers of representantion* (rp)).

Quadro 11 – Nomenclatura associada aos descritores do conhecimento em referência às categorias do subdomínio KoT

Subdomínio	***Knowledge of Topics* (KoT)**	*Definitions* (d)	*Properties* (p)	*Foundations* (f)	*Phenomenology and applications* (ph)	*Procedures* (mp)	*Registers of representation* (rp)
		KoTd1; KoTd2; …	KoTp1; KoT p2; …	KoTf1; KoTf2; …	KoTph1; KoTph2; …	KoTmp1; KoTmp2; …	KoTrp1; KoTrp2; …

Fonte: arquivo da pesquisa (2021)

Assim, por exemplo, as citações a seguir foram inseridas na categoria “*Definitions*” porque nelas pudemos identificar que os professores manifestam conteúdo de conhecimento especializado associado às definições, ao buscarem explicar/conceituar o que é medir (ME.I.2, ME.I.3 e T.I) e ao se referirem a certos entes – instrumento e unidade – que consideram necessários na atividade de medir (linhas 242 – 256 e linhas 622 – 625 em ME.I.1 e linhas 1033 – 1040 em ME.I.3, no **Quadro 12**). Entretanto, por conta de se associarem a elementos distintos, essas seis citações foram reagrupadas em dois subgrupos, nos quais identificamos conteúdos distintos do conhecimento revelado pelos professores.

Quadro 12 – Reagrupamento das citações e emergência dos descritores do conhecimento do professor associados ao KoT

Definitions	
Linhas 46 – 48 em ME.I.2 46. P2: Eu coloquei: é comparar. Pegar um cubinho e ver quantos cabem em uma barrinha[63]. 47. P8: Eu coloquei: é quantificar o tamanho de alguma coisa. 48. P10: Eu coloquei: medir algo é compará-lo a uma unidade pré-estabelecida. **Linhas 27 – 35 em ME.I.3** 27. P7: O que é medir? Eu disse assim, que a gente pode medir qualquer coisa, desde que 28. tenha um referencial. O que eu pensei que é um referencial? Eu posso medir 29. usando palmo, régua... Mas, aí, já bagunçou, porque ela já pediu, lá... 30. P1: Eu já estou com um pouco mais com conteúdo escolar na cabeça. Eu já estou um 31. pouco mais estragada. Porque, quando a gente fala de medidas, eu entendo que é 32. quantificar. Mas pode ser o tempo, pode ser a massa, pode ser... você entendeu?	**Linhas 242 – 256 em ME.I.1** 242. P12: Tudo o que tem unidade pode ser medido. 243. F1:O que é que você chama... quando você fala que tudo que tem unidade pode 244. ser medido... 245. P11: Acho que ela está querendo dizer unidade de referência, é isso? 246. F1: Não sei, não sei... 247. P12: É que eu estou considerando o contexto da Física, em que a gente tem uma 248. separação entre unidade de comprimento, de massa e de tempo. 249. F1: Ok! 250. P12 Por isso que eu até considerei o tempo como algo que pode ser medido. 251. F1: E pode mesmo. Efetivamente o tempo pode ser medido. 252. P4: Mas você tem que dizer qual é a sua referência? Em semanas, em dias, em

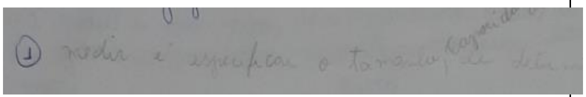
[63] Note-se que esta corresponde a uma única linha de transcrição mas que, por conta da organização no quadro, a limitação do espaço físico não nos possibilita manter a estrutura conforme disposta no documento de original de transcrição.

<table>
<tr>
<td>33. Então, assim, eu coloquei quantificar, daí dei os exemplos.

34. P5: Eu coloque que é expressar uma quantidade, que é quantificar. Com o uso da sua

35. unidade de medida.

T.I. 3



“Medir é especificar o tamanho de determinadas coisas”</td>
<td>253. meses, em anos, em segundos, em minutos, em horas. Você tem que ter essa

254. referência, não é isso?

255. P12: Ou o ciclo da Lua, ciclo do Sol, essas coisas.

256. P4: É. Então você consegue medir.

Linhas 622 – 625 em ME.I.1

622. P4: Então, a gente ensina para

623. eles que as unidades de medidas podem ser convencionais ou não convencionais.

624. Então, é uma forma de eles já entenderem que, para medir algo, eu preciso de um

625. instrumento. Seja ele convencional ou não convencional.

Linhas 1033 – 1040 em ME.I.3

1033. P5: A unidade que eu encontrei foi área. Vocês...

1034. P7: Só comprimento e largura

1035. P5: Então é só comprimento!

1036. P7: Hãn?

1037. P5: É só uma unidade: de comprimento.

1038. P1: Ah, tá.

1039. P5: A unidade é comprimento.

1040. P7: A unidade é comprimento.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Análise</td>
</tr>
<tr>
<td>Professores revelam um conhecimento de que a medida está associada à comparação de uma unidade de medida (que denominam majoritariamente por “referência”) com um todo, seguida de quantificação e ou/atribuição de um valor numérico.</td>
<td>As evidências mostram que, por um lado, os professores parecem não distinguir unidade de medida de instrumento de medição. Por outro lado, mostram que, ainda que denotem um entendimento de que a unidade de medida se relaciona com uma magnitude, alguns dos professores confundem o que é unidade de medida com que é uma grandeza.</td>
</tr>
</table>

Descritores emergentes	
KoTd1 – conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).	**KoTd5** – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza.

Fonte: autora da tese (2021)

Das 473 evidências associadas ao KoT, foram sintetizados 31 descritores: 6 relacionados com *Definitions*; 8 com *Foundations*; 5 com *Properties*; 2 com *Phenomenology and applications*; 8 com *Procedures*; e 2 com *Registers of representation* (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a). Note-se que a ordem da numeração dos descritores está relacionada exclusivamente com a quantidade de produções dos professores vinculadas a cada um deles, ou seja, quanto maior o número de produções associadas, menor é a numeração do descritor. Portanto, KoTd1 tem mais produções associadas do que KoTd5, por exemplo. Assim, diferentemente do que foi feito no caso dos descritores associados ao subdomínio KoT no âmbito do tópico de divisão, não seguimos uma ordem sequencial na numeração dos indicadores de cada categoria, mas uma numeração por quantidade de evidências associadas.

Outro aspecto que difere em termos da abordagem analítica que empregamos com as informações relacionadas ao tópico de divisão e aquelas relacionadas com os tópicos de Medida, se refere à necessidade que verificamos de identificar outros dois tipos de descritores, além daqueles que se associavam com o conteúdo de conhecimento explicitamente revelado pelos professores. Assim, como em alguns casos o conteúdo do conhecimento revelado pelos professores foi considerado como matematicamente inapropriado, os descritores emergentes dessas produções foram identificados com o símbolo "*". Ao mesmo tempo, nas situações em que as produções não exteriorizaram, de forma explícita, elementos suficientes para caracterizar o conteúdo do conhecimento, mas a discussão conjunta com os fundamentos teóricos assumidos para a análise permitiu constituir descrições do conteúdo desse conhecimento, esses descritores foram identificados com o símbolo "**" associado.

Organização e procedimentos de análise do conteúdo dos descritores e a abordagem metodológica para um processo de teorização das conexões matemáticas

Até aqui, as análises nos levaram à emergência de dois conjuntos de descritores associados ao subdomínio KoT, no âmbito do tópico de divisão (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b) e dos tópicos do tema de Medida (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a), respectivamente.

Destacamos que, nesse processo, estávamos concentrados em contemplar os dois primeiros objetivos delineados para esta investigação:

i. *Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) no âmbito da divisão, mobilizado e revelado por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação*;

ii. *Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) relacionados ao tema de Medida, mobilizados e revelados por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação.*

Recorde-se, ainda, que nosso terceiro objetivo investigativo se refere a:

iii. Mapear e descrever as possíveis relações que ocorrem entre o conteúdo dos conhecimentos associados aos tópicos de Medida e aos tópicos de divisão, de modo a evidenciar o caráter estrutural e estruturante desses tópicos, numa perspectiva de "descompactação" desse conhecimento.

Assim, para alcançar esse objetivo, nos propusemos as seguintes sub-questões:

3) *Que elementos se destacam no conteúdo do conhecimento de professores participantes de um contexto de Formação Continuada evidenciado pelos descritores desse conhecimento especializado associado aos tópicos do tema de Medida e de divisão?*
4) *Que relações se observam entre o conteúdo do conhecimento especializado de professores participantes de um contexto de Formação Continuada nos tópicos de divisão e de Medidas?*

Nesse sentido, a partir desses dois conjuntos de descritores, passamos a nos concentrar, por um lado, na busca por elementos matemáticos que se destacam no conteúdo do conhecimento do professor e, por outro lado, nas relações que se podem observar entre esses elementos. Isso significa que a busca pela descrição das conexões intra-conceituais e interconceituais (CARRILLO et al., 2018) ocorre a partir da identificação desses elementos matemáticos estruturantes e unificadores presentes no conteúdo dos descritores de conhecimento e das relações que se podem observar entre eles.

Assim, foi necessária uma mudança de foco analítico, já que, a partir deste ponto da investigação, passamos a lidar com um tipo distinto de informações para análises. Por isso, nesta terceira fase da pesquisa, os dois conjuntos de descritores do conhecimento do professor relacionados aos tópicos de divisão e do tema de Medida passaram a ser encarados como as informações para análise.

Essa mudança de foco analítico se coaduna com a perspectiva de abordagem metodológica assumida em um estudo de caso instrumental (STAKE, 2005), uma vez que buscamos obter, a partir do mapeamento e descrição das relações entre o conteúdo do conhecimento do professor, uma teorização a respeito das conexões matemáticas que ocorrrem (ou que podem ocorrer), quando se tratam dos tópicos do tema de Medida e do tópico de divisão.

Nessa nova fase analítica, então, partimos dos quadros de descritores do conteúdo de conhecimento do professor sintetizados em cada uma das etapas de análise descritas nas seções anteriores e apresentadas nos dois artigos da tese (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, 2021b) –, no Capítulo 3.

Em um primeiro momento, os dois conjuntos de descritores foram dispostos em um mesmo quadro (**Quadro 13**), de modo a que pudéssemos obter uma visão global de seu conteúdo e, ao mesmo tempo, confrontá-los em termos dos elementos caracterizadores desse conteúdo, considerando, em primeira instância, descritores incluídos em uma mesma categoria.

Quadro 13 – Descritores do conhecimento associados ao KoT (divisão e Medida)

Categorias	*Descritores KoT Divisão*	*Descritores KoT Medidas*
Definitions (KoTd)		**KoTd1(medida):** conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida). **KoTd2(medida):** conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido. **KoTd3(medida):** conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira. **KoTd4(medida):** conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional. **KoTd5(medida):** conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza. **KoTd6(medida):** conhecer que a definição de perímetro (em 2D) é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana.
Properties (KoTpp)		**KoTpp1*(medida):** conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada. **KoTpp2*(medida):** conhecer que toda unidade de medida (padronizada ou não padronizada) possui múltiplos e submúltiplos. **KoTpp3**(medida):** conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua. **KoTpp4(medida):** conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas. **KoTpp5*(medida):** conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10).

Foundations (KoTf)	**KoTd1(divisão)**: conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes. **KoTd2(divisão)**: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida.	**KoTf1*(medida):** conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. **KoTf2**(medida):** conhecer que os construtos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza. **KoTf3*(medida):** conhecer que o que se mede são as grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos. **KoTf4(medida):** conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam a constituição de noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas. **KoTf5(medida):** conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição. **KoTf6**(medida):** conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza. **KoTf7(medida):** conhecer as unidades de medida padronizadas para cada tipo de grandeza. **KoTf8**(medida):** conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado.
Phenomenology and applications (KoTph)	**KoTph1(divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como partilha equitativa. **KoTph2(divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como medida. **KoTph3(divisão):** conhecer os tipos de problemas e contextos (ideias neles contidas) que contribuem para evocar cada um dos sentidos da divisão, i.e., no sentido de partilha, a ideia de distribuição de elementos de um conjunto em subconjuntos; no sentido de medida, a ideia de comparação entre quantidades de mesma grandeza (“quantas vezes uma quantidade cabe dentro da outra?”).	**KoTph1(medida):** conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra. **KoTph2*(medida):** conhecer os distintos contextos de aplicação dos fundamentos da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.
Procedures (KoTmp)	**KoTmp1(divisão):** conhecer distintas estratégias de resolução de uma divisão: uma divisão pode ser resolvida pelo algoritmo euclidiano; por decomposição do dividendo em parcelas correspondentes a dezenas e unidades;	**KoTmp1*(medida):** conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem

	por agrupamento; e por adições sucessivas. **KoTmp2(divisão)**: conhecer a natureza do resultado da operação no sentido e partilha equitativa: o valor numérico obtido – quociente – corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos entre os quais o todo foi distribuído. **KoTmp3(divisão)**: conhecer a natureza do resultado quando a divisão é entendida como medida: o valor numérico obtido (quociente) corresponde à quantidade de vezes que a unidade de referência coube no todo (agrupar o todo em partes de mesma magnitude).	que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração. **KoTmp2(medida):** conhecer a característica do resultado de uma medição: uma medida é expressa por um valor numérico associado a uma marca, correspondente à unidade de medida (padronizada ou não) utilizada. **KoTmp3*(medida):** conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza. **KoTmp4(medida):** conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido (v = d/u). **KoTmp5**(medida):** conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing*. **KoTmp6(medida):** conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir. **KoTmp7(medida):** conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e.g., largura da caneta para medir comprimento; menor face de um prisma para medir a área de uma região. **KoTmp8(medida):** conhecer o procedimento associados ao uso da fórmula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais.

Registers of representations (KoTrp)	**KoTrp1(divisão)**: conhecer o papel dos distintos sistemas representacionais na atribuição de significado a conceitos. **KoTrp2(divisão)**: conhecer o significado atribuído ao símbolo “÷”: relaciona-se com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes, quando a operação for tomada como partilha equitativa; e o símbolo “÷” está associado ao estabelecimento de uma relação de comparação entre quantidades (medidas). **KoTrp3(divisão)**: conhecer formas de estabelecer relações entre distintas representações para atribuir significado a conceitos, propriedades e/ou procedimentos. **KoTrp4(divisão)**: conhecer o papel do emprego de determinada verbalização para dar significado e/ou corresponder a cada um dos sentidos da divisão. **KoTrp5(divisão):** conhecer a relação e a adequação dos tipos de representação pictórica, associadas a cada um dos sentidos da divisão: na partilha equitativa, indicando distribuição; na medida, indicando agrupamentos.	**KoTrp1*(medida):** conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas. **KoTrp2(medida):** conhecer a nomenclatura e simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas.

Fonte: autora da tese (2021)

Ainda sem empregar procedimentos específicos de análise, apenas a partir de algumas rodadas de leitura do conteúdo desses descritores, identificamos que alguns deles deveriam ser readequados em termos das redações originalmente propostas (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b). Essas readequações se mostraram necessárias em virtude de três aspectos. O primeiro deles, se referiu ao tipo do conteúdo do conhecimento descrito e a importância de se garantir a correspondência adequada à categoria a que ele pertence, como foi o caso de KoTd1(divisão) e KoTd2(divisão), em que foi preciso identificá-los apropriadamente como descritores associados à categoria *Foundations*. O segundo aspecto se referiu ao fato de que, pela própria natureza das categorias em que esses descritores foram incluídos, suas redações não estavam totalmente apropriadas para caracterizar o conteúdo do conhecimento do professor ali considerado. Esses foram os casos dos descritores KoTph1(divisão) e KoTph2(divisão), em que verificamos a necessidade de complementar as descrições do conteúdo de conhecimento associado. E, por último, identificamos um caso – KoTrp2(divisão) – em que foi necessário refinar termos utilizados para referir elementos estruturantes no conteúdo do descritor. Assim, deste ponto em diante, passamos a considerar os descritores conforme a sua nova redação e, para identificá-los, utilizamos o símbolo “#” acrescido à frente da sigla do subdomínio.

Quadro 14 – Readequações nas redações dos descritores do KoT divisão

Redação original	*Nova redação*
KoTd1(divisão): conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes.	**#KoTd1 fundamento (divisão)**: conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes.
KoTd2(divisão): conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida.	**#KoTd2 fundamento (divisão)**: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida.
KoTph1(divisão): conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como partilha equitativa.	**#KoTph1(divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como partilha equitativa: dividir é distribuir uma quantidade entre determinado número de conjuntos, de modo a que cada um dos conjuntos contenha a mesma cardinalidade após a distribuição.
KoTph2(divisão): conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como medida.	**#KoTph2(divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como medida dividir é comparar as magnitudes do dividendo e do divisor, de modo a quantificar o número de vezes que a magnitude do divisor precisa ser agrupada até compor a magnitude do dividendo.
KoTrp2(divisão): conhecer o significado atribuído ao símbolo “÷”: relaciona-se com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes, quando a operação for tomada como partilha equitativa; e o símbolo “÷” está associado ao estabelecimento de uma relação de comparação entre quantidades (medidas).	**#KoTrp2(divisão)**: conhecer o significado atribuído ao símbolo “÷”: relaciona-se com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes, quando a operação for tomada como partilha equitativa; e o símbolo “÷” está associado ao estabelecimento de uma relação de comparação entre quantidades (magnitudes) quando a divisão for tomada como medida.

Fonte: autora da tese (2021)

Uma vez que nosso interesse está na observação de conexões do tipo intra-conceituais e interconceituais (CARRILLO et al., 2018), consideramos apropriado nos concentrarmos na busca por propriedades e características do conteúdo dos descritores, que se evidenciam na forma de elementos matemáticos estruturantes que, de algum modo, se mostram invariantes, ainda que a forma como se apresentem, em alguns casos, possa variar. Além disso, nos concentramos em identificar a presença de ideias unificadoras no conteúdo desses descritores.

Com isso, elaboramos dois tipos de quadros: o primeiro tipo, em que focamos nesses elementos estruturantes e ideias unificadoras dos descritores relacionados ao KoT no âmbito da divisão e no âmbito dos tópicos do tema de Medida, em separado.

Quadro 15 – Elementos estruturantes e ideias unificadoras do conteúdo do conhecimento do professor no tópico de divisão

Elementos estruturantes	***Ideias unificadoras***
Dividendo	QUANTIFICAÇÃO (discreta ou contínua)
Divisor	QUANTIFICAÇÃO (discreta ou contínua)
Quociente	DISTRIBUIÇÃO; QUANTIFICAÇÃO (discreta) COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO (discreta ou contínua)
Quantidade discreta	QUANTIFICAÇÃO (Contagem)
Quantidade contínua	QUANTIFICAÇÃO (Magnitude)
Representações numéricas das quantidades que expressam o dividendo, o divisor e o quociente (base decimal)	QUANTIFICAÇÃO (contínua)
Representações pictóricas para divisão como partilha	DISTRIBUIÇÃO; DECOMPOSIÇÃO
Contextos de aplicação da divisão como partilha	DISTRIBUIÇÃO; DECOMPOSIÇÃO
Representações pictóricas para divisão como medida	AGRUPAMENTO; COMPOSIÇÃO
Contextos de aplicação da divisão como medida	AGRUPAMENTO; COMPOSIÇÃO
Algoritmo (eclidiano)	GENERALIZAÇÃO

Outros procedimentos de resolução da operação: adição sucessiva de parcelas	COMPOSIÇÃO
Outros procedimentos de resolução da operação: subtração sucessiva de parcelas	DECOMPOSIÇÃO

Fonte: autora da tese (2021)

Recorde-se que entendemos por “elementos estruturantes” aqueles conceitos, construtos, procedimentos, representações, etc., que estão presentes nos descritores e que, de certa maneira, contribuem para organizar e dar forma ao conteúdo desses descritores. Ao mesmo tempo, denominamos por “ideias unificadoras” aquelas ideias matemáticas que estão presentes em diversos contextos, em diferentes sub-áreas da matemática ou em outras áreas do conhecimento, e que dão sustentação aos raciocínios matemáticos e suas significações inerentes a cada situação. Algumas dessas ideias unificadoras são consideradas *big ideas* na Matemática (CHARLES, 2005).

Assim, por exemplo, no descritor “***KoTd2(divisão)****: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida*”, entendemos que os construtos “dividendo” e “divisor” são esses elementos estruturantes, e que as ideias unificadoras que sustentam os raciocínios envolvidos nesse conteúdo do conhecimento são “quantificação”, “distribuição” e “comparação”.

Quadro 16 - Elementos estruturantes e ideias unificadoras do conteúdo do conhecimento do professor nos tópicos do tema de Medida

Elementos estruturantes	***Ideias unificadoras***
Grandeza	COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO;
Magnitude	QUANTIFICAÇÃO (Contínua)
Todo	QUANTIFICAÇÃO (Contínua)
Unidade de medida	QUANTIFICAÇÃO (Contínua)
Valor da medição	QUANTIFICAÇÃO (Contínua)

Múltiplos e submúltiplos da unidade de medida	COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO (contínua); RELAÇÕES PARTE-TODO; AGRUPAMENTO; COMPOSIÇÃO; DECOMPOSIÇÃO; EQUIVALÊNCIA E PROPORCIONALIDADE
Iteração	GENERALIZAÇÃO
Procedimentos empregues na medição das grandezas comprimento, área, capacidade, massa, etc. (Princípios da atividade de medir): particionamento do todo; iteração da unidade de medida sobre o todo; acumulação até completar o todo; atribuição do valor numérico à medida.	DECOMPOSIÇÃO; COMPOSIÇÃO; QUANTIFICAÇÃO GENERALIZAÇÃO

Fonte: autora da tese (2021)

Em outro tipo de quadro, fizemos um comparativo dos elementos estruturantes e das ideias unificadoras presentes no conteúdo dos descritores de conhecimento para o tópico de divisão e para os tópicos de Medida.

Quadro 17 – Comparativo dos elementos estruturantes e ideias unificadoras presentes nos descritores do KoT em divisão e nos tópicos de Medida

	Tópico de divisão	***Tópicos do tema de Medida***	***Ideias unificadoras***
Elementos estruturantes	Dividendo	Todo a ser medido	DISTRIBUIÇÃO; COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO;
	Divisor	Unidade de medida	
	Quociente	Valor numérico da medida	
	Representações numéricas do divisor (base 10)	Múltiplos e submúltiplos da unidade de medida com estrutura decimal	COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO; EQUIVALÊNCIA E PROPORCIONALIDADE

	Adições sucessivas de parcelas	Acumulação	AGRUPAMENTOS; COMPOSIÇÃO/DE COMPOSIÇÃO
	------	Grandeza	COMPARAÇÃO; QUANTIFICAÇÃO;
	Quantidade discreta	------	QUANTIFICAÇÃO
	Quantidade contínua	Magnitude	QUANTIFICAÇÃO; CONTINUIDADE
	Algoritmo	Iteração	GENERALIZAÇÃO

Fonte: autora da tese (2021)

Com as informações organizadas no **Quadro 16**, no **Quadro 17** e no **Quadro 18**, iniciamos o processo de mapeamento das relações entre os descritores de conteúdo, primeiramente, no âmbito de cada tópico matemático em foco na investigação e, em seguida, passamos a identificar as relações entre os descritores do conhecimento no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida, simultaneamente.

Com essas buscas, estávamos interessados em observar, no primeiro caso, as conexões intra-conceituais e, no segundo caso, as conexões interconceituais entre os tópicos de divisão e do tema de Medida.

As relações eram identificadas a partir de dois critérios: primeiro, verificávamos os descritores que possuíam os mesmos elementos estruturantes; em seguida, verificávamos os descritores cujas ideias unificadoras fossem correspondentes. Assim, considerando um movimento de teorização a partir dos descritores de conhecimento elencados, foi possível enunciar um conjunto de descritores de conhecimento associados a essas conexões intra-conceituais e interconceituais, no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida.

O conteúdo desses descritores de conexões foram identificados com as seguintes nomenclaturas: i) Intra n (tópico); ii Inter n (tópico1-tópico2). Nos dois casos, “n” indica uma numeração atribuída por ordem de observação das conexões, que ocorreu durante o processo de análise, não possuindo qualquer indicativo de ordem por hierarquia. No caso das conexões interconceituais, quando indicamos “(tópico1-tópico2)”, o primeiro tópico mencionado na nomenclatura do descritor tem um caráter de fundamentar o segundo tópico, no sentido de que, conteúdo do conhecimento associado a esse tópico 1 serve como base sustentadora para o conteúdo do conhecimento associado a esse tópico 2.

Por exemplo, um descritor associado a uma conexão intra-conceitual no âmbito do tópico de divisão é:

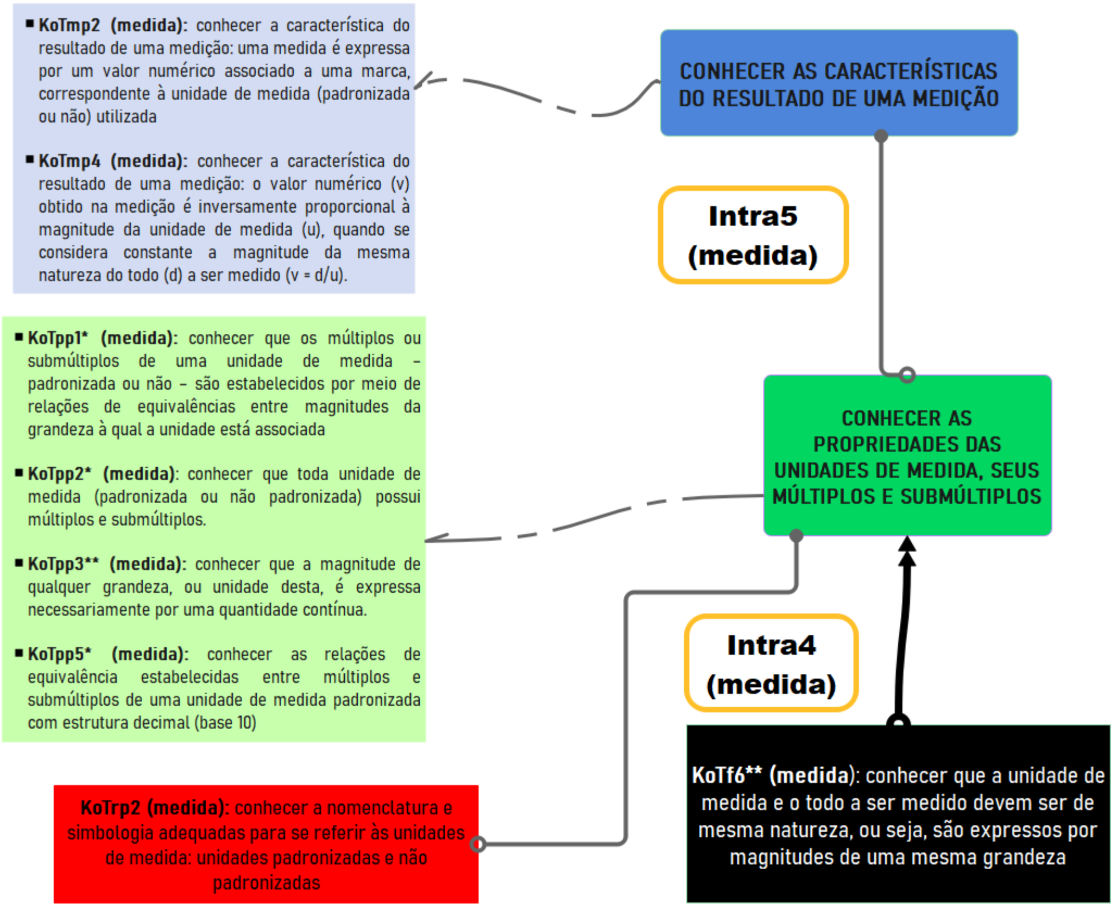
> **Intra1 (divisão):** *Conhecer a natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" enquanto quantidades discretas ou contínuas e conhecer as condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão, sustenta o conhecimento de que esta operação pode ser interpretada a partir de dois sentidos distintos, quais sejam, partilha equitativa ou medida.*

E um exemplo de descritor associado a uma conexão interconceitual no âmbito dos tópicos de Medida e de divisão é:

> **Inter1 (medida-divisão)**: *Conhecer que a congruência das naturezas entre a unidade de medida e o todo a ser medido associado ao conhecimento de que toda magnitude é expressa por uma quantidade contínua, sustenta o reconhecimento dos construtos "dividendo" e "divisor" como "todo" e "unidade de medida", respectivamente, e garante o reconhecimento de que suas quantidades são expressas por magnitudes, ou seja, por quantidades contínuas*.

Os mapeamentos das relações observadas são apresentados em forma de diagramas em que as formas retangulares coloridas referem, de maneira mais sintética, o conteúdo do conhecimento associado às categorias do KoT, segundo o MTSK (CARRILLO et al., 2018). Por exemplo, na **Figura 13**, a forma retangular verde, identificada por "*Conhecer as propriedades das unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos*", indica um conjunto de descritores do conhecimento do professor associado à categoria *Properties*; na forma retangular azul, "*Conhecer as características dos resultados de uma medição*", se associa a outro conjunto de descritores incluídos na categoria *Procedures*; e os retângulos coloridos em preto e vermelho correspondem a descritores do conhecimento associados, respectivamente, a fundamentos e a registros de representação, no âmbito dos tópicos do tema de Medida.

Figura 13 – Exemplo de mapeamento das relações entre o conteúdo do conhecimento do professor no âmbito do tópico de Medida



Fonte: autora da tese (2021)

Além disso, nessas relações observadas, sempre que o conteúdo de um descritor representar um conhecimento fundamentador de outros conhecimentos, ele estará indicado dentro de formas geométricas coloridas em preto. O retângulo em preto, por exemplo (ver Figura 13), corresponde a um descritor que já havia sido elencado durante a segunda fase da pesquisa e, por isso, é parte dos resultados de um dos dois artigos que compõem a tese.

No entanto, uma vez que nos propusemos a desenvolver um estudo de caso instrumental (STAKE, 2005), durante essa terceira fase analítica da investigação, a partir de um movimento natural de revisão do conteúdo dos descritores já elencados, a discussão teórica, intercalada com os resultados empíricos, nos levou a identificar outros descritores do conhecimento associados ao KoT no âmbito do tópico de divisão, de modo a que fosse possível sustentar as nossas teorizações emergentes das conexões matemáticas. Desssa forma, indicamos no mapeamento das relações esses novos descritores incluídos em formas elípticas.

Com relação aos tipos de conectores utilizados nesses mapeamentos, cada um possui uma função nessa rede de relações. Por exemplo, as setas duplas na cor preta, indicam relações de “fundamentação”. As relações de “atribuição de significado a” estão indicadas com conectores formados por linhas contínuas na cor cinza, e, nas extremidades desses conectores, um círculo não preenchido indica os conhecimentos que favorecem a atribuição de significado ao conteúdo de conhecimento incluído na forma geométrica em que o círculo preenchido toca. As linhas cinza pontilhadas servem para indicar especificamente o conteúdo de conhecimento dos descritores considerados nas categorias.

Conforme comentado anteriormente, esta tese se apresenta no formato *multipaper híbrido*, pois é composta por dois artigos e de uma seção em que se discute, de forma articulada, os resultados desses dois estudos, evidenciando as conexões intra e interconceituais observadas com base no conteúdo dos descritores do conhecimento do professor. Nesse sentido, o capítulo seguinte divide-se em três seções, em que as duas primeiras referm-se aos dois artigos da tese, e a terceira seção refere-se à discussão articulada em que apresentamos a proposta de teorização das conexões matemáticas.

CAPÍTULO 3: O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PROFESSOR NOS TÓPICOS DE DIVISÃO E DE MEDIDA E UMA TEORIAZAÇÃO DAS CONEXÕES MATEMÁTICAS

Com intuito de responder à pergunta "*Que conhecimento especializado revelam professores participantes de um Programa de Formação Continuada, focada nas especificidades do conhecimento do professor de e que ensina matemática, sobretudo em relação a elementos estruturais e estruturantes da matemática, no âmbito dos tópicos de Medidas e de divisão?",* foram feitos recortes para a investigação, orientados por sub-questões de pesquisa, que nos levaram à produção de dois artigos.

Embora cada um desses subestudos se dedique a investigar as especificidades do conhecimento do professor relacionadas a tópicos matemáticos distintos, o foco de atenção é essencialmente o mesmo: explorar e descrever o conteúdo do conhecimento do professor associado ao subdomínio *Knowledge of Topics*, segundo a conceitualização do MTSK (CARRILLO et al., 2018).

Assim, no primeiro artigo intitulado "**Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão**"[64] (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b), são apresentados os descritores de conteúdo do conhecimento especializado do professor, no âmbito do tópico de divisão. Com esse estudo, evidenciamos que o conhecimento matemático do professor no âmbito das operações, particularmente da divisão, vai muito além de um conjunto de conhecimentos procedimentais isolados, associados exclusivamente ao "saber fazer", e envolve, entre outros aspectos, conhecer os distintos sentidos da operação e suas aplicações em contextos também distintos, isto é, os tipos específicos de problemas em que se evoca cada sentido; os tipos de representações mais adequadas para atribuição de significado a cada um dos sentidos das operações, bem como as relações entre essas representações.

O segundo artigo, cujo título é "**Caracterização do Conhecimento Especializado do professor de matemática em tópicos de Medida**"[65] (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a)

[64] Artigo publicado no periódico Zetetiké.

[65] Artigo submetido ao periódico *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Investigativa* (Relime).

dedica-se à exploração do conhecimento especializado do professor e à apresentação de descritores de conteúdo desse conhecimento, no âmbito dos tópicos do tema de Medida.

Participaram desse estudo professores que lecionam desde a Educação Infantil até o Ensino Superior, o que nos permitiu evidenciar que as especificidades do conhecimento do professor não estão necessariamente associadas à etapa em que ele leciona (ou lecionará). Ademais, com esse estudo, apresentamos nossa proposta de refinamento da categorização do subdomínio KoT, evidenciando a necessidade de se encarar de forma separada as categorias *Definitions*, *Properties* e *Foundations*, quando se assume uma perspectiva de caracterização das especificidades do conhecimento do professor, com intuito de explicitação dos elementos estruturantes do conteúdo desse conhecimento.

A partir dos resultados obtidos nesses dois subestudos, apresentamos uma proposta de teorização das conexões matemáticas, que se observam quando são explicitados os elementos caracterizadores das particularidades e especificidades do conhecimento do professor, em relação a cada tópico matemático.

A nossa teorização das conexões intra-conceituais e interconceituais é realizada a partir do mapeamento dos descritores do conhecimento obtidos como resultados dos dois primeiros artigos, bem como das relações que se observam entre os elementos estruturantes do conteúdo desses conhecimentos. Nesse sentido, numa articulação do entendimento original de “pacotes do conhecimento” (MA, 1999) com a perspectiva de considerar as especificidades do conhecimento do professor (CARRILLO et al., 2018), apresentamos a nossa proposta de “pacotes de conhecimento especializado”, associados aos tópicos de divisão e de Medida.

Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática, relacionado ao tópico de divisão[66]

Kindergarten and Primary teacher's Specialized Knowledge on the topic of division

Milena Soldá Policastro

Miguel Ribeiro

Resumo

Assumindo que o conhecimento do professor exerce um papel crucial em sua prática e nas aprendizagens dos alunos e por ser a divisão um dos tópicos mais problemáticos para professores e para alunos, focamos nossa atenção no conteúdo do Conhecimento Especializado, revelado em um curso de especialização relativamente a este tópico, por professores que atuam desde a Educação Infantil. O material coletado das interações dos professores, ao discutirem uma tarefa para a formação, foi analisado segundo a lente do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, com intuito de caracterizar o conteúdo do Conhecimento Especializado do professor no tópico de divisão. Dessa análise, emergiram descritores do Conhecimento Especializado do professor de e que ensina matemática relacionado a conceitos, procedimentos, propriedades, fundamentos e sistemas representacionais no âmbito da divisão, contribuindo para que, nos contextos formativos, sejam intencionalmente implementados instrumentos eficazes para desenvolver tal conhecimento.

Palavras-chave: MTSK; Divisão; Educação Infantil e Anos Iniciais; Formação de Professores.

Abstract

Considering teachers' knowledge plays a central role in their practice and on students' learning, and as the division is one of the most problematic topic for teachers' and students', we focus our attention on the content of kindergarten and primary teachers' specialized knowledge who participated of a teacher education program in Brazil, related to such topic. Data concerns teachers' interactions when discussing a task and was analysed according to the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge perspective to characterize the content of such a knowledge on division. From the analysis, emerged a set of descriptors of teachers' specialized knowledge related to concepts, procedures, properties, foundations and systems of representation in the scope of division. It contributes to improve the way teachers' training programs are conceptualized, providing elements to intentionally implement effective instruments for the development of such a teacher's knowledge.

Keywords: MTSK; Division; Kindergarten and Primary school; Teacher Education.

Introdução

As especificidades do conhecimento do professor de matemática têm sido foco de várias pesquisas nas últimas décadas (e.g., Ball, Thames & Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005). Congressos internacionais de relevância na área da

[66] Este artigo foi publicado na revista **Zetetiké,** v.29, ISSN 2176-1744. As normas técnicas e formatação aqui apresentadas seguem as indicações desta revista. Referência completa: POLICASTRO, M. S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. **Zetetiké**, v. 29, p. 1–24, 2021.

Educação Matemática (por exemplo, ICME[67], PME[68], CERME[69]) têm, a cada ano, discutido mais trabalhos voltados a essa temática. Embora as pesquisas com ênfase no conhecimento do professor apresentem certas divergências relativas a aspectos centrais para a caracterização das especificidades desse conhecimento, há um consenso entre elas sobre o fato de que um amplo e profundo conhecimento do conteúdo a ser ensinado exerce um papel crucial na prática do professor (Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002; Fennema & Franke, 1992; Ribeiro, 2011a). Paralelamente, outro centro de atenção considerado nas investigações relaciona o conhecimento do professor, nas suas mais variadas dimensões, constatando o impacto que este conhecimento exerce nas aprendizagens discentes (Boyd, Grossman, Lankford, Loeb & Wyckoff, 2009).

Documentos oficiais de diferentes países, exames internacionais, como é o caso do PISA, e programas educacionais específicos para o desenvolvimento de futuros profissionais com capacidades e habilidades voltadas às áreas de ciências, tecnologia, engenharia e matemática (STEM), atribuem à matemática um papel particularmente relevante. Assim, torna-se essencial ampliar e aprofundar a compreensão acerca das especificidades do conhecimento do professor de e que ensina Matemática, de modo a poder problematizar, por exemplo, aspectos relacionados com a qualidade da formação docente que se tem oferecido, em particular, mas não exclusivamente, no Brasil.

Dentre os tópicos matemáticos mais problemáticos a serem explorados com os alunos, destacam-se aqueles relacionados às quatro operações. São reconhecidas as dificuldades relacionadas a tais tópicos (Fosnot & Dolk, 2001; Rizvi, 2007), tradicionalmente enfrentadas tanto pelos alunos quanto pelos professores, e, nesse contexto, a divisão é considerada particularmente problemática (Correa, Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985). Essas dificuldades estão associadas, entre outros aspectos, à priorização do saber fazer o algoritmo, em detrimento do entendimento e da atribuição de significado à operação; ao uso (in)adequado de determinadas verbalizações associadas aos procedimentos (Simon, 1993); ao não estabelecimento das conexões entre a divisão e as demais operações (Young-Loveridge & Bicknell, 2018); à pouca (ou nenhuma) atenção que se dá nesse contexto aos princípios de contagem e de agrupamento de quantidades em uma unidade – *unitizing* (Behr, Harel, Post & Lesh, 1994).

A pesquisa relacionada com o ensino e a aprendizagem da divisão tem assumido o foco prioritário de "identificar, descrever e analisar os erros e estratégias de resolução em relação aos conceitos de divisão" (Fávero & Neves, 2012, p. 36) por parte dos alunos, sem considerar o papel do professor e do seu conhecimento. Em uma revisão sistemática de dez anos de pesquisa dedicada ao ensino e à aprendizagem da divisão e dos racionais, Fávero e Neves (2012) apontam uma prática do professor, centrada ou "restrita na exposição de regras, em detrimento do conceito e, consequentemente, voltada à memorização, em detrimento do

[67] *International Congress on Mathematics Education*

[68] *Psychology on Mathematics Education*

[69] *The Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*

raciocínio" (p. 60). Esse tipo de abordagem associa-se a uma prática que tem por objetivo último o "saber fazer", e não o entender, ou seja, um tipo de ensino instrumentalizador e não voltado ao estabelecimento de relações (Skemp, 1989).

Assim, para cada um dos tópicos matemáticos e, em particular, para a divisão, é fundamental que se considerem os aspectos que tornam especializado o conhecimento do professor, levando-se em conta não somente o que ele conhece (ou precisa conhecer), mas, essencialmente, a forma como esse conhecimento se estrutura para dar coerência e coesão aos processos de ensino e de aprendizagem. Essa especialização é entendida aqui no sentido do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018), e está incorporada no domínio tanto do conhecimento do conteúdo quanto do conhecimento pedagógico do conteúdo. Objetivando, assim, ampliar o entendimento relativamente ao conteúdo do conhecimento matemático do professor no âmbito da divisão, aqui perseguimos a seguinte questão: *Que elementos caracterizam o conhecimento do tópico de divisão de PEM que participam de um contexto de Formação Continuada?*

Perspectivas teóricas no âmbito da divisão

Dentre as quatro operações, a divisão é considerada a mais complexa e problemática para os alunos (e.g., Bicknell, Young-Loveridge, Lelieved & Brooker, 2015; Fischbein et al., 1985), o que tem levado a que sua discussão (pelo menos formal) seja deixada por último, assumindo-se uma organização hierárquica do ensino dessas operações. Porém, tal hierarquização, assumindo uma abordagem disjunta, propicia que não se evidenciem as conexões existentes entre as quatro operações (Young-Loveridge & Bicknell, 2018) e tampouco entre conceitos fundamentais presentes em distintos contextos da matemática escolar, como é o caso das noções de agrupamentos – *unitizing* – (Behr et al., 1994) e de relações entre parte e todo (Young-Loveridge, 2001).

Quando se trata do ensino das operações, as dificuldades dos alunos podem estar relacionadas, por exemplo, a assumir o algoritmo como ponto de partida (Correa et al., 1998), tendo como foco os procedimentos vistos como regras destituídas de significado (Fávero & Neves, 2012; Ribeiro, Policastro, Mamoré & Di Bernardo, 2018). Essa ausência de significação pode estar relacionada com a pouca (ou nenhuma) atenção dada às relações entre os procedimentos e os conceitos subjacentes (Robinson & LeFevre, 2012), tais como a comparação entre quantidades – dividendo e divisor –, o todo de referência ou os sentidos associados à operação, o que faz com que os alunos não compreendam o que devem fazer e por que o devem fazer em cada momento (Ribeiro et al., 2018).

A compreensão da divisão se sustenta em uma constante comparação entre os elementos envolvidos (dividendo, divisor e quociente), o que vai além da compreensão da distribuição de elementos expressos por números, presentes tradicionalmente em problemas e operações do tipo "arme e efetue" (Lautert, Oliveira & Correa, 2017). Embora se reconheça a importância do trabalho com os algoritmos (Brocardo, Serrazina & Kraemer, 2003), muito antes deles, é essencial que os alunos entendam os sentidos da operação, dando especial atenção aos papéis dos elementos nela envolvidos (Correa et al., 1998; Squire & Bryant,

2002) e às relações entre eles (e.g., divisibilidade, multiplicidade e proporcionalidade).

Dentre os sentidos da divisão (Fischbein et al., 1985), assumimos a partilha equitativa e a medida como sendo os que consideramos mais apropriados para discutir com professores e alunos da Educação Infantil e dos Anos Iniciais. Os contextos de partilha equitativa correspondem a situações em que se pretende distribuir (ou repartir) equitativamente uma quantidade de elementos de um conjunto inicial (dividendo) entre determinada quantidade de conjuntos (divisor) – de modo a que, após a partilha equitativa, todos os conjuntos (divisor) contenham a mesma cardinalidade, que corresponde ao quociente. Na divisão no sentido de medida, dada uma quantidade inicial (dividendo), pretende-se identificar quantas vezes (quociente) uma outra quantidade (divisor) é necessária para medir a primeira.

Para entender a divisão, também de forma associada à verbalização usual do algoritmo tradicional[70], onde se busca a resposta para a pergunta "que número multiplicado pelo divisor fornece o dividendo?" (Ribeiro et al., 2018), é essencial entender este sentido de medida. Por outro lado, entender a medida demanda compreender alguns dos princípios que fundamentam a atividade de medir, a saber: i) escolha da unidade de medida; ii) partição do todo a ser medido; iii) iteração (repetição) da unidade de medida sobre o todo a ser medido; iv) acumulação de quantidade; v) atribuição de um valor numérico, correspondente à quantificação de vezes que a unidade foi repetida até completar a quantidade relativa ao todo a ser medido (Clements & Stephan, 2004).

Destacam-se os fatos de que somente a partir de um problema (contexto), em associação com uma determinada verbalização e/ou com uma representação que se efetue, é possível identificar qual dos dois sentidos da divisão é evocado (Fischbein et al., 1985) e perceber que as representações que se podem associar à resolução desses problemas possibilitam atribuir significado a cada um dos conceitos matemáticos envolvidos (Golden & Shteingold, 2001; Lesser & Tchoshanov, 2005).

Conhecimento Especializado do Professor

Diversas investigações na área da Educação Matemática têm buscado caracterizar e ampliar o entendimento dos diferentes domínios do conhecimento do PEM. Dentre as conceitualizações que buscam compreender as especificidades desse conhecimento, assumimos o *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*[71] – MTSK – (Carrillo et al., 2018), que considera essas especificidades, no âmbito tanto do *Mathematical Knowledge* (MK) como do *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

---

[70] Consideramos aqui o algoritmo tradicional aquele formalmente conhecido por algoritmo euclidiano da divisão.

[71] Por ser esta uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente, mantivemos a nomenclatura em inglês para todos os termos do modelo, pois sua tradução poderia desvirtuar o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa (Figura 1).

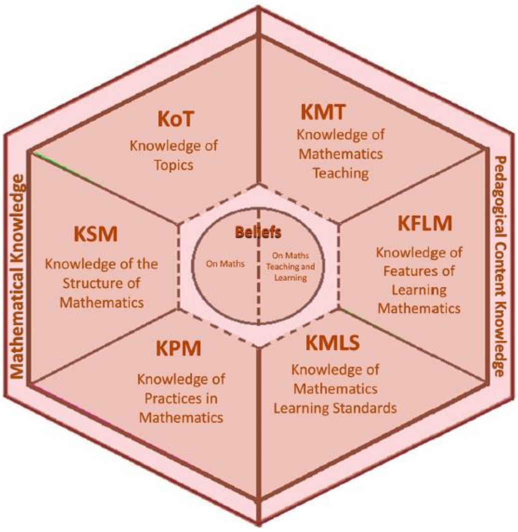


Figura 1 – O modelo MTSK

Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

O MK detalha o conhecimento do professor em termos de uma "disciplina científica, dentro de um contexto educacional" (Carrillo et al., 2018, p. 240), enquanto o PCK se refere a esse conhecimento em termos dos processos de ensino e aprendizagem de cada um dos tópicos matemáticos. Importa destacar que o PCK se refere aos conhecimentos do professor em que os tópicos matemáticos são condicionantes para o ensino e a aprendizagem da matemática e, dessa forma, excluímos desse subdomínio os conhecimentos pedagógicos gerais, mesmo em contextos de atividades matemáticas. No modelo, também se incluem as crenças do professor com relação à matemática como ciência e disciplina escolar e com relação ao seu ensino e aprendizagem.

Em cada um dos dois domínios do conhecimento do professor agrupam-se três subdomínios, e, pelo contexto do trabalho que aqui reportamos (ver epígrafe seguinte), discutiremos apenas o subdomínio *Knowledge of Topics* (KoT) e as respectivas categorias que contemplam o conteúdo do conhecimento do PEM nele incluído.

O Knowledge of Topics (KoT) no âmbito da divisão

Este subdomínio refere-se, dentre outros aspectos, ao conhecimento do PEM sobre conceitos, fundamentos, procedimentos e à forma como se dão as relações entre eles, quando elas ocorrem dentro de um mesmo tópico. Conhecer como se constituem e se evidenciam essas relações ajuda o professor a trabalhar a matemática de um ponto de vista mais estrutural (Mason, Stephens & Watson, 2009), oportunizando as aprendizagens (Hiebert & Grouws, 2007), pois contribui para o desenvolvimento do pensamento estrutural dos alunos em relação à matemática. Refere-se ao conhecimento do professor das diferentes definições matemáticas associadas a um mesmo tópico – quando houver mais de uma definição –, incluindo suas distintas formas de apresentação (por meio de linguagem simbólica e/ou verbal); das propriedades e dos fundamentos de um objeto ou ente matemático; dos procedimentos (o que, como, quando e por que se faz de determinada forma) tradicionais ou não convencionais e das implicações dos usos de determinados procedimentos, quando se busca dar sentido a construtos ou conceitos matemáticos; da descrição dos sentidos associados a um determinado conceito ou constructo (fenomenologia) e da associação de contextos capazes de evocar tais sentidos (aplicações); dos distintos sistemas de representações (pictórico, numérico, verbal, gráfico e simbólico) e as relações que se podem estabelecer, dentro de um mesmo tópico, entre esses tipos distintos de representações e certos procedimentos.

No âmbito da divisão, no KoT inclui-se, por exemplo, um conhecimento associado ao significado matemático do que é dividir; aos dois sentidos da divisão; aos diferentes procedimentos associados à operação de divisão, incluindo o algoritmo euclidiano, mas não só; aos distintos tipos de representação para uma divisão e as relações entre elas (por exemplo, pictórica, numérica, verbal), que contribuem para dar significado ao sentido assumido (partilha equitativa ou medida); aos tipos de problemas que podem ser formulados em correspondência com cada um dos sentidos da divisão, entre outros aspectos. Neste subdomínio consideram-se quatro categorias (Carreño, Rojas, Montes & Flores, 2013), a saber: (i) *Definitions*, *properties and foundations*; (ii) *Phenomenology and applications*; (iii) *Procedures;* (iv) *Registers of representation*.

(i) Definitions, properties and foundations

Inclui o conhecimento do professor relativo aos conceitos mais elementares da matemática, organizados hierárquica e logicamente para dar forma aos conceitos matemáticos mais complexos, ou para caracterizar as definições matemáticas de conceitos. Estão presentes também as propriedades matemáticas relacionadas com cada um dos conceitos, bem como as características estruturais dos construtos e dos conceitos relacionados a um mesmo tópico.

No âmbito da divisão, refere-se ao conhecimento do professor acerca do subconstruto divisor como quantidade de conjuntos entre os quais o dividendo será distribuído – divisão como partilha equitativa –, ou da unidade de medida a ser considerada para medir o todo (dividendo) – divisão como medida. Abrange também o conhecimento de que o significado matemático da divisão se distingue daquele que se refere à decomposição de um número natural em uma adição de parcelas não necessariamente iguais, noção associada ao significado semântico do termo “dividir”. Esse conhecimento da não congruência (direta) entre essas duas noções contribui para fundamentar o significado matemático de divisão – particularmente no sentido de partilha equitativa.

(ii) Phenomeology and applications

Aqui se inclui o conhecimento do professor acerca dos fenômenos, dos contextos, das aplicações de um tópico, conceito ou problemas para os quais se busca uma resposta (Gómez & Cañadas, 2016). No caso da divisão, consideram-se aspectos relacionados com a fenomenologia deste tópico, o conhecimento dos dois sentidos atribuídos à operação – partilha equitativa e medida (Fischbein et al., 1985), bem como dos tipos de problemas e contextos (ideias neles contidas) que podem ser formulados de modo a evocar cada um desses sentidos (Downton, 2009), o que corresponde às aplicações desse fenômeno.

(iii) Procedures

Nesta categoria está contemplado o conhecimento dos diferentes procedimentos que se pode empregar nas situações ou contextos em que determinado conceito está em jogo. Envolve, portanto, o conhecimento que tem o professor de cada um dos passos a serem seguidos; dos diferentes processos que pode empregar com o mesmo objetivo matemático – o que, como, quando e por que se faz; e das características dos resultados obtidos, sempre que se empregam tipos específicos de procedimentos. No tópico da divisão compõe esta categoria o conhecimento do professor sobre as distintas formas de proceder para resolver uma operação de divisão (Bisanz & LeFevre, 1992), tais como efetuar a divisão por adições ou subtrações sucessivas e por decomposições e/ou agrupamentos; e processos (raciocínios e passos) associados às etapas do algoritmo euclidiano (ou qualquer outro).

(iv) Registers of representation

Considera-se aqui o conhecimento do professor acerca dos distintos sistemas representacionais (e.g., verbal, simbólico, pictórico, gráfico) que contribuem para dar significado aos conceitos e/ou aos fundamentos de determinados construtos, e também das relações entre as distintas formas de representar um conceito ou construto, de modo a potenciar uma navegação frutífera (Ribeiro, 2011b) entre esses sistemas. É este conhecimento do professor que lhe permite estabelecer uma correspondência entre um objeto matemático (e.g., conceito, construto, fenômeno) e uma imagem conceitual adequada (Golden & Shteingold, 2001; Timmerman, 2014).

No caso da divisão, importa ainda conhecer a relação e a adequação de um determinado tipo de representação (pictórico, verbal, numérico) com cada um dos sentidos da divisão. Alguns tipos de representação assumem um papel central na atribuição de significado à divisão como partilha equitativa ou como medida e, em especial, a determinados procedimentos associados ao cálculo da operação. E é essencial que o professor conheça essas múltiplas representações e sua correspondência matemática com o sentido evocado, a qual inclui, necessariamente, a verbalização adequada, associada a cada um dos sentidos e significados matemáticos dos construtos (Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002; Golden & Shteingold, 2001; Lesser & Tchoshanov, 2005).

Assim, por exemplo, uma verbalização do tipo "quantas vezes o três cabe em seis" não se relaciona adequadamente ao sentido de partilha equitativa, como é usualmente entendido, mas encontra-se associada à noção de comparação de quantidades e posterior quantificação – que corresponde ao sentido de medida. Portanto, ao empregar determinada verbalização, o professor deverá estar consciente (conhecer com correspondência) do sentido da operação que se evoca e dos tipos de raciocínios ali implicados.

Contexto e Método

Para este trabalho fazemos uso de informações coletadas em um Programa de Formação Continuada (PFC)[72] com duração de dois anos, composto por oito módulos, com objetivo de desenvolver as especificidades do conhecimento dos participantes em diferentes tópicos matemáticos. Aqui consideramos as informações de uma sessão formativa, de oito horas, em que foi discutida uma tarefa para a formação (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2019) sobre a divisão. Participavam da formação 13 professores, mas apenas 9 estavam presentes no encontro – 1 atuante na Educação Infantil; 7 atuantes nos Anos Iniciais e 1 atuante nos Anos Finais. Para identificá-los, foi atribuído um número a cada um deles[73] e, portanto, P1 e P2 correspondem a dois professores distintos, mas sem qualquer hierarquia entre eles.

Toda a sessão foi gravada em áudio e vídeo, e as produções das tarefas dos professores foram digitalizadas. Tipicamente os professores resolviam as tarefas em grupo e posteriormente ocorria uma discussão em grande grupo. No encontro analisado, cada grupo tinha três professores[74]: Grupo 1 – (P14) Anos Finais e (P11 e P19) Anos Iniciais; Grupo 2 – três professores dos Anos Iniciais (P3, P4, P8); e Grupo 3 – um professor da Educação Infantil (P18) e dois dos Anos Iniciais (P20 e P2).

Na tarefa para a formação (Ribeiro et al., no prelo) consideraram-se duas partes: Parte I, com foco no Conhecimento Especializado do professor sobre os sentidos, os algoritmos e as representações associadas, no tópico de divisão; e Parte II, com foco no Conhecimento Interpretativo (Jakobsen, Ribeiro & Mellone, 2014) do professor. Neste trabalho, discutiremos a Parte I da tarefa, cuja implementação ocorreu em duas etapas: resolução em trios, em 3 horas e meia; e discussão plenária, em 1 hora e 45 minutos.

A primeira parte da tarefa continha sete questões e, pelo foco aqui assumido, apresentaremos apenas duas delas. A primeira questão (Cf. Figura 2) objetivava aceder ao conhecimento do professor acerca do conceito matemático de divisão e, em particular, dos dois sentidos atribuídos a essa operação.

---

[72] Curso de Especialização em Matemática oferecido pela Universidade Estadual de Campinas – Unicamp – na modalidade presencial, totalizando 380 horas.

[73] A numeração associada aos pseudônimos dos professores P1, P2, P3, P4, ..., tem um caráter de organização da ordem de suas falas (momentos em que se manifestam) durante as diversas sessões de formação que compõem o conjunto de informações da pesquisa maior à qual o recorte para este trabalho se vincula.

[74] Por não ser relevante para as discussões, optamos por não distinguir o gênero de cada um dos participantes e, assim, nos referimos a todos como “professor”.

PARTE I

1. *O que é dividir*? Responda por você mesmo, enquanto professor(a) que ensina matemática e sem considerar um contexto escolar.

Figura 2 – Primeira questão da tarefa apresentada aos professores

Fonte: autores (2018)

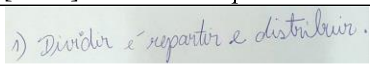
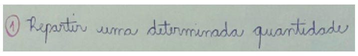
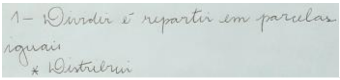
Partindo da expressão “6÷3”, a quarta questão era composta por nove subquestões referentes a[75]: (a) procedimentos possíveis para resolução da operação; (b) etapa escolar mais adequada para iniciar a exploração das ideias de divisão; (c) tarefa considerada mais apropriada para introduzir a divisão a alunos do 3.° ano dos Anos Iniciais; (d) forma de discutir (tipos e focos de tarefas) a divisão com alunos de 5 anos; (e) tipos distintos de problemas envolvendo a operação; (f) resolução de problemas envolvendo a operação, utilizando tipos distintos de representações e estabelecendo relações entre elas; (g) tipos de resoluções e estratégias de alunos do 2.° ano para resolução de problemas envolvendo a operação. Com essas subquestões, objetivava-se aceder ao conhecimento dos professores e desenvolvê-lo acerca dos distintos sentidos da operação de divisão; dos tipos de tarefas, de procedimentos, de representações; e das relações existentes entre cada uma, mais adequadas para se discutir a divisão com alunos de etapas escolares distintas.

As informações coletadas foram organizadas e analisadas considerando suas especificidades (Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2012). As gravações em áudio foram transcritas e complementadas com as informações provenientes do vídeo – em termos das ações dos participantes, tanto no trabalho em cada um dos grupos como na plenária. Nessas transcrições, cada linha foi indicada por uma numeração do tipo (i.j), em que “i” se relaciona ao subgrupo (1, 2 ou 3) e “j”, à linha da transcrição. No caso da discussão plenária, as linhas foram indicadas por (PLj), em que “j” indica a numeração da linha. Todas as ações e gestos produzidos pelos participantes foram devidamente indicados em negrito em uma linha das transcrições. Além disso, os comentários de cada professor estão associados a seus pseudônimos, indicados por PN, em que “N” corresponde à numeração atribuída a cada um, e os comentários da formadora, que é também a primeira autora deste trabalho, estão indicados por F1. De fato, no PFC, os dois autores deste trabalho atuaram como formadores em diferentes momentos do programa, tendo sido responsáveis por elaborar e implementar as tarefas de formação, dinamizando os encontros com os professores.

Após esta etapa de tratamento das informações, foi analisado o material, composto das transcrições das discussões em subgrupo e plenária e das produções escritas.

[75] Por falta de espaço não colocamos a questão completa, mas referimos os focos principais associados a cada uma das alíneas incluídas na questão.

Quadro 1 – Exemplo da organização das informações com análise associada

	Comentários e registros dos professores
Discussão em grupo	2.1 P8: *Repartir... não necessariamente em partes iguais*. 2.2 **Professora aponta para o símbolo ÷ registrado na lousa** 2.3 *Agora, se ela tivesse colocado o símbolo, aí já seria em partes iguais*. 3.16 P18: *"O que é dividir?". É dar um pouquinho do que você tem para o outro.* 3.17 P20: *Para o segundo ano?* 3.18 P18: *"Professora ele quer dividir isso comigo!". "Dá um pouco do que você tem para ele.* 3.19 *Divide com ele!"* 3.20 P20: *Dar um pouco do que você tem ao outro. Isso.*
Discussão plenária	*[PL6]* P14: *Para nós foi que dividir é repartir e distribuir.* [. . .] [PL18] P2: *Para nós, a gente colocou que é repartir em parcelas iguais e colocamos também que é* *[PL19]* *distribuir.* *[PL20]* F1: *Ok. Então é "repartir e distribuir"* (**dando ênfase na palavra "e"**)*? Ou é "repartir* [PL21] *ou distribuir"?* (**dando ênfase na palavra "ou"**) [PL22] P2: *É... porque a gente colocou um asterisco no "distribuir". Então...* [PL23] P18: *É repartir e distribuir. É isso que a gente colocou, como sendo outro item.*
Registros escritos	 *1)Dividir é repartir e distribuir.*  *1)Repartir uma determinada quantidade.*  *1 – Dividir é repartir em parcelas iguais *Distribuir*
Análise	Divisão associada ao significado semântico do termo: "repartir", sem que necessariamente as partes sejam equivalentes. O símbolo matemático da divisão é o que permite associá-la a repartir ou distribuir em partes equivalentes. Relacionam-se com a ação física de distribuição.
Descritor associado	**KoTd1** - conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes.

Fonte: autores (2020)

Da análise, emergiram elementos característicos das especificidades do conhecimento do PEM em relação ao tópico de divisão e, a partir de um processo cíclico exaustivo, integrando todas as fontes de informação de modo conjunto, foi possível compor um conjunto de descritores do Conhecimento Especializado relacionados às dimensões do KoT.

Quadro 2 – Nomenclatura associada aos descritores relacionados às categorias do KoT

Subdomínio	*Knowledge of Topics* (KoT)	*Definitions, properties and foundations* (d)	*Phenomenology and applications* (ph)	*Procedures* (mp)	*Registers of representation* (rp)
		KoTd1; KoTd2; …	KoTph1; KoTph2; KoTph3, …	KoTmp1; KoTmp2; KoTmp3, …	KoTrp1; KoTrp2; KoTrp3, …

Fonte: autores (2020)

Esses descritores foram denominados segundo as categorias às quais estão associados (Zakaryan & Ribeiro, 2018), e para cada um se atribuiu uma numeração indicativa da ordem em que aparecem na análise. Na discussão, em alguns casos, sua descrição é apresentada de forma sintética, quando associada a cada uma das evidências identificadas do conhecimento revelado pelos PEM e, de forma detalhada, na tabela que apresenta a síntese dos resultados. (Tabela 1, na epígrafe seguinte).

Análise e discussão

Ao discutirem a primeira questão, dois dos grupos (2 e 3) revelaram um conhecimento sobre o termo "dividir" que não considera o conceito matemático da operação, pois se ativeram exclusivamente ao sentido semântico do termo:

Quadro 3 – Comentários dos professores relacionados a primeira questão da tarefa

Trecho da discussão no Grupo 2
2.1 P4: Vamos lá... o que é dividir? O que vocês acham? 2.2 P8: *Repartir... não necessariamente em partes iguais.* *2.3* **Professora escreve o símbolo ÷** *2.4 Agora, se ela tivesse colocado o símbolo, aí já seria em partes iguais.*
Trecho da discussão no Grupo 3
3.3 P2: Dividir é repartir. 3.4 P20: É. 3.5 P18: Eu acho também. 3.6 P20: E, para mim, dividir é repartir em partes iguais.
Trecho da discussão plenária
PL5 P14: *Para nós foi que dividir é repartir e distribuir.* [. . .] PL13 P2: *Para nós, a gente colocou que é repartir em parcelas iguais e colocamos também que é* PL14 *distribuir.* PL15 F1: *Ok. Então é "repartir e distribuir"* (**enfatizando a palavra "e"**)? *Ou é "repartir* PL16 *ou distribuir"?* (**enfatizando a palavra "ou"**) PL17 P2: *É... porque a gente colocou um asterisco no "distribuir".* PL18 P18: *É repartir e distribuir. É isso que a gente colocou, como sendo outro item.*

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Os professores consideram que a divisão deve estar relacionada com o símbolo "÷", para que possa ser entendida como uma operação associada com a obtenção (resultado) de partes equivalentes (2.3 – 2.4; 3.18–3.20). Ao associarem a operação a repartir e/ou distribuir, revelam conhecer que dividir se vincula à ação física de distribuir elementos de um grupo em subgrupos, porém não obrigatoriamente de mesma cardinalidade, em particular quando a divisão é interpretada como partilha equitativa (**KoTd1**: conhecer a condição para se efetuar uma divisão). Este conhecimento ilustra a necessidade de conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão (Correa et al., 1998) – **KoTd2**: conhecer os papéis que cada um dos elementos envolvidos na divisão.

No Grupo 3, consideraram que dividir é uma operação que resulta em subgrupos com mesma cardinalidade (**KoTmp2**: conhecer a natureza do resultado da operação no sentido de partilha equitativa – que dividir é uma operação que resulta em subgrupos com mesma cardinalidade). No entanto, enfatizam a necessidade de distinguir as noções de "repartir" e de "distribuir" (PL13–PL18), que pode estar relacionada com os seus conhecimentos acerca da distinção típica entre os sentidos da divisão envolvendo quantidades discretas (**KoTph1**: conhecer o fenômeno divisão como partilha equitativa) ou quantidades contínuas (**KoTph2**: conhecer o fenômeno divisão como medida), bem como dos papéis que representam dividendo e divisor numa operação de divisão (**KoTd2**: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão), como se identifica no trecho do Quadro 4.

Quadro 4 – Discussão plenária acerca da primeira questão da tarefa

PL58	P4: *Por isso que eu falei, quando você fala em dividir, eles entram no conceito de metade.*
PL59	P18: *Com 7 anos, por aí, 6, 7, você fala para eles dividirem, eles pegam uma régua!*
PL60	P20: *Milimetricamente, bem dividido.*

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Com efeito, embora os professores pareçam considerar haver uma distinção na forma como se pode interpretar a divisão a partir dos seus dois sentidos (Fischbein et al., 1985), no decorrer da discussão evidenciam que essa distinção relaciona-se a um tipo de linguagem – verbal e simbólica – que eles consideram mais ou menos adequada para discutir a divisão (**KoTrp1**: conhecer o papel dos distintos sistemas representacionais na atribuição de significado a conceitos), exclusivamente como partilha equitativa (**KoTph1**).

Quadro 5 **–** Discussão plenária com foco na verbalização a ser empregada nos contextos da Divisão

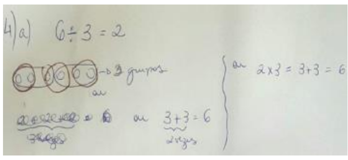
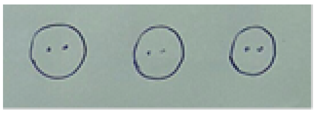
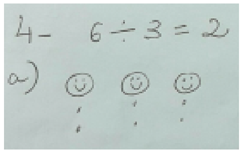
PL118 F1: *Vocês disseram que, para o sexto ano, vocês diriam que dividir é repartir em partes iguais.*
PL119 *Vocês todos concordam com isso?*
PL120 Ps: *É, para o sexto, é sim...*
PL121 **Formadora lê um dos registros na lousa.**
PL122 F1: *Porque espera-se que no sexto ano o algoritmo já tenha sido ensinado.*
PL123 *Então, a minha pergunta é: o quê do algoritmo me obriga, ou me permite... me provoca dizer que*
PL124 *são em partes iguais? Por que o algoritmo está associado com a ideia de partes iguais?*
PL125 P19: *Porque você partiu da operação! E a operação tem o símbolo!*

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Para esses professores, esse tipo de linguagem se deve empregar especificamente no 6.º ano dos Anos Finais, já que, nesta etapa educativa, *"espera-se que o algoritmo já tenha sido ensinado"* (PL122). De fato, ao associarem o símbolo matemático "÷" com um dos sentidos da divisão – **KoTrp1** – revelaram conhecer o papel que a linguagem simbólica exerce na atribuição de significado aos construtos matemáticos (Golden & Shteingold, 2001; Lesser & Tchoshanov, 2005; Timmerman, 2014). No entanto, não discutem o papel que esse símbolo exerce, quando associado a cada um dos sentidos da divisão (**KoTrp2:** conhecer o significado do símbolo "÷", i.e., que, no caso da partilha equitativa, ele se relaciona com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes; e, para o sentido de medida, ele deve ser interpretado como uma relação de comparação entre quantidades – medidas).

Ainda com relação ao conhecimento dos distintos sistemas representacionais, durante a discussão do item "a" da questão 4, na qual se solicitava que determinassem o resultado de 6÷3 e descrevessem os procedimentos utilizados para encontrar a solução, os três grupos forneceram representações que se pautaram no tipo pictórico e numérico (**KoTrp1**).

Quadro 6 – Registros escritos dos três grupos, relacionados com a quarta questão da tarefa

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
		

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Somente o Grupo 1 buscou estabelecer alguma correspondência entre os dois tipos de registros, ao associar uma adição ($\underbrace{3+3}_{2\ vezes}=6$) às representações de dois agrupamentos de três elementos. Esse tipo de registro revela um conhecimento de distintas formas de se navegar frutiferamente entre representações (Ribeiro, 2011b), além de indicar que os professores compreendem ser importante estabelecer relações entre as distintas formas de representação para dar significado aos construtos matemáticos (Ainsworth et al., 2002; Golden & Shteingold, 2001; Timmerman, 2014) – **KoTrp3**: conhecer formas de estabelecer relações entre distintas representações. No entanto, essas representações associam-se a considerar a divisão com o sentido de medida (**KoTph2**), e não como partilha equitativa (**KoTph1**), mas essa correspondência não é estabelecida de forma consciente pelos professores.

Quadro 7 – Trecho da discussão plenária relacionada com os tipos de representação mais adequados

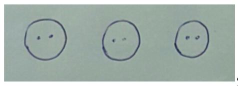
PL347	P14: *A gente desenhou seis bolinhas e circulou de três em três.*
PL348	F1: *Então, espera!*
PL349	**Formadora representa seis círculos na lousa**
PL350	*Você fez seis bolinhas...*
PL351	P14: *É, e circulei de três em três.*
PL352	P19: *Não!*
PL353	P18: *Fez dois grupos, então?*
PL354	P4: *Não, foi de duas em duas!*
PL355	P19: *Não, de duas em duas.*
PL356	P14: *De três em três!*
PL357	**Formadora circula dois grupos de três elementos** 
PL358	F1: *Fez assim?*
PL359	**Formadora desenha mais seis círculos e circula três grupos de dois elementos** 
PL360	F1: *Ou fez assim?*
PL361	P18: *Mas era para dividir por três...*

PL362	P14: *Então, seis bolinhas...*
PL363	P19: *Era para dividir por três!*
PL364	P14: *Dividido por três... de três em três. É isso que eu fiz!*
PL365	*Seis bolinhas, circuladas de três em três.*
PL366	P4: *Vão dar dois grupos!*
PL367	P14: *Vão dar quantos grupos? Dois!*

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Durante a plenária evidencia-se algumas dúvidas dos professores relativamente aos tipos de representações pictóricas mais adequadas para evocar os sentidos da divisão, em correspondência com o emprego de uma verbalização específica que dê significado ao sentido evocado, quando a operação for apresentada na forma de uma expressão numérica (6÷3). De fato, a verbalização que P14 emprega (PL326) causa dúvida em P19 (PL 334), um dos componentes do Grupo 1, que apresentou dois tipos de registros pictóricos de agrupamento (de três em três e de dois em dois) – cf. Quadro 5 – **KoTrp4**: conhecer o papel da verbalização. Esse fato pode estar relacionado com a incerteza dos professores sobre o tipo de registro mais adequado para representar 6÷3=2 (**KoTrp3**).

Com efeito, P4 (PL330–PL333), revela conhecer que a representação pictórica com agrupamentos de dois em dois para compor três grupos é a mais adequada para a resolução da operação (**KoTrp5:** conhecer os tipos de representação pictórica mais adequada associada aos sentidos da divisão). No entanto, ao mesmo tempo, não estabelece a correspondência de que esse agrupamento é a unidade de medida com a qual o todo está sendo medido (Behr et al., 1994), o que evidencia a necessidade de discutir com esses professores o papel do divisor na operação – **KoTd2** –, e também de ampliar seus conhecimentos sobre o sentido de medida da divisão – **KoTph2**.

De fato, somente com base na representação pictórica (PL338), não é possível afirmar se corresponde a (i) 6÷3=2 ou a (ii) 6÷2=3, pois, caso (i) seja interpretada com o sentido de partilha equitativa, a imagem conceitual (e.g., Golden & Shteingold, 2001; Timmerman, 2014) que se cria é a de uma distribuição de seis elementos em três subconjuntos com a mesma cardinalidade, dois. Nesse caso, a representação pictórica fornecida ao final da operação corresponderia a algo como apresentado pelo Grupo 2 , ou mesmo como apresentado pelo Grupo 3 , o que evidencia a necessidade de uma adequada verbalização (**KoTrp4**), com correspondência entre o sentido evocado e a representação pictórica para atribuição de significado a esse sentido (**KoTrp5**).

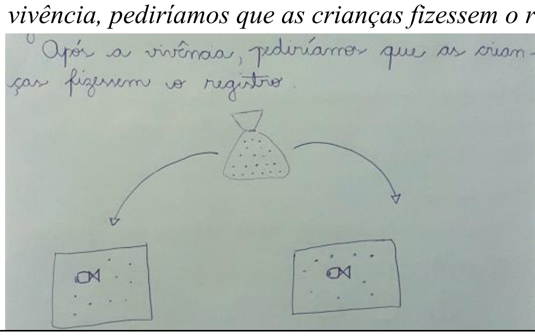
Assim, é conteúdo do Conhecimento Especializado do PEM conhecer que a representação  pode estar associada tanto a 6÷3=2 quanto a 6÷2=3 (**KoTrp5**), e é, portanto, necessário articular mais de uma representação (numérica, por exemplo), incluindo uma adequada verbalização (Simon, 1993), para estabelecer a correspondência entre a expressão e os elementos envolvidos nessa operação (dividendo, divisor e quociente) – **KoTd2**.

Também a verbalização de P14 (PL330; PL343-344), associada à representação pictórica dos agrupamentos de três em três, evoca o sentido de medida para 6÷3=2 (**KoTph2**), vinculada à ideia de "quantos grupos de três elementos cabem em um grupo de seis elementos?". No entanto, apesar dessas discussões, os professores não reconhecem explicitamente a divisão para além do sentido de partilha equitativa (**KoTph1**) ou, pelo menos, não relacionam a verbalização de "quantas vezes cabe" como uma associação inadequada ao sentido de partilha equitativa (**KoTrp4**). Isso fica claro a partir da análise de uma das subquestões da 4.ª questão da tarefa, em que os professores deveriam propor uma tarefa introdutória sobre a divisão para alunos do 3.º ano, associada a discussão dos distintos sentidos da divisão (Fischbein et al., 1985).

Quadro 8 – Discussão e registro escrito do Grupo 2, associados à proposta de tarefa introdutória para o 3.º ano.

2.256 P8: *O problema aí, a gente teria que trabalhar alguma coisa no concreto? É isso?*
2.257 P4: *E como a gente introduziria?*
2.258 *Alguma proposta que precisasse repartir algumas coisas e depois exemplificar o que a gente fez,*
2.259 *na lousa com eles, com um desenho da repartição.*
2.260 P8: *No terceiro.*
2.261 P4: *Porque é introdutório, né? A gente introduz com desenho primeiro.*
2.262 *A gente não introduz já com o algoritmo.*
2.263 [. . .]
2.286 P4: *Então, serão dois aquários na sala, nós recebemos 20 peixes.*
2.287 P8: *Pode ser.*
2.288 P4: (...) *Acho que também dava para abordar com eles*
2.289 *a questão de, "é correto um ficar mais e outro com menos? Não.*
2.290 *Então, a divisão, ela sempre é justa quando ela é em partes iguais", não é?*
[. . .]
2.343 P3: *Como podemos dividir para que as duas turmas tenham a mesma quantidade*
2.344 *de peixes?*
2.345 P4: *Eu acho que aí vai construir com eles a questão da divisão ser... o conceito da divisão.*
2.346 *Então tá, agora como é que a gente pode fazer?*
2.347 **P4 posiciona duas folhas sulfite lado a lado**
2.348 *Nós temos dois aquários.*
[. . .]
2.355 P4: *Bom, então tem 20... como a gente pode dividir para a turma? Daí pode ser que alguns deles*
2.356 *falem: "Ah, dá três para eles e o resto fica com a gente!" Eles estão dividindo. "Mas vocês*
2.357 *acham que essa é uma divisão justa?" aí, "ah não!". Eu acho que o ideal, o certo, é fazê-los*
2.358 *chegarem nesse conceito.*

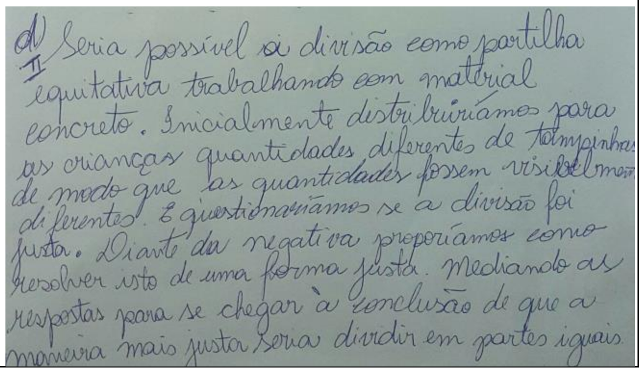
Após a vivência, pediríamos que as crianças fizessem o registro



Fonte: arquivo dos autores (2018)

Para os professores, introduzir a operação de divisão com alunos do 3.º ano significa, por um lado, desenvolver um trabalho a partir de representações pictóricas (2.256 – 2.262), o que revela que os professores conhecem o papel desse tipo de representação no processo de atribuição de significado aos conceitos e aos construtos matemáticos – **KoTrp2** – (e.g., Ainsworth et al., 2002; Golden & Shteingold, 2001; Timmerman, 2014). Por outro lado, a noção de introdução da operação de divisão se restringe ao trabalho relacionado estritamente com o sentido de partilha equitativa (2.286 – 2.358) – **KoTph1** –, deixando à margem a discussão do sentido de medida (Fischbein et al., 1985) – **KoTph2**.

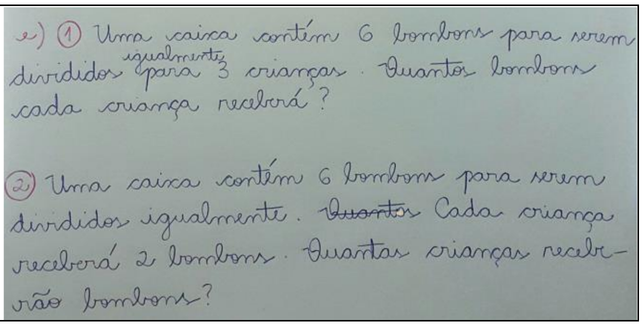
Quadro 9 – Registro do Grupo 1, associado à tarefa introdutória para o 3.º ano

Seria possível a divisão como partilha equitativa trabalhando com material concreto. Inicialmente distribuiríamos para as crianças quantidades diferentes de tampinhas, de modo que as quantidades fossem visivelmente diferentes. E questionaríamos se a divisão foi justa. Diante da negativa proporíamos como resolver isto de uma forma justa, mediando as respostas para se chegar à conclusão de que a maneira mais justa seria dividir em partes iguais.	

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Todos os grupos reconhecem a importância da criação de contextos (problemas) para introduzir a noção de divisão (Downton, 2009) – **KoTph3**: conhecer os tipos de problemas para evocar os sentidos da divisão. No entanto, apenas o Grupo 2 formulou problemas com dois contextos matemáticos que evocavam os distintos sentidos da divisão (**KoTph3**) – objetivo da subquestão 4 (e).

Quadro 9 – Registro escrito com os problemas distintos elaborados pelo Grupo 2

e) 1) Uma caixa contém 6 bombons para serem divididos igualmente para 3 crianças. Quantos bombons cada caixa receberá? *2) Uma caixa contém 6 bombons para serem divididos igualmente. ~~Quantos~~ Cada criança receberá 2 bombons. Quantas crianças receberão bombons?*	

Fonte: arquivo dos autores (2018)

Embora tenham apresentado um contexto evocando cada um dos sentidos da divisão, o segundo problema proposto (Quadro 9), que evoca o sentido de medida, não tem correspondência com a expressão do enunciado 6÷3=2, mas sim com 6÷2=3. A necessidade dessa correspondência forma parte do Conhecimento Especializado do PEM relativo ao papel do dividendo e do divisor na divisão (Correa et al., 1998; Squire & Bryant, 2002), quando a operação é interpretada a partir de cada um de seus dois sentidos – **KoTd2** –, e também sobre a natureza do resultado da divisão no sentido de medida (**KoTmp3**: conhecer a natureza do resultado da divisão como medida).

Durante a discussão da tarefa, ficou evidente a necessidade de aprofundar a distinção entre os dois sentidos da divisão – em particular dos tipos de contextos que evocam cada um dos sentidos (**KoTph3**), o que se relaciona também com o fato de o emprego de determinada verbalização, particularmente no algoritmo tradicional, não se adequar ao sentido de partilha equitativa (**KoTrp4**).

Quadro 10 – Trecho da discussão em que se discute o sentido de *medida* da divisão

PL436	F1: *[...] eu quero a frase que a P20 diz quando resolve esse algoritmo*
PL437	*Quantas vezes o três está dentro do seis?*
PL438	P20: *Está dentro do seis...*
PL439	F1: *Então, eu volto a perguntar: O que é dividir?*
PL440	P14: *Ver quantas vezes uma coisa...*
PL441	P20: *Repartir.*
PL442	P2: *Repartir.*
PL443	F1: *Espera um pouco! Se é repartir, aonde está a ideia de repartir com esta frase?*
PL444	*Quantas vezes o três está dentro do seis?*
PL445	P8: *Nenhum lugar!*
PL446	P2: *Nossa!*
PL447	P19: *Nossa!*
PL448	F1: *Porque a ideia de repartir, é a ideia de eu...*
PL449	**Formadora simula distribuir quantidades para cada um todos participantes.**
PL450	P2: *Distribuir!*

Fonte: autores (2018)

Para discutir o conhecimento dos professores sobre o sentido de medida associado à divisão (**KoTph2**), foi necessário a formadora (PL473) tomar como ponto de partida a noção de comparação de quantidades (Clements & Stephan, 2004) e empregar determinada verbalização (Simon, 1993) associada a uma imagem de distribuição de quantidades (Ainsworth et al., 2002; Golden & Shteingold, 2001) – **KoTrp3**. Essa discussão vincula-se ao conhecimento associado ao tipo de contexto (ideia nele contida) que se pode evocar para dar significado ao fenômeno divisão (**KoTph3**).

Todos os professores revelaram conhecer mais de uma forma de proceder para resolver uma operação (Bisanz & LeFevre, 1992). Exemplo disso é a discussão ocorrida no Grupo 2 relativamente ao item a) da quarta questão relacionada com a expressão 6÷3 (Determine o resultado dessa operação e descreva os procedimentos e passos realizados para encontrar a resposta):

Quadro 11 – Trecho da discussão no Grupo 2 relacionada ao item a) da questão 4

[2.185]	F1: *De todo modo, e se fosse qualquer outro valor, se fossem quaisquer outros*
[2.186]	*números que vocês imaginam ali, sei lá, 36 dividido por 3. Como vocês fariam*
[2.187]	P4: *Com o algoritmo!*
[2.188]	F1: *O algoritmo?*
[2.189]	P3: *É!*
[2.190]	P4: *Faria três dividido por três, um.*
[2.191]	F1: *Por que é que o...*
[2.192]	P4: *E seis dividido por três, dois.*
[2.193]	P8: *Eu acho que eu ia pegar 30 primeiro e dividir por três. Depois pegava seis e dividia*
[2.194]	*por três.*

[2.195] F1: *Tudo bem. Descreve o que...? Que imagem você forma na cabeça quando*
[2.196] *vai fazer seis dividido por três?*
[2.197] P4: *Eu formo três... três partes com... quero dizer, duas partes com três.*
[2.198] P8: *Duas!*
[2.199] P4: *Não! Três partes com dois (elementos) em cada uma.*
[. . .]
[2.214] P8: *É, mas eu acho que é isso mesmo que a gente pensa. Você acaba somando 2 + 2 + 2.*
[2.215] *E, se a gente fosse pensar no cálculo mental com o que ela falou, 36, a gente podia*
[2.216] *pegar primeiro as dezenas...depois as unidades...*

Fonte: autores (2018)

Para refinar as discussões, foi necessário sugerir uma reflexão sobre a divisão, envolvendo quantidades maiores, pois, para os professores, a operação 6÷3 "*já é uma resposta automática*" (produção escrita na folha de respostas). Além disso, revelam um conhecimento (**KoTmp1**: conhecer distintas estratégias de resolução de uma divisão) associado a reconhecer como possibilidade de resolução da operação os procedimentos associados ao algoritmo euclidiano (2.187–2.192); a decomposição do dividendo em parcelas correspondentes a dezenas e unidades (2.193–2.194; 2.210–2.211); os agrupamentos (2.197–2.199); e as adições sucessivas (2.209–2.211).

Em forma de síntese dos resultados obtidos, que se focam nas especificidades do KoT mobilizado (e revelado) por PEM no âmbito da divisão em um PFC, apresentamos as categorias e os descritores do conhecimento obtidos.

Tabela 1 – Categorias e descritores relacionados ao subdomínio *Knowledge of Topics* no tópico de divisão

Categorias	Descritores
Definitions, properties and foundations (KoTd)	**KoTd1**: conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes. **KoTd2**: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida.
Phenomenology and applications (KoTph)	**KoTph1**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como partilha equitativa. **KoTph2**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como medida. **KoTph3:** conhecer os tipos de problemas e contextos (ideias neles contidas) que contribuem para evocar cada um dos sentidos da divisão, i.e., no sentido de partilha, a ideia de distribuição de elementos de um conjunto em subconjuntos; no sentido de medida, a ideia de comparação entre quantidades de mesma grandeza ("quantas vezes uma quantidade cabe dentro da outra?").
Procedures (KoTmp)	**KoTmp1:** conhecer distintas estratégias de resolução de uma divisão: uma divisão pode ser resolvida pelo algoritmo euclidiano; por decomposição do dividendo em parcelas correspondentes a dezenas e unidades; por agrupamento; e por adições sucessivas. **KoTmp2**: conhecer a natureza do resultado da operação no sentido e partilha equitativa: o valor numérico obtido – quociente – corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos entre os quais o todo foi distribuído. **KoTmp3**: conhecer a natureza do resultado quando a divisão é entendida como medida: o valor numérico obtido (quociente) corresponde à quantidade de vezes que a unidade de referência coube no todo (agrupar o todo em partes de mesma magnitude).

Systems of representations (KoTrp)	**KoTrp1**: conhecer o papel dos distintos sistemas representacionais na atribuição de significado a conceitos. **KoTrp2**: conhecer o significado atribuído ao símbolo "÷": relaciona-se com a distribuição de um todo em subgrupos de cardinalidades equivalentes, quando a operação for tomada como partilha equitativa; e o símbolo "÷" está associado ao estabelecimento de uma relação de comparação entre quantidades (medidas). **KoTrp3**: conhecer formas de estabelecer relações entre distintas representações para atribuir significado a conceitos, propriedades e/ou procedimentos. **KoTrp4**: conhecer o papel do emprego de determinada verbalização para dar significado e/ou corresponder a cada um dos sentidos da divisão. **KoTrp5:** conhecer a relação e a adequação dos tipos de representação pictórica, associadas a cada um dos sentidos da divisão: na partilha equitativa, indicando distribuição; na medida, indicando agrupamentos.

Fonte: elaborado pelos autores

É possível observar uma emergência maior de descritores relacionados às categorias *Definitions, properties and foundations* e *Systems of representations*. De fato, o KoT é, dentre os subdomínios que compõem a conceitualização do MTSK, aquele que mais se relaciona com o Conhecimento Especializado do PEM associado ao saber fazer – que se considera conhecimento do nível dos alunos – e com o atribuir significado a conceitos e procedimentos, a partir de fundamentos e propriedades matemáticas. Esta maior emergência justifica-se também pela natureza e pelo foco das questões incluídas na tarefa para a formação, aqui discutidas e pela prática típica dos professores.

Comentários Finais

Neste trabalho, focamo-nos em explicitar os aspectos que caracterizam o Conhecimento Especializado do PEM relacionado com o tópico de divisão. Esta caracterização objetiva explicitar as especificidades e as particularidades do conhecimento do professor neste tópico e tem também por objetivo representar uma forma de estruturar e organizar os entendimentos que se detêm acerca das especificidades e particularidades do Conhecimento Especializado do PEM, em cada um dos tópicos matemáticos – o que se configura como um avanço na forma de encarar essa especialização (Ball et al., 2008).

Efetuar uma discussão que leve à emergência dessa estruturação, organização e descrição das especificidades, do ponto de vista do professor, uma forma de ele próprio tomar consciência da natureza de uma das dimensões de seu conhecimento profissional, o que lhe permite entender também o papel da pesquisa para a melhoria da formação e da prática. Por outro lado, do ponto de vista da formação de professores, tal estruturação e organização contribuem propiciando novos focos de intencionalidade, por exemplo, na conceitualização de Tarefas Formativas (Ribeiro et al., no prelo) para desenvolver essas especificidades do conhecimento.

Uma atenção especial à natureza e ao conteúdo desse conhecimento e ao foco das formações é essencial sempre e quando se pretende desenvolver as especificidades do conhecimento do professor de e que ensina matemática, pois essas especificidades não se desenvolvem apenas com a prática (Jakobsen et al., 2014). Assim, os resultados deste trabalho contribuem para (re)orientar também os focos e os objetivos dos programas de formação (inicial e continuada).

Ao mesmo tempo, os resultados obtidos e os processos analíticos envolvidos, para além de terem potencialidades em termos de pesquisa e de formação, deixam em aberto algumas discussões importantes a considerar – pois essa é também uma forma de contribuir para o avanço do campo – e que se referem, por exemplo, ao que irá ocorrer com estes descritores do conteúdo do conhecimento especializado do PEM, quando confrontados (estressados) com uma análise mais ampla das respostas dos participantes à totalidade da tarefa e com as respostas de outro(s) grupo(s) à mesma tarefa.

Outro aspecto importante a ser considerado relaciona-se com as conexões entre diferentes tópicos que se podem identificar no conhecimento dos participantes (*Knowledge of Structures of Mathematics*), se mudarmos o foco da lente analítica – em particular conexões no âmbito da divisão e da medida. Tais problemáticas sustentam algumas perguntas de investigações que emergem da análise e da discussão, como sejam: (i) que aspectos caracterizam o conteúdo do Conhecimento Especializado do professor acerca de elementos que compõem as estruturas matemáticas, no âmbito da divisão? (ii) que relações existem (se existirem) entre os descritores de conhecimento associados a cada um dos subdomínios KoT e KSM, no âmbito da divisão? (iii) que conexões entre o tópico de divisão e os tópicos de Medida efetuam os professores, ao discutirem tarefas formativas?

Ademais, estas questões são consideradas também como um dos resultados que nos permitem refletir sobre os rumos que podemos tomar na pesquisa em Educação Matemática com foco no conhecimento, na prática e na formação do professor de e que ensina matemática.

Referências

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 25–62.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative intents. In G. Harel & J. Confrey, *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 121–176). Albany, NY: State University of New York Press.

Bicknell, B., Young-Loveridge, J., Lelieved, J., & Brooker, J. (2015). Using multiplication and division contexts with young children to develop part-whole thinking. *Journal Issue*, 2, 53–59. DOI: http://dx.doi.org/10.18296/set.0018

Bisanz, J., & LeFevre, J.-A. (1992). Chapter 3 Understanding Elementary Mathematics. In J. I. D. Campbell (Org.), *Advances in Psychology* (Vol. 91, p. 113–136). North-Holland. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-4115(08)60885-7

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *31*(4), 416–440. DOI: https://doi.org/10.3102/0162373709353129

Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J.-M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, *75*(Nov/Dez), 11–15.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á.., & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. *Proceedings of CERME 8*, 2976–2984. Antalya, Turquia.: METH.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–256. DOI: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D. Clements, J. Sarama & A.-M. DiBiase (Orgs.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 299–317). New Jersey: LEA.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship beteween division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, *90*(2), 321–329. DOI: https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.321

Dooren, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving Arithmetic and Algebra words problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 319–351. DOI: https://doi.org/10.2307/4149957

Downton, A. (2009). It Seems to Matters Not Whether it is Partitive or Quotitive Division When Solving One Step Division Problems. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess, *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 161–168). Palmerston North, NZ: MERGA.

Fávero, M. H., & Neves, R. S. P. (2012). A divisão e os racionais: Revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, *20*(37), 33–67. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v20i37.8646635

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147–164). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Reaserch in Mathematics Education*, *16*(1), 3–17. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.16.1.0003

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematics at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Golden, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio, *The role of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Boston, Virginia: NCTM.

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 311–334. DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). New York: Information Age Publishing.

Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*, 135–150.

Lautert, S. L., Oliveira, D. C. A.., & Correa, J. (2017). Compreensão de crianças sobre relações inversas sem explicitação numérica. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, *69*(1), 73–89.

Lesser, L. M., & Tchoshanov, M. A. (2005). The effect of representation and representational sequence on students' understanding. In G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins & S. L. Behm, *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 813–819). Roanoke, Virginia: Virginia Tech.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10–32. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03217543

Ribeiro, M. (2011a). A importância do conhecimento do conteúdo matemático na prática letiva de uma professora: Discutindo um modelo de análise. *Zetetiké*, *19*(35), 71–102. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v19i35.8646646

Ribeiro, M. (2011b). Abordagem aos números decimais e suas operações: A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa*, *37*(2), 407–422.

Ribeiro, M., & Amaral, R. (2015). Early years' prospective teachers' specialized knowledge on problem posing. *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education Conference*, *4*, 81–88. Hobart, Australia: Beswick, K., Muir, T. & Wells, J.

Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do Professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15(1)*, 93–121.

Ribeiro, M, Almeida, A. R., & Mellone, M. (2019). Desenvolvendo as especificidades do conhecimento interpretativo do professor e tarefas para a formação. In V. Giraldo, J. Viola, & H. R. Elias, *Problematizações sobre a Formação Matemática na Licenciatura em Matemática* [s.l.]. SBEM. No prelo.

Ribeiro, M, Policastro, M., Mamoré, J., & Di Bernardo, R. (2018). Conhecimento Especializado do professor que ensina Matemática para atribuir sentido à divisão e ao algoritmo. *Educação Matemática em Revista*, *1*(19), 152–167.

Rizvi, N. F. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, *8*(2), 377–392.

Robinson, K. M., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 409–428. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-011-9330-5

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Simon, M. A. (1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233–254. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.3.0233

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge Falmer.

Squire, S., & Bryant, P. (2002). From sharing to dividing: Young children's understanding of division. *Developemental Science*, *5*(4), 452–466. DOI: https://doi.org/10.1111/1467-7687.00240

Timmerman, M. A. (2014). Making Connections: Elementary Teachers' Construction of Division Word Problems and Representations. *School Science and Mathematics*, *114*(3), 114–124. DOI: https://doi.org/10.1111/ssm.12059

Young-Loveridge, J., & Bicknell, B. (2018). Making connections using multiplication and division contexts. In V. Kinnear, T. Muir & M. Y. Lai (Orgs.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning, Early Mathematics Learning and Development*, (pp. 259–272). Brisbane, Autralia: Lyn D. English.

Young-Loveridge, J. M. (2001). Helping children move beyond counting to part-whole strategies. *Teachers and Curriculum*, *5*, 72–78.

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2018). Mathematics teachers' specialized knowledge: A secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 1–19. DOI: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422

Caracterização do Conhecimento Especializado do professor de matemática em tópicos de Medida[76]

Characterization kindergarten and primary's Mathematics Teacher's Specialised Knowledge on Measurement topics

Policastro, Milena

Ribeiro, Miguel

Resumo:

As dimensões matemática e pedagógica do conhecimento do professor são consideradas especializadas, e pretende-se caracterizar o conteúdo desse conhecimento no âmbito dos tópicos de Medida. Considerando o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), explora-se e descreve-se o conteúdo do conhecimento revelado por um grupo de professores ao resolverem uma Tarefa para a Formação, implementada em um curso para professores que atuam desde a Educação Infantil, no Brasil. Os resultados trazem um refinamento da categorização do conhecimento do professor, associada aos tópicos (KoT), ao considerar, de forma separada, o detalhamento do conteúdo desse conhecimento, relativamente a definições, propriedades e fundamentos. Além disso, no estudo, um conjunto de descritores de conhecimento evidenciam as particularidades e especificidades dessa componente do conhecimento do professor, particularmente para os tópicos de Medida, possibilitando um tipo de mapeamento dos elementos estruturais e estruturantes desse conhecimento.

Palabras clave: MTSK, Conhecimento do Professor de Matemática, Medidas, Formação de Professores.

Abstract:

Both mathematical and pedagogical dimensions of teacher's knowledge are considered specialized, and we aim at at characterizing the content of such a knowledge on the Measurement topics. Considering the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge conceptualization (MTSK), we explore and describe the specialized knowledge revealed by kindergarten and primary teachers during a session of a teacher education program in Brazil. The results lead to a refinement of the categorization of the teacher's knowledge of topics (KoT), considering, separetely, a detailing of the content of such knowledge, related to definitions, properties, and foundations. Besides, this study presents a set of teacher's knowledge indicators that evidence the particularities and specificities of such components of knowledge, particularly in the scope of the Measurement topics, making possible a mapping of the structural elements of such a knowledge.

Key words: MTSK, Mathematical Teacher's Knowledge, Measurement, Teacher Education.

---

[76] Este artigo foi submetido à Revista Latinoamericana de Investigación Matemática (**Relime**) e está em processo de avaliação por pares. A formatação aqui apresentada atende às normas técnicas exigidas pela referida revista.

Resumen:

En este estudio, consideramos las dimensiones matemáticas y pedagógicas del conocimiento del profesor como especializadas, con el objetivo de caracterizar el contenido de este conocimiento, específicamente asociado a los temas de Medidas. Considerando el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), exploramos y describimos el contenido del conocimiento especializado revelado por um grupo de profesores que actúan desde la Primaria en el Brasil, durante la implementación de una tarea para la formación, discutida en uma formación continuada. Los resultados aportan un refinamiento de la categorización del conocimiento docente asociado a los temas (KoT), considerando, por separado, el detalle del contenido de este conocimento, relativamente a definiciones, propiedades y fundamentos. Además, el estudio presenta un conjunto de descriptores de conocimiento que resaltan las particularidades y especificidades de este componente del conocimiento docente, particularmente para nos temas de Medidas, permitiendo una especie de mapeo de los elementos estructurales y estructurantes de este conocimiento.

Palavras chave: MTSK, Conocimiento del professor de matemáticas, Medidas, Formación de profesores.

Résumé:

Dans cette étude, nous considérons les dimensions mathématiques et pédagogiques des connaissances de l'enseignant comme spécialisées, afin de caractériser le contenu de ces connaissances, spécifiquement associées aux thèmes de la Mesure. Sur la base de la perspective théorico-analytique de la conceptualisation du Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), nous explorons et décrivons le contenu du savoir spécialisé révélé par les enseignants pendant la mise en œuvre d'une tâche de formation, discutée dans le cadre d'un cours de formation des enseignants du primaire, au Brésil. Les résultats apportent un raffinement de la catégorisation des connaissances des enseignants, associés aux sujets (KoT), en considérant, séparément, le détail du contenu de ces connaissances, en relation avec les définitions, les propriétés et les fondamentaux. De plus, dans l'étude, un ensemble de descripteurs de connaissances qui mettent en particularités et spécificités de cette composante des connaissances des enseignants, notamment pour les thèmes Mesure, permettant une sorte de cartographie des éléments structurants de ces connaissances.

Mots clés: MTSK, Connaissance du professeur de mathématiques, Mesures, Formation des enseignants.

1. Introdução

O entendimento do tema de Medida é considerado central, em muitos contextos, como forma de desenvolver o Pensamento Matemático (NCTM, 2000; OECD, 2010) dos alunos, e as noções de medida favorecem a conexão entre a Geometria e os Números, áreas particularmente críticas em termos de ensino e de aprendizagem (Clements & Sarama, 2007). Entender a Medida demanda atribuir significado aos seus elementos fundamentais – unidade de medida e todo a ser medido – e aos processos mentais envolvidos; e compreender as noções de quantidade, notadamente no que se refere à coordenação entre as quantidades discretas e contínuas (e.g., Smith et al., 2011). Tais entendimentos contribuem para desenvolver conhecimento associado aos fundamentos matemáticos de processos aritméticos; raciocínio proporcional; construtos e conceitos associados aos números racionais e à noção de variáveis algébricas (e.g., Szilagyi et al., 2013).

Há já consenso de que para ensinar Matemática é essencial ao professor conhecer ampla e profundamente os tópicos a serem ensinados (Ma, 1999). No entanto, o foco das pesquisas tem sido maioritário nos conhecimentos dos alunos (Barret et al., 2012; Hiebert, 1984; Vysotskaya et al., 2020), deixando para segundo plano o conhecimento do professor e suas especificidades para ensinar, em particular, Medidas (Policastro et al., 2020; Ribeiro et al., 2018; Subramaniam, 2014). Sendo o conhecimento do professor um dos elementos que impacta nas aprendizagens e capacidades matemáticas dos alunos (Boyd et al., 2009; Hill & Chin, 2018) e nas ações e decisões que ele emprega em sua prática letiva (Charalambous, 2015; Ribeiro et al., 2012), torna-se essencial entender as especificidades desse conhecimento como forma de ampliar os entendimentos sobre seu conteúdo e as propostas de programas de formação de professores (Caldatto et al., 2018).

Diversas conceitualizações do conhecimento do professor surgiram nas últimas três décadas, porém destacam-se as que consideram a natureza especializada desse conhecimento (Scheiner et al., 2017) para a atuação docente. Uma delas é o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK[77] (Carrillo et al., 2018). Ao considerarmos a centralidade do entendimento da Medida nas aprendizagens matemáticas dos alunos, o papel e a importância do conhecimento do professor nessas aprendizagens e a falta de pesquisas específicas sobre essas problemáticas, levam-nos a uma agenda de pesquisa que objetiva entender e descrever o conteúdo do conhecimento especializado do professor nos tópicos de Medida, com intuito de propor programas de formação que desenvolvam essas especificidades e, assim, melhorem a qualidade das discussões e das aprendizagens matemáticas. Nessa linha importa discutir a seguinte questão: Que conhecimento especializado nos tópicos de Medida revelam professores participantes de uma Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor de e que ensina Matemática?

2. Fundamentos teóricos dos tópicos de Medida

Os tópicos de Medida e o "senso de medida" (Stephan & Clements, 2003, p. 14) deveriam ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares, desde a Educação Infantil[78], por se constituírem de elementos, noções e conceitos fundamentais ao desenvolvimento de ideias fulcrais da Matemática e ao envolvimento dos alunos com algumas das *big ideas* em Matemática (NCTM, 2000). No entanto, tradicionalmente, esse trabalho envolvendo Medida tende a focar-se no ensino das unidades de medida padronizadas (Policastro et al., 2017), sem explorar os procedimentos de medição para cada tipo de grandeza ou os processos (mentais) em que se pauta a atividade de medir (Stephan & Clements, 2003).

[77] Optamos por manter a nomenclatura originalmente apresentada, em inglês, para preservar o sentido e significado dos termos propostos pelos autores.

[78] No Brasil, essa etapa corresponde à escolarização de crianças de 0 a 6 anos.

Do ponto de vista puramente experimental, medir está associado a conferir a um atributo mensurável de objetos, fenômenos ou processos (Berka, 1983) um valor numérico, obtido ao comparar magnitudes de uma mesma grandeza e quantificar as vezes que uma delas – a unidade de medida – deve ser repetida até que se consiga, por acumulação, obter a magnitude da outra – o todo a ser medido (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004). Habitualmente introduzem-se os alunos inicialmente às ideias de medição de comprimento, envolvendo instrumentos e unidades de medidas não padronizados (Smith et al., 2011). Posteriormente apresentam-se as unidades de medida padronizadas de comprimento, e todas as demais grandezas – área, capacidade, massa, volume e tempo[79] – passam a ser discutidas, sem considerar as particularidades da natureza de cada uma (Ribeiro & Policastro, 2021; Sarama et al., 2011; Szilagyi et al., 2013). Segundo Lehrer et al. (2003, p. 100), as crianças deveriam ser engajadas a "desenvolver uma teoria sobre as medidas, ao invés de simplesmente efetuar medições", e a conceitualização de cada uma das grandezas, através da comparação e classificação, deveria introduzir esse trabalho (Passalaigue & Munier, 2015).

Os processos (gerais) associados à atividade de medir estão fundamentados em seis princípios, descritos particularmente para o caso da grandeza comprimento (Clements & Stephan, 2004): (a) *partição* – atividade mental de dividir o objeto em magnitudes de mesmo comprimento, quando a unidade de medida é menor que o elemento a ser medido; (b) *unidade de iteração* – habilidade de pensar em um comprimento como referência para deslocar-se em todo o comprimento do objeto a ser medido, para não deixar espaços por medir entre duas unidades subsequentes, nem sobrepor unidades adjacentes; (c) *transitividade* – processo de, por estimativa ou dedução, obter uma relação de igualdade ou desigualdade (superior ou inferior) de quantidade relacionada a determinada grandeza e estendê-la a outros dois ou mais objetos; (d) *conservação* – compreensão de que qualquer movimento (translação ou rotação) no objeto a ser medido manterá os comprimentos; (e) *acumulação da distância* – entendimento de que, no processo de iteração de uma unidade de comprimento ao longo do elemento que se mede, realiza-se a contagem da quantidade de iterações; (f) *relação da medida com um valor numérico* – reorganização da compreensão do processo de contagem de quantidades discretas para quantidades contínuas.

Embora esses seis princípios tenham sido descritos com base nos processos (mentais e físicos) associados à atividade de medir unidimensionalmente, eles podem ser transpostos para grandezas de outros tipos, considerando algumas adaptações necessárias (Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2011).

A noção de unidade de medida, porém, ocupa lugar de destaque nas aprendizagens matemáticas dos alunos, pois fundamenta vários outros conceitos como os de fração unitária e de todo e de unidade composta – unidade de unidades (Norton & Boyce, 2015). Mas essa unidade de medida é frequentemente confundida com o instrumento de medida (Gamboa et al., 2020). Nesse contexto, a noção de *unitizing* – operação mental na qual um agrupamento de quantidades pode ser interpretado como uma unidade (Steffe, 2003) – é fundamental para entender o que é e como se constitui uma unidade de medida.

[79] Levando-se em conta os documentos oficiais brasileiros formulados a partir da *Base Nacional Comum Curricular* (Brasil, 2018).

Há várias questões ainda problemáticas para alunos e professores, sendo duas delas a diferenciação entre: (i) área e perímetro; (ii) volume e capacidade. Em (i), a dificuldade apresenta-se, essencialmente, pela não compreensão de qual o atributo (grandeza) a ser medido (Baturo & Nason, 1996). Com efeito, define-se área como a magnitude de uma superfície bidimensional contida por uma fronteira, e o perímetro, como a magnitude dessa fronteira (Clements & Sarama, 2009), o que demanda compreender que o perímetro é uma medida unidimensional (Irwin et al., 2004) e a área está subordinada à coordenação entre duas dimensões (Parnorkou, 2020). Em (ii), as dificuldades sustentam-se porque os termos "volume" e "capacidade" são tomados como sinônimos (Ribeiro & Policastro, 2021), o que leva muitas vezes a associar, nos contextos de ensino, as mesmas unidades de medida (padronizadas) às duas grandezas (Ho & McMaster, 2019), sem realizar o necessário trabalho que priorize a conceitualização de cada uma (Passalaigue & Munier, 2015). Essas dificuldades sustentam-se, também, pelo foco nos procedimentos de cálculo, sem conceitualizar a grandeza, ao assumir que calcular o valor da medida de uma grandeza seja medi-la.

3. Conhecimento especializado do professor nos tópicos de Medida

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK – (Carrillo et al., 2018) assume a natureza especializada do conhecimento do professor, considerando três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK); *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e *Beliefs* a respeito da matemática e do seu ensino e aprendizagem. No *MK* consideram-se três subdomínios (ver Figura I), mas aqui focamos somente o *Knowledge of Topics* (KoT).

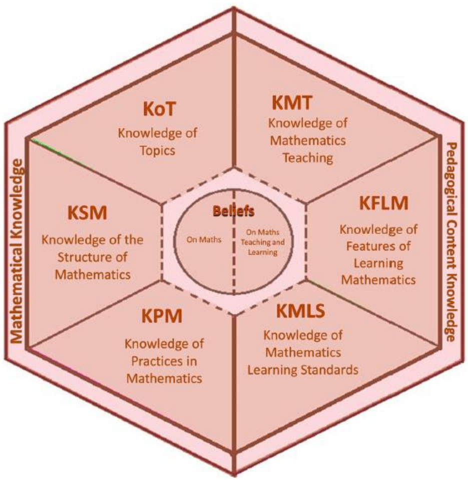


Figura I: Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 241)

O KoT corresponde ao conteúdo do conhecimento conceitual e procedimental do professor, relacionado a cada tópico. Originalmente consideram-se no KoT quatro categorias: (i) *Definitions, properties and foundations*; (ii) *Phenomenology and applications*; (iii) *Procedures;* (iv) *Registers of representation* (Carrillo et al., 2018). Porém, resultados recentes (Policastro & Ribeiro, 2021) mostraram a necessidade de separar a categoria (i) em (ia), (ib) e (ic), contribuindo para refinar o entendimento das especificidades do conteúdo do conhecimento do professor, relacionadas a cada um dos tópicos matemáticos.

(ia) Definitions

As definições são essenciais na (Educação) Matemática, assumindo papéis e características muito específicos (Zaslavsky & Shir, 2005). Estes papéis relacionam-se com a apresentação dos objetos de uma teoria e a captura da essência dos conceitos, ao comunicarem suas propriedades caracterizadoras (Mariotti & Fischbein, 1997) e os elementos fundamentais para a formação desses conceitos (Vinner, 2002). Além disso, pelas definições é que se fundamentam as demonstrações e a resolução de problemas (Weber, 2002), porque se cria uma uniformidade na comunicação de ideias matemáticas importantes (Zazkis & Leikin, 2008).

As definições que o professor conhece influenciam nas aprendizagens dos alunos (Zazkis & Leikin, 2008), porque contribuem para estabelecer relações entre a imagem do conceito e a sua definição (Tall & Vinner, 1981). Inclui-se no conhecimento do professor conhecer que: o conceito de medida implica a comparação entre magnitudes de uma mesma grandeza, seguida da quantificação de uma delas – unidade de medida – em função da outra, o todo a ser medido (Berka, 1983); unidade de medida é definida como a magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza; considerar a área como a superfície delimitada pela fronteira de uma figura geométrica não é uma definição, mas é um caso particular; o perímetro em duas dimensões é a linha que define a fronteira de uma figura plana; volume é a porção de espaço ocupada por um objeto no espaço; capacidade é o espaço interno de um objeto tridimensional, que pode ser preenchido (Parnorkou, 2021).

(ib) Foundations

Um dos aspectos intrínsecos da prática matemática é a possibilidade de criar relações entre áreas aparentemente diferentes. Com efeito, "qualquer tipo de fundamento, se não define, pelo menos distingue entre trabalho matemático e não matemático e, de alguma forma, caracteriza a prática matemática, como sendo de um certo tipo e obedecendo a algumas regras específicas" (Venturi, 2014, p. 46). Se as propriedades matemáticas contribuem para organizar os conceitos, os fundamentos exercem o papel de os conectar. Os fundamentos são, portanto, responsáveis por criar elementos unificadores dos construtos e conceitos matemáticos, dando forma ao conhecimento matemático.

Inclui-se aqui o conhecimento do professor, associado a conhecer que: o que se mede são propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos – as grandezas; unidade e instrumento de medida são elementos distintos; os constructos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza; a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos e ações que são repetidos de forma idêntica, até que se obtenha determinado resultado (Clements & Stephan, 2004); a unidade de medida e o todo a ser medido são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza; as unidades de medida (padronizadas ou não) são adequadas para cada tipo de grandeza; a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição (Bragg & Outhred, 2004; Norton & Boyce, 2015); e que é relevante o papel das unidades não padronizadas para fundamentar noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas (Barrett et al., 2011; Bragg & Outhred, 2004).

(ic) Properties

As propriedades são “relações entre elementos ou subconjuntos de elementos de um conjunto que são instanciadas em situações particulares” (Mason et al., 2009, p. 10). A natureza dessas propriedades matemáticas pode variar; entretanto, o papel que elas exercem no entendimento dos conceitos e dos construtos matemáticos aos quais estão vinculadas é essencialmente o mesmo: organizar e descrever um conjunto de atributos e características relacionados especificamente a certos objetos ou entes matemáticos, de modo a que fiquem evidentes as relações entre eles. Inclui-se, no contexto da Medida, o conhecimento de que: toda unidade de medida, padronizada ou não, possui (sub)múltiplos resultantes do estabelecimento de relações de equivalência entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada (Ribeiro & Policastro, 2021); a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua (Bragg & Outhred, 2004); um instrumento não padronizado para medição de comprimento pode fornecer distintas unidades de medida (Policastro et al., 2017).

(ii) Phenomenology and applications

Nesta categoria inclui-se o conhecimento do professor não só dos conceitos que, dentro de um tópico, organizam e descrevem os fenômenos que dão sentido a esse tópico, mas também dos contextos que organizam todos os fenômenos que compartilham de ideias-chave ou “características estruturais” (Gómez & Cañadas, 2016, p. 316) próprias desses fenômenos. No âmbito dos tópicos de Medida, inclui-se conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra e conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: perímetro, área, capacidade, volume, massa, etc.

(iii) Procedures

Conhecer um conjunto de procedimentos associados a cada um dos tópicos – que muitas vezes se configuram como algoritmos –, os porquês matemáticos que os sustentam, a característica do resultado obtido e as condições necessárias e suficientes para executar tais procedimentos, forma parte desta categoria. No âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer: os procedimentos de iteração para efetuar uma medição de qualquer grandeza, isto é, a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração; que um instrumento de medida não padronizado pode ser utilizado de forma padronizada (ou não) para efetuar uma medição (Ribeiro et al., 2018); que o resultado da uma medição caracteriza-se pelo valor da medida expressa por um número associado a uma marca, e esta marca corresponde à unidade de medida utilizada (padronizada ou não); que é condição necessária para efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades (Norton & Boyce, 2015).

(vi) Registers of representation

O conhecimento matemático é exteriorizado e percebido pelos sentidos, e essa exteriorização pode ocorrer associada a distintas formas de o tornar perceptível. Essas múltiplas formas correspondem a registros de representação (Ainsworth, 2006; Pape & Tchoshanov, 2001) que podem ser, por exemplo, numéricos, pictóricos, gráficos, verbais – em linguagem oral ou escrita. Como elementos desta componente no âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer diferentes formas de exteriorizar uma medida; relacionar distintos registros de representação e navegar frutiferamente entre eles; ou compreender o emprego do termo “tamanho” como inadequado para se referir à magnitude de qualquer grandeza.

4. Contexto e método

Esta investigação compõe uma agenda de pesquisa que busca caracterizar, em vários temas e tópicos matemáticos, o Conhecimento Especializado do professor que atua desde a Educação Infantil. Aqui discutimos algumas dimensões desse conhecimento no âmbito de distintos tópicos do tema de Medidas. É um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), cujo foco de interesse não é o caso em si, mas saber que este instrumento permite conhecer e entender um elemento específico – o conhecimento do professor –, de modo a gerar teorias. As informações foram coletadas em um contexto de um Programa de Formação Contínua[80] – sete módulos de formação – que envolveu 17 professores, atuantes desde a Educação Infantil ao Ensino Superior, e que tem o objetivo formativo de desenvolver o conhecimento dos participantes em vários tópicos matemáticos. Aqui focamos em um encontro de oito horas do módulo de Medidas[81], cujos encontros foram todos gravados em áudio e vídeo – tomando-se um plano geral das discussões em grande grupo e planos com foco em cada um dos quatro grupos de trabalho.

Partimos da denominada *Tarefa para a Formação* – TpF (Ribeiro, Almeida et al., 2021) e focamos a atenção nas produções e discussões dos professores, associadas a três questões da Parte I da TpF (Figura II) e a questões vinculadas a uma tarefa para os alunos (Figura V).

A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos

Parte I

1) Responda individualmente cada uma das questões a seguir. Para isso, considere que você não está em um contexto escolar, ou seja, você não deverá responder às questões imaginando como faria para ensinar os objetos de conhecimento abordados nessas questões. Portanto, as suas respostas devem apenas revelar aquilo que você conhece sobre esses objetos de conhecimento. Você poderá utilizar palavras, desenhos, esquemas ou qualquer outro tipo de representação para explicitar o seu raciocínio.
   a) O que é medir?
   b) O que se pode medir?
   c) Como efetuamos uma medida?
   d) Com o que podemos medir?

2) Em qual ano/série ou etapa escolar você leciona? Considerando a série/ano ou etapa escolar em que leciona e sendo o foco principal em Medidas, que trabalho(s) você costuma desenvolver com os seus alunos? Apresente algum(ns) exemplo(s). Caso considere que não desenvolve nenhum tipo de trabalho com esse foco, comente os motivos que o(a) levam a não fazê-lo.

3) Quais são os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir?

Figura II: Questões da Tarefa para a Formação implementada no encontro

[80] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no entendimento e desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor no âmbito da matemática. Página do grupo: www.ciespmat.com.br

[81] Por ser um estudo também longitudinal, utilizamos números (de 1 a 17) para identificar os professores, para que seja possível, ao longo da pesquisa mais ampla, acompanhar cada um deles.

A primeira questão foca-se nos construtos e conceitos que fundamentam o fenômeno e os procedimentos da atividade de medir; a segunda associa-se ao conhecimento do professor dos níveis conceituais e procedimentais dos alunos em etapas educativas distintas, com relação aos fundamentos da atividade de medir; a última questão busca ampliar a discussão em relação ao papel das unidades de medida na medição. A segunda questão é tipicamente entendida como PCK, mas o foco aqui é no conhecimento matemático manifestado na justificação.

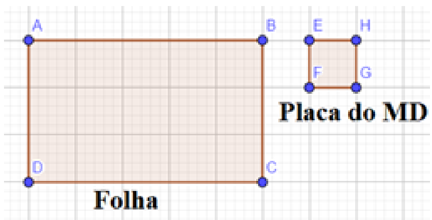
Todas as TpF (Ribeiro, Almeida et al., 2021) contêm uma tarefa para alunos, e aqui essa tarefa contribuiu para aceder – e desenvolvê-lo – ao conhecimento dos participantes quanto aos princípios, fundamentos e procedimentos associados à atividade de medir.

Tarefa: Rotação por estações – Vamos medir?

Estação 1: um pedaço de barbante (ou qualquer outro material que se assemelhe a um fio) de comprimento "x" e um paralelepípedo com dimensões x/10, x/5 e x/2.

<u>Orientação da estação 1</u>: Meça o comprimento do fio usando o paralelepípedo. Registre a sua medição na folha.

Estação 2: Uma placa do material dourado e uma folha cuja área seja equivalente a 5x3 placas (maior superfície da placa)



<u>Orientação da estação 2</u>: Meça a folha usando a placa. Registre a sua medição na folha.

Estação 3: Uma balança de pratos (montagem pode ser adaptada com cabide, fios e pratinhos de jardinagem); uma balança digital; uma placa do material dourado e diversos objetos idênticos (em quantidade suficiente para que a massa da placa possa ser comparada com a massa de um desses objetos quando o procedimento for empregado com a balança de pratos)

<u>Orientação da estação 3</u>: Meça a massa da placa do material dourado usando os objetos. Registre a sua medição na folha.

Estação 4: Um recipiente qualquer, um copinho (ou qualquer outro recipiente menor que o primeiro) e uma garrafa d'agua cheia. No recipiente, deve haver uma marcação para determinar a quantidade de água a ser depositada no interior – sugestão: a marca no recipiente pode ser a que determina que a quantidade de água a ser depositada corresponde a três unidade do copinho.

<u>Orientação da estação 4</u>: Meça a capacidade de água do recipiente até a marca indicada, usando o copinho.

Figura III: Estações de trabalho propostas na tarefa para os alunos

Esta tarefa para os alunos incluiu uma abordagem de "metodologias ativas" e continha indicações para a passagem por diferentes estações de trabalho (Figura III); uma ficha de registro de respostas (Figura IV); e um conjunto de perguntas associadas (Figura V).

FICHA DE REGISTRO DA TAREFA "**Rotação por estações – Vamos medir?**"

Nome:____ Data:____/____/____

Estação	O que você mediu?	Como você mediu? (descreva passo-a-passo os procedimentos empregados para efetuar a medição e faça um desenho para representar esse processo)	Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?	Registro da sua medição (o que escreveu na comanda que estava com você durante o trajeto pelas estações)
1					
2					

Figura IV: Ficha de registros incluída na tarefa para os alunos

Tarefa 1: Rotação por estações – Vamos medir?

Você está diante de um conjunto de quatro estações de trabalho. Em cada estação, você encontrará uma tira de papel contendo uma instrução. Você deverá seguir as instruções contidas nessa tira de papel, sem trocar qualquer tipo de informação com os seus colegas. Depois de executar o que se pede na tira de papel, você seguirá para a próxima estação, procedendo da mesma forma, até a última estação.

1. Agora que você já finalizou o trajeto pelas estações, solicite a ficha de registro ao(à) professor(a). Preencha a ficha de acordo com as instruções a seguir

Instruções para preenchimento da ficha:
Em cada coluna da ficha você deve explicar o seu raciocínio a partir de uma descrição com o máximo de detalhes que conseguir. Você pode fazê-lo usando esquemas, desenhos, palavras, cálculos,...

2. Sente-se com mais dois colegas e, no trio, comparem e discutam sobre os registros que cada um de vocês efetuou em sua própria ficha.
   a. Quais foram as semelhanças e as diferenças nos registros de cada um? Por que vocês acham que essas semelhanças e essas diferenças ocorreram?
   b. Considerando os procedimentos empregados para medir em cada uma das estações, vocês acham que são semelhantes ou distintos? Especifique as semelhanças (e/ou diferenças) que consideraram.
   c. Considerem a unidade de medida utilizada na estação 1. Vocês acham que é possível efetuar as medições propostas nas estações 2, 3 e 4 utilizando essa unidade de medida? Se sim, expliquem, em cada caso, como fariam essas medições. Caso vocês considerem que não seja possível efetuar essas medições, apresentem justificativas dos porquês consideram tal impossibilidade.

Figura V: Tarefa para alunos incluída na TpF

Os professores resolveram a Parte I (Figura II) nos pequenos grupos, e uma discussão plenária foi realizada. Posteriormente resolveram a tarefa para os alunos, percorrendo as estações e finalizaram com outra discussão plenária.

O áudio captado durante as interações – nos pequenos grupos e plenárias – foi integralmente transcrito e complementado com informações identificadas nos vídeos (Ribeiro et al., 2012). Na transcrição, as linhas são numeradas e "P*i*" corresponde ao professor *i* (de 1 a 17) e F, à formadora. A análise foi realizada em duas fases, uma manual e outra com o auxílio do *software* ATLAS.ti, procurando evidências de conhecimento no âmbito das categorias do KoT. Ao inserir os documentos no ATLAS.ti, as transcrições foram identificadas por "ME.I.N", e os registros escritos digitalizados foram identificados por "T.I.N", em que "N" representa o número do grupo em que ocorreram as discussões, e, para as plenárias, usou-se a nomenclatura "ME.PL.I".

Após alguns ciclos de codificações, incluindo-se, excluindo-se ou reagrupando-se as produções dos professores e determinadas categorias do KoT, até atingir a saturação (Strauss & Corbin, 1994), identificaram-se 473 produções, evidenciando conhecimento especializado (ver Tabela I).

Tabela I: Incidência de produções associadas a evidências do conhecimento em cada categoria do KoT

Categorias do KoT	Produções
Definitions	51
Foundations	218
Properties	42
Phenomenology and applications	14
Procedures	121
Registers representation	27
Total	473

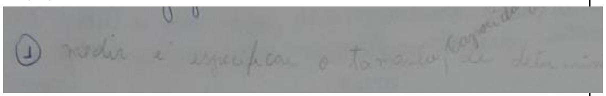
Uma análise transversal e longitudinal buscou semelhanças e diferenças entre o conteúdo do conhecimento identificado. Refinando a cada ciclo de análise, emergem os denominados descritores de conhecimento do professor (Policastro & Ribeiro, 2021), nomeados de acordo com o subdomínio (KoT) e a categoria a que pertencem: (*Definitions* (d); *Foundations* (f); *Properties* (pp); *Phenomenology and Applications* (ph)*; Procedures* (mp); *Registers of representantion* (rp)). A cada um foi atribuído um número sequencial.

Na Tabela II exemplificamos como esses descritores emergem da análise. Os professores revelam conhecimento associado a *Definitions:* ao buscarem explicar e conceituar o que é medir (ME.I.2, 46-48; ME.I.3 e T.I.1); e ao referirem certos entes – instrumento e unidade – que consideram necessários na atividade de medir (ME.I.3, 1033-1040).

Tabela II: Reagrupamento das produções e emergência dos descritores de conhecimento

<table>
<tr><td colspan="2">Definitions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Produções dos professores</td></tr>
<tr><td>ME.I.2
46. P2: Eu coloquei: é comparar. Pegar um cubinho e ver quantos cabem em uma barrinha.</td><td>ME.I.3
1033. P5: A unidade que eu encontrei foi área. Vocês...
1034. P7: Só comprimento e largura.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>47. P8: Eu coloquei: é quantificar o tamanho de alguma coisa.
48. P10: Eu coloquei: medir algo é compará-lo a uma unidade preestabelecida.

T.I.1

“Medir é especificar o tamanho de determinadas coisas.”</td><td>1035. P5: Então é só comprimento!
1036. P7: Hãn?
1037. P5: É só uma unidade: de comprimento.
1038. P1: Ah, tá.
1039. P5: A unidade é comprimento.
1040. P7: A unidade é comprimento.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análise</td></tr>
<tr><td>Conhecimento de que a medida está associada à comparação de uma unidade de medida (denominada majoritariamente por “referência”) com um todo, seguida de quantificação e/ou atribuição de um valor numérico.</td><td>Não fazem distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. Revelam entender que a unidade de medida se relaciona com uma magnitude, mas alguns professores confundem unidade de medida com grandeza.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descritores emergentes</td></tr>
<tr><td>KoTd1 - conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).</td><td>KoTd5 - conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude dessa mesma grandeza.</td></tr>
</table>

Em alguns casos, o conteúdo do conhecimento revelado pelos professores foi identificado como matematicamente inapropriado, fosse por incorreções conceituais ou por inadequações de contextos em que esses conceitos eram evocados. Em outras situações suas produções não exteriorizaram, de forma explícita, elementos suficientes para caracterizar o conteúdo do conhecimento, mas a discussão conjunta com os fundamentos teóricos assumidos para a análise permitiu constituir tais descrições. Nesse sentido os descritores emergentes dessas produções são identificados, respectivamente, com os símbolos “*” e “**” associados, sendo KoTph2* e KoTf2** dois exemplos.

Das 473 evidências identificadas, sintetizamos 31 descritores: 6 relacionados com *Definitions*; 8 com *Foundations*; 5 com *Properties*; 2 com *Phenomenology and applications*; 8 com *Procedures*; e 2 com *Registers of representation*. A ordem da numeração dos descritores está relacionada exclusivamente com a quantidade de produções dos professores vinculadas a cada um deles, ou seja, quanto maior o número de produções associadas, menor é a numeração do descritor. Portanto, KoTd1 tem mais produções associadas do que KoTd5, por exemplo. Assim, não seguimos uma ordem sequencial na numeração dos indicadores de cada categoria, mas uma numeração por “pesos”.

5. Resultados e discussão

Todos os grupos de professores consideram que medir é comparar uma unidade de medida (que denominam "referência") com um todo, seguido de quantificação e atribuição de um valor numérico (**KoTph1** – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra).

ME.I.4
54. *P14: Eu coloquei que medir é comparar quantas vezes algo cabe em outro.*
55. *P13: É, eu coloquei também: medir é comparar e quantificar. Comparar coisas*
56. *comparáveis e dizer quantas vezes cabe.*

Figura VI: Trecho transcrito da discussão no Grupo 4

Ao assumirem a comparação como um construto fundamental para a medição (ME.I.4: 54), reconhecem sua relação com uma etapa inicial do processo completo de medir, mas incluem outros (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004), como é o caso da quantificação (ME.I.4: 55) (**KoTmp6** – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir).

Apesar de não ficar claro se entendem os processos "quantificação" e "atribuição do valor numérico" como um único processo ou como processos distintos (ME.I.2: 84 – 90), reconhecem que há processos (mentais) e construtos fundamentais presentes em toda atividade de medição (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) (**KoTf2**** – conhecer que os construtos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza).

ME.I.2
84. *P9: Eu e a P8 colocamos a questão do quantificar, vocês acham que a gente*
85. *coloca o quantificar aqui? Que medir a gente vai quantificar...*
86. *P10: Ah, é que ele já está implícito aqui, não é?*
87. *P8: Quantificar nesse sentido, porque eu pensei em número, tem dez, tem quinze,*
88. *tem vinte, tem trinta... eu quantifico, eu dou um número para ele.*
89. *P10: É que quando você compara com uma unidade padrão, você...*
90. *P9: Já está quantificando.*

Figura VII: Trecho da discussão no Grupo 2

Revelam também um conhecimento associado aos fenômenos e aos contextos de aplicação (Gómez & Cañadas, 2016) dos fundamentos da atividade de medir (ME.I.3: 367 – 370), mesmo quando sugerem a presença desses fundamentos em contextos a que efetivamente não estão associados (**KoTph2*** – conhecer os distintos contextos de aplicação dos fundamentos da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.).

ME.I.3
367. *P1: Nós fizemos uma comparação de medida agora mesmo: que horas são?*
368. *Quanto tempo falta para acabar? Nós medimos o tempo.*
369. *P7: Sim, claro!*
370. *P1: A gente está medindo o tempo, quanto tempo falta, por exemplo, não é?*

Figura VIII: Trecho da discussão no Grupo 3

Ainda relativo à "quantificação", revelam conhecer que uma medida é dada por um valor expresso por uma quantidade contínua – embora não referindo explicitamente essa continuidade (ME.I.1: 304 – 310) –, em particular quando a medição é associada à grandeza comprimento (**KoTpp3**** – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua).

ME.I.1
304. (F pega um conjunto de cubinhos do material dourado e coloca-os sobre a mesa)
305. *F: Três, seis, nove, doze, quinze, dezoito, vinte e um, vinte e dois. Vinte e dois*
306. *cubinhos. Medi?*
307. *P4: Medir a quantidade? Não existe medir a quantidade, existe?*
308. *P3: Isso é contar ou quantificar. Contar e/ou quantificar, é a mesma coisa.*
310. *P4: Mas a quantificação está dentro de medida!*

Figura IX: Trecho transcrito da discussão no Grupo 1

Ainda que os professores reconheçam que o valor de uma medida pode ser expresso em termos de um número não inteiro (Smith et al., 2011) (**KoTpp3****), particularmente quando lidam com medições em que a unidade de medida é não padronizada (e.g., arestas de um paralelepípedo), nem todos (ME.PL.I:1111 – 1114) consideram a possibilidade de que os valores numéricos das medidas possam ser expressos por múltiplos e submúltiplos dessa unidade de medida (**KoTpp1*** – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada).

ME.PL.I
1107. *P4: Eu fiz também, e deu quatro ponto nove. Então, deu quatro placas e nove...*
1108. *Aí, como eu sei que uma placa tem dez barrinhas, eu converti minha unidade de*
1109. *medida em barrinhas. Então, eu coloquei que tinham 49 barrinhas. E aí, tudo eu*
1110. *medi com barrinhas. Você entendeu?*
1111. *F: Eu acho que sim! Ao invés de você pensar em placas como unidade,*
1112. *você pensou em barrinhas.*
1113. *P4: Isso, em barrinhas. Porque eu não posso falar "quatro placas e nove,*
1114. *barrinhas", então, eu converti tudo em barrinhas.*

Figura X: Trecho da discussão plenária

Consideram, inapropriadamente, que os submúltiplos de uma unidade correspondem a outra unidade distinta, algo que se relaciona com conhecer que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos (Berka, 1983) (**KoTpp2***– conhecer que toda unidade de medida, padronizada ou não padronizada, possui múltiplos e submúltiplos).

Revelam também um conhecimento das relações entre múltiplos e submúltiplos, ao efetuarem uma transposição direta entre a estrutura do Sistema de Numeração Decimal (valor posicional) e as relações de equivalência entre múltiplos e submúltiplos de unidades padronizadas que possuem base 10 (M.E.I.3: 225-228), como é o caso de comprimento, capacidade e massa. No entanto, pautam-se em memorização de regras que nem sempre estabelecem congruências verdadeiras (**KoTpp5*** – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal – base 10).

ME.I.3

225. P7: Quando você ensina decimais, a partir do momento que você trabalha
226. com medidas, você vai usar os mesmos números. Não vai mudar nada!
227. O que é que vai mudar? É a nomenclatura. É a grandeza, só. O que era décimo,
228. passa a ser decímetro, decilitro, decigrama. O outro, centímetro, centésimo.

Figura XI: Trecho da discussão no Grupo 3

Quando as discussões se centram nas grandezas volume e capacidade (ME.I.2: 1468-1473), os professores revelam entender capacidade de um recipiente como a medida de "algo que cabe dentro" dele (Parnorkou, 2021) (**KoTd2** – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido).

ME.I.2

1468. *P10: Não, o que tem volume é algo maciço, um sólido.*
1469. *P9: Sólido.*
1470. *P10: Quando é sólido, ele tem volume.*
1471. *P9: Quando ele é oco...*
1472. *P10: Quando ele é oco, ele tem capacidade.*
1473. *P9: Então, o recipiente tem capacidade.*

Figura XII: Trecho da discussão no Grupo 2

Corroborando a dificuldade para distinguir as grandezas volume e capacidade (Ho & McMaster, 2019), alguns professores consideram que somente os objetos sólidos (maciços) possuem volume, e objetos ocos possuem apenas capacidade (**KoTd4** – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional).

ME.I.1

1231. P4: A capacidade está relacionada com o que você usa para preencher,
1234. não é? Será que é essa a diferença entre capacidade e volume?
1235. P3: Para mim ainda é a mesma coisa.
1236. P4: Porque, por exemplo, esse copo. Ele tem 150 ml. Então, o volume dele
1237. é de 150 ml. Agora, quantos copinhos de café eu vou precisar para
1238. encher aqui? Ou de farinha? Aí eu acho que é a relação...
1239. P11: Depende do que eu estou usando.
1240. P3: É, por exemplo, tem capacidade para três copinhos de água, dois de
1241. feijão.

Figura XIII: Trecho da discussão no Grupo 1

Entendem a grandeza área como o resultado do "preenchimento" de uma região (MEI.1: 657-659), definida uma unidade de medida, mas também como o resultado do produto de magnitudes unidimensionais, o que se associa com a coordenação entre duas dimensões (Parnorkou, 2020), mas não entre duas unidades de medida (**KoTd3** – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira).

ME.I.1

P3: Aí já entra a questão de área e perímetro, não é? Se eu quero saber área, eu vou completar (passa a caneta sobre a área da superfície da folha)*. Se é só o perímetro, eu faço só ao redor* (contorna a borda da folha com a caneta).

Figura XIV: Trecho da discussão no Grupo 1

Os professores não fazem distinção entre medir a área e calcular o valor da área de uma região (**KoTmp3*** – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza) por meio de fórmulas matemáticas, especificamente no caso do retângulo (ME.I.3: 899-902) (**KoTmp8** – conhecer o procedimento associado ao uso da fórmula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais).

ME.I.3

P16: Mas, a área é comprimento vezes altura, não é?
P7: A área é comprimento vezes altura, isso.
P5: Comprimento vezes largura
P16: Ah, vezes largura...

Figura XV: Trecho da discussão no Grupo 3

Em contrapartida, particularmente no caso das figuras poligonais, os professores reconhecem que o perímetro não pode ser definido a partir do modo como é calculado (ME.I.3: 959-967) (**KoTd6 –** conhecer que a definição de perímetro – em 2D – é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana).

ME.I.3

P5: P16, essa palavra, perímetro, significa contorno e o metro é a medida. Então, quando você fala de perímetro, você está medindo o contorno da figura. O pessoal usa: "o perímetro é a soma dos lados". Porque sempre pegam figurinhas, polígonos, que são essas figurinhas assim, regulares, mas você não pode definir como sendo soma dos lados. Por quê? Porque você tem figuras assim (representa uma figura geométrica não poligonal). *Como eu vou medir o perímetro disso? Então, você pega um barbante, coloca sobre essa linha, estica e mede com uma trena, isso é perímetro, a medida do contorno.*

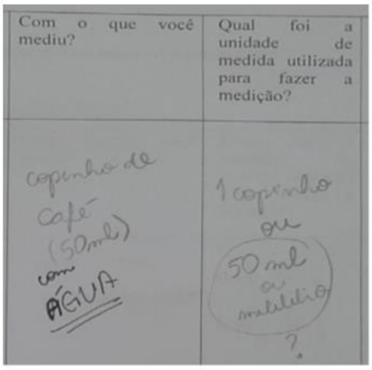
Figura XVI: Trecho transcrito da discussão no Grupo 3

Outros dois construtos que os professores não distinguem (ME.I.1: 436-441) são unidade de medida e instrumento de medição (**KoTf1*** – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição).

ME.I.1
436. *P4: Mas só que, olha: "como efetuamos uma medida?". Com um instrumento.*
437. *E aí, com o que podemos medir? Não é a mesma coisa? Com um instrumento...*
438. *Aí eu coloquei até um asterisco porque eu acho que é a mesma coisa!*
439. *P11: Eu coloquei que efetuamos utilizando uma unidade de referência*
440. *Aí eu coloquei: fita métrica, régua, mãos, pés... eu especifiquei aqui*
441. *o instrumento. Padrão ou não.*

Figura XVII: Trecho da discussão no Grupo 1

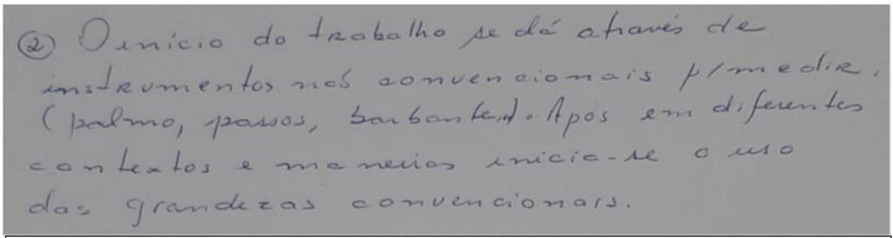
Ao passarem pelas estações para resolver a tarefa para os alunos, onde deveriam medir a capacidade e a massa de alguns objetos utilizando diferentes instrumentos de medição (copo plástico e balança de cabide) e unidades de medida não padronizadas (capacidade do copo e massa de uma barra do material dourado), não diferenciaram instrumento de unidade de medida (**KoTd5** – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza).



Copinho de café (50 ml) com água	*1 copinho ou (50 ml ou mililitros)*

Figura XVIII: Registro de um professor do Grupo 3

Mesmo assim, ao referirem o seu trabalho habitual com os alunos (Figura XIX), particularmente no caso da grandeza comprimento, os professores revelam conhecimento do papel das unidades de medida não padronizadas no entendimento das grandezas padronizadas (Passalaigue & Munier, 2015) (**KoTf4** – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam as noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas).


② O inicio do trabalho se dá através de
instrumentos nos convencionais p/medir,
(palmo, passos, barbantes). Após em diferentes
contextos e maneiras inicia-se o uso
das grandezas convencionais.

O início do trabalho se dá através de instrumentos não convencionais para medir (palmo, passos, barbantes). Após, em diferentes contextos e maneiras, inicia-se o uso das grandezas convencionais.

Figura XIX: Produção de um professor do Grupo 2

Identificam que um instrumento não padronizado (ME.I.1: 682-688) pode fornecer mais de uma unidade de medida (**KoTpp4** – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas) e revelam conhecer que instrumentos não padronizados (ME.I.1: 689-691) podem ser utilizados de forma não padronizada (Ribeiro et al., 2018) para medir distintas grandezas (**KoTmp7** – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e.g., largura da caneta para medir comprimento; menor face de um prisma para medir a área de uma região).

ME.I.1
682. *P12: Talvez você queira medir a área do objeto* (com o indicador, contorna
683. o perímetro da folha sulfite).
684. *P3: Ah, e possa medir só pela largura da caneta* (simula a iteração da caneta
685. na superfície da folha).
686. *P12: É, ou você mede assim* (considera o comprimento da caneta como unidade de
687. medida para medir o perímetro da folha)*, que seria o comprimento, ou você mede*
688. *assim* (itera largura como unidade para medir a área da folha)*, que seria a área*
689. *P3: Mas não só a área, não é? Eu poderia medir esse espaço* (passa o indicador
690 no comprimento da folha) *com a caneta assim* (utiliza a largura da caneta como
691. unidade para medir o comprimento da folha).

Figura XX: Trecho da discussão no Grupo 1

No entanto, parece haver um "salto" entre o que os professores consideram como possibilidade de trabalho introdutório para a grandeza comprimento e o que se propõe para trabalhar com outras grandezas (Stephan & Clements, 2003). Em particular, para as grandezas capacidade e massa, revelam dificuldades (ME.I.4: 957-969) em conceber que uma medição pode ser efetuada com uma unidade de medida não padronizada, e resistem a aceitar o valor da medida correspondente obtido em termos dessa unidade (Bragg & Outhred, 2004) (**KoTf4**).

ME.I.4

957. *P14: Como eu queria medir a massa da placa, a balança de cabide,*
958. *para mim, não serviria de nada, então não usei ela. Eu usei só a*
959. *balança digital. 'Meça massa da placa'. No cabide?*
960. *P6: É, você teria que estimar...*
961. *P13: Ora, na balança você não tem a* (gesticula com as mãos como
962. se indicasse os dois pratos da balança) *...o quilo?*
963. *P6: Ah, é! Você iria colocando até igualar!*
964. *P14: Mas aí você ia ter que fazer comparação. Qual é*
965. *a massa da placa? A massa da placa é igual a massa de 12*
966. *barrinhas?*
967. *P13: É, 12 barrinhas separadas.*
968. *P14: Daí eu pensei assim, se eu quero a massa da placa, já vou usar*
969. *um instrumento que me dá a massa, que é a balança!*

Figura XXI: Trecho da discussão no Grupo 4

Essas dificuldades estão associadas a uma lacuna entre as discussões desenvolvidas no âmbito da grandeza comprimento e o que (não) se faz para a conceitualização das outras grandezas (Passalaigue & Munier, 2015), mas, fundamentalmente, vinculam-se ao conteúdo do conhecimento dos professores acerca de: o que é uma medida (**KoTd1**); o que é uma unidade de medida (**KoTd5**); os constructos que fundamentam a atividade de medir (**KoTf2****); o entendimento de que o que se mede são as grandezas (**KoTf3**). De fato, assumem inapropriadamente (ME.I.1: 33 e 97-98) que grandeza é uma "característica" de um objeto físico (Berka, 1983), e não uma propriedade mensurável desse objeto ou de um fenômeno físico (**KoTf3*** – conhecer que o que se mede são grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos).

ME.I.1

33. *P12: Medir é dar, mensurar valor a uma característica do objeto...*
(...)
97. *P4: acho que são essas três as características, não?*
98. *Tamanho, volume ou massa. Tem alguma outra?*

Figura XXII: Trecho da discussão no Grupo 1

O termo "tamanho" é utilizado de forma genérica pelos professores, principalmente associado ao comprimento – uso matematicamente inadequado –, o que revela seu conhecimento da nomenclatura da grandeza (**KoTrp1*** – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas). Ao mesmo tempo, revelam conhecimento da necessidade de uma nomenclatura matemática adequada (ME.I.1: 1659-1670), associada às unidades de medida (**KoTrp2** – conhecer a nomenclatura e simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas).

ME.I.1

1659. *P3: Qual foi a unidade de medida? Na estação 1 é barra de madeira. Depois*
1660. *eu acrescentei largura do paralelepípedo, para ficar mais acadêmico.*
1661. *P11: Eu acho que é a nomenclatura, também. Porque todo mundo usou o*
1662. *paralelepípedo.*
1663. *P4: Eu acho que é a referência. Porque, eu, por exemplo, usei como referência a*
1664. *altura, largura e o comprimento.*
1665. *P12: É porque eu acho que tem diferença usar a largura dela, eu posso ter usado*
1666. *outro lado do paralelepípedo.*
1667. *P4: Como largura, não é?*
1668. *P3: Eu coloquei só barra de madeira. Mas, se eu falasse para você: meça com a*
1669. *barra de madeira, não ia dar o mesmo. Você poderia medir de outro jeito. Então,*
1670. *está errado o jeito que eu fiz.*

Figura XXIII: Trecho da discussão no Grupo 1

Todos os professores reconhecem a importância do construto “unidade de medida” (Bragg & Outhred, 2004) e sabem que, sem ela, não se efetua uma medição (**KoTf5** – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição).

ME.I.3

54. *P7: Eu posso medir qualquer coisa, desde que eu possua um referencial,*
55. *que no caso seria...*
56. *P1: A unidade de medida.*

Figura XXIV: Trecho da discussão no Grupo 3

Somente dois dos quatro grupos (ME.I.2: 60-62) abordaram explicitamente um dos elementos do conhecimento dos fundamentos da Medida (**KoTf6** – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza).

ME.I.2

60. P17: É, por exemplo, se eu vou medir o comprimento, eu vou pegar algo que...
61. P10: Que tenha comprimento...
62. P9: É, porque depende do que você vai medir.

Figura XXV: Trecho da discussão no Grupo 2

Esse fato associa-se a duas dimensões: por um lado, por não deterem um conhecimento associado à definição de medida (**KoTd1**), não consideram que a unidade de medida e o todo a ser medido tenham de ser magnitudes de mesma natureza. Por outro lado, a “comparação” entre uma unidade de “referência” e algo relacionado a essa referência é o construto que sustenta o conteúdo desse conhecimento; portanto, tal comparação só é possível entre magnitudes de mesma natureza, mas não distinguir unidade de instrumento de medição (**KoTf1***) pode sustentar o não reconhecimento da necessidade de que as magnitudes da unidade e todo a ser medido sejam da mesma natureza.

Os professores revelam um conhecimento associado às unidades de medida padronizadas e não padronizadas mais comuns (**KoTf7** – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada grandeza).

ME.I.4
99. *P13: O padrão está relacionado com, por exemplo, o metro, o centímetro.*
100. *Entendeu? E o não padrão é, por exemplo, eu pegar esse livro e fazer...*
101. *P6: Por meio dele.*
102. *P13: Isso, o livro, o palmo.*
103. *P14: Qual é o padrão para medida de comprimento? O metro. E esse padrão*
104. *para medida de comprimento foi combinado, como a P15 falou, em convenção.*

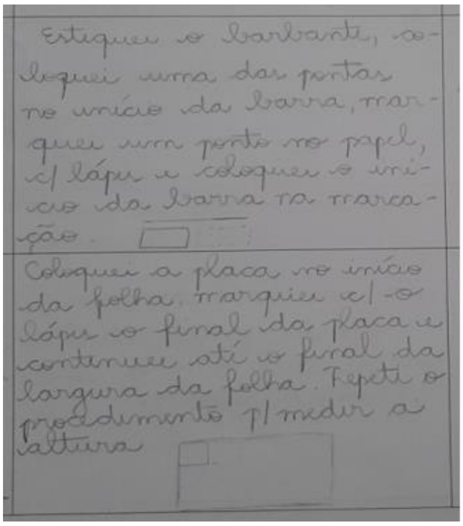
Figura XXVI: Trecho da discussão no Grupo 4

Ao resolverem a tarefa dos alunos, revelam conhecer procedimentos de medição fazendo uso dos princípios essenciais da atividade de medir (Clements & Stephan, 2004). No entanto, solicitados a medir o comprimento de um elemento maleável – barbante – utilizando como instrumento de medida um elemento sólido – paralelepípedo –, os professores revelam dificuldades em aplicar esses princípios.

ME.I.4
680. (P14 apoia o paralelepípedo sobre a maior face. Usa a maior aresta como unidade
681. de medida e estica o fio sobre essa face, coincidindo uma das extremidades com
682. um dos vértices do paralelepípedo).
683. P14: *Aí parou aqui, aí você marca ele aqui.*
684. (P14 dobra o fio sobrepondo a parte que ainda falta para ser medida
685. sobre a parte que já foi medida)
686. *Você pode voltar ele aqui.*
687. *P6: Eu também fiz isso!*

Figura XXVII: Trecho da discussão no Grupo 4

No procedimento descrito (ME.I.4: 680-686), P14 não considera que, ao dobrar o fio, uma porção do todo a ser medido – o comprimento do barbante – foi perdida, deixando lacunas entre as unidades de medida na iteração (Clements & Stephan, 2004). Apesar de a maioria efetuar o procedimento de iteração de forma adequada (descrito na Figura XXVIII), não há menção explícita ao que sustenta tal procedimento (**KoTmp1** –** conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração). Assim, pode ser algo que forma parte do *script* de medição, e não é, portanto, entendido como central nesse processo, que fundamenta a existência de um algoritmo a ele associado (**KoTf8** –** conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado).


Estiquei o barbante, co-
loquei uma das pontas
no início da barra, mar-
quei um ponto no papel,
c/ lápis e coloquei o iní-
cio da barra na marca-
ção.
Coloquei a placa no início
da folha, marquei c/ o
lápis o final da placa e
continuei até o final da
largura da folha. Repeti o
procedimento p/ medir a
altura

Estiquei o barbante, coloquei uma das pontas no início da barra, marquei um ponto no papel, com lápis e coloquei o início da barra na marcação.
Coloquei a placa no início da folha marquei com o lápis o final da placa e continuei até o final da largura da folha. Repeti o procedimento para medir a altura.

Figura XXVIII: Registro de um professor do Grupo 1

Para medir uma distância (ME.I.3: 175-178), consideram a relação entre a magnitude da unidade de medida e a quantidade de vezes que terá de ser iterada para medir o todo (**KoTmp4** – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido (v = d/u)).

ME.I.3

175. *P5: Então, eu vou verificar quantos palmos eu tenho aqui nesta folha.*
176. *P7: O que vai ser diferente de cada um de nós. Depois nós vamos comparar.*
177. *P5: É, eu vou comparar...*
178. *P7: A sua medida ficou menor porque o seu palmo é maior.*

Figura XXIX: Trecho de discussão no Grupo 3

Apesar de os professores associarem instrumento de medida com unidade de medida (ME.I.1: 412-413), destacam a necessidade (condição necessária) de que essa seja única no processo de medição. Porém, não fica claro se conhecem que na iteração sempre se deve utilizar a mesma unidade de medida (Norton & Boyce, 2015), ainda que ela seja formada pela composição de outras unidades (**KoTmp5****: conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing*).

ME.I.1

411. *P4: (...) E, a partir do momento*
412. *que eu defino o meu instrumento, eu devo utilizá-lo durante todo o meu*
413. *processo de medida. Que aí foi o que ela falou uma vez, lembra? Ah, quanto*
414. *tem essa folha?*
415. (P4 coloca uma caneta, uma borracha e um lápis alinhados sobre o maior
416. comprimento de uma folha sulfite)
417. *Tem uma caneta, uma borracha e um lápis. Não. Se eu comecei com uma caneta,*
418. *eu tenho que terminar com a caneta.*

Figura XXX: Registro de um professor do Grupo 1

No intuito de sintetizar os resultados obtidos neste estudo e de avançar na teorização desse conhecimento – por via dos descritores –, apresentamos a caracterização obtida do conhecimento especializado do professor relativamente a tópicos de Medida – KoT.

Tabela IV – Categorias e descritores relacionados ao subdomínio *Knowledge of Topics* de Medida

Categorias	*Descritores*
Definitions (KoTd)	**KoTd1** – conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).
	KoTd2 – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido.
	KoTd3 – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira.
	KoTd4 – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional.
	KoTd5 – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza.
	KoTd6 – conhecer que a definição de perímetro (em 2D) é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana.
Properties (KoTpp)	**KoTpp1*** – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada.
	KoTpp2* – conhecer que toda unidade de medida (padronizada ou não padronizada) possui múltiplos e submúltiplos.
	KoTpp3** – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua.
	KoTpp4 – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas.
	KoTpp5* – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10).

Foundation (KoTf)	**KoTf1*** – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. **KoTf2**** – conhecer que os constructos “comparar”, “iterar”, “acumular” e “quantificar” são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza. **KoTf3*** – conhecer que o que se mede são as grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos. **KoTf4** – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam a constituição de noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas. **KoTf5** – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição. **KoTf6** – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza. **KoTf7** – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada tipo de grandeza. **KoTf8**** – conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado.
Phenomenology and applications (KoTph)	**KoTph1** – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza, em termos da quantificação de uma em função da outra. **KoTph2*** – conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.

Procedures (KoTmp)	**KoTmp1*** – conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração. **KoTmp2** – conhecer a característica do resultado de uma medição: uma medida é expressa por um valor numérico associado a uma marca, correspondente à unidade de medida (padronizada ou não) utilizada. **KoTmp3** – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza. **KoTmp4** – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante o todo (d) a ser medido (v = d/u). **KoTmp5**** – conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade possa ser resultante de uma composição de unidades (*unitizing*). **KoTmp6** – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir. **KoTmp7** – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e.g., largura da caneta para medir comprimento ou área de uma figura retangular; menor face de um prisma para medir área de uma região. **KoTmp8** – conhecer o procedimento associado ao uso da formula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais.
Registers of representations (KoTrp)	**KoTrp1*** – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas. **KoTrp2** – conhecer a nomenclatura e a simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas.

Fica evidente a prevalência de alguns descritores em detrimento de outros. Essas diferenças podem estar associadas, por um lado, ao fato de que a *TpF* (Ribeiro, Almeida et al., 2021) não perseguia objetivos específicos associados à categoria *Registers of representation*. Por outro lado, os resultados da categoria *Phenomenology and Applications* são coerentes com estudos anteriores que identificaram seu conteúdo como o mais ausente (Gómez & Cañadas, 2016; Zakaryan & Ribeiro, 2018).

6. Comentários finais

Descrever, entender e caracterizar o conteúdo do conhecimento especializado de um grupo de professores de diferentes etapas educativas no âmbito da Medida contribui para clarificar as particularidades e especificidades do conhecimento do professor que ensina ou ensinará os tópicos de Medida, independentemente da etapa educativa em que atua. Notemos que essa não associação entre essas especificidades e a etapa em que o professor atua contribui para que possamos encarar a matemática elementar de um ponto de vista avançado (Klein, 1932) e vice-versa, mas também para que possamos mapear esse conhecimento especializado, numa perspectiva de descompactá-lo (Ma, 1999) e torná-lo mais acessível a outros.

Naturalmente, a busca por esse mapeamento não pretende prescrever todo o conhecimento do professor, mas almeja fornecer elementos para que o professor se paute em "ideias centrais que determinam como o conhecimento é gerado e organizado dentro da disciplina" (Schmidt et al., 2002, p. 9).

Quando nos propomos a um detalhamento do conteúdo do conhecimento do professor, importa evidenciar as características e os elementos que constituem as especificidades desse conhecimento. Nesse sentido, pautados por resultados anteriores (Policastro & Ribeiro, 2021), passamos a considerar que o conteúdo do conhecimento do professor associado à categoria *Definitions*, *properties and foundations* (Carrillo et al., 2018), relativamente a qualquer tópico, mas aqui, em particular, nos tópicos de Medida, deveria ser encarado em termos de suas especificidades, de forma separada, em categorias distintas. De fato, os resultados obtidos permitem identificar, em específico nas categorias *Properties* e *Foundations*, componentes do conhecimento do professor que necessitam ser desenvolvidas.

Assim, é essencial que o desenho de programas de formação considere explicitamente estes e outros resultados, com objetivo de contribuir para desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor que lhe permita, por exemplo, conectar conceitos, propriedades e fundamentos, e, na sua prática letiva – atual ou futura –, evidenciar essas conexões dentro de um mesmo tópico e entre tópicos distintos, dando forma à estrutura da disciplina (Gamboa et al., 2020). Para isso, é necessário um foco específico da formação, associado a tarefas desenhadas intencionalmente (Ribeiro, Almeida et al., 2021; Ribeiro, Gibim, et al. 2021) com a finalidade de desenvolver uma consciência das estruturas da matemática (Mason et al., 2009), do entendimento das conexões matemáticas e do conhecimento de como organizar, numa distribuição curricular, os tópicos, de modo a evidenciar essas conexões (Vale et al., 2010).

Os resultados aqui obtidos – associados aos descritores de conhecimento – contribuem, portanto, para um mais amplo entendimento do conteúdo do conhecimento do professor – aqui no âmbito do KoT, relativamente aos tópicos de Medida – e das categorias que o formam, possibilitando um olhar mais detalhado para essa componente da estrutura do conhecimento especializado. Entretanto, para que possamos continuar refletindo sobre essas componentes, algumas questões se abrem, contribuindo para guiar uma agenda de pesquisa que busque, de forma imbricada, uma relação com a formação de professores: (i) que relações ocorrem entre os descritores do conhecimento dos tópicos (KoT) de Medida e outros tópicos, como em Números e Operações?; ii) qual o papel dessas relações na composição estrutural do conhecimento do professor relativamente a esses tópicos?; iii) quais os impactos na prática letiva do professor no caso de as formações (iniciais e contínuas) objetivarem o desenvolvimento do conhecimento do professor associado a essas estruturas matemáticas?; v) de que forma as especificidades do conhecimento do professor se vão desenvolvendo ao longo do tempo, pela participação em contextos formativos que têm essa intencionalidade?

Referências

Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*, 183–198.

Barrett, J. E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D. H., Klanderman, D., Miller, A. L., & Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: A teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM*, *43*(5), 637. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8

Barret, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 28–54.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235–268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Berka, K. (1983). *Measurement: Its concepts, theories and problems* (Vol. 72). Springer Netherlands.

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *31*(4), 416–440. https://doi.org/10.3102/0162373709353129

Bragg, P., & Outhred, L. (2004). A measure of rulers—The importance of units in a measure. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 159–166.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.

Caldatto, M. E., Fiorentini, D., & Pavanello, R. M. (2018). An analysis of the project of professional training privileged by PROFMAT. *Zetetiké*, *26*, 260–281.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–256. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalambous, C. Y. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: A multiple-case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 427–445).

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Org.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–555). Information Age Publishing.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early Math: The learning trajectory approach*. Routledge.

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Orgs.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 299–317).

Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M., & Sanchéz-Matamoros, G. (2020). The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. In S. Zehetmeier, D. Potari, & M. Ribeiro, *Professional development and knowledge of Mathematics teachers* (1ª ed., pp. 24–43). Routledge.

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(3), 311–334. https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *The Arithmetic Teacher*, *31*(7), 19–24. JSTOR.

Hill, H. C., & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal*, *55*(5), 1076–1112.

Ho, A., & McMaster, H. (2019). Is' capacity'volume? Understandings of 11 to 12-year-old children. *Mathematics Education Research Group of Australasia: Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 356–363.

Irwin, K. C., Ell, F. R., & Vistro-Yu, C. P. (2004). Understanding linear measurement: A comparison of Filipino and New Zealand children. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 3–24. https://doi.org/10.1007/BF03217393

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an andvanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (3ª ed., Vol. 1). Macmillan.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. *Learning and Teaching Measurement*, *1*, 100–121.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary Mathematics: Teacher's understanding of fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates, Incorporated.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219–248.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10–32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics—National Council of Teacher of Mathematics*. Reston, VA.

Norton, A., & Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+ 1 levels of units. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 211–232.

OECD. (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do. Student performance in reading, mathematics, and science* (Vol. 1). OECD.

Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118–127.

Parnorkou, N. (2020). Dynamic measurement reasoning for area and volume. *For the Learning of Mathematics*, *40*(3), 9–13.

Parnorkou, N. (2021). Exploring students' dynamic measurement reasoning about right prisms and cylinders. *Cognition and Instruction*, 1–35. https://doi.org/10.1080/07370008.2021.1958218

Passalaigue, D., & Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and mesaurement. *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 307–336.

Policastro, M. S., Almeida, A. R., & Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Revista Espaço Plural*, *36*(1), 123–154.

Policastro, M. S., Almeida, A. R., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland. *Mathematics education in early years* (pp. 263–279). Springer.

Policastro, M. S., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. *Zetetiké*, *29*, 1–24. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661906

Ribeiro, M., Almeida, A. R. de, & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1–32. https://doi.org/1046312/pem.v14i35.13263

Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15(1)*, 93–121.

Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021). A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: Discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(34), 1–24. https://doi.org/10.46312/pem.v14i34.12686

Ribeiro, M., Jakobsen, A., & Mellone, M. (2018). Secondary prospective teachers' interpretative knowledge in a measurement situation. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter, *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 35–42). PME.

Ribeiro, M., & Policastro, M. (2021). *As medidas e as especificidades do conhecimento do professor para que os alunos aprendam Matemática com significado* (1.ª ed., vol. 2). CRV.

Sarama, J., Clements, D. H., Barret, J., Van Dine, D. W., & MacDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 667–680.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes Mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–20. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum. *American Educator*, *Summer*, 1–18.

Smith, J. P., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM*, *43*(5), 617–620. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0369-7

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1.ª ed.). Sage Publications.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Fractions, Ratio and Proportional Reasoning, Part B*, *22*(3), 237–295. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00022-1

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright, *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook* (pp. 3–16). National Council of Teachers of Mathematics.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). *Grounded theory methodology: An overview*. Sage Publications.

Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 177–198.

Szilagyi, J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). young children's understandings of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education.*, *44*(3), 581–620.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics wiht particular reference to limits and continuity. *Educational Studes in Mathematics*, *12*, 151–169.

Vale, C., McAndrew, A., & Krishnan, S. (2010). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 193–212.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM*, *43*(5), 621–635. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0331-8

Venturi, G. (2014). Foundation of Mathematics between theory and practice. *Philosophia Scientiæ*, *18*(1), 45–80.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Springer.

Vysotskaya, E., Lobanova, A., Rekhtman, I., & Yanishevskaya, M. (2020). The challenge of proportion: Does it require rethinking of the measurement paradigm? *Educational Studies in Mathematics, 106,* 429-446. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09987-8

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), 14–17.

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2018). Mathematics teachers' specialized knowledge: A secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317–346.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Uma proposta de teorização das conexões matemáticas na perspectiva do conhecimento especializado do professor

Ao se explorar, descrever e detalhar as especificidades do conhecimento do professor no âmbito do tópico de divisão (ver artigo 1) e dos tópicos no tema de Medida (ver artigo 2), foi possível identificar elementos estruturantes e estruturais (ideias unificadoras) desses conhecimentos e, com base nesta identificação, passamos a discutir uma proposta de teorização das conexões matemáticas que se observam a partir das relações entre esses conhecimentos.

Uma vez que assumimos a perspectiva das conexões matemáticas segundo a conceitualização do MTSK (CARRILLO et al., 2018), evidenciamos as relações que se observam entre diferentes construtos, conceitos, propriedades e fundamentos, mas incluímos, também, as distintas representações para um construto ou conceito, no âmbito de um mesmo tópico e entre diferentes tópicos matemáticos. Aqui, numa perspectiva de descrever as conexões do tipo intra-conceituais e interconceituais que se observam a partir do conteúdo do conhecimento do professor, evidenciamos essas relações especificamente no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida.

As conexões matemáticas são assumidas, nesta investigação, desde uma perspectiva do conhecimento especializado do professor, e, por isso, são encaradas como produtos de relações entre elementos estruturantes e ideias unificadoras presentes no conteúdo desse conhecimento.

Esses elementos estruturantes referem-se a construtos, conceitos, fundamentos, propriedades, procedimentos e representações que são responsáveis por organizar e dar forma ao conteúdo dos conhecimentos no âmbito de cada tópico matemático. Já os elementos estruturais são, na verdade, essas ideias unificadoras que se apresentam como noções centrais na fundamentação dos entendimentos matemáticos, porque conectam conceitos e processos.

Assim, a nossa proposta de teorização das conexões matemáticas que se observam a partir do conteúdo dos conhecimentos descritos no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida – KoT (divisão) e KoT (medida), respectivamente – se pauta, primeiramente, na identificação de um conjunto de elementos estruturantes do conteúdo desses conhecimentos e nas ideias unificadoras que os sustentam. Em seguida, busca-se evidenciar as relações entre esses elementos estruturantes e ideias unificadoras, a fim de se obter uma descrição do conteúdo de conhecimentos associados às conexões intra-conceituais e interconceituais.

Nessa perspectiva de evidenciar as relações que ocorrem entre as diferentes constituintes do conteúdo do conhecimento especializado do professor no âmbito de cada tópico matemático, apresentamos a nossa proposta de "pacotes de conhecimento especializado". Assim, ao efetuarmos essas relações entre estes "pacotes de conhecimentos especializados", tornamos visíveis, desde uma perspectiva orgânica da Matemática, o que teoricamente se denomina de conexões intra-conceituais e interconceituais (CARRILLO et al., 2018; GAMBOA et al., 2016).

No âmbito dos tópicos do tema de Medida, por exemplo, identificamos que os construtos "todo a ser medido", "unidade de medida", "múltiplos e submúltimos da unidade de medida", "valor numérico da medida", "grandeza", "magnitude" e "iteração" são estruturantes do conteúdo dos conhecimentos relacionados com: i) o que é medir – o fenômeno – (BERKA, 1983); ii) as definições de medida e de unidade de medida (BERKA, 1983; BRAGG; OUTHRED, 2004; NORTON; BOYCE, 2015); iii) os fundamentos da atividade de medir (BARRETT et al., 2011; CLEMENTS; STEPHAN, 2004); iii) as propriedades associadas aos tópicos de medida (BARRETT et al., 2011; HEUVEL-PANHUIZEN; ELIA, 2011; NORTON; BOYCE, 2015); iv) aos procedimentos e às características dos resultados de uma medição (BERKA, 1983; CLEMENTS; STEPHAN, 2004). Também destacam-se as ideias de "comparação", quantificação", "relação numérica", "agrupamentos", "equivalência" e "proporcionalidade" como estruturais e, portanto, unificadoras do conteúdo dos conhecimentos associados aos tópicos do tema de Medida.

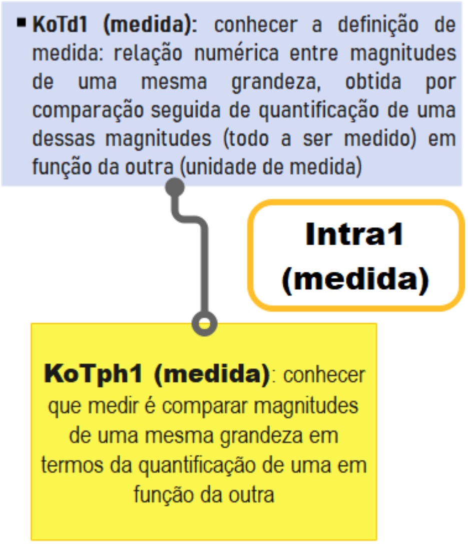
Por exemplo, o próprio conhecimento do ato de medir, enquanto um fenômeno, se apresenta como estruturante para a atribuição de significado ao conhecimento de que a medida em si é definida como uma relação numérica obtida pela comparação seguida da quantificação de magnitudes de uma mesma grandeza. De fato, ao se definir a medida como uma relação numérica entre magnitudes, a essência do conceito "medida" é capturada (MARIOTTI; FISCHBEIN, 1997) pelas ideias de "relação numérica", "comparação" e "quantificação". Entretanto, essa essência do conceito "medida" ganha mais significado se estiver apoiada pelo "senso de medida" (STEPHAN; CLEMENTS, 2003).

Assim, identificamos uma primeira relação entre conteúdo de conhecimentos associados às categorias *Phenomenology and applications* e *Definitions,* respectivamente

> **KoTph1 (medida):** conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra
>
> **KoTd1 (medida):** conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida)
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

Como forma de ilustrar essa conexão, no diagrama a seguir (Figura 14), identifica-se essa atribuição de significado que um conteúdo de um conhecimento (**KoTph1(medida)**) exerce em relação ao outro (**KoTd1(medida)**), por meio de um conector na cor cinza, cuja extremidade indicada por um círculo não preenchido refere-se ao conteúdo de conhecimento que fornece embasamento para o que se descreve pelo conteúdo do conhecimento onde a extremidade indicada com um círculo preenchido toca.

Figura 14 – Pacote associado à conexão intra-conceitual envolvendo as categorias *Phenomenology and applications* e *Defintions*, no âmbito dos tópicos de Medida



Fonte: autora da tese (2021)

Dessa forma, considerando o nosso movimento de teorização das conexões matemáticas observadas a partir das relações entre os elementos estruturais e estruturantes presentes no conteúdo dos conhecimentos elencados pelos descritores, enunciamos uma conexão intra-conceitual no âmbito dos tópicos de Medida, descrita por:

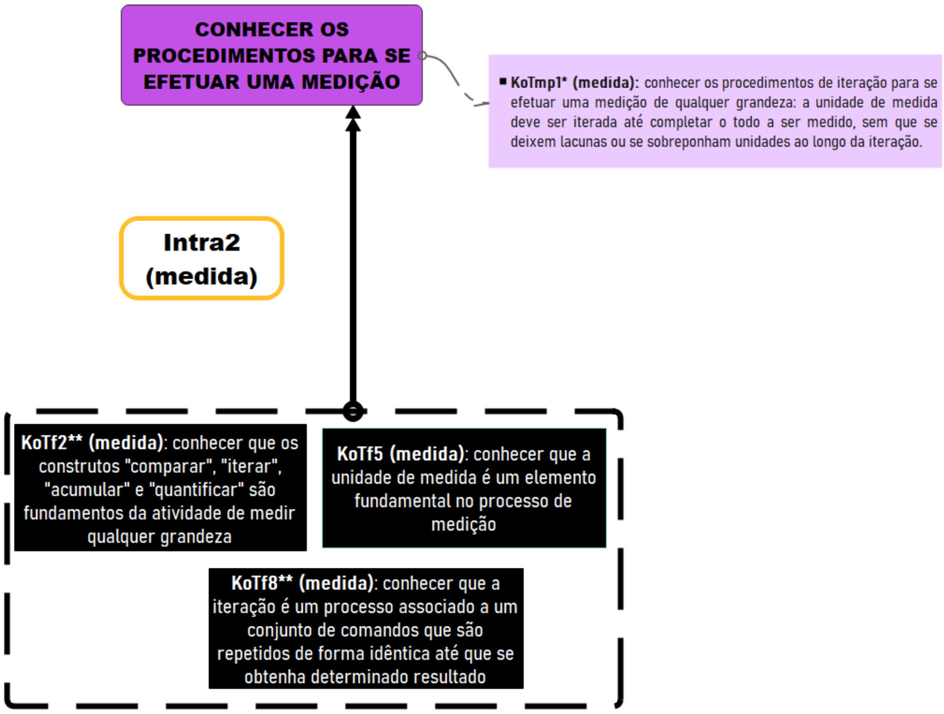
- ✓ **Intra1 (medida)**: *Conhecer que medir é um fenômeno que está associado à comparação de magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma delas em função da outra, e que este fenômeno contribui para atribuição de significado ao conceito de medida, que se trata da própria* *relação numérica obtida por essa comparação seguida de quantificação de magnitudes de uma mesma grandeza*.

De fato, do ponto de vista do conhecimento do professor, importa conhecer a distinção entre um fenômeno (o que é algo) matemático e uma definição para um conceito matemático associado a este fenômeno, pois esta é uma das premissas para um trabalho com foco no desenvolvimento do pensamento relacional e não estritamente procedimental (SKEMP, 1989).

Essa rede de relações se amplia e se torna mais orgânica quando são incluídos os conhecimentos associados a alguns dos fundamentos dos tópicos de Medida, como forma de oferecer sustentação a conhecimentos associados aos procedimentos e condições necessárias e suficientes para se efetuar uma medição:

> **KoTf2** (medida):** conhecer que os construtos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza.
>
> **KoTf5 (medida):** conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição.
>
> **KoTf8** (medida):** conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado
>
> **KoTmp1* (medida):** conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração.
>
> **KoTmp5** (medida):** conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing*
>
> **KoTmp6 (medida):** conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir.
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

Figura 15 – Pacote associado à conexão intra-conceitual envolvendo as categorias *Foundations* e *Procedures* em Medidas



Fonte: autora da tese (2021)

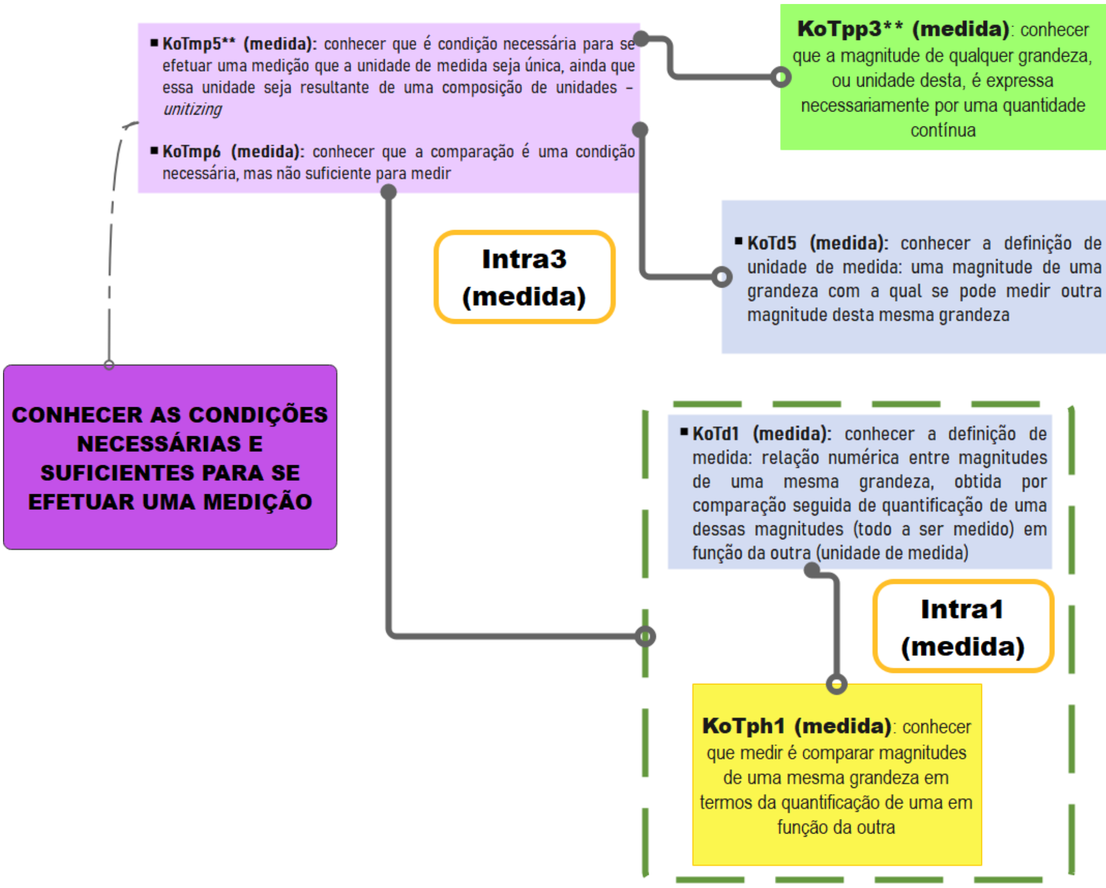
Naturalmente, a unidade de medida representa um papel fundamental no processo de medição – **KoTf5 (medida)**. No entanto, a iteração – **KoTf8**(medida)** – é um construto que, associado às noções de "comparação", "acumulação" e "quantificação" – **KoTf2**(medida)** –, fundamenta os raciocínios envolvidos na atividade de medir qualquer grandeza – **KoTmp1(medida)** – (BERKA, 1983; CLEMENTS; STEPHAN, 2004). Essa relação de sustentação se indica na Figura 15 por uma seta dupla na cor preta.

Assim, associa-se a esse pacote de conhecimentos especializados o seguinte descritor de conexão intra-conceitual:

- ✓ **Intra2 (medida):** *Conhecer que o procedimento associado à medição da magnitude (todo) de uma grandeza qualquer se fundamenta no reconhecimento de que a unidade de medida é um elemento fundamental neste processo e que o construto "iteração" associado às ideias de "comparação, "acumulação" e "quantificação" são os elementos que sustentam os raciocínios envolvidos nesse procedimento.*

Como a categoria *Procedures* não trata apenas do conhecimento do professor de "o que" e de "como" se faz, mas também dos conhecimentos do "porque" e do "quando" se pode empregar certos procedimentos a cada momento, observamos que os conhecimentos do fenômeno medir e de como se define uma medida – **Intra1 (medida)** –, em conjunto com os conhecimentos de como se define uma unidade de medida – **KoTd5 (medida)** – e da propriedade das magnitudes enquanto quantidades contínuas – **KoTpp3 (medida)** –, são essenciais no processo de atribuição de significado aos conhecimentos relacionados com as condições necessárias e suficientes para se efetuar uma medição – **KoTmp5** (medida)** e **KoTmp6 (medida)**.

Figura 16 – Pacote associado à conexões intra-conceituais observadas entre conhecimentos incluídos em *Phenomenology and applications*, *Definitions*, *Properties* e *Procedures*



Fonte: autora da tese (2021)

Com isso, elencamos mais um descritor de conexão intra-conceitual, desta vez, relacionando conteúdo de conhecimentos das categorias *Phenomenology and applications*, *Definitions*, *Properties* e *Procedures*:

- ✓ **Intra3 (medida)**: *Conhecer que, para se efetuar uma medição, é fundamental possuir uma unidade de medida, que pode ou não ser proveniente de uma composição de unidades (unitizing), já que a unidade de medida, como qualquer magnitude, é expressa por uma quantidade contínua, e que esta*

> *unidade de medida deverá ser comparada com o todo a ser medido, em termos de uma quantificação, como forma de se obter uma relação numérica entre as magnitudes de ambos.*

Note-se que, ao evidenciar essas relações – **Intra2 (medida)** e **Intra3 (medida) –**, estamos também interessados em mostrar que, mesmo um conhecimento associado aos procedimentos de medida, demanda um entendimento de que há tipos de raciocínios estruturais bastante específicos envolvidos, e um trabalho que se preocupa com o desenvolvimento do pensamento estrutural dos alunos (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009) deverá reconhecer esses elementos e tipos específicos de raciocínios que compõem uma estrutura orgânica e dinâmica na Matemática.

Ainda no âmbito dos tópicos de Medida, o conhecimento de que unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, por ser um dos fundamentos desses tópicos, exerce a função de dar sustentação a uma rede de relações que ocorrem entre conhecimentos, não somente no âmbito do tema de Medida, mas também em relação a outros tópicos, como é o caso de divisão:

> **KoTf6** (medida):** conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza.
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

Por exemplo, como sustentação da rede de relações no âmbito dos tópicos de Medida, o conhecimento da congruência das naturezas da unidade de medida e do todo a ser medido fundamenta os conhecimentos de que, por meio de relações de equivalência, pode-se obter múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida, garantindo que a natureza desses múltiplos e submúltiplos serão correspondentes à do todo a ser medido, em particular, quando a magnitude dessa unidade for considerada a partir de uma estrutura decimal:

> **KoTpp1* (medida):** conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada.
>
> **KoTpp2* (medida):** conhecer que toda unidade de medida (padronizada ou não padronizada) possui múltiplos e submúltiplos.
>
> **KoTpp3** (medida):** conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua.
>
> **KoTpp5* (medida):** conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10).
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

A garantia de que os múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida terão a mesma natureza do que o todo a ser medido, permite que uma medição possa ser efetuada, seja com a própria unidade de medida, seja com um de seus múltiplos ou com um de seus submúltiplos, sem que o valor numérico associado à medição seja descaracterizado.

> **KoTmp2 (medida):** conhecer a característica do resultado de uma medição: uma medida é expressa por um valor numérico associado a uma marca, correspondente à unidade de medida (padronizada ou não) utilizada.
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

Nesse sentido, um conhecimento dos tipos adequados de nomenclaturas e simbologias associadas às unidades de medida também contribuirá para a atribuição do significado semântico dessas unidades, em cada contexto em que estiverem presentes.

> **KoTrp2 (medida):** conhecer a nomenclatura e simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

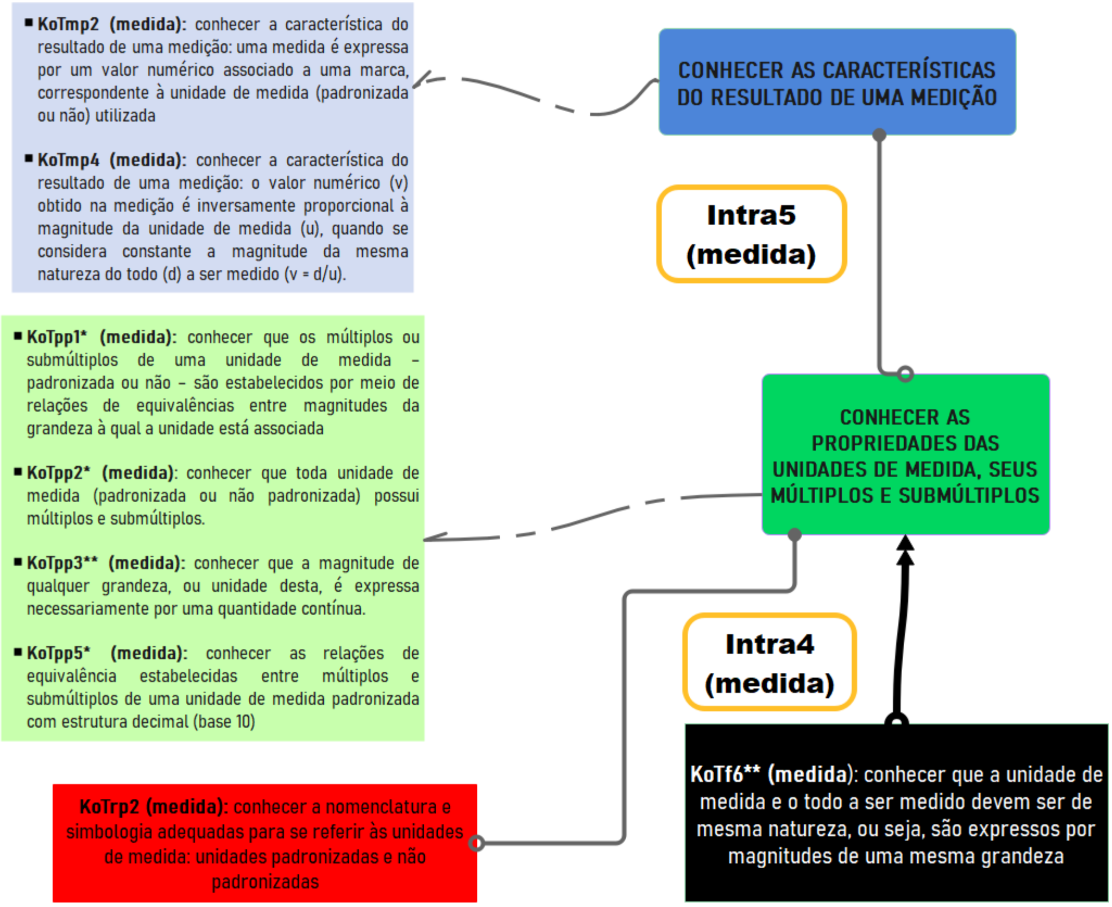
Assim, particularmente para uma estrutura decimal, uma unidade de medida com magnitude, digamos, $u\ (u \in \mathbb{R}_+)$, terá múltiplos com magnitudes correspondentes a $10u, 100u, 1000u, \dots$, ou, de forma genérica, alguma magnitude de um múltiplo desta unidade será do tipo $10^n u, n \in \mathbb{Z}_+$. De forma análoga, as magnitudes dos submúltiplos desta unidade serão correspondentes a $0{,}1u;\ 0{,}01u; 0{,}001u,$ ..., e, em termos genéricos, serão do tipo $10^n\ u, n \in \mathbb{Z}_-$.

Essas propriedades da magnitude da unidade de medida (de seus múltiplos ou submúltiplos) influenciam nas características do resultado de uma medição (retângulo azul na Figura 17):

> **KoTmp4 (medida):** conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido (v = d/u)
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, no prelo)

No diagrama a seguir, os conectores na cor cinza representam relações de atribuição de significado, com as extremidades indicadas por um círculo não preenchido indicando os conhecimentos que dão base para essa atribuição de significado aos conhecimentos onde as extremidades com círculo preenchido tocam. O conector representado por uma seta dupla na cor preta indica uma conexão de sustentação.

Figura 17 – Pacote de conhecimentos associado à conexões intra-conceituais envolvendo *Foundations*, *Properties*, *Procedures* e *Registers of representation*, em Medida



Fonte: autora da tese (2021)

De fato, uma vez mantida constante a magnitude do todo a ser medido, o valor numérico da medida terá magnitude inversamente proporcional à magnitude da unidade ou de seus múltiplos e submúltiplos – **KoTmp4 (medida)** –, e, para um exemplo em que a unidade de medida tem magnitude u, e o todo, magnitude d, o valor numérico (v) da medida será dado por $v = \frac{d}{10^n u}, n \in \mathbb{Z}$, ou $v = \frac{1}{10^n}.\frac{d}{u}, n \in \mathbb{Z}$.

Assim, supondo uma unidade de medida com magnitude 3, temos múltiplos e submúltiplos na forma $10^n.3, n \in \mathbb{Z}_+$ e $10^n.3, n \in \mathbb{Z}_-$, respectivamente. Supondo ainda que o todo a ser medido com esta unidade tenha magnitude constante corresponde a 6, veremos que o valor da medida será dado por $v = \frac{1}{10^n}.\frac{6}{3}, n \in \mathbb{Z}$, para qualquer múltiplo ou submúltiplo dessa unidade de medida, numa estrutura decimal. Assim, o valor da medida, neste exemplo, será $v = \frac{1}{10^n} . 2, n \in \mathbb{Z}$. Portanto, para: $n = 0$, $v = 2$; $n = 1$, $v = 0{,}2$; $n = 2$, $v = 0{,}02$; ou para: $n = -1$, $v = 20$; $n = -2$, $v = 200$, e assim por diante.

O conhecimento da sintaxe matemática que atribui significado a essa relação de proporcionalidade inversa entre valor numérico da medição e a unidade de medida– **KoTmp2 (medida)** –, associada ao conhecimento da propriedade de que a magnitude de uma grandeza, ou unidade desta, é necessariamente expressa por uma quantidade contínua – **KoTpp3 (medida)** –, possibilita, em termos semânticos, a atribuição de significado às quantidades enquanto magnitudes, em particular, aquelas que, numericamente, são representadas por frações ou números decimais (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2006; REN; GUNDERSON, 2019).

Com efeito, uma vez que a magnitude de uma unidade de medida é contínua – **KoTpp3 (medida)** –, e, como toda unidade de medida é da mesma natureza do todo a ser medido – **KoTf6** (medida)** –, conclui-se que o todo a ser medido também será caracterizado por uma quantidade do tipo contínua. Por consequência, o valor numérico obtido de uma medida será necessariamente expresso por uma quantidade contínua.

De fato, no caso anterior, os construtos “unidade de medida”, “todo a ser medido” e “valor numérico da medida” são os elementos estruturantes dessas relações, e as noções de “quantificação”, de (relação de) “equivalência” e de “proporcionalidade” (*big ideas* na Matemática) são as ideias unificadoras que caracterizam uma estrutura dos conhecimentos associados aos tópicos de Medida, nomeadamente aqueles incluídos nas categorias *Foundation*, *Properties* e *Procedures*, mas também em *Registers of representations*, já que as adequadas formas de se representar esses conceitos e/ou noções contribuem significativamente para dar forma às suas imagens (TALL; VINNER, 1981).

Assim, considerando esse nosso movimento de teorização das conexões matemáticas a partir dos descritores de conhecimento elencados, enunciamos outros dois descritores de conhecimento associados a essas conexões intra-conceituais, no âmbito dos tópicos de Medida:

- ✓ **Intra4 (medida)**: *Conhecer que a congruência entre as naturezas da unidade de medida e do todo a ser medido fundamenta o conhecimento de que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos, em que estes são obtidos* *por relações de equivalência entre unidade e todo, e que, numa estrutura decimal, são expressos numericamente por* $10^n.u, n \in \mathbb{Z}$, *em que* u *é a magnitude da unidade de medida, e que tal magnitude é necessariamente uma quantidade do tipo contínua*.

- ✓ **Intra5 (medida)**: "*Conhecer que a expressão que caracteriza a relação de proporcionalidade inversa entre as magnitudes do valor numérico* (v) *da medida e da unidade de medida* (u)*, numa estrutura decimal, é dada por* $v = \frac{1}{10^n}.\frac{d}{u}, n \in \mathbb{Z}$*, em que o todo a ser medido* (d) *tem magnitude constante, e que, pela natureza contínua de qualquer magnitude, este valor numérico é também contínuo*".

Considerando o tópico de divisão, também foi possível identificar relações entre o conteúdo dos conhecimentos associados a diferentes categorias. Nesse contexto, verificamos que os construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" são estruturantes do conteúdo dos conhecimentos relacionados com alguns dos fundamentos desse tópico (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998) e com as formas de se proceder para resolver uma operação de divisão (BROCARDO; SERRAZINA; KRAEMER, 2003; ROBINSON; LEFEVRE, 2012):

> **#KoTd1 fundamento (divisão)**: conhecer que é condição necessária para efetuar uma divisão que ocorra a decomposição do dividendo em partes, e que é condição suficiente que as partes sejam equivalentes.
>
> **#KoTd2 fundamento (divisão)**: conhecer o papel do dividendo e do divisor na divisão: na partilha, dividendo corresponde ao todo a ser distribuído e divisor corresponde ao número de subgrupos entre os quais o todo será distribuído; na medida, dividendo corresponde ao todo a ser medido; e divisor, à unidade de medida.
>
> **KoTmp1 (divisão):** conhecer distintas estratégias de resolução de uma divisão: uma divisão pode ser resolvida pelo algoritmo euclidiano; por decomposição do dividendo em parcelas correspondentes a dezenas e unidades; por agrupamento; e por adições sucessivas.
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b, p. 18)[82]

Ao mesmo tempo, as ideias de "distribuição", "comparação" e "quantificação" sustentam os tipos de raciocínios que se evocam para dar significado a esses conhecimentos,

---

[82] Recorde-se que no referido artigo as redações dos descritores, agora indicados com o símbolo "#", eram diferentes e que numa etapa de revisão dos resultados dessa investigação, a partir das análises do conteúdo desses descritores, foi necessário reformular suas redações.

em particular, quando se busca estabelecer relações entre o conteúdo desses conhecimentos dos fundamentos e procedimentos com os conhecimentos dos dois sentidos da divisão.

Entretanto, reconhecemos que um conhecimento da natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" é o que contribui para sustentar os conhecimentos relacionados com: i) os dois sentidos da divisão (FISCHBEIN et al., 1985) – **#KoTph1** e **#KoTph2**; ii) os raciocínios e procedimentos que se devem empregar para a resolução de uma operação de divisão (RIBEIRO et al., 2018); iii) e as características do resultado de uma divisão quando interpretada como partilha equitativa ou como medida (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b) – **KoTmp1 (divisão)**; **KoTmp2 (divisão)** e **KoTmp3 (divisão)**.

> **#KoTph1 (divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como partilha equitativa: dividir é distribuir uma quantidade entre determinado número de conjuntos, de modo a que cada um dos conjuntos contenha a mesma cardinalidade após a distribuição.
>
> **#KoTph2 (divisão)**: conhecer o fenômeno divisão a partir de sua interpretação como medida: dividir é comparar as magnitudes do dividendo e do divisor, de modo a quantificar o número de vezes que a magnitude do divisor precisa ser agrupada até compor a magnitude do dividendo.
>
> **KoTmp1 (divisão):** conhecer distintas estratégias de resolução de uma divisão: uma divisão pode ser resolvida pelo algoritmo euclidiano; por decomposição do dividendo em parcelas correspondentes a dezenas e unidades; por agrupamento; e por adições sucessivas
>
> **KoTmp2 (divisão)**: conhecer a natureza do resultado da operação no sentido e partilha equitativa: o valor numérico obtido – quociente – corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos entre os quais o todo foi distribuído
>
> **KoTmp3 (divisão)**: conhecer a natureza do resultado quando a divisão é entendida como medida: o valor numérico obtido (quociente) corresponde à quantidade de vezes que a unidade de referência coube no todo (agrupar o todo em partes de mesma magnitude)
>
> (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b, p. 18)

No entanto, durante as análises e discussões para a produção do primeiro artigo desta tese, por uma questão limitação do espaço, não foi possível incluir evidências que nos permitissem elencar um descritor associado à essa natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente". Dessa forma, a seguir, passamos a discutir algumas dessas evidências que nos vão ajudar a justificar a inclusão desse descritor associado à categoria *Foundations*, no âmbito do tópico de divisão – **KoTf3 (divisão)**: conhecer a natureza dos construtos dividendo, divisor e quociente enquanto quantidades discretas ou contínuas –, além de descrever algumas das relações entre os pacotes de conhecimentos associados a essa categoria *Foundations* e outras categorias.

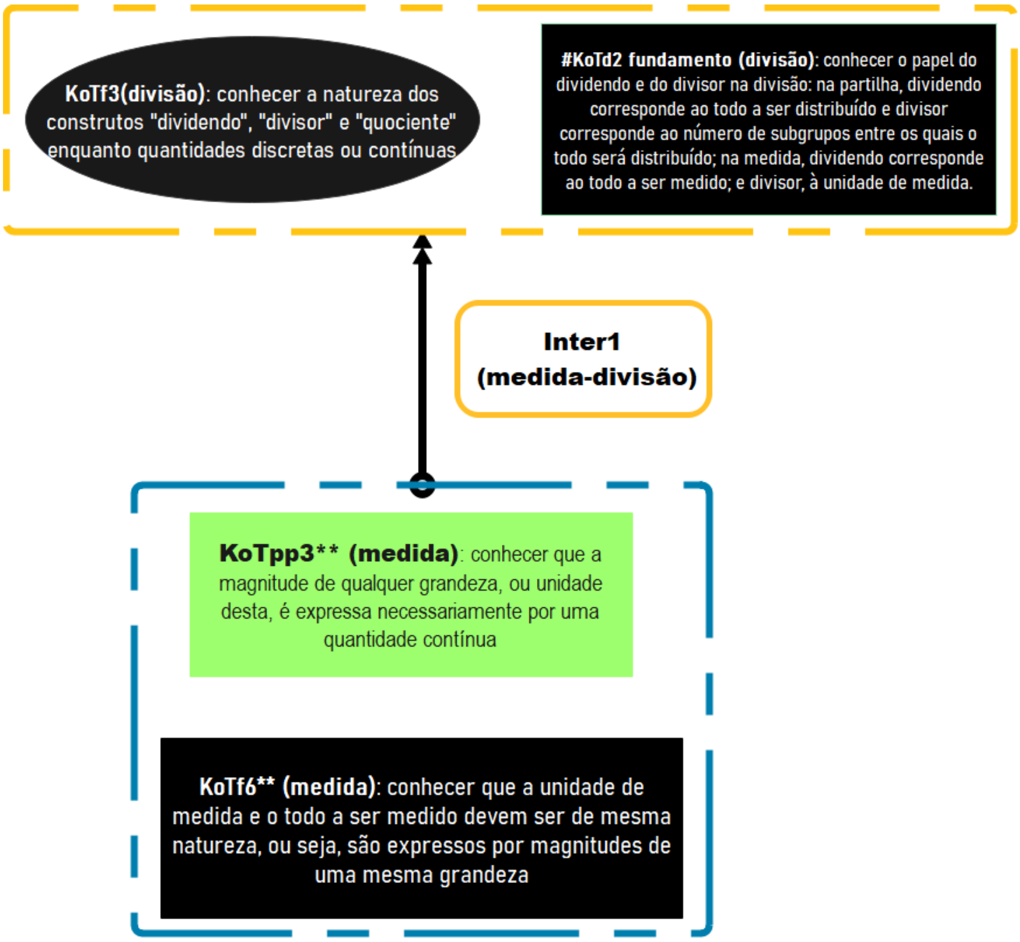
De modo a detalhar essas relações, passamos a considerar especificamente os casos em que a operação de divisão não está relacionada com algum contexto (problema), o que nos impõe a necessidade de focarmos nas quantidades que expressam o “dividendo” e o “divisor” para poder associar essa operação a algum dos dois sentidos – partilha equitativa ou medida.

Assim, a interpretação da operação como partilha equitativa será feita com base no reconhecimento do “dividendo” e do “divisor” como quantidades discretas, já que, especificamente para o divisor, se a quantidade que o expressa for representada por um número natural não nulo (quantidade discreta), pode-se considerar que o dividendo será distribuído equitativamente entre uma quantidade de conjuntos que corresponde ao divisor (#**KoTph1(divisão)**).

Ao mesmo tempo, o reconhecimento do divisor como uma quantidade contínua (uma magnitude, portanto), implicará, necessariamente, em se assumir o dividendo também como uma quantidade contínua e, ao menos inicialmente, será necessário interpretar a divisão como medida (RIBEIRO et al., 2018), empregando raciocínios pautados nas ideias de comparação dessas magnitudes, seguida de quantificação de uma delas (dividendo) em função da outra (divisor) – **#KoTph2(divisão)**.

De fato, essa interpretação da divisão como medida, que se apóia apenas nas naturezas das quantidades que expressam o “dividendo” e o “divisor”, se sustenta em um pacote de conhecimentos associados especificamente aos tópicos no tema de Medida.

Figura 18 – Pacote de conhecimentos em conexão interconceitual dos tópicos de Medida e de divisão



Fonte: autora da tese (2021)

Em termos mais específicos, o pacote formado pelo conhecimento de que a unidade de medida e o todo a ser medido são de mesma natureza – **KoTf6** (medida)** – associado ao conhecimento de que toda magnitude é expressa por uma quantidade necessariamente contínua – **KoTpp3** (medida)** –, sustenta o pacote de conhecimentos de que as quantidades que representam o "dividendo" e o "divisor" podem ser expressas por magnitudes (quantidades contínuas, portanto) – **KoTf3 (divisão)** – e de que o "dividendo" e o "divisor" devem, nos contextos da divisão como medida, ser tomados, respectivamente, como "todo" a ser medido e como "unidade de medida" – **#KoTd2 fundamento (divisão)**.

Nesse sentido, enunciamos a primeira conexão interconceitual que se evidencia quando se relacionam esses pacotes de conhecimentos especializados, conectando tópicos distintos, neste caso, o de divisão e os do tema de Medida:

- ✓ **Inter1 (medida-divisão)**: *Conhecer que a congruência das naturezas entre a unidade de medida e o todo a ser medido associado ao* *conhecimento de que toda magnitude é expressa por uma quantidade contínua, sustenta o reconhecimento dos construtos "dividendo" e "divisor" como "todo" e "unidade de medida", respectivamente, e garante o reconhecimento de que suas quantidades são expressas por magnitudes, ou seja, por quantidades contínuas*.

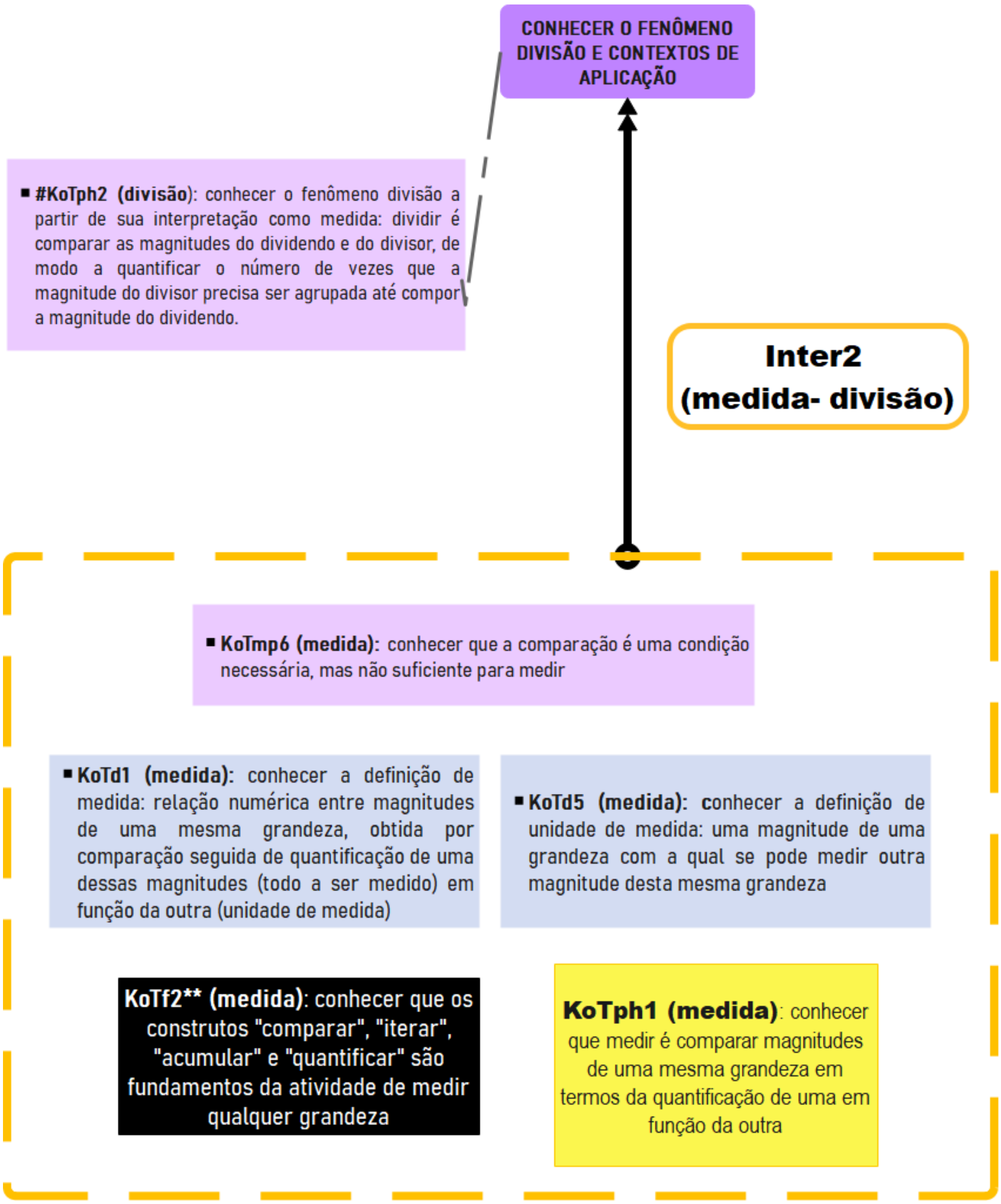
Nesse sentido, reconhecer que uma operação de divisão que não está associada a um contexto (problema) pode ser interpretada a partir do sentido de medida, implica, em primeiro lugar, reconhecer que "dividendo" e "divisor" representam "todo a ser medido" e "unidade de medida", respectivamente e que, justamente por isso, suas quantidades são expressas por magnitudes – **Intra 1(medida-divisão)**. Mas, além disso, é preciso ressaltar que a interpretação do fenômeno divisão como medida – **KoTph2 (divisão)** – se sustenta por um pacote de conhecimentos cujos conteúdos se relacionacom com: i) o próprio fenômeno medir – **KoTph1 (medida)**; ii) as definições do que são medida e unidade de medida – **KoTd1 (medida)** e **KoTd5 (medida)**; iii) e das condições necessárias e suficientes para se efetuar uma medição – **KoTmp6 (medida)**.

Do ponto de vista do conhecimento do professor, estabelecer essa relação é fundamental para que o fenômeno "divisão" não se confunda com o fenômeno "medir", já que dividir efetivamente não é medir, ainda que as ideias unificadoras desses pacotes de conhecimento sejam essencialmente as mesmas: "comparação", "quantificação", "iteração", "acumulação" e "relação numérica".

Assim, pode-se associar outro descritor do conhecimento relacionado com as conexões interconceituais envolvendo os tópicos de divisão e os do tema de Medida:

- ✓ **Inter2 (medida-divisão)**: *Conhecer que dividir não é medir, mas que este fenômeno se sustenta no conhecimento do fenômeno "medir", quando este se encontra associado aos conhecimentos das definições de medida, de unidade de medida e de que medir não é somente "comparar", mas que envolve outros construtos como "iterar", "quantificar", "acumular" até obter uma "relação numérica" entre magnitudes*.

Figura 19 – Pacote de conhecimentos em Medida sustentando conhecimento em divisão: conexão interconceitual



Fonte: autora da tese (2021)

Note-se que essas distintas interpretações dos sentidos que a divisão pode assumir, sustentadas pelo reconhecimento da natureza das quantidades envolvidas na operação, têm implicações diretas nos casos em que, para se resolver uma divisão, emprega-se o algoritmo euclidiano.

De fato, na tarefa de formação em que se discutiu operação de divisão[83], a 5.ª questão propunha aos professores que resolvessem algumas operações envolvendo dividendo e divisor expressos por quantidades discretas ou contínuas.

Figura 20 – Questão 5 da tarefa de formação implementada na sessão do tópico de divisão

5. Resolva por si mesmo(a) (enquanto professor/a) as operações a seguir de DUAS formas **distintas**, descrevendo e justificando, em cada caso, o passo-a-passo do(s) procedimento(s) utilizados. Vocês devem gravar um vídeo para cada uma das resoluções, de modo a que os procedimentos e etapas de cada resolução sejam explicitadas (e verbalizadas).
   a. 536÷4=
   b. 536÷3,2=
   c. 0,536÷4=
   d. 258÷4=
   e. 11,9÷3,4=

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

No momento em que os professores resolveram essa questão da tarefa de formação, ainda não haviam sido discutidos, em plenária, os dois sentidos da divisão[84] (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b), portanto, pode-se dizer que o conhecimento mobilizado pelos professores para resolver essas operações se pautou, por um lado, na noção de que a divisão está associada com a distribuição de quantidades, já que o único sentido que revelaram conhecer para a interpretação da divisão foi o de partilha equitativa – **KoTph1(divisão)** – (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b). Por outro lado, os professores mobilizaram, quase que exclusivamente, um conhecimento relacionado ao algoritmo euclidiano como forma de proceder para resolver as operações de divisão – **KoTmp1(divisão)** –, ainda que na proposta da questão fossem solicitadas duas formas distintas para a resolução de cada operação.

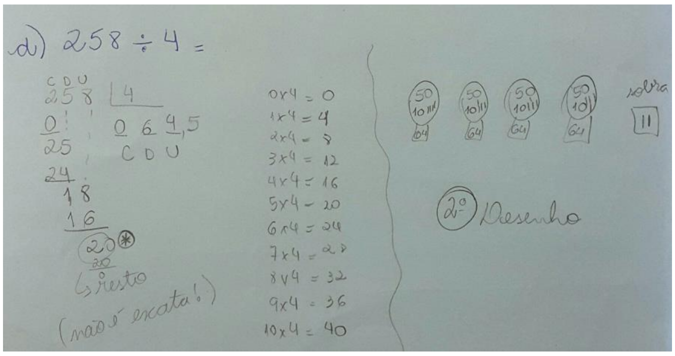
Apenas nas operações em que o divisor era expresso como uma quantidade discreta, os professores se apoiaram no algoritmo e também em um procedimento envolvendo a decomposição do dividendo em parcelas que eram distribuídas equitativamente entre uma quantidade de conjuntos correspondente ao divisor.

---

[83] Ver tarefa completa na **Figura 6**.

[84] O conhecimento dos professores associado associado ao sentido de medida da divisão foi desenvolvido durante a sessão de formação. Para maior detalhamento, ver discussão apresentada no artigo 1 desta tese.

Figura 21 – Produção de um professor para o item “d” da 5.ª questão da tarefa com foco na divisão



Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Mas, o que justifica a nossa análise de que um conhecimento da natureza dos construtos “dividendo”, “divisor” e “quociente” enquanto quantidades discretas ou contínuas contribui para fundamentar os conhecimentos dos sentidos, dos procedimentos e das características do resultado de uma operação de divisão, é o que os professores revelaram conhecer quando questionados a respeitos do nível de dificuldade encontrado para a resolução dessas cinco operações de divisão.

De fato, na 6.ª questão da tarefa de formação era solicitado que os professores indicassem, em uma escala de níveis de dificuldade, as operações que consideravam terem sido mais fáceis e as que consideravam terem sido mais difíceis de ser resolvidas na 5.ª questão.

Figura 22 – Questão 6 da tarefa de formação relacionada com o tópico de divisão

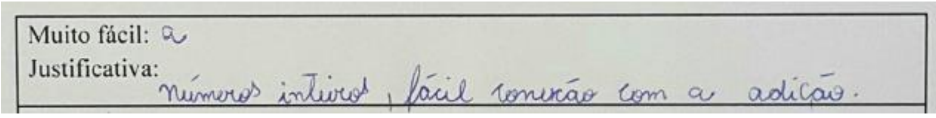
6. Considerando as operações da questão 5, estabeleça uma ordem de dificuldade (a sua) para resolver. Apresente argumentos para justificar porque classificou as questões de acordo com essa ordem.

Muito fácil: Justificativa:
Fácil: Justificativa:
Médio: Justificativa:
Difícil: Justificativa:
Muito difícil: Justificativa:

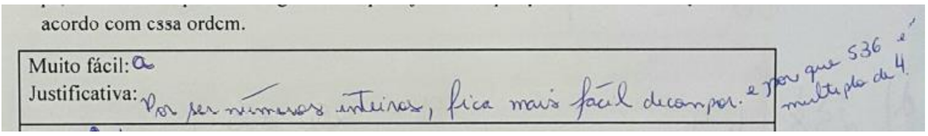
Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Com efeito, as operações consideradas “muito fácil” e “fácil”, por todos os professores foram associadas aos itens a)$536 \div 4$ e d)$258 \div 4$, respectivamente, e as justificativas apresentadas para essa maior facilidade se relacionaram com natureza das quantidades envolvidas na operação, isto é, por se tratarem de quantidades discretas (“números inteiros”), os professores avaliaram o grau de dificuldade como sendo o menor, já que reconheciam a possibilidade de se empregar outras formas de raciocínio para resolver a operação, tais como decomposição ou composição do dividendo (“*decomposição do dividendo*”; “*conexão com a adição*”).

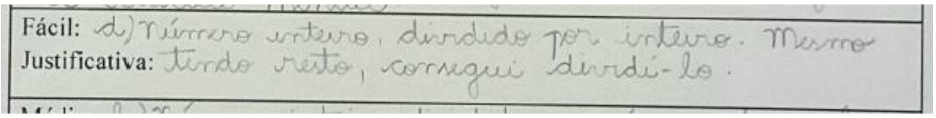
Figura 23 – Produções dos professores relacionadas com a 6.ª questão da tarefa de formação com foco na divisão



Muito fácil: *a*
Justificativa: *Números inteiros, fácil conexão com a adição.*



Muito fácil: *a*
Justificativa: *Por ser números inteiros, fica mais fácil decompor e porque 536 é múltiplo de 4*

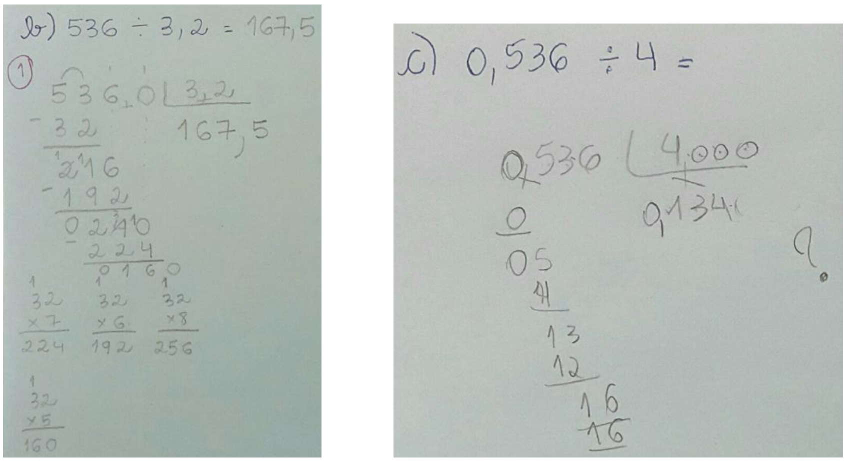


Fácil: *d)*
Justificativa: *Número inteiro, dividido por inteiro. Mesmo tendo resto, consegui dividí-lo.*

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Ao mesmo tempo, as operações consideradas com um nível de dificuldade “médio”, “difícil” e “muito difícil” foram, para todos os professores, aquelas incluídas nos itens b)$536 \div 3{,}2$; e)$11{,}9 \div 3{,}4$ e c)$0{,}536 \div 4$, respectivamente, nesta ordem. E, nesses casos, as justificativas apresentadas pelos professores, além de se relacionarem novamente com a natureza das quantidades envolvidas nas operações, revelaram o seu conhecimento de que, nas operações envolvendo as quantidades contínuas (em expressões como “*números decimais*”; “*número que não é inteiro*”, na **Figura 23**), a resolução se pautava exclusivamente nos procedimentos do algoritmo euclidiano.

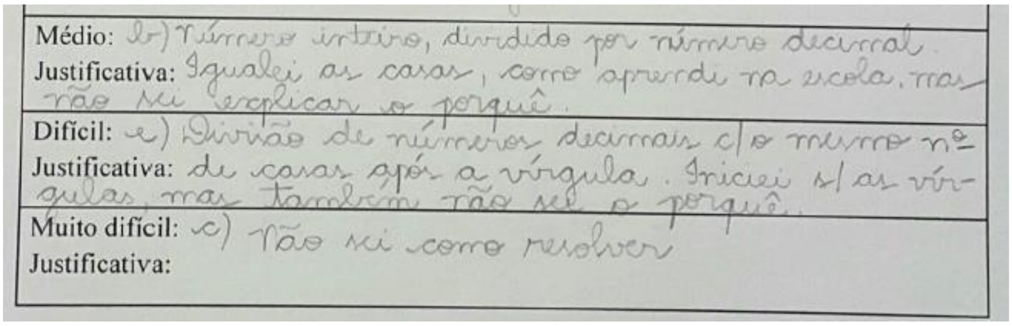
Figura 24 – Exemplos de resoluções dos professores para as operações da 5.ª questão da tarefa com foco na divisão



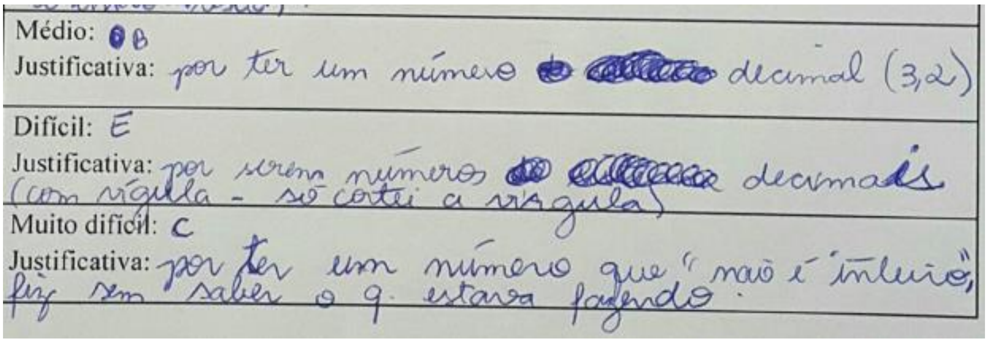
Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

No entanto, como os professores revelaram não conhecer os porquês associados a cada um dos passos que se deve empregar nesse algoritmo, seus raciocínios se pautam em regras memorizadas, mas destituídas de significado ("*Igualei as casas, como aprendi na escola, mas não sei explicar o porquê*"; "*Iniciei sem as vírgulas, mas também não sei explicar o porquê*"; "*(...) fiz sem saber o que estava fazendo*") – **Figura 25**.

Figura 25 – Exemplos de produções de professores relacionadas com a 6.ª questão da tarefa de formação com foco no tópico de divisão



Médio: b) *Número inteiro, dividido por número decimal. Igualei as casas, como* Justificativa: *aprendi na escola, mas não sei explicar o porquê.*
Difícil: e) *Divisão de números decimais com o mesmo número de casas após a vírgula*. Justificativa:*Iniciei sem as vígulas, mas também não sei o porquê.*
Muito difícil: c) *Não sei como resolver* Justificativa:


Médio: B
Justificativa: por ter um número decimal (3,2)
Difícil: E
Justificativa: por serem números decimais (com vírgula - só cortei a vírgula)
Muito difícil: C
Justificativa: por ter um número que "não é inteiro", fiz sem saber o q. estava fazendo.

Médio: *B* Jutificativa: *por ter um número decimal (3,2)*
Difícil: *E* Jutificativa: *por serem números decimais (com vírgula – só cortei a vírgula)*
Muito difícil: *C* Jutificativa: *por ter um número que "não é inteiro", fiz sem saber o que estava fazendo*

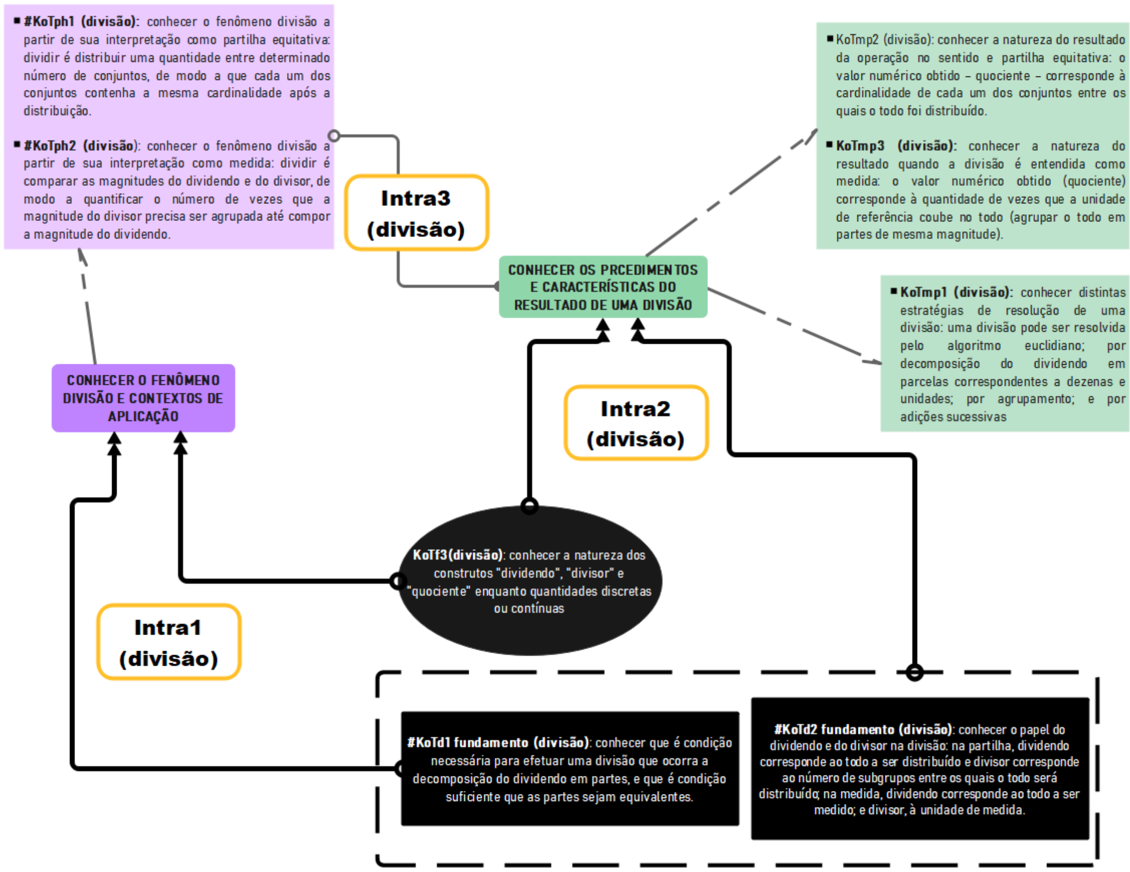
Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Assim, quando se relaciona esse conhecimento das naturezas das quantidades que expressam os construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" – **KoTf3(divisão)** – com os conhecimentos das condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão – **#KoTd1 fundamento (divisão)** – e dos papéis que dividendo e divisor representam na operação – **#KoTd2 fundamento (divisão)** –, sustenta-se os conhecimentos dos raciocínios que se empregam nos distintos procedimentos para se resolver uma operação de divisão.

Naturalmente, essa rede de relações não estará totalmente estruturada sem se vincularem os conhecimentos dos dois sentidos da divisão – **#KoTph1(divisão)** e **#KoTph2(divisão)** –, uma vez que são as ideias unificadoras associadas aos raciocínios envolvidos em cada um dos dois sentidos ("distribuição", "comparação" e "quantificação") que sustentam essas relações.

Assim, na perspectiva de teorização das conexões matemáticas que se observam a partir das relações entre o conteúdo dos conhecimentos associados a cada um dos tópicos, torna-se possível enunciar mais um conjunto de descritores do conhecimento associados às conexões intra-conceituais, agora relacionados com o tópico de divisão.

Figura 26 – Pacote de conhecimentos especializados evidenciando conexões intra-conceituais no âmbito do tópico de divisão



Fonte: autora da tese (2021)

Dessa forma, enuncia-se um descritor das relações entre os conhecimentos associados à categoria *Foundations* – **KoTf3 (divisão)** e **#KoTd1 fundamento (divisão)** –, caracterizando-os como como fundamentadores dos conhecimentos do fenômeno da divisão, quando interpretado a partir de dois sentidos distintos (**#KoTph1 (divisão)** e **#KoTph2 (divisão)**):

- ✓ **Intra1 (divisão):** *Conhecer a natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" enquanto quantidades discretas ou contínuas e conhecer as condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão, sustenta o conhecimento de que esta operação pode ser interpretada a partir de dois sentidos distintos, quais sejam, partilha equitativa ou medida.*

Outro descritor de conexão intra-conceitual observada refere-se à relação entre esses conhecimentos associados à categoria *Foundations* (**KoTf3 (divisão)**; **#KoTd1 fundamento (divisão)** e **#KoTd2 fundamento (divisão)** – formas geométricas em preto na **Figura 26**) e os conhecimentos associados às formas de se proceder para determinar o resultado de uma divisão e também às características dos resultados dessa operação, ambos conhecimentos incluídos em *Procedures* (formas geométricas na cor verde, na **Figura 26**). Essas relações estão indicadas pelo mesmo tipo de setas usadas para indicar a conexão **Intra1 (divisão)**, por também se tratarem de relações do tipo "sustentação":

- ✓ **Intra2 (divisão)**: *Conhecer a natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" enquanto quantidades discretas ou contínuas, associado aos conhecimentos das condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão e da forma como os construtos "dividendo" e "divisor" são encarados quando a divisão é tomada como partilha ou como medida, sustenta o conhecimento dos distintos procedimentos que se pode empregar para resolver uma operação de divisão, bem como das características dos resultados obtidos em cada caso.*

Além disso, observamos que o conteúdo dos conhecimentos associados aos dois sentidos da divisão favorecem a atribuição de significado aos porquês associados aos procedimentos de resolução de uma operação de divisão e também ao resultado obtido nesta operação:

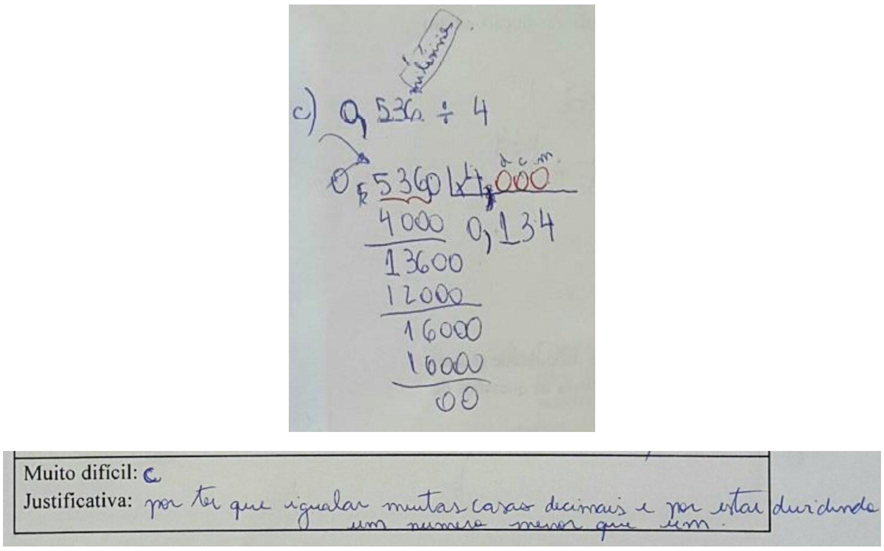
- ✓ **Intra3 (divisão)**: *Conhecer os dois sentidos da divisão (partilha equitativa e medida) contribui para atribuir significado tanto aos raciocínios que se empregam quando se resolve uma operação (distribuição ou comparação seguida de quantificação) quanto às características dos resultados obtidos com a operação (o valor numérico obtido da divisão corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos ou corresponde à quantidade de vezes que a magnitude do divisor foi acumulada até completar a magnitude do dividendo).*

Essa relação de atribuição de significado está indicada no diagrama (**Figura 26**) pela linha cinza contínua que conecta descritores da categoria *Phenomenology and applications* (retângulo roxo) à conteúdo de conhecimentos associados à categoria Procedures (forma retangular verde).

Note-se que quando observamos essas relações entre o conteúdo dos conhecimentos do professor e enunciamos descritores associados às conexões intra-conceituais no âmbito do tópico de divisão, não estamos afirmando que um professor que conhece: i) os dois sentidos da divisão; ii) seus fundamentos; e iii) os procedimentos e características dos resultados de uma operação de divisão necessariamente estabelecerá, para si próprio, as conexões, conforme as enunciamos. Entretanto, algumas evidências nos permitem considerar que há maior possibilidade de que isso ocorra, uma vez que o conteúdo desses conhecimentos associados às categorias *Phenomenology and applications*, *Foundations* e *Procedures* esteja desenvolvido para o professor.

Por exemplo, ainda em relação às operações propostas na 5.ª questão da tarefa de formação com foco na divisão (**Figura 20**), ao resolver o item c)$0{,}536 \div 4$, um dos professores, assim como os demais, se apoiou nos procedimentos habitualmente empregues no algoritmo euclidiano. No entanto, na 6.ª questão, esse professor qualificou esta operação como "muito difícil", pelo motivo de "*ter que igualar muitas casas decimais*" (**Figura 27**).

Figura 27 – Produções de um professor para um item das questões 5 e 6 da tarefa com foco na divisão



Muito difícil: *C* Justificativa: *por ter que igualar muitas casas decimais e por estar dividindo um número menor que um*

Fonte: arquivo da pesquisa (2018)

Esse professor revela um conhecimento de que o procedimento "*igualar casas decimais*" está associado com representar as quantidades que expressam "dividendo" e "divisor" a partir de uma mesma "unidade de referência", neste caso, os milésimos, pois identifica que no dividendo $0{,}536$, o algarismo "6" corresponde a "seis milésimos" e, assim, no divisor, representa três algarismos "0", identificando-os com as letras "d", "c" e "m", respectivamente, para denotar "décimos", "centésimos" e "milésimos".

Além disso, nesse registro, verifica-se que os procedimentos estão associados ao algoritmo euclidiano que habitualmente é discutido nos contextos escolares (FÁVERO; NEVES, 2012; RIBEIRO et al., 2018), em que o procedimento de "*igualar as casas decimais*", e, em seguida, "eliminar a vírgula", é apresentado como "regra" para se efutar a divisão nos casos em que as quantidades envolvidas são expressas por números decimais não inteiros. O que normalmente não se discute nos contextos escolares é que este procedimento está associado, ao menos numa primeira etapa da resolução da operação por meio do algoritmo euclidiano, com a interpretação da divisão como medida, pois se sustenta nas ideias unificadoras de "comparação" e "quantificação".

De fato, se para interpretar a divisão como medida são fundamentais os conhecimentos de que dividir não é medir, mas está associado ao fenômeno da medida – **Inter1 (medida-divisão)** – e de que "dividendo" e "divisor" correspondem, neste contexto, ao "todo a ser medido" e à "unidade de medida", e que, portanto, são expressos por magnitudes – **Inter 2 (medida-divisão)** –, então, o procedimento de "igualar as casas decimais" seguido de "eliminar as vírgulas" ganha significado se estiver sustentado por esses dois conhecimentos das conexões interconceituais, associados com o conhecimento da natureza das quantidades que expressam os múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida – **Intra 4 (medida)**.

Com efeito, numa estrutura decimal, os múltiplos e submúltiplos do divisor (aqui entendido como unidade de medida) serão expressos numericamente por $10^n.u, n \in \mathbb{Z}$, em que u é a magnitude do divisor. Analogamente, pode-se assumir que os múltiplos e submúltiplos do dividendo (aqui entendido como todo a ser medido) serão expressos numericamente por $10^n.d, n \in \mathbb{Z}$, em que d é a magnitude do dividendo.

Além disso, numa estrutura decimal, vimos que o valor de uma medida (v) é expresso numericamente por $v = \frac{1}{10^n}.\frac{d}{u}, n \in \mathbb{Z}$, sempre que se considerar a magnitude do todo a ser medido (d) como constante – **Intra 5 (medida)**.

No entanto, se as magnitudes do todo a ser medido (d) e da unidade de medida (u) forem expressas por valores numéricos múltiplos (ou submúltiplos) na forma de potência de base 10, será o valor numérico (v) da medida que permanecerá constante, ou seja $v = \frac{d}{u} = \frac{10^n}{10^n}.\frac{d}{u}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

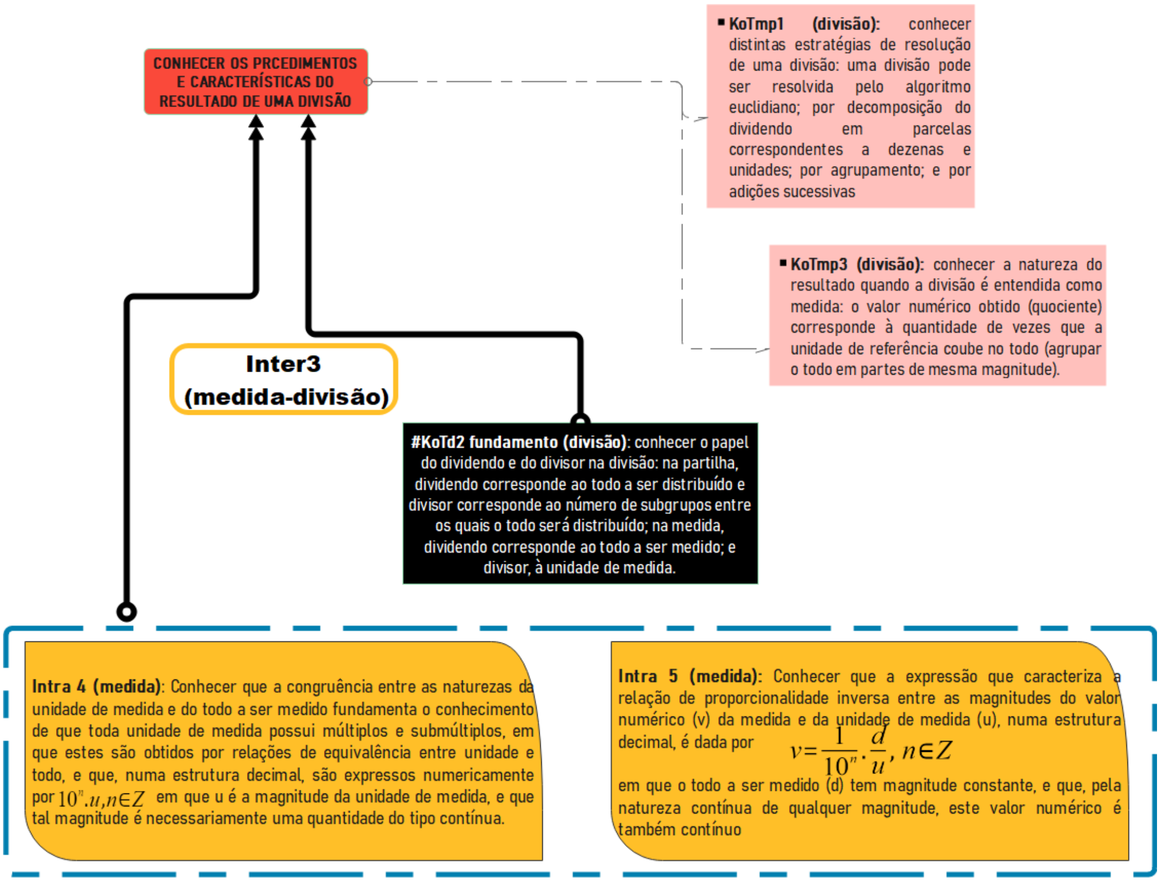
Assim, nos casos em que a divisão é interpretada como medida, no algoritmo euclidiano, quando se "igualam as casas decimais" do dividendo e do divisor, o que se está obtendo são representações das quantidades a partir de valores numéricos múltiplos (na base decimal) das magnitudes do dividendo e do divisor, mas que, efetivamente, tratam-se de submúltiplos das unidades de referência dessas quantidades.

Por exemplo, no caso da operação $0{,}536 \div 4$, ao interpretá-la como medida, pode-se associar a seguinte verbalização: "quantas unidades com magnitude 4 inteiros são necessárias para compor um todo de 536 milésimos?". É fácil perceber que não será preciso sequer de meia unidade de 4 inteiros para compor 536 milésimos. Mas, se estamos interpretando essa operação como medida, e, se para medir as naturezas da unidade de medida e do todo a ser medido devem ser congruentes, então, será preciso representar as quantidades de ambos numa mesma unidade de referência, para que se possa compará-las.

Nesse sentido, a unidade de referência "milésimos" é a menor constituinte das magnitudes do todo e da unidade de medida. Assim, quando se representa $0{,}536 \div 4 \Leftrightarrow 536 \div 4000$, embora as representações numéricas estejam associadas a múltiplos (na base decimal) das quantidades originais do dividendo e do divisor, especificamente para o divisor, em termos da unidade de referência de sua magnitudes, o que se tem expresso é um submúltiplo de sua magnitude original. Isto é, o que antes eram 4 inteiros, agora são 4000 milésimos de um inteiro.

Mas o que justifica essa "transformação" das quantidades que expressam o dividendo e o divisor para a mesma unidade de referência no algoritmo euclidiano é o fato de que essa transformação permite obter quantidades expressas por números inteiros. E, a partir daí, os procedimentos no algoritmo (e os raciocínios associados a uma verbalização adequada) passam a ser relacionados com o que se faz quando a divisão está sendo interpretada como partilha equitativa (RIBEIRO et al., 2018).

Figura 28 – Conexão interconceitual que sustenta o procedimento “igualar as casas decimais” no algoritmo euclidiano



Fonte: autora da tese (2021)

Assim, em termos do conhecimento do professor pode-se associar um descritor de conhecimento de conexão interconceitual que se relaciona com a atribuição de significado aos procedimentos “igualar as casas decimas” e “eliminar a vírgula”, efetuados no algoritmo euclidiano, quando a divisão envolve quantidades decimais:

- ✓ **Inter 3 (medida-divisão)**: *Conhecer que, na divisão interpretada como medida, uma vez que o “dividendo” (d) e o “divisor” (u) são tomados, respectivamente, como “todo a ser medido” e “unidade de medida”, por serem de mesma natureza, suas magnitudes podem ser expressas numericamente por* $10^n.u, n \in \mathbb{Z}$ *e* $10^n.d, n \in \mathbb{Z}$, *respectivamente, e o valor numérico da divisão* (v), *o quociente, será constante e expresso por* $v = \frac{d}{u} = \frac{10^n}{10^n} \cdot \frac{d}{u}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, *sempre que as magnitudes do dividendo e do divisor forem expressas na mesma unidade de referência.*

Note-se que cada vez que incluímos nesses pacotes de conhecimento especializado novos descritores, e evidenciamos a sua integração com os demais, vamos tornando cada vez mais explícito o caráter estrutural da matemática e, em particular, esse caráter inter-relacional do conhecimento especializado do professor.

De fato, ao nos propormos explorar o conteúdo de conhecimentos apresentados por esses descritores, na perspectiva de evidenciar as conexões intra-conceituais e interconceituais que se observam entre seus conteúdos, estivemos, a todo tempo, interessados em buscar as relações existentes entre os elementos estruturais e ideias unificadoras presentes nesses conhecimentos.

Sem a pretensão de que possamos ter esgotado todas as relações que se podem observar ainda entre esses elementos e ideias, apresentamos a nossa síntese das conexões do tipo intra-conceituais e interconceituais, associadas aos tópicos do tema de Medida e de divisão.

Quadro 18 – Síntese das conexões intra-conceituais no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida

Divisão	Medida
Intra1 (divisão): *Conhecer a natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" enquanto quantidades discretas ou contínuas e conhecer as condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão, sustenta o conhecimento de que esta operação pode ser interpretada a partir de dois sentidos distintos, quais sejam, partilha equitativa ou medida.*	**Intra1 (medida)**: *Conhecer que medir é um fenômeno que está associado à comparação de magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma delas em função da outra, e que este fenômeno contribui para atribuição de significado ao conceito de medida, que se trata da própria relação numérica obtida por essa comparação seguida de quantificação de magnitudes de uma mesma grandeza.*
Intra2 (divisão): *Conhecer a natureza dos construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" enquanto quantidades discretas ou contínuas, associado aos conhecimentos das condições necessárias*	**Intra2 (medida):** *Conhecer que o procedimento associado à medição da magnitude (todo) de uma grandeza qualquer se fundamenta no reconhecimento de que a unidade de*

e suficientes para se efetuar uma divisão e da forma como os construtos "dividendo" e "divisor" são encarados quando a divisão é tomada como partilha ou como medida, sustenta o conhecimento dos distintos procedimentos que se pode empregar para resolver uma operação de divisão, bem como das características dos resultados obtidos em cada caso. **Intra3 (divisão)**: *Conhecer os dois sentidos da divisão (partilha equitativa e medida) contribui para atribuir significado tanto aos raciocínios que se empregam quando se resolve uma operação (distribuição ou comparação seguida de quantificação) quanto às características dos resultados obtidos com a operação (o valor numérico obtido da divisão corresponde à cardinalidade de cada um dos conjuntos ou corresponde à quantidade de vezes que a magnitude do divisor foi acumulada até completar a magnitude do dividendo).*	*medida é um elemento fundamental neste processo e que o construto "iteração" associado às ideias de "comparação, "acumulação" e "quantificação" são os elementos que sustentam os raciocínios envolvidos nesse procedimento.* **Intra3 (medida)**: *Conhecer que, para se efetuar uma medição, é fundamental possuir uma unidade de medida, que pode ou não ser proveniente de uma composição de unidades (unitizing), já que a unidade de medida, como qualquer magnitude, é expressa por uma quantidade contínua, e que esta unidade de medida deverá ser comparada com o todo a ser medido, em termos de uma quantificação, como forma de se obter uma relação numérica entre as magnitudes de ambos.* **Intra4 (medida)**: *Conhecer que a congruência entre as naturezas da unidade de medida e do todo a ser medido fundamenta o conhecimento de que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos, em que estes são obtidos por relações de equivalência entre unidade e todo, e que, numa estrutura decimal, são expressos numericamente por* $10^n.u, n \in \mathbb{Z}$, *em que* u *é a magnitude da unidade de medida, e que tal magnitude é necessariamente uma quantidade do tipo contínua.*

	Intra5 (medida): "*Conhecer que a expressão que caracteriza a relação de proporcionalidade inversa entre as magnitudes do valor numérico* (v) *da medida e da unidade de medida* (u)*, numa estrutura decimal, é dada por* $v = \frac{1}{10^n} . \frac{d}{u}, n \in \mathbb{Z}$*, em que o todo a ser medido* (d) *tem magnitude constante, e que, pela natureza contínua de qualquer magnitude, este valor numérico é também contínuo*".

Fonte: autora da tese (2021)

É notável que a quantidade de conexões do tipo intra-conceituais no âmbito dos tópicos do tema de Medida tenha sido maior do que a quantidade dessas conexões no âmbito do tópico de divisão, e consideramos que essa diferença tenha ocorrido, principalmente, pelo fato de que a quantidade de descritores do conhecimento do professor elencados para os tópicos no tema de Medida tenha sido substancialmente maior (31 descritores, cf. artigo 1) do que a quantidade elencada para o tópico de divisão (13 descritores, cf. artigo 2).

Com relação às conexões do tipo interconceituais, essas ocorreram em quantidade bastante menor e também entendemos que isso pode ter ocorrido em virtude da menor quantidade de descritores associados ao tópico de divisão, o que pode ter implicado na quantidade que se evidencia em termos de elementos e ideias unificadoras presentes no âmbito deste tópico, que se relacionam com os tópicos de Medida.

Quadro 19 – Síntese dos descritores de conteúdo de conhecimento associados às conexões interconceituais no âmbito dos tópicos de Medida e de divisão

Inter1 (medida-divisão): *Conhecer que a congruência das naturezas entre a unidade de medida e o todo a ser medido associado ao conhecimento de que toda magnitude é expressa por uma quantidade contínua, sustenta o reconhecimento dos construtos "dividendo" e "divisor" como "todo" e "unidade de medida", respectivamente, e garante o reconhecimento de que suas quantidades são expressas por magnitudes, ou seja, por quantidades contínuas.* **Inter2 (medida-divisão)***: Conhecer que dividir não é medir, mas que este fenômeno se sustenta no conhecimento do fenômeno "medir", quando este se encontra associado aos conhecimentos das definições de medida, de unidade de medida e de que medir não é somente "comparar", mas que envolve outros construtos como "iterar", "quantificar", "acumular" até obter uma "relação numérica" entre magnitudes.* **Inter 3 (medida-divisão)**: *Conhecer que, na divisão interpretada como medida, uma vez que o "dividendo" (d) e o "divisor" (u) são tomados, respectivamente, como "todo a ser medido" e "unidade de medida", por serem de mesma natureza, suas magnitudes podem ser expressas numericamente por $10^n.u, n \in \mathbb{Z}$ e $10^n.d, n \in \mathbb{Z}$, respectivamente, e o valor numérico da divisão (v), o quociente, será constante e expresso por $v = \frac{d}{u} = \frac{10^n}{10^n}.\frac{d}{u}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, sempre que as magnitudes do dividendo e do divisor forem expressas na mesma unidade de referência.*

Fonte: autora da tese (2021)

De toda forma, ressaltamos o fato de que nos três descritores de conhecimentos associados às conexões interconceituais, os tópicos de Medida são fundamentadores e servem como elementos de sustentação para os conhecimentos relacionados ao tópico de divisão.

Damos destaque, também, ao papel que os conhecimentos associados aos fundamentos e às propriedades, em particular nos tópicos do tema de Medida, exercem nessas relações que foram observadas, tanto no âmbito desses tópicos da Medida quanto em conexão com o tópico da divisão.

De fato, a nossa proposta para descrever as conexões intra-conceituais e interconceituais que se observam com base nos descritores de conhecimento especializado assume como ponto de partida os elementos estruturantes e estruturais (ideias unificadoras) que compõem o conteúdo desses conhecimentos associados aos tópicos, e busca relações entre eles. Assim, é natural que os descritores associados aos fundamentos e propriedades estejam quase sempre presentes nos pacotes de conhecimentos especializados que se compõem a partir dessas conexões, já que o conteúdo desses descritores se constitui essencialmente a partir desses elementos.

Por último, consideramos importante referir o papel que os descritores associados à categoria *Procedures* ocuparam nesses pacotes de conhecimento. Como nesta categoria incluem-se os conhecimentos associados às formas de se proceder e às características dos resultados das operações, o que se observou foi que o conteúdo desses descritores são quase sempre sustentados por conhecimentos associados a propriedades e fundamentos, ou então, são relacionados com outros descritores que lhes atribuem significado, justificam os “porquês” associados a esses procedimentos, e possibilitam validar e generalizar essas formas de se proceder e os tipos de resultados obtidos em cada caso.

CONCLUSÕES

O interesse por explorar as especificidades e particularidades do conhecimento do professor no âmbito das conexões matemáticas nos levou a propor esta investigação. Para que fosse possível efetuar essa exploração, assumimos a conceitualização do MTSK (CARRILLO et al., 2018) como lente teórico-analítica, que considera que esse conhecimento do professor é especializado em todas as suas dimensões. Dessa forma, nos propusemos a caracterizar o conteúdo do conhecimento especializado do professor no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida, a partir de uma descrição detalhada desse conteúdo, com intuito de evidenciar os elementos estruturantes desses conhecimentos e compreender os tipos e focos das conexões matemáticas que se observam (ou que podem ser observadas) a partir das relações entre esses elementos.

Com isso, a partir das evidências de conhecimento que os professores revelaram em suas produções para as Tarefas para Formação – TpF – (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021) – conceitualizadas e implementadas no contexto de um Programa de Formação Continuada (PFC), nos foi possível obter um conjunto de descritores do conteúdo de conhecimento especializado, associados ao subdomínio KoT, no âmbito do tópico de divisão (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021b) e dos tópicos de Medida (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a).

A partir desse conjunto de descritores, pudemos observar relações existentes entre elementos estruturantes e ideias unificadoras constituintes do conteúdo dos conhecimentos associados a esses tópicos, o que nos levou a propor uma teorização das conexões intra-conceituais e interconceituais, em termos de descritores do conteúdo do conhecimento do professor associados às conexões matemáticas. Dessa proposta de teorização das conexões matemáticas, foram se compondo o que denominamos por "pacotes de conhecimento especializado", considerando, desde uma perspectiva do conhecimento especializado do professor (CARRILLO et al., 2018), um refinamento e uma ampliação do entendimento do *knowledge package* proposto por Ma (1999).

Na sequência, passamos a apresentar, nas próximas três seções, as conclusões deste estudo. Começaremos apresentando nossas conclusões com relação a cada um dos objetivos que haviam sido delineados para a investigação. Em seguida, apresentaremos uma discussão a respeito do que consideramos serem algumas das implicações e contribuições desta pesquisa para a área da Educação Matemática, e em particular, para a Formação de Professores. E concluímos apresentando nossas considerações a respeito das limitações que, reconhecemos, se apresentaram ao longo deste estudo, além de buscarmos apontar perspectivas futuras para a continuidade da pesquisa.

Conclusões a respeito dos objetivos da pesquisa

Recorde-se que, para o desenvolvimento desta investigação, foram delineados três objetivos específicos. Inicialmente, apresentaremos as conclusões em relação aos dois primeiros objetivos, que tratam das especificidades do conhecimento do professor associadas aos tópicos matemáticos em foco na investigação. Na sequência, tratamos do terceiro objetivo, em que nos focamos em mapear as relações entre o conteúdo dos descritores de conhecimento, com intuito de evidenciar as conexões matemáticas.

i. Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) no âmbito da divisão, mobilizado e revelado por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação;
ii. Identificar e descrever o conteúdo de Conhecimento Especializado dos Tópicos (KoT) relacionados ao tema de Medida, mobilizados e revelados por professores quando discutem e resolvem Tarefas para a Formação;

A partir dos dois primeiros objetivos, foi possível explorar e descrever o conteúdo dos conhecimentos que os professores mobilizaram em revelaram, respectivamente nos âmbitos do tópico de divisão e dos tópicos de Medida, quando estavam inseridos em contextos de formação continuada que tinham como objetivos explícitos aceder e desenvolver esses conhecimentos especializados dos professores. As discussões a respeito desses conhecimentos revelados estão incluídas no Capítulo 3, e respectivamente contempladas pelos dois artigos que compõem a tese. Portanto, essas discussões não serão aqui retomadas para que não estejamos a repetir algo que já se apresentou anteriormente.

Como estes objetivos investigativos nos serviram como uma etapa intermediária para as discussões que extrapolam os casos concretos e particulares, aqui nos focamos nos resultados desses dois artigos, sintetizados na forma de descritores do conteúdo de conhecimentos associados ao tópico de divisão e aos tópicos do tema de Medida. Foi precisamente esse foco no conteúdo dos descritores o que nos forneceu a base para as teorizações acerca das conexões intra-conceituais e interconceituais que se podem observar nas relações entre os conhecimentos dos tópicos de divisão e do tema de Medida, as quais se organizaram a partir dos “pacotes de conhecimento expecializado”.

Dessa forma, no âmbito do tópico de divisão, identificaram-se 13 descritores de conhecimentos associados às quatro categorias originalmente propostas no subdomínio do KoT (CARRILLO et al., 2018). Assim, foi possível descrever o conteúdo de conhecimentos associados à *Phenomenology and applications*, em um detalhamento de suas especificidades em relação ao fenômeno do que é dividir, encarando-o a partir das interpretações de seus dois sentidos (FISCHBEIN et al., 1985), além dos tipos/características dos contextos (problemas) que se podem criar para evocar cada um dos sentidos, associados às ideias de “distribuição” e de “comparação” seguida de “quantificação” (CHARLES; NASON, 2000; DOWNTON, 2009).

Para a categoria *Defintions, properties and foundations*, esse detalhamento das especificidades do conhecimento do professor se relacionou com as condições necessárias e suficientes para se efetuar uma divisão e, a partir disso, destacaram-se como elementos estruturantes do conteúdo desses conhecimentos os construtos “dividendo”, “divisor” e “quociente” (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; ROBINSON; LEFEVRE, 2012; SQUIRE; BRYANT, 2002), conferindo-lhes os devidos papéis nos entendimentos dos tipos de raciocínio envolvidos quando a divisão é interpretada a partir de cada um dos seus dois sentidos. Aqui as ideias de “distribuição” e de “comparação” seguida de “quantificação” se associam à ideia de “decomposição” para dar sustentação ao conteúdo desses conhecimentos, possibilitanto observar relações com outros conhecimentos.

Em decorrência do detalhamento do conteúdo dos conhecimentos associados a esses elementos estruturantes e ao papel que representam nos distintos contextos em que a divisão pode estar envolvida, passamos a reconhecer a necessidade de se encarar *Definitions*, *Properties* e *Foundations* como categorias separadas. Isso porque nos alinhamos com a perspectiva de que as especificidades do conhecimento do professor se assinalam justamente pelas particularidades com que se contituem no âmbito de cada tópico matemático e, por isso, quanto mais caracterizadas estiverem essas particularidades, mais minuciosa se torna a análise desse conhecimento especializado. Nesse sentido, ainda que não tenhamos tido a oportunidade de apresentar essa proposta de separação das categorias já no primeiro artigo da tese, por uma questão de que o nosso próprio entendimento a esse respeito efetivamente se deu na ocasião já da publicação daquele estudo, para o segundo recorte da tese, relacionado com os tópicos do tema de Medida, incluímos essa perspectiva logo nos procedimentos analíticos do material coletado na segunda fase da pesquisa.

Com relação à categoria *Procedures,* ainda no âmbito do tópico de divisão, os descritores nos levaram a um detalhamento dos conhecimentos associados às formas de se proceder para se resolver uma operação de divisão e às características dos resultados de cada operação em relação a cada um dos dois sentidos (RIBEIRO et al., 2018). Novamente, no conteúdo desses descritores, os construtos "dividendo", "divisor" e "quociente" se apresentaram como elementos estruturantes, em associação com o conceito de "algoritmo". Mais uma vez, aqui as ideias de "distribuição", "comparação" e "quantificação" são unificadoras e, portanto, estruturais nas relações que se observam entre os conhecimentos.

Na categoria *Registers of representation*, a quantidade de descritores elencados foi maior (5) do que nas demais categorias, embora dois dos descritores referem-se a conteúdo de conhecimentos que podem ser considerados "genéricos", porque se encontram associados a qualquer tópico matemático, e não especificamente ao tópico de divisão. Esses dois descritores se relacionam com os conhecimentos dos distintos sistemas representacionais usados na matemática (pictórico, gráfico, numérico, verbal – oral e escrito –, simbólico) e de como as distintas formas de se representar um conceito, quando estão relacionadas entre si (RIBEIRO, 2011), contribuiem para dar significado e criar imagens mentais desses conceitos (GOLDEN; SHTEINGOLD, 2001; TIMMERMAN, 2014). Os demais descritores elencados nesta categoria tratam especificamente dos conhecimentos dos tipos de linguagem (verbal ou simbólica) que contribuem para dar significado aos distintos sentidos da divisão, e do papel das verbalizações na atribuição de significado aos procedimentos empregues no algoritmo euclidiano, também em correspondência com cada um dos dois sentidos da divisão (RIBEIRO et al., 2018).

Considerando os tópicos no tema de Medida, foram identificados 31 descritores associados a todas as categorias do subdomínio KoT que, como dissemos, passaram a ser consideradas como: *Definitions*; *Properties; Foundantions*; *Phenomenology and applications; Porcedures;* e *Registers of representations*.

À *Definitions* foram associados 6 descritores cujos conteúdos se referem às definições de perímetro, área, capacidade e volume – todas as grandezas abordadas no contexto do PFC – (BARRET et al., 2012; HO; MCMASTER, 2019; PARNORKOU, 2020). Além desses, destacamos os descritores que se associaram às definições de conceitos mais fundamentais no âmbito dos tópicos de Medida, quais sejam, as definições de “medida”, e de “unidade de medida” (BERKA, 1983).

Na categoria *Properties*, por sua vez, os 5 descritores de conhecimento elencados contribuem efetivamente para organizar e descrever um conjunto de atributos e características (MASON; STEPHENS; WATSON, 2009) relacionados especificamente aos construtos “grandeza” e “unidade de medida”. Destacamos, nesta categoria, particularmente os descritores que caracterizam os conhecimentos do professor associados aos múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida e à natureza contínua da magnitude de qualquer grandeza.

Em *Foundations* elencaram-se 8 descritores do conhecimento do professor que, por sua vez, contribuem para conectar conceitos e construtos e são responsáveis por criar elementos unificadores desses construtos e conceitos, dando forma ao conhecimento matemático associado não somente aos tópicos de Medida, mas também, particularmente ao tópico de divisão.

De fato, no conteúdo dos 19 descritores associados à *Definitions*, *Properties* e *Foundations* observam-se elementos estruturantes que se apresentam na forma de construtos ou conceitos, tais como, “unidade de medida”, “todo a ser medido”, “grandeza”, “magnitude”, “quantidade”, além de algumas ideias unificadoras – “comparação”, “quantificação” e “relações de equivalência”, por exemplo – que serviram para dar sustentação ao que posteriormente identificaríamos em termos de relações entre os descritores do conhecimento, no mapeamento que elaboramos para a nossa proposta de teorização das conexões matemáticas.

Concluímos, portanto, que a opção por separar as categorias *Definitions*; *Properties* e *Foundantions* foi acertada, uma vez que a nossa intenção era justamente tornar evidentes esses elementos estruturantes e ideias unificadoras.

Para a categoria *Phenomenology and applications*, foram elencados somente 2 descritores, um deles associado especificamente ao fenômeno “medir”, e o outro, associado aos distintos contextos em que este fenômeno está presente. Não é surpreendente o fato de que a quantidade de descritores associados a essa categoria seja bastante menor do que as quantidades encontradas nas demais categorias, uma vez que o fenômeno “medir” não assume distintas interpretações, a depender dos contextos em que está sendo evocado –

medição de distintas grandezas – como o que ocorre, por exemplo, com o fenômeno “dividir”. No caso do descritor associado ao fenômeno “medir”, destacam-se as ideias de “comparação” e “quantificação” como unificadoras do conteúdo desse descritor com outros associados aos tópicos no tema de Medida.

Na categoria *Procedures* encontram-se 8 descritores em que se detalham os conhecimentos associados às formas de se proceder para efetuar a medição de qualquer grandeza, bem como às características dos resultados de uma medição. Destacam-se, novamente, como elementos estruturantes os construtos “unidade de medida”, “todo a ser medido”, mas agora incluem-se nesse conjunto os construtos “iteração”, “valor numérico de uma medida” e o conceito de “*unitizing*”. Mais uma vez, as ideias unificadoras “comparação” e “quantificação” estão presentes como elementos estruturais, e se associam a elas as ideias de “equivalência” e “proporcionalidade”.

Por último, na categoria *Registers of representation* elencaram-se apenas 2 descritores, ambos associados às nomenclaturas e simbologias adequadas para se referir tanto às grandezas quanto às unidades de medida.

iii. Mapear e descrever as possíveis relações que ocorrem entre o conteúdo do conhecimento associado aos tópicos de Medida e ao tópico de divisão, de modo a evidenciar o caráter estrutural e estruturante desses tópicos, numa perspectiva de “descompactação” desse conhecimento.

Ao descrever o conteúdo dos conhecimentos no âmbito dos tópicos de divisão e do tema de Medida, foi possível evidenciar os elementos estruturantes e estruturais, estes últimos, em forma daquilo que denominamos por ideias unificadoras e passamos a identificar de que forma eles se encontravam relacionados uns com os outros. Por exemplo, verificamos que a depender do sentido com o qual a divisão é encarada, podemos relacionar “dividendo”, “divisor” e “quociente”, respectivamente, com “todo a ser medido”, “unidade de medida” e “valor da medição”. Isso fica mais claro quando incluímos nessa observação o fato de que são as ideias unificadoras “comparação” e “quantificação” que dão sustentação aos raciocínios envolvidos nos casos em que a divisão está sendo interpretada como medida e também quando estamos efetuando uma medição.

Assim, na nossa proposta de teorização das conexões intra-conceituais e interconceituais, esses elementos estruturantes exercem a função de atribuição de significado a tipos de raciocínios e/ou procedimentos envolvidos no conteúdo dos descritores de conhecimento, ao mesmo tempo em que se mostram relacionados uns com os outros. E as ideias unificadoras, por sua vez, exercem a função de dar sustentação às relações que observamos entre esse conhecimentos, tanto no âmbito do mesmo tópico quanto em tópicos distintos.

A partir das relações observadas, porpusemos, em termos de conteúdo do conhecimento do professor, um total de 11 descritores do conhecimento: 3 associados a conexões intra-conceituais no âmbito do tópico de divisão; 5 também relacionados com as conexões do tipo intra-conceituais, no âmbito dos tópicos do tema de Medida; e 3 associados às conexões interconceituais observadas entre os tópicos de Medida e de divisão.

No caso dos descritores de conhecimento associados às conexões intra-conceituais no âmbito do tópico de divisão, todos se relacionam com a maneira como o conhecimento do professor pode ser estruturado e organizado para dar forma ao modo como a divisão deve ser interpretada – partilha equitativa ou medida – e aos tipos de raciocínios matemáticos que sustentam os procedimentos ou atribuiem significado aos resultados obtidos numa operação de divisão.

Já para os descritores de conhecimento relacionados com as conexões intra-conceituais identificadas no âmbito dos tópicos do tema de Medida, estes detalham o modo como o conhecimento do professor pode se estruturar e organizar para dar forma e atribuir significado ao próprio fenômeno "medir", e aos papéis que "unidade de medida", seus múltiplos e submúltiplos possuem em qualquer contexto em que uma medição esteja envolvida. Além disso, no conteúdo desses descritores encontram-se elementos estruturais que são essenciais na constituição de um tipo de pensamento relacional (SKEMP, 1989), e que fornecem base para sustentar conexões interconceituais, envolvendo tópicos distintos, e não apenas o tópico de divisão. As noções de "proporcionalidade inversa" e de "quantidades contínuas" são exemplos desses elementos estruturais.

No caso dos descritores associados às conexões interconceituais, todos estes se relacionaram com o modo como o conhecimento do professor pode se organizar e estruturar para dar significado ao tipo de conexão existente entre os tópicos de Medida com o tópico de divisão. Por exemplo, no conteúdo desses descritores, verifica-se o conhecimento de que dividir não é medir, mas que são essencialmente os elementos estruturantes presentes nos conhecimentos do tópico de divisão e nos tópicos de Medida, sustentados pelas ideias unificadoras de “comparação” e “quantificação”, que justificam a forma como esses tópicos estão conectados.

O mapeamento dessas relações entre o conteúdo dos descritores de conhecimento dos tópicos mostrou a relevância que esses conhecimentos associados ao subdomínio KoT têm, em particular aqueles incluídos nas categorias *Foundations* e *Properties*. De fato, o conteúdo desses conhecimentos está presente na maior parte das conexões evidenciadas, justamente por se constituírem de elementos estruturais e estruturantes dos tópicos envolvidos nessas conexões.

Além disso os tópicos do tema de Medida se mostraram, conforme já esperávamos com base em parte do referencial teórico assumido nesta pesquisa (BERKA, 1983; CLEMENTS; SARAMA, 2007; CLEMENTS; STEPHAN, 2004; HIEBERT, 1984), como fundamentadores e geradores de (novos) conhecimentos, o que, do ponto de vista do conhecimento especializado do professor implica em considerar esse caráter estrutural instrínseco à própria Matemática (VENKAT et al., 2019).

Implicações e contribuições da pesquisa

Esse estudo confirmou a potencialidade da ferramenta teórico-analítica do MTSK para explorar, descrever e detalhar o conteúdo do conhecimento especializado do professor, no âmbito de cada um dos tópicos matemáticos (CALDATTO et al., 2019).

Além disso, também se mostrou potente a forma como se pode lidar com o detalhamento do conteúdo de conhecimento especializado do professor, qual seja, a partir da sua apresentação em termos de descritores do conhecimento (POLICASTRO; RIBEIRO, 2021a, 2021b; ZAKARYAN; RIBEIRO, 2018), já que são precisamente essas descrições que clarificam *o que* e *como* o conhecimento do professor pode se organizar e se estruturar, em termos das suas particularidades e especificidades, em relação a cada tópico matemático. Portanto, a opção por encarar, de forma separada, as categorias *Definitions*, *Properties* e *Foundations*, vai ao encontro da perspectiva de detalhamento do conteúdo do conhecimento do professor numa busca pelo aprofundamento dos entendimentos relacionados com as particularidades e especifidades desse conhecimento.

Ao mesmo tempo, lidar com esse conhecimento especializado em termos dos descritores, possibilita a identificação dos elementos estruturantes e estruturais do conteúdo desses conhecimentos, favorecendo, assim, a observação de como estão relacionados entre si.

Nesse sentido, ao propormos um mapeamento dessas relações, introduzimos a noção de “pacotes de conhecimento especializado”, que, por estruturarem de forma orgânica e dinâmica tais relações, contribuem para um mais amplo e profundo entendimento das especificidades e particularidades associadas ao conhecimento do professor, contribuindo, em última instância, para a melhoria da formação de professores, desde os tipos de discussão que se propõem nesses contextos, até mesmo a conceitualização dos próprios currículos de formação desses professores (CALDATTO; RIBEIRO, 2020).

Ao mesmo tempo, nossa proposta de teorização das conexões intra-conceituais e interconceituais que se observam a partir das relações entre os elementos estruturantes e ideias unificadoras constituintes do conteúdo do conhecimento do professor contribui para ampliar e aprofundar os entendimentos do que são essas conexões matemáticas (tipo e natureza), quando consideradas na perspectiva do conhecimento especializado do professor.

Limitações e perspectivas de investigações futuras

Ao finalizar a investigação, temos condições de olhar de maneira mais global todos os processos e etapas com os quais estivemos envolvidos no decorrer do estudo e, assim, de forma crítica, podemos analisar os elementos que podem ter implicado nos resultados obtidos.

De fato, ao assumir o MTSK como conceitualização para investigar o conhecimento especializado das conexões matemáticas, em primeira instância, consideramos que nos deteríamos exclusivamente nos subdomínios KoT e KSM para analisar o conteúdo desse conhecimento, uma vez que são especificamente estes dois subdomínios em que se consideram os conhecimentos das conexões matemáticas.

No entanto, como a pesquisa se desenvolveu no contexto de um Programa de Formação Continuada (PFC), as evidências de manifestação do conhecimento especializado do professor foram obtidas a partir de suas produções para as Tarefas para Formação – TpF – (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021), no que fica clara a importância que essas TpF têm quanto à mobilização dos conhecimentos especializados dos professores.

Na perspectiva que assumimos, a conceitualização de uma TpF se dá com base na lente teórica do MTSK, que é utilizada como ferramenta para incluir propostas nas tarefas que efetivamente contribuam para mobilizar elementos do conhecimento especializado dos professores, associados a cada um dos subdomínios, considerando não só as particularidades de cada tópico matemático em foco na formação, mas também, e obviamente, os objetivos formativos previamente delineados.

Nesse sentido, a própria conceitualização de uma TpF para um contexto em que também está associada uma investigação, requer que os objetivos investigativos se alinhem aos objetivos formativos, ainda que, para estes últimos, possa haver outros focos que não necessariamente estejam relacionados com a investigação propriamente dita.

As TpF utilizadas nos contextos formativos em que ocorreu esta investigação foram conceitualizadas em fases bastante distintas do percurso da pesquisa, não somente porque estivessem cronologicamente afastadas uma da outra – com um período de 1 ano e 3 meses entre as duas –, mas, principalmente porque demarcaram momentos bastante específicos do desenvolvimento da própria autora da pesquisa, em termos de suas sensibilidades teórica (STRAUSS; CORBIN, 1994), fenomenológica (GEELAN, 2003), e aqui incluímos, também, a sua sensibilidade metodológica associada tanto aos procedimentos de preparação dos instrumentos de coleta das informações – com papel preponderante do processo de conceitualização das TpF – quanto aos procedimentos de tratamento e análise dessas informações coletadas.

Nesse sentido, as TpF utilizadas em cada uma das duas primeiras fases da investigação, momentos em que a pesquisa de campo ocorreu, revelaram-se frágeis enquanto instrumentos para coleta de informações associadas ao conhecimento do professor no âmbito do KSM, porque efetivamente não estavam conceitualizadas para mobilizar, entre os professores, tais tipos de conhecimentos associados este subdomínio. Com efeito, no KSM se considera o conteúdo do conhecimento do professor das conexões interconceituais que são mobilizadas em contexto da prática letiva – conexões de simplificação, de complexificação, auxiliares e transversais (CARRILLO et al., 2018).

Assim, quando se objetiva investigar o conteúdo do conhecimento especializado do professor com foco no subdomínio KSM, ainda que a investigação ocorra em contextos formativos, é fundamental que as propostas incluídas na TpF estejam relacionadas com a prática letiva dos professores. Assim, por exemplo, incluir nas TpF propostas de preparação de tarefas para a sala de aula ou exemplos de situações ocorridas em sala de aula para que os professores possam analisar, podem mobilizar mais efetivamente os conhecimentos dos professores associados às conexões, na perspectiva do KSM.

Dessa forma, consideramos que este estudo poderia ser complementado a partir de dois caminhos não mutuamente excludentes:

- ✓ Associar os resultados obtidos pela presente investigação à análises de informações coletadas nos demais módulos que compuseram o PFC, como forma de investigar como se dá o desenvolvimento do conhecimento especializado do professor participante de um programa de formação que tem como objetivos explícitos desenvolver este conhecimento;
- ✓ Relacionar os resultados desta investigação com informações coletadas a partir de observações da prática letiva dos professores que participaram do PFC, como forma de compreender os tipos de conexões matemáticas que efetuam nesses contextos;

Com isso, algumas questões nos surgem ao nos propomos refletir sobre esses possíveis caminhos a serem percorridos. Tais questões estão agrupadas em dois conjuntos, sendo o primeiro deles relacionado com aquilo que se poderia considerar como estando associado à pesquisas teóricas acerca das especificidades do conhecimento do professor, do papel que as tarfas para formação ocupam nos contextos formativos e das características de programas de formação com foco no conhecimento especializado do professor.

- ❖ Como se caracteriza, em termos de descritores do conhecimento, o KSM do professor associado ao tópico de divisão e aos tópicos do tema de Medida?
- ❖ Quais são as conexões do tipo intra-conceituais e interconceituais que se observam entre o conteúdo dos conhecimentos do professor associados aos tópicos de divisão e do tema de Medida em relação a outros tópicos como os de adição, subtração, multiplicação, frações e números decimais, por exemplo?
- ❖ As TpF conceitualizadas com base nesses “pacotes do conhecimento especializado” teriam maior potencialidade para aceder e desenvolver os conhecimentos dos professores associados ao KSM?
- ❖ Quais elementos caracterizariam um PFC conceitualizado na perspectiva das conexões matemáticas, com base nos “pacotes de conhecimento especializado”?

E um segundo conjunto de questões que se abrem está relacionado particularmente com a Formação de Professores em especial quando se tratam do entendimento das implicações que programas de formação com foco no desenvolvimento das especificidades do conhecimento do professor têm para a sua prática e o seu Desenvolvimento Profissional:

- Que implicações para a prática letiva do professor teria um PFC conceitualizado com base nesses “pacotes de conhecimento especializado”?
- Qual o conteúdo do do Desenvolvimento Profissional do professor que participa de um PFC que tem como objetivo desenvolver o conhecimento especializado do professor e é conceitualizado com base nos “pacotes de conhecimento especializado”?

Os resultados desta investigação, associados com as perguntas que ainda ficam em aberto, nos permitem confirmar que assumir a premissa de que o conhecimento do professor é especializado, tem implicações na forma de encarar esse conhecimento de um ponto de vista intrínseco (SCHEINER et al., 2017), por se considerar as suas especificidades associadas a cada tópico matemático. Mas, para além disso, as implicações de se assumir tal premissa perpassam pela forma com que se pode lidar com esse conhecimento, tanto a partir de uma perspectiva teórico-analítica, focada na investigação, quanto de uma pespectiva prática (focada na formação), que se preocupa com o desenvolvimento desse conhecimento especializado do professor.

REFERÊNCIAS

AINSWORTH, S. A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and Instruction**, v. 16, p. 183–198, 2006.

AINSWORTH, S.; BIBBY, P.; WOOD, D. Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. **Journal of the Learning Sciences**, v. 11, n. 1, p. 25–62, 2002.

ALMEIDA, M. V. R. DE; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações. **Tangram: Revista de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 24–56, 2020.

ASKEW, M. Mediating primary mathematics: measuring the extent of teaching for connections and generality in the context of whole number arithmetic. **ZDM**, v. 51, n. 1, p. 213–226, 1 abr. 2019.

BALL, D.; BASS, H. **With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures.** . In: PAPER PRESENTED AT THE 2009 CURTIS CENTER MATHEMATICS AND TEACHING CONFERENCE. 2009.

BALL, D. L. With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. **The Elementary School Journal**, v. 93, n. 4, p. 373–397, 1993.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008.

BAROODY, A. The development of adaptative expertise and flexibility: the integration of conceptual and procedural knowledge. In: BAROODY, A. J.; DOWKER, A. (Eds.). . **The development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptative Expertise**. Studies in Mathematical Thinking and Learning. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2003. p. 1–33.

BARRET, J. E. et al. Evaluating and Improving a Learning Trajectory for Linear Measurement in Elementary Grades 2 and 3: A Longitudinal Study. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 14, p. 28–54, 2012.

BARRETT, J. E. et al. Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. **ZDM**, v. 43, n. 5, p. 637, 27 set. 2011.

BARRETT, J. E.; CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017.

BATURO, A.; NASON, R. Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. **Educational Studies in Mathematics**, v. 31, n. 3, p. 235–268, 1 out. 1996.

BAUMERT, J. et al. Teachers´Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom and Student Progress. **American Educational Research Journal**, v. 47, n. 1, p. 133–180, 2010.

BELL, A.; FISCHBEIN, E.; GREER, B. Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. **Educational Studies in Mathematics**, v. 15, n. 2, p. 129–147, 1 maio 1984.

BERKA, K. **Measurement: Its Concepts, Theories and Problems**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1983. v. 72

BICKNELL, B. et al. Using multiplication and division contexts with young children to develop part-whole thinking. **Journal Issue**, p. 53–59, 2015.

BLÖMEKE, S. et al. Effectiveness of teacher education. **ZDM**, v. 40, n. 5, p. 719–734, 2008.

BOALER, J. Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research andworking hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, n. 1, p. 3–21, 2002.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYD, D. J. et al. Teacher Preparation and Student Achievement. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 31, n. 4, p. 416–440, 2009.

BRAGG, P.; OUTHRED, L. A Measure of Rulers--The Importance of Units in a Measure. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2, p. 159–166, 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018a.

BRASIL. **Material suplementar para o redator de currículo - Não faz parte da BNCC**MEC, , 2018b. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>. Acesso em: 17 nov. 2018

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; KRAEMER, J.-M. Algoritmos e sentido do número. **Educação e Matemática**, v. 75, n. Nov/Dez, p. 11–15, 2003.

BROMME, R. Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In: BIEHLER, R. et al. (Eds.). . **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Kluwer: Dordrecht, 1994. p. 73–88.

BUSINSKAS, A. M. **Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections**. Tese (Doctor of Philosophy)—Canadá: University of Toronto, 2008.

CALDATTO, M. E. et al. **O conhecimento do professor que ensina matemática: possibilidades e limitações investigativas do MTSK**. Anais do 13º Encontro Nacional de

Educação Matemática - Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: Interfaces entre pesquisas e salas de aula. **Anais**... In: XIII ENEM. Cuiabá: SBEM, 2019.

CALDATTO, M. E.; POLICASTRO, M.; RIBEIRO, M. **Uma discussão sobre a natureza das pesquisas sobre conhecimento profissional do Professor: o caso do Bolema**. Anais da 39ª Reunião Nacional ANPEd. **Anais**... In: 39ª REUNIÃO NACIONAL DA ANPED. Rio de Janeiro: 2019.

CALDATTO, M. E.; RIBEIRO, M. Especificidades do conhecimento do professor de matemática na e para a formação: uma discussão em torno do programa de complementação pedagógica. **Revista Brasileira de Educação**, v. 25, p. 1–26, 2020.

CARRILLO, J. et al. Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 22, p. 185–205, 2017.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236–256, 2018.

CEBOLA, G. **Do número ao sentido do número. Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** . In: SECÇÃO DE EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO. Lisboa: 2002.

CHARALAMBOUS, C. Y. Mathematical knowledge for teaching and tasks. **Journal of Teacher Education**, v. 60, n. 1–2, p. 21–34, 2010.

CHARALAMBOUS, C. Y. Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: a multiple-case study. In: **Journal of Mathematics Teacher Education**. [s.l.] Springer, 2015. v. 18p. 427–445.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 64, n. 3, p. 293, 2006.

CHARLES, K.; NASON, R. Young children's partitioning strategies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 43, n. 2, p. 191–221, 1 set. 2000.

CHARLES, R. I. Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. **Journal of Mathematics Education Leadership**, v. 7, n. 3, p. 9–24, 2005.

CHARMAZ, K. Qualitative interviewing and Grounded Theory analysis. In: GUBRIUM, J.; HOLSTEIN, J. (Eds.). . **Handbook of Interview Research**. Londres: SAGE, 2001. p. 675–694.

CHEESEMAN, J.; MCDONOUGH, A.; FERGUSON, S. Investigating young children's learning of mass measurement. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 2, p. 131–150, 2013.

CLARKE, D. M. **Written algorithms in the primary years: Undoing the 'good work'?** Proceedings of the Twentieth Biennal Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers. **Anais**... In: MAKING MATHEMATICAL VITAL. Adelaide, Australia: The Australian Association of Mathematics Teachers, 2005.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood mathematics learning. In: LESTER, F. K. (Ed.). . **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Information Age Publishing, 2007. v. 1p. 461–555.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning and Teaching Early Math: the learning trajectory approach**. London: Routledge, 2009.

CLEMENTS, D.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: CLEMENTS, D.; SARAMA, J.; DIBIASE, A.-M. (Eds.). . **Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education**. New Jersey: LEA: [s.n.]. p. 299–317.

COBB, P. PUTTING PHILOSPHY TO WORK: Coping with Multiple Theoretical Perspectives. In: LESTER JR, F. K. (Ed.). . **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the national council teachers of mathematics**. United States of America: [s.n.]. p. 3–38.

CORBIN, J.; STRAUSS, A. **Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory**. [s.l.] Sage publications, 2014.

CORREA, J.; NUNES, T.; BRYANT, P. Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. **Journal of Educational Psychology**, v. 90, n. 2, p. 321–329, 1998.

CULLEN, A. L.; BARRETT, J. E. Area measurement: structuring with nonsquare units. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 22, n. 2, p. 85–115, 2019.

DA PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 93, n. 1, p. 51–66, 1 set. 2016.

DARLING-HAMMOND, L. Teacher quality and student achievement. **Education policy analysis archives**, v. 8, n. 1, p. 1–44, 2000.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293–319, 2006.

DE GAMBOA, G. **Aproximación a la relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones en aula**. Tese de Doutorado—Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 2015.

DE GAMBOA, G. et al. The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. In: ZEHETMEIER, S.; POTARI, D.; RIBEIRO, M.

(Eds.). . **Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers**. 1. ed. London: Routledge, 2020. p. 24–43.

DE GAMBOA, G.; BADILLO, E.; RIBEIRO, M. El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: Geometría y Medida en Educación Primaria. **PNA**, 1. v. 10, p. 1–24, 2015.

DELGADO-REBOLLEDO, R. **Una propuesta de categorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitários**. Tese—Chile: Pontificia Universidad Católica de Val Paraíso, 2020.

DI BERNARDO, R. et al. Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. **Cadernos Cenpec**, v. 8, n. 1, p. 98–124, 2018.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. In: LERMAN, S. (Ed.). . **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 1–5.

DOWNTON, A. **It Seems to Matters Not Whether it is Partitive or Quotitive Division When Solving One Step Division Problems**. Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. **Anais**... In: MERGA. Palmerston North, NZ: MERGA, 2009.

DOWNTON, A.; SULLIVAN, P. Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. **Educational Studies in Mathematics**, v. 95, n. 3, p. 303–328, 1 jul. 2017.

DREHER, A.; KUNTZE, S. Teacher’s professional knowledge noticing: the case of multiple representations in the mathematics classroom. **Educational Studies In Mathematics**, v. 88, n. 1, p. 89–114, 2015.

EKDAHL, A.-L.; VENKAT, H.; RUNESSON, U. Coding teaching for simultaneity and connections. **Educational Studies in Mathematics**, v. 93, n. 3, p. 293–313, 1 nov. 2016.

ELI, A. J.; MOHR-SCHROEDER, M. J.; LEE, C. W. Exploring connections of prospective middle-grade teachers through card-sorting tasks. **Mathematics Research Education Journal**, v. 3, p. 297–319, 2011.

ESCUDERO-AVILA, D. et al. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. **PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 10, n. 1, p. 53–77, 2015.

ESCUDERO-ÁVILA, D.; MORA, D. V.; AGUILAR-GONZÁLEZ, Á. **Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor del matemáticas**. VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Libro de Actas. **Anais**... In: VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Madri: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2017.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. DA S. P. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. **Zetetiké**, v. 20, n. 37, p. 33–67, 2012.

FENNEMA, E.; FRANKE, M. L. Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, D. A. (Ed.). . **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics**. New York: National Council of Teachers of Mathematics, 1992. p. 147–164.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. **The Mathematics Enthusiast**, v. 10, n. 1, p. 441–468, 1 jan. 2013.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. In: 1. ed. [s.l.] Zetetiké, 2017. v. 25p. 164–185.

FISCHBEIN, E. et al. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Reaserch in Mathematics Education**, v. 16, n. 1, p. 3–17, 1985.

FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; CARRILLO, J. **A theoretical review of specialised content knowledge**. Proceedings of CERME 8. **Anais**... In: CERME. Antalya, Turquia: 2013.

FLORES-MEDRANO, E. et al. NUESTRA MODELACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, EL MTSK. In: **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas**. capítulo IV: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014. v. 1p. 57–72.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. **Young mathematics at work: constructing multiplication and division**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001.

GAMBOA, G. DE et al. **Teacher´s knowledge an the use of connections in the classroom**. Proceedings of ERME topic conference Mathematics teaching, resources and teacher professional development. **Anais**... In: ETC 3. Berlin: Humboldt-Universität zu Berlin, 2016.

GAMBOA, G. DE; FIGUEIRAS, L. **Conexiones em el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis**. Investigación em Educación Matemática XVIII. **Anais**... In: SEIEM. Salamanca. España.: 2014.

GEELAN, D. **Weaving narrative nets to capture classrooms: Multimethod qualitative approaches for educational research**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2003.

GERGEN, K. J. The social constructionist movement in modern psychology. 1992.

GODINO, J. D. et al. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 90–113, 2017.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R. Magnitudes y Medida. In: **Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.** [s.l.] Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, 2002. p. 611–654.

GOLDEN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representation and the development of mathematical concepts. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). . **The role of representation in school mathematics**. Boston, Virginia: NCTM, 2001. p. 1–23.

GÓMEZ, P.; CAÑADAS, M. C. Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 19, n. 3, p. 311–334, 2016.

GOOS, M. Sociocultural perspectives on learning to teach mathematics. In: JAWORSKI, B.; WOOD, T. (Eds.). . **The international handbook of mathematics teacher education.** The mathematics teacher educator as a developing professional. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. v. 4p. 75–91.

GREER, B. Inversion in mathematical thinking and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 3, p. 429–438, 2011.

GROSSMAN, P. L. **Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation**American Association of Colleges for Teacher Education and National Education Association, , 2010.

GUBA, E. G.; LINCOLN, Y. S. Competing Paradignms in Qualitative Research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). . **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks, CA: Sage, 1994. p. 105–117.

HAREL et al. The impact of number type on the solution of multiplication and division problems:Further considerations. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**, p. pp.365-388, 1994.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. DEN; ELIA, I. Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. **ZDM**, v. 43, n. 5, p. 621–635, 2011.

HIEBERT, J. Why Do Some Children Have Trouble Learning Measurement Concepts? **The Arithmetic Teacher**, v. 31, n. 7, p. 19–24, 1984.

HIEBERT, J.; GROUWS, D. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In: LESTER, F. (Ed.). . **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Information Age Publishing, 2007. p. 371–404.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). . **Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1–27.

HILL, H. C. et al. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. **Cognition and Instruction**, v. 26, n. 4, p. 430–511, 2008.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 39(4), p. 372–400, 2008.

HILL, H. C.; CHIN, M. Connections Between Teachers’ Knowledge of Students, Instruction, and Achievement Outcomes. **American Educational Research Journal**, v. 55, n. 5, p. 1076–1112, 2018.

HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. Effects of teachers’ mathematics knowledge for teaching on student achievement. **American Education Research Journal**, v. 42(2), p. 371–406, 2005.

HO, A.; MCMASTER, H. **Is’ Capacity’Volume? Understandings of 11 to 12-Year-Old Children.** Mathematics Education Research Group of Australasia: Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. **Anais**... In: 42ND ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA. Perth: MERGA, 2019.

HOGAN, T. P.; BREZINSKI, K. L. Quantitative Estimation: One, Two, or Three Abilities? **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 4, p. 259–280, 1 out. 2003.

HULBERT, E. T. et al. **A focus on Multiplication and Division: Bringing Research to the Classroom**. 1. ed. London: Routledge, 2017.

IRWIN, K. C.; ELL, F. R.; VISTRO-YU, C. P. Understanding linear measurement: A comparison of filipino and new zealand children. **Mathematics Education Research Journal**, v. 16, n. 2, p. 3–24, 1 jun. 2004.

IZSÁK, A. ‘“We want a statement that is always true”’: Criteria for good algebraic representations in the development of modeling knowledge. **Journal for Reaserch in Mathematics Education**, v. 34, n. 3, p. 191–227, 2003.

JAKOBSEN, A. et al. **Discussing secondary prospective teachers’ interpretative knowledge: a case study.** . In: PROCEEDINGS OF PME 40. Szeged, Austria: 2016.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers’ MKT when interpreting pupils’ productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, 3-4. v. 19, p. 135–150, 2014.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M.; RIBEIRO, M. **Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching.** . In: PROCEEDINGS OF CERME 8. Antalia, Turkie: ERME.: 2013.

JANVIER, C. Representation and understanding: The notion of function as an example. In: JANVIER, C. (Ed.). . **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc., 1987. p. 67–71.

JORAM, E.; SUBRAHMANYAM, K.; GELMAN, R. Measurement Estimation: Learning to Map the Route from Number to Quantity and Back. **Review of Educational Research**, v. 68, n. 4, p. 413–449, 1998.

JUNG, M. et al. The effectiveness of teaching number relationships in preeschool. **International Journal of Instruction**, v. 6, n. 1, p. 165–178, 2013.

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In: MORROW, L. J.; KENNEY, M. J. (Eds.). . **The teaching and learning algorithms in school**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

KENEDI, A. K. et al. Mathematical Connection of elementary school students to solve mathematical problems. **Journal on Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 69–80, 2019.

KUNTER, M. et al. Professional competence of teachers: Effects on instructional quality and student development. **Journal of Educational Psychology**, v. 105, n. 3, p. 805–820, 2013.

LAMON, S. The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 27 (2), p. 170–193, 1996.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 4ª ed. London: Routledge, 2020.

LASKI, E. V. et al. Kindergartners' base-10 knowledge predicts arithmetic accuracy concurrently and longitudinally. **Learning and Individual Differences**, v. 50, p. 234–239, 1 ago. 2016.

LATORRE, A.; RINCÓN, D. D.; ARNAL, J. **Bases metodológicas de la Investigación Educativa**. Barcelona, España: Hurtado Ediciones, 1997.

LAUTERT, S. L.; OLIVEIRA, D. C. A. DE; CORREA, J. Compreensão de crianças sobre relações inversas sem explicitação numérica. **Arquivos Brasileiros de Psicologia**, v. 69, n. 1, p. 73–89, 2017.

LEE, L.; WHEELER, D. The arithmetic connection. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 1, p. 41–54, 1989.

LEE, M. Y.; CROSS FRANCIS, D. Investigating the relationships among elementary teachers' perceptions of the use of students' thinking, their professional noticing skills, and their teaching practices. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 118–128, 1 set. 2018.

LEHRER, R.; JASLOW, L.; CURTIS, C. Developing an understanding of measurement in the elementary grades. **Learning and teaching measurement**, v. 1, p. 100–121, 2003.

LESSER, L. M.; TCHOSHANOV, M. A. **The effect of representation and representational sequence on students' understanding**. Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**... In: PME - NA. Roanoke, Virginia: Virginia Tech, 2005.

MA, L. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teacher's Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States**. [s.l.] Lawrence Erlbaum Associates, Incorporated, 1999.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in classroom activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219–248, 1997.

MASON, J. On the structure of attention in the learning of mathematics. **Australian Mathematics Teacher**, v. 54, n. 4, p. 17–25, 2003.

MASON, J.; STEPHENS, M.; WATSON, A. Appreciating Mathematical Structure for All. **Mathematics Education Research Journal**, v. 21, n. 2, p. 10–32, 2009.

MCINTOSCH, A. et al. **Number sense in school mathematics: student performance in four countries**. Perth, Australia: Mathematics, Science & Technology Education Centre, 1997.

MIX, K. S.; SMITH, L. B.; CRESPO, S. Leveraging relational learning mechanisms to improve place value instruction. In: NORTON, A.; ALIBALI, M. W. (Eds.). . **Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education**. Research in Mathematics Education. Newark: Springer Nature Switzerland, 2019. p. 87–122.

MULLIGAN, J.; MITCHELMORE, M. Awareness of pattern and structure in early mathematical development. **Mathematics Education Research Journal**, v. 21, n. 2, p. 33–49, 2009.

MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; LIÑAN, M. DEL M.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. **Cadernos de Pesquisa (UFMA)**, v. 24, n. Especial, p. 4–19, 2017.

NCTM. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics - National Council of Teacher of Mathematics**Reston, VA, , 2000.

NORTON, A.; BOYCE, S. Provoking the construction of a structure for coordinating n+ 1 levels of units. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 40, p. 211–232, 2015.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. How large are teacher effects?. Educational evaluation and policy analysis. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237–257, 2004.

OUTHRED, L. N.; MITCHELMORE, M. C. Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 2, p. 144–167, 2000.

PAPE, S. J.; TCHOSHANOV, M. A. The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. **Theory Into Practice**, v. 40, n. 2, p. 118–127, 2001.

PARNORKOU, N. Dynamic measurement reasoning for area and volume. **For the Learning of Mathematics**, v. 40, n. 3, p. 9–13, 2020.

PARNORKOU, N. Exploring Students' Dynamic Measurement Reasoning About Right Prisms and Cylinders. **Cognition and Instruction**, p. 1–35, 2021.

PASSALAIGUE, D.; MUNIER, V. Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and mesaurement. **Educational Studies In Mathematics**, v. 89, p. 307–336, 2015.

PAYTON, S. Fostering mathematical connections in introductory linear algebra through adapted inquiry. **ZDM**, v. 51, n. 7, p. 1239–1252, 1 dez. 2019.

PIAGET, J. **Judgement and reasoning in the child**. MD: Littlefild, Adams, 1972.

POLICASTRO, M. et al. **Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teacher´s knowledge development**. Proceedings of CERME 11. **Anais**... In: CERME 11. Ultrecht, Holanda: 2019.

POLICASTRO, M.; RIBEIRO, M. Caracterização do Conhecimento Especializado do professor de matemática em tópicos de Medida. **RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, p. submetido, 2021a.

POLICASTRO, M.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. **Mathematics teacher's specialized knowledge on division: a focus on knowledge of topics and structures of mathematics**. Proceedings og the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**... In: PME 43. Pretoria: PME, 2019.

POLICASTRO, M. S. et al. Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In: CARLSEN, M.; ERFJORD, I.; HUNDELAND, P. S. (Eds.). . **Mathematics Education in Early Years**. NA. Switzerland: Springer, 2020. p. 263–279.

POLICASTRO, M. S.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. **Revista Espaço Plural**, v. 36, n. 1, p. 123–154, 2017.

POLICASTRO, M. S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. **Zetetiké**, v. 29, p. 1–24, 2021b.

REN, K.; GUNDERSON, E. A. Malleability of whole-number and fraction biases in decimal comparison. **Developmental Psychology**, v. 55, n. 11, p. 2263–2274, 2019.

RIBEIRO, A. J. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema. Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 42B, p. 535–557, 2012.

RIBEIRO, M. **O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática**. Tese de Doutorado em Educação Matemática—Espanha: Universidade de Huelva, 2010.

RIBEIRO, M. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma "eficaz navegação" entre representações. **Educação e Pesquisa**, v. 37, n. 2, p. 407–422, 2011.

RIBEIRO, M. et al. **Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self practice: the case of Carla.** (T. Dooley, G. Gueudet, Eds.)Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research ins Mathematics Education. **Anais**... In: CERME 10. Dublin: Institute of Education, 2017.

RIBEIRO, M. et al. Conhecimento Especializado do professor que ensina Matemática para atribuir sentido à divisão e ao algoritmo. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 19, p. 152–167, 2018.

RIBEIRO, M. et al. Conhecimento interpretativo de futuros professores da educação infantil e dos anos iniciais no âmbito da subtração - Potencialidades para melhorar a formação. **Roteiro**, v. 46, n. 1, p. 1–24, 2021.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. R. DE; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1–32, 2021.

RIBEIRO, M.; CALDATTO, M.; POLICASTRO, M. **A focus on the specificities teachers' knowledge for improving teacher education: the case of the MTSK conceptualization**. . In: THE 14TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION. Shangai: 2019.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1–24, 2021.

RIBEIRO, M.; MONTEIRO, R.; CARRILLO, J. Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. **Educación Matemática**, v. 22, n. 2, p. 93–108, 2010.

RIBEIRO, M.; POLICASTRO, M. **As Medidas e as especificidades do conhecimento do professor para que os alunos aprendam Matemática com significado**. 1ª ed. Curitiba: CRV, 2021. v. 2

RIZVI, N. F. Prospective teachers' knowledge: concept of division. **International Education Journal**, v. 8, n. 2, p. 377–392, 2007.

ROBINSON, K. M.; LEFEVRE, J.-A. The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 3, p. 409–428, 1 mar. 2012.

ROCHE, A.; CLARKE, D. M. Primary teachers' representations of division: assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential. **Mathematics Education Research Journal**, v. 25, p. 257–278, 2013.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 8, n. 3, p. 255–281, 2005.

SALDAÑA, J. **The Coding Manual for Qualitative Researchers**. London: SAGE Publications Ltd, 2009.

SANTAGATA, R.; LEE, J. Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: a study of novice elementary school teachers. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 24, n. 1, p. 33–60, 1 fev. 2021.

SARAMA, J. et al. Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. **ZDM Mathematics Education**, v. 43, p. 667–680, 2011.

SCHEINER, T. et al. What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. **International Journal of Science and Mathematics Education**, p. 1–20, 29 set. 2017.

SCHMIDT, W.; HOUANG, R.; COGAN, L. A Coherent Curriculum. **American Educator**, v. Summer, p. 1–18, 2002.

SCHOEN, R. C. et al. Developing an assessment minstrument to measure early elementary teachers' mathematical knowledge for teaching. **The Elementary School Journal**, v. 118, n. 1, p. 55–81, 2017.

SCHOENFELD, A. H. Models of the Teaching Process. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243–261, 2000.

SCHOENFELD, A. H. **How we think.** Nueva York: Routledge, 2010.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In: TIROSH, D.; WOOD, T. (Eds.). . **International handbook of mathematics teacher education.** Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008. v. 2: Tools and processes in mathematics teacher education.

SERRAZINA, M. DE L. O professor que ensina Matemática e a sua formação: uma experiência em Portugal. **Educação & Realidade**, v. 39, n. 4, p. 1051–1069, 2014.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, n. 15(2), p. 4–14, 1986.

SILVA, J. A. DA; BELLEMAIN, P. B.; BORBA, R. E. DE S. R. Análise de Itens da Provinha Brasil de Matemática referentes a Grandezas e Medidas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, 28 dez. 2016.

SKEMP, R. R. **The Pscychology of Learning Mathematics**. 1. ed. [s.l.] Routledge, 1987.

SKEMP, R. R. **Mathematics in the primary school**. London: Routledge Falmer, 1989.

SMITH, J. P.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; TEPPO, A. R. Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. **ZDM**, v. 43, n. 5, p. 617–620, 24 set. 2011.

SOSA, L. G. **Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato : un estudio de dos casos**. Tese de Doutorado em Educação Matemática—Espanha: Universidade de Huelva, 2011.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. From sharing to dividing: young children's understanding of division. **Developemental Science**, v. 5, n. 4, p. 452–466, 2002.

STAKE, R. Qualitative Case Studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). . **The sage Handbook of Qualitative Research**. 2ª ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2005. p. 443–466.

STEFFE, L. P. Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. **Fractions, ratio and proportional reasoning, Part B**, v. 22, n. 3, p. 237–295, 1 jan. 2003.

STEPHAN, M.; CLEMENTS, D. H. Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. In: CLEMENTS, D. H.; BRIGHT, G. (Eds.). . **Learning and Teaching Measurement: 2003 yearbook**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003. p. 3–16.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Grounded theory methodology: An overview**. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 1994.

SZILAGYI, J.; CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Young Children's Understandings of Length Measurement: Evaluating a Learning Trajectory. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 44, n. 3, p. 581–620, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics wiht particular reference to limits and continuity. **Educational Studes in Mathematics**, v. 12, p. 151–169, 1981.

TALLMAN, M. A.; FRANK, K. M. Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 23, p. 69–95, 2020.

TARDIFF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 15. ed. Petrópolis - RJ: Vozes, 2002.

TCHOSHANOV, M. A. Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 76, n. 2, p. 141–164, 1 mar. 2011.

TEPPO, A. R. Grounded Theory Methods. In: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (Eds.). . **Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015. p. 3–21.

TIMMERMAN, M. A. Making Connections: Elementary Teachers' Construction of Division Word Problems and Representations. **School Science and Mathematics**, v. 114, n. 3, p. 114–124, 2014.

TRIVILIN, L.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema. Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 51, p. 38–59, 2015.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organizing framework for developing and deepenening teacher´s knowledge. In: ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). . **Mathematical knowledge in teaching.** Dordrecht: Springer, 2011. v. 50p. 195–212.

ULRICH, C.; NORTON, A. Discerning a progression in conceptions of magnitude during children's construction of number. In: NORTON, A.; ALIBALI, M. W. (Eds.). . **Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education**. Research in Mathematics Education. [s.l.] Springer Nature Switzerland, 2019. p. 47–68.

VALE, C.; MCANDREW, A.; KRISHNAN, S. Connecting with the horizon: developing teachers' appreciation of mathematical structure. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, p. 193–212, 2010.

VALE, C.; MCANDREW, A.; KRISHNAN, S. Connecting with the horizon: developing teachers' appreciation of mathematical structure. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, p. 193–212, 2011.

VASCO, D. et al. **The characterisation of the specialised knowledge of a university lecturer in linear algebra**. Proceedings of Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. **Anais**... In: NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. Prague, Czech Republic: ERME, 2013.

VENKAT, H. et al. Architecture of mathematical structure. **For the Learning of Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 13–17, 2019.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Ed.). . **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2002. p. 65–81.

VOLLSTEDT, M.; REZAT, S. An introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. **Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education**, p. 81–100, 2019.

WEBER, K. Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. **For the learning of Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 14–17, 2002.

WEINBERG, S. L. **Is There a Connection between Fractions and Division? Students' Inconsistent Responses.** Actas of the Annual Meeting of the American Education research Association. **Anais**... In: THE ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATION RESEARCH ASSOCIATION. Seatle: Office Education Research and Improvement, 2001.

WILKINS, J. L. M.; NORTON, A. Learning progression toward a measurement concept of fractions. **International Journal of STEM Education**, v. 5, n. 1, p. 27, 27 jun. 2018.

WILSON, S.; SHULMAN, L.; RICHERT, A. 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. In: CALDERHEAD, J. (Ed.). . **Exploring teachers thinking**. Londres: Cassel, 1987. p. 104–124.

YIN, R. K. **Applications of the case study research**. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 1993.

YOUNG-LOVERIDGE, J. M.; BICKNELL, B. Making connections using multiplication and division contexts. In: KINNEAR, V.; MUIR, T.; LAI, M. Y. (Eds.). . **Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning, Early Mathematics Learning and Development,**. Brisbane, Autralia: Lyn D. English, 2018. p. 259–272.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. **Research in Mathematics Education**, v. 21, n. 3, p. 1–19, 2018.

ZASLAVSKY, O.; SHIR, K. Students' conceptions of a mathematical definition. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 4, p. 317–346, 2005.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, n. 2, p. 131–148, 1 out. 2008.

ZAZKIS, R.; MAMOLO, A. Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. **For the Learning of Mathematics**, v. 31, n. 2, p. 8–13, 2011.

ZENGIN, Y. Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. **Education and Information Technologies**, v. 24, n. 3, p. 2175–2194, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Tarefa discutida no módulo de Pensamento Numérico – foco em divisão

Divisão – Sentidos, representações, modelação e algoritmos: conexões

PARTE I

1. *O que é dividir*? Responda por você mesmo, enquanto professor(a) que ensina matemática e sem considerar um contexto escolar.
2. Imagine agora que você está no intervalo da aula na escola e um aluno lhe pergunta: "*O que é dividir?*" O que você responderia se esse aluno...
   a. Fosse do 2.º ano dos Anos Iniciais?
   b. Fosse do 6º ano dos Anos Finais?
3. Por que é comum afirmar que a divisão é a operação inversa da multiplicação?
4. Considere a expressão 6÷3 para responder as questões a seguir:

   a. Determine o resultado dessa operação e descreva os procedimentos e passos realizados para encontrar a resposta.
   b. Indique em que ano escolar você considera ser mais adequado começar a explorar a(s) ideia(s) de divisão?
   c. Suponha que você queira explorar com os seus alunos do 3.º ano o que é dividir e necessite preparar uma tarefa introdutória para este tópico matemático. Qual seria a tarefa que você iria propor e por quê? (Justifique sua resposta considerando os objetivos matemáticos a serem perseguidos com essa tarefa, bem como os recursos que iria utilizar). Aqui você deverá gravar um vídeo mostrando a exploração que faria com os alunos. Vocês poderão encenar a situação no grupo, de modo a que um dos integrantes represente o papel de professor e os demais, o papel de aluno. É importante, portanto, que os dois papéis sejam representados de forma mais próxima à realidade, ou seja, por meio de diálogos que efetivamente poderiam ocorrer numa sala de aula do 3.º ano.
   d. Na escola da professora Renata os professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais estão reunidos para traçar um percurso de ensino que considere a matemática numa perspectiva longitudinal. A professora Andrea, que trabalha com alunos de 5 anos, quer discutir a divisão com as crianças, mas deseja abordar esse tópico de forma diferente daquela que os colegas do 3.º ano disseram que iriam fazer – como partilha equitativa –, pautados pela BNCC.
      i. Será possível a professora Andrea conseguir discutir com os seus alunos de 5 anos esse tópico matemático, de modo a que as crianças comecem a compreender o que é dividir? Se for possível, proponha uma tarefa com a qual a professora possa fazer essa discussão. Se não for possível, justifique por quê.
      ii. Qual(quais) seria(m) a(s) principal(ais) ideia(s) sobre divisão que poderia(m) ser explorada(s) com crianças de 5 anos, de modo a que se possa criar bases para que estes alunos entendam o que é dividir?

  e. Formule 2 problemas distintos para os quais a resolução implique em efetuar a operação indicada.
  f. Resolva cada um dos problemas que formulou anteriormente apresentando, sempre que possível, duas representações distintas que permita atribuir significado à resposta e entender o processo/raciocínio seguido.
  g. Como considera que um aluno do 2.º ano resolveria cada um dos problemas formulados no item anterior? (Descreva os procedimentos e passos que esse aluno utilizaria para efetuar essa operação)

5. Resolva por si mesmo(a) (enquanto professor/a) as operações a seguir de DUAS formas **distintas**, descrevendo e justificando, em cada caso, o passo-a-passo do(s) procedimento(s) utilizados. Vocês devem gravar um vídeo para cada uma das resoluções, de modo a que os procedimentos e etapas de cada resolução sejam explicitadas (e verbalizadas).
  a. $536 \div 4 =$
  b. $536 \div 3{,}2 =$
  c. $0{,}536 \div 4 =$
  d. $258 \div 4 =$
  e. $11{,}9 \div 3{,}4 =$
6. Considerando as operações da questão 5, estabeleça uma ordem de dificuldade (a sua) para resolver. Apresente argumentos para justificar porque classificou as questões de acordo com essa ordem.

7. Ainda em relação às operações da questão 5, qual ou quais delas você considera que um aluno do 5.º ano teria mais dificuldades para resolver? Por quê?

APÊNDICE B - Tarefa discutida no módulo de Medida

Encontro I

A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos

Parte I

1) Responda individualmente cada uma das questões a seguir. Para isso, considere que você não está em um contexto escolar, ou seja, você não deverá responder às questões imaginando como faria para ensinar os objetos de conhecimento abordados nessas questões. Portanto, as suas respostas devem apenas revelar aquilo que você conhece sobre esses objetos de conhecimento. Você poderá utilizar palavras, desenhos, esquemas ou qualquer outro tipo de representação para explicitar o seu raciocínio.
   a) O que é medir?
   b) O que se pode medir?
   c) Como efetuamos uma medida?
   d) Com o que podemos medir?

2) Em qual ano/série ou etapa escolar você leciona? Considerando a série/ano ou etapa escolar em que leciona e sendo o foco principal em Medidas, que trabalho(s) você costuma desenvolver com os seus alunos? Apresente algum(ns) exemplo(s). Caso considere que não desenvolve nenhum tipo de trabalho com esse foco, comente os motivos que o(a) levam a não fazê-lo.

3) Quais são os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir?

4) Você considera que existem relações entre os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir e conceitos matemáticos de outros tópicos? Em caso afirmativo, especifique quais. Em caso negativo, explique o porquê.

Tarefa: Rotação por estações – Vamos medir?

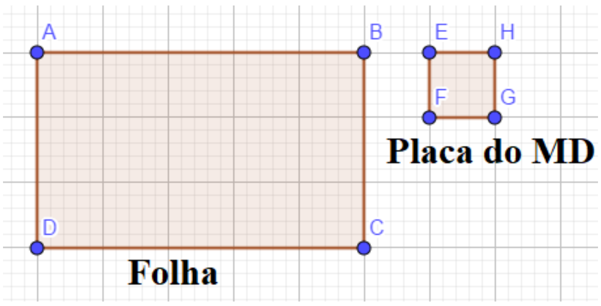
Orientações para o professor: As estações deverão ser montadas sem que os alunos vejam os materiais em cada uma delas. É preferível que haja algum tipo de material (papelão) que possa bloquear a visão dos estudantes do que há em cada uma das estações.

Material para a montagem das estações

Estação 1: um pedaço de barbante (ou qualquer outro material que se assemelhe a um fio) de comprimento "x" e um paralelepípedo com dimensões x/10, x/5 e x/2.

Tira de papel da estação 1: Meça o comprimento do fio usando o paralelepípedo. Registre a sua medição na folha.

Estação 2: Uma placa do material dourado e uma folha cuja área seja equivalente a 5x3 placas (maior superfície da placa)



Tira de papel da estação 2: Meça a folha usando a placa. Registre a sua medição na folha.

Estação 3: Uma balança de pratos (montagem pode ser adaptada com cabide, fios e pratinhos de jardinagem); uma balança digital; uma placa do material dourado e diversos objetos idênticos (em quantidade suficiente para que a massa da placa possa ser comparada com a massa de um desses objetos quando o procedimento for empregado com a balança de pratos)

Tira de papel da estação 3: Meça a massa da placa do material dourado usando os objetos. Registre a sua medição na folha.

Estação 4: Um recipiente qualquer, um copinho (ou qualquer outro recipiente menor que o primeiro) e uma garrafa d'agua cheia. No recipiente, deve haver uma marcação para determinar a quantidade de água a ser depositada no interior – sugestão: a marca no recipiente pode ser a que determina que a quantidade de água a ser depositada corresponde a três unidade do copinho.

Tira de papel da estação 4: Meça a capacidade de água do recipiente até a marca indicada, usando o copinho.

Tarefa 1: Rotação por estações – Vamos medir?

Você está diante de um conjunto de quatro estações de trabalho. Em cada estação, você encontrará uma tira de papel contendo uma instrução. Você deverá seguir as instruções contidas nessa tira de papel, sem trocar qualquer tipo de informação com os seus colegas. Depois de executar o que se pede na tira de papel, você seguirá para a próxima estação, procedendo da mesma forma, até a última estação.

1. Agora que você já finalizou o trajeto pelas estações, solicite a ficha de registro ao(à) professor(a). Preencha a ficha de acordo com as instruções a seguir

Instruções para preenchimento da ficha:
Em cada coluna da ficha você deve explicar o seu raciocínio a partir de uma descrição com o máximo de detalhes que conseguir. Você pode fazê-lo usando esquemas, desenhos, palavras, cálculos,...

2. Sente-se com mais dois colegas e, no trio, comparem e discutam sobre os registros que cada um de vocês efetuou em sua própria ficha.
   a. Quais foram as semelhanças e as diferenças nos registros de cada um? Por que vocês acham que essas semelhanças e essas diferenças ocorreram?
   b. Considerando os procedimentos empregados para medir em cada uma das estações, vocês acham que são semelhantes ou distintos? Especifique as semelhanças (e/ou diferenças) que consideraram.
   c. Considerem a unidade de medida utilizada na estação 1. Vocês acham que é possível efetuar as medições propostas nas estações 2, 3 e 4 utilizando essa unidade de medida? Se sim, expliquem, em cada caso, como fariam essas medições. Caso vocês considerem que não seja possível efetuar essas medições, apresentem justificativas dos porquês consideram tal impossibilidade.

5) Considera a tarefa "**Rotação por estações – Vamos medir?**", conforme apresentada anteriormente:
   a) Resolva a tarefa por si mesmo, enquanto professor, mas sem considerar que tenha a necessidade de desenvolver essa tarefa com os seus alunos. Isso significa que você deve registrar os seus próprios raciocínios, não se apoiando nas possíveis produções que seus alunos (ou alunos que você imagina) poderiam fornecer.

   b) Que conceitos, fundamentos e propriedades matemáticas considera que podem ser discutidos/abordados com os alunos a partir dessa tarefa? Apresente sua resposta fornecendo exemplos que podem estar baseados em situações da sua prática letiva. Nesse caso, especifique para qual ano/etapa educativa você leciona (ou em qual ano/etapa educativa você está se baseando).

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

CONHECIMENTO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS NO ÂMBITO DAS CONEXÕES MATEMÁTICAS

Milena Soldá Policastro

Número do CAAE: (18716719.5.00008142)

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Esta pesquisa tem como foco de estudo o conhecimento de professores dos Anos Iniciais no âmbito das conexões matemáticas. Com o intuito de contribuir para ampliar a compreensão de dimensões do conhecimento do professor relativamente às conexões matemática, busca-se identificar e descrever algumas categorizações de conexões matemáticas que os professores elaboram ao participar de um Programa de Formação Continuada (PFC) que tem por objetivo problematizar e desenvolver os conhecimentos dos professores sobre conexões matemáticas.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: participar do grupo de formação continuada (PFC) onde serão discutidas tarefas com foco em temas matemáticos buscando estabelecer conexões entre eles (todos os encontros são gravados em áudio e vídeo). O grupo de formação terá um total de 8 encontros, todos realizados na dependência da escola onde você atua.

Os dados desta pesquisa serão armazenados em arquivos de áudio e vídeo, além das digitalizações das tarefas resolvidas nos encontros de formação, pelo período de 5 anos após o final da pesquisa, de acordo com a Res. CNS 510/16.

Desconfortos e riscos:

Não há riscos previsíveis.

Benefícios:

Como este estudo será desenvolvido em um contexto de formação de professores, o trabalho a ser desenvolvido durante os encontros poderá contribuir para a sua formação e desenvolvimento profissionais. Além disso, em termos coletivos, este estudo deverá contribuir para uma ampliação dos aspectos que se relacionam com o conhecimento do professor que ensina matemática, devendo retornar para a comunidade em forma de conhecimento sobre o tema, com possibilidade de se incentivar novas pesquisas na área.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento, antes, durante ou até o término da pesquisa, os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa em danos decorrentes da pesquisa.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação identificada será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Como este estudo prevê a coleta de informações por meio de áudio e vídeo e esses dados deverão, a qualquer tempo, ser transcritos **para fins exclusivamente de análise e sem divulgação**, solicita-se a sua autorização para esse procedimento.

Ressarcimento e Indenização:

Esse estudo não prevê qualquer ônus ao participante. No entanto, você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Milena Soldá Policastro, Rua Bertrand Russel, 801 (CEMPEM), fone (11) 98649-8750, e-mail: mitapolicastro@gmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 as 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep-chs@reitoria.unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: ____

____ *Data:* ____/_____/______.
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ *Data:* ____/_____/______.
(Assinatura do pesquisador)