

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CARLOS EDUARDO DE OLIVEIRA

Interpretação das Partições de Inteiros sob a Ótica de Ladrilhamentos

Campinas

2021

Carlos Eduardo de Oliveira

Interpretação das Partições de Inteiros sob a Ótica de Ladrilhamentos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Carlos Eduardo de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4i Oliveira, Carlos Eduardo de, 1981-
Interpretação das partições de inteiros sob a ótica de ladrilhamentos / Carlos Eduardo de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Análise combinatória. 3. Ladrilhamento (Matemática). 4. Identidades de Rogers-Ramanujan. I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Integers partitions interpretation under tiling optics

Palavras-chave em inglês:

Partitions (Mathematics)

Combinatorial analysis

Tiling (Mathematics)

Rogers-Ramanujan identities

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]

Sueli Irene Rodrigues Costa

Hemar Teixeira Godinho

Robson da Silva

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Data de defesa: 03-09-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-2243-0055>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8627146361286695>

**Tese de Doutorado defendida em 03 de setembro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). HEMAR TEIXEIRA GODINHO

Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Às mulheres da minha vida.

À minha mãe Ângela.

À minha madrinha Angélica.

À minha avó Osvailda.

À minha irmã Marcella.

À minha esposa Maiara.

Às minhas filhas – luzes da minha vida – Alice e Amelie.

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Agradeço a meus familiares pelo apoio e confiança incondicionais.

Agradeço a minha esposa pelos momentos ao seu lado e pela paciência em me suportar.

Agradeço às minhas filhas por darem sentido à minha vida.

Agradeço ao meu orientador José Plínio de Oliveira Santos pela paciência, apoio e sábias correções.

Agradeço aos professores Kênia Cristina Pereira da Silva e Hemar Teixeira Godinho, participantes ativos dos seminários que deram origem à espinha dorsal desse trabalho.

Agradeço ao Instituto Federal de São Paulo pelo apoio à autocapacitação sem o qual esse trabalho não seria possível e desejo que o atual presidente do Brasil não destrua tudo isso.

*“Porque eu fazia do amor um cálculo matemático errado:
pensava que, somando as compreensões, eu amava.
Não sabia que, somando as incompreensões
é que se ama verdadeiramente.
Porque eu, só por ter tido carinho,
pensei que amar é fácil.”
(Clarice Lispector)*

Resumo

Este trabalho pretende analisar uma nova forma de observar as partições de um número inteiro n :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = n.$$

Seu ponto de partida será a escrita de uma partição como matriz de duas linhas, a conversão dessa matriz em um caminho orientado pelo plano cartesiano e, em sequência, sua reflexão sobre a reta $x + y = n$ apresentados nos dois primeiros capítulos. Nos capítulos seguintes, apresentamos uma interpretação bijetiva entre cada um desses caminhos refletidos e um ladrilhamento de comprimento n , bem como a análise desse ladrilhamento como um número escrito na base 2.

Nosso objetivo nessa transformação é observar se ao transformar cada partição em um número específico conseguimos encontrar novas propriedades das partições, apresentar novas maneiras de encontrar outros resultados já conhecidos e até mesmo estabelecer maneiras de contar ou estimar o número $p(n)$ de partições de um inteiro n .

Por fim, serão implementadas rotinas que exemplifiquem a validade e eficácia das teorias desenvolvidas no decorrer do texto.

Palavras-chave: partições de inteiros. combinatória enumerativa. ladrilhamentos. identidades de Rogers-Ramanujan.

Abstract

This work intends to analyze a new way to observe the partitions of an integer n :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = n.$$

Its starting point will be the writing of a partition as a two-line matrix, the conversion of that matrix into a path on the Cartesian Plane, and then, its reflection through the line $x + y = n$, presented in the first two chapters. In the next chapters, we present a bijective interpretation onto each of these reflected paths and a n length tiling, as well as the analysis of that tiling as a number written in base 2.

Our goal in this transformation is to see if, by transforming each partition into a specific number, we can find new partition properties, present new ways to find other known results, and even establish ways to count or estimate the number $p(n)$ of partitions of an integer n .

Finally, routines that exemplify the validity and effectiveness of the theories developed throughout the text will be computationally implemented.

Keywords: integers partitions. enumerative combinatorics. tilings. Rogers-Ramanujan identities.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Procedimento dos Caminhos 01	24
Figura 2 – Procedimento dos Caminhos 02	24
Figura 3 – Procedimento dos Caminhos 03	25
Figura 4 – Procedimento dos Caminhos 04	25
Figura 5 – Procedimento dos Caminhos 05	26
Figura 6 – Procedimento dos Caminhos refletido 01	27
Figura 7 – Procedimento dos Caminhos refletido 02	27
Figura 8 – Procedimento dos Caminhos refletido 03	28
Figura 9 – Procedimento dos Caminhos refletido 04	28
Figura 10 – Procedimento dos Caminhos refletido 05	29
Figura 11 – Conversão direta matriz x ímpares 01	29
Figura 12 – Conversão direta matriz x ímpares 02	30
Figura 13 – Conversão direta matriz x ímpares 03	30
Figura 14 – Ladrilhamento de $n=6$ - ex01	33
Figura 15 – Ladrilhamento de $n=6$ - ex02	34
Figura 16 – Ladrilhamento em potência de 2 - ex01	34
Figura 17 – Ladrilhamento em potência de 2 - ex02	34
Figura 18 – Sequências de $o(7)$ e $e(7)$	35
Figura 19 – Exemplos de Ladrilhamentos Inválidos	36
Figura 20 – Exemplos de Ladrilhamentos Inválidos	37
Figura 21 – Comparativo de ladrilhamentos válidos de $n=4$ e $n+1=5$ (1)	38
Figura 22 – Comparativo de ladrilhamentos válidos de $n=4$ e $n+1=5$ (2)	38
Figura 23 – Exemplo de ladrilhamento - conversão rápida	40
Figura 24 – Exemplo de conversão de ladrilhos 01	50
Figura 25 – Exemplo de conversão de ladrilhos 02	50
Figura 26 – Exemplo de conversão de ladrilhos 03	51
Figura 27 – Comparativo entre $o(4)$ e $o(5)$	51
Figura 28 – Comparativo entre $o(6)$ e $o(7)$	52
Figura 30 – Aplicação do Teorema 7 em ladrilhos	53
Figura 29 – Relação entre elementos $o(5)$ $o(6)$ $o(7)$ através do Teorema 7	54
Figura 31 – Elementos da forma $4n+1$	56
Figura 32 – Ladrilhamento de $o(n+1)_{p(n)}$	59
Figura 33 – Primeiro candidato a ladrilhamento de $o(n+1)_{p(n)+1}$	59
Figura 34 – Segundo candidato a ladrilhamento de $o(n+1)_{p(n)+1}$	60
Figura 35 – Ladrilhamento de $o(n+1)_{p(n)+1}$	61
Figura 36 – Possível ladrilhamento de $o(n+1)_{p(n)+2}$	61

Figura 37 – Ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+2}$	61
Figura 38 – Menor Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso par	62
Figura 39 – Formato do maior Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$	63
Figura 40 – Maior Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso par	63
Figura 41 – Ladrilhamento inviável $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar	64
Figura 42 – Candidato - Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar	64
Figura 43 – Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar	64
Figura 44 – Termos de referência para $n=10$	68
Figura 45 – Termos de referência para $n=9$	69
Figura 46 – Termos de referência para $n=8$	69
Figura 47 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (1)	73
Figura 48 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (2)	73
Figura 49 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (1)	74
Figura 50 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (2)	75
Figura 51 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (3)	77
Figura 52 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (4)	77
Figura 53 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (3)	78
Figura 54 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (4)	79

Lista de tabelas

Tabela 1 – Conversão Direta Exemplo1	31
Tabela 2 – Conversão Direta Exemplo2	32
Tabela 3 – Tabela Simples de $o(n)$	43
Tabela 4 – Tabela Completa de $o(n)$	45
Tabela 5 – Tabela Simples de $e(n)$	47
Tabela 6 – Tabela de α_n	49

Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Introdução onde é fornecido n que se deseja calcular as partições e $p(n)$ e onde são definidas as matrizes de auxílio e armazenamento dos dados.	80
Algoritmo 2 – Aplicação do Teorema 3 pela soma de 2^n em todas as partições de n a fim de obter as $p(n)$ maiores partições de $n + 1$	81
Algoritmo 3 – Aplicação do Teorema 7 aos elementos da “escada” de $n - 1$ a fim de obter parte dos termos da “escada” de n	81
Algoritmo 4 – Aplicação do Teorema 18 a fim de obter os elementos da forma $4k + 3, k \in \mathbb{N}$ presentes na "escada".	82

Lista de Códigos-fonte

Código-fonte 5 – Conversão dos Ladrilhamentos em Partições	82
Código-fonte 6 – Primeira Identidade de Ramanujan	84
Código-fonte 7 – Segunda Identidade de Ramanujan	87

Sumário

	Introdução	17
1	INTERPRETAÇÃO DE PARTIÇÕES EM MATRIZES DE DUAS LINHAS	19
1.1	Consequências da escrita de partições em matrizes de duas linhas	21
1.1.1	Partição conjugada	21
1.1.2	Leitura rápida da matriz	21
2	O PROCEDIMENTO DE CAMINHOS	23
2.1	O Procedimento dos Caminhos	23
2.2	Reflexões sobre o Procedimento dos Caminhos	26
2.3	Conversão direta matriz x ímpares distintos	29
3	INTERPRETAÇÃO DE PARTIÇÕES EM LADRILHAMENTOS	33
3.1	Ladrilhamentos em potências de 2	33
3.2	Partições Complementares	35
3.3	Termos extremos de $o(n)$	36
3.4	Conversão direta partição x ladrilhamento	39
4	TABELAS DE $O(N)$ E $E(N)$	42
4.1	Tabela simples de $o(n)$	42
4.2	Tabela completa de $o(n)$	44
4.3	Tabela Simples de $e(n)$	46
5	SEQUÊNCIAS EM $O(N)$	48
5.1	Sequências $s(n)$	48
5.2	Relações entre ladrilhos de n e $n+1$	49
5.3	Interpretação Numérica de Ladrilhamentos Associados	53
5.4	Outras relações entre ladrilhamentos de n e $n+1$	55
6	LIMITANTES EM $O(N)$	58
6.1	Partições recorrentes dos divisores de n	65
7	RECORRÊNCIA DOS TERMOS FALTANTES EM $O(N)$	67
8	IDENTIDADES DE RAMANUJAN	71
8.1	Primeira Identidade de Ramanujan	71
8.2	Segunda Identidade de Ramanujan	75

9	CÓDIGOS FONTE	80
9.1	Código Fonte - Introdução	80
9.2	Código Fonte - Aplicação do Teorema 3	81
9.3	Código Fonte - Aplicação do Teorema 7	81
9.4	Código Fonte - Aplicação do Teorema 18	81
9.5	Código Fonte - Conversão dos Ladrilhamentos em Partições	82
9.6	Código Fonte - Primeira Identidade de Ramanujan	84
9.7	Código Fonte - Segunda Identidade de Ramanujan	87
10	CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
	REFERÊNCIAS	93

Introdução

Dados históricos apontam a origem do estudo das partições de um inteiro para o século XVII, com Leibniz em uma carta enviada a Bernoulli, tratando brevemente sobre esse assunto aplicado exclusivamente a partições dos primeiros inteiros positivos. Desde então, o estudo das partições de inteiros evoluiu consideravelmente, sendo trabalhado por grandes nomes da matemática como Leonard Euler, Godfrey Harold Hardy, Srinivasa Ramanujan [3], [4], [5], [6], Carl Friedrich Gauss, dentre outros.

Muitos desses, dedicaram grande parte de seu esforço em estabelecer critérios e procedimentos capazes de contar ou estimar o número de partições de um inteiro n qualquer. Neste trabalho, nos propomos a analisar as partições de um inteiro por óticas diferentes com o intuito de buscar novas identidades, contar ou estimar $p(n)$ e apresentar novas formas de enxergar características a respeito da combinatória enumerativa por outro enfoque.

Neste trabalho, abordaremos, no Capítulo 1, uma breve discussão de uma teoria já conhecida a respeito das partições de inteiros, a escrita de uma partição como matriz de duas linhas no formato da matriz M a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= 0, d_k \neq 0 \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ para qualquer } t < k \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (2)$$

No Capítulo 2, abordaremos uma consequência da escrita de partições como matriz de duas linhas, denominada procedimento dos caminhos e a partir daí será proposta uma nova forma de interpretar as partições de um inteiro como uma sequência (ou uma nova partição) de ímpares distintos.

No Capítulo 3 alteraremos, mais uma vez, nosso olhar. Dessa vez convertendo a sequência de ímpares distintos abordada no Capítulo 2 em um ladrilhamento de comprimento n , seguindo definições de preenchimento específicas e que pode ser lido como um número escrito na base 2. Ainda neste capítulo, iniciaremos as primeiras discussões e apresentaremos os primeiros teoremas a respeito das partições de um inteiro n sob essa nova ótica.

Já o Capítulo 4 será destinado, quase em sua totalidade, a aplicar as teorias desenvolvidas no Capítulo 3 à todas as partições de n , com $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ em formato de tabela. O intuito desse Capítulo é apresentar, de forma mais palpável, a validade inicial das teorias anteriores e propiciar uma visão mais global de como elas poderiam evoluir.

Através da análise das tabelas apresentadas no Capítulo 4, conseguimos observar e,

consequentemente, demonstrar o surgimento e a validade de algumas sequências ali presentes. Essas sequências são apresentadas e debatidas no decorrer do Capítulo 5.

O Capítulo 6, seguinte, se propõe a mais uma vez analisar as tabelas expostas no Capítulo 4 e dali observar e estabelecer possíveis limitantes para o cálculo de $p(n)$.

Os últimos dois capítulos teóricos deste trabalho (Capítulos 7 e 8), são destinados a apresentar recorrências capazes de calcular, com exatidão, as partições irrestritas de n , as partições de n presentes na Primeira Identidade de Ramanujan e as partições de n presentes na Segunda Identidade de Ramanujan. Diferentemente do Capítulo 6, momento até o qual $p(n)$ é obtido por estimativa, nestes capítulos conseguimos converter essa estimativa em valores exatos.

Já no Capítulo 9, último capítulo deste trabalho, são apresentados os códigos fonte de uma rotina computacional que resume teorias desenvolvidas em todo o trabalho, a fim de, mais uma vez, calcular com exatidão e apresentar cada uma das partições de n , $n \in \mathbb{N}_+^*$ e também sua consequente aplicação sobre as Identidades de Ramanujan.

1 Interpretação de Partições em Matrizes de Duas linhas

Como base para a construção deste trabalho, nosso ponto de partida será a bijeção entre o número de partições irrestritas de n e o número de matrizes de duas linhas, com algumas características especiais, já trabalhadas inicialmente em [8], [10] e [7].

Teorema 1 (Representação de partições em matrizes de duas linhas - Apresentado pela primeira vez em [10] Theorem 4.1). *O número de partições irrestritas de um inteiro n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_k \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= 0, d_k \neq 0 \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ para qualquer } t < k \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

A demonstração deste Teorema é dada em [8], mas vamos observar alguns exemplos de como essa conversão partição-matriz acontece:

Exemplo 1. *Tomemos a partição $\lambda = (5, 4, 3, 2, 2)$. Devemos, então, escrever uma matriz 2×5 onde a soma das entradas de cada coluna corresponde à cada parte de λ .*

- *Começando pela coluna mais à direita, não temos outra opção senão atribuir $c_5 = 0$ e $d_5 = 2$*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- *Como $c_4 = c_5 + d_5 = 0 + 2 = 2$, então $d_4 = 0$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 2*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Como $c_3 = c_4 + d_4 = 2 + 0 = 2$, então $d_3 = 1$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 3*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Como $c_2 = c_3 + d_3 = 2 + 1 = 3$, então $d_2 = 1$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Como $c_1 = c_2 + d_2 = 3 + 1 = 4$, então $d_1 = 1$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 5

$$\lambda = (5, 4, 3, 2, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2. Tomemos a partição $\lambda = (7, 4, 2, 2, 1, 1)$. Devemos, então, escrever uma matriz 2×6 onde a soma das entradas de cada coluna corresponde à cada parte de λ .

- Começando pela coluna mais à direita, não temos outra opção senão atribuir $c_6 = 0$ e $d_6 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Como $c_5 = c_6 + d_6 = 0 + 1 = 1$, então $d_5 = 0$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como $c_4 = c_5 + d_5 = 1 + 0 = 1$, então $d_4 = 1$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como $c_3 = c_4 + d_4 = 1 + 1 = 2$, então $d_3 = 0$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como $c_2 = c_3 + d_3 = 2 + 0 = 2$, então $d_2 = 2$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 4

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como $c_1 = c_2 + d_2 = 2 + 2 = 4$, então $d_1 = 3$ pois a soma das entradas da coluna deve ser igual a 7

$$\lambda = (7, 4, 2, 2, 1, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Consequências da escrita de partições em matrizes de duas linhas

A escrita de uma partição como matriz de duas linhas conforme condições estabelecidas no Teorema 1, possui diversas utilidades práticas, dentre as quais destacamos duas:

1.1.1 Partição conjugada

A leitura ordenada dos elementos d_1, d_2, \dots, d_k fornece, respectivamente, o número de partes iguais a $1, 2, \dots, k$ na partição conjugada de λ .

Nos exemplos citados anteriormente no Capítulo 1 temos:

•

$$\begin{aligned} \lambda = (5, 4, 3, 2, 2) &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} = \underbrace{1}_1 + \underbrace{2}_1 + \underbrace{3}_1 + \underbrace{5+5}_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

•

$$\begin{aligned} \lambda = (7, 4, 2, 2, 1, 1) &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} = \underbrace{1+1+1}_3 + \underbrace{2+2}_2 + \underbrace{4}_1 + \underbrace{6}_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.1.2 Leitura rápida da matriz

Em termos práticos, o que fazemos ao escrever uma partição como matriz de duas linhas conforme condições do Teorema 1 é escrever em cada c_j , $j < k$ o valor da parte posterior ($c_j = c_{j+1} + d_{j+1}$) e em d_j o incremento que a próxima parte possui em relação à parte anterior ($d_j \geq 0$).

Nos exemplos citados no Capítulo 1 temos:

•

$$\lambda = (5, 4, 3, 2, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_5 &= 2 \\
\lambda_4 &= 2 \text{ - igual à parte anterior: } d_2 = 0 \\
\lambda_3 &= 3 \text{ - incremento de uma unidade: } d_3 = 1 \\
\lambda_2 &= 4 \text{ - incremento de uma unidade: } d_4 = 1 \\
\lambda_1 &= 5 \text{ - incremento de uma unidade: } d_5 = 1
\end{aligned} \tag{1.5}$$

•

$$\lambda = (7, 4, 2, 2, 1, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= 1 \\
\lambda_5 &= 1 \text{ - igual à parte anterior: } d_2 = 0 \\
\lambda_4 &= 2 \text{ - incremento de uma unidade: } d_3 = 1 \\
\lambda_3 &= 2 \text{ - igual à parte anterior: } d_4 = 0 \\
\lambda_2 &= 4 \text{ - incremento de duas unidades: } d_5 = 2 \\
\lambda_1 &= 7 \text{ - incremento de três unidades: } d_6 = 3
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2 O procedimento de caminhos

Neste capítulo apresentaremos uma nova relação entre as partições de um inteiro n e um caminho percorrido no plano cartesiano baseado na conversão dessa partição em uma matriz de duas linhas, conforme parâmetros estabelecidos no Capítulo 1. Denominaremos essa nova interpretação como Procedimento dos Caminhos, presente no artigo [10].

2.1 O Procedimento dos Caminhos

Dada uma partição λ de um inteiro n e sua interpretação em matriz de duas linhas, conforme parâmetros estabelecidos no Capítulo 1:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_k \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= 0, d_k \neq 0 \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ para qualquer } t < k \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O Procedimento dos Caminhos associados a essa matriz gera um caminho no plano cartesiano, a partir da origem $O = (0, 0)$ até o ponto $P = \left(\sum_{i=1}^k d_i, \sum_{i=1}^k c_i\right)$ através da seguinte sequência de deslocamentos:

- d_1 unidades para direita
- c_1 unidades para cima
- d_2 unidades para direita
- c_2 unidades para cima
- d_3 unidades para direita
- c_3 unidades para cima
- \vdots
- d_k unidades para direita
- c_k unidades para cima

É imediato notar que, ao final do processo, o deslocamento total tem seu ponto final em $P = (\sum_{i=1}^k d_i, \sum_{i=1}^k c_i)$ que é um ponto sobre a reta $x + y = n$.

Exemplo 3. Vejamos, com o auxílio das Figuras 1, 2, 3, 4 e 5, alguns exemplos do Procedimento dos Caminhos aplicados a algumas partições de $n = 7$:

$$\bullet \lambda = (3, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

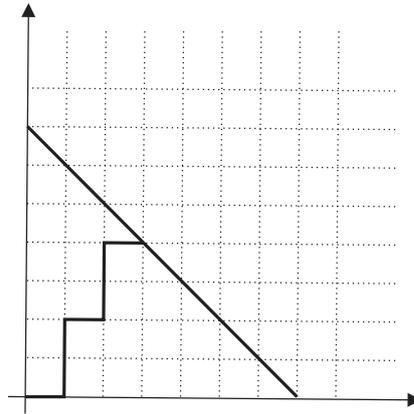


Figura 1 – Procedimento dos Caminhos 01

$$\bullet \lambda = (3, 2, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

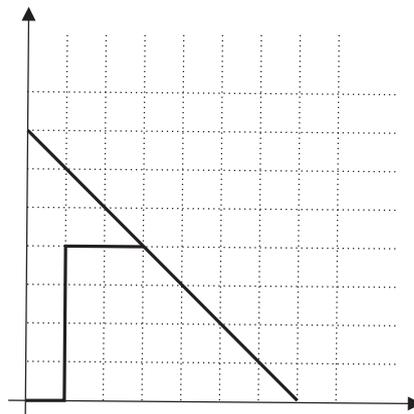


Figura 2 – Procedimento dos Caminhos 02

$$\bullet \lambda = (2, 2, 2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

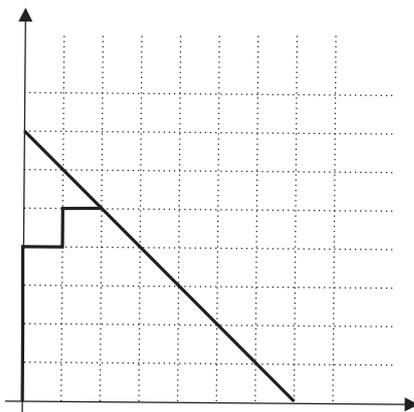


Figura 3 – Procedimento dos Caminhos 03

- $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

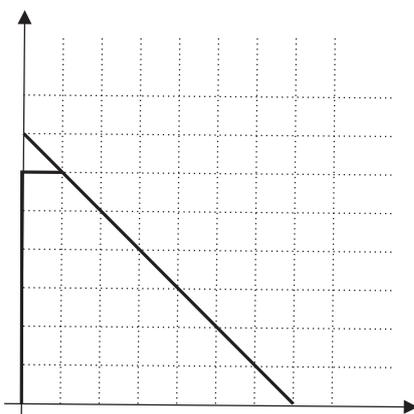


Figura 4 – Procedimento dos Caminhos 04

- $\lambda = (6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

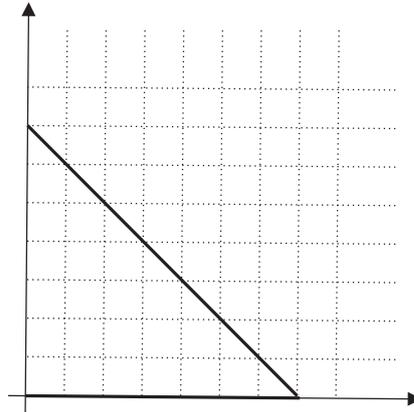


Figura 5 – Procedimento dos Caminhos 05

2.2 Reflexões sobre o Procedimento dos Caminhos

Nesta seção, vamos estabelecer uma relação das partições de um inteiro n com uma partição de algum inteiro m (geralmente $m \neq n$) em ímpares distintos maiores do que ou iguais a 3. O procedimento adotado para tal, presente em [9], consiste em refletir o caminho gerado pelo Procedimento dos Caminhos citado na Seção 2.1 sobre a reta $x + y = n$.

A ideia aqui é interpretar cada segmento horizontal e vertical dessa reflexão como um ímpar onde:

- cada segmento horizontal significa um ímpar que será adotado na nossa nova partição;
- cada segmento vertical significa um ímpar que será ignorado na nossa nova partição.

Vejamos a aplicação dessa nova interpretação nos mesmos exemplos utilizados na Seção 2.1:

Exemplo 4. *As Figuras 6, 7, 8, 9 e 10 são exemplos do Procedimento dos Caminhos aplicados a algumas partições de $n = 7$:*

$$\bullet \lambda = (3, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (3, 5, 9, 11)$$

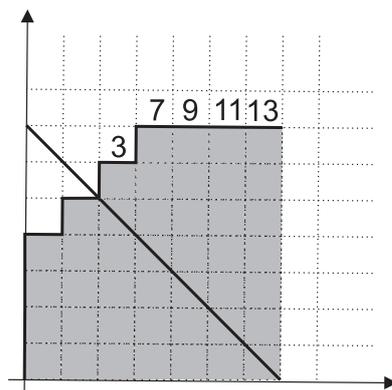


Figura 8 – Procedimento dos Caminhos refletido 03

- $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (3, 5, 7, 9, 11, 13)$

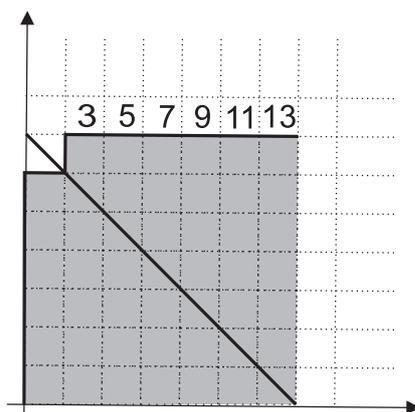


Figura 9 – Procedimento dos Caminhos refletido 04

- $\lambda = (6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \emptyset$

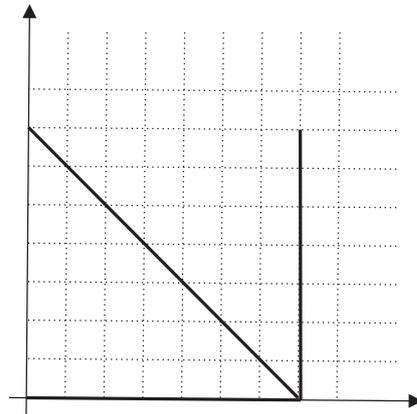


Figura 10 – Procedimento dos Caminhos refletido 05

2.3 Conversão direta matriz x ímpares distintos

Com o intuito de tornar mais veloz nosso processo de conversão de uma partição de n , vista como matriz de duas linhas segundo critérios estabelecidos no Capítulo 1, em uma partição de m em partes ímpares, distintas e maiores do que 1, vamos observar como cada entrada da matriz influencia no Procedimento dos Caminhos e sua reflexão.

A princípio, criamos um caminho $d_1 \rightarrow c_1 \rightarrow d_2 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots d_k \rightarrow c_k$, onde, a partir da origem, cada d_j representa um deslocamento horizontal para a direita e cada c_j representa um deslocamento vertical para cima, conforme Figura 11.

Refletindo esse caminho sobre a reta $x + y = n$, criamos, acima dessa reta, um novo

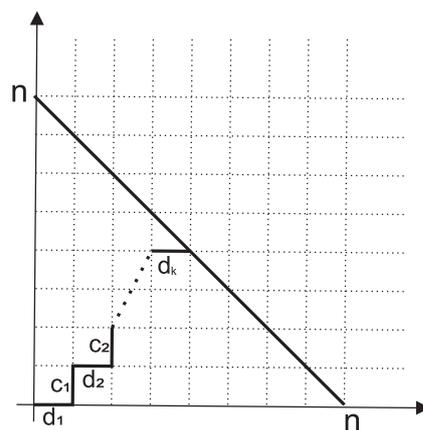


Figura 11 – Conversão direta matriz x ímpares 01

caminho, $c_k \rightarrow d_k \rightarrow c_{k-1} \rightarrow d_{k-1} \rightarrow \dots c_1 \rightarrow d_1$ porém, devido à reflexão efetuada, agora cada d_j passa a representar um deslocamento vertical e cada c_j um deslocamento horizontal, conforme Figura 12.

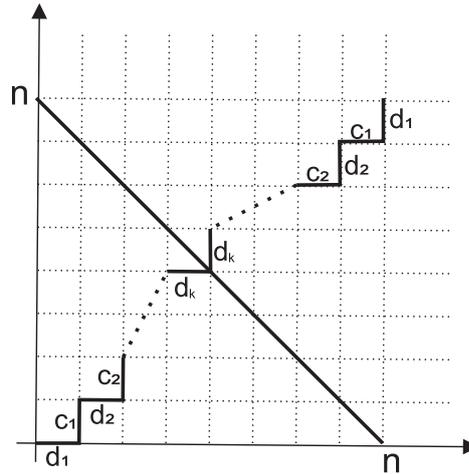


Figura 12 – Conversão direta matriz x ímpares 02

Visto isso, é imediato notar que, por consequência de $c_k = 0$, o último trecho do Procedimento dos Caminhos abaixo da reta $x + y = n$ depende exclusivamente de $d_k \neq 0$ e este será também o primeiro trecho **vertical** do caminho refletido, o que justifica o fato da parte 1 nunca ser elencada na partição de m em ímpares distintos.

Dessa forma, a leitura direta da matriz em uma nova partição em ímpares distintos se dá pela sequência: $d_k \rightarrow c_{k-1} \rightarrow d_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow d_2 \rightarrow c_1$, onde cada d_j representa o comprimento de uma sequência de ímpares que serão ignorados e cada c_j representa o comprimento de uma sequência de ímpares que serão utilizados a partir de cada salto d_j efetuado anteriormente. A Figura 13 apresenta o procedimento da conversão direta:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{k-1} & d_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{k-1} & d_k \end{pmatrix}^0$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{k-1} & d_k \end{pmatrix}$$

() número de ímpares consecutivos
 () salto de ímpares

Figura 13 – Conversão direta matriz x ímpares 03

Os Exemplos 5 e 6 a seguir mostram a aplicação da conversão direta em duas situações numéricas:

Exemplo 5. Exemplo da conversão direta Matriz x Sequência de Ímpares Distintos:

Tomando $n = 7$ e uma de suas partições $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ cuja representação em matriz de duas linhas é dada por $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considere a sequência $c_4, d_4, c_3, d_3, c_2, d_2, c_1, d_1 = 0, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1$, onde os termos de ordem ímpar (c_s) representam uma quantidade de ímpares consecutivos a se usar e os termos de ordem par (d_s) representam uma quantidade de ímpares consecutivos a se ignorar. Podemos visualizar a interpretação direta dessa matriz em ímpares distintos com o auxílio da Tabela 1

Tabela 1 –

Sequência	Ação	Resultado Parcial
0	Usar 0 ímpares	\emptyset
1	Ignorar 1 ímpar	1 Ignorado
1	Usar 1 ímpar	3 Escolhido
0	Ignorar 0 ímpares	Nenhum Ignorado
1	Escolher 1 ímpar	5 Escolhido
1	Ignorar 1 ímpar	7 Ignorado
2	Escolher 2 ímpares	9,11 Escolhidos
1	Ignorar 1 ímpar	13 Ignorado

Conversão Direta Exemplo1

Portanto, temos que a sequência de ímpares procurada é a sequência (3, 5, 9, 11).

Exemplo 6. Outro exemplo da conversão direta Matriz x Sequência de Ímpares Distintos:

Tomando mais uma vez $n = 7$ e uma de suas partições $\lambda = (2, 2, 2, 1)$ cuja representação em matriz de duas linhas é dada por $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Considere a sequência $c_4, d_4, c_3, d_3, c_2, d_2, c_1, d_1 = 0, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 0$, onde os termos de ordem ímpar (c_s) representam uma quantidade de ímpares consecutivos a se usar e os termos de ordem par (d_s) representam uma quantidade de ímpares consecutivos a se ignorar. Podemos visualizar a interpretação direta dessa matriz em ímpares distintos com o auxílio da Tabela 2

Tabela 2 –

Sequência	Ação	Resultado Parcial
0	Usar 0 ímpares	\emptyset
1	Ignorar 1 ímpar	1 Ignorado
1	Usar 1 ímpar	3 Escolhido
1	Ignorar 1 ímpar	5 Ignorado
2	Escolher 2 ímpares	7,9 Escolhidos
0	Ignorar 0 ímpares	Nenhum Ignorado
2	Escolher 2 ímpares	11,13 Escolhidos
0	Ignorar 0 ímpares	Nenhum Ignorado

Conversão Direta Exemplo2

Portanto, temos que a sequência de ímpares procurada é (3, 7, 9, 11, 13).

As duas situações exemplificadas acima também foram trabalhadas no Exemplo 4 quando ainda não havia sido apresentada a conversão direta.

Nesse momento, com o auxílio da Conversão Direta, temos uma ferramenta suficientemente rápida para percorrer diversas partições de n . No capítulo seguinte, vamos lançar mão dessa nova ferramenta e buscar apresentar as primeiras conclusões inéditas deste trabalho.

3 Interpretação de partições em ladrilhamentos

Uma vez observado no capítulo anterior a interpretação das partições de um inteiro n em ímpares distintos, vamos agora apresentar uma nova interpretação decorrente desta que denominaremos ladrilhamento.

3.1 Ladrilhamentos em potências de 2

Definição 1 (Ladrilhamento). *Dada a interpretação de uma partição específica de um inteiro n em ímpares distintos já apresentada no Capítulo 2, o seu ladrilhamento será dado por uma sequência de n quadrados (que denominaremos ladrilhos) justapostos horizontalmente e numerados, da esquerda para a direita, com os n primeiros números ímpares. Os ladrilhos referentes àqueles ímpares que aparecem na interpretação desta partição de n em ímpares distintos são preenchidos enquanto os ladrilhos referentes aos ímpares que não aparecem na mesma interpretação permanecem sem preenchimento.*

Exemplo 7. *Dado $n = 6$ e duas de suas partições específicas:*

a) $\lambda_1 = 3 + 2 + 1.$

b) $\lambda_2 = 2 + 2 + 2.$

Cujas interpretações em ímpares distintos são, respectivamente:

a) $\lambda_1 = 9 + 7 + 3.$

b) $\lambda_2 = 11 + 9 + 7 + 5.$

Suas interpretações em ladrilhamentos são mostrados respectivamente pelas Figuras 14 e 15:

a) *Ladrilhamento da partição $6=3+2+1$*

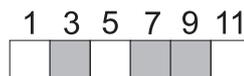


Figura 14 – Ladrilhamento de $n=6$ - ex01

b) *Ladrilhamento da partição $6=2+2+2$*



Figura 15 – Ladrilhamento de $n=6$ - ex02

Apesar de originalmente cada ladrilho simbolizar um ímpar da interpretação de uma partição de n em ímpares distintos, esta legenda a partir de agora será substituída por uma potência de 2. Esta substituição se dará devido ao fato de que cada ladrilho de um ladrilhamento específico possui apenas duas configurações válidas: vazio ou preenchido. Neste trabalho, a partir de agora, interpretaremos os ladrilhos preenchidos e vazios como os algarismos de um número escrito na base 2, onde o primeiro ladrilho representa 2^0 , o segundo 2^1 , e assim sucessivamente. De acordo com nossa conveniência, ora os ladrilhos vazios serão considerados como o algarismo 0 e os preenchidos serão o algarismo 1 e ora o contrário ou, em outras palavras, ora as potências de 2 representadas pelos ladrilhos vazios serão as únicas a serem consideradas e ora as potências de 2 representadas pelos ladrilhos preenchidos serão as únicas a serem consideradas. Aplicando esta nova interpretação, os ladrilhamentos utilizados no exemplo anterior (Exemplo 7) passam a ser interpretados como números, conforme Exemplo 8 e Figuras 16 e 17 a seguir:

Exemplo 8. Dado $n = 6$ e duas de suas partições específicas:

a) Ladrilhamento da partição $6=3+2+1$

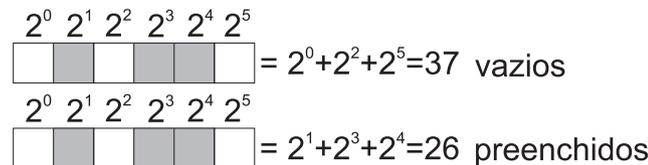


Figura 16 – Ladrilhamento em potência de 2 - ex01

b) Ladrilhamento da partição $6=2+2+2$

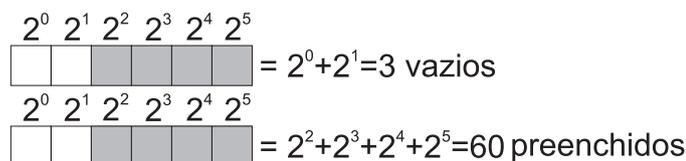


Figura 17 – Ladrilhamento em potência de 2 - ex02

Esta nova interpretação transforma cada partição de um inteiro n , através da interpretação do ladrilhamento em potências de 2, em um número par, quando tomamos

cada ladrilho preenchido como 1 e em um número ímpar, quando tomamos cada ladrilho vazio como número 1. A garantia de que a leitura dos ladrilhos preenchidos sempre resulta em um número par e que a leitura dos vazios sempre resulta em ímpar acontece pois sabemos que a interpretação de uma partição qualquer em ímpares distintos nunca conta com o primeiro ímpar (1), assim, o primeiro ladrilho, que corresponde a $2^0 = 1$ sempre estará vazio, ou seja, a interpretação em potências de 2 de um determinado ladrilhamento só contará com $2^0 = 1$ quando considerarmos apenas os ladrilhos vazios.

3.2 Partições Complementares

Definição 2 (Sequências $o(n)$ e $e(n)$). *Dado um inteiro n , denominamos por $o(n)$ a sequência de todos os ímpares resultantes das interpretações de todas as suas partições em potências de 2 (em ordem decrescente) e por $e(n)$ a sequência de todos os pares resultantes das interpretações de todas as suas partições em potências de 2 (em ordem crescente).*

Exemplo 9. A Figura 18 exemplifica, em formato de tabela, as sequências $o(7)$ e $e(7)$

Partição	$o(n)$	$e(n)$
7	127	0
6+1	125	2
5+1+1	121	6
5+2	115	12
4+1+1+1	113	14
4+2+1	101	26
3+1+1+1+1	97	30
3+2+1+1	73	54
4+3	71	56
3+2+2	67	60
2+1+1+1+1+1	65	62
2+2+1+1+1	17	110
3+3+1	13	114
2+2+2+1	5	122
1+1+1+1+1+1+1	1	126

Figura 18 – Sequências de $o(7)$ e $e(7)$

Teorema 2 (Termos complementares). *Sejam $o(n)_i$ e $e(n)_i$ dois termos de mesma posição nas sequências $o(n)$ e $e(n)$ respectivamente. A soma $o(n)_i + e(n)_i$ é fixa para cada n e igual a $2^n - 1$.*

Demonstração. Dois termos de mesma posição em $o(n)$ e $e(n)$ são correspondentes ao mesmo ladrilhamento. Como os quadrados utilizados em $e(n)$ são justamente aqueles não utilizados em $o(n)$, a soma desses termos correspondentes será: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. \square

3.3 Termos extremos de $o(n)$

Definição 3 (Ladrilhamento Válido). *Denominamos ladrilhamento válido todo e qualquer ladrilhamento gerado por uma matriz de 2 linhas conforme parâmetros estabelecidos no Teorema 1, ou seja, ladrilhamento válido é aquele ladrilhamento que possui relação direta com a alguma partição de um inteiro n .*

Os Exemplos 10 e 11 a seguir mostram alguns ladrilhamentos:

Exemplo 10. *Os ladrilhamentos da Figura 19 são exemplos de Ladrilhamentos Inválidos pois não há matrizes que respeitem as condições do Teorema 1 capazes de formá-los:*

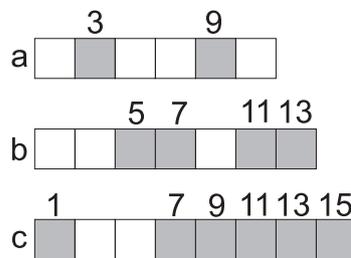


Figura 19 – Exemplos de Ladrilhamentos Inválidos

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c_2 \neq c_3 + d_3 \text{ e } c_1 \neq c_2 + d_2 \rightarrow \text{Matriz Inválida.}$
- b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow c_1 \neq c_2 + d_2 \rightarrow \text{Matriz Inválida.}$
- c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow c_2 \neq 0 \text{ e } c_1 \neq c_2 + d_2 \rightarrow \text{Matriz Inválida.}$

Exemplo 11. *Os ladrilhamentos da Figura 20 são exemplos de Ladrilhamentos Válidos pois as matrizes responsáveis pelas suas formações respeitam as condições do Teorema 1:*

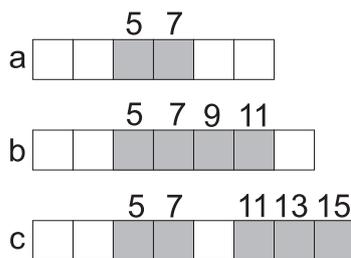


Figura 20 – Exemplos de Ladrilhamentos Inválidos

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz Válida.}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz Válida.}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz Válida.}$

Lema 1. *Um determinado ladrilhamento é válido se, e somente se, o comprimento de qualquer sequência de ladrilhos preenchidos a partir da posição i for múltiplo da quantidade de ladrilhos vazios nas posições $1, 2, \dots, i - 1$.*

O Lema 1 será melhor abordado e demonstrado na Seção 3.4.

Teorema 3 (Ladrilhamentos de $o(n+1)$). *Considere uma partição específica de um inteiro n e seu respectivo ladrilhamento. Ao adicionar um ladrilho vazio ao final desse ladrilhamento obtemos um ladrilhamento válido de $n + 1$, além disso, todos os ladrilhamentos de $n + 1$ com o último ladrilho vazio, são desse formato, ou seja, um ladrilhamento válido de n com um ladrilho vazio ao seu final.*

Demonstração. É imediato notar que inserir um ladrilho vazio ao final de um ladrilhamento válido sempre é uma alteração válida pois este não influencia em sequências de ladrilhos preenchidos em posições posteriores à sua, já que estamos falando do último ladrilho. Agora considere um ladrilhamento válido de $n + 1$ com o último ladrilho vazio. Também pelo mesmo argumento exposto acima, este último ladrilho não exerce nenhuma influência em novas sequências de ladrilhos preenchidos em posições posteriores à sua. Logo, sua retirada não inviabiliza a validade do ladrilhamento restante, agora com n ladrilhos e, portanto, um ladrilhamento válido de n . \square

Exemplo 12. *A Figura 21 exemplifica todos os ladrilhamentos possíveis para $n = 4$ e $n + 1 = 5$:*

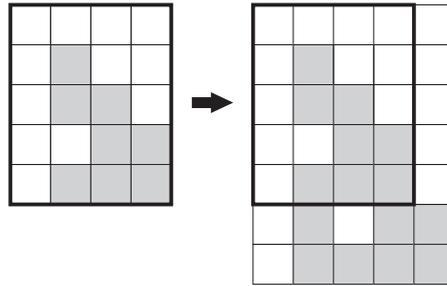


Figura 21 – Comparativo de ladrilhamentos válidos de $n=4$ e $n+1=5$ (1)

Agora observe que se estamos trabalhando com as sequências $o(n)$, a inserção de um ladrilho vazio ao final de um ladrilhamento válido de n gera um ladrilhamento válido de $n + 1$ e seu resultado é o mesmo que tínhamos anteriormente, acrescido de 2^n . Além disso, como a leitura desses ladrilhamentos se dá por um sistema de numeração posicional na base 2, os ladrilhamentos com o último ladrilho vazio são, com certeza, os maiores termos de $o(n + 1)$

Teorema 4 (Maiores termos de $o(n+1)$). *Os $p(n)$ maiores termos de $o(n + 1)$ são numericamente iguais aos termos de $o(n)$ acrescidos de 2^n .*

Exemplo 13. *Vejamos, com o auxílio da Figura 22, o Exemplo 12 agora com a interpretação dos termos de $o(n)$ ao lado de seus respectivos ladrilhamentos.*

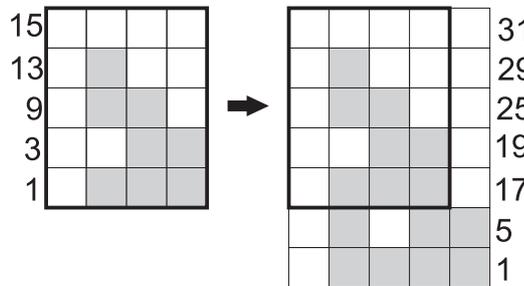


Figura 22 – Comparativo de ladrilhamentos válidos de $n=4$ e $n+1=5$ (2)

Teorema 5 (Menores termos de $o(n)$). *Os dois maiores termos de $e(n)$ são $2^n - 2$ e $2^n - 4$ para n par e $2^n - 2$ e $2^n - 6$ para n ímpar. Conseqüentemente, os dois menores termos de $o(n)$ são 1 e 3 para n par e 1 e 5 para n ímpar.*

Demonstração. O maior termo de $e(n)$ é evidentemente o ladrilhamento $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 2$. Pelo Teorema 2, o menor termo de $o(n)$ é igual a 1. O segundo maior termo de $e(n)$ se dá pela retirada do menor fator possível dentre $2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Para n par, esse fator é 2^1 que sua retirada resulta em um ladrilhamento com os dois primeiros ladrilhos vazios e os restantes (em quantidade par) preenchidos. Neste caso, o segundo maior termo

de $e(n)$ é dado por $2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 4$ e conseqüentemente, pelo Teorema 2, o segundo menor termo de $o(n)$ é igual a 3. Já para o caso de n ímpar, o ladrilho correspondente a 2^1 não pode ser retirado pois sobriariam à sua direita uma quantidade ímpar de ladrilhos preenchidos. Neste caso, temos a garantia de poder retirar o termo 2^2 , correspondente ao terceiro ladrilho. Nessa configuração, teremos o primeiro ladrilho vazio, o segundo preenchido, o terceiro vazio e todos os demais dali em diante (em quantidade par) preenchidos, gerando um ladrilhamento válido correspondente a $2^1 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 6$ em $e(n)$ e 5 em $o(n)$. \square

3.4 Conversão direta partição x ladrilhamento

Em suma, cada partição específica de um inteiro n , chega à sua interpretação em potências de 2 através do seguinte caminho:

- a) escrita da partição como matriz de duas linhas;
- b) aplicação do procedimento dos caminhos sobre a matriz;
- c) reflexão do procedimento dos caminhos sobre a reta $x + y = n$;
- d) leitura dessa reflexão em ímpares distintos;
- e) substituição dos ímpares distintos por potências de 2;
- f) soma das potências de 2 correspondentes aos quadrados vazios para $o(n)$ (ou preenchidos para $e(n)$).

Todo este processo, apesar de elegante, depende muito tempo, o que torna a conversão demasiadamente onerosa. Afim de facilitá-lo, nossas interpretações em potências de 2 de um inteiro n serão feitas, a partir de agora, por um processo que denominamos conversão rápida. Qualquer ladrilhamento de comprimento n terá seus ladrilhos de acordo com as seguintes instruções:

- O primeiro ladrilho nunca será preenchido;
- A partir do ladrilho de posição $i \geq 2$, uma sequência de ladrilhos consecutivos só poderá ser preenchida se o seu comprimento for múltiplo da quantidade de ladrilhos vazios nas posições j , com $1 \leq j < i$.

Esta estratégia de preenchimento estabelece uma bijeção entre todos os ladrilhamentos possíveis de comprimento n com todas as partições de n .

Dada uma partição específica $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$, com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k = n$. Sua conversão em ladrilhamento poderá ser estabelecida pelo seguinte processo:

- A primeira sequência de ladrilhos vazios começa na posição 1 e possui comprimento λ_1 ;
- Ao final desta sequência vazia de comprimento λ_1 , preenchemos m_1 sequências seguidas todas de comprimento λ_1 , onde m_1 representa o número de vezes que a parte λ_1 aparece nesta partição de n ;
- Ao final desta sequência de $m_1\lambda_1$ ladrilhos preenchidos, deixamos uma nova sequência de ladrilhos vazios com comprimento $\lambda_2 - \lambda_1$;
- Ao final desta sequência vazia, preenchemos m_2 sequências seguidas todas de comprimento λ_2 , onde m_2 representa o número de vezes que a parte λ_2 aparece nesta partição de n ;
- Assim sucessivamente até preencher o último ladrilho ou até não haver mais preenchimentos necessários.

Vejamos o Exemplo 14 da leitura de um ladrilhamento pela conversão rápida:



Figura 23 – Exemplo de ladrilhamento - conversão rápida

- A primeira sequência de ladrilhos vazios possui comprimento 1. Assim, o número de vezes que a parte 1 aparece nessa partição é igual a número de sequências de comprimento 1 que temos a partir dali e anteriores ao próximo ladrilho vazio, ou seja, apenas uma;
- Contadas as vezes que aparecem a parte 1, temos mais um ladrilho vazio, acumulando, entre os ladrilhos 1 e 3 exatamente 2 ladrilhos vazios. O número de vezes que a parte 2 aparece nesse ladrilhamento é dado pelo número de sequências de comprimento 2 que temos a partir deste ponto e anteriores ao próximo ladrilho vazio, ou seja, duas;
- Contadas as vezes que aparecem a parte 2, temos mais dois ladrilhos vazios, acumulando 4. O número de vezes que a parte 4 aparece nesse ladrilhamento é dado pelo número de sequências de comprimento 4 que temos a partir dali e anteriores ao próximo ladrilho vazio, ou seja, uma;
- Por fim, temos mais um ladrilho vazio ao final, acumulando 5, que é a maior parte presente nessa partição;
- Assim, esse ladrilhamento representa a partição: $5 + 4 + 2 + 2 + 1 = 14$.

A garantia do sucesso dessa operação é uma consequência da observação das características da matriz de duas linhas relacionada à cada partição λ de um inteiro n :

- Cada d_j , $j > 1$ representa o incremento que a parte λ_{k-j} recebe em relação à parte λ_{k-j-1} ;
- $c_k = 0$, $d_k \neq 0$;
- $c_j = \sum_{i=j+1}^k d_i$, $j < k$;

Representado cada d_j por uma sequência de ladrilhos não preenchidos, cada c_j por uma sequência de ladrilhos preenchidos e lendo as entradas da matriz na ordem $c_k \rightarrow d_k \rightarrow c_{k-1} \rightarrow d_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow d_1 \rightarrow c_1$, temos as garantias de que:

- o primeiro ladrilho deve ser vazio pois $c_k = 0$ e $d_k \neq 0$;
- cada sequência de ladrilhos preenchidos é múltipla do total de ladrilhos vazios à sua esquerda pois para $1 \leq j < k$, $c_j = \sum_{i=j+1}^k d_i$;
- $\lambda_k = c_1 + d_1 = \sum_{i=2}^k d_i + d_1 = \sum_{i=1}^k d_i$

Nesse capítulo apresentamos as primeiras teorias inéditas deste trabalho, com ênfase especial para a noção apresentada da interpretação de um ladrilhamento em potências de 2 e para o Teorema 3 que, juntamente com o Teorema 7 (que será apresentado no Capítulo 5) serão as ferramentas mais eficazes de investigação das partições de n .

4 Tabelas de $o(n)$ e $e(n)$

Uma vez estabelecidos os parâmetros de conversão das partições em um número escrito no sistema de numeração de base 2, vamos construir e analisar algumas tabelas de $o(n)$ e $e(n)$.

4.1 Tabela simples de $o(n)$

Denominaremos de tabela simples de $o(n)$ a tabela cujas entradas da coluna n são, em ordem crescente, a conversão de cada partição de n em um número ímpar, ou seja, ao se considerar apenas os ladrilhos vazios de cada partição de n . Em breve discutiremos um novo tipo de tabela de $o(n)$, que será denominada tabela completa.

Tabela 3 –

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
		1	5	13	29	61	125	253	509	1021	2045
			1	9	25	57	121	249	505	1017	2041
				3	19	51	115	243	449	1011	2035
				1	17	49	113	241	497	1109	2033
					5	37	101	229	485	997	2021
					1	33	97	225	481	993	2017
						9	73	201	457	969	1993
						7	71	199	455	967	1991
						3	67	195	451	963	1987
						1	65	193	449	961	1985
							17	145	401	913	1937
							13	141	397	909	1933
							5	133	389	901	1925
							1	129	385	897	1921
								33	385	897	1825
								25	281	793	1817
								19	275	787	1811
								15	271	783	1807
								9	265	777	1801
								3	259	771	1795
								1	257	769	1793
									65	577	1601
									49	561	1585
									37	549	1573
									29	541	1565
									17	529	1553
									7	519	1543
									5	517	1541
									1	513	1537
										129	1153
										97	1121
										73	1097
										67	1091
										57	1081
										51	1075
										33	1057
										31	1055
										13	1037
										9	1033
										3	1027
										1	1025
											257
											193
											145
											133
											113
											101
											71
											65
											61
											25
											19
											17
											5
											1

Tabela Simples de $o(n)$

4.2 Tabela completa de $o(n)$

Podemos observar na Tabela 3 que cada elemento de posição (i, j) é igual a $(i, j - 1) + 2^{j-1}$ (se este elemento existir). Essa observação nada mais é do que a aplicação do Teorema 4 aos $p(n)$ maiores elementos da coluna $n + 1$.

Denominamos tabela completa de $o(n)$ a tabela simples de $o(n)$ com a inserção de novos números ímpares negativos em suas células vazias obedecendo o mesmo critério do Teorema 4, ou seja, para cada posição (i, j) vazia na tabela simples de $o(n)$ (Tabela 3) adotaremos $(i, j) = (i, j + 1) - 2^j$. Estes novos termos (negativos e ímpares) serão denominados termos ocultos da tabela completa de $o(n)$, enquanto os positivos serão denominados termos visíveis de $o(n)$.

Tabela 4 –

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
	1	1	5	13	29	61	125	253	509	1021	2045
	5	3	1	9	25	57	121	249	505	1017	2041
	11	9	5	3	19	51	115	243	449	1011	2035
	13	11	7	1	17	49	113	241	497	1109	2033
	25	23	19	11	5	37	101	229	485	997	2021
	29	27	23	15	1	33	97	225	481	993	2017
	53	51	47	39	23	9	73	201	457	969	1993
	55	53	49	41	25	7	71	199	455	967	1991
	59	57	53	45	29	3	67	195	451	963	1987
	61	59	55	47	31	1	65	193	449	961	1985
	109	107	103	95	79	47	17	145	401	913	1937
	113	111	107	99	83	51	13	141	397	909	1933
	121	119	115	107	91	59	5	133	389	901	1925
	125	123	119	111	95	63	1	129	385	897	1921
	221	219	215	207	191	159	95	33	385	897	1825
	229	227	223	215	199	167	103	25	281	793	1817
	235	233	229	221	205	173	109	19	275	787	1811
	239	237	233	225	209	177	113	15	271	783	1807
	245	243	239	23	215	183	119	9	265	777	1801
	251	249	245	237	221	189	125	3	259	771	1795
	253	251	247	239	223	191	127	1	257	769	1793
	445	443	439	431	415	383	319	191	65	577	1601
	461	459	455	447	431	399	335	207	49	561	1585
	473	471	467	459	443	411	347	219	37	549	1573
	481	479	475	467	451	419	355	227	29	541	1565
	493	491	487	479	463	431	367	239	17	529	1553
	503	501	497	489	473	441	377	249	7	519	1543
	505	503	499	491	475	443	379	251	5	517	1541
	509	507	503	495	479	447	383	255	1	513	1537
	893	891	887	879	863	831	767	639	383	129	1153
	925	923	919	911	895	863	799	671	415	97	1121
	949	947	943	935	919	887	823	695	439	73	1097
	955	953	949	941	925	893	829	701	445	67	1091
	965	963	959	951	935	903	839	711	455	57	1081
	971	969	965	957	941	909	845	717	461	51	1075
	989	987	983	975	959	927	863	735	479	33	1057
	991	989	985	977	961	929	865	737	481	31	1055
	1009	1007	1003	995	979	947	883	755	499	13	1037
	1013	1011	1007	999	983	951	887	759	503	9	1033
	1019	1017	1013	1005	989	957	893	765	509	3	1027
	1021	1019	1015	1007	991	959	895	767	511	1	1025
	1789	1787	1783	1775	1759	1727	1663	1535	1279	767	257
	1853	1851	1847	1839	1823	1791	1727	1599	1343	831	193
	1901	1899	1895	1887	187	1839	1775	1647	1391	879	145
	1913	1911	1907	1899	1883	1851	1787	1659	1403	891	133
	1933	1931	1927	1919	1903	1871	1807	1679	1423	911	113
	1945	1943	1939	1931	1915	1883	1819	1691	1435	923	101
	1975	1973	1969	1961	1945	1913	1849	1721	1465	953	71
	1981	1979	1975	1967	1951	1919	1855	1727	1471	959	65
	1985	1983	1979	1971	1955	1923	1859	1731	1475	963	61
	2021	2019	2015	2007	1991	1959	1895	1767	1511	999	25
	2027	2025	2021	2013	1997	1965	1901	1773	1517	1005	19
	2029	2027	2023	2015	1999	1967	1903	1775	1519	1007	17
	2041	2039	2035	2027	2011	1979	1915	1787	1531	1019	5
	2045	2043	2039	2031	2015	1983	1919	1791	1535	1023	1

Tabela Completa de $o(n)$

4.3 Tabela Simples de $e(n)$

Denominaremos de tabela simples de $e(n)$ a tabela cujas entradas da coluna n são, em ordem crescente, a conversão de cada partição de n em um número par, ou seja, ao se considerar apenas os ladrilhos preenchidos de cada partição de n . Note a seguir que nesta tabela as entradas não vazias de uma determinada linha são todas iguais e continuam constantes quando aplicamos a o Teorema 2 aos seus termos ocultos. Dessa forma, não desenvolveremos a tabela completa de $e(n)$ uma vez que já sabemos quais serão todos os seus termos.

Tabela 5 –

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			6	6	6	6	6	6	6	6	6
				12	12	12	12	12	12	12	12
				14	14	14	14	14	14	14	14
					26	26	26	26	26	26	26
					30	30	30	30	30	30	30
						54	54	54	54	54	54
						56	56	56	56	56	56
						60	60	60	60	60	60
						62	62	62	62	62	62
							110	110	110	110	110
							114	114	114	114	114
							122	122	122	122	122
							126	126	126	126	126
								222	222	222	222
								230	230	230	230
								236	236	236	236
								240	240	240	240
								246	246	246	246
								252	252	252	252
								254	254	254	254
									446	446	446
									462	462	462
									474	474	474
									482	482	482
									494	494	494
									504	504	504
									506	506	506
									510	510	510
										894	894
										926	926
										950	950
										956	956
										966	966
										972	972
										990	990
										992	992
										1010	1010
										1014	1014
										1020	1020
										1022	1022
											1790
											1854
											1902
											1914
											1934
											1946
											1976
											1982
											1986
											2022
											2028
											2030
											2042
											2046

Tabela Simples de $o(n)$

5 Sequências em $o(n)$

Neste capítulo, vamos observar as tabelas introduzidas no Capítulo 4 e apresentar algumas relações em sequências sobre os termos ali existentes. Como as tabelas (simples ou completas) de $o(n)$ possuem mais detalhes do que a tabela de $e(n)$ (que é constante por linhas), nossa preocupação se concentrará, nas tabelas de $o(n)$ que nos oferecem mais dados a respeito das partições originais.

5.1 Sequências $s(n)$

Definição 4 (Sequências $s(n)$). *Dado $n \in \mathbb{Z}^*$ definimos $s(n)$ a sequência cujos elementos são, ordenadamente, os i -ésimos termos (visíveis ou ocultos) de $o(1), o(2), o(3), \dots$, em outras palavras, é a leitura das linhas da tabela completa de $o(n)$ (Tabela 4).*

Teorema 6 (Recorrências de $s(n)$). *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^*$, a sequência $s(n)$ é definida por uma relação de recorrência do tipo:*

$$s(n)_{i+1} = 2s(n)_i + \alpha_n. \quad (5.1)$$

Onde α_n é um inteiro ímpar fixo para cada n dado.

Exemplo 15. *Com base na Tabela 4:*

$$a) \ s(3) : -5, -3, 1, 9, 25, 57, \dots \rightarrow s(3)_{i+1} = 2s(3)_i + 7.$$

$$b) \ s(8) : -53, -51, -47, -39, -23, 9, \dots \rightarrow s(8)_{i+1} = 2s(8)_i + 55.$$

Demonstração. Dado $i \in \mathbb{Z}^*$, sabemos pelo Teorema 4 que $o(n)_{i+1} = o(n)_i + 2^n$ e $o(n)_{i+2} = o(n)_{i+1} + 2^{n+1}$. Assim:

$$\begin{aligned} o(n)_{i+1} &= o(n)_i + 2^n \\ o(n)_{i+1} &= o(n)_i + o(n)_i - o(n)_i + 2^n \\ o(n)_{i+1} &= 2o(n)_i - \underbrace{o(n)_i}_{\alpha_{n,i}} + 2^n \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} o(n)_{i+2} &= o(n)_{i+1} + 2^{n+1} \\ o(n)_{i+2} &= o(n)_{i+1} + o(n)_{i+1} - o(n)_{i+1} + 2^{n+1} \\ o(n)_{i+2} &= 2o(n)_{i+1} - \underbrace{o(n)_{i+1}}_{\alpha_{n,i+1}} + 2^{n+1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

De 5.2 e 5.3 temos que:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n,i+1} &= 2^{n+1} - o(n)_{i+1} \\
 \alpha_{n,i+1} &= 2^{n+1} - (2o(n)_i + \alpha_{n,i}) \\
 \alpha_{n,i+1} &= 2^{n+1} - 2o(n)_i - \alpha_{n,i} \\
 \alpha_{n,i+1} &= 2 \underbrace{(2^n - o(n)_i)}_{\alpha_{n,i}} - \alpha_{n,i} \\
 \alpha_{n,i+1} &= 2\alpha_{n,i} - \alpha_{n,i} \\
 \alpha_{n,i+1} &= \alpha_{n,i}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

□

Para $1 \leq n \leq 15$, a Tabela 6 mostra os valores de α_n , onde, $\alpha_n = o(i+1)_n - 2o(i)_n, \forall i \in \mathbb{Z}^*$:

Tabela 6 –

n	α_n
1	1
2	3
3	7
4	13
5	15
6	27
7	31
8	55
9	57
10	61
11	63
12	111
13	115
14	123
15	127

Tabela de α_n

5.2 Relações entre ladrilhos de n e $n+1$

Nesta seção vamos apresentar uma bijeção entre todos os ladrilhamentos de um inteiro n e alguns ladrilhamentos de $n+1$ (não todos evidentemente pois $p(n+1) > p(n)$). A descoberta dessa relação e de suas consequências diretas será de suma importância para a elaboração de uma recorrência entre as partições de dois inteiros consecutivos.

Teorema 7 (Conversão dos ladrilhamentos de n em ladrilhamentos de $n+1$). *Dado um ladrilhamento válido de comprimento n , sempre teremos um ladrilhamento válido de comprimento $n+1$, ao aplicar no primeiro duas transformações:*

- adicionar um ladrilho vazio à esquerda do ladrilhamento total;

- preencher o segundo ladrilho desse novo ladrilhamento, agora de comprimento $n + 1$.

Demonstração. As duas alterações propostas no Teorema 7 garantem a viabilidade do novo ladrilhamento, de comprimento $n + 1$, pois a única diferença entre os dois ladrilhamentos relacionados é que o comprimento da sequência de ladrilhos preenchidos **a partir do segundo ladrilho** aumenta em uma unidade. Como a única restrição para essa sequência de ladrilhos preenchidos (a partir do segundo ladrilho) é ser múltiplo de 1 (que é a quantidade de ladrilhos vazios anteriores ao segundo ladrilho), sua viabilidade fica garantida uma vez que, conforme já mencionado acima, o restante dos dois ladrilhos posteriores à sequência de ladrilhos preenchidos a partir do segundo ladrilho são idênticos nas duas situações. \square

Exemplo 16. Alguns exemplos da conversão de ladrilhamentos conforme o Teorema 7 são exemplificados a seguir pelas Figuras 24, 25 e 26:

- a) Ladrilhamento válido de $n = 6$ e sua conversão em ladrilhamento válido de $n + 1 = 7$



Figura 24 – Exemplo de conversão de ladrilhos 01

Neste exemplo, as sequências de ladrilhos preenchidos, a partir do segundo, para $n = 6$ e para $n = 7$ possuem comprimentos 2 e 3, respectivamente.

- b) Ladrilhamento válido de $n = 7$ e sua conversão em ladrilhamento válido de $n + 1 = 8$

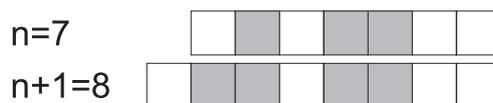


Figura 25 – Exemplo de conversão de ladrilhos 02

Neste exemplo, as sequências de ladrilhos preenchidos, a partir do segundo, para $n = 7$ e para $n = 8$ possuem comprimentos 1 e 2, respectivamente.

- c) Ladrilhamento válido de $n = 11$ e sua conversão em ladrilhamento válido de $n + 1 = 12$

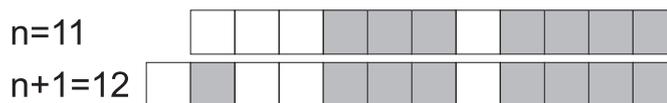


Figura 26 – Exemplo de conversão de ladrilhos 03

Neste exemplo, as sequências de ladrilhos preenchidos, a partir do segundo, para $n = 11$ e para $n = 12$ possuem comprimentos 0 e 1, respectivamente.

Uma análise importante a ser estabelecida neste momento, mas que não merece status de Teorema, é uma simples observação dos ladrilhamentos de dois termos de mesma linha e colunas consecutivas na Tabela 4. Sabemos, pelo Teorema 4, que os $p(n)$ maiores termos de $o(n + 1)$ são na verdade os termos de $o(n)$ acrescidos de 2^n e que, no formato de ladrilhamento, representam cada partição de n mas agora com um ladrilho vazio ao final. Em resumo, o que queremos concluir é que todos os elementos de $o(n)$, acrescidos de 2^n , geram os $p(n)$ maiores termos de $o(n + 1)$ e estes, são os únicos termos dessa sequência cujos ladrilhamentos possuem o último ladrilho vazio. Portanto, os $p(n + 1) - p(n)$ menores termos de $o(n + 1)$ certamente possuem seu último ladrilho preenchido e a diferença entre esses termos e 2^n geram termos ocultos de $o(n)$

Exemplo 17. *Alguns exemplos da relação mencionada anteriormente:*

- a) A Figura 27 mostra as sequências de $o(4)$ e $o(5)$. Os termos visíveis de $o(4)$ estão na mesma linha que os termos de $o(5)$ com o último ladrilho vazio, já os termos ocultos de $o(4)$ estão na mesma linha que os termos de $o(5)$ com o último ladrilho preenchido.

		n=4	n=5		
		15	31		
		13	29		
		9	25		
		3	19		
		1	17		
		11	5		
		15	1		

visíveis

ocultos

vazios

preenchidos

Figura 27 – Comparativo entre $o(4)$ e $o(5)$

b) A Figura 28 mostra as sequências de $o(6)$ e $o(7)$. Os termos visíveis de $o(6)$ estão na mesma linha que os termos de $o(7)$ com o último ladrilho vazio, já os termos ocultos de $o(6)$ estão na mesma linha que os termos de $o(7)$ com o último ladrilho preenchido.

	n=6	n=7	
visíveis	63	127	vazios
	61	125	
	57	121	
	51	115	
	49	113	
	37	101	
	33	97	
	9	73	
	7	71	
	3	67	
ocultos	1	65	preenchidos
	47	17	
	51	13	
	59	5	
	63	1	

Figura 28 – Comparativo entre $o(6)$ e $o(7)$

Lembrando que o Teorema 7 garante que dois ladrilhamentos relacionados por ele (um de n com outro de $n + 1$) possuem o último ladrilho igual (ambos vazios ou ambos preenchidos), então, chegamos a conclusão de outro importante Teorema.

Teorema 8 (Conversão particionada dos ladrilhos de n em ladrilhos de $n + 1$). *Para $n \geq 2$, os $p(n - 1)$ maiores elementos de $o(n)$ se relacionam, através do Teorema 7, com $p(n - 1)$*

termos de $o(n + 1)$ selecionados entre seus $p(n)$ maiores termos. Já os $p(n) - p(n - 1)$ menores termos de $o(n)$ se relacionam, através do Teorema 7, com $p(n) - p(n - 1)$ termos de $o(n + 1)$ selecionados entre seus $p(n + 1) - p(n)$ menores termos.

Em suma, o que garante esse Teorema é a relação exposta no Teorema 7, que associa termos de $o(n)$ cujos ladrilhamentos possuem o último ladrilho vazio, com termos de $o(n + 1)$ cujos ladrilhamentos também possuem o último ladrilho vazio. Relação similar entre aqueles de último ladrilho preenchido. Vejamos um exemplo na tabela completa de $o(n)$:

Exemplo 18. Na Figura 29 parte A, é exemplificado em verde o conjunto de elementos de $o(6)$ com o último ladrilho vazio e suas possíveis relações (através do Teorema 7) com os elementos de $o(7)$, que também são aqueles com o último ladrilho vazio. Assim como o conjunto grifado em vermelho que estabelece relação análoga entre os elementos com último ladrilho preenchido.

Na Figura 29 parte B são exemplificados, um a um, os elementos de $o(6)$ e suas referências de $o(7)$ através do Teorema 7.

Demonstração. A demonstração do Teorema 8 decorre da simples observação de que o Teorema 7 associa ladrilhamentos de n a ladrilhamentos de $n + 1$ com uma única alteração: a inserção de um ladrilho preenchido entre os ladrilhos de posição 1 e 2, conforme exemplifica a Figura 30:

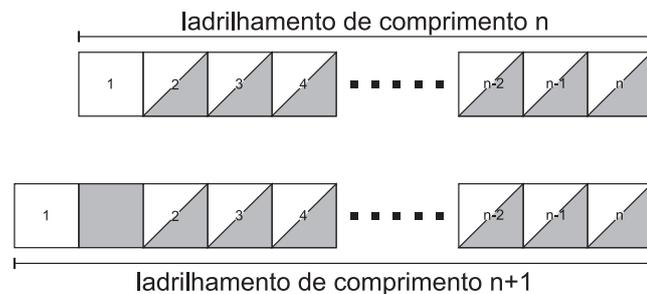


Figura 30 – Aplicação do Teorema 7 em ladrilhos

Assim, um ladrilhamento válido, de comprimento $n \geq 2$ e seu ladrilhamento correspondente (através do Teorema 7) de comprimento $n + 1$ possuem, não apenas o último, mas todos os seus $n - 1$ últimos ladrilhos preenchidos da mesma forma \square

5.3 Interpretação Numérica de Ladrilhamentos Associados

Mais uma vez, devido à equivalências das sequências $o(n)$ e $e(n)$, continuamos interpretado os ladrilhamentos de n e $n + 1$ e suas relações estabelecidas através do Teorema

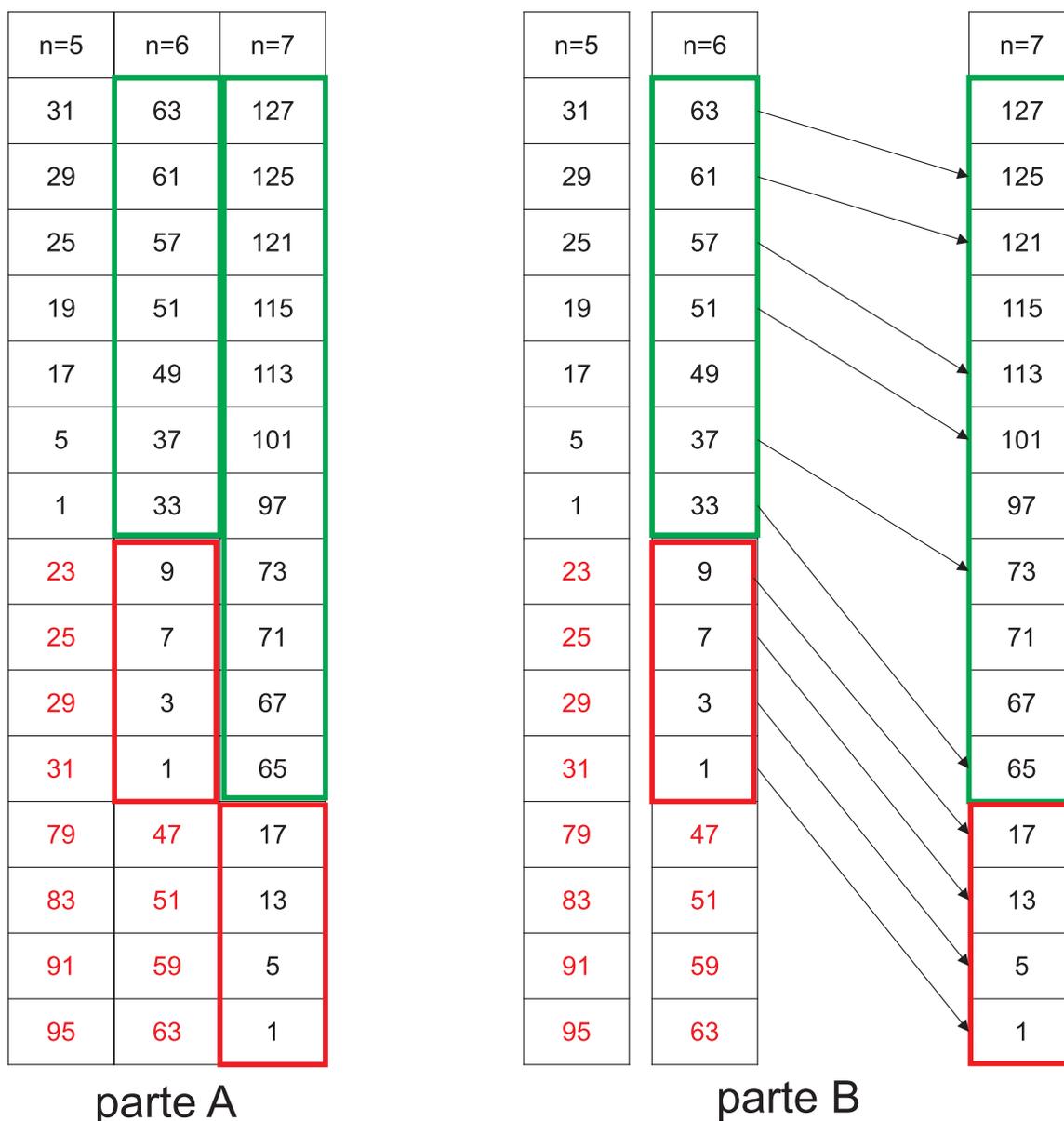


Figura 29 – Relação entre elementos $o(5)$ $o(6)$ $o(7)$ através do Teorema 7

7 apenas sobre suas leituras de ladrilhos vazios, ou seja, em elementos de $o(n)$.

Teorema 9 (Interpretação Numérica de Ladrilhamentos Associados). *Sejam k e p , as respectivas interpretações em $o(n)$ de dois ladrilhamentos válidos de comprimentos n e $n + 1$ associados pelo Teorema 7, então:*

- a) $p = 2k - 1$.
- b) Se m_1 e m_2 são as respectivas posições de k e p nas sequências $o(n)$ e $o(n + 1)$, então, $\alpha_{m_2} = 2\alpha_{m_1} + 1$, onde α_j é a constante definida nas recorrências do Teorema 6.

Demonstração.

a) Sabemos que o ladrilhamento referente a p é oriundo do ladrilha-

mento referente a k com a inserção de um ladrilho preenchido entre as posições 1 e 2, conforme exemplifica a Figura 30. Assim, a leitura de p em $o(n)$ é equivalente à leitura de k com o incremento de uma unidade em todas as suas potências de 2 utilizadas com exceção da primeira (2^0) que não tem seu expoente alterado. Portanto se:

$$k = 1 + 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_j}, \quad j < n.$$

Então,

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2^{r_1+1} + 2^{r_2+1} + \dots + 2^{r_j+1}, \quad j < n \\ p &= 1 - 2 + 2 + 2^{r_1+1} + 2^{r_2+1} + \dots + 2^{r_j+1} \\ p &= 1 - 2 + 2(1 + 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_j}) \\ p &= -1 + 2k. \end{aligned}$$

- b) O Teorema 4 nos garante que os termos situados na mesma linha e colunas adjacentes (à direita) a k e p na Tabela 4 são respectivamente: $k + 2^n$ e $p + 2^{n+1}$. Assim, se α_{m_1} e α_{m_2} representam, respectivamente, as linhas de k e p , então:

$$\begin{aligned} \alpha_{m_1} &= (k + 2^n) - 2k \\ &= 2^n - k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{m_2} &= (p + 2^{n+1}) - 2p \\ &= 2^{n+1} - p \\ &= 2^{n+1} - (2k - 1) \\ &= 2^{n+1} - 2k + 1 \\ &= 2(2^n - k) + 1 \\ &= 2\alpha_{m_1} + 1 \end{aligned}$$

□

5.4 Outras relações entre ladrilhamentos de n e $n+1$

Nesta seção, vamos estudar outras relações mais específicas entre partições de n e $n + 1$, em função dos Teoremas já provados anteriormente.

Teorema 10 (Relação de $o(n)=1$). *A Aplicação do Teorema 7 sobre o elemento $o(n) = 1$, presente $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, resulta no elemento $o(n + 1) = 1$.*

Demonstração. O Teorema 9 garante que a aplicação do Teorema 4 ao elemento $k \in o(n)$ é levado no elemento $p = 2k - 1 \in o(n + 1)$. Basta então notar que $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, o último

elemento visível de $o(n)$ é o elemento $k = 1$, referente ao ladrilhamento que possui apenas o primeiro ladrilhamento vazio, então, sua referência pela aplicação do Teorema 7 é $p = 2k - 1 = 1 \in o(n + 1)$ \square

Teorema 11 (Relação de escada). *A Aplicação do Teorema 7 sobre o elemento de $o(n)$ cuja posição é $p(n - 1)$, resulta no elemento de $o(n + 1)$ de posição $p(n)$.*

Demonstração. Como o elemento de posição $(p(n - 1), n - 1) = 1$ na Tabela 4, então, o elemento situado à sua direita (posição $(p(n - 1), n)$) é $k = 1 + 2^{n-1}$. Por outro lado, o elemento de posição $(p(n), n) = 1 \rightarrow p = (p(n), n + 1) = 1 + 2^n$, assim:

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2^n \\ &= 1 - 2 + 2 + 2^n \\ &= -1 + 2(1 + 2^{n-1}) = -1 + 2k \end{aligned}$$

Como $p = 2k - 1$, esses elementos são relacionados pelo Teorema 7 por consequência direta do Teorema 8. \square

Teorema 12 (Elementos de $o(n+1)$ da forma $4n+1$). *Um elemento $p \in o(n + 1)$ é resultado da aplicação do Teorema 7 em algum elemento de $o(n) \iff p \equiv 1 \pmod{4}$*

Demonstração. De acordo com Teorema 8:

(\rightarrow) Todo ladrilhamento válido de n é relacionado a um ladrilhamento válido de $n + 1$ pela inserção de um ladrilho vazio entre seus ladrilhos de posição 1 e 2, resultando em um ladrilhamento de comprimento $n + 1$ com o segundo ladrilho preenchido, como mostra a Figura 31:

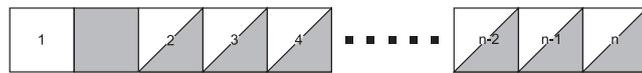


Figura 31 – Elementos da forma $4n+1$

A leitura desse ladrilhamento em $o(n + 1)$ é claramente da forma $p = 1 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_j}$, onde $m_1 \geq 2$ e $j \leq n$, portanto,

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_j} \\ &= 1 + 2^2(2^{m_1-2} + 2^{m_2-2} + \dots + 2^{m_j-2}) \\ &= 1 + 4(2^{m_1-2} + 2^{m_2-2} + \dots + 2^{m_j-2}) = 1 + 4w, w \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(\leftarrow) Como as sequências do tipo $o(n + 1)$ são formadas exclusivamente por termos ímpares, estes são congruentes a 1 ou 3 $\pmod{4}$. Se $o(n + 1) \equiv 1 \pmod{4}$, seu ladrilhamento

possui o segundo ladrilho preenchido e, como nos garante o Teorema 8, este pode ser retirado, resultando em um ladrilhamento válido de $o(n)$.

Seguindo um pouco mais adiante vemos que os elementos de $o(n+1) \equiv 3 \pmod{4}$ são da forma $p = 3 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_j}$, onde $m_1 \geq 2$ e $j \leq n$, logo:

$$\begin{aligned} p &= 3 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_j} \\ &= 1 + 2 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_j} \end{aligned}$$

Como o fator 2^1 faz parte de sua formação, seu ladrilhamento possui o segundo ladrilho vazio e por isso não possui nenhuma referência em $o(n)$ através da aplicação do Teorema 7 □

Ao final deste Capítulo encerramos uma etapa muito importante desse trabalho: já conseguimos percorrer quase a totalidade das partições de n , apenas com o Teorema 7 aqui apresentado e o Teorema 3, apresentado no Capítulo 3. No Capítulo seguinte, vamos apurar as estratégias de buscas das partições ainda não conhecidas.

6 Limitantes em $o(n)$

Neste momento convém uma breve revisão de algumas relações que já temos em ladrilhamentos e sequências em $o(n)$ e $o(n + 1)$:

1. Os $p(n)$ primeiros (e maiores) termos de $o(n + 1)$ são numericamente iguais aos $p(n)$ termos visíveis de $o(n)$ acrescidos de 2^n :

$$o(n + 1)_j = o(n)_j + 2^n, 1 \leq j \leq p(n) \quad (6.1)$$

2. Todos os termos do tipo $o(n)_j$, com $p(n - 1) < j \leq p(n)$ se relacionam com **alguns** termos de $o(n + 1)_i$, com $p(n) < i \leq p(n + 1)$ através da relação:

$$o(n + 1)_i = 2o(n)_j - 1 \quad (6.2)$$

Portanto, quando conhecemos os termos da sequência visível de $o(n)$, também conhecemos grande parte da sequência $o(n + 1)$:

1. Todos $o(n + 1)_j$ com $1 \leq j \leq p(n)$
2. Todos $o(n + 1)_j$ com $p(n) < j \leq p(n + 1)$ tais que $o(n + 1)_j \equiv 1 \pmod{4}$

Os únicos termos de $o(n + 1)_j$ que não conhecemos são aqueles tais que:

$$\begin{aligned} p(n) < j \leq p(n + 1) \\ o(n + 1)_j \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Assim, já conhecemos as possíveis posições que esses termos desconhecidos podem ocupar na sequência de $o(n + 1)$ e sua congruência módulo 4, mas a busca por eles ainda pode ser muito onerosa, especialmente com o crescimento de n , conforme ilustra o exemplo a seguir:

Exemplo 19. Tomando $n = 10$ e supondo que conhecemos todos os $p(10) = 42$ termos de $o(10)$, vamos investigar a sequência $o(11)$.

A princípio seus elementos que são consequências diretas dos termos visíveis de $o(10)$:

$$o(11)_j = o(10)_j + 1024, 1 \leq j \leq p(10) = 42 \quad (6.4)$$

Agora aqueles que provém da aplicação do Teorema 7 - Capítulo 5 nos termos de $o(10)_j$, com $30 = p(9) < j \leq p(10) = 42$:

$$o(11)_i = 2o(10)_j - 1, \forall j \in [30; 42] \text{ e } i \in [31, p(11)] \quad (6.5)$$

Portanto, os únicos termos de $o(11)$ que não conhecemos são aqueles da forma $4n + 3$ maiores do que $1 = o(11)_{p(11)}$ e menores do que $1025 = o(11)_{30} + 2^{10} = 1 + 1024$. O que nos leva a um conjunto com 255 candidatos.

É fato que o conjunto de restrições até então elaboradas possui grande utilidade mas, para grandes valores de n , os processos similares ao Exemplo 19 tornam-se muito onerosos. Em função disso, neste capítulo, discutiremos estratégias que facilitam nossa busca pelos termos desconhecidos de $o(n + 1)$

Teorema 13 (Primeiro Gap). *Para qualquer $n \geq 3$, o termo de posição $p(n) + 1$ na sequência de $o(n + 1)$ é dado por:*

$$o(n + 1)_{p(n)+1} = o(n + 1)_{p(n)} - 3 \cdot 2^{n-2} = 1 + 2^{n-2} \tag{6.6}$$

Demonstração. Sabemos que o termo $o(n + 1)_{p(n)} = 1 + 2^n$ pois na Tabela 4 este é o termo adjacente a $o(n)_{p(n)} = 1$ e seu ladrilhamento obedece o padrão da Figura 32.



Figura 32 – Ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)}$

Em sequências do tipo $o(n)$, ou seja, quando consideramos os ladrilhos vazios iguais a 1 e os preenchidos iguais a 0, este representa o menor elemento dentre aqueles que possuem o último ladrilho vazio, pois nele só são considerados o último e o primeiro ladrilho (este obrigatório).

Assim, o termo $o(n + 1)_{p(n)+1}$ é o maior termo da sequência $o(n + 1)$ correspondente àquele ladrilhamento de comprimento $n + 1$ e que não possui o último ladrilho vazio, ou seja, o maior termo dentre aqueles que possuem o último ladrilho preenchido. Como primeiro candidato, vamos analisar o ladrilhamento que possui apenas os ladrilhos de posição 1 e n vazios (Figura 33):

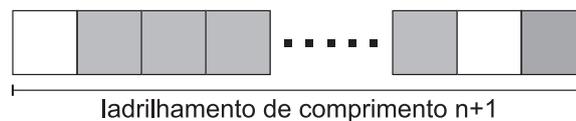


Figura 33 – Primeiro candidato a ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+1}$

Este ladrilhamento certamente não é quem procuramos pois trata-se de um ladrilhamento não válido, uma vez que entre os ladrilhos de posições 1 e n existem exatamente 2

ladrilhos vazios e à direita do ladrilho de posição n há uma sequência de apenas um ladrilho preenchido. É evidente observar que qualquer outro ladrilhamento que possua, ao mesmo tempo, os ladrilhos de posição 1 e n vazios é também inválido pois se escolhermos outros $k > 0$ ladrilhos vazios anteriores ao de posição n , a última sequência de ladrilhos preenchidos (de comprimento 1) o torna inviável mais uma vez.

Outro possível candidato é o ladrilhamento que possui apenas os ladrilhos de posição 1 e $n - 1$ vazios (Figura 34):

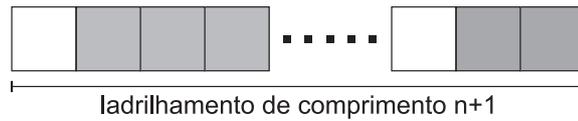


Figura 34 – Segundo candidato a ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+1}$

Este, por sua vez, é um ladrilhamento válido e certamente é quem procuramos, ou seja, aquele correspondente ao maior elemento de $o(n + 1)$ que não possui 2^n e 2^{n-1} em sua composição. Essa certeza vem da simples observação de que a inclusão de $k > 0$ outros ladrilhos vazios a esquerda do ladrilho de posição $n - 1$ nos dá um conjunto de $k + 2$ ladrilhos vazios entre as posições 1 e $n - 1$ e isso implicaria na necessidade de uma sequência de pelo menos $k + 2$ ladrilhos preenchidos nas posições n em diante, o que é impossível pois só restam 2 ladrilhos nestas posições.

Feita esta observação, sabemos o valor exato de $o(n + 1)_{p(n)+1}$ em função de n :

$$o(n + 1)_{p(n)+1} = 1 + 2^{n-2}. \tag{6.7}$$

O que nos leva à conclusão do Teorema 13:

$$\begin{aligned} o(n + 1)_{p(n)} - o(n + 1)_{p(n)+1} &= 1 + 2^n - (1 + 2^{n-2}) \\ &= 2^n - 2^{n-2} \\ &= 2^{n-2}(4 - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$o(n + 1)_{p(n)+1} = o(n + 1)_{p(n)} - 3 \cdot 2^{n-2}. \tag{6.8}$$

□

Este teorema é de extrema importância pois quando se deseja encontrar os termos de $o(n + 1) \equiv 3 \pmod{4}$, nosso intervalo de busca fica de reduzido de $[1, 1 + 2^n]$ a $[1, 1 + 2^{n-2}]$.

Continuando nossas observações nesse sentido, podemos encontrar novos gaps.

Teorema 14 (Segundo Gap). *Para qualquer $n \geq 5$, o termo de posição $p(n) + 2$ na sequência de $o(n + 1)$ é dado por:*

$$o(n + 1)_{p(n)+2} = o(n + 1)_{p(n)+1} - 2^{n-4} = 1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}. \quad (6.9)$$

Demonstração. Nossa intenção agora é encontrar o maior elemento de $o(n + 1)$ menor do que $1 + 2^{n-2}$, correspondente ao ladrilhamento da Figura 35:

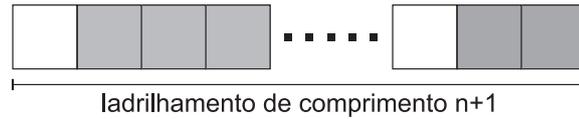


Figura 35 – Ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+1}$

Como este é o único ladrilhamento de comprimento $n + 1$ que possui o ladrilho $n - 1$ vazio, vamos investigar os ladrilhamentos de mesmo tamanho que possuem seu último ladrilho vazio na posição $n - 2$, conforme Figura 36:

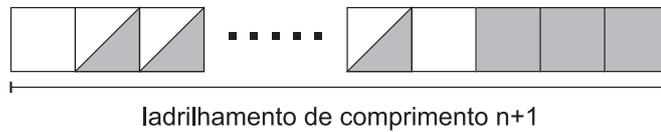


Figura 36 – Possível ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+2}$

Observe que para este ladrilhamento ser válido, é necessário que um (e somente um) ladrilho entre as posições 2 e $n - 3$ seja vazio pois a última sequência de ladrilhos preenchidos possui comprimento 3. Porém, como buscamos encontrar o ladrilhamento referente ao maior elemento de $o(n + 1)$ possível com essas características, basta tomar como o ladrilho vazio, aquele mais à direita possível, ou seja, de posição $n - 3$:

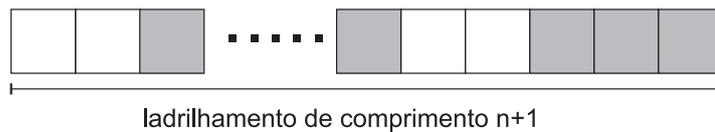


Figura 37 – Ladrilhamento de $o(n + 1)_{p(n)+2}$

Cuja interpretação em $o(n + 1)$ é dada por:

$$o(n + 1)_{p(n)+2} = 1 + 2^{n-4} + 2^{n-3} \quad (6.10)$$

O que nos leva a conclusão do Teorema 14

$$\begin{aligned} o(n+1)_{p(n)+1} - o(n+1)_{p(n)+2} &= 1 + 2^{n-2} - (1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}) \\ &= 2^{n-2} - 2^{n-4} - 2^{n-3} \\ &= 2^{n-4}(4 - 1 - 2) \\ &= 2^{n-4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$o(n+1)_{p(n)+2} = o(n+1)_{p(n)+1} - 2^{n-4}. \tag{6.11}$$

□

Mais uma vez fica reduzido nosso intervalo de busca para $[1, 1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}]$. Porém note que o máximo e mínimo dos intervalos reduzidos anteriormente são todos números da forma $4n + 1$ e um grande passo seria a redução desses intervalos para números da forma $4n + 3$ que são aqueles que estamos procurando neste momento.

Teorema 15 (Primeiro Gap Exato para pares). *Para qualquer $n \geq 6$, n par, o maior e o menor termos de $o(n+1)$, congruentes a 3 módulo 4, menores do que $1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}$ (segundo gap - Teorema 14) são, respectivamente:*

$$o(n+1)_{max} \equiv 3 \pmod{4} = 3 + 2^{n-3}. \tag{6.12}$$

$$o(n+1)_{min} \equiv 3 \pmod{4} = 3. \tag{6.13}$$

Demonstração. O termo $o(n+1)_{min} \equiv 3 \pmod{4}$ é claramente igual a 3 pois este corresponde ao ladrilhamento com os dois primeiros ladrilhos vazios e os restantes (que são em quantidade par) preenchidos, conforme exemplifica a Figura 38.

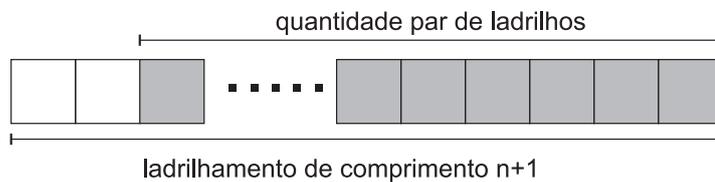


Figura 38 – Menor Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso par

Para encontrar o termo $o(n+1)_{max} \equiv 3 \pmod{4}$ vamos relembrar que:

- O ladrilhamento correspondente a $o(n+1)_{max} \equiv 3 \pmod{4}$ possui os dois primeiros ladrilhos vazios pois é congruente a 3 módulo 4;
- os três últimos ladrilhos de $o(n+1)_{max} \equiv 3 \pmod{4}$ são preenchidos pois buscamos termos menores do que $1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}$

Portanto, o ladrilhamento referente a este termo possui formato exemplificado pela Figura 39:

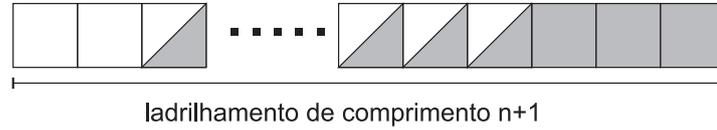


Figura 39 – Formato do maior Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$

Como o objetivo agora é encontrar o ladrilhamento referente ao maior termo possível em $o(n + 1)$ com o formato da Figura 39, nosso primeiro candidato óbvio seria aquele ladrilhamento com o ladrilho mais à direita (de posição $n - 2$) vazio, conforme Figura 40:

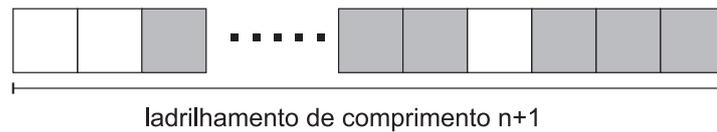


Figura 40 – Maior Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso par

No entanto, quanto mais ladrilhos vazios colocamos no ladrilhamento da Figura 40, maior será o termo de $o(n + 1)$ correspondente. Porém, observe que a última sequência de ladrilhos preenchidos possui comprimento 3 (a mesma quantidade de ladrilhos vazios na Figura 40) e que inserção de um novo ladrilho vazio entre as posições 3 e $n - 3$ nos obrigaria a ter uma última sequência de, no mínimo, 4 ladrilhos preenchidos, ou seja, um termo menor do que aquele referente à Figura 40. Portanto, este já é o candidato que buscamos:

$$o(n + 1)_{max} \equiv 3 \pmod{4} = 3 + 2^{n-3}. \tag{6.14}$$

□

Teorema 16 (Primeiro Gap Exato para ímpares). *Para qualquer $n \geq 11$, n ímpar, o maior termo de $o(n + 1)$, congruente a 3 módulo 4, menor do que $1 + 2^{n-4} + 2^{n-3}$ (segundo gap - Teorema 14) é:*

$$o(n + 1)_{max} \equiv 3 \pmod{4} = 3 + 2^{n-8} + 2^{n-4}. \tag{6.15}$$

Demonstração. Note que repetir o formato do maior termo conforme Teorema 15 aqui não funciona pois o ladrilhamento final não seria viável, conforme exemplifica a Figura 41:

Dessa forma, com o intuito de encontrar o maior termo de $o(n + 1)$ com o formato do

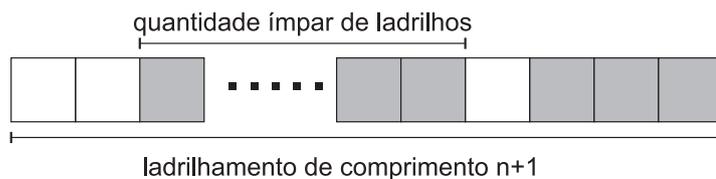


Figura 41 – Ladrilhamento inviável $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar

ladrilhamento exemplificado pela Figura 39, buscaremos incluir exatamente dois ladrilhos vazios entre as posições 3 e $n - 3$, o que nos obriga a deixar uma sequência de 4 ladrilhos preenchidos ao final do ladrilhamento, conforme visto na demonstração do Teorema 15. Inicialmente, vamos fixar um dos ladrilhos vazios na posição $n - 3$ e buscar, entre as posições 3 e $n - 4$, a posição mais a direita possível que torna o ladrilhamento válido, conforme Figura 42

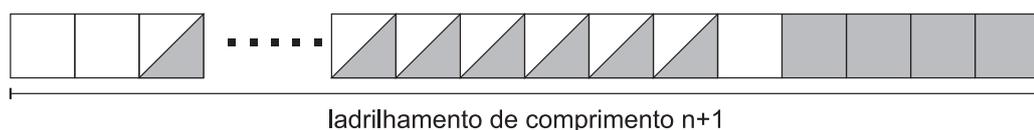


Figura 42 – Candidato - Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar

A Figura 43 mostra que o primeiro ladrilhamento válido é encontrado quando escolhemos a posição $n - 7$ para o ladrilho vazio faltante:

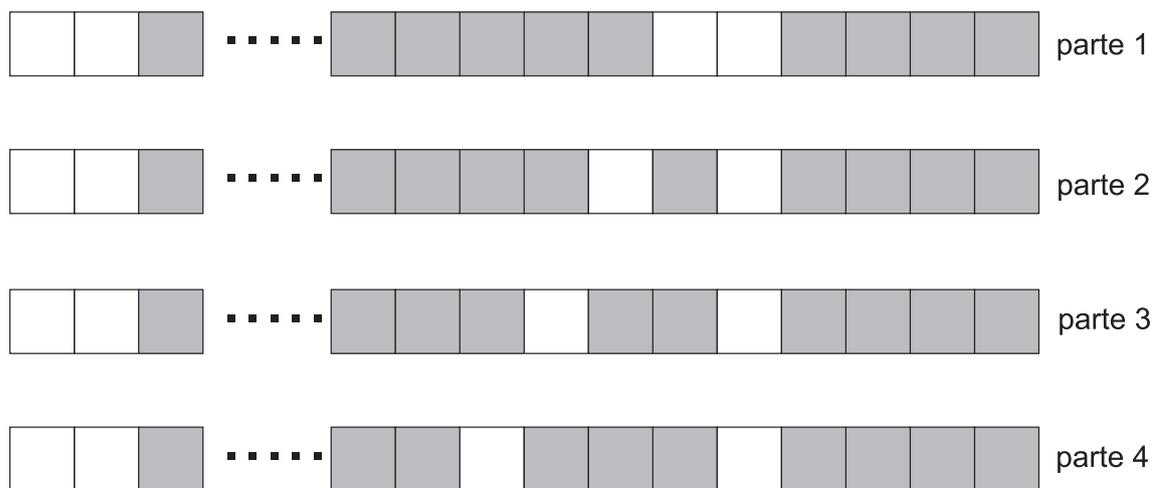


Figura 43 – Ladrilhamento $\equiv 3 \pmod{4}$ - caso ímpar

A inviabilidade das partes 1, 2 e 3 da Figura 43 ocorre pois:

1. a primeira sequência de ladrilhos preenchidos possui comprimento ímpar e está situada logo após uma sequência de dois ladrilhos iniciais vazios;
2. há uma sequência de apenas um ladrilho preenchido em um momento em que a quantidade de ladrilhos vazios em posições anteriores à sua é três;
3. há uma sequência de apenas dois ladrilhos preenchidos em um momento em que a quantidade de ladrilhos vazios em posições anteriores à sua é três;

Já a garantia da validade do ladrilhamento da parte 4 ocorre pois:

- a primeira sequência de ladrilhos preenchidos, a partir da posição 3, certamente possui comprimento par;
- após a inserção do terceiro ladrilho vazio (posição $n - 7$), há uma sequência de exatamente 3 ladrilhos preenchidos;
- após a inserção do quarto ladrilho vazio (posição $n - 3$), há uma sequência de exatamente 4 ladrilhos preenchidos.

Portanto, o termo que buscamos é:

$$o(n + 1)_{max} \equiv 3 \pmod{4} = 3 + 2^{n-8} + 2^{n-4}. \quad (6.16)$$

□

6.1 Partições recorrentes dos divisores de n

Outra estratégia imediata de varredura das partições de n , cuja menor parte é maior do que 1 e as duas maiores partes são iguais, consiste em observar cada divisor inteiro de n , conforme mencionada no Teorema 17 a seguir.

Teorema 17 (Partições recorrentes dos divisores de n). *Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e d_1, d_2, \dots, d_k seus divisores positivos $1 < d_j < n$, $j \leq k$. Cada ladrilhamento com os d_j primeiros ladrilhos vazios e todos os demais preenchidos está relacionado a uma partição cuja interpretação em $o(n)$ é da forma $4n + 3$ e possui as duas maiores partes iguais.*

Demonstração. Considere um ladrilhamento conforme especificações do Teorema 17. Como $d_j \geq 2$, certamente as duas primeiras casas deste ladrilhamento são vazias e necessariamente sua representação em $o(n)$ é da forma $4n + 3$. Como $d_j < n$, há um conjunto não vazio de ladrilhos preenchidos ao final deste ladrilhamento, o que implica que este representa uma partição cujas duas maiores partes são iguais. Como d_j é um divisor de n , há um inteiro c_j tal que $d_j \cdot c_j = n$, assim, o ladrilhamento que possui apenas os primeiros d_j ladrilhos vazios

possui os $d_j \cdot (c_j - 1)$ ladrilhos finais preenchidos, o que torna tal ladrilhamento válido pois $d_j \cdot (c_j - 1)$ é múltiplo de d_j \square

7 Recorrência dos termos faltantes em $o(n)$

Apresentamos neste capítulo uma possibilidade alternativa à dos termos limitantes apresentada no Capítulo 6 para a detecção das partições de n com as duas maiores partes iguais e a menor parte maior do que 1. Essa estratégia consiste em uma simples recorrência das partições menores do que n com o incremento de uma menor parte maior do que 1.

Teorema 18 (Recorrência das partições com as duas maiores partes iguais e menor parte maior do que 1). .

Seja $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_s \geq 2$ e $\lambda_1 \neq n/2$, uma partição de n , com as duas maiores partes iguais e menor parte maior do que 1, ou seja, λ é uma partição cuja interpretação em $o(n)$ é um número da forma $4k + 3 \leq 1 + 2^{n-2}$ (primeiro gap Teorema 13 - Capítulo 6).

Então, existe uma partição λ' de $n - \lambda_s$, que também possui as duas maiores partes iguais e menor parte maior do que 1 tal que:

$$\lambda = \lambda' + \lambda_s. \quad (7.1)$$

Demonstração. Se λ possui pelo menos 3 partes $(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$, ao retirar sua menor parte λ_s , encontraremos uma partição λ' de $n - \lambda_s$ com as duas maiores partes iguais e menor parte $\lambda_{s-1} \geq \lambda_s \geq 2$, ou seja, λ' é uma partição de $n - \lambda_s$ cuja interpretação em $o(n)$ é um número da forma $4k' + 3 \leq 1 + 2^{n-\lambda_s-2}$.

Se λ possui somente duas partes, então n é par e $\lambda = n/2 + n/2$, ou seja, $\lambda_1 = n/2$ e este caso não é tratado neste teorema. Vale observar que nessa situação, a retirada da menor parte de λ gera a partição $\lambda' = n/2$ e esse caso será tratado como caso particular, único e específico para o caso de n par.

Portanto temos a certeza de que qualquer partição (até então desconhecida) de n possui uma referência já conhecida em partições de números anteriores e essas podem ser encontradas por uma simples recorrência. \square

- Retirada de $\lambda_s = 2$: Encontram-se todas as partições de n da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 2$ cujas referências são todas as partições de $n - 2$ da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 2$.
- Retirada de $\lambda_s = 3$: Encontram-se todas as partições de n da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 3$ cujas referências são as partições de $n - 3$ da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 3$.

- Retirada de $\lambda_s = 4$: Encontram-se todas as partições de n da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 4$ cujas referências são as partições de $n - 4$ da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 4$.
- E assim sucessivamente enquanto $\lambda_s \leq n/3$ já que estamos buscando partições com pelo menos 3 partes e cuja menor parte (não necessariamente distinta das outras) seja igual a λ_s .
- Se $n \geq 4$ e par, temos o caso adicional $\lambda = n/2 + n/2$.

Exemplo 20. Para $n = 12$ já conhecemos todos os seus $p(11)$ maiores termos (Teorema 3 - Capítulo 3) e outros $p(11) - p(10)$ termos, compreendidos entre seus $p(12) - p(11)$ menores termos (Teorema 7).

Neste ponto, só não conhecemos as partições de 12 com as duas maiores partes iguais e menor parte maior do que 1, ou seja, aquelas cujas interpretações em $o(n)$ são ímpares da forma $4k + 3 \leq 1 + 2^{10}$. Mas essas partições podem ser encontradas pela recorrência descrita no Teorema 18:

- Retirada de $\lambda_s = 2$: Encontram-se todas as partições de 12 da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 2$ cujas referências são todas as partições de 10 da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 2$.

As partições de 10 com esse formato já são conhecidas e são interpretadas em $o(n)$ como mostra a Figura 44

Um pouco mais além, podemos observar que a inclusão da menor parte igual a 2

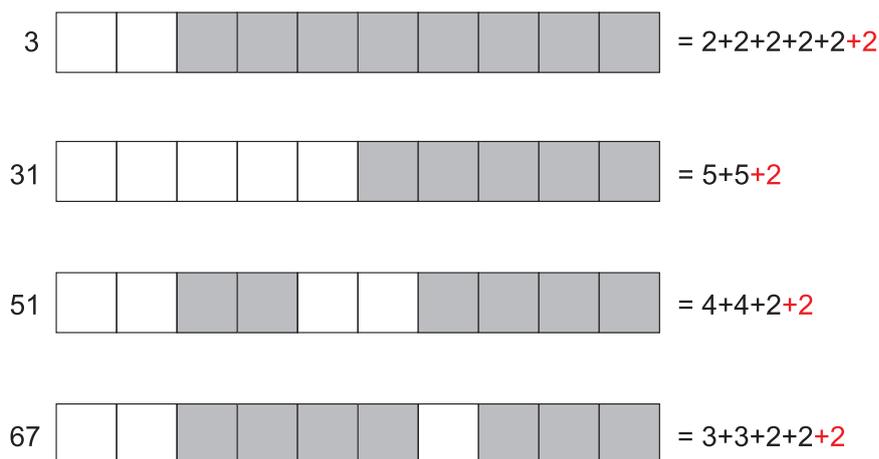


Figura 44 – Termos de referência para $n=10$

exemplificada nos ladrilhamentos da Figura 44 significa na inserção de dois novos ladrilhos preenchidos entre as posições 2 e 3 do ladrilhamento original. Essa inserção gera um novo número ímpar em $o(12)$ igual à sua referência em $o(10)$ mas com

todas as potências de 2 acrescidas em 2 unidades, exceto as duas primeiras (2^0 e 2^1). Assim, cada um desses números de $o(10)$ é convertido em um termo de $o(12)$ pela relação:

$$\begin{aligned} o(12)_j &= 4o(10)_i - 2^2 - 2^3 + 2^0 + 2^1 \\ &= 4o(10)_i - 9. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dessa forma: $3 \rightarrow 4 \cdot 3 - 9 = 3$, $31 \rightarrow 4 \cdot 31 - 9 = 115$, $51 \rightarrow 4 \cdot 51 - 9 = 195$ e $67 \rightarrow 4 \cdot 67 - 9 = 259$.

- Retirada de $\lambda_s = 3$: Encontram-se todas as partições de 12 da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 3$ cujas referências são as partições de 9 da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 3$ exemplificados na Figura 45

Por um raciocínio análogo ao do item anterior, os termos de $o(12)$ referentes aos



Figura 45 – Termos de referência para $n=9$

abordados na Figura 45 possuem três novos ladrilhos preenchidos inseridos entre as posições 3 e 4, assim:

$$\begin{aligned} o(12)_j &= 8o(9)_i - 2^3 - 2^4 - 2^5 + 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ &= 8o(9)_i - 49. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Dessa forma: $7 \rightarrow 8 \cdot 7 - 49 = 7$.

- Retirada de $\lambda_s = 4$: Encontram-se todas as partições de 12 da forma $\lambda = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + 4$ cujas referências são as partições de 8 da forma $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$, com $\lambda_{s-1} \geq 4$ exemplificados na Figura 46.

Por fim, agora nossa nova referência em ladrilhamentos insere 4 ladrilhos preenchidos

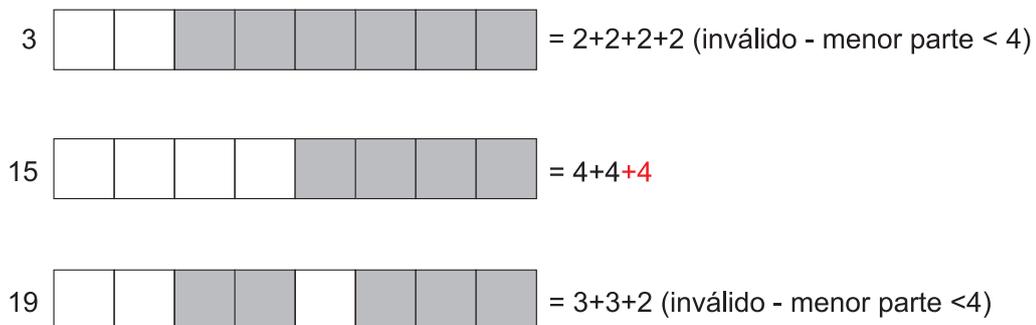


Figura 46 – Termos de referência para $n=8$

entre os ladrilhos 4 e 5 da Figura 46:

$$\begin{aligned} o(12)_j &= 16o(8)_i - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \\ &= 16o(8)_i - 225 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dessa forma: $15 \rightarrow 16 \cdot 15 - 225 = 15$.

- Como 12 é par, temos ainda o caso adicional dado pela partição $\lambda = 6 + 6$ não encontrada pela recorrência anterior.

Cuja referência em $o(12) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

Dessa forma, caso o intuito fosse contar o número de partições de 12, teríamos:

$$\begin{aligned} p(12) &= p(11) + (p(11) - p(10)) + r(\text{recorrência}) \\ &= 56 + (56 - 42) + 7 \\ &= 77 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ao final deste capítulo, chegamos a um importante resultado, quando tomamos por referência os objetivos iniciais desse trabalho pois, neste momento, já temos ferramentas suficientes para percorrer, apontar a quantidade e identificar cada uma das partições de $n \in \mathbb{N}_+^*$, ou seja, temos neste momento um procedimento por recorrência que calcula $p(n)$ e aponta cada uma dessas partições. Apesar de já alcançados nossos objetivos iniciais, optamos por incluir, no capítulo seguinte, a aplicação de parte dos resultados e das teorias desenvolvidas até agora para analisar e quantificar a Primeira e Segunda Identidades de Ramanujan, importantes e conhecidos resultados da Combinatória Enumerativa, sob essa nova perspectiva. A seguir, no capítulo final deste trabalho, apresentamos rotinas computacionais que aplicam de forma prática o que desenvolvemos até agora e também suas aplicações sobre as Identidades de Ramanujan.

8 Identidades de Ramanujan

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) foi um matemático indiano, sem formação acadêmica formal, com grandes contribuições para a matemática, com destaque especial para a Combinatória Enumerativa [3], [4], [5], [6].

Neste capítulo vamos abordar dois trabalhos de Ramanujan, as Identidades de Ramanujan, com aplicações diretas na combinatória enumerativa e suas interpretações através de ladrilhamentos e suas interpretações em sequências de ímpares.

8.1 Primeira Identidade de Ramanujan

A primeira identidade de Ramanujan afirma que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 4q^8 + \dots \quad (8.1)$$

Cuja interpretação combinatória é a afirmação de que o número de partições de $n \geq 0$ cujas partes são 2-distintas (diferença entre duas partes consecutivas é sempre maior do que, ou igual a 2) é igual ao número de partições de n cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Para $n = 10$, as partições listadas na primeira identidade de Ramanujan são:

(a) Partições com partes 2-distintas:

- 10
- 8 + 2
- 7 + 3
- 6 + 4
- 6 + 3 + 1

(b) Partições cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$:

- 9 + 1
- 6 + 1 + 1 + 1 + 1
- 4 + 4 + 1 + 1
- 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

As partições com partes 2-distintas não apresentam um padrão bem definido em $o(n)$, diferentemente das partições com partes congruentes a $\pm 1(mod5)$ que apresentam um padrão bem definido de recorrência e que podem ser calculadas para $n \in \mathbb{N}$.

Observe que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, todas as partições de n com partes congruentes a $\pm 1(mod5)$ devem obedecer a algum dos seguintes critérios:

- $\lambda = n$ se, e somente se, $\lambda \equiv \pm 1(mod5)$.
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte igual à sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_1 + \underbrace{\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s$
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte maior do que sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_s$
e $\lambda_0 \equiv \pm 1(mod5)$

A demonstração dessa afirmação se dá de maneira bastante direta pois, dada uma partição λ de n , se λ possui somente uma parte, é evidente que $\lambda = n$, caso contrário, se λ possui mais do que uma parte, então, a retirada de sua maior parte ainda será uma partição com todas as partes congruentes a $\pm 1(mod5)$. No texto, separamos aquelas cujas duas maiores partes são iguais daquelas cujas duas maiores partes são distintas pois os procedimentos de suas obtenções, apresentados abaixo, serão razoavelmente distintos.

A investigação em $o(n)$ dos três critérios acima nos fornece três conclusões distintas e de suma importância na obtenção das partições que procuramos:

- $\lambda = n$ se, e somente se, $\lambda \equiv \pm 1(mod5)$.
Esse critério nos fornece apenas uma partição $\lambda = n$ e só ocorre nos casos em que $n \equiv \pm 1(mod5)$. Nessa situação, temos a interpretação de λ em $o(n)$ dada por $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte igual à sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_1 + \underbrace{\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s$.

Note que a interpretação em $o(n)$ de uma partição λ qualquer não se altera quando adicionamos a λ uma nova parte numericamente igual à sua maior parte que denominaremos por λ_1 . Isso ocorre pois a maior parte (λ_1) sempre é dada pela quantidade de ladrilhos vazios daquele ladrilhamento (Capítulo 3, Seção 3.4) e se uma partição possui sua maior parte com multiplicidade maior do que 1, então, obrigatoriamente

seu último ladrilho não pode ser vazio já que em algum momento será necessário o aparecimento de uma sequência de ladrilhos preenchidos com comprimento múltiplo de sua maior parte λ_1 . Assim, a adição de uma nova parte igual a λ_1 não altera a disposição, nem a quantidade de ladrilhos vazios do ladrilhamento em questão, ou seja, não altera sua interpretação em $o(n)$. As Figuras 47 e 48 mostram alguns exemplos dessa situação:

Exemplo 21. *Partições de $m = 5$ e $n = 9$ dadas por $4+1$ e $4+4+1$, respectivamente:*

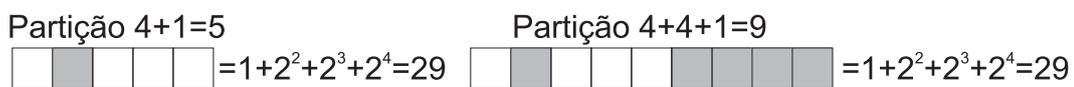


Figura 47 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (1)

Exemplo 22. *Partições de $m = 10$ e $n = 14$ dadas por $4+4+1+1$ e $4+4+4+1+1$, respectivamente:*

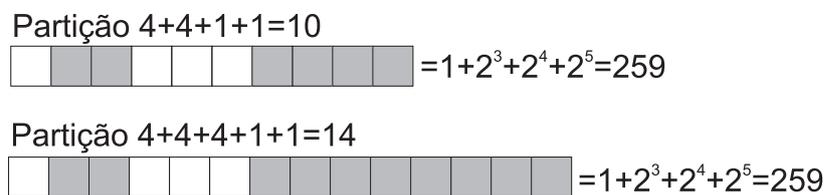


Figura 48 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (2)

Assim, é imediato afirmar que dada uma partição λ de n , cuja interpretação em $o(n)$ é dada pelo ímpar k e se k também é a interpretação em $o(n)$ de uma partição de $m < n$ cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, então, λ também possui todas as partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Em outras palavras, durante nosso processo de busca de partições de n cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, esse critério nos garante que se alguma partição de n possui interpretação em $o(n)$ igual a k e esse k para algum $m < n$ foi armazenado por se referir a uma partição de m cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, então, sem a necessidade de cálculos adicionais, podemos afirmar que λ é uma partição de n cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Além disso, note que essa situação só pode ocorrer quando m pertence à sequência $n - 1, n - 4, n - 6, n - 9, \dots, n - j, j \equiv \pm 1 \pmod{5}$ pois, caso contrário, a adição de uma parte adicional λ_1 em m tal que $m + \lambda_1 = n$ não seria congruente a $\pm 1 \pmod{5}$.

- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte maior do que sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_s$ e $\lambda_0 \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

Considere a sequência S_1 de números naturais congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$: $1, 4, 6, 9, \dots$. Tome, para cada $i \in S_1$, todas as interpretações em $o(n)$ das partições λ de $n - i$ cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ - interpretações estas que são todas conhecidas por armazenamento prévio. Se a interpretação de λ em $o(n)$ é um ímpar já encontrado no critério anterior, nada há o que fazer, caso contrário, se a maior parte de λ é menor do que i , então, a adição de $\lambda_0 = i$ como nova maior parte em λ resulta em uma partição de n cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Note que nesse caso, a interpretação das partições de m e n em $o(n)$ são distintas mas possuem correlação pois o ladrilhamento da partição $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ possui seus m primeiros ladrilhos idênticos ao ladrilhamento de $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ e seus $n - m$ últimos ladrilhos dados por uma sequência de λ_1 preenchidos (uma vez que λ_1 não é mais a maior parte) seguidos de uma sequência de $\lambda_0 - \lambda_1$ ladrilhos vazios (já que agora são necessários λ_0 ladrilhos vazios no novo ladrilhamento). Assim, se k e p são as interpretações desses ladrilhamentos em m e n , respetivamente, então:

$$p = k + \sum_{j=m+\lambda_1}^{n-1} 2^j. \tag{8.2}$$

As Figuras 49 e 50 exemplificam essa transformação:

Exemplo 23. Partições de $m = 3$ e $n = 7$ dadas por $1 + 1 + 1$ e $4 + 1 + 1 + 1$, respectivamente:

Partição $1+1+1=3$



Partição $4+1+1+1=7$

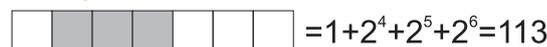


Figura 49 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (1)

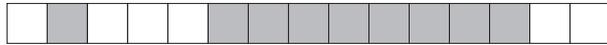
Exemplo 24. Partições de $m = 9$ e $n = 15$ dadas por $4 + 4 + 1$ e $6 + 4 + 4 + 1$, respectivamente:

Partição 4+4+1=9



$$=1+2^2+2^3+2^4=29$$

Partição 6+4+4+1=15



$$=1+2^2+2^3+2^4+2^{13}+2^{14}=24605$$

Figura 50 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (2)

8.2 Segunda Identidade de Ramanujan

A segunda identidade de Ramanujan afirma que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}} = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + 3q^8 + \dots \quad (8.3)$$

Cuja interpretação combinatória é a afirmação de que o número de partições de $n \geq 0$ cujas partes são 2-distintas (diferença entre duas partes consecutivas é sempre maior do que, ou igual a 2) e maiores do que 1 é igual ao número de partições de n cujas partes são congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$.

Para $n = 10$, as partições listadas na segunda identidade de Ramanujan são:

(a) Partições com partes 2-distintas e maiores do que 1:

- 10
- 8 + 2
- 7 + 3
- 6 + 4

(b) Partições cujas partes são congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$:

- 8 + 2
- 7 + 3
- 3 + 3 + 2 + 2
- 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Todas as conclusões da seção anterior, sobre a primeira identidade de Ramanujan, aplicam-se de forma absolutamente similar à segunda identidade de Ramanujan. Em função disso, o desenvolvimento desta seção acontecerá também de maneira similar

ao desenvolvimento da seção anterior. As partições com partes 2-distintas e maiores do que 1 não apresentam um padrão bem definido em $o(n)$, diferentemente das partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ que apresentam um padrão bem definido de recorrência e que podem ser calculadas para $n \in \mathbb{N}$.

Observe que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, todas as partições de n com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ devem obedecer a algum dos seguintes critérios:

- $\lambda = n$ se, e somente se, $\lambda \equiv \pm 2 \pmod{5}$.
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte igual à sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_1 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s$.
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte maior do que sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_s$ e $\lambda_0 \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

A demonstração dessa afirmação se dá de maneira bastante direta pois, dada uma partição λ de n , se λ possui somente uma parte, é evidente que $\lambda = n$, caso contrário, se λ possui mais do que uma parte, então, a retirada de sua maior parte ainda será uma partição com todas as partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. No texto, separamos aquelas cujas duas maiores partes são iguais daquelas cujas duas maiores partes são distintas pois os procedimentos de suas obtenções, apresentados abaixo, serão razoavelmente distintos.

A investigação em $o(n)$ dos três critérios acima nos fornece três conclusões distintas e de suma importância na obtenção das partições que procuramos:

- $\lambda = n$ se, e somente se, $\lambda \equiv \pm 2 \pmod{5}$.
Esse critério nos fornece apenas uma partição $\lambda = n$ e só ocorre nos casos em que $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Nessa situação, temos a interpretação de λ em $o(n)$ dada por $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte igual à sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_1 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s$.

Note que a interpretação em $o(n)$ de uma partição λ qualquer não se altera quando adicionamos a λ uma nova parte numericamente igual à sua maior parte que denominaremos por λ_1 . Isso ocorre pois a maior parte (λ_1) sempre é dada pela quantidade de ladrilhos vazios daquele ladrilhamento (Capítulo 3, Seção 3.4) e se uma partição possui sua maior parte com multiplicidade maior do que 1, então, obrigatoriamente

seu último ladrilho não pode ser vazio já que em algum momento será necessário o aparecimento de uma sequência de ladrilhos preenchidos com comprimento múltiplo de sua maior parte λ_1 . Assim, a adição de uma nova parte igual a λ_1 não altera a disposição, nem a quantidade de ladrilhos vazios do ladrilhamento em questão, ou seja, não altera sua interpretação em $o(n)$. As Figuras 51 e 52 mostram alguns exemplos dessa situação:

Exemplo 25. Partições de $m = 5$ e $n = 8$ dadas por $3+2$ e $3+3+2$, respectivamente:



Figura 51 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (3)

Exemplo 26. Partições de $m = 12$ e $n = 15$ dadas por $3 + 3 + 2 + 2 + 2$ e $3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2$, respectivamente:

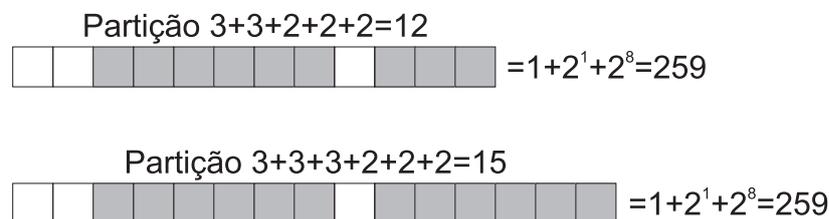


Figura 52 – Ladrilhamentos de mesma interpretação em $o(n)$ (4)

Assim, é imediato afirmar que dada uma partição λ de n , cuja interpretação em $o(n)$ é dada pelo ímpar k e se k também é a interpretação em $o(n)$ de uma partição de $m < n$ cujas partes são congruentes a $\pm 2(mod 5)$, então, λ também possui todas as partes congruentes a $\pm 2(mod 5)$. Em outras palavras, durante nosso processo de busca de partições de n cujas partes são congruentes a $\pm 2(mod 5)$, esse critério nos garante que se alguma partição de n possui interpretação em $o(n)$ igual a k e esse k para algum $m < n$ foi armazenado por se referir a uma partição de m cujas partes são congruentes a $\pm 2(mod 5)$, então, sem a necessidade de cálculos adicionais, podemos afirmar que λ é uma partição de n cujas partes são congruentes a $\pm 2(mod 5)$. Além disso, note que essa situação só pode ocorrer quando m pertence à sequência $n - 2, n - 3, n - 7, n - 8, \dots, n - j, j \equiv \pm 2(mod 5)$ pois, caso contrário, a adição de uma parte adicional λ_1 em m tal que $m + \lambda_1 = n$ não seria congruente a $\pm 2(mod 5)$.

- λ é oriunda de uma partição de algum $m < n$ com o acréscimo de uma nova parte maior do que sua maior parte, ou seja, $\lambda = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}_m$, $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_s$ e $\lambda_0 \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Considere a sequência S_2 de números naturais congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$: $2, 3, 7, 8, \dots$. Tome, para cada $i \in S_2$, todas as interpretações em $o(n)$ das partições λ de $n - i$ cujas partes são congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ - interpretações estas que são todas conhecidas por armazenamento prévio. Se a interpretação de λ em $o(n)$ é um ímpar já encontrado no critério anterior, nada há o que fazer, caso contrário, se a maior parte de λ é menor do que i , então, a adição de $\lambda_0 = i$ como nova maior parte em λ resulta em uma partição de n cujas partes são congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. Note que nesse caso, a interpretação das partições de m e n em $o(n)$ são distintas mas possuem correlação pois o ladrilhamento da partição $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ possui seus m primeiros ladrilhos idênticos ao ladrilhamento de $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ e seus $n - m$ últimos ladrilhos dados por uma sequência de λ_1 preenchidos (uma vez que λ_1 não é mais a maior parte) seguidos de uma sequência de $\lambda_0 - \lambda_1$ ladrilhos vazios (já que agora são necessários λ_0 ladrilhos vazios no novo ladrilhamento). Assim, se k e p são as interpretações desses ladrilhamentos em m e n , respectivamente, então:

$$p = k + \sum_{j=m+\lambda_1}^{n-1} 2^j. \tag{8.4}$$

As Figuras 53 e 54 exemplificam essa transformação:

Exemplo 27. Partições de $m = 2$ e $n = 9$ dadas por 2 e $7 + 2$, respectivamente:

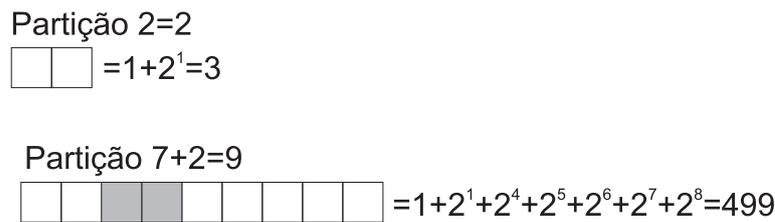


Figura 53 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (3)

Exemplo 28. Partições de $m = 6$ e $n = 13$ dadas por $3+3$ e $7+3+3$, respectivamente:

Partição $3+3=6$

 $=1+2^1+2^2=7$

Partição $7+3+3=13$

 $=1+2^1+2^2+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}=7687$

Figura 54 – Ladrilhamentos relacionados pelo terceiro critério em $o(n)$ (4)

9 Códigos Fonte

Neste capítulo apresentaremos os códigos fonte da implementação das teorias desenvolvidas ao longo dos capítulos anteriores.

9.1 Código Fonte - Introdução

Algoritmo 1 – Introdução onde é fornecido n que se deseja calcular as partições e $p(n)$ e onde são definidas as matrizes de auxílio e armazenamento dos dados.

```

início
   $n = 20$  ; // definição de  $n$ 
   $M = \text{zeros}(1000, 1000)$  ; // criação de matrizes nulas 1000x1000
   $N = M$ ;
   $M(1, 1) = 1$  ; // fornecimento das partições de 1,2,3,4
   $M(2, 1) = 3$ ;
   $M(2, 2) = 1$ ;
   $M(3, 1) = 7$ ;
   $M(3, 2) = 5$ ;
   $M(3, 3) = 1$ ;
   $M(4, 1) = 15$ ;
   $M(4, 2) = 13$ ;
   $M(4, 3) = 9$ ;
   $M(4, 4) = 3$ ;
   $M(4, 5) = 1$ ;
   $N(4, 1) = 3$ ;
   $counter = 5$ ; // contador do preenchimento das linhas de 5 até  $n$ 
enquanto  $counter < n + 1$  faça
  |  $tamanho\_linha\_M = \text{sum}(M(counter - 1, :) \neq 0)$ 
  | ; // aqui entram os demais algoritmos deste capítulo
fim
;
fim

```

9.2 Código Fonte - Aplicação do Teorema 3

Algoritmo 2 – Aplicação do Teorema 3 pela soma de 2^n em todas as partições de n a fim de obter as $p(n)$ maiores partições de $n + 1$

```

início
  |  $aux1 = 1;$ 
  | para  $aux1 = 1 : 1 : tamanho\_linha\_M$  faça
  | |  $M(counter,aux1) = M(counter-1,aux1)+power(2,counter-1)$ 
  | fim
fim

```

9.3 Código Fonte - Aplicação do Teorema 7

Algoritmo 3 – Aplicação do Teorema 7 aos elementos da “escada” de $n - 1$ a fim de obter parte dos termos da “escada” de n

```

início
  |  $aux2 = sum(M(counter - 1, :) \neq 0) - sum(M(counter - 2, :) \neq 0);$  //  $aux2$ 
  |  $calcula\ o\ tamanho\ do\ degrau$ 
  |  $aux3 = 1;$ 
  | para  $aux3 = 1 : 1 : aux2$  faça
  | |  $M(counter, aux1 + aux3) = 2 * (M(counter - 1, sum(M(counter - 2, :) \neq$ 
  | |  $0) + aux3)) - 1$ 
  | fim
fim

```

9.4 Código Fonte - Aplicação do Teorema 18

Algoritmo 4 – Aplicação do Teorema 18 a fim de obter os elementos da forma $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ presentes na "escada".

```

início
   $j = 1$ ;
  para  $aux4 = 2 : 1 : (\text{floor}(\text{counter})/3)$  faça
     $\text{tamanho\_linha\_N} = \text{sum}(N(\text{counter} - aux4, :) \neq 0)$ ;
    para  $i = 1 : 1 : \text{tamanho\_linha\_N}$  faça
      syms  $k$ ;
       $\text{candidato} = N(\text{counter} - aux4, i)$ ; // busca dos possíveis candidatos
    fim
     $\text{candidato} = \text{double}(\text{candidato})$ ;
     $\text{candidato\_base\_dois} = \text{dec2bin}(\text{candidato})$ ;
     $\text{candidato\_base\_dois} = \text{candidato\_base\_dois} - '0'$ ;
     $\text{teste\_logico} = 1$ ; // teste se o candidato é válido
  fim
  se  $\text{length}(\text{candidato\_base\_dois}) < aux4$  então
     $\text{teste\_logico} = 0$ ;
  fim
  senão
    para  $i = 1 : 1 : aux4$  faça
       $\text{teste\_logico} = \text{teste\_logico} * \text{candidato\_base\_dois}(\text{length}(\text{candidato\_base\_dois}) + 1 - i)$ 
    fim
  fim
  se  $\text{teste\_logico} = 1$  então
     $\text{candidato\_final} = \text{candidato} * (2^{aux4}) + \text{symsum}(2^k, k, 0, (aux4 - 1)) - \text{symsum}(2^k, k, (aux4), (2 * aux4 - 1))$ ;
     $N(\text{counter}, j) = \text{candidato\_final}$ ;
     $M(\text{counter}, \text{sum}(M(\text{counter}, :) = 0) + 1) = \text{candidato\_final}$ ;
     $j = j + 1$ ; // se válido, inseri-lo em M e N
  fim
  se  $\text{mod}(\text{counter}, 2) == 0$  então
     $N(\text{counter}, j) = \text{symsum}(2^k, k, 0, (\text{counter}/2 - 1))$ ;
     $M(\text{counter}, \text{sum}(M(\text{counter}, :) \neq 0) + 1) = \text{symsum}(2^k, k, 0, (\text{counter}/2 - 1))$ ; // caso adicional para pares
  fim
   $M = \text{sort}(M, 2, 'descend')$ ; // ordenação de M
   $\text{counter} = \text{counter} + 1$ ; // incremento do contador
fim

```

9.5 Código Fonte - Conversão dos Ladrilhamentos em Partições

Código-fonte 5 – Conversão dos Ladrilhamentos em Partições

```

1   for  $\text{cont\_part} = 1 : 1 : \text{sum}(M(\text{counter} - 1, :) \sim= 0)$ 
2        $p = M(n, \text{cont\_part})$ ;
3        $p = \text{double}(p)$ ;

```

```
4         q=dec2bin(p);
5         q=q-'0';
6         length_q = length(q);
7         if n~=length(q)
8             ajuste = zeros(1,n-length(q));
9             q = [ajuste q];
10        end
11        empties=0;
12        prim_vazia=1;
13        full=0;
14        part = zeros(1,n);
15        for i=0:1:(n-1)
16            if q(n-i)==0
17                full = full+1;
18            else
19                if full~=0
20                    repeticao = full/empties;
21                    for k=1:1:repeticao
22                        part(prim_vazia)=empties;
23                        prim_vazia=prim_vazia+1;
24                    end
25                end
26                empties = empties+1;
27                full=0;
28            end
29        end
30        if full ~=0
31            repeticao = full/empties;
32            for k=1:1:repeticao
33                part(prim_vazia)=empties;
34                prim_vazia=prim_vazia+1;
35            end
36        end
37        part(prim_vazia)=empties;
38        particao=transpose(nonzeros(part));
39    end
40    cont_part = sum(M(counter-1,:)~=0);
```

9.6 Código Fonte - Primeira Identidade de Ramanujan

Código-fonte 6 – Primeira Identidade de Ramanujan

```

1     cont_part=1;
2     for i=2:(counter-1)
3         if mod(i,5)==1 || mod(i,5)==4
4             for j=1:1:sum(P(counter-i,:)~=0)
5                 p = P(counter-i,j);
6                 q=dec2bin(p);
7                 q=q-'0';
8                 length_q = length(q);
9                 maior_parte = sum(q(:)==1);
10                if maior_parte == 0
11                    maior_parte = length_q;
12                end
13
14                if maior_parte==i
15                    P(counter,cont_part)=P(counter-i,j);
16                    cont_part=cont_part+1;
17
18                elseif maior_parte<i
19                    syms k
20                    P(counter,cont_part)=p+symsum(2^k,k,counter+
                maior_parte-i,counter-1);
21                    cont_part=cont_part+1;
22                end
23                end
24            end
25        end
26
27        if mod(counter,5)==1 || mod(counter,5)==4
28            cont_part = cont_part+1;
29            syms k
30            P(counter,cont_part)=symsum(2^k,k,0,counter-1);
31            end
32
33            delete=unique(P(counter,:));
34            delete = sort(delete,2,'descend');
35            completar = zeros(1,30000-length(delete));

```

```
36     delete = [delete completar];
37     P(counter,:) = delete;
38
39
40     counter = counter+1;
41     end
42
43     for cont_part=1:1:sum(P(counter-1,:)~=0)
44     p = P(n,cont_part);
45     p = double(p);
46     q=dec2bin(p);
47     q=q-'0';
48     length_q = length(q);
49     if n~=length(q)
50     ajuste = zeros(1,n-length(q));
51     q = [ajuste q];
52     end
53     empties=0;
54     prim_vazia=1;
55     full=0;
56     part = zeros(1,n);
57
58     for i=0:1:(n-1)
59     if q(n-i)==0
60     full = full+1;
61     else
62     if full~=0
63     repeticao = full/empties;
64     for k=1:1:repeticao
65     part(prim_vazia)=empties;
66     prim_vazia=prim_vazia+1;
67     end
68     end
69     empties = empties+1;
70     full=0;
71     end
72
73     end
74
```

```
75     if full ~=0
76         repeticao = full/empties;
77         for k=1:1:repeticao
78             part(prim_vazia)=empties;
79             prim_vazia=prim_vazia+1;
80             end
81         end
82         part(prim_vazia)=empties;
83         particao=transpose(nonzeros(part));
84         disp(particao);
85         end
86
87         cont_part = sum(P(counter-1,:)~=0);
88         return('0 numero n=%d',n); fprintf(' possui %d',
89             cont_part);fprintf(' particoes com partes
90             congruentes a +-1(mod5) \n');
91         fprintf('Listadas acima: \n');
```

9.7 Código Fonte - Segunda Identidade de Ramanujan

Código-fonte 7 – Segunda Identidade de Ramanujan

```

1     cont_part=1;
2     for i=2:(counter-2)
3         if mod(i,5)==2 || mod(i,5)==3
4             for j=1:1:sum(P(counter-i,:)~=0)
5                 p = P(counter-i,j);
6                 q=dec2bin(p);
7                 q=q-'0';
8                 length_q = length(q);
9                 maior_parte = sum(q(:)==1);
10                if maior_parte == 0
11                    maior_parte = length_q;
12                end
13
14                if maior_parte==i
15                    P(counter, cont_part)=P(counter-i,j);
16                    cont_part=cont_part+1;
17                elseif maior_parte<i
18                    syms k
19                    P(counter, cont_part)=p+symsum(2^k,k, counter+
                maior_parte-i, counter-1);
20                    cont_part=cont_part+1;
21                end
22            end
23        end
24    end
25
26    if mod(counter,5)=2 || mod(counter,5)==3
27        cont_part = cont_part+1;
28        syms k
29        P(counter, cont_part)=symsum(2^k,k,0, counter-1);
30    end
31
32    delete=unique(P(counter,:));
33    delete = sort(delete,2,'descend');
34    completar = zeros(1,30000-length(delete));
35    delete = [delete completar];

```

```
36     P(counter,:) = delete;
37
38
39     counter = counter+1;
40     end
41
42     for cont_part=1:1:sum(P(counter-1,:)~=0)
43     p = P(n,cont_part);
44     p = double(p);
45     q=dec2bin(p);
46     q=q-'0';
47     length_q = length(q);
48     if n~=length(q)
49     ajuste = zeros(1,n-length(q));
50     q = [ajuste q];
51     end
52     empties=0;
53     prim_vazia=1;
54     full=0;
55     part = zeros(1,n);
56
57     for i=0:1:(n-1)
58     if q(n-i)==0
59     full = full+1;
60     else
61     if full~=0
62     repeticao = full/empties;
63     for k=1:1:repeticao
64     part(prim_vazia)=empties;
65     prim_vazia=prim_vazia+1;
66     end
67     end
68     empties = empties+1;
69     full=0;
70     end
71
72     end
73
74     if full ~=0
```

```
75     repeticao = full/empties;
76     for k=1:1:repeticao
77         part(prim_vazia)=empties;
78         prim_vazia=prim_vazia+1;
79     end
80     end
81     part(prim_vazia)=empties;
82     particao=transpose(nonzeros(part));
83     disp(particao);
84     end
85
86     cont_part = sum(P(counter-1,:)~=0);
87     return('0 numero n=%d',n); fprintf(' possui %d',
88         cont_part);fprintf(' particoes com partes
89         congruentes a +-2(mod5) \n');
90     fprintf('Listadas acima: \n');
```

10 Considerações Finais

Neste trabalho, nossa meta foi apresentar uma nova ótica de análise das partições de um inteiro através do estabelecimento de uma bijeção entre cada partição de n e um ladrilhamento de comprimento n , seguindo algumas condições específicas. Em seguida, esse ladrilhamento pode ser interpretado como um número natural, escrito na base 2, e consequentemente conseguimos por essa estratégia:

- contar as partições $p(n)$ de um inteiro n ;
- apresentar cada uma dessas $p(n)$ partições.

Nosso ponto de partida para o estabelecimento dessa nova ótica de análise das partições de um inteiro foi a interpretação das partições de n como uma matriz de duas linhas [7], [8], [10], [2] e também a posterior interpretação dessas matrizes como um caminho reticulado pelo plano cartesiano [1].

A partir de então, a interpretação em ladrilhamentos de cada inteiro n nos permite a imediata interpretação em ladrilhamentos também de $n + 1$. O capítulo 9 exemplifica na prática, através de uma rotina computacional, a implementação das teorias desenvolvidas nos capítulos anteriores e obtém êxito pois para cada n encontra e exhibe suas partições através do seguinte processo:

- Através da aplicação do Teorema 3 - Capítulo 3, convertemos todas as $p(n - 1)$ partições de $n - 1$ em $p(n - 1)$ partições de n . Essas partições são as $p(n - 1)$ maiores partições de n dentro da sequência de $o(n)$ ou, em formato convencional de partições, são todas as partições de $n - 1$ com o incremento de uma unidade em sua maior parte;
- Através da aplicação do Teorema 7 - Capítulo 5, encontramos a conversão do "degrau" de $p(n - 1)$ em parte do "degrau" de $p(n)$. Esse processo nos assegura mais $p(n - 1) - p(n - 2)$ (comprimento do "degrau" de $p(n - 1)$) novos ladrilhamentos. Cada um desses termos pertencentes ao "degrau" de $p(n - 1)$ e cuja interpretação em $o(n)$ é dada por um inteiro k , é convertido agora em um termo do "degrau" de $p(n)$ e cuja nova interpretação em $o(n)$ é dada por $2k - 1$, ou em formato convencional de partições, convertemos agora todas as partições de $n - 1$ com as duas maiores partes iguais em partições de n , também com as duas maiores partes iguais, mas

com a adição de uma nova parte de valor numérico 1. Esse processo nos assegura a identificação de mais $p(n-1) - p(n-2)$ novas partições de n , ou seja, o "degrau" de $p(n-1)$;

- Aplicados os Teoremas 3 e 7 já obtemos todas as partições de n , exceto aquelas com menor parte maior ou igual do que 2 e as duas maiores partes iguais, ou seja, aquelas cuja interpretação em $o(n)$ são inteiros das forma $4k+3 \leq 1+2^{n-2}$. Essas partições são encontradas agora pela recorrência descrita no capítulo 7 que é implementada de $n-2$ em até $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ (até $\frac{n-3}{3}$ passos) mas que percorre apenas os termos da forma $2k+3 \leq 1+2^{n-2} \in o(n)$ ao invés de percorrer todos os seus termos.

Exemplo 29. *Vejamos alguns exemplos do processo dessa implementação que apresentamos nos Capítulos anteriores para alguns inteiros:*

a *Aplicação para $n = 12 \Rightarrow p(12) = 77$:*

- *Aplicação do Teorema 3: são encontrados $p(11) = 56$ partições.*
- *Aplicação do Teorema 7: são encontrados $p(11) - p(10) = 14$ partições.*
- *Aplicação das recorrências em $o(n)$, $n = 10, 9, 8$, são analisados 4 termos em $o(10)$, 1 termo em $o(9)$ e 3 termos em $o(8)$: dentre esses, são encontradas 6 partições válidas mais o caso adicional para pares.*

b *Aplicação para $n = 15 \Rightarrow p(15) = 176$:*

- *Aplicação do Teorema 3: são encontrados $p(14) = 135$ partições.*
- *Aplicação do Teorema 7: são encontrados $p(14) - p(13) = 34$ partições.*
- *Aplicação das recorrências em $o(n)$, $n = 13, 12, 11, 10$, são analisados 3 termos em $o(13)$, 7 termos em $o(12)$, 2 termos em $o(11)$ e 4 termos em $o(10)$: dentre esses, são encontradas 7 partições válidas.*

c *Aplicação para $n = 19 \Rightarrow p(19) = 490$:*

- *Aplicação do Teorema 3: são encontrados $p(18) = 385$ partições.*
- *Aplicação do Teorema 7: são encontrados $p(18) - p(17) = 88$ partições.*
- *Aplicação das recorrências em $o(n)$, $n = 17, 16, 15, 14$, são analisados 11 termos em $o(17)$, 14 termos em $o(16)$, 7 termos em $o(15)$ e 10 termos em $o(14)$: dentre esses, 16 partições válidas mais o caso adicional para pares.*

Em resumo, o que se pretende com esse exemplo é observar a eficiência dessa rotina quanto à obtenção das partições $p(n)$ de um inteiro n qualquer. É possível observar que para valores de $n \geq 15$, a implementação apenas dos Teoremas 3 e 7 já é capaz de obter mais de 95%

das partições de n - essa observação pode ser facilmente demonstrada comparando-se o números de partições encontradas através desses Teoremas e o número de candidatos a serem analisados pelas recorrências.

O nosso objetivo com esse trabalho era o de analisar a interpretação em ladrilhamentos das partições de um inteiro e observar se essa nova ótica traria novas revelações ou ao menos novas maneiras de analisar problemas já resolvidos. Intuímos que ainda há muitas novas descobertas a serem feitas nessa área, especialmente nos temas abordados no capítulo 5 que trata das sequências em $o(n)$ e das relações do tipo α entre elementos adjacentes nas tabelas simples e completa de $o(n)$ estudadas no capítulo 4, mas ao mesmo tempo, acreditamos que o trabalho cumpriu e superou seu objetivo inicial.

Referências

- [1] M. ALEGRI, E. BRIETZKE, J. P. O. SANTOS, and R. SILVA. Bijections between lattice paths and plane partitions. 1(1-3):108. Citado na página 90.
- [2] G. E. ANDREWS. *The theory of partitions*. Cambridge University Press, 1998. Citado na página 90.
- [3] G. E. ANDREWS and B. C. BERNDT. *Ramanujan's lost notebook: Part I*. Springer-Verlag, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 71.
- [4] G. E. ANDREWS and B. C. BERNDT. *Ramanujan's lost notebook: Part II*. Springer-Verlag, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 71.
- [5] G. E. ANDREWS and B. C. BERNDT. *Ramanujan's lost notebook: Part III*. Springer-Verlag, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 71.
- [6] G. E. ANDREWS and B. C. BERNDT. *Ramanujan's lost notebook: Part IV*. Springer-Verlag, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 71.
- [7] E. BRIETZKE, J. P. O. SANTOS, and R. SILVA. Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions. 23(1-3):265–295. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 90.
- [8] E. BRIETZKE, J. P. O. SANTOS, and R. SILVA. Combinatorial interpretations as two-line array for the mock theta functions. 44(2):233–253. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 90.
- [9] M. L. MATTE. Matrix representations for integer partitions: Some consequences and a new approach, 2018. Citado na página 26.
- [10] J. P. O. SANTOS, P. MONDECK, and A. RIBEIRO. New two-line arrays representing partitions. (15):341–354. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 90.