



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

HERNÁN ROBERTO AGAMEZ URUETA

**Vazão máxima no contorno para a estabilidade
da resolução numérica das Equações de
Saint-Venant**

Campinas

2021

Hernán Roberto Agamez Urueta

Vazão máxima no contorno para a estabilidade da resolução numérica das Equações de Saint-Venant

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: José Mario Martínez Pérez

Coorientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Hernán Roberto Agamez Urueta e orientada pelo Prof. Dr. José Mario Martínez Pérez.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ag14v Agamez Urueta, Hernán Roberto, 1984-
Vazão máxima no contorno para a estabilidade da resolução numérica das equações de Saint-Venant / Hernán Roberto Agamez Urueta. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: José Mario Martínez Pérez.
Coorientador: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Saint-Venant. 2. Análise numérica. I. Martínez Pérez, José Mario, 1948-. II. Ehrhardt, Maria Aparecida Diniz, 1956-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Maximum boundary flow for the stability of the numerical resolution of the Saint-Venant equations

Palavras-chave em inglês:

Saint-Venant equations

Numerical analysis

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maria Aparecida Diniz Ehrhardt [Coorientador]

Maicon Ribeiro Correa

Ernesto Julián Goldberg Birgin

Data de defesa: 08-11-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9069-8478>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/6137016661827950>

**Dissertação de Mestrado defendida em 08 de novembro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA

Prof(a). Dr(a). ERNESTO JULIÁN GOLDBERG BIRGIN

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,
e ao meu irmão.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, por ter me dado coragem para encarar este desafio e tê-lo feito sem desistir apesar das muitas dificuldades no meio do caminho.

Agradeço infinitamente aos meus pais, Hernán e Rosa, e ao meu irmão Alberto, os grandes responsáveis pela minha formação, pelo seu amor infinito, incentivo, apoio e confiança em mim; eles são e serão o motor da minha vida e sem o imenso apoio deles esta conquista não teria sido possível.

Ao meu orientador José Mario Martínez e a minha co-orientadora Maria Aparecida Diniz Ehrhardt, por ter aceitado me orientar, e tê-lo feito da melhor maneira, pela sua paciência, ensinamentos, dedicação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores membros da banca do meu exame de qualificação, Dr. João Frederico C. A. Meyer, Dr. Maicon R. Correa e Lúcio T. Santos, e também aos professores membros da banca da defesa da minha dissertação, Dr. Ernesto Birgin, Dr. Maicon R. Correa, Dr. João Frederico C. A. Meyer e Dr. Luis Felipe Bueno. Agradeço também aos demais professores do IMECC por terem contribuído na minha formação acadêmica e pessoal.

À UNICAMP e a todas suas dependências, especialmente ao IMECC por fazer parte importantíssima deste processo, disponibilizando recursos, espaços físicos e sempre facilitando a vida dos seus alunos, professores e funcionários.

Gostaria também de agradecer a todas aquelas pessoas que encontrei nesta caminhada, das quais tenho muitas lembranças, mas é impossível colocar todos os nomes delas aqui, pois a quantidade de desvios pelos quais passamos é imensa, e às vezes esses desvios são tão pequenos que se tornam imperceptíveis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“De mí campo aprendí, que no se deja de cosechar
solo porque una siembra no salió.
(Nairo Quintana, Ciclista colombiano.)*

Resumo

As equações de Saint-Venant costumam ser usadas para descrever o comportamento de fluidos em canais naturais ou artificiais; sua resolução numérica depende da caracterização geométrica do canal considerado, das condições iniciais, da inclinação do solo e do chamado *Coefficiente de Manning*.

Este trabalho tem seu foco na vazão máxima que podemos colocar na condição de contorno nas equações de Saint-Venant quando elas são resolvidas numericamente, ou seja, queremos saber até onde é possível confiar nestas equações quando a condição de contorno sobre a vazão é modificada. Neste caso a condição de contorno é expressa pelo crescimento da vazão como função do tempo. Para tal fim, será usado um método explícito, mais exatamente um esquema difusivo tipo Lax-Friedrichs, e seguidamente, modificações na condição de contorno serão feitas, o que permitirá tirar conclusões depois de vários experimentos numéricos.

Palavras-chave: Equações de Saint-Venant. Método explícito. Esquema difusivo tipo Lax-Friedrichs.

Abstract

Saint-Venant equations are often used to describe the behavior of fluids in natural or artificial channels; its numerical resolution depends on the geometrical characterization of the considered channel, the initial conditions, the slope of the soil and the so-called *Manning Coefficient*.

This work focuses on the maximum flow that we can put in the boundary condition in the Saint-Venant equations when they are solved numerically, that is, we want to know how far you can rely on these equations when the boundary condition on the flow is modified. In this case the boundary condition is expressed by the flow growth as a function of time. For this purpose, an explicit method will be used, more precisely a diffusion scheme of the Lax-Friedrichs type, and then modifications to the condition of boundary will be made, which will allow conclusions to be drawn after several numerical experiments.

Keywords: Saint-Venant equations. Explicit method. Diffusion scheme of the Lax-Friedrichs type.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Corte transversal de um canal	29
Figura 2 – Grade computacional	33
Figura 3 – Condição de contorno à esquerda	36
Figura 4 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$	39
Figura 5 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$	39
Figura 6 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920 s$	40
Figura 7 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880 s$	40
Figura 8 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840 s$	40
Figura 9 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800 s$	41
Figura 10 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760 s$	41
Figura 11 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720 s$	41
Figura 12 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680 s$	42
Figura 13 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640 s$	42
Figura 14 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600 s$	42
Figura 15 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560 s$	43
Figura 16 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520 s$	43
Figura 17 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480 s$	43
Figura 18 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$	44
Figura 19 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m$	45
Figura 20 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240 m$	45
Figura 21 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480 m$	45
Figura 22 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720 m$	46
Figura 23 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960 m$	46
Figura 24 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200 m$	46
Figura 25 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440 m$	47
Figura 26 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680 m$	47
Figura 27 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920 m$	47
Figura 28 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$	48
Figura 29 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$	48
Figura 30 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$	48
Figura 31 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880 m$	49
Figura 32 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000 m$	49
Figura 33 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$	50
Figura 34 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$	50
Figura 35 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920 s$	51
Figura 36 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880 s$	51

Figura 37 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840 s$	51
Figura 38 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800 s$	52
Figura 39 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760 s$	52
Figura 40 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720 s$	52
Figura 41 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680 s$	53
Figura 42 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640 s$	53
Figura 43 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600 s$	53
Figura 44 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560 s$	54
Figura 45 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520 s$	54
Figura 46 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480 s$	54
Figura 47 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$	55
Figura 48 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m$	56
Figura 49 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240 m$	56
Figura 50 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480 m$	56
Figura 51 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720 m$	57
Figura 52 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960 m$	57
Figura 53 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200 m$	57
Figura 54 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440 m$	58
Figura 55 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680 m$	58
Figura 56 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920 m$	58
Figura 57 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$	59
Figura 58 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$	59
Figura 59 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$	59
Figura 60 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880 m$	60
Figura 61 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000 m$	60
Figura 62 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$	61
Figura 63 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$	61
Figura 64 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920 s$	62
Figura 65 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880 s$	62
Figura 66 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840 s$	62
Figura 67 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800 s$	63
Figura 68 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760 s$	63
Figura 69 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720 s$	63
Figura 70 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680 s$	64
Figura 71 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640 s$	64
Figura 72 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600 s$	64
Figura 73 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560 s$	65
Figura 74 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520 s$	65
Figura 75 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480 s$	65

Figura 76 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$	66
Figura 77 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m$	67
Figura 78 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240 m$	67
Figura 79 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480 m$	67
Figura 80 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720 m$	68
Figura 81 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960 m$	68
Figura 82 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200 m$	68
Figura 83 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440 m$	69
Figura 84 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680 m$	69
Figura 85 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920 m$	69
Figura 86 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$	70
Figura 87 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$	70
Figura 88 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$	70
Figura 89 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880 m$	71
Figura 90 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000 m$	71
Figura 91 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$	72
Figura 92 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$	72
Figura 93 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920 s$	73
Figura 94 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880 s$	73
Figura 95 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840 s$	73
Figura 96 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800 s$	74
Figura 97 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760 s$	74
Figura 98 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720 s$	74
Figura 99 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680 s$	75
Figura 100 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640 s$	75
Figura 101 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600 s$	75
Figura 102 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560 s$	76
Figura 103 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520 s$	76
Figura 104 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480 s$	76
Figura 105 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$	77
Figura 106 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m$	78
Figura 107 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240 m$	78
Figura 108 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480 m$	78
Figura 109 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720 m$	79
Figura 110 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960 m$	79
Figura 111 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200 m$	79
Figura 112 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440 m$	80
Figura 113 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680 m$	80
Figura 114 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920 m$	80

Figura 115–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$	81
Figura 116–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$	81
Figura 117–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$	81
Figura 118–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880 m$	82
Figura 119–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000 m$	82
Figura 120–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m, 1680 m, 3000 m$.	83
Figura 121–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m, 1680 m, 3000 m$.	83
Figura 122–Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0 m, 1680 m, 3000 m$.	83
Figura 123–Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$. . .	84
Figura 124–Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$. . .	84
Figura 125–Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$. . .	84

Lista de tabelas

Tabela 1 – Vazões máximas atingidas.	85
--	----

Lista de símbolos

\mathbb{R}^n	Conjunto de todas as n -listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ cujas coordenadas x_1, \dots, x_n são números reais
Ω	Conjunto aberto de \mathbb{R}^n
$(f)_{x_i}$	Derivada parcial da função f em relação à i -ésima variável
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Derivada parcial da função f em relação à i -ésima variável
U_j^n	Refere-se ao valor da função de aproximação U na j -ésima seção do canal no n -ésimo nível de tempo

Sumário

	INTRODUÇÃO	17
1	PRELIMINARES	21
1.1	Equações hiperbólicas	22
1.2	Equação de advecção	22
1.3	Difusão	23
1.4	Métodos numéricos	24
1.4.1	Um método instável	25
1.4.2	Método de Lax-Friedrichs	25
1.4.3	Um esquema difusivo	26
1.4.3.1	Efeito difusivo	26
1.4.3.2	Estabilidade	27
2	EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT	28
2.1	Equações de Saint-Venant	28
2.2	Dedução das equações de Saint-Venant	30
3	MODELAGEM NUMÉRICA	33
3.1	Estabelecendo o problema	34
3.1.1	Condições iniciais	34
3.1.2	Discretização das equações	35
3.1.3	Condição de contorno à esquerda	36
4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	38
4.1	Alterações na vazão	39
4.2	Vazão máxima e instabilidade	50
4.3	Trocando o k	61
4.4	Trocando o coeficiente de ponderação α	72
4.5	Seção inicial, média e final do canal.	83
4.6	Instante do tempo inicial, médio e final	84
5	CONCLUSÕES	85
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A – DIFERENÇAS FINITAS	88

Introdução

A palavra *hidráulica* provem dos termos gregos *hydro* que significa água, e *aulos* que significa condução; e é a parte da Física que se dedica a estudar o comportamento dos fluidos seja em repouso ou em movimento; através do seu estudo é possível conhecer as leis que regem o transporte, a conversão de energia, a regulação e o controle dos fluidos agindo sob efeito de variáveis como pressão, vazão, temperatura, viscosidade, etc. O estudo da hidráulica pode ser dividido em três partes: a *hidrostática* que se dedica em compreender o comportamento dos fluidos em repouso; a *hidrocinética*, que estuda os fluidos em movimento e a *hidrodinâmica*, que leva em consideração as variáveis envolvidas no escoamento dos fluidos, como forças da gravidade, da pressão, da viscosidade, da compressibilidade e outras.

De modo geral, os escoamentos de fluidos estão sujeitos a determinadas condições gerais, princípios e leis da Dinâmica e à teoria da Turbulência. No caso dos líquidos, em particular, da água, a metodologia da abordagem consiste em agrupar os escoamentos em determinados tipos, cada um dos quais com suas características comuns, e estudá-los por métodos próprios.

Na classificação hidráulica (PORTO, 2006), os escoamentos recebem diversas conceituações em função de suas características, tais como: laminar, turbulento, unidimensional, bidimensional, rotacional, irrotacional, permanente, variável, uniforme, variado, livre, forçado, fluvial, torrencial, etc. O escoamento é classificado como *laminar* quando as partículas movem-se ao longo de trajetórias bem definidas, em lâminas ou camadas, cada uma delas preservando sua identidade no meio. Neste tipo de escoamento, é preponderante a ação da viscosidade do fluido no sentido de amortecer a tendência de surgimento da turbulência. Em geral, este escoamento ocorre em baixas velocidades e ou em fluidos muito viscosos.

Como na hidráulica o fluido predominante é a água, cuja viscosidade é relativamente baixa, os escoamentos mais frequentes são classificados como *turbulentos*. Neste caso as partículas do líquido movem-se em trajetórias irregulares, com movimento aleatório. Esta é a situação mais comum nos problemas práticos da Engenharia.

O escoamento *unidimensional* é aquele cujas propriedades, como pressão, velocidade, massa específica, etc., são funções exclusivas de somente uma coordenada espacial

e do tempo. Quando se admite que as partículas escoem em planos paralelos segundo trajetórias idênticas, não havendo variação do escoamento na direção normal aos planos, o escoamento é dito *bidimensional*. Se as partículas do líquido, em uma certa região, possuírem rotação em relação a um eixo qualquer, o escoamento será *rotacional*; caso contrário será *irrotacional*.

No caso em que as propriedades e as características hidráulicas, em cada ponto do espaço, forem invariantes no tempo, o escoamento é classificado de permanente; caso contrário, é dito *não permanente* ou *variável*. Escoamento *uniforme* é aquele no qual o vetor velocidade, em módulo, direção e sentido, é idêntico em todos os pontos, em um instante qualquer. No escoamento de um fluido real, é comum fazer uma extensão deste conceito, mesmo que, pelo princípio da aderência, o vetor velocidade seja nulo nos contornos sólidos em contato com o fluido. De forma mais prática, o escoamento é considerado uniforme quando todas as seções transversais do conduto forem iguais e a velocidade média em todas as seções, em um determinado instante, for a mesma. Se o vetor velocidade variar de ponto a ponto, em um instante qualquer, o escoamento é dito *não uniforme* ou *variado*.

O escoamento é classificado em *superfície livre*, ou simplesmente *livre* se, qualquer que seja a seção transversal, o líquido estiver sempre em contato com a atmosfera. Esta é a situação do escoamento em rios, córregos ou canais. Como características deste tipo de escoamentos, pode-se dizer que ele se dá necessariamente pela ação da gravidade e que qualquer perturbação em trechos localizados pode dar lugar a modificações na seção transversal da corrente em outros trechos.

O escoamento em *pressão* ou *forçado* ocorre no interior das tubulações, ocupando integralmente sua área geométrica, sem contato com o meio externo. A pressão exercida pelo líquido sobre a parede da tubulação é diferente da atmosférica e qualquer perturbação do regime, em uma seção, poderá dar lugar a alterações de velocidade e pressão nos diversos pontos do escoamento, mas sem modificações na área transversal. Tal escoamento pode ocorrer pela ação da gravidade ou através de bombeamento. O escoamento turbulento livre costuma ser subdividido em regime *fluvial*, quando a velocidade média, em uma seção, é menor que um certo valor crítico, e regime *torrencial*, quando a velocidade média, em uma seção, é maior que um certo valor crítico.

Neste trabalho estudaremos um problema do tipo: escoamento variável em um canal artificial. O objetivo é usar um método explícito, mais exatamente usando uma abordagem de diferenças finitas clássica (Apêndice A), (BURDEN, 2011), (RUGGIERO; LOPES, 1996), similar ao esquema difusivo do tipo Lax-Friedrichs (LEVEQUE, 2007) e (LEVEQUE, 2002) para resolver numericamente as equações de Saint-Venant (MARTÍ-

NEZ, 2021) e investigar qual o valor máximo da vazão que podemos colocar na condição de contorno e que faz sentido no problema. Ao final ilustramos o comportamento de características importantes como são, a vazão, a profundidade e a área transversal em diferentes cenários.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: o capítulo Preliminares (Capítulo 1), tomado de (LEVEQUE, 2007) faz uma revisão de conceitos básicos (EVANS, 1997), (BURDEN, 2011), (IÓRIO, 2010), (RUGGIERO; LOPES, 1996) que serão usados no texto; aqui olhamos para a classificação das equações diferenciais parciais no que se refere à equação de segunda ordem em duas variáveis independentes da forma

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g,$$

onde a, b, c, d, e, f e g são funções dadas e $u = u(x, y)$ é a função incógnita, para focar nossa atenção nas equações parabólicas, mais exatamente falando na equação de advecção, a qual é o caso mais simples de uma equação hiperbólica com coeficientes constantes. A equação de advecção será usada para aplicar nosso esquema difusivo e analisar algumas características dele, bem como descobrir algumas propriedades em princípio aplicadas a essa equação.

Em seguida descrevemos as equações de Saint-Venant (MARTÍNEZ, 2021) as quais são o objetivo principal de estudo de este documento (Capítulo 2). As equações de Saint-Venant serão discretizadas usando um método explícito, mais exatamente uma abordagem de diferenças finitas clássica similar ao esquema difusivo do tipo Lax-Friedrichs (PORTO, 2006).

No capítulo Modelagem Numérica, Capítulo 3, descrevemos o método numérico que usaremos para resolver as equações de Saint-Venant, como também a necessidade de calcular as condições iniciais, as quais, no nosso caso, são para um canal retangular. Casos mais gerais aplicados a canais naturais onde a forma geométrica é desconhecida são estudados em (MARTÍNEZ, 2021); também mostramos a forma como são discretizadas as equações de Saint-Venant, lembrando que usaremos um método explícito. Finalmente estabelecemos a condição de contorno à esquerda sobre a vazão, tópico importante para os experimentos numéricos.

No capítulo seguinte, de experimentos numéricos (Capítulo 4) usamos como ponto de partida o exemplo 14.9 do livro de (PORTO, 2006). Logo depois, fizemos várias mudanças nessa situação inicial para decidir quando as equações de Saint-Venant, na prática, se mostram confiáveis ao se colocar uma condição de contorno sobre a vazão. Nesta seção ilustramos o comportamento da vazão, a profundidade e a área transversal molhada em diferentes cenários.

Finalmente, na última parte do documento ([Capítulo 5](#)) serão apresentadas as conclusões e perspectivas sobre trabalhos futuros.

1 PRELIMINARES

Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes x, y, z, t, \dots e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t, \dots)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes x_1, \dots, x_n é uma equação da forma (IÓRIO, 2010), (EVANS, 1997)

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (1.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u = u(x)$ é uma função que queremos determinar. A *ordem* de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação; por exemplo, a ordem da equação (1.1) é k se F , como função de alguma das derivadas de ordem k , é não constante.

Uma EDP é dita *linear* se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário a EDP é dita não linear. Usualmente se classificam apenas as EDP's lineares de segunda ordem. A forma geral de tal EDP em n variáveis independentes é dada por

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = d(x),$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $a_{ij}, b_i, c, d : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Eventualmente pode-se ter $x_n = t$ quando se tratar de fenómenos que evoluem no tempo.

Na maioria dos livros clássicos (EVANS, 1997), (LEVEQUE, 2007), (IÓRIO, 2010) a classificação que é dada sobre as EDP's lineares de segunda ordem em duas variáveis independentes x, y é da forma

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (1.2)$$

onde a, b, c, d, e, f e g são funções dadas, Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função por determinar. Além disso, se os coeficientes a, b e c forem constantes, pode-se classificar as EDP's através das seguintes relações que dependem do discriminante $b^2 - 4ac$. Assim, diremos que a equação é

- elíptica, se $b^2 - 4ac < 0$;
- parabólica, se $b^2 - 4ac = 0$;
- hiperbólica, se $b^2 - 4ac > 0$.

Geralmente, as equações elípticas descrevem fenômenos em regime permanente (steady-state), as equações parabólicas descrevem fenômenos difusivos e as equações hiperbólicas descrevem fenômenos ondulatórios (LEVEQUE, 2007). Os exemplos canônicos são o Problema de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = g$ para um problema elíptico, a equação de calor $u_t = ku_{xx}$ (com $k > 0$) para um problema parabólico e a equação de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para um problema hiperbólico.

Nos casos parabólico e hiperbólico, t é usado em lugar de y , uma vez que esses são problemas tipicamente dependentes do tempo. Essas equações descrevem diferentes tipos de fenômenos e requerem diferentes técnicas para sua solução (tanto analiticamente quanto numericamente), e por isso é conveniente ter nomes para classes de equações que exibem as mesmas características gerais. Outras equações têm algumas das mesmas características, e o esquema de classificação pode ser estendido além de (1.2), a qual é chamada de forma linear de segunda ordem.

1.1 Equações hiperbólicas

De maneira geral consideraremos uma forma relacionada de equações hiperbólicas conhecidas como sistemas hiperbólicos de primeira ordem.

O problema linear em uma dimensão espacial tem a forma

$$u_t + Au_x = 0 \tag{1.3}$$

onde $u(x, t) \in \mathbb{R}^s$ e A é uma matriz $s \times s$. O problema é chamado *hiperbólico* se A tiver valores próprios reais e é *diagonalizável*, i.e., tem um conjunto completo de autovetores linearmente independentes. Essas condições nos permitem ver a solução em termos de propagação de ondas e, de fato, os sistemas hiperbólicos normalmente surgem de processos físicos que dão movimento de onda ou transporte advectivo. O exemplo mais simples de uma equação hiperbólica com coeficientes constantes é a equação de advecção

$$u_t + au_x = 0, \tag{1.4}$$

onde u é a velocidade de advecção e a é uma constante.

1.2 Equação de advecção

Se uma substância é simplesmente transportada em um fluxo a alguma velocidade constante a , então a função de fluxo é

$$f(u) = au.$$

A densidade local $u(x, t)$ multiplicada pela velocidade dá o fluxo do material no ponto x anterior.

Como a massa total em $[x_1, x_2]$ muda apenas nos pontos finais, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)), \quad (1.5)$$

e assumindo que u e f são funções suaves, a equação (1.5) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx,$$

ou equivalentemente

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) \right] dx = 0,$$

e dado que a integral deve ser zero para todos os valores entre x_1 e x_2 , segue-se que o integrando deve ser igual a zero. Finalmente, isso dá a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0, \quad (1.6)$$

a qual é chamada de *Lei da Conservação*.

Para o caso considerado nesta seção, $f(u) = au$ com a constante e a equação (1.6) torna-se a equação (1.4). Esta equação requer condições iniciais e possivelmente condições de fronteira para a obtenção sua solução.

O caso mais simples é o *Problema de Cauchy* em $-\infty < x < \infty$, também chamado de problema puro de valor inicial, onde necessariamente devemos especificar o dado inicial

$$u(x, 0) = \eta(x),$$

onde η é uma função dada. E facilmente podemos verificar que

$$u(x, t) = \eta(x - at) \quad (1.7)$$

satisfaz a equação (1.4) .

1.3 Difusão

Suponha que o fluido no tubo não esteja fluindo e tenha velocidade zero, então de acordo com a equação (1.4), $u_t = 0$ e assim o dado inicial $\eta(x)$ não muda com o tempo (LEVEQUE, 2007). No entanto, se não for constante no espaço, na verdade tenderá a

mudar lentamente devido à difusão molecular. A velocidade a deve realmente ser pensada como uma *velocidade média*, a velocidade média que aproximadamente as 10^{23} moléculas que uma gota de fluido tem, mas as moléculas individuais estão pulando em direções diferentes e, portanto, as moléculas da substância que estamos rastreando tendem a se espalhar no fluido ambiente, assim como uma gota de tinta se espalha na água.

Existirá uma tendência de movimento de regiões onde a densidade é grande para regiões onde é menor, de fato, pode ser mostrado que o fluxo (em uma dimensão) é proporcional a $-u_x$. O fluxo em um ponto x agora depende do valor de u_x nesse ponto, ao invés do valor de u escrevemos

$$f(u_x) = -ku_x, \quad (1.8)$$

onde k é chamado de Coeficiente de Difusão. A relação (1.8) é conhecida como *Lei de Fick*. Usando o fluxo em (1.6) obtemos

$$u_t = ku_{xx},$$

a qual é chamada de *Equação de Difusão*.

1.4 Métodos numéricos

Nesta seção consideramos principalmente a equação de advecção

$$u_t + au_x = 0, \quad (1.9)$$

onde a é uma constante, e alguns métodos numéricos usados na sua resolução. Isto será suficiente para ilustrar muitas (embora certamente não todas) das questões que surgem na resolução numérica de equações hiperbólicas.

Como já foi dito, para o problema de Cauchy é necessário o dado inicial

$$u(x, 0) = \eta(x),$$

onde η é uma função dada e também sabemos que a solução exata é dada por

$$u(x, t) = \eta(x - at).$$

No entanto, muitos dos problemas que surgem mais geralmente na discretização de equações hiperbólicas não são tão simples, mas, de alguma forma, essas outras discretizações podem ser mais facilmente vistas usando as ferramentas que já foram usadas na resolução numérica da equação (1.9).

1.4.1 Um método instável

A primeira abordagem que vamos considerar na discretização da equação (1.9) faz uso de diferença centrada no espaço

$$u_x(x, t) = \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

onde $h = \Delta x$, e a diferença avançada no tempo

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + \mathcal{O}(h^2),$$

onde $k = \Delta t$.

Assim, essas aproximações produzem o método numérico

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = -\frac{a}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

o qual pode ser escrito como

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \quad (1.10)$$

Infelizmente, na prática, este método não é útil por causa de considerações de estabilidade, na página 186 em (LEVEQUE, 2007), mas podemos fazer pequenas modificações e obter métodos mais úteis.

1.4.2 Método de Lax-Friedrichs

Substituindo U_j^n no lado direito do (1.10) pela média $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$, obtemos o Método de Lax-Friedrichs

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \quad (1.11)$$

Devido a considerações de precisão, na página 186 em (LEVEQUE, 2007), este método não é comumente usado na prática, mas é útil para ilustrar e analisar alguns problemas de estabilidade de métodos mais gerais que surgem na realidade.

O método de Lax-Friedrichs é estável desde que, na página 186 em (LEVEQUE, 2007),

$$\left| \frac{ak}{h} \right| \leq 1. \quad (1.12)$$

A restrição (1.12) é consistente com o que escolheríamos de qualquer maneira com base em considerações de precisão, na página 186 em . Esta é uma diferença fundamental entre equações hiperbólicas e equações parabólicas de forma mais geral e explica o fato de que as equações hiperbólicas são normalmente resolvidas com métodos explícitos, enquanto a solução eficiente de equações parabólicas geralmente requer métodos implícitos (LEVEQUE, 2007). Esquemas explícitos e implícitos serão brevemente explicados no Capítulo 3.

1.4.3 Um esquema difusivo

Na resolução de problemas transitórios em escoamentos livres, há vários métodos que seguem esquemas explícitos de aproximação, entre eles *esquemas difusivos*. No esquema difusivo que usaremos, as seguintes aproximações são adotadas:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_j^{n+1} - [\alpha \cdot U_j^n + (1 - \alpha) \cdot (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)/2]}{k}, \quad (1.14)$$

onde $h = \Delta x$, $k = \Delta t$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ é um parâmetro de ponderação chamado de *fator de relaxação*. Note que neste método poderíamos usar $\alpha = 1$, devido que este é um esquema difusivo do tipo Lax-Friedrichs que pode misturar conceitos de métodos Upwind, página 210 em (LEVEQUE, 2007).

Antes de aplicar este esquema difusivo às equações de Saint-Venant, que abordaremos mais à frente, usaremos a equação de advecção para descobrir algumas propriedades e analisar o comportamento deste esquema difusivo. Desta forma, neste método aplicado à equação $u_t + au_x = 0$, vamos substituir na expressão (1.10) o termo

$$U_j^n \quad \text{por} \quad \alpha U_j^n + (1 - \alpha) \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2},$$

em que $0 \leq \alpha \leq 1$. Note que, para $\alpha = 1$, obtemos (1.10) (o método instável) e para $\alpha = 0$ obtemos (1.11) (o método de Lax-Friedrichs).

Dado que

$$\begin{aligned} \alpha U_j^n + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} \right) &= \alpha U_j^n + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right) + (1 - \alpha) U_j^n \\ &= \cancel{\alpha U_j^n} + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right) + U_j^n - \cancel{\alpha U_j^n} \\ &= U_j^n + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right), \end{aligned}$$

vamos substituir o termo U_j^n por $U_j^n + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right)$. Portanto, a equação (1.10) se torna

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right) \quad (1.15)$$

1.4.3.1 Efeito difusivo

A equação (1.15) pode ser escrita na forma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) = \frac{(1 - \alpha)h^2}{2k} \left(\frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \right). \quad (1.16)$$

O termo $\delta = \frac{(1 - \alpha)h^2}{2k}$ é conhecido como *coeficiente de difusão artificial*. Note que, para uma malha fixa (h e k fixos), a difusão artificial diminui fazendo $\alpha \rightarrow 1$, particularmente se $\alpha = 1$ então $\delta = 0$; note também que, se $\alpha \rightarrow 0$ então $\delta \rightarrow \frac{h^2}{2k}$, o qual seria o valor de difusão máxima.

1.4.3.2 Estabilidade

Note que a equação (1.16) pode ser vista como a discretização de segunda ordem centrada no espaço com o método instável da equação de advecção-difusão

$$u_t + au_x - \delta u_{xx} = 0,$$

para a qual podemos garantir estabilidade sempre que, página 186 em (LEVEQUE, 2007)

$$\frac{\delta k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{ak}{h} \right| < 1.$$

No nosso caso, aproveitando o que já é conhecido para o método de Lax-Friedrichs, as condições que garantem estabilidade são, em primeiro lugar, a condição $\frac{\delta k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ onde $\delta = \frac{(1 - \alpha)h^2}{2k}$ implica em $\frac{(1 - \alpha)h^2}{2k} \cdot \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, isto é, $\alpha \geq 0$. E, em segundo lugar, se deve cumprir a condição, na página 186 em (LEVEQUE, 2007),

$$\left| \frac{ak}{h} \right| < 1,$$

a qual é conhecida como *Condição de Courant*.

2 EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (Villiers-en-Bière, 23 de agosto de 1797 — Saint-Ouen, 6 de janeiro de 1886) foi um professor e engenheiro francês. Ingressou na *École Polytechnique* em 1813. Em 1814 se recusou a participar com seus colegas da defesa de Paris, antes da abdicação de Napoleão. Por isto, foi expulso da *École Polytechnique*, tendo se formado em 1816 na *École des Ponts et Chaussées*. Trabalhou como engenheiro civil para o *Service des Poudres et Salpêtres* e para o *Service de Ponts et Chaussées*. Entre 1839 e 1840 frequentou o *Collège de France* onde estudou com Joseph Liouville. Na *École des Ponts et Chaussées* sucedeu Coriolis, como professor de matemática (VENANT, 1871).

Contribuiu com trabalhos fundamentais na teoria da elasticidade, sendo seu nome associado ao Princípio de Saint-Venant relativo ao comportamento mecânico de sistemas com carregamento estático equivalente, ao Teorema de Saint-Venant e à condição de compatibilidade de Saint-Venant. Desenvolveu equações unidimensionais para o escoamento em canais rasos: as Equações de Saint-Venant, usadas na hidráulica moderna. Introduziu pela primeira vez o conceito de tensões internas viscosas, em um trabalho de 1843, *Note à joindre un mémoire sur la dynamique des fluids*, refutando cientificamente os argumentos moleculares de Navier, identificando o coeficiente de viscosidade como multiplicador dos gradientes de velocidade do escoamento.

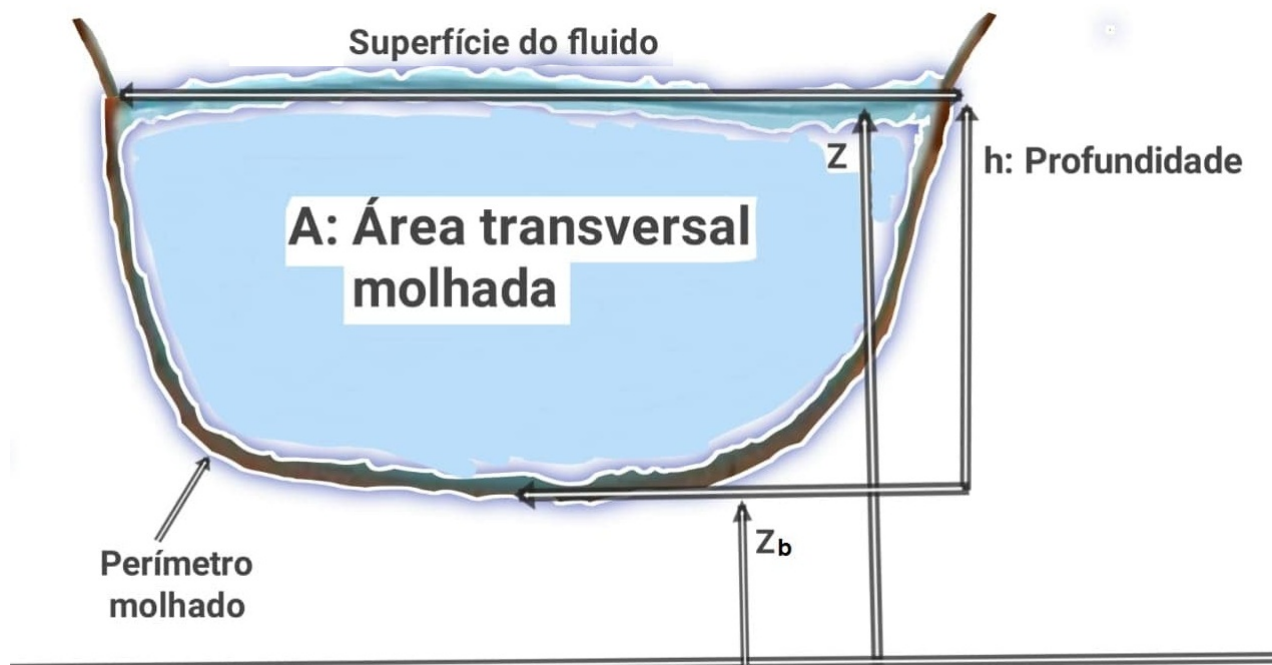
2.1 Equações de Saint-Venant

Um curso de água (daqui em diante chamado, genericamente, de canal), natural ou artificial, no qual percorre um fluido (não necessariamente água), é um sistema cuja evolução no tempo nos interessa conhecer.

As equações unidimensionais de Saint-Venant costumam ser usadas para prever o comportamento de fluidos em canais naturais ou artificiais. As variáveis que descrevem o estado do canal em um instante do tempo t são área transversal molhada $A(x, t)$, que será medida em metros quadrados (m^2), a velocidade média do fluido $V(x, t)$, que será medida em metros por segundo (m/s), e a vazão $AV(x, t)$, que será medida em metros cúbicos por segundo (m^3/s).

A seguinte figura mostra o corte transversal de um canal com a definição dos parâmetros descritivos a ele associados:

Figura 1 – Corte transversal de um canal



Fonte: Os autores

- $A(x, t)$ é a área transversal, perpendicular ao fluxo, da massa de fluido no instante t para a coordenada espacial x .
- $V(x, t)$ é a velocidade do fluxo, considerada aqui como tendo uma única componente, na direção do escoamento do fluido. (Para fixar ideias consideramos, em geral, que o fluido circula nessa direção no sentido positivo do eixo x , de maneira que $V(x, t)$ é não negativa).
- $h(x, t)$ é a profundidade do fluido, muitas vezes chamada de *altura*.
- $z_b(x)$ é a coordenada vertical da base do canal em que circula o fluido.
- $z(x, t)$ é a coordenada vertical da superfície do fluido. Logo $z(x, t) = z_b(x) + h(x, t)$. Portanto, $z_x = h_x + (z_b)_x$ é a inclinação da superfície quando a coordenada longitudinal varia 1 metro, aproximadamente. Em outras palavras, $z_x(x, t) \approx \frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2h}$. Finalmente definimos $\hat{z}_x = z_x / (1 + (z_x)^2)$
- $P(x, t)$ é o perímetro molhado.
- g é a aceleração da gravidade.

- f é o coeficiente (adimensional) de Manning, um número em que se expressam as forças de atrito, a densidade do fluido e outras forças que contribuem para diminuir a vazão.

Para estimar essas quantidades, faremos uso das equações de Saint-Venant. Estas equações que descrevem a evolução de $A(x, t)$ e $V(x, t)$ podem ser formuladas da seguinte maneira

$$A_t + (AV)_x = 0, \quad (2.1)$$

$$(AV)_t + (AV^2)_x + gA\hat{z}(x, t) + \frac{fPV|V|}{8} = 0. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) dá conta da conservação da massa e a equação (2.2) refere-se à conservação da quantidade de movimento.

2.2 Dedução das equações de Saint-Venant

Consideremos um trecho de um metro de comprimento ao longo do canal em questão. Denotemos M_0 o volume do fluido presente nesse trecho em um instante t dado. O volume de fluido nesse trecho, um segundo depois, será denotado por M_1 , assim M_1 será, naturalmente, igual ao volume de fluido M_0 mais a quantidade de fluido que entra no trecho no segundo considerado menos a quantidade de fluido que sai do trecho no segundo considerado.

Para simplificar, suponhamos que o fluido entra pelo extremo esquerdo do trecho e sai pelo extremo direito. Então, a quantidade de fluido que entra será igual à vazão (em metros cúbicos por segundo) no extremo esquerdo e a quantidade de fluido que sai será igual à vazão no extremo direito. Portanto, o aumento de volume após um segundo será igual à vazão do lado esquerdo menos a vazão no extremo direito, e como a distância entre esses dois extremos é um metro, a diferença de vazões é, aproximadamente, a derivada da vazão em relação a x , com sinal trocado.

Por outra parte, o volume do fluido um segundo mais tarde é a diferença entre o volume do fluido daqui a um segundo menos o volume do fluido atual, o que é aproximadamente igual à derivada do volume do fluido em relação a t . Agora, como estamos falando de um trecho de um metro de comprimento, o volume nesse trecho é aproximadamente igual à área transversal, e à vazão é o produto da área transversal vezes a velocidade. Assim, chegamos na relação:

$$\text{Derivada do volume em relação a } t + \text{Derivada da vazão em relação a } x = 0,$$

ou seja,

Derivada da área transversal em relação a t + Derivada da vazão em relação a $x = 0$.

Esta é a equação (2.1). Assim, como a equação (2.1) refere-se ao aumento (ou, mais propriamente à variação) de volume em um segundo, a equação (2.2) refere-se ao aumento da vazão em um segundo. Da mesma maneira que no caso do volume, o aumento (variação) da vazão em um segundo pode ser aproximado pela derivada em relação ao tempo $(AV)_t$. Por outra parte, podemos também falar da vazão no extremo esquerdo do trecho, da vazão no extremo direito do intervalo e dizer que a vazão que se incorpora ao trecho em um segundo é igual à vazão vezes a velocidade no extremo esquerdo, e que a vazão que desaparece do trecho em um segundo é igual à vazão vezes a velocidade no extremo esquerdo. Essa diferença é, aproximadamente, a derivada do produto entre vazão e velocidade em relação a x . Chegamos, assim, à relação:

Derivada da vazão em relação a t + Derivada da vazão vezes velocidade em relação a $x = 0$,

ou seja,

Derivada da área transversal vezes velocidade em relação a t .

+ Derivada da área transversal vezes velocidade ao quadrado em relação a $x = 0$,

ou seja,

$$(AV)_t + (AV^2)_x = 0.$$

Entretanto, esta equação ainda não é (2.2), porque no trecho de um metro o fluido pode ganhar ou perder velocidade, ou seja, pode ganhar ou perder vazão.

A razão para ganhar velocidade vem da força da gravidade. Em queda livre o ganho de velocidade em um segundo seria igual a $9.8 m/s$, mas a componente horizontal, que é a que nos interessa, seria zero. Por outro lado, se a superfície da água fosse totalmente horizontal, o ganho de velocidade devido à gravidade seria zero. Um simples cálculo trigonométrico permite deduzir que o ganho de velocidade horizontal é igual a g vezes z_x vezes o cosseno do ângulo entre a superfície do fluido $z(x)$ e a horizontal. Quando este ângulo é próximo de zero, o cosseno do ângulo é próximo de um e, portanto, essa quantidade costuma ser substituída por z_x . Observe que este ganho de velocidade deve ser positivo se a inclinação da superfície da água é negativa e vice-versa. Isto, justifica a parcela “+ $gA\hat{z}(x)$ ” na equação (2.2).

A possível perda de velocidade vem dada pelo termo $\frac{fPV|V|}{8}$. Ou seja, a perda de velocidade seria igual a $\frac{fPV|V|}{8A}$, pois o termo mencionado primeiro se refere à perda da vazão. Este termo é positivo se $V > 0$ e negativo se $V < 0$, o que reflete o fato de produzir sempre um efeito contrário ao do sentido do movimento. O quociente A/P costuma ser chamado de raio hidráulico e denotado por R_h . Como o coeficiente de Manning f é claramente adimensional, o que este termo indica é que existe uma perda de velocidade proporcional a V^2 dividido pelo raio hidráulico, devido a questões relacionadas com o atrito. Note que um raio hidráulico pequeno indica uma situação onde temos pouco perímetro molhado para muita área molhada, o que significa maior contato do fluido com as paredes do canal e, portanto, maior atrito. A dependência do atrito do quadrado da velocidade é uma suposição usual na mecânica de fluidos.

A expressão $\hat{z}(x, t)$ denota o cosseno do ângulo que forma a superfície da água com a horizontal vezes $z(x, t)$. Quando o ângulo é pequeno é aproximadamente $\frac{\partial z}{\partial x}$. Em geral

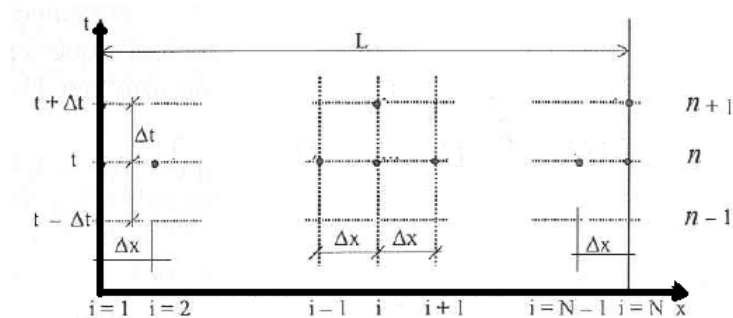
$$\hat{z}(x, t) = \cos \arctan \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot z_x = z_x / (1 + z_x^2).$$

3 MODELAGEM NUMÉRICA

Na aplicação do método de diferenças finitas (Apêndice A) em um problema qualquer, o domínio do problema é discretizado por uma *grade de pontos* ou *grade computacional* (BURDEN, 2011), (LEVEQUE, 2007), (RUGGIERO; LOPES, 1996). Por exemplo, na modelação unidimensional de escoamentos em canais por meio de diferenças finitas, o comprimento do canal é dividido em tramos normalmente de comprimento uniforme Δx (PORTO, 2006), e as extremidades de cada tramo representa um *nó da grade* ou *nó computacional*. Se o trecho do canal é dividido em $N - 1$ tramos, o primeiro nó (extremidade de montante) tem índice 1 e o último nó (extremidade de jusante) tem índice N . O primeiro e o último nó são chamados de *nós de fronteira* e os restantes, de *nós interiores*. O processo computacional é feito em intervalos discretos de tempo, e a diferença entre dois valores de tempo consecutivos é chamado de *intervalo de tempo computacional*.

A Figura 2 mostra uma grade de pontos cujo objetivo é determinar os valores de $A(x_i, t_n)$, $AV(x_i, t_n)$ e $h(x_i, t_n)$ nos pontos do domínio unidimensional $0 \leq x \leq L$ onde $i = 1, \dots, N$ e $n = 1, \dots, M$. Neste caso, o domínio foi discretizado em intervalos de comprimento $h = \Delta x$ e o tempo t em intervalos $k = \Delta t$, onde $x_i = (i - 1)h$ e $t_n = (n - 1)k$. Conhecendo em um tempo t qualquer a vazão AV , a área transversal A e a profundidade h em todos os pontos da grade pode-se determinar seus valores no tempo $t + k$. O instante $t = 0$ corresponde às condições iniciais do problema que devem ser conhecidas.

Figura 2 – Grade computacional



Fonte: PORTO (2006, p. 493)

Dependendo do tipo de diferença finita (Apêndice A), atrasada, centrada ou avançada, a ser usada na resolução de determinado problema, dois diferentes esquemas podem ser elaborados. Se a aproximação por diferença finita da derivada espacial, ou seja,

a derivada parcial em relação a x , for expressa em termos de valores das variáveis no nível de tempo conhecido, as equações resultantes podem ser resolvidas diretamente, para cada nó computacional em cada tempo. Este esquema é chamado de *esquema explícito*. Se, por outro lado, a aproximação por diferença finita da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis no nível de tempo desconhecido, as equações algébricas do sistema inteiro são resolvidas simultaneamente: é o esquema é dito *implícito*.

No esquema implícito obtém-se um sistema de equações algébricas lineares ou não lineares, que é resolvido por métodos tais como, Método da eliminação de Gauss, Método de Gauss-Seidel, Método iterativo de Newton, etc (BURDEN, 2011), (LEVEQUE, 2002), (RUGGIERO; LOPES, 1996).

3.1 Estabelecendo o problema

Iniciamos nossa abordagem numérica com o exemplo 14.9 que consta no livro Hidráulica Básica de (PORTO, 2006), no qual as equações de Saint-Venant são aplicadas ao cálculo de uma onda de cheia em um canal prismático retangular. Nosso objetivo é investigar o valor da vazão máxima que podemos colocar na condição de contorno (à esquerda) nas equações de Saint-Venant para saber até onde podemos “confiar” nos resultados numéricos.

No exemplo, um canal prismático retangular em concreto tem largura $w = 5\text{ m}$, coeficiente de rugosidade $n = 0,02$ e escoamento uniforme com uma profundidade $h = 1,2\text{ m}$. Durante a passagem de uma onda de cheia, a vazão aumenta linearmente desde o valor correspondente ao regime uniforme até uma vazão de pico $AV_p = 50\text{ m}^3/\text{s}$ em um tempo de 20 minutos. A declividade do fundo do canal é $z_b(x) = 0.001\text{ m/m}$ e o comprimento do trecho a ser estudado é $L = 3\text{ km}$. Utilizando o esquema explícito da seção anterior queremos determinar:

1. Vazão, profundidade e área transversal para diferentes instantes do tempo.
2. Hidrogramas: Variação da vazão, profundidade e área transversal em relação ao tempo em diferentes pontos do canal.

3.1.1 Condições iniciais

Para iniciar os cálculos é necessário conhecer o valor da velocidade média inicial V_0 , o perímetro molhado inicial P_0 , a área transversal inicial A_0 e o coeficiente de Manning inicial f_0 , em cada nó no tempo $t = 0$ (isto é, antes do início da cheia).

Então, a partir dos dados do problema temos:

$$\begin{aligned} z_b(x) &= 0,001 & h_0 &= 1,20 \text{ m} \\ g &= 9.8 \text{ m}^2/\text{s} & A_0 &= w \cdot h_0 = 6 \text{ m} \\ w &= 5 \text{ m} & V_0 &= AV/A = 1,374 \text{ m/s} \\ (AV)_0 &= 8,245 & \hat{z}_0(x, t) &= z_b(x) \end{aligned}$$

Note que, na condição de regime uniforme ($t = 0$), ou condições estacionárias a velocidade não varia ao longo do tempo, então de (2.2) obtemos:

$$gA_0\hat{z}_0(x, t) + \frac{f_0 P_0 V_0 |V_0|}{8} = 0,$$

e resolvendo esta equação para f_0 , obtemos

$$f_0 = -\frac{8gA_0\hat{z}_0(x, t)}{P_0 V_0 |V_0|} = 3.3663306720355467^{-2}.$$

3.1.2 Discretização das equações

O cálculo da velocidade média e da vazão, a cada tempo nos nós interiores será feito com as equações (1.13) e (1.14), com coeficiente de ponderação $\alpha = 1$. Logo, para a equação da conservação da massa (2.1), temos

$$\frac{A_j^{n+1} - [\alpha A_j^n + (1 - \alpha)(A_{j+1}^n + A_{j-1}^n)/2]}{k} + \frac{A_{j+1}^n V_{j+1}^n - A_{j-1}^n V_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

e assim

$$A_j^{n+1} = [\alpha A_j^n + (1 - \alpha)(A_{j+1}^n + A_{j-1}^n)/2] - \frac{k}{2h} [A_{j+1}^n V_{j+1}^n - A_{j-1}^n V_{j-1}^n].$$

E no extremo direito, usaremos

$$\frac{A_j^{n+1} - [\alpha A_j^n + (1 - \alpha)(A_{j-1}^n + A_j^n)/2]}{k} + \frac{A_j^n V_j^n - A_{j-1}^n V_{j-1}^n}{h} = 0,$$

e assim

$$A_j^{n+1} = [\alpha A_j^n + (1 - \alpha)(A_j^n + A_{j-1}^n)/2] - \frac{k}{h} [A_j^n V_j^n - A_{j-1}^n V_{j-1}^n].$$

Para a equação da conservação da quantidade de movimento (2.2), temos

$$\begin{aligned} & \frac{A_j^{n+1} V_j^{n+1} - [\alpha \cdot A_j^n V_j^n + (1 - \alpha) \cdot (A_{j+1}^n V_{j+1}^n + A_{j-1}^n V_{j-1}^n)/2]}{k} \\ & + \frac{A_{j+1}^n (V_{j+1}^n)^2 - A_{j-1}^n (V_{j-1}^n)^2}{2h} + g \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{A_{j-1}^n + A_{j+1}^n}{2} + \alpha \cdot A_j^n \right] \\ & \cdot \left[\left(z_b(x) + \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2h} \right) + f \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{P_{j-1}^n + P_{j+1}^n}{2} + \alpha \cdot P_j^n \right] \right] \\ & \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{V_{j-1}^n + V_{j+1}^n}{2} + \alpha V_j^n \right] \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{|V_{j-1}^n| + |V_{j+1}^n|}{2} + \alpha |V_j^n| \right] = 0 \end{aligned}$$

e, agora isolando $A_j^{n+1}V_j^{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} A_j^{n+1}V_j^{n+1} = & [\alpha \cdot A_j^n V_j^n + (1 - \alpha) \cdot (A_{j+1}^n V_{j+1}^n + A_{j-1}^n V_{j-1}^n)/2] \\ & - \frac{k}{2h} [A_{j+1}^n (V_{j+1}^n)^2 - A_{j-1}^n (V_{j-1}^n)^2] - k \cdot g \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{A_{j-1}^n + A_{j+1}^n}{2} \right. \\ & \left. + \alpha \cdot A_j^n \right] \cdot \left[z_b(x) + \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2h} \right] - kf \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{P_{j-1}^n + P_{j+1}^n}{2} + \alpha \cdot P_j^n \right] \\ & \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{V_{j-1}^n + V_{j+1}^n}{2} + \alpha V_j^n \right] \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{|V_{j-1}^n| + |V_{j+1}^n|}{2} + \alpha |V_j^n| \right]. \end{aligned}$$

E no extremo direito, usaremos

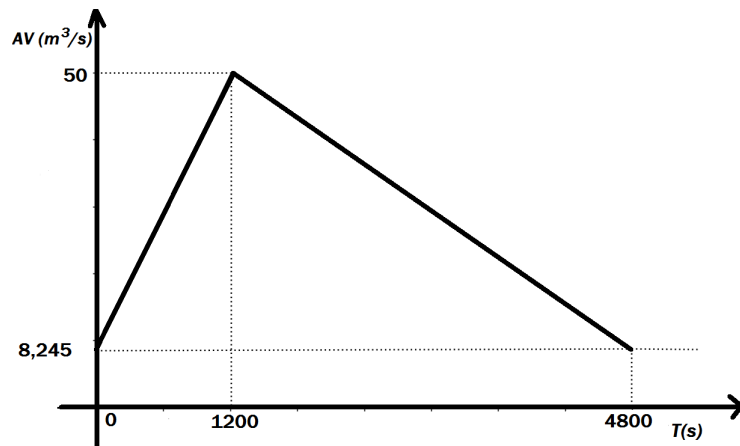
$$\begin{aligned} A_j^{n+1}V_j^{n+1} = & [\alpha \cdot A_j^n V_j^n + (1 - \alpha) \cdot (A_{j-1}^n V_{j-1}^n + A_j^n V_j^n)/2] \\ & - \frac{k}{h} [A_j^n (V_j^n)^2 - A_{j-1}^n (V_{j-1}^n)^2] - k \cdot g \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{A_{j-1}^n + A_j^n}{2} \right. \\ & \left. + \alpha \cdot A_j^n \right] \cdot \left[z_b(x) + \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{h} \right] - kf \left[(1 - \alpha) \cdot \frac{P_{j-1}^n + P_j^n}{2} + \alpha \cdot P_j^n \right] \\ & \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{V_{j-1}^n + V_j^n}{2} + \alpha V_j^n \right] \cdot \left[(1 - \alpha) \frac{|V_{j-1}^n| + |V_j^n|}{2} + \alpha |V_j^n| \right] \quad (3.1) \end{aligned}$$

3.1.3 Condição de contorno à esquerda

No tempo $t = 0$, em todos os nós computacionais (exceto nos nós da esquerda da malha), os valores A_0^n , V_0 , $(AV)_0^n$ e h_0^n já foram determinados a partir dos dados do problema. Agora vamos calcular o valor dessas variáveis nos nós da esquerda.

No nó 1 (extremidade de montante), conhece-se a variação da vazão com o tempo, conforme o enunciado do problema e a [Figura 3](#)

Figura 3 – Condição de contorno à esquerda



Fonte: Os autores

Levando em conta a equação da conservação da massa, usaremos a seguinte expressão para calcular a área transversal molhada

$$A_j^{n+1} = [\alpha A_j^n + (1 - \alpha)(A_{j+1}^n + A_{j-1}^n)/2] - \frac{k}{2h} [A_{j+1}^n V_{j+1}^n - A_{j-1}^n V_{j-1}^n].$$

A velocidade e a profundidade, respetivamente, são dadas por

$$V_j^n = \frac{A_j^n V_j^n}{A_j^n} \quad \text{e} \quad h_j^n = \frac{A_j^n}{w}.$$

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados computacionais obtidos usando um algoritmo em Fortran 77 que resolve as equações de Saint-Venant, através de um método explícito, mais exatamente um esquema difusivo tipo Lax-Friedrichs, no qual a característica importante é a maneira como são discretizadas as equações, acrescentando nessas discretizações um parâmetro de ponderação α .

Consideramos o exemplo 14.9 do livro de (PORTO, 2006). Reproduzimos os resultados do livro e, em seguida, fizemos modificações sobre a condição de contorno, mais exatamente alterando o valor da vazão, para investigar o valor máximo que podemos colocar ali e seguir confiando nos resultados numéricos das equações de Saint-Venant. Após feito isso, ilustramos o comportamento da vazão, a profundidade e a área transversal molhada.

No segundo cenário, aumentamos o valor da vazão na condição de contorno, aqui usamos uma vazão de $132 \text{ m}^3/\text{s}$. Neste caso, na seção média do canal, observamos muitas oscilações nos dados. Em seguida, usamos um valor menor de k ; aqui novamente observamos gráficos muito suaves. Os resultados numéricos são bastante satisfatórios e o mais importante foi que, trocando o valor de k , conseguimos aumentar a vazão na condição de contorno. Mais uma vez são apresentados os gráficos da vazão, a profundidade e a área transversal molhada. Finalmente, nosso último experimento foi modificar o parâmetro de ponderação α . E, neste caso, também foi observado que a oscilação dos dados na solução numérica não existe mais, fato que podemos conferir a partir dos gráficos da vazão, a profundidade e a área transversal molhada.

Neste capítulo serão apresentados vários tipos de gráficos que mostram os resultados numéricos obtidos depois de resolver as equações de Saint-Venant usando um esquema difusivo do tipo Lax-Friedrichs. Na [seção 4.1](#), [seção 4.2](#), [seção 4.3](#) e [seção 4.4](#) apresentamos gráficos que mostram a vazão, a profundidade e a área transversal molhada como funções do tempo para diferentes pontos do canal. Nessas mesmas seções, apresentamos uns gráficos chamados de *hidrogramas*, isto é, gráficos que mostram a vazão, a profundidade e a área transversal molhada como funções dos pontos do canal para diferentes instantes do tempo. E finalmente, na [seção 4.5](#) e [seção 4.6](#), apresentamos gráficos da vazão, profundidade e área transversal como função do tempo nas seções inicial, média e final do canal; nessas mesmas seções apresentamos também gráficos da vazão, profundidade e área transversal como funções dos pontos do canal para os instantes do tempo inicial, médio e final.

4.1 Alterações na vazão

Nesta seção, com base no exemplo 14.9 do livro *Hidráulica Básica* de (PORTO, 2006), exibimos os resultados numéricos obtidos usando o esquema difusivo tipo Lax-Friedrichs apresentado no Capítulo 3. Aqui apresentamos os gráficos em que a vazão vai desde $8,25 \text{ m}^3/\text{s}$ até $50 \text{ m}^3/\text{s}$, voltando à vazão inicial a partir de $t = 4800 \text{ s}$. Usamos $k = 0.1$, $\Delta x = 30$ e parâmetro de ponderação $\alpha = 1$.

1. Gráficos da vazão, profundidade e área transversal para diferentes instantes do tempo.

Figura 4 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 \text{ s}$

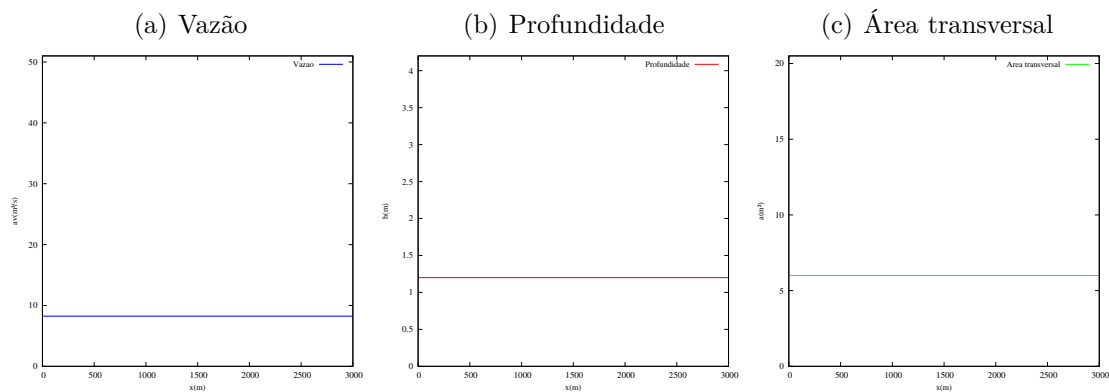


Figura 5 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 \text{ s}$

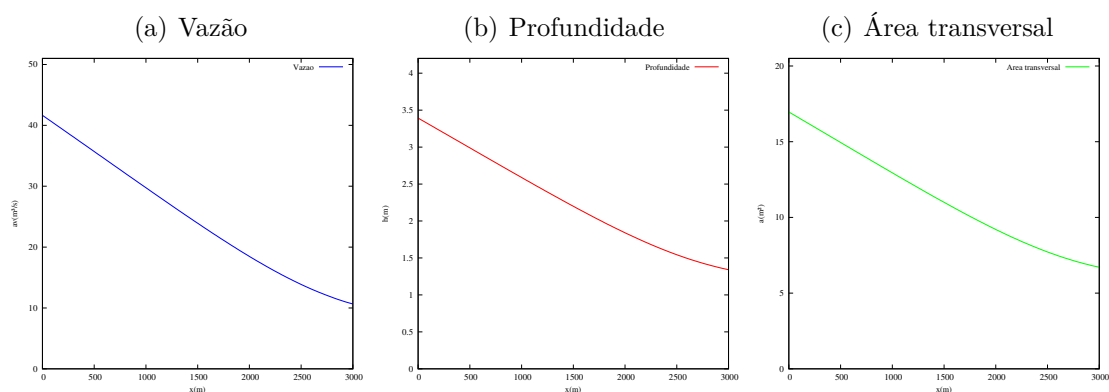


Figura 6 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920 s$

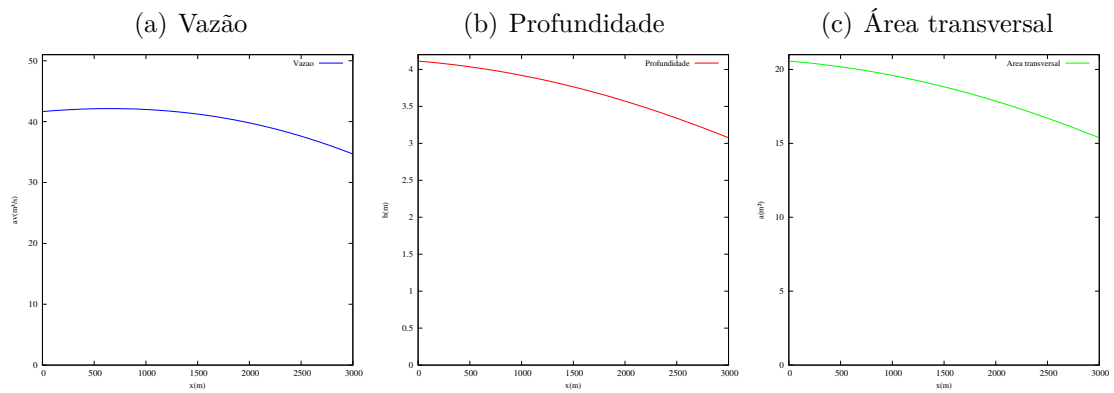


Figura 7 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880 s$

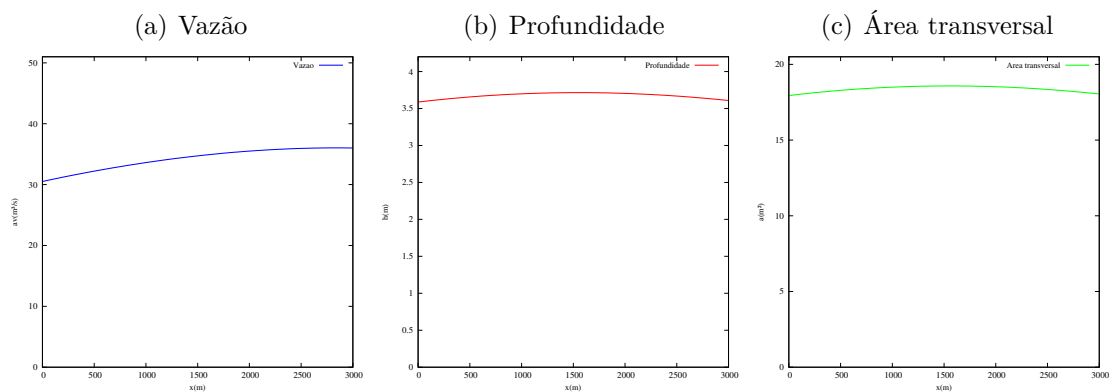


Figura 8 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840 s$

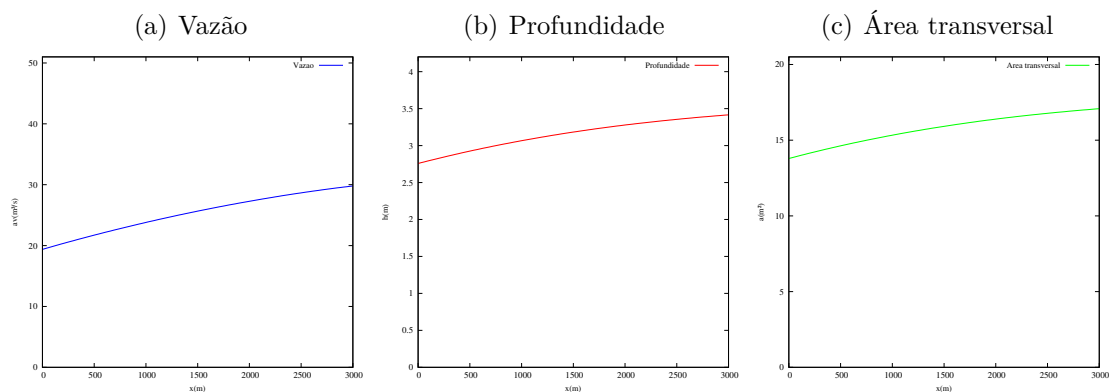


Figura 9 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800$ s

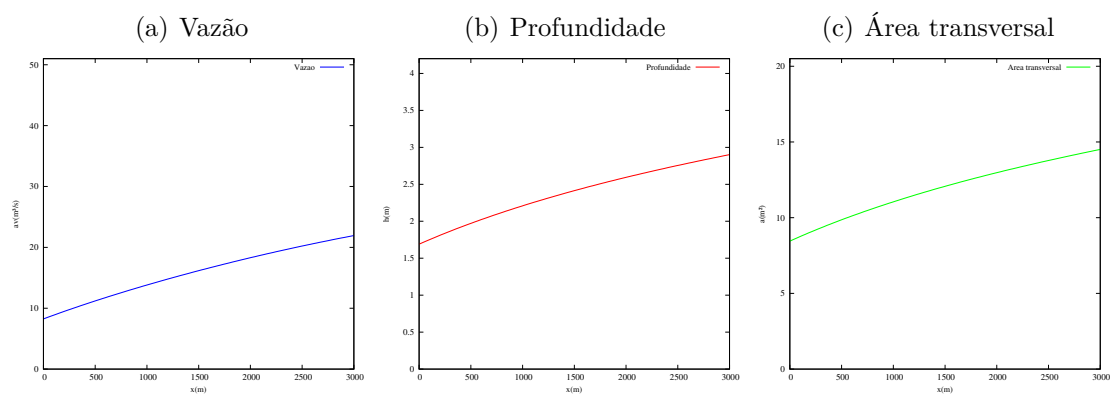


Figura 10 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760$ s

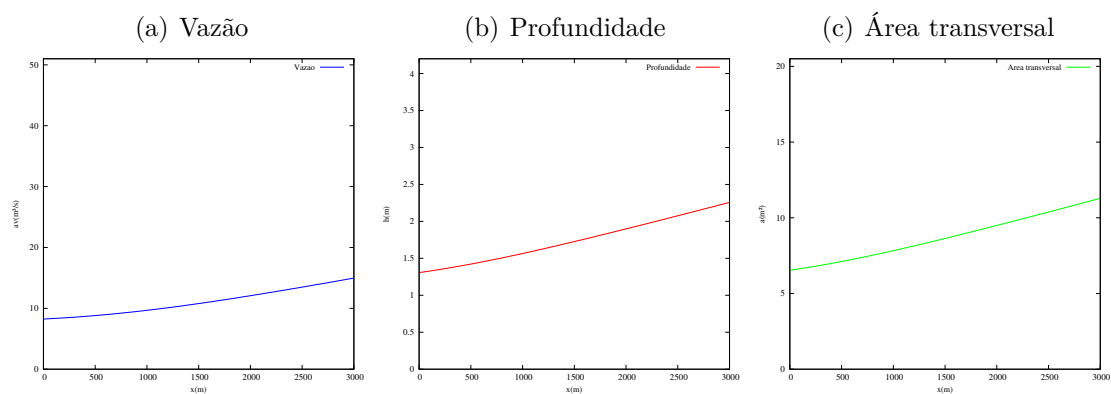


Figura 11 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720$ s

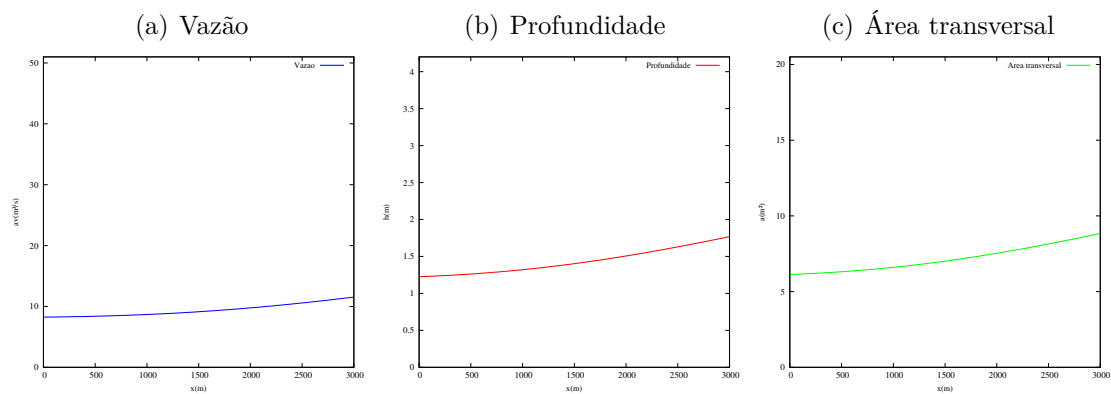


Figura 12 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680$ s

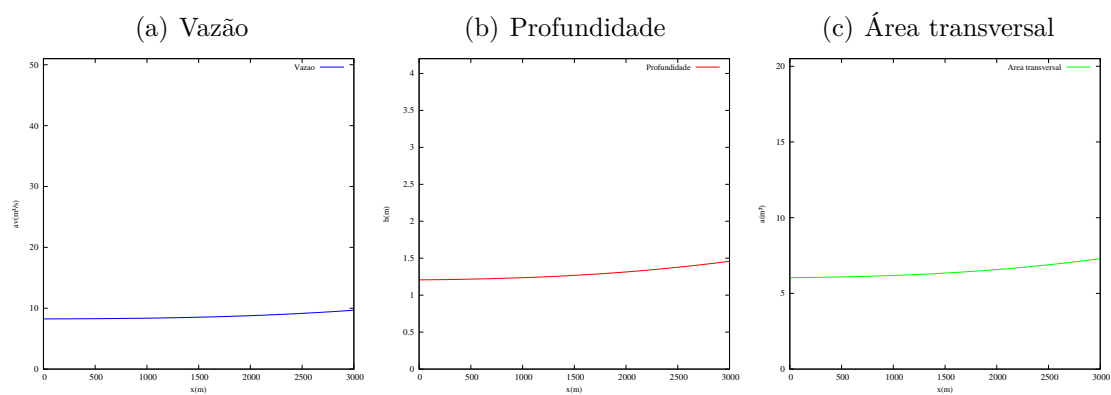


Figura 13 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640$ s

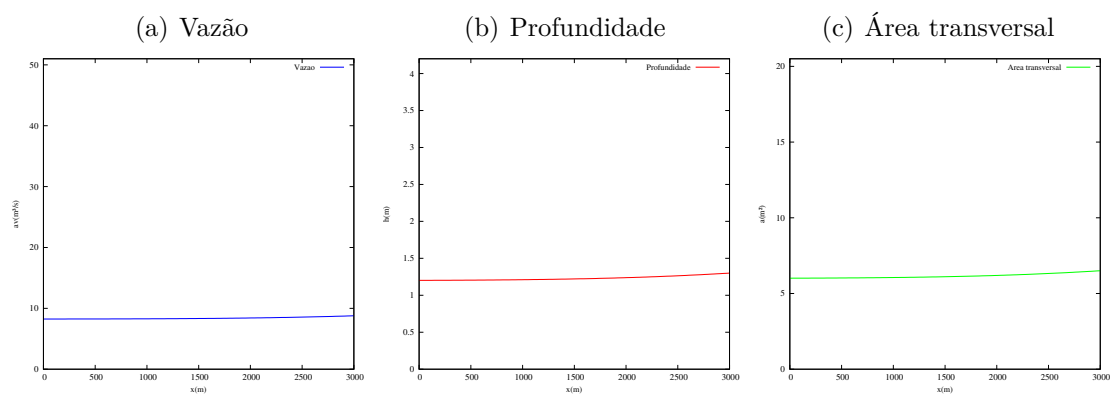


Figura 14 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600$ s

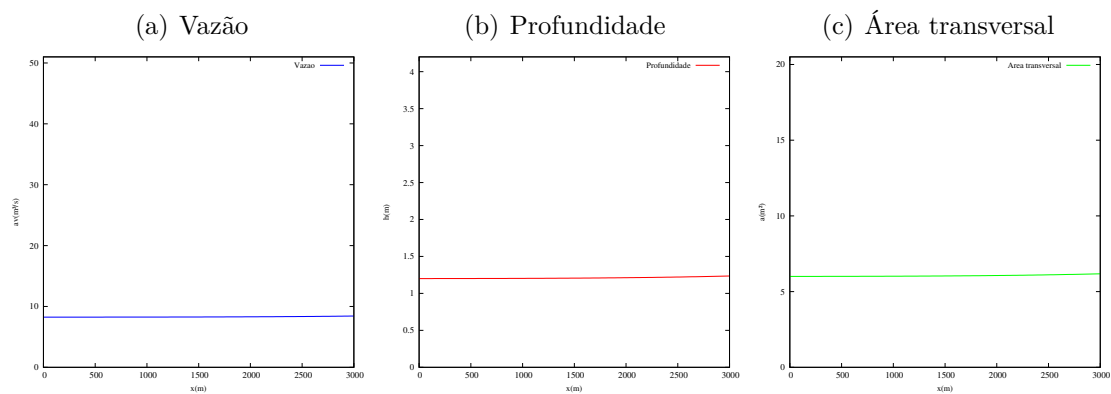


Figura 15 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560$ s

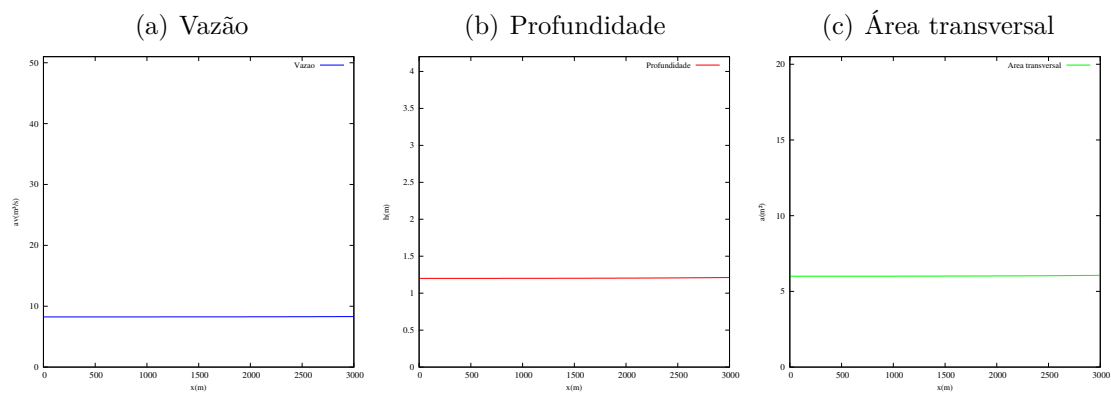


Figura 16 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520$ s

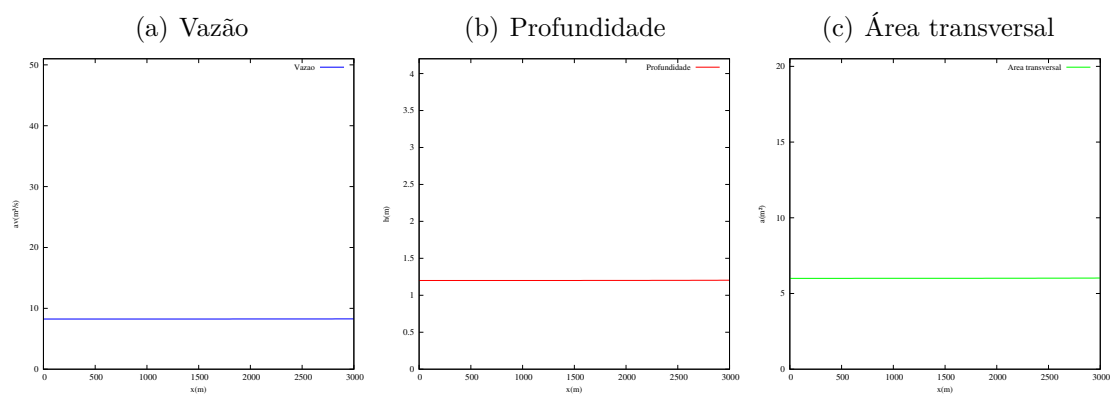


Figura 17 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480$ s

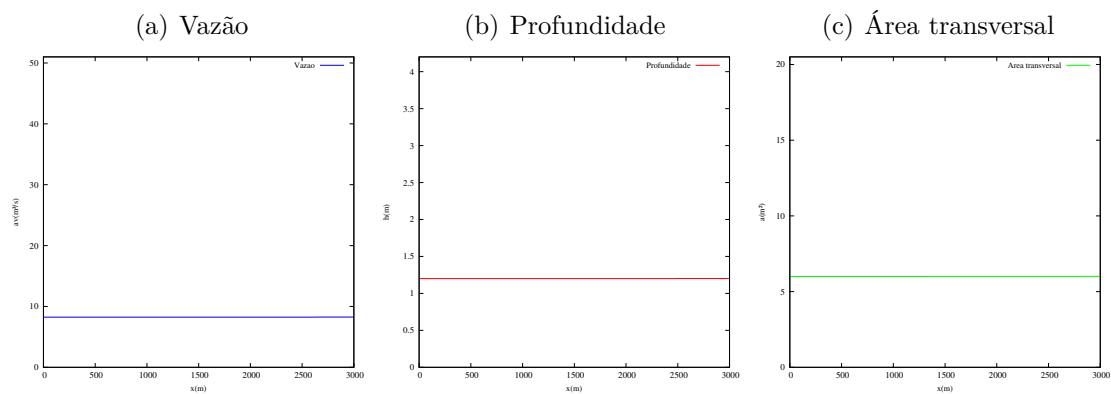
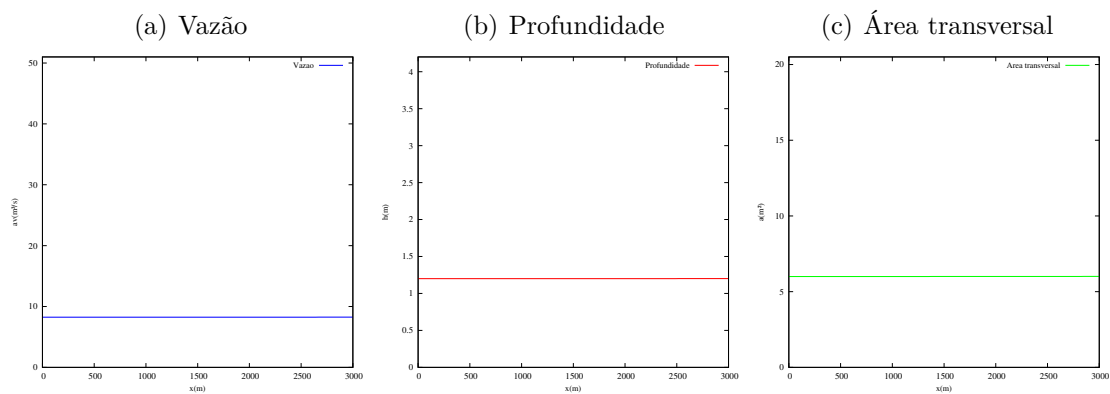


Figura 18 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$



2. Hidrogramas: vazão, profundidade e área transversal para diferentes pontos do canal.

Figura 19 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}$

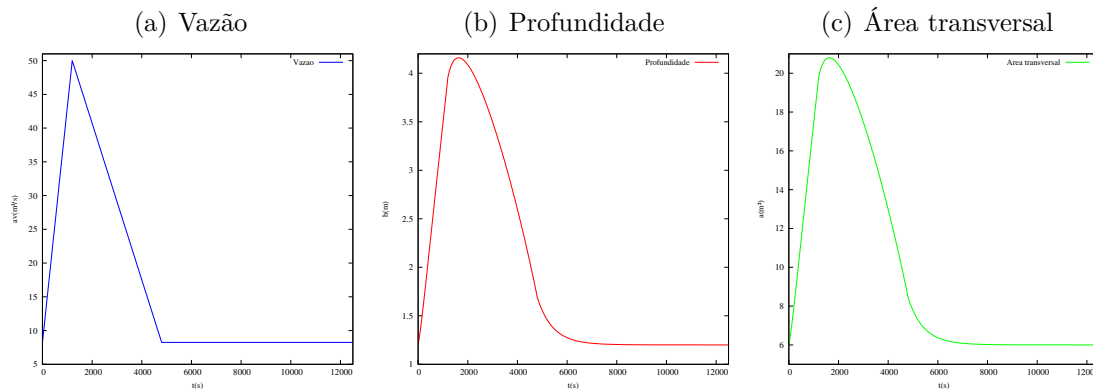


Figura 20 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240\text{ m}$

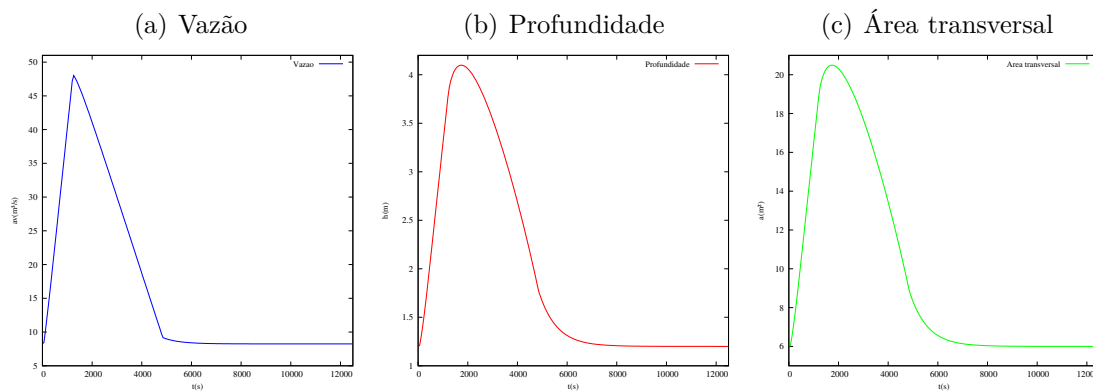


Figura 21 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480\text{ m}$

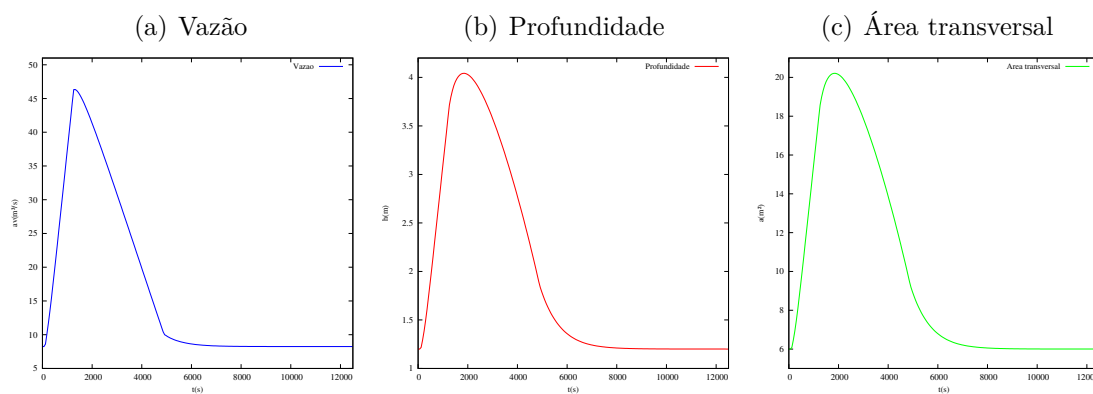


Figura 22 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720\text{ m}$

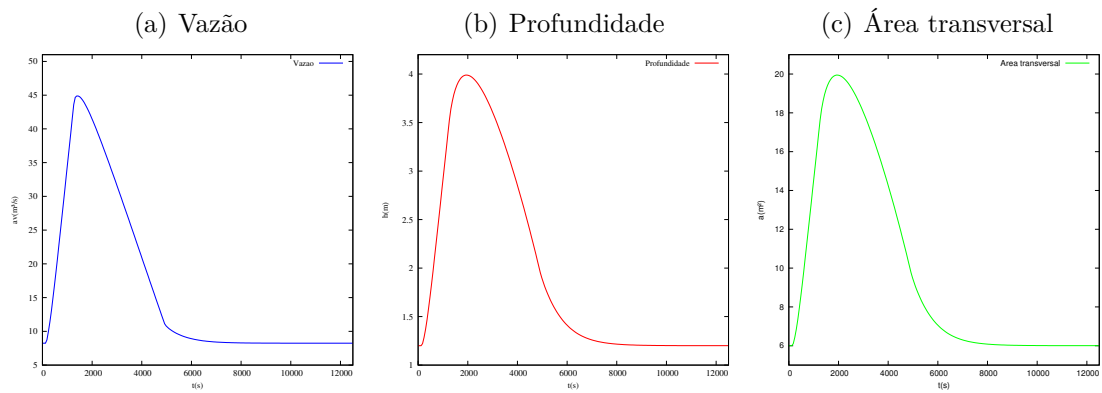


Figura 23 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960\text{ m}$

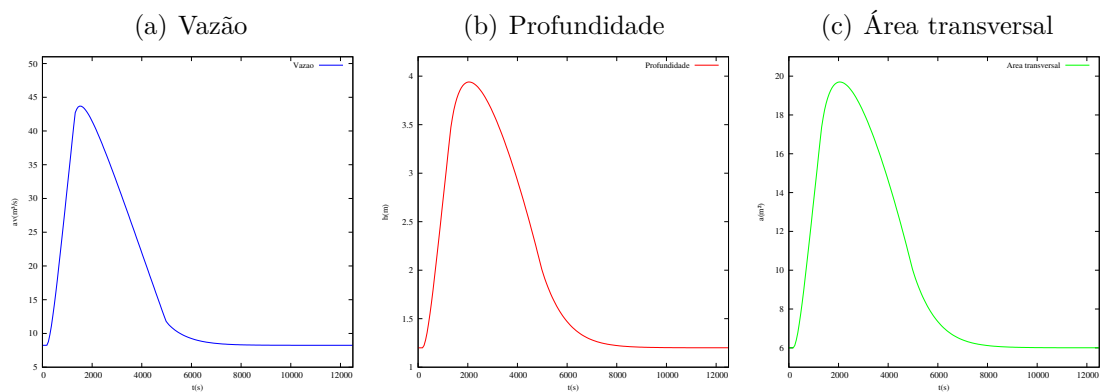


Figura 24 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200\text{ m}$

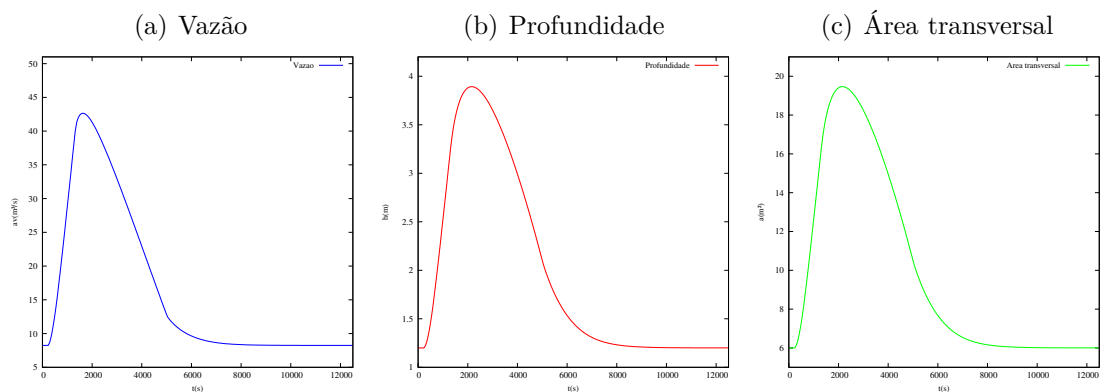


Figura 25 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440\text{ m}$

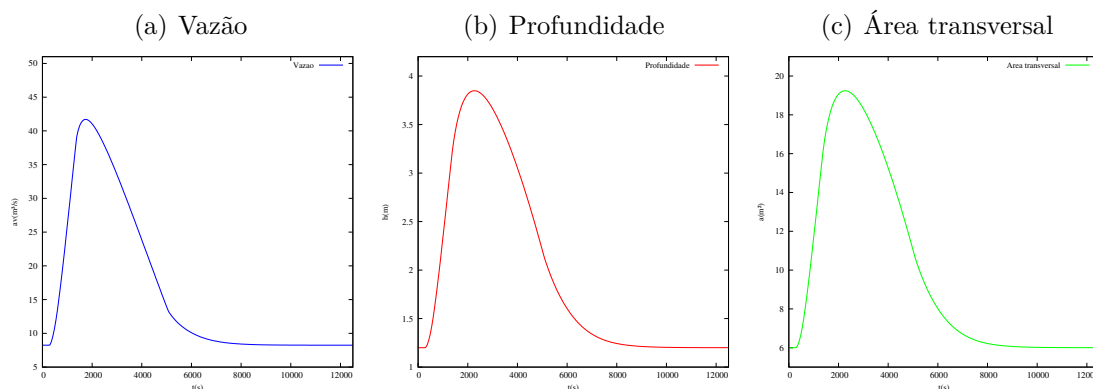


Figura 26 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680\text{ m}$

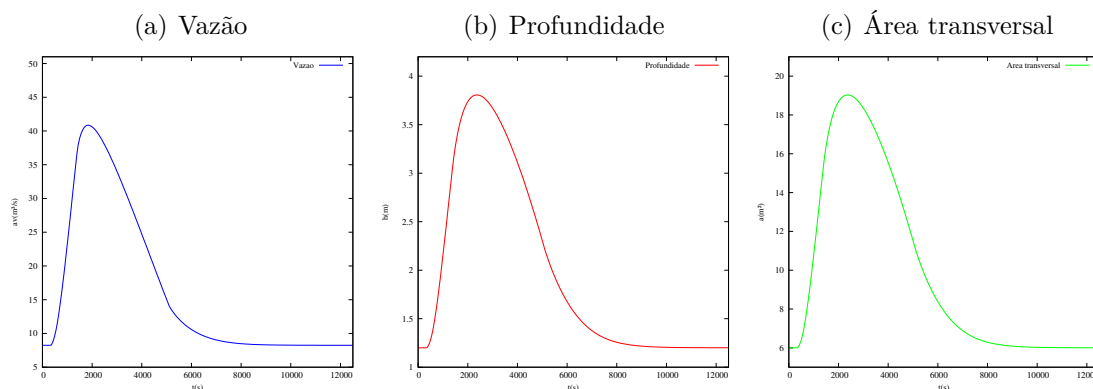


Figura 27 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920\text{ m}$

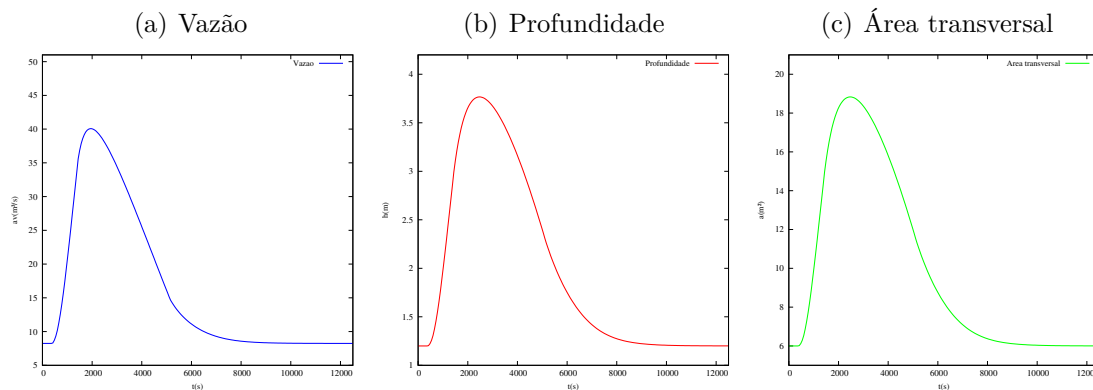


Figura 28 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$

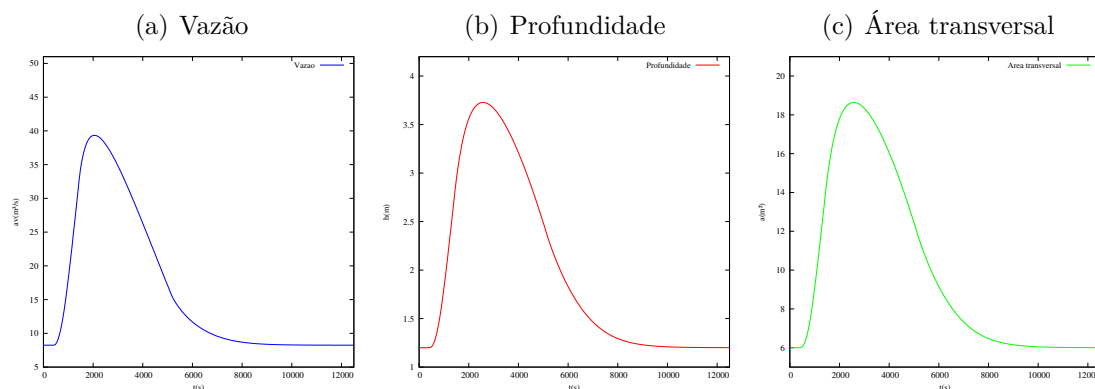


Figura 29 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$

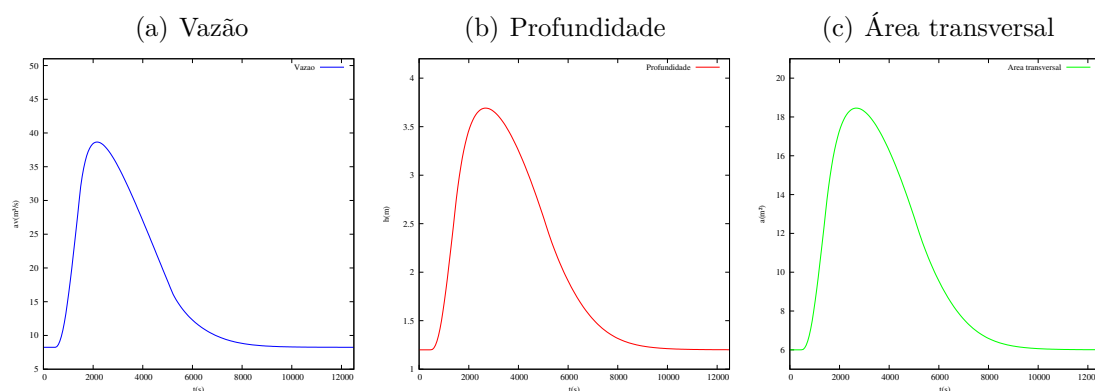


Figura 30 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$

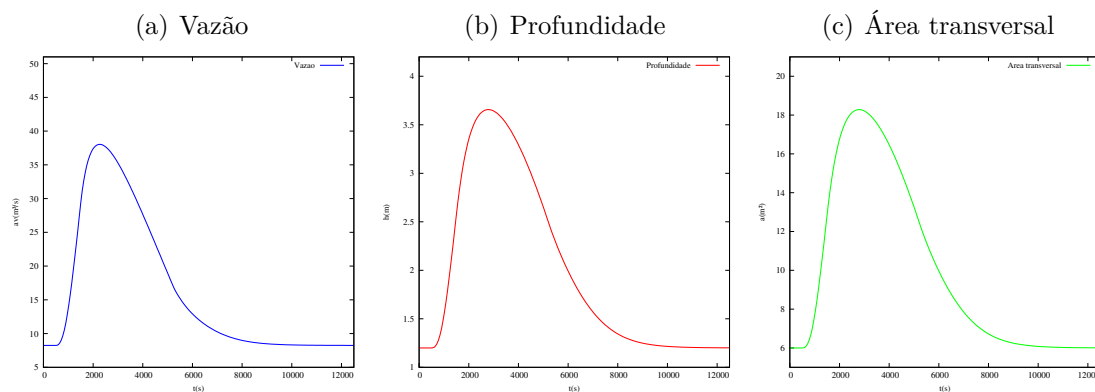


Figura 31 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880\text{ m}$

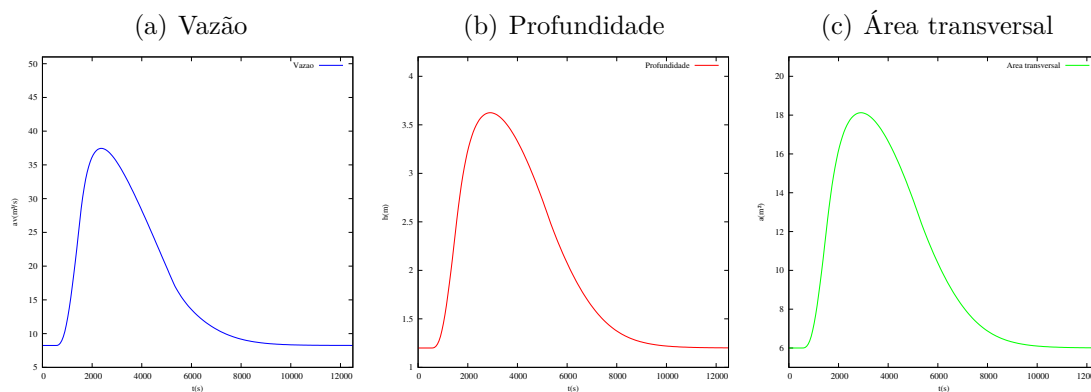
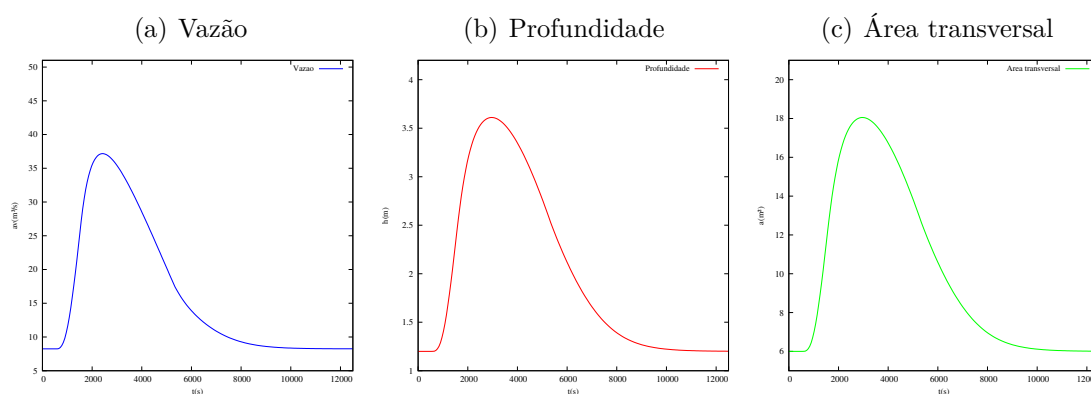


Figura 32 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000\text{ m}$



Nos gráficos da vazão, profundidade e área transversal que são mostrados a cada 960 s, podemos observar que a situação é muito bem descrita por eles: no tempo $t = 0\text{ s}$ (antes do início da cheia) podemos observar as condições iniciais, logo depois, a vazão, profundidade e a área transversal mudam ao longo do tempo, e aproximadamente a partir do tempo $t = 9600\text{ s}$ se retorna ao escoamento uniforme, ou seja, os valores da vazão, profundidade e área transversal molhada tornam-se iguais aos valores iniciais.

Nos hidrogramas, que são mostrados a cada 240 metros, temos gráficos suaves que ilustram satisfatoriamente a situação. Neles podemos observar o que acontece com a vazão, a profundidade e a área transversal molhada em diferentes pontos do canal.

4.2 Vazão máxima e instabilidade

Nesta seção modificamos o valor da vazão usado na seção 4.1 e exibimos os resultados numéricos colocando uma vazão maior para mostrar que neste caso obtivemos oscilações nos resultados numéricos. Aqui apresentamos os gráficos em que a vazão vai desde $8,25 m^3/s$ até $132 m^3/s$, voltando à vazão inicial a partir de $t = 4800 s$. Usamos $k = 0.1$, $h = 30$ e parâmetro de ponderação $\alpha = 1$.

1. Gráficos da vazão, profundidade e área transversal para diferentes instantes do tempo.

Figura 33 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$

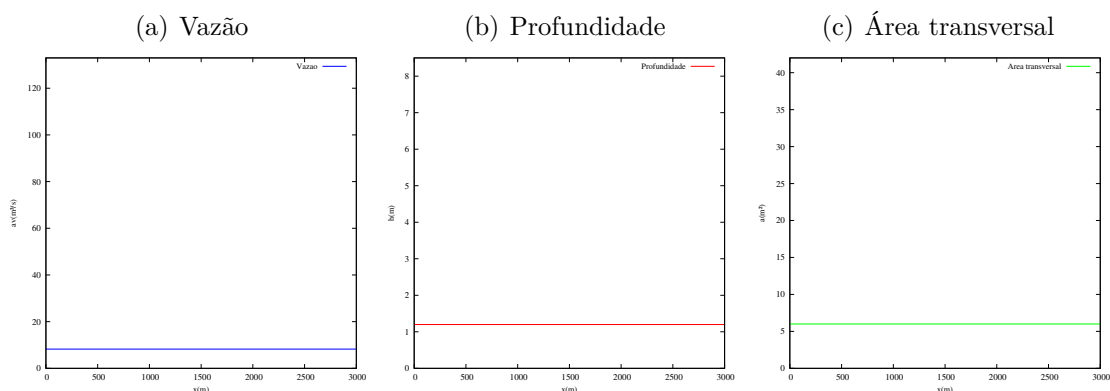


Figura 34 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$

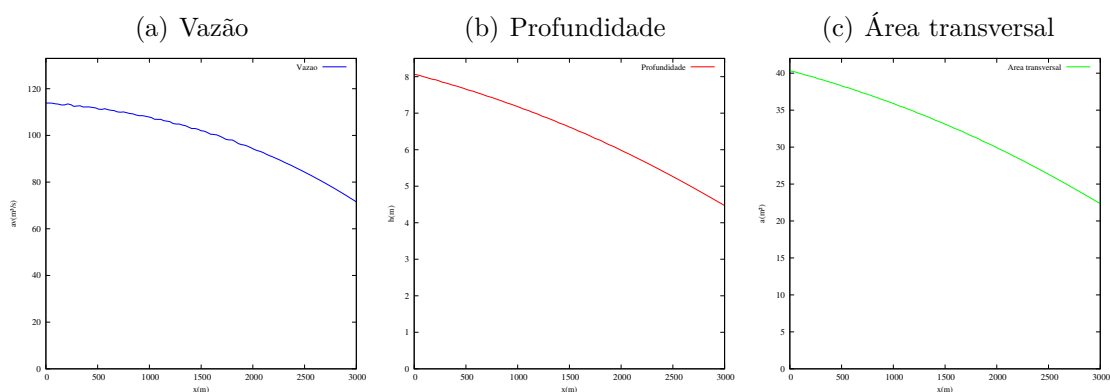


Figura 35 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920$ s

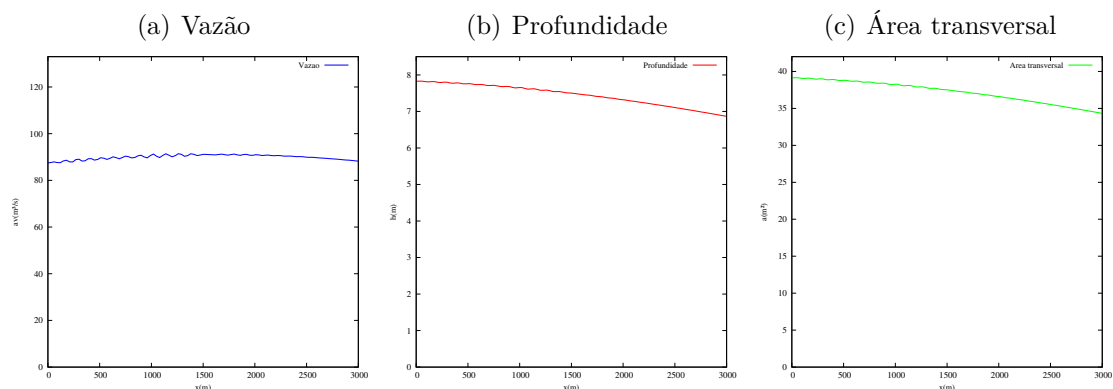


Figura 36 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880$ s

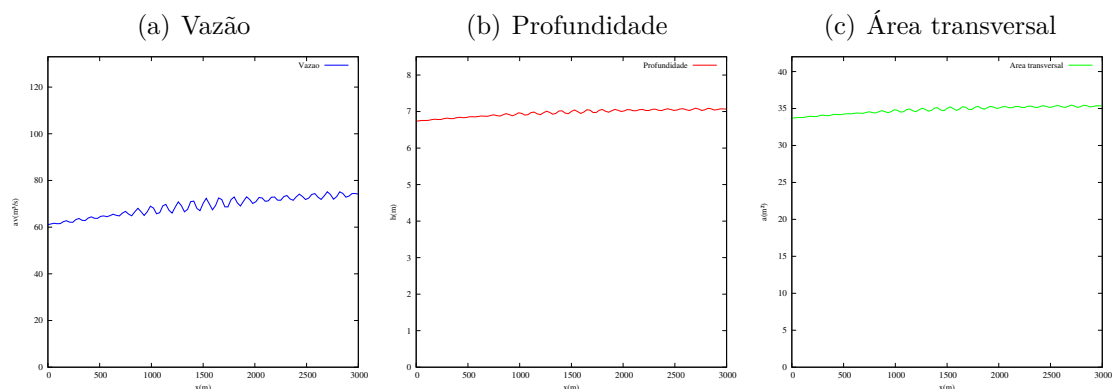


Figura 37 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840$ s

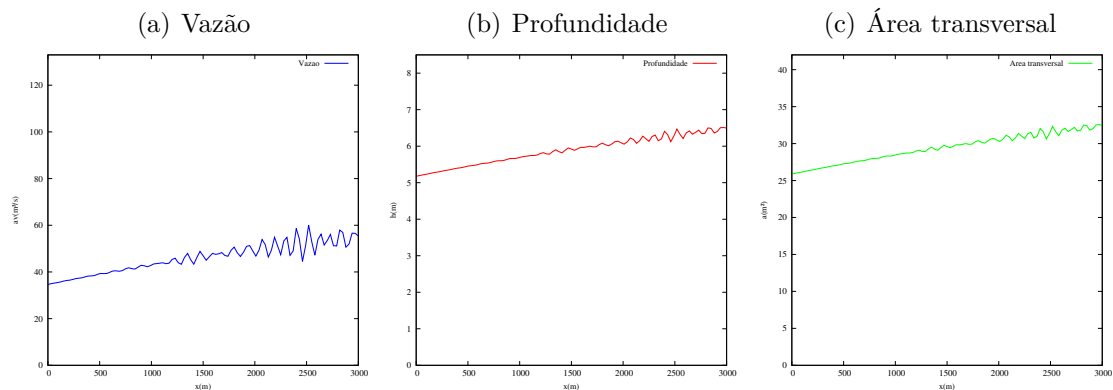


Figura 38 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800$ s

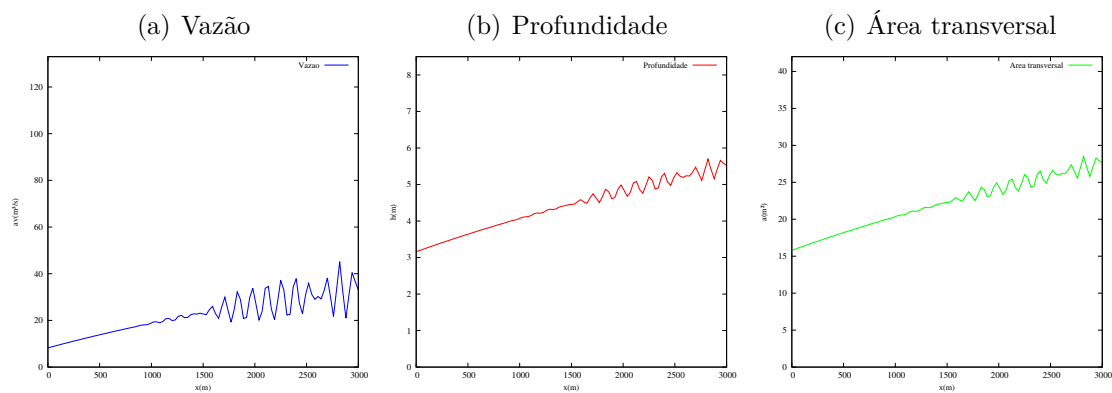


Figura 39 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760$ s

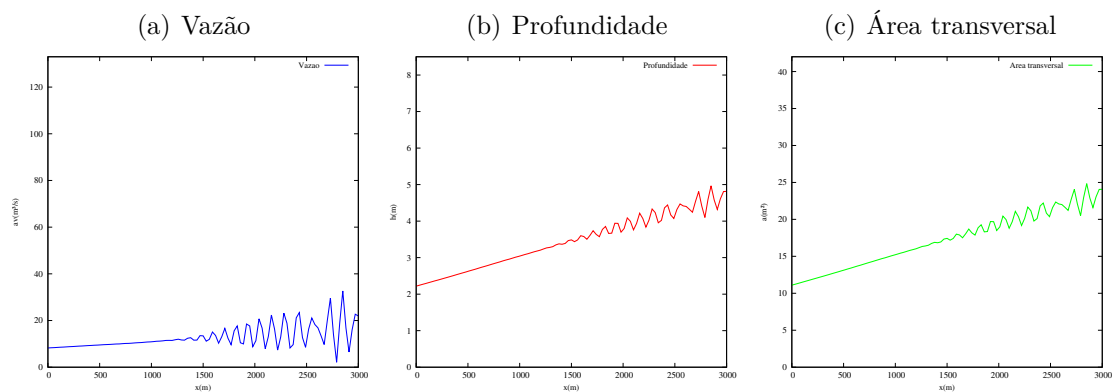


Figura 40 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720$ s

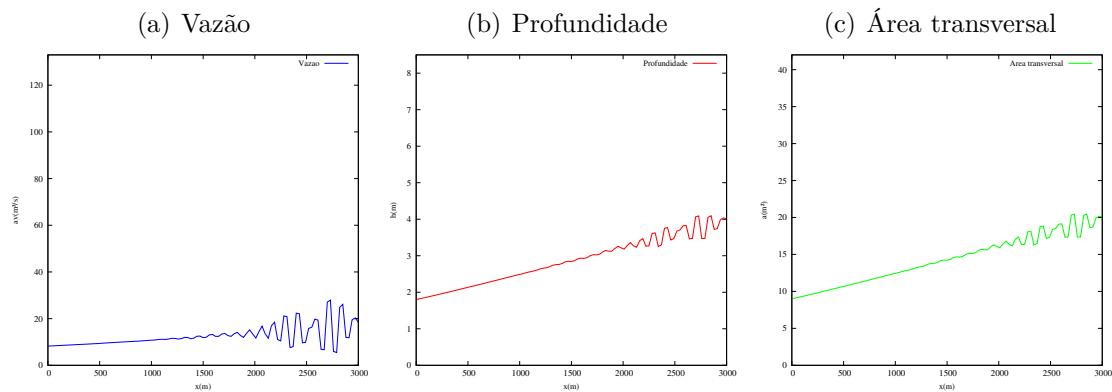


Figura 41 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680$ s

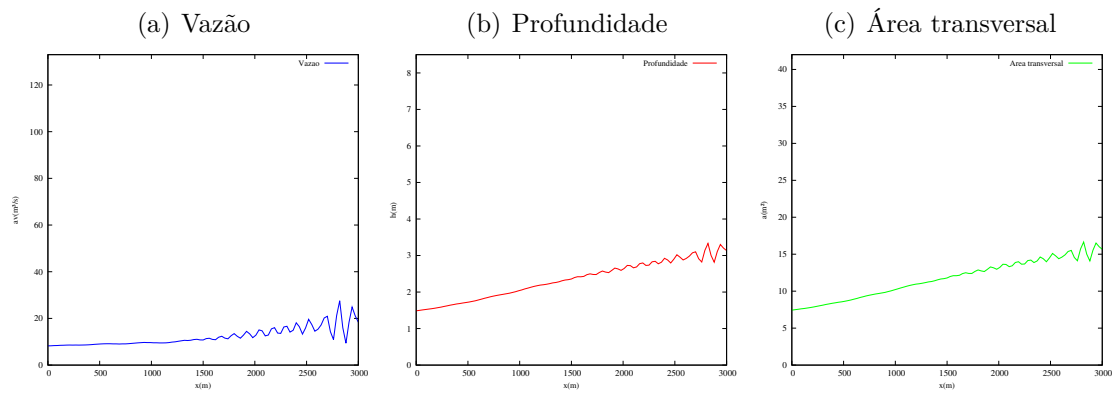


Figura 42 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640$ s

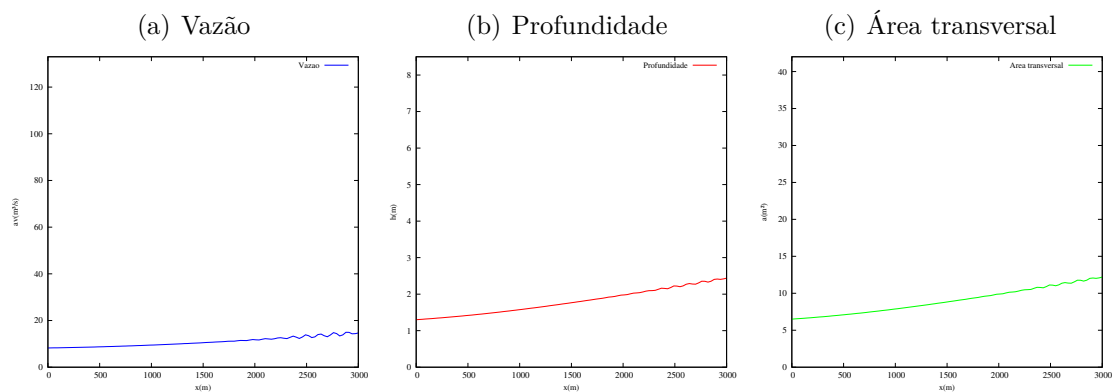


Figura 43 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600$ s

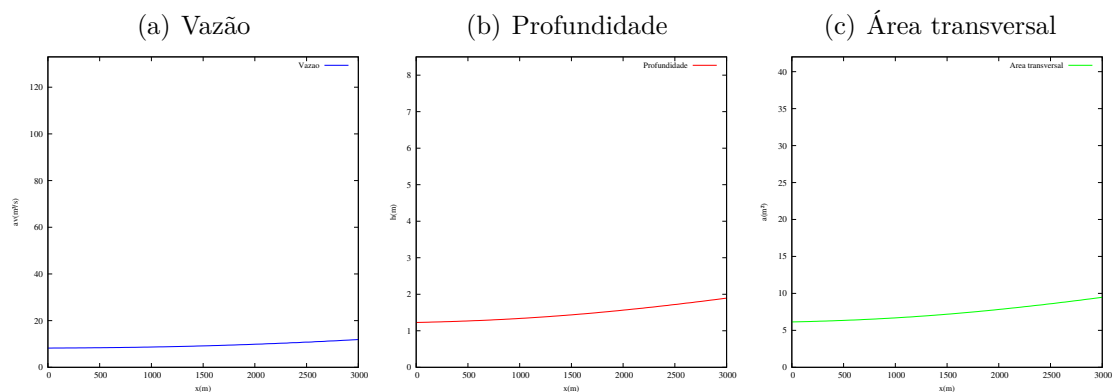


Figura 44 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560$ s

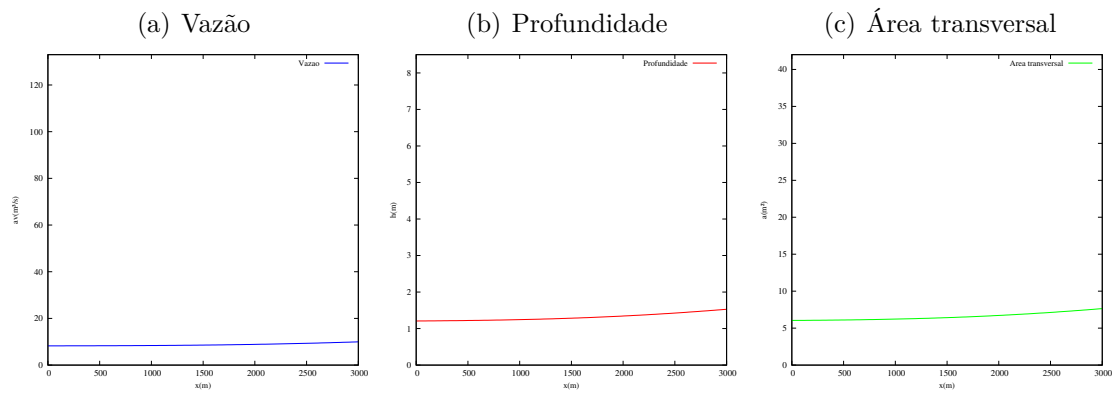


Figura 45 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520$ s

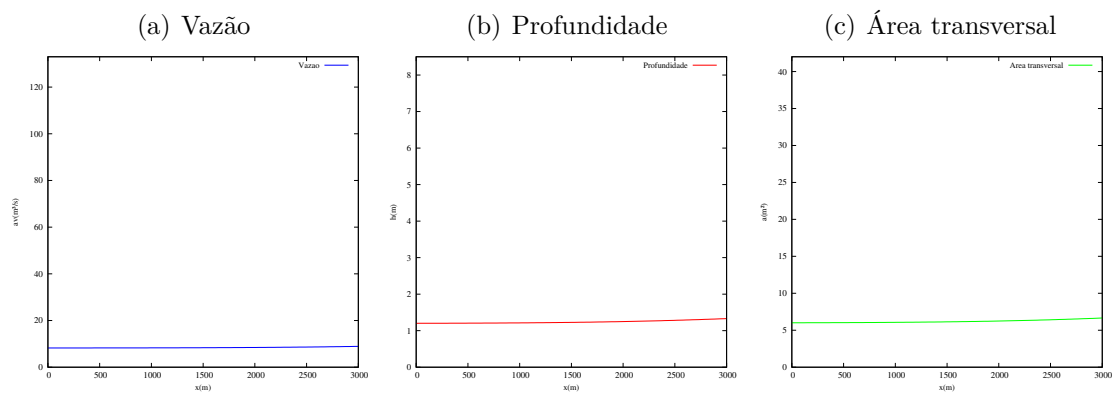


Figura 46 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480$ s

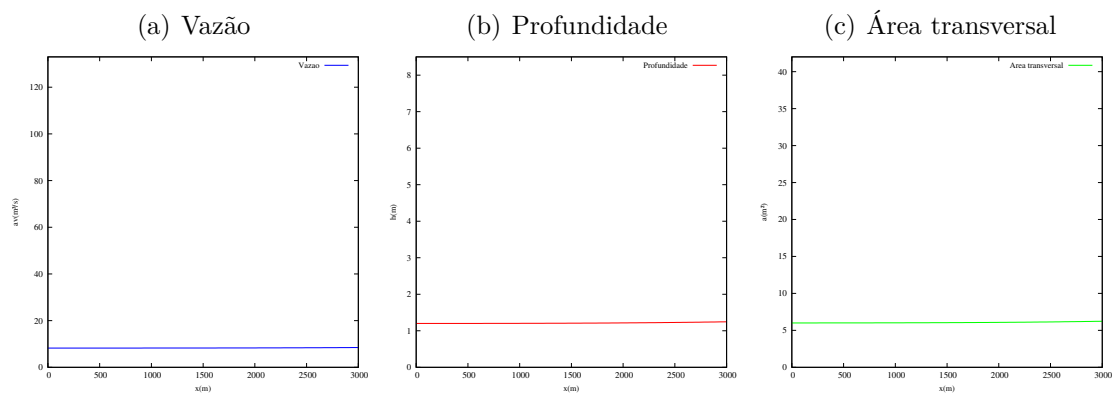
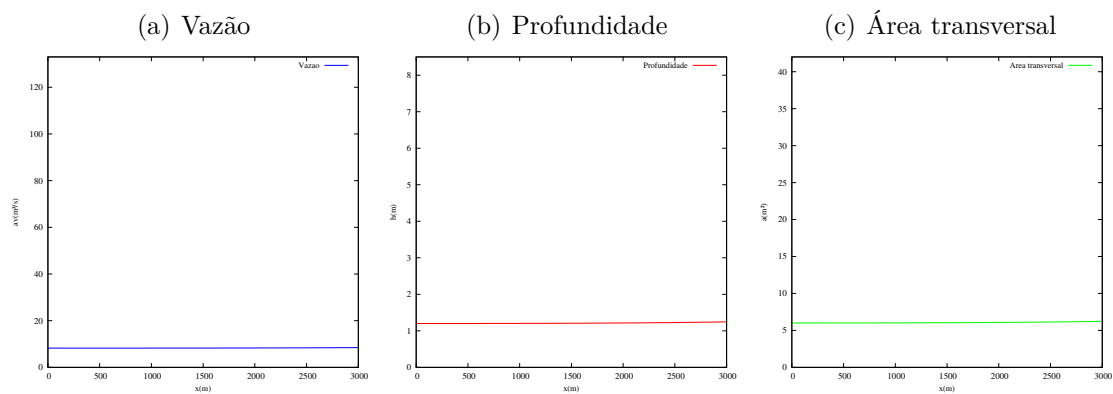


Figura 47 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500$ s



2. Hidrogramas: vazão, profundidade e área transversal para diferentes pontos do canal.

Figura 48 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}$

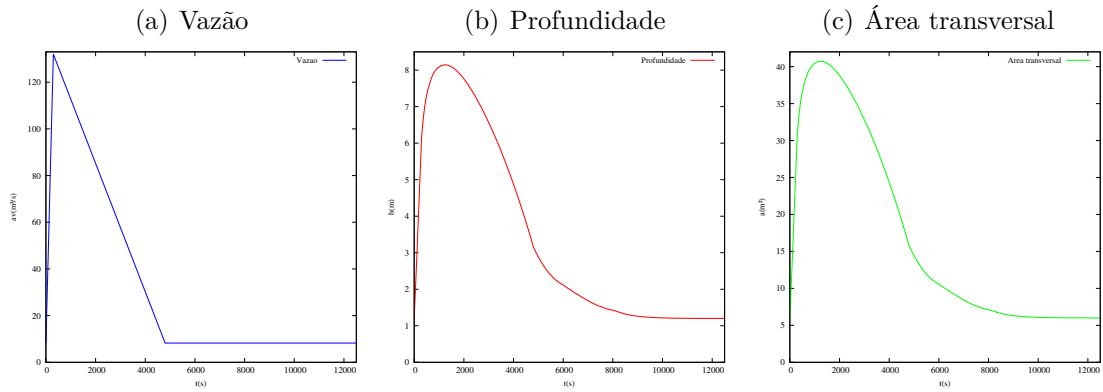


Figura 49 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240\text{ m}$

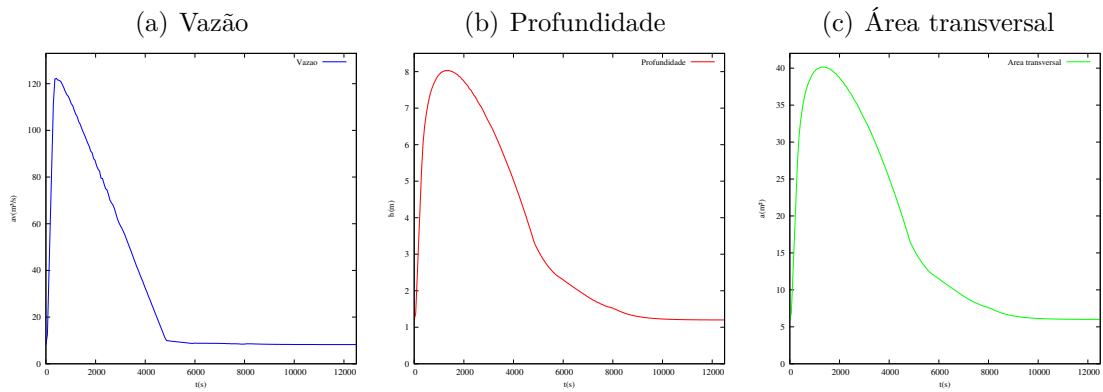


Figura 50 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480\text{ m}$

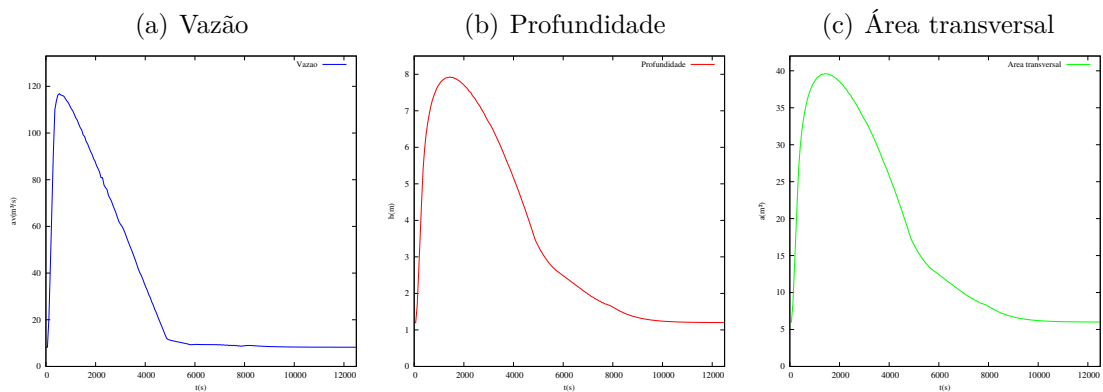


Figura 51 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720\text{ m}$

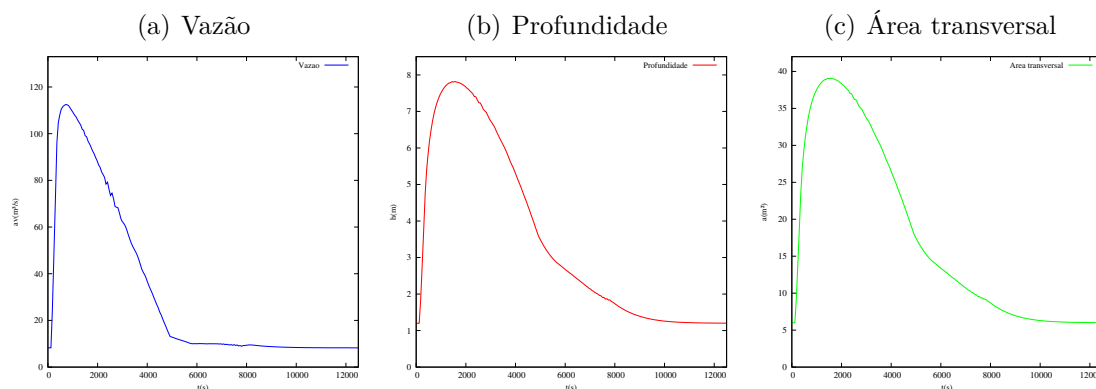


Figura 52 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960\text{ m}$

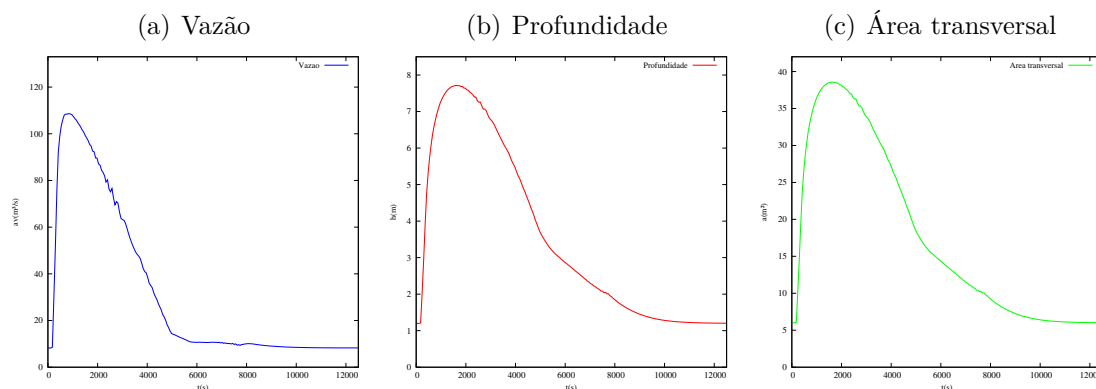


Figura 53 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200\text{ m}$

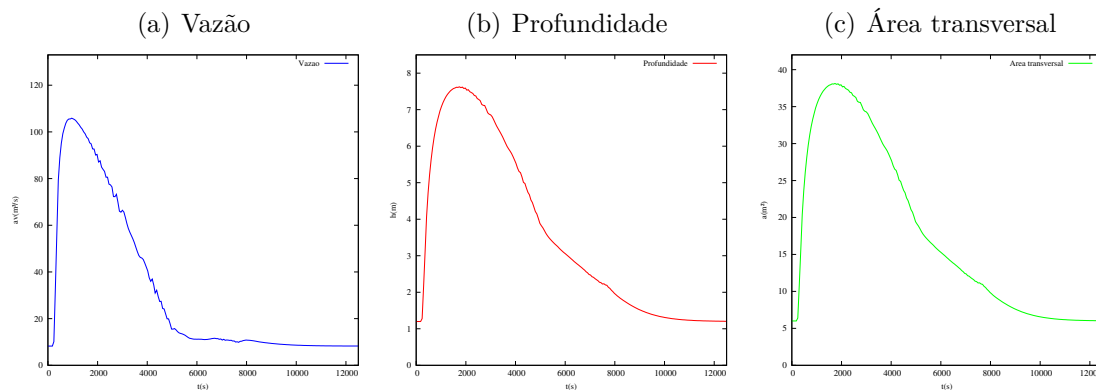


Figura 54 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440\text{ m}$

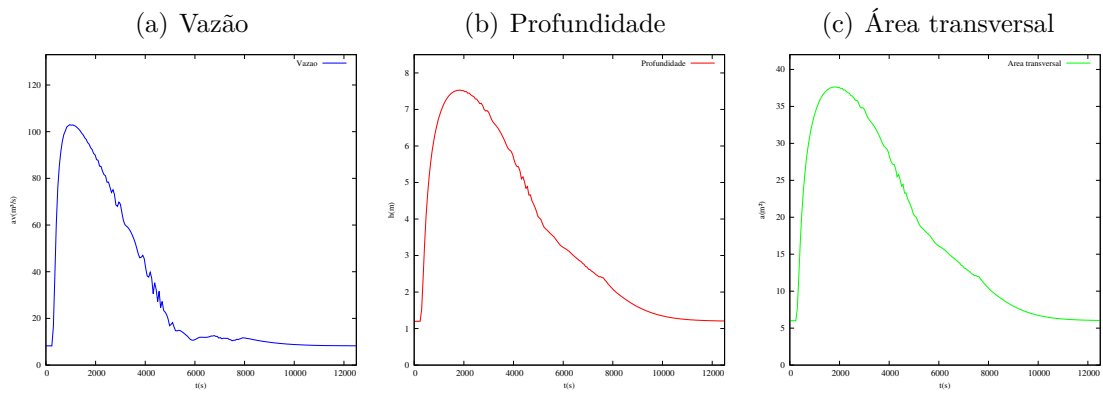


Figura 55 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680\text{ m}$

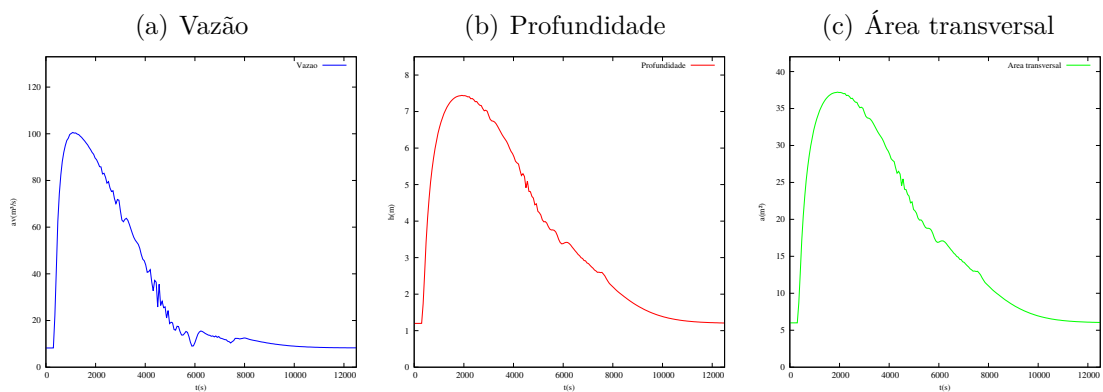


Figura 56 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920\text{ m}$

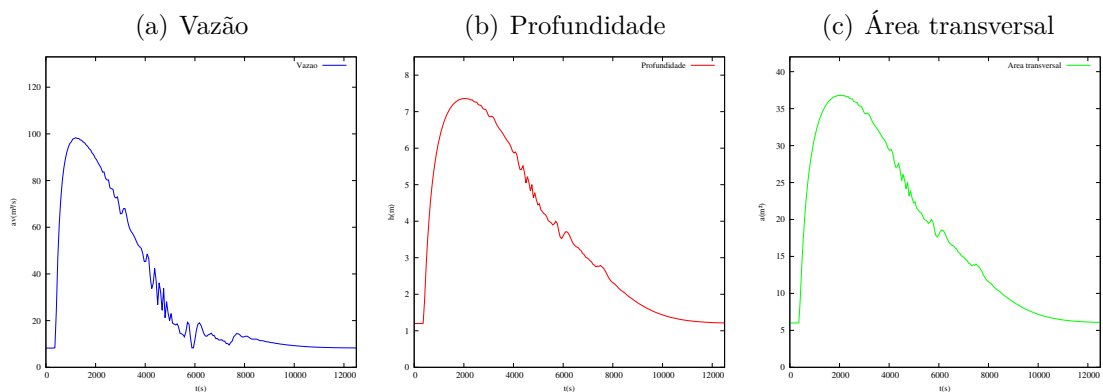


Figura 57 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$

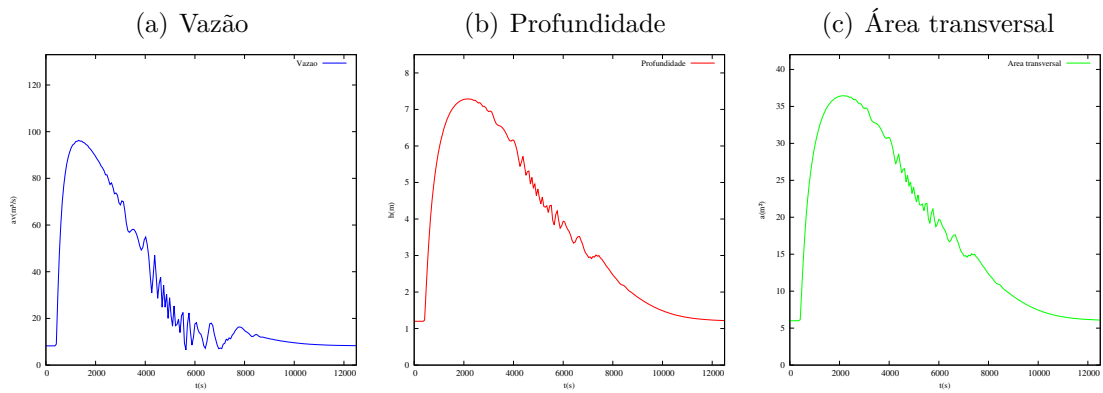


Figura 58 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$

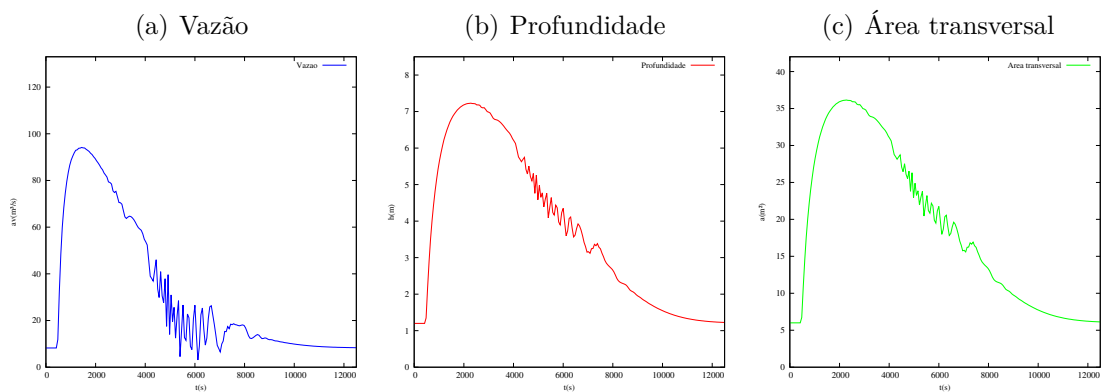


Figura 59 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$

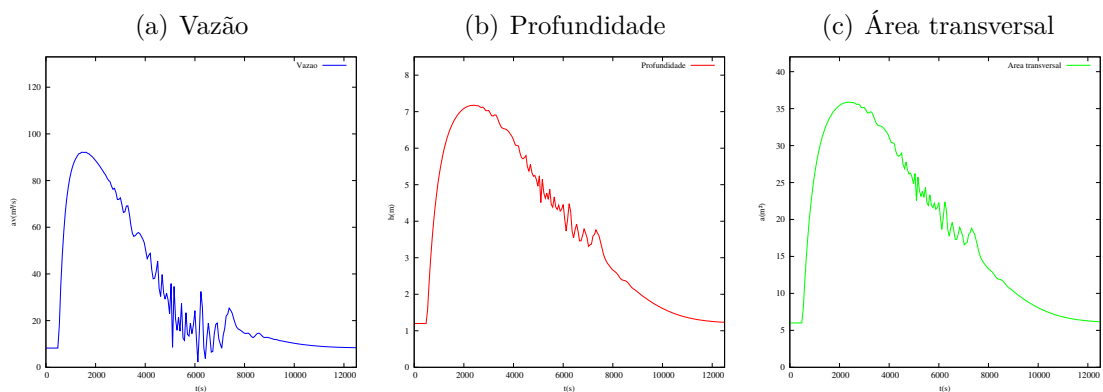
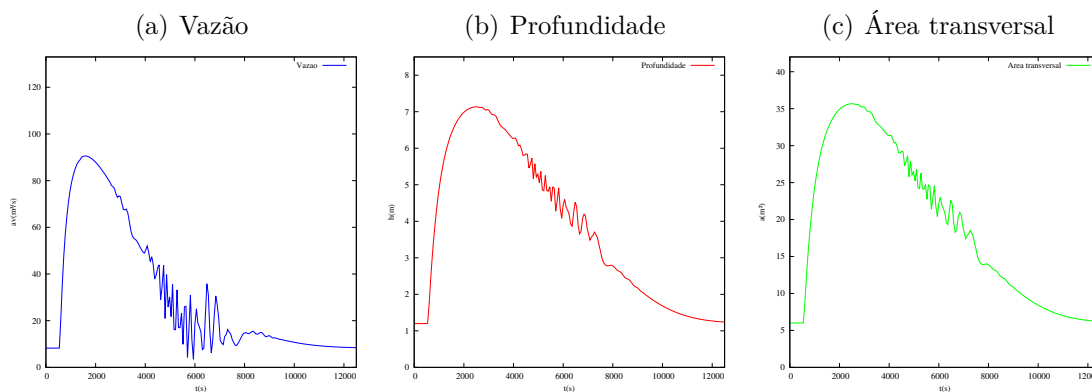
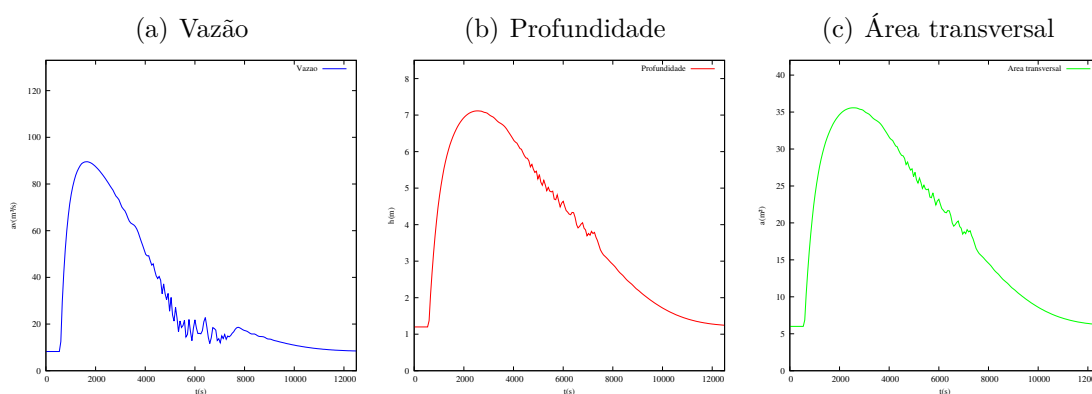


Figura 60 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880\text{ m}$ Figura 61 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000\text{ m}$ 

Nos gráficos desta seção, onde também são apresentadas a vazão, profundidade e a área transversal a cada 960 s, observamos que no tempo $t = 0\text{ s}$ o escoamento é uniforme, ou seja, podemos ver as condições iniciais, logo depois, aproximadamente entre os tempos $t = 1920\text{ s}$ e $t = 8640\text{ s}$ observamos oscilações nos resultados numéricos. Mesmo assim, a partir do tempo $t = 9600\text{ s}$, a vazão, profundidade e a área transversal molhada começam retornar às condições iniciais.

Nos hidrogramas, apresentados a cada 240 metros, podemos observar oscilações nos resultados numéricos. Aproximadamente a partir dos 960 metros não temos mais gráficos suaves da situação, neles podemos observar o que acontece com a vazão, a profundidade e a área transversal molhada em diferentes pontos do canal.

4.3 Trocando o k

Nesta seção modificamos o valor de k na tentativa de eliminar as oscilações nos resultados numéricos na [seção 4.2](#). Aqui apresentamos os gráficos em que a vazão vai desde $8,25 m^3/s$ até $132 m^3/s$, voltando à vazão inicial a partir de $t = 4800 s$. Usamos $k = 0.02$, $h = 30$ e parâmetro de ponderação $\alpha = 1$.

1. Gráficos da vazão, profundidade e área transversal para diferentes instantes do tempo.

Figura 62 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$

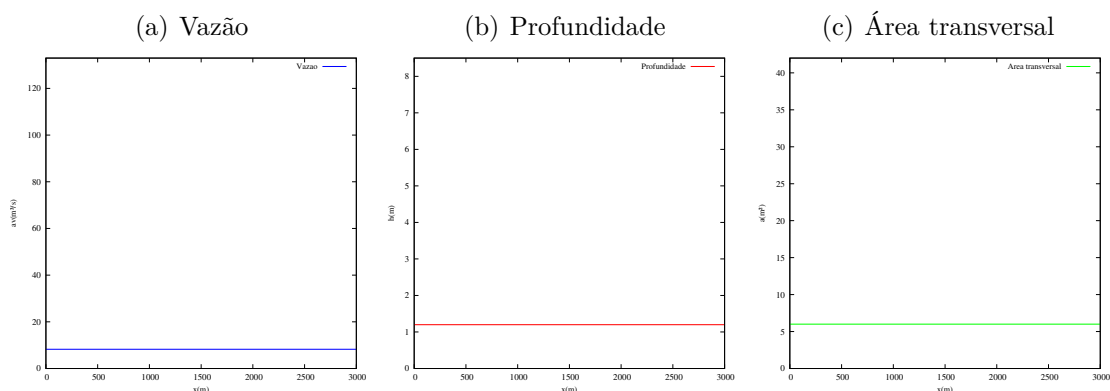


Figura 63 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$

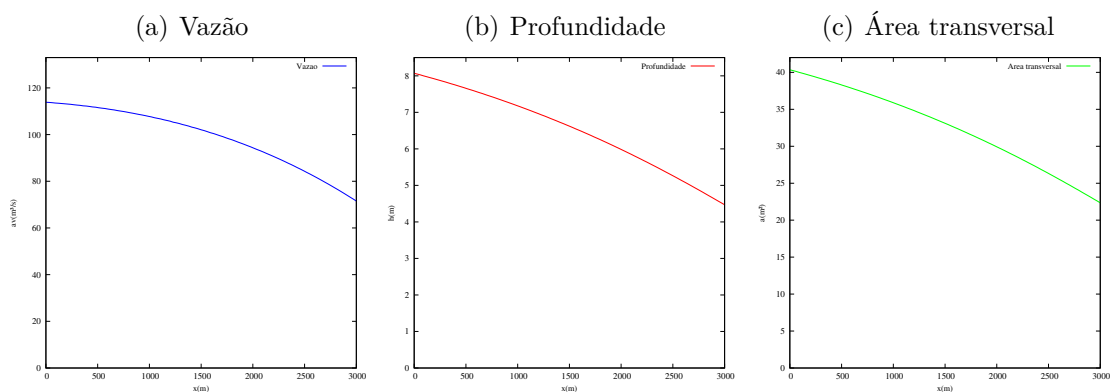


Figura 64 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920$ s

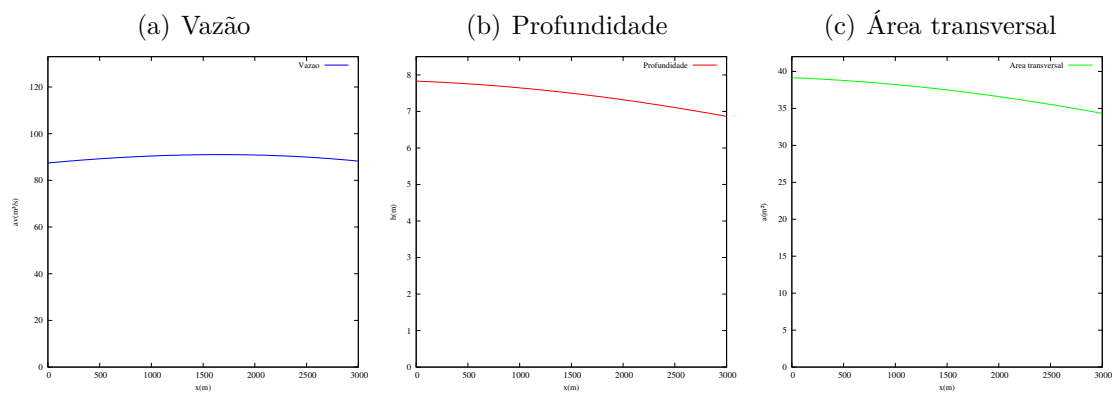


Figura 65 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880$ s

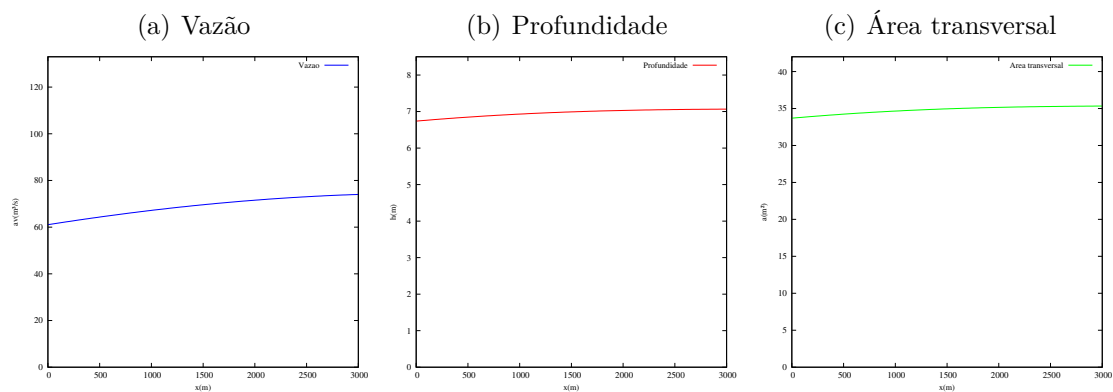


Figura 66 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840$ s

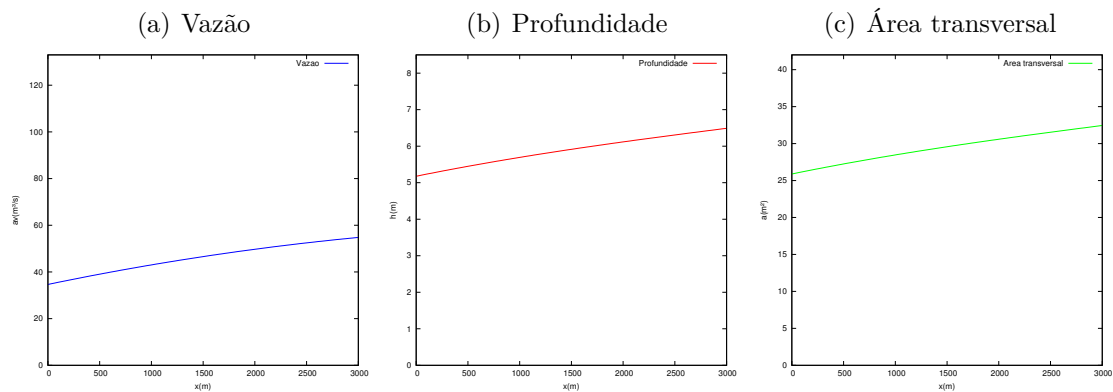


Figura 67 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800$ s

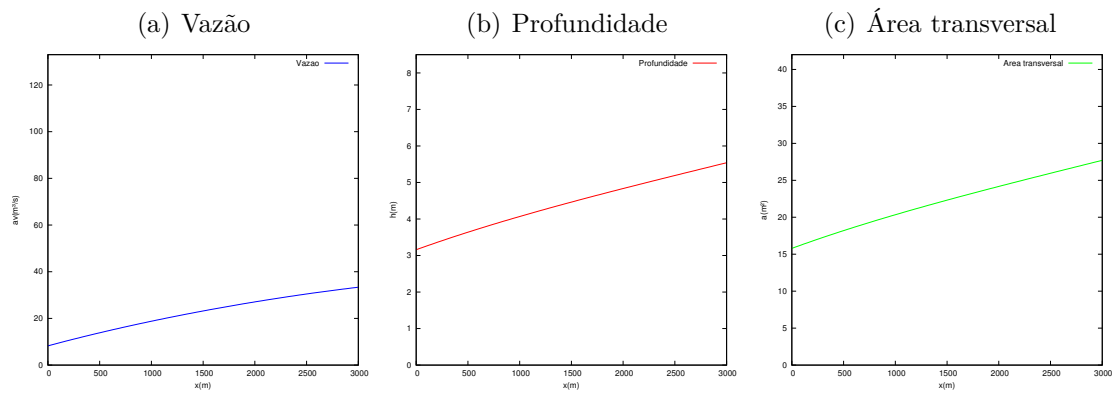


Figura 68 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760$ s

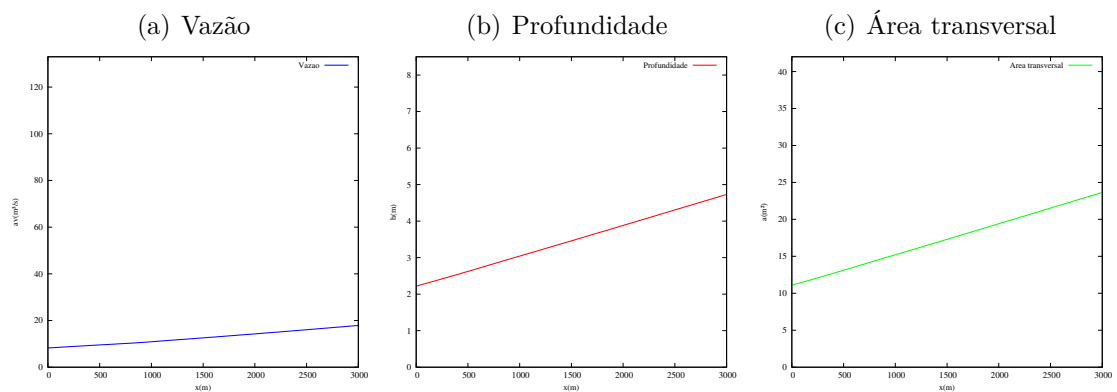


Figura 69 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720$ s

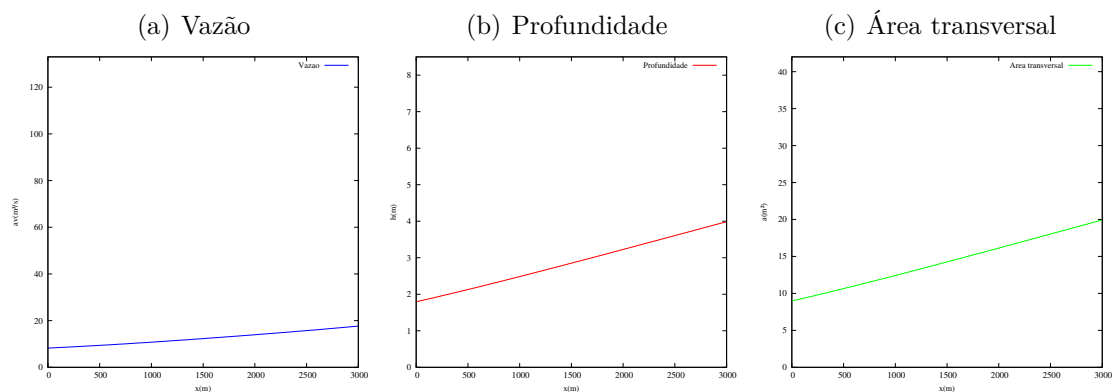


Figura 70 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680$ s

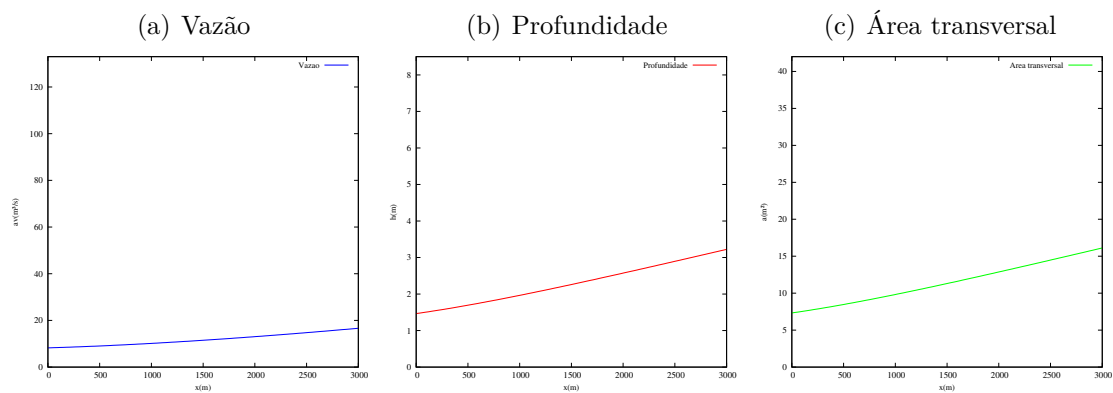


Figura 71 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640$ s

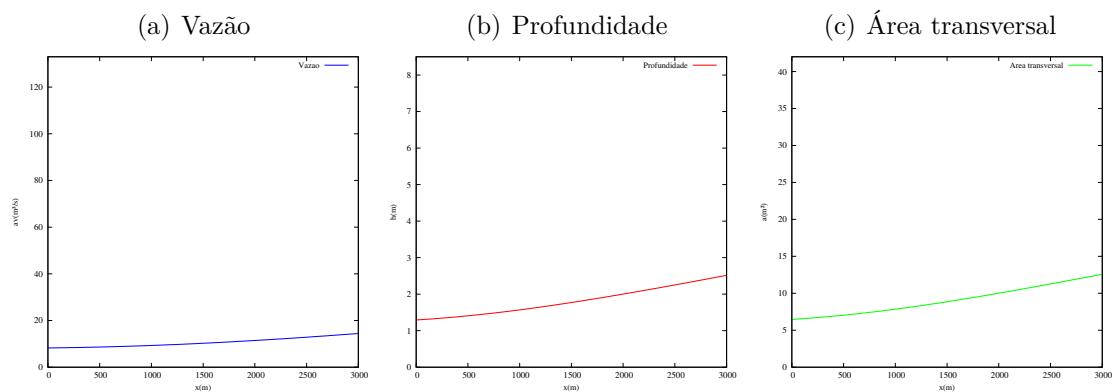


Figura 72 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600$ s

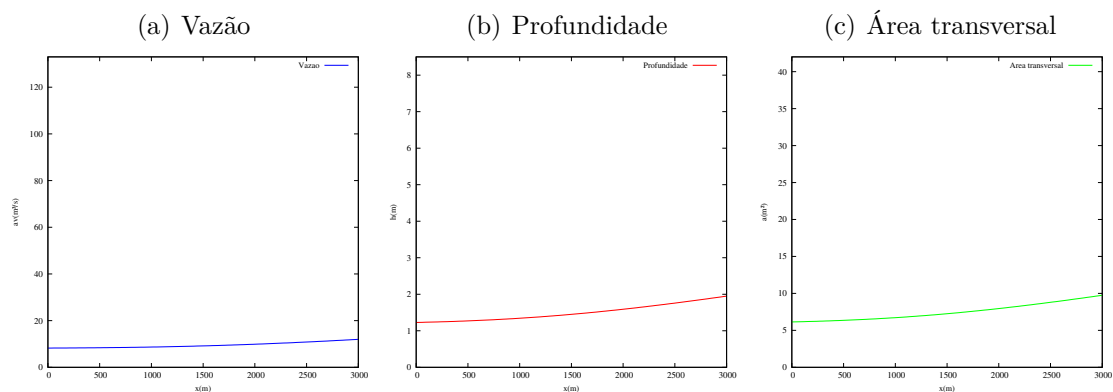


Figura 73 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560$ s

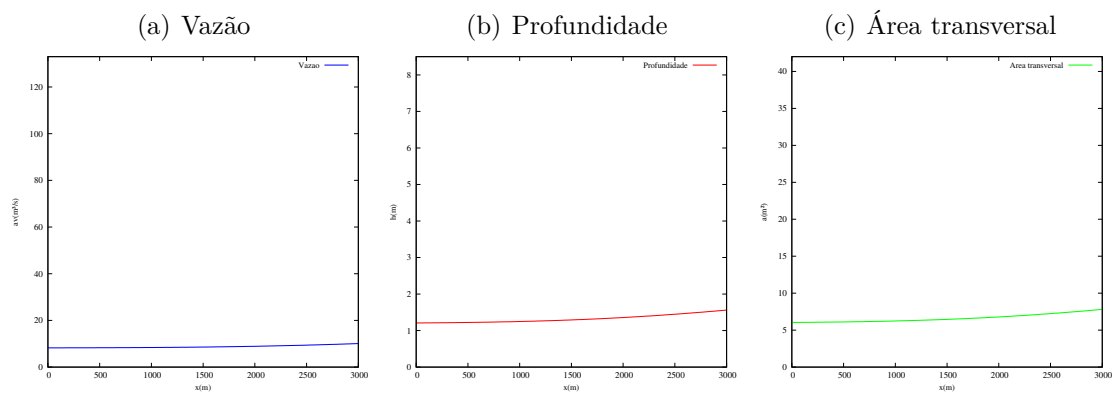


Figura 74 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520$ s

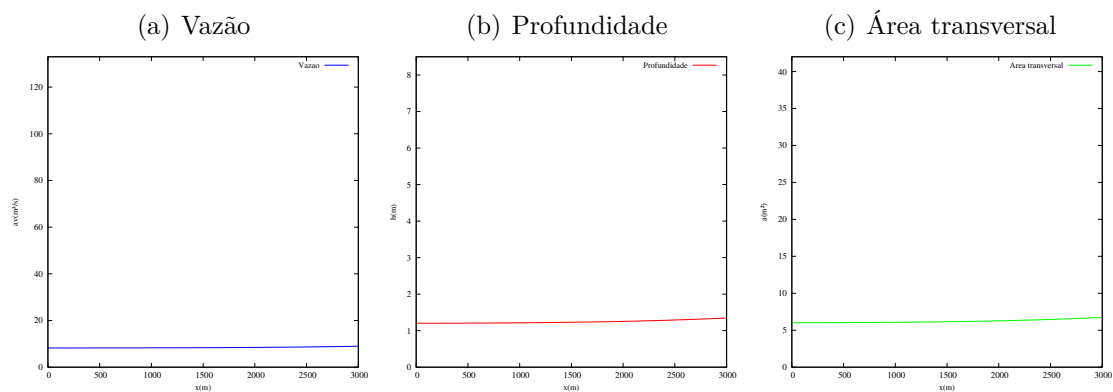


Figura 75 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480$ s

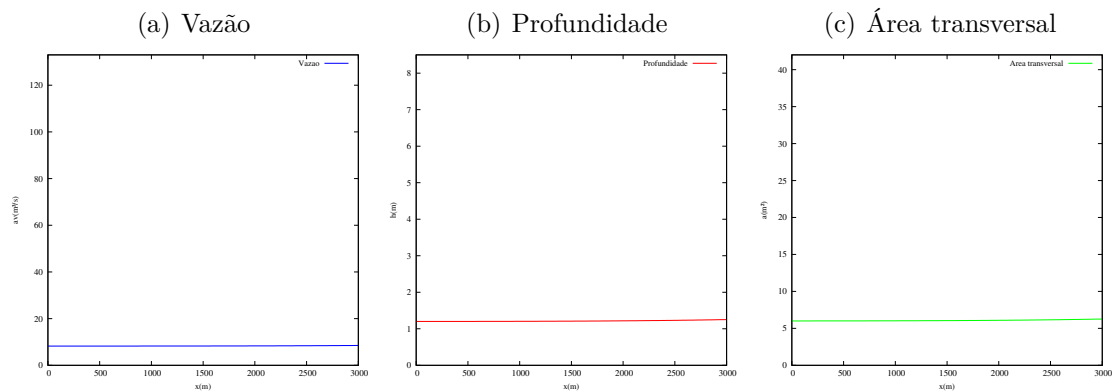
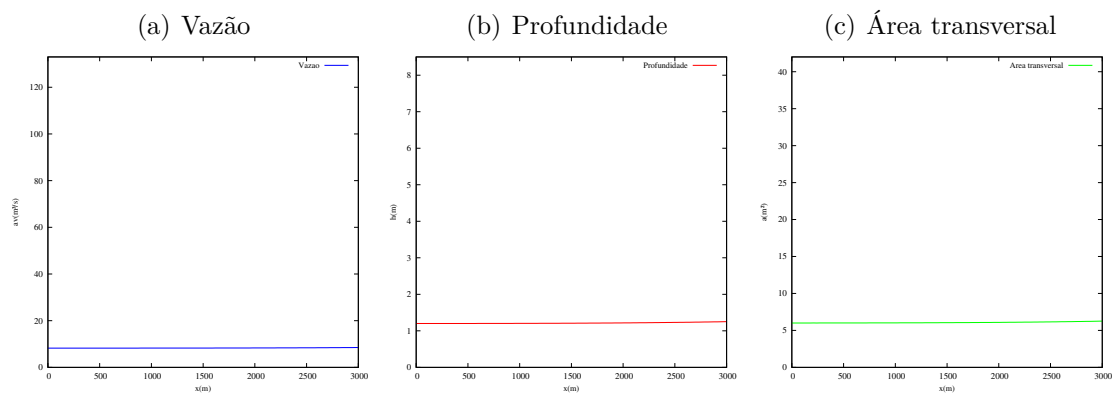


Figura 76 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500 s$



2. Hidrogramas: vazão, profundidade e área transversal para diferentes pontos do canal.

Figura 77 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}$

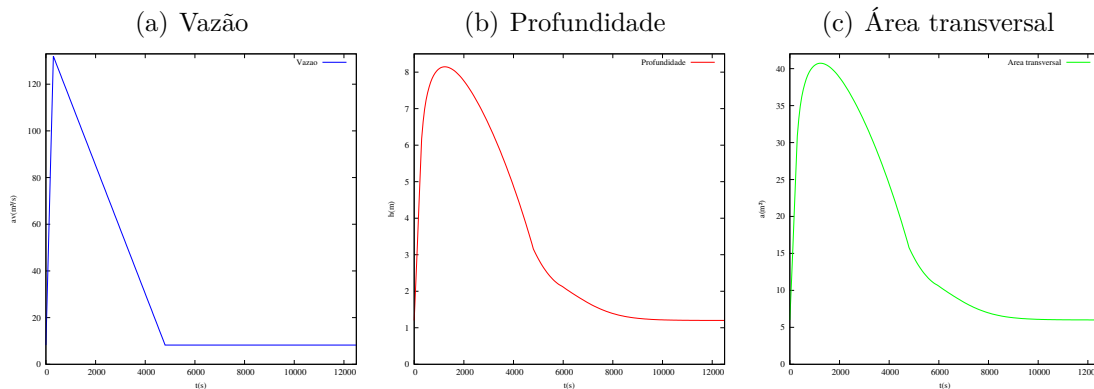


Figura 78 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240\text{ m}$

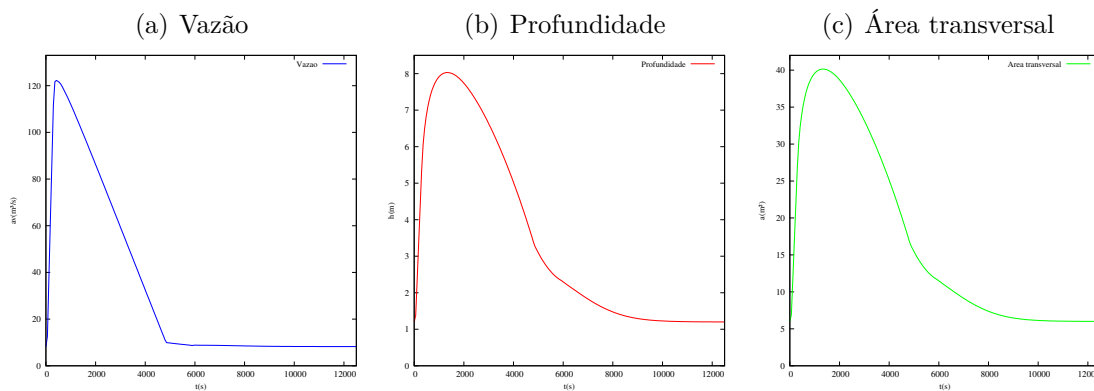


Figura 79 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480\text{ m}$

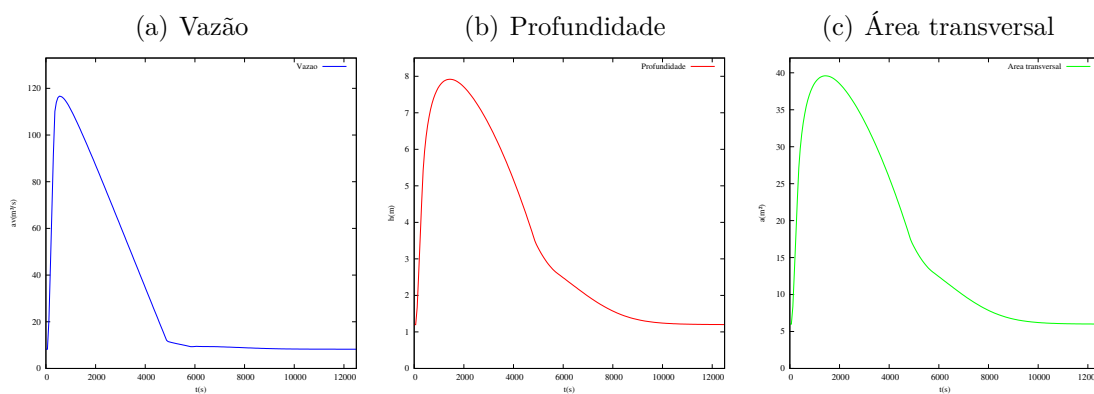


Figura 80 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720\text{ m}$

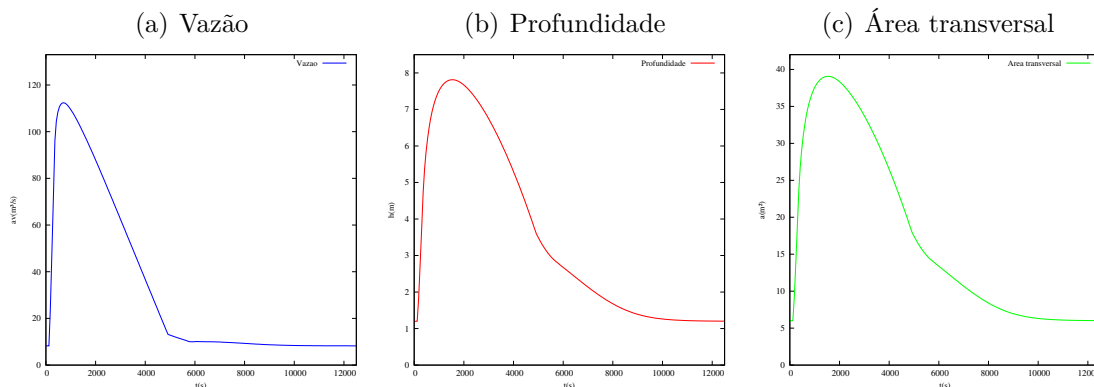


Figura 81 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960\text{ m}$

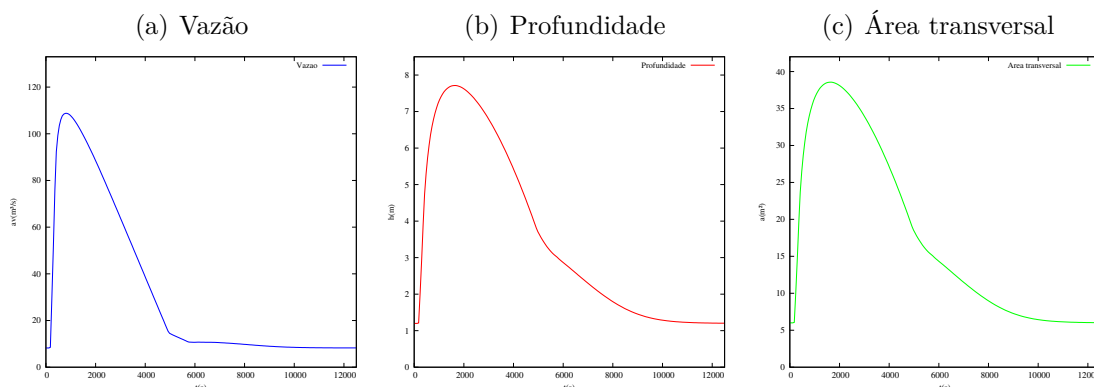


Figura 82 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200\text{ m}$

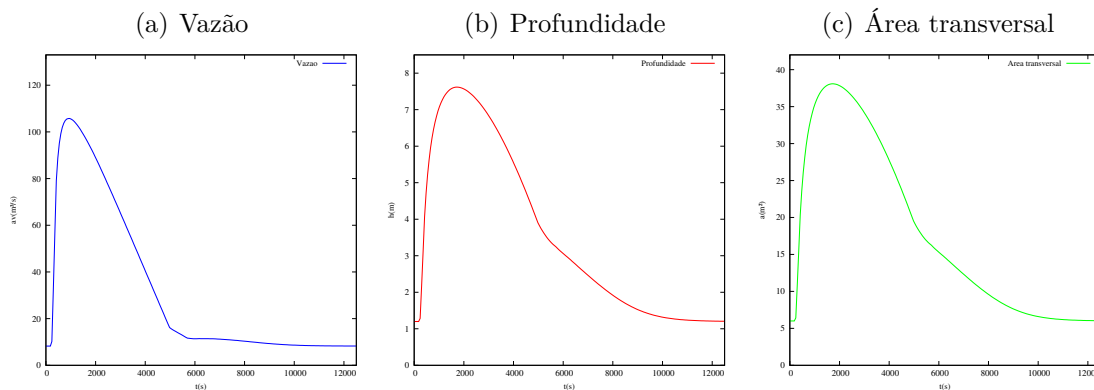


Figura 83 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440\text{ m}$

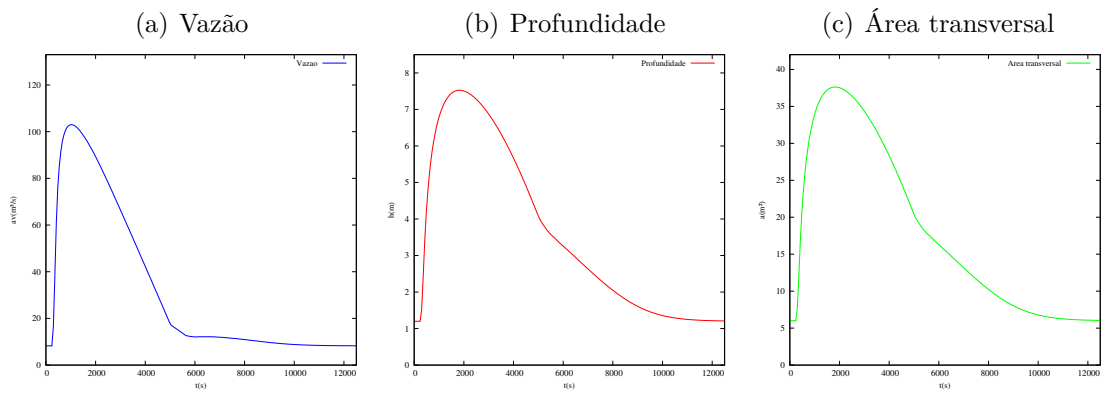


Figura 84 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680\text{ m}$

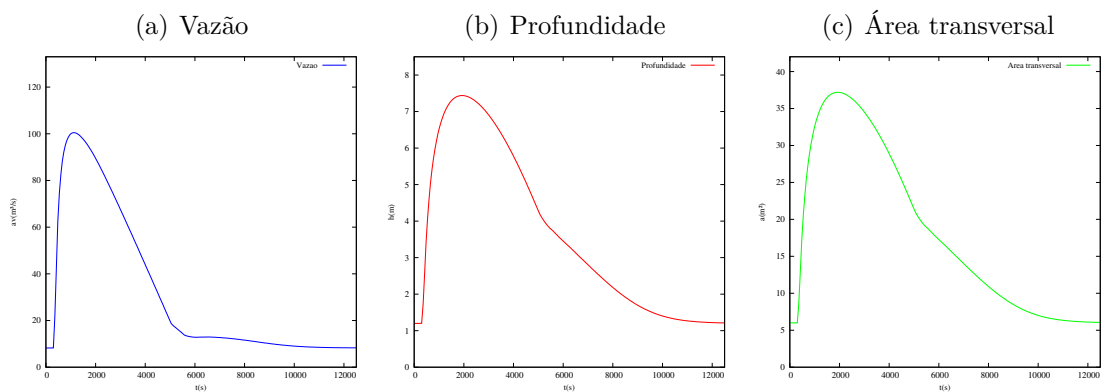


Figura 85 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920\text{ m}$

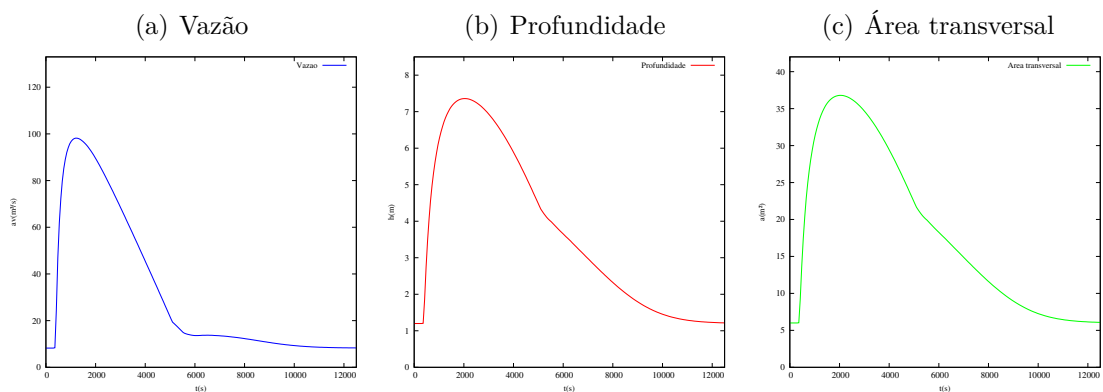


Figura 86 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160 m$

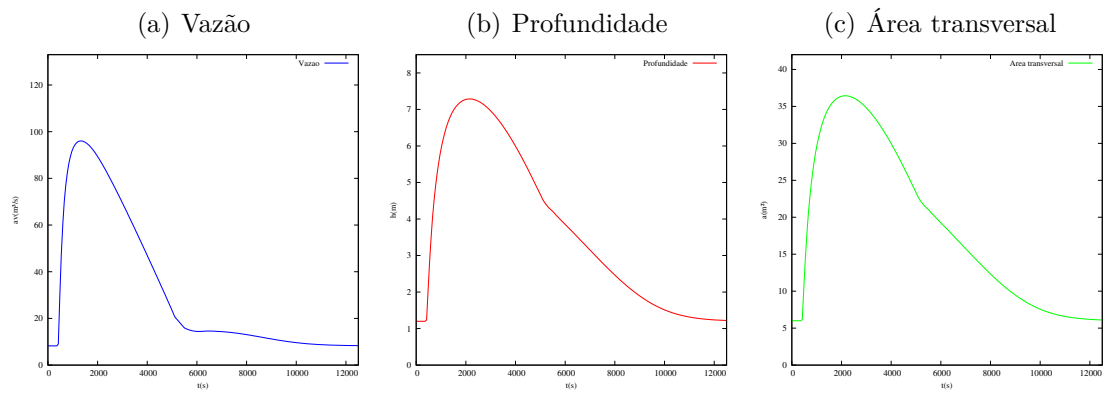


Figura 87 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400 m$

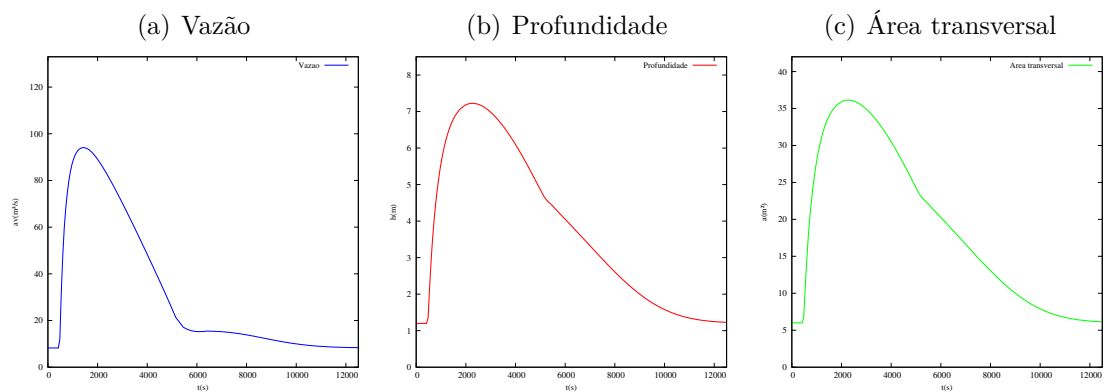


Figura 88 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640 m$

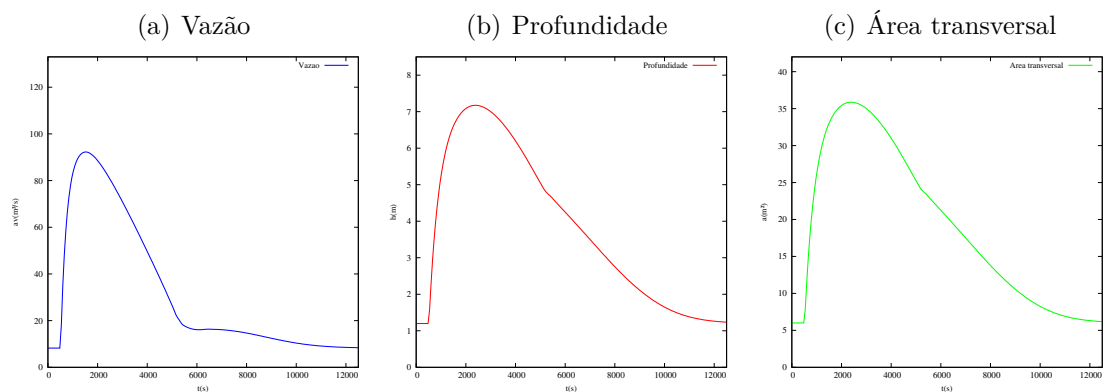
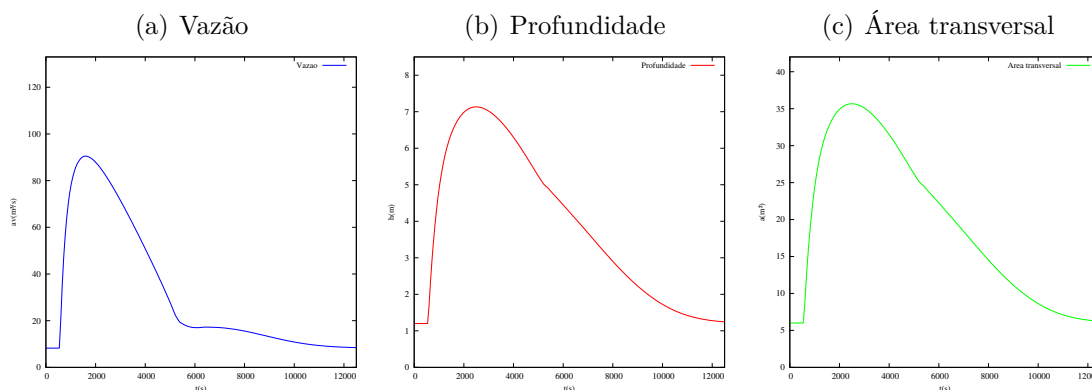
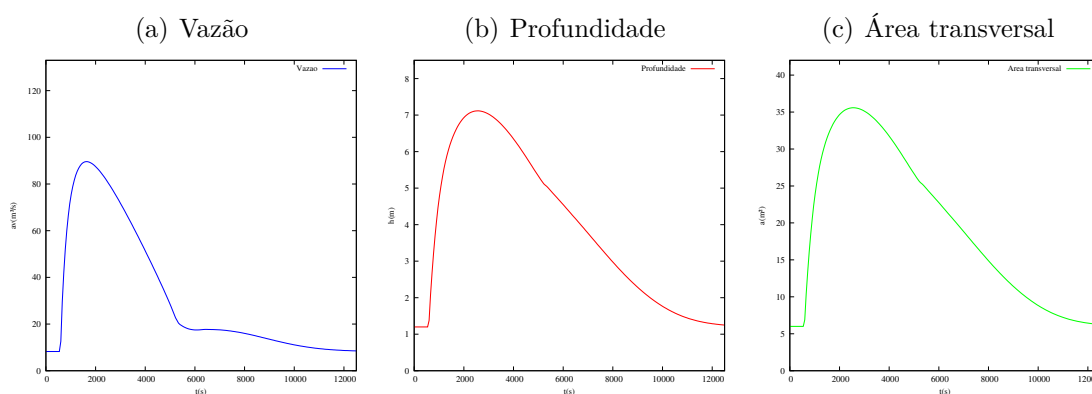


Figura 89 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880\text{ m}$ Figura 90 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000\text{ m}$ 

A primeira tentativa para eliminar as oscilações nos resultados numéricos foi trocar o valor de k . Após feito isso, nos gráficos desta seção, onde também são apresentadas a vazão, profundidade e a área transversal a cada 960 s, observamos novamente gráficos suaves que ilustram muito bem a situação: no tempo $t = 0\text{ s}$ (antes do início da cheia) podemos observar as condições iniciais, logo depois, a vazão, profundidade e a área transversal mudam ao longo do tempo e aproximadamente a partir do tempo $t = 9600\text{ s}$ se retorna ao escoamento uniforme, ou seja, os valores da vazão, profundidade e área transversal molhada tornam-se iguais aos valores iniciais.

Nos hidrogramas, que são mostrados a cada 240 metros, não temos mais oscilações nos resultados numéricos, agora, novamente obtivemos gráficos suaves que ilustram satisfatoriamente a situação. Neles podemos observar o que acontece com a vazão, a profundidade e a área transversal molhada em diferentes pontos do canal.

4.4 Trocando o coeficiente de ponderação α

Nesta seção modificamos o parâmetro de ponderação α também na busca de eliminar as oscilações na [seção 4.2](#). Aqui apresentamos os gráficos em que a vazão vai desde $8,25 m^3/s$ até $132 m^3/s$, voltando à vazão inicial a partir de $t = 4800 s$. Usamos $k = 0.1$, $h = 30$ e parâmetro de ponderação $\alpha = 0.75$.

1. Gráficos da vazão, profundidade e área transversal para diferentes instantes do tempo.

Figura 91 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s$

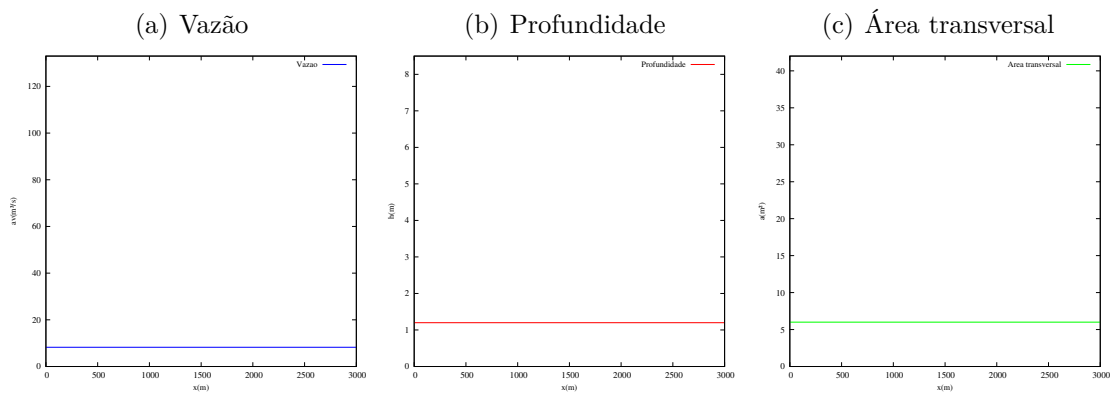


Figura 92 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 960 s$

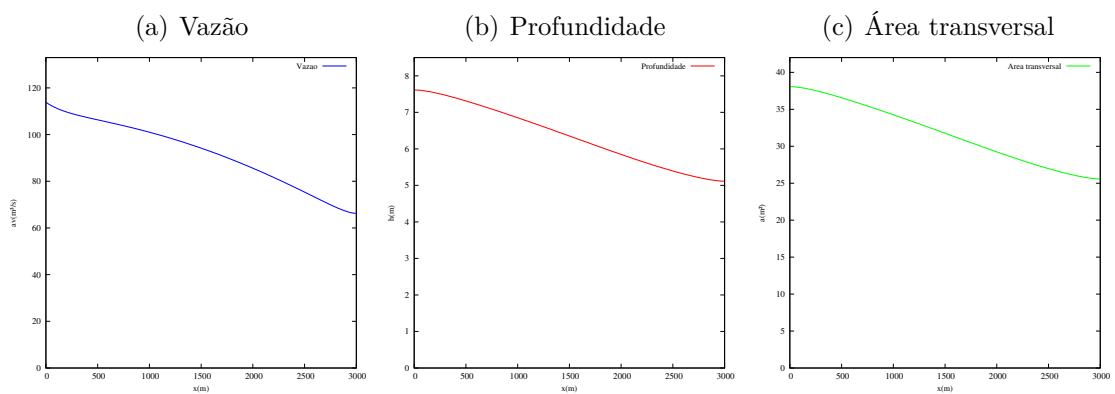


Figura 93 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 1920$ s

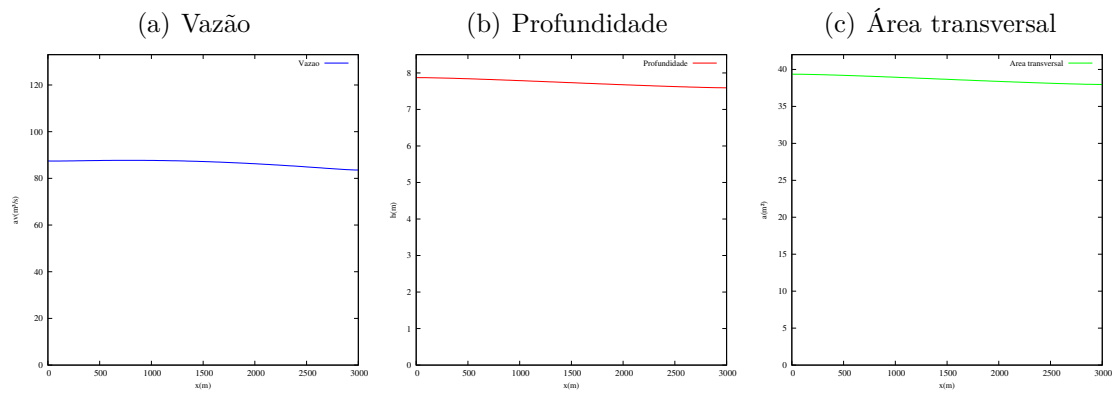


Figura 94 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 2880$ s

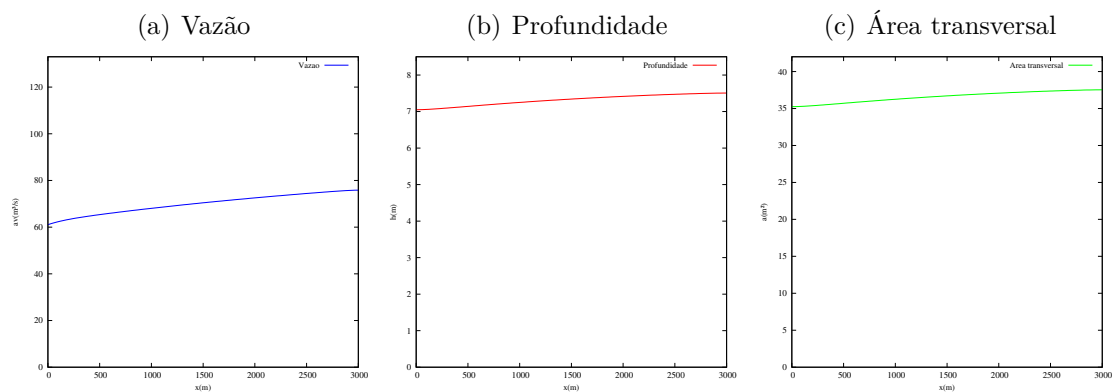


Figura 95 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 3840$ s

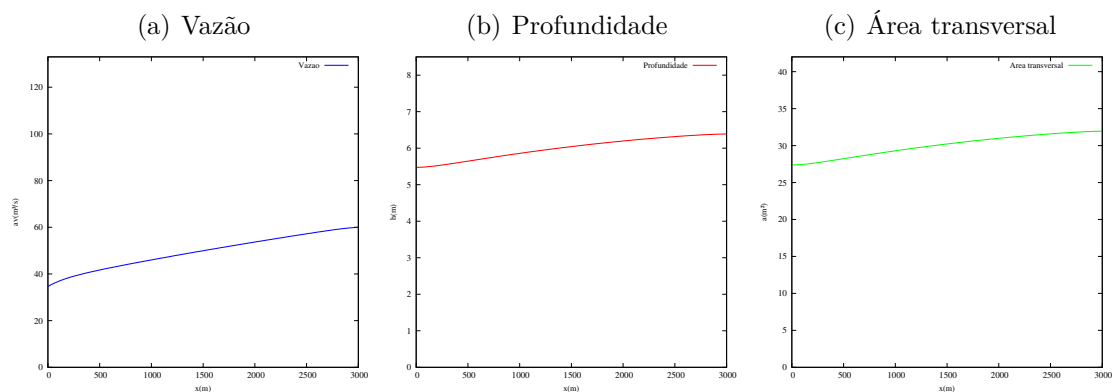


Figura 96 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 4800$ s

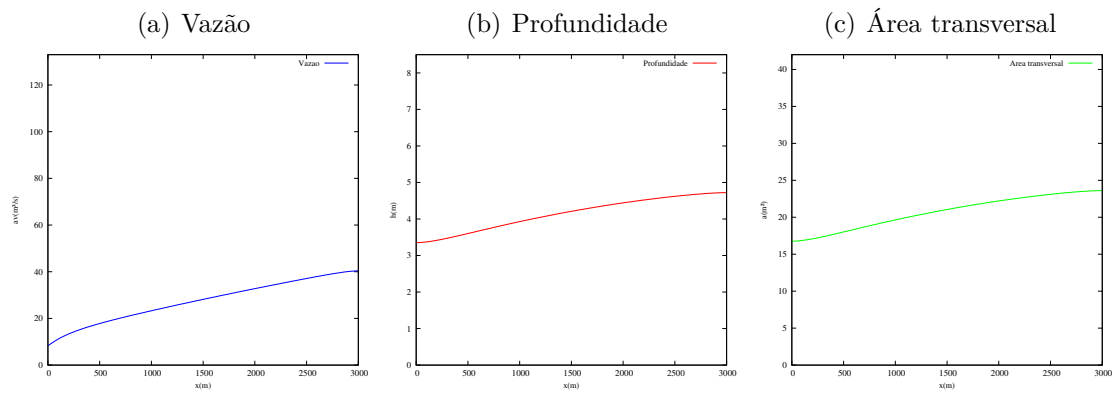


Figura 97 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 5760$ s

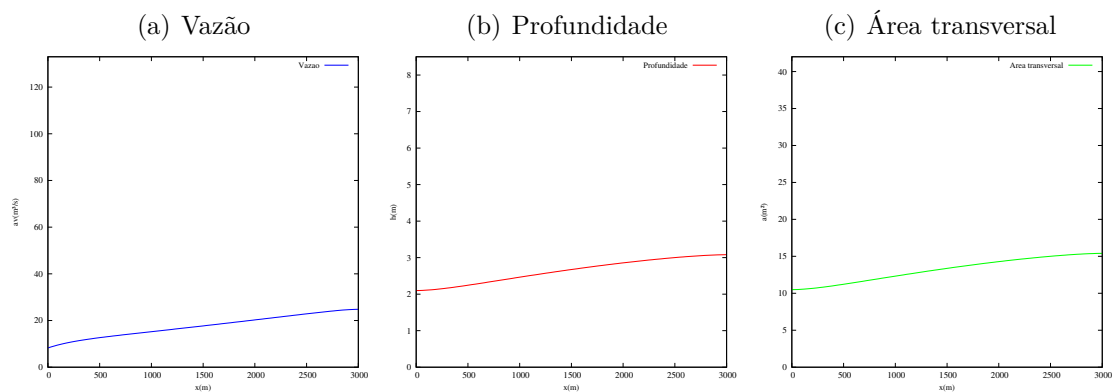


Figura 98 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 6720$ s

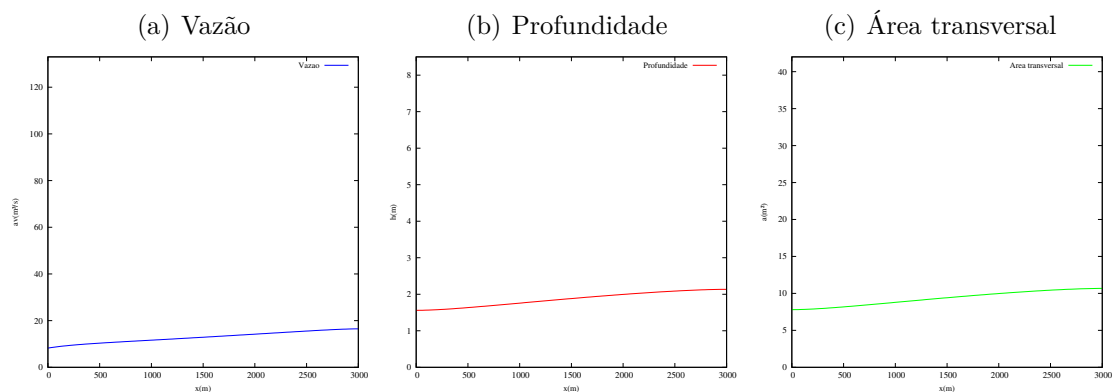


Figura 99 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 7680$ s

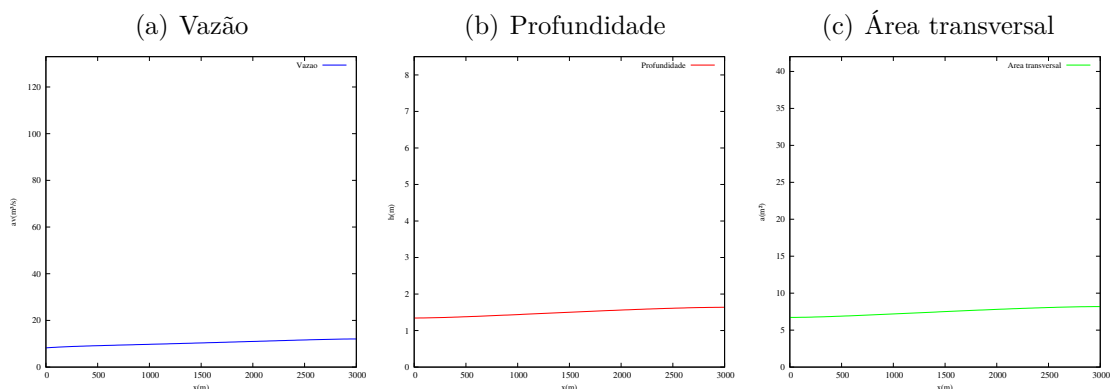


Figura 100 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 8640$ s

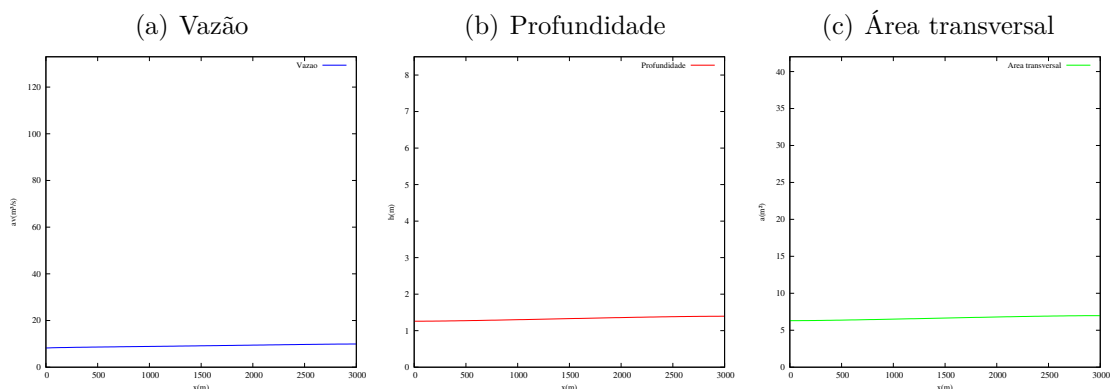


Figura 101 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 9600$ s

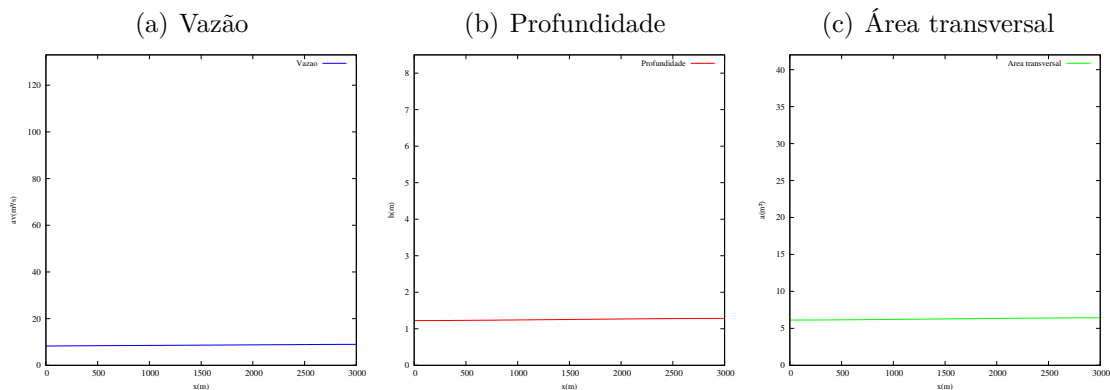


Figura 102 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 10560$ s

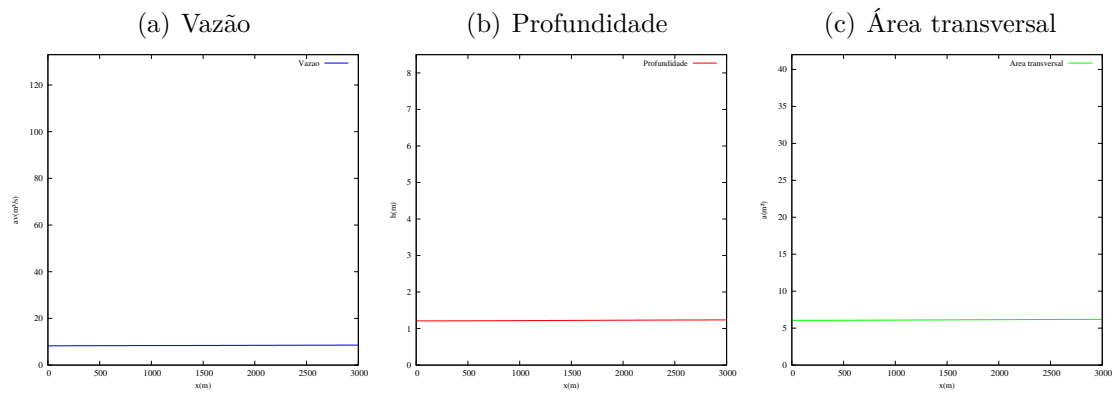


Figura 103 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 11520$ s

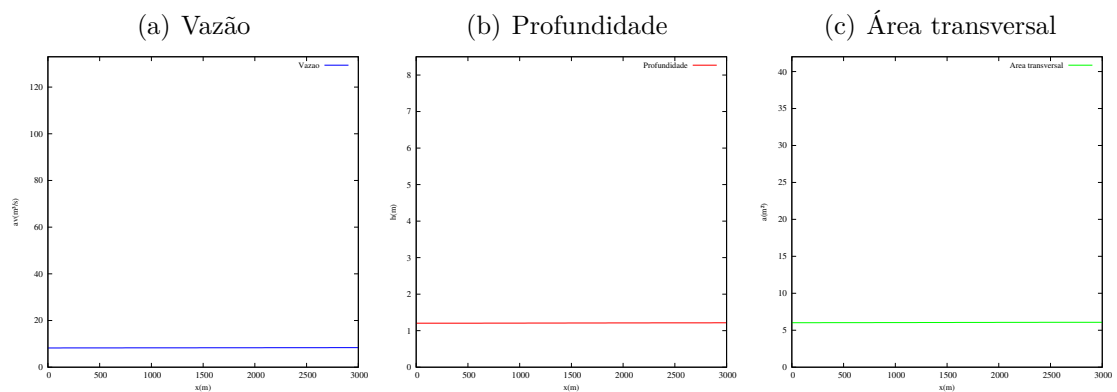


Figura 104 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12480$ s

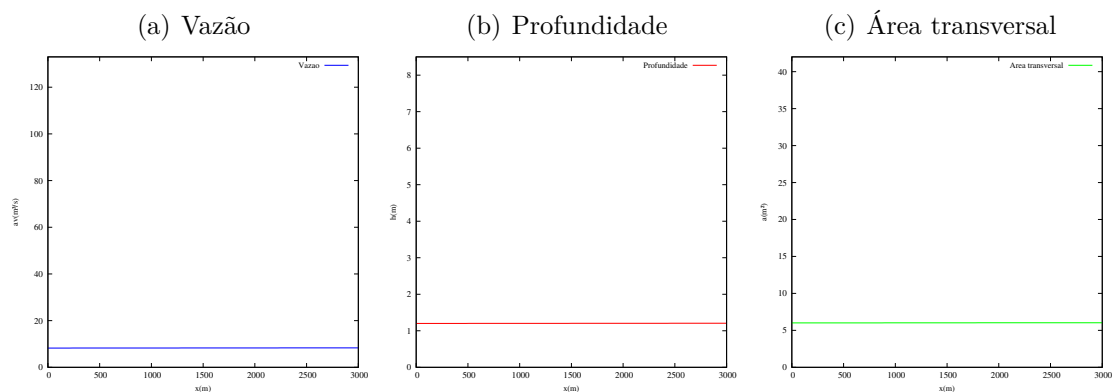
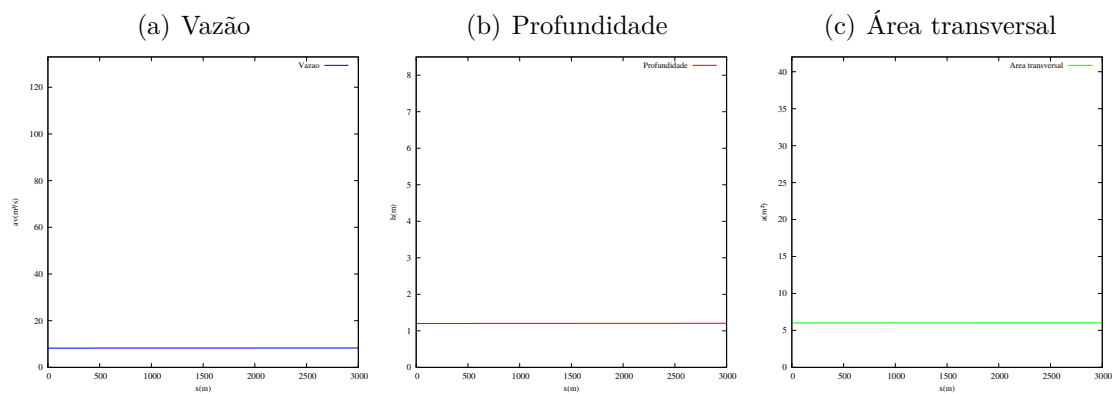


Figura 105 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 12500$ s



2. Hidrogramas: vazão, profundidade e área transversal para diferentes pontos do canal.

Figura 106 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}$

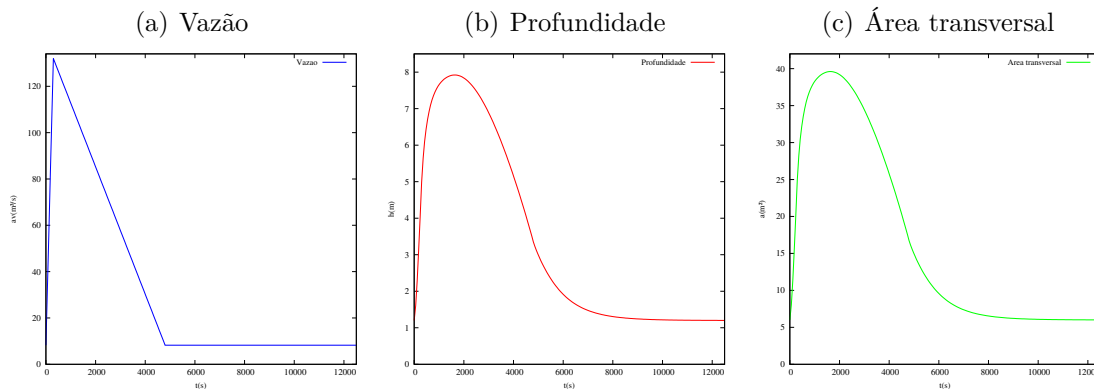


Figura 107 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 240\text{ m}$

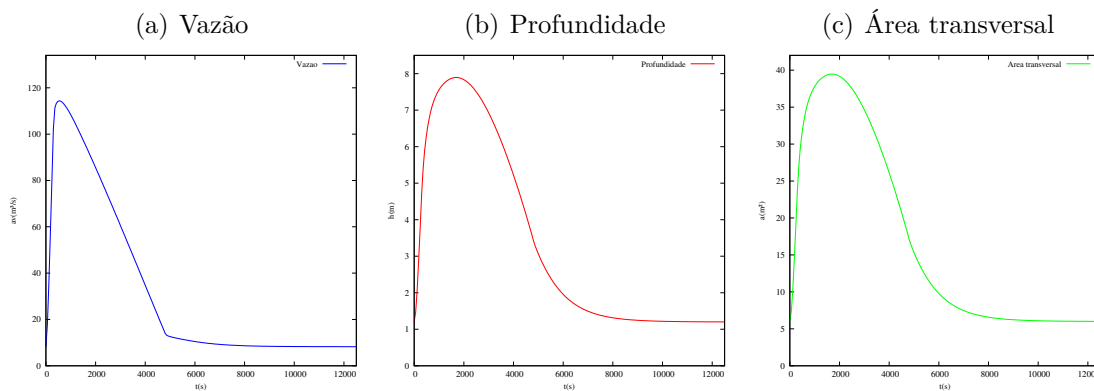


Figura 108 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 480\text{ m}$

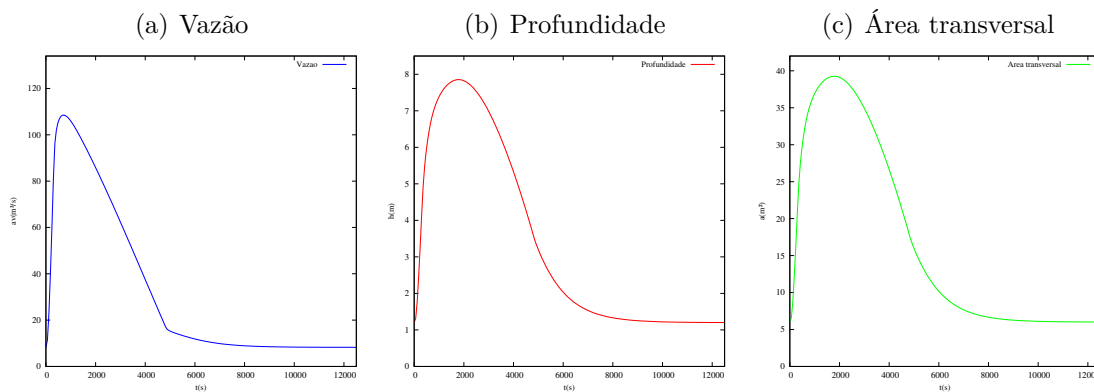


Figura 109 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 720\text{ m}$

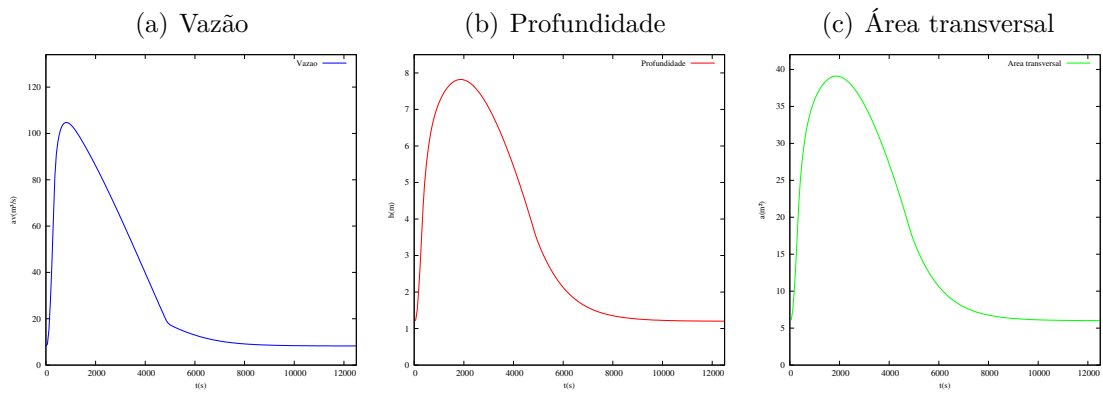


Figura 110 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 960\text{ m}$

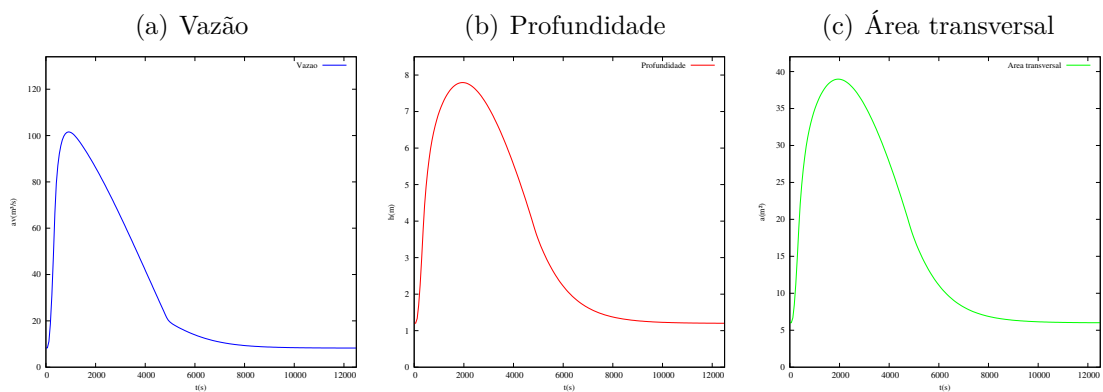


Figura 111 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1200\text{ m}$

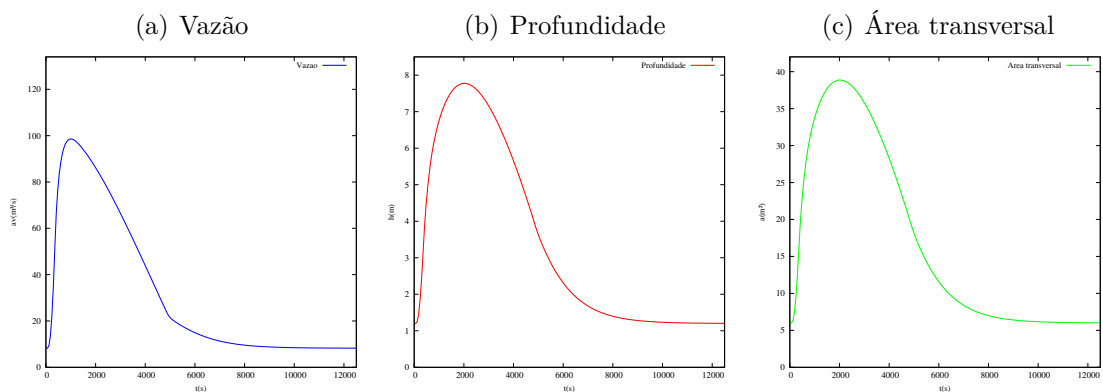


Figura 112 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1440\text{ m}$

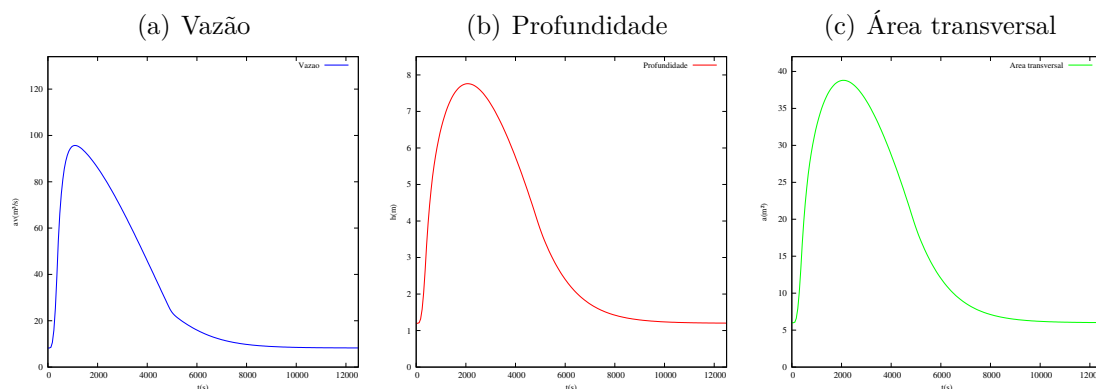


Figura 113 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1680\text{ m}$

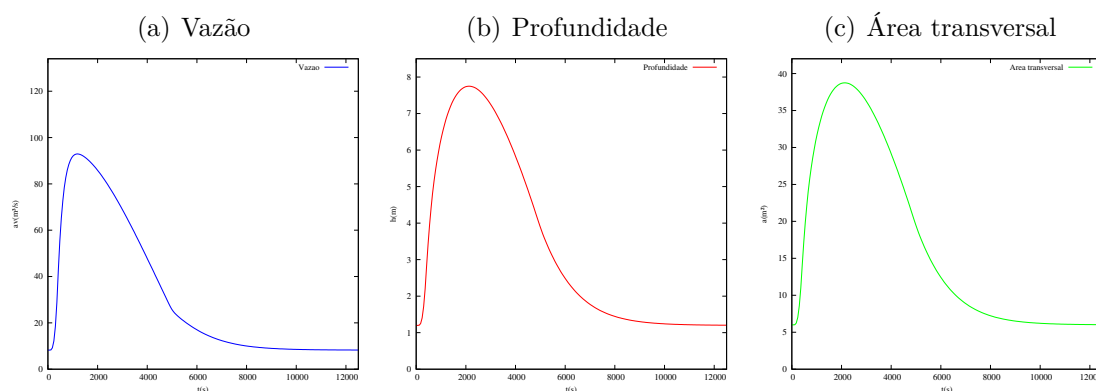


Figura 114 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 1920\text{ m}$

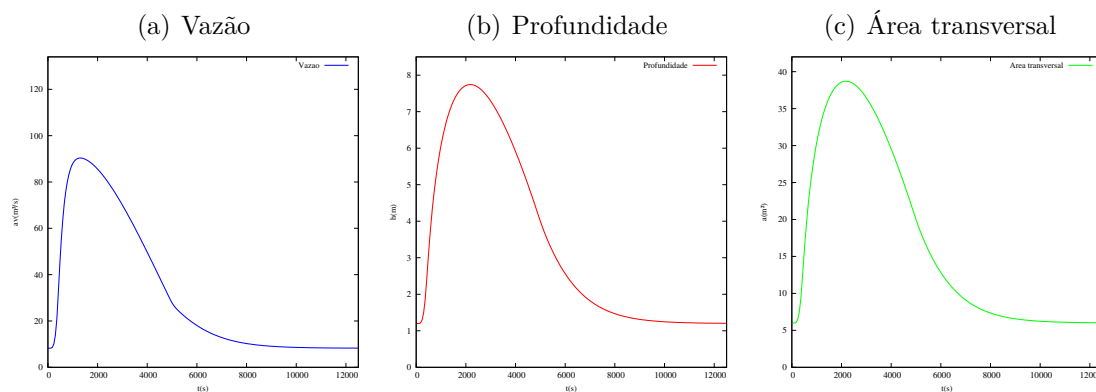


Figura 115 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2160\text{ m}$

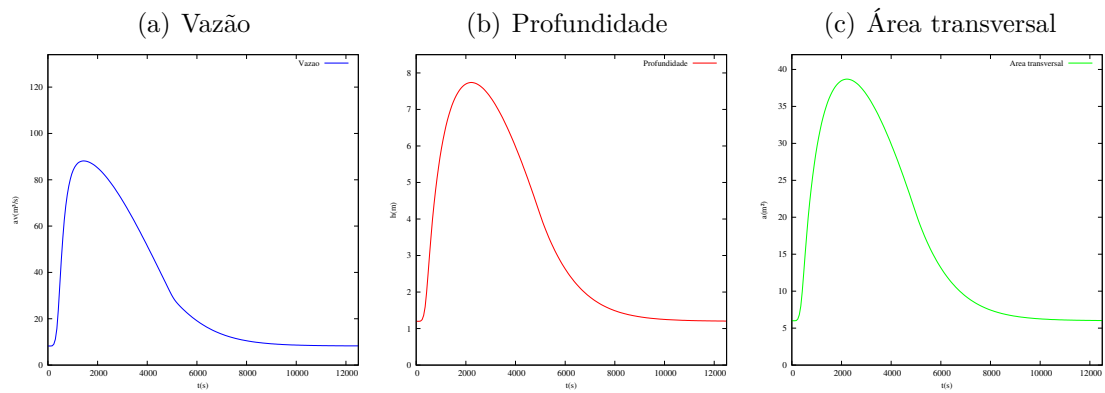


Figura 116 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2400\text{ m}$

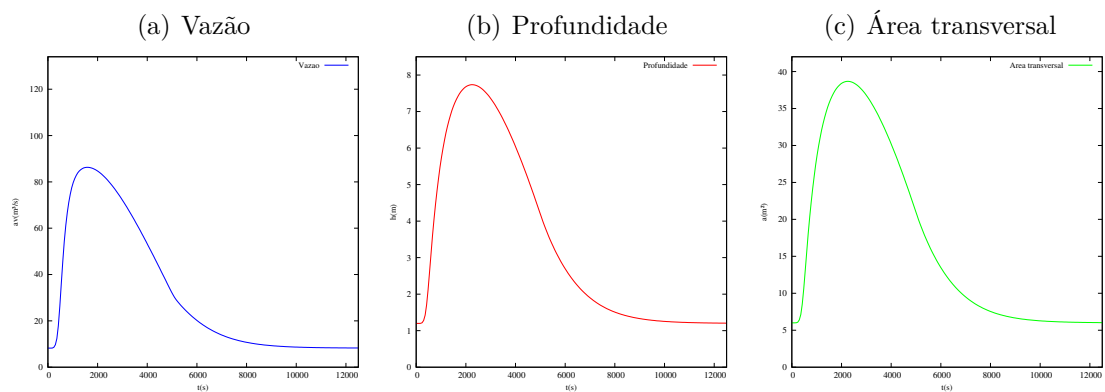


Figura 117 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2640\text{ m}$

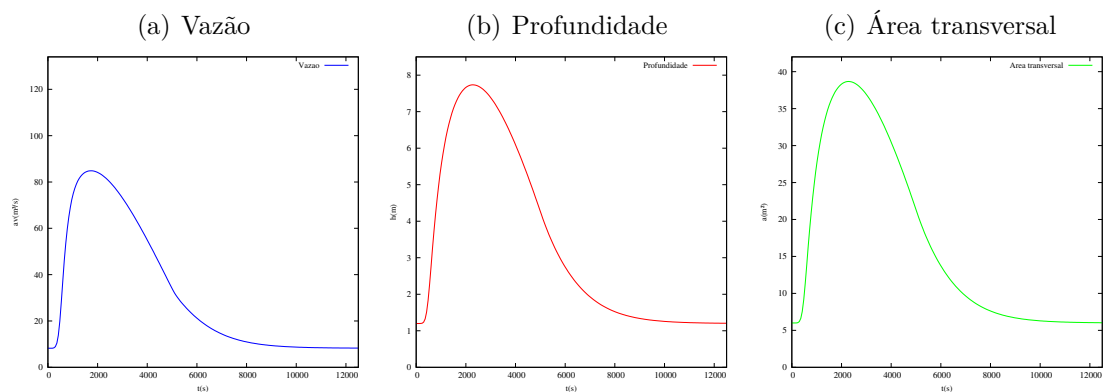
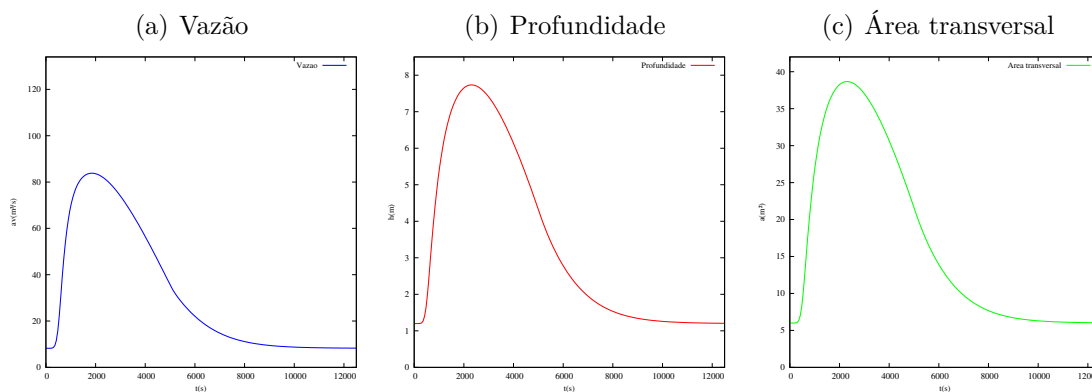
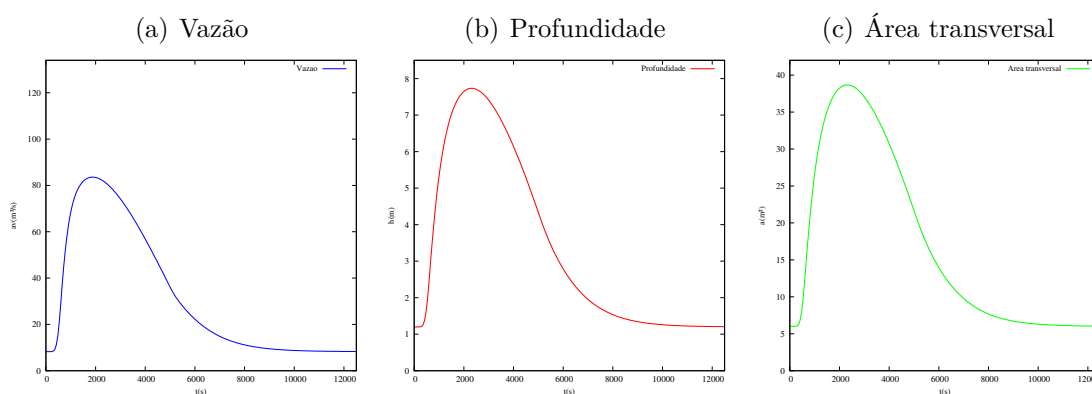


Figura 118 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 2880\text{ m}$ Figura 119 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 3000\text{ m}$ 

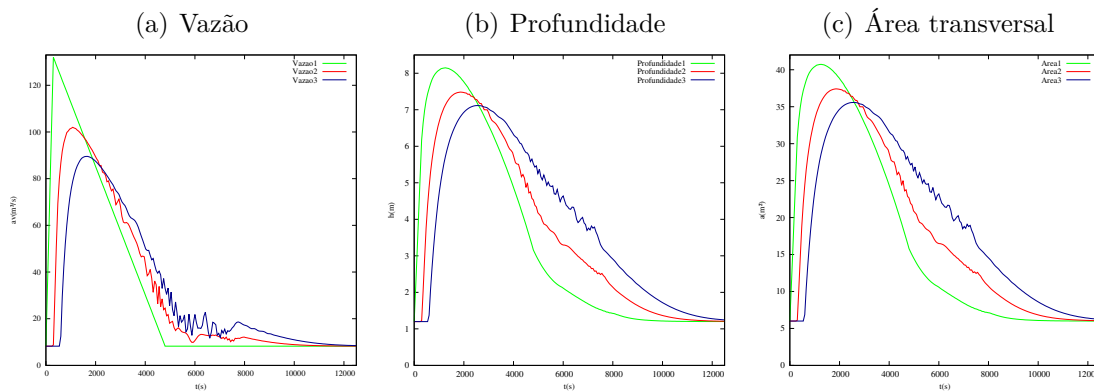
A segunda tentativa para eliminar as oscilações nos resultados numéricos foi trocar o valor do parâmetro de ponderação α . Após feito isso, nos gráficos desta seção, onde também são apresentadas a vazão, profundidade e a área transversal a cada 960 s, observamos novamente gráficos agora muito mais suaves que ilustram muito bem a situação. Mas como já foi dito no [Capítulo 1](#), com a modificação do α se introduz difusão artificial. Mesmo assim, no tempo $t = 0\text{ s}$ observamos as condições iniciais, logo depois, a vazão, profundidade e a área transversal mudam ao longo do tempo, e aproximadamente a partir do tempo $t = 9600\text{ s}$, se retorna ao escoamento uniforme, ou seja, os valores da vazão, profundidade e área transversal molhada tornam-se iguais aos valores iniciais.

Nos hidrogramas, que são mostrados a cada 240 metros, não temos mais oscilações nos resultados numéricos. Agora, novamente, obtivemos gráficos muito mais suaves que ilustram satisfatoriamente a situação. Neles podemos observar o que acontece com a vazão, a profundidade e a área transversal molhada em diferentes pontos do canal.

4.5 Seção inicial, média e final do canal.

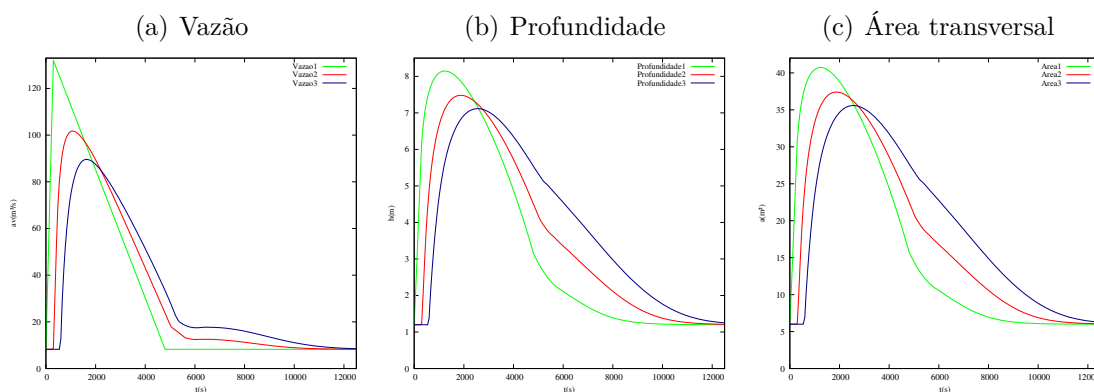
1. Vazão máxima e instabilidade.

Figura 120 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}, 1680\text{ m}, 3000\text{ m}$



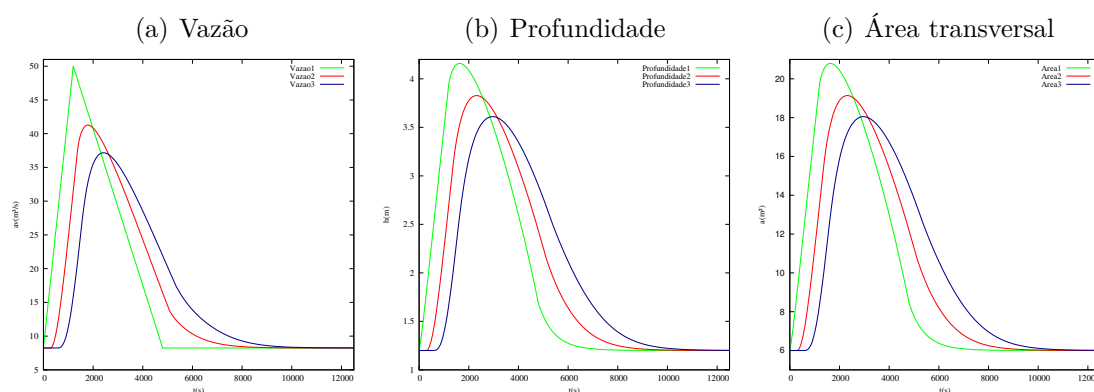
2. Trocando o k .

Figura 121 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}, 1680\text{ m}, 3000\text{ m}$



3. Trocando o parâmetro de ponderação α

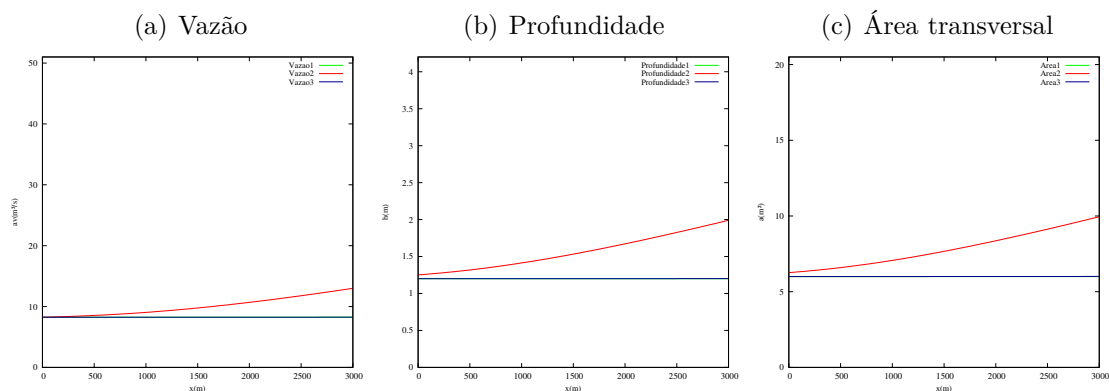
Figura 122 – Vazão, profundidade e área transversal para $x = 0\text{ m}, 1680\text{ m}, 3000\text{ m}$



4.6 Instante do tempo inicial, médio e final

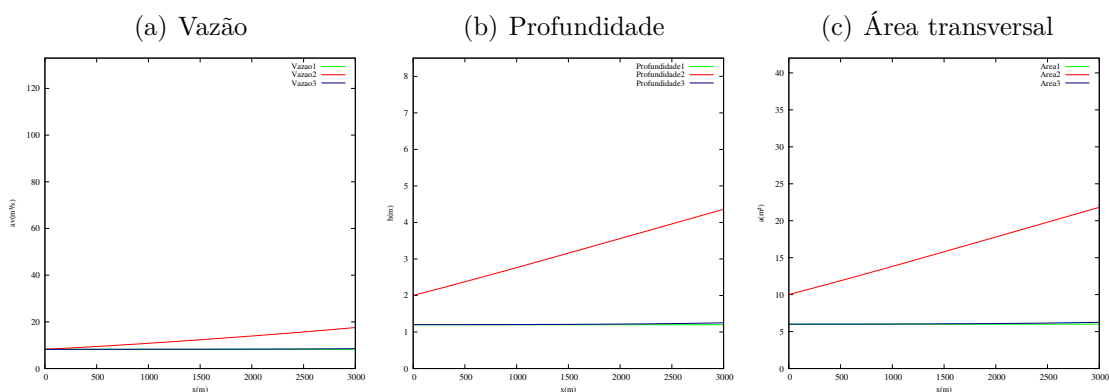
1. Vazão máxima e instabilidade.

Figura 123 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$



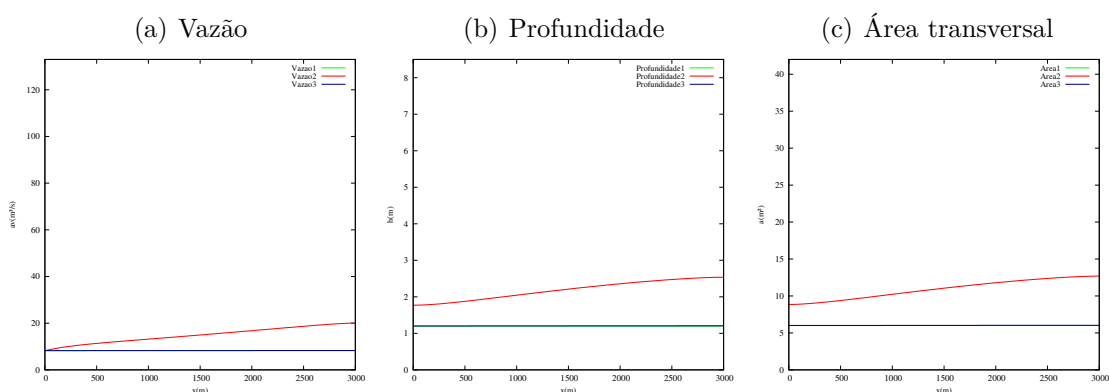
2. Trocando o k .

Figura 124 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$



3. Trocando o parâmetro de ponderação α

Figura 125 – Vazão, profundidade e área transversal para $t = 0 s, 6720 s, 12500 s$



5 CONCLUSÕES

Com os dados de (PORTO, 2006), a vazão máxima é atingida no tempo $t = 1200 s$ e daí decresce linearmente em um tempo de $3600 s$, como mostra a [Figura 3](#); neste caso os resultados numéricos são muito satisfatórios, pois nos gráficos da vazão, profundidade e área transversal, antes do início da cheia, evidencia-se o escoamento uniforme, logo depois o aumento dos valores das variáveis ao longo do tempo até novamente retornar ao escoamento uniforme a partir do tempo $t = 10560 s$ e no caso dos hidrogramas, observa-se o que acontece em cada ponto do canal em todos os tempos computacionais.

Se a vazão no contorno aumenta linearmente até o valor máximo em $300 s$, e decresce linearmente até o valor inicial em um tempo de $4500 s$, então, para $k = 0.1$ e $h = 30$, a vazão máxima que **não** gera oscilações nos dados, é $115 m^3/s$, usando $\alpha = 1$ no esquema difusivo.

Na tentativa de aumentar esse valor da vazão no contorno, fizemos o seguinte:

- Diminuir o valor do k ;
- Diminuir o valor do parâmetro de ponderação α .

No primeiro caso, para $k = 0.02$ e $h = 30$ chegamos à conclusão de que a vazão no contorno pode ser aumentada até $125 m^3/s$ usando $\alpha = 1$ no esquema difusivo. No segundo caso, para $k = 0.1$ e $h = 30$, alguns resultados obtidos com diferentes parâmetros de ponderação são apresentados na [Tabela 1](#)

Tabela 1 – Vazões máximas atingidas.

Parâmetro de ponderação α	Vazão máxima
0.998828125	$500 m^3/s$
0.9991210938	$400 m^3/s$
0.9993652344	$300 m^3/s$
0.999609375	$200 m^3/s$
1	$125 m^3/s$

Fonte: Produzido pelos autores.

A [Tabela 1](#) mostra que mínimas variações do parâmetro de ponderação podem fazer com que nosso programa trabalhe com vazões maiores.

Em conclusão, as equações de Saint-Venant, com uma condição de contorno sobre a vazão, foram resolvidas usando um método explícito, mais exatamente um esquema difusivo do tipo Lax-Friedrichs, baseado em um método de diferenças finitas clássico (Apêndice A); achamos o valor máximo da vazão que não gerou oscilações nos resultados e fizemos duas tentativas para melhorar a instabilidade e aumentar o valor da vazão: primeiro, diminuindo o valor de k , com o qual efetivamente conseguimos aumentar o valor da vazão mantendo $\alpha = 1$ no esquema. Em segundo lugar, diminuindo o valor do parâmetro de ponderação e mantendo $k = 0.1$ e $h = 30$; nesta segunda alternativa, quando usamos $\alpha = 0.75$ em lugar de $\alpha = 1$ observamos que os gráficos da vazão, profundidade e área transversal molhada ficaram muito mais suaves, mas se introduz uma difusão artificial muito alta que, na prática, seria questionável, devido que, como mostra a Tabela 1, pequenas modificações no parâmetro de ponderação dão lugar a valores exagerados da vazão.

Como perspectivas futuras poderíamos pensar em uma alternativa que (MARTÍNEZ, 2021) propõe: usar um método totalmente implícito mas com resolução direta dos sistemas não lineares, além do que (MARTÍNEZ, 2021) também propõe, coletar dados a partir de observações simples, ou seja, sem envolver aparelhos sofisticados no processo.

Referências

- BURDEN, R. L. *Numerical Analysis*. Berkeley: Cengage Learning., 2011. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 33, 34 e 88.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Berkeley: American Mathematical Society., 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- IÓRIO, V. de M. *EDP. Um curso de graduação*. Rio de Janeiro: IMPA., 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- LEVEQUE, R. J. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Equations*. Cambridge: [s.n.], 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.
- _____. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia: SIAM., 2007. Citado 10 vezes nas páginas 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 33 e 88.
- MARTÍNEZ, J. M. *Cálculo dos parâmetros necessários para a simulação de fluidos em canais naturais a partir de medições simples*. Campinas: CRIAB-UNICAMP., 2021. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 86.
- PORTO, R. D. M. *Hidráulica Básica*. 4. ed. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 17, 19, 33, 34, 38, 39 e 85.
- RUGGIERO, M. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo numérico. Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: PEARSON., 1996. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 33, 34 e 88.
- VENANT, A. S. *Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*. Paris: [s.n.], 1871. Citado na página 28.

APÊNDICE A – Diferenças finitas

O método de diferenças finitas é um processo numérico de resolução de equações diferenciais ordinárias ou parciais cuja ideia básica é transformar o problema de resolver uma equação diferencial em um problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isto aproximações das derivadas que aparecem na equação, por diferenças finitas (RUGGIERO; LOPES, 1996), (BURDEN, 2011), (LEVEQUE, 2007).

No que se refere a equações diferenciais ordinárias, faremos $x_0 = a$, $x_n = b$ e dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, cada. Assim,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad y_i \approx y(x_i) = y(x_0 + ih), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Supondo $y(x)$ com tantas derivadas quanto necessárias, a fórmula de Taylor de $y(x)$ em torno de x_i é dada por

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{y^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k + \frac{y^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_i)^{k+1}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\xi \in [x, x_i]$.

Assim, para $k = 1$ no ponto $x = x_{i+1} = x_i + h$, temos

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

logo,

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(x_i)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{i+1}),$$

então

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi_{i+1}).$$

Aproximando os valores exatos $y(x_{i+1})$ e $y(x_i)$ por estimativas y_{i+1} e y_i , a serem obtidas, temos

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (\text{A.2})$$

Analogamente, usando (A.1) para $k = 1$ no ponto $x = x_{i-1} = x_i - h$, obtemos

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.2) é chamada de *diferença finita avançada* ou *progressiva*, enquanto a equação (A.3) é chamada de *diferença finita atrasada* ou *regressiva*.

Outra possibilidade de aproximação da derivada é a seguinte: tomando agora $k = 2$, a expressão (A.1) fica

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi_x)}{3!}(x - x_i)^3.$$

Se $x = x_{i+1} = x_i + h$, temos

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi_{i+1})}{6}h^3. \quad (\text{A.4})$$

Se $x = x_{i-1} = x_i - h$, temos

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 - \frac{y'''(\xi_{i-1})}{6}h^3. \quad (\text{A.5})$$

Fazendo (A.4) - (A.5), obtemos

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y'(x_i)h + \frac{h^3}{6} \left[y'''(\xi_{i+1}) - y'''(\xi_{i-1}) \right],$$

e então

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{12} \left[y'''(\xi_{i+1}) - y'''(\xi_{i-1}) \right],$$

por tanto

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) é chamada de *diferença finita centrada*, e é um esquema de aproximação de segunda ordem, isto é, com precisão melhor que os anteriores (o erro é da ordem de h^2). Por outro lado, as aproximações por diferença atrasada ou avançada possuem erro da ordem de h .