



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LISBETH CORBACHO CARAZAS

**Detecção de Bordas de Imagens Digitais
Baseada em Morfologia Matemática \mathbb{L} -Fuzzy e
 h -Ordens**

Campinas

2021

Lisbeth Corbacho Carazas

Detecção de Bordas de Imagens Digitais Baseada em Morfologia Matemática \mathbb{L} -Fuzzy e h -Ordens

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Peter Sussner

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Lisbeth Corbacho Carazas e orientada pelo Prof. Dr. Peter Sussner.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C81d Corbacho Carazas, Lisbeth, 1986-
Detecção de bordas de imagens digitais baseada em morfologia matemática L-fuzzy e h -Ordens / Lisbeth Corbacho Carazas. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Peter Sussner.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Detecção de bordas. 2. Incerteza no processamento de imagens digitais. 3. Morfologia matemática L-fuzzy. 4. Gradiente morfológico. 5. h -Ordens. I. Sussner, Peter, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Edge detection in digital images based on L-fuzzy mathematical morphology and h -Orders

Palavras-chave em inglês:

Edge detection

Uncertainty in digital image processing

L-Fuzzy mathematical morphology

Morphological gradient

h -Orders

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Peter Sussner [Orientador]

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Benjamín René Callejas Bedregal

Nicanor Humberto Bustince Sola

Manuel González Hidalgo

Data de defesa: 01-10-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9558-1949>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4426990015037608>

**Tese de Doutorado defendida em 01 de outubro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). PETER SUSSNER

Prof(a). Dr(a). MARCOS EDUARDO RIBEIRO DO VALLE MESQUITA

Prof(a). Dr(a). BENJAMÍN RENÉ CALLEJAS BEDREGAL

Prof(a). Dr(a). NICANOR HUMBERTO BUSTINCE SOLA

Prof(a). Dr(a). MANUEL GONZÁLEZ HIDALGO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Dedicado a Dios por cuidarme, guiarme y darme fortaleza.
A mis padres Tomasa y Valentin, por todo su amor, enseñanzas
y apoyo incondicional. A mis hermanos, Luz Angélica e Iván por
siempre creer en mí.*

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), número de processo 142461/2018-0.

Minha imensa gratidão ao meu orientador, professor Dr. Peter Sussner, por toda a dedicação, orientação, pelas discussões acadêmicas e pelos desafios colocados, os quais foram fundamentais para a concretização desta tese e o meu crescimento profissional.

Aos professores Dr. Benjamín C. Bedregal, Dr. Humberto B. Sola, Dr. Manuel G. Hidalgo, e Dr. Marcos V. Mesquita pelas sugestões e observações realizadas ao trabalho.

Aos professores Dr. Aurélio Oliveira, Dr. Fernando Gomide, Dr. João B. Florindo, Dra. Maria A. Diniz, Dra. Sandra A. Santos, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC-UNICAMP, pela utilização de sua infraestrutura para a realização deste doutorado, e a todos seus funcionários pela ajuda oferecida.

Ao Laboratório de Tratamento Matemático de Imagens e Inteligência Computacional - MiLAB, do IMECC, pela infraestrutura e equipamentos utilizados.

Aos meus pais Tomasa Carazas e Valentin Corbacho, e aos meus irmãos Luz Angélica e Iván, de quem tenho recebido imenso apoio e carinho apesar da distância.

Ao meu companheiro, Cesar Diaz, por todo o amor, paciência, suporte emocional e toda sua ajuda no decorrer deste doutorado.

A todos meus amigos, com quem partilhei experiências, alegrias e tristezas, dando a este percurso um especial encanto: Priscila Santos, Fernanda Rocha, Vinicius Wasques, Nilmara Pinto, Silvia Souza, David Caro, Juliana Campitelli, Beatriz Laiate, Guillermo Gambini, Marvyn Inga, Ever Ticona, Hector Suni, Sebastián Gaitán, Juan Fernando Garcia e a todas aquelas pessoas que direta ou indiretamente participaram desta travessia.

E a todos aqueles que de uma ou outra maneira contribuíram para a realização exitosa desta tese, deixo-lhes aqui o meu agradecimento sincero.

*“O mundo está cheio de coisas
mágicas que pacientemente
esperam que a nossa percepção
fique mais aguçada”
Bertrand Russell*

Resumo

Tendo em vista que a detecção de bordas é uma parte essencial do processamento de imagens digitais, diversos métodos de detecção têm sido desenvolvidos. Atualmente a maioria dos detectores de bordas supõem, incorretamente, que não existe incerteza enquanto à posição e à tonalidade de cada pixel da imagem digital analisada. Nesta tese, propõem-se duas abordagens para detecção de bordas de imagens digitais que contemplam a incerteza mencionada modelada em termos de uma imagem digital intervalar. Tais abordagens baseiam-se na redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital empregando as h -ordens, sendo uma a priori e a outra a posteriori da utilização da morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy. Para o desenvolvimento das abordagens propostas, determinam-se todas as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, sobre o conjunto de subintervalos da cadeia finita \mathcal{L}_n . Além disso, mostra-se que todas as ordens admissíveis geradas a partir de combinações convexas diferentes coincidem com algumas h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$. Também, faz-se ênfase nos operadores de dilatação e erosão \mathbb{L} -fuzzy baseados nos operadores de conjunção e implicação \mathbb{L} -fuzzy, especialmente em operadores de conjunção pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representáveis e implicação pseudo- $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -representáveis no conjunto de subintervalos da cadeia finita \mathcal{L}_n . Esses operadores fazem parte da extensão, elaborada neste trabalho, dos operadores de conjunção e implicação pseudo-representáveis no conjunto de subintervalos fechados de $[0, 1]$. Finalmente, após à implementação das fases de treino e de teste, as quais permitem escolher adequadamente a h -ordem a ser utilizada, avalia-se o desempenho em detecção de bordas dos detectores desenvolvidos mediante a medida do FoM e do F-Measure. Assim, o desempenho dos detectores de bordas desenvolvidos foi comparado tanto qualitativa como quantitativamente com o desempenho dos detectores baseados em morfologia matemática fuzzy discreta e com o detector de bordas Canny. Tal comparação mostrou que: em geral o detector de bordas Canny foi inferior; a valores altos de FoM ou F-Measure os demais detectores comportam-se similarmente; no caso de valores baixos de FoM ou F-Measure obtidos pelos detectores baseados em morfologia matemática fuzzy discreta os valores correspondentes obtidos pelos detectores de bordas desenvolvidos são superiores, o que implica uma melhor detecção de bordas.

Palavras-chave: Detecção de bordas, Incerteza no processamento de imagens digitais, Morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy, Gradiente morfológico, h -Ordens.

Abstract

Since edge detection is an essential part of digital images processing, several edge detection methods have been developed. Most of the edge detectors assume, incorrectly, that there is no uncertainty regarding the position and the value of each pixel in the analyzed digital image. In this work, we propose two approaches for edge detection in digital images that contemplate the aforementioned uncertainty, modelled in terms of an interval-valued digital image. Such approaches are based on the reduction of an interval-valued digital image to a digital image through h -orders, being one of them a priori and the other a posteriori of the use of \mathbb{L} -fuzzy mathematical morphology. For the development of these approaches, all the h -orders given by the convex combination $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, are determined on the set of subintervals of the finite chain \mathcal{L}_n . Furthermore, we show that all admissible orders generated from different convex combinations coincide with some h -orders given by the convex combination $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$. Also, we focus in the \mathbb{L} -fuzzy dilation and erosion operators based in the \mathbb{L} -fuzzy conjunction and implication operators, especially in the pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representable conjunction and pseudo- $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -representable implication operators on the set of subintervals of the finite chain \mathcal{L}_n . These operators are part of the extension, provided in this work, of the pseudo-representable conjunction and implication operators on the set of closed subintervals of the unit interval $[0, 1]$. Finally, after implementation of the training and the test phases, which allow to properly choose the h -order to be used, the performance of the developed edge detectors were evaluated using FoM and F-Measure. Thus, the performance of the developed edge detectors was compared both qualitatively and quantitatively with the performance of discrete fuzzy mathematical morphology-based detectors and with the Canny edge detector. The comparison showed that: in general the Canny edge detector was inferior; at high FoM or F-Measure values the other detectors have similar behaviour; if the discrete fuzzy mathematical morphology-based detectors display low FoM or F-Measure values the corresponding values obtained by the developed edge detectors are higher, which implies better edge detection.

Keywords: Edge detection, Uncertainty in digital image processing, \mathbb{L} -Fuzzy mathematical morphology, Morphological gradient, h -Orders.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de uma imagem digital A e do elemento estruturante S .	52
Figura 2 – Exemplo da erosão e da dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy de uma imagem em tons de cinza	53
Figura 3 – Erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm	54
Figura 4 – Dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm.	54
Figura 5 – Distribuição dos intervalos do conjunto \mathbb{I}_n^* no plano.	57
Figura 6 – Representação dos intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_2^*$ tais que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ e $K_{\alpha,2}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,2}(\mathbf{y})$.	64
Figura 7 – Representação de cadeias finitas no plano.	68
Figura 8 – Representação do conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \subset [0, 1]$	71
Figura 10 – Representação da relação entre as ordens admissíveis $\leq_{\alpha^+}, \leq_{\alpha^-}$ e \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$	76
Figura 9 – Representação da relação entre ordens admissíveis diferentes de acordo com a forma dos intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$	77
Figura 11 – Representação de todas as cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$	78
Figura 12 – Representação de todos os prosets $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$	79
Figura 13 – Vizinhança de uma imagem em tons de cinza.	82
Figura 14 – Representação dos extremos da imagem intervalar A_{IV} gerada a partir de uma imagem digital A	83
Figura 15 – Limites do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm.	85
Figura 16 – Sequência para determinar o gradiente morfológico \mathcal{L}_m -fuzzy baseado em ordens admissíveis	86
Figura 17 – Exemplos de erosão \mathcal{L}_m -fuzzy e dilatação \mathcal{L}_m -fuzzy baseados em ordens admissíveis	88
Figura 18 – Exemplos de erosão \mathcal{L}_m -fuzzy e dilatação \mathcal{L}_m -fuzzy baseados em h -ordens	89
Figura 19 – Sequência para determinar o gradiente morfológico $G^{\alpha}(A_{IV}, U)$ baseado em h -ordens \leq_{α} , $\alpha = \frac{1}{2}$	90
Figura 20 – Exemplos de erosão morfológica, dilatação morfológica e gradiente morfológico baseados em ordens admissíveis	91
Figura 21 – Exemplos de erosão morfológica, dilatação morfológica e gradiente morfológico baseados em h -ordens	92

Figura 22 – Sequência da metodologia utilizada para a detecção de bordas de uma imagem intervalar obtida a partir de uma imagem digital.	96
Figura 23 – Exemplo de uma imagem da base de dados	97
Figura 24 – BoxPlots dos valores do FoM e do F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n)	100
Figura 25 – Imagem digital 132.pgm com sua imagem de bordas ideias.	101
Figura 26 – Bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na primeira abordagem proposta (1-A e 1-B).	102
Figura 27 – Bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na segunda abordagem proposta (2-A e 2-B).	103
Figura 28 – Imagens de bordas de 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas proposto, detector de bordas baseado em $G_{T_{nM}^n, I_{KD}^n}(A, U^M)$ e do detector de bordas Canny (com $\sigma = \sqrt{2}$).	104
Figura 29 – Média dos valores FoM e média dos valores F-Measure obtidos a partir dos detectores de bordas propostos baseados aplicadas às 25 imagens de treino por cada $\alpha \in \mathcal{A}_{ca}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{ca}^c$) correspondente ($\alpha \in \mathcal{A}_{ca}^c$ corresponde a 1-A 2-A e).	105
Figura 30 – Valores FoM dados pelos detectores de bordas baseado em 2-B, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, e pelo detector de bordas baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$ aplicado às 25 imagens de teste. . .	107
Figura 31 – Valores F-Measure dados pelos detectores de bordas baseado em 2-B, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, e pelo detector de bordas baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$ aplicado às 25 imagens de teste. . .	108
Figura 32 – Primeiro exemplo: Bordas da imagem original dada pelo gradiente morfológico proposto, pelo gradiente morfológico fuzzy discreto e pelo detector de bordas Canny	110
Figura 33 – Segundo exemplo: Bordas da imagem original dada pelo gradiente morfológico proposto, pelo gradiente morfológico fuzzy discreto e pelo detector de bordas Canny	111
Figura 34 – Fluxograma da primeira abordagem	122
Figura 35 – Fluxograma da segunda abordagem	123

Lista de tabelas

Tabela 1	– Médias dos valores FoM e médias dos valores F-measure dos detectores de borda baseados no $G_{T^n, I^n}(A, U^M)$, $n = 255$ aplicadas às 50 imagens da base de dados da University of South Florida [1].	99
Tabela 2	– P-valores obtidos a partir das comparações realizadas mediante o teste de Wilcoxon aplicado aos valores FoM e F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n)	101
Tabela 3	– P-valores obtidos a partir do teste de Wilcoxon dos valores FoM e F-Measure obtidos pelos detectores de bordas baseado no $G_{\mathcal{E}_T^p, \mathcal{J}_I^q}^\alpha(A_{IV}, U^M)$ com $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 5/12$, e no $G_{T, I}(A, U^M)$ aplicados às 25 imagens de teste.	109
Tabela 4	– Média, mediana e desvio padrão dos valores FoM e do F-Measure dos detectores de bordas propostos, do detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T, I}(A, U^M)$, e do detector Canny aplicados às 25 imagens de teste.	109
Tabela 5	– Conjunto \mathcal{A}_{ca}	124
Tabela 6	– Conjunto \mathcal{A}_{ca}^c	125

Lista de símbolos

\mathcal{L}_n	Cadeia finita $\{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$	Cadeia finita $\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\right\}$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$	Conjunto dos subintervalos não vazios do reticulado limitado \mathbb{L}
\mathbb{I}_n^*	Conjunto dos subintervalos não vazios de \mathcal{L}_n
$\mathbb{I}_{\frac{1}{n}}^*$	Conjunto dos subintervalos não vazios de $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$
\mathbf{x}	Representação do intervalo $[\underline{x}, \bar{x}]$
$K_{\alpha, n}$	Mapeamento de \mathbb{I}_n^* em $[0, n]$ dada por $K_{\alpha, n}(\mathbf{x}) = \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x})$
φ_n	Isomorfismo entre $\mathcal{L}_{1/n}$ e \mathcal{L}_n
\mathcal{C}^n	Conjunção \mathcal{L}_n -fuzzy por meio de φ_n
\mathcal{I}^n	Implicação \mathcal{L}_n -fuzzy por meio de φ_n
$Inc_{\mathcal{I}}$	Medida de inclusão \mathbb{L} -fuzzy dada pela implicação \mathbb{L} -fuzzy \mathcal{I}
$Sec_{\mathcal{C}}$	Medida de intersecção \mathbb{L} -fuzzy dada pela conjunção \mathbb{L} -fuzzy \mathcal{C}
$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U)$	Erosão \mathbb{L} -fuzzy de uma imagem A pela função estruturante U
$\mathcal{D}_{\mathcal{C}}(A, U)$	Dilatação \mathbb{L} -fuzzy de uma imagem A pela função estruturante U
$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$	Conjunto de α 's que determinam as classes diferentes de equivalência em \mathbb{I}_n^* , $n \in \mathbb{N}$
U^M	Função estruturante \mathbb{L} -fuzzy, sendo M uma matriz 3×3
ρ_{α}	Mapeamento entre o proset $(\mathbb{I}_{\alpha}^*, \leq_{\alpha})$ e a cadeia finita $\mathcal{L}_{m_{\alpha}}$
η_n	Número de elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$
$\mathcal{E}^{\alpha}(A_{IV}, U)$	Erosão morfológica de uma imagem intervalar A_{IV} pela função estruturante U baseada em h -ordens \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$

$\mathcal{D}^\alpha(A_{IV}, U)$ Dilatação morfológica de uma imagem intervalar A_{IV} pela função estruturante U baseada em h -ordens \leq_α , $\alpha \in [0, 1]$

$G^\alpha(A_{IV}, U)$ Gradiente Morfológico baseados nos operadores morfológicos $\mathcal{D}^\alpha(A_{IV}, U^M)$ e $\mathcal{E}^\alpha(A_{IV}, U)$

$G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ Gradiente morfológico $\mathbb{I}_{[0, n]}^*$ -fuzzy de uma imagem intervalar A_{IV}

Sumário

Introdução	16
1 Conceitos Básicos da Teoria de Reticulados e da Morfologia Matemática	21
1.1 Reticulados Completos	21
1.2 Mapeamentos entre Posets	26
1.3 Morfologia Matemática em Reticulados Completos	28
2 Teoria de Conjuntos \mathbb{L}-Fuzzy	30
2.1 Operadores \mathbb{L} -Fuzzy	30
2.2 Relações entre Operadores \mathbb{L} -Fuzzy por Meio de Isomorfismos	33
2.3 Operadores \mathbb{L} -Fuzzy Intervalares	39
2.4 Morfologia Matemática \mathbb{L} -fuzzy	46
3 h-Ordens e Ordens Admissíveis sobre \mathbb{I}_n^*	56
3.1 h -Ordens sobre \mathbb{I}_n^*	56
3.2 Ordens Admissíveis em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$	68
3.3 Relação entre as h -Ordens e as Ordens Admissíveis em \mathbb{I}_n^*	71
4 Gradiente Morfológico de Imagens Digitais Intervalares	80
4.1 Incerteza Intrínseca de uma Imagem Digital	81
4.2 Gradiente Morfológico \mathbb{I}_n^* -Fuzzy e Gradiente Morfológico induzido pelas h -ordens	82
4.3 Abordagens Propostas para o Cálculo do Gradiente Morfológico de uma Imagem Digital Intervalar	85
5 Aplicação: Detecção de Bordas de Imagens Digitais	94
5.1 Metodologia	94
5.2 Avaliação de Detectores de Bordas	96
5.3 Resultados Experimentais	98
5.3.1 Análise do Desempenho dos Detectores de Bordas Propostos	101
Considerações Finais	113
REFERÊNCIAS	115
ANEXO A Fluxogramas das Abordagens Propostas	122
ANEXO B h-Ordens - Fase de Treino	124
ANEXO C Artigos publicados e participação em eventos	126

Introdução

A detecção de bordas é uma ferramenta do processamento de imagens digitais, utilizada para determinar pixels de borda sendo pixels onde a intensidade da luz muda repentinamente [2,3]. A importância da borda de uma imagem concentra-se na simplificação da sua análise e na redução drástica da quantidade de dados a serem processados [4], com isso a detecção de bordas pode ter aplicações em áreas como geografia, medicina, robótica, reconhecimento de padrões, etc. Existem diversos métodos de detecção de bordas, dentre os quais destacam-se alguns métodos clássicos (como Canny [4], Roberts [5], Sobel [6], gradiente morfológico [7]) e os métodos baseados em sistemas fuzzy tipo-1 [8,9], em sistemas fuzzy tipo-2 [10–12], em teoria de conjuntos fuzzy [13], em teoria de conjuntos fuzzy intervalar [14,15], etc. Embora existam diversas técnicas para a extração da borda de uma imagem, os detectores de bordas baseados em morfologia matemática (MM) fuzzy e suas extensões estão dando resultados destacáveis [16–20].

A MM fuzzy é uma extensão da MM binária para a MM em tons de cinza utilizando conceitos da teoria de conjuntos fuzzy [21–24]. Tal extensão é possível desde que as imagens em tons de cinza podem ser vistas como conjuntos fuzzy. Lembre que, a MM é uma teoria empregada para a análise e o processamento de imagens utilizando os operadores de dilatação, erosão, abertura e fechamento, os quais são conhecidos como os quatro operadores elementares da MM. A MM introduzida por Matherom [25] e Serra [26] foi inicialmente formulada para o processamento de imagens binárias e posteriormente estendida para imagens em tons de cinza [27,28]. De fato, a MM binária, a MM em tons de cinza e a MM fuzzy possuem como base a teoria de reticulados completos. Assim, os reticulados completos representam um contexto mais geral onde a MM pode ser bem definida. Na MM são observadas duas perspectivas: a primeira, a MM no sentido geométrico e topológico baseado nos operadores de dilatação e erosão morfológica, geralmente associados a um elemento estruturante [28]; a segunda, a MM no sentido algébrico, onde os operadores de erosão e dilatação são definidos como operadores que comutam com o ínfimo e o supremo, respectivamente [29]. Ambas as perspectivas são também observadas na MM fuzzy [30]. Como extensão da MM fuzzy encontra-se a morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy (MM \mathbb{L} -fuzzy, sendo \mathbb{L} um reticulado completo [19,30]) que inclui a morfologia matemática fuzzy discreta ($\mathbb{L} = \mathcal{L}_n$), a morfologia matemática fuzzy intervalar ($\mathbb{L} = \mathbb{I}$)

[18, 19, 31], etc.

Baseada nos operadores de erosão fuzzy, dilatação fuzzy e no gradiente morfológico, a MM fuzzy pode ser utilizada em detecção de bordas de imagens em tons de cinza. Lembre que, o gradiente morfológico é um operador da MM definido como a diferença entre a dilatação e erosão morfológica [7, 32]. Assim, González-Hidalgo et al. [17] desenvolveram um método em detecção de bordas de imagens em tons de cinza de acordo com as condições de Canny. Para isso, eles definiram o gradiente morfológico fuzzy como a diferença entre a dilatação e a erosão fuzzy (sob condições específicas), aplicaram o gradiente morfológico fuzzy a uma imagem em tons de cinza para a obtenção de uma imagem gradiente, e em seguida utilizaram métodos de afinamento e binarização para a determinação das suas bordas.

Embora as imagens em tons de cinza sejam vistas como conjuntos fuzzy, na prática as imagens em tons de cinza são representadas por funções $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ (imagens digitais em tons de cinza), isso pelas limitações na captura da imagem mediante algum dispositivo digitalizador. Assim, as imagens digitais em tons de cinza podem ser vistas como conjuntos \mathcal{L}_n -fuzzy, sendo a MM \mathcal{L}_n -fuzzy (ou MM fuzzy discreta) uma ferramenta mais adequada do que a MM fuzzy para o processamento deste tipo de imagens [16], incluindo a detecção de bordas. Apesar que as imagens digitais podem ser processadas utilizando a MM fuzzy discreta, observa-se que tais imagens apresentam certo grau de incerteza. Essa incerteza pode ser observada tanto na posição de seus pixels quanto na sua tonalidade [18, 20, 33]. Lopez-Molina et al. [33] propuseram um modelo de captura dessa incerteza obtendo imagens digitais intervalares representadas por funções $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{I}_n^*$. Assim, as imagens digitais intervalares vistas como conjuntos \mathbb{I}^* -fuzzy, ou melhor ainda como conjuntos \mathbb{I}_n^* -fuzzy, podem ser processadas usando a MM fuzzy intervalar [18, 19], ou a MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy.

Determinar as bordas das imagens digitais intervalares utilizando ferramentas da MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy pode levar a outros problemas, pois métodos existentes de afinamento e binarização (para obtenção da borda da imagem de acordo com as condições de Canny) servem apenas para imagens digitais e não para imagens digitais intervalares. Diante disso, no Capítulo 4 do presente trabalho, são propostas duas abordagens de redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital por meio de h -ordens, que incluem as ordens admissíveis, sendo uma a priori e outra a posteriori da utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy (ao respeito disso, alguns resultados parciais já têm sido publicados [20, 34]).

As ordens admissíveis sobre \mathbb{I}^* (conjunto de subintervalos fechados de $[0, 1]$), introduzidas Bustince et al. [35], são definidas como ordens lineares que preservam a ordem parcial \leq_2 , onde $[x, \bar{x}] \leq_2 [y, \bar{y}]$ se, e somente se, $x \leq y$ e $\bar{x} \leq \bar{y}$. No mesmo trabalho, também são definidas as ordens admissíveis sobre (\mathbb{I}^*, \leq_2) a partir de um par de funções de agregação. Em particular, são geradas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha, \beta}$ a partir de combinações convexas

$K_\alpha, K_\beta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$. Recentemente, Santana et al. [36] mostraram que as ordens admissíveis não são necessariamente geradas por funções de agregação. Uma vantagem das ordens admissíveis é que incluem a maioria dos exemplos usuais de ordens lineares que aparecem na literatura, entre eles, as ordens lineares lexicográficas 1 e 2, e Xu e Yager [37]. As aplicações das ordens admissíveis baseadas em funções de agregação são encontradas em tomada de decisões [36, 38, 39] e processamento de imagens [20].

Com base no trabalho de Bustince et al. [35], nesta tese estende-se o conceito de uma ordem admissível sobre (\mathbb{I}^*, \leq_2) para uma ordem admissível sobre um poset (\mathbb{L}, \leq) . Assim, as ordens admissíveis sobre os reticulados completos (\mathbb{I}^*, \leq_2) e (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) (conjunto de subintervalos de \mathcal{L}_n) são casos particulares dessa extensão. Também, dá-se ênfase ao estudo das ordens admissíveis sobre (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) a partir de combinações convexas $K_{\alpha,n}, K_{\beta,n} : \mathbb{I}_n^* \rightarrow [0, n]$ com $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$ sendo relacionadas com as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}, \alpha \in [0, 1]$, sobre \mathbb{I}_n^* . Lembre que, uma h -ordem é uma pré-ordem sobre um conjunto X a qual depende de uma aplicação $h : X \rightarrow \mathbb{L}$, sendo que \mathbb{L} é um poset [40]. As principais contribuições teóricas da relação das ordens admissíveis com as h -ordens são apresentadas no Capítulo 3 em forma de teoremas, proposições, corolários e lemas. Nesse capítulo destaca-se a determinação de todas as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}, \alpha \in [0, 1]$, sobre \mathbb{I}_n^* que incluem as ordens admissíveis dadas pelas combinações convexas $K_{\alpha,n}, K_{\beta,n}$ com $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$. Vale ressaltar que as abordagens propostas no Capítulo 4 estão baseadas diretamente nas contribuições apresentadas no Capítulo 3 e na MM \mathbb{L} -fuzzy. Assim, o desempenho das abordagens propostas, enquanto à detecção de bordas de imagens digitais, é apresentado no Capítulo 5. Além da aplicação em detecção de bordas, as abordagens propostas também foram utilizadas em segmentação de imagens digitais reconstruídas a partir de sinogramas ruidosos [41].

Destaca-se, por clareza para o leitor, que o objetivo geral dessa tese é: Desenvolver uma formalização teórica para a determinação das h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}, \alpha \in [0, 1]$, sobre \mathbb{I}_n^* , e com isso, desenvolver detectores de bordas de imagens digitais que considerem a inerente incerteza dessas imagens (mediante a utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy e das h -ordens determinadas). Em função desse objetivo geral, os objetivos específicos são:

- Estudar a erosão e a dilatação \mathbb{L} -fuzzy utilizando a implicação e conjunção \mathbb{L} -fuzzy, respectivamente. Em particular, dar as condições na erosão e na dilatação \mathbb{L} -fuzzy para determinar o gradiente morfológico.
- Estudar a MM \mathcal{L}_n -fuzzy e a MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy, pois as imagens digitais podem ser vistas como conjuntos \mathcal{L}_n -fuzzy e as imagens intervalares \mathbb{I}_n^* -fuzzy como conjuntos \mathbb{I}_n^* -fuzzy.
- Estabelecer as condições de extensão dos operadores de conjunção e implicação pseudo-representáveis sobre \mathbb{I}^* para operadores de conjunção e implicação pseudo-

representáveis sobre \mathbb{I}_L^* , sendo \mathbb{L} um reticulado limitado.

- Mostrar que as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, incluem às ordens admissíveis geradas pelas combinações convexas $K_{\alpha,n}$, $K_{\beta,n}$, $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$ sobre \mathbb{I}_n^* .
- Utilizar as h -ordens e a MM \mathbb{L} -fuzzy para determinar o gradiente morfológico de uma imagem digital intervalar.
- Propor e implementar diferentes abordagens para a detecção de bordas de imagens digitais, que baseiam-se na redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital, sendo uma a priori e a outra a posteriori da utilização da morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy.
- Analisar o desempenho dos detetores de bordas propostos, em relação ao detector de bordas baseado em MM \mathcal{L}_n -fuzzy e Canny, por meio de testes estatísticos.

A organização geral do presente documento adota a seguinte sequência: No Capítulo 1, apresenta-se uma revisão teórica dos conceitos matemáticos básicos utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão teórica da MM \mathbb{L} -fuzzy enfatizando na MM \mathcal{L}_n -fuzzy e MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Também, são estabelecidas as condições necessárias para estender as t-normas e as implicações pseudo-representáveis em \mathbb{I}^* . Esses operadores são utilizados para determinar os gradientes morfológicos apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 3, definem-se as h -ordens no conjunto finito \mathbb{I}_n^* . Este capítulo foca-se na determinação de todas as h -ordens dadas pela função $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, mostra-se h -ordens dadas pela função $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$ sobre \mathbb{I}_n^* que incluem as ordens admissíveis sobre (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) dadas pelas combinações convexas $K_{\alpha,n}$, $K_{\beta,n}$ com $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$, as quais também são determinadas. No Capítulo 4, apresenta-se o método de López-Molina et al. [33] que modela a incerteza de uma imagem digital em termos de uma imagem digital intervalar. Em seguida, com base no conceito de gradiente morfológico, definem-se diferentes gradientes morfológicos utilizando operadores de dilatação e erosão \mathbb{L} -fuzzy. Assim, baseadas nas imagens digitais intervalares, nos diferentes gradientes morfológicos introduzidos, e nas h -ordens expostas no Capítulo 3, apresentam-se as duas abordagens propostas. No Capítulo 5, apresentam-se a metodologia utilizada para os experimentos e os resultados experimentais da aplicação das abordagens propostas em detecção de bordas. Também, mediante o uso das medidas do FoM e do F-Measure, o desempenho dos detectores de bordas desenvolvidos foi comparado tanto qualitativa como quantitativamente com o desempenho dos detectores baseados em MM \mathcal{L}_n -fuzzy e o detector de bordas Canny.

Após os capítulos mencionados, na seção de considerações finais, as principais conclusões da tese são apresentadas juntamente com a sugestão de possíveis trabalhos futuros. Por fim, são incluídas as referências bibliográficas utilizadas e os anexos do

trabalho, que compreendem os fluxogramas das abordagens propostas, as tabelas contendo as h -ordens utilizadas para os experimentos computacionais e o relatório de trabalhos publicados e participação em eventos.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria de Reticulados e da Morfologia Matemática

1.1 Reticulados Completos

Nesta seção são apresentados conceitos básicos de reticulados que podem ser utilizados no desenvolvimento da morfologia matemática. Para uma abordagem mais completa são referenciados os trabalhos de Birkhoff [42], Grätzer [43] e Davey e Priestley [44].

Definição 1.1. [45] Uma *operação binária sobre um conjunto* \mathbb{L} é uma função $\star : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$, $(x, y) \mapsto x \star y$. A estrutura matemática (\mathbb{L}, \star) diz-se:

1. *Associativa*: Se $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;
2. *Comutativa*: Se $x \star y = y \star x$;
3. *Que possui elemento neutro*: Se existe um único elemento $e \in \mathbb{L}$ tal que $x \star e = e \star x = x$;

para todo x, y e $z \in \mathbb{L}$. O par (\mathbb{L}, \star) é chamado *monoide* se satisfaz os Itens 1. e 3., e um *monoide comutativo* se satisfaz o Item 2.

Definição 1.2. [42, 44] Dado um conjunto \mathbb{L} não vazio. Uma relação binária \leq sobre \mathbb{L} é chamada *ordem parcial* se satisfaz as seguintes condições:

1. *Reflexividade*: $x \leq x$;
2. *Antissimetria*: Se $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$;
3. *Transitividade*: Se $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

para todo x, y e $z \in \mathbb{L}$. O conjunto \mathbb{L} com a ordem parcial \leq é chamado *conjunto parcialmente ordenado* ou *poset* e é denotado por (\mathbb{L}, \leq) . Dois elementos x e y no poset (\mathbb{L}, \leq) são chamados *elementos comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Assim, se todo $x, y \in (\mathbb{L}, \leq)$ são comparáveis, diz-se que (\mathbb{L}, \leq) é um conjunto *totalmente ordenado* ou *cadeia*, e a ordem \leq é chamada ordem linear. Da relação de ordem parcial \leq sobre um conjunto \mathbb{L} deriva-se a *ordem estrita* $<$, isto é, $x < y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $x \neq y$.

Outra definição associada com \leq , é a relação chamada *ordem dual* \geq que cumpre $y \geq x$ se, e somente se, $x \leq y$ (isto é que \geq reverte a ordem \leq). Da ordem \geq deriva-se *ordem dual estrita* $>$ definida por $y > x$ se, e somente se, $y \geq x$ e $x \neq y$. Note que (\mathbb{L}, \geq) é também um poset, chamado *poset dual de* (\mathbb{L}, \leq) . A relação binária que satisfaz os itens 1. e 3. é chamada *pré-ordem* ou *quase-ordem* e um conjunto com essa pré-ordem é chamado *conjunto pré-ordenado* ou *proset*.

Seja (\mathbb{L}, \leq) um poset e $Y \subseteq \mathbb{L}$. Um elemento $l \in \mathbb{L}$ é chamado *limitante inferior* de Y se $l \leq y$ para todo $y \in Y$. O maior dos limitantes inferiores, em caso de existir, é chamado *ínfimo*. Similarmente, um elemento $u \in \mathbb{L}$ é chamado *limitante superior* de Y se $y \leq u$ para todo $y \in Y$. O menor dos limitantes superiores, em caso de existir, é chamado *supremo*. O símbolo $\bigwedge Y$ denota o ínfimo de Y e o símbolo $\bigvee Y$ denota o supremo de Y . Se $Y = \{x, y\}$, então o ínfimo de Y é denotado por $x \wedge y$ ao invés de $\bigwedge Y$ e o supremo de Y é denotado por $x \vee y$ ao invés de $\bigvee Y$. Note que, os operadores \wedge e \vee são operadores binários de $\mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$. Se $Y = \{y_j \mid j \in J\}$ para algum conjunto de índices J é utilizada a notação $\bigwedge_{j \in J} y_j$ ao invés de $\bigwedge Y$ e $\bigvee_{j \in J} y_j$ ao invés de $\bigvee Y$.

Definição 1.3. [42, 44] Um poset (\mathbb{L}, \leq) é chamado:

1. *Poset limitado* se \mathbb{L} possui ínfimo e supremo.
2. *Reticulado* se cada subconjunto finito não vazio de \mathbb{L} possui ínfimo e supremo em \mathbb{L} .
3. *Reticulado completo* se cada subconjunto não vazio de \mathbb{L} possui ínfimo e supremo em \mathbb{L} .

Se \mathbb{L} satisfaz os itens 1. e 2. é chamado *reticulado limitado*.

A partir de agora, \mathbb{L} denota ao poset (\mathbb{L}, \leq) . Além disso, se \mathbb{L} é um poset limitado denota-se $\bigwedge \mathbb{L} = 0_{\mathbb{L}}$ ao ínfimo de \mathbb{L} e $\bigvee \mathbb{L} = 1_{\mathbb{L}}$ ao supremo de \mathbb{L} .

Definição 1.4. [42] Um reticulado (reticulado limitado ou reticulado completo) (\mathbb{L}, \leq) dotado de uma operação binária $\star : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$ representado por $(\mathbb{L}, \leq, \star)$, é chamado *m-reticulado* (*m-reticulado limitado* ou *m-reticulado completo*) se

$$x \star (y \vee z) = (x \star y) \vee (x \star z) = (y \star x) \vee (z \star x), \quad (1.1)$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{L}$. Em particular, se \star é \wedge , então o m -reticulado $(\mathbb{L}, \leq, \wedge)$ é chamado *reticulado distributivo*. Um m -reticulado (ou m -reticulado limitado, ou m -reticulado completo) que é um monoide com respeito a \star é chamado *l -monoide* (ou *l -monoide limitado*, ou *l -monoide completo*).

Observação 1.1. Seja $(\mathbb{L}, \leq, \star)$ um m -reticulado e $(\mathbb{L}, \geq, \star)$ seu dual. Note que, o operador \star é distributivo com respeito a \wedge no reticulado $(\mathbb{L}, \geq, \star)$, isto é:

$$x \star (y \wedge z) = (x \star y) \wedge (x \star z) = (y \star x) \wedge (z \star x). \quad (1.2)$$

Isso não significa que $(\mathbb{L}, \geq, \star)$ seja um m -reticulado. Se $(\mathbb{L}, \leq, \star)$ e $(\mathbb{L}, \geq, \star)$ são m -reticulados. Então, pela dualidade entre eles, tem-se que \star é distributivo com respeito a \vee e \wedge em $(\mathbb{L}, \leq, \star)$, o que vale também para $(\mathbb{L}, \geq, \star)$. Observe que, no caso especial em que $(\mathbb{L}, \leq, \wedge)$ seja um reticulado distributivo, então $(\mathbb{L}, \geq, \wedge)$ será também um reticulado distributivo.

Em seguida são apresentados alguns exemplos de posets, conjuntos totalmente ordenados, reticulados, reticulados completos e l -monoides.

Exemplo 1.1. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de $X \neq \emptyset$. A relação de inclusão de conjuntos \subseteq é uma ordem parcial sobre $\mathcal{P}(X)$. Além disso, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um reticulado completo sendo seu ínfimo \emptyset e seu supremo X .

Exemplo 1.2. Qualquer cadeia é um reticulado distributivo com respeito às operações binárias \vee e \wedge . Além disso, qualquer cadeia limitada (ou cadeia completa) é um l -monoide limitado (l -monoide completo). Em particular, se a cadeia é finita, então ela é um reticulado completo, portanto um l -monoide completo [42, 44].

Exemplo 1.3. Para todo $x \geq 0$, tem-se que o intervalo fechado $[0, x]$ é um reticulado completo com a ordem usual herdada de \mathbb{R} . Em particular, se $x = 1$, o intervalo $[0, 1]$ é um reticulado completo.

Exemplo 1.4. As ordens lexicográfica-1 \leq_{lex1} e lexicográfica-2 \leq_{lex2} são ordens do produto cartesiano de dois conjuntos parcialmente ordenados (X_1, \leq_1) e (X_2, \leq_2) , as quais são definidas por:

$$(x_1, x_2) \leq_{lex1} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 <_1 y_1, \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \leq_1 y_2) \quad (1.3)$$

$$(x_1, x_2) \leq_{lex2} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_2 <_2 y_2, \text{ ou } (x_2 = y_2 \text{ e } x_1 \leq_2 y_1). \quad (1.4)$$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Assim $(X_1 \times X_2, \leq_{lex1})$ e $(X_1 \times X_2, \leq_{lex2})$ são conjuntos totalmente ordenados.

Exemplo 1.5. Seja \mathbb{L} um poset.

1. O produto $\mathbb{L}^n = \mathbb{L} \times \dots \times \mathbb{L}$ é um poset com a seguinte ordem parcial:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.5)$$

2. De forma geral o produto $\mathbb{L}^{m \times n}$ é um poset com a ordem parcial dada por:

$$S \leq T \Leftrightarrow s_{ij} \leq t_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.6)$$

Exemplo 1.6. A classe de funções $\mathbb{L}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{L}\}$ é um poset com a ordem parcial definida como:

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X, \quad (1.7)$$

onde $f, g \in \mathbb{L}^X$.

Exemplo 1.7. A classe dos gráficos de funções em \mathbb{L}^X , denotada por $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$, é um poset com a ordem parcial dada por:

$$A \leq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B \quad (1.8)$$

para todo $A, B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ e $\mu_A, \mu_B \in \mathbb{L}^X$, onde $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$. Se \mathbb{L} é um reticulado completo, então a classe $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ é um reticulado completo, e cada elemento de $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ é chamado *conjunto \mathbb{L} -fuzzy*. Em particular, a classe $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ é denotada por $\mathcal{F}(X)$ se $\mathbb{L} = [0, 1]$, e cada elemento desta classe é chamado *conjunto fuzzy*.

Se \mathbb{L} é um reticulado (ou reticulado completo), então \mathbb{L}^n , $\mathbb{L}^{m \times n}$, \mathbb{L}^X e $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ são reticulados (ou reticulados completos).

Definição 1.5. Seja (\mathbb{L}, \leq) um poset limitado e $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{L}$. Então, um *intervalo* $[\underline{x}, \bar{x}]$ de \mathbb{L} é definido por

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{y \in \mathbb{L} \mid \underline{x} \leq y \leq \bar{x}\}. \quad (1.9)$$

Exemplo 1.8. Seja (\mathbb{L}, \leq) um reticulado limitado. O conjunto dos *intervalos* de \mathbb{L} não vazios denotado por

$$\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^* = \{[\underline{x}, \bar{x}] \subseteq \mathbb{L} \mid \underline{x} \leq \bar{x}\}, \quad (1.10)$$

com a ordem parcial

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_2 [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y} \quad (1.11)$$

é também um reticulado limitado, onde $\bigwedge \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^* = [0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}]$ e $\bigvee \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^* = [1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}]$ os quais são denotados por $\mathbf{0}_{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*}$ e $\mathbf{1}_{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*}$ respectivamente.

Se \mathbb{L} é um reticulado completo, evidentemente, $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ é um reticulado completo com a ordem dada na Equação (1.11). Nesse caso, o ínfimo e o supremo de algum subconjunto arbitrário Y de $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ estão dados por

$$\bigwedge Y = \left[\bigwedge_{\mathbf{x} \in Y} \underline{x}, \bigwedge_{\mathbf{x} \in Y} \bar{x} \right] \text{ e } \bigvee Y = \left[\bigvee_{\mathbf{x} \in Y} \underline{x}, \bigvee_{\mathbf{x} \in Y} \bar{x} \right], \quad (1.12)$$

para todo $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. Em particular, tem-se os seguintes reticulados completos, para $n \in \mathbb{N}$,

1. $(\mathbb{I}_{[0,n]}^*, \leq_2)$ (reticulado completo dado pelo conjunto de subintervalos fechados do intervalo fechado $[0, n]$). Se $n = 1$, denota-se $(\mathbb{I}_{[0,1]}^*, \leq_2)$ por (\mathbb{I}^*, \leq_2) , sendo este reticulado completo base da morfologia matemática fuzzy intervalar [18, 19].
2. $(\mathbb{I}_{\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}}^*, \leq_2)$, sendo $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$ uma cadeia finita dado por $\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\right\}$.
3. $(\mathbb{I}_{\mathcal{L}_n}^*, \leq_2)$, sendo \mathcal{L}_n uma cadeia finita dado por $\{0, 1, \dots, n\}$. Neste caso, é utilizada a notação de \mathbb{I}_n^* ao invés de $\mathbb{I}_{\mathcal{L}_n}^*$.

Definição 1.6. Sejam (\mathbb{L}, \leq) e (\mathbb{L}, \preceq) posets. Diz-se que a ordem parcial \preceq refina a ordem parcial \leq se:

$$x \leq y \text{ implica } x \preceq y, \quad \forall x, y \in \mathbb{L}. \quad (1.13)$$

Definição 1.7. Seja (\mathbb{L}, \leq) um poset. Uma ordem \preceq sobre \mathbb{L} é chamada *ordem admissível* em \mathbb{L} se:

1. \preceq é uma ordem linear;
2. \preceq refina a ordem parcial \leq .

Observação 1.1. No caso particular que $(\mathbb{L}, \leq) = (\mathbb{I}^*, \leq_2)$, a Definição 1.7 torna-se a definição de ordem admissível introduzida por Bustince et al. em [46].

Exemplo 1.9. Como exemplos de ordens admissíveis em \mathbb{I}^* , têm-se

1. $[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{lex1} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow (\underline{x}, \bar{x}) \preceq_{lex1} (\underline{y}, \bar{y})$;
2. $[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{lex2} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow (\underline{x}, \bar{x}) \preceq_{lex2} (\underline{y}, \bar{y})$;
3. A ordem $\preceq_{X,Y}$ sobre \mathbb{I}^* introduzida por Xu e Yager [37]:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{X,Y} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} + \bar{x} < \underline{y} + \bar{y} \text{ ou } \underline{x} + \bar{x} = \underline{y} + \bar{y} \text{ e } \bar{x} - \underline{x} < \bar{y} - \underline{y}.$$

Definição 1.8. [42, 47] Seja $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ um reticulado e \mathbb{S} um subconjunto não vazio de \mathbb{L} . Então \mathbb{S} é um *subreticulado* de \mathbb{L} se:

$$x, y \in \mathbb{S} \text{ implica } x \vee_{\mathbb{L}} y \in \mathbb{S} \text{ e } x \wedge_{\mathbb{L}} y \in \mathbb{S}. \quad (1.14)$$

Em particular, se $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ é um reticulado completo, \mathbb{S} é chamado *subreticulado completo* se cada subconjunto de \mathbb{S} possui o ínfimo e o supremo de \mathbb{L} em \mathbb{S} .

Exemplo 1.10. Como exemplos de subreticulados completos com a ordem herdada de \mathbb{R} , para todo $n \in \mathbb{N}$, têm-se:

1. O subconjunto discreto finito $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}} = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\right\}$ de $[0, 1]$ com a ordem usual.
2. O subconjunto discreto finito $\mathcal{L}_n = \{0, 1, \dots, n\}$ de $[0, n]$ com a ordem usual. Sobre este subreticulado a morfologia matemática fuzzy discreta foi desenvolvida [16, 48].

1.2 Mapeamentos entre Posets

Definição 1.9. [44] Sejam $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leq_{\mathbb{M}})$ posets. A aplicação $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$, é chamada:

1. *Crescente ou isótona* se $x \leq_{\mathbb{L}} y$ implica $f(x) \leq_{\mathbb{M}} f(y)$. Nesse caso, diz-se que f *preserva a ordem*.
2. *Decrescente ou antitona* se $x \leq_{\mathbb{L}} y$ implica $f(y) \leq_{\mathbb{M}} f(x)$. Nesse caso, diz-se que f *reverte a ordem*.

Definição 1.10. [49] Seja (\mathbb{L}, \leq) um poset limitado onde \leq é uma ordem parcial. A aplicação $f : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}$, $n \geq 2$ é chamada *função de agregação sobre \mathbb{L}* se:

1. f preserva a ordem, isto é, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ se $x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
2. f satisfaz as condições de fronteira, isto é, $f(0_{\mathbb{L}}, \dots, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$ e $f(1_{\mathbb{L}}, \dots, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$.

Observação 1.2. No caso particular $\mathbb{L} = [0, 1]$ com a ordem usual de \mathbb{R} , a Definição 1.10 torna-se a definição clássica de função de agregação [46].

Exemplo 1.11. Como exemplo de função de agregação, tem-se a combinação convexa $K_{\alpha} : [0, n]^2 \rightarrow [0, n]$ dada por:

$$K_{\alpha}(x_1, x_2) = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad (1.15)$$

para todo $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.11. [44] Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} posets. A aplicação $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é chamada *isomorfismo de ordem* se é bijetiva e

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \quad (1.16)$$

para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Se \mathbb{L} e \mathbb{M} são reticulados (ou reticulados completos), então o isomorfismo de ordem f é chamado *isomorfismo de reticulados* (ou *isomorfismo de reticulados completos*). Se $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é um isomorfismo de ordem (ou isomorfismo de reticulados, ou isomorfismo de reticulados completos) diz-se que \mathbb{L} e \mathbb{M} são *isomorfos*, o que é denotado por $\mathbb{L} \simeq \mathbb{M}$.

Observação 1.3. Se \mathbb{L} é um reticulado limitado (ou reticulado completo) e \mathbb{M} um reticulado, e f um isomorfismo entre \mathbb{L} e \mathbb{M} . Então \mathbb{M} é um reticulado limitado (ou reticulado completo) e cumpre-se que $f(0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{M}}$ e $f(1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{M}}$.

Exemplo 1.12. Seja \mathbb{L} um reticulado completo. Então,

1. $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \simeq \mathbb{L}^X$, se $X \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \simeq \mathbb{L}^n$, se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;
3. $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \simeq \mathbb{L}^{n \times m}$, se $X = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$.

Exemplo 1.13. Este exemplo é amplamente utilizado neste trabalho, pois permite relacionar operações fuzzy entre reticulados diferentes.

1. Os reticulados completos $([0, 1], \leq)$ e $([0, n], \leq)$ com a ordem usual, são isomorfos mediante a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_n : [0, 1] &\rightarrow [0, n] \\ x &\rightarrow \varphi_n(x) = nx, \end{aligned} \tag{1.17}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Em particular, a aplicação φ_n pode ser restrita ao subreticulado completo finito $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$ de $[0, 1]$ que é isomorfo ao subreticulado completo \mathcal{L}_n de $[0, n]$.

2. Os reticulados completos (\mathbb{I}^*, \leq_2) e $(\mathbb{I}_{[0,n]}^*, \leq_2)$ (a ordem \leq_2 é definida na Equação (1.11)), são isomorfos por meio da aplicação $\Phi_n : \mathbb{I}^* \rightarrow \mathbb{I}_{[0,n]}^*$ definida por

$$\Phi_n([\underline{x}, \bar{x}]) := [\varphi_n(\underline{x}), \varphi_n(\bar{x})] = [n\underline{x}, n\bar{x}], \tag{1.18}$$

para todo $[\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{I}^*$. Note que, os reticulados completos $(\mathbb{I}_{\frac{1}{n}}^*, \leq_2)$ e (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) também são isomorfos por meio da aplicação Φ_n .

Antes de ver a seguinte proposição, lembre que a *soma de Minkowski* em $P(\mathbb{G})$, sendo $(\mathbb{G}, +)$ um grupo, é definida como

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}, \tag{1.19}$$

para todo $X, Y \subseteq \mathbb{G}$.

Proposição 1.1. Seja $(\mathbb{G}, +)$ um grupo e $z \in \mathbb{G}$. A aplicação $T_z : (\mathcal{P}(\mathbb{G}), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{G}), \subseteq)$ dada por $T_z(X) = X + \{z\}$ é um isomorfismo de reticulados completos, isto é, T_z é bijetiva e satisfaz

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X + \{z\} \subseteq Y + \{z\}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{G}). \tag{1.20}$$

Demonstração. Afirma-se que T_z é injetiva. Com efeito, sejam $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ e suponha que $X \neq Y$. Como $X \neq Y$, sem perda de generalidade, $\exists x \in X$ tal que $x \neq y, \forall y \in Y$. Logo, $x + z \neq y + z, \forall y \in Y$. Então $X + \{z\} \neq Y + \{z\}$, portanto $T_z(X) \neq T_z(Y)$. Por outro lado, T_z é sobrejetiva, já que $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathbb{G}), \exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ tal que $X = Y + \{-z\}$ sendo $-z$ o inverso de z .

Em seguida, será mostrado que a Equação (1.20) é verdadeira.

- i. (\Rightarrow) Seja $x \in X \subseteq Y$. Como $x \in X$ tem-se que $x + z \in X + \{z\}$, então $x + z \in Y + \{z\}$. Portanto, $X + \{z\} \subseteq Y + \{z\}$.
- ii. (\Leftarrow) Seja $x' \in X + \{z\} \subseteq Y + \{z\}$. Portanto, $\exists x \in X$ tal que $x' = x + z$. Como $X + \{z\} \subseteq Y + \{z\}$ tem-se que $x' = x + z \in Y + \{z\}$, então $x \in Y$. Assim, $X \subseteq Y$.

□

Como consequência da Proposição 1.1 tem-se o seguinte corolário:

Corolário 1.1. Seja $(\mathbb{G}, +)$ um grupo e $z \in \mathbb{G}$. A aplicação $T_z : (\mathcal{P}(\mathbb{G}), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{G}), \subseteq)$ dada por $T_z(X) = X + \{z\}$, satisfaz a seguinte relação:

$$X \subset Y \Leftrightarrow X + \{z\} \subset Y + \{z\}. \quad (1.21)$$

Demonstração. Pela Proposição 1.1 a Equação (1.20) é satisfeita, portanto basta mostrar que

$$X \neq Y \Leftrightarrow X + \{z\} \neq Y + \{z\}. \quad (1.22)$$

- i. (\Rightarrow) Segue-se da injetividade de T_z .
- ii. (\Leftarrow) Pela Proposição 1.1, $T_z^{-1} = T_{-z}$ é bijetiva. Assim, a demonstração segue-se da injetividade de T_z^{-1} .

Portanto, das Equações (1.20) e (1.22), tem-se que $X \subset Y \Leftrightarrow X + \{z\} \subset Y + \{z\}$.

□

1.3 Morfologia Matemática em Reticulados Completos

Na MM são observadas duas perspectivas não necessariamente excludentes:

1. A *MM no sentido geométrico e topológico*, baseada nos operadores básicos de erosão e dilatação morfológica (entre outros) utilizados para extrair informação da imagem. Esses operadores são geralmente associados a um elemento estruturante S [25, 26, 50].
2. A *MM no sentido algébrico*, usualmente definida sobre reticulados completos tendo como base os operadores de erosão e dilatação [29, 51–53].

Definição 1.12. [54] Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Um operador $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ que comuta com a operação do ínfimo para cada subconjunto $Y \subseteq \mathbb{M}$, isto é,

$$\varepsilon \left(\bigwedge Y \right) = \bigwedge_{y \in Y} \varepsilon(y), \quad (1.23)$$

é chamado *erosão* (algébrica). Um operador $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ que comuta com a operação do supremo para cada subconjunto $Y \subseteq \mathbb{M}$, isto é,

$$\delta \left(\bigvee Y \right) = \bigvee_{y \in Y} \delta(y), \quad (1.24)$$

é chamado *dilatação* (algébrica).

Note que, tanto a erosão quanto a dilatação (desde um ponto de vista algébrico) são operadores crescentes. Estes operadores estão com frequência relacionados em termos de adjunção, o que permite garantir que um par de operadores adjuntos é necessariamente formado por uma única dilatação e uma única erosão. Entre os autores que focam nessa abordagem encontram-se Heijmans e Ronse [51, 54].

Definição 1.13. [54] Considere os operadores $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ onde \mathbb{L} e \mathbb{M} são reticulados completos. O par (ε, δ) forma uma adjunção se ε e δ são adjuntos, isto é,

$$\delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y), \quad (1.25)$$

para cada $x \in \mathbb{L}$ e $y \in \mathbb{M}$.

Proposição 1.2. [54] Seja \mathbb{L} um reticulado completo e $\varepsilon, \delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$.

1. Se (ε, δ) é uma adjunção, então δ é uma dilatação e ε é uma erosão.
2. Para cada dilatação δ , existe uma única erosão ε tal que (ε, δ) é uma adjunção. A erosão adjunta é dada por:

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq y\}, \quad (1.26)$$

para todo $y \in \mathbb{L}$.

3. Para cada erosão ε , existe uma única dilatação δ tal que (ε, δ) é uma adjunção. A dilatação adjunta é dada por:

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{L} : \varepsilon(y) \geq x\}, \quad (1.27)$$

para todo $x \in \mathbb{L}$.

Neste capítulo foram apresentados conceitos básicos sobre posets que incluem reticulados, reticulados completos e mapeamento entre posets. Tais conceitos foram utilizados na morfologia matemática em reticulados completos, onde, observaram-se duas perspectivas não necessariamente excludentes.

No seguinte capítulo será estudada a morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy sobre reticulados completos baseada no conceito de função estruturante, dando especial atenção à morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy quando $\mathbb{L} = \mathbb{I}_n^*$. Para isso, será preciso relacionar operadores fuzzy entre diferentes reticulados completos por meio de isomorfismos, particularmente $\mathbb{I}_{\frac{1}{n}}^*$ e \mathbb{I}_n^* por meio de Φ_n . Dessa forma, a morfologia matemática \mathbb{I}_n^* -fuzzy servirá como ferramenta para a análise e o processamento de imagens digitais intervalares ($A \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(\mathbb{Z}^2)$).

Capítulo 2

Teoria de Conjuntos \mathbb{L} -Fuzzy

Neste capítulo, são revisados alguns conceitos da teoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy como base da morfologia matemática (MM) \mathbb{L} -fuzzy [19]. A MM \mathbb{L} -fuzzy inclui os conceitos de medidas de inclusão e intersecção empregadas para definir os operadores básicos de erosão e dilatação \mathbb{L} -fuzzy. Há um especial interesse em definir esses operadores no reticulado completo discreto \mathbb{I}_n^* , pois, a incerteza das imagens digitais pode ser modelada em termos de imagens digitais intervalares $A_{IV} \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(\mathbb{Z}^2)$ [33]. Salienta-se que os operadores de erosão e dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy, utilizados para o processamento das imagens digitais intervalares, estão baseados em operadores de implicação e conjunção \mathbb{I}_n^* -fuzzy, respectivamente. Assim, são apresentadas algumas proposições (Proposições 2.1, 2.2 e 2.3) as quais permitem relacionar os operadores fuzzy entre diferentes reticulados completos. Essas relações, proporcionam as ferramentas necessárias para construir operadores de conjunção e implicação sobre o reticulado completo \mathbb{I}_n^* a partir de operadores conhecidos. Vale ressaltar que as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 são casos particulares das extensões das t-normas e implicações definidas sobre reticulados limitados via retrações, introduzidas por Palmeira et al. [55, 56].

Também são definidos operadores \mathbb{L} -fuzzy intervalares como extensões dos operadores fuzzy intervalares. Na literatura encontram-se extensões de operadores representáveis sobre reticulados completos, ainda mais sobre reticulados limitados [19, 57]. Neste trabalho será utilizada as extensões das conjunções e implicações pseudo-representáveis sobre \mathbb{I}^* [19, 58] para conjunções pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representáveis e implicações pseudo- $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -representáveis sobre o reticulado limitado $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$, sendo estes operadores parte da contribuição do trabalho e a base para determinar a erosão e a dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy.

2.1 Operadores \mathbb{L} -Fuzzy

A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida por Zadeh [59] em 1965 como uma extensão da teoria clássica de conjuntos. Os conjuntos fuzzy têm a característica de que cada elemento do conjunto possui um grau de pertinência no intervalo fechado $[0, 1]$.

Como uma extensão da teoria dos conjuntos fuzzy encontra-se a teoria dos conjuntos \mathbb{L} -fuzzy introduzida por Goguen [60], de acordo com a seguinte definição:

Definição 2.1. [60] Seja X um conjunto não vazio e \mathbb{L} um reticulado completo. Define-se um *conjunto \mathbb{L} -fuzzy A em X* como: $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X \text{ e } \mu_A : X \rightarrow \mathbb{L}\}$, onde μ_A é conhecida como *função de pertinência*.

Existe um isomorfismo ξ entre a classe dos conjuntos \mathbb{L} -fuzzy $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ e a classe das funções \mathbb{L}^X , tal que $\xi(A) = \mu_A$ (ver Exemplos 1.6 e 1.7). Assim, é possível identificar um conjunto \mathbb{L} -fuzzy A por sua função de pertinência μ_A . Pelo exposto, a partir de agora, um conjunto \mathbb{L} -fuzzy será tratado como uma aplicação $A : X \rightarrow \mathbb{L}$. Em particular, se o reticulado completo $\mathbb{L} = [0, 1]$ e $x \in X$, $A(x)$ indica o grau de pertinência de x no *conjunto fuzzy A* .

Os operadores lógicos fuzzy são extensões dos operadores lógicos booleanos. Estes operadores lógicos fuzzy associam elementos de $[0, 1]^2$ com elementos de $[0, 1]$. Como exemplos disso, têm-se a conjunção fuzzy, a implicação fuzzy, etc. Os operadores lógicos \mathbb{L} -fuzzy generalizam os operadores lógicos fuzzy. Alguns operadores lógicos \mathbb{L} -fuzzy (ou simplesmente operadores \mathbb{L} -fuzzy) são definidos a seguir:

Definição 2.2. [61] Seja \mathbb{L} um reticulado limitado. Uma aplicação $\mathcal{C} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ crescente é chamada *conjunção fuzzy em \mathbb{L} ou conjunção \mathbb{L} -fuzzy*, se $\mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$ e $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$ (condições de fronteira). Em particular, se a aplicação \mathcal{C} é comutativa, associativa e satisfaz $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) = x$ para todo $x \in \mathbb{L}$, então ela é chamada *norma triangular ou t-norma em \mathbb{L}* .

No caso particular que $\mathbb{L} = [0, 1]$, a Definição 2.2 torna-se a definição clássica de conjunções fuzzy e na sequência de t-normas fuzzy.

Exemplo 2.1. Exemplos de t-normas e conjunções fuzzy.

$$T_M(x, y) = x \wedge y \quad \text{Mínimo} \quad (2.1)$$

$$T_{LK}(x, y) = 0 \vee (x + y - 1) \quad \text{Łukasiewicz} \quad (2.2)$$

$$T_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x + y \leq 1 \\ x \wedge y & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{Mínimo Nilpotente} \quad (2.3)$$

$$T_P(x, y) = xy \quad \text{Produto.} \quad (2.4)$$

Definição 2.3. [62] Seja \mathbb{L} um reticulado limitado. Uma aplicação $\mathcal{I} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento é chamada *implicação fuzzy em \mathbb{L} ou implicação \mathbb{L} -fuzzy* se $\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$ e $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$ (condições de fronteira). Em particular, se a aplicação \mathcal{I} satisfaz $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{L}$, então ela é chamada *implicação de fronteira em \mathbb{L}* .

No caso particular que $\mathbb{L} = [0, 1]$, a Definição 2.3 torna-se a definição clássica de implicações fuzzy e na sequência de implicações de fronteira fuzzy.

Exemplo 2.2. Exemplos de implicações fuzzy.

$$I_{LK}(x, y) = 1 \wedge (y - x + 1), \quad \text{Łukasiewicz} \quad (2.5)$$

$$I_{KD}(x, y) = (1 - x) \vee y, \quad \text{Kleene-Dienes} \quad (2.6)$$

$$I_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ (1 - x) \vee y & x > y \end{cases} \quad \text{Fodor} \quad (2.7)$$

$$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ y & x > y \end{cases} \quad \text{Gödel.} \quad (2.8)$$

Outros exemplos de conjunções incluindo t-normas e implicações de fronteira fuzzy podem ser encontrados em [63–65].

Definição 2.4. [19] Seja \mathbb{L} um reticulado completo. A implicação \mathcal{I} e a conjunção \mathcal{C} sobre \mathbb{L} formam uma adjunção se $\mathcal{I}(z, \cdot)$ e $\mathcal{C}(z, \cdot)$ formam uma adjunção para todo $z \in \mathbb{L}$, isto é,

$$\mathcal{C}(z, x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \mathcal{I}(z, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{L}$.

Note que se a implicação \mathcal{I} e a conjunção \mathcal{C} são adjuntos sobre \mathbb{L} , então $\mathcal{C}(z, \cdot)$ é uma dilatação e $\mathcal{I}(z, \cdot)$ é uma erosão, ambos desde o ponto de vista algébrico. Observe também que pode-se empregar a Equação (1.26) para formar uma adjunção. Isto significa que uma conjunção \mathcal{C} sobre o reticulado completo \mathbb{L} induz uma implicação \mathbb{L} -fuzzy $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ chamada *R-implicação de \mathcal{C} sobre \mathbb{L}* , essa adjunção é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.1. [19] Sejam \mathbb{L} um reticulado completo, \mathcal{C} uma conjunção \mathbb{L} -fuzzy e $\mathcal{I}_{\mathcal{C}} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ um operador definido por:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(x, y) = \bigvee \{z \in \mathbb{L} : \mathcal{C}(x, z) \leq y\}. \quad (2.9)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

1. A aplicação $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento. Além disso, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ satisfaz

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}} \quad (2.10)$$

2. A aplicação $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ representa uma implicação em \mathbb{L} se, e somente se, $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) > 0_{\mathbb{L}}$ para cada $x \in \mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{L}}\}$. Nesse caso, a implicação $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ é chamada *R-implicação de \mathcal{C}* .

Corolário 2.1. Seja \mathbb{L} um reticulado completo. Se $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ é uma R-implicação de uma t-norma \mathcal{T} em \mathbb{L} então $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ é uma implicação de fronteira.

Demonstração. Seja a R-implicação $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ dada por:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) = \bigvee \{z \in \mathbb{L} : \mathcal{T}(x, z) \leq y\}. \quad (2.11)$$

Desde que \mathcal{T} é uma t-norma em \mathbb{L} , $\mathcal{T}(1_{\mathbb{L}}, y) = y, \forall y \in \mathbb{L}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_{\mathbb{L}}, y) &= \bigvee \{z \in \mathbb{L} : \mathcal{T}(1_{\mathbb{L}}, z) \leq y\}, \\ &= \bigvee \{z \in \mathbb{L} : z \leq y\}, \\ &= y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Portanto, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ é uma implicação de fronteira. □

2.2 Relações entre Operadores \mathbb{L} -Fuzzy por Meio de Isomorfismos

Esta seção será focada em relacionar operadores \mathbb{L} -fuzzy conhecidos por meio de isomorfismos. Em particular, serão relacionados os operadores de conjunção e implicação $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$ -fuzzy com os operadores de conjunção e implicação \mathcal{L}_n -fuzzy por meio de um isomorfismo. Isto com o fim de determinar a erosão e dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy de uma imagem digital em tons de cinza. Lembre que os valores das imagens digitais em tons de cinza pertencem à cadeia finita \mathcal{L}_n .

Sejam $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leq_{\mathbb{M}})$ reticulados limitados (reticulados completos) e suponham-se que existe um isomorfismo $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$. Por meio desse isomorfismo são construídos alguns operadores \mathbb{L} -fuzzy (OF). Em particular, têm-se as conjunções e implicações no reticulado completo \mathbb{M} (\mathbb{L}) a partir de conjunções e implicações fuzzy no reticulados limitado (reticulado completo) \mathbb{L} (\mathbb{M}). Esta construção pode ser vista no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} \times \mathbb{L} & \xrightarrow{OF} & \mathbb{L} \\ (\varphi^{-1}, \varphi^{-1}) \uparrow \downarrow (\varphi, \varphi) & & \varphi \downarrow \uparrow \varphi^{-1} \\ \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{OF^\varphi} & \mathbb{M}. \end{array} \quad (2.13)$$

Dado um operador \mathbb{L} -fuzzy OF sobre o reticulado completo \mathbb{L} , é definido OF^φ sobre o reticulado completo \mathbb{M} da seguinte forma:

$$OF^\varphi(x, y) = \varphi(OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))), \quad (2.14)$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$.

Equivalentemente, tem-se:

$$OF(x, y) = \varphi^{-1}(OF^\varphi(\varphi(x), \varphi(y))), \quad (2.15)$$

para todo $x, y \in \mathbb{L}$.

Proposição 2.1. Seja $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ um isomorfismo entre reticulados limitados (reticulados completos), e OF^φ e OF aplicações definidas nas Equações (2.14) e (2.15) respectivamente. Então cumpre-se que,

1. OF^φ é crescente se, e somente se, OF é crescente.
2. OF^φ é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento se, e somente se, OF é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento.
3. OF^φ é comutativo se, e somente se, OF é comutativo.
4. OF^φ é associativo se, e somente se, OF é associativo.
5. $OF^\varphi(1_{\mathbb{M}}, x) = x, x \in \mathbb{M}$ se, e somente se, $OF(1_{\mathbb{L}}, x') = x', x' = \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{L}$.

Demonstração. Seja φ um isomorfismo entre \mathbb{L} e \mathbb{M} , e φ^{-1} sua inversa.

1. OF^φ é crescente

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow OF^\varphi(x, y) \leq_{\mathbb{M}} OF^\varphi(z, w), \forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{M}^2, \text{ tais que } (x, y) \leq (z, w) \\
&\Leftrightarrow OF^\varphi(x, y) \leq_{\mathbb{M}} OF^\varphi(z, w), \forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{M}^2, \text{ tais que } x \leq_{\mathbb{M}} z \text{ e } y \leq_{\mathbb{M}} w \\
&\Leftrightarrow OF^\varphi(x, y) \leq_{\mathbb{M}} OF^\varphi(z, w), \forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{M}^2, \\
&\quad \text{tais que } x \leq_{\mathbb{M}} z \text{ e } y \leq_{\mathbb{M}} w \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(z) \text{ e } \varphi^{-1}(y) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(w) \\
&\Leftrightarrow \varphi^{-1}(OF^\varphi(x, y)) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(OF^\varphi(z, w)), \forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{M}^2, \\
&\quad \text{tais que } \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(z) \text{ e } \varphi^{-1}(y) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(w) \\
&\Leftrightarrow OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \leq_{\mathbb{L}} OF(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)), \\
&\quad \forall (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)), (\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)) \in \mathbb{L}^2, \\
&\quad \text{tais que } (x, y), (z, w) \in \mathbb{M}^2 \text{ e } (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \leq (\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)) \\
&\Leftrightarrow OF(x', y') \leq_{\mathbb{L}} OF(z', w'), \forall (x', y'), (z', w') \in \mathbb{L}^2, \text{ tais que } (x', y') \leq (z', w'), \\
&\Leftrightarrow OF \text{ é crescente.}
\end{aligned}$$

2. OF^φ é decrescente no primeiro argumento

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow OF^\varphi(y, z) \leq_{\mathbb{M}} OF^\varphi(x, z), \forall (y, z), (x, z) \in \mathbb{M}^2, \text{ tais que } x \leq_{\mathbb{M}} y \\
&\Leftrightarrow OF^\varphi(y, z) \leq_{\mathbb{M}} OF^\varphi(x, z), \forall (y, z), (x, z) \in \mathbb{M}^2, \\
&\quad \text{tais que } x \leq_{\mathbb{M}} y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow \varphi^{-1}(OF^\varphi(y, z)) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(OF^\varphi(x, z)), \forall (y, z), (x, z) \in \mathbb{M}^2, \\
&\quad \text{tais que } \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) \leq_{\mathbb{L}} OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(z)), \\
&\quad \forall (\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)), (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(z)) \in \mathbb{L}^2, \\
&\quad \text{tais que } (y, z), (x, z) \in \mathbb{M}^2 \text{ e } \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow OF(y', z') \leq_{\mathbb{L}} OF(x', z'), \forall (y', z'), (x', z') \in \mathbb{L}^2, \text{ tais que } x' \leq_{\mathbb{L}} y' \\
&\Leftrightarrow OF \text{ é decrescente no primeiro argumento.}
\end{aligned}$$

3. OF^φ é comutativo

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow OF^\varphi(x, y) = OF^\varphi(y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{M}^2 \\
&\Leftrightarrow \varphi(OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))) = \varphi(OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(x))), \forall (x, y) \in \mathbb{M}^2 \\
&\Leftrightarrow OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(x)), \forall (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \in \mathbb{L}^2, (x, y) \in \mathbb{M}^2 \\
&\Leftrightarrow OF(x', y') = OF(y', x'), \forall (x', y') \in \mathbb{L}^2 \\
&\Leftrightarrow OF \text{ é comutativo.}
\end{aligned}$$

4. OF^φ é associativo

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow OF^\varphi(OF^\varphi(x, y), z) = OF^\varphi(x, OF^\varphi(y, z)), \forall x, y, z \in \mathbb{M} \\
&\Leftrightarrow OF^\varphi(\varphi(OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))), z) = OF^\varphi(x, \varphi(OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)))), \\
&\quad \forall x, y, z \in \mathbb{M} \\
&\Leftrightarrow \varphi(OF(OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)), \varphi^{-1}(z))) = \varphi(OF(\varphi^{-1}(x), OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)))), \\
&\quad \forall \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z) \in \mathbb{L}, x, y, z \in \mathbb{M} \\
&\Leftrightarrow OF(OF(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)), \varphi^{-1}(z)) = OF(\varphi^{-1}(x), OF(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z))), \\
&\quad \forall \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z) \in \mathbb{L}, x, y, z \in \mathbb{M} \\
&\Leftrightarrow OF(OF(x', y'), z') = OF(x', OF(y', z')), \forall x', y', z' \in \mathbb{L} \\
&\Leftrightarrow OF \text{ é associativo.}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
OF^\varphi(1_{\mathbb{M}}, x) = x, \forall x \in \mathbb{M} &\Leftrightarrow \varphi(OF(\varphi^{-1}(1_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(x))) = x, \forall x \in \mathbb{M} \\
&\Leftrightarrow OF(\varphi^{-1}(1_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x), \forall \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{L} \\
&\Leftrightarrow OF(1_{\mathbb{L}}, x') = x', \forall x' \in \mathbb{L}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados limitados (reticulados completos), \mathcal{C}^φ e \mathcal{C} aplicações definidas nas Equações (2.14) e (2.15) respectivamente, e $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ um isomorfismo. Então, \mathcal{C}^φ é uma conjunção \mathbb{M} -fuzzy se, e somente se, \mathcal{C} é uma conjunção \mathbb{L} -fuzzy. Em particular, \mathcal{C}^φ é uma t-norma \mathbb{M} -fuzzy se, e somente se, \mathcal{C} é uma t-norma \mathbb{L} -fuzzy.

Demonstração. Pelo Item 1. da Proposição 2.1, \mathcal{C}^φ é crescente se, e somente se, \mathcal{C} é crescente. Pelo Item 5. da mesma proposição para $x \in \{0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}\}$, e de

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\varphi(0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow \mathcal{C}(\varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(1_{\mathbb{M}})) = \mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}} \\ \mathcal{C}^\varphi(0_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow \mathcal{C}(\varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}})) = \mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}, \end{aligned}$$

\mathcal{C}^φ cumpre as condições de fronteira se, e somente se, \mathcal{C} cumpre as condições de fronteira. Portanto, \mathcal{C}^φ é uma conjunção \mathbb{M} -fuzzy se, somente se, \mathcal{C} é uma conjunção \mathbb{L} -fuzzy. Agora, pelos Itens 3. e 4. tem-se que, \mathcal{C}^φ é comutativo e associativo se, e somente se, \mathcal{C} é comutativo e associativo. Portanto, pelo antes mencionado, \mathcal{C}^φ é uma t-norma \mathbb{M} -fuzzy se, somente se, \mathcal{C} é uma t-norma \mathbb{L} -fuzzy. Além disso, note que dos Itens 3. e 5. para cada $x \in \mathbb{M}$, cumpre-se que, $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{M}}) = x$ se, e somente se, $\mathcal{C}(\varphi^{-1}(x), 1_{\mathbb{L}}) = \varphi^{-1}(x)$.

□

Exemplo 2.3. São construídos alguns exemplos de t-normas no reticulado completo $[0, n]$ a partir de t-normas no reticulado completo $[0, 1]$ por meio do isomorfismo φ_n definido no Item 1. do Exemplo 1.13.

1. Se a t-norma é a conjunção do mínimo T_M definida na Equação (2.1), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} T_M^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(T_M(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= n \left(\frac{x}{n} \wedge \frac{y}{n} \right) \\ &= x \wedge y. \end{aligned} \tag{2.16}$$

2. Se a t-norma é a conjunção de Łukasiewicz T_{LK} definida na Equação (2.2), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} T_{LK}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(T_{LK}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= n \left(0 \vee \left(\frac{x}{n} + \frac{y}{n} - 1 \right) \right) \\ &= 0 \vee (x + y - n). \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Se a t-norma é a conjunção do mínimo nilpotente T_{nM} definida na Equação (2.3), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} T_{nM}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(T_{nM}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x + y \leq n, \\ x \wedge y & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Proposição 2.3. Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados limitados (reticulados completos), \mathcal{I}^φ e \mathcal{I} aplicações definidas nas Equações (2.14) e (2.15), e $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ um isomorfismo. Então, \mathcal{I}^φ é uma implicação \mathbb{M} -fuzzy se, e somente se, \mathcal{I} é uma implicação \mathbb{L} -fuzzy. Em particular, \mathcal{I}^φ é uma implicação de fronteira \mathbb{M} -fuzzy se, e somente se, \mathcal{I} é uma implicação de fronteira \mathbb{L} -fuzzy.

Demonstração. Pelo Item 2. da Proposição 2.1, \mathcal{I}^φ é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento se, e somente se, \mathcal{I} é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento. E pelo Item 5. para $x \in \{0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}\}$, tem-se

$$\mathcal{I}^\varphi(1_{\mathbb{M}}, x) = x \Leftrightarrow \mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x). \quad (2.19)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\varphi(0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}) = 1_{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow \mathcal{I}(\varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(1_{\mathbb{M}})) = \mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}} \\ \mathcal{I}^\varphi(0_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}}) = 1_{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow \mathcal{I}(\varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}}), \varphi^{-1}(0_{\mathbb{M}})) = \mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pelas Equações (2.19) e (2.20), \mathcal{I}^φ cumpre as condições de fronteira se, e somente se, \mathcal{I} cumpre as condições de fronteira. Portanto, pelo exposto, \mathcal{I}^φ é uma implicação \mathbb{M} -fuzzy se, e somente se, \mathcal{I} é uma implicação \mathbb{L} -fuzzy. De isso, e pelo Item 5. da Proposição 2.1, \mathcal{I}^φ é uma implicação de fronteira \mathbb{M} -fuzzy se, somente se, \mathcal{I} é uma implicação de fronteira \mathbb{L} -fuzzy.

□

Exemplo 2.4. São construídos alguns exemplos de implicações no reticulado completo $[0, n]$ a partir de t-normas no reticulado completo $[0, 1]$ por meio do isomorfismo φ_n definido no Item 1. do Exemplo 1.13.

1. Se a implicação fronteira é a implicação de Łukasiewicz I_{LK} definida na Equação (2.2), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{LK}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(I_{LK}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= n \left(1 \wedge \left(\frac{y}{n} - \frac{x}{n} + 1 \right) \right) \\ &= n \wedge (y - x + n). \end{aligned} \quad (2.21)$$

2. Se a implicação fronteira é a implicação de Kleene-Dienes I_{KD} definida na Equação (2.6), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{KD}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(I_{KD}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= n \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right) \vee \frac{y}{n} \right) \\ &= (n - x) \vee y. \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. Se a implicação fronteira é a implicação de Fodor I_{FD} definida na Equação (2.7), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{FD}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(I_{FD}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) = \\ &= \begin{cases} n & \text{se } x \leq y, \\ (n - x) \vee y & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

4. Se a implicação fronteira é a implicação de Gödel I_{GD} definida na Equação (2.8), para todo $x, y \in [0, n]$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{GD}^{\varphi_n}(x, y) &= \varphi_n(I_{GD}(\varphi_n^{-1}(x), \varphi_n^{-1}(y))) \\ &= \begin{cases} n & \text{se } x \leq y, \\ y & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Corolário 2.2. Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos, e $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ um isomorfismo de reticulados completos. A implicação \mathcal{I}^φ e a conjunção \mathcal{C}^φ em \mathbb{M} formam uma adjunção se, e somente se, a implicação \mathcal{I} e a conjunção \mathcal{C} em \mathbb{L} formam uma adjunção.

Demonstração. Como \mathcal{I}^φ e \mathcal{C}^φ são adjuntos em \mathbb{M} , significa que

$$\mathcal{C}^\varphi(z, x) \leq_{\mathbb{M}} y \Leftrightarrow x \leq_{\mathbb{M}} \mathcal{I}^\varphi(z, x), \forall x, y, z \in \mathbb{M}. \quad (2.25)$$

A Equação (2.25), pela Equação (2.14), é igual a

$$\varphi(\mathcal{C}(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(x))) \leq_{\mathbb{M}} y \Leftrightarrow x \leq_{\mathbb{M}} \varphi(\mathcal{I}(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(x))), \forall x, y, z \in \mathbb{M}. \quad (2.26)$$

Pelo isomorfismo φ , a Equação (2.26) é equivalente a

$$\mathcal{C}(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(x)) \leq_{\mathbb{L}} \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{I}(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(y)), \forall \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z) \in \mathbb{L}. \quad (2.27)$$

Assim, a Equação (2.27) é igual a

$$\mathcal{C}(z', x') \leq_{\mathbb{L}} y' \Leftrightarrow x' \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{I}(z', y'), \forall x', y', z' \in \mathbb{L}, \quad (2.28)$$

isto significa que \mathcal{C} e \mathcal{I} são adjuntos. Assim, das Equações (2.25) e (2.28), \mathcal{I}^φ e \mathcal{C}^φ são adjuntos em \mathbb{M} se, e somente se, \mathcal{I} e \mathcal{C} são adjuntos em \mathbb{L} .

□

Exemplo 2.5. Entre as adjunções sobre o reticulado completo $[0, n]$ geradas por meio da R-implicação, encontram-se os pares: $(T_{LK}^{\varphi_n}, I_{LK}^{\varphi_n})$, $(T_{nM}^{\varphi_n}, I_{FD}^{\varphi_n})$, etc.

Os operadores fuzzy em \mathcal{L}_n utilizados neste trabalho estão baseados nos operadores apresentados nos Exemplos 2.3 e 2.4. Note que, esses operadores são gerados pelo isomorfismo $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [0, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, são fechados no subreticulado completo $\mathcal{L}_n = \{0, 1, \dots, n\}$ do reticulado completo $[0, n]$. Alguns desses operadores no subreticulado completo \mathcal{L}_n já foram utilizados nos trabalhos de González-Hidalgo et al. [16, 48].

Observação 2.1. Pelo exposto nesta seção, a partir de agora serão utilizados os operadores fuzzy na sua forma discreta, isto é, operadores definidos sobre o subreticulado completo \mathcal{L}_n de $[0, n]$. Para simplificar a notação, a conjunção \mathcal{L}_n -fuzzy (t-norma \mathcal{L}_n -fuzzy) gerada por meio de φ_n será denotada por \mathcal{C}^n (\mathcal{T}^n) ao invés de \mathcal{C}^{φ_n} (\mathcal{T}^{φ_n}), e a implicação \mathcal{L}_n -fuzzy gerada por meio de φ_n será denotada por \mathcal{I}^n ao invés de \mathcal{I}^{φ_n} .

Observação 2.2. Como comentado no início deste capítulo, as Proposições 2.2 e 2.4 são casos particulares das extensões das t-normas e as implicações definidas sobre reticulados limitados via retrações [55, 56], neste caso o retrator seria o isomorfismo φ_n .

2.3 Operadores \mathbb{L} -Fuzzy Intervalares

Na literatura, são encontrados trabalhos de extensão dos operadores lógicos fuzzy intervalares, especialmente operadores lógicos representáveis, definidos inicialmente no reticulado completo \mathbb{I}^* e estendidos para $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, sendo \mathbb{L} um reticulado limitado [57, 62]. Particularmente, neste trabalho, como parte da contribuição teórica, são estendidos os operadores de conjunções pseudo- \mathcal{C} -representáveis e implicações pseudo- \mathcal{I} -representáveis em \mathbb{I}^* a conjunções pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representáveis e implicações pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representáveis sobre $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, sendo \mathbb{L} um reticulado limitado. Nesse contexto, as definições e os teoremas apresentados a seguir, são extensões das definições e teoremas apresentadas por Deschrijver et al. [58], Sussner et al. [19], Mélangé et al. [31], Nachtegael et al. [18]. A escolha das definições e teoremas foi de acordo com o objetivo do trabalho.

Seja (\mathbb{L}, \leq) um reticulado limitado (reticulado completo) e $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ o conjunto de subintervalos fechados não vazios de \mathbb{L} . Define-se um *conjunto \mathbb{L} -fuzzy intervalar* A da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^* \\ x &\mapsto A(x) = [\underline{A}(x), \overline{A}(x)], \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Se $\underline{A}(x) = \overline{A}(x)$, o conjunto \mathbb{L} -fuzzy intervalar torna-se num conjunto \mathbb{L} -fuzzy. Neste trabalho, os intervalos $[\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ são denotados por \mathbf{x} .

Definição 2.5. [57] Seja \mathbb{L} um reticulado limitado (reticulado completo), e sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' conjunções \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. A aplicação $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^r$ definida por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})], \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*, \quad (2.29)$$

é chamada $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representável.

Teorema 2.2. [57] Seja \mathbb{L} um reticulado limitado, e sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' conjunções \mathbb{L} -fuzzy. A aplicação $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^r$ dada pela Equação (2.29) é uma conjunção em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ se $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Em particular, se \mathcal{C} e \mathcal{C}' são t -normas \mathbb{L} -fuzzy, então $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^r$ é uma t -norma em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

Definição 2.6. Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' conjunções \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Define-se uma conjunção pessimista $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p$ com representantes \mathcal{C} e \mathcal{C}' , por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y})], \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.30)$$

E define-se uma conjunção otimista $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^o$ com representantes \mathcal{C} e \mathcal{C}' por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})], \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.31)$$

Teorema 2.3. Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' conjunções \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. As aplicações $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p, \mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^o$ definidas nas Equações (2.30) e (2.31) respectivamente, são conjunções em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

Demonstração. Note que $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p$ está bem definida, pois, $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, $x, y \in \mathbb{L}$ e \mathcal{C} é crescente, então para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, tem-se que $\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y})$ e $\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y})$, portanto $\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y})$.

1. Afirma-se que $\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p$ é crescente. De fato, se $\mathbf{x} \leq_2 \mathbf{z}$ e $\mathbf{y} \leq_2 \mathbf{w}$, isto é, $\underline{x} \leq \underline{z}, \bar{x} \leq \bar{z}$ e $\underline{y} \leq \underline{w}, \bar{y} \leq \bar{w}$, implica

$$\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\underline{z}, \underline{w}), \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\underline{z}, \bar{w}) \text{ e } \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{z}, \underline{w}), \quad (2.32)$$

já que \mathcal{C} e \mathcal{C}' são crescentes. E da Equação (2.32), tem-se

$$[\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y})] \leq_2 [\mathcal{C}(\underline{z}, \underline{w}), \mathcal{C}'(\underline{z}, \bar{w}) \vee \mathcal{C}'(\bar{z}, \underline{w})] \quad (2.33)$$

e portanto

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{C}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}^p(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad (2.34)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

2. As condições de fronteira seguem diretamente das propriedades de \mathcal{C} e \mathcal{C}' .

Na sequência, $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ também está bem definida, pois \mathcal{C} é crescente e $\underline{x} \leq \bar{x}$, $\underline{y} \leq \bar{y}$, então $\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})$ e $\mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})$, portanto $\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})$. A demonstração de $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ seja crescente e satisfaça as condições de fronteira seguem diretamente das propriedades de \mathcal{C} e \mathcal{C}' . \square

Na Definição 2.6, se $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ o operador denota-se $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ por $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p$ e o operador $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ por $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^o$.

No Teorema 2.3, note que não necessariamente $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ são t-normas, se \mathcal{C} e \mathcal{C}' são t-normas, pois a associatividade desses operadores não é garantida. Para contornar esse problema, são providenciadas algumas condições expostas no seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Se $(\mathbb{L}, \leq, \mathcal{C})$ e $(\mathbb{L}, \geq, \mathcal{C})$ são l-monoides limitados onde \mathcal{C} é uma t-norma \mathbb{L} -fuzzy, então as aplicações $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p, \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^o$ definidas nas Equações (2.30) e (2.31) respectivamente, são t-normas em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p$ é comutativo, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y})], \\ &= [\mathcal{C}(\underline{y}, \underline{x}), \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{x}) \vee \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{x})] \\ &= \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

já que \mathcal{C} é comutativo, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

2. $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p$ é associativo, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{x}, \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})) &= \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{x}, [\mathcal{C}(\underline{y}, \underline{z}), \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z}) \vee \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})]) \\ &= [\mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \underline{z})), \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z}) \vee \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \underline{z}))]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como $(\mathbb{L}, \leq, \mathcal{C})$ é um l-monóide, então

$$\mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z})) \vee \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})) = \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z}) \vee \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})). \quad (2.37)$$

Da equação (2.37) e como \vee é associativo sobre um reticulado limitado, tem-se

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z}) \vee \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})) \vee \mathcal{C}(\mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \underline{z}) \\ &= (\mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z})) \vee \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z}))) \vee \mathcal{C}(\mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \underline{z}) \\ &= \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z})) \vee (\mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\bar{y}, \underline{z})) \vee \mathcal{C}(\mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \underline{z})) \\ &= \mathcal{C}(\underline{x}, \mathcal{C}(\underline{y}, \bar{z})) \vee \mathcal{C}(\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \underline{z}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

substituindo (2.38) em (2.36), e usando a associatividade de \mathcal{C} obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{x}, \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{y}, \mathbf{z})) &= [\mathcal{C}(\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \underline{z}), \mathcal{C}(\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \bar{z}) \vee \mathcal{C}(\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \underline{z})] \\ &= \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p([\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y})], \mathbf{z}) \\ &= \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

3. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^p(\mathbf{x}, 1_{\mathbb{L}}) &= [\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}), \mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) \vee \mathcal{C}(\bar{x}, 1_{\mathbb{L}})] \\ &= [\underline{x}, \underline{x} \vee \bar{x}] \\ &= [\underline{x}, \bar{x}] = \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

uma vez que $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) = x$ e $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) = x$, para todo $x \in \mathbb{L}$.

Dos Itens 1., 2., 3. e o Teorema 2.3, tem-se que $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^p$ é uma t-norma em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. De forma similar prova-se que $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^o$ é uma t-norma em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. A parte da associatividade de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^o$ é devido à distributividade de \mathcal{C} como respeito a \wedge pois $(\mathbb{L}, \geq, \mathcal{C})$ é um l -monoide comutativo limitado. As outras propriedades de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^o$ são mostradas de forma similar ao operador $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^p$ utilizando as propriedades de \mathcal{C} . \square

Corolário 2.3. Se $\mathcal{C}(x, y) \leq \mathcal{C}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$, então as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.41)$$

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. Como \mathcal{C} é crescente, tem-se

$$\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\bar{x}, \bar{y}) \text{ e } \mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \quad (2.42)$$

então

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})] &\leq_2 [\mathcal{C}(\underline{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{C}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Além disso, já que \mathcal{C}' é crescente tem-se

$$\mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y}) \text{ e } \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{C}'(\underline{x}, \bar{y})] &\leq_2 [\mathcal{C}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{C}'(\bar{x}, \bar{y})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{C}_{\mathbb{C}, \mathcal{C}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

das Equações (2.43) e (2.44) tem-se a desigualdade (2.41). \square

Definição 2.7. Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{I} e \mathcal{I}' implicações \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. A aplicação $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ sobre $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ definida por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y})], \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.45)$$

é chamada $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -representável.

O seguinte teorema é uma generalização da Proposição 6.3 da referência [66].

Teorema 2.5. *Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{I} e \mathcal{I}' implicações \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ definida na Equação (2.45) é uma implicação em \mathbb{L}^* . Além disso, se $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ são implicações de fronteira \mathbb{L} -fuzzy, então $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é também uma implicação de fronteira \mathbb{L}^* .*

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{L}^*$ desde que \mathcal{I} é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento e $\underline{x} \leq \bar{x}, \underline{y} \leq \bar{y}$ tem-se:

$$\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}). \quad (2.46)$$

Logo, $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y})]$ está bem definida.

1. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r$ é decrescente no primeiro argumento. De fato, se $\mathbf{x} \leq_2 \mathbf{z}$ isto é $\underline{x} \leq \underline{z}$ e $\bar{x} \leq \bar{z}$, então:

$$\mathcal{I}(\bar{z}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \text{ e } \mathcal{I}'(\underline{z}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^r(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.47)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{L}^*$.

2. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r$ é crescente no segundo argumento. De fato, se $\mathbf{y} \leq_2 \mathbf{z}$ isto é $\underline{y} \leq \underline{z}$ e $\bar{y} \leq \bar{z}$, então:

$$\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{z}) \text{ e } \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{z}) \Rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^r(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \quad (2.48)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{L}^*$.

3. Se $\mathbf{x} \in \{0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}\}$, então:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{1}_{\mathbb{L}^*}, \mathbf{x}) = [\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, \underline{x}), \mathcal{I}'(1_{\mathbb{L}}, \bar{x})] = [\underline{x}, \bar{x}] = \mathbf{x} \quad (2.49)$$

Além disso,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}, \mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}) = [\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}), \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}})] = [1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}] = \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*} \quad (2.50)$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}, \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*}) = [\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}), \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}})] = [1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}] = \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*} \quad (2.51)$$

Portanto, pelos itens 1., 2. e 3. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é uma implicação já que \mathcal{I} e \mathcal{I}' são implicações \mathbb{L} -fuzzy. Além disso, pela Equação (2.49), considerando um $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^*$ qualquer, se \mathcal{I} e \mathcal{I}' são implicações de fronteira \mathbb{L} -fuzzy, tem-se $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é também uma implicação de fronteira em \mathbb{L}^* .

□

Definição 2.8. Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{I} e \mathcal{I}' implicações \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}'(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Define-se a *implicação pessimista* $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p$ com representantes \mathcal{I} e \mathcal{I}' por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y})], \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.52)$$

E a *implicação \mathbb{L} -fuzzy otimista* $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o$ com representante \mathcal{I} e \mathcal{I}' por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathcal{I}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y})] \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.53)$$

Teorema 2.6. Seja \mathbb{L} um reticulado limitado e sejam \mathcal{I} e \mathcal{I}' implicações \mathbb{L} -fuzzy tais que $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}'(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{L}$. As aplicações $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p$ e $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o$ definidas nas Equações (2.52) e (2.53), respectivamente, são implicações \mathbb{L} -fuzzy intervalares ou implicações em $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. Além disso, se \mathcal{I} é uma implicação de fronteira \mathbb{L} -fuzzy, então $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p$ e $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o$ são também implicações de fronteira \mathbb{L} -fuzzy intervalares ou implicações de fronteira $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ -fuzzy.

Demonstração. O operador $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p$ está bem definida. De fato, já que \mathcal{I} é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento, então

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \\ \Rightarrow \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned} \quad (2.54)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. Além disso, $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p$ é uma implicação $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ -fuzzy mais ainda uma implicação de fronteira $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ -fuzzy, pois:

1. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p$ é decrescente no primeiro argumento. De fato, se $\mathbf{x} \leq_2 \mathbf{z}$ isto é $\underline{x} \leq \underline{z}$ e $\bar{x} \leq \bar{z}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\bar{z}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(\underline{z}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{z}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \\ \Rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

já que, $\mathcal{I}'(\underline{z}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y})$, $\mathcal{I}'(\bar{z}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y})$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

2. $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p$ é crescente no segundo argumento. De fato, se $\mathbf{y} \leq_2 \mathbf{z}$, isto é, $\underline{y} \leq \underline{z}$ e $\bar{y} \leq \bar{z}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{z}) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{z}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{z}) \\ \Rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (2.56)$$

já que $\mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{z})$ e $\mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{z})$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$.

3. Seja $\mathbf{x} \in \{\mathbf{0}_{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*}, \mathbf{1}_{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*}\}$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p(\mathbf{1}_{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*}, \mathbf{x}) &= [\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, \underline{x}), \mathcal{I}'(1_{\mathbb{L}}, \underline{x}) \vee \mathcal{I}'(1_{\mathbb{L}}, \bar{x})] \\ &= [\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, \underline{x}), \mathcal{I}'(1_{\mathbb{L}}, \bar{x})] \\ &= [\underline{x}, \bar{x}] = \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Além disso,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p(\mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}, \mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}) = [\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}), \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) \vee \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}})] = [1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}] = \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*} \quad (2.58)$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p(\mathbf{0}_{\mathbb{L}^*}, \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*}) = [\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}), \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) \vee \mathcal{I}'(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}})] = [1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}] = \mathbf{1}_{\mathbb{L}^*}. \quad (2.59)$$

Portanto, pelos Itens 1., 2. e 3, a aplicação $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é uma implicação \mathbb{L} -fuzzy intervalar, desde que \mathcal{I} e \mathcal{I}' são implicações \mathbb{L} -fuzzy. Além disso, se \mathcal{I} e \mathcal{I}' são implicações de fronteira \mathbb{L} -fuzzy então, pela Equação (2.57), considerando um $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ qualquer, a implicação $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^p$ é também uma implicação de fronteira. De forma similar à prova apresentada, mostra-se que a aplicação $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é uma implicação \mathbb{L} -fuzzy intervalar e na sequência $\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ é também uma implicação de fronteira.

□

Corolário 2.4. Se $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}'(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$, então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*. \quad (2.60)$$

Demonstração. Desde que \mathcal{I} e \mathcal{I}' são decrescentes no primeiro argumento e crescentes no segundo argumento, então

$$\mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y}) \leq \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y}), \quad (2.61)$$

logo

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \underline{y}) \vee \mathcal{I}'(\bar{x}, \bar{y})] &\leq_2 [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\underline{x}, \bar{y})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Também

$$\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}) \leq \mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{I}(\underline{x}, \underline{y}), \quad (2.63)$$

então

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(\bar{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\bar{x}, \underline{y})] &\leq_2 [\mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \mathcal{I}(\underline{x}, \underline{y}), \mathcal{I}'(\bar{x}, \underline{y})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq_2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.64)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$. Das Equações (2.62) e (2.64) tem-se a desigualdade (2.60).

□

Observação 2.3.

1. Nos Corolários 2.3 e 2.4 observe que a igualdade nas Equações (2.41) e (2.60) é dada quando $\underline{x} = \bar{x}$ ou $\underline{y} = \bar{y}$.

2. Na Definição 2.5, se $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ denota-se $\mathcal{C}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ por $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$, e se $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ denota-se $\mathcal{J}_{\mathcal{I},\mathcal{I}'}$ por $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$.
3. Se $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, as aplicações pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representáveis (otimistas e pessimistas) são chamadas aplicações pseudo- \mathcal{C} -representáveis (otimistas e pessimistas).
4. Se $\mathbb{L} = [0, 1]$ e do item 2. as Definições 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 tornam-se as definições de conjunções e implicações representáveis e pseudo-representáveis. Na sequência, os Teoremas 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 também são uma generalização do caso $\mathbb{L} = [0, 1]$ (ver [19, 58]).

Teorema 2.7. *Seja (\mathbb{L}, \leq) um reticulado completo totalmente ordenado e \mathcal{C} uma conjunção \mathbb{L} -fuzzy, tal que $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) > 0_{\mathbb{L}}$, para todo $x \neq 0_{\mathbb{L}}$. A R -implicação de uma conjunção pessimista $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p$ é dada por uma implicação otimista $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^o$ onde \mathcal{I} é a R -implicação de \mathcal{C} . Neste caso, $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^o$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}^p$ são adjuntas se, e somente se, \mathcal{I} e \mathcal{C} são adjuntas.*

Demonstração. A demonstração é similar ao Teorema 13 da referência [19]. □

No Teorema 2.7 observe que se $\mathbb{L} = [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ (ou \mathcal{L}_n) e \mathcal{T} uma t-norma em $[0, n]$ (ou uma t-norma em $\mathcal{L}_n \subset [0, n]$), então $(\mathbb{L}, \leq, \mathcal{T})$ é um l -monoide completo. Além disso, o dual de $(\mathbb{L}, \leq, \mathcal{T})$ é também um l -monoide completo (ver Exemplo 1.2), logo $\mathcal{T}_{\mathcal{T}}^p$ é uma t-norma em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ (ou uma t-norma em \mathbb{I}_n^*). Portanto, a implicação otimista $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^o$ é uma R -implicação de uma t-norma pessimista $\mathcal{T}_{\mathcal{T}}^p$ e pelo Corolário 2.1, $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^o$ é uma implicação de fronteira sobre $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ (ou uma implicação de fronteira sobre \mathbb{I}_n^*).

Exemplo 2.6. Considere o reticulado completo (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) . Como exemplos de adjunções em (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) , tem-se os pares $(\mathcal{T}_{LK}^p, \mathcal{J}_{LK}^o)$, $(\mathcal{T}_{nM}^p, \mathcal{J}_{FD}^o)$. Note que, esses pares de adjunções foram geradas pelos pares de adjunções (T_{LK}^n, I_{LK}^n) , (T_{nM}^n, I_{FD}^n) no subreticulado completo \mathcal{L}_n de $[0, n]$ com a ordem usual.

Observação 2.4. Note que,

$$T_{LK}^n, T_{nM}^n \leq T_M^n \Rightarrow \mathcal{T}_{LK}^p, \mathcal{T}_{nM}^p \leq \mathcal{T}_M^p \quad (2.65)$$

$$I_{KD}^n \leq I_{FD}^n \leq I_{LK}^n \Rightarrow \mathcal{J}_{KD}^o \leq \mathcal{J}_{FD}^o \leq \mathcal{J}_{LK}^o. \quad (2.66)$$

Assim, os pares dados por $(\mathcal{T}_{LK}^p, \mathcal{J}_{LK}^o)$, $(\mathcal{T}_{nM}^p, \mathcal{J}_{FD}^o)$, $(\mathcal{T}_{nM}^p, \mathcal{J}_{KD}^o)$, etc. podem ser utilizados para o cálculo da dilatação e erosão morfológica \mathbb{I}_n^* -fuzzy de acordo com a Proposição 2.4.

2.4 Morfologia Matemática \mathbb{L} -fuzzy

A morfologia matemática (MM) é uma teoria que utiliza conceitos da teoria de conjuntos para a análise e processamento de imagens. Baseados nos trabalhos de Minkowski

e Hadwiger, Matherom e Serra desenvolveram a teoria da MM para o processamento de imagens binárias (imagens que possuem 0 ou 1 como valor dos pixels) [25, 26, 67, 68]. Eles utilizaram conceitos da teoria de conjuntos como são a inclusão e a intersecção para definir os operadores básicos da MM, especificamente a erosão e a dilatação. Essas operações foram associadas a um subconjunto S chamado elemento estruturante, sendo este geralmente utilizado para extrair informações topológicas [26, 50] ou geométricas da imagem [25].

A MM binária foi estendida para a MM em tons de cinza, a qual estuda as imagens em tons de cinza [26, 28]. Uma imagem em tons de cinza pode ser representada como uma aplicação de \mathbb{Z}^2 (ou \mathbb{R}^2) em \mathcal{L}_n , $n \in \mathbb{N}$, onde \mathcal{L}_n representa o conjunto de valores dos tons de cinza da imagem. Assim, por meio do isomorfismo φ_n , uma imagem em tons de cinza também pode ser vista como uma aplicação de \mathbb{Z}^2 (ou \mathbb{R}^2) em $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$.

A MM em tons de cinza inclui a morfologia matemática fuzzy (MM fuzzy) ($\mathbb{L} = [0, 1]$) a qual utiliza conceitos e técnicas de conjuntos fuzzy, pois, ambas a imagem e o conjunto fuzzy podem ser modeladas da mesma forma (ou seja, uma imagem em tons de cinza pode ser representada como um conjunto fuzzy). Assim, encontram-se os trabalhos de: Sinha e Dougherty [69], Bloch e Maître [70, 71], De Baets [21], Deng e Heijmans [22] e Maragos [72], etc. Para um melhor entendimento da extensão da MM binária para a MM fuzzy, salienta-se o trabalho de Nachtgaele e Kerre [23], onde mostram a conexão da MM fuzzy com a MM binária e a clássica MM em tons de cinza.

Como extensão da MM-fuzzy tem-se a MM fuzzy intervalar ($\mathbb{L} = \mathbb{I}^*$) [18, 19] e de forma mais geral, a morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy (MM \mathbb{L} -fuzzy) [19]. Sussner em [30] estende a MM \mathbb{L} -fuzzy baseada em elementos estruturantes invariantes por translação ($S \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$) para a MM \mathbb{L} -fuzzy baseada em funções estruturantes \mathbb{L} -fuzzy ($U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^Y$) sobre domínios arbitrários X e Y . Essa última abordagem, também pode ser explicada pela MM relacional \mathbb{L} -fuzzy baseada em triplas adjuntas [73].

Na Secção 1.3 do Capítulo 1, note que, a erosão e a dilatação estão definidas como operadores algébricos, isto é, operadores que comutam com o ínfimo e o supremo respectivamente. Para propósitos práticos é necessário a definição da erosão e dilatação de uma imagem utilizando uma função estruturante \mathbb{L} -fuzzy, sendo este um ponto de vista morfológico.

Definição 2.9. [19] Seja X o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d , e \mathbb{L} um reticulado limitado. Uma *medida de inclusão \mathbb{L} -fuzzy* é uma aplicação $Inc_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathbb{L}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $A, B \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X)$, onde $\mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X) = \{A \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \mid A(x) = 0_{\mathbb{L}} \text{ ou } A(x) = 1_{\mathbb{L}}, \forall x \in X\}$:

$$\begin{aligned} A \leq B &\Rightarrow Inc_{\mathbb{L}}(A, B) = 1_{\mathbb{L}}, \\ A \not\leq B &\Rightarrow Inc_{\mathbb{L}}(A, B) = 0_{\mathbb{L}}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Definição 2.10. [19] Seja X o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d , e \mathbb{L} um

reticulado limitado. Uma *medida de intersecção \mathbb{L} -fuzzy* é uma aplicação $Sec_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathbb{L}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $A, B \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X)$,

$$\begin{aligned} A \wedge B \neq 0_{\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)} &\Rightarrow Sec_{\mathbb{L}}(A, B) = 1_{\mathbb{L}}, \\ A \wedge B = 0_{\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)} &\Rightarrow Sec_{\mathbb{L}}(A, B) = 0_{\mathbb{L}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Se $\mathbb{L} = [0, 1]$, as medidas de inclusão e intersecção \mathbb{L} -fuzzy são conhecidas como as *medidas de inclusão e intersecção fuzzy* [24] e são denotadas pelos símbolos de $Inc_{\mathcal{F}}$ e $Sec_{\mathcal{F}}$ respectivamente. Salienta-se que a maioria das abordagens com respeito à MM fuzzy estão baseadas em medidas de inclusão e intersecção fuzzy [21, 23, 24].

Se \mathbb{L} é um reticulado completo, a implicação \mathbb{L} -fuzzy \mathcal{I} e a conjunção \mathbb{L} -fuzzy \mathcal{C} permitem definir medidas de inclusão \mathbb{L} -fuzzy e intersecção \mathbb{L} -fuzzy da seguinte forma:

$$Inc_{\mathcal{I}}(A, B) = \bigwedge_{x \in X} \mathcal{I}(A(x), B(x)), \quad (2.69)$$

$$Sec_{\mathcal{C}}(A, B) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{C}(A(x), B(x)), \quad (2.70)$$

para todo $A, B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ sendo X o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d , e \mathbb{L} um reticulado limitado.

Definição 2.11. [30] Sejam X, Y universos arbitrários, e \mathbb{L} um reticulado completo. Defini-se uma *função estruturante \mathbb{L} -fuzzy* como uma função $U : X \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(Y)$.

Seja $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(Y))^X$. Escreve-se U_x ao invés de $U(x)$, $\forall x \in X$, além disso, $\bar{U} \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^Y$ é definido por $\bar{U}_y(x) = U_x(y)$, $\forall x \in X, y \in Y$ [30].

Note que na Definição 2.11 os universos X e Y são arbitrários e podem ser completamente diferentes. Neste trabalho serão utilizados funções estruturantes $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$, sendo X o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d .

A seguir serão relacionadas as funções estruturantes \mathbb{L} -fuzzy $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$ com elementos estruturantes. Lembre que, um *elemento estruturante* é definido como uma função $S : X \rightarrow \mathbb{L}$, sendo X o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d .

Definição 2.12. [30] Seja $(X, +)$ o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d . Uma função estruturante $U : X \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ é chamada *invariante a translação* se, e somente se,

$$U_x(y) = U_{x+z}(y + z), \forall x, y \in X. \quad (2.71)$$

Pelo Teorema 1. da referência [30], se $(X, +)$ é um grupo então cada invariante a translação $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$ pode ser unicamente determinada por o elemento estruturante $U_0 = S \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$, sendo 0 o elemento neutro de X . Portanto, cumpre-se que:

$$U_x(y) = S_x(y), \forall x, y \in X. \quad (2.72)$$

sendo S_x a translação (invariante) do elemento estruturante S por x definida por:

$$S_x(y) = S(y - x), \quad \forall y \in X. \quad (2.73)$$

As definições a seguir são extensões dos conceitos de erosão morfológica e a dilatação morfológica \mathbb{L} -fuzzy baseadas em elementos estruturantes \mathbb{L} -fuzzy invariantes por translação [19].

Dadas medidas de inclusão $Inc_{\mathbb{L}}$ e intersecção $Sec_{\mathbb{L}}$. Definem-se os operadores $\mathcal{E}_{\mathbb{L}}, \mathcal{D}_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ como:

$$\mathcal{E}_{\mathbb{L}}(A, U)(x) = Inc_{\mathbb{L}}(U_x, A), \quad (2.74)$$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(A, U)(x) = Sec_{\mathbb{L}}(\bar{U}_x, A), \quad (2.75)$$

para todo $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ e $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$.

Na Equação (2.74), $Inc_{\mathbb{L}}(U_x, A)$ pode ser interpretada como o grau de inclusão de U_x na imagem A . Portanto, pode-se referir ao operador $\mathcal{E}_{\mathbb{L}}(A, U)$ como uma *erosão morfológica \mathbb{L} -fuzzy* da imagem A pela função estruturante U . De forma similar, na Equação (2.75), $Sec_{\mathbb{L}}(\bar{U}_x, A)$ pode ser interpretada como o grau de intersecção de \bar{U}_x com a imagem A . Portanto, pode-se referir ao operador $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(A, U)$ como uma *dilatação morfológica \mathbb{L} -fuzzy* da imagem A pela função estruturante U [30].

Há uma grande importância em definir os operadores $\mathcal{E}_{\mathbb{L}}$ e $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ sobre o reticulado completo $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$. Pois, para uma função estruturante $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$, o operador $\mathcal{E}_{\mathbb{L}}(\cdot, U)$ que comute com o ínfimo é uma erosão (algébrica) chamado *erosão \mathbb{L} -fuzzy* e o operador $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(\cdot, U)$ que comute com o supremo é uma dilatação (algébrica) chamado *dilatação \mathbb{L} -fuzzy* (para ambos casos ver Definição 1.12). Essa abordagem, permite pensar na erosão \mathbb{L} -fuzzy e na dilatação \mathbb{L} -fuzzy em termos de adjunções [30].

Denota-se a *erosão \mathbb{L} -fuzzy* por $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$, se a medida de inclusão \mathbb{L} -fuzzy é $Inc_{\mathcal{I}}$ e a *dilatação \mathbb{L} -fuzzy* por $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$, se a medida de intersecção \mathbb{L} -fuzzy é $Sec_{\mathcal{C}}$.

Teorema 2.8. [30] *Seja \mathbb{L} um reticulado completo e sejam \mathcal{I} uma implicação \mathbb{L} -fuzzy e \mathcal{C} uma conjunção \mathbb{L} -fuzzy. O par $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ forma uma adjunção se, e somente se, o par $(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}(\cdot, U), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(\cdot, U))$ forma uma adjunção, para todo $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$.*

Proposição 2.4. *Seja \mathbb{L} um reticulado completo e sejam $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$, $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X))^X$ onde X é o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d . Se \mathcal{T} é uma t-norma \mathbb{L} -fuzzy e \mathcal{I} uma implicação fronteira \mathbb{L} -fuzzy e $U_x(x) = 1_{\mathbb{L}}$, então:*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U) \leq A \leq \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U).$$

Demonstração. Para todo $x \in X$, por um lado

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U)(x) &= \bigwedge_{y \in X} \mathcal{I}(U_x(y), A(y)) \\ &\leq_{\mathbb{L}} \mathcal{I}(U_x(x), A(x)) \\ &= \mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, A(x)) = A(x), \end{aligned} \quad (2.76)$$

visto que \mathcal{I} é uma implicação fronteira. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U)(x) &= \bigvee_{y \in X} \mathcal{T}(\bar{U}_x(y), A(y)) \\ &\geq_{\mathbb{L}} \mathcal{T}(\bar{U}_x(x), A(x)) \\ &= \mathcal{T}(U_x(x), A(x)) \\ &= \mathcal{T}(1_{\mathbb{L}}, A(x)) = A(x), \end{aligned} \quad (2.77)$$

já que \mathcal{T} é uma t-norma. As Equações (2.76) e (2.77) implicam que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U)(x) &\leq_{\mathbb{L}} A(x) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U)(x), \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U) \leq A \leq \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U). \end{aligned}$$

□

A abordagem da morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy inclui a morfologia matemática fuzzy discreta, isto é, $\mathbb{L} = \mathcal{L}_n$, apresentada por González-Hidalgo et al. [16, 48]. Essa abordagem discreta está baseada na observação que, uma imagem digital em tons de cinza e um conjunto \mathcal{L}_n -fuzzy, como antes mencionado, estão modelados da mesma forma, isto é:

$$A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{L}_n, \quad (2.78)$$

sendo $\mathcal{L}_n = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 1). Note que, na prática, uma imagem digital em tons de cinza é representada por um conjunto finito de pontos de \mathbb{Z}^2 com valores em \mathcal{L}_n . Neste contexto, uma imagem digital em tons de cinza $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{Z}^2)$, possui a seguinte característica: \mathbb{Z}^2 contém um conjunto finito $Y = \{1, 2, \dots, m_1\} \times \{1, 2, \dots, m_2\}$ tal que $A(y) = 0, \forall y \in \mathbb{Z}^2 \setminus Y$ (como representado na Figura 1).

Seja um elemento estruturante $S : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ com a seguinte característica: \mathbb{Z}^2 contém um conjunto finito $Z \supset \{(0, 0)\}$, tal que $S(y) = 0, \forall y \in \mathbb{Z}^2 \setminus Z$. A partir de S pode-se definir uma função estruturante $U^S : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{Z}^2)$ da seguinte forma:

$$U_x^S = \begin{cases} S_x \wedge \chi_Y, & \text{se } x \in Y \subset \mathbb{Z}^2, \\ V_x & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.79)$$

sendo $\chi_Y \in \{0_{\mathcal{L}_n}, 1_{\mathcal{L}_n}\}^{\mathbb{Z}^2}$ definida por

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}_n} & \text{se } x \in Y, \\ 0_{\mathcal{L}_n} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $V_x \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{Z}^2)$ dada por

$$V_x(y) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}_n} & \text{se } x = y, \\ 0_{\mathcal{L}_n} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lembre que, $1_{\mathcal{L}_n} = \bigvee \mathcal{L}_n = n$ e $0_{\mathcal{L}_n} = \bigwedge \mathcal{L}_n = 0$.

Logo, substituindo a função estruturante U^S nas Equações (2.74), (2.75), obtêm-se uma erosão \mathcal{L}_n -fuzzy pela função estruturante U^S ,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U^S)(x) = \begin{cases} \bigwedge_{y \in Y \cap Z_x} \mathcal{I}(S_x(y), A(y)), & \text{se } x \in Y, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.80)$$

e uma dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy pela função estruturante U^S ,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}}(A, U^S)(x) = \begin{cases} \bigvee_{y \in Y \cap Z_x} \mathcal{C}(\bar{S}_x(y), A(y)), & \text{se } x \in Y, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.81)$$

sendo \bar{S} a reflexão de S em torno da origem definida por $\bar{S}(x) = S(-x)$, $x \in \mathbb{Z}^2$.

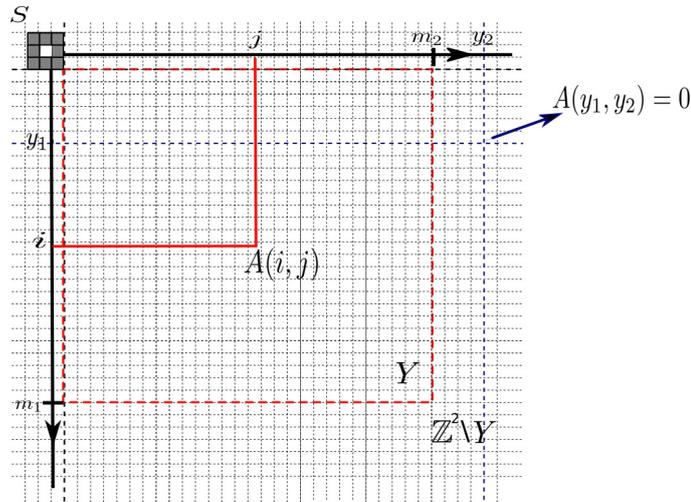
Observação 2.5. Note que, através de uma matriz M de dimensão $r_1 \times r_2$, pode-se definir um elemento estruturante $S^M : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ da seguinte forma:

$$S_{(c,d)}^M(u, v) = \begin{cases} M_{u,v}, & \text{se } (u, v) \in \{1, \dots, r_1\} \times \{1, \dots, r_2\} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.82)$$

sendo $c = \lceil \frac{r_1}{2} \rceil$, $d = \lceil \frac{r_2}{2} \rceil$. Logo, a partir de S^M e pela Equação (2.79), também define-se uma função estruturante $U^{S^M} \in (\mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(X))^X$, $X = \mathbb{Z}^2$.

Para facilitar a notação, à função estruturante $U^{S^M} \in (\mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(X))^X$ será denotada por U^M . Desse modo, quando refere-se à função estruturante \mathcal{L}_n -fuzzy U^M , ela sempre estará associada a um elemento estruturante S^M e portanto a uma matriz M . As matrizes utilizadas ao longo do trabalho serão de dimensão 3×3 , sendo $M_{2,2} = \bigvee \mathcal{L}_n$.

Figura 1 – Representação de uma imagem digital A e do elemento estruturante S .



Fonte: Autoria própria.

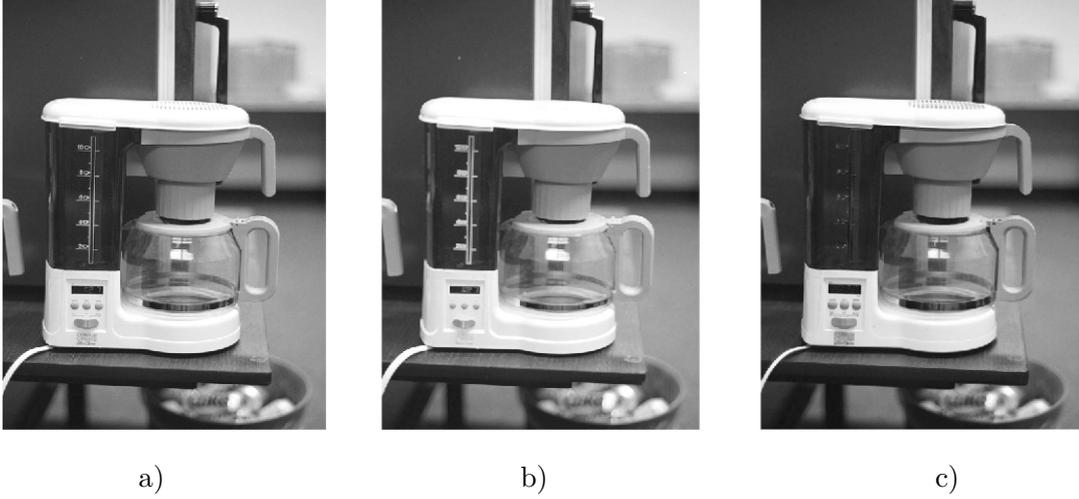
Exemplo 2.7. Neste exemplo, é considerado a imagem coffee.pgm extraída da base de dados ¹ da University of South Florida [1] onde seus valores pertencem à cadeia finita $\mathcal{L}_n, n = 255$, e uma função estruturante \mathcal{L}_n -fuzzy U^M , sendo

$$M = \begin{pmatrix} 219 & 219 & 219 \\ 219 & 255 & 219 \\ 219 & 219 & 219 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Assim, pelas Equações (2.80), (2.81), determina-se a erosão e dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy da imagem coffee.pgm baseadas nos operadores I_{FD}^n (ver Equação (2.23)) e T_{nM}^n (ver Equação (2.18)). A Figura 2 mostra a erosão \mathcal{L}_n -fuzzy da imagem coffee.pgm pela função estruturante U^M .

¹ A base de dados das imagens utilizadas neste trabalho podem ser baixadas de <ftp://figment.csee.usf.edu/pub/ROC/>

Figura 2 – Exemplo da erosão e dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy da imagem coffee.pgm. a) Imagem coffee.pgm. b) Dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy da imagem coffee.pgm pela função estruturante U^M . c) Erosão \mathcal{L}_n -fuzzy da imagem coffee.pgm pela função estruturante U^M .



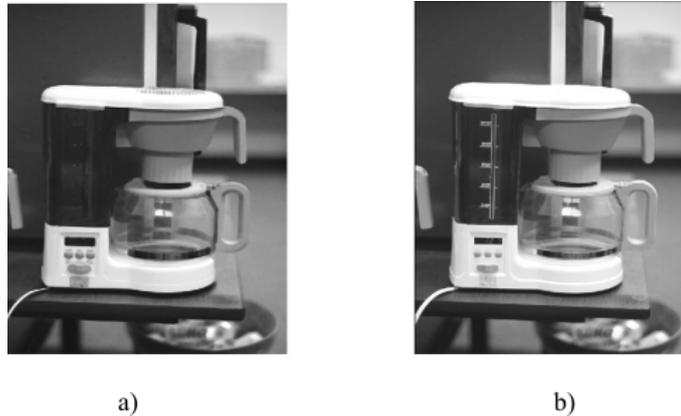
Fonte: Autoria própria.

A MM \mathbb{L} -fuzzy também inclui a MM \mathbb{I}^* -fuzzy [18,19] que pode ser utilizada para o processamento de imagens com valores intervalares sendo chamadas *imagens intervalares*. Uma imagem intervalar é definida como $A_{IV} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{I}^*$, $A_{IV}(x) = [\underline{A}_{IV}(x), \overline{A}_{IV}(x)]$, $x \in \mathbb{Z}^2$. No entanto, na prática os valores das imagens intervalares pertencem a \mathbb{I}_n^* . Assim, neste trabalho serão utilizadas imagens $A_{IV} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{I}_n^*$, sendo chamadas *imagens digitais intervalares*. Além disso, note que se $\underline{A}_{IV}(x) = \overline{A}_{IV}(x)$, então a imagem digital intervalar torna-se numa imagem digital. Visto \underline{A}_{IV} como um conjunto \mathbb{I}_n^* -fuzzy, pode ser utilizada a MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy para determinar, por exemplo, sua erosão e dilatação morfológica \mathbb{I}_n^* -fuzzy.

A erosão e a dilatação morfológica \mathbb{I}_n^* -fuzzy de uma imagem digital intervalar A_{IV} , estão baseadas em operadores de conjunção e implicação \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Neste trabalho, esses operadores serão considerados de acordo com a Proposição 2.4. Assim, pela Observação 2.4 tem-se alguns pares de configurações, como por exemplo: $(\mathcal{J}_{TK}^p, \mathcal{J}_{LK}^o)$, $(\mathcal{J}_{TK}^p, \mathcal{J}_{FD}^o)$, $(\mathcal{J}_{nM}^p, \mathcal{J}_{KD}^o)$, etc..

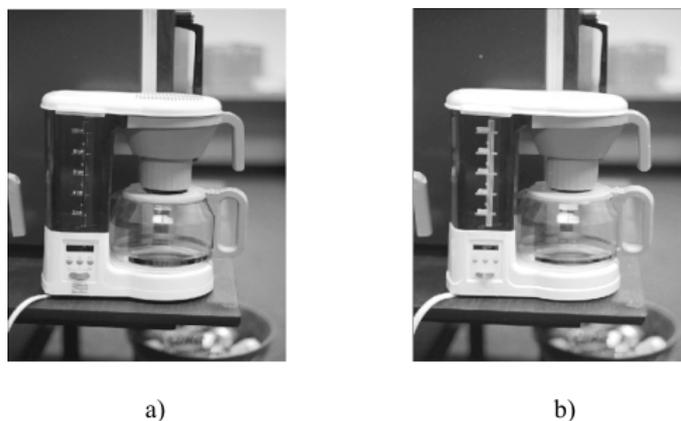
Exemplo 2.8. Neste exemplo é considerado uma imagem intervalar A_{IV} gerada pelo método de Lopez Molina et al. [33] a partir da imagem coffee.pgm A , a qual é chamada imagem intervalar coffee.pgm (ver Figura 14). Para calcular $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U^M)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U^M)$, são utilizadas as Equações (2.80) e (2.81) respectivamente, sendo $\mathcal{T} = \mathcal{J}_{nM}^p$ (ver Equação (2.30)), $\mathcal{I} = \mathcal{J}_{KD}^o$ (ver Equação (2.53)) e a função estruturante U^M , onde M dada pela Matriz (2.83). Note que, os valores da função estruturante utilizada, possuem limites superiores e inferiores iguais. A Figura 3 mostra o limite inferior e superior da erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy e a Figura 4 mostra o limite inferior e superior da dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy.

Figura 3 – Erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm a) Limite inferior da erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm. b) Limite superior da erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm. a) Limite inferior da dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm. b) Limite superior da dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm.



Fonte: Autoria própria.

Neste capítulo foram revisados alguns conceitos da teoria de conjuntos \mathbb{L} -fuzzy para o desenvolvimento da morfologia matemática (MM) \mathbb{L} -fuzzy. Fez-se ênfase nos operadores básicos de erosão e dilatação \mathbb{L} -fuzzy baseados em operadores de implicação e conjunção \mathbb{L} -fuzzy, respectivamente, os quais serão utilizados para o cálculo do gradiente morfológico (ver Capítulo 4).

Na MM no sentido algébrico foi estudado conceito de adjunção entre operadores de implicação e conjunção \mathbb{L} -fuzzy tendo como contribuição o Corolário 2.1. Na MM no sentido geométrico foram estudadas algumas condições para relacionar a erosão e a dilatação \mathbb{L} -fuzzy, tendo como contribuição a Proposição 2.4, esta perspectiva será utilizada no desenvolvimento das abordagens propostas no Capítulo 4.

Também, foram estabelecidas as condições necessárias para estender a conjunção e a implicação pseudo-representável sobre \mathbb{I}^* para a conjunção pseudo- $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -representável e a implicação pseudo- $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -representável sobre o reticulado limitado $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, sendo estes relacionados com os operadores representáveis $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ -fuzzy (ver Corolários 2.3 e 2.4). Nos operadores $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ -fuzzy, focou-se nos operadores \mathbb{I}_n^* -fuzzy desde que as imagens digitais intervalares podem ser vistas como conjuntos \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Assim, foram apresentadas as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3, as quais permitem relacionar os operadores fuzzy entre diferentes reticulados completos (sendo estas um caso particular da abordagem proposta por Palmeira et al. [55]). Essas proposições foram utilizadas para construir operadores de conjunção e implicação sobre o reticulado completo \mathbb{I}_n^* a partir de operadores conhecidos.

No seguinte capítulo será introduzido o conceito de h -ordem no conjunto finito \mathbb{I}_n^* . Além disso, serão determinadas todas h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$. Também será mostrado que, particularmente, essas h -ordens incluem as ordens admissíveis geradas por $K_{\alpha,n}$, $K_{\beta,n}$ sendo $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$. Assim, a morfologia matemática \mathbb{I}_n^* -fuzzy (exposta no Capítulo 2) junto com as h -ordens no conjunto finito \mathbb{I}_n^* (expostas no Capítulo 3) servirão de base para o desenvolvimento do Capítulo 4.

Capítulo 3

h -Ordens e Ordens Admissíveis sobre

\mathbb{I}_n^*

Bustince et al. em [35] introduziram o conceito de *ordem admissível em* \mathbb{I}^* como uma ordem linear em \mathbb{I}^* que preserva a ordem parcial \leq_2 . Além disso, no mesmo trabalho, eles definem uma ordem admissível em (\mathbb{I}^*, \leq_2) a partir de um par funções de agregação. Em particular, definem uma ordem admissível $\leq_{\alpha, \beta}$ a partir das combinações convexas K_α, K_β com $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$.

Baseada na abordagem de Bustince et al., as ordens admissíveis podem ser estendidas ao reticulado completo $\mathbb{I}_{[0, n]}^*$ por meio do isomorfismo Φ_n . Assim, como consequência direta dessa extensão, tem-se os Teorema 3.3, a Proposição 3.1 e o Corolário 3.3, sendo também válidas para o reticulado completo (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) .

Este capítulo está focado em relacionar as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha, n}$, $\alpha \in [0, 1]$, a qual gera uma pré-ordem sobre o reticulado completo (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) com as ordens admissíveis $\leq_{\alpha, \beta}$ também sobre \mathbb{I}_n^* . Dando como contribuição parcial do trabalho os Teoremas 3.1, 3.2, 3.4 e como consequência a Proposição 3.2 e os Corolários 3.1, 3.2.

3.1 h -Ordens sobre \mathbb{I}_n^*

Uma h -ordem é uma pré-ordem sobre um conjunto X a qual depende de uma aplicação $h : X \rightarrow \mathbb{L}$, onde \mathbb{L} é um poset [40]. Especificamente, uma h -ordem é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{x} \leq_h \mathbf{y} \Leftrightarrow h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X. \quad (3.1)$$

É evidente que a pré-ordem, \leq_h , é reflexiva e transitiva mas não necessariamente antisimétrica, dado que podem existir \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in X$ diferentes tais que $h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y})$. Se h for injetiva, então a função h gera uma ordem parcial no conjunto X , visto que \mathbb{L} é um poset.

Além disso, a função h também define uma relação de equivalência $=_h$ sobre X dada por:

$$\mathbf{x} =_h \mathbf{y} \Leftrightarrow h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X. \quad (3.2)$$

Este esquema de ordenação pode ser aplicado ao conjunto \mathbb{I}_n^* (ou ao conjunto $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$). Para isso, considere \mathbb{K}_n^* definido por:

$$\mathbb{K}_n^* = \{(\underline{x}, \bar{x}) \in \mathcal{L}_n^2 \mid \underline{x} \leq \bar{x}\} \subset \mathcal{L}_n^2.$$

Note que existe uma bijeção f entre \mathbb{I}_n^* e \mathbb{K}_n^* tal que $f([\underline{x}, \bar{x}]) = (\underline{x}, \bar{x})$, isto é, que cada intervalo $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{I}_n^*$ é identificado com o par $(\underline{x}, \bar{x}) \in \mathbb{K}_n^*$ (ver Figura 5).

Seja $K_{\alpha,n} : \mathbb{K}_n^* \rightarrow [0, n]$ a restrição da função K_α (ver Equação 1.15) ao subconjunto \mathbb{K}_n^* de $[0, n]^2$. A composta da função $K_{\alpha,n}$ e a bijeção f define uma h -ordem no conjunto \mathbb{I}_n^* da seguinte forma:

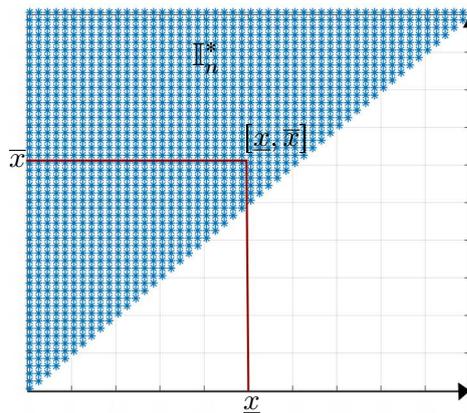
$$\mathbf{x} \leq_{K_{\alpha,n} \circ f} \mathbf{y} \Leftrightarrow K_{\alpha,n} \circ f(\mathbf{x}) \leq K_{\alpha,n} \circ f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*. \quad (3.3)$$

Para simplificar a notação, a composição $K_{\alpha,n} \circ f : \mathbb{I}_n^* \rightarrow [0, n]$ denota-se simplesmente por $K_{\alpha,n} : \mathbb{I}_n^* \rightarrow [0, n]$, e à pré-ordem $\leq_{K_{\alpha,n} \circ f}$ por \leq_α .

O número de subintervalos contabilizados de $\mathcal{L}_n = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ é dado por:

$$m = |\mathbb{I}_n^*| = \binom{n+1}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (3.4)$$

Figura 5 – Distribuição dos intervalos do conjunto \mathbb{I}_n^* no plano. Os pontos em azul representam os intervalos de dito conjunto.



Fonte: Adaptado de [58].

Observa-se que, a pré-ordem \leq_α no conjunto \mathbb{I}_n^* depende da escolha de $\alpha \in [0, 1]$, a qual gera classes de equivalência dada pela relação $=_\alpha$ em \mathbb{I}_n^* , podendo ser denotada por:

$$[\mathbf{x}]_\alpha = \{\mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^* \mid K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{x})\}, \quad (3.5)$$

sendo $\alpha \in [0, 1]$, e o conjunto dessas classes distintas de equivalência está dado por:

$$[\mathbb{I}_n^*]_\alpha = \{[\mathbf{x}]_\alpha \mid \mathbf{x} \in \mathbb{I}_n^*\}. \quad (3.6)$$

Além disso, pode-se definir uma relação de ordem $\leq_{[\alpha]}$ em $[\mathbb{I}_n^*]_\alpha$ induzida pela pré-ordem \leq_α em \mathbb{I}_n^* , da seguinte forma:

$$[\mathbf{x}]_\alpha \leq_{[\alpha]} [\mathbf{y}]_\alpha \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq_\alpha \mathbf{y}. \quad (3.7)$$

de modo que $([\mathbb{I}_n^*]_\alpha, \leq_{[\alpha]})$ é um conjunto totalmente ordenado pois $[0, n]$ é um conjunto totalmente ordenado. Para facilitar a notação é utilizado $[\underline{x}, \bar{x}]_\alpha$ ao invés de $[\mathbf{x}]_\alpha = [[\underline{x}, \bar{x}]]_\alpha$.

Considere a cadeia finita $\mathcal{S}_\alpha = \{K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{I}_n^*\}$, que pode ser escrito como $\mathcal{S}_\alpha = \{a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{m_\alpha}\}$, sendo $a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_{m_\alpha}$ e $m_\alpha = [\mathbb{I}_n^*]_\alpha - 1$. Assim, existe um isomorfismo ρ entre \mathcal{S}_α e a cadeia finita $\mathcal{L}_{m_\alpha} = \{0, 1, 2, \dots, m_\alpha\}$, tal que:

$$\begin{aligned} \rho : (\mathcal{S}_\alpha, \leq) &\rightarrow (\mathcal{L}_{m_\alpha}, \leq) \\ a_i &\mapsto \rho(a_i) = i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que, de (3.8), cada elemento de \mathcal{L}_{m_α} representa a posição na classificação dos intervalos de \mathbb{I}_n^* de acordo com h -ordem \leq_α . Deste modo, a composta de $\rho \circ K_{\alpha,n}$ denotada por ρ_α ,

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : (\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha) &\rightarrow (\mathcal{L}_{m_\alpha}, \leq), \\ \mathbf{x} &\mapsto \rho_\alpha(\mathbf{x}) = \rho(K_{\alpha,n}(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3.9)$$

define uma aplicação sobrejetora tal que cada intervalo $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_n^*$ pode ser representado pela posição na classificação dada pela h -ordem \leq_α (nesta classificação considera-se o zero como o primeiro elemento).

Note que, se $K_{\alpha,n} : \mathbb{I}_n^* \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ é bijetiva, então ρ_α representa um isomorfismo entre $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ e $(\mathcal{L}_{m_\alpha}, \leq)$, neste caso $m_\alpha = m$ (ver Equação (3.4)), e portanto $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ é um conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 3.1. Seja $\mathbb{I}_3^* = \{[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3], [3, 3]\}$ o conjunto de subintervalos de $\mathcal{L}_3 = \{0, 1, 2, 3\}$. As classes distintas de equivalência para $\alpha = 0$, estão dadas por:

$$\begin{aligned} [0, 0]_0 &= \{\mathbf{x} \mid K_{0,3}(\mathbf{x}) = 0\} = \{[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3]\} \\ [1, 1]_0 &= \{\mathbf{x} \mid K_{0,3}(\mathbf{x}) = 1\} = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3]\} \\ [2, 2]_0 &= \{\mathbf{x} \mid K_{0,3}(\mathbf{x}) = 2\} = \{[2, 2], [2, 3]\} \\ [3, 3]_0 &= \{\mathbf{x} \mid K_{0,3}(\mathbf{x}) = 3\} = \{[3, 3]\} \end{aligned}$$

Assim, K_0 gera uma ordem total sobre $[\mathbb{I}_3^*]_0$ como segue:

$$[0, 0]_0 <_{[0]} [1, 1]_0 <_{[0]} [2, 2]_0 <_{[0]} [3, 3]_0.$$

Define-se o conjunto de α 's que determinam as classes diferentes de equivalência em \mathbb{I}_n^* , $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \{\alpha \mid \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^* \text{ tais que } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ e } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y})\}, \quad (3.10)$$

sendo $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$.

Teorema 3.1. *Seja $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto definido na Equação (3.10). Se $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, então \leq_α é uma ordem admissível em \mathbb{I}_n^* .*

Demonstração. Será provado que $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ então $K_{\alpha,n} : \mathbb{I}_n^* \rightarrow [0, n]$ é injetiva. De fato, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tem-se que $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \neq K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$. Portanto $K_{\alpha,n}$ é uma função injetiva. Assim, $K_{\alpha,n}$ induz uma ordem linear \leq_α sobre \mathbb{I}_n^* , já que $K_{\alpha,n}(\mathbb{I}_n^*)$ é um conjunto totalmente ordenado. Agora, só faltaria mostrar que a ordem \leq_α com $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ refina a ordem \leq_2 .

Com efeito, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ e $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ (em particular $\alpha \notin \{0, 1\}$) tem-se que

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \bar{x}] \leq_2 [\underline{y}, \bar{y}] &\Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y} \\ &\Leftrightarrow (1 - \alpha)\underline{x} \leq (1 - \alpha)\underline{y} \text{ e } \alpha\bar{x} \leq \alpha\bar{y} \\ &\Rightarrow (1 - \alpha)\underline{x} + \alpha\bar{x} \leq (1 - \alpha)\underline{y} + \alpha\bar{y} \\ &\Rightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \leq K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \leq_\alpha \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Portanto, \leq_α com $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ é uma ordem admissível em \mathbb{I}_n^* .

□

Como \mathbb{I}_n^* é um conjunto finito, é possível determinar de forma explícita o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, o que será mostrado no Teorema 3.2 a partir dos Lemas 1 e 2.

Lema 1. *Sejam $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}_n^*$ e $\alpha \in [0, 1]$. Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$, então $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$.*

Demonstração. A demonstração será por contraposição. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ e $\alpha \in [0, 1]$, será provado que, se $\mathbf{x} \not\subset \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \not\subset \mathbf{x}$ então $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ou $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \neq K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$.

Com efeito, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ tais que $\mathbf{x} \not\subset \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \not\subset \mathbf{x}$ tem-se

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ ou } \underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y} \text{ ou } \underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}. \quad (3.11)$$

Se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ o resultado é evidente. Para os dois casos restantes, sem perda de generalidade, suponha que \mathbf{x} e \mathbf{y} são da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$. Então, para cada $\alpha \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y} &\Rightarrow (1 - \alpha)\underline{x} + \alpha\bar{x} < (1 - \alpha)\underline{y} + \alpha\bar{y} \\ &\Rightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \\ &\Rightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \neq K_{\alpha,n}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, tem-se que $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \neq K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$ desde que \mathbf{x} e \mathbf{y} sejam da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$. Portanto, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$ então $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$.

□

Assim, pelo Lema 1, o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ definido na Equação (3.10) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^* \text{ tais que } \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \text{ ou } \mathbf{y} \subset \mathbf{x}, \text{ e } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y})\} \\ &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^* \text{ tais que } \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \text{ e } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y})\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Lema 2. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, $z \in \mathcal{L}_n$ e $\alpha \in [0, 1]$ definida na Equação (1.15). Então as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} + [z, z] \subset \mathbf{y} + [z, z]$.
2. $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow K_{\alpha,2n}(\mathbf{x} + [z, z]) = K_{\alpha,2n}(\mathbf{y} + [z, z])$.

Demonstração.

1. A prova deste item é direto do Corolário 1.1, já que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo e para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_n^*$, $\mathbf{x} \subset \mathbb{Z}$.
2. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, $z \in \mathcal{L}_n$, tem-se que

$$\begin{aligned} K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) &\Leftrightarrow \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x}) = \underline{y} + \alpha(\bar{y} - \underline{y}) \\ &\Leftrightarrow \underline{x} + z + \alpha((\bar{x} + z) - (\underline{x} + z)) = \underline{y} + z + \alpha((\bar{y} + z) - (\underline{y} + z)) \\ &\Leftrightarrow K_{\alpha,2n}(\underline{x} + z, \bar{x} + z) = K_{\alpha,2n}(\underline{y} + z, \bar{y} + z) \\ &\Leftrightarrow K_{\alpha,2n}(\mathbf{x} + [z, z]) = K_{\alpha,2n}(\mathbf{y} + [z, z]). \end{aligned}$$

□

Observação 3.1. Note que a soma dos intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ é dada por:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x + y \mid x \in \mathbf{x} \text{ e } y \in \mathbf{y}\} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (3.14)$$

onde $+$ é soma de Minkowski em $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Note que, essa soma não necessariamente pertence a \mathbb{I}_n^* .

Teorema 3.2. O conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ definido na Equação (3.13) é dado por:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \bigcup_{j=2}^n \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0, 1\}, \quad n \geq 1. \quad (3.15)$$

Demonstração. A prova será feita por indução.

Para $n = 1$, \mathbb{I}_1^* é dado por:

$$\mathbb{I}_1^* = \{[0, 0], [0, 1], [1, 1]\}.$$

Observe que existem $[0, 0], [0, 1] \in \mathbb{I}_1^*$ tais que

$$[0, 0] \subset [0, 1] \text{ e } K_{\alpha,1}([0, 0]) = K_{\alpha,1}([0, 1]) \Rightarrow \alpha = 0, \quad (3.16)$$

e existem $[0, 1], [1, 1] \in \mathbb{I}_1^*$ tais que

$$[1, 1] \subset [0, 1] \text{ e } K_{\alpha,1}([1, 1]) = K_{\alpha,1}([0, 1]) \Rightarrow \alpha = 1. \quad (3.17)$$

Então,

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_1^*} = \{0, 1\} = \emptyset \cup \{0, 1\} = \bigcup_{j=2}^1 \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0, 1\}.$$

Assim, a Equação (3.15) é válida para $n = 1$.

Agora, suponha que a Equação (3.15) é válida para $n = k$. Será provado que a Equação (3.15) também é válida para $n = k + 1$. Para isso, considere o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_k'^*}$ dado pela Equação (3.13) onde $\mathbb{I}_k'^* = \{[\underline{x}', \bar{x}'] \subseteq \mathcal{L}'_k \mid \underline{x}' \leq \bar{x}'\}$ e $\mathcal{L}'_k = \{1, 2, \dots, k + 1\}$. Visto que o mapeamento

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{I}_k^* &\rightarrow \mathbb{I}_k'^* \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} + \mathbf{1} \end{aligned}$$

representa uma bijecção, sendo $\mathbf{1} = [1, 1]$ e $\mathbf{x} + \mathbf{1}$ dado pela Equação (3.14), o conjunto $\mathbb{I}_k'^*$ pode ser escrito como

$$\mathbb{I}_k'^* = \{\mathbf{x} + \mathbf{1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^*\}. \quad (3.18)$$

Por um lado a Equação (3.18) e o Lema 2, implicam que:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_k^* \text{ tais que } \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \text{ e } K_{\alpha,k}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,k}(\mathbf{y}) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} + \mathbf{1}, \mathbf{y} + \mathbf{1} \in \mathbb{I}_k'^* \text{ tais que } \mathbf{x} + \mathbf{1} \subset \mathbf{y} + \mathbf{1} \text{ e } K_{\alpha,k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{1}) = K_{\alpha,k+1}(\mathbf{y} + \mathbf{1}) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k'^*}. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} = \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k'^*}$.

Por outro lado, tendo que $\mathbb{I}_k^*, \mathbb{I}_k'^* \subset \mathbb{I}_{k+1}^*$ ($\mathbb{I}_k'^*$ dado pela Equação (3.18)), o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*}$ definido por

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} = \{\alpha \mid \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{k+1}^* \text{ tais que } \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \text{ e } K_{\alpha,k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,k+1}(\mathbf{y})\}$$

pode ser escrito como:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} = \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} \cup \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k'^*} \cup \mathcal{R}_{k+1} \cup \mathcal{S}_{k+1} \quad (3.19)$$

onde

$$\mathcal{R}_{k+1} := \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\} \quad (3.20)$$

$$\text{e } \mathcal{S}_{k+1} := \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}'_k \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\}. \quad (3.21)$$

Como $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} = \mathcal{A}_{\mathbb{I}'_k}$, tem-se que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} = \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} \cup \mathcal{R}_{k+1} \cup \mathcal{S}_{k+1}. \quad (3.22)$$

Pela hipótese indutiva, o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*}$ é conhecido, falta determinar de forma explícita os conjuntos \mathcal{R}_{k+1} e \mathcal{S}_{k+1} . Para isso, note que

$$\mathcal{R}_{k+1} = (\mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1}) \cup (\mathcal{R}_{k+1} \setminus \mathcal{S}_{k+1}) \quad (3.23)$$

$$\text{e } \mathcal{S}_{k+1} = (\mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1}) \cup (\mathcal{S}_{k+1} \setminus \mathcal{R}_{k+1}), \quad (3.24)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\}, \\ \mathcal{R}_{k+1} \setminus \mathcal{S}_{k+1} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \setminus (\mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k) \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\} \\ \text{e } \mathcal{S}_{k+1} \setminus \mathcal{R}_{k+1} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}'_k \setminus (\mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k) \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k+1} \setminus \mathcal{S}_{k+1} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \setminus (\mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k) \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\} \\ &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \{[0, 0], [0, 1], \dots, [0, k]\} \text{ tal que } \alpha \bar{x} = \alpha(k+1)\} \\ &= \{\alpha = 0\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k+1} \setminus \mathcal{R}_{k+1} &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}'_k \setminus (\mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k) \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}(\mathbf{x}) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1])\} \\ &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \{[1, k+1], [2, k+1], \dots, [k+1, k+1]\} \\ &\quad \text{tal que } \underline{x} + \alpha(k+1 - \underline{x}) = \alpha(k+1)\} \\ &= \{\alpha \mid \exists \mathbf{x} \in \{[1, k+1], [2, k+1], \dots, [k+1, k+1]\} \\ &\quad \text{tal que } \underline{x} - \alpha \underline{x} = 0\} \\ &= \{\alpha = 1\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Veja-se agora a forma explícita de $\mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1} &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k \text{ tal que } K_{\alpha, k+1}([\underline{x}, \bar{x}]) = K_{\alpha, k+1}([0, k+1]) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k \text{ tal que } \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x}) = 0 + \alpha(k+1 - 0) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{I}_k^* \cap \mathbb{I}'_k \text{ tal que } \alpha = \frac{\underline{x}}{k+1 - (\bar{x} - \underline{x})} \\ &\Leftrightarrow \exists \underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}'_k, \underline{x} \leq \bar{x} \text{ tal que } i = \underline{x}, j = k+1 - (\bar{x} - \underline{x}) \text{ e } \alpha = \frac{i}{j} \\ &\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathcal{L}'_k, i < j \text{ tal que } \underline{x} = i, \bar{x} = k+1 - (j - i) \text{ e } \alpha = \frac{i}{j} \\ &\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i < j \leq k+1 \text{ tal que } \alpha = \frac{i}{j}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na Equação (3.27), note que $\underline{x} < k + 1 - (\bar{x} - \underline{x})$ pois $\bar{x} - \underline{x} \in \{0, \dots, k - 1\}$, $\underline{x} \leq \bar{x} \in \mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1} &= \left\{ \frac{i}{j}, i, j \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i < j \leq k + 1 \right\} \\ &= \bigcup_{j=2}^{k+1} \left\{ \frac{i}{j}, i \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i \leq j - 1 \right\} \\ &= \bigcup_{j=2}^{k+1} \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituindo as Equações (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) e (3.28) em (3.22), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} &= \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} \cup (\mathcal{R}_{k+1} \cap \mathcal{S}_{k+1}) \cup (\mathcal{R}_{k+1} \setminus \mathcal{S}_{k+1}) \cup (\mathcal{S}_{k+1} \setminus \mathcal{R}_{k+1}) \\ &= \bigcup_{j=2}^k \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \bigcup_{j=2}^{k+1} \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0\} \cup \{1\} \\ &= \bigcup_{j=2}^{k+1} \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, a Equação (3.15) é válida para $n = k + 1$.

Finalmente, conclui-se que:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \bigcup_{j=2}^n \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0, 1\}, \quad n \geq 1.$$

□

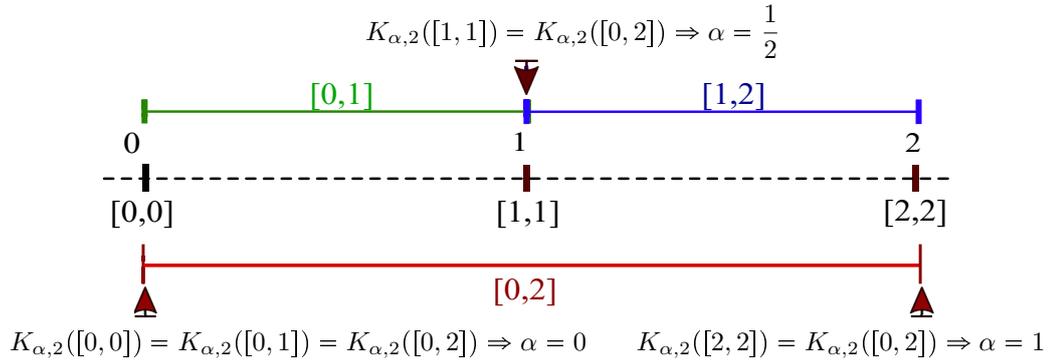
Observação 3.2. No Teorema 3.2 - Equação (3.29), note que $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} \subset \mathcal{R}_{k+1} \cup \mathcal{S}_{k+1}$. Portanto, a forma explícita de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*}$ é apenas determinada pela forma explícita de $\mathcal{R}_{k+1} \cup \mathcal{S}_{k+1}$.

Exemplo 3.2. Na Figura 6 são representados os intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_2^*$ tais que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ e $K_{\alpha,2}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,2}(\mathbf{y})$. Note a importância da existência da inclusão de conjuntos para determinar de forma explícita o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$. Neste caso particular $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_2^*} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Corolário 3.1. O conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ (Equação (3.15)) pode ser escrito como:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \bigcup_{j=1}^n A_j \cup \{0, 1\}, \quad (3.30)$$

sendo $A_j = \left\{ \frac{i}{j}, i, j \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i < j, \text{ m.c.d.}(i, j) = 1 \right\}$.

Figura 6 – Representação dos intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_2^*$ tais que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ e $K_{\alpha,2}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,2}(\mathbf{y})$.


Fonte: Autoria própria.

Demonstração. A prova será feita por indução.

Para $n = 1$, tem-se que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_1^*} = \{0, 1\} = \emptyset \cup \{0, 1\} = A_1 \cup \{0, 1\} = \bigcup_{j=1}^1 A_j \cup \{0, 1\}.$$

Assim, a Equação (3.30) é válida para $n = 1$.

Agora, suponha que a Equação (3.30) é válida para $n = k$. Será provado que a Equação (3.30) também é válida para $n = k + 1$. A Equação (3.15) implica que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} &= \bigcup_{j=2}^{k+1} \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \{0, 1\} \\ &= \bigcup_{j=2}^k \bigcup_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{i}{j} \right\} \cup \bigcup_{i=1}^k \left\{ \frac{i}{k+1} \right\} \cup \{0, 1\} \\ &= \mathcal{A}_{\mathbb{I}_k^*} \cup \bigcup_{i=1}^k \left\{ \frac{i}{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Reescrevendo $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*}$ usando a hipótese indutiva, tem-se:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} = \bigcup_{j=1}^k A_j \cup \bigcup_{i=1}^k \left\{ \frac{i}{k+1} \right\} \cup \{0, 1\}.$$

Note que o conjunto $\bigcup_{i=1}^k \left\{ \frac{i}{k+1} \right\}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^k \left\{ \frac{i}{k+1} \right\} &= \left\{ \frac{i}{k+1}, i \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i \leq k, \text{ m.c.d.}(i, k+1) = 1 \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \frac{i}{k+1}, i \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i \leq k, \text{ m.c.d.}(i, k+1) > 1 \right\} \\ &= A_{k+1} \cup A_{k+1}^{np}. \end{aligned}$$

Se $\frac{i}{k+1} \in A_{k+1}^{np}$ então $\exists r > 1, r \in \mathbb{N}^*$ tal que $1 \leq i \leq k$ e $\text{m.c.d.}(i, k+1) = r$. Com isso, $\text{m.c.d.}\left(\frac{i}{r}, \frac{k+1}{r}\right) = 1$, sendo que $\frac{i}{r}, \frac{k+1}{r} \in \mathbb{N}^*$. Como $i < k+1$, $h' = \frac{i}{r} < \frac{k+1}{r} = h''$. Logo, $1 \leq h' < h'' \leq k$ e $\text{m.c.d.}(h', h'') = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{i}{k+1} &= \frac{h'}{h''} \in \bigcup_{j=1}^k A_j \\ \Rightarrow A_{k+1}^{np} &\subset \bigcup_{j=1}^k A_j \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{I}_{k+1}^*} &= \bigcup_{j=1}^k A_j \cup A_{k+1} \cup \{0, 1\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \cup \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Assim, a Equação (3.30) é válida para $n = k+1$.

Finalmente, conclui-se que:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \bigcup_{j=1}^n A_j \cup \{0, 1\}.$$

□

Corolário 3.2. O número de elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, denotado por $|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}|$, é dado por:

$$|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}| = \sum_{j=2}^n |\varphi(j)| + 2, \quad n \geq 1 \quad (3.31)$$

onde φ é a função de Euler Totient.

A função de *Euler Totient*, $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, é definida como o número de naturais menores que j que são primos relativos a $j > 1$ (nenhum fator em comum com j) e $\varphi(1) = 1$ [74], isto é,

$$\varphi(j) = |\{i \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i < j \text{ e } \text{m.c.d.}(i, j) = 1\}|. \quad (3.32)$$

A função *Euler Totient* cumpre as seguintes propriedades:

1. Se p é primo então $\varphi(p) = p - 1$.
2. Se p é primo e $k \in \mathbb{N}$ então $\varphi(p^k) = (p - 1)p^{k-1}$.
3. Se m e n são primos relativos então $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Essas três propriedades permitem calcular $\varphi(j)$ por meio da fatoração de j . Seja $j = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$ com primos distintos p_1, p_2, \dots, p_r e $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{Z}^+$. Então

$$\varphi(j) = \prod_{k=1}^r p_k^{a_k-1} (p_k - 1). \quad (3.33)$$

Equivalentemente,

$$\varphi(j) = j \prod_{p|j} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (3.34)$$

onde o produto varia apenas sobre os primos distintos p que dividem j .

Demonstração do Corolário 3.2. Pelo Corolário 3.1 tem-se que $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \bigcup_{j=1}^n A_j \cup \{0, 1\},$$

sendo $A_j = \left\{ \frac{i}{j}, i, j \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i < j, \text{ m.c.d.}(i, j) = 1 \right\}$. Observe que o número de elementos de A_j , $j > 1$, está dado pela função de Euler Totient e o número de elementos de $A_1 = \emptyset$ é zero. Então, para calcular o número de elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ basta mostrar que A_2, A_3, \dots, A_n são disjuntos dois a dois, isto é:

$$A_k \cap A_l = \emptyset, \quad \forall k, l \in \{2, \dots, n\}, k \neq l.$$

Com efeito, suponha que existe $p \in A_k \cap A_l$, $\forall k, l \in \{2, \dots, n\}, k \neq l$. Então

$$p \in A_k \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^*, 1 \leq s < k, \text{ m.c.d.}(s, k) = 1 \text{ tal que } p = \frac{s}{k} \quad (3.35)$$

$$\text{e } p \in A_l \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}^*, 1 \leq r < l, \text{ m.c.d.}(r, l) = 1 \text{ tal que } p = \frac{r}{l}. \quad (3.36)$$

As Expressões (3.35) e (3.36), implicam que

$$\begin{aligned} p = \frac{s}{k} = \frac{r}{l} &\Rightarrow s = \frac{rk}{l} \\ &\Rightarrow l|k, \text{ já que m.c.d.}(r, l) = 1 \\ &\Rightarrow \exists h \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } k = hl, \end{aligned}$$

e com isso $s = hr$. Logo $\text{m.c.d.}(s, k) = \text{m.c.d.}(hr, hl) = h(\text{m.c.d.}(r, l)) = h$, em contradição com $\text{m.c.d.}(s, k) = 1$.

Como A_1, A_2, \dots, A_n são disjuntos dois a dois, segue-se que

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}| &= |A_1| + \sum_{j=2}^n |A_j| + |\{0, 1\}| \\ &= \sum_{j=2}^n |A_j| + |\{0, 1\}| \\ &= \sum_{j=2}^n |\varphi(j)| + 2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3. O numero de elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_3^*}$, de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_5^*}$ e de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{255}^*}$, é dado por:

$$|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_3^*}| = \sum_{j=2}^3 |\varphi(j)| + 2 = \varphi(2) + \varphi(3) + 2 = 1 + 2 + 2 = 5,$$

$$|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_5^*}| = \sum_{j=2}^5 |\varphi(j)| + 2 = \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(5) + 2 = 1 + 2 + 2 + 4 + 2 = 11$$

$$\text{e } |\mathcal{A}_{\mathbb{I}_{255}^*}| = \sum_{j=2}^{255} |\varphi(j)| + 2 = \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(255) + 2 = 19820.$$

Exemplo 3.4. Seja \mathbb{I}_3^* o conjunto dos intervalos de \mathcal{L}_3 dado por:

$$\mathbb{I}_3^* = \{[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3], [3, 3]\}.$$

Pelo Corolário 3.1, tem-se que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_3^*} = \bigcup_{j=1}^3 A_j \cup \{0, 1\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}.$$

Com isso, apresentam-se a seguir algumas cadeias finitas de \mathbb{I}_3^* , de acordo com a relação de ordem \leq_α , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_3^*}$.

1. A cadeia finita $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{1}{4}})$, na qual a ordem dos seus elementos depende da função $K_{\frac{1}{4}, 3} : \mathbb{I}_3^* \rightarrow [0, 3]$, onde

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{4}, 3}([0, 0]) &= 0 + \frac{1}{4}(0) = 0; \\ K_{\frac{1}{4}, 3}([0, 1]) &= 0 + \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}; \\ &\vdots \\ K_{\frac{1}{4}, 3}([2, 3]) &= 2 + \frac{1}{4}(3 - 2) = \frac{9}{4}; \\ K_{\frac{1}{4}, 3}([3, 3]) &= 3 + \frac{1}{4}(0) = 3. \end{aligned}$$

Assim,

$$K_{\frac{1}{4}, 3}(\mathbb{I}_3^*) = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, 2, \frac{9}{4}, 3\right\}. \quad (3.37)$$

Portanto, a ordem $\leq_{\frac{1}{4}}$ no conjunto \mathbb{I}_3^* gera a seguinte relação de ordem:

$$[0, 0] <_{\frac{1}{4}} [0, 1] <_{\frac{1}{4}} [0, 2] <_{\frac{1}{4}} [0, 3] <_{\frac{1}{4}} [1, 1] <_{\frac{1}{4}} [1, 2] <_{\frac{1}{4}} [1, 3] <_{\frac{1}{4}} [2, 2] <_{\frac{1}{4}} [2, 3] <_{\frac{1}{4}} [3, 3].$$

2. A cadeia finita $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{5}{6}})$, na qual a ordem dos seus elementos depende da função

$K_{\frac{5}{6},3} : \mathbb{I}_3^* \rightarrow [0, 3]$ onde

$$\begin{aligned} K_{\frac{5}{6},3}([0, 0]) &= 0 + \frac{5}{6}(0) = 0; \\ K_{\frac{5}{6},3}([0, 1]) &= 0 + \frac{5}{6}(1 - 0) = \frac{5}{6}; \\ &\vdots \\ K_{\frac{5}{6},3}([2, 3]) &= 2 + \frac{5}{6}(3 - 2) = \frac{17}{6}; \\ K_{\frac{5}{6},3}([3, 3]) &= 3 + \frac{1}{4}(0) = 3. \end{aligned}$$

Assim,

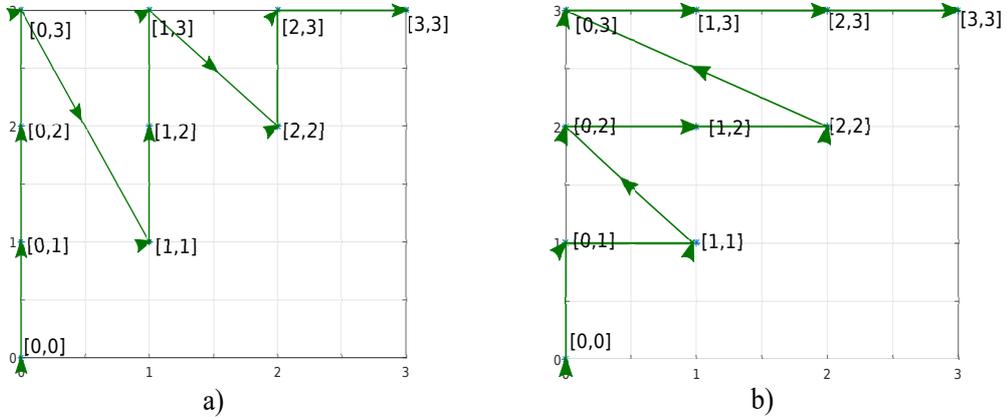
$$K_{\frac{5}{6},3}(\mathbb{I}_3^*) = \left\{ 0, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 1, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, 2, \frac{17}{6}, 3 \right\}. \quad (3.38)$$

Portanto, a ordem $\leq_{\frac{5}{6}}$ no conjunto \mathbb{I}_3^* gera a seguinte relação de ordem:

$$[0, 0] <_{\frac{5}{6}} [0, 1] <_{\frac{5}{6}} [1, 1] <_{\frac{5}{6}} [0, 2] <_{\frac{5}{6}} [1, 2] <_{\frac{5}{6}} [2, 2] <_{\frac{5}{6}} [0, 3] <_{\frac{5}{6}} [1, 3] <_{\frac{5}{6}} [2, 3] <_{\frac{5}{6}} [3, 3].$$

Na Figura 7, são representadas as cadeias finitas $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{1}{4}})$ e $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{5}{6}})$ no plano. A ordem dos intervalos de \mathbb{I}_3^* , em cada caso, segue a sequência dada pela linha verde.

Figura 7 – Representação de cadeias finitas no plano. a) $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{1}{4}})$. b) $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{5}{6}})$.



Fonte: Autoria própria.

No Exemplo 3.4, note que $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{1}{4}}) = (\mathbb{I}_3^*, \leq_{lex1})$ e $(\mathbb{I}_3^*, \leq_{\frac{5}{6}}) = (\mathbb{I}_3^*, \leq_{lex2})$. Na Seção 3.3 será mostrado que as ordens admissíveis \leq_{α} em \mathbb{I}_n^* com $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ incluem as ordens lineares \leq_{lex1} e \leq_{lex2} .

3.2 Ordens Admissíveis em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$

Bustince et al. em [46] introduzem o conceito de ordem admissível \leq em (\mathbb{I}^*, \leq_2) (ver Definição 1.9), a qual refina a ordem \leq_2 . Além disso eles mostraram no mesmo artigo,

que as ordens admissíveis em (\mathbb{I}^*, \leq_2) também podem ser geradas a partir de funções de agregação no seguinte sentido:

Se $f, g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ são funções de agregação que satisfazem,

$$f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \text{ e } g(x_1, x_2) = g(y_1, y_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \quad (3.39)$$

então f, g geram uma ordem admissível $\leq_{f,g}$ em \mathbb{I}^* definida por:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{f,g} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow (f(\underline{x}, \bar{x}), g(\underline{x}, \bar{x})) \leq_{lex1} (f(\underline{y}, \bar{y}), g(\underline{y}, \bar{y})). \quad (3.40)$$

Note que, as ordens admissíveis \leq em \mathbb{I}^* podem ser estendidas no conjunto $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$, por meio do isomorfismo $\Phi_n : (\mathbb{I}^*, \leq_2) \rightarrow (\mathbb{I}_{[0,n]}^*, \leq_2)$ (ver Equação (1.18)), pois

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow n[\underline{x}, \bar{x}] \leq n[\underline{y}, \bar{y}], \quad \forall [\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}^*. \quad (3.41)$$

Evidentemente, pela Equação (3.41), a ordem admissível $\leq_{f,g}$ pode ser definida em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ sendo, neste caso, f e g funções de agregação de $[0, n]^2 \rightarrow [0, n]$ que satisfazem a Equação (3.39). Em particular, no seguinte teorema, são definidas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha,\beta}$ em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ geradas pelas funções de agregação K_α, K_β (combinações convexas, ver Equação (1.15)).

Teorema 3.3. *Sejam $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tal que $\alpha \neq \beta$ e $K_\alpha, K_\beta : [0, n]^2 \rightarrow [0, n]$ funções de agregação definidas na Equação (1.15). Então, a relação $\leq_{\alpha,\beta}$ definida por:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq_{\alpha,\beta} \mathbf{y} &\Leftrightarrow (K_\alpha(\mathbf{x}), K_\beta(\mathbf{x})) \leq_{lex1} (K_\alpha(\mathbf{y}), K_\beta(\mathbf{y})) \\ &\Leftrightarrow K_\alpha(\mathbf{x}) < K_\alpha(\mathbf{y}), \text{ ou } K_\alpha(\mathbf{x}) = K_\alpha(\mathbf{y}) \text{ e } K_\beta(\mathbf{x}) \leq K_\beta(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{[0,n]}^*$, é uma ordem admissível em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$.

Demonstração. A prova segue-se da Equação (3.41) e do Teorema 3.3 da referência [46], onde as funções de agregação K_α e K_β de $[0, n]^2$ em $[0, n]$ satisfazem a Equação (3.39). □

Proposição 3.1.

1. Seja $\alpha \in [0, 1[$. Então, todas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha,\beta}$ em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ tal que $\beta > \alpha$ coincidem.
2. Seja $\alpha \in]0, 1]$. Então, todas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha,\beta}$ em $\mathbb{I}_{[0,n]}^*$ tal que $\beta < \alpha$ coincidem.

Demonstração. A prova segue-se da Equação (3.41) e da Proposição 3.8 da referência [46]. □

Corolário 3.3. Seja $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Então, todas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha, \beta}$ em $\mathbb{I}_{[0, n]}^*$, estão dadas por:

1. $\leq_{\alpha, \beta}$ que é igual a $\leq_{\alpha, 1}$ para cada $\beta > \alpha$. A ordem admissível $\leq_{\alpha, 1}$ é denotada por \leq_{α^+} .
2. $\leq_{\alpha, \beta}$ que é igual a $\leq_{\alpha, 0}$ para cada $\beta < \alpha$. A ordem admissível $\leq_{\alpha, 0}$ é denotada por \leq_{α^-} .

Demonstração.

1. Como $1 \geq \beta > \alpha$ tem-se, pela Proposição 3.1, que todas as ordens admissíveis para cada $\beta > \alpha$ são iguais a $\leq_{\alpha, 1}$.
2. Como $0 \leq \beta < \alpha$ tem-se, pela Proposição 3.1, que todas as ordens admissíveis para cada $\beta < \alpha$ são iguais a $\leq_{\alpha, 0}$.

□

Observação 3.3. As ordens admissíveis \leq_{α^+} e \leq_{α^-} , introduzidas no Corolário 3.3, cumprem as seguintes relações:

1. Para cada $\alpha \in [0, 1[$ e $\beta = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq_{\alpha^+} \mathbf{y} &\Leftrightarrow K_{\alpha}(\mathbf{x}) < K_{\alpha}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha}(\mathbf{x}) = K_{\alpha}(\mathbf{y}) \text{ e } K_1(\mathbf{x}) \leq K_1(\mathbf{y}) \\ &\Leftrightarrow K_{\alpha}(\mathbf{x}) < K_{\alpha}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha}(\mathbf{x}) = K_{\alpha}(\mathbf{y}) \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{[0, n]}^*. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $\leq_{\alpha^+} = \leq_{lex1}$.

2. Para cada $\alpha \in]0, 1]$ e $\beta = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq_{\alpha^-} \mathbf{y} &\Leftrightarrow K_{\alpha}(\mathbf{x}) < K_{\alpha}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha}(\mathbf{x}) = K_{\alpha}(\mathbf{y}) \text{ e } K_0(\mathbf{x}) \leq K_0(\mathbf{y}) \\ &\Leftrightarrow K_{\alpha}(\mathbf{x}) < K_{\alpha}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha}(\mathbf{x}) = K_{\alpha}(\mathbf{y}) \text{ e } \underline{x} \leq \underline{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_{[0, n]}^*. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Em particular, se $\alpha = 1$ então $\leq_{\alpha^-} = \leq_{lex2}$.

Exemplo 3.5. Sejam os reticulados completos $(\mathbb{I}_{[0, 255]}^*, \leq_{\frac{1}{2}^+})$ e $(\mathbb{I}_{[0, 255]}^*, \leq_{\frac{1}{2}^-})$. Como $[3, 6], [1, 8] \in \mathbb{I}_{[0, 255]}^*$, tem-se que:

1. $[3, 6] <_{\frac{1}{2}^+} [1, 8]$, já que $K_{\frac{1}{2}}(1, 8) = K_{\frac{1}{2}}(3, 6) = \frac{9}{2}$ e $6 < 8$.
2. $[1, 8] <_{\frac{1}{2}^-} [3, 6]$, já que $K_{\frac{1}{2}}(1, 8) = K_{\frac{1}{2}}(3, 6) = \frac{9}{2}$ e $1 < 3$.

3.3 Relação entre as h -Ordens e as Ordens Admissíveis em \mathbb{I}_n^*

Note que as ordens admissíveis $\leq_{\alpha,\beta}$ definidas no reticulado completo $(\mathbb{I}_{[0,n]}^*, \leq_2)$, também podem ser definidas sobre o reticulado completo (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) . Isto é, a relação de ordem $\leq_{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq \beta$, em (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) definida por:

$$\mathbf{x} \leq_{\alpha,\beta} \mathbf{y} \Leftrightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \text{ e } K_{\beta,n}(\mathbf{x}) \leq K_{\beta,n}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*. \quad (3.45)$$

é uma *ordem admissível* em \mathbb{I}_n^* . Portanto, os teoremas, as proposições e os corolários expostos na Seção 3.2 sobre $(\mathbb{I}_{[0,n]}^*, \leq_2)$, continuam válidos sobre (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) .

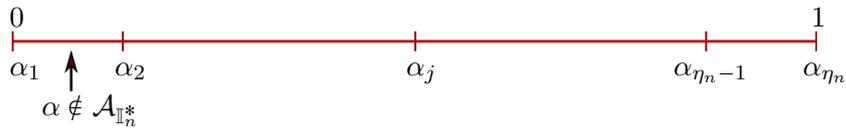
Nesta seção serão relacionadas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha,1} = \leq_{\alpha^+}$, $\alpha \in [0, 1[$, e $\leq_{\alpha,0} = \leq_{\alpha^-}$, $\alpha \in]0, 1]$, no reticulado completo (\mathbb{I}_n^*, \leq_2) com as h -ordens \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$, em \mathbb{I}_n^* .

Pelo Teorema 3.2 e o Corolário 3.2, podem-se calcular todos os elementos do conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ e a quantidade deles ($|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}|$), respectivamente. Daqui em diante o número de elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ será denotado por η_n . Assim, o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\eta_n-1}, \alpha_{\eta_n}\}, \quad (3.46)$$

sendo $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_j < \alpha_{j+1} < \dots < \alpha_{\eta_n-1} < \alpha_{\eta_n} = 1$ (ver Figura 8).

Figura 8 – Representação do conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \subset [0, 1]$



Fonte: Autoria própria.

Lema 3. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$. Se \mathbf{x} e \mathbf{y} são da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$ então $\mathbf{x} <_{\alpha} \mathbf{y}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y} &\Rightarrow (1 - \alpha)\underline{x} + \alpha\bar{x} < (1 - \alpha)\underline{y} + \alpha\bar{y} \\ &\Rightarrow \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x}) < \underline{y} + \alpha(\bar{y} - \underline{y}) \\ &\Rightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.47)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Como $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$, tem-se que $\mathbf{x} <_{\alpha} \mathbf{y}$. □

Lema 4. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$. Se $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$, então $\frac{\underline{x} - \underline{y}}{(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$. Se $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$, isto é,

$$\underline{y} < \underline{x} \leq \bar{x} \leq \bar{y} \text{ ou } \underline{y} \leq \underline{x} \leq \bar{x} < \bar{y},$$

então

$$\begin{aligned} 0 < \underline{x} - \underline{y} &\leq (\bar{y} - \bar{x}) + (\underline{x} - \underline{y}) = (\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x}) \\ \text{ou } 0 &\leq \underline{x} - \underline{y} < (\bar{y} - \bar{x}) + (\underline{x} - \underline{y}) = (\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Assim, $\underline{x} - \underline{y} = i \in \mathcal{L}_n$ e $0 < (\bar{y} - \bar{x}) + (\underline{x} - \underline{y}) = j \in \mathcal{L}_n$ tais que $0 \leq i < j$ ou $0 < i \leq j$.

Portanto, $\frac{i}{j} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$.

□

Lema 5. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}^c \neq \emptyset$.
2. $(\underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x})$ ou $(\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y})$ ou $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$. Observe que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cap \mathbf{y}^c \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{x} \text{ tal que } x \notin \mathbf{y} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{x} \text{ tal que } x < \underline{y} \text{ ou } \bar{y} < x \\ &\Leftrightarrow \underline{x} < \underline{y} \text{ ou } \bar{y} < \bar{x} \\ &\Leftrightarrow (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{y} \leq \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}) \\ &\Leftrightarrow (\underline{x} < \underline{y} \leq \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y}) \\ &\quad (\underline{y} = \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} = \bar{y}) \\ &\Leftrightarrow (\underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y}) \text{ ou } \mathbf{y} \subset \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

□

Teorema 3.4. Seja $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ o conjunto dado pela Equação (3.46). Se $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, então as cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha^+})$, $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha^-})$ e $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$ são iguais. Além disso, todas as cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$ com $\alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}$ e $\alpha_j, \alpha_{j+1} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, são iguais.

Demonstração. Será mostrado que $\leq_{\alpha} = \leq_{\alpha^+} = \leq_{\alpha^-}$, se $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, isto é, que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, tem-se

$$\mathbf{x} \leq_{\alpha} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq_{\alpha^+} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq_{\alpha^-} \mathbf{y}. \quad (3.50)$$

Com efeito, sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ arbitrários e $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$. Pelos Teoremas 3.1 e 3.3, \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, $\leq_{\alpha^+} = \leq_{\alpha,1}$ e $\leq_{\alpha^-} = \leq_{\alpha,0}$ são ordens lineares. Note que,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} =_{\alpha} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} =_{\alpha^+} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} =_{\alpha^-} \mathbf{y}. \quad (3.51)$$

Portanto, pode-se focar no caso $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, isto é, $\mathbf{x} <_{\alpha} \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} <_{\alpha} \mathbf{x}$. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{x} <_{\alpha} \mathbf{y} \Leftrightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}). \quad (3.52)$$

Lembre que as ordens admissíveis \leq_{α^+} e \leq_{α^-} em \mathbb{I}_n^* são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq_{\alpha^+} \mathbf{y} &\Leftrightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}, \\ \mathbf{x} \leq_{\alpha^-} \mathbf{y} &\Leftrightarrow K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y}), \text{ ou } K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha,n}(\mathbf{y}) \text{ e } \underline{x} \leq \underline{y}. \end{aligned}$$

Visto que $K_{\alpha,n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha,n}(\mathbf{y})$ tem-se

$$\mathbf{x} <_{\alpha^+} \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{x} <_{\alpha^-} \mathbf{y}. \quad (3.53)$$

Portanto, as Equações (3.51), (3.52) e (3.53) implicam que,

$$\mathbf{x} \leq_{\alpha} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq_{\alpha^+} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq_{\alpha^-} \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$$

Assim, $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha^+}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha^-})$.

Agora, será mostrado que todas cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, com $\alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}$ e $\alpha_j, \alpha_{j+1} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, são iguais.

Sejam $\alpha', \alpha'' \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Suponha, que $\leq_{\alpha'}$ e $\leq_{\alpha''}$ não são iguais. Portanto, existem $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ tais que $\mathbf{x} <_{\alpha'} \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} <_{\alpha''} \mathbf{x}$ ou $\mathbf{y} <_{\alpha'} \mathbf{x}$ e $\mathbf{x} <_{\alpha''} \mathbf{y}$. Equivalentemente, existem $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ tais que $\mathbf{x} <_{\alpha'} \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} <_{\alpha''} \mathbf{x}$, isto é:

$$K_{\alpha',n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha',n}(\mathbf{y}) \text{ e } K_{\alpha'',n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha'',n}(\mathbf{x}). \quad (3.54)$$

Note que, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \neq \mathbf{y} &\Leftrightarrow \mathbf{x} \not\subseteq \mathbf{y} \text{ ou } \mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{x} \text{ tal que } x \notin \mathbf{y} \text{ ou } \exists y \in \mathbf{y} \text{ tal que } y \notin \mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \cap \mathbf{y}^c \neq \emptyset \text{ ou } \mathbf{y} \cap \mathbf{x}^c \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Logo, a Equação (3.55) e o Lema 5, implicam que

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Leftrightarrow (\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y}) \text{ ou } (\underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } \mathbf{y} \subset \mathbf{x} \text{ ou } \mathbf{x} \subset \mathbf{y}. \quad (3.56)$$

Caso \mathbf{x} e \mathbf{y} sejam da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$ (ver Figura 9, parte a)), tem-se, pelo Lema 3 com $\alpha', \alpha'' \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, que $\mathbf{x} <_{\alpha'} \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} <_{\alpha''} \mathbf{y}$, contradizendo a Equação (3.54). Similarmente, se \mathbf{x} e \mathbf{y} são da forma $\underline{y} < \underline{x}$ e $\bar{y} < \bar{x}$ (ver Figura 9, parte b)), tem-se, pelo Lema 3, que $\mathbf{y} <_{\alpha'} \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} <_{\alpha''} \mathbf{x}$, contradizendo a Equação (3.54).

Na sequência, considere o caso $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ (ver Figura 9, parte c)). Como $K_{\alpha',n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha',n}(\mathbf{y})$ e $K_{\alpha'',n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha'',n}(\mathbf{x})$, tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{x} + \alpha'(\bar{x} - \underline{x}) < \underline{y} + \alpha'(\bar{y} - \underline{y}) &\Rightarrow \underline{x} - \underline{y} < \alpha'[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] \\ \text{e } \underline{y} + \alpha''(\bar{y} - \underline{y}) < \underline{x} + \alpha''(\bar{x} - \underline{x}) &\Rightarrow \alpha''[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] < \underline{x} - \underline{y}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Logo,

$$\alpha''[(\underline{y} - \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{x})] < \underline{x} - \underline{y} < \alpha'[(\underline{y} - \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{x})]. \quad (3.58)$$

Visto que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ tem-se $(\underline{y} - \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{x}) > 0$, e pela Equação (3.58) segue que

$$\alpha'' < \frac{\underline{x} - \underline{y}}{(\underline{y} - \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{x})} < \alpha'. \quad (3.59)$$

Pelo Lema 4, $\alpha_k = \frac{\underline{x} - \underline{y}}{(\underline{y} - \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{x})} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ e como $\alpha', \alpha'' \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, tem-se $\alpha_j < \alpha'' < \alpha_k < \alpha' < \alpha_{j+1}$, sendo uma contradição, pois não existe $\alpha_s \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tal que $\alpha_j < \alpha_s < \alpha_{j+1}$.

Similarmente, para o caso $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$, tem-se $(\underline{x} - \underline{x}) - (\underline{y} - \underline{y}) > 0$. Assim, pela Equação (3.58), segue-se que

$$\alpha' < \frac{\underline{y} - \underline{x}}{(\underline{x} - \underline{x}) - (\underline{y} - \underline{y})} < \alpha''. \quad (3.60)$$

Pelo Lema 4, $\frac{\underline{y} - \underline{x}}{(\underline{x} - \underline{x}) - (\underline{y} - \underline{y})} = \alpha_r \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ e como $\alpha', \alpha'' \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, tem-se $\alpha_j < \alpha' < \alpha_r < \alpha'' < \alpha_{j+1}$, sendo uma contradição, pois não existe $\alpha_s \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tal que $\alpha_j < \alpha_s < \alpha_{j+1}$.

Portanto, todas as cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ são iguais, para todo $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. \square

Proposição 3.2. Seja $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\eta_n-1}, \alpha_{\eta_n}\}$, sendo $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_j < \alpha_{j+1} < \dots < \alpha_{\eta_n-1} < \alpha_{\eta_n} = 1$. Então as seguintes afirmações são válidas:

1. Para todo $j \in \{1, 2, \dots, \eta_n - 1\}$ e $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, tem-se $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_j^+}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$.
2. Para todo $j \in \{2, 3, \dots, \eta_n\}$ e $\alpha \in]\alpha_{j-1}, \alpha_j[$, tem-se $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_j^-}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$.

Demonstração.

1. Seja $j \in \{1, 2, \dots, \eta_n - 1\}$ e $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Suponha que $\leq_{\alpha_j^+}$ e \leq_α não são iguais. Portanto, existem $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ tais que $\mathbf{x} <_{\alpha_j^+} \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} <_\alpha \mathbf{x}$ ou $\mathbf{y} <_{\alpha_j^+} \mathbf{x}$ e $\mathbf{x} <_\alpha \mathbf{y}$. Equivalentemente, existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ tais que $\mathbf{x} <_{\alpha_j^+} \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} <_\alpha \mathbf{x}$, isto é:

$$\begin{aligned} K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y}) \text{ ou } (K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y}) \text{ e } K_{\beta, n}(\mathbf{x}) < K_{\beta, n}(\mathbf{y}), \forall \beta > \alpha_j), \\ \text{e } K_{\alpha, n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha, n}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

A Equação (3.55) e o Lema 5 implicam que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ satisfazem:

$$(\underline{x} < \underline{y} \text{ e } \bar{x} < \bar{y}) \text{ ou } (\underline{y} < \underline{x} \text{ e } \bar{y} < \bar{x}) \text{ ou } \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \text{ ou } \mathbf{y} \subset \mathbf{x} \quad (3.62)$$

Assim, caso \mathbf{x} e \mathbf{y} sejam da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$, tem-se, pelo Lema 3, que $\mathbf{x} <_{\alpha_j^+} \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} <_{\alpha} \mathbf{y}$, contradizendo a Equação (3.61). Similarmente, se \mathbf{x} e \mathbf{y} são da forma $\underline{y} < \underline{x}$ e $\bar{y} < \bar{x}$, tem-se, pelo Lema 3, que $\mathbf{y} <_{\alpha_j^+} \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} <_{\alpha} \mathbf{x}$, contradizendo a Equação (3.61).

Caso \mathbf{x} e \mathbf{y} satisfazem $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ e a Equação (3.61), são observados os seguintes sub-casos:

- i. $K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y})$ e $K_{\alpha, n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha, n}(\mathbf{x})$.

Deste sub-caso, tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{x} + \alpha_j(\bar{x} - \underline{x}) < \underline{y} + \alpha_j(\bar{y} - \underline{y}) &\Rightarrow \underline{x} - \underline{y} < \alpha_j[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] \\ \underline{y} + \alpha(\bar{y} - \underline{y}) < \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x}) &\Rightarrow \alpha[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] < \underline{x} - \underline{y}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Logo,

$$\alpha[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] < \underline{x} - \underline{y} < \alpha_j[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})]. \quad (3.64)$$

Como $(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x}) > 0$, pela Equação (3.64), tem-se que

$$\alpha < \frac{\underline{x} - \underline{y}}{(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})} < \alpha_j, \quad (3.65)$$

sendo uma contradição com $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$.

- ii. $K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y})$, $K_{\beta, n}(\mathbf{x}) < K_{\beta, n}(\mathbf{y})$ e $K_{\alpha, n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha, n}(\mathbf{x})$, $\beta > \alpha_j$.

Deste sub-caso, tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{x} + \alpha_j(\bar{x} - \underline{x}) = \underline{y} + \alpha_j(\bar{y} - \underline{y}) &\Rightarrow \alpha_j((\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})) = \underline{x} - \underline{y} \\ \underline{x} + \beta(\bar{x} - \underline{x}) < \underline{y} + \beta(\bar{y} - \underline{y}) &\Rightarrow \underline{x} - \underline{y} < \beta((\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})) \\ \underline{y} + \alpha(\bar{y} - \underline{y}) < \underline{x} + \alpha(\bar{x} - \underline{x}) &\Rightarrow \alpha((\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})) < \underline{x} - \underline{y}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Logo,

$$\alpha[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})] < \alpha_j((\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})) < \beta[(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x})]. \quad (3.67)$$

Visto que $(\bar{y} - \underline{y}) - (\bar{x} - \underline{x}) > 0$, então $\alpha < \alpha_j < \beta$, sendo uma contradição com $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$.

Finalmente, caso \mathbf{x} e \mathbf{y} satisfazem $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ e a Equação (3.61), são observados os seguintes sub-casos:

- i. $K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) < K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y})$ e $K_{\alpha, n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha, n}(\mathbf{x})$.

Deste sub-caso, como $(\bar{x} - \underline{x}) - (\bar{y} - \underline{y}) > 0$ e pela Equação (3.64), segue-se que

$$\alpha_j < \frac{\underline{y} - \underline{x}}{(\bar{x} - \underline{x}) - (\bar{y} - \underline{y})} < \alpha. \quad (3.68)$$

Pelo Lema 4, $\alpha_r = \frac{y - x}{(\bar{x} - x) - (\bar{y} - y)} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ e como $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, tem-se que $\alpha_j < \alpha_r < \alpha < \alpha_{j+1}$, sendo uma contradição, pois não existe $\alpha_s \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tal que $\alpha_j < \alpha_s < \alpha_{j+1}$.

ii. $K_{\alpha_j, n}(\mathbf{x}) = K_{\alpha_j, n}(\mathbf{y})$, $K_{\beta, n}(\mathbf{x}) < K_{\beta, n}(\mathbf{y})$ e $K_{\alpha, n}(\mathbf{y}) < K_{\alpha, n}(\mathbf{x})$, $\beta > \alpha_j$.

Deste sub-caso, como $(\bar{x} - x) - (\bar{y} - y) > 0$ e pela Equação (3.67), tem-se que $\beta < \alpha_j < \alpha$, contradizendo a condição $\beta > \alpha_j$.

Assim, conclui-se que $\leq_{\alpha_j^+}$ e \leq_{α} , $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ são iguais.

2. A demonstração é similar à demonstração do Item 1, utilizando para este caso a ordem linear $\leq_{\alpha_j^-} = \leq_{\alpha_j, \beta}$, para todo $\beta < \alpha_j$.

□

Observação 3.4.

1. Pelo Teorema 3.4 e a Proposição 3.2, para todo $j \in \{1, \dots, \eta_n - 1\}$ e $\alpha \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ tem-se que (ver Figura 10):

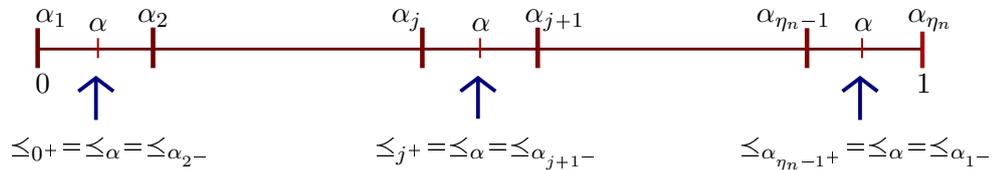
$$(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_j^+}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_{j+1}^-}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha}). \quad (3.69)$$

Em particular,

i. $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{0^+}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{lex1}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_2^-}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, $\alpha \in]0, \alpha_2[$;

ii. $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{1^-}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{lex2}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha_{\eta_n-1}^+}) = (\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, $\alpha \in]\alpha_{\eta_n-1}, 1[$.

Figura 10 – Representação da relação entre as ordens admissíveis \leq_{α^+} , \leq_{α^-} e \leq_{α} , onde $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{\eta_n-1}, \alpha_{\eta_n}\}$.

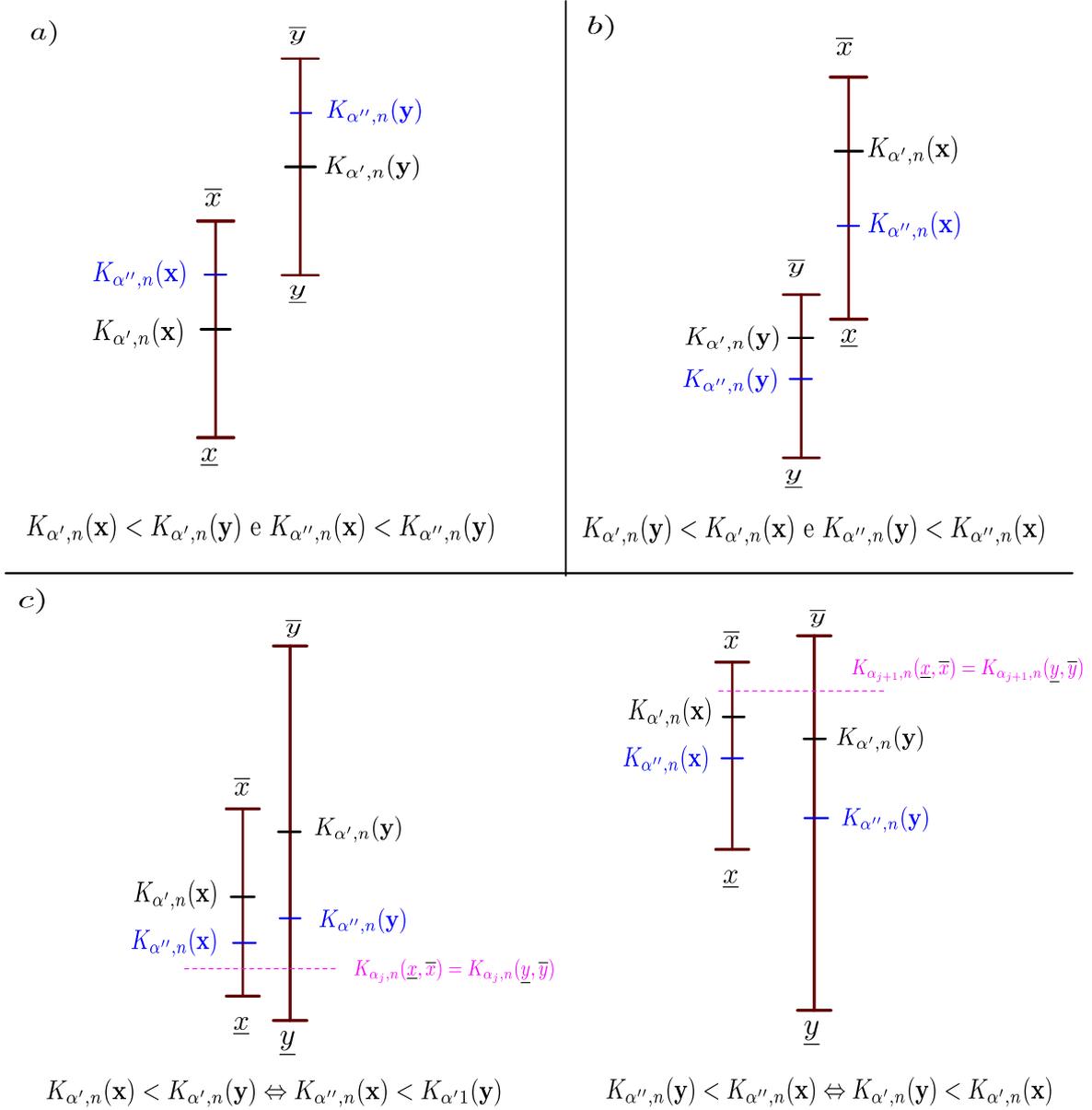


Fonte: Autoria própria.

2. O número total das h -ordens \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$, pelo Teorema 3.4, é $2\eta_n - 1$.

3. O número total das ordens admissíveis \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, pelo Teorema 3.4, é $\eta_n - 1$. Note que $\eta_n - 1$, pela Proposição 3.2, também representa o total de ordens admissíveis \leq_{α^+} e \leq_{α^-} .

Figura 9 – Representação da relação entre as ordens admissíveis $\leq_{\alpha'}$ e $\leq_{\alpha''}$, $\alpha', \alpha'' \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ de acordo com a forma dos intervalos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^*$ a) \mathbf{x} e \mathbf{y} da forma $\underline{x} < \underline{y}$ e $\bar{x} < \bar{y}$. b) \mathbf{x} e \mathbf{y} da forma $\underline{y} < \underline{x}$ e $\bar{y} < \bar{x}$. c) \mathbf{x} e \mathbf{y} da forma $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 3.6. Seja \mathbb{I}_4^* o conjunto dos intervalos de \mathcal{L}_4 dado por:

$$\mathbb{I}_4^* = \{[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [3, 3], [3, 4], [4, 4]\}.$$

Pelo Corolário 3.1, tem-se que $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*} = \bigcup_{j=1}^3 A_j \cup \{0, 1\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, sendo

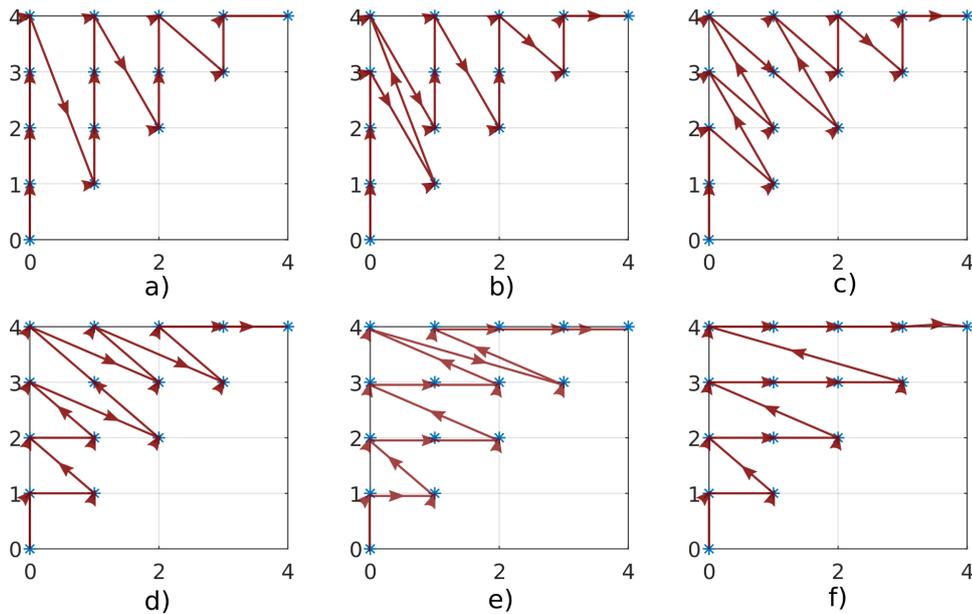
$$A_j = \left\{ \frac{i}{j}, i, j \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq i < j, \text{ m.c.d.}(i, j) = 1 \right\}.$$

Com isso, nas Figuras 11 e 12, são representadas todas as ordens h -ordens \leq_α , $\alpha \in [0, 1]$. Em particular:

1. A Figura 11 mostra todas as ordens admissíveis \leq_α , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$ em \mathbb{I}_4^* , e portanto todas as ordens admissíveis $\leq_{\alpha+}$, $\leq_{\alpha-}$ (ver Observação 3.4-Item 1.). Note que o número de total de ordens admissíveis \leq_α , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$ é 6.
2. A Figura 12 mostra todas as h -ordens \leq_α , $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$. Note que, $|\mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}| = 7$ sendo o número total de h -ordens \leq_α , $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$.

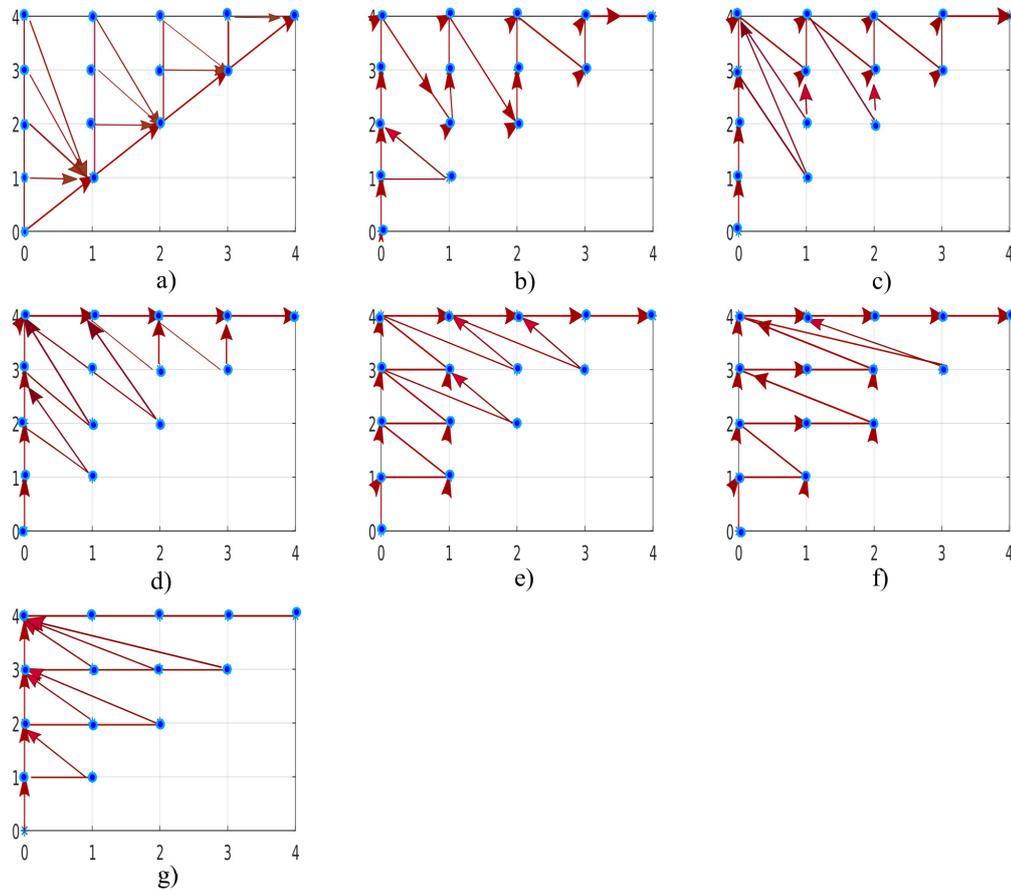
Figura 11 – Representação de todas as cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$.

a) $\alpha = \frac{1}{8}$. b) $\alpha = \frac{7}{24}$. c) $\alpha = \frac{5}{12}$. d) $\alpha = \frac{7}{12}$. e) $\alpha = \frac{17}{24}$. f) $\alpha = \frac{7}{8}$.



Fonte: Autoria própria.

Figura 12 – Representação de todos os prosets $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_4^*}$. a) $\alpha = 0$.
 b) $\alpha = \frac{1}{4}$. c) $\alpha = \frac{1}{3}$. d) $\alpha = \frac{1}{2}$. e) $\alpha = \frac{2}{3}$. f) $\alpha = \frac{3}{4}$. g) $\alpha = 1$.



Fonte: Autoria própria.

Neste capítulo foi apresentado o conceito de h -ordens \leq_α dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, em \mathbb{I}_n^* . Como contribuição, determinaram-se todas as h -ordens que são pré-ordens \leq_α , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ (ver Teorema 3.2 e Corolários 3.1, 3.2). Além disso, mostrou-se que as h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, incluem as ordens admissíveis geradas pelas combinações convexas $K_{\alpha,n}$ e $K_{\beta,n}$, $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$, em \mathbb{I}_n^* , e com isso determinaram-se todas essas ordens admissíveis (ver Teoremas 3.1 e 3.4, e Proposição 3.2). Finalmente, como exemplos, foram apresentadas todas as h -ordens e as ordens admissíveis sobre o conjunto \mathbb{I}_4^* .

No próximo capítulo serão apresentadas as diferentes abordagens propostas para o cálculo da borda de uma imagem digital intervalar. Tais abordagens são baseadas na morfologia matemática \mathbb{I}_n^* -fuzzy e nas h -ordens \leq_α , $\alpha \in [0, 1]$, em \mathbb{I}_n^* .

Capítulo 4

Gradiente Morfológico de Imagens Digitais Intervalares

O *gradiente morfológico* de uma imagem em tons de cinza é uma operação fundamental no processamento de imagens digitais, frequentemente utilizada como precursor para outras operações como, por exemplo, a segmentação de imagens, a qual inclui a detecção de bordas. O clássico operador gradiente morfológico, também chamado *gradiente de Beucher*, é definido como a diferença entre os operadores morfológicos de dilatação e de erosão por um elemento estruturante [7, 32]. Expressado dessa forma, o gradiente morfológico retorna a máxima variação da intensidade de cada pixel dentro de uma vizinhança definida pelo elemento estruturante S . Se o elemento estruturante S é o mesmo para a dilatação e a erosão, tal que S contém a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$, então a erosão da imagem pelo elemento estruturante S é menor que a dilatação da imagem pelo elemento estruturante S [32]. Esse conceito inclui o gradiente morfológico fuzzy para imagens digitais em tons de cinza utilizado por González-Hidalgo et al. [16, 48] o qual está baseado nos operadores morfológicos de erosão e dilatação fuzzy.

Note que, uma imagem digital em tons de cinza possui algum grau de incerteza na localização e na intensidade do pixel da imagem real desde que o resultado de uma discretização do mundo real [18, 33]. Lopez-Molina et al. [33] propõem um modelo para captura dessa incerteza em termos de imagens intervalares. Assim, a MM \mathbb{L} -fuzzy pode ser utilizada para determinar o gradiente morfológico de uma imagem digital intervalar em tons de cinza [18–20, 33].

O cálculo do gradiente morfológico sobre uma imagem digital intervalar gera outra imagem intervalar, o que é um problema para o cálculo das bordas da imagem original. Isso devido a que os métodos existentes de binarização (como são a supressão não-máxima e a histerese) para obtenção de uma imagem binária servem apenas para imagens digitais e não para imagens digitais intervalares [4]. Os métodos de binarização são importantes porque a partir da imagem binária obtida é possível avaliar o desempenho do detector

de bordas e portanto do gradiente morfológico [1, 75]. Diante disso, são propostas duas abordagens para a redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital, sendo uma a priori e a outra a posteriori da utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy. Na primeira abordagem (a priori), reduz-se uma imagem digital intervalar numa imagem digital utilizando as h -ordens, que incluem as ordens admissíveis, ambas dadas pela combinação convexa de modo que sobre a redução realizada é utilizada a MM \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy seguida do gradiente morfológico fuzzy. Na segunda abordagem (a posteriori), reduzem-se a erosão e a dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy intervalar sobre uma imagem digital intervalar a erosão e dilatação morfológica (respectivamente), utilizando as h -ordens, que incluem as ordens admissíveis, ambas dadas pela combinação convexa de modo que sobre a redução realizada é utilizado o gradiente morfológico.

4.1 Incerteza Intrínseca de uma Imagem Digital

Como exposto na introdução deste capítulo, uma imagem digital em tons de cinza possui uma inerente incerteza, desde que a imagem digital é o resultado de uma discretização do mundo real. Isso acontece no processo de captura da imagem pois assumem-se como corretos o tom de cinza e a localização de cada pixel, no entanto, na prática, alguns fatores externos podem gerar incerteza sobre essas características (como o dispositivo de captura utilizado, a iluminação do ambiente, etc.). Tal incerteza pode ser representada em termos de intervalos, tendo-se assim uma imagem digital intervalar em tons de cinza com intensidades pertencentes ao conjunto \mathbb{I}_n^* , $n \in \mathbb{N}^+$, essa representação tem sido abordada nos trabalhos de Lopez-Molina [33] e Nachtegael et al. [18].

O processo de discretização mencionado produz dois tipos de erro de medição durante a captura da imagem, o erro espacial e o erro tonal [33].

1. *Erro espacial ou medida de discretização:* Desde que os objetos e superfícies são considerados contínuos na natureza, uma imagem bidimensional em tons de cinza deveria ser representada por um conjunto de pontos contínuos em \mathbb{R}^2 com valores em \mathbb{R} . No entanto, na prática uma imagem bidimensional em tons de cinza é representada por um subconjunto retangular Y (finito) de \mathbb{Z}^2 com valores pertencentes a um número limitado de tons de cinza (imagens digitais), o que gera uma incerteza com respeito aos valores e à localização do pixel da imagem. Devido à dificuldade de mapear valores de pixels numa grade infinita (em \mathbb{R}^2) a valores de pixels numa grade finita, os valores em Y poderiam ser erroneamente deslocados por até uma posição em qualquer direção [20, 33].
2. *Erro tonal ou medida de quantização:* No caso ideal, as imagens bidimensionais tons de cinza que representam objetos reais deveriam possuir um número ilimitado

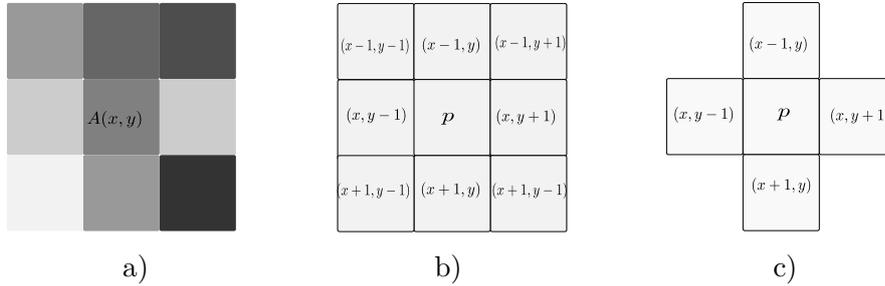
de tons de cinza, no entanto no processamento computacional de tais imagens é necessário limitar a quantidade destas a um número finito. Portanto dependendo do dispositivo de digitalização, em cada pixel é gerado um erro tonal. Neste trabalho foi considerado o erro tonal de ± 1 (numa escala entre 0 e 255) [33].

Para quantificar os erros espacial e tonal de uma imagem digital A , Lopez-Molina et al. [33] propõem o seguinte modelo, o qual gera uma imagem digital intervalar $A_{IV}(p) = [\underline{A}_{IV}(p), \overline{A}_{IV}(p)]$, $p \in X \subset \mathbb{Z}^2$:

$$A_{IV}(p) = \left[0 \vee \bigwedge_{p' \in N_8(p)} A(p') - 1, 255 \wedge \bigvee_{p' \in N_8(p)} A(p') + 1 \right], \quad (4.1)$$

onde p é o pixel na coordenada $(x, y) \in X$, e $N_8(p)$ é o conjunto que possui 8 vizinhos de p , estabelecendo dessa forma uma 8-conectividade entre os pixels dessa vizinhança (como representado na Figura 13, parte b)). Similarmente, pode ser utilizada uma vizinhança $N_4(p)$ com 4-conectividade (como representado na Figura 13, parte c)) [3].

Figura 13 – a) Vizinhança 3×3 de uma imagem em tons de cinza A . b) $N_8(p)$ com 8-conectividade. c) $N_4(p)$ com 4-conectividade.



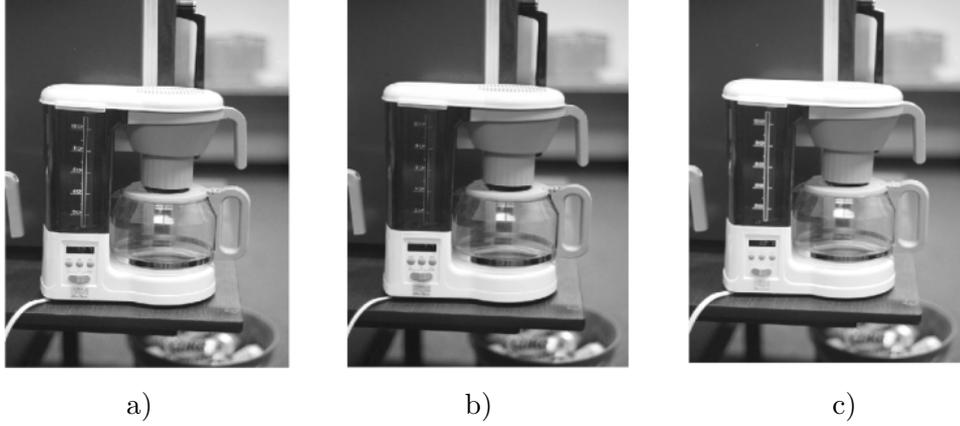
Fonte: Adaptado de [3].

Exemplo 4.1. Na Figura 14, são apresentados os extremos da imagem intervalar A_{IV} gerada pela Equação (4.1) a partir da imagem coffee.pgm, A . Note que, o limite superior da imagem intervalar de coffee.pgm possui tons de cinza maiores do que o limite inferior da imagem intervalar de coffee.pgm.

4.2 Gradiente Morfológico \mathbb{I}_n^* -Fuzzy e Gradiente Morfológico induzido pelas h -ordens

Como mencionado no Capítulo 2, a erosão e a dilatação \mathbb{L} -fuzzy são ferramentas da MM \mathbb{L} -fuzzy, podendo ser utilizadas no processamento de imagens, em particular de imagens intervalares em tons de cinza. Baseados nessas ferramentas, sendo o reticulado completo $\mathbb{L} = \mathbb{I}^*$, Nachtgael et al. [18] e Sussner et al. [19] utilizaram o gradiente

Figura 14 – Representação dos extremos da imagem intervalar A_{IV} gerada a partir de uma imagem digital A . a) Imagem coffee.pgm, A . b) Limite inferior da imagem intervalar de coffee.pgm, \underline{A}_{IV} . c) Limite superior da imagem intervalar de coffee.pgm, \overline{A}_{IV} .



Fonte: Autoria própria.

morfológico sobre imagens intervalares vistas como conjuntos fuzzy intervalares $A_{IV} \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X)$. Dessa forma, o gradiente morfológico de uma imagem intervalar, chamado *gradiente morfológico fuzzy intervalar*, é definido como a diferença entre a dilatação e a erosão fuzzy intervalar pelo elemento estruturante $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X)$. Como extensão desse conceito, neste trabalho é utilizada uma função estruturante \mathbb{I}^* -fuzzy $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X))^X$ ao invés de elemento estruturante $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X)$. Assim, o *gradiente morfológico fuzzy intervalar pela função estruturante* $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X))^X$ é dado por:

$$G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x) = \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x) \ominus \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x), \quad \forall x \in X, \quad (4.2)$$

sendo $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U) \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}^*}(X)$, e \ominus uma diferença entre intervalos dada por¹:

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \max(\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y})], \quad (4.3)$$

para todo $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}^*$.

Note que, se $\underline{A}_{IV}(x) = \overline{A_{IV}}(x)$, para todo $x \in X$, e $U \in (\mathcal{F}(X))^X$ então o gradiente morfológico fuzzy intervalar torna-se o *gradiente morfológico* $[0, 1]$ -fuzzy pela função estruturante U (ou *gradiente morfológico fuzzy* pela função estruturante U). Salienta-se que González-Hidalgo et al. definem o gradiente morfológico fuzzy utilizando um elemento estruturante $S \in \mathcal{F}(X)$ [16, 48].

¹ Deschrijver define as operações de adição e subtração sobre o conjunto $\bar{\mathbb{I}}^* = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid (\underline{x}, \bar{x}) \in] - \infty, +\infty[^2 \text{ e } \underline{x} \leq \bar{x}\}$ da seguinte forma [76]:

- $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [(\underline{x} + \bar{y}) \wedge (\bar{x} + \underline{y}), \bar{x} + \bar{y}]$,
- $\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \max(\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y})]$,

para todo $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}] \in \bar{\mathbb{I}}^*$.

Visto que, na prática, os valores de uma imagem digital pertencem a uma cadeia finita \mathcal{L}_n , os valores da dilatação e da erosão \mathcal{L}_n -fuzzy também pertencem à cadeia finita \mathcal{L}_n . Assim, o gradiente morfológico de imagens digitais pode ser definido como na Equação (4.2) utilizando os operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(X)$. Neste caso, $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A, U)$ é chamado *gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy pela função estruturante $U \in (\mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(X))^X$* . De forma mais geral, o gradiente morfológico de imagens digitais intervalares pode ser definido como na Equação (4.2) utilizando os operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U) \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(X)$. Neste caso, $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ é chamado *gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem A_{IV} pela função estruturante $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(X))^X$* .

Na prática os valores das imagens digitais pertencem à cadeia finita \mathcal{L}_n , assim, espera-se que o gradiente morfológico de uma imagem em tons de cinza seja outra imagem em tons de cinza. Para isso, considere uma t -norma \mathcal{L}_n -fuzzy \mathcal{T} , uma implicação fronteira \mathcal{L}_n -fuzzy \mathcal{I} e uma função estruturante $U \in (\mathcal{F}_{\mathcal{L}_n}(X))^X$ tal que $U_x(x) = n, \forall x \in X$. Pela Proposição 2.4, garante-se que $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U)(x) \leq \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U)(x), \forall x \in X$ e portanto $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A, U)(x) \geq 0, \forall x \in X$. Diferentemente, no caso intervalar, apesar de considerar uma t -norma \mathbb{I}_n^* -fuzzy \mathcal{T} , uma implicação fronteira \mathbb{I}_n^* -fuzzy \mathcal{I} , e uma função estruturante $U \in (\mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(X))^X$ tal que $U_x(x) = [n, n], \forall x \in X$, e de ser valido que $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, U)(x) \leq_2 \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A, U)(x), \forall x \in X$ (ver Proposição 2.4), não necessariamente cumpre-se que $[0, 0] \leq_2 G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x), \forall x \in X$, devido ao fato que o operador \ominus não é fechado em \mathbb{I}_n^* . Isso pode levar na prática a uma perda de informação, pois o gradiente morfológico de uma imagem intervalar não pertence a $\mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}(X)$. No Exemplo 4.2, Figura 15 a), observa-se que o limite inferior do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem é quase irreconhecível, o que está relacionado com perda de informação devido a que computacionalmente os valores negativos são igualados a zero.

Devido à perda de informação mencionada e às dificuldades de calcular as bordas a partir de imagens digitais intervalares (geradas pelo cálculo do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy sobre imagens digitais intervalares), neste trabalho propõe-se utilizar as h -ordens dadas por $K_{\alpha, n}$ em \mathbb{I}_n^* (ver Equação (3.3)), sendo que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x) \in \mathbb{I}_n^*, \forall x \in X$. Assim, por meio de ρ_{α} , pode-se associar cada valor da erosão e da dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy com um elemento da cadeia finita $(\mathcal{L}_{m_{\alpha}}, \leq)$ (ver Equação (3.9)). Deste modo, define-se o gradiente morfológico induzido pelas h -ordens \leq_{α} como:

$$G_{\rho_{\alpha}}(A_{IV}, U)(x) = \rho_{\alpha}(\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x)) - \rho_{\alpha}(\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x)), \forall x \in X. \quad (4.4)$$

Para facilitar a notação, $\rho_{\alpha}(\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)), \rho_{\alpha}(\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U))$ e $G_{\rho_{\alpha}}(A_{IV}, U)$ serão denotados por $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A_{IV}, U)$ e $G^{\alpha}(A_{IV}, U)$, respectivamente. Note que, se a dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ e a erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ estão sob as condições da Proposição

2.4, para todo $x \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que:

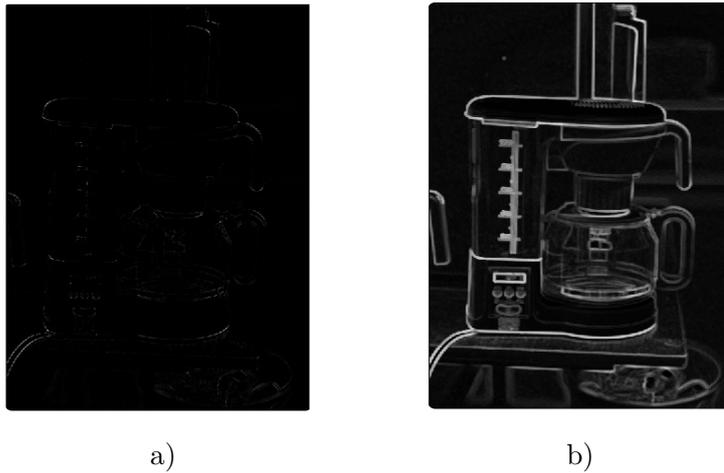
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x) \leq_2 \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x) &\Rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x) \leq_{\alpha} \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x) \\ &\Rightarrow \rho_{\alpha}(\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x)) \leq \rho_{\alpha}(\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x)) \quad (4.5) \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A_{IV}, U)(x) \leq \mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U)(x). \end{aligned}$$

Portanto, $G^{\alpha}(A_{IV}, U)(x) \geq 0$.

Exemplo 4.2. Utilizando a erosão e a dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm calculadas no Exemplo 2.8, determina-se o gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy mediante a Equação (4.2). Os limites do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm são apresentados na Figura 15.

Figura 15 – Limites do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy da imagem intervalar coffee.pgm.

a) Limite inferior do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy. b) Limite superior do gradiente morfológico \mathbb{I}_n^* -fuzzy.



Fonte: Autoria própria.

4.3 Abordagens Propostas para o Cálculo do Gradiente Morfológico de uma Imagem Digital Intervalar

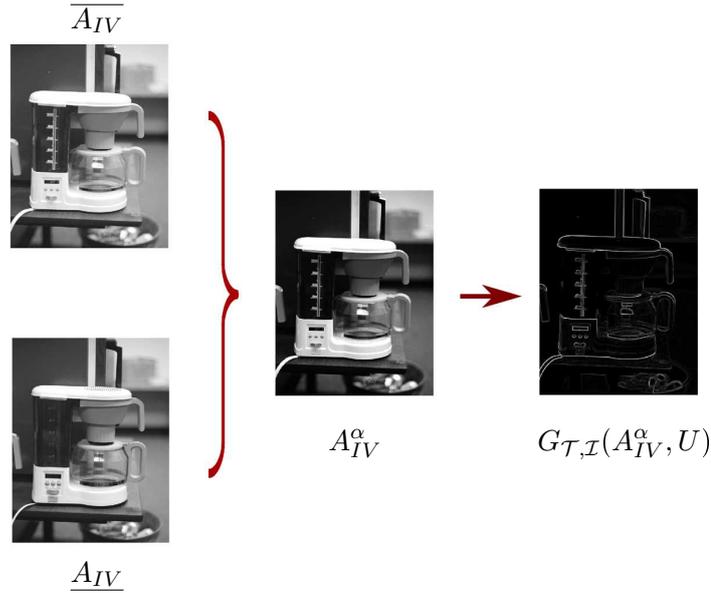
Nessa seção serão apresentadas as duas abordagens propostas para a redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital, sendo a primeira delas uma abordagem a priori e a segunda uma abordagem a posteriori da utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy. Ambas abordagens estão baseadas em h -ordens \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$ em \mathbb{I}_n^* , as quais incluem as ordens admissíveis \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ e as h -ordens \leq_{α} , $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$. Resultados experimentais utilizando duas abordagens baseadas em ordens admissíveis \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ são encontrados em [20].

1. Primeira Abordagem: Gradiente Morfológico baseado em MM \mathcal{L}_{m_α} -Fuzzy e h -Ordens

Como os valores da imagem digital intervalar $A_{IV}(x) \in \mathbb{I}_n^*, \forall x \in X$, nesta abordagem considera-se $A_{IV}(x) \in \mathbb{I}_n^*, \forall x \in X$ no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$. Logo, mediante ρ_α , cada valor da imagem digital $A_{IV}(x) \in (\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha), \forall x \in X$ é associado com um elemento da cadeia finita \mathcal{L}_{m_α} (ver Equação (3.9)). Assim, obtém-se uma nova imagem $\rho_\alpha(A_{IV}) \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$, e a partir dela, seu gradiente morfológico \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy utilizando a Equação (4.2). Para uma melhor visualização desta primeira abordagem veja o fluxograma dada em Anexo A.

A sequência dessa abordagem é apresentada na Figura 16. Para facilitar a notação, a partir de agora, $\rho_\alpha(A_{IV})$ será denotado por A_{IV}^α .

Figura 16 – Sequência para determinar o gradiente morfológico \mathcal{L}_m -fuzzy $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U)$ baseado na ordem admissível $\leq_{\frac{1}{2}+} = \leq_{\frac{511}{1020}}$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^m, \mathcal{I} = I_{KD}^m$ (1-A).



Fonte: Autoria própria.

Dado que $\alpha \in [0, 1] = \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \cup \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}^c$, têm-se os seguintes casos:

- 1-A. Se $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ então $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ é uma cadeia finita (ver Teorema 3.1). Assim, considerando os valores de A_{IV} em $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, por meio de ρ_α obtém-se $A_{IV}^\alpha \in \mathcal{L}_m^X$, sendo $m = |\mathbb{I}_n^*| - 1 = |[\mathbb{I}_n^*]_\alpha| - 1 = m_\alpha$.
- 1-B. Se $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ então $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ é um proset. Assim, considerando os valores de A_{IV} no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, por meio de ρ_α obtém-se $A_{IV}^\alpha \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$, sendo $m_\alpha = |[\mathbb{I}_n^*]_\alpha| - 1$.

Note que, no Item 1-A m (o máximo nível de cinza da nova imagem) não muda apesar da variação de $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$, e no Item 1-B m_α varia de acordo com a escolha de $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$.

Exemplo 4.3. Referente ao Item 1-A. Seja a imagem intervalar A_{IV} do Exemplo 4.1. Lembre que essa imagem foi gerada a partir da imagem digital coffee.pgm que possui valores pertencentes à cadeia finita $\mathcal{L}_{255} = \{0, 1, \dots, 255\}$. Considere os valores da imagem A_{IV} em $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ com $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $m = \lfloor \lceil \mathbb{I}_{255}^* \rceil_\alpha \rfloor - 1 = 32.895$. Portanto, por meio de ρ_α gera-se uma nova imagem $A_{IV}^\alpha \in \mathcal{L}_m^X$.

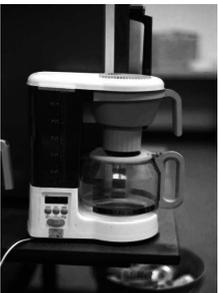
Pelas as Equações (2.80) e (2.81) são determinadas $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^M) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_m^*}(X)$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^m$ (ver Equação (2.18)), $\mathcal{I} = I_{KD}^m$ (ver Equação (2.22)) e

$$M = \begin{pmatrix} 28.251 & 28.251 & 28.251 \\ 28.251 & 32.895 & 28.251 \\ 28.251 & 28.251 & 28.251 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A partir de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$ é calculado o gradiente morfológico \mathcal{L}_m -fuzzy por meio da Equação (4.2). A Figura 17 mostra a erosão \mathcal{L}_m -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$, a dilatação \mathcal{L}_m -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$ e o gradiente morfológico \mathcal{L}_m -fuzzy $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^M)$ para $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^m$ e $\mathcal{I} = I_{KD}^m$.

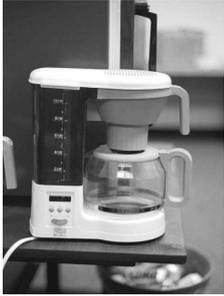
Exemplo 4.4. Referente ao Item 1-B. No Exemplo 4.3 foram ordenados os valores de A_{IV} de maneira linear, isto é, considerando a cadeia finita $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$. Neste exemplo, os valores da imagem A_{IV} assumem-se no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, e por meio de ρ_α obtém-se $A_{IV}^\alpha \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$. Note que, para $\alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ tem-se $m_0 = m_1 = 255$ e $m_{\frac{1}{2}} = 510$. Pelas as Equações (2.80) e (2.81), para cada $\alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, são determinadas $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_{m_\alpha}}(X)$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^{m_\alpha}$ (ver Equação (2.18)), $\mathcal{I} = I_{KD}^{m_\alpha}$ (ver Equação (2.22)) e $U^{M_\alpha} \in (\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{m_\alpha}}(X))^X$. Como U^{M_α} varia de acordo com m_α , são utilizadas $U^{M_0} = U^{M_1} = U^M$ e $U^{M_{\frac{1}{2}}} = 2U^M$, sendo M é dada pela Matriz (2.83). Assim, a partir de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ é calculado o gradiente morfológico \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy, para cada $\alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, mediante a Equação (4.2). A Figura 18 mostra a erosão \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$, a dilatação \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ e o gradiente morfológico \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ para $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^{m_\alpha}$ e $\mathcal{I} = I_{KD}^{m_\alpha}$.

Figura 17 – Erosão \mathcal{L}_m -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$, dilatação \mathcal{L}_m -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$ e gradiente morfológico \mathcal{L}_m -fuzzy $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$, $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^m$ e $\mathcal{I} = I_{KD}^m$.

	$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$	$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$	$G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^{\alpha}, U^M)$
$\alpha = \frac{1}{510}$			
$\alpha = \frac{511}{1020}$			
$\alpha = \frac{509}{510}$			

Fonte: Autoria própria.

Figura 18 – Erosão \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$, dilatação \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ e gradiente morfológico \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ para $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^{m_\alpha}$ e $\mathcal{I} = I_{KD}^{m_\alpha}$.

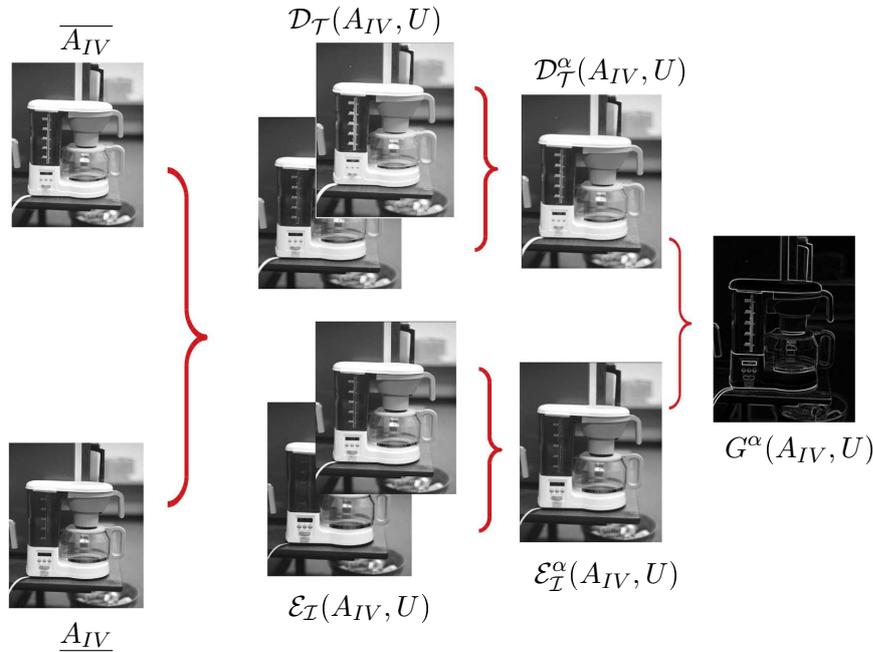
	$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$	$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$	$G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$
$\alpha = 0$			
$\alpha = \frac{1}{2}$			
$\alpha = 1$			

Fonte: Autoria própria.

2. Segunda Abordagem: Gradiente Morfológico baseada em MM \mathcal{L}_n -Fuzzy Intervalar e h -Ordens.

A partir de uma imagem digital intervalar $A_{IV} \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}_n^*}^X$, pode-se determinar sua erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ e sua dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$. Como os valores de $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ pertencem a \mathbb{I}_n^* , nesta abordagem considera-se $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)(x), \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)(x), \forall x \in X$, no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$. Logo, mediante ρ_α , cada valor de $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ é associado com um elemento da cadeia finita \mathcal{L}_{m_α} (ver Equação (3.9)). Assim, $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}^\alpha(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^\alpha(A_{IV}, U) \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$ podem ser utilizadas para determinar o gradiente morfológico $G^\alpha(A_{IV}, U)$ (ver Equação (4.4)). Para uma melhor visualização desta segunda abordagem veja o fluxograma dada em Anexo A e a sequência apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Sequência para determinar o gradiente morfológico $G^\alpha(A_{IV}, U)$, $\alpha = \frac{1}{2}$, baseado na dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ e na erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$, (2-B).



Fonte: Autoria própria.

Dado que $\alpha \in [0, 1] = \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \cup \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}^c$, têm-se os seguintes casos:

- 2-A. Se $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tem-se que $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ é uma cadeia finita (ver Teorema 3.1). Assim, considerando os valores de $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ em $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, mediante ρ_α obtêm-se $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}^\alpha(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^\alpha(A_{IV}, U) \in \mathcal{L}_m^X$, sendo $m = |\mathbb{I}_n^*| - 1 = m_\alpha$.
- 2-B. Se $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ tem-se que $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$ é um proset. Assim, considerando os valores de $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U)$ no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, mediante ρ_α obtêm-se $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}^\alpha(A_{IV}, U)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^\alpha(A_{IV}, U) \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$, sendo $m_\alpha = |[\mathbb{I}_n^*]_\alpha| - 1$. Note que, m_α varia de acordo com a escolha de α .

Exemplo 4.5. Referente ao Item 2-A. Considere a erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U^M)$ e a dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U^M)$ determinadas no Exemplo 2.8. Na sequência, assumem-se os valores de $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U^M)$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(A_{IV}, U^M)$ nas cadeias finitas $(\mathbb{I}_n^*, \leq_{\alpha})$, $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo $|\mathbb{I}_n^*| - 1 = m = 32895$. Assim, por meio de ρ_{α} têm-se $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$, $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M) \in \mathcal{L}_m^X$ e $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$, sendo utilizados no cálculo do gradiente morfológico $G^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$ (ver Equação (3.9)). A Figura 20 mostra a erosão morfológica $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$, a dilatação morfológica $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$ e o gradiente morfológico $G^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$ para $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$.

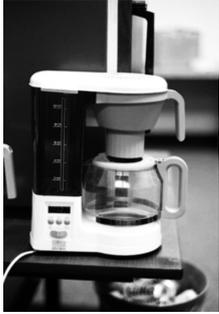
Figura 20 – Erosão morfológica $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$, dilatação morfológica $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$ e gradiente morfológico $G^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$ para $\alpha \in \left\{ \frac{1}{510}, \frac{511}{1020}, \frac{509}{510} \right\}$.

	$\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$	$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$	$G^{\alpha}(A_{IV}, U^M)$
$\alpha = \frac{1}{510}$			
$\alpha = \frac{511}{1020}$			
$\alpha = \frac{509}{510}$			

Fonte: Autoria própria.

Exemplo 4.6. Referente ao Item 2-B. Considere a erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{E}_T(A_{IV}, U^M)$ e a dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy $\mathcal{D}_T(A_{IV}, U^M)$ determinadas no Exemplo 2.8. Agora, assumem-se os valores da erosão e da dilatação \mathbb{I}_n^* -fuzzy de A_{IV} no proset $(\mathbb{I}_n^*, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, note que $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$. Assim, mediante ρ_α , têm-se $\mathcal{E}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$ e $\mathcal{D}_T^\alpha(A_{IV}, U^M) \in \mathcal{L}_{m_\alpha}^X$, que são finalmente utilizados para o cálculo de $G^\alpha(A_{IV}, U^M)$ (ver Equação (3.9)). Figura 21 mostra a erosão morfológica $\mathcal{E}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$, a dilatação morfológica $\mathcal{D}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$ e o gradiente morfológico $G^\alpha(A_{IV}, U^M)$ para $\alpha \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Figura 21 – Erosão morfológica $\mathcal{E}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$, dilatação morfológica $\mathcal{D}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$ e gradiente morfológico $G^\alpha(A_{IV}, U^M)$ para $\alpha \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

	$\mathcal{E}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$	$\mathcal{D}_T^\alpha(A_{IV}, U^M)$	$G^\alpha(A_{IV}, U^M)$
$\alpha = 0$			
$\alpha = \frac{1}{2}$			
$\alpha = 1$			

Fonte: Autoria própria.

Neste capítulo foram propostas duas abordagens para a determinação do gradiente morfológico de imagens digitais intervalares (que consideram o modelo proposto por López-Molina et al. [33], o qual captura a incerteza de uma imagem digital em termos de uma imagem digital intervalar). Essas abordagens basearam-se na MM \mathbb{L} -fuzzy e nas h -ordens, expostas nos Capítulos 2 e 3, respectivamente. Especificamente, na primeira abordagem (a priori), reduziu-se uma imagem digital intervalar numa imagem digital utilizando as h -ordens, de modo que sobre a redução realizada foi utilizada a morfologia matemática \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy seguida do gradiente morfológico fuzzy (1-A e 1-B). Na segunda abordagem (a posteriori), reduziram-se a erosão e a dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy intervalar sobre uma imagem digital intervalar para erosão e dilatação morfológica (respectivamente), utilizando as h -ordens, de modo que sobre a redução realizada foi utilizado o gradiente morfológico (2-A e 2-B).

No próximo capítulo serão apresentados os principais resultados experimentais obtidos a partir da implementação das abordagens propostas para detecção de bordas de imagens digitais. Devido à grande quantidade de h -ordens obtidas no Capítulo 3, serão implementadas duas fases, fase de treino e fase de teste. Na fase de treino serão identificadas as h -ordens que geram melhor desempenho nos detectores de bordas propostos, mediante o uso de medidas de avaliação de desempenho de detectores de bordas (FoM e F-Measure). Na fase de teste serão comparados os desempenhos dos detectores de bordas propostos escolhidos na fase de treino com o detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy e o detector de bordas Canny, para isso, serão aplicados testes estatísticos que permitirão estabelecer quantitativamente as suas principais diferenças.

Capítulo 5

Aplicação: Detecção de Bordas de Imagens Digitais

Neste capítulo são apresentados os principais resultados experimentais (e suas correspondentes análises), obtidos a partir da aplicação das abordagens propostas no Capítulo 4 para detecção de bordas de imagens digitais. Tais aplicações serão referidas como detectores de bordas propostos.

O uso dos detectores de bordas propostos evidenciam uma grande dificuldade na escolha da ordem \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$, devido ao amplo range de valores possíveis. Visando resolver a problemática mencionada, propõem-se alguns critérios que permitem uma escolha adequada da h -ordem \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$.

Finalmente, o melhor entre os detectores de bordas propostos, após a escolha adequada da h -ordem \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$, é comparado com o detector de bordas baseado na abordagem fuzzy discreta e no clássico detector de bordas Canny [4].

5.1 Metodologia

A metodologia utilizada nesta pesquisa compreende as seguintes etapas:

- *Primeira etapa:* Obtenção das imagens digitais intervalares pelo método proposto por Lopez-Molina et al. [33] utilizando $N_4(p)$ ao invés de $N_8(p)$, isso com o objetivo de diminuir o comprimento dos intervalos.
- *Segunda etapa:* Utilização, sobre as imagens intervalares obtidas na primeira etapa, das abordagens propostas para determinar os gradientes morfológicos, os quais dependem da escolha de: uma h -ordem \leq_{α} , $\alpha \in [0, 1]$, uma função estruturante, uma conjunção e uma implicação \mathbb{L} -fuzzy. A escolha dos operadores de conjunção e implicação \mathbb{L} -fuzzy foi motivada pelo trabalho de González-Hidalgo et al. [17].

- *Terceira etapa:* Binarização dos gradientes morfológicos, obtidos na segunda etapa, das imagens intervalares.

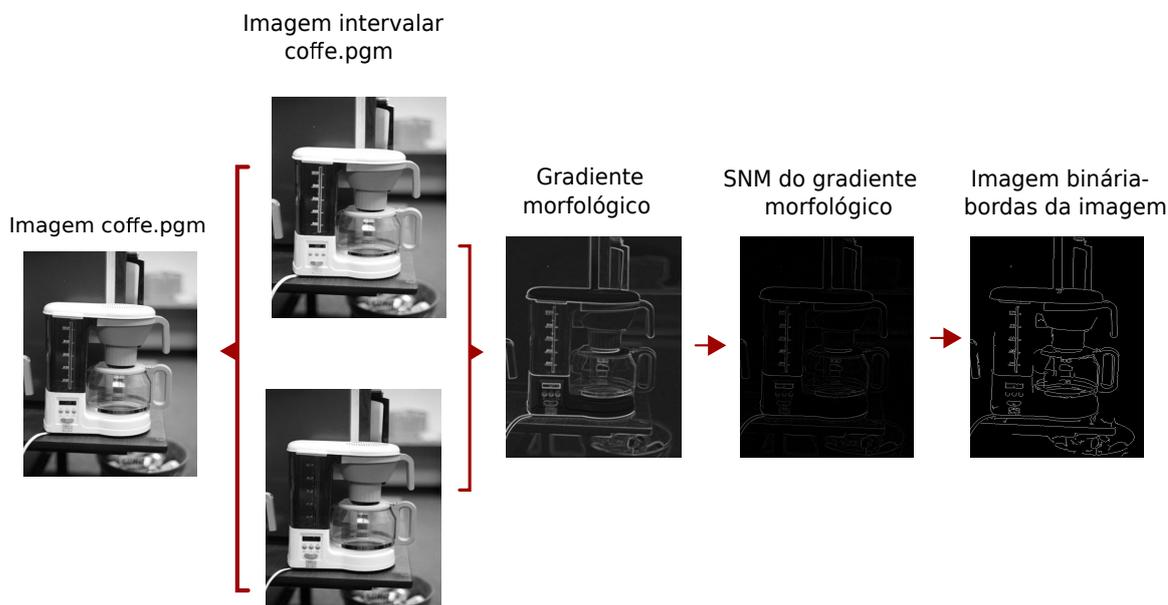
Para a binarização do gradiente morfológico de uma imagem intervalar é utilizado o método proposto por González-Hidalgo et al. [16, 17] baseado no trabalho de Canny [4]. Esse método consiste na binarização da imagem usando como primeiro processo a supressão não máxima (NMS) seguido de um processo de histerese. O processo da supressão não máxima tem como objetivo suprimir os valores não máximos ao longo da linha gradiente, para afinar a linha gradiente até obter a largura de um pixel (para isso utilizou-se o código disponibilizado por Kovese [75]). O processo de histerese consiste na binarização da imagem por meio do uso de limiares. Para isso, o primeiro passo consiste em utilizar dois limiares (limiar inferior e superior) os quais determinam o conjunto de pontos borda e não borda da imagem. O limiar inferior permite determinar quais pixels não pertencem à borda e o limiar superior permite classificar os pixels como pontos borda sem usar a informação da sua conectividade. O segundo passo consiste em aderir pixels à classe da borda de acordo com sua conectividade, sendo que o valor desses pixels estão entre os limiares candidatos (limiar superior e inferior). A determinação desses limiares não é um problema trivial, sendo que na literatura existem vários métodos propostos com essa finalidade (veja por exemplo as referências [77–79]), já neste trabalho será utilizado o método de Medina-Carnicer et al. [79] baseado no processo de histerese. Tal método consiste em utilizar a informação da imagem gradiente e dos pixels aderidos pelo processo de histerese de um conjunto de limiares candidatos para a determinação do limiar inferior *low* e do limiar superior *high* (em $]0, 1[$).

Para viabilizar a utilização do algoritmo de Medina-Carnicer et al. sobre as imagens gradiente obtidas pelas abordagens propostas, utilizou-se o nível máximo de tons de cinza t_{max} de cada imagem gradiente para definir o conjunto de limiares candidatos, assim, $low, high \in \{1, 2, 3, \dots, t_{max}\}$. Neste caso, foi considerado o conjunto de candidatos - (baseado na escolha de Medina-Carnicer et al. [79]). Essa alteração é motivada pelo fato de que os valores das imagens gradiente pertencem à cadeia finita \mathcal{L}_{m_α} , a qual varia de acordo com a escolha de $\alpha \in [0, 1]$. Assim, dependendo da escolha de α podem-se gerar grandes quantidades de níveis de cinza (tendo que $t_{max} \leq m_\alpha$), sendo desnecessária a procura dos limiares em valores superiores a t_{max} .

Na Figura 22 é representada a metodologia descrita, sendo que, a maneira de exemplo, as imagens obtidas para cada etapa foram calculadas a partir da imagem digital `coffe.pgm`.

Em relação ao ambiente computacional, tanto para os programas implementados quanto para os programas disponibilizados, foi utilizado o software MATLAB [80].

Figura 22 – Sequência da metodologia utilizada para a detecção de bordas de uma imagem intervalar obtida a partir de uma imagem digital. Representação das etapas sob a imagem digital coffe.pgm;



Fonte: Autorial própria.

5.2 Avaliação de Detectores de Bordas

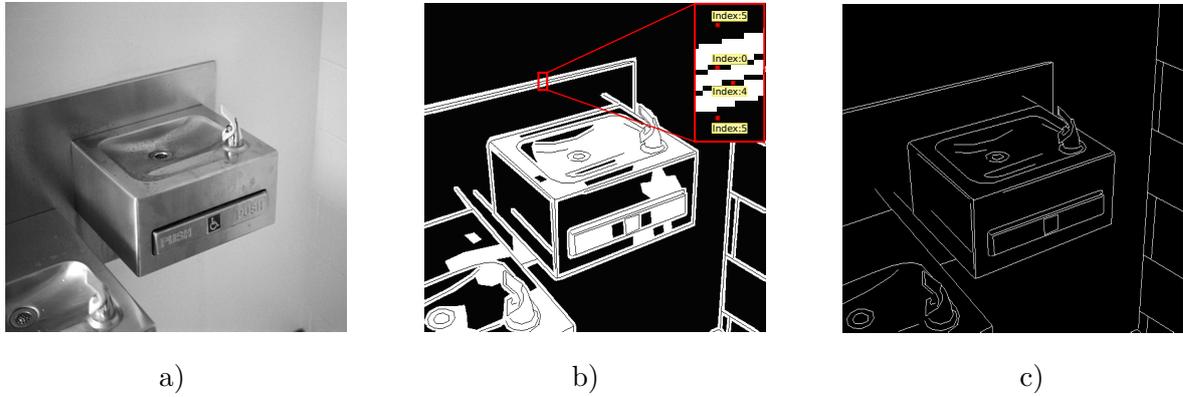
No geral, a avaliação da performance dos detectores de bordas é realizada com base nas imagens de bordas ideais (Ground Truth) sendo, geralmente, imagens binárias. As imagens de bordas ideais utilizadas foram produzidas manualmente por observadores humanos [1], as quais pertencem à base de dados da University of South Florida ¹. Tais imagens são imagens em tons de cinza que possuem pixels de valor zero, para representar as bordas ideais, e dois tipos de regiões. O primeiro tipo de região (região em cinza) onde nenhum ponto borda deve ser detectado, e o segundo tipo de região (região em branco contendo pixels com diferentes tons de cinza) onde a especificação do ponto borda ou não borda poderia ser tediosa [1] (ver Figura 23 b)). Assim, para efeito de comparação entre as bordas das imagens de saída ou bordas candidatas produzidas por algum método de detecção de bordas (DE) com as bordas das imagens ground truth, foram binarizadas as imagens ground truth com um limiar de cinco (numa escala dentro 0 e 255), sendo que exclui-se a região em cinza (ver Figura 23 c)). Note que a região cinza nas imagens de bordas ideais é representado por valores maiores iguais a cinco.

Daqui em diante o conjunto de pontos das bordas das imagens de bordas ideais binarizadas serão referidas como conjuntos GT .

A comparação entre DE e GT é quantificada numa medida de erro (análise

¹ A base de dados mencionada esta disponível em <ftp://figment.csee.usf.edu/pub/ROC/>

Figura 23 – Exemplo de uma imagem da base de dados. a) Imagem original. b) Imagem de bordas ideais em tons de cinza. c) Imagem binária de bordas ideais obtida com limiar de cinco.



Fonte: Adaptado de [1].

quantitativa). Neste trabalho, são consideradas duas medidas de erro: a primeira baseada em distância e a segunda baseada na localização do pixel [81] (chamada medida de erro estatístico). Outros tipos de análise quantitativa podem ser encontrados em [81].

1. **Medidas de erro baseadas em distância:** Essas medidas de erro baseiam-se na desviação do ponto de borda de sua posição real. Elas são fundamentadas no fato, de que um ponto de borda deve ser penalizado proporcionalmente à distância desse ponto até sua posição verdadeira [81]. A distância entre a posição de dois pontos de uma imagem p_1 e p_2 é denotada por $d(p_1, p_2)$, além disso, a distância desde um ponto p até o conjunto GT é dada por:

$$d(p, GT) = \min\{d(p, p') \mid p' \in GT\} \quad (5.1)$$

Normalmente d é considerada como distância Euclideana (mais popular) mas alguns autores propõem outras distâncias [82]. Dentre as medidas de erro baseadas em distância destaca-se a *Figura de Mérito* também chamada *Índice de Mérito de Pratt* proposta por Pratt, sendo esta uma das mais utilizadas na literatura [83, 84], e a qual é definida por:

$$\text{FoM}(DE, GT) = \frac{1}{\max\{|(DE)|, |(GT)|\}} \sum_{x \in DE} \frac{1}{1 + ad^2(p, GT)} \quad (5.2)$$

onde $a \in \mathbb{R}^+$ é uma constante, usualmente $a = 1/9$ [83–85], d é a distância entre as bordas candidatas e as bordas ideais e $| \cdot |$ representa o número de pontos borda das imagens.

2. **Medida de erro estatístico:** O problema de detecção de bordas pode ser considerado como um problema de classificação [85]. A detecção tem como objetivo

classificar os pixels da imagem na classe de pixels da borda onde cada pixel da imagem é mapeado para um elemento do conjunto de rótulos de classe $\{0, 1\}$ (1 significa que o pixel pertence à classe borda e 0 significa que o pixel pertence à classe não borda) [81]. Em presença da imagem de bordas ideais, os pixels da borda candidata podem ser classificadas em quatro diferentes categorias, as quais são:

- i. *Verdadeiros Positivos (TP)*: Número de pixels que pertencem à borda candidata e pertencem à imagem de bordas ideais.
- ii. *Falso Negativo (FN)*: Número de pixels que não pertencem à borda candidata e pertencem à borda da imagem de bordas ideais.
- iii. *Verdadeiros Negativos (TN)*: Numero de pixels que não pertencem à borda candidata e não pertencem à imagem de bordas ideais.
- iv. *Falsos Positivos (FP)*: Numero de pixels que pertencem à borda candidata e não pertencem à imagem de bordas ideais.

Através desses valores são calculadas a taxa de verdadeiros positivos (*precisão*) e a taxa de falsos positivos (*recall*) mediante

$$Prec = \frac{TP}{TP + FP} \quad \text{e} \quad TPR = \frac{TP}{TP + FN},$$

respetivamente.

Sendo definida a harmonia entre as medidas de precisão e de recall, como:

$$\text{F-Measure} = \frac{Prec \cdot TPR}{\alpha TPR + (1 - \alpha) Prec}. \quad (5.3)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$. Neste trabalho são utilizados o FoM (com $a = 1/9$) e o F-Measure (com $\alpha = 0.5$) como medidas de avaliação do desempenho dos detectores de bordas propostos, tendo sido utilizados os programas disponíveis em <http://kermitimagetoolkit.net/resources/source-code-library/> [33].

5.3 Resultados Experimentais

Para avaliar o desempenho dos detectores de bordas propostos, tomaram-se como referência os resultados do desempenho dos detectores de bordas baseados no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy (com $n = 255$, ver Equação (4.2)). Note que os detectores de bordas propostos utilizam pares conjunções e implicações \mathbb{L} -fuzzy, sendo que \mathbb{L} depende da abordagem utilizada, e o gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy baseia-se em pares de conjunções e implicações \mathcal{L}_n -fuzzy (para mais detalhes ver Capítulo 4).

Para analisar o desempenho dos detectores de bordas baseados no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy são escolhidos: 12 pares de conjunções e implicações \mathcal{L}_n -fuzzy (T^n e

I^n , respetivamente) em concordância com a Proposição 2.4; uma função estruturante U^M , sendo M dada pela Matriz (2.83); e 50 imagens digitais da base de dados da University of South Florida [1]. Essa escolha foi realizada com base nos pares, no elemento estruturante B_1 e nas imagens digitais utilizadas por González-Hidalgo et al. [17]. Desse modo, cada detector de bordas baseado no par (T^n, I^n) é utilizado para determinar as bordas das 50 imagens digitais, sendo o resultado avaliado pelo FoM, com $a = 1/9$, e pelo F-measure. Na Tabela 1 apresentam-se as médias de FoM e F-measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de cada par (T^n, I^n) . De acordo com as médias dadas na Tabela 1, conclui-se que os melhores pares de configurações foram (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) . Resultados similares foram obtidos no trabalho de González-Hidalgo et al. [17].

Salienta-se que González-Hidalgo et al. [17] fizeram uma análise estatística do desempenho dos detectores bordas baseado no gradiente morfológico fuzzy utilizando pares de conjunções e implicações fuzzy, considerando as imagens digitais como conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$. Eles utilizaram quarenta pares de configurações fuzzy (pares de conjunção e implicação fuzzy), dentre as quais destacaram-se (T_{nM}, I_{KD}) , (T_{nM}, I_{GD}) e (T_{nM}, I_{FD}) , por apresentar melhor desempenho na detecção de bordas de acordo com os valores FoM ($a = 1$).

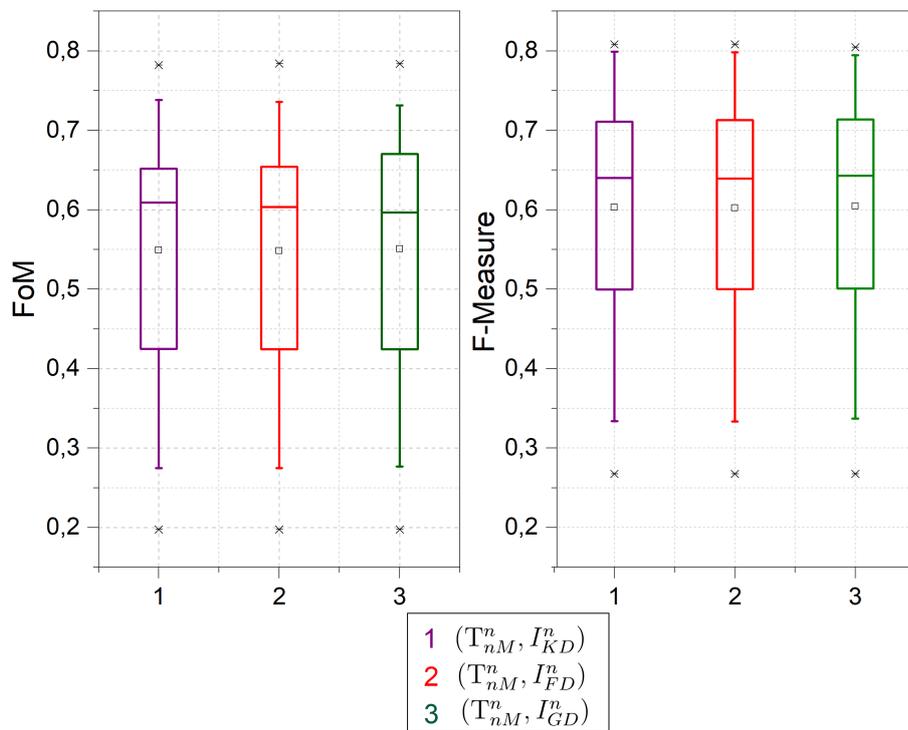
Tabela 1 – Médias dos valores FoM e médias dos valores F-measure dos detectores de borda baseados no $G_{T^n, I^n}(A, U^M)$, $n = 255$ aplicadas às 50 imagens da base de dados da University of South Florida [1].

Valores FoM e F-Measures obtidos pelos detectores de borda baseados no $G_{T^n, I^n}(A, U^M)$, $n = 255$.			
t-norma T^n	Implicação I^n	FoM Média±Desv.P.	F-Measure Média±Desv.P.
T_{LK}^n	I_{LK}^n	0, 3278 ± 0, 1729	0, 4324 ± 0, 1818
	I_{KD}^n	0, 5246 ± 0, 1524	0, 5563 ± 0, 1329
	I_{FD}^n	0, 5239 ± 0, 1523	0, 5554 ± 0, 1328
	I_{GD}^n	0, 5261 ± 0, 1538	0, 5555 ± 0, 1330
T_M^n	I_{LK}^n	0, 4651 ± 0, 1536	0, 4984 ± 0, 1351
	I_{KD}^n	0, 5386 ± 0, 1437	0, 5877 ± 0, 1250
	I_{FD}^n	0, 5385 ± 0, 1436	0, 5731 ± 0, 1246
	I_{GD}^n	0, 5378 ± 0, 1435	0, 5722 ± 0, 1245
T_{nM}^n	I_{LK}^n	0,4964 ± 0, 1621	0, 5386 ± 0, 1485
	I_{KD}^n	0,5493 ± 0, 1577	0,6031 ± 0, 1449
	I_{FD}^n	0,5483 ± 0, 1569	0,6021 ± 0, 1442
	I_{GD}^n	0,5506 ± 0, 1549	0,6046 ± 0, 1425

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 24 são apresentados os BoxPlots dos valores do FoM e do F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) . Note que, considerando os dados da Tabela 1 e pelo exibido nos BoxPlots da Figura 24, as três configurações \mathcal{L}_n -fuzzy destacadas possuem, desde um ponto de vista estatístico, performance semelhante. Para avaliar qual dessas três configurações possui o melhor desempenho, foram comparadas mediante o teste de Wilcoxon (ou teste de postos sinalizados de Wilcoxon) com um nível de significância de 5% [86].

Figura 24 – BoxPlots dos valores do FoM e do F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) .



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 2 são apresentados os p-valores obtidos a partir das comparações realizadas mediante o teste de Wilcoxon aplicado aos valores FoM e F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) . Observa-se, na Tabela 2, que os p-valores obtidos são maiores que o nível de significância de 5%. Assim, não podemos apontar nenhuma diferença significativa entre as três configurações avaliadas. Portanto, os detectores de bordas baseados em (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) ($n = 255$), possuem desempenho semelhante.

Dada a semelhança observada entre os resultados obtidos a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) , a partir de agora os detectores de bordas propostos serão baseados unicamente no par (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , com $n = m_\alpha$, e na função estruturante U^{M_α} , que por sua

Tabela 2 – P-valores obtidos a partir das comparações realizadas mediante o teste de Wilcoxon aplicado aos valores FoM e F-Measure das bordas das 50 imagens calculadas a partir de (T_{nM}^n, I_{KD}^n) , (T_{nM}^n, I_{GD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n) .

Pares	P-valor	
	FoM	F-Measure
(T_{nM}^n, I_{KD}^n) e (T_{nM}^n, I_{FD}^n)	0,8899	0,9142
(T_{nM}^n, I_{KD}^n) e (T_{nM}^n, I_{GD}^n)	0,2287	0,4034
(T_{nM}^n, I_{FD}^n) e (T_{nM}^n, I_{GD}^n)	0,2439	0,4386

Fonte: Autoria própria.

vez esta baseada em U^M .

5.3.1 Análise do Desempenho dos Detectores de Bordas Propostos

Com o intuito de identificar possíveis melhorias ou complicações em quanto ao desempenho dos detectores de bordas propostos, explorou-se a ação desses detectores, inicialmente, sobre uma única imagem. A imagem escolhida foi a 132.pgm (imagem de uma espátula de 634 x 418 pixels) da base de dados já mencionada, vide Figura 25. Seguindo a metodologia apresentada na Seção 5.1, a partir da imagem 132.pgm gerou-se uma imagem intervalar e posteriormente suas bordas.

Figura 25 – a) Imagem digital 132.pgm, b) Imagem de bordas ideais da imagem digital 132.pgm



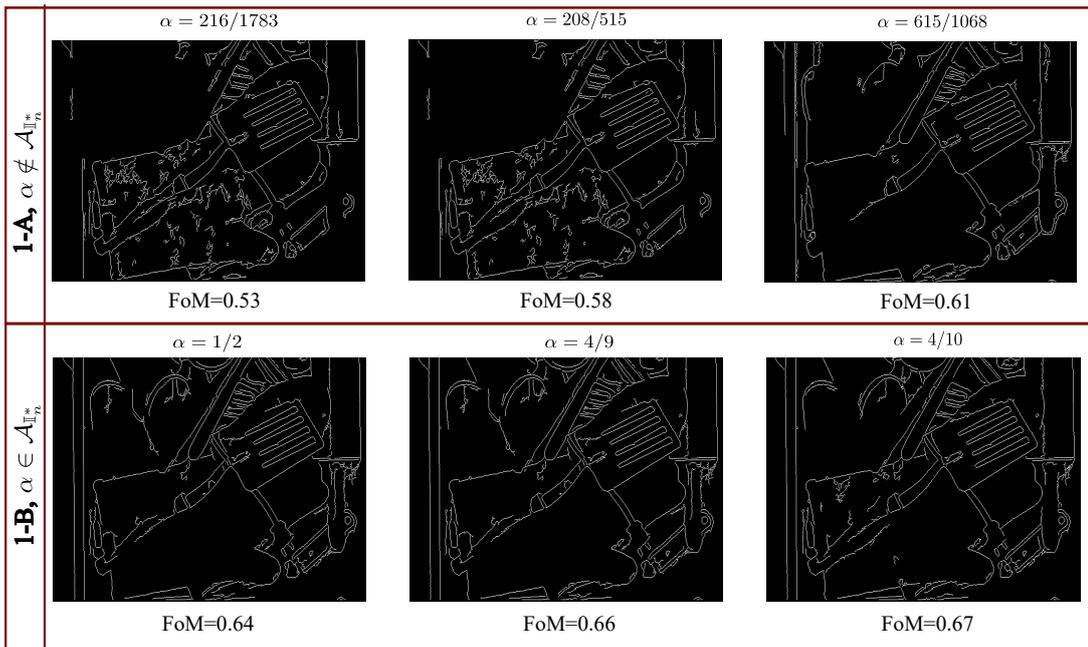
Fonte: Adaptado de [1].

O cálculo das bordas da imagem intervalar obtida de 132.pgm mediante a primeira abordagem proposta é baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy, $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}(A_{IV}^\alpha, U^{M_\alpha})$ (ver Equação (4.2)), sendo $\mathcal{T} = T_{nM}^{m_\alpha}$, $\mathcal{I} = I_{KD}^{m_\alpha}$. A função estruturante U^{M_α} varia de acordo com α , sendo $M_\alpha = \left\lfloor \frac{M}{255} \times m_\alpha \right\rfloor$ com M é dado pela Matriz (2.83). Apresenta-se, na

Figura 26, as bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na primeira abordagem proposta, com $\alpha \in \left\{ \frac{216}{173}, \frac{208}{515}, \frac{615}{1068} \right\}$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$) e com $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \right\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$).

O cálculo das bordas da imagem intervalar obtida de 132.pgm mediante a segunda abordagem proposta é baseado no gradiente morfológico $G_{\mathcal{T}, \mathcal{I}}^\alpha(A_{IV}, U^M)$ (ver Equação 4.4), sendo $\mathcal{T} = \mathcal{C}_T^p$, $T = T_{nM}^n$, $\mathcal{I} = \mathcal{J}_I^o$, $I = I_{KD}^n$, $n = 255$ e U^M a função estruturante, com M dado pela Matriz (2.83). Apresenta-se, na Figura 27, as bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na segunda abordagem proposta, com $\alpha \in \left\{ \frac{216}{1783}, \frac{208}{515}, \frac{615}{1068} \right\}$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$) e $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \right\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$).

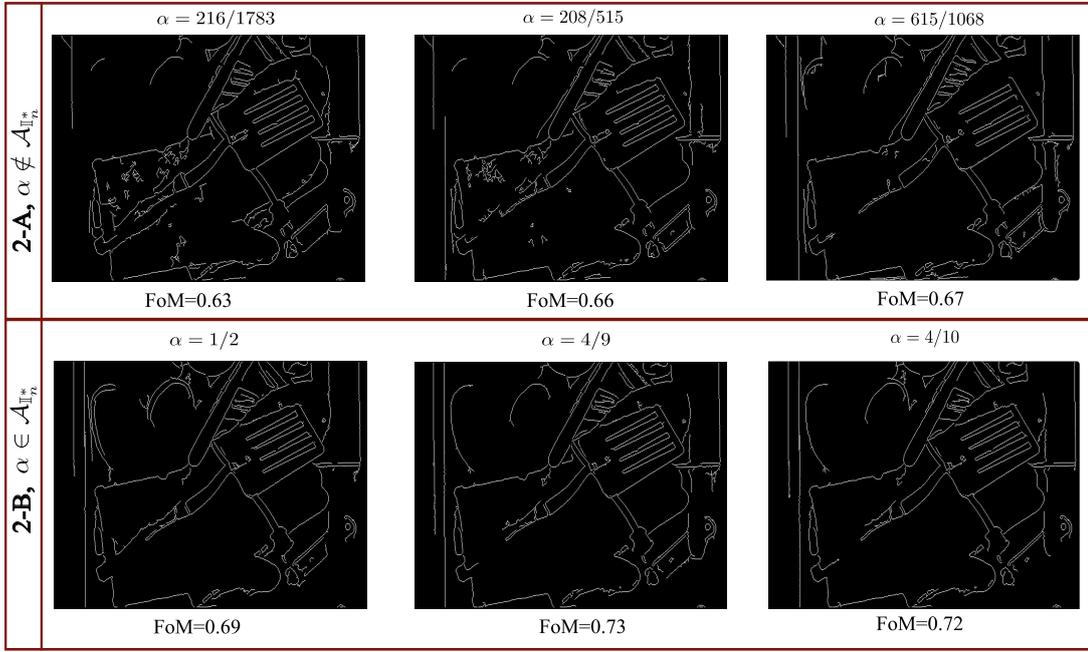
Figura 26 – Bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na primeira abordagem proposta (1-A e 1-B), com $\alpha \in \left\{ \frac{216}{1783}, \frac{208}{515}, \frac{615}{1068} \right\}$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$) e com $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \right\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$).



Fonte: Autoria própria.

Fez-se uma análise qualitativa das bordas apresentadas nas Figuras 26 e 27 com respeito à imagem de bordas ideais da imagem 132.pgm, apresentada na Figura 25. Observa-se, nas Figuras 26 e 27, que 1-B e 2-B (primeira e segunda abordagem baseada em h -ordens $\leq \alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$) apresentam melhor desempenho na detecção das bordas da imagem intervalar obtida de 132.pgm, o que é validado pelos valores FoM obtidos em cada caso. Isso devido que 1-A e 2-A capturam pequenas variações de intensidade pelo significativo número de tons de cinza que estas abordagens apresentam, o que gera uma

Figura 27 – Bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector de bordas baseado na segunda abordagem proposta (2-A e 2-B), com $\alpha \in \left\{ \frac{216}{1783}, \frac{208}{515}, \frac{615}{1068} \right\}$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$) e com $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \right\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$).

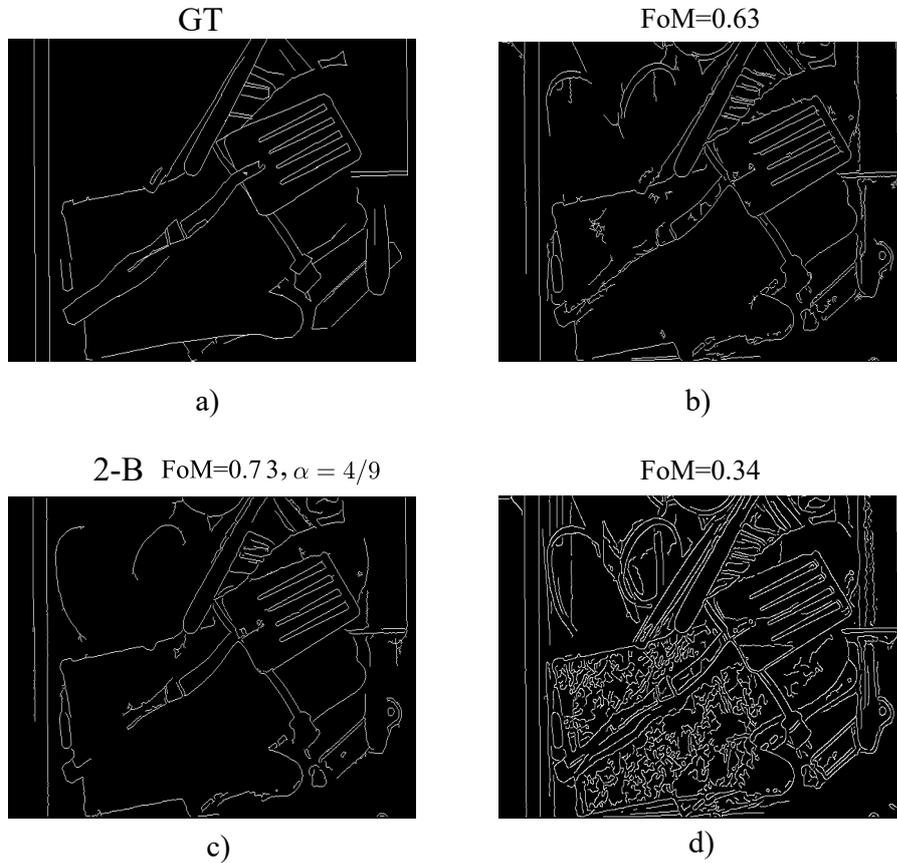


Fonte: Autoria própria.

grande quantidade de falsos positivos. Além disso, tem-se que ao comparar os valores de FoM obtidos a partir de 1-B e 2-B, 2-B possui melhor desempenho. Assim, no caso da imagem 132.pgm, os resultados indicam que a redução da imagem intervalar obtida de 132.pgm (mediante ρ_α) a posteriori da utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy leva a melhores resultados do que a redução da imagem intervalar obtida de 132.pgm (mediante ρ_α) a priori da utilização da MM \mathbb{L} -fuzzy. Continuando com a análise, a Figura 28 apresenta as bordas da imagem 132.pgm obtidas a partir do detector baseado em 2-B com $\alpha = \frac{4}{9}$, do detector de bordas baseado em $G_{T_{nM}^n, I_{KD}^n}(A, U^M)$, e do detector de bordas Canny (com $\sigma = \sqrt{2}$). Pelos valores do FoM apresentados na Figura 28, tem-se que o detector proposto com $\alpha = \frac{4}{9}$ apresenta melhor desempenho na detecção de bordas da imagem 132.pgm comparado com o detector de bordas baseado em $G_{T_{nM}^n, I_{KD}^n}(A, U^M)$ e com o detector de bordas Canny.

Note que, na análise do desempenho dos detectores de bordas propostos aplicados à imagem 132.pgm, não foi definido nenhum critério para a escolha de α . Isso é um problema pois o desempenho dos detectores de bordas propostos podem melhorar o piorar de acordo com a escolha de α (ver Figuras 26, 27). Para contornar esse problema, foram realizados experimentos em duas fases, a primeira fase chamada fase de treino e

Figura 28 – Imagens de bordas de 132.pgm obtidas a partir de diferentes detectores de bordas. a) Ground Truth. b) Imagem de bordas baseado em 2-B com $\alpha = \frac{4}{9}$. c) Imagem de bordas baseado em $G_{T_{nM}^m, I_{KD}^m}(A, U^M)$. d) Imagem de bordas obtida pelo detector Canny (com $\sigma = \sqrt{2}$).



Fonte: Autoria própria.

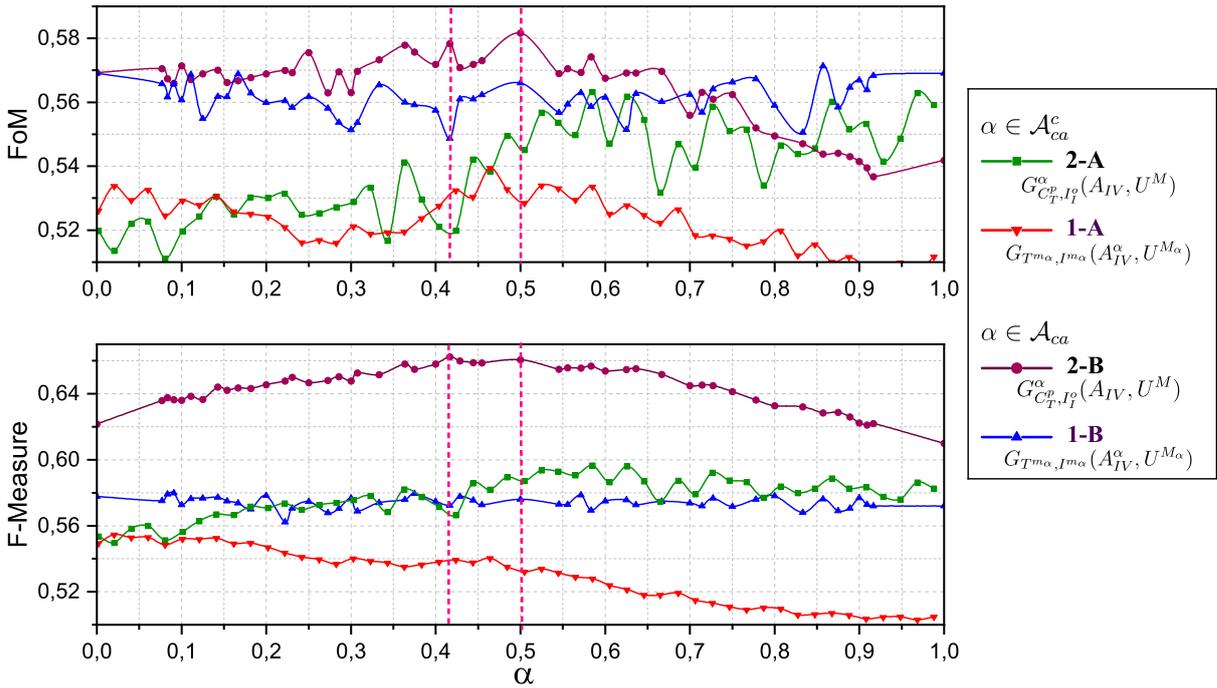
segunda fase chamada fase de teste. Em termos gerais, a fase de treino basicamente foca na procura do α associado ao detector de bordas proposto, e na fase do teste é avaliado o detector de bordas proposto e o α apontados na fase anterior. Na fase de treino foram utilizadas as primeiras 25 imagens da base de dados sendo chamadas imagens de treino e na fase de teste, as seguintes 25 imagens da base de dados sendo chamadas imagens de teste (lembre que a base de dados utilizada contém 50 imagens digitais).

Pela análise feita sobre uma imagem, observou-se que os detectores de bordas baseados em 1-B e 2-B geram menor quantidade de níveis de cinza e portanto menor quantidade de possíveis falsos positivos do que os detectores de bordas baseados em 1-A e 2-A (ver Figuras 26 e 27). Como consequência dessa observação, através de um processo computacional, foi considerado o conjunto das primeiras 50 α 's associadas aos primeiros 50 m_α ordenados em forma crescente do conjunto $\{m_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_{1n}^*\}$, sendo denotado por \mathcal{A}_{ac} (ver Anexo 1 -Tabela 5). Essa observação não foi utilizada para o caso em que $\alpha \notin \mathcal{A}_{1n}^*$,

pois apesar de variar α o nível de cinza m_α continua sendo o mesmo. Nesse caso, tomou-se $\mathcal{A}'_{\mathbb{I}_n^*} = \left\{ \beta_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \mid \alpha_i, \alpha_{i+1} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \right\}$ como representante do conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}^c$, pois pela Observação 3.4, $\mathcal{A}'_{\mathbb{I}_n^*}$ gera as mesmas ordens admissíveis do que o conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}^c$. Logo para os experimentos foi considerado o subconjunto $\mathcal{A}_{ca}^c = \{\beta_1, \beta_{379}, \beta_{757}, \dots, \beta_{18901}\}$ de $\mathcal{A}'_{\mathbb{I}_n^*}$ (ver Anexo 1 -Tabela 6).

Para a escolha de um α adequado (na fase treino) foi utilizada a média dos valores de FoM e a média dos valores do F-Measure obtidos a partir de cada detector de bordas proposto, aplicados às 25 imagens de treino, ver Figura 29. O treino foi realizado para cada $\alpha \in \mathcal{A}_{ca} \cup \mathcal{A}_{ca}^c$ escolhido segundo o detector de bordas proposto. No detector de bordas baseado em 1-A e 1-B foi utilizado os pares $(I_{nM}^{m_\alpha}, I_{KD}^{m_\alpha})$, e no detector de bordas baseado em 2-A e 2-B foi utilizado os pares $(\mathcal{C}_{nM}^p, \mathcal{J}_{KD}^o)$, $n = 255$.

Figura 29 – Média dos valores FoM e média dos valores F-Measure obtidos a partir dos detectores de bordas propostos baseados aplicadas às 25 imagens de treino por cada $\alpha \in \mathcal{A}_{ca}$ ($\alpha \in \mathcal{A}_{ca}^c$) correspondente ($\alpha \in \mathcal{A}_{ca}^c$ corresponde a 1-A 2-A e).



Autoria própria.

Na Figura 29 pode-se observar que o detector de bordas baseado em 2-B com $\alpha \in \mathcal{A}_{ca}$ possui melhor desempenho do que os detectores de bordas baseados nas outras abordagens propostas. Além do melhor desempenho do detector de bordas baseado em 2-B, destacaram-se, de entre os valores de α possíveis, os seguintes: $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{12}$.

Da análise desenvolvida acima, os detectores de bordas baseados em 2-B com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{12}$ foram os escolhidos para fase do teste. Vale ressaltar que, esses valores de α não são os únicos pois, pela Figura 29, observou-se que existem outros possíveis candidatos.

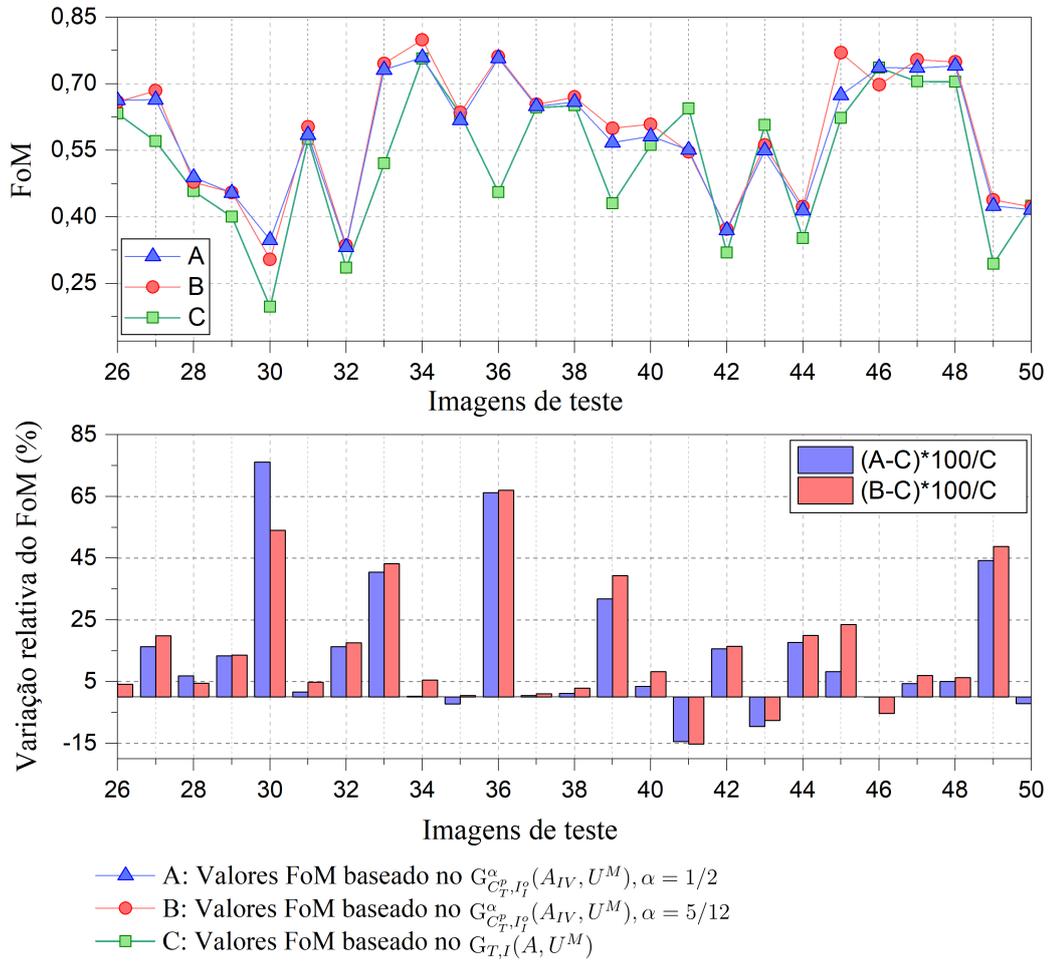
Dando início à fase de teste, os detectores de bordas baseados em 2-B (com $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 5/12$) e o detector de bordas baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$ foram aplicados sobre as 25 imagens de teste, e as suas medidas de desempenho (FoM e F-Measure) foram comparadas. Para o caso dos detectores de bordas baseados em 2-B utilizou-se o par $(\mathcal{C}_{T_{nM}}^p, \mathcal{J}_{I_{KD}}^o)$, $n = 255$ e para o detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$ utilizou-se o par $(T, I) = (T_{nM}^n, I_{KD}^n)$, $n = 255$, sendo ambos os pares já empregados na fase de treino. A comparação foi realizada para cada imagem processada, havendo-se considerado tanto os valores absolutos do FoM e do F-Measure como suas variações relativas percentuais com respeito ao detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$, ver Figuras 30 e 31. A variação relativa porcentual, em caso positivo, representa o ganho porcentual no desempenho do detector proposto em relação ao detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$, caso contrário, representa perda porcentual no desempenho do detector de bordas proposto em relação ao detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$.

Na Figura 30, os valores de FoM mostraram que em 11 das imagens processadas, os detectores de bordas baseados em 2-B, com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{12}$, exibiram melhor desempenho na detecção de bordas do que o detector de bordas baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy. Essa afirmação é corroborada pela variação relativa porcentual apresentada na Figura 30-Inferior, onde houve uma melhoria significativa em 6 das imagens, superior a 40%, e em torno de 20% para nas restantes. Nota-se também, que em 10 das imagens processadas (ver 26, 28, 31, 34, 35, 37, 38, 40, 46, 50), o desempenho dos detectores de bordas não pousem diferença significativa e os valores FoM estão em torno de 0.6. Em 2 imagens (ver 41, 43) os detectores de bordas propostos apresentam uma variação negativa próxima do 10 %.

Na Figura 31, os valores de F-Measure mostraram que em 9 das imagens processadas, os detectores de bordas baseados em 2-B, com $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 5/12$, exibiram melhor desempenho na detecção de bordas do que o detector baseado no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy. Essa afirmação é corroborada pela variação relativa porcentual apresentada na Figura 31-Inferior, onde a melhoria é superior a 40% em 6 das imagens, e em torno de 20% para os restantes. Nota-se também, que em 13 imagens processadas (ver 26, 27, 28, 31, 34, 35, 38, 40, 43, 46, 47, 48, 50), o desempenho dos detectores de bordas não pousem diferença significativa e a maioria dos valores F-Measure são acima de 0.6. Em 2 imagens (ver 37, 42) o detector proposto apresentam uma piora em torno do 10 %.

Das análises realizadas acima (das Figuras 30 e 31), pode-se concluir que: quando obtidos valores altos FoM a partir do detector de bordas baseado no gradiente

Figura 30 – Superior: Valores FoM dados pelos detectores de bordas baseados em 2-B, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, e no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$ aplicado às 25 imagens de teste, sendo $T = T_{nM}^n$ e $I = I_{KD}^n$. Inferior: Variações relativas percentuais dos valores FoM obtidos pelos detectores propostos com respeito aos valores FoM obtido pelo detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$.

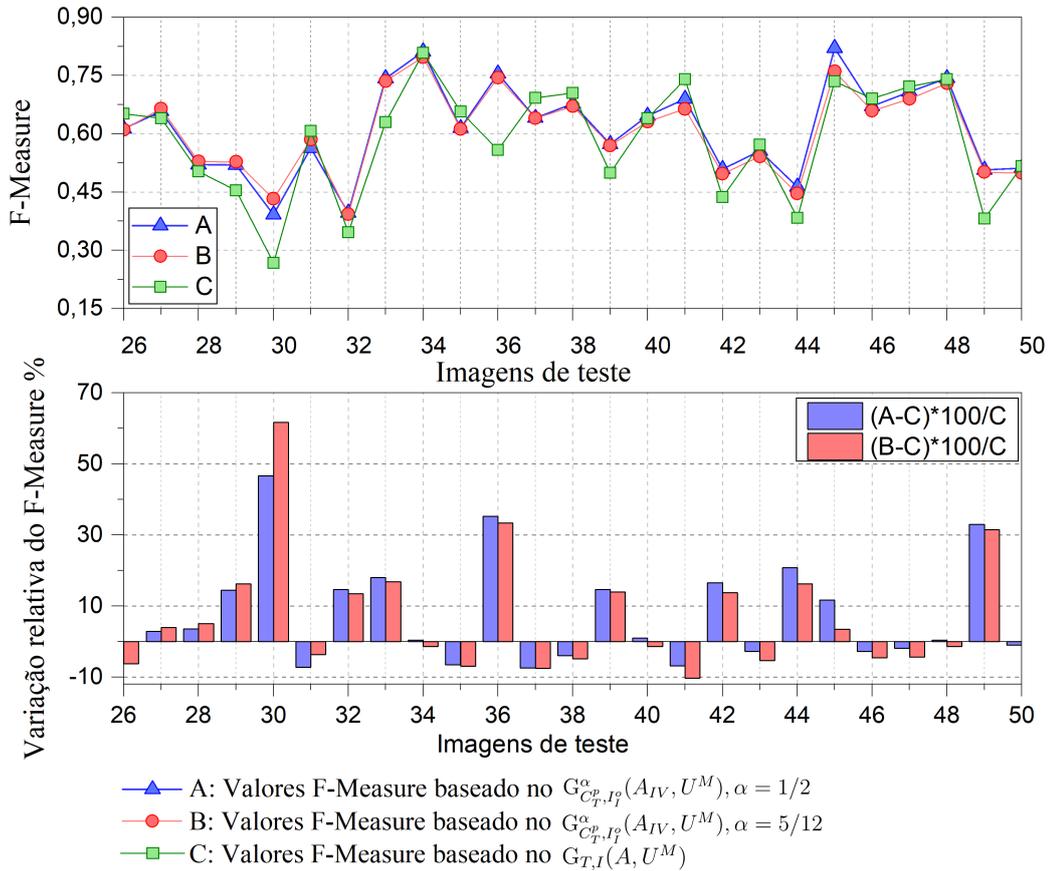


Autoria própria.

\mathcal{L}_n -fuzzy, são também obtidos valores altos FoM pelos detectores de bordas propostos; enquanto que, quando obtidos valores baixos FoM a partir do detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy, os valores FoM obtidos pelos detectores de bordas propostos são superiores, o que implica uma melhor detecção de bordas. Essa análise também é válida para os valores F-Measure.

Para ver se os detectores de bordas propostos baseados em 2-B (ou detectores de bordas propostos baseado no $G_{C_T, I_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$), com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, possuem uma melhora estatisticamente significativa sobre o detector dado pelo \mathcal{L}_n gradiente fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$, é utilizado o teste de Wilcoxon. Os p-valores dessa prova são apresentados na Tabela 3. Assim, como o p-valor do teste de Wilcoxon para os valores do FoM é menor

Figura 31 – Superior: Valores F-Measure dados pelos detectores de bordas baseados em 2-B, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, e no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$ aplicado às 25 imagens de teste, sendo $T = T_{nM}^n$ e $I = I_{KD}^n$. Inferior: Variações relativas percentuais dos valores F-Measure obtidos pelos detectores propostos com respeito aos valores FoM obtido pelo detector de bordas baseado em $G_{T,I}(A, U^M)$.



Autoria própria.

do que 5%, concluí-se que existe diferença significativa entre as duas abordagens. Portanto, pela média e mediana dada na Tabela 3 o detector de bordas proposto baseado em 2-B, com $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 5/12$, possui uma melhora significativa, de acordo com os valores FoM, em comparação ao detector de bordas dado pelo gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy. Também, observou-se que para a medida do F-Measure ambos detectores não possuem diferença significativa apesar disso, pela comparação sobre os valores de cada imagem, existe uma melhora no detector de bordas proposto para essa medida o que é expressado na média do F-Measure. Portanto é concluído que o detector de bordas proposto baseado no gradiente morfológico $G_{C_{T,I}^{\alpha}}(A_{IV}, U^M)$, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, sendo $T = T_{nM}^n$, $I = I_{KD}^n$, $n = 255$, mostraram melhor desempenho do que o gradiente morfológico fuzzy discreto $G_{T,I}(A, U^M)$ e do que o detector de bordas Canny, com $\sigma = \sqrt{2}$ (ver Tabela 3).

Tabela 3 – P-valores obtidos a partir do teste de Wilcoxon dos valores FoM e F-Measure obtidos pelos detectores de bordas baseado no $G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$ com $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 5/12$, e no $G_{T,I}(A, U^M)$ aplicados às 25 imagens de teste.

Pares	P-valor	
	FoM	F-Measure
$G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 1/2$ e $G_{T,I}(A, U^M)$	0,0004	0,0903
$G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 5/12$ e $G_{T,I}(A, U^M)$	0,0021	0,2641

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 – Média, mediana e desvio padrão dos valores FoM e do F-Measure dos detectores de bordas propostos, do detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy $G_{T,I}(A, U^M)$, e do detector Canny aplicados às 25 imagens de teste.

Detectores de bordas	FoM		F-Measure	
	Média±Desv.P.	Mediana	Média±Desv.P.	Mediana
$(T, I) = (T_{nM}^n, I_{KD}^n)$, $n = 255$				
$G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 1/2$	0,5889±0,1481	0,6083	0,6123±0,1185	0,6146
$G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 5/12$	0,5787 ± 0,1385	0,5845	0,6052 ± 0,1095	0,6117
$G_{T,I}(A, U^M)$	0,5274 ± 0,1564	0,5703	0,5831 ± 0,1432	0,6296
Canny	0,4453 ± 0,1316	0,4563	0,5035 ± 0,1280	0,5477

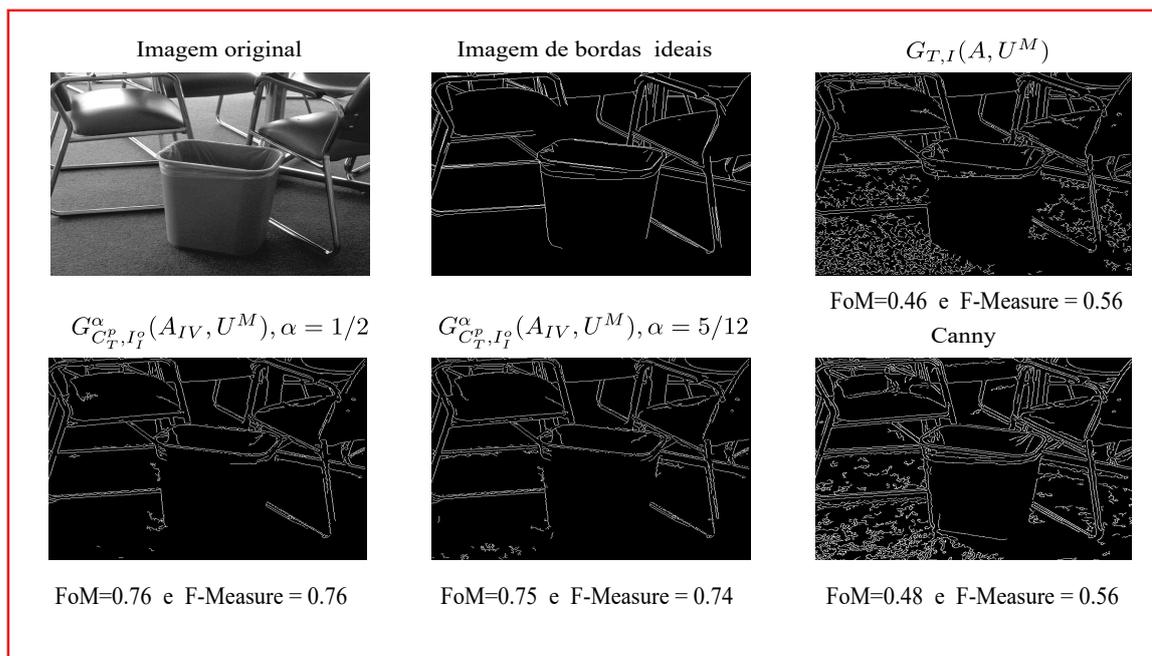
Fonte: Autoria própria.

Em seguida, nas Figuras 32 e 33, são apresentados alguns exemplos da borda das imagens de teste dados pelos detectores de bordas propostos baseados no $G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, pelo detector baseado no $G_{T,I}(A, U^M)$ e pelo clássico detector de bordas Canny. Ambos gradientes morfológicos utilizam os operadores \mathcal{L}_n -fuzzy, $T = T_{nM}^n$ e $I = I_{KD}^n$, $n = 255$. Fazendo uma análise qualitativa da borda das imagens apresentadas nas Figuras 32 e 33, observa-se que os detectores de bordas propostos baseados no gradiente morfológico $G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, apresentam maior correspondência com a imagem de bordas ideais (que pode implicar menor quantidade de falsos positivos) se comparados com o detector de bordas baseado em $G_{T_{nM}^n, I_{KD}^n}(A, U^M)$ ou com o detector de bordas Canny. Assim, os detectores de bordas propostos baseados no gradiente morfológico $G_{\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, com $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, apresentam melhor desempenho na detecção das bordas, sendo validado pelos valores FoM e F-Measure obtidos em cada caso.

A melhoria observada no desempenho dos detectores de bordas propostos, pode-se relacionar com o fato de que os métodos desenvolvidos levam em conta a existência da incerteza uma imagem digital quantificada em termos de uma imagem digital intervalar, e como essa incerteza é abordada pelos métodos propostos. Lembre que nas abordagens

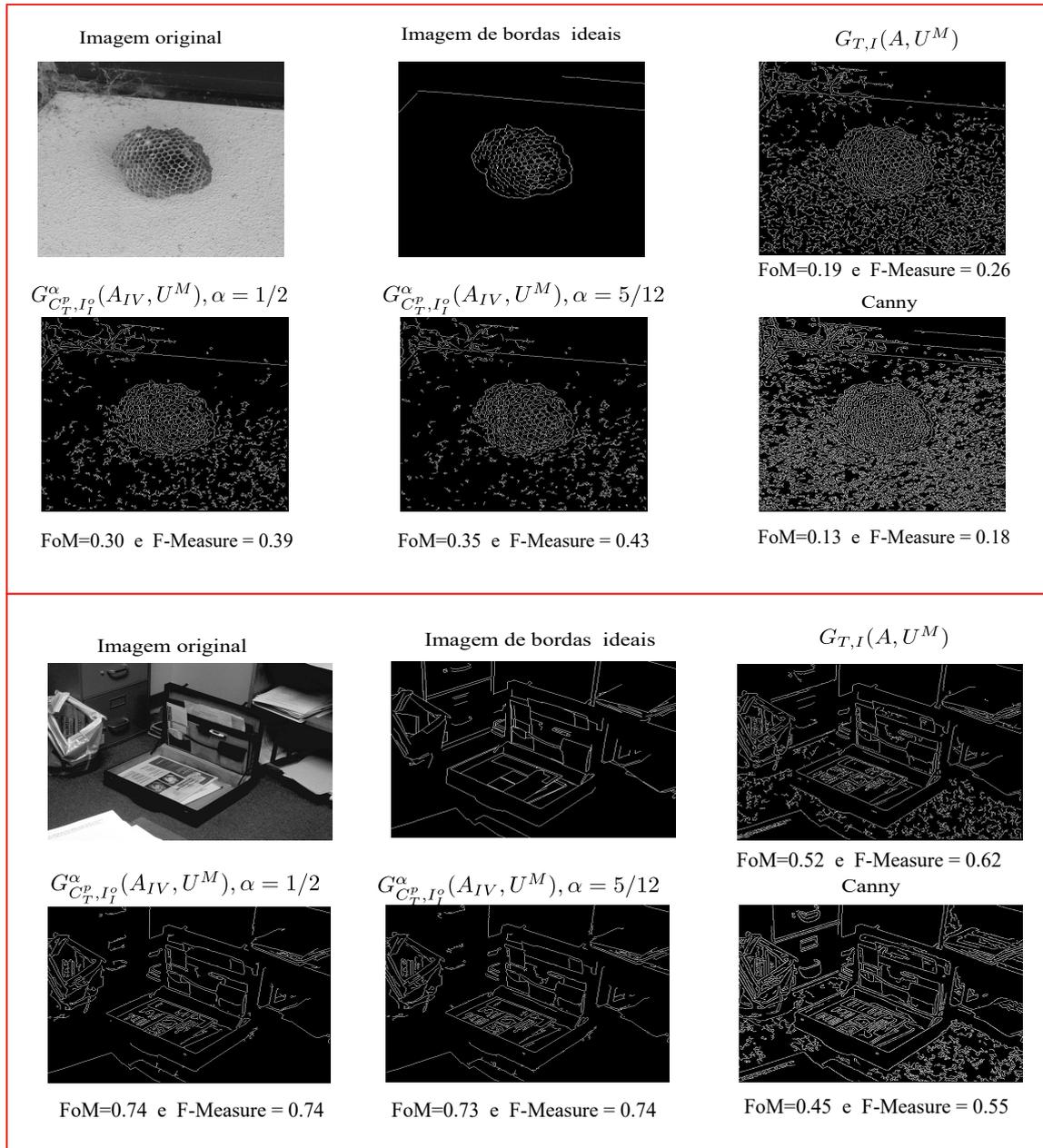
propostas, existem duas instâncias ao utilizar a transformação de uma imagem digital intervalar numa imagem digital por meio das h -ordens: a primeira instância, a priori da utilização da MM \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy; e a segunda instância, a posteriori da utilização da MM \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Assim, pelos resultados quantitativos apresentados neste capítulo, conclui-se que os detectores baseados na segunda instância apresentam melhor desempenho na detecção das bordas em termos de FoM e F-Measure. Acredita-se, que isso é devido a que numa segunda instância, a incerteza é propagada para a dilatação e a erosão \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Isso leva a pensar que, os detectores de bordas baseadas nessa segunda instância, são mais sensíveis quanto à localização dos pixels pertencentes à borda da imagem, o que juntamente com uma escolha adequada de h -ordens pode melhorar significativamente seu desempenho.

Figura 32 – Exemplo das bordas de imagens digitais, dadas pelos gradientes morfológicos propostos $G_{C_T, I_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, pelo gradiente morfológico fuzzy discreto $G_{T, I}(A, U^M)$ e pelo detector de bordas Canny



Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Exemplo das bordas de imagens digitais, dadas pelos gradientes morfológicos propostos $G_{C_T, I_I}^\alpha(A_{IV}, U^M)$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = 5/12$, pelo gradiente morfológico fuzzy discreto $G_{T, I}(A, U^M)$ e pelo detector de bordas Canny



Fonte: Autoria própria.

Neste capítulo foram apresentados os principais resultados experimentais em detecção de bordas baseados nas abordagens propostas no Capítulo 4. Devido à grande quantidade de h -ordens obtidas, implementou-se uma fase de treino. Nessa fase de treino identificaram-se às h -ordens $\leq \alpha$, $\alpha \in \{1/2, 5/12\}$, como sendo as mais sobressalentes, isso mediante o uso de medidas de avaliação de desempenho de detectores de bordas (FoM e F-Measure). Também, na fase de treino, observou-se que os detectores de bordas propostos

baseados em 2-B apresentaram melhor desempenho em detecção de bordas do que as abordagens propostas restantes (segundo as medidas de FoM e F-Measure realizadas). Para verificar os resultados obtidos na fase de treino, implementou-se uma fase de teste na qual evidenciou-se que, segundo o teste de Wilcoxon, o desempenho do detector de bordas proposto baseado em 2-B, com $\alpha \in \{1/2, 5/12\}$, foi significativamente melhor do que o detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy e do que o detector de bordas Canny (isso em termos das medidas de FoM realizadas).

Considerações Finais

Neste trabalho, propõem-se duas abordagens para detecção de bordas de imagens digitais baseadas em morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy e h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$. Tais abordagens consideram a inerente existência da incerteza quanto à localização e à tonalidade de cada pixel da imagem digital analisada, sendo quantificada em termos de uma imagem digital intervalar.

As abordagens baseiam-se na redução de uma imagem digital intervalar numa imagem digital, sendo uma a priori e a outra a posteriori da utilização da morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy. Especificamente, na primeira abordagem (a priori), reduziu-se uma imagem digital intervalar numa imagem digital utilizando as h -ordens, de modo que sobre a redução realizada foi utilizada a morfologia matemática \mathcal{L}_{m_α} -fuzzy seguida do gradiente morfológico fuzzy (1-A e 1-B). Na segunda abordagem (a posteriori), reduziram-se a erosão e a dilatação \mathcal{L}_n -fuzzy intervalar sobre uma imagem digital intervalar a erosão e dilatação morfológica (respectivamente), utilizando as h -ordens, de modo que sobre a redução realizada foi utilizado o gradiente morfológico (2-A e 2-B).

Para a utilização das h -ordens nas abordagens propostas, determinaram-se todas h -ordens dadas pela combinação convexa $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0, 1]$, sobre \mathbb{I}_n^* . Além disso, mostrou-se que o conjunto de ditas h -ordens inclui todas as ordens admissíveis dadas pelas combinações convexas $K_{\alpha,n}, K_{\beta,n}$, $\alpha \neq \beta \in [0, 1]$, sobre \mathbb{I}_n^* .

Com intuito de avaliar o desempenho das abordagens propostas em detecção de bordas e devido à grande quantidade de h -ordens obtidas, implementou-se uma fase de treino. Nessa fase de treino identificou-se, mediante o uso de medidas de avaliação de desempenho de detectores de bordas (FoM e F-Measure), às h -ordens \leq_α , $\alpha \in \{1/2, 5/12\}$, como sendo as mais sobressalentes. Também, na fase de treino, observou-se que os detectores de bordas propostos baseados em 2-B apresentaram melhor desempenho em detecção de bordas do que as abordagens propostas restantes (segundo as medidas de FoM e F-Measure realizadas). Para verificar os resultados obtidos na fase de treino, implementou-se uma fase de teste na qual evidenciou-se que o desempenho do detector de bordas proposto baseado em 2-B, com $\alpha \in \{1/2, 5/12\}$, foi significativamente melhor do que o detector de bordas baseado no gradiente \mathcal{L}_n -fuzzy e do que o detector de bordas Canny (isso em termos das medidas de FoM realizadas).

Os operados básicos da morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy utilizados nas abordagens propostas, foram a dilatação e a erosão \mathbb{L} -fuzzy baseadas nos operadores de conjunção e implicação \mathbb{L} -fuzzy, respectivamente. Observou-se que os operadores \mathbb{L} -fuzzy podem ser definidos num contexto mais geral. Assim, foram estendidos os operadores de conjunção e implicação pseudo-representáveis sobre \mathbb{I}^* para operadores de conjunção e implicação pseudo-representáveis sobre $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$, sendo \mathbb{L} um reticulado limitado. Também, demonstrou-se que a extensão das t -normas pseudo-representáveis sobre \mathbb{I}^* para t -normas pseudo- \mathcal{C} -representáveis sobre $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}^*$ só é possível desde que \mathbb{L} seja um l -monoide limitado.

Quanto à morfologia matemática \mathbb{L} -fuzzy, enfatizou-se principalmente na MM fuzzy discreta (sendo $\mathbb{L} = \mathcal{L}_n$) e na MM fuzzy intervalar discreta (sendo $\mathbb{L} = \mathbb{I}_n^*$), já que as de imagens digitais podem ser vistas como conjuntos \mathcal{L}_n -fuzzy e as imagens intervalares digitais podem ser vistas como conjuntos \mathbb{I}_n^* -fuzzy. Assim, para processar tais imagens, foram relacionados os operadores $\mathcal{L}_{\frac{1}{n}}$ -fuzzy com os operadores \mathcal{L}_n -fuzzy através do isomorfismo φ_n , o que permitiu a sua utilização em operadores pseudo- \mathcal{C} -representáveis sobre \mathbb{I}_n^* .

Ao margem do exposto neste trabalho, as abordagens propostas também podem ser aplicadas em segmentação de imagens digitais reconstruídas a partir de sinogramas ruidosos. Com base nisso, e pela observação de que na prática, um sinograma pode ser afetado por ruído dos aparelhos utilizados, recentemente foi publicado um artigo [41] no qual simulou-se imagens reconstruídas a partir de um sinograma com ruído de Poisson. Em seguida, sobre essas imagens reconstruídas utilizaram-se as abordagens propostas e a abordagem baseada no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy para sua segmentação. Nesse artigo, mostra-se que as abordagens propostas, também apresentam um desempenho sobressalente na segmentação desse tipo de imagens, se comparadas com a abordagem baseada no gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy.

No futuro, pretende-se estudar a extensão do gradiente morfológico \mathcal{L}_n baseado em outros operadores de coimplicação \mathcal{L}_n -fuzzy [87], sendo que gradiente morfológico \mathcal{L}_n -fuzzy pode ser vista como uma coimplicação \mathcal{L}_n -fuzzy de Łukasiewicz. Além disso, estudar o comportamento das abordagens propostas considerando a informação do comprimento dos valores do gradiente morfológico intervalar em combinação com outros métodos de afinamento e a binarização para a obtenção das bordas das imagens. Outro trabalho futuro poderia dar-se na extensão das abordagens propostas no processamento de imagens coloridas. Em relação as ordens admissíveis \leq_{α} , $\alpha \notin \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ obtidas, poderiam ser estudadas em tomada de decisões. Além disso, devido a que \mathbb{I}_n^* é um conjunto finito, aspira-se em determinar o número total ordens admissíveis sobre \mathbb{I}_n^* que incluam as obtidas neste trabalho.

Referências

- 1 BOWYER, K.; KRANENBURG, C.; DOUGHERTY, S. Edge detector evaluation using empirical ROC curves. *Computer Vision and Image Understanding*, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 77–103, 2001.
- 2 TORRE, V.; POGGIO, T. A. On edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8, n. 2, p. 147–163, 1986.
- 3 GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de imagens digitais*. 3. ed.. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- 4 CANNY, J. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8, n. 6, p. 679–698, 1986.
- 5 PREWITT, J. Object enhancement and extraction. *Picture Processing Psychopictorics*, Academic Press, New York, p. 75–149, 1970.
- 6 SOBEL, I. E. Camera models and machine perception. Stanford University, 1970.
- 7 RIVEST, J.-F.; SOILLE, P.; BEUCHER, S. Morphological gradients. *Journal of Electronic Imaging*, SPIE, v. 2, n. 4, p. 326–337, 1993.
- 8 TALAI, Z.; TALAI, A. A fast edge detection using fuzzy rules. In: *2011 International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA)*. Singapore: IEEE, 2011. p. 1–5.
- 9 HU, L.; CHENG, H.; ZHANG, M. A high performance edge detector based on fuzzy inference rules. *Information Sciences*, v. 177, n. 21, p. 4768–4784, 2007.
- 10 BISWAS, R.; SIL, J. An improved canny edge detection algorithm based on type-2 fuzzy sets. *Procedia Technology*, v. 4, p. 820–824, 2012. 2nd International Conference on Computer, Communication, Control and Information Technology (C3IT-2012) on February 25 - 26, 2012.
- 11 MENDOZA, O.; MELIN, P.; LICEA, G. A new method for edge detection in image processing using interval type-2 fuzzy logic. In: *2007 IEEE International Conference on Granular Computing (GRC 2007)*. Fremont, CA, USA: IEEE, 2007. p. 151–151.
- 12 MELIN, P.; GONZALEZ, C. I.; CASTRO, J. R.; MENDOZA, O.; CASTILLO, O. Edge-detection method for image processing based on generalized type-2 fuzzy logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 22, n. 6, p. 1515–1525, 2014.
- 13 LOPEZ-MOLINA, C.; BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J.; COUTO, P.; DE BAETS, B. A gravitational approach to edge detection based on triangular norms. *Pattern Recognition*, v. 43, n. 11, p. 3730–3741, 2010.

- 14 BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; PAGOLA, M.; FERNANDEZ, J. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 160, n. 13, p. 1819–1840, 2009. Theme: Information Processing and Applications.
- 15 BARRENECHEA, E.; BUSTINCE, H.; DE BAETS, B.; LOPEZ-MOLINA, C. Construction of interval-valued fuzzy relations with application to the generation of fuzzy edge images. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 19, n. 5, p. 819–830, 2011.
- 16 GONZÁLEZ-HIDALGO, M.; MASSANET, S. A fuzzy mathematical morphology based on discrete t-norms: fundamentals and applications to image processing. *Soft Computing*, Springer, v. 18, n. 11, p. 2297–2311, 2014.
- 17 GONZÁLEZ-HIDALGO, M.; MASSANET, S.; MIR, A.; RUIZ-AGUILERA, D. On the choice of the pair conjunction–implication into the fuzzy morphological edge detector. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 23, n. 4, p. 872–884, 2015.
- 18 NACHTEGAEL, M.; SUSSNER, P.; MÉLANGE, T.; KERRE, E. E. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model. *Information Sciences*, Elsevier, v. 181, n. 10, p. 1971–1988, 2011.
- 19 SUSSNER, P.; NACHTEGAEL, M.; MÉLANGE, T.; DESCHRIJVER, G.; ESMI, E.; KERRE, E. Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of \mathbb{L} -fuzzy mathematical morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Springer, v. 43, n. 1, p. 50–71, 2012.
- 20 SUSSNER, P.; CARAZAS, L. C. An approach towards image edge detection based on interval-valued fuzzy mathematical morphology and admissible orders. In: *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Czech Republic: Atlantis Press, 2019/08. p. 690–697.
- 21 DE BAETS, B. A fuzzy morphology: a logical approach. In: *Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*. Boston, MA: Springer US, 1998. p. 53–67.
- 22 DENG, T.-Q.; HEIJMANS, H. J. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Springer, v. 16, n. 2, p. 155–171, 2002.
- 23 NACHTEGAEL, M.; KERRE, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 124, n. 1, p. 73–85, 2001.
- 24 SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Springer, v. 32, n. 2, p. 139–159, 2008.
- 25 MATHERON, G. Random sets and integral geometry. Wiley, New York, 1975.
- 26 SERRA, J. *Image analysis and mathematical morphology*. London: Academic Press, 1982.
- 27 HEIJMANS, H. J. A. M. *Morphological Image Operators*. New York: Academic Press, 1994.

- 28 STERNBERG, S. R. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, v. 35, n. 3, p. 333 – 355, 1986.
- 29 RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing*, v. 21, n. 2, p. 129 – 154, 1990.
- 30 SUSSNER, P. Lattice fuzzy transforms from the perspective of mathematical morphology. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 288, p. 115–128, 2016.
- 31 MÉLANGE, T.; NACHTEGAEL, M.; SUSSNER, P.; KERRE, E. Basic properties of the interval-valued fuzzy morphological operators. In: *International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona, Spain: IEEE, 2010. p. 1–8.
- 32 SOILLE, P. *Morphological Image Analysis: Principles and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- 33 LOPEZ-MOLINA, C.; MARCO-DETCART, C.; CERRON, J.; BUSTINCE, H.; DE BAETS, B. Gradient extraction operators for discrete interval-valued data. In: *Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Gijón, Asturias: Atlantis Press, 2015/06. p. 836–843.
- 34 CARAZAS, L. C.; SUSSNER, P. Detecção de bordas baseada em morfologia matemática fuzzy intervalar e as funções de agregação K_α . *Selecciones Matemáticas*, v. 6, n. 02, p. 238–247, 2019.
- 35 BUSTINCE, H.; CALVO, T.; DE BAETS, B.; FODOR, J.; MESIAR, R.; MONTERO, J.; PATERNAIN, D.; PRADERA, A. A class of aggregation functions encompassing two-dimensional OWA operators. *Information Sciences*, Elsevier, v. 180, n. 10, p. 1977–1989, 2010.
- 36 SANTANA, F.; BEDREGAL, B.; VIANA, P.; BUSTINCE, H. On admissible orders over closed subintervals of $[0,1]$. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 399, p. 44–54, 2020.
- 37 XU, Z.; YAGER, R. R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International journal of General Systems*, Taylor and Francis, v. 35, n. 4, p. 417–433, 2006.
- 38 BUSTINCE, H.; GALAR, M.; BEDREGAL, B.; KOLESÁROVÁ, A.; MESIAR, R. A new approach to interval-valued choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy set applications. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, IEEE, v. 21, n. 6, p. 1150–1162, 2013.
- 39 MIGUEL, L. D.; BUSTINCE, H.; INDURÁIN, E.; KOLESÁROVÁ, A.; MESIAR, R.; DE BAETS, B. Construction of admissible linear orders for pairs of intervals. In: *Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Gijón, Asturias: Atlantis Press, 2015/06. p. 1161–1167.
- 40 GOUTSIAS, J.; HEIJMANS, H. J.; SIVAKUMAR, K. Morphological operators for image sequences. *Computer Vision and Image Understanding*, Elsevier, v. 62, n. 3, p. 326–346, 1995.

- 41 SUSSNER, P.; CARAZAS, L. C.; MIQUELES, E. X. Some approaches based on interval-valued images and l-fuzzy mathematical morphology for segmenting images reconstructed from noisy sinograms. In: *Joint Proceedings of the 19th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA), the 12th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), and the 11th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP)*. Bratislava: Atlantis Press, 2021. p. 452–462.
- 42 BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*. 3rd., ed. Providence: American Mathematical Society, 1993.
- 43 GRÄTZER, G. A. *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices*. San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1971.
- 44 DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge: Cambridge University Press.
- 45 LANE, S.; BIRKHOFF, G. *Algebra*. 3rd. ed. Providence: American Mathematical Society Chelsea Publishing, 1999.
- 46 BUSTINCE, H.; FERNÁNDEZ, J.; KOLESÁROVÁ, A.; MESIAR, R. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 220, p. 69–77, 2013.
- 47 SANKAPPANAVAR, H. P.; BURRIS, S. *A course in universal algebra*. New York: Springer Verlag, 1981. v. 78.
- 48 GONZÁLEZ-HIDALGO, M.; MASSANET, S.; TORRENS, J. Discrete t-norms in a fuzzy mathematical morphology: Algebraic properties and experimental results. In: *International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona, ES: IEEE, 2010. p. 1–8.
- 49 KOMORNÍKOVÁ, M.; MESIAR, R. Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 175, n. 1, p. 48–56, 2011.
- 50 SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Berlin: Springer Verlag, 1999.
- 51 HEIJMANS, H.; RONSE, C. The algebraic basis of mathematical morphology: I. dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, v. 50, n. 3, p. 245 – 295, 1990.
- 52 RONSE, C.; HEIJMANS, H. The algebraic basis of mathematical morphology: II. openings and closings. *CVGIP: Image Understanding*, v. 54, n. 1, p. 74 – 97, 1991.
- 53 SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology: Vol.: 2: Theoretical Advances*. New York: Academic Press, 1988.
- 54 HEIJMANS, H. J. Morphological image operators. *Advances in Electronics and Electron Physics Suppl., Boston: Academic Press| c1994*, 1994.
- 55 PALMEIRA, E.; BEDREGAL, B. Extension of fuzzy logic operators defined on bounded lattices via retractions. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 63, n. 6, p. 1026 – 1038, 2012.

- 56 PALMEIRA, E. S.; BEDREGAL, B. R.; FERNANDEZ, J.; JURIO, A. On the extension of lattice-valued implications via retractions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 240, p. 66 – 85, 2014. Theme: Aggregation Operators.
- 57 BEDREGAL, B. C.; SANTOS, H. S.; CALLEJAS-BEDREGAL, R. A generalized class of T-norms from a categorical point of view. In: *2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference*. London, UK: IEEE, 2007. p. 1–6.
- 58 DESCHRIJVER, G.; CORNELIS, C. Representability in interval-valued fuzzy set theory. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, World Scientific, v. 15, n. 03, p. 345–361, 2007.
- 59 ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338 – 353, 1965.
- 60 GOGUEN, J. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 18, n. 1, p. 145 – 174, 1967.
- 61 BEDREGAL, B.; SANTOS, H.; CALLEJAS-BEDREGAL, R. T-norms on bounded lattices: t-norm morphisms and operators. In: *2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. BC, Canada: [s.n.], 2006. p. 22–28.
- 62 BEDREGAL, B.; BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; FERNÁNDEZ, J.; PRADERA, A.; REISER, R. (S,N)-implications on bounded lattices. In: *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. p. 101–124.
- 63 BARROS, L.; BASSANEZI, R. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. 2nd. ed. Campinas, SP, Brazil: G. P. Silveira, 2010.
- 64 BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. *Fuzzy Implication (Studies in Fuzziness and Soft Computing)*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
- 65 KLIR, G.; YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic; Theory and Applications*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- 66 REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. R. C.; SANTOS, H. S.; BEDREGAL, R. C. S-implications on complete lattices and the interval constructor. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 9, p. 143–154, 2008.
- 67 HADWIGER, H. *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Berlin: Springer-Verlag, 1957.
- 68 MINKOWSKI, H. Volumen und Oberfläche. *Mathematische Annalen*, v. 57, p. 447–495, 1903.
- 69 SINHA, D.; DOUGHERTY, E. R. Fuzzy mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, v. 3, n. 3, p. 286–302.
- 70 BLOCH, I.; MAITRE, H. Fuzzy mathematical morphologies: A comparative study. *Pattern Recognition*, v. 28, n. 9, p. 1341 – 1387, 1995. ISSN 0031-3203.
- 71 BLOCH, I. Mathematical morphology on bipolar fuzzy sets: general algebraic framework. *International Journal of Approximate Reasoning*, Elsevier, v. 53, n. 7, p. 1031–1060, 2012.

- 72 MARAGOS, P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Springer, v. 22, n. 2-3, p. 333–353, 2005.
- 73 MADRID, N.; OJEDA-ACIEGO, M.; MEDINA, J.; PERFILIEVA, I. L-fuzzy relational mathematical morphology based on adjoint triples. *Information Sciences*, v. 474, p. 75–89, 2019. ISSN 0020-0255.
- 74 APOSTOL, T. M. *Introduction to analytic number theory*. New York: Springer Verlag, 1976.
- 75 KOVESI, P. D. Matlab and Octave functions for computer vision and image processing (<https://www.peterkovesi.com/matlabfns/>). *Centre for Exploration Targeting, School of Earth and Environment, The University of Western Australia*, v. 147, p. 230, 2000.
- 76 DESCHRIJVER, G. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. *Information Sciences*, v. 177, n. 14, p. 2906 – 2924, 2007.
- 77 ROSIN, P. L. Unimodal thresholding. *Pattern Recognition*, v. 34, p. 2083–2096, 2001.
- 78 MEDINA-CARNICER, R.; MADRID-CUEVAS, F.; MUÑOZ-SALINAS, R.; CARMONA-POYATO, A. Solving the process of hysteresis without determining the optimal thresholds. *Pattern Recognition*, v. 43, n. 4, p. 1224 – 1232, 2010. ISSN 0031-3203.
- 79 MEDINA-CARNICER, R.; MUNOZ-SALINAS, R.; YEGUAS-BOLIVAR, E.; DIAZ-MAS, L. A novel method to look for the hysteresis thresholds for the Canny edge detector. *Pattern Recognition*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 1201–1211, 2011.
- 80 MATLAB. *9.7.0.1190202 (R2019b)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2018.
- 81 LOPEZ-MOLINA, C.; DE BAETS, B.; BUSTINCE, H. Quantitative error measures for edge detection. *Pattern Recognition*, Elsevier, v. 46, n. 4, p. 1125–1139, 2013.
- 82 PRIETO, M. S.; ALLEN, A. R. A similarity metric for edge images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, IEEE, v. 25, n. 10, p. 1265–1273, 2003.
- 83 ABDOU, I. E.; PRATT, W. K. Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors. *Proceedings of the IEEE*, v. 67, n. 5, p. 753–763, 1979.
- 84 PRATT, W. K. *Digital image processing: PIKS Scientific inside*. United States of America: Wiley-interscience Hoboken, New Jersey, 2007. v. 4 ed.
- 85 BADDELEY, A. J. An error metric for binary images. In: *Proceedings, International Workshop on Robust Computer Vision, Bonn. Karlsruhe: Wichmann*. Karlsruhe: Wichmann Verlag, 1992. p. 59–78.
- 86 BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 6. ed. SP, Brazil: Editora Saravia, 2010.

87 REISER, R.; BEDREGAL, B.; dos Reis, G. Interval-valued fuzzy coimplications and related dual interval-valued conjugate functions. *Journal of Computer and System Sciences*, v. 80, n. 2, p. 410 – 425, 2014.

ANEXO A

Fluxogramas das Abordagens Propostas

Figura 34 – Fluxograma da primeira abordagem

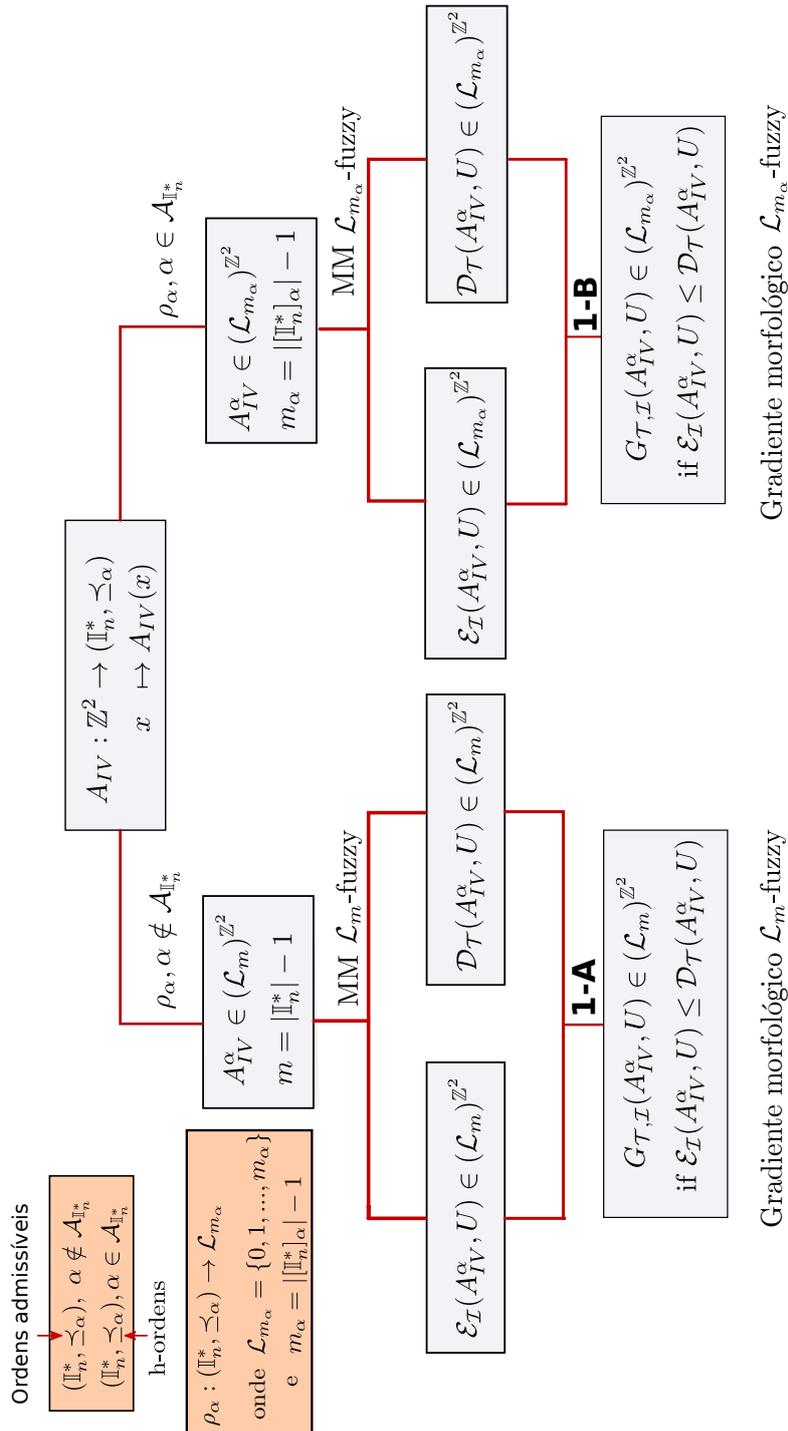
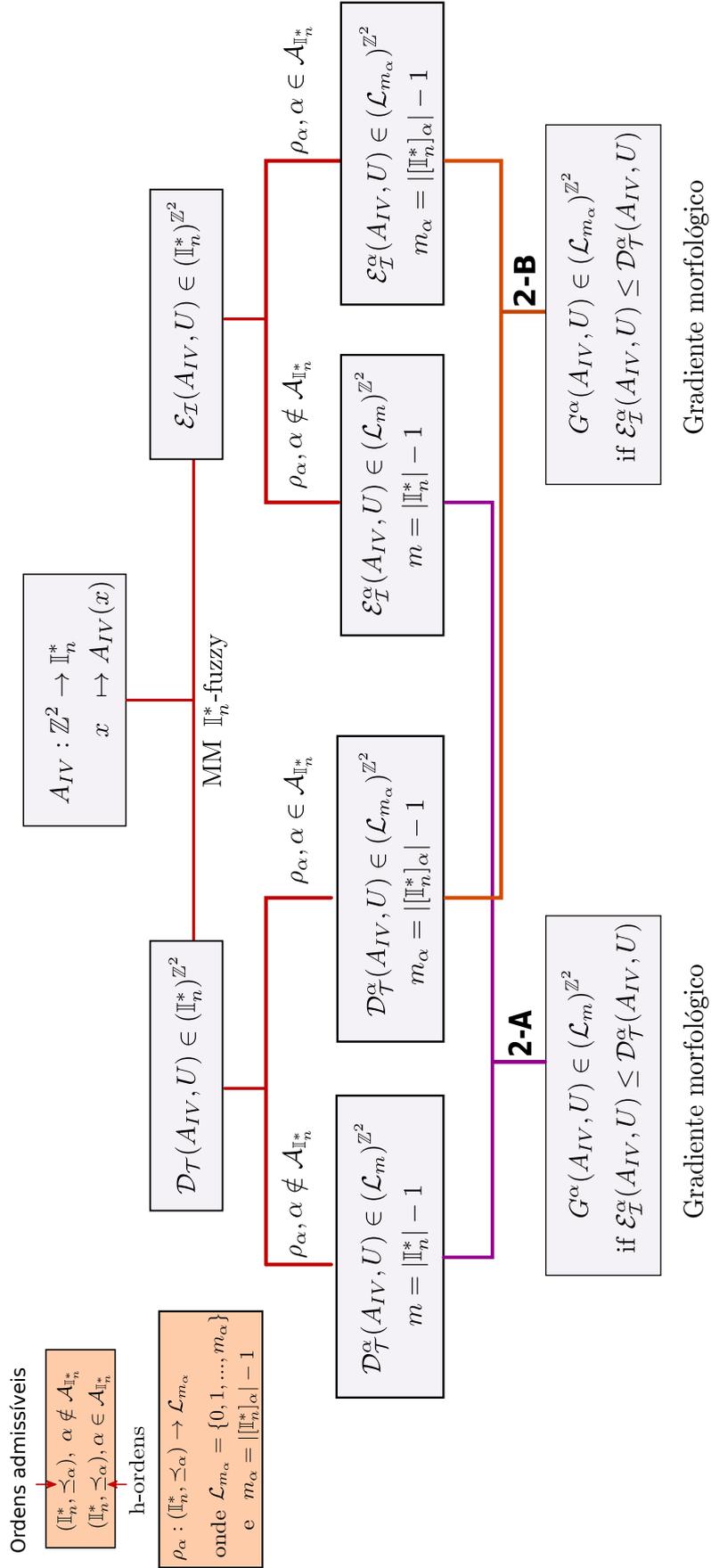


Figura 35 – Fluxograma da segunda abordagem



ANEXO B

h -Ordens - Fase de Treino

Tabela 5 mostra o conjunto $\mathcal{A}_{ac} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*}$ associado ao nível de cinza $m_\alpha = |[\mathbb{I}_{255}^*]_{[\alpha]}| - 1$ utilizado na fase de treino.

Tabela 5 – Conjunto \mathcal{A}_{ca}

Nro.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
α	0	1	1/2	1/3	2/3	1/4	3/4	1/5	2/5	3/5	4/5	1/6	5/6
m_α	255	255	511	954	1000	1018	1018	1456	1548	1630	1714	1772	1997
Nro.	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
α	1/8	3/8	5/8	7/8	1/7	5/7	2/7	3/7	1/9	4/7	6/7	2/9	1/10
m_α	2020	2020	2020	2020	2102	2246	2302	2408	2506	2513	2627	2629	2702
Nro.	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
α	5/9	4/9	7/9	3/10	1/11	8/9	2/11	1/12	7/10	4/11	7/11	9/10	5/11
m_α	2824	2834	2897	2940	3087	3103	3247	3289	3341	3371	3387	3389	3446
Nro.	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50		
α	8/11	3/11	1/13	10/11	2/13	5/12	6/11	3/13	4/13	11/12	7/12		
m_α	3461	3502	3520	3619	3639	3772	3782	3805	3875	3891	3909		

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 6 mostra o conjunto $\mathcal{A}_{ca}^c = \{\beta_1, \beta_{379}, \beta_{757}, \dots, \beta_{18901}\}$ de $\mathcal{A}'_{\mathbb{I}_n^*}$ sendo $\mathcal{A}'_{\mathbb{I}_n^*} = \left\{ \beta_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \mid \alpha_i, \alpha_{i+1} \in \mathcal{A}_{\mathbb{I}_n^*} \right\}$. Note que, $m_\alpha = |[\mathbb{I}_{255}^*]_{[\alpha]}| - 1 = 32895$

Tabela 6 – Conjunto \mathcal{A}_{ca}^c

$m_\alpha = 32895$							
Nro.	1	2	3	4	5	6	7
β	1/510	971/47142	60/1481	991/16368	181/2242	380/3761	216/1783
Nro.	8	9	10	11	12	13	14
β	600/4249	295/1826	1805/9949	1722/8527	2351/10604	323/1334	813/3098
Nro.	15	16	17	18	19	20	21
β	883/3125	783/2587	575/1781	349/1017	1951/5373	311/811	208/515
Nro.	22	23	24	25	26	27	28
β	621/1465	154/347	846/1823	477/985	205/406	1026/1955	188/345
Nro.	29	30	31	32	33	34	35
β	1804/3193	625/1068	893/1475	199/318	808/1251	292/439	982/1431
Nro.	36	37	38	39	40	41	42
β	1425/2017	332/457	339/454	1438/1875	965/1226	1236/1531	1951/2358
Nro.	43	44	45	46	47	48	49
β	523/617	1570/1809	388/437	2687/2959	349/376	1452/1531	1721/1777
Nro.	50						
β	991/1003						

Fonte: Autoria própria.

ANEXO C

Artigos publicados e participação em eventos

Artigos Publicados

A seguir os artigos publicados:

- SUSSNER, P.; CARAZAS, L. C.; MIQUELES, E. X.. Some Approaches Based on Interval-Valued Images and \mathbb{L} -Fuzzy Mathematical Morphology for Segmenting Images Reconstructed from Noisy Sinograms. Join Proceeding of the 19th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA), the 12th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), and the 11th International Summer School on Aggregation. Atlantis Press, 2021. p. 452-462.
- SUSSNER, P.; CARAZAS, L. C.. An approach towards image edge detection based on interval-valued fuzzy mathematical morphology and admissible orders. Atlantis Studies in Uncertainty Modelling, v. 1, of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (Proceedings - EUSFLAT 2019). Atlantis Press, 2019/08. p. 690–697. ISBN 978-94-6252-770-6. ISSN 2589-6644. Disponível em: <https://doi.org/10.2991/eusflat-19.2019.96>.
- CARAZAS, L. C.; SUSSNER, P.. Detecção de Bordas Baseada em Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar e as Funções de Agregação K_α . Selecciones Matemáticas, v. 6, n. 02, p. 238–247, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.10>

Resumos publicados em congressos

- CARAZAS, L. C.; SUSSNER, P. Comentários Introdutórios sobre Abordagens à Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar Baseado em Ordens Admissíveis e Detecção

de Bordas. No XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2018, 17 a 21 de setembro do 2018, Campinas – SP.

<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2504>.

- CARAZAS, L. C.; SUSSNER, P. Detecção de bordas baseada em Morfologia Matemática Fuzzy e Ordens Admissíveis. No IX Congresso Internacional de Matemática Aplicada e Computacional - CIMAC 2019, 06 a 09 de agosto, Lima-Perú.
<http://cimac.spmac.org/Expositores.html>
- CARAZAS, L. C.; SUSSNER, P. Detecção de bordas usando morfologia matemática fuzzy intervalar. No XIV Encontro Científico de Pós-Graduandos do IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica), realizado no período de 07 a 10 de Outubro de 2019, Campinas-SP.
<http://www.ime.unicamp.br/encpos/XIVEnCPos/BoletimDigital2019/Boletim.pdf>.
- CARAZAS, L. C.; e "Morfología Matemática \mathbb{L} -fuzzy y sus Aplicaciones en Procesamiento de Imágenes" en la IX Semana de la Investigación científica – I Congreso Internacional en Investigación y Emprendimiento en Tiempos de COVID-19, desarrollado del 6 al 9 de octubre del 2020.
<http://eventosvriin.unsaac.edu.pe/ixsemana.html>.