



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

RENATO MUCCIACITO

**Logaritmos: história, aplicações e vídeos
animados**

Campinas

2021

Renato Mucciacito

Logaritmos: história, aplicações e vídeos animados

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Renato Mucciacito e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

M88L Mucciacito, Renato, 1994-
Logaritmos : história, aplicações e vídeos animados / Renato Mucciacito. –
Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Logaritmos. 2. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 3.
Matemática - Estudo e ensino - História. 4. Vídeos para Internet. I. Santos,
Lucio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Logarithms : history, applications and animated videos

Palavras-chave em inglês:

Logarithms

Mathematics (High school) - Study and teaching

Mathematics - Study and teaching - History

Videos for the Internet

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Lucio Tunes dos Santos [Orientador]

Ricardo Caetano Azevedo Biloti

Franklina Maria Bragion de Toledo

Data de defesa: 18-11-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0251-166>

- Currículo Lattes do autor: lattes.cnpq.br/8682130303793331

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de novembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). RICARDO CAETANO AZEVEDO BILOTI

Prof(a). Dr(a). FRANKLINA MARIA BRAGION DE TOLEDO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

À minha mãe, Vanilde, por sempre me apoiar e me inspirar a ser uma pessoa melhor.

Ao meu irmão, Marcos, pelo apoio e críticas que engrandeceram este trabalho.

Ao meu orientador, Lucio, por toda a atenção, inspiração e zelo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Este trabalho reúne várias abordagens sobre logaritmos, das quais o professor pode escolher aquelas que melhor se adequarem à sua realidade. Assim, foram explorados aspectos históricos que podem ajudar na introdução do assunto, bem como uma abordagem teórica associando potências, raízes e logaritmos a perguntas, propondo, inclusive, uma notação triangular que represente essas três operações. Entre as propostas didáticas, foram produzidos vídeos animados explorando desde aspectos históricos até aplicações de logaritmos. Além disso, foram elaboradas propostas de aulas sobre alguns tópicos pouco explorados e sugestões de alguns experimentos. Também propõe-se as “pitadas matemáticas”, que consistem em curiosidades que podem ser citadas brevemente durante uma aula que envolve logaritmo.

Palavras-chave: logaritmos; ensino médio; história da matemática; vídeos animados.

Abstract

The present study brings together several approaches to logarithms, from which the teacher can choose those that best suit his or her reality. Thus, historical aspects that can help introduce the subject were explored, as well as a theoretical approach associating powers, roots and logarithms to the questions, also proposing a triangular notation that represents these three operations. Among the didactic proposals, animated videos were produced exploring from historical aspects to applications of logarithms. In addition, class proposals on some little-explored topics and suggestions of some experiments were elaborated. We also proposed “mathematical hints”, which consist of curiosities that can be briefly mentioned during a class involving logarithms.

Keywords: logarithms; high school; history of mathematics; animated videos.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Desempenho em leitura, matemática e ciências.	18
Figura 2 – Percentual de estudantes por nível de proficiência nos países selecionados.	19
Figura 3 – John Napier.	23
Figura 4 – Definição geométrica de Napier.	24
Figura 5 – Joost Bürgi.	29
Figura 6 – Régua de cálculo circular.	30
Figura 7 – Régua de cálculo linear.	30
Figura 8 – Aproximação da hipérbole por retângulos de bases em progressão geométrica.	33
Figura 9 – Carta de Euler para Goldbach, 1731.	33
Figura 10 – Corte da concha de um Nautilus — uma espiral logarítmica.	34
Figura 11 – Espiral de Arquimedes (esquerda) e Espiral Logarítmica (direita).	35
Figura 12 – Passo a passo de Leibniz para determinar logaritmos com uma catenária.	37
Figura 13 – Catenárias em uma teia de aranha.	38
Figura 14 – Arco do Portal em Saint Lois em Missouri.	39
Figura 15 – Curva da Catenária (com $a = 1$).	39
Figura 16 – Gráficos em escala semi-log (esquerda) e log-log (direita).	57
Figura 17 – Gráfico da probabilidade de cada dígito.	59
Figura 18 – Comparação da Distribuição de Frequências entre o dados e a probabilidade esperada.	60
Figura 19 – Gráfico da Regressão Linear.	61
Figura 20 – Gráfico da projeção dos casos da doença C na cidade S	67
Figura 21 – Gráfico do tempo estimado para um número de casos.	68
Figura 22 – Funções Inversas.	68
Figura 23 – Hipérbole.	71
Figura 24 – Retângulos de mesma área pela hipérbole.	71
Figura 25 – Procurando a faixa da hipérbole com área igual a 1.	72
Figura 26 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,5 u.c.	72
Figura 27 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,25 u.c.	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de Quadrado dos Meios.	21
Tabela 2 – Recorte de uma tabela de Senos e Cossenos.	22
Tabela 3 – Tabela de Logaritmos de Napier.	25
Tabela 4 – Extração de raízes quadradas sucessivas de 10.	28
Tabela 5 – Capitalização contínua.	31
Tabela 6 – Número de observações do primeiro sítio.	59
Tabela 7 – Distribuição de frequências do primeiro dígito.	59
Tabela 8 – Média da distância avaliada como metade pelo método de fracionamento.	61
Tabela 9 – Potências não-negativas de 2.	64
Tabela 10 – Tabela de Logaritmos de Napier.	65
Tabela 11 – Potências de 10 com expoente de cinco casas decimais.	65
Tabela 12 – Projeção dos casos da doença C na cidade S por mês.	66
Tabela 13 – Tempo estimado em função dos casos.	67
Tabela 14 – Capitalização contínua.	70
Tabela 15 – Áreas das faixas – uma função logarítmica.	71
Tabela 16 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,5 u.c.	73
Tabela 17 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,25 u.c.	73

Lista de símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos Números Naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos Números Inteiros
\mathbb{Q}	Conjunto dos Números Racionais
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto dos Números Reais positivos
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto dos Números Reais não negativos
$\mathbb{R}_{<0}$	Conjunto dos Números Reais negativos
$\mathbb{R}_{\leq 0}$	Conjunto dos Números Reais não positivos
$\mathbb{R}_{\neq 0}$	Conjunto dos Números Reais não nulos

Sumário

	Introdução	13
1	BREVE PESQUISA SOBRE O ENSINO BRASILEIRO	18
2	RELATO HISTÓRICO	20
2.1	O mundo nos séculos XVI e XVII	20
2.2	Métodos ágeis de cálculo	20
2.2.1	Quadrados dos Meios	20
2.2.2	Prostaférese	21
2.3	Desenvolvimento dos Logaritmos	23
2.4	Origem da palavra Logaritmo	26
2.4.1	Contribuições de Henry Briggs: a base 10	26
2.5	Um inventor anterior a Napier: Joost Bürgi	28
2.6	Régua de Cálculo	29
2.7	O Número de Euler e a Área sob a Curva da Hipérbole	31
2.8	Logaritmo Natural e o Logaritmo Neperiano	33
2.9	Espiral Logarítmica	34
2.10	Os logaritmos e os números negativos e imaginários	35
2.11	Catenária: a corrente suspensa	36
2.12	Funções Hiperbólicas	39
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	41
3.1	Potências	41
3.1.1	Potências com expoente natural	41
3.1.2	Potências com expoentes inteiros	43
3.1.3	Potências com expoentes racionais	43
3.1.4	Potências com expoentes irracionais	45
3.2	Logaritmos	46
3.2.1	Definição	46
3.2.2	Propriedades	47
3.3	Sugestão de notação: Triângulo da Potência	48
4	APLICAÇÕES	51
4.1	Juros Contínuos	51
4.2	Crescimento Populacional	52
4.3	Decaimento Radioativo	52

4.4	Datação por Carbono-14	53
4.5	Resfriamento de um corpo	54
4.6	Nível de Intensidade Sonora	54
4.7	Escala Richter	55
4.8	Escala de pH	56
4.9	Escalas Musicais	56
4.10	Escalas Gráficas	57
4.11	Pressão Atmosférica	57
4.12	Lei de Newcomb-Benford	58
4.13	Percepção sensorial	60
5	PROPOSTAS DIDÁTICAS	62
5.1	Introdução	62
5.2	Vídeos Animados	62
5.3	Propostas de Aula	63
5.4	Pitadas Matemáticas	77
5.5	Catálogo de Questões	83
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES EXPONEN-	
	CIAS E LOGARÍTMICAS	99
A.1	Teoremas e proposições	99
A.2	Funções Exponenciais	99
A.2.1	Função de Tipo Exponencial	104
A.3	Função Inversa da Função Exponencial	105
A.4	Função Logarítmica	106
A.5	O Número de Euler e os Logaritmos Naturais	107
	APÊNDICE B – DISTRIBUIÇÃO DA INICIAL DAS PALAVRAS	113
	APÊNDICE C – GRÁFICOS NO GEOGEBRA <i>MOBILE</i>	123
	APÊNDICE A – NÍVEIS DE PROFICIÊNCIA - PISA 2018	126

Introdução

Este trabalho pretende apresentar o desenvolvimento histórico dos logaritmos, sua fundamentação teórica, aplicações, propostas didáticas que incluem vídeos, planos de aula sobre tópicos pouco explorados, bem como conteúdos em formato curto, chamados de “pitadas matemáticas”, que podem ser usados para aguçar a curiosidade dos alunos sobre o tema.

Inicialmente, buscou-se analisar a situação do aprendizado dos alunos do Ensino Médio, assim como o tempo disponível em aula para abordar o tema. Dessa forma, todo o material desenvolvido funciona de maneira independente, para que o professor possa encaixar em suas aulas os tópicos que considerar mais interessantes e viáveis.

A partir dos dados analisados e da pesquisa bibliográfica realizada, viu-se que uma possibilidade para melhorar o ensino é utilizar a História da Matemática para buscar contextos e desenvolver significados, motivando o aluno a aprender. Aspectos históricos geralmente não são abordados nas aulas de matemática, que focam, muitas vezes, em fórmulas e em resolver “exercícios mecânicos”, dando a impressão que a matemática é apenas fazer contas.

De acordo com [Roque \(2012\)](#), o que torna a matemática abstrata é a maneira como é ensinada, fazendo uso, frequentemente, da ordem como os conceitos são expostos nos livros, focando nas perguntas às quais aquele conceito responde, fazendo-a parecer um saber pronto e acabado. Quando há um questionamento a respeito de tornar a matemática “mais concreta”, a autora defende que

“possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais “concreto”, desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações.” ([Roque, 2012, p.32](#))

Logo, contextualizar um saber matemático pode ser feito mediante o contexto histórico e as motivações que levaram ao seu desenvolvimento, além de relacionar aquele conceito com outros previamente conhecidos, trabalhando os seus significados.

Outra forma de auxiliar o desenvolvimento das aulas é o uso de vídeos educacionais como os do Canal Nerdologia, da plataforma *YouTube*, que trazem resultados positivos em sala de aula. Esse canal em específico, lança vídeos semanais de ciência e

história, contextualizando os conteúdos abordados com assuntos da cultura popular, filmes, desenhos, histórias em quadrinhos etc. (Abdillah, 2017; Costa, 2016; Corso, 2015).

Existem outros canais que tratam de divulgação científica, tanto nacional quanto internacionalmente. No campo da matemática, os maiores canais nacionais têm como foco resolver questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), procedendo de maneira análoga ao que já é feito em sala de aula. Internacionalmente, canais como *Numberphille*, *Vsauce*, *Veritasium* e *3Blue1Brown*, abordam a matemática de modo semelhante ao trabalho desenvolvido no *Nerdologia*, discutindo diversos temas relacionados à matemática, contudo, mais direcionados aos alunos de ensino superior.

Os pesquisadores Kato, Oliveira & Cardoso (2014) apontaram que vídeos sobre Álgebra Linear de um canal sobre matemática do *Youtube* serviam como auxílio aos alunos de Ensino Médio e Ensino Superior para aprender ou complementar seus estudos. Ainda segundo os autores, vídeos digitais podem auxiliar alunos que não possuem condições financeiras para adquirir bons livros ou também em casos que a universidade não possui livros disponíveis suficientes para atender a necessidade de todos os alunos. Ressaltam, no entanto, que existem diversos vídeos com fontes questionáveis que podem levar os alunos a cometerem erros conceituais. Por isso, destacam a importância do professor produzir seu próprio material.

Diante destas análises, vemos a importância de se utilizar vídeos como material complementar às aulas. Por isso, faremos uma série de vídeos animados que poderão ser utilizados pelos professores da maneira que preferirem.

A escolha do tema desta dissertação foi feita com intenção de abordar um tópico em que os alunos tivessem mais dificuldade. Para isso, foi realizada uma discussão informal com colegas professores e alunos, além de fazer as mesmas perguntas em grupos de redes sociais. Questionou-se sobre os conteúdos que eles julgavam mais difíceis para os estudantes de Ensino Médio, sobre tecnologia e História da Matemática. De forma geral, professores e alunos concordam que logaritmo é um dos assuntos mais difíceis e que a tecnologia na sala de aula pode trazer resultados positivos. Além disso, a maioria dos professores julga que o ensino da História da Matemática tem impacto positivo no aprendizado. Com base nesses resultados, o tema escolhido para esta dissertação foi logaritmos. Como ponto de partida, foram consultadas dissertações e materiais didáticos que tratavam do tema. Apresenta-se a seguir um resumo das práticas encontradas.

Tito (2018) abordou logaritmos relacionando-os com escalas musicais, propondo a construção de uma *flauta pan*, usando os conceitos trabalhados em aula. É importante destacar que ele executou essa abordagem com alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede particular e aplicou a proposta no contraturno, com cerca de 15 alunos. Realizou em 4 aulas, na qual apresentou desde conceitos básicos da teoria musical, medições de instrumentos, levantamento de hipóteses até a construção do instrumento

musical. O autor ainda comenta que em nenhum momento os logaritmos foram citados explicitamente, mas apontou as relações entre escala musical e os logaritmos em período da aula regular desses alunos. No final, o autor comenta sobre as dificuldades encontradas e propostas para melhorar a sequência didática.

Silva (2016) propõe a abordagem defendida por Lima (2016), que destaca diversas vantagens na definição de logaritmos por meio geométrico. Ao longo de sua dissertação, a autora propõe atividades extraídas de processos seletivos, concursos e livros didáticos. Em uma delas, propõe-se determinar a área de uma faixa de hipérbole por retângulos ou trapézios, sugerindo inclusive o *software GeoGebra* como auxílio. No mais, propõe-se atividades com aplicações comuns sobre logaritmos, como terremotos, escala de acidez, níveis de ruído, matemática financeira, dentre outras. Pecorari (2013) também segue a mesma linha de abordagem, mas comenta da apresentação do logaritmo no Ensino Médio como função inversa da função exponencial.

Ramos (2015), além de mostrar as abordagens já comentadas anteriormente, cita a importância da História da Matemática e como esta é deixada de lado, dado que professores tendem a se apoiar mais nos livros didáticos. A autora aborda a definição de logaritmos como inversa da função exponencial e também da forma geométrica. Contudo, seu enfoque é em caracterizar as funções exponenciais e logarítmicas, centrando-se na busca de padrões e regularidades no estudo das variações das grandezas por meio de uma grande quantidade de exercícios com aplicações. Embora tenha citado a importância da História da Matemática, não explorou os aspectos históricos.

O material utilizado pelo Estado de São Paulo, entre 2014 e 2018, os chamados “Caderno do Aluno” e “Caderno do Professor”, possuíam dois volumes para serem trabalhados ao longo do ano todo, planejava um bimestre inteiro para ser trabalhado com funções exponenciais e logarítmicas na 1ª Série do Ensino Médio (São Paulo, 2014). Cada caderno correspondia a um semestre e era organizado em 8 Situações de Aprendizagem, de modo que 4 delas abordam funções exponenciais e logarítmicas, o que correspondia a um bimestre escolar. A seguir, apresentaremos os títulos e os resumos de cada uma das situações.

1. **Situação de Aprendizagem 1:** As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial.

Começa explorando o significado de expressões como $3^{\sqrt{2}}$. Depois são apresentadas as funções exponenciais crescentes e decrescentes, bem como seus gráficos e também alguns exercícios sobre funções do tipo exponencial.

2. **Situação de Aprendizagem 2:** Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da ideia de logaritmo.

Dá um breve contexto histórico, mostra como simplificar algumas expressões, transformando multiplicações e divisões em adições e subtrações, respectivamente. É dada a definição de logaritmos na base 10 e são apresentadas outras propriedades e algumas situações-problema envolvendo diversas aplicações.

3. Situação de Aprendizagem 3: As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Aprofunda os conceitos de funções exponenciais e apresenta a função logarítmica como a inversa da exponencial.

4. Situação de Aprendizagem 4: As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: problemas envolvendo equações e inequações em diferentes contextos.

Explora os conceitos das outras três situações de aprendizagem por meio de diversas aplicações de funções logarítmicas e exponenciais.

Os alunos do Ensino Médio possuem 5 aulas de matemática semanais. Assim, para trabalhar o conteúdo proposto, é estimado o uso de 40 aulas. O material apresenta uma boa estrutura, abordando os conceitos primordiais acerca de logaritmos, com exercícios bem diversificados e contextualizados. No entanto, aborda a parte histórica brevemente e não comenta sobre o Número de Euler e os logaritmos naturais. Devido às dificuldades da rede pública, como precariedades, superlotação das salas de aula, e principalmente pela defasagem dos alunos, é difícil tirar o melhor proveito do material.

Um material adotado em algumas escolas da rede particular de ensino é dividido nos setores A e B, que abordam essencialmente álgebra e geometria, respectivamente, com duas aulas semanais em cada setor. Ele é composto de três livros: o material apostilado de sala de aula, o livro-texto e o caderno de exercícios. De forma geral, o livro-texto apresenta aspectos teóricos e explora alguns pontos históricos. Aborda de Napier aos logaritmos naturais, embora afirme que os logaritmos naturais também podem ser chamados de logaritmos neperianos, o que é equivocado.

Já a apostila de sala de aula é organizada bimestralmente com aulas numeradas e bem delimitadas do que deve ser trabalhado em cada uma. No total, são 10 aulas das 12 existentes na apostila do último bimestre que abordam o assunto de exponenciais e logaritmos. Ela inicia revisando as propriedades das exponenciais nas duas primeiras aulas com alguns exercícios. Nas próximas quatro aulas, apresenta a definição de logaritmo, as suas propriedades, a mudança de base e equações envolvendo logaritmos. Nas duas aulas seguintes, são apresentadas as funções exponenciais e logarítmicas, esboçando seus gráficos, além de algumas aplicações. Por fim, as duas últimas aulas apresentam mais algumas aplicações de logaritmos, envolvendo meia-vida de fármacos, potencial hidrogeniônico e decaimento radioativo. Em nenhum momento é citado que a função exponencial é a inversa da logarítmica.

Por fim, o caderno de exercícios apresenta 79 exercícios envolvendo exponenciais e logaritmos, extraídos, em sua maioria, de vestibulares.

O foco maior do material é condensar o máximo de conceitos e apresentá-los o mais rápido possível, apostando na resolução de uma grande quantidade de exercícios para fixação e assimilação dos conteúdos e desenvolvimento das habilidades. Contudo, quantidade não é sinônimo de qualidade. A título de curiosidade, o material que era utilizado pelo estado de São Paulo possuía 32 exercícios, que vão desde situações simples de manipulação até aplicações em diversos contextos.

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos. No [Capítulo 1](#), é apresentado uma breve análise do ensino brasileiro de matemática nos últimos anos. No [Capítulo 2](#) é feito um relato histórico sobre os logaritmos, o que pode ser citado durante as aulas para dar mais contexto. No [Capítulo 3](#), são revistos os fundamentos teóricos sobre potências e logaritmos, bem como a apresentação de uma notação alternativa interessante. No [Capítulo 4](#), apresenta-se aplicações dos logaritmos em diversos contextos que podem ser abordados em sala de aula. Uma delas, a Lei de Newcomb-Benford, motivou uma breve pesquisa sobre o que ocorre com a distribuição da primeira letra das palavras em vários idiomas. Os resultados podem ser encontrados no [Apêndice B](#). No [Capítulo 5](#), por sua vez, são apresentadas três propostas: vídeos animados produzidos pelo autor deste trabalho, planos de aula de tópicos pouco explorados, e conteúdos breves, que foram denominados como “pitadas matemáticas”, com algumas curiosidades para aguçar o interesse dos alunos. Por fim, no [Capítulo 6](#), traz-se as considerações finais.

1 Breve Pesquisa sobre o Ensino Brasileiro

De acordo com os dados da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico — OCDE (2019) referente ao PISA 2018 (*Programme for International Student Assessment*), pode-se concluir que o aprendizado em matemática da educação básica no Brasil apresenta grandes defasagens. Como pode ser visto na Figura 1, o país se encontra bem abaixo da média da OCDE em leitura, matemática e ciências, embora tenha ocorrido aumento no desempenho entre 2003 e 2018.

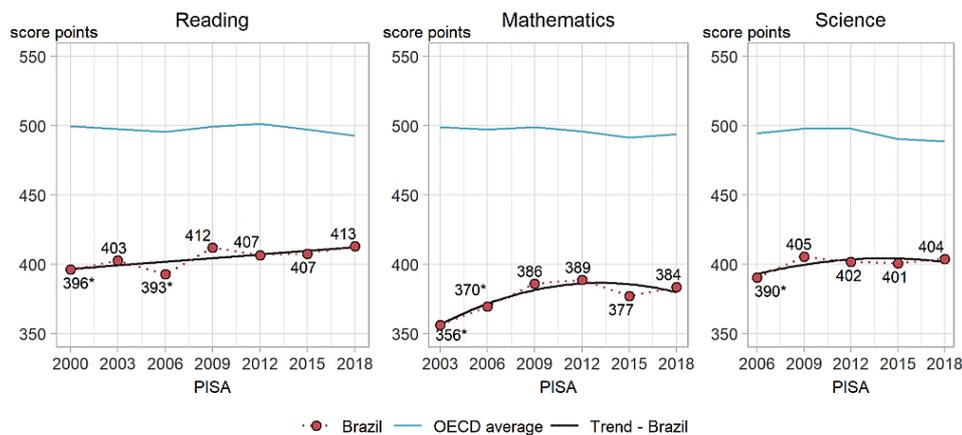


Figura 1 – Desempenho em leitura, matemática e ciências.

Fonte: OCDE (2019, p.4).

Existem seis níveis de proficiência na matemática no PISA, descritos detalhadamente no Anexo A. No Brasil, apenas cerca de 32% dos alunos atingem nível dois ou superior, enquanto a média da OCDE é de 76%. Nesse nível, é esperado que o aluno extraia informações relevantes, além de empregar algoritmos, fórmulas e procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas, como comparar distâncias percorridas entre duas rotas possíveis ou converter valores monetários.

Outro dado importante é que apenas 1% dos estudantes brasileiros atingem nível cinco ou maior, enquanto a média da OCDE é de 11%. Nesse nível, é esperado que os estudantes possam selecionar, comparar e avaliar estratégias apropriadas de solução para problemas complexos, usando raciocínio bem desenvolvido; além disso, fazer caracterizações simbólicas e formais, sendo capazes de formular e comunicar suas interpretações e raciocínios. Na Figura 2, tem-se os percentuais do Brasil comparado a outros países. É importante ressaltar que o PISA é realizado com estudantes de quinze anos que, normalmente, estão entre o 9º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Pela figura, é possível notar que 41% dos alunos não atingem sequer o nível 1, no qual o aluno é capaz de lidar com contextos familiares, identificar informações e executar procedimentos rotineiros, em suma.

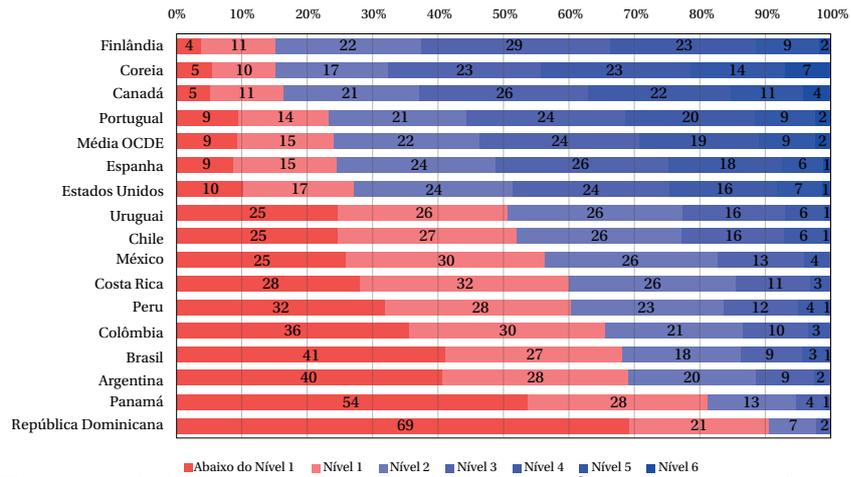


Figura 2 – Percentual de estudantes por nível de proficiência nos países selecionados.

Fonte: Brasil (2019, p. 111).

Essas informações evidenciam a necessidade e o desafio de propor novas abordagens adequadas ao nível dos alunos que impactem de forma significativa o quadro atual da educação matemática brasileira.

2 Relato Histórico

2.1 O mundo nos séculos XVI e XVII

Os séculos XVI e XVII foram marcados pela expansão do conhecimento científico em diversos campos. O sistema heliocêntrico de Copérnico passava a ser aceito, a percepção do universo foi mudada e avanços na geografia, física e astronomia ocorreram. Em 1569, Gerhard Mercator publicou seu mapa-múndi, que impactou na navegação marítima, Galileu Galilei estabelecia as fundações da ciência mecânica e Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário (Maor, 2008).

Segundo Boyer & Merzbach (2012, p. 219),

durante o fim do século dezesseis e início do século dezessete, um número crescente de comerciantes, proprietários, cientistas e praticantes de matemática sentiram a necessidade de meios que simplificassem cálculos aritméticos e medidas geométricas e que permitissem que uma população em grande parte analfabeta e com dificuldades numéricas participasse das transações comerciais da época.

Todos esses desdobramentos culminaram em uma crescente quantidade de dados numéricos, forçando os estudiosos a gastarem muito tempo na realização de cálculos (Maor, 2008; Rooney, 2012). Além disso, com o crescimento do comércio, houve aumento das transações comerciais e uma boa atenção foi dada à lei dos juros compostos.

2.2 Métodos ágeis de cálculo

Antes da invenção dos logaritmos, a humanidade lidou com os cálculos usando outros métodos para agilizar as contas, como o uso dos *quadrados dos meios* e da *Prosta-férese*.

2.2.1 Quadrados dos Meios

Um método utilizado era o cálculo de produtos por meio da diferença de quadrados dos meios. Segundo Lima (2016), usando produtos notáveis, podemos transformar produtos em somas e diferenças por meio da fórmula

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2.$$

Tendo os valores de $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ e $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, somos capazes de reduzir um produto em uma soma. De modo a ilustrar o procedimento, considere $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ na [Tabela 1](#).

x	y
1	1/4
2	1
3	9/4
4	4
5	25/4

Tabela 1 – Tabela de Quadrado dos Meios.

Para calcularmos $2 \cdot 3$, fazemos primeiro $3 + 2 = 5$ e $3 - 2 = 1$. Agora, encontramos o y correspondente na tabela para cada um deles e subtraímos um do outro. Assim, temos $25/4 - 1/4 = 24/4 = 6$. Logo, $2 \cdot 3 = 6$. Podemos estender este método para quaisquer dois valores, desde que tenhamos uma tabela com os quadrados dos meios necessários.

De acordo com [McFarland \(2007\)](#), existem métodos similares encontrados em tabletas de argila babilônicas no Oriente Médio. O método foi redescoberto e publicado, segundo o autor, por Johann Ludolff em 1690 e por Antoine Voisin em 1817.

2.2.2 Prostaferese

A prostaferese tem seu nome de origem grega que significa “adição e subtração” e era um método utilizado por matemáticos e astrônomos do século XVI e XVII para multiplicar e dividir de forma aproximada. Foi concebido por Johannes Werner (1468 – 1522). A primeira aparição em uma obra impressa foi em 1588 em *Fundamentum Astronomicum*, de Nicolas Rimerus ([Lemos, 2012](#); [Moratori, 2019](#)).

As regras de prostaferese são:

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y$$

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

[Lima \(2016\)](#) comenta que por meio de tábuas de funções trigonométricas, conhecidas desde o tempo de Ptolomeu, é possível determinar o valor de $\cos x \cdot \cos y$. Para tanto, calculamos os valores de $x+y$ e $x-y$, buscamos na tábua os valores dos senos e cossenos e aplicamos.

Como exemplo, considere o produto $0,3268 \cdot 0,4785$. Para calculá-lo usando a regra $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$, é preciso encontrar $\cos x = 0,3268$ e

$\cos y = 0,4785$, o que pode ser feito utilizando uma tabela de senos e cossenos, como a [Tabela 2](#).

x	sen x	cos x
61°	0,874620	0,484810
62°	0,882948	0,469472
63°	0,891007	0,453990
64°	0,898794	0,438371
65°	0,906308	0,422618
66°	0,913545	0,406737
67°	0,920505	0,390731
68°	0,927184	0,374607
69°	0,933580	0,358368
70°	0,939693	0,342020
71°	0,945519	0,325568

Tabela 2 – Recorte de uma tabela de Senos e Cossenos.

Assim, determinamos que $x \approx 71^\circ$ e $y \approx 61^\circ$. Logo

$$\begin{aligned} 0,3268 \cdot 0,4785 &\approx \cos 71^\circ \cdot \cos 61^\circ = \frac{\cos 132^\circ + \cos 10^\circ}{2} = \\ &= \frac{-\cos 48^\circ + \cos 10^\circ}{2} = \frac{-0,669131 + 0,984808}{2} = 0,157837. \end{aligned}$$

O resultado exato do produto é 0,1563738. Assim, vemos a importância desse método, pois traz um resultado bem próximo do real.

2.3 Desenvolvimento dos Logaritmos



Figura 3 – John Napier.

Disponível em: <<https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/pictdisplay/>>
Acesso em 12 set. 2021

John Napier, Barão de Merchiston, (c. 1550 – 1617) nasceu na propriedade da sua família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia, chegando a estudar religião na Universidade de Saint Andrews, contudo não chegou a concluí-la (Rooney, 2012).

Inicialmente, sua área de interesse era a religião. Firme opositor do papa de sua época, chegou a publicar um livro que atacava duramente a Igreja Católica e inclusive apontava o papa como o anticristo. Além disso, calculou que o dia do julgamento final ocorreria entre 1688 e 1700 (Maor, 2008).

Napier também fez planos para construção de aparatos bélicos, sugerindo a James VI da Escócia um “tanque” (Rooney, 2012, p. 44).

Ele imaginou uma peça de artilharia capaz de “limpar um campo numa circunferência de quatro milhas (6,4 km), exterminando todas as criaturas vivas com mais de um pé de altura” (cerca de 30 cm), uma carruagem com uma “boca móvel de fogo ardente” que “espalharia a destruição por todos os lados” (...). (Maor, 2008, p. 16).

Contudo, não foram as suas publicações religiosas ou sua engenhosidade mecânica que o colocaram na história, mas sim uma ideia matemática abstrata, que consumiu 20 anos de sua vida para ser realizada, mas que permitiu facilitar cálculos: os logaritmos.

Além da criação dos logaritmos, Napier também inventou os roletes ou “ossos”, chamados “Ossos de Napier”, que eram um instrumento mecânico para fazer multiplicações

e divisões, porém não funcionavam da mesma maneira que os logaritmos (Maor, 2008; Rooney, 2012).

A ideia de logaritmos começou com o matemático alemão Michael Stifel (1487 – 1567) que formulou a relação entre as progressões aritméticas e as progressões geométricas. A multiplicação de dois termos quaisquer de uma progressão geométrica como $(1, q, q^2 \dots)$ terá o mesmo resultado da potência da soma dos expoentes de cada termo, funcionando para valores positivos e negativos, bastando definir que $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$. Contudo, Stifel apenas considerou números inteiros. Já Napier, se inspirando nessa ideia, estendeu o raciocínio para uma faixa contínua de valores. Usando essa relação seria possível reduzir exponenciações e radiciações a multiplicações e divisões e estas reduzir à adições e subtrações, diminuindo a dificuldade dos cálculos. A título de curiosidade, naquela época ainda não existia a notação a^b para indicar uma potência de base a e expoente b (Maor, 2008; Lima, 2016).

A questão agora era escolher uma base adequada, que não crescesse nem rápido, nem devagar demais. Um bom candidato seria um número próximo de 1. Por ser bem versado em trigonometria, Napier escolheu o número 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$, por seguir uma prática utilizada naquela época de dividir o raio de um círculo unitário em 10^7 partes (Maor, 2008). Também optou por usar subunidades, de modo a evitar o uso de frações decimais, pois a notação com números decimais era muito recente na Europa e Napier só foi utilizá-la no livro *Rhabdologia* de 1617. Uma vez escolhida a base, Napier passou 20 anos de sua vida, como ele mesmo relata, realizando os cálculos necessários para construir a sua tábua de logaritmos.

Vale destacar que Napier não possuía o conceito de base que temos hoje e a definição de logaritmo era dada geometricamente, como era comum na época (Roque, 2012). Boyer & Merzbach descrevem a definição dada por Napier da seguinte maneira:

“Consideremos dados um segmento de reta AB e uma semirreta $CDE \dots$. Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B ; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de $CDE \dots$ com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P . Napier chamava esta distância CQ de logaritmo da distância PB .” (Boyer & Merzbach, 2012, p. 222).

Veja a Figura 4 para uma ilustração da definição de logaritmo de Napier.

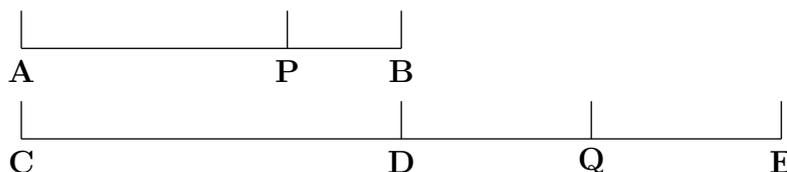


Figura 4 – Definição geométrica de Napier.

Para a realizar a construção de sua tabela, Napier notou que se fizesse $a =$

$0,9999999 = 1 - 10^{-7}$ teria

$$a^2 = a \cdot (1 - 10^{-7}) = a - \frac{a}{10^7},$$

daí, $a^2 = 0,9999999 - 0,00000009999999 \approx 0,9999998$.

Todavia, como já comentado, para evitar o uso de frações decimais, ele multiplicou toda a sua tabela por 10^7 , obtendo valores inteiros nas suas aproximações. Assim, para um número $n = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, L é o logaritmo de n que indicaremos por $L = \text{Naplog } n$.

Desse modo, definindo $\text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) = 1$, têm-se

$$\text{Naplog } 9999998 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 = 2$$

$$\text{Naplog } 9999997 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3 = 3$$

$$\text{Naplog } 9999996 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^4 = 4,$$

procedendo dessa maneira para a construção da tábua de logaritmos (Sampaio, 2010; Roegel, 2010a; Ramos, 2015; Silva, 2016).

Inicialmente, produziu três tabelas para calcular o logaritmo de outros números por interpolação (Lemos, 2012). Veja um trecho na Tabela 3.

Naplog a	a
0	$10^7 = 10.000.000$
1	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) = 9.999.999$
2	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$
3	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3 = 9.999.997$
\vdots	\vdots
98	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{98} = 9.999.902$
99	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{99} = 9.999.901$
100	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$
\vdots	\vdots

Tabela 3 – Tabela de Logaritmos de Napier.

Em 1614, Napier lançou a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* em que apresentava os logaritmos para o mundo. Johannes Kepler foi um dos primeiros astrônomos a utilizar os logaritmos, usando-os em seus cálculos sobre as órbitas planetárias, sendo responsável por divulgá-lo na Alemanha, assim como outros matemáticos divulgaram por toda a Europa, se espalhando rapidamente e chegando até mesmo à China e ao Japão (Maor, 2008). Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

2.4 Origem da palavra Logaritmo

As três fontes consultadas a respeito da origem do termo logaritmo se convergem. De acordo com Maor,

tendo completado sua tarefa monumental, restava a Napier batizar sua criação. A princípio ele chamou o expoente de cada potência de “número artificial”, mas depois se decidiu pelo termo logaritmo, a palavra significando “número proporcional”. (Maor, 2008, p. 22)

Já para Moraes Filho (2018, p. 158):

decorre do Latim Científico *logarithmus*, formada a partir da junção dos termos emprestados do Grego: *lógos*, que significa cálculo, razão, e *arithmós*, que significa número. A palavra razão refere-se ao método original usado para construir o logaritmo.

Segundo Boyer & Merzbach (2012, p. 222):

A princípio ele chamou seus índices de potências de “números artificiais”, mas mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas: *logos* (ou razão) e *arithmos* (ou números).

Todas as fontes se assemelham quando consideramos a noção de razão e proporção, o que faz bastante sentido, dada toda a relação com progressões geométricas na origem dos logaritmos.

A definição moderna de logaritmo foi dada por Leonhard Euler (1707 – 1783): se $y = b^x$, em que b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = \log_b y$, lendo-se como “logaritmo de y na base b ” (Maor, 2008).

2.4.1 Contribuições de Henry Briggs: a base 10

Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria do Colégio Gresham em Londres, ficou tão impressionado com os logaritmos que viajou até a Escócia para encontrar-se com Napier pessoalmente. No encontro, eles discutiram sobre como poderiam melhorar os logaritmos. Decidiram utilizar a base 10 e fazer o logaritmo de 1 ser igual a 0, criando então os logaritmos decimais, também conhecidos por logaritmos Briggsianos (Maor, 2008).

Henry Briggs notou que números reais positivos escritos na forma $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq a < 10$ e n um inteiro positivo, teriam um logaritmo decimal na forma

$$\log_{10} x = \log_{10}(a \cdot 10^n) = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = n + \log_{10} a,$$

em que $\log_{10} x$ é o logaritmo de x na base 10.

Assim, bastava conhecer os logaritmos dos números entre 0 e 10. Ele usou os termos *característica* e *mantissa*¹ para designar a parte inteira e fracionária, respectivamente, de um logaritmo de um número real. (Maor, 2008; Sampaio, 2010; Ávila, 1994)

Napier foi bem receptivo às ideias, contudo, devido a sua idade avançada, não tinha mais a mesma disposição para elaborar novas tabelas. Então Briggs tomou para si essa responsabilidade, construindo uma tábua de 1 até 20.000 e de 90.000 a 100.000, publicada na obra *Arithmetica logarithmica* em 1624.

Uma das estratégias utilizadas por Briggs para construir a sua tabela consistia em determinar os logaritmos dos números primos e, a partir destes, determinar os logaritmos dos números compostos. Para obter as aproximações dos logaritmos, ele fazia extrações sucessivas de raízes quadradas, começando pelo número 10, chegando a extrair 54 vezes a raiz quadrada até chegar em um número muito próximo de um, com valor significativo um pouco além de 15 casas decimais. A intenção dele era construir uma tabela com 14 casas de exatidão (Lemos, 2012; Roegel, 2010b).

Ao longo desse processo, ele percebeu que $\log_{10}(1+x) \approx \alpha x$ para um x bem pequeno. Ele chamou a constante α de “regra de ouro”, calculando-a como cerca de 0,4342944819032518.

Para um n suficientemente grande, temos $\sqrt[n]{x} = 1 + r$, com r sendo um valor bem próximo de 0. Daí Briggs, usando a relação que havia percebido, notou que $\log_{10}(1+r) \approx \alpha r$. Então, usando as propriedades dos logaritmos, deduziu que $\log_{10} x \approx 2^n \cdot \alpha r$. Desse modo, ele seria capaz de calcular o logaritmo de números primos usando raízes quadradas e essa aproximação, podendo então encontrar os logaritmos de números compostos para construir a sua tabela (Roegel, 2010b).

Contudo, essa não foi a única estratégia utilizada. Outro método consistia em aproximar o logaritmo de um número por meio dos valores já obtidos nas extrações sucessivas de raízes quadradas (Sampaio, 2010; Ávila, 1994). Por exemplo, aproximaremos o valor de $\log_{10} 2$ e, para isso, utilizaremos a Tabela 4.

Para calcular $\log_{10} 2$, Briggs procurava a primeira raiz de 10 menor do que 2, no caso, $1,77828 = 10^{\frac{1}{4}}$. Então, fazia $2/1,77828 \approx 1,12468$. Prosseguia do mesmo jeito, procurando a primeira raiz menor do que 1,12468, fazia a divisão e repetia os passos,

¹ A palavra *mantissa* vem do latim e significa contrapeso, que era um pequeno peso colocado na balança para adequar o peso até um valor requerido.

n	$x = \sqrt[n]{10}$
1	3,16228
2	1,77828
3	1,33352
4	1,15478
5	1,07461
6	1,03663
7	1,01815
8	1,00904
9	1,00451
10	1,00225
11	1,00112
12	1,00056
13	1,00028

Tabela 4 – Extração de raízes quadradas sucessivas de 10.

determinando:

$$1,12468/1,07461 \approx 1,04659$$

$$1,04659/1,03663 \approx 1,00961$$

$$1,00961/1,00904 \approx 1,00056$$

$$1,00056/1,00056 = 1,00000$$

Daí, recompondo o número, obtém-se

$$\begin{aligned} 2 &\approx 1,77828 \cdot 1,07461 \cdot 1,03633 \cdot 1,00904 \cdot 1,00056 = \\ &= 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{32}} \cdot 10^{\frac{1}{64}} \cdot 10^{\frac{1}{256}} \cdot 10^{\frac{1}{4.096}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\log_{10} 2 \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4.096} = 0,30103.$$

Outro matemático, Adriaan Vlacq (1600 – 1667), posteriormente, acrescentou os valores entre 20.000 a 90.000 em uma segunda edição da obra de Briggs, em 1628 (Maor, 2008). As mesmas tabelas perduraram até 1924, quando foram estendidas para 20 casas decimais, tendo o trabalho finalizado apenas em 1949.

2.5 Um inventor anterior a Napier: Joost Bürgi

Joost Bürgi (1552 – 1632), fabricante de relógios suíços, também criou uma tabela de logaritmos, utilizando $1 + 10^{-4}$ como base, um valor um pouco maior do que um. Desse modo, os logaritmos de Bürgi aumentam à medida que os números aumentam, enquanto os de Napier faziam exatamente o inverso. Um fato curioso é que, na maneira

como Bürgi organizou sua tabela — também evitando as frações — os logaritmos eram chamados de “números vermelhos” e os seus correspondentes eram chamados de “números negros”, porque na impressão eles eram literalmente em vermelho e preto.

A sua tabela, na verdade, era de antilogaritmos, pois eram os logaritmos que ficavam na margem e os “números negros” no corpo da página. Há evidências de que ele tenha chegado a esta invenção 6 anos antes de Napier, em 1588, porém só publicou sua obra em 1620, anonimamente (Maor, 2008).



Figura 5 – Joost Bürgi.

Fonte: usuário Dvoigt, 2006.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons. Disponível em:
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg>.

Acesso em 13 set. 2021.

2.6 Régua de Cálculo

Com a adoção dos logaritmos surgiram instrumentos mecânicos para fazer cálculos com eles. O primeiro modelo foi construído por Edmund Gunter (1581 – 1626), um sacerdote inglês, em 1620. Era composto por uma única escala logarítmica na qual as distâncias podiam ser medidas com compassos e somadas ou subtraídas.

Foi William Oughtred (1574 – 1660), também clérigo e matemático, entretanto, que teve a ideia de utilizar duas escalas logarítmicas que pudessem se mover uma em relação a outra. Estima-se que em 1622 já teria inventado seu instrumento, mas apenas em 1632 teria publicado a descrição. Chegou a construir um de forma circular (Figura 6) e, um ano depois, de forma linear (Figura 7). Oughtred deixou contribuições importantes

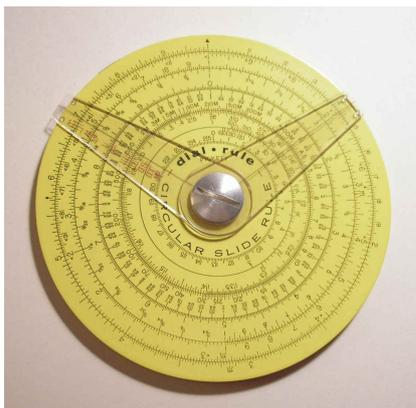


Figura 6 – Régua de cálculo circular.

Fonte: usuário Dick107, 2006.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f7/Circular_slide_rule.JPG/1024px-Circular_slide_rule.JPG>.

Acesso em 13 set. 2021.

para a matemática, introduzindo símbolos novos como \times para indicar a multiplicação (González, 2018; Maor, 2008).

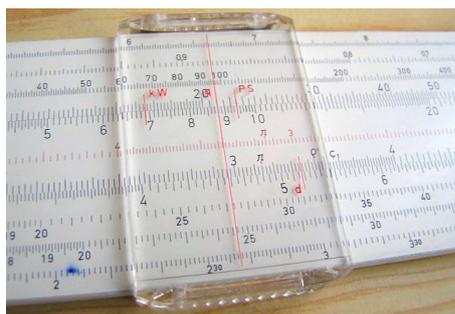


Figura 7 – Régua de cálculo linear.

Fonte: usuário Maksim, 2007.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Slide_rule_cursor.jpg>.

Acesso em 13 set. 2021.

A régua de cálculo foi muito importante ao longo de 350 anos, mas o aparecimento das primeiras calculadoras eletrônicas no início dos anos de 1970 a tornou obsoleta. Já as tabelas de logaritmos ainda podem ser encontradas nos finais de alguns livros (González, 2018).

Dessa forma, o logaritmo perdeu sua utilidade como simplificador de cálculos complexos, porém sobrevive por outra faceta muito mais importante do que agilizar contas: modelar processos de crescimento em que a taxa de crescimento é proporcional ao valor atual. Com isso, a função logarítmica está no centro de todos os ramos da matemática pura e aplicada (Maor, 2008; González, 2018).

2.7 O Número de Euler e a Área sob a Curva da Hipérbole

Desde o início da história escrita, já há menções de cobrar taxas sobre dinheiro emprestado. Boa parte da literatura matemática mais antiga já lida com questões relacionadas a juros. Em um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 AEC², há um problema de quanto tempo uma quantia de dinheiro leva para dobrar a uma taxa de 20% ao ano. Os babilônios chegaram a 3,7870, um valor bem próximo do correto, de 3,8018. (Boyer & Merzbach, 2012; Maor, 2008)

Maor (2008) aponta que o período do início do século XVII foi marcado por um grande crescimento comercial internacional e aumento das transações financeiras, de modo que foi dada bastante ênfase à lei dos juros compostos, propício para o reconhecimento de uma constante presente nos juros contínuos.

Os Bernoulli eram uma família de mercadores e possuíam diversos expoentes na matemática. Um deles, Jakob Bernoulli, lançou e resolveu o problema de analisar o crescimento de uma dívida em 1683. Partindo da dívida de uma unidade monetária com juros de 100% ao ano, ao fim de um ano, o valor da dívida será de duas unidades. Estreitando cada vez mais o período de capitalização e dividindo os 100% de juros igualmente ao longo desse período, o valor da dívida cresce. Capitalizando semestralmente teria-se 2,25; trimestralmente, 2,44140625 e assim sucessivamente.

Foi então que Jakob ponderou sobre o que aconteceria se estreitasse esse período cada vez mais: por mês, por dia, por segundo. Na notação atual, poderíamos expressar a situação por

$$C_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

em que n é o período da capitalização e C a capitalização. Veja a [Tabela 5](#).

n	$C_n = (1 + 1/n)^n$
10^0	2,000000
10^1	2,593742
10^2	2,704813
10^3	2,716923
10^4	2,718145
10^5	2,718268
10^6	2,718280
10^7	2,718281
10^8	2,718281

Tabela 5 – Capitalização contínua.

Ao contrário do que se pensaria em um primeiro momento, o valor não cresce infinitamente, mas se aproxima de um certo número. Assim, se um banco capitalizasse uma

² AEC significa Antes da Era Comum.

dívida instantaneamente, o fator de aumento seria essa constante. Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

Esse número é representado pela letra e , aproximadamente 2,72, escolhida e difundida por Leonhard Euler, que teve inspiração na letra inicial da palavra expoente. Ele foi o primeiro a encarar os logaritmos como expoentes e , em sua homenagem, esse número passou a ser conhecido como número de Euler (Boyer & Merzbach, 2012). Ele também contribuiu com outras notações que utilizamos hoje em dia, como π e a simbolização de funções na forma $f(x)$ (González, 2018).

Na notação atual, poderíamos expressar a situação por

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

em que n é o período da capitalização. Quando n tende ao infinito, e é o limite da expressão.

Uma relação bastante interessante e curiosa ocorre entre o número de Euler e a área sob a curva da hipérbole equilátera.

A área sob a curva de hipérbolas generalizadas, isto é, na forma $y = x^{-n}$, foi determinada por Pierre de Fermat (1601 – 1665) a partir de algumas mudanças no seu método de calcular parábolas generalizadas. Contudo, o método falhava para uma curva em especial, aquela que gerava toda a família de hipérbolas: $y = 1/x$ (Maor, 2008).

Essa hipérbole, também conhecida como hipérbole retangular, por possuir assíntotas perpendiculares, guarda uma relação muito interessante com os logaritmos: considerando a parte da curva contida no primeiro quadrante do plano cartesiano, é possível deduzir que a área sob a curva é dada por uma função logarítmica.

Os matemáticos Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667) e Alphonse Antonio de Sarasa (1618 – 1667) foram os primeiros a perceber que os retângulos com bases em progressão geométrica, usados para aproximar a área sob a curva, possuíam a mesma área.

Saint-Vicent provou que se tomarmos pontos sobre o eixo das abscissas em progressão geométrica e delimitarmos faixas sob a curva pelo eixo horizontal e por retas paralelas à ordenada que passam por esses pontos da progressão, têm-se faixas com áreas iguais, como ilustrado na [Figura 8](#).

Atribui-se a invenção dos logaritmos hiperbólicos a Sarasa, pois foi ele que escreveu explicitamente a relação entre a área sob a curva com os logaritmos, em uma época que estes eram apenas considerados uma ferramenta de cálculo (González, 2018; Maor, 2008; Burn, 2001).

A base do logaritmo, porém, permanecia em aberto e não poderia ser um valor arbitrário. Assim, deve existir um número que, naturalmente, determine a área sob a faixa igual a 1 (Maor, 2008). Essa valor é, surpreendentemente, o número de Euler. Damos o nome de logaritmo natural de x para $\log_e x$ e utilizamos a notação $\ln x$ para nos referirmos

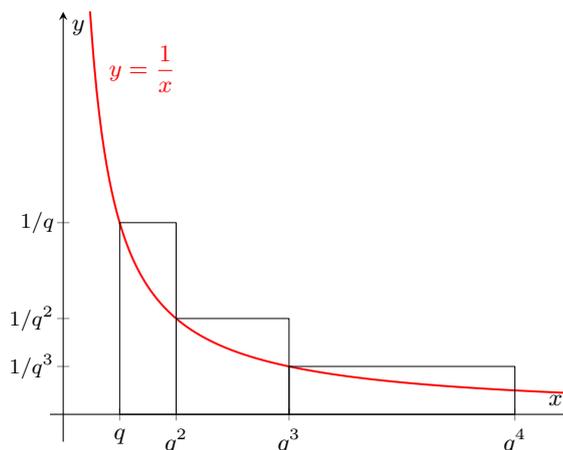


Figura 8 – Aproximação da hipérbole por retângulos de bases em progressão geométrica.

a ela. Obviamente, é um resultado que pode ser provado — confira o [Apêndice A](#). Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

Em uma carta a Goldbach em 1731, Euler define e como o número com logaritmo hiperbólico igual a 1, conforme a [Figura 9](#).

aequationis $(1 - x^p)^p dx = dy$ ad hanc $dz = (p + 1)zdv + n(1 - z)dv$: v dubium habeo, cum posterior aequatio nunquam sit absolute integrabilis, siquidem adjectionem constantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p = 1$ et $n = 1$, erit $dz = 2zdv + \frac{zdv}{v} = \frac{dv}{v}$. Multiplicetur haec per e^{2v-2v} , seu quod idem est, per $e^{-2v}v$ (e denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$), prodibit $e^{-2v}v dz = 2e^{-2v}zvdv + e^{-2v}zdv = e^{-2v}dv$, quae integrata

Figura 9 – Carta de Euler para Goldbach, 1731.

Fonte: (González, 2018, p. 204).

2.8 Logaritmo Natural e o Logaritmo Neperiano

É comum a confusão de tratar o logaritmo natural e logaritmo neperiano como sinônimos. Na verdade, o logaritmo neperiano é aquele criado por Napier, de base $1 - 10^{-7}$, embora o conceito de base ainda não existisse na época, enquanto o logaritmo natural, como já mencionamos, é aquele de base e .

A primeira tradução da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier foi de Edward Wright. Na segunda edição da tradução, William Oughtred adicionou um apêndice contendo uma tabela de logaritmos na base e , mas sem explicitar a base (Maor, 2008; González, 2018). Com isso, pode-se supor que o equívoco de chamar o logaritmo natural de neperiano advém dessa situação.

Tal hipótese é reforçada pelo que aponta González:

El número que ahora denotamos con la letra e es tan famoso que su paternidad se la disputan los británicos y los suizos. En la Europa

continental y buena parte del mundo e es simplemente el número de Euler, mientras que en Gran Bretaña e es llamada la constante de Napier. (González, 2018, p. 20)

2.9 Espiral Logarítmica

A espiral logarítmica tem a propriedade de que cada linha reta que passa pelo centro atravessa a espiral com o mesmo ângulo, por isso também é conhecida por espiral equiangular. Outra característica é de que qualquer par de linhas traçadas passando pelo centro, com um ângulo fixo entre elas, corta seções semelhantes. Em coordenadas polares, pode ser expressa em termos de logaritmos, daí o seu nome. Ela ocorre com mais frequência na natureza que qualquer outra curva, como crescimento de conchas, chifres, presas e girassóis.



Figura 10 – Corte da concha de um Nautilus — uma espiral logarítmica.

Fonte: usuário Chris 73, 2009.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/08/NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg/1280px-NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg>>.

Acesso em 28 ago. 2021.

Jakob Bernoulli realizou diversas descobertas sobre a espiral logarítmica, até mesmo batizando-a de *spira mirabilis*, ou seja, “curva maravilhosa”. Por curiosidade, expressou o desejo de que uma espiral logarítmica fosse gravada em sua lápide com a inscrição *Eadem mutata resurgo*, (Embora mudado, devo me erguer o mesmo). Contudo, o pedreiro de sua lápide talhou uma espiral de Arquimedes e não uma logarítmica.

A espiral de Arquimedes, também conhecida como espiral linear, tem, a cada volta sucessiva, a distância em relação ao centro aumentada por uma diferença constante, enquanto a logarítmica tem uma taxa constante de crescimento (Maor, 2008).

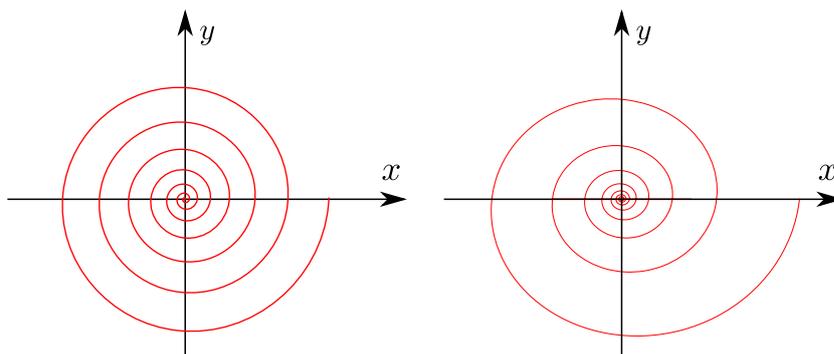


Figura 11 – Espiral de Arquimedes (esquerda) e Espiral Logarítmica (direita).

2.10 Os logaritmos e os números negativos e imaginários

Conforme [Roque \(2012\)](#) aponta, tomou-se uma intensa discussão no século XVIII a respeito da natureza dos números negativos, cujo causa pode ter sido o estudo dos logaritmos. Ainda segundo a autora, o logaritmo “se tornou um conceito importante para esclarecer as ferramentas algébricas da análise e dar-lhes consistência” ([Roque, 2012](#), p. 438).

Tanto Bernoulli quanto d’Alembert, importante matemático francês dos meados do século XVIII, acreditavam que os logaritmos de números negativos eram números reais, levando este último a questionar os números negativos para evitar o problema da consistência dos logaritmos, pois não admitia que os números negativos requeriam o uso de números imaginários.

Bernoulli chegou a propor, partindo-se de $\log 1 = 0$, embora agora saiba-se que seja errado, que teríamos

$$\log_{10} 1 = \log_{10}(-1)^2 \stackrel{?}{=} 2\log_{10}(-1) = 0 \Rightarrow \log_{10}(-1) = 0,$$

e, ainda,

$$\log_{10}(\sqrt{-1}) = \log_{10}(-1)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \log_{10}(-1) = 0 \Rightarrow \log_{10}(\sqrt{-1}) = 0.$$

A partir disso, Bernoulli concluiu que todos os números simétricos possuíam o mesmo logaritmo ([Boyer & Merzbach, 2012](#)). Euler enviou uma carta a Bernoulli, evidenciando uma contradição no seu resultado e também mandou cartas para d’Alembert, apontando que os números negativos não possuíam logaritmos reais, mas sim imaginários. Nesse momento, Euler já sabia que $e^{i\pi} = -1$ ([Roque, 2012](#)).

Em 1747, Euler escreveu a d’Alembert explicando que os logaritmos de números negativos eram imaginários puros. Bernoulli e outros matemáticos já tinham uma boa noção da fórmula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$, antes mesmo de Euler enunciá-la. A identidade é válida para todos os arcos e tomando $\theta = \pi$ temos $e^{i\pi} = -1$, isto é, à afirmação que

$\ln(-1) = \pi i$. Desse modo, os logaritmos dos números negativos são imaginários puros (Boyer & Merzbach, 2012).

2.11 Catenária: a corrente suspensa

O termo *catenária*, que vem do latim *catena*, significando corrente, é o nome da curva que uma corrente suspensa assume entre dois pontos de apoio. Segundo Refatti & Beltrame (2004), foi Leibniz quem deu o nome de *catenária* à curva. Galileu imaginava que essa curva se tratava de uma parábola, mas Christian Huygens (1629 – 1695), aos dezessete anos, provou que a *catenária* não poderia ser uma parábola. Até o momento, ninguém sabia como encontrar a curva, mas na edição de maio de 1690 do jornal *Acta eruditorum* — fundado por Leibniz em 1682 — Jakob Bernoulli propôs o problema de determinar a curva que é formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos.

Um ano após a publicação, o jornal publicou três soluções corretas: a de Huygens, agora com sessenta e dois anos, Leibniz e Johann Bernoulli, irmão de Jakob. Por meio de abordagens diferentes, todos chegaram à mesma solução. Johann ainda afirmou que a *catenária* é transcendental, enquanto a parábola é algébrica (Maor, 2008).

Por meio do cálculo diferencial foi possível chegar, em notação moderna, a

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a},$$

em que a é uma constante que depende da densidade linear e da tensão da corrente — uma demonstração pode ser vista em Blåsjö (2016).

Essa notação, entretanto, não existia na época, então a equação estava implícita na construção da curva. O pensamento predominante no século XVII era de provar resultados por construções. Desse modo, fazia mais sentido tornar a *catenária* uma curva básica para construção, análoga à régua e ao compasso, e tornar e^x em uma aplicação. Embora Leibniz e seus contemporâneos tenham descoberto a relação entre a *catenária* e a função exponencial, nunca escreveram a equação da curva. Não por falta de familiaridade, mas sim por ser considerada uma visão ingênua do resultado na época (Blåsjö, 2016).

Leibniz chegou a sugerir que a *catenária* poderia ser usada para calcular logaritmos, bastando utilizar uma corrente para isso, inclusive propondo um método para calcular logaritmos com uma corrente em mãos, apresentado a seguir. (Maor, 2008; Blåsjö, 2016)

- 1) Suspenda a corrente por dois dedos alinhados horizontalmente. Desenhe uma reta r sobre as extremidades A e B e um eixo vertical passando pelo ponto mais baixo C .

- 2) Coloque um terceiro dedo sobre o ponto C e estenda metade da catenária horizontalmente, obtendo D como extremidade.
- 3) Conecte D ao ponto médio M de r e determine o ponto médio N de DM . Trace uma reta s perpendicular a DM passando por N e desenhe o eixo horizontal passando pelo ponto de interseção entre o eixo vertical e s . Tome a distância entre a origem do sistema de coordenadas e C como a unidade de medida de comprimento.
- 4) Para determinar o $\ln Y$, com $Y > 1$, deve-se encontrar $(Y + 1/Y)/2$ sobre o eixo y e medir o valor correspondente de x no eixo horizontal sobre a catenária na sua forma original. Para determinar os logaritmos negativos basta usar o fato de que $\ln(1/Y) = -\ln Y$. No caso de se procurar o valor de um logaritmo muito grande, podemos elevar as extremidades da catenária no eixo vertical, aproximando-as, ou utilizar as propriedades dos logaritmos para expressar o logaritmo desejado em função de valores menores.

A Figura 12 ilustra o passo a passo. Para visualizar como a corrente de fato assume essa curva, veja o vídeo produzido neste [link](#) em 6 min 50 s.

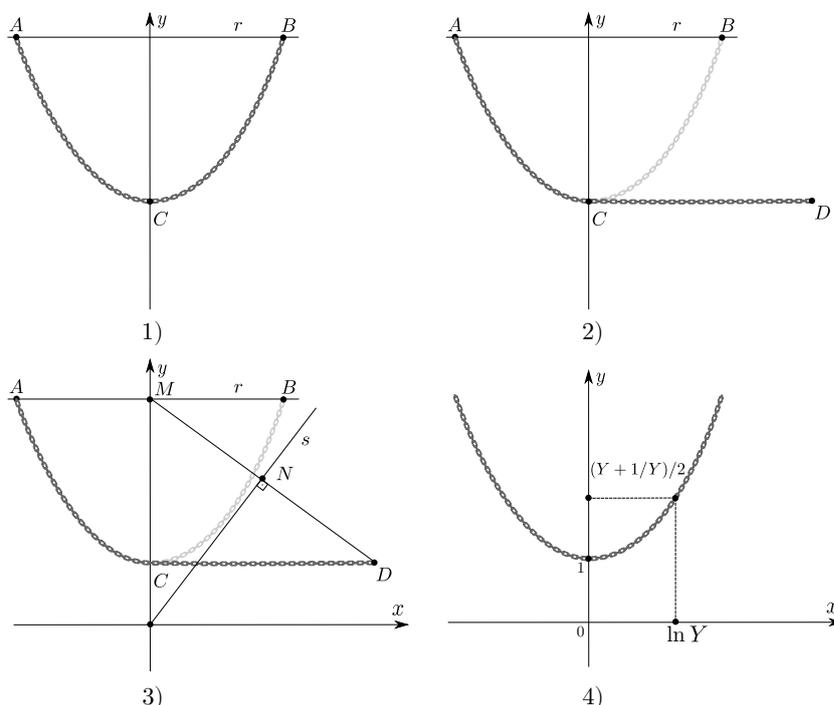


Figura 12 – Passo a passo de Leibniz para determinar logaritmos com uma catenária.

Fonte: Adaptado de Bläsjö (2016).

Pode-se encontrar a catenária em diversos contextos, como no perfil de um ovo, fios de alta tensão, cordas suspensas por duas hastes, como encontradas em bancos e supermercados para organizar filas; em barracas de acampamento e até mesmo em teias de aranha — veja a Figura 13 (Talavera, 2008; Refatti & Beltrame, 2004). Além disso, as

covinhas de uma bola de golfe podem ser feitas pela revolução de uma catenária (Dalton & Bissonnette, 2004).



Figura 13 – Catenárias em uma teia de aranha.

Fonte: usuário Mtpaley, 2009.

Licenciado sob CC-BY-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SpiderCatenary.jpg>>. Acesso em 25 jun. 2020.

As pontes pênses, embora possam se parecer com uma catenária, possuem a forma de uma parábola. Segundo Talavera (2008), a ponte pênsil é um dos sistemas estruturais mais antigos utilizados pelo homem, com a descrição de pontes de correntes de ferro já em 206 AEC na China.

Na ponte pênsil, a carga é distribuída uniformemente ao longo do vão da ponte, ou seja, na distância horizontal entre dois pontos, de modo que, ao variar a carga por ela, com a passagem de caminhões e outros veículos, há uma mudança na parábola, assim, os fios formam uma família de parábolas. Para que formassem uma catenária, a distribuição da carga deveria ser uniforme ao longo da extensão dos fios, suspensos por dois pontos fixos de mesma altura, como as linhas de alta tensão, por exemplo (Talavera, 2008).

O arquiteto espanhol Antonio Gaudí (1852 – 1926), investigou a catenária para aplicar em suas obras. A catenária invertida é uma excelente forma para construção de arcos que se sustentem pelo próprio peso, utilizadas em muitas obras arquitetônicas. A maior construção desse tipo é o Arco do Portal em Saint Louis em Missouri, com 192,15 metros de altura, apresentada na Figura 14, que é quase uma catenária perfeita (Talavera, 2008).



Figura 14 – Arco do Portal em Saint Lois em Missouri.

Fonte: Dirk Beyer, 2005.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gateway_Arch#/media/\Ficheiro:St_Louis_Gateway_Arch_1916.jpg>.

Acesso em 25 jun. 2020.

2.12 Funções Hiperbólicas

A partir da equação da curva da catenária, podemos chegar às funções hiperbólicas. Para isso, considere a catenária com $a = 1$, como ilustrado na [Figura 15](#).

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (2.1)$$

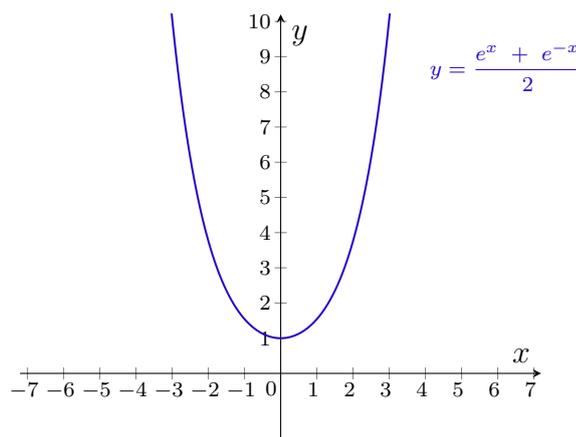


Figura 15 – Curva da Catenária (com $a = 1$).

Agora, considere a equação

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (2.2)$$

Com as equações (2.1) e (2.2) em função de x , Vincenzo Riccati (1707 – 1775), foi o primeiro a notar as semelhanças delas com as funções circulares $\sin \theta$ e $\cos \theta$, introduzindo,

em 1757, a notação $\text{ch } \theta$ e $\text{sh } \theta$ para as funções das equações (2.1) e (2.2), respectivamente (Maor, 2008).

Riccati provou que $(\text{ch } \theta)^2 - (\text{sh } \theta)^2 = 1$, em que θ é a variável independente. É perceptível a analogia com a identidade trigonométrica $(\text{sen } \theta)^2 + (\text{cos } \theta)^2 = 1$. Isso nos leva a perceber uma relação entre $\text{ch } \theta$ e $\text{sh } \theta$ com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, assim como $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$ têm com o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. A notação foi ligeiramente modificada para $\text{cosh } \theta$ e $\text{sinh } \theta$, significando o cosseno e o seno hiperbólico de θ , respectivamente³. Ressalta-se que, nesse contexto, θ não é mais um ângulo, mas ainda pode ter uma interpretação geométrica, tal como ser duas vezes a área de um setor circular de largura θ e raio 1. Uma demonstração desse fato se encontra em Maor (2008, pp. 274 – 277).

Ao longo do desenvolvimento dos logaritmos vemos como sua importância foi crescendo, o que começou com uma ferramenta de cálculo, foi se expandindo, passando a ser reconhecido em curvas e posteriormente em vários fenômenos da natureza. Para se entender melhor como os logaritmos aparecem em modelos dos fenômenos da natureza, se faz necessário estudá-los mais a fundo, dando o rigor matemático que merecem, o que veremos no capítulo seguinte.

³ Segundo Refatti & Beltrame (2004), foi Johann Henrich Lambert (1728 – 1777) que forneceu a notação moderna e Vincenzo Piccati, por volta de 1757, que sugeriu o desenvolvimento de funções hiperbólicas.

3 Fundamentos Teóricos

Este capítulo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento das potências e levar de forma natural ao dos logaritmos, sendo possível chegar às funções exponenciais e logarítmicas. As definições e demonstrações sobre potências se baseiam principalmente em [Lima \(2016\)](#).

3.1 Potências

3.1.1 Potências com expoente natural

Definição 1. Dado um número real a e n um número natural maior do que 1, definimos a potência de base a e expoente n , representada por a^n , como sendo o produto de n fatores iguais a a . Assim,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Também definimos que $a^1 = a$, pois não há produto com um único fator.

De forma indutiva, a definição é $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Proposição 1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. São válidas as propriedades:

- 1) Multiplicação de potências de mesma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- 2) Potência de uma potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. 1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Faremos a demonstração por indução sobre n e suporemos m fixo.

- i) Para $n = 1$, temos

$$a^n \cdot a^m = a^1 \cdot a^m = a \cdot a^m = a^{m+1} = a^{n+m}.$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

- ii) Suponhamos, por hipótese de indução, que

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

é verdadeira para todo $n \leq k$ e provaremos que vale para $n = k + 1$. Assim,

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a^1) = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1}.$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade é verdadeira para todo n natural.

$$2) (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Faremos a demonstração por indução sobre n e suporemos m fixo.

i) Para $n = 1$, temos

$$(a^m)^n = (a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^{m \cdot n}.$$

Portanto a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

ii) Vamos supor, por hipótese de indução, que

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}$$

é verdadeira para todo $n \leq k$ e provaremos que vale para $n = k + 1$. Assim,

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)^1 = a^{mk} \cdot a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}.$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade é verdadeira para todo n natural. ■

Se tivermos $a > 1$ e multiplicarmos os membros dessa desigualdade por a^n , obteremos $a^{n+1} > a^n$, o que nos leva a

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots .$$

Por outro lado, se tivermos $0 < a < 1$, teremos $0 < a^{n+1} < a^n$, ou seja,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots .$$

Dessa forma, a sequência com n -ésimo termo a^n é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Caso tenhamos $a = 1$, a sequência será constante com todos os termos iguais a 1.

Além disso, podemos provar que a sequência é ilimitada superiormente se $a > 1$, ou seja, que dado um $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, pode-se sempre encontrar um $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$. Para isso, faremos uso da Desigualdade de Bernoulli (veja [Proposição A.1.1](#)).

Proposição 2. *A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $a_n = a^n$ e $a > 1$ é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$. Como $a > 1$, podemos escrevê-lo como $a = 1 + x$, com $x > 0$.

Pela Desigualdade de Bernoulli ([Proposição A.1.1](#)), sabemos que

$$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Daí, se tomarmos um $n > \frac{c-1}{x}$, vamos ter

$$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > 1 + x \cdot \left(\frac{c-1}{x}\right) = 1 + c - 1 = c.$$

Logo, $a^n > c$. ■

Também podemos mostrar que a sequência com $0 < a < 1$ é limitada inferiormente por 0.

Proposição 3. *A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n = a^n$ e $0 < a < 1$ é limitada inferiormente por 0.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Como $0 < a < 1$, ao escrevermos $b = \frac{1}{a}$, temos $b > 1$. Daí, pelo que foi visto na [Proposição 2](#), sabemos que existe n natural tal que $b^n > \frac{1}{c}$. Ou seja, $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$, donde concluímos que $a^n < c$. ■

3.1.2 Potências com expoentes inteiros

Podemos estender esse significado às potências inteiras não positivas, preservando a relação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Para isso, precisamos dar sentido a $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$. Para tal, definimos $a^0 = 1$ e fazemos $a \neq 0$. Desse modo, para um n natural, a expressão passa a ser verdadeira. Agora, veja que $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n}$. Para ser uma expressão verdadeira, basta definirmos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Além disso, a sequência de potências inteiras de a é crescente quando $a > 1$, com $a^{-n} < 1 < a^n$, e decrescente quando $0 < a < 1$, com $a^n < 1 < a^{-n}$.

3.1.3 Potências com expoentes racionais

Observação 1. *Dados a real com $a > 0$ e n natural, dizemos que b , com $b > 0$, é a raiz n -ésima de a se $b^n = a$. Representamos simbolicamente por $\sqrt[n]{a} = b$.*

Podemos também estender o significado às potências com expoente racional de modo geral, isto é, a a^r com $r = \frac{m}{n}$, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, ainda preservando a propriedade $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, com $s \in \mathbb{Q}$.

Note que

$$(a^r)^n = a^{r \cdot n} = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Então, a^r é o número real positivo cuja n -ésima potência é igual a^m , ou seja, $a^r = \sqrt[n]{a^m}$. Desse modo, a única forma de definir potências com expoente racional é fazer

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

com $a > 0$.

Como $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ para todo k natural, precisamos mostrar que $\sqrt[k \cdot s]{a^{k \cdot q}} = \sqrt[s]{a^q}$.

Para isso, perceba que se escrevermos $\sqrt[k \cdot s]{a^{k \cdot q}} = x$, temos

$$x^{ks} = a^{kq} \Leftrightarrow (x^s)^k = (a^q)^k \Leftrightarrow x^s = a^q \Leftrightarrow x = a^{\frac{q}{s}} = \sqrt[s]{a^q}.$$

Agora provaremos que essa definição mantém a propriedade $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Seja a um número real positivo, $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com $m, n, q, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \neq 0$. Com $a^r \cdot a^s = x$, temos

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = x \Leftrightarrow \left(a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = x^{nq} \Leftrightarrow a^{mq} \cdot a^{pn} = a^{mq+pn} = x^{nq}.$$

Daí, com $m = rn$ e $p = qs$, teremos

$$a^{rn \cdot q + qs \cdot n} = a^{qn(r+s)} = x^{qn} \Leftrightarrow \left(a^{r+s}\right)^{qn} = x^{qn} \Leftrightarrow a^{r+s} = x = a^r \cdot a^s.$$

Podemos mostrar a sequência de potências racionais de a é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Suponhamos que $a > 1$, $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ e $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \neq 0$ e $r_2 > r_1$. Desse modo, temos

$$r_2 > r_1 \Rightarrow \frac{m_2}{n_2} > \frac{m_1}{n_1} \Rightarrow m_2 n_1 > m_1 n_2.$$

Como $m_2 n_1, m_1 n_2 \in \mathbb{Z}$ e $a > 1$, concluímos que

$$a^{m_2 n_1} > a^{m_1 n_2} \Rightarrow a^{\frac{m_2}{n_2}} > a^{\frac{m_1}{n_1}} \Leftrightarrow a^{r_2} > a^{r_1}.$$

Agora se $0 < a < 1$ e repetirmos os passos até $m_2 n_1 > m_1 n_2$, teremos

$$a^{m_2 n_1} < a^{m_1 n_2} \Rightarrow a^{\frac{m_2}{n_2}} < a^{\frac{m_1}{n_1}} \Leftrightarrow a^{r_2} < a^{r_1}.$$

Logo, a sequência de potências racionais de a é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Podemos mostrar também que entre dois números reais quaisquer existem uma infinidade de potências racionais de um número real positivo diferente de 1, conforme com o [Lema 1](#).

Lema 1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Suporemos a e α maiores do que 1 (os demais casos são tratados analogamente). Pela [Proposição 2](#), podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Extraindo a raiz n -ésima da segunda desigualdade, vem

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Rightarrow 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Agora, note que fazendo $\frac{m}{n} \leq M$, teremos

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Logo, as potências $a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos, todos com comprimento menor do que $\beta - \alpha$ de $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos $a^{\frac{m}{n}}$ está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

3.1.4 Potências com expoentes irracionais

Ainda é possível conservar o mesmo significado de potência para expoentes irracionais. Relembremos que, até os expoentes racionais, temos $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^1 = a$ e para $x < y$, $a^x < a^y$, se $a > 1$ e $a^y < a^x$, se $0 < a < 1$. Com isso, a sequência das potências de a é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Agora, suponha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $a > 1$ tal que $r < x < s$, com r e s racionais. Associaremos a^x a potência de a com expoente x , obtendo $a^r < a^x < a^s$. Veja que só existe um número real que possa assumir essa propriedade.

Suponha, por absurdo, que existam dois valores A e B tais que $A < B$ e que

$$a^r < A < B < a^s.$$

Portanto, não há nenhuma potência de expoente racional de a no intervalo $[A, B]$, o que contraria o [Lema 1](#). Logo, só existe um único número real que possui esta propriedade.

Assim, quando x é irracional, a^x é o único número real em que as potências a^r são aproximações por falta e potências a^s são aproximações por excesso.

3.2 Logaritmos

3.2.1 Definição

Tendo agora a operação de potência definida para números reais positivos, podemos lidar com equações exponenciais, que são aquelas que possuem incógnita no expoente, como $a^x = b$, com incógnita em x .

Para resolver esse tipo de equação recorreremos a manipulações algébricas que nos permitam escrever $b = a^q$ com q racional, nos levando a concluir que $x = q$. Em situações em que isso não for possível, faremos uso de outra ferramenta para expressar a solução de equações desse tipo.

Para isso, vamos relacionar alguns pontos interessantes entre a potenciação e a radiciação e, a partir desse raciocínio, definir logaritmo. Considere $a^b = c$, com a e c reais positivos, $a \neq 1$ e b um número real. Se c é a incógnita, temos a operação de potenciação, em que chamamos a de base, b de expoente e c de potência. Assim, temos a base e o expoente e queremos descobrir a potência. Podemos associar essa operação à pergunta “ a elevado a b é igual a quanto?”

Agora, se a incógnita fosse a , teríamos uma radiciação, representada simbolicamente por $\sqrt[b]{c} = a$, em que a passa a ser chamado de raiz, b de índice e c de radicando. Contudo, pensando como uma potenciação, nós temos a potência e o expoente e queremos a base. Mais uma vez, podemos associar a uma pergunta: “que número elevado a b é igual a c ?”

Até o momento, nossa incógnita ocupou duas posições diferentes. Agora, se colocarmos a incógnita em b , vamos ter, pensando em relação à potenciação, a base e a potência e queremos descobrir o expoente. Outra vez podemos associar a uma pergunta: “a qual número devo elevar c para obter a ?”

A partir desse raciocínio, podemos definir uma nova operação, a qual chamamos de logaritmo. Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

Definição 2. *Dados os números reais a , b e c , com a e c positivos e $a \neq 1$, de modo que $a^b = c$, chamamos a de base, c de logaritmando e b de logaritmo. Simbolicamente, $\log_a c = b$.*

A partir da definição, é possível concluir algumas propriedades:

- $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.
- $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.

- $\log_b b^c = c$, pois $b^c = b^c$.
- $b^{\log_b a} = a$, pois $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$.

É comum escrevermos $\log x$ no lugar de $\log_{10} x$, por ser uma base de uso muito comum. Retomando a equação exponencial, $a^x = b$, com incógnita em x , a sua solução será dada por $x = \log_a b$.

3.2.2 Propriedades

As propriedades dos logaritmos podem ser obtidas por demonstrações simples que partem das propriedades das potências. Contudo, para abordar essas propriedades com alunos é recomendável fazer o raciocínio com exemplos numéricos, pois facilitará o entendimento deles. Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

Proposição 4. *Seja $b^x = a$ e $b^y = c$, de modo que $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, com $b > 0$ e $b \neq 1$. Por definição, $x = \log_b a$ e $y = \log_b c$. Assim, vale*

- 1) *Logaritmo do Produto:* $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$;
- 2) *Logaritmo do Quociente:* $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$;
- 3) *Logaritmo da Potência:* $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$.

Demonstração. 1) Pelas propriedades das potências, temos $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$. Daí, aplicando logaritmo na base b em ambos os membros, temos

$$\log_b(b^x \cdot b^y) = x + y.$$

Então, fazendo substituições convenientes, obtemos

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c.$$

- 2) Pelas propriedades das potências, temos $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$. Daí, aplicando logaritmo na base b em ambos os membros, temos

$$\log_b\left(\frac{b^x}{b^y}\right) = \log_b(b^{x-y}) = x - y.$$

Por fim, concluímos que

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c.$$

- 3) Pelas propriedades das potências, temos $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$. Então, aplicando logaritmo na base b em ambos os membros, temos

$$\log_b (b^x)^y = \log_b b^{x \cdot y} = x \cdot y.$$

Por fim, concluímos que

$$\log_b a^y = y \cdot \log_b a. \quad \blacksquare$$

Muitas vezes a mudança de base é apenas apresentada aos alunos como uma fórmula pronta. Porém, ao se fazer isso, não se aborda uma ideia importante: os logaritmos são iguais a menos de uma constante multiplicativa. Isto é, a partir de um logaritmo em uma dada base, podemos obter outro logaritmo em qualquer base bastando multiplicar por uma constante. A seguir proporemos um caminho que aborda essa relação e termina com a fórmula da mudança de base. Veja o vídeo produzido sobre este tópico neste [link](#).

Proposição 5 (Mudança de Base). *Sejam $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b \neq 1$ e $a, b > 0$, tal que $a^x = b^y = c$. Então*

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$$

Demonstração. Como $a^{\log_a b} = b$, temos

$$b^y = (a^{\log_a b})^y,$$

o que nos leva a

$$a^x = (a^{\log_a b})^y = a^{y \cdot \log_a b}.$$

Disso, obtemos $x = y \cdot \log_a b$. Ao substituir x e y por logaritmos de bases a e b , respectivamente, determinamos que

$$\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b. \quad \blacksquare$$

Veja que para levar um logaritmo da base a para a b , basta multiplicá-lo por $\log_a b$, que é uma constante.

Se quisermos expressar na forma habitual, basta escrever

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Com o que foi desenvolvido, poderemos caracterizar as funções exponenciais e logarítmicas, o que pode ser encontrado no [Apêndice A.2](#).

3.3 Sugestão de notação: Triângulo da Potência

Uma proposta interessante é a do *Triangle of Power*, (“Triângulo da Potência”, em tradução livre), sugerida por Alex Jordan em um [post](#) (Jordan, 2012) de troca de

informações matemáticas do *StackExchange* e divulgada por [Sanderson \(2016\)](#) no seu canal do *YouTube*. Cada vértice de um triângulo representa a base, o expoente e a potência, de modo que ${}_a\Delta_c^b$ equivale a equação $a^b = c$, podendo tornar algumas ideias mais claras.

A título de curiosidade, vamos explorar um pouco essa notação conforme com o que foi apresentado por [Sanderson \(2016\)](#). Para facilitar a exposição, considere que as expressões a seguir estão bem definidas. As operações podem ser representadas no triângulo suprimindo o vértice daquilo que se quer calcular. Por exemplo, a^b é representado por ${}_a\Delta^b$, $\sqrt[b]{c}$ por Δ_c^b e $\log_c a$ por ${}_c\Delta_a$.

Fazendo uso desse triângulo, podemos representar operações inversas de maneira simples e intuitiva:

- $x^{\log_x z} = z \Leftrightarrow {}_x\Delta_z^x = z;$
- $\sqrt[y]{x^y} = x \Leftrightarrow \Delta_x^y = x;$
- $\log_x x^y = y \Leftrightarrow {}_x\Delta_x^y = y;$
- $(\sqrt[y]{z})^y = z \Leftrightarrow \Delta_z^y = z.$

Além dessas quatro, podemos pensar em outras como:

- $\Delta_z^y = y \Leftrightarrow \log_{\sqrt[y]{z}}(z) = y;$
- $\Delta_z^x = x \Leftrightarrow (\log_x z)\sqrt[z]{z} = x.$

A seguir, veja como algumas propriedades das potências, raízes e logaritmos ficam escritas nesse formato.

$$\begin{aligned}
 a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \Leftrightarrow {}_a\Delta^x \cdot {}_a\Delta^y = {}_a\Delta^{x+y} \\
 (a^x)^y &= a^{xy} \Leftrightarrow \Delta_x^y = \Delta^{xy} \\
 \sqrt[a]{xy} &= \sqrt[a]{x} \cdot \sqrt[a]{y} \Leftrightarrow \Delta_{xy}^a = \Delta_x^a \cdot \Delta_y^a \\
 \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} &= \sqrt[xy]{a} \Leftrightarrow \Delta_{\Delta_a}^x = \Delta_a^{xy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \Leftrightarrow {}_a\Delta_{xy} = {}_a\Delta_x + {}_a\Delta_y \\
 \log_a x^y &= y \cdot \log_a x \Leftrightarrow {}_a\Delta_{x^y} = y \cdot {}_a\Delta_x \\
 \log_{a^y} x &= \frac{1}{y} \cdot \log_a x \Leftrightarrow {}_{a^y}\Delta_x = \frac{1}{y} \cdot {}_a\Delta_x \\
 \log_a y \cdot \log_y x &= \log_a x \Leftrightarrow {}_a\Delta_y \cdot {}_y\Delta_x = {}_a\Delta_x
 \end{aligned}$$

Vale comentar algumas ocorrências: se fixarmos a base, teremos

$${}_a\Delta^b \cdot {}_a\Delta^c = {}_a\Delta^{b+c} \quad \text{e} \quad {}_a\Delta_b + {}_a\Delta_c = {}_a\Delta_{bc}.$$

Se fixarmos o expoente, teremos

$${}_b\Delta^a \cdot {}_c\Delta^a = {}_{bc}\Delta^a \quad \text{e} \quad \Delta_b^a \cdot \Delta_c^a = \Delta_{bc}^a.$$

Agora, o que acontece se fixarmos a potência? Perceba que

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a} = \sqrt[xy]{a^y} \cdot \sqrt[xy]{a^x} = \sqrt[xy]{a^{x+y}} = \frac{xy}{x+y} \sqrt{a}$$

e que $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Definindo $x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, obtemos

$$\Delta_a^x \cdot \Delta_a^y = \Delta_a^{x \oplus y}.$$

Até o momento ocorreu uma simetria entre as operações. Partindo disso, vamos verificar se $\log_x a \oplus \log_y a = \log_{xy} a$. Então, temos

$$\log_x a \oplus \log_y a = \frac{1}{\frac{1}{\log_x a} + \frac{1}{\log_y a}} = \frac{\log_x a \cdot \log_y a}{\log_x a + \log_y a}.$$

Usando a mudança de base dos logaritmos, obtemos

$$\log_x a \oplus \log_y a = \frac{\frac{\log a \cdot \log a}{\log x \cdot \log y}}{\frac{\log a}{\log x} + \frac{\log a}{\log y}} = \frac{(\log a)^2}{\log a(\log y + \log x)} = \frac{\log a}{\log xy} = \log_{xy} a.$$

Logo, é válido que

$${}_x\Delta_a \oplus {}_y\Delta_a = {}_{xy}\Delta_a.$$

4 Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos diversas aplicações que os logaritmos têm na modelagem de diversos fenômenos naturais, os quais podem ser trabalhados em sala de aula. As informações presentes neste capítulo foram baseadas em [Alves \(2014\)](#), [Lima \(2013\)](#), [Malthus \(1996\)](#), [Moratori \(2019\)](#), [Pecorari \(2013\)](#), [Ramos \(2015\)](#), [Sá & Paiva \(2012\)](#) e [Silva \(2016\)](#). Várias dessas aplicações foram comentadas em vídeo produzido para esta dissertação, que pode ser visto neste [link](#).

4.1 Juros Contínuos

Um capital inicial C_0 aplicado a uma taxa r ao ano, renderá, ao final de um ano, a quantia de $r \cdot C_0$ de juros e o capital se tornará $C_0 \cdot (1 + r)$. Em dois anos, se tornará $C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$. Prosseguindo dessa maneira, em t anos, o capital será de $C_0 \cdot (1 + r)^t$.

Se tomarmos uma fração $\frac{1}{n}$ do ano, é esperado que os juros obtidos correspondam a $\frac{rC_0}{n}$ e o capital se torne $C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)$. Passado mais $\frac{1}{n}$ do ano, obtemos $C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$. Dessa maneira, ao final de um ano, teremos

$$C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Pelo que foi desenvolvido na [Seção A.5](#), sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_0 \cdot e.$$

Perceba que se fizermos n tender ao infinito, isto é, capitalizar os juros continuamente e denotar $n = kr$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kr} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^r = C_0 \cdot e^r,$$

o que chamamos de Juros Contínuos.

Assim, um capital de R\$1.000,00, aplicado a juros contínuos de 100% ao ano, se tornará $1.000e$ reais ao final de um ano, que é aproximadamente 2.718,28 reais.

Se a taxa de juros é r ao ano, então um capital C_0 aplicado a essa taxa será transformado em t anos em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n = C_0 \cdot e^{rt}.$$

Disso, obtemos a função

$$C(t) = C_0 \cdot e^{rt}.$$

Se ao invés de acréscimos tivermos perdas contínuas a uma taxa r ao ano em um período de t anos e denotarmos $n = -krt$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 - \frac{rt}{n}\right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-krt} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^{-rt} = C_0 \cdot e^{-rt},$$

ou seja, a função

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-rt}.$$

4.2 Crescimento Populacional

Um dos primeiros estudiosos a analisar o crescimento populacional foi Thomas Robert Malthus (1766 – 1834), um economista inglês. Em seus estudos, afirmava que o crescimento da produção de alimentos crescia segundo uma progressão aritmética, enquanto a população humana crescia segundo uma progressão geométrica. Assim, é possível modelar esse crescimento por uma função do tipo exponencial, dado que o aumento é proporcional à população no instante inicial de medição, uma característica desse tipo de função.

Assim, de maneira análoga ao caso dos Juros Contínuos, uma população qualquer $P(t)$ em função de um tempo t a uma taxa α de crescimento, se comporta segundo a lei

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(0) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = P(0) \cdot e^{\alpha t}.$$

4.3 Decaimento Radioativo

A radioatividade é um fenômeno natural em que os elementos radioativos podem emitir radiação, que é uma transmutação espontânea e não controlada do núcleo atômico. Foi descoberto pelo físico francês Antoine-Henri Becquerel (1852 – 1908) em 1896. Alguns exemplos de elementos radioativos são: o urânio-235, o célio-137 e o plutônio-239. Os átomos desses elementos naturalmente se desintegram, emitindo partículas e gerando substâncias que não são radioativas.

Cada tipo de substância radioativa tem sua própria constante de decaimento, a qual denotaremos por α , que é determinada experimentalmente.

É possível expressar esse fenômeno matematicamente. Seja M_0 a massa de uma substância radioativa. Como o fenômeno ocorre continuamente, sabemos que a massa $M(t)$ no tempo t será dada por

$$M(t) = M_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

visto que esse comportamento é característico de uma função do tipo exponencial.

Além disso, é comum expressar a constante α em função do tempo de *meia-vida*, isto é, o tempo necessário para que a substância desintegre metade de sua massa a partir de um dado momento. Dependendo da substância, esse tempo varia de alguns minutos até bilhões de anos. Assim, sendo t_m o tempo de meia-vida, teremos

$$M(t_m) = \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\alpha t_m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha t_m}.$$

Daí, aplicando logaritmos, vem

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha t_m \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{t_m},$$

o que nos permite escrever ainda

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t} = M_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_m} \cdot t} = M_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{t_m}} = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_m}}.$$

4.4 Datação por Carbono-14

O carbono-14, denotado por ^{14}C , é um isótopo radioativo do carbono, então ele decai com o tempo. Ele é formado na atmosfera por conta do bombardeio de raios cósmicos que a Terra sofre e tem essa numeração porque apresenta massa atômica 14, ou seja, apresenta dois nêutrons a mais no seu núcleo que seu isótopo estável de carbono-12.

A técnica de datação por carbono-14 ou radiocarbono foi descoberta em 1949 pelo químico Willard Frank Libby (1908 – 1980), ganhador de um Nobel de química por sua descoberta. Ao longo do tempo de vida de um organismo, a quantidade de carbono-14 se mantém constante porque o decaimento é compensado pela produção. Os vegetais o criam durante a fotossíntese e os animais absorvem-no direta ou indiretamente, mas uma taxa constante é mantida.

Essa técnica possui grande valor para a arqueologia, pois quando um organismo morre, a absorção para e a quantidade existente de ^{14}C passa a decair continuamente. Por conta disso é possível determinar a idade de um fóssil ou algum objeto antigo por meio da comparação da quantidade de carbono-14 presente nos objetos antigos com materiais do mesmo tipo existentes atualmente. Por exemplo, compara-se a quantidade de carbono-14 existente em uma peça de madeira antiga com uma peça de madeira de mesmo tamanho e massa atual. Sabendo-se a constante α de decaimento, somos capazes de determinar a idade do pedaço de madeira. Como a meia-vida do ^{14}C é de 5.730 anos, ou seja, $\alpha = \frac{\ln 2}{5.730}$, temos

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5.730}\right) \cdot t} = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5.730}},$$

em que M_0 é a massa inicial de ^{14}C e $M(t)$ a massa em função do tempo t .

Com um pouco de manipulação algébrica, podemos chegar a

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5.730} \cdot t} \Leftrightarrow t = 5.730 \cdot \log_2 \left(\frac{M(t)}{M_0} \right).$$

No entanto, a técnica do carbono-14 para a datação só pode ser aplicada à amostras que tenham no máximo 40 mil anos, pois após esse período a quantidade de carbono-14 passa a ser difícil de se detectar.

4.5 Resfriamento de um corpo

Uma situação similar a do decaimento radioativo é o resfriamento de um corpo. Quando um objeto aquecido é colocado em ambiente mais frio, como o ar ou a água, ele passa a se resfriar enquanto a temperatura ambiente permanece a mesma. Isso ocorre porque a massa do objeto é muito menor do que o meio que se encontra.

Assim, a Lei do Resfriamento de Newton afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D entre o objeto e o meio que o contém decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença, o que caracteriza uma função exponencial.

Como D decresce continuamente, dada uma diferença de temperatura inicial do corpo com o meio no instante $t = 0$, denotada aqui por D_0 , teremos

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

em que α é uma constante que depende do material que constitui a superfície do corpo, mas pode ser influenciado por fatores como a umidade do ambiente e o arejamento.

Um exemplo interessante é determinar a hora da morte de uma pessoa em uma investigação forense e, nesse contexto, a o esfriamento também é influenciado pela temperatura do corpo no momento da morte, o tipo de vestuário, a posição do cadáver, entre outros.

4.6 Nível de Intensidade Sonora

A intensidade sonora é a quantidade de energia que as ondas sonoras transferem durante um intervalo de tempo, popularmente chamada de volume do som.

A percepção da intensidade do som não é feita de forma linear, mas de forma logarítmica. Isto é, só são percebidas variações sonoras se a amplitude da onda variar exponencialmente.

Para realizar a medição da intensidade sonora, utiliza-se uma unidade logarítmica, o decibel (dB) que é um submúltiplo do bel (B). O nome dessa unidade é em homenagem ao cientista britânico Alexander Graham Bell (1847 – 1922) que realizou estudos com o som, linguagem gestual e surdez.

A menor intensidade detectável pelo ouvido humano é de $I_0 = 10^{-12}$ W/m² (watts por metro quadrado) e é usada como ponto de referência. O nível de som L que corresponde a uma intensidade I em W/m² é dado por

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}.$$

O limiar da dor ocorre no nível de 120 dB, mas qualquer som com nível acima de 85 dB pode causar perda de audição. Uma conversa normal, por exemplo, tem nível por volta de 50 dB.

4.7 Escala Richter

O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, que provém do choque entre duas placas tectônicas, o que libera uma grande quantidade de energia, ocasionando os tremores.

Por meio de um sismógrafo é possível medir a magnitude de um terremoto na escala Richter que foi desenvolvida em 1935 pelo sismólogo estadunidense Charles Richter (1900 – 1985) e pelo alemão Beno Gutenberg (1889 – 1960). A escala é logarítmica e foram dados valores próximos de zero aos terremotos mais fracos registrados até aquele momento.

A magnitude M é calculada pela relação

$$M = \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

em que I é a intensidade do terremoto e I_0 é a intensidade de um terremoto padrão como valor de referência.

Assim, é possível classificar o tipo de terremoto e elencar os seus possíveis efeitos de acordo com a sua magnitude M .

- $M < 3$: tremores pequenos, geralmente não perceptíveis e apenas registrados por aparelhos;
- $3 < M < 5,9$: abalos perceptíveis, porém pouco destruidores, sendo capazes de derrubar objetos e trincar paredes.
- $6 < M < 8,9$: terremoto destrutivo que pode gerar danos severos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.

- $M \geq 9$: terremotos muito fortes, causando quase destruição total.

4.8 Escala de pH

O Potencial Hidrogeniônico, denotado por pH em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sørensen (1868 – 1939), consiste num índice da acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer por meio da concentração de íons de hidrogênio em mol/L. Ele segue uma escala logarítmica de 0 a 14, em que uma solução aquosa a 25 °C pode ser classificada em ácida ($\text{pH} < 7$), neutra ($\text{pH} = 7$) ou básica ($\text{pH} > 7$). Por exemplo, a água tem 1 íon-grama de H^+ para cada 10^7 litros, ou seja, a razão é $\frac{1}{10^7}$ e seu pH é 7.

A escala é definida como o logaritmo decimal do inverso da concentração de íons de hidrogênio, ou seja,

$$\text{pH} = \log_{10} \left(\frac{1}{[H^+]} \right) = -\log_{10}[H^+],$$

em que $[H^+]$ é o número de mols de íons de hidrogênio por litro (mol/L).

O pH tem grande aplicação na indústria e na agronomia, pois permite adequações em processos como fermentações, produção de vacinas, leite e derivados e também na análise do solo. Dessa forma, o pH não se limita a químicos, podendo ser utilizado por farmacêuticos, geólogos e agrônomos.

4.9 Escalas Musicais

Desde a antiguidade, gregos já estudavam a relação entre a matemática e a música, em especial os pitagóricos que notaram relação entre intervalos musicais e razões trigonométricas. Utilizando um monocórdio, que é um instrumento com apenas uma corda, Pitágoras testou vibrar a corda solta e comparando os sons emitidos quando pressionava em alguns pontos, como na metade. Quando reduzia a corda à metade do comprimento original, o som produzido era o mesmo, mas com outra frequência. O matemático percebeu que quanto mais reduzia o tamanho da corda vibrada, maior era a frequência, o que explicava a produção de sons diferentes. A partir de experimentos, um sistema musical foi criado, o qual fracionava o intervalo entre dois sons iguais em sete notas musicais: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. As frequências são crescentes e quando chegasse ao final, repetimos as notas, mas numa frequência maior, o que se denominou uma oitava acima.

Já no final do século XVII foi criada a escala temperada, composta por 12 notas, nesta ordem: dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si. Nesta escala, a

distância entre as notas é sempre a mesma. Desse modo, ao se multiplicar a frequência de uma nota dó por $2^{1/12}$, obtém-se dó#. Assim, a partir de uma nota de referência a qual se sabe a frequência, denotada aqui por f_0 , podemos determinar quantas oitavas acima ou abaixo e, conseqüentemente, a nota que corresponde qualquer frequência. Para isso, utilizamos a equação

$$o = \log_2 \frac{f}{f_0},$$

em que f é uma frequência qualquer e o quantas oitavas acima ou abaixo se está a partir da nota de referência.

4.10 Escalas Gráficas

Em muitos contextos, para representar melhor os dados, são utilizadas escalas gráficas com uso de logaritmos. Existem as escalas *semi-log*, na qual o eixo horizontal é linear enquanto o vertical é logarítmico, e *log-log*, na qual ambos os eixos são logarítmicos, ilustrados na [Figura 16](#). As equações na forma $y = a \cdot b^x$ são expressas como uma reta, uma vez que $\log_b y = \log_b a + x$.

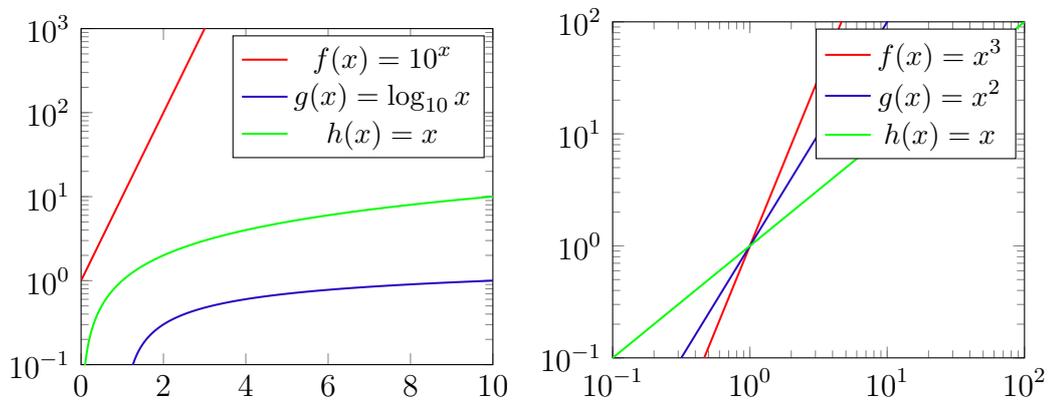


Figura 16 – Gráficos em escala semi-log (esquerda) e log-log (direita).

4.11 Pressão Atmosférica

A pressão atmosférica é o peso de uma coluna de ar vertical que se encontra a uma altura h em relação ao nível do mar e possui uma base inferior horizontal com uma unidade de área. Conforme a altura h aumenta, a pressão atmosférica diminui, pois o ar torna-se mais rarefeito e, conseqüentemente, pesa menos. É possível medi-la diretamente por um instrumento chamado barômetro.

Por meio da Lei de Boyle, que diz que dado um sistema fechado com a temperatura constante, a massa de gás ocupa um volume inversamente proporcional a sua pressão,

é possível provar que se p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão a uma altitude h é $p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$, em que α é uma constante.

Conhecendo-se a pressão em dois pontos de altitudes h_1 e h_2 , é possível determinar a constante α . Para isso, sejam $p(h_1)$ e $p(h_2)$ as pressões atmosféricas das altitudes h_1 e h_2 . Pela função anterior, temos

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \frac{p_0 \cdot e^{-\alpha h_1}}{p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{p(h_1)}{p(h_2)} \right) = \alpha(h_2 - h_1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \ln \left(\frac{p(h_1)}{p(h_2)} \right).$$

Agora, conhecendo a constante α e tendo um barômetro, é possível determinar a altitude h de um avião a qualquer instante. De $p = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$, temos

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\alpha h} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\alpha h \Leftrightarrow h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p} \right),$$

com p_0 sendo a pressão ao nível do mar e p é a pressão medida pelo barômetro.

4.12 Lei de Newcomb-Benford

A Lei de Newcomb-Benford é uma ferramenta importante na análise de números contáveis para detecção de contas com indícios de fraude. Ela foi descoberta pelo canadense Simon Newcomb (1835 – 1909), um matemático, astrônomo e escritor de economia e ficção científica. Ele percebeu que o primeiro dígito de números de um dado contexto não ocorrem na mesma frequência. Ao analisar tábuas de logaritmos, notou que as primeiras folhas eram mais desgastadas do que as últimas. Disso, percebeu que as pessoas buscavam mais logaritmos com primeiro dígito igual a 1 do que igual a 9. Contudo, essa lei caiu no esquecimento até ser redescoberta de forma independente por Frank Albert Benford Jr. (1887 – 1948) em 1938, um engenheiro elétrico e físico. Ele verificou a ocorrência do fenômeno em mais de 20 mil observações em áreas de rios, pesos atômicos e até em edições da revista *Readers Digest* (Cella & Rech, 2017; Forster, 2006; Cho & Gaines, 2007).

Embora seja um pensamento comum supor que a aparição dos dígitos se dê de maneira uniforme, ou seja, cada um com probabilidade $1/9$, Newcomb e Benford perceberam que a probabilidade decai para cada dígito segundo a lei

$$P(D = d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right),$$

em que P é a probabilidade, D é a variável primeiro dígito e d é o valor do primeiro dígito de um número, ou seja, $d \in \{1, \dots, 9\}$. A Figura 17 compara o logaritmo dos dígitos com uma curva logarítmica. Este resultado foi posteriormente demonstrado.

Como as pessoas tendem a distribuir os primeiros dígitos uniformemente, a análise da Lei de Newcomb-Benford sobre um conjunto de dados ajuda identificar possíveis

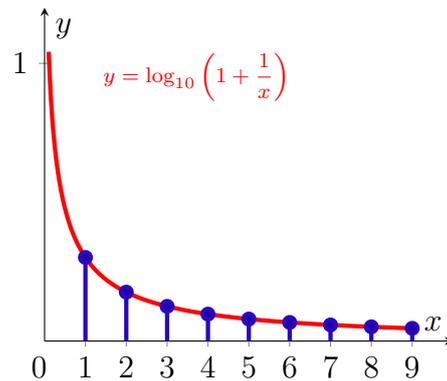


Figura 17 – Gráfico da probabilidade de cada dígito.

adulterações. No entanto, é importante destacar que ela sozinha não é determinante em um caso de fraude, mas apenas dá indícios. Testes de Hipóteses e Testes Qui-Quadrado podem mostrar que um conjunto de dados não é fraudulento embora a Lei de Newcomb-Benford aponte variações em alguns dígitos (Forster, 2006).

A título de exemplo, vamos testar se a Lei de Newcomb-Benford aplica-se ao primeiro dígito do número de habitantes de cada município brasileiro. Para isso, coletamos os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2020) referente a estimativa de habitantes por município em 1º de julho de 2020. Ao analisar os dados de 5.570 municípios, construímos a Tabela 6 com a distribuição de frequências dos primeiros dígitos e, ao calcular a frequência de cada um, obtivemos os valores conforme apresentados na Tabela 7 e na Figura 18, que se aproximam bastante do modelo.

Primeiro Dígito (d)	Número de Observações
1	1.642
2	1.022
3	733
4	585
5	456
6	377
7	312
8	263
9	180
Total	5.570

Tabela 6 – Número de observações do primeiro sítio.

Primeiro Dígito (d)	Frequência	Probabilidade
1	0,29479	0,30103
2	0,18348	0,17609
3	0,13160	0,12494
4	0,10503	0,09691
5	0,08187	0,07918
6	0,06768	0,06695
7	0,05601	0,05799
8	0,04722	0,05115
9	0,03232	0,04576

Tabela 7 – Distribuição de frequências do primeiro dígito.

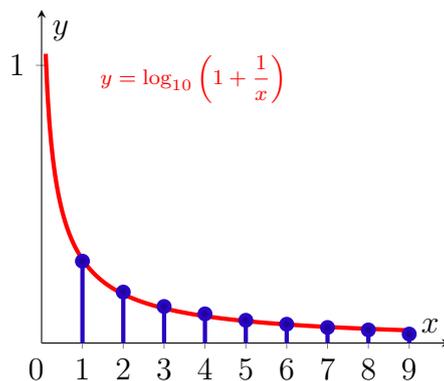


Figura 18 – Comparação da Distribuição de Frequências entre o dados e a probabilidade esperada.

A partir da Lei de Newcomb-Benford, foi cogitado se existiria uma distribuição da primeira letra das palavras. No [Apêndice B](#) trabalhamos essa ideia e chegamos a resultados interessantes.

4.13 Percepção sensorial

Segundo [Silva & Macedo \(1982\)](#), é possível estabelecer uma relação entre a magnitude subjetiva e a magnitude física, chamada de Lei de Steven. Em outras palavras, podemos relacionar como um sujeito percebe um estímulo, como intensidade sonora, brilho etc. por uma função-potência

$$R = K \cdot E^n,$$

em que R é a magnitude da percepção da pessoa, E é o valor físico do estímulo, K uma constante escalar e n é um expoente que depende do estímulo.

O valor de n indica como nossos órgãos sensoriais interpretam a variação de intensidade de certos estímulos. Se $n = 1$, a percepção e o estímulo são diretamente proporcionais. Se $n < 1$, o aumento do estímulo é percebido de maneira inferior e se $n > 1$, de maneira superior. Os pesquisadores exemplificam que estímulos com grande variação de energia, como na visão e na audição, tendem a ter expoentes baixos, de modo que os órgãos sensoriais agem como um compressor. Já estímulos como o choque elétrico apresentam um expoente maior do que 1, ou seja, percebemos o aumento da intensidade elétrica maior do que realmente é.

Contudo, existem críticas sobre a validade dessa lei. Apesar disso, é possível utilizá-la para fazer um experimento e cálculos simples capazes de verificar se essa lei se aplica ao contexto escolhido, o que pretendemos sugerir em uma das atividades. Os autores descrevem três métodos para o cálculo do expoente: o da estimação da magnitude, o da estimação de razão e o método de fracionamento. Optaremos em tratar deste último, pois será usado para uma proposta de atividade prática. No método de fracionamento, o

observador tem de estimar uma dada fração, geralmente $1/2$, de uma série de estímulos-padrão que lhe é apresentada pelo experimentador. Daí, a partir dos dados coletados, estima-se o valor de n . Para isso, note que ao aplicar logaritmo à função-potência, obtemos $\log_{10} R = n \log_{10} E + \log_{10} K$, que é uma função afim. Desse modo, obtendo a reta dos quadrados mínimos dos logaritmos dos valores coletados, obtemos n .

Vamos dar um exemplo do cálculo de n e para isso usaremos os dados da situação proposta por [Silva & Macedo \(1982\)](#) de estimar a percepção que as pessoas têm da distância. No experimento, o experimentador marca uma distância d em relação a um ponto de referência e cabe ao observador encontrar um ponto que divida o intervalo em duas partes iguais. Ou seja, estimar a metade da distância apresentada. Assim, pela Lei de Stevens, E é a distância avaliada, pois é o estímulo dado, e R é a distância avaliada como metade, pois é a resposta ao estímulo. A [Tabela 8](#) apresenta os dados dos autores e o cálculo do logaritmo na base 10.

Distância física em metros (E)	Metade avaliada em metros (R)	$\log_{10} E$	$\log_{10} R$
1,60	0,81	0,204120	-0,091515
3,20	1,52	0,505150	0,181844
6,40	3,18	0,806180	0,502427
12,80	5,81	1,107210	0,764176
25,60	12,58	1,408240	1,099681
51,20	24,42	1,709270	1,387746
102,40	52,09	2,010300	1,716754

Tabela 8 – Média da distância avaliada como metade pelo método de fracionamento.

Fonte: adaptada de [\(Silva & Macedo, 1982, p. 41\)](#).

Poderemos fazer a Regressão Linear agora utilizando o método dos quadrados mínimos, obtendo a reta de regressão $y = 1,001x - 0,313$, em que $x = \log_{10} E$ e $y = \log_{10} R$. Portanto, concluímos que $n \approx 1,001$, indicando que as pessoas do experimento estimam distâncias com valores bem próximos da distância real. Veja o gráfico exibido na [Figura 19](#).

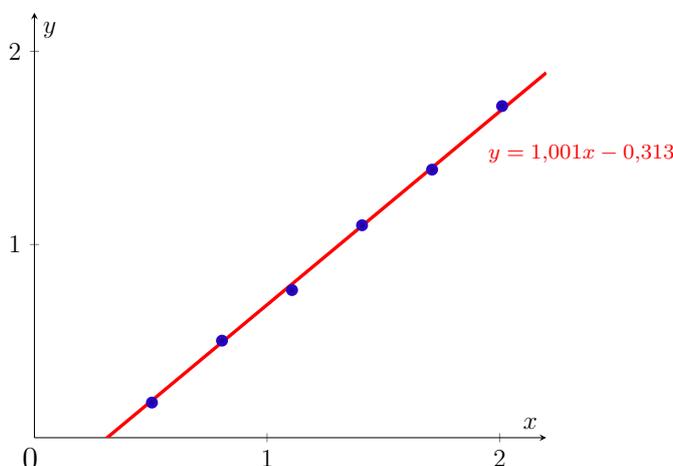


Figura 19 – Gráfico da Regressão Linear.

5 Propostas Didáticas

5.1 Introdução

Apresentaremos três propostas. A primeira é sobre vídeos animados que foram produzidos, inicialmente, para acompanhar uma sequência didática sobre os logaritmos, em que cada vídeo era para um tópico. Contudo, por questões de viabilidade, optou-se por reduzir a sequência para planos de aula, que é a nossa segunda proposta.

De maneira geral, os professores já possuem material didático para nortear as suas aulas. Assim, para não gerar conflito, optamos por criar planos de aula de assuntos que acreditamos poder contribuir, de modo que cada um funcione de maneira independente, explorando tópicos que geralmente são deixados de lado.

Já a terceira proposta são curiosidades que podem ser inseridas rapidamente durante as aulas normais para despertar o interesse no assunto e como ele se relaciona com outros temas. A essa coletânea demos o nome de “pitadas matemáticas” para dar mais sabor às aulas.

Por fim, traremos um catálogo de questões extraídas de diversas fontes para ser utilizado da forma que o professor julgar mais interessante.

5.2 Vídeos Animados

Nesta seção, deixaremos os *links* de todos os vídeos produzidos, que foram feitos com a intenção de divulgar os logaritmos, abordando desde a história até as aplicações, podendo ser usados em sala de aula, como vídeo complementar ou ser pesquisado por pessoas que estejam estudando o assunto. Os vídeos são objetivos e utilizam de animações para explicar algumas ideias melhor e serem mais chamativos. Após a publicação deste trabalho, eles estarão disponíveis publicamente no *YouTube* nesses mesmos *links*.

- 1) [Origem Histórica dos Logaritmos: de onde vem os logaritmos?](#)
- 2) [O que são Logaritmos?](#)
- 3) [Quais são as Propriedades dos Logaritmos?](#)
- 4) [Mudança de Base dos Logaritmos.](#)
- 5) [O que são Funções Exponenciais e Logarítmicas?](#)

- 6) [Número de Euler.](#)
- 7) [Logaritmos Naturais.](#)
- 8) [Onde usamos Logaritmos? Aplicações de Funções Logarítmicas e Exponenciais.](#)

Os vídeos foram produzidos utilizando *softwares* como *Adobe After Effects*, *Adobe Premiere Pro*, *Adobe Audition* e *Adobe Photoshop*, responsáveis por animação, edição, gravação de áudio e tratamento de imagens, respectivamente. De maneira complementar, foi utilizado o *software Inkscape* para imagens vetoriais bem como as expressões matemáticas ao estilo \LaTeX . O principal programa é o *After Effects*, pois é nele em que todas as animações são elaboradas, como movimento de figuras, aparição de gráficos, de textos etc.

Para produção dos vídeos, foi realizada a pesquisa, roteirização, animação, narração e edição. Devido à complexidade e duração de cada vídeo, levou-se em torno de um mês para produzir todos, já considerando a realização das alterações necessárias. Além dos vídeos produzidos para esta dissertação, conto um canal no *YouTube* chamado “Reducática”, em que abordo conceitos matemáticos por meio de animações. O objetivo é produzir vídeos que cubram os conteúdos da educação básica. Atualmente gasto de 15 h a 25 h três para produzir um vídeo novo.

5.3 Propostas de Aula

Nesta seção, propomos algumas atividades que podem ser trabalhadas em aula. Cada tópico é independente e aborda assuntos que nem sempre são bem desenvolvidos nos materiais didáticos.

Tópico 1 – Desenvolvimento histórico dos logaritmos

Objetivo: apresentar os logaritmos por uma abordagem histórica.

Tempo previsto: uma hora-aula.

Ao longo dessa aula serão necessárias algumas tabelas, por isso é recomendável projetá-las para economizar tempo. Ao longo da aula é possível citar aspectos históricos que foram apresentados no [Capítulo 2](#). Além disso, as ideias abordadas nesta aula foram feitas em parte no vídeo produzido que se encontra neste [link](#).

Inicie a aula apresentando a expressão

$$\frac{5,6234 \cdot 17,7828}{1,7783}$$

e dizendo que resolveremos sem calculadora. Eles vão questionar, mas informe que não faremos as contas no papel. É provável que fiquem curiosos. Agora, apresente a [Tabela 9](#).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024

Tabela 9 – Potências não-negativas de 2.

Destaque que a linha do n , do expoente, é uma PA de razão 1 e a linha do 2^n , da potência, é uma PG de razão 2. Dê como exemplo realizar a multiplicação $8 \cdot 16$. Ela pode ser obtida fazendo $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$. Pela tabela, temos 128. Dê outros exemplos e destaque que os produtos das potências na tabela podem ser obtidos por intermédio da soma dos expoentes. Expanda a tabela para expoentes negativos e racionais, fazendo alguns exemplos.

A primeira tabela desenvolvida dessa forma teve como base um número bem próximo de 1, que foi 0,9999999, como a [Tabela 10](#). Nessa construção, deu-se o nome de logaritmo para o expoente das potências de 0,9999999, de modo que essa tabela ficou conhecida como tábua de logaritmos, que foi importante para avanços científicos. Após essa tabela, criou-se o conceito de base de um logaritmo, passando-se a usar a base 10, definindo logaritmo de 1 como 0 e logaritmo de 10 como 1.

Foi notado que os números reais podem ser escritos na forma $x = a \cdot 10^n$, em que $1 \leq a < 10$ e n um número inteiro, em que n é característica e a , a mantissa. Basicamente, se tivesse os logaritmos de $1 \leq a < 10$, poderia-se obter os demais somando n . Na sequência, apresente a [Tabela 11](#), com algumas potências de 10.

Com estes valores, poderemos simplificar o cálculo de $\frac{5,6234 \cdot 17,7828}{1,7783}$, pois $10^{0,25} \approx 1,7783$, $10^{0,75} \approx 5,6234$ e $10^{1,25} \approx 5,6234$. Então, substituindo e usando as propriedades das potências, temos

$$\frac{5,6234 \cdot 17,7828}{1,7783} = \frac{10^{0,75} \cdot 10^{1,25}}{10^{0,25}} \approx 10^{1,75} \approx 56,2341.$$

Logaritmo	Potência
0	1,0000000
1	$0,9999999^1 = 0,9999999$
2	$0,9999999^2 = 0,9999998$
3	$0,9999999^3 = 0,9999997$
⋮	⋮
98	$0,9999999^{98} = 0,9999902$
99	$0,9999999^{99} = 0,9999901$
100	$0,9999999^{100} = 0,9999900$

Tabela 10 – Tabela de Logaritmos de Napier.

n	10^n
0,00	1,0000
0,25	1,7783
0,50	3,1623
0,75	5,6234
1,00	10,0000
1,25	17,7828
1,50	31,6228
1,75	56,2341
2,00	100,0000

Tabela 11 – Potências de 10 com expoente de cinco casas decimais.

Como os valores da tabela são aproximações, se usarmos a calculadora chegaremos a 56,233367553281. Note que o resultado obtido é bem próximo do real.

Tópico 2 – Função Logarítmica como inversa da Exponencial

Objetivo: apresentar que a função logarítmica é a inversa da exponencial com uso de *softwares*.

Tempo previsto: uma hora-aula.

Requisitos: conhecer funções exponenciais e logarítmicas.

Como nem sempre os materiais didáticos abordam que a função logarítmica é a inversa da exponencial, mostraremos um caminho breve para apresentar essa ideia. Para agilizar o processo é interessante utilizar *softwares* como o *GeoGebra*, disponíveis tanto para microcomputadores quanto para *smartphones*. Veja o [Apêndice C](#) para uma explicação passo a passo para construção de gráficos de funções com o *GeoGebra Mobile*. Além disso, em dois vídeos produzidos são abordados este tópico: no vídeo neste [link](#) trabalhamos o que são funções exponenciais e logarítmicas e no vídeo deste [link](#) entre 47 s e 1 min 29 s, é abordado o caso apresentado a seguir.

Problema. Em uma cidade S do interior, os casos de uma doença viral C tem duplicado a cada 17 dias, em média. O primeiro caso confirmado é tratado como dia zero da doença na cidade. Supondo que a taxa de transmissão se mantenha ao longo de um ano, esboce o gráfico que representa o número de casos ao longo do tempo e determine quantos casos são esperados após 3 meses da epidemia.

Solução. Podemos modelar a situação por meio da função exponencial $C(t) = 2^{\frac{t}{17}}$, em que $C(t)$ é o número de casos estimados e t o tempo em dias.

Para ajudar no entendimento e no esboço do gráfico, vamos construir a [Tabela 12](#) com projeções para cada mês. Recomendamos o uso de calculadora para agilizar os cálculos.

t (em dias)	$C(t)$ (casos estimados)
0	1
30	4
60	12
90	40
120	134
150	454

Tabela 12 – Projeção dos casos da doença C na cidade S por mês.

Na [Figura 20](#), temos a construção do gráfico da função.

Para determinar a quantidade de casos esperados após três meses, caso não tenha construído a tabela, basta fazer

$$C(90) = 2^{\frac{90}{17}} \approx 40,$$

ou seja, após três meses, é esperado que existam 40 casos confirmados.

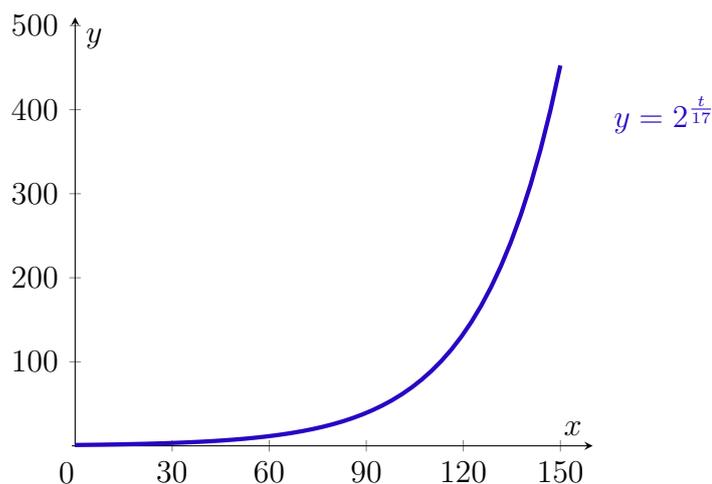


Figura 20 – Gráfico da projeção dos casos da doença C na cidade S .

Comente com os alunos que embora o tempo de duplicação pareça longo, ao persistir por tempo suficiente, o número de casos confirmados pode chegar a números elevados.

Agora, vamos adicionar uma nova situação ao problema anterior.

Problema. Partindo da situação anterior, após quanto tempo é esperado que haja 10 mil casos da doença?

Solução. Reaproveite o que foi já estabelecido, modelando a situação como $c = 2^{\frac{t}{17}}$, em que c é o número de casos e t o tempo em dias. Precisamos obter a função inversa da que temos. Assim, basta fazer

$$c = 2^{\frac{t}{17}} \Rightarrow \log_2 c = \log_2 2^{\frac{t}{17}} \Rightarrow t = 17 \cdot \log_2 c.$$

Logo, a função $t(c) = 17 \cdot \log_2 c$ determina o tempo em função do número de casos. Se achar conveniente, monte a [Tabela 13](#), comparando com a [Tabela 12](#) para que percebam que uma função é a inversa da outra.

c (casos estimados)	$t(c)$ (em dias)
1	0
4	30
12	60
40	90
134	120
454	150

Tabela 13 – Tempo estimado em função dos casos.

Agora construa o gráfico da função como ilustrado na [Figura 21](#).

Para tornar mais clara a ideia de funções inversas, faça uma última construção usando as duas funções, como exibido na [Figura 22](#).

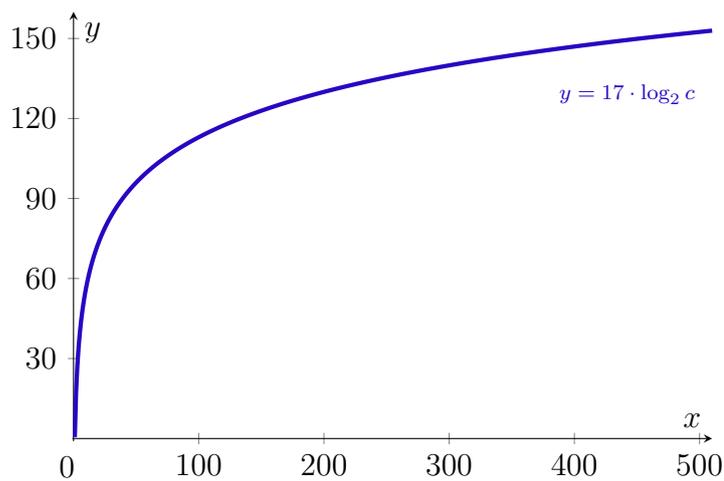


Figura 21 – Gráfico do tempo estimado para um número de casos.

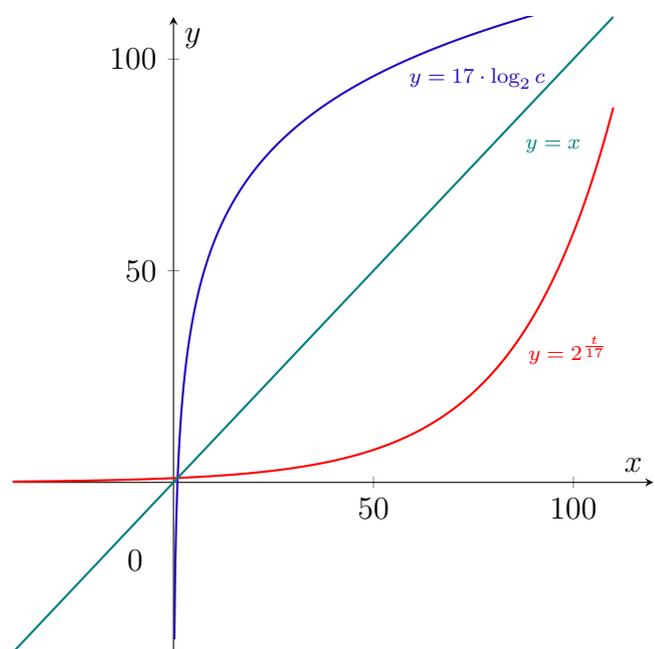


Figura 22 – Funções Inversas.

Tópico 3 – O Número de Euler e os Logaritmos Naturais

Objetivo: apresentar o número de Euler e os logaritmos naturais.

Tempo Previsto: duas horas-aula.

Geralmente, o número de Euler e os logaritmos naturais são pouco explorados nos materiais de Ensino Médio. Assim, acreditando ser importante trabalhar esses tópicos, propomos uma apresentação curta, mas significativa.

Para apresentar o número de Euler, denotado por e , vamos partir da capitalização contínua, uma abordagem que possui amparo histórico, pois foi uma das maneiras que o número e foi descoberto. A outra, que definirá os logaritmos naturais, é a relação dos logaritmos com a área sob a curva da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, culminando com a descoberta de que e base é a base desse logaritmo.

A Aula 1 foi abordada no vídeo produzido que se encontra neste [link](#). Já a Aula 2 foi abordada no vídeo que se encontra neste [link](#).

Aula 1: Capitalização Contínua

Vamos considerar inicialmente que um investimento rende 100% de juros anuais. Assim, se aplicarmos R\$ 1.000,00, deveremos receber R\$ 2.000,00 ao final de um ano, pois $1.000 \cdot (1 + 1)^1 = 1.000 \cdot 2 = 2.000$. O que se pode esperar se os juros passarem a ser capitalizados semestralmente?

Dividindo igualmente a taxa de juros pelo período, ou seja, 50% ao semestre, teremos

$$1.000 \cdot (1 + 0,5)^2 = 1.000 \cdot 2,25 = 2.250,$$

recebemos então R\$ 2.250,00.

Discuta com os alunos o que esperam que ocorra com o valor da aplicação ao se estreitar cada vez mais o período de capitalização. Faça mais alguns valores e questione-os se o aumento da aplicação cresce cada vez mais, ou se ela parece se aproximar de algum valor.

Para poder responder a essa pergunta, vamos modelar a situação proposta: seja n o período de capitalização e M_n , o valor do montante capitalizado por n períodos, com um capital inicial de R\$ 1.000,00. Assim, teremos

$$M_n = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Agora, construa a [Tabela 14](#).

Destaque aos alunos que o crescimento do valor é decrescente na medida que os valores de n aumentam. Note que o aumento só depende da potência $(1 + 1/n)^n$. Assim, se dividirmos o valor da última linha da tabela por 1.000, obtemos o número 2,718281798.

n	$M_n = 1.000 \cdot (1 + 1/n)^n$
10^0	2.000,000000
10^1	2.593,742460
10^2	2.704,813829
10^3	2.716,923932
10^4	2.718,145926
10^5	2.718,268237
10^6	2.718,280469
10^7	2.718,281694
10^8	2.718,281798

Tabela 14 – Capitalização contínua.

Nesse momento, comente que essa sequência está indo para um número específico, bem próximo do valor da última linha da tabela. Ele foi primeiramente percebido pelos irmãos Bernoulli por um raciocínio análogo ao que foi feito nesta aula. Também cite que o matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) utilizou a letra e para simbolizar esse número. Depois disso, os matemáticos passaram a chamá-lo de número de Euler em sua homenagem.

Essa aula é bem curta, então é possível e recomendado que se inicie a próxima aula.

Aula 2: Os Logaritmos Naturais e a Área sob a Curva da Hipérbole

Vários aspectos históricos podem ser citados ao longo das duas aulas, mas deixaremos a cargo do professor encontrar o momento conveniente.

Inicialmente, apresente um conceito bem simples, mas importante para a definição geométrica de logaritmo: qualquer figura no plano que for multiplicada por uma constante no seu eixo horizontal e pelo inverso dessa mesma constante no eixo vertical, terá a mesma área. É fácil perceber isso com um retângulo de base b e altura h . Sua área é dada por $A = b \cdot h$. Se multiplicarmos a base por uma constante k e a altura por $\frac{1}{k}$, teremos um retângulo diferente, mas com a mesma área. Outro modo é pensar em uma imagem no microcomputador que foi comprimida verticalmente na mesma proporção a que foi esticada horizontalmente: ambas possuem a mesma área. Apresente agora o gráfico da equação $y = \frac{1}{x}$ e diga que essa curva chama-se hipérbole como ilustra a [Figura 23](#).

Nesse momento, considere a função $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$. Comente que essa função realiza a transformação citada anteriormente. Se achar necessário, dê alguns exemplos de retângulos construídos ao longo do plano cartesiano.

Agora, considere uma faixa de área A sob a curva da hipérbole, iniciando-se em

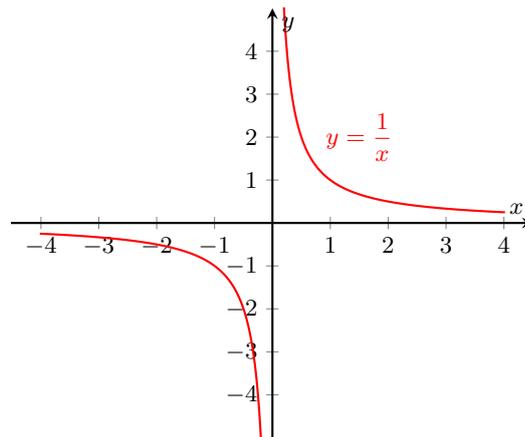


Figura 23 – Hipérbole.

$x = 1$ até $x = d > 1$. Se multiplicarmos o eixo vertical da faixa por $\frac{1}{d}$ e o eixo horizontal por d , obteremos a faixa entre $x = d$ e $x = d^2$, possui a mesma área, podendo-se prosseguir assim sucessivamente. Desse modo, a área da faixa até d é A , até d^2 é $2A$, até d^3 é $3A$ e assim por diante, como ilustra a [Figura 24](#). Construa uma tabela como a [Tabela 15](#).

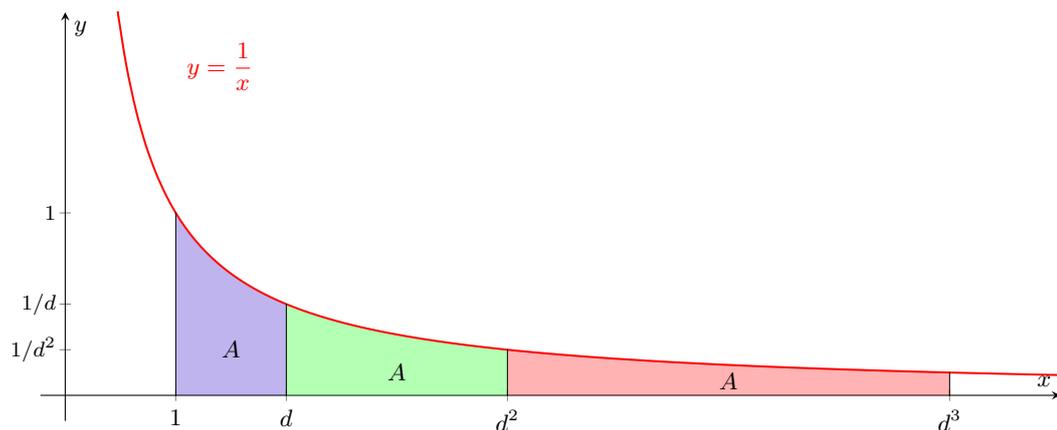


Figura 24 – Retângulos de mesma área pela hipérbole.

Área	Valor associado
$1A$	d
$2A$	d^2
$3A$	d^3
$4A$	d^4
$5A$	d^5

Tabela 15 – Áreas das faixas – uma função logarítmica.

Enquanto a área segue uma progressão aritmética, o valor sobre o eixo x segue uma progressão geométrica. Desse modo, concluímos que a área sob a curva pode ser expressa por uma função logarítmica tal que $A(x) = \log_d x$.

Ainda nos falta determinar qual é a base dessa função. Não vamos demonstrar que ela é igual a e , mas vamos fazer algumas aproximações que nos levem a suspeitar de

que seja esse número. Comente com os alunos que ainda falta encontrar a base da função logarítmica que determina a área da faixa da hipérbole, ou seja, um número d tal que $A(d) = 1$.

Para isso, vamos fazer aproximações da área sob a curva com trapézios. Porém, precisamos determinar primeiro um intervalo $[x_1, x_2]$ tal que $A(x_1) < 1 < A(x_2)$. Assim, conforme ilustra a [Figura 25](#), considere o retângulo formado entre as retas $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 1$, de área 2 u.a. e o retângulo compreendido entre as retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 0,5$, de área 0,5 u.a. Então

$$0,5 < A(2) < A(3) < 2 \Rightarrow 2 < d < 3.$$

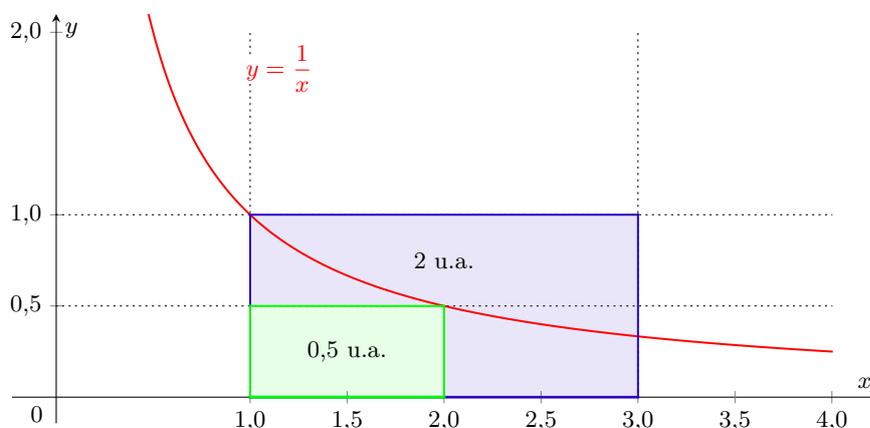


Figura 25 – Procurando a faixa da hipérbole com área igual a 1.

Vamos dividir a faixa em trapézios de altura $h = 0,5$ a partir de $x = 1$, como ilustrado na [Figura 26](#).

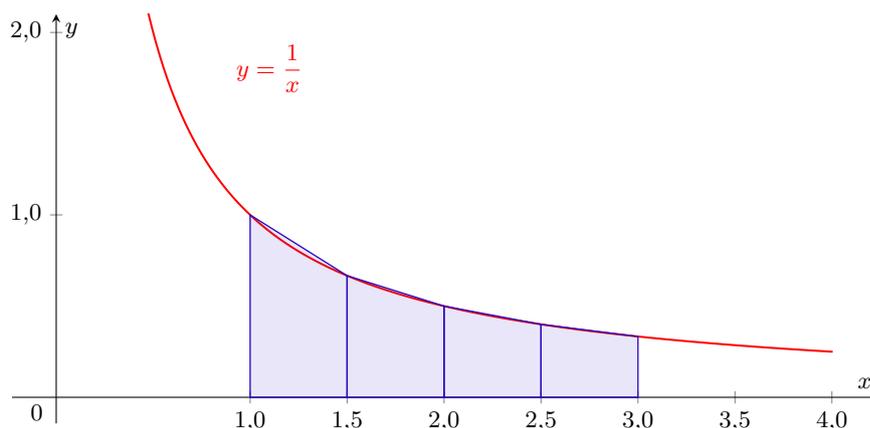


Figura 26 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,5 u.c.

Nesse momento, começaremos os cálculos das áreas dos trapézios e a somá-las para construir a [Tabela 16](#). Como provavelmente não haja tempo para toda a construção, considere apresentar a ideia com os dois trapézios iniciais e apresentar o restante pronto.

Pelos valores da [Tabela 16](#), é perceptível que o valor de d deve estar entre 2,5 e 3. Assim, é possível que nessa altura alguns alunos já suspeitem que a base seja o número

x	Área do Trapézio	Área Acumulada
1,5	0,41667	0,41667
2,0	0,29167	0,70834
2,5	0,22500	0,93334
3,0	0,18333	1,11667

Tabela 16 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,5 u.c.

de Euler. De qualquer maneira, conte que a base procurada é o número de Euler, ou seja, $d = e$, que é um resultado que pode ser demonstrado. Se continuarmos construindo trapézios com bases cada vez menores, mais próximo de e chegaremos.

Agora, comente que utilizamos a notação $\ln x$ no lugar de $\log_e x$ para designar o chamado logaritmo natural de x , ou ainda, o logaritmo hiperbólico de x , que é a função logarítmica que corresponde a área sob a curva da hipérbole da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Caso tenha tempo disponível, é possível fazer mais uma aproximação, mas agora com trapézios com altura de 0,25 u.c., conforme com a [Figura 27](#), o que nos permite construir a [Tabela 17](#).

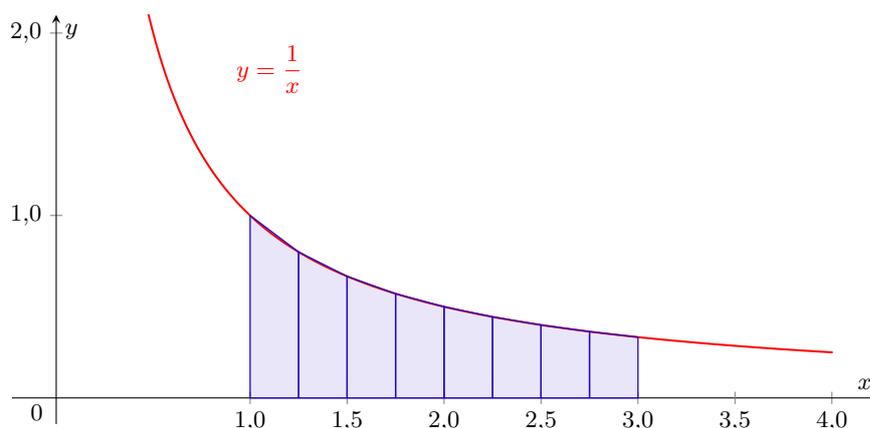


Figura 27 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,25 u.c.

x	Área do Trapézio	Área Aproximada
1,25	0,22500	0,22500
1,50	0,18333	0,40833
1,75	0,15476	0,56309
2,00	0,13393	0,69702
2,25	0,11806	0,81508
2,50	0,10556	0,92064
2,75	0,09545	1,01609
3,00	0,08712	1,10321

Tabela 17 – Aproximações da faixa por trapézios com altura de 0,25 u.c.

Nesse momento, é interessante comentar que o logaritmo natural não é o logaritmo neperiano. Napier, quando descobriu os logaritmos, usou outra base, que se aproximava de $1/e$. Na verdade, Napier nem havia concebido a ideia de base para logaritmos. Portanto, é errôneo associar o logaritmo natural ao logaritmo neperiano.

Tópico 4 – Aplicações e Experimentos

Tempo Previsto: três horas-aula.

Objetivo: explorar a Lei de Newcomb-Benford, a Lei de Stevens, Catenária e Escala Musical como aplicações de logaritmos e o Número de Euler.

Comece a aula apresentando algumas aplicações como as citadas no [Capítulo 4](#) ou exiba trechos do vídeo animado produzido que se encontra neste [link](#). Na sequência, escolha os experimentos que gostaria de trabalhar com os alunos. Para facilitar a exposição, separamos cada um em quadros destacados.

Estes experimentos podem ser feitos em aula ou como trabalho para grupos realizarem e apresentarem aos colegas de classe ou em uma feira de ciências da escola, por exemplo. Caso opte pela apresentação, pode ser que seja necessário mais do que três horas-aula.

Experimento 1: Lei de Newcomb-Benford

Apresente a Lei de Newcomb-Benford, que diz que a distribuição de frequência dos primeiros dígitos de um número ocorre de forma logarítmica segundo a lei

$$P(D = d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right),$$

em que P é a probabilidade, D é a variável primeiro dígito e d é o valor do primeiro dígito de um número, ou seja, $d \in \{1, \dots, 9\}$.

Como as pessoas tendem a distribuir os primeiros dígitos uniformemente, a análise da Lei de Newcomb-Benford sobre um conjunto de dados ajuda identificar possíveis adulterações contábeis. No entanto, para ratificá-las, é preciso passar por outras análises. Além disso, ela é visualizada em diversas situações que envolvem números sob um dado contexto, como o número das casas, o número de habitantes de um município, o valor da conta de eletricidade, entre outros. Utilize as informações e o exemplo dado na [Seção 4.12](#) para complementar as explicações.

Existem várias formas de realizar um experimento, como analisar o primeiro dígito do número das casas de um bairro, na sequência de Fibonacci, na sequência dos números primos, analisar despesas como água, luz e telefone, ou ainda o peso atômico, populações, preço de casas, entre outros.

Experimento 2: Lei de Stevens

Apresente a Lei de Stevens, que estabelece uma relação entre a magnitude subjetiva e a magnitude física, ou seja, relaciona o estímulo, como a intensidade sonora, brilho etc. com a resposta da pessoa por meio da relação

$$R = K \cdot E^n,$$

em que R é a magnitude da percepção da pessoa, E é o valor físico do estímulo, K uma constante escalar e n é um expoente que depende do estímulo.

O valor de n indica como nosso corpo interpreta a variação de intensidade de um estímulo. Se $n = 1$, a percepção e o estímulo são diretamente proporcionais; se $n < 1$, o aumento do estímulo é percebido de maneira inferior e se $n > 1$, de maneira superior.

Existem críticas sobre a validade dessa lei, mas é uma boa oportunidade para que os alunos façam um experimento para testá-la. Utilize o exemplo da [Seção 4.13](#) para explicar o procedimento.

Um experimento possível é analisar a percepção do tempo. Para isso, terá de ter um experimentador para cronometrar o tempo e o observador que deverá contar o tempo sozinho. Por exemplo, combina-se que observador deve 30 s e o experimentador irá cronometrar o tempo passado. Então, o observador contará o tempo e, quando julgar que se passaram os 30 s, avisará o experimentador e este pausará o cronômetro. Agora compara-se o tempo solicitado com o real. Repete-se o experimento com outros valores e outras pessoas. Depois de coletar alguns dados, aplica-se o procedimento da [Seção 4.13](#), de modo o tempo pedido agirá como estímulo e o tempo cronometrado como resposta ao estímulo.

Outro experimento possível é analisar quão acurada uma pessoa é para determinar o centro de um círculo. Para isso, o experimentador fará vários círculos de tamanhos diferentes e solicitará que o observador marque o centro do círculo. Após as marcações, o experimentador traçará uma reta que passe pelo ponto marcado pelo observador e o centro do círculo e então medirá o menor comprimento entre o círculo e o ponto marcado pelo observador. A medida do diâmetro do círculo será o estímulo e o comprimento do segmento da circunferência até o ponto marcado será a resposta. Ainda é possível comparar cubos de tamanhos diferentes. Pode-se construir cubos de tamanhos diferentes, e, a partir de um cubo de referência de volume V , caberá ao observador determinar qual cubo tem volume $V/2$. Além disso, pode-se também comparar objetos de massas diferentes.

Experimento 3: Catenária

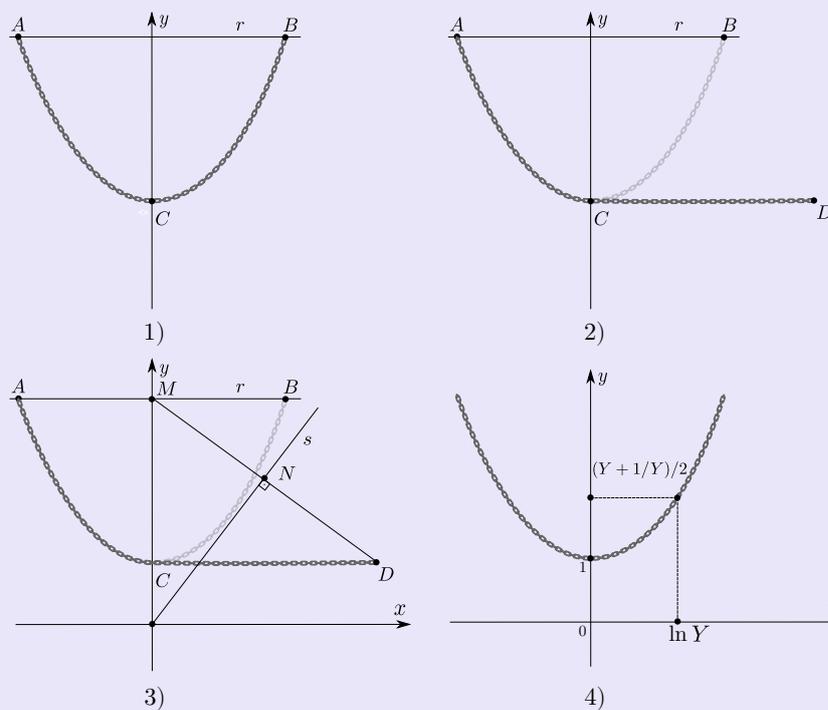
Apresente a catenária aos alunos, utilizando os dados fornecidos no [Capítulo 2](#). Como experimento, pode-se testar se a corrente realmente assume a forma de uma catenária com apenas folhas de sulfite, uma placa de isopor e uma corrente. A partir da equação

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a},$$

que define a catenária, escolha um valor para a e esboce o seu gráfico. Para facilitar, imprima em uma folha sulfite. Agora, fixe a folha no isopor e prenda um dos extremos da corrente em um dos extremos da curva. Coloque a placa de isopor em pé e movimente a corrente até encaixá-la no gráfico. Fixando o outro extremo verá que a corrente assume a forma da catenária. Faça outros gráficos e repita esses passos.

Outra maneira possível de realizar o experimento é esboçando o gráfico na lousa e solicitar que um aluno segure um extremo da corrente de um lado e outro aluno movimente a corrente até ajustá-la à curva. Contudo, pode ser um pouco complicado realiza um esboço.

Além de encaixar uma corrente na curva da catenária, pode-se utilizá-la para calcular o logaritmo de um número. Seguindo os passos apresentados no [Capítulo 2](#) sugeridos por Leibniz, calcule o logaritmo de alguns números. A fim de facilitar, reproduziremos os passos simplificados aqui.



Experimento 4: Escala Musical

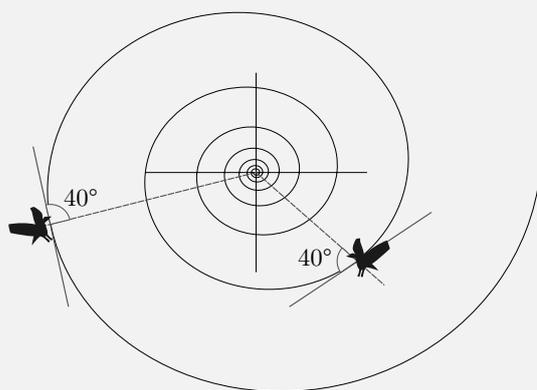
Apresente a escala musical e sua relação com os logaritmos, conforme apresentado na [Seção 4.9](#). É possível determinar uma nota musical a partir de uma frequência de referência, desde que se saiba a qual nota corresponde. Para isso, é necessário um aplicativo para emitir uma nota, como o aplicativo *Musical Note*, disponível na *Play Store* gratuitamente, e outro para medir a frequência, como *Spectroid* também disponível gratuitamente no mesmo local. Inicialmente, deve-se obter a frequência de uma nota, e utilizá-la como referência. A partir daí, os alunos deverão coletar frequências de sons emitidos por qualquer fonte e, pela equação $o = \log_2(f/f_0)$, em que f_0 é a frequência de referência, f , a frequência coletada e o , a quantidade de oitavas acima ou abaixo da nota de referência.

5.4 Pitadas Matemáticas

As pitadas matemáticas são curiosidades para apresentar durante as aulas normais. As informações apresentadas aqui foram coletadas de [Ebbinghaus \(1885\)](#), [Gomes \(2021\)](#), [Paula & Souza \(2017\)](#), [Pergher & Stein \(2003\)](#), [Teixeira \(2016\)](#), [Veritassium \(2021\)](#) e [Viana \(2021\)](#).

O que um falcão peregrino faz para alcançar sua presa? Ora, ele usa logaritmos!

Os falcões-peregrinos são pássaros que voam a grandes altitudes, podendo localizar presas a grandes distâncias. Mas, para mantê-la em foco, ele necessita deixar sua cabeça com um ângulo de 40° em relação à presa. Contudo, também deve manter a cabeça e o corpo alinhados para obter máxima velocidade de voo, por questões de aerodinâmica. Se ele descer em linha reta em direção à presa, ele não conseguirá enxergá-la, porque será um ponto cego. O que ele pode fazer? Ora, usar logaritmos! Na verdade, a espiral logarítmica.



Quando se aproximar o suficiente para enxergá-la de frente, ele mergulha diretamente sobre a sua caça.

A espiral logarítmica é aquela que possui uma taxa constante de crescimento, podendo ser expressa em coordenadas polares por meio de logaritmos, daí seu nome. Uma característica interessante é que todas as retas que cortam seu centro possuem o mesmo ângulo com a reta tangente. Por conta disso, se o falcão usar essa trajetória, ele poderá se aproximar da presa com o corpo e a cabeça alinhada e focando a

Fonte da Imagem: usuário Carlos Delgado, 2014. Licenciado sob CC BY-SA-4.0, via Wikimedia Commons. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Falc%C3%A3o_peregrino#/media/Ficheiro:Falco_peregrinus_-_01.jpg>. Acesso em 22 set. 2021.

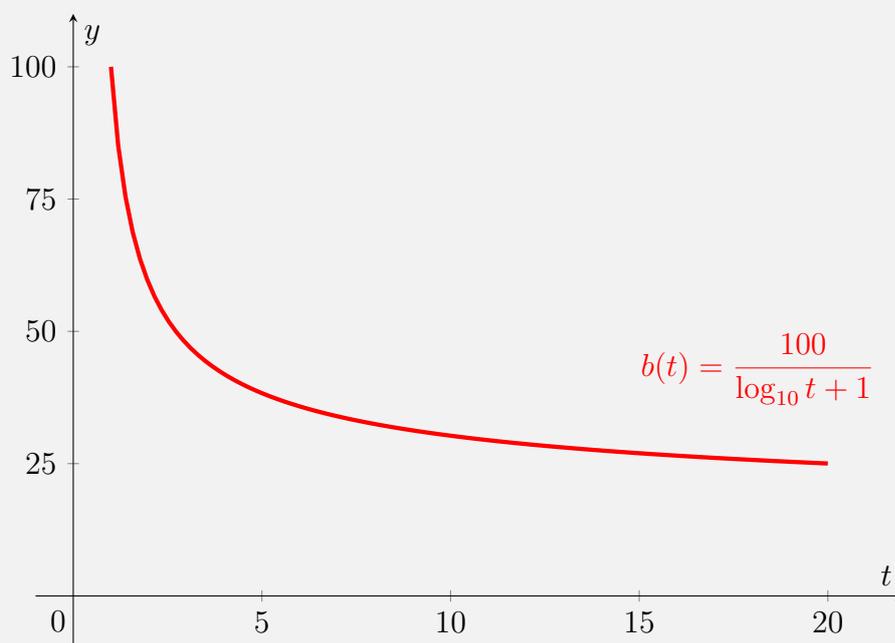
A Curva do Esquecimento

Um dos primeiros estudos acerca do esquecimento é do matemático Hermann Ebbinghaus (1850 – 1909), que contribuiu com a curva do esquecimento. No seu trabalho, ele mostrou que a maior parte do esquecimento ocorre após os primeiros momentos da aprendizagem.

Inicialmente, foram utilizadas sílabas sem sentido para a elaboração da curva, analisando a memorização com intervalos que variavam de poucos minutos a anos. Por meio desse estudo, Ebbinghaus chegou a função

$$b(t) = \frac{100k}{c \log_{10} t + k},$$

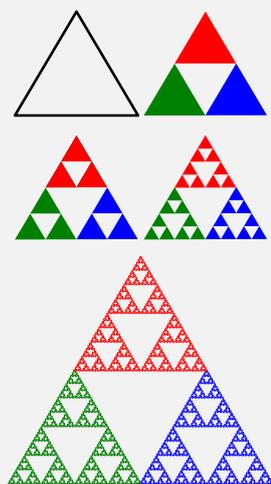
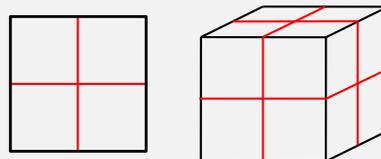
em que $b(t)$ pode ser entendido como a retenção da informação memorizada, t é o tempo em minutos enquanto k e c são constantes. Uma retenção de 80% significa que 80% da lista de sílabas aleatórias foram lembradas, restando memorizar novamente apenas 20% da lista. Em uma retenção de 100%, toda a lista era lembrada. Contudo, essa curva do esquecimento não ocorre da mesma forma para todos os tipos de informação.



Fractais e Logaritmos

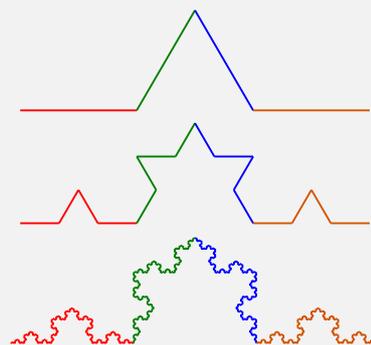
O termo Fractal foi denominado pelo matemático francês Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) que vem da palavra latina *fractus*, da ideia de fragmentos. Os fractais são muito presentes em formas e em modelos de fenômenos naturais. Uma possível definição para fractais é que, dado um conjunto F , ele será um fractal se o conjunto possuir autossimilaridade, tiver dimensão maior do que a dimensão topológica e se esse conjunto puder ser descrito por um procedimento recursivo ou iterativo.

É possível determinar a dimensão de um fractal por meio de logaritmos. Para entender isso, vamos aplicar essa ideia no cálculo da dimensão de um quadrado e de um cubo, que são autossimilares. Veja que a partir de um quadrado de lado a , podemos obter 4 quadrados de lado $a/2$, semelhantes ao original. Ou seja, para reduzir à metade do tamanho, obtemos $(2)^2 = 4$ peças. A mesma ideia pode ser aplicada ao cubo, obtendo-se $(2)^3 = 8$ peças. A partir disso, podemos chegar a $n = m^d$, em que n é o número de peças, m o fator de redução, no caso apresentado é 2, e d é a dimensão da figura. Aplicando logaritmos, obtemos a expressão $d = \log_m n$, o que nos permite calcular a dimensão de fractais.



O Triângulo de Sierpinski é um fractal que parte de um triângulo equilátero, o qual é dividido em 4 triângulos iguais e exclui-se o central. A cada iteração, os triângulos serão repartidos em 4 triângulos iguais. Como cada triângulo novo tem a metade do lado daquele que o originou, o fator de redução é 2 e são geradas 3 novas peças. Com isso, podemos determinar a sua dimensão, obtendo $d = \log_2 3 \approx 1,58$.

Já a Curva de Koch, é um fractal gerado a partir de um segmento de reta que é dividido em três segmentos iguais, na qual substitui-se a parte do meio por um triângulo equilátero sem base. A cada iteração, são gerados 4 segmentos com $1/3$ do comprimento do original. Assim, o fator de redução é 3 e temos $4 = 3^d$. Ou seja, $d = \log_3 4 \approx 1,26$ é a dimensão do fractal.



O Número de Euler e quando encher o seu tanque

Uma pessoa pretende abastecer seu carro e, na sua cidade, existem N postos de combustível. Cabe a ela decidir qual escolher, indo a cada um observar o preço. A cada visita, ela é capaz de comparar o preço, mas continua sem informação dos demais.



O ideal seria observar a todos e então escolher.

Contudo, após a observação, não compensa retornar ao posto novamente pelo gasto de combustível. A questão é: quando parar de procurar e escolher um posto? Há o risco de escolher cedo demais e perder um preço mais favorável ou de se escolher tarde demais e ter deixado passar o melhor preço. Qual seria a melhor estratégia na hora de escolher?

O problema foi formulado por Merrill Flood em 1949, em um contexto de uma pessoa procurar um parceiro para casamento. A solução foi dada por Thomas Bruss em 1984, que determinou que a melhor estratégia é rejeitar os N/e primeiros postos, em que e é o número de Euler, um número que é a base dos dos logaritmos naturais, muito importante em diversas aplicações. Após esse rejeitar esses postos, escolhe-se o primeiro posto que apresente preço melhor que seus antecessores.

Fonte da Imagem: vetor criado por upklyak – br.freepik.com.
Disponível em: <[https://br.freepik.com/vetores-gratis/posto-de-gasolina-servico-de-reabastecimento-de-carros-loja-de-gasolina-com-predio_9396094.htm#page=1&query=posto%20combust%C3%ADvel&position=3&from](https://br.freepik.com/vetores-gratis/posto-de-gasolina-servico-de-reabastecimento-de-carros-loja-de-gasolina-com-predio_9396094.htm#page=1&query=posto%20combust%C3%ADvel&position=3&from_view=detail&from_view_from=detail_view=detail)
Acessado em 27 nov. 2021.

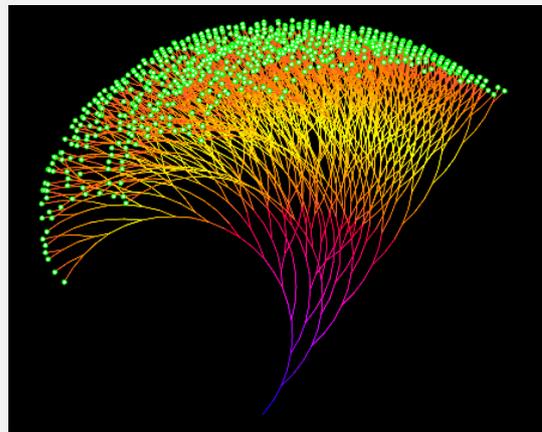
Conjectura de Collatz e Logaritmos

A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \text{se } a_n \text{ for ímpar} \\ \frac{a_n}{2}, & \text{se } a_n \text{ for par} \end{cases},$$

independentemente do valor positivo de a_1 , para algum n ocorre $a_n = 1$, até onde se sabe. Essa é a Conjectura de Collatz, proposta em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910 – 1990).

Embora já tenha-se testado até o número 2^{68} (algo próximo de 10^{20}) por força bruta, não se sabe se todas as sequências chegam a um em algum momento ou se existe um conjunto de números que entram em um ciclo de repetição. Se representarmos as ligações entre os números da sequência em um grafo tridimensional, adicionando uma rotação no sentido anti-horário para números ímpares e horário para pares, o grafo vai ficar parecido com uma alga marinha.



Um fato curioso que relaciona essa sequência aos logaritmos, se esta tiver uma grande quantidade de termos, é que ela segue a Lei de Newcomb-Benford, uma distribuição logarítmica que ocorre com o primeiro dígito de um número na forma $P(d) = \log_{10}(1 + 1/d)$, em que d é o primeiro dígito do número. O interessante é que nem toda sequência segue essa lei logarítmica, como é o caso da dos números primos, que apresentam uma distribuição próxima a uniforme.

Fonte da Imagem: Algorimarte. Disponível em: <<https://www.algorimarte.com/the-collatz-tree/>>. Acessado em 23 set. 2021.

5.5 Catálogo de Questões

Nesta seção, traz-se uma seleção de exercícios separados por aplicações dos logaritmos para facilitar a busca do professor. Procurou-se coletar principalmente questões que não estivessem disponíveis *online*, embora fossem complementadas. fossem tão fáceis de se encontrar na *internet*.

Crescimento Populacional

- 1) (Lima, 2013) Se, no instante $t = 0$, um recipiente contém um número N_0 de bactérias se reproduzindo normalmente, então, num instante $t > 0$, o número de bactérias existentes no recipiente será

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha t},$$

em que α depende do tipo de bactéria. Suponha que uma cultura de cem bactérias se reproduz em condições favoráveis. Doze horas mais tarde contamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá dois dias depois do início da experiência?

- 2) (Lima, 2013) A população de um cidade era de 750 mil habitantes no fim de 1950 e 900 mil no fim de 1960. Que população pode-se prever no final de 1970? Quando se espera que a população atinja 1,5 milhão?
- 3) (São Paulo, 2014) A população de certa região A cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N_A = 6.000 \cdot 10^{0,1t}$ (t em anos). Em outra região B , verifica-se que o crescimento da população corre de acordo com fórmula $N_B = 600 \cdot 10^{0,2t}$ (t em anos). De acordo com esses modelos de crescimento, responda às questões a seguir.
- Qual é a população inicial de cada uma das regiões?
 - Depois de quanto anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?
 - Qual é a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial? (Dado: $10^{\frac{3}{2}} \approx 31,62$).
- 4) (São Paulo, 2014) Algumas estimativas sugerem que a população máxima que o planeta Terra pode acolher, de acordo com as terras cultiváveis disponíveis, seja da ordem de 45 bilhões de pessoas. Atualmente, a população da Terra é de aproximadamente 7 bilhões e o censo revela que a população tem dobrado a cada 30 anos. Com base nessas suposições, calcule em quantos anos, a partir de agora, a população da Terra atingiria o limite suportável.

Decaimento Radioativo

- 5) (São Paulo, 2014) Certa substância radioativa decai de tal forma que sua massa m reduz-se à metade do valor inicial a cada 4 horas, ou seja, $m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$, sendo m_0 o valor inicial da massa. Partindo-se de 60 gramas da substância, pergunta-se:
- Qual será massa restante após 8 horas?
 - Após quanto tempo a massa restante será igual a 12 gramas? (Dado: $5 \approx 2^{2,32}$)
- 6) (Lima, 2013) A meia-vida de uma substância radioativa é um ano. Quanto tempo levará num corpo puro de 10 gramas desse material reste apenas 1 grama substância?
- 7) (Lima, 2013) Uma amostra de um isótopo de tório reduz-se a $3/4$ de sua quantidade inicial depois de 33,6 mil anos. Qual é a meia-vida do tório?
- 8) (ENEM-2013 - adaptada) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de céσιο-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do céσιο-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, em que A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.
- Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do céσιο-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A)27

B)36

C)50

D)54

E)100

Datação por carbono-14

- 9) (São Paulo, 2014) Para estimar a idade de um fóssil, o químico norte-americano W. F. Libby criou o chamado Método do Carbono-14, pelo qual recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1960. O método consiste no seguinte:
- o elemento químico carbono 14 forma-se nas camadas superiores da atmosfera por efeito da radiação cósmica sobre o nitrogênio. Admite-se que sua presença na superfície da Terra ocorre em uma proporção constante em relação à do carbono-12, que é o carbono comum;
 - os animais e as plantas absorvem o carbono 14 pela respiração e pela alimentação, e, enquanto estão vivos, mantêm uma proporção fixa desse elemento. Depois de mortos, a absorção da substância deixa de existir, e a quantidade que possuíam começa a se desintegrar, transformando-se em carbono comum;

- o carbono-14 desintegra-se em uma proporção constante em relação ao valor inicial: a cada 5.730 anos, a massa inicial reduz-se à metade (em outras palavras, a meia-vida do carbono-14 é igual a 5.730 anos);
- em consequência, se determinarmos a proporção do carbono 14 em relação ao carbono comum em um fóssil (um peixe incrustado em uma pedra, um osso, uma planta ressecada, um pedaço de madeira etc.), podemos estimar há quanto tempo ele existe.

Fóssil	Idade estimada
Carvão da caverna de Lascaux, França	15.516 ± 900 anos
Carvão nos monumentos de Stonehenge, Inglaterra	3.789 ± 275 anos
Linho encontrado em uma caverna do Mar Morto	1.917 ± 200 anos
Pinturas rupestres em São Raimundo Nonato, no Piauí	Cerca de 60.000 anos

Suponhamos, então, que um fóssil tenha sido encontrado e que desejamos estimar sua idade.

- a) Se a análise laboratorial determinou que 50% do carbono-14 inicial já se desintegrou, qual seria a idade estimada do fóssil?
- b) A massa m de carbono-14 varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5.730}},$$

(cada vez que t assume valores múltiplos sucessivos de 5.730, a massa reduz-se à metade). Se for constatada que a massa de carbono-14 restante no fóssil é apenas 10% da massa inicial, qual seria a idade estimada do fóssil? (Dado: $\log \approx 0,301$.)

- c) Se o laboratório indicar que a porcentagem do carbono-14 que se desintegrou foi de 75%, qual é a idade estimada do fóssil?
 - d) Se for constatada que a massa de carbono-14 restante no fóssil é apenas 1% da massa inicial, qual é a idade estimada do fóssil? (Dado: $\log 2 \approx 0,301$).
- 10) (Lima, 2013) Na caverna de Lascaux, na França, famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do ^{14}C era 0,145 vezes a radioatividade normal num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão encontrado na caverna e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.

Escala Richter

- 11) (São Paulo, 2014) A energia liberada por ocasião de um terremoto pode ser muito grande, sendo frequentemente expressa por uma potência de 10. Para medir o potencial destrutivo de um terremoto, utiliza-se a escala Richter, que leva em consideração apenas o expoente da potência considerada em cada caso. Esse expoente indica a magnitude do terremoto. Existem aparelhos apropriados para medir tal magnitude: os sismógrafos. A tabela a seguir registra o local, o ano de ocorrência e a magnitude de alguns terremotos que ficaram famosos pelos estragos produzidos.

Local	Ano de Ocorrência	Magnitude
Los Angeles	1994	6,6
Japão	1993	7,8
Irã	1990	7,7
São Francisco	1989	7,1
Armênia	1988	6,9
Cidade do México	1985	8,1
Grã-Bretanha	1984	5,5
Alasca	1964	8,4
Chile	1960	8,3
Ex-União Soviética	1952	8,5
São Francisco	1906	8,3
Colômbia	1906	8,6
Ilha de Krakatoa	1883	9,9

Com base nas informações anteriores responda às seguintes questões:

- a) Um terremoto de 8 graus na escala Richter é potencialmente quantas vezes mais destrutivo do que um terremoto de 4 graus?
- b) Um caminhão muito pesado passou pela rua e produziu um pequeno tremor. Um sismógrafo registrou 2,5 graus na escala Richter. Se 4 caminhões passarem juntos pela rua, podemos afirmar que o tremor correspondente será de 10 graus?
- 12) (UFJF-adaptada) A magnitude de um terremoto, na escala Richter é dada por $M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$ em que E é a energia liberada no evento e E_0 é uma constante fixada para qualquer terremoto. Houve dois terremotos recentemente: um ocorreu no Chile, de magnitude $M_1 = 8,2$, e outro, no Japão, de magnitude $M_2 = 8,8$, ambos nessa escala.

Considerando E_1 e E_2 as energias liberadas pelos terremotos no Chile e no Japão, respectivamente, é CORRETO afirmar:

$$\begin{array}{lll} \text{A)} \frac{E_2}{E_1} = 10 & \text{B)} \frac{E_2}{E_1} = 1 & \text{C)} 0 < \frac{E_2}{E_1} < 1 \\ \text{D)} 1 < \frac{E_2}{E_1} < 10 & \text{E)} \frac{E_2}{E_1} > 10 & \end{array}$$

- 13) (Lima, 2013) Um osso de animal pré-histórico apresenta $1/10$ da quantidade de ^{14}C de um osso atual. Quando morreu aquele animal?

Escala pH

- 14) (São Paulo, 2014) Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador chamado pH (potencial hidrogeniônico). O pH indica a quantidade aproximada de íons H^+ que se encontram livres no líquido, indicando a concentração (quantidade por unidade de volume) de tais íons. A própria água (H_2O) tem íons H^+ livres: são relativamente poucos, mas existem. Há, na água, cerca de 1 íon-grama de H^+ para cada 10^7 litros. Em uma limonada existem mais íons H^+ livres: digamos, 1 íon-grama para cada 10^2 litros. Em alguns líquidos, há menos íons H^+ do que na água: no leite de magnésia, por exemplo, há cerca de 1 íon-grama de H^+ para cada 10^{10} litros. Dizemos que o pH da água é 7, o pH da limonada é 2, e o pH do leite de magnésia é 10.

A escala do pH varia de 0 a 14, situando-se a água em seu ponto médio. Os líquidos com pH entre 0 e 7 têm caráter ácido; os que têm pH entre 7 e 14 têm caráter básico. Para combater a acidez estomacal, por exemplo, costuma-se ingerir uma colher de leite de magnésia. A escala de pH também é logarítmica, ou seja, os valores são expoentes. Mas como se trata de números pequenos, uma vez que a quantidade de íons H^+ por litro é pequena, os expoentes encontram-se no denominador:

- a água tem 1 íon-grama de H^+ para cada 10^7 litros, ou seja, a razão é $\frac{1}{10^7}$, e dizemos que seu pH é 7;
- um ácido tem mais íons-grama de H^+ ; por exemplo, se tem 1 para cada 10^3 litros, ou seja, a razão é $\frac{1}{10^3}$, e dizemos que seu pH é 3;
- já um líquido básico tem menos H^+ ; por exemplo, se tem 1 para cada 10^{12} litros, ou seja, a razão é $\frac{1}{10^{12}}$ e dizemos que seu pH é 12.

A tabela a seguir apresenta os valores aproximados do pH de alguns líquidos.

Líquido	pH
Ácido sulfúrico	0,1
Suco de laranja	3,0
Vinho	3,4
Suco de tomate	4,2
Café	5,0
Leite	6,9
Água	7,0
Sangue humano	7,4
Água do mar	8,2
Leite de magnésia	10,0
Amônia	13,0
Hidróxido de potássio	14,0

Com base nas informações apresentadas, responda às seguintes questões:

- O que significa dizer que determinado líquido tem pH igual a 6?
- Se um líquido tem 1 íon-grama de H^+ para cada 100 litros, qual é o seu pH?
- Se um líquido tem pH igual a 8, ele tem mais ou menos íons de hidrogênio livres do que a água? Quantas vezes?
- Qual é a diferença entre os valores do pH de dois líquidos, um deles com mil vezes mais íons H^+ livres do que o outro?

15) (Uneb-BA)

Danos de alimentos ácidos

O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo PH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é repostado, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta. As substâncias listadas a seguir por exemplo, podem causar danos aos seus dentes, com contato prolongado.

(BREWER, 2013, p.64)

Tipo de som	Intensidade (W/m ²)	Números proporcio- nais	Medida em decibel
Som fracamente audível	10 ⁻¹²	1	0
Ruído das folhas de uma árvore	10 ⁻¹¹	10	10
Sussurro humano	10 ⁻¹⁰	10 ²	20
Conversa comum	10 ⁻⁶	10 ⁶	60
Barulho dos carros no tráfego pesado	10 ⁻⁵	10 ⁷	70
Britadeira manual usada na rua	10 ⁻²	10 ¹⁰	100
Som que produz dor e dano	1	10 ¹²	120

Com base nas informações anteriores, responda às seguintes questões:

- a) Um som de intensidade de 90 decibéis é quantas vezes mais intenso que outro de intensidade de 80 decibéis.
 - b) Quantos decibéis correspondem a uma britadeira defeituosa, que emite som com intensidade 100% maior do que o normal (tabela)? (Considere $\log 2 \approx 0,3$.)
 - c) Qual fórmula relaciona o número n de béis de um som com sua intensidade sonora I ?
 - d) Qual fórmula que relaciona o número n de decibéis de um som com sua intensidade sonora I ?
- 17) (Cesgranrio) Quando a orelha humana é submetida continuamente a ruídos de nível sonoro superior a 85 dB, sofre lesões irreversíveis. Por isso, o Ministério do Trabalho estabelece o tempo máximo diário que um trabalhador pode ficar exposto a sons muito intensos. Esses dados são apresentados a seguir.

Nível sonoro (dB)	Tempo máximo de exposição (h)
85	8
90	4
95	2
100	1

Observa-se, portanto, que a cada aumento de 5 dB no nível sonoro, o tempo máximo de exposição cai para a metade. Sabe-se ainda que, ao assistir a um Show de Rock, espectadores próximos às caixas de som estão expostos a um nível sonoro de 110 dB. O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibels (dB) por:

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

I = intensidade sonora fornecida pela caixa de som; I_0 = intensidade padrão, corresponde ao limiar da audição (para o qual $N = 0$). Para o nível de intensidade $N = 120$ dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

- A) $10^{14}I_0$ B) $10^{12}I_0$ C) $1.200I_0$ D) $120I_0$ E) $12I_0$

Aplicações Financeiras

- 18) (São Paulo, 2014) Um capital C_0 é aplicado a uma taxa de juros compostos de 12% ao ano. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao Capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Calcule em quantos anos o capital dobrará seu valor, levando em conta que os juros são incorporados ao capital apenas ao final de cada ano. (Dados: $\log 2 \approx 0,301$ e $\log 7 \approx 0,845$).
- 19) (Lima, 2013) A que taxa anual de juros compostos devo investir meu capital a fim de que ele dobre no fim de cinco anos?

Resfriamento de um corpo

- 20) (Lima, 2013) O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23 h 30 min e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $34,8$ °C. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou $34,1$ °C. A temperatura do quarto era mantida constante em 20 °C. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5$ °C.
- 21) (Lima, 2013) Uma bola de aço aquecida a uma temperatura de 100 °C é posta num ambiente mantido a uma temperatura constante de 40 °C. Em dois minutos a temperatura da bola é de 80 °C. Em quanto tempo a temperatura será de 43 °C?

Diversos

- 22) (São Paulo, 2014) É muito conhecida a lenda do tabuleiro de xadrez: para retribuir o jovem inventor pela criação do jogo, o rei concede-lhe qualquer coisa que desejasse, e o jovem pede “apenas” 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, e assim por diante, até chegar a 2^{63} grãos pela sexagésima quarta casa. Assim, a soma de todos os grãos ($1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$) é igual a $2^{64} - 1$ grãos, e esse número, apesar de não parecer, é tão grande que seria impossível atender ao inocente pedido.

Quantos algarismos tem o número 2^{64} ? (Dado: $\log 2 \approx 0,3$).

- 23) (São Paulo, 2014) A primeira escala para a medida do brilho das estrelas foi criada por Hiparco, cerca de 150 AEC. Ele dividiu cerca de 850 estrelas então visíveis a olho nu e classificou-as em seis grupos, de acordo com a intensidade do brilho,

atribuindo, quando vistas da Terra, grandeza 1 às mais brilhantes e 6 às de menor brilho. Por volta de 1850, apoiado no trabalho de Hiparco, um astrônomo inglês chamado Norman Pogson (1829 – 1891) propôs uma escala logarítmica para a medida do brilho de uma estrela. Considerando, na escala de Hiparco, a estrela mais brilhante como 100 vezes mais brilhante do que a visível de brilho mais fraco, Pogson atribuiu grandeza 0 à estrela mais brilhante e grandeza 5 à menos brilhante na antiga escala; como $2,55 \approx 100$, ele considerou cada nível de grandeza 2,5 vezes maior do que o nível anterior:

Grandeza	1	2	3	4	5	6	n
Brilho	1	$2,5^{-1}$	$2,5^{-2}$	$2,5^{-3}$	$2,5^{-4}$	$2,5^{-5}$	$2,5^{-(n-1)}$
Números proporcionais	(maior brilho, 1ª grandeza) $2,5^5$	$2,5^4$	$2,5^3$	$2,5^2$	2,5	(menor brilho, 6ª grandeza) 1	$2,5^{-(n-6)}$

Pogson ainda estendeu a escala de modo a classificar a grande quantidade de estrelas e demais corpos celestes brilhantes, na perspectiva de um observador na Terra. A escala foi estendida tanto para cima como para baixo, incluindo os logaritmos que não são inteiros:

Corpo brilhante	Sol	Lua	Sirius	Betelgeuse	Antares	Deneb
Grandeza	-27	-11	-1,5	0,5	1	1,26

Existem outras escalas para a medida da grandeza (ou magnitude) de uma estrela, levando em consideração seu brilho em sentido absoluto e não apenas o que é percebido por um observador na Terra. A escala de Pogson fornece a grandeza aparente, ou seja, relativa a um observador na Terra. Em uma escala absoluta, que leva em consideração as distâncias entre os corpos celestes envolvidos, o Sol é uma estrela de 5ª grandeza, enquanto Sirius é uma estrela de 1ª grandeza.

Com base na escala de Pogson, responda às questões a seguir:

- a) Betelgeuse é mais ou menos brilhante do que Antares? Quantas vezes?
 - b) Sirius é mais ou menos brilhante do que Antares? Quantas vezes?
 - c) Quantas vezes a Lua é menos brilhante do que o Sol?
- 24) (UNESP) No artigo “Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?”, o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0) \cdot e^{kt}$, em que $D(t)$ representa a área de desmatamento no instante t , sendo t medido em anos desde o instante inicial, $D(0)$ a área de desmatamento no instante inicial $t = 0$, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal

modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja 0,6% e usando a aproximação $\ln 2 = 0,69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente

A)51. B)115. C)15. D)151. E)11.

25) (Unicamp-SP-adaptada) A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0,5 + \log_3(t + 1)$, em que $t \geq 0$ é dado em anos.

- a) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?
- b) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t + 2)$. Verifique que a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante, isto é, não depende de t .

26) (Fuvest-SP) Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k \log_3(at + 1),$$

em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

- a) Qual é a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$?
 - b) Calcule as constantes a e k , sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula.
- 27) (UFPR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t , em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão

$$S = -18 \cdot \log(t + 1) + 86.$$

- a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?
- b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

6 Considerações Finais

O objetivo principal desta dissertação é reunir o máximo de informações sobre logaritmos que possam ser apresentados no Ensino Médio, a fim de enriquecer as aulas, evidenciando o desenvolvimento dos logaritmos ao longo do tempo. Obviamente, ao longo do trabalho, várias reformulações foram necessárias, assim como abrir mão de material produzido, para torná-lo o mais viável possível. Originalmente, seria proposta uma sequência didática completa do assunto, em que cada vídeo produzido acompanhava um tópico. Com a reestruturação, os vídeos se tornaram uma proposta independente, mas que ainda se relacionam com alguns planos de aula remanescentes, que permaneceram por trabalhar pontos pouco explorados nas aulas e que julgamos que poderíamos contribuir.

Acreditamos que, acima tudo, uma pesquisa como esta precisa ser viável ao professor. De nada adianta um trabalho robusto se for inaplicável. Com isso em mente, as ideias apresentadas podem ser trabalhadas de forma independente. Assim, é possível apenas mostrar os vídeos, comentar aspectos históricos ou as “pitadas matemáticas”, bem como usar as ideias para definir os logaritmos ou alguma das aulas sugeridas.

Como visto no [Capítulo 1](#), os problemas de aprendizado que os alunos enfrentam já ocorrem nos fundamentos da matemática, o que compromete muito o desenvolvimento de um bom Ensino Médio. Assim, o que podemos fazer é tentar trazer mais significado em uma apresentação didática, sempre relacionando com aspectos históricos e com fenômenos que podem ser modelados pelas ferramentas matemáticas. Esperamos com este trabalho contribuir de alguma forma na formação destes alunos e no enriquecimento das aulas dos colegas professores, contando com eles para tirarem o melhor proveito deste material.

Por fim, esperamos que esta dissertação sirva de inspiração para outros trabalhos na mesma linha para abordar outros tópicos importantes da matemática ou que complementem o que foi trabalhado aqui, explorando mais sobre as espirais logarítmicas, uso dos logaritmos nas escalas gráficas, como um logaritmo é calculado pela calculadora ou até mesmo elaborando uma sequência capaz de unificar todas as propostas apresentadas, mas que ainda seja viável para o professor utilizar em aula.

Referências

- L. A. ABDILLAH. Enriching Information Technology Course Materials by Using YouTube. *The 5th International Conference On Artificial Intelligence, Computer Science and Information Technology 2017 (AICSIT2017)*, Malaysia, p. 75–82, 2017. Citado na página 14.
- W. B. ALVES. Sobre a Datação por Decaimento Radioativo. *Connection Line-Revista Eletrônica do UNIVAG*, n. 5, 2014. Citado na página 51.
- G. ÁVILA. Como se constrói uma tábua de Logaritmos. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, n. 26, 1994. Citado na página 27.
- V. BLÅSJÖ. How to Find the Logarithm of Any Number Using Nothing but a Piece of String. *The College Mathematics Journal*, Taylor & Francis, v. 47, n. 2, p. 95–100, 2016. Citado nas páginas 36 e 37.
- C. B. BOYER; U. C. MERZBACH. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado nas páginas 20, 24, 26, 31, 32, 35 e 36.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório Brasil no PISA 2018*. Brasília, 2019. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2020. Citado nas páginas 19 e 127.
- R. P. BURN. Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica*, v. 28, n. 1, p. 1–17, 2001. Citado na página 32.
- R. S. CELLA; I. J. RECH. Caso Petrobras: a Lei de Benford Poderia Detectar a Fraude? *Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade*, v. 7, n. 3, p. 86–104, 2017. ISSN 2238-5320. Citado na página 58.
- W. K. T. CHO; B. J. GAINES. Breaking the (Benford) Law. *The American Statistician*, v. 61, n. 3, p. 218–223, 2007. ISSN 0003-1305. Citado na página 58.
- J. CORSO. *O Papel do Audiovisual na Educação: Vídeos de Ciências*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Citado na página 14.
- V. S. DA COSTA. Divulgação Científica no YouTube e o Mundo Mdiatizado da Ciência. 2016. Citado na página 14.
- UNITED STATES OF AMERICA. Jeffrey L. Dalton & Laurent Bissonnette. *Golf Ball Dimples with a Catenary Curve Profile*. 2004. US6796912B2. US Patent 6,796,912. Citado na página 38.
- H. EBBINGHAUS. *Memory: A Contribution to Experimental Psychology*. New York: Teachers College, Columbia University, 1885. Disponível em: <<https://archive.org/details/memorycontributi00ebbiuoft/page/n1/mode/2up>>. Acessado em: 12 set. 2021. Citado na página 77.

- D. C. D. M. FILHO. *Manual de Redação Matemática*. Rio de Janeiro (RJ): SBM, 2018. ISBN 978-85-8337-138-0. Citado na página 26.
- R. P. FORSTER. Auditoria Contábil em Entidades do Terceiro Setor: uma Aplicação da Lei Newcomb-Benford. 2006. Citado nas páginas 58 e 59.
- A. M. D. GOMES. *O Falcão e a Espiral Logarítmica*. 2021. Disponível em: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/matematica_e_%20natureza/matematicaenatureza-html/audio-falcao-br.html>. Acessado em: 6 set. 2021. Citado na página 77.
- R. R. GONZÁLEZ. *El Lenguaje de las Matemáticas: Historias de sus Símbolos*. 1. ed. México: Fondo de Cultura Económica, 2018. ISBN 978-607-16-6058-9. Citado nas páginas 30, 32, 33 e 34.
- IBGE. *Estimativas da População Residente nos Municípios Brasileiros com Data de Referência em 1º de Julho de 2020*. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao/Estimativas_2020/POP2020_20201030.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2020. Citado na página 59.
- IME-USP. *Lista de Todas as Palavras do Português Brasileiro*. 2021. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pf/dicios/index.html>>. Acessado em: 4 set. 2021. Citado na página 117.
- A. JORDAN. *Alternative notation for exponents, logs and roots?* 2012. Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/q/165225>>. Acessado em: 25 set. 2021. Citado na página 48.
- L. A. KATO; S. R. DE OLIVEIRA; V. C. CARDOSO. Where to Learn math? A Study of Access to an Educational Channel on YouTube. *RIPEM*, v. 4, n. 3, p. 45–62, 2014. Citado na página 14.
- C. M. LEMOS. Os Logaritmos e as suas Aplicações nas Ciências Náuticas – um Apontamento Histórico. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Boletim da SPM, 2012. ISSN 0872-3672. Citado nas páginas 21, 25 e 27.
- E. L. LIMA. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado nas páginas 51, 83, 84, 85, 87, 91, 99, 109 e 112.
- _____. *Logaritmos*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. ISBN 978-85-8337-082-6. Citado nas páginas 15, 20, 21, 24, 41 e 109.
- T. R. MALTHUS. *Princípios de Economia Política e Considerações sobre sua Aplicação Prática: Ensaio sobre a População*. São Paulo: Nova Cultural, 1996. Citado na página 51.
- E. MAOR. *e: a História de um Número*. Rio de Janeiro (RJ): Record, 2008. ISBN 978-85-01-05847-8. Citado nas páginas 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36 e 40.
- D. MCFARLAND. Quarter Tables Revisited: Earlier Tables, Division of Labor in Table Construction, and Later Implementations in Analog Computers. 2007. Citado na página 21.

- J. L. R. MORATORI. *Funções Exponenciais e Logarítmicas*. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do ABC, 2019. Citado nas páginas 21 e 51.
- OCDE. *PISA 2018 Country Note - Brazil*. [S.l.], 2019. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2020. Citado na página 18.
- C. E. S. DE PAULA; T. M. R. DE SOUZA. Uma Abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 10, 2017. ISSN 2316-9664. Citado na página 77.
- M. PECORARI. *Logaritmos e Aplicações*. Dissertação de Mestrado — UNESP, Rio Claro, 2013. Citado nas páginas 15 e 51.
- G. K. PERGHER; L. M. STEIN. Compreendendo o Esquecimento: Teorias Clássicas e seus Fundamentos Experimentais. *Psicologia USP*, SciELO Brasil, v. 14, p. 129–155, 2003. Citado na página 77.
- S. S. A. RAMOS. *Logaritmos: uma Abordagem Didática*. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Citado nas páginas 15, 25 e 51.
- L. REFATTI; A. M. BELTRAME. Funções Hiperbólicas e Cabos Pendentes. *Disciplinarum Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas*, UFN, Santa Maria (RS), v. 5, n. 1, p. 139 – 162, 2004. Citado nas páginas 36, 37 e 40.
- D. ROEGEL. *Napier's Ideal Construction of the Logarithms*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<https://hal.inria.fr/inria-00543934/document>>. Acesso em: 3 mar. 2021. Citado na página 25.
- _____. *A Reconstruction of the Tables of Briggs' Arithmetica Logarithmica (1624)*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<https://hal.inria.fr/inria-00543939/document>>. Acesso em: 26 nov. 2020. Citado na página 27.
- A. ROONEY. *A História da Matemática - Desde a Criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012. ISBN 978-85-7680-133-7. Citado nas páginas 20, 23 e 24.
- T. ROQUE. *História da Matemática: uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio de Janeiro (RJ): Zahar, 2012. Citado nas páginas 13, 24 e 35.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio - 1ª série*. São Paulo, 2014. v. 2. Citado nas páginas 15, 83, 84, 86, 87, 89 e 91.
- I. D. SÁ; A. D. PAIVA. O que é a Escala Richter? Como se Mede um Terramoto? *Educação e Matemática*, n. 116, p. 46–48, 2012. Citado na página 51.
- J. C. V. SAMPAIO. John Napier, Henry Briggs e a Invenção dos Logaritmos. 2010. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>>. Acesso em: 3 mar. 2021. Citado nas páginas 25 e 27.
- G. SANDERSON. *Triangle of Power*. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=sULa9Lc4pck>>. Acessado em: 30 ago. 2021. Citado na página 49.

- F. V. SILVA. *Logaritmo: uma Abordagem Geométrica*. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016. Citado nas páginas 15, 25 e 51.
- J. A. D. SILVA; L. D. MACEDO. A Função-Potência na Percepção: Significado e Procedimentos de Cálculo do Expoente. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, v. 34, n. 4, p. 27–45, 1982. ISSN 0100-8692. Citado nas páginas 60 e 61.
- L. M. B. TALAVERA. *Parábola e Catenária: História e Aplicações*. Dissertação de Mestrado — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Citado nas páginas 37 e 38.
- A. C. TEIXEIRA. Lei de benford e aplicações. *Instituto de Matemática e Estatística da USP*, 2016. Acessado em: 12 set. 2021. Citado na página 77.
- J. TITO. *Ensino de Logaritmos a partir do Estudo da Escala Musical*. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Citado na página 14.
- VERITASSIUM. *The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture*. 2021. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=094y1Z2wpJg>>. Acessado em: 12 set. 2021. Citado na página 77.
- M. VIANA. *O que Casamento tem a ver com Logaritmos?* 2021. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2021/08/o-que-casamento-tem-a-ver-com-logaritmos.shtml>>. Acessado em: 5 set. 2021. Citado na página 77.

APÊNDICE A – Desenvolvimento das Funções Exponenciais e Logarítmicas

A.1 Teoremas e proposições

Este apêndice possui demonstrações baseadas em [Lima \(2013\)](#).

Em algumas demonstrações recorreremos à Desigualdade de Bernoulli, a qual enunciaremos e demonstraremos a seguir.

Proposição A.1.1 (Desigualdade de Bernoulli). *Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > -1$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para provar a desigualdade faremos indução sobre n .

Para $n = 1$, temos

$$(1 + x)^n = (1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x = 1 + nx.$$

Logo, a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ para todo $k \leq n$ e provaremos que vale para $n = k + 1$.

Como $x > -1$, temos $x + 1 > 0$ e multiplicando ambos os membros da desigualdade da hipótese de indução por $1 + x$, obtemos

$$(1 + x) \cdot (1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) \Rightarrow (1 + x)^{k+1} \geq 1 + x(k + 1) + kx^2.$$

Como $kx^2 \geq 0$, concluímos que

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

Logo, a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}; x > -1$. ■

A.2 Funções Exponenciais

Considere a função $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, monótona injetiva, tal que $E(x + y) = E(x)E(y)$.

Inicialmente, suponhamos que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $E(x_0) = 0$. Assim,

$$E(x) = E(x - x_0 + x_0) = E(x - x_0) \cdot E(x_0) = 0,$$

mas isso nos leva a $E(x) = 0$, para todo x real, o que contraria o fato de E ser monótona injetiva. Portanto, para todo x real, $E(x) \neq 0$.

Agora, note que

$$E(x) = E\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right) \cdot E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

Portanto, $E(x) > 0$, para todo x real.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$E(n) = \underbrace{E(1 + 1 + 1 \cdots + 1)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{E(1) \cdot E(1) \cdot \cdots \cdot E(1)}_{n \text{ vezes}} = E(1)^n.$$

Se $a = E(1)$, concluímos que $E(n) = a^n$ e, pelo que vimos na [Subseção 3.1.3](#), para um $r \in \mathbb{Q}$, $E(r) = a^r$.

Agora, seja $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $E(1) > 1$ tal que $r < x < s$, com r e s racionais.

Como E é monótona injetiva, temos

$$E(r) < E(x) < E(s).$$

Não há como ter outro valor possível para $E(x)$. Se houvesse dois valores A e B tais que $A < B$, teríamos

$$a^r < A < B < a^s,$$

mas isso indicaria que não há nenhuma potência racional de a no intervalo $[A, B]$, o que contraria o [Lema 1](#). Portanto, $E(x) = a^x$. Com isso, podemos definir a função exponencial.

Definição 3. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 1$ e $a > 0$. A função exponencial de base a , $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, denotada por $E(x) = a^x$, possui as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:*

- a) $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$;
- b) E é crescente para $a = E(1) > 1$ e decrescente para $a = E(1) < 1$.

Observação 2. *Informalmente, podemos definir limite como o valor L que uma função f se aproxima quanto mais próximo x está de a , ou seja $f(x)$ tende a L quando x tende a a . Representamos simbolicamente por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, que lemos como “limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L ”.*

Proposição A.2.1. Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ uma função exponencial, são válidas as seguintes propriedades:

- 1) f é ilimitada superiormente.
- 2) f é contínua.
- 3) f é bijetora, logo admite inversa.

Demonstração. 1) f é ilimitada superiormente.

Todo intervalo em $\mathbb{R}_{>0}$ contém valores de $f(r) = a^r$, conforme [Lema 1](#).

2) f é contínua.

Para mostrar que podemos tornar a diferença h entre duas potências reais de expoentes x e x_0 tão pequena o quanto desejarmos, precisaremos mostrar primeiro que é possível tornar a^h tão próximo a 1 quanto se queira com $|h|$ pequeno o suficiente.

Para isso, vamos supor que $a > 1$ e $h > 0$ (os outros casos procedemos de maneira análoga). O que queremos mostrar é que dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, sempre teremos $a^h < 1 + \epsilon$.

Ao utilizar a Desigualdade de Bernoulli ([Proposição A.1.1](#)), já temos $(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon$, com n natural. Assim, se tomarmos um $n \in \mathbb{N}$ de modo que $n > \frac{a-1}{\epsilon}$, teremos

$$(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon > 1 + \frac{(a-1)\epsilon}{\epsilon} = a \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon,$$

ou seja, $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$. Desse modo, se tomarmos h tal que $0 < h < \frac{1}{n}$, teremos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$. Com isso, podemos tornar a^h tão próximo de 1 quanto quisermos. Então, fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ e fazendo $h = x - x_0$, teremos

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Desse modo, quanto mais x se aproximar de x_0 , mais próximo h fica de 0 e, conseqüentemente, a^h vai tender a 1 e $a^h - 1$ para zero. Mas como a^{x_0} é um valor fixo, temos que $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x - a^{x_0} = 0$ e isso caracteriza a continuidade da função exponencial, pois podemos tornar a diferença entre duas potências reais tão pequena quanto desejarmos.

3) f é bijetora, logo admite inversa.

Para provar que f é bijetora, precisamos mostrar que ela é injetora e sobrejetora.

A prova da injetividade decorre da monotonicidade. Assim, tomando $a > 1$, temos

$$x > y \Rightarrow a^x > a^y \text{ e } x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

Agora, se $0 < a < 1$, temos

$$x > y \Rightarrow a^x < a^y \text{ e } x < y \Rightarrow a^x > a^y.$$

Provar que a função é sobrejetora, significa mostrar que para todo $b > 0$ real existe algum x real de modo que $a^x = b$.

Assim, pelo [Lema 1](#), podemos escolher no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ uma potência a^{r_n} , com r_n racional e n natural tal que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$.

Suporemos $a > 1$ ($0 < a < 1$ é análogo). Podemos escolher potências a^{r_n} de modo que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \dots < a^{r_n} < \dots < b.$$

Assim, podemos fixar um r racional tal que $b < a^r$. Como a função é monótona injetiva, temos garantia de que

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n < \dots < r.$$

Desse modo, a sequência r_n é crescente e limitada superiormente por r e a completeza dos reais nos assegura que os r_n são valores que se aproximam por falta de um x real, isto é, $\lim_{x \rightarrow x_0} r_n = x$, simbolicamente. Daí, como a função exponencial é contínua, concluímos que a^{r_n} tende a b quando x tende a x_0 . Simbolicamente, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{r_n} = a^x = b$. ■

Teorema A.2.1 (Caracterização das funções exponenciais). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para mostrarmos esta equivalência, provaremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

i) $(1) \Rightarrow (2)$.

Por hipótese, temos $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, podemos concluir que para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $f(rx) = f(x)^r$. Como $nr = m$, temos

$$f(rx)^n = f(nr x) = f(mx) = f(x)^m,$$

portanto $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Desse modo, se definirmos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Falta o caso em que $a^r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para isso, suponhamos que f é crescente, assim $1 = f(0) < a$. Suponha ainda que $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo) e que, por absurdo, exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Assim, pelo [Lema 1](#), sabemos que existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, isto é, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$, o que é um absurdo. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) = a^x$.

ii) (2) \Rightarrow (3).

Por hipótese, temos $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$. Assim,

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y).$$

iii) (3) \Rightarrow (1).

Por hipótese, temos $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Podemos provar por indução sobre n natural que $f(nx) = f(x)^n$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que para $n = 1$ temos que

$$f(nx) = f(1 \cdot x) = f(x)^1 = f(x)^n,$$

logo vale para $n = 1$.

Agora, suponha a validade de $f(nx) = f(x)^n$ para todo natural $k \leq n$ e provaremos a validade para $n = k + 1$. Assim, por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} f(k \cdot x) = f(x)^k &\Rightarrow f(k \cdot x + x) = f(x)^k \cdot f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f((k+1) \cdot x) = f(x)^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, a propriedade é válida para $n = k + 1$. Assim, pelo princípio da indução finita, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que se $n = 0$ temos que $f(0 \cdot x) = f(0) = f(x)^0 = 1$. Agora, perceba que

$$1 = f(0) = f(nx - nx) = f(x)^n \cdot f(x)^{-n} \Rightarrow f(x)^{-n} = \frac{1}{f(x)^n}.$$

Logo, vale $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. ■

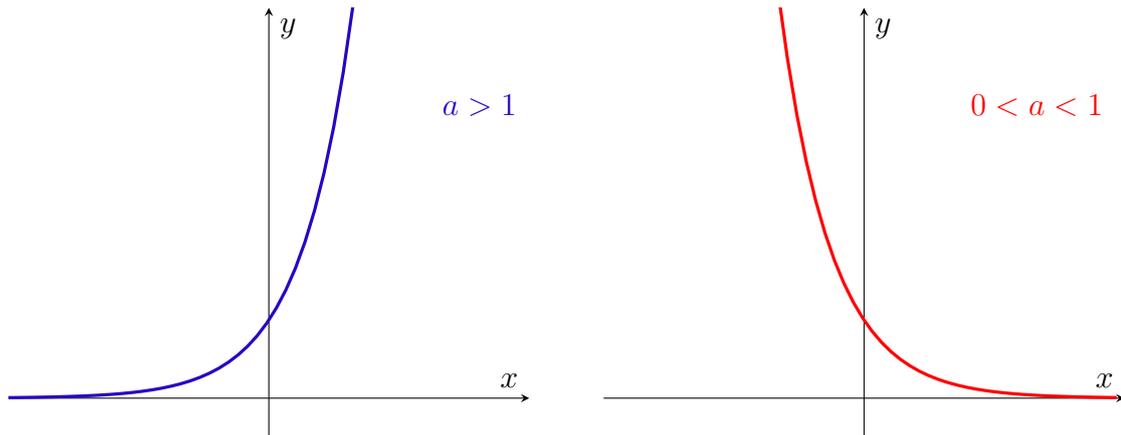


Figura A.2.1 – Gráfico das funções exponenciais.

A.2.1 Função de Tipo Exponencial

Teorema A.2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) \neq 0$, para todo x real e monótona injetiva. Se*

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \phi(h), \text{ para todo } x \text{ e } h \in \mathbb{R},$$

então existe $b > 0$ e $a > 0$ tais que $f(x) = b \cdot a^x$.

Demonstração. Tomando $x = 0$, temos

$$\frac{f(h)}{f(0)} = \phi(h),$$

para todo $h \in \mathbb{R}$. Com isso, podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) \cdot \frac{f(h)}{f(0)}.$$

Daí, dividindo por $f(0)$, vem

$$\frac{f(x+h)}{f(0)} = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(h)}{f(0)}. \tag{A.1}$$

Fazendo

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}, \tag{A.2}$$

concluimos que

$$g(x+h) = \frac{f(x+h)}{f(0)} = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(h)}{f(0)}. \tag{A.3}$$

Como

$$f(h) = g(h) \cdot f(0), \tag{A.4}$$

substituindo (A.2) e (A.4) em (A.3), obtemos

$$g(x+h) = \frac{g(x) \cdot g(h) \cdot f(0)}{f(0)},$$

ou seja,

$$g(x+h) = g(x) \cdot g(h).$$

Desse modo, pelo [Teorema A.2.1](#), concluímos que g é uma função exponencial. Então, $g(x) = a^x$ com $a = g(1)$.

Assim, de [\(A.2\)](#) podemos escrever

$$f(x) = f(0) \cdot g(x) = f(0) \cdot a^x = ba^x,$$

em que $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$. ■

Definição 4. Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

A.3 Função Inversa da Função Exponencial

Observação 3. Dada uma função $f : A \rightarrow B$ bijetora e sendo $g : B \rightarrow A$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in A$ e $f(g(x)) = x$, para todo $x \in B$, dizemos que g é a função inversa de f , o que denotamos por f^{-1} , isto é, $g = f^{-1}$.

Como vimos, a função exponencial $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, tal que $E(x) = a^x$ e $E(1) = a \neq 1$, é bijetora e contínua, portanto existe a função E^{-1} .

Assim, partindo de $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$E^{-1}(E(x+y)) = E^{-1}(E(x) \cdot E(y)).$$

Se agora denotarmos $E(x) = u$ e $E(y) = v$, deduzimos que $E^{-1}(u) = E(x)$ e $E^{-1}(v) = E(y)$, o que nos leva a

$$E^{-1}(u) + E^{-1}(v) = E^{-1}(uv),$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$.

Como $E^{-1}(a) = 1$ e $E^{-1}(a^x) = x$, podemos denotar $E^{-1}(x) = \log_a x$, que lemos como “logaritmo de x na base a ”. Desse modo, obtemos

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v,$$

com $\log_a 1 = 0$. Com isso, podemos definir a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

A.4 Função Logarítmica

Definição 5. Uma função $L : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x) = \log_a x$ é a função inversa da função exponencial $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tal que $E(x) = a^x$.

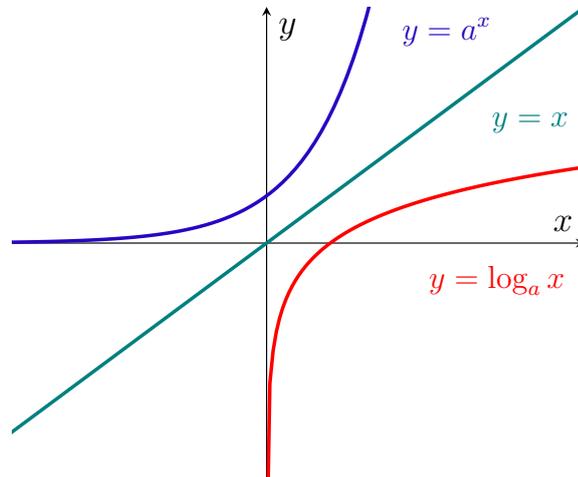


Figura A.4.2 – Função exponencial e logarítmica.

Teorema A.4.1 (Caracterização das funções logarítmicas). *Seja $L : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, monótona injetiva e tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Então, existe $a > 0$ e $a \neq 1$ tal que $L(x) = \log_a x$. Ou seja, $a^{L(x)} = x$ ou ainda $L(a^x) = x$.*

Demonstração. Vamos supor que L é crescente (o caso decrescente é feito de forma análoga).

Note que

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) = 2L(1) \Rightarrow L(1) = 0.$$

Agora, suponha que exista $a > 0$ de forma que $L(a) = 1$. Então

$$0 = L(1) < L(a) = 1,$$

ou seja, $a > 1$.

Com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$L(a^n) = L(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{L(a) + L(a) + L(a) + \dots + L(a)}_{n \text{ vezes}} = nL(a) = n.$$

Agora, como $L(1) = 0$, temos

$$0 = L(1) = L(a^n \cdot a^{-n}) = L(a^n) + L(a^{-n}),$$

ou seja,

$$L(a^{-n}) = -L(a^n) = -n.$$

Seja $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Como $m = rn$, temos

$$m = L(a^m) = L(a^{rn}) = L((a^r)^n) = n \cdot L(a^r),$$

ou ainda

$$L(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$. Então

$$a^r < a^x < a^s,$$

logo,

$$L(a^r) < L(a^x) < L(a^s) \Leftrightarrow r < L(a^x) < s.$$

Podemos tornar r e s tão próximos quanto se queira. Ainda assim, existe um x real entre eles, então podemos concluir que $L(a^x) = x$.

Como L é monótona injetiva, temos que $L(2) > L(1) = 0$. Definindo $\hat{L} = \frac{L(x)}{L(2)}$, concluímos que $\hat{L}(x)$ também é monótona injetiva. Assim, $\hat{L}(xy) = \hat{L}(x) + \hat{L}(y)$, para todo $x, y, \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\hat{L}(2) = 1$. Portanto, $\hat{L}(x) = \log_2 x$.

Logo,

$$x = 2^{\hat{L}(x)} = 2^{\frac{L(x)}{L(2)}} = \left(2^{\frac{1}{L(2)}}\right)^{L(x)} = a^{L(x)},$$

em que $a = 2^{\frac{1}{L(2)}} > 1$.

Assim, existe a tal que $L(x) = \log_a x$. ■

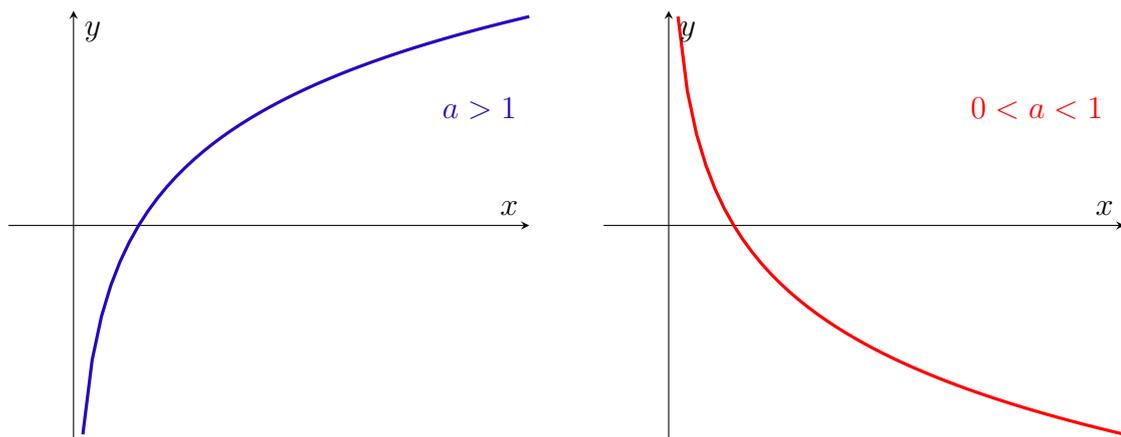


Figura A.4.3 – Gráfico das funções logarítmicas.

A.5 O Número de Euler e os Logaritmos Naturais

Mostraremos nesta seção que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada superiormente.

Proposição A.5.1. A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, ou seja, $a_{n+1} > a_n$, para todo $n > 1$.

Demonstração. Basta mostrarmos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Assim, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}.$$

Daí,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Precisamos mostrar que o produto entre os termos é maior do que 1. Sabemos que $\frac{n+2}{n+1} > 1$, mas $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n < 1$.

Desse modo, para provarmos o que queremos, teremos de lançar mão da Desigualdade de Bernoulli ([Proposição A.1.1](#)). Para isso, note que

$$\frac{1}{(n+1)^2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(n+1)^2} > -1,$$

o que cumpre a condição da [Proposição A.1.1](#).

Assim, teremos

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2}.$$

Com isso, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1.$$

Portanto, a sequência é estritamente crescente. ■

Proposição A.5.2. A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente.

Demonstração. A expansão binomial da sequência é

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}.$$

Ou,

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}.$$

Assim, basta analisarmos se a série $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$ é limitada superiormente. Para isso, note que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

O segundo membro da desigualdade trata-se de uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo e razão igual a $\frac{1}{2}$, a qual podemos utilizar a fórmula da soma de uma PG infinita, obtendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Daí, concluímos que

$$a_n = 2 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 3.$$

Logo, $a_n \leq 3$ e, conseqüentemente, a seqüência é limitada superiormente. ■

Dessa forma, mostramos que a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ possui limite, o qual denominamos por e , o número de Euler. Simbolicamente,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ou seja, a seqüência tende a e quando n tende ao infinito.

Como abordaremos os logaritmos naturais nas propostas didáticas deste trabalho, optamos por trazer os fundamentos que permitem a caracterização geométrica deles. Assim, para tornar esta pesquisa uma fonte auto-contida ao leitor, basicamente reproduziremos a demonstração que consta em Lima (2013) e Lima (2016, pp. 169 – 175) (Teorema A.5.1).

Antes de enunciar a proposição e demonstrá-la, precisamos usar uma transformação: para cada número real $k > 0$, define-se uma transformação $T = T_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$, obtido de (x, y) multiplicando a abscissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k . Em outros termos, podemos fazer uma analogia com o encolhimento uma figura na vertical na mesma proporção que a estica na horizontal. Deforma a figura, mas conserva a sua área, que é um resultado importante para o que queremos demonstrar.

Teorema A.5.1. *A área sob a curva da função $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ é dada por uma função logarítmica de base e .*

Demonstração. Vamos aplicar a transformação anteriormente comentada a faixas sob a curva da hipérbole retangular. Assim, seja

$$H = \{(x, 1/x); x > 0\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $y = 1/x$. Desse modo, H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $h(x) = 1/x$.

Agora, vamos definir H_a^b , com $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ como sendo o conjunto dos pontos (x, y) do plano em que x está entre a e b e $0 \leq y \leq 1/x$, que denotaremos como faixa da hipérbole. A faixa é limitada lateralmente pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H . Como a transformação T conserva a área, concluímos que as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm áreas iguais.

Para o resultado que buscamos provar, é interessante considerarmos “áreas orientadas”, isto é, com sinal. Vamos simbolizar uma área orientada por $A(\vec{H}_a^b)$, enquanto a área normal será denotada $A(H_a^b)$. Temos então

$$\begin{aligned} A(\vec{H}_a^b) &= A(H_a^b) > 0, \text{ se } a < b; \\ A(\vec{H}_a^b) &= -A(H_a^b) < 0, \text{ se } b < a; \\ A(\vec{H}_a^a) &= 0. \end{aligned}$$

É importante destacar que, para $a < b < c$, tem-se

$$A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c).$$

Ao adotar áreas orientadas, obtemos

$$A(\vec{H}_a^b) = -A(\vec{H}_b^a),$$

o que nos leva a validade de

$$A(\vec{H}_a^b) + A(\vec{H}_b^c) = A(\vec{H}_a^c)$$

para qualquer um dos seis casos possíveis: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. A prova da igualdade para os casos anteriores é simples, mas requer considerar cada um dos seis individualmente. Faremos um deles, pois o restante procede-se de modo análogo.

Suponha $b \leq c \leq a$. Assim, temos

$$\begin{aligned} A(\vec{H}_a^b) &= -A(H_b^a), \\ A(\vec{H}_b^c) &= A(H_b^c), \\ A(\vec{H}_a^c) &= -A(H_c^a). \end{aligned}$$

Note que $-A(H_b^a) + A(H_b^c) = -A(H_c^a)$. Logo é válido para $b \leq c \leq a$.

Agora, vamos definir a função $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que, para todo número real $x > 0$, temos

$$f(x) = A(\vec{H}_1^x).$$

Pela definição, obtemos as seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1;$$

$$f(1) = 0;$$

f é crescente.

Pelo que já foi analisado do comportamento da área orientada sob a curva da hipérbole, temos a seguinte propriedade na função f :

$$f(xy) = A(\vec{H}_1^{xy}) = A(\vec{H}_1^x) + A(\vec{H}_1^y),$$

isto é,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Pelo [Teorema A.4.1](#), da Caracterização de Funções Logarítmicas, sabemos que existe um número real positivo, que denotaremos por e , tal que $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Porém, vamos utilizar a notação $\ln x$ no lugar de \log_e e chamaremos o número $\ln x$ de *logaritmo natural* de x . Assim $\ln e = 1$, ou seja, $A(\vec{H}_1^e) = 1$.

Mostraremos agora que e é o número de Euler, ou seja,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Para isso, considere o retângulo delimitado pelas retas $y = 0$, $y = 1/x$, $x = 1$ e $x = 1 + x$. Ele possui uma base medindo x e altura medindo $\frac{1}{x+1}$, que está contido na faixa $A(\vec{H}_1^{1+x})$, que, por sua vez, está contida num retângulo maior, delimitado pelas retas $x = 1$, $x = 1 + x$, $y = 0$ e $y = 1$, como exibido na [Figura A.5.4](#).

Comparando a área das três figuras, com $x > 0$, temos

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo por x , vem

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Fazendo $x = 1/n$, com $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\frac{n}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

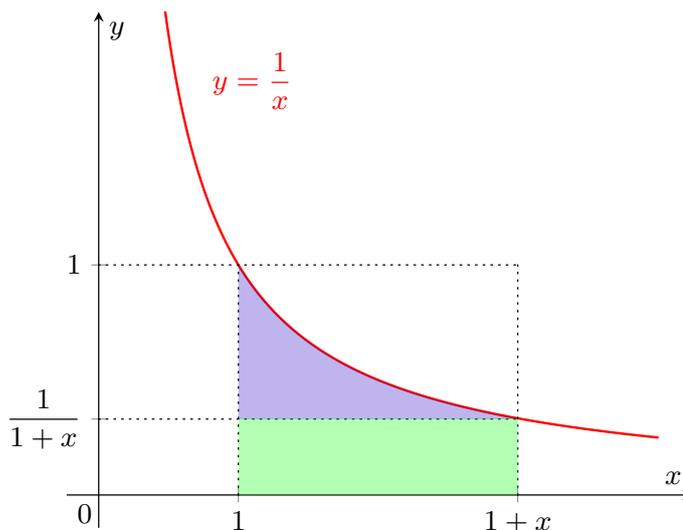


Figura A.5.4 – Faixa da Hipérbole delimitada por retângulos.

Fonte: Adaptado de (Lima, 2013, p. 174).

logo

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Assim, quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1. Portanto, $e^{\frac{1}{n+1}}$ tende a e . Com isso, concluímos que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Se considerarmos $-1 < x < 0$, procederemos de modo análogo e chegaremos ao mesmo resultado. ■

APÊNDICE B – Distribuição da Inicial das Palavras

Partindo da Lei de Newcomb-Benford, foi cogitado se algo parecido aconteceria com a distribuição da inicial das palavras. Para averiguar isso, foi contabilizada a primeira letra de cada uma das palavras de 35 livros, 10 em português e 5 nas seguintes línguas: inglês, espanhol, italiano, francês e alemão. Ao final deste apêndice, deixaremos as tabelas com os dados levantados.

Para facilitar a exposição dos dados, vamos denotar cada livro escolhido na forma L_n , como segue.

- L_1 : Memórias Póstuma de Brás Cubas;
- L_2 : O Cortiço;
- L_3 : A Escrava Isaura;
- L_4 : Os Sertões;
- L_5 : Memórias de um Sargento de Milícias;
- L_6 : O Guarani;
- L_7 : Triste Fim de Policarpo Quaresma;
- L_8 : Til;
- L_9 : O Ateneu;
- L_{10} : Dom Casmurro;
- L_{11} : Amadeo I;
- L_{12} : El Aleph;
- L_{13} : La Casa de los Espíritus;
- L_{14} : La ciudad y los perros;
- L_{15} : El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha;
- L_{16} : I Malavoglia;
- L_{17} : I promessi sposi;
- L_{18} : Il fu Mattia Pascal;
- L_{19} : La Divina Commedia;
- L_{20} : Le aventure di Pinocchio: Storia di un burattino;
- L_{21} : Das Parfum;
- L_{22} : Der Steppenwolf;
- L_{23} : Der Vorleser;
- L_{24} : Der Zauberberg Mann;
- L_{25} : Die Blechtrommel;
- L_{26} : Vingt Mille Lieues sous les Mers;
- L_{27} : Le Rouge et le Noir;
- L_{28} : Les Trois Mousquetaires;
- L_{29} : Les Misérables;
- L_{30} : Notre Dame de Paris;
- L_{31} : 1984;

- L_{32} : Frankenstein or the Modern Prometheus;
- L_{34} : The Life and Adventures of Robinson Crusoe;
- L_{33} : Pride and Prejudice;
- L_{35} : Wuthering Heights.

Em um primeiro momento, foram analisados os livros em português. Os dados foram normalizados e ordenados em ordem decrescente. De um livro para o outro há apenas uma pequena variação na ordem de ocorrência das letras. Colocando-se no plano, obteve-se a [Figura B.1](#).

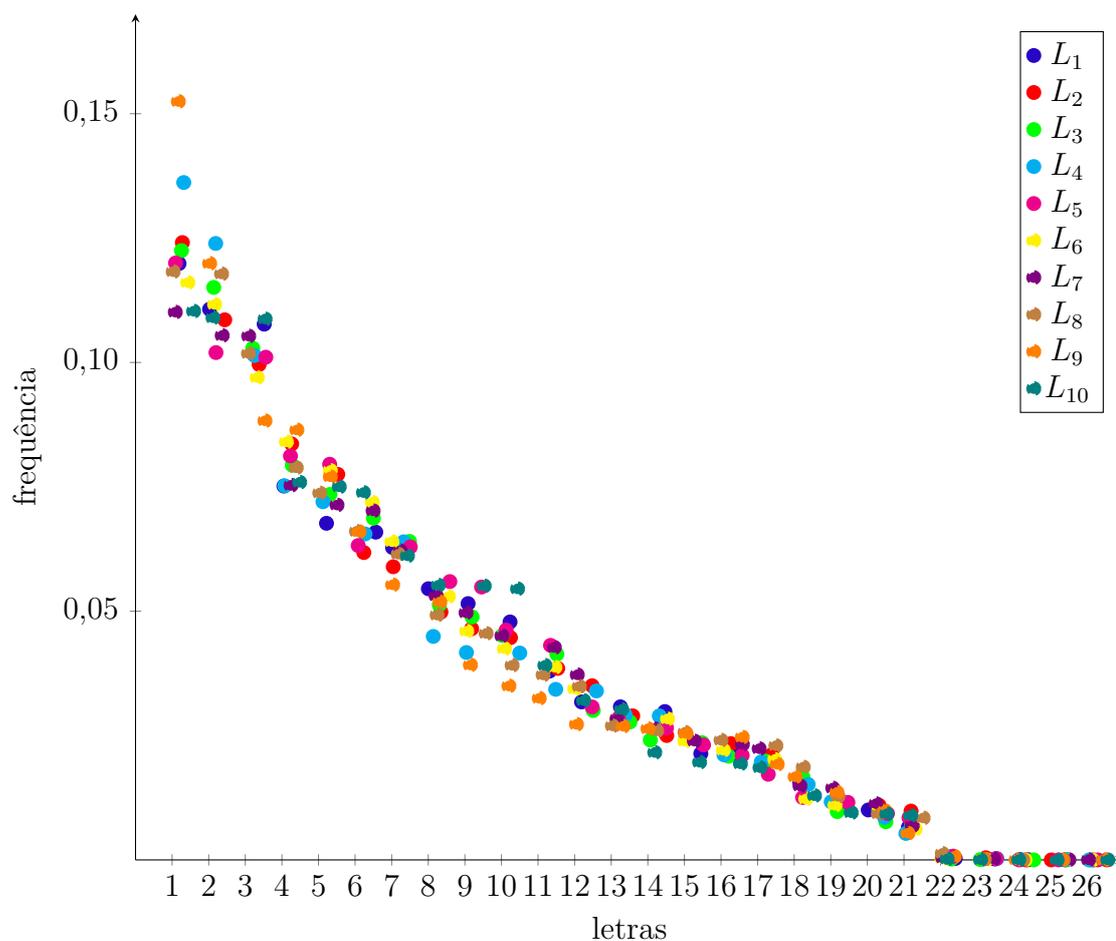


Figura B.1 – Distribuição da inicial das palavras nos livros em português.

A primeira tentativa era a de se aproximar de uma curva parecida com a Lei de Newcomb-Benford na forma $y = \log_{27} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Para isso, foi feita a média da frequência de cada letra e comparou-se os dados com o gráfico dessa função. O que foi notado é que a distribuição das palavras não segue a adaptação dessa lei, mas, por uma aproximação manual, chegou-se a uma curva exponencial que teve um ajuste muito bom, o que pode ser visto na [Figura B.2](#).

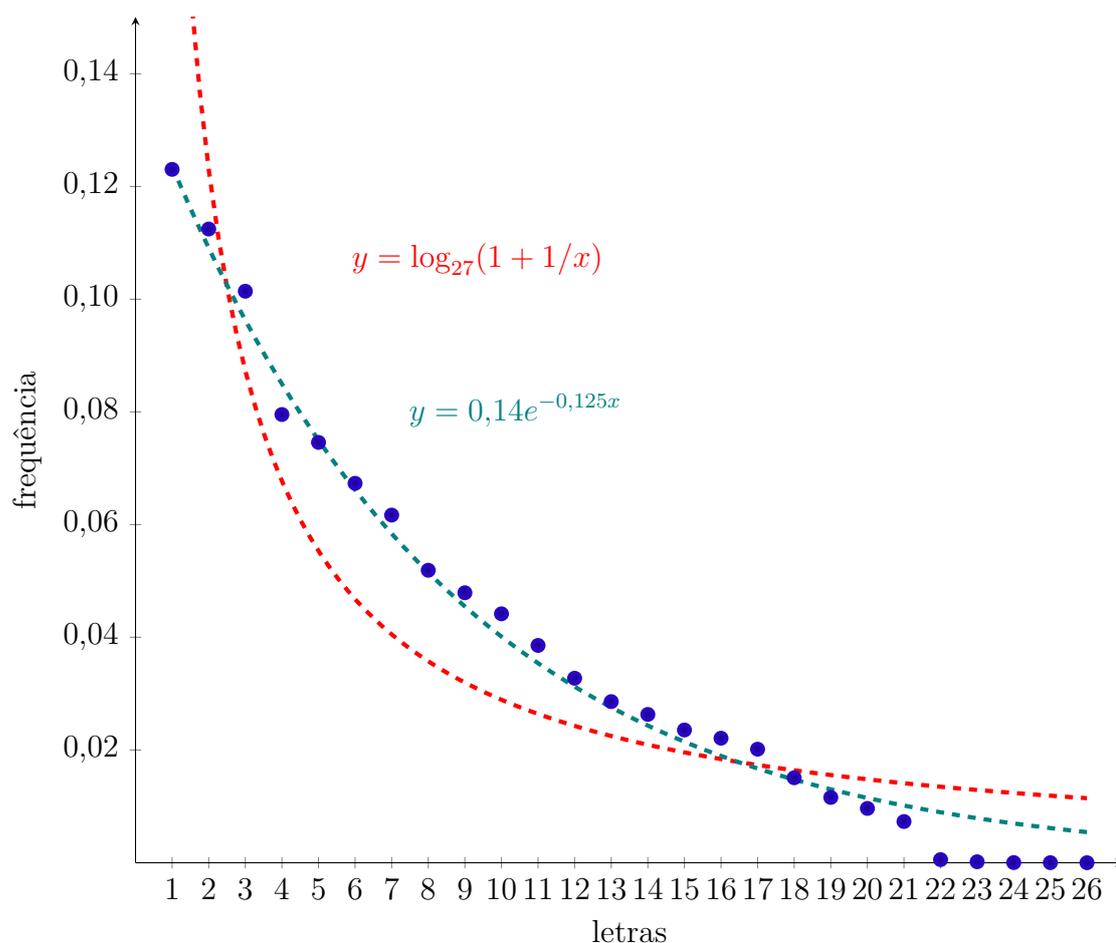


Figura B.2 – Média das frequências das iniciais em português.

Ao perceber essa aproximação à curva exponencial, levantou-se a dúvida se isso ocorreria em outros idiomas. Então, foram pesquisados 5 livros em cada um dos idiomas já citados. Ao normalizar os dados e ordená-los em ordem decrescente, pode-se ver que as letras mais frequentes variam de idioma para idioma, mas, ao colocar os dados no mesmo plano, notamos que aproximam da mesma curva exponencial próximas, como ilustrado na [Figura B.3](#).

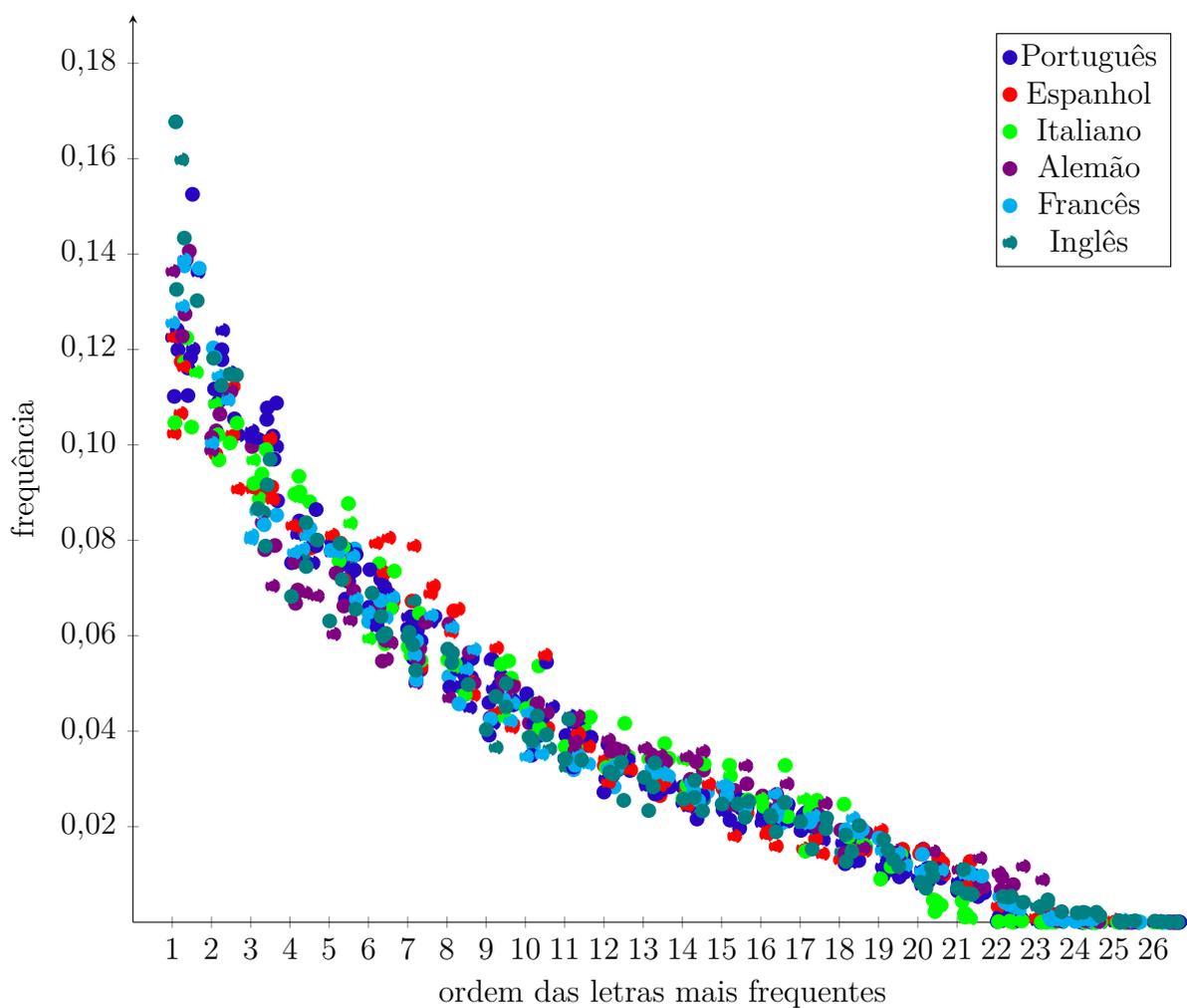


Figura B.3 – Frequências das letras iniciais nos idiomas pesquisados.

Por fim, foi pesquisada uma lista com mais de 260 mil palavras da língua portuguesa que se encontra disponível [aqui](#) (IME-USP, 2021), para se a distribuição das iniciais das palavras da língua portuguesa seguem alguma distribuição. Assim, ao normalizar os dados e pô-los no plano, percebeu-se que também seguem uma distribuição exponencial próxima dos outros casos, como ilustrado na [Figura B.4](#).

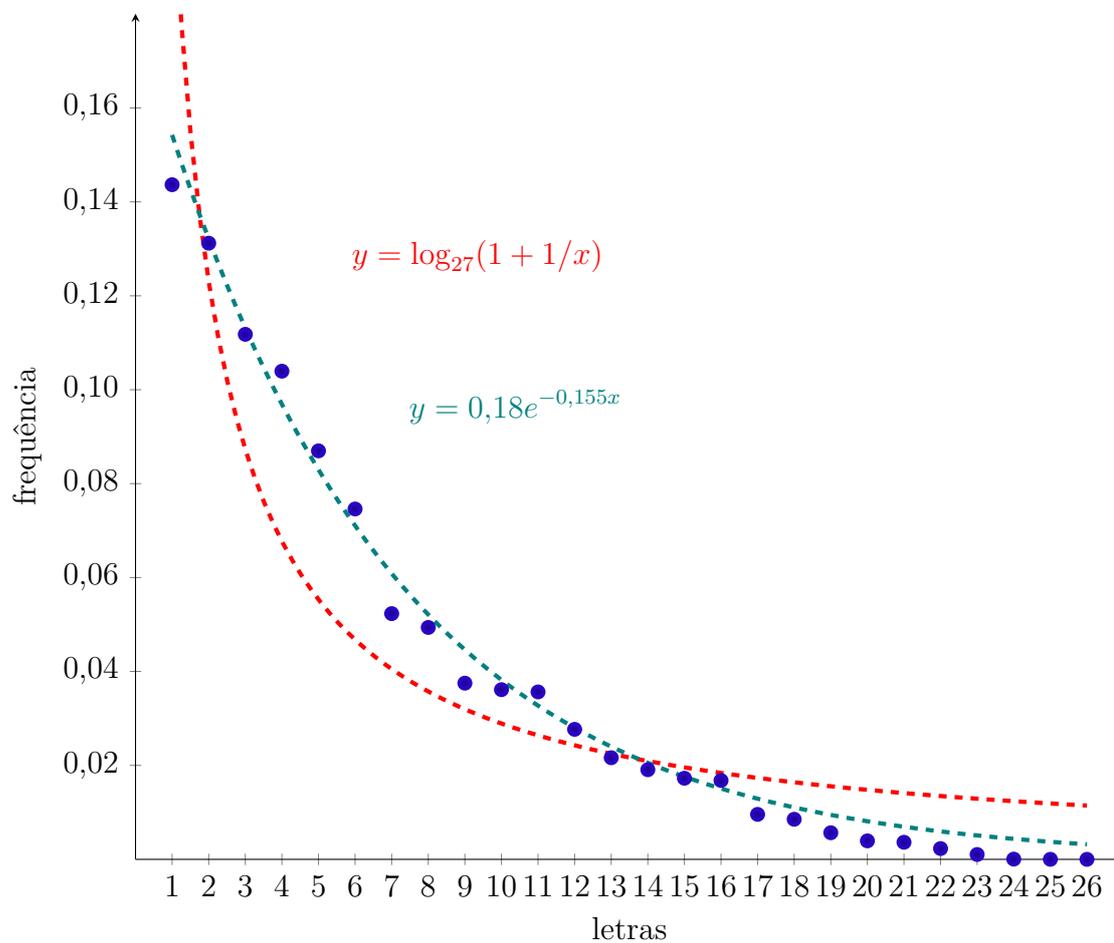


Figura B.4 – Média das frequências das iniciais das palavras do português.

Letra	Livros em Língua Portuguesa									
	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
a	6.076	7.832	4.808	7.983	5.479	10.844	6.344	7.393	6.570	6.348
b	858	1.526	776	977	674	1.188	896	1.629	1.053	743
c	4.125	6.032	3.211	4.638	4.273	6.980	4.536	4.948	4.736	4.369
d	6.580	8.952	5.379	8.772	6.447	11.270	6.634	7.421	8.354	6.272
e	5.911	7.184	5.725	6.533	5.429	9.416	6.351	6.389	4.837	6.258
f	1.743	2.526	1.404	2.209	1.652	3.339	2.242	2.188	1.916	1.843
g	551	804	334	752	501	978	870	802	743	546
h	576	708	454	551	621	1.067	681	529	542	514
i	1.108	1.110	1.296	1.878	925	2.141	1.400	1.171	1.352	1.067
j	359	791	358	343	455	601	414	582	294	533
k	2	0	0	8	0	0	3	0	5	0
l	1.173	1.804	1.101	1.360	1.424	1.961	1.347	1.441	916	1.112
m	3.616	3.594	2.993	2.894	2.947	4.465	3.199	3.089	2.841	4.250
n	2.992	3.352	1.933	2.679	2.317	3.762	2.993	2.455	2.147	3.178
o	3.446	4.251	2.283	4.221	3.380	6.213	3.743	4.145	3.615	3.518
p	3.714	5.591	3.708	4.845	4.362	7.602	4.228	4.629	4.220	4.316
q	2.626	3.223	2.395	1.865	3.006	5.140	2.573	2.857	1.493	3.136
r	1.165	1.686	928	2.188	1.129	2.317	1.439	1.691	1.445	1.130
s	2.828	4.457	3.434	4.120	3.395	8.160	4.298	3.857	3.030	3.170
t	2.083	2.777	2.109	2.686	2.482	4.124	2.713	2.334	1.780	2.251
u	1.689	1.761	974	1.270	1.242	2.752	1.592	1.510	1.472	1.243
v	1.637	2.089	1.126	1.583	1.528	2.752	1.709	1.609	1.393	1.740
w	0	0	0	4	0	0	2	0	2	2
x	10	31	3	43	40	5	12	8	1	2
y	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0
z	16	53	8	17	14	30	25	82	38	10
Total	54.885	72.134	46.740	64.419	53.722	97.107	60.246	62.759	54.795	57.551

Tabela B.1 – Livros em Português.

Letra	Livros em Língua Espanhola					Livros em Língua Italiana				
	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L_{20}
a	5.314	354	12.585	9.663	27.567	7.120	16.830	5.907	5.639	2.800
b	1.054	87	2.152	2.075	4.967	1.728	3.333	1.204	1.274	1.225
c	5.414	313	11.936	9.735	23.897	9.490	23.200	6.985	10.490	3.870
d	8.108	490	15.353	10.820	40.390	7.173	21.875	6.321	8.006	3.776
e	6.771	535	15.485	12.204	31.491	4.715	10.776	3.442	4.085	1.999
f	1.275	67	2.332	1.642	4.529	2.807	7.383	2.350	3.680	1.506
g	879	34	1.496	1.477	3.437	2.285	5.196	1.575	2.083	1.309
h	1.700	102	4.432	3.800	11.391	378	710	242	190	164
i	991	129	2.273	1.338	2.218	4.471	11.251	3.702	3.570	2.158
j	279	15	809	812	1.154	0	4	9	2	9
k	1	3	9	2	0	0	0	2	0	0
l	6.211	398	16.145	12.027	30.742	6.071	11.969	4.358	8.485	1.999
m	4.644	220	7.205	7.244	19.420	4.425	8.615	4.954	4.943	2.029
n	1.999	122	4.405	3.408	10.416	4.339	7.825	3.074	3.207	1.216
o	1.196	88	2.025	1.785	5.523	995	2.816	954	1.274	431
p	4.949	294	12.271	8.402	22.781	6.231	17.905	6.040	6.736	3.399
q	2.749	173	6.279	4.383	25.408	2.007	6.850	1.743	2.461	914
r	1.735	84	2.919	2.186	6.256	1.529	5.172	1.727	1.895	943
s	4.503	234	12.192	9.459	27.770	7.830	19.496	6.762	8.960	3.333
t	2.533	178	5.956	4.847	13.733	2.327	6.892	2.120	3.969	1.361
u	1.338	153	3.708	3.324	3.924	1.291	6.168	1.634	775	1.215
v	1.830	149	3.452	3.261	10.021	3.305	7.006	2.181	3.833	1.269
w	5	2	2	6	2	0	2	1	0	0
x	41	1	8	0	82	0	31	3	145	0
y	3.430	124	5.998	5.221	19.940	0	4	1	0	0
z	111	17	102	111	210	356	149	72	25	66
Total	69.060	4.366	151.529	119.232	347.269	80.873	201.458	67.363	85.727	36.991

Tabela B.2 – Livros em Espanhol e Italiano.

Letra	Livros em Língua Alemã					Livros em Língua Francesa				
	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}	L_{25}	L_{26}	L_{27}	L_{28}	L_{29}	L_{30}
a	4.319	3.996	2.607	19.227	12.855	5.655	8.366	12.266	5.230	7.726
b	2.316	2.170	1.293	10.575	8.395	2.008	2.708	4.280	2.034	3.627
c	125	42	13	2.467	209	9.852	9.910	15.554	7.164	11.855
d	9.089	7.443	4.542	38.031	25.356	15.884	20.318	25.650	11.727	20.849
e	6.442	4.732	2.106	23.362	11.012	6.993	8.630	12.776	6.358	10.256
f	1.709	1.367	954	6.781	5.287	3.267	5.054	6.210	3.256	5.006
g	3.418	3.063	1.630	13.999	8.540	1.192	1.532	2.115	1.060	2.680
h	2.393	2.710	1.760	13.361	7.872	1.165	1.594	1.983	921	1.471
i	3.174	4.219	2.813	15.356	9.153	2.281	4.210	4.411	2.852	3.193
j	622	741	239	3.148	2.440	2.830	5.084	5.269	2.079	2.951
k	1.784	1.512	1.033	6.743	6.640	62	22	113	4	8
l	1.336	1.615	716	6.190	4.536	13.898	16.016	19.947	10.688	18.007
m	2.767	3.788	2.043	12.242	12.470	7.276	9.341	12.899	4.950	6.958
n	2.699	2.181	1.509	9.965	6.969	5.944	3.927	5.459	2.635	3.885
o	609	513	385	2.875	2.722	1.670	1.745	2.887	1.403	2.163
p	988	477	263	3.072	2.130	9.415	12.617	15.946	7.568	12.558
q	37	18	7	227	85	4.269	6.164	9.273	4.281	6.478
r	1.015	633	448	3.634	2.697	3.688	4.292	6.579	2.723	4.836
s	6.654	6.157	3.794	31.017	18.050	9.034	11.851	15.382	7.234	12.673
t	1.025	1.168	512	4.338	3.411	3.272	4.734	6.428	3.104	5.970
u	3.536	3.810	2.012	15.369	8.575	2.392	3.026	3.859	2.348	3.580
v	2.268	2.038	1.217	9.649	5.973	3.152	4.731	8.724	3.284	4.764
w	4.282	4.208	2.690	17.650	10.680	10	18	222	7	2
x	0	0	0	2	9	11	28	88	20	76
y	0	4	4	20	15	243	556	505	501	632
z	2.058	2.042	1.066	9.738	6.531	80	13	6	18	26
Total	64.665	60.647	35.656	279.038	182.612	115.543	146.487	198.831	93.449	152.230

Tabela B.3 – Livros em Alemão e Francês.

Letra	Livros em Língua Inglesa				
	L_{31}	L_{32}	L_{33}	L_{34}	L_{35}
a	10.186	14.140	12.467	13.087	12.517
b	4.548	5.091	5.547	5.386	4.406
c	3.398	5.398	4.209	3.896	4.233
d	2.529	3.993	3.489	2.665	3.385
e	2.203	3.553	2.898	1.746	2.212
f	3.373	5.173	3.802	4.482	3.712
g	1.275	1.523	1.675	2.158	1.893
h	7.096	6.956	9.612	6.429	10.589
i	6.283	9.429	7.646	10.446	9.141
j	309	468	519	251	350
k	626	499	604	691	638
l	1.967	2.521	2.805	2.503	3.312
m	2.962	6.848	6.027	6.923	5.765
n	2.392	2.682	3.143	2.908	2.816
o	6.935	8.169	6.630	7.304	5.435
p	3.011	4.011	2.781	2.656	2.381
q	178	232	229	151	227
r	1.715	2.963	2.169	1.686	2.397
s	6.253	7.241	7.958	7.476	8.666
t	14.840	17.153	14.701	19.115	14.220
u	982	1.396	927	1.496	1.043
v	544	1.323	796	810	586
w	7.973	7.551	8.264	9.126	6.546
x	0	17	0	37	25
y	1.363	1.361	2.028	597	2.708
z	8	14	0	2	32
Total	92.949	119.705	110.926	114.027	109.235

Tabela B.4 – Livros em Inglês.

Letra	Contagem
a	37.593
b	7.245
c	27.202
d	29.256
e	34.334
f	9.329
g	4.520
h	2.234
i	12.922
j	1.030
k	13
l	4.995
m	9.818
n	2.506
o	4.395
p	19.523
q	952
r	22.763
s	13.692
t	9.455
u	1.482
v	5.663
w	2
x	270
y	1
z	602
Total	261.797

Tabela B.5 – Contagem das iniciais das palavras do português brasileiro.

APÊNDICE C – Gráficos no GeoGebra *Mobile*

GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica útil a todos os níveis educacionais com ferramentas para geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo. É um importante aliado dos professores em suas aulas de matemática e merece ser divulgado e ensinado. A ideia deste apêndice não é esgotar seus usos, mas prover o conhecimento mínimo para esboçar gráficos de funções, sobretudo funções logarítmicas e exponenciais em celulares, devido a praticidade e ganho de tempo, já que a maioria dos alunos possuem um aparelho capaz de rodar o *GeoGebra*.

Inicialmente, é necessário efetuar o *download* do aplicativo na *Play Store*, no caso de celulares *Android*, na *App Store*, para celulares com sistema *iOS* e na *Microsoft Store*, para *Windows Phone*.

A tela inicial do programa já nos vem preparada para a inserção de funções.

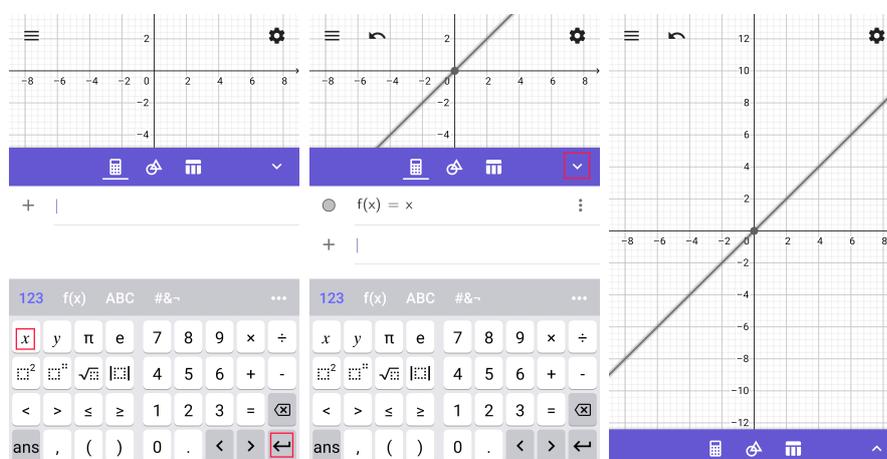


Figura C.1 – Passos.

Vamos adicionar a função $f(x) = x$. Para isso, tocaremos no botão x , conforme destacado na [Figura C.1](#) e pressionaremos o botão Enter, também destacado na mesma figura. Na sequência, tocaremos a seta na barra roxa para abaixar o menu de inserção. Podemos ver a função que construímos.

Ao tocar em qualquer lugar na tela que corresponde à função, temos algumas opções como ilustrado na [Figura C.2](#). A primeira delas, com uma imagem de lata de tinta, serve para alterar a cor da função, a segunda, para alterar o estilo da linha, e a terceira, para apagar o gráfico da função. Tocaremos no primeiro ícone para alterar a cor da linha. Temos várias opções de cores conforme mostrado na mesma figura. Para escolher, basta

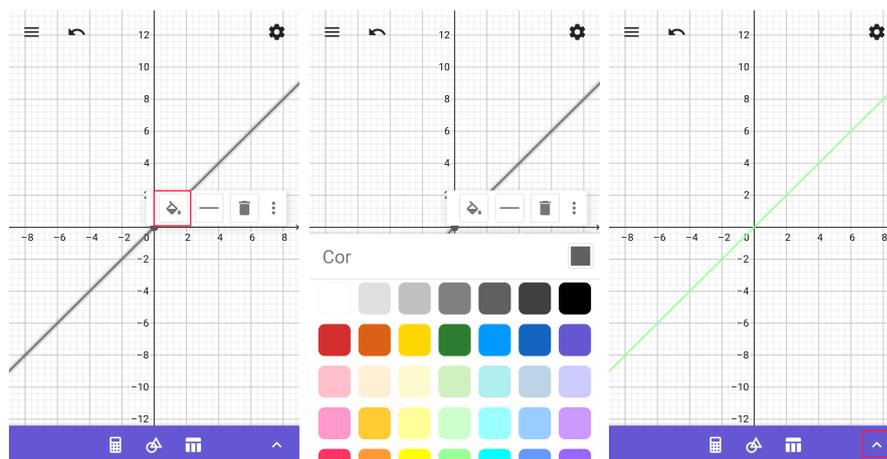


Figura C.2 – Passos.

tocar na cor. Para inserir uma nova função, precisamos tocar novamente na seta para termos acesso de novo ao menu.

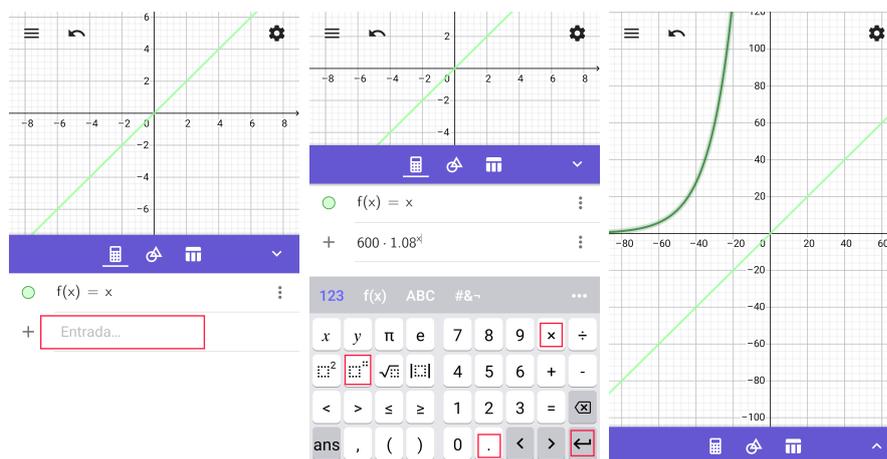


Figura C.3 – Passos.

Agora, tocando onde aparece escrito “Entrada...”, acessaremos novamente o mesmo menu do início. Vamos inserir a função $g(x) = 600 \cdot 1,08^x$. Para tal, digitaremos os números normalmente e tocaremos os botões de “ \times ” para multiplicação, embora no visor apareça como “.” e, para casas decimais usaremos o ponto, como a Figura C.3 destaca. Para o expoente, usaremos o botão com dois quadrados pontilhados, conforme destacado na mesma figura. Por fim, tocaremos no *Enter* para confirmar a função.

Repetindo os mesmos passos da Figura C.2, inseriremos mais uma função, a $h(x) = \log_{1,08}\left(\frac{x}{600}\right)$. Para isso, precisaremos acessar o menu de ícone $f(x)$. Nele, temos diversas opções de funções. Usaremos aquela do ícone de um “log” em que no lugar da base está um quadrado pontilhado, como destacado na Figura C.4. Note que ao pressioná-lo, o visor mostrou “log()” que permite inserir qualquer base. Para inserir os números e a variável, precisamos retornar ao menu anterior por meio do ícone “123”, também destacado na mesma imagem.

Por fim, vamos digitar o número 1,08 e pressionar o botão com seta para direita,

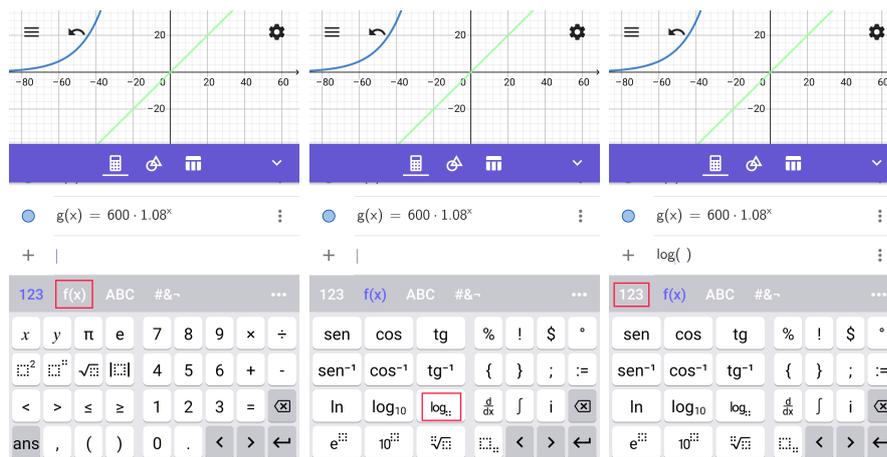


Figura C.4 – Passos.

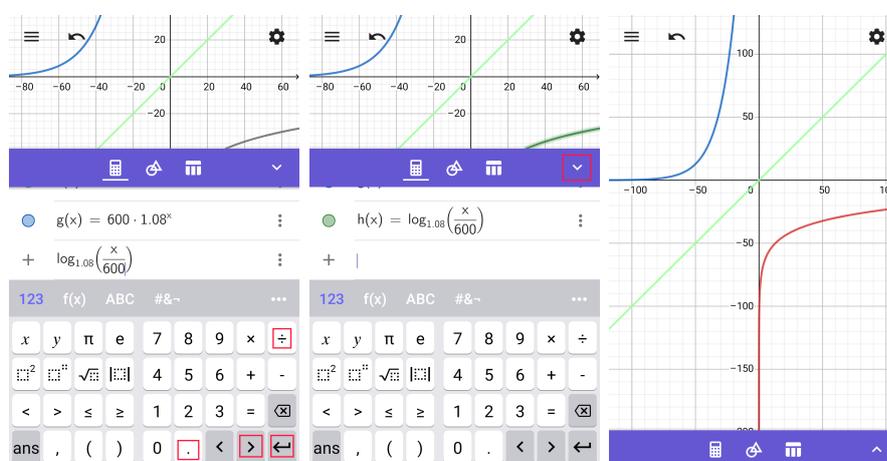


Figura C.5 – Passos.

como destacado na [Figura C.5](#), para trocar para o argumento. Para inserir uma fração usamos o botão \div , também destacado na mesma figura. Para finalizar, basta pressionar o botão Enter e a função será inserida.

Assim, fomos capazes de utilizar o *GeoGebra* para adicionar gráficos de funções. Existem diversas outras funcionalidades disponíveis, mas fogem do objetivo deste breve guia.

ANEXO A – Níveis de Proficiência - PISA 2018

Nível	Características das Tarefas
1	No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.
2	No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados.
3	No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais, e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos.

4	No Nível 4, os estudantes são capazes de trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Conseguem utilizar seu conjunto limitado de habilidades e raciocinar com alguma perspicácia em contextos diretos. São capazes de construir e de comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
5	No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando um vasto e bem desenvolvido conjunto de habilidades de pensamento e de raciocínio, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e são capazes de formular e de comunicar suas interpretações e raciocínios.
6	No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e transitar entre elas com flexibilidade. Evidenciam um pensamento e um raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias que lhes permitam lidar com situações novas. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original.

Quadro 1 – Descrição dos Níveis de Proficiência em Matemática - PISA 2018

Fonte: Adaptado de [Brasil \(2019, pp. 109 – 110\)](#)