UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MELISSA DE SOUSA LUIZ

Grupos autossimilares de tipo FP_n

Campinas

2021

Melissa de Sousa Luiz

Grupos autossimilares de tipo FP_n

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientadora Dessislava Hristova Kochloukova

Coorientador Plamen Emilov Kochloukov

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Melissa de Sousa Luiz e orientada pela Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L968g

Luiz, Melissa de Sousa, 1997-
Grupos autossimilares de tipo FPn / Melissa de Sousa Luiz. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Coorientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grupos. 2. Grupos autossimilares. 3. Grupos do tipo FPn. 4. Grupos de autômatos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova, 1970-. II. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Self-similar groups of type FPn
Palavras-chave em inglês:
Group theory
Self-similar groups
Groups of type FPn
Automata groups
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestra em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Alex Carrazedo Dantas
Igor dos Santos Lima
Data de defesa: 03-09-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-8456-684
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0505346148909097

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de setembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof(a). Dr(a). ALEX CARRAZEDO DANTAS

Prof(a). Dr(a). IGOR DOS SANTOS LIMA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais.
Me voliv tumen.

Agradecimentos

Aos meus pais, Emiliano e Simone, por tudo o que fizeram e lutaram para que eu tivesse a oportunidade de estar aqui.

Aos meus avós, Emiliano, Lourdes, Hamilton e Sirlei, e aos meus irmãos, de sangue, Milene, Emiliano e Matheus, e agregados, Leonardo e Marcella, por terem sempre acreditado em mim e me incentivado.

Aos meus amigos Danielle, Mateus, Henrique, Victor, Roberto, Lucas, Tiago e Juliane e a todos os meus amigos que me acompanharam durante a graduação e o mestrado, por me ajudarem, por sempre estarem ao meu lado e por fazerem todos os momentos de tensão se tornarem mais leves. À Claudinha, por todo o carinho e incentivo.

Aos meus professores do ensino médio Airton, por ter sido o primeiro a me incentivar na carreira de matemática, mesmo dizendo que eu deveria estudar engenharia, e Tiago, por me ensinar que eu não precisava ter medo de mostrar quem sou. Às minhas professoras da graduação Aline, por ter me guiado na álgebra e acreditado em mim, e Luciana, por todos os conselhos e incentivo. A todos os professores que me ensinaram muito durante toda a minha formação.

À minha orientadora Dessislava, por toda a paciência e persistência mesmo em meio a esse momento difícil.

A todos os professores e funcionários do IMECC.

Aos membros da banca examinadora, Igor e Alex, pela disponibilidade e correções.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Like all Romani intellectuals,
he has had to live torn between the pariah
status of his people and the embrace of a
dominant culture which can hardly conceive
of such a monster as an educated Gypsy."
(Professor Thomas A. Acton
University of Greenwich)

Resumo

Estudamos dois resultados do artigo *Self-similar groups of type FP_n* de D. H. Kochloukova e S. N. Sidki, que constroem classes de grupos autossimilares. Ambos os resultados generalizam o grupo autômata considerado por Bartholdi, Neuhauser e Woess.

Palavras-chave: Teoria de grupos, grupos autossimilares, grupos do tipo FP_n, grupos autômatas.

Abstract

We studied two results in the paper *Self-similar groups of type FP_n* by D. H. Kochloukova e S. N. Sidki, which construct classes of self-similar groups. Both results generalize the automata group conseidered by Bartholdi, Neuhauser and Woess.

Keywords: Group theory, self-similar groups, groups of type FP_n, automata groups.

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar dois resultados do artigo *Self-similar groups of type FP_n* de D. H. Kochloukova e S. N. Sidki, que constroem classes de grupos autossimilares. Um grupo G é dito um grupo autossimilar se G age fielmente em uma árvore infinita regular de uma raiz $\mathcal{T}_m$ e cuja ação é fechada por estados. Mais ainda, G é dito transitivo autossimilar se sua ação no primeiro nível da árvore é transitiva. Em [17] e [18], Nekrashevych e Sidki introduzem endomorfismos virtuais, que foram usados nos resultados estudados para estabelecer classes de grupos transitivos autossimilares.

Um grupo G é dito finitamente apresentável se pode ser definido por meio de um número finito de geradores e relações. Por outro lado, um grupo G é dito de tipo FP_n se existir uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ que tem módulos projetivos finitamente gerados em dimensão até n. A maioria dos grupos autossimilares presentes na literatura não são finitamente apresentáveis, mas nos resultados estudados nesta dissertação construímos uma classe de grupos transitivos autossimilares finitamente apresentáveis e de tipo homológico FP_n. Essa classe de grupos generaliza os primeiros exemplos de grupos metabelianos autossimilares com propriedades homológicas de finitude maiores introduzidos por Bartholdi, Neuhauser e Woess em [3]. É bem conhecido que o grupo lamplighter $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ é autossimilar, porém esse grupo não é finitamente apresentável e nem de tipo FP_2.

Qualquer grupo policíclico é finitamente apresentável e portanto qualquer grupo nilpotente finitamente gerado é finitamente apresentável, pois é policíclico. Embora a maioria dos grupos não sejam finitamente apresentáveis, não é fácil construir tais exemplos. Mas o grupo de lamplighter $\mathbb{Z}_p[x, x^{-1}] \rtimes \langle x \rangle$ é um exemplo de grupo não finitamente apresentável. Existe teoria de Bieri-Strebel que classifica os grupos metabelianos finitamente apresentáveis. Nós citamos o resultado principal dessa classificação no teorema 4.3.2.

Por exemplo, sejam $B = \mathbb{Z}[1/6]$ e $Q = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$, que age sobre B por meio de produto com um numero $r \in B^*$. Seja também $G = B \rtimes Q$. Se $r = 6$ ou $r = 1/6$, então G é finitamente apresentável, se $r = 2/3$ ou $r = 3/2$, então G não é finitamente apresentável. Isso segue do teorema 4.3.2.

No primeiro capítulo, estudamos conceitos básicos de álgebra homológica, incluindo módulos projetivos e injetivos, homologia e cohomologia de grupos, e a sequência espectral de Lindon-Hochschild-Serre. Precisamos desses conceitos básicos para desenvolver mais tarde a teoria de grupos de tipo homológico FP_n. Para este capítulo, seguimos principalmente o livro [21].

O teorema 4.4.7, que é um dos resultados principais que estudamos, usa conceitos e resultados de Álgebra Comutativa. Por causa disso no segundo capítulo, fazemos um resumo dos resultados de álgebra comutativa que serão mais importantes para o restante da dissertação, como localização e anéis Noetherianos. O conteúdo deste capítulo segue os livros [2], [7] e [11].

O terceiro capítulo introduz os conceitos e alguns resultados básicos de módulos e grupos do tipo FP_n, grupos finitamente apresentáveis e quase finitamente apresentáveis, seguindo principalmente os livros [5] e [10].

No último capítulo, finalmente introduzimos o conceito de grupo autossimilar e estudamos dois resultados do artigo [15]. Na segunda seção, vamos construir um grupo G nilpotente-por-abeliano e provamos o teorema 4.2.8, que diz que G é um grupo autômata transitivo. Além disso, G é de tipo homológico FP_n e finitamente apresentável, mas não de tipo FP_{n+1}. O fato de que o grupo G tem tipo homológico FP_n, mas não FP_{n+1} e é finitamente apresentavel segue de um resultado de Bux [9], cuja demonstração não vamos fazer, pois é bastante complicada e usa teoria de buildings. O segundo resultado principal é o teorema 4.4.7, que mostra que vários grupos da forma $B \rtimes Q$ são autossimilares. Aqui precisamos que $C_Q(B) = 1$ e que a dimensão de Krull de B como $\mathbb{Z}Q$-módulo seja 1, pensando B como $\mathbb{Z}Q$-módulo via ação de Q por meio de conjugação.

Observamos que se B é um $\mathbb{Z}Q$-módulo cíclico, então podemos identificar B como um quociente da álgebra de grupo $\mathbb{Z}Q$ e podemos pensar em B como um anel. Se esse anel tem característica prima $p > 0$, então B é uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Se B é um domínio então a dimensão de Krull de B é o grau de transcendência de K sobre $\mathbb{Z}_p$, onde K é o corpo de frações de B. Por exemplo, se $B = \mathbb{Z}_p[x, x^{-1}]$, com p primo e $Q = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$, então B tem dimensão de Krull 1. Assim o grupo lamplighter satisfaz as condições do teorema 4.4.7.

1 Homologia e cohomologia de grupos

1.1 Hom e $\otimes$

Seja R um anel associativo com unidade, um R-módulo à esquerda M é um grupo abeliano aditivo equipado com uma ação de R sobre M à esquerda $R \times M \to M$.

Analogamente, podemos definir um R-módulo à direita. Assim, daqui em diante, fixando um anel R associativo com unidade, chamaremos um R-módulo à esquerda apenas de módulo.

Um submódulo M' de M é um subgrupo fechado pela multiplicação por escalar. Se N também é um R-módulo, uma função $f : M \to N$ é dita um R-mapa, ou R-homomorfismo, se $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e $f(rm) = rf(m)$ para todos $m, n \in M$ e $r \in R$. Se M' é um submódulo de M, então M/M' é o módulo quociente com a ação de R dada por $r(m + M') = rm + M'$. Denotamos por $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ o conjunto de todos os R-homomorfismos $f : M \to N$. Quando o anel R estiver subentendido, denotaremos $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ simplesmente por $\mathrm{Hom}(M, N)$.

Se A é um R-módulo à direita, B é um R-módulo à esquerda e G é um grupo abeliano, dizemos ainda que $f : A \times B \to G$ é uma função R-biaditiva se satisfaz as seguintes condições para todos $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$:

i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definição 1.1.1. *Sejam R um anel associativo com unidade, A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Um produto tensorial de A e B é um grupo abeliano denotado por $A \otimes_R B$ e uma função R-biaditiva $h : A \times B \to A \otimes_R B$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo grupo abeliano G e função R-biaditiva $t : A \times B \to G$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \otimes_R B \to G$ tal que $\varphi h = t$, i.e., o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "t"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Para definirmos soma e produto de módulos, considere $\{A_j : j \in J\}$ uma família de módulos. Então seu produto $\prod_{j \in J} A_j$ é o módulo que consiste dos elementos $a = (a_j)$

com $a_j \in A_j$ e as operações de módulo definidas por $(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$ e $r(a_j) = (ra_j)$. A soma $\oplus_{j\in J} A_j$ é o submódulo de $\prod_{j\in J} A_j$ que consiste dos elementos que possuem apenas um número finito de coordenadas não-nulas.

Teorema 1.1.2 ([21], 2.4 e 2.6)**.** *Sejam B um módulo e $\{A_j \mid j \in J\}$ uma família de módulos e considere o produto $\prod_{j\in J} A_j$ e a soma direta $\oplus_{j\in J} A_j$. Então*

1 $\mathrm{Hom}(\oplus_{j\in J} A_j, B) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(A_j, B)$

2 $\mathrm{Hom}(B, \prod_{j\in J} A_j) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(B, A_j)$

Temos também dois resultados similares sobre o produto tensorial de módulos.

Teorema 1.1.3 ([21], 2.8)**.** *Sejam B um módulo à direita e $\{A_j \mid j \in J\}$ uma família de módulos à esquerda e considere o produto $\prod_{j\in J} A_j$ e a soma direta $\oplus_{j\in J} A_j$. Então*

$$B \otimes_R (\oplus_{j\in J} A_j) \simeq \oplus_{j\in J}(B \otimes_R A_j)$$

Teorema 1.1.4 ([21], 2.8)**.** *Sejam B um módulo à esquerda e $\{A_j \mid j \in J\}$ uma família de módulos à direita e considere o produto $\prod_{j\in J} A_j$ e a soma direta $\oplus_{j\in J} A_j$. Então*

$$(\oplus_{j\in J} A_j) \otimes_R B \simeq \oplus_{j\in J}(A_j \otimes_R B)$$

Uma sequência de mapas

$$\dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n-1} \longrightarrow \dots$$

é dita exata em M_n se $\operatorname{Im} \varphi_{n+1} = \ker \varphi_n$ e é dita exata se ela é exata em cada termo. Em particular, uma sequência exata do tipo $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ é dita uma sequência exata curta e sua exatidão em A equivale a ϕ ser injetiva e, portanto, $A \simeq \phi(A)$ e sua exatidão em C equivale a ψ ser sobrejetiva. Combinando essas informações obtemos que $B/\phi(A) \simeq C$.

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma sequência exata $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ de R-módulos é cindida se existe um mapa $j : C \to B$ tal que $pj = 1_C$ ou, equivalentemente, se existe um mapa $q : B \to A$ tal que $qi = 1_A$.*

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de uma classe de objetos $\operatorname{obj} \mathcal{C}$, um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo par de objetos (A, B) em $\mathcal{C}$ e de composições $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ satisfazendo os seguintes axiomas:

i) Para todo $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, existe morfismo identidade $1_A \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $f 1_A = f$ para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $1_A g = g$ para todo $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$.

ii) Se $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, então

$$h(gf) = (hg)f.$$

Note que não temos problema com essa notação, pois $\operatorname{Hom}_R(A, B)$ é o conjunto dos morfismos da categoria de R-módulos.

Definição 1.1.6. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função satisfazendo:*

i) Se $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, então $FA \in \operatorname{obj} \mathcal{D}$;

ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então $Ff : FA \to FB$ é um morfismo de $\mathcal{D}$;

iii) Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então

$$F(gf) = FgFf;$$

iv) Para todo $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, temos que $F(1_A) = 1_{FA}$.

Dizemos que um funtor covariante F é exato à esquerda se dada uma sequência exata $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$, a sequência $0 \to FA \xrightarrow{F\phi} FB \xrightarrow{F\psi} FC$ é também exata. Analogamente, F é exato à direita se dada uma sequência exata $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$, então a sequência $FA \xrightarrow{F\phi} FB \xrightarrow{F\psi} FC \to 0$ também é exata.

De forma dual, temos a definição de funtor contravariante.

Definição 1.1.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função satisfazendo:*

i) Se $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, então $FA \in \operatorname{obj} \mathcal{D}$;

ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então $Ff : FB \to FA$ é um morfismo de $\mathcal{D}$;

iii) Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então

$$F(gf) = FfFg;$$

iv) Para todo $A \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, temos que $F(1_A) = 1_{FA}$.

Assim, para um funtor F contravariante, dizemos que F é exato à esquerda se dada $A \overset{\psi}{\to} B \overset{\psi}{\to} C \to 0$ exata, temos que $0 \to FC \overset{F\psi}{\to} FB \overset{F\phi}{\to} FA$ é também exata e dizemos que F é exato à direita se dada $0 \to A \overset{\phi}{\to} B \overset{\psi}{\to} C$, a sequência $FC \overset{F\psi}{\to} FB \overset{F\phi}{\to} FA \to 0$ também é exata.

Assim, para um funtor F (covariante ou contravariante), exatidão à esquerda significa que F preserva monomorfismos enquanto exatidão à direita significa que F preserva epimorfismos. Finalmente, F é dito exato se é exato pela esquerda e pela direita.

Teorema 1.1.8 ([21], 2.9 e 2.10)**.** *Para todo módulo M, $\mathrm{Hom}(M, -)$ e $\mathrm{Hom}(-, M)$ são funtores exatos pela esquerda (covariante e contravariante respectivamente) e os funtores $M \otimes_R -$ e $- \otimes_R M$ são exatos pela direita.*

Note que os funtores acima não são necessariamente exatos. Vamos ver um exemplo disso abaixo.

Exemplo 1.1.9. *Considere a sequência exata $0 \to \mathbb{Z} \overset{i}{\to} \mathbb{Q} \overset{q}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. O funtor $F = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ é exato à esquerda pelo teorema anterior, mas ele não é exato pela direita pois $Fq : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ não pode ser sobrejetiva uma vez que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ e $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.*

Analogamente, podemos verificar que os funtores $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} -$ não são exatos.

Existe uma relação importante entre Hom e $\otimes$: eles vão formar o que chamamos de par adjunto. Entenderemos esse conceito a seguir.

Sejam $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ e $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ funtores, dizemos que o par ordenado (F, G) é um par adjunto se para cada $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{A}$ e cada $B \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$ existe uma bijeção $\tau = \tau_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, GB)$ que é natural, o que significa que os diagramas abaixo são comutativos para todos $f : A' \to A$ em $\mathfrak{A}$ e $g : B \to B'$ em $\mathfrak{C}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, B) \arrow[r, "(Ff)^*"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA', B) \arrow[d, "\tau'"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, GB) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A', GB) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(FA, B') \arrow[d, "\tau''"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, GB) \arrow[r, "(Gg)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, GB') \end{tikzcd}$$

Nos diagramas acima, $*$ denota os homomorfismos induzidos, i.e., f^*, $(Ff)^*$, g_* e $(Gg)_*$ são os homomorfismos induzidos por f, Ff, g e Gg, respectivamente, e $\tau' = \tau_{A',B}$ e $\tau'' = \tau_{A,B'}$ são bijeções determinadas como $\tau = \tau_{A,B}$.

Teorema 1.1.10 ([21], 2.11)**.** *Sejam R e S anéis, A um R-módulo à esquerda, C um S-módulo à esquerda e B um (S, R)-bimódulo. Então*

$$\mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

Analogamente, se A é R-módulo à direita, B é (R,S)-bimódulo e C é S-módulo à direita, então

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

Mais ainda, o par $(B \otimes_R -, \mathrm{Hom}_S(B, -))$ é um par adjunto.

Ainda sobre pares adjuntos, sabemos que se temos um par adjunto (F, G), então F é exato à direita e G é exato à esquerda, o que já vimos que é verdade com os funtores $B \otimes_R -$ e $\mathrm{Hom}_S(B, -)$. Ademais esses funtores têm um comportamento interessante com relação a limites diretos e inversos. Para entender melhor, vamos lembrar esses conceitos.

Sejam I um conjunto quase ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um sistema direto em $\mathfrak{C}$ é um conjunto $\{F_i\}_{i \in I}$ de objetos em $\mathfrak{C}$ e morfismos $\phi^i_j : F_i \to F_j$, com $j \geqslant i$, tais que $\phi^i_i = \mathrm{id}_{F_i}$ e para todos $i \leqslant j \leqslant k$ o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "\phi^i_k"] \arrow[dr, "\phi^i_j"'] & & F_k \\
& F_j \arrow[ur, "\phi^j_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Com isso, podemos introduzir a definição de limite direto.

Definição 1.1.11. *Seja $F = \{F_i, \phi^i_j\}$ um sistema direto em $\mathfrak{C}$. O limite direto desse sistema, denotado por $\varinjlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ com $\alpha_i = \alpha_j \phi^i_j$ sempre que $i \leqslant j$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto X e toda família de morfismos $f_i : F_i \to X$ com $f_i = f_j \phi^i_j$ sempre que $i \leqslant j$, existe um único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "\phi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

O limite direto de um sistema direto de módulos $\{F_i, \phi^i_j\}$ existe e é único a menos de isomorfismo. Denotando por $\lambda_i : F_i \to \bigoplus\limits_{i \in I} F_i$ a injeção natural, o limite direto de $\{F_i, \phi^i_j\}$ pode ser visto como o módulo quociente $(\bigoplus\limits_{i \in I} F_i)/S$, onde S é o submódulo gerado por todos os elementos $(\lambda_j \circ \phi^i_j)(a_i) - \lambda_i(a_i)$, com $a_i \in F_i$ e $i \leqslant j$.

Exemplo 1.1.12. *Considere um sistema direto constante, isto é $A_i = A$ para todo $i \in I$ e $\phi^i_i = \mathrm{id}_A$ para todos $i \leqslant j$. Então seu limite direto é $\varinjlim A_i = A$.*

Exemplo 1.1.13. *Seja $I = \{1, 2, 3\}$ com a ordem dada por $1 < 2$ e $1 < 3$. Então o limite direto do sistema direto $\{F_i, \phi_i\}_{i \in I}$ é chamado de pushout*

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\phi_3^1"] \arrow[d, "\phi_2^1"'] & F_3 \arrow[d, "\alpha_3"] \arrow[ddr, "f_3"] & \\
F_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & \varinjlim F_i \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Vamos desenvolver o conceito de limite inverso de forma dual. Assim, se I é ainda um conjunto quase ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um sistema inverso em $\mathfrak{C}$ é um conjunto $\{F_i\}_{i \in I}$ de objetos em $\mathfrak{C}$ e morfismos $\psi_i^j : F_j \to F_i$, com $j \geqslant i$, tais que $\psi_i^i = \mathrm{id}_{F_i}$ e para todos $i \leqslant j \leqslant k$ o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
F_i & & F_k \arrow[ll, "\psi_i^k"'] \arrow[dl, "\psi_j^k"] \\
& F_j \arrow[ul, "\psi_j^i"] &
\end{tikzcd}$$

Com isso, podemos introduzir a definição de limite inverso.

Definição 1.1.14. *Seja $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso em $\mathfrak{C}$. O limite inverso desse sistema, denotado por $\varprojlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ sempre que $i \leqslant j$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto X e morfismos $f_i : X \to F_i$ com $f_i = \psi_i^j f_j$ sempre que $i \leqslant j$, existe um único morfismo $\beta : X \to \varprojlim F_i$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

Assim como ocorre com o limite direto, o limite inverso de um sistema inverso de módulos $\{F_i, \psi_i^j\}$ existe e é único a menos de isomorfismo. Além disso, o limite inverso de $\{F_i, \psi_i^j\}$ pode ser visto como o submódulo do módulo $\prod_{i \in I} F_i$ que consiste dos elementos $(a_i)_{i \in I}$ tais que $(\psi_i^j \circ p_j)(a_i) = p_i(a_i)$, onde $p_i : \prod_{i \in I} F_i \to F_i$ é a projeção e $a_i \in F_i$ para todo $i \in I$.

Exemplo 1.1.15. *Seja $I = \{1, 2, 3\}$ com a ordem dada por $1 < 2$ e $1 < 3$. Então o limite inverso do sistema inverso $\{F_i, \psi_i\}_{i \in I}$ é chamado de pullback.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, "f_3"] \arrow[ddr, "f_2"'] & & \\
& \varprojlim F_i \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_3 \arrow[d, "\psi_1^3"] \\
& F_2 \arrow[r, "\psi_1^2"'] & F_1
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.16. *Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e p um primo. Seja $I = \mathbb{N}$ o conjunto de índices e, para cada $i \in I$, seja $F_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Além disso para $j \geqslant i$, defina por $\psi_i^j : \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ o homomorfismo quociente. Então, $\{F_i, \psi_i^j\}$ assim definido é um sistema inverso e seu limite inverso é chamado de grupo dos inteiros p-ádicos e dado por*

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_i) : a_j \equiv a_i \mod p^i \ \forall j \geqslant i\}.$$

Vamos, então, relacionar limites diretos e inversos com os funtores que estamos estudando.

Teorema 1.1.17 ([21], 2.19 e 2.24)**.** *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{C}$ duas categorias e $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ e $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ funtores. Se (F, G) é um par adjunto, então F comuta com limites diretos e G comuta com limites inversos.*

Assim, como $(B \otimes_R -, \mathrm{Hom}_R(B, -))$ é um par adjunto, temos que $B \otimes_R -$ preserva limites diretos e $\mathrm{Hom}_R(B, -)$ preserva limites inversos.

Por fim, temos uma última relação interessante entre esses limites e o funtor Hom.

Teorema 1.1.18 ([21], 2.27)**.** *Seja B um módulo, então*

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim A_j, B) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(A_j, B).$$

1.2 Módulos projetivos e injetivos

Para entender homologia e cohomologia usaremos fortemente módulos injetivos e projetivos, que também terão um papel muito importante para o desenvolvimento da teoria de que precisamos. Antes de introduzir estes conceitos, porém, vamos generalizar a noção de grupos abelianos livres, definindo o que seria um módulo livre.

Definição 1.2.1. *Um R-módulo F é dito livre se F é uma soma de cópias de R. Se $Ra_i \simeq R$ e $F = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$, então o conjunto $\{a_i : i \in I\}$ é chamado uma base de F.*

Assim, dada uma base $\{a_i : i \in I\}$, cada $a \in F$ pode ser representado de forma única $a = \sum_{i \in I} r_i a_i$, onde $r_i \in R$ e $r_i \neq 0$ apenas para um número finito de índices i.

Além disso, para todo conjunto X, existe um módulo livre F tal que X é uma base de F.

Teorema 1.2.2 ([21], 3.1)**.** *Seja $X = \{a_i : i \in I\}$ uma base do módulo livre F. Dado um R-módulo B e uma função $f : X \to B$, existe um único homomorfismo $\tilde{f} : F \to B$ que estende f.*

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Teorema 1.2.3 ([21], 3.3)**.** *Todo módulo M é o quociente de um módulo livre.*

Demonstração. Denote por M_0 o conjunto dos elementos de M, defina por F o módulo livre gerado por M_0 e defina $f : M_0 \to M$ por $m \mapsto m$. Pelo teorema anterior, conseguimos uma aplicação $\tilde{f} : F \to M$ que estende f. Por fim, como f é sobrejetiva, $\tilde{f}$ também o é. Concluímos que $M \simeq F/\ker \tilde{f}$. □

Definição 1.2.4. *Dizemos que um anel R tem IBN (invariant basis number) se, para cada R-módulo livre à esquerda F, quaisquer duas bases de F têm a mesma cardinalidade. Neste caso, o posto de F é definido como a cardinalidade de uma base de F.*

Usando o Lema de Zorn podemos mostrar que todo anel comutativo R possui IBN, como feito em [21]. Além disso, se F é um R-módulo livre de posto finito n e se o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ gera F, então tal conjunto é uma base de F.

Veremos no próximo capítulo também que anéis Noetherianos à esquerda também tem IBN, apesar de não serem necessariamente comutativos.

Teorema 1.2.5 ([21], 3.4)**.** *Seja F um R-módulo livre com base X, onde R um é anel comutativo com unidade. Então $|X|$ é unicamente definida.*

Vamos introduzir um conceito que será crucial para calcular homologias e cohomologias e também durante o capítulo 3, que é a definição de resolução livre, projetiva e injetiva de um módulo.

Definição 1.2.6. *Uma resolução livre de um módulo M é uma sequência exata*

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

em que cada F_n é um módulo livre.

A partir de resoluções livres, projetivas e injetivas (as duas últimas serão introduzidas posteriormente), calcularemos homologias e cohomologias de um módulo. Em particular, resoluções livres serão de suma importância para definirmos, no capítulo 3, os conceitos de módulo e grupo de tipo FP_n. Assim, precisamos garantir que sempre podemos obter tais resoluções de um dado módulo.

Teorema 1.2.7 ([21], 3.8)**.** *Todo módulo M tem uma resolução livre.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.3, existem um módulo livre F_0 e uma função sobrejetiva $\epsilon : F_0 \to M$. Denotando por $S_0 = \ker \epsilon$, montamos a seguinte sequência exata curta.

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

Analogamente, aplicando o mesmo procedimento a S_0, existem um módulo livre F_1 e uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

Por indução, para cada S_{n-1}, existe um módulo livre F_n e uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow F_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow 0$$

Assim, podemos considerar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde os mapas d_n são apenas as composições. Para cada n, $\ker d_n = S_n$ e $\operatorname{Im} d_n = S_{n-1}$. Portanto, $\operatorname{Im} d_{n+1} = \ker d_n$, logo a sequência na primeira linha é exata. □

Definição 1.2.8. *Seja P um módulo. Dizemos que P é projetivo se, para todos B e C módulos, $\beta : B \to C$ um epimorfismo e $\alpha : P \to C$ um homomorfismo, existe um homomorfismo $\gamma : P \to B$ com $\alpha = \beta\gamma$, i.e., o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.2.9. *Todo módulo livre F é projetivo.*

Demonstração. Seja $X = \{x_i : i \in I\}$ uma base para F. Sejam B e C módulos, $\beta : B \to C$ um epimorfismo e $\alpha : F \to C$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como β é sobrejetiva, para todo elemento $\alpha(x_i)$ existe um elemento $b_i \in B$ tal que $\beta(b_i) = \alpha(x_i)$. Assim, usando o Axioma da Escolha, conseguimos uma aplicação $\phi : X \to B$ com $\phi(x_i) = b_i$ para cada $i \in I$. Assim, basta aplicar o Teorema 1.2.2 para obtermos uma aplicação $\gamma : F \to B$ com $\gamma(x_i) = \phi(x_i)$ para todo i.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"] & F \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por fim, como

$$(\beta \circ \gamma)(x_i) = \beta(\gamma(x_i)) = \beta(\phi(x_i)) = \beta(b_i) = \alpha(x_i)$$

para todo $i \in I$, então concluímos que $\alpha = \beta\gamma$ e, portanto, F é projetivo. □

Note que, com este resultado e o resultado anterior, temos que todo módulo M possui uma resolução projetiva. Esse fato será importante para o desenvolvimento da teoria deste capítulo e do capítulo 3. Outro resultado muito utilizado é o apresentado a seguir.

Teorema 1.2.10. *Um módulo P é projetivo se, e somente se,* $\mathrm{Hom}(P, -)$ *é um funtor exato.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que se P é projetivo, então $\mathrm{Hom}(P, -)$ é exato. Mas, como $\mathrm{Hom}(P, -)$ já é exato à esquerda, basta mostrar que também é exato à direita. Agora, considere a sequência exata de módulos $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, queremos mostrar que a sequência $\mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$ também é exata. Dado um homomorfismo $f \in \mathrm{Hom}(P, C)$, como P é projetivo, sabemos que existe um homomorfismo $g \in \mathrm{Hom}(P, B)$ tal que $f = \beta g$, isto é, a aplicação $\beta_* : \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C)$ dada por $\beta_*(h) = \beta h$ é sobrejetiva, portanto a sequência

$$\mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$$

é exata, o que prova que $\mathrm{Hom}(P, -)$ é exato.

Agora, para mostrar a implicação contrária, suponha $\mathrm{Hom}(P, -)$ exato e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com a linha inferior exata. Como $\mathrm{Hom}(P,-)$ é exato, então a sequência $\mathrm{Hom}(P,B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(P,C) \to 0$ é exata, logo, a aplicação $\beta_* : \mathrm{Hom}(P,B) \to \mathrm{Hom}(P,C)$ é sobrejetiva, isto é, existe um homomorfismo $g : P \to B$ que completa o diagrama tal que $f = \beta_*(g) = \beta g$. Portanto, P é projetivo. □

Teorema 1.2.11 ([21], 3.12)**.** *Se P é projetivo e $\beta : B \to P$ é um epimorfismo, então $B = \ker\beta \bigoplus P'$, onde $P' \simeq P$.*

Corolário 1.2.12 ([21], 3.13)**.** *Se A é um submódulo de B e B/A é projetivo, então A é um somando direto de B. Toda sequência exata curta $0 \to A \to B \to P \to 0$, com P projetivo, é cindida.*

De forma dual, vamos introduzir o conceito de módulo injetivo. Módulos projetivos e injetivos serão a base para definirmos homologia e cohomologia.

Definição 1.2.13. *Um módulo E é injetivo se, para cada módulo B e todo submódulo A de B, todo homomorfismo $f : A \to E$ pode ser estendido para um mapa $g : B \to E$, i. e., o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Vimos que $\mathrm{Hom}(P,-)$ é exato se, e somente se, P é projetivo. Temos um análogo a este resultado para módulo injetivos.

Teorema 1.2.14. *Um módulo E é injetivo se, e somente se, o funtor $\mathrm{Hom}(-,E)$ é exato.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que E é injetivo. Sabemos que o funtor $\mathrm{Hom}(-,E)$ é contravariante exato à esquerda, então vamos mostrar que ele também é exato à direita, i. e., que ele leva monomorfismos em epimorfismos. Assim, seja $\alpha : A \to B$ um monomorfismo. Queremos mostrar que $\alpha^* : \mathrm{Hom}(B,E) \to \mathrm{Hom}(A,E)$ é um epimorfismo. Tome $f \in \mathrm{Hom}(A,E)$, então, pela própria definição da injetividade de E, f pode ser estendido para um homomorfismo $g \in \mathrm{Hom}(B,E)$ tal que $g\alpha = f$.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Mas $\alpha^*(g) = g\alpha$, logo, $\alpha^*(g) = f$. Portanto α^* é um epimorfismo e $\mathrm{Hom}(-,E)$ é exato.

Agora suponha que $\mathrm{Hom}(-,E)$ é um funtor exato e seja $\alpha : A \to B$ um monomorfismo. Seja também $f : A \to E$ um homomorfismo, i. e., $f \in \mathrm{Hom}(A,E)$. Como $\mathrm{Hom}(-,E)$ é exato, sabemos que $\alpha^* : \mathrm{Hom}(B,E) \to \mathrm{Hom}(A,E)$ é sobrejetiva, logo, existe $g \in \mathrm{Hom}(B,E)$ tal que $f = \alpha^*(g) = g\alpha$. Portanto, E é injetivo. □

Teorema 1.2.15 ([21], 3.17)**.** *Se $\{E_j : j \in J\}$ é uma família de módulos injetivos, então $\prod E_j$ também é injetivo.*

Teorema 1.2.16 ([21], 3.18)**.** *Todo somando D de um módulo injetivo E é também injetivo.*

Teorema 1.2.17 ([21], 3.19)**.** *Um módulo E é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta $0 \to E \xrightarrow{i} B \to C \to 0$ é cindida. Em particular, E é um somando de B.*

Teorema 1.2.18 (Critério de Baer, [21], 3.20)**.** *Um R-módulo E é injetivo se, e somente se, todo mapa $f : I \to E$, onde I é um ideal à esquerda de R, pode ser estendido para R.*

Um característica importante de módulos injetivos é que eles são divisíveis, i. e., se E é um módulo injetivo, então para todos $e_1,\ e_2 \in E$ com $e_2 \neq 0$, existe um $r \in E$ tal que $e_1 = re_2$.

Analogamente ao que fizemos com módulos projetivos, vamos introduzir o conceito de resoluções injetivas, que serão essenciais pra definirmos cohomologia.

Teorema 1.2.19 ([21], 3.27)**.** *Todo módulo R-módulo à esquerda M pode ser imerso em um módulo injetivo.*

Definição 1.2.20. *Um resolução injetiva de um módulo M é uma sequência exata*

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^n \to E^{n+1} \to \ldots$$

onde cada E^n é injetivo.

Teorema 1.2.21 ([21], 3.28)**.** *Todo módulo M possui uma resolução injetiva.*

A demonstração desse resultado segue de forma dual à demonstração do teorema 1.2.7, portanto, será omitida aqui.

1.3 Homologia

Seguimos para definir o conceito de homologia. Começamos com a definição de complexo.

Definição 1.3.1. *Um complexo de cadeias $\mathbf{A}$ é uma sequência de módulos e mapas*

$$\mathbf{A} = \ \ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots, n \in \mathbb{Z}$$

com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo n. Os mapas d_n são chamados diferenciais.

Note que a condição $d_n d_{n+1} = 0$ para todo n implica que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \ker d_n$, mas um complexo não necessariamente é exato, pois a inclusão contrária não é sempre válida.

Note também que se A é um módulo, então toda resolução projetiva ou injetiva de A pode ser vista como um complexo exato. Porém, vamos fazer uma mudança de notação aqui, para melhor encaixarmos resoluções injetivas na definição de complexo. Considere a seguinte resolução injetiva de A.

$$\mathbf{E} = 0 \to A \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \dots$$

Queremos que os índices dos módulos sejam decrescentes para a direita, como na definição dada de complexo, assim, defina por $E_{-i} = E^i$ e escreva a resolução injetiva de A por

$$\mathbf{E} = 0 \to A \to E_0 \to E_{-1} \to E_{-2} \to \dots .$$

Além disso, dado um complexo $\mathbf{A}$ como na definição 1.3.1, se F é um funtor covariante, então

$$F(\mathbf{A}) = \quad \dots \longrightarrow F(A_{n+1}) \xrightarrow{Fd_{n+1}} F(A_n) \xrightarrow{Fd_n} F(A_{n-1}) \longrightarrow \dots$$

também é um complexo. Agora, se F é agora um funtor contravariante, então, aplicando F em $\mathbf{A}$, obtemos

$$F(\mathbf{A}) = \quad \dots \longrightarrow F(A_{n-1}) \xrightarrow{Fd_n} F(A_n) \xrightarrow{Fd_{n+1}} F(A_{n+1}) \longrightarrow \dots$$

e neste caso, novamente, a ordem dos índices não está de acordo com a Definição 1.3.1. Assim, de forma análoga ao que fizemos com resoluções injetivas, vamos definir $B^{-n} = F(A_n)$ e $\Delta^{-n+1} = Fd_n$ e, com essas notações, podemos escrever o complexo $F(\mathbf{A})$ como

$$F(\mathbf{A}) = \quad \dots \longrightarrow B^{-n+1} \xrightarrow{\Delta^{-n+1}} B^{-n} \xrightarrow{\Delta^{-n}} B^{-n-1} \longrightarrow \dots .$$

Com isso, podemos definir uma aplicação entre complexos.

Definição 1.3.2. *Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ são complexos, uma aplicação de cadeias $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é uma sequência de homomofismos $f_n : A_n \to A'_n$, para $n \in \mathbb{Z}$ tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} = & \dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\mathbf{A}' = & \dots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & A'_n \arrow[r, "d'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Os módulos $\ker d_n$ são chamados de n-ciclos e os módulos $\operatorname{Im} d_{n+1}$ são chamados n-bordos. Assim, denotamos por

$$\ker d_n = Z_n(\mathbf{A}) = Z_n$$

$$\operatorname{Im} d_{n+1} = B_n(\mathbf{A}) = B_n$$

Com essas definições, podemos finalmente entender o conceito de módulo de homologia.

Definição 1.3.3. *Se* $\mathbf{A}$ *é um complexo, definimos seu* n*-ésimo módulo de homologia por*

$$H_n(\mathbf{A}) = Z_n/B_n.$$

Note que, se o complexo $\mathbf{A}$ é exato em A_n, temos $Z_n = \ker d_n = \operatorname{Im} d_{n+1} = B_n$, o que implica que o n-ésimo módulo de homologia de $\mathbf{A}$ é nulo. Mais ainda, $H_n(\mathbf{A}) = 0$ se, e somente se, o complexo $\mathbf{A}$ é exato em A_n.

Definição 1.3.4. *Se* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *é uma aplicação de cadeias, defina*

$$H_n(f) : H_n(\mathbf{A}) \to H_n(\mathbf{A}')$$

por

$$z_n + B_n(\mathbf{A}) \mapsto f_n z_n + B_n(\mathbf{A}').$$

$H_n(f)$ *é chamado de aplicação induzida por* f*, e é geralmente denotada por* f_**.*

Com essa aplicação induzida f_*, obtemos, à partir de uma sequência curta de complexos, uma sequência entre os módulos dos complexos.

Teorema 1.3.5. *Seja* $\mathbf{0} \to \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \to \mathbf{0}$ *uma sequência exata de complexos. Para cada* n*, existe um homomorfismo*

$$\partial_n : H_n(\mathbf{A}'') \to H_{n-1}(\mathbf{A}')$$

definido por

$$z'' + B_n(\mathbf{A}'') \mapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'' + B_{n-1}(\mathbf{A}').$$

Demonstração. Temos a sequência exata curta de complexos

$$\mathbf{0} \to \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \to \mathbf{0}.$$

Ou seja, para cada n, temos

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A}' = & \cdots & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A} = & \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A}'' = & \cdots & \longrightarrow & A''_{n+1} & \longrightarrow & A''_n & \longrightarrow & A''_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Seja $z'' \in Z_n(\mathbf{A}'') = \ker d''_n$. Como p_n é epimorfismo, existe $a_n \in A_n$ tal que $p_n(a_n) = z''$. Note que $d_n(a_n) \in A_{n-1}$, como o diagrama é comutativo,

$$p_{n-1}(d_n(a_n)) = d''_n(p_n(a_n)) = d''_n(z'') = 0,$$

logo, $d_n(a_n) \in \ker p_{n-1} = \operatorname{Im} i_{n-1}$. Como i_{n-1} é monomorfismo, existe um único $a'_{n-1} \in A'_{n-1}$ tal que $d_n(a_n) = i_{n-1}(a'_{n-1})$, ou seja, $a'_{n-1} = i^{-1}_{n-1}(d_n(a_n))$. Com isso, $i^{-1}_{n-1}(d_n(a_n))$ está bem definido. Temos que mostrar ainda que independe de $a_n \in p_n^{-1}(z'')$. De fato, se $\overline{a} \in p_n^{-1}(z'') \subset A_n$, pela construção usada acima, existe um único $\overline{a}'_{n-1} \in A'_{n-1}$ tal que $d_n(\overline{a}_n) = i_{n-1}(\overline{a}'_{n-1})$. Agora, $p_n(a_n) = p_n(\overline{a}_n) = z''$, portanto, $p_n(a_n - \overline{a}_n) = 0$, ou seja, $a_n - \overline{a}_n \in \ker p_n = \operatorname{Im} i_n$, logo, $a_n - \overline{a}_n = i_n(x'_n)$ para algum $x'_n \in A'_n$. Com isso,

$$\begin{aligned}
a'_{n-1} - \overline{a}'_{n-1} &= i^{-1}_{n-1}(d_n(a_n)) - i^{-1}_{n-1}(d_n(\overline{a}_n)) \\
&= i^{-1}_{n-1}(d_n(a_n - \overline{a}_n)) \\
&= i^{-1}_{n-1}(d_n(i_n(x'_n))) \\
&= i^{-1}_{n-1}(i_{n-1}(d'_n(x'_n))) \\
&= d'_n(x'_n)
\end{aligned}$$

Assim, como $d'_n(x'_n) \in \operatorname{Im} d'_n = B_{n-1}(\mathbf{A}')$, portanto, a aplicação

$$z'' \mapsto i^{-1}_{n-1} d_n p_n^{-1} z'' + B_{n-1}(\mathbf{A}')$$

está bem definida.

Resta mostrar que $B_n(\mathbf{A}'')$ está no núcleo desta aplicação. Seja $b_n \in B_n(\mathbf{A}'') = \operatorname{Im} d''_{n+1}$, então $b_n \in \operatorname{Im} d''_{n+1} \subseteq \ker d''_n$. Além disso, $b_n \in B_n(\mathbf{A}'')$ implica que $b_n \in \ker d''_n = Z_n(\mathbf{A}'')$, logo $i^{-1}_{n-1}(d_n(p^{-1}(b_n))) + B_{n-1}(\mathbf{A}'') = i^{-1}_{n-1}(d_n(p^{-1}(d''_{n+1}(a''_{n+1})))) + B_{n-1}(\mathbf{A}'')$, onde $b_n = d''_{n+1}(a''_{n+1})$ com $a''_{n+1} \in A''_{n+1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
i^{-1}_{n-1}(d_n(p^{-1}(b_n))) + B_{n-1}(\mathbf{A}'') &= i^{-1}_{n-1}(d_n(p^{-1}(d''_{n+1}(a''_{n+1})))) + B_{n-1}(\mathbf{A}'') \\
&= i^{-1}_{n-1}(d_n(d_{n+1}(p^{-1}_{n+1}(a''_{n+1})))) + B_{n-1}(\mathbf{A}'') \\
&= 0 + B_{n-1}(\mathbf{A}''),
\end{aligned}$$

pois $d_n d_{n+1} = 0$. Portanto, b_n está no núcleo desta aplicação para todo $b_n \in B_n(\mathbf{A}'')$, logo, existe uma aplicação induzida

$$z'' + B_n(\mathbf{A}'') \mapsto i^{-1}_{n-1} d_n p_n^{-1} z'' + B_{n-1}(\mathbf{A}').$$

Resta mostrar que $i^{-1}_{n-1} d_n p_n^{-1} z'' \in Z_{n-1}(\mathbf{A}'') = \ker d'_{n-1}$ (módulo $B_{n-1}(\mathbf{A}')$). De fato,

$$d'_{n-1} i^{-1}_{n-1} d_n p_n^{-1} z'' \equiv d'_{n-1} d'_n i_n^{-1} p_n^{-1} z'' \equiv 0.$$

Portanto, $i^{-1}_{n-1} d_n p_n^{-1} z'' \in Z_{n-1}(\mathbf{A}'')$. □

Os homomorfismos $\partial_n : H_n(\mathbf{A}'') \to H_{n-1}(\mathbf{A}')$ definidos no teorema anterior são chamados de homomorfismos conectores. Com isso, podemos obter uma sequência exata longa da sequência exata curta original de complexos.

Teorema 1.3.6 (Sequência exata longa, [21], 6.3)**.** *Se* $\mathbf{0} \to \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \to \mathbf{0}$ *é uma sequência exata de complexos, então existe uma sequência exata de módulos*

$$\cdots \to H_n(\mathbf{A}') \xrightarrow{i_*} H_n(\mathbf{A}) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbf{A}'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathbf{A}') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbf{A}) \to \dots$$

Além disso, o homomorfismo ∂ é natural, i. e., se temos o seguinte diagrama de complexos comutativo e com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{A}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{A} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}' \arrow[r, "j"] & \mathbf{C} \arrow[r, "q"] & \mathbf{C}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então podemos obter o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_n(\mathbf{A}'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(\mathbf{A}') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}') \arrow[r, "j_*"] & H_n(\mathbf{C}) \arrow[r, "q_*"] & H_n(\mathbf{C}'') \arrow[r, "\partial'"] & H_{n-1}(\mathbf{C}') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Se $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é uma aplicação de cadeias, então $f_* = H_n(f) : H_n(\mathbf{A}') \to H_n(\mathbf{A})$ é dada por $z_n + B_n(\mathbf{A}) \mapsto f_n z_n + B_n(\mathbf{A})$. Nos perguntamos quando $f_* = g_*$ para f e g duas aplicações de cadeias.

Definição 1.3.7. *Seja* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *uma aplicação de cadeias. Dizemos que* f *é homotopicamente nula se existem aplicações* $s_n : A_n \to A'_{n+1}$ *para todo* n *tais que* $f_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$ *para todo* n

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} = & \dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dl, "s_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & \dots \\
\mathbf{A}' = & \dots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A'_n \arrow[r, "d_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Definição 1.3.8. *Se* $f, g : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *são aplicações de cadeias, dizemos que* f *é homotópica a* g *quando* $f - g$ *é homotopicamente nula. Neste caso, dizemos que as aplicações* $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *formam uma homotopia.*

A homotopia define uma relação de equivalência em $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$, o grupo de todas as aplicações de cadeias de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{A}'$.

Teorema 1.3.9 ([21], 6.8)**.** *Se* $f, g : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *são aplicações de cadeias homotópicas, então* $f_* = g_*$*, ou seja,* $H_n(f) = H_n(g)$ *para todo* n*.*

Agora, dado um complexo $\mathbf{X} = \cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$ denotamos o complexo deletado (ou apagado) de $\mathbf{X}$ por

$$\mathbf{X}_M = \cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to 0.$$

Analogamente, se $\mathbf{Y} = 0 \to N \to Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots$ o complexo deletado (ou apagado) de $\mathbf{Y}$ é dado por

$$\mathbf{Y}_N = 0 \to Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots \quad .$$

Antes de continuar, vamos introduzir um resultado que será uma ferramenta importante para demonstrar teoremas neste capítulo.

Teorema 1.3.10 (Teorema da Comparação, [21], 6.9)**.** *Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "d'_2"] & X'_1 \arrow[r, "d'_1"] & X'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são complexos. Se cada X_n na primeira linha é projetivo e a segunda linha é exata, então existe uma aplicação de cadeias $\bar{f} : \mathbf{X}_A \to \mathbf{X}'_A$, que corresponde às aplicações tracejadas, que faz o diagrama comutar.

Mais ainda, quaisquer duas aplicações de cadeias dessa forma são homotópicas.

Sejam A um módulo e $\mathbf{P}$ uma resolução projetiva de A, tal que seu complexo deletado é dado por

$$\mathbf{P}_A = \cdots \to P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0.$$

Se T é um funtor, podemos aplicar T a $\mathbf{P}_A$ e obter o complexo $T\mathbf{P}_A$.

Definição 1.3.11. *O n-ésimo funtor derivado à esquerda de T é definido em A como*

$$(L_nT)A := H_n(T\mathbf{P}_A) = \ker Td_n / \operatorname{Im} Td_{n+1} \ .$$

Se $f : A \to B$ é um R-homomorfismo e $\mathbf{P}'$ é uma resolução projetiva de B, então o Teorema da Comparação 1.3.10 garante que existe uma aplicação de cadeias $\overline{f} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P'}_B$ sobre f. Aplicando T, temos o diagrama.

$$\begin{tikzcd}
T\mathbf{P}_A = & \ldots \arrow[r] & TP_{n+1} \arrow[r, "Td_{n+1}"] \arrow[d, "Tf_{n+1}"] & TP_n \arrow[r, "Td_n"] \arrow[d, "Tf_n"] & TP_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "Tf_{n-1}"] & \ldots \\
T\mathbf{P'}_B = & \ldots \arrow[r] & TP'_{n+1} \arrow[r, "Td'_{n+1}"] & TP'_n \arrow[r, "Td'_n"] & TP'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Defina $(L_nT)(f) : (L_nT)(A) \to (L_n)(B)$ por

$$(L_nT)(f) = H_n(T\overline{f}) = (T\overline{f})_*,$$

ou seja, para todo $z \in \ker Td_n$, $(L_nT)(f)$ é definida por

$$z_n + \operatorname{Im} Td_{n+1} \mapsto Tf_n z_n + \operatorname{Im} Td'_{n+1}.$$

Assim, note que $(L_nT)(f)$ está bem definida, pois, se $h : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P'}_B$ é outra aplicação de cadeias sobre f, então $\overline{f}$ e $\overline{h}$ são homotópicas, assim como $T\overline{f}$ e $T\overline{h}$, portanto $(T\overline{f})_* = (T\overline{h})_*$.

Note que esta definição ainda depende da resolução projetiva escolhida de A. Assim, seja

$$\widetilde{\mathbf{P}}_A = \ldots \to \widetilde{P}_3 \xrightarrow{d_3} \widetilde{P}_2 \xrightarrow{d_2} \widetilde{P}_1 \xrightarrow{d_1} \widetilde{P}_0 \to 0$$

outra resolução projetiva deletada de A e seja $\widetilde{L}_nT$ o n-ésimo funtor derivado à esquerda de T e considere o teorema a seguir.

Teorema 1.3.12 ([21], 6.11)**.** *Para qualquer funtor T, os funtores derivados à esquerda L_nT e $\widetilde{L}_nT$ são naturalmente equivalentes. Em particular, para cada A, $(L_nT)A \simeq (\widetilde{L}_nT)A$.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde a primeira linha é a resolução projetiva usada para L_nT e a segunda linha é a resolução projetiva usada para $\tilde{L}_nT$. Usando o Teorema da Comparação (1.3.10), existe uma aplicação de cadeias $i : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P'}_A$ sobre a identidade 1_A. Aplicando T, obtemos uma aplicação de cadeias $Ti : T\mathbf{P}_A \to T\mathbf{P'}_A$ sobre 1_{TA}

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & TP_2 \arrow[r] \arrow[d, "Ti_2"] & TP_1 \arrow[r] \arrow[d, "Ti_1"] & TP_0 \arrow[r] \arrow[d, "Ti_0"] & TA \arrow[r] \arrow[d, "1_{TA}"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & TP'_2 \arrow[r] & TP'_1 \arrow[r] & TP'_0 \arrow[r] & TA \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

essa aplicação induz aplicações

$$\tau_A = (Ti)_* : (L_nT)A \to (\tilde{L}_nT)A.$$

Vamos mostrar que τ_A é um isomorfismo. Para obter a inversa de τ_A, consideramos o diagrama invertendo as linhas

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Novamente pelo Teorema da Comparação (1.3.10), temos uma aplicação de cadeias $j : \mathbf{P'}_A \to \mathbf{P}_A$. Assim, a composta $ji : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_A$ é uma aplicação de cadeias sobre 1_A

e como $1_{\mathbf{P}} : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_A$ também é uma aplicação de cadeias sobre 1_A, pelo Teorema da Comparação (1.3.10), $j \circ i$ é homotópica a $1_{\mathbf{P}}$. Assim, $T(j \circ i) = Tj \circ Ti$ e $T1_A = 1_{TA}$ são homotópicas, logo, induzem a mesma aplicação na homologia, isto é,

$$(Tj \circ Ti)_* = (Tj)_* \circ (Ti)_* = (1_{TA})_* = 1_{(L_nT)A},$$

portanto, $(Tj)_* \circ \tau_A = 1_{(L_nT)A}$. Analogamente, $\tau_A \circ (Tj)_* = 1_{(\tilde{L}_nT)A}$. Portanto, τ_A é um isomorfismo.

Agora, vamos mostrar que o isomorfismo τ_A é uma transformação natural. Seja $f : A \to B$ e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(L_nT)A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "L_nT(f)"'] & (\tilde{L}_nT)A \arrow[d, "\tilde{L}_nT(f)"] \\
(L_nT)B \arrow[r, "\tau_B"'] & (\tilde{L}_nT)B
\end{tikzcd}$$

onde $(L_nT)B$ e $(\tilde{L}_nT)B$ são obtidos à partir de resoluções projetivas $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}'$ de B respectivamente. Queremos mostrar que esse diagrama é comutativo. Para avaliar no sentido horário, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & P_2' \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & P_0' \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & Q_2' \arrow[r] & Q_1' \arrow[r] & Q_0' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pelo Teorema da Comparação (1.3.10), existe uma aplicação entre cadeias $\alpha : \mathbf{P}_A \to \mathbf{Q}'_B$ sobre $f1_A = f$. Analogamente, usando a resolução $\mathbf{Q}$ de B, existe uma aplicação de cadeias $\beta : \mathbf{P}_A \to \mathbf{Q}'_B$ sobre $1_Bf = f$. Assim, novamente pelo Teorema da Comparação (1.3.10), tais aplicações são homotópicas. Aplicando T em ambas, temos que $T\alpha : T\mathbf{P}_A \to T\mathbf{Q}'_B$ e $T\beta : T\mathbf{P}_A \to T\mathbf{Q}'_B$ são homotópicas, logo, as aplicações induzidas na homologia são as mesmas. □

Em particular, estamos interessados no caso em que $T = - \otimes_R B$. Nesse caso, temos que $L_nT = \mathrm{Tor}_n^R(-, B)$, isto é

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = \ker(d_n \otimes 1)/\operatorname{Im}(d_{n+1} \otimes 1)\ .$$

Corolário 1.3.13 ([21], 6.12)**.** *A definição de $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B)$ não depende da escolha da resolução projetiva $\mathbf{P}$.*

Corolário 1.3.14 ([21], 6.13)**.** *Seja*

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

uma resolução projetiva de A e defina $K_0 = \ker \epsilon$ e $K_n = \ker d_n$ para $n \geqslant 1$. Então, se T é um funtor covariante, temos

$$(L_{n+1}T)(A) \simeq (L_nT)(K_0) \simeq (L_{n-1}T)(K_1) \simeq \ldots \simeq (L_1T)(K_{n-1}).$$

Em particular, tomando $T = - \otimes B$ no corolário acima, temos

$$\operatorname{Tor}_{n+1}(A, B) \simeq \operatorname{Tor}_n(K_0, B) \simeq \ldots \simeq \operatorname{Tor}_1(K_{n-1}, B).$$

De forma análoga à usada para definir funtores derivados à esquerda, vamos definir funtores derivados à direita. Mas, diferentemente do que fizemos para definir funtores derivados à esquerda, aqui a definição dependerá da variância do funtor T.

Primeiramente, se T é um funtor covariante, considere uma resolução injetiva $\mathcal{E}$ de A, tal que seu complexo deletado é dado por

$$\mathbf{E}_A = 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \to \ldots \ .$$

Aplicando T obtemos o complexo

$$T\mathbf{E}_A = 0 \to TE^0 \xrightarrow{Td^0} E^1 \xrightarrow{Td^1} TE^2 \xrightarrow{Td^2} TE^3 \to \ldots \quad .$$

Definição 1.3.15. *Seja T um funtor covariante. O n-ésimo funtor derivado à direita de T é definido em A como*

$$(R^nT)A := H^n(T\mathbf{E}_A) = \ker Td^n / \operatorname{Im} Td^{n-1} \ .$$

Agora, se T é um funtor contravariante, vamos considerar uma resolução projetiva $\mathbf{P}$ de C tal que o complexo deletado é dado por

$$\mathbf{P}_C = \cdots \to P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0.$$

Aplicando T obtemos

$$T\mathbf{P}_C = 0 \to TP_0 \xrightarrow{Td_1} TP_1 \xrightarrow{Td_2} TP_2 \xrightarrow{Td_3} TP_3 \to \ldots \ .$$

Definição 1.3.16. *Seja T um funtor contravariante. O n-ésimo funtor derivado à direita de T é definido em C como*

$$(R^nT)C := H_n(T\mathbf{P}_C) = \ker Td_{n+1} / \operatorname{Im} Td_n$$

Novamente, precisamos que nossas definições sejam independentes das resoluções escolhidas.

Teorema 1.3.17 ([21], 6.14 e 6.17)**.** *Se T é um funtor covariante, a definição de R_nT não depende da resolução injetiva escolhida de A. Se T é um funtor contravariante, a definição de R_nT não depende da resolução projetiva escolhida de C.*

De fato, a demonstração desse resultado segue de forma semelhante à demonstração do Teorema 1.3.12.

Em particular, se $T = \mathrm{Hom}_R(C, -)$, como T é um funtor covariante, usamos a Definição 1.3.15, então definimos $R^nT = \mathrm{Ext}^n_R(C, -)$, isto é

$$\mathrm{Ext}^n_R(C, A) = \ker d^n_* / \operatorname{Im} d^{n-1}_* \ .$$

Se $T = \mathrm{Hom}_R(-, A)$, como T é um funtor contravariante, usamos a Definição 1.3.16 e definimos $R^nT = \mathrm{ext}^n_R(-, C)$, isto é,

$$\mathrm{ext}^n_R(C, A) = \ker d_{n+1*} / \operatorname{Im} d_{n*}.$$

Corolário 1.3.18 ([21], 6.15 e 6.18)**.** *A definição de $\mathrm{Ext}^n_R(C, A) = H_n(\mathrm{Hom}_R(C, \mathbf{E}_A))$ não depende da escolha da resolução injetiva $\mathbf{E}$ de A. A definição de $\mathrm{ext}^n_R(C, A) = H_n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_C, A))$ não depende da escolha da resolução projetiva $\mathbf{P}$ de C.*

Corolário 1.3.19 ([21], 6.19)**.** *Seja*

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} C \to 0$$

uma resolução projetiva de C e defina $K_0 = \ker \epsilon$ e $K_n = \ker d_n$ para $n \geqslant 1$. Então, se T é um funtor contravariante, temos

$$(R^{n+1}T)(C) \simeq (R^nT)(K_0) \simeq (R^{n-1}T)(K_1) \simeq \ldots \simeq (R^1T)(K_{n-1}).$$

Em particular, tomando $T = \mathrm{Hom}(-, A)$ no corolário acima, temos

$$\mathrm{ext}^{n+1}(C, A) \simeq \mathrm{ext}^n(K_0, A) \simeq \ldots \simeq \mathrm{ext}^1(K_{n-1}, A).$$

Pode ser provado também que $\mathrm{Ext}^n_R(A, C) = \mathrm{ext}^n_R(A, C)$.

Agora, usando o homomorfismo conector definido no Teorema 1.3.5, vamos obter resultados importantes para os funtores derivados à esquerda e à direita.

Teorema 1.3.20 ([21], 6.21)**.** *Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma sequência exata de módulos. Se T é um funtor covariante, então existe uma sequência exata*

$$\cdots \to (L_nT)A' \to (L_nT)A \to (L_nT)A'' \xrightarrow{\partial} (L_{n-1}T)A' \to \cdots \to (L_0T)A \to (L_0T)A'' \to 0$$

com homomorfismos conectores naturais.

Temos dois teoremas análogos para funtores derivados à direita.

Teorema 1.3.21 ([21], 6.26)**.** *Seja* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *uma sequência exata de módulos. Se* T *é um funtor covariante, então existe uma sequência exata*

$$0 \to (R^0T)A' \to (R^0T)A \to \ldots \to (R^nT)A' \to (R^nT)A \to (R^nT)A'' \xrightarrow{\partial} (R^{n+1}T)A' \to \ldots$$

com homomorfismos conectores naturais.

Teorema 1.3.22 ([21], 6.27)**.** *Seja* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *uma sequência exata de módulos. Se* T *é um funtor contravariante, então existe uma sequência exata*

$$0 \to (R^0T)A'' \to (R^0T)A \to \ldots \to (R^nT)A'' \to (R^nT)A \to (R^nT)A' \xrightarrow{\partial} (R^{n+1}T)A'' \to \ldots$$

com homomorfismos conectores naturais.

1.4 Tor

Vimos que, por definição, $\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B)$. Porém, queremos poder calcular o valor de $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ usando resoluções de qualquer um dos dois módulos. Vamos mostrar isso nesta seção. Até lá, vamos estudar propriedades dos dois funtores $\mathrm{Tor}_0^R(A,-)$ e $\mathrm{Tor}_0^R(-,B)$.

Note também que $\mathrm{Tor}_n(A,B) = 0$ para todo $n < 0$, pois $H_n(\mathbf{P_A} \otimes B)$ tem apenas zeros à direita de $P_0 \otimes B$.

Teorema 1.4.1 ([21], 8.2)**.** $\mathrm{Tor}_0^R(A,-)$ *é naturalmente equivalente a* $A \otimes_R -$ *e* $\mathrm{Tor}_0^R(-,B)$ *é naturalmente equivalente a* $- \otimes_R B$*.*

Dessa forma, dada uma sequência exata curta $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ e um módulo A, usando a sequência do Teorema 1.3.20 e aplicando o teorema acima, conseguimos uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(A,B) \to \mathrm{Tor}_1(A,B'') \to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0.$$

Agora, seja P um módulo projetivo, dado um módulo B, podemos utilizar a resolução projetiva $0 \to P \to P \to 0$ para calcular $\mathrm{Tor}_n(P,B)$, donde concluímos que $\mathrm{Tor}_n(P,B) = 0$ para todo módulo B e todo $n \geqslant 1$. Analogamente, $\mathrm{Tor}_n(A,P) = 0$ para todo módulo A e todo $n \geqslant 1$.

Antes de prosseguirmos para o próximo teorema, porém, precisaremos de mais um resultado.

Teorema 1.4.2 (Snake Lemma, [21], 6.5)**.** *Considere o seguinte diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] & C \arrow[r] & C'' & \end{tikzcd}$$

Então existe uma sequência exata

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma,$$

onde $\partial : a'' \mapsto i^{-1}\beta p^{-1}a'' + \operatorname{Im}\alpha$*.*

Mais ainda, se $A' \to A$ *é um monomorfismo, então* $\ker\alpha \to \ker\beta$ *é um monomorfismo, e se* $C \to C''$ *é um epimorfismo, então* $\operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$ *é um epimorfismo.*

Com isso, podemos finalmente mostrar o seguinte resultado.

Teorema 1.4.3 ([21], 7.9)**.** *Sejam*

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

e

$$\mathbf{Q} = \cdots \to Q_2 \xrightarrow{d_2'} Q_1 \xrightarrow{d_1'} Q_0 \xrightarrow{\epsilon'} B \to 0$$

resoluções projetivas de A *e* B *respectivamente, então* $H_n(\mathbf{P_A} \otimes_R B) \simeq H_n(A \otimes_R \mathbf{Q_B})$ *para todo* $n \geqslant 0$*.*

Demonstração. Para diferenciarmos os módulos de homologia obtidos à partir de cada resolução, vamos denotar por $\operatorname{Tor}_n(A,B) = H_n(\mathbf{P_A} \otimes_R B)$ e $\operatorname{tor}_n(A,B) = H_n(A \otimes_R \mathbf{Q_B})$.

Defina $K_i = \ker d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$ para todo i e $K_i' = \ker d_i' = \operatorname{Im} d_{i+1}'$ para todo i e considere os diagramas

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & A \arrow[r] & 0 \\ \dots & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ \dots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & Q_2 \arrow[rr, "d_2'"] \arrow[dr] & & Q_1 \arrow[rr, "d_1'"] \arrow[dr] & & Q_0 \arrow[r, "\epsilon'"] & B \arrow[r] & 0 \\ \dots & & K_1' \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_0' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ \dots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

Usando as sequências $0 \to K_0 \to P_0 \to A \to 0$ e $0 \to K_0' \to Q_0 \to B \to 0$, que são exatas, podemos obter o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] & \\
 & K_0 \otimes K_0' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & K_0 \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & K_0 \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \otimes K_0' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha'"] & P_0 \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A \otimes K_0' \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

que é comutativo e tem linhas e colunas exatas. Note que os zeros à direita e abaixo do diagrama vêm do fato de que o funtor do produto tensorial é exato à direita e os zeros na coluna e na linha do meio vêm do fato de que Q_0 e P_0 são projetivos, logo, os funtores $- \otimes Q_0$ e $P_0 \otimes -$ são exatos. Aplicando o Snake Lemma (1.4.2), para as duas primeiras linhas, existe uma sequência exata

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0, \tag{1.1}$$

como $\ker\beta = 0$, temos

$$0 \to \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0,$$

o que nos diz que $\ker\gamma \simeq \operatorname{Im}\partial$. Agora, da sequência exata curta $0 \to K_0 \to P_o \to A \to 0$, temos a sequência exata

$$\operatorname{Tor}_1(P_0, B) \to \operatorname{Tor}_1(A, B) \to K_0 \otimes B \xrightarrow{\gamma} P_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0,$$

mas sabemos que $\operatorname{Tor}_1(P_0, B) = 0$, pois P_0 é projetivo. Assim, temos que $\ker\gamma \simeq \operatorname{Tor}_1(A, B)$. Agora,

$$\operatorname{coker}\alpha = P_0 \otimes K_0' / \operatorname{Im}\alpha \simeq P_0 \otimes K_0' / \ker\alpha' \simeq A \otimes K_0'$$

e analogamente,

$$\operatorname{coker}\beta = P_0 \otimes Q_0 / \operatorname{Im}\beta \simeq A \otimes Q_0,$$

logo

$$\operatorname{Tor}_1(A, B) \simeq \ker\gamma \simeq \operatorname{Im}\partial \simeq \ker(\operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta) \simeq \ker(A \otimes K_0' \to A \otimes Q_0).$$

Por outro lado, da sequência exata curta $0 \to K_0' \to Q_0 \to B \to 0$, obtemos a sequência exata

$$\operatorname{tor}_1(A, Q_0) \to \operatorname{tor}_1(A, B) \to A \otimes K_0' \to A \otimes Q_0 \to A \otimes B \to 0.$$

Como Q_0 é projetivo, novamente temos $\mathrm{tor}_1(A, Q_0) = 0$, logo

$$\mathrm{tor}_1(A, B) \simeq \ker(A \otimes K_0' \to A \otimes Q_0) \simeq \mathrm{Tor}_1(A, B).$$

Assim, o teorema vale para $n = 1$.

Note também que, usando novamente que $\mathrm{Tor}_1(P_0, K_0') = 0$ e $\mathrm{tor}_1(K_0, Q_0) = 0$, temos as sequências exatas

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A, K_0') \to K_0 \otimes K_0' \xrightarrow{\alpha} P_0 \otimes K_0' \to A \otimes K_0' \to 0$$

e

$$0 \to \mathrm{tor}_1(K_0, B) \to K_0' \otimes K_0 \xrightarrow{\gamma} K_0 \otimes Q_0 \to K_0 \otimes B \to 0,$$

portanto, o diagrama também implica que

$$\mathrm{Tor}_1(A, K_0') \simeq \ker \alpha \simeq \ker \sigma\alpha \simeq \ker \beta\delta \simeq \ker \delta \simeq \mathrm{tor}_1(K_0, B),$$

pois σ e β são monomorfismos.

Usando as sequências $0 \to K_j \to P_j \to K_{j-1} \to 0$ e $0 \to K_i' \to Q_i \to K_{i-1}' \to 0$, que são exatas, podemos repetir a demmonstração feita até agora e, como P_j e Q_i são projetivos para todos j e i, obtemos que

$$\mathrm{Tor}_1(K_{j-1}, K_i') \simeq \mathrm{Tor}_1(K_j, K_{i-1}').$$

Definindo $K_{-1} = A$ e $K_{-1}' = B$, vemos que o isomorfismo acima continua válido para $i = j = 0$. Logo, usando também o corolário 1.3.14, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{n+1}(A, B) &\simeq \mathrm{Tor}_1(K_{n-1}, B) \simeq \mathrm{Tor}_1(K_{n-2}, K_0')\\ &\ldots \simeq \mathrm{Tor}_1(K_{-1}, K_{n-1}') \simeq \mathrm{tor}_1(K_{-1}, K_{n-1}') \simeq \mathrm{tor}_1(A, K_{n-1}') \simeq \mathrm{tor}_{n+1}(A, B).\end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{Tor}_n(A, B) \simeq \mathrm{tor}_n(A, B)$ para todo n. □

Esse teorema nos permite calcular $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ usando resoluções projetivas de qualquer um dos dois módulos A e B.

Teorema 1.4.4 ([21], 8.9)**.** *Se* $\mathrm{Tor}_1(F, B) = 0$ *para todo* R*-módulo* B*, então* F *é* R*-módulo plano.*

Teorema 1.4.5 ([21], 8.10 e 8.11)**.** *Sejam* B *um módulo e* $\{A_k\}$ *uma família de módulos. Então, para todo* $n \geqslant 0$*, as seguintes proposições são verdadeiras.*

1. $\mathrm{Tor}_n(\bigoplus A_k, B) \simeq \bigoplus \mathrm{Tor}_n(A_k, B)$.

2. *Se o conjunto de índices é dirigido, então* $\mathrm{Tor}_n(\varinjlim A_k, B) \simeq \varinjlim \mathrm{Tor}_n(A_k, B)$.

1.5 Ext

Definimos $\mathrm{Ext}^n(A, B)$ de duas formas diferentes:

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(A, \mathbf{E}_B)),$$

onde $\mathbf{E}_B$ é uma resolução injetiva deletada de B, e

$$\mathrm{ext}^n(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_A, B)),$$

onde $\mathbf{P}_A$ é uma resolução projetiva deletada de A. Queremos provar que estas duas definições coincidem.

Agora, note que

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0 = \mathrm{ext}^n(A, B)$$

para todo $n < 0$, pois $H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathbf{E}_B))$ e $H^n(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_A, B))$ têm apenas zeros à direita de $\mathrm{Hom}(A, E_0)$ e $\mathrm{Hom}(P_0, B)$, respectivamente.

Teorema 1.5.1 ([21], 7.2)**.** $\mathrm{Ext}^0(A, -)$ *é naturalmente equivalente a* $\mathrm{Hom}(A, -)$.

Demonstração. Dado um módulo B e uma resolução injetiva $0 \to B \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \dots$ de B. Como $\mathrm{Hom}(A, -)$ é exato à esquerda, então a sequência

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathrm{Hom}(A, E^0) \xrightarrow{d^0_*} \mathrm{Hom}(A, E^1)$$

é exata, ou seja, $\ker d^0_* = \mathrm{Im}\, \epsilon_*$, então, o mapa $\epsilon_* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \ker d^0_*$ é um isomorfismo. Por outro lado, considerando o complexo deletado

$$\mathbf{E}_B = \dots \to 0 \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \dots$$

temos que $\mathrm{Ext}^0(A, B) = \ker d^0_* / \mathrm{Im}\, d^{-1}_* = \ker d^0_*$. Concluímos que $\mathrm{Ext}^0(A, B) \simeq \mathrm{Hom}(A, B)$. □

Seja $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ uma sequência exata curta. Usando o teorema acima e o Teorema 1.3.21, obtemos uma sequência exata longa da forma

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A, B') \to \mathrm{Ext}^1(A, B) \to \dots$$

Teorema 1.5.2 ([21], 7.4)**.** $\mathrm{ext}^0(-, B)$ *é naturalmente equivalente a* $\mathrm{Hom}(-, B)$.

A prova desse teorema segue de forma análoga à prova do teorema anterior.

Assim, combinando o teorema acima com o Teorema 1.3.22, obtemos que, dada uma sequência exata curta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, obtemos uma sequência exata longa da forma

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{ext}^1(A'', B) \to \mathrm{ext}^1(A, B) \to \dots$$

Note que, se E é um módulo injetivo, $0 \to E \to E \to 0$ é uma resolução injetiva de E, logo, $\mathrm{Ext}^n(A, E) = H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathbf{E}_E)) = 0$ para todo $n \geqslant 1$ e todo módulo A.

Analogamente, se P é projetivo, $0 \to P \to P \to 0$ é uma resolução projetiva de P, logo, $\mathrm{Ext}^n(P, B) = H^n(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_P, B)) = 0$ para todo $n \geqslant 1$ e todo módulo B.

Teorema 1.5.3 ([21], 7.8)**.** *Sejam*

$$\mathbf{E} = 0 \to B \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \dots$$

uma resolução injetiva de B e

$$\mathbf{P} = \dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

uma resolução projetiva de A. Então, para todo $n \geqslant 0$, temos

$$H^n(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_A, B)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathbf{E}_B)).$$

A prova deste teorema é feita de forma análoga à prova do Teorema 1.4.3 e pode ser encontrada em [21], creditada a A. Zaks.

Com esse teorema, concluimos que $\mathrm{Ext}^n(A, B) \simeq \mathrm{ext}^n(A, B)$ para todo $n \geqslant 0$ e todos módulos A e B.

Definição 1.5.4. *Uma extensão de A por C é uma sequência exata*

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Teorema 1.5.5 ([21], 7.11)**.** *Se $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$, então toda sequência exata $0 \to B \to C \to A \to 0$ cinde.*

Desse resultado, com os Teoremas 1.2.12 e 1.2.17, podemos concluir que se $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$ para todo B, então A é projetivo e se $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$ para todo A, então B é injetivo.

Teorema 1.5.6 ([21], 7.13 e 7.14)**.** *Para todo n, vale que*

i) $\mathrm{Ext}^n(\bigoplus A_k, B) \simeq \prod \mathrm{Ext}^n(A_k, B)$.

ii) $\mathrm{Ext}^n(A, \prod B_k) \simeq \prod \mathrm{Ext}^n(A, B_k)$.

Exemplo 1.5.7. *Seja B um grupo abeliano. Considere a sequência exata curta*

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0,$$

onde a primeira aplicação é multiplicação por m. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$, obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \xrightarrow{m^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B),$$

onde o último termo é igual a 0*, pois* $\mathbb{Z}$ *é* $\mathbb{Z}$*-módulo livre, e os dois primeiros termos são isomorfos a* B*. Agora, como*

$$m^*f(1) = fm(1) = f(m) = mf(1),$$

segue que m^* *também é multiplicação por* m*, então*

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B)/\operatorname{Im} m^* \simeq B/mB.$$

1.6 Homologia e Cohomologia de grupos

Nesta seção, vamos passar nossa teoria para os grupos. Assim, seja G um grupo com notação multiplicativa e seja R um anel comutativo com unidade. A álgebra de grupo RG é o anel

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} m_g g : m_g \in R, \forall g \text{ e } m_g \neq 0 \text{ só para finitos } g \right\}$$

cuja estrutura aditiva é do R-módulo livre com base G e a multiplicação em G e as leis distributivas são dadas por

$$\left(\sum_{g \in G} m_g g \right) \left(\sum_{h \in G} n_h h \right) = \sum_{g,h \in G} m_g n_h gh.$$

Temos que RG é anel associativo com unidade que contém R no seu centro. Além disso, RG é comutativo se, e somente se, G é abeliano.

Em particular, temos o grupo $\mathbb{Z}G$ que é um grupo abeliano livre com base G. Sendo $\mathbb{Z}G$ um anel com unidade, temos definidos os $\mathbb{Z}G$-módulos à direita e à esquerda. Em particular, $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo com a ação de G em $\mathbb{Z}$ por $gn = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $g \in G$, assim, para todo $x = \sum m_g g \in \mathbb{Z}G$, temos $xn = \sum m_g n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com isso, dizemos que $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, ou simplesmente um G-módulo trivial.

Definição 1.6.1. *Sejam* G *um grupo e* A *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo à esquerda. Vamos definir o* n*-ésimo grupo de homologia de* G *com coeficientes em* A *como*

$$H_n(G, A) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A),$$

onde $\mathbb{Z}$ *é considerado* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial.*

Definimos o mapa de augumentação $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ dado por $\sum\limits_{g \in G} m_g g \mapsto \sum\limits_{g \in G} m_g$, ou seja $g \mapsto 1$. O mapa ϵ é, na verdade, um homomorfismo de anéis e seu núcleo $\mathfrak{g}$ é chamado de ideal de augumentação. Além disso, o ideal de augumentação $\mathfrak{g}$ é gerado como $\mathbb{Z}$-módulo por $\{g - 1 : g \in G\}$. De fato, $x = \sum m_g g \in \ker \epsilon$ se, e somente se, $\sum m_g = 0$, assim

$$x = x - \left(\sum m_g \right) 1 = \sum m_g g - \sum m_g 1 = \sum m_g (g - 1).$$

Teorema 1.6.2. *$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A/\mathfrak{g}A$, onde $\mathfrak{g}$ é o ideal de augumentação de G.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$0 \to \mathfrak{g} \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

temos a sequência exata

$$A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathfrak{g} \to A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon_*} A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to 0$$

e, como $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A$, e a imagem de $A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}A$,

$$A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \simeq A \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G/\ker \epsilon_* \simeq A/\mathfrak{g}A$$

obtemos o resultado desejado. □

Corolário 1.6.3. *Seja G um grupo e A um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então, $H_0(G, A) \simeq A/\mathfrak{g}A$.*

Demonstração. De fato, sabemos que, por definição, $H_0(G, A) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ e vimos que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$, mas, pelo teorema anterior, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A/\mathfrak{g}A$, logo, concluímos que

$$H_0(G, A) \simeq A/\mathfrak{g}A.$$

□

Provamos que $H_0(G, A) = A/\mathfrak{g}A = \mathbb{Z} \otimes_G A$, onde $\mathfrak{g}$ é o ideal de augumentação de G. Em particular, se A é G-trivial, então $H_0(G, A) = A$.

Teorema 1.6.4 ([21], 10.2)**.** *Para qualquer grupo G, o grupo aditivo $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ é isomorfo ao grupo multiplicativo G/G', onde G' denota o subgrupo comutador de G.*

Teorema 1.6.5. *Sejam G um grupo e A um G-módulo trivial. Então*

$$H_1(G, A) = G/G' \otimes A.$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ o ideal augumentado de G e considere a seguinte sequência exata curta

$$0 \to \mathfrak{g} \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}(-, A)$, obtemos a sequência exata longa

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathfrak{g}, A) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \to 0.$$

Agora, primeiramente, note que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) = 0$, pois $\mathbb{Z}G$ é um módulo livre sobre $\mathbb{Z}G$. Além disso, note também que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A$. Também sabemos que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathfrak{g}, A) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ e, por fim, pelas próprias definições dos grupos de homologia de G, temos $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = H_1(G, A)$ e $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = H_0(G, A)$. O que nos deixa com a sequência exata

$$0 \to H_1(G, A) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A \to H_0(G, A) \to 0.$$

Agora, note que, como a primeira aplicação é nula e a sequência é exata, temos que

$$0 = \mathrm{Im}(0 \to H_1(G, A)) = \ker(\varphi),$$

além disso, sabemos também que $\mathrm{Im}(\varphi) = \ker(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A)$, portanto, obtemos

$$H_1(G, A) \simeq H_1(G, A)/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \simeq \ker(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A).$$

Mas sabemos que, como A é G-trivial, $H_0(G, A) = A$, portanto

$$A = H_0(G, A) = \ker(H_0(G, A) \to 0) = \mathrm{Im}(A \to H_0(G, A)) \simeq A/(\ker(A \to H_0(G, A))),$$

logo, devemos ter $\ker(A \to H_0(G, A)) = 0$. Mas, por outro lado, a exatidão da sequência nos diz que $\ker(A \to H_0(G, A)) = \mathrm{Im}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A)$. Dessa forma, concluímos que $\mathrm{Im}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A) = 0$ e, portanto, $\ker(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$. Assim, temos que $H_1(G, A) \simeq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$, logo, usando também o teorema anterior,

$$H_1(G, A) \simeq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2) \otimes A \simeq (G/G') \otimes A.$$

□

Em particular, como $\mathbb{Z} \otimes G/G' \simeq G/G'$, temos que o primeiro grupo de homologia de G com coeficientes nos inteiros é dado por $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G/G'$.

Teorema 1.6.6. *Sejam G um grupo, R um anel comutativo e RG a álgebra de grupo. Se A é um RG-módulo à esquerda, então, para todo $n \geqslant 0$,*

$$\mathrm{Tor}_n^{RG}(R, A) \simeq \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).$$

Concluímos que os grupos de homologia $H_n(G, A)$ não dependem do anel de coeficientes R.

Demonstração. Considere a seguinte resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo

$$\mathbf{F} = \ldots \to F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0. \tag{1.2}$$

Por um lado, podemos aplicar $- \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ no complexo deletado, e obtemos

$$\mathbf{F}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} A = \ldots \to F_2 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to 0. \tag{1.3}$$

E sabemos que $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ é o n-ésimo grupo de homologia deste complexo.

Por outro lado, aplicando $-\otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ ao complexo $\mathbf{F}$, temos

$$\mathbf{F}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG = \ldots \to F_2\otimes_{\mathbb{Z}G} RG \to F_1\otimes_{\mathbb{Z}G} RG \to F_0\otimes_{\mathbb{Z}G} RG \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG \to 0.$$

Queremos mostrar que $\mathbf{F}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ é uma resolução livre de R como RG-módulo. Agora, sabemos que $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG \simeq R$ e que cada $F_1\otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ é livre como RG-módulo, logo, resta mostrar que $\mathbf{F}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ é um complexo exato.

Denote por K_i o núcleo da aplicação d_i em (1.2) para $i \geqslant 0$. Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos

$$0\to K_0 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Note que, como $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, temos que essa sequência cinde, logo, existe $h_0 : \mathbb{Z} \to F_0$ tal que $d_0\circ h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Além disso, K_0 é um somando direto de F_0, logo K_0 também é projetivo. Assim, podemos considerar a sequência exata curta

$$0\to K_1 \to F_1 \to K_0 \to 0.$$

Novamente, essa sequência cinde, e obtemos $j_1 : K_0 \to F_1$ tal que $d_1\circ j_1 = \mathrm{id}_{K_0}$. Definimos, então $h_1 : F_0 \to F_1$ como a composição das aplicações $F_0 \to K_0$ e j_1. Prosseguindo assim, obtemos funções $h_i : F_{i-1} \to F_i$ para todo $i \geqslant 1$ e $h_0 : \mathbb{Z} \to F_0$ tais que

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_3 \arrow[r, "d_3"] & F_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[dl, "h_3"'] & F_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dl, "h_2"'] & F_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "h_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "h_0"'] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_3 \arrow[r, "d_3"] & F_2 \arrow[r, "d_2"] & F_1 \arrow[r, "d_1"] & F_0 \arrow[r, "d_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e para todo i, $\mathrm{id}_{F_i} = h_i d_i + d_{i+1}h_{i+1}$. Agora, aplicamos $R\otimes_{\mathbb{Z}} -$ no diagrama acima, como $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\simeq R$, obtemos

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_3 \arrow[r, "d_3^*"] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_2 \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[dl, "h_3^*"'] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_1 \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[dl, "h_2^*"'] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_0 \arrow[r, "d_0^*"] \arrow[dl, "h_1^*"'] & R \arrow[r] \arrow[dl, "h_0^*"'] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_3 \arrow[r, "d_3^*"] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_2 \arrow[r, "d_2^*"] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_1 \arrow[r, "d_1^*"] & R\otimes_{\mathbb{Z}} F_0 \arrow[r, "d_0^*"] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e ainda temos que $\mathrm{id}_{R\otimes_{\mathbb{Z}}F_i} = h_i^* d_i^* + d_{i+1}^* h_{i+1}^*$ para cada i. Agora, fixe i e tome $x \in \ker d_i^*$, então

$$x = \mathrm{id}_{R\otimes_{\mathbb{Z}}F_i}(x) = h_i^* d_i^*(x) + d_{i+1}^* h_{i+1}^*(x) = d_{i+1}^*(h_{i+1}^*(x)).$$

Concluimos que

$$\ldots \to R\otimes_{\mathbb{Z}} F_3 \xrightarrow{d_3^*} R\otimes_{\mathbb{Z}} F_2 \xrightarrow{d_2^*} R\otimes_{\mathbb{Z}} F_1 \xrightarrow{d_1^*} R\otimes_{\mathbb{Z}} F_0 \xrightarrow{d_0^*} R \to 0$$

é exato.

Agora note que, para cada i, $R\otimes_{\mathbb{Z}} F_i \simeq RG\otimes_{\mathbb{Z}G} F_i$ e $R \simeq R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \simeq RG\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}$. Assim, concluímos que o complexo $\mathbf{F}\otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ dado anteriormente é uma resolução livre de R como RG-módulo.

Denotando por $\mathbf{S}$ o complexo $\mathbf{S} = \mathbf{F} \otimes_{\mathbb{Z}G} RG$ e por $\mathbf{S}_R$ o complexo deletado, podemos aplicar o funtor $- \otimes_{RG} A$ a $\mathbf{S}_R$ e temos que

$$\mathbf{S}_R \otimes_{RG} A = \ldots \to F_3 \otimes_{\mathbb{Z}G} RG \otimes_{RG} A \to F_2 \otimes_{\mathbb{Z}G} RG \otimes_{RG} A \to$$
$$\to F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} RG \otimes_{RG} A \to F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} RG \otimes_{RG} A \to 0$$

E sabemos que $\mathbf{S} = \mathbf{F} \otimes_{\mathbb{Z}G} RG \otimes_{RG} A \simeq \mathbf{F} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$, logo, calcular a homologia de $\mathbf{S}_R \otimes_{RG} A$ é o mesmo que calcular a homologia de $\mathbf{F}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$. Concluímos assim que

$$\operatorname{Tor}_n^{RG}(R, A) \simeq \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).$$

□

Este resultado será importante para a dissertação, pois no terceiro capítulo, usaremos $\operatorname{Tor}_n^{RG}(R, A)$ para calcular os grupos de homologia de um grupo G com coeficientes em um RG-módulo A.

Lema 1.6.7 (Shapiro)**.** *Se S é um subgrupo de G e A é um RS-módulo, então, para todo $n \geqslant 0$,*

$$H_n(S, A) \simeq H_n(G, RG \otimes_{RS} A).$$

Demonstração. Seja

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

uma resolução livre do RS-módulo à esquerda A e considere o complexo $RG \otimes_{RS} \mathbf{P}$. Sabemos que RG é um RS-módulo livre, logo $RG \otimes_{RS} -$ é um funtor exato e portanto

$$RG \otimes_{RS} \mathbf{P} = \ldots \to RG \otimes_{RS} P_i \to RG \otimes_{RS} P_{i-1} \to \ldots \to RG \otimes_{RS} P_0 \to RG \otimes_{RS} A \to 0$$

é um complexo exato. Além disso, $RG \otimes_{RS} P_i$ é um RG-módulo livre para todo i, pois P_i é uma soma direta de copias de RS e o produto tensorial comuta com soma direta, logo $RG \otimes_{RS} P_i$ é uma soma direta de cópias de $RG \otimes_{RS} RS \simeq RG$. Portanto, $RG \otimes_{RS} \mathbf{P}$ é uma resolução livre do RG-módulo $RG \otimes_{RS} A$. Agora, note que

$$H_n(G, RG \otimes_{RS} A) = \operatorname{Tor}_n^{RG}(R, RG \otimes_{RS} A) \simeq H_n(R \otimes_{RG} (RG \otimes_{RS} \mathbf{P})),$$

para todo $n > 0$. Mas

$$R \otimes_{RG} RG \otimes_{RS} \mathbf{P} \simeq R \otimes_{RS} \mathbf{P},$$

portanto

$$H_n(R \otimes_{RG} (RG \otimes_{RS} \mathbf{P})) \simeq H_n(R \otimes_{RS} \mathbf{P}) \simeq \operatorname{Tor}_n^{RS}(R, A) = H_n(S, A)$$

para todo $n > 0$. □

Podemos desenvolver a teoria de cohomologia de grupos de forma análoga à feita com a homologia.

Definição 1.6.8. *Sejam G um grupo e A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda. Vamos definir o n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A como*

$$H^n(G, A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A),$$

onde $\mathbb{Z}$ é considerado $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.

Teorema 1.6.9 ([21], 5.15)**.** *Sejam G um grupo e A um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então $H^0(G, A) \simeq A^G$, onde A^G denota o submódulo de A dos pontos de A fixados pela ação de G.*

Em particular, se A é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, $H^0(G, A) \simeq A$. Portanto, $H^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Não usaremos propriedades de cohomologia de grupos neste trabalho, por isso, não desenvolveremos a teoria de cohomologia além do que já foi enunciado aqui. Deixamos apenas dois resultados interessantes análogos aos Teoremas 1.6.6 e 1.6.7, porém em versões cohomológicas.

Teorema 1.6.10. *Sejam G um grupo, R um anel comutativo e RG a álgebra de grupo. Se A é um RG-módulo à esquerda, então, para todo $n \geqslant 0$,*

$$\operatorname{Ext}^n_{RG}(R, A) \simeq \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).$$

Concluímos que os grupos de cohomologia $H^n(G, A)$ não dependem do anel de coeficientes R.

A ideia da demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12] nas páginas 2 e 3, e segue de forma análoga à demonstração feita no Teorema 1.6.6.

Lema 1.6.11 (Shapiro, versão cohomológica)**.** *Se S é um subgrupo de G e A é um RS-módulo, então, para todo $n \geqslant 0$,*

$$H^n(S, A) \simeq H^n(G, \operatorname{Hom}_{RS}(RG, A)).$$

A demonstração deste teorema segue de maneira análoga à do Teorema 1.6.7, e sua versão para $R = \mathbb{Z}$ pode ser encontrada em [21], como Teorema 10.32.

1.7 Sequências espectrais

Considere um grupo G e um subgrupo $N \trianglelefteq G$ e considere a ação de G em N por conjugação isto é, ${}^g n = gng^{-1}$.

Uma sequência espectral é uma família de módulos e diferenciais $\{E^s_{p,q}, d^s_{p,q}\}$, onde $s, p, q \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant 2$ e $d^s_{p,q} : E^s_{p,q} \to E^s_{p-s,q+s-1}$. Para cada s, $\{E^s_{p,q}\}$ é dito s-ésima página da sequência espectral.

Para visualizarmos melhor, a segunda página de uma sequência espectral como no diagrama abaixo, onde as aplicações são os respectivos diferenciais.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[ddr] & \cdots \arrow[ddr] & \cdots \arrow[ddr] & \cdots \arrow[ddr] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr] & E^2_{p+1,q-1} \arrow[ddr] & E^2_{p+1,q} \arrow[ddr] & E^2_{p+1,q+1} \arrow[ddr] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr] & E^2_{p,q-1} \arrow[ddr] & E^2_{p,q} \arrow[ddr] & E^2_{p,q+1} \arrow[ddr] & \cdots \\
\cdots & E^2_{p-1,q-1} & E^2_{p-1,q} & E^2_{p-1,q+1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Da mesma maneira, a terceira página da sequência espectral seria como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dddrr] & \cdots \arrow[dddrr] & \cdots \arrow[dddrr] & \cdots \arrow[dddrr] & \cdots & \cdots \\
\cdots \arrow[dddrr] & E^3_{p+1,q-1} \arrow[dddrr] & E^3_{p+1,q} \arrow[dddrr] & E^3_{p+1,q+1} \arrow[dddrr] & E^3_{p+1,q+2} & \cdots \\
\cdots \arrow[dddrr] & E^3_{p,q-1} \arrow[dddrr] & E^3_{p,q} \arrow[dddrr] & E^3_{p,q+1} \arrow[dddrr] & E^3_{p,q+2} & \cdots \\
\cdots & E^3_{p-1,q-1} & E^3_{p-1,q} & E^3_{p-1,q+1} & E^3_{p-1,q+2} & \cdots \\
\cdots & E^3_{p-2,q-1} & E^3_{p-2,q} & E^3_{p-2,q+1} & E^3_{p-2,q+2} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por fim, para relacionarmos as páginas da sequência espectral entre si, temos que, para cada s, $E^{s+1}_{p,q}$ é a homologia com respeito a esses diferenciais no ponto $E^s_{p,q}$, i.e.,

$$E^{s+1}_{p,q} = \ker(d^s_{p,q}) / \operatorname{Im}(d^s_{p+s,q-s+1})$$

Agora, fixe um par (p, q) e denote por $A = E^2_{p,q}$. Sabemos que

$$E^3_{p,q} = \ker(d^2_{p,q}) / \operatorname{Im}(d^2_{p+2,q-1}).$$

Defina $Z_3 = \ker(d^2_{p,q})$ e $B_3 = \mathrm{Im}(d^2_{p+2,q-1})$. Sabemos que Z_3 e B_3 são submódulos de A e $E^3_{p,q} = Z_3/B_3$. Analogamente, definimos $Z_4 = \ker(d^3_{p,q})$ e $B_4 = \mathrm{Im}(d^3_{p+3,q-2})$ submódulos de $E^3_{p,q}$ e, trocando Z_4 e B_4 pelas pré-imagens deles em A, temos $B_3 \subseteq B_4 \subseteq Z_4 \subseteq Z_3$, onde $E^4_{p,q} = Z_4/B_4$. Prosseguindo dessa forma, obtemos duas cadeias de submódulos,

$$B_3 \subseteq B_4 \subseteq B_5 \subseteq \cdots \subseteq B_i \subseteq B_{i+1} \subseteq \ldots$$

e

$$Z_3 \supseteq Z_4 \supseteq Z_5 \supseteq \cdots \supseteq Z_i \supseteq Z_{i+1} \supseteq \ldots$$

e mais ainda, para todo $i \in \{3, 4, 5, \ldots\}$, $B_i \subseteq Z_i$.

Dessa forma, definimos $B_\infty = \bigcup\limits_i B_i$ e $Z_\infty = \bigcap\limits_i Z_i$ e ainda temos que $B_\infty \subseteq Z_\infty$. Por fim, podemos definir

$$E^\infty_{p,q} = Z_\infty/B_\infty.$$

Definição 1.7.1. *Seja H um módulo graduado. Dizemos que uma sequência espectral $\{E^2_{p,q}\}$ converge a H, e denotamos por $\{E^2_{p,q}\} \underset{p}{\Rightarrow} H_n$, se existe uma filtração $\{\Phi^p H\}$ de H*

$$\cdots \subset \Phi^{p-1}H_n \subset \Phi^p H_n \subset \Phi^{p-1}H_n \subset \ldots$$

e existem $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que $\Phi^{s(n)}H_n = 0$, $\Phi^{t(n)}H_n = H_n$ e

$$E^\infty_{p,q} \simeq \Phi^p H_n/\Phi^{p-1}H_n$$

para todos p, q, onde $n = p + q$.

Com isso, chegamos no seguinte resultado para sequências espectrais.

Teorema 1.7.2 (Lyndon-Hochschild-Serre, [21], 11.46)**.** *Sejam G um grupo, $N \trianglelefteq G$ e V um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então existe uma sequência espectral $E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, V))$ no primeiro quadrante, i.e., com $E^2_{p,q} = 0$ quando $p < 0$ ou $q < 0$, que converge para $H_n(G, V)$, onde $n = p + q$, isto é,*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, V)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(G, V).$$

Vamos ver alguns exemplos de sequências espectrais convergentes.

Exemplo 1.7.3. *Sejam G um grupo, V um $\mathbb{Z}G$-módulo e N um subgrupo normal de G tais que G/N é um grupo finito e*

$$H_q(N, V) = \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}N}_q(\mathbb{Z}, V) \simeq H_q(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} \mathbf{P}_V)$$

é também finito para todo q. Então, o teorema anterior nos diz que existe uma sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, V)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(G, V),$$

ou seja, existe uma filtração limitada

$$0 = \Phi^{s(n)}H \subset \cdots \subset \Phi^{p-1}H \subset \Phi^{p}H \subset \Phi^{p-1}H \subset \cdots \subset \Phi^{t(n)}H = H_n(G,V),$$

tal que

$$E^{\infty}_{p,q} \simeq \Phi^p H_n / \Phi^{p-1} H_n$$

para todo p, q, onde $n = p + q$. Agora, note que, $H_q(N,V) \simeq H_q(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} \mathbf{P}_V)$ é finito para todo q, então $E^2_{p,q}$ é finito e portanto $E^{\infty}_{p,q}$ também é finito. Logo, cada $\Phi^p H_n/\Phi^{p-1}H_n$ é finito. Assim, $H_n(G,V)$ tem filtração onde todos os quocientes são finitos, logo $H_n(G,V)$ deve ser finito.

Exemplo 1.7.4. *Pensamos em $E^2_{i,j}$ como o ponto (i,j) do plano. Suponha que todos os módulos não-zero pertencem a uma reta fixa $j = j_0$, isto é, $E^2_{i,j} = 0$ se $j \neq j_0$. Note que os diferenciais não são paralelos à reta, assim, para todo ponto (i,j), considerando o diferencial $d^2_{i,j} : E^2_{i,j} \to E^2_{i-2,j+1}$, sabemos que ou $E^2_{i,j} = 0$ ou $E^2_{i-2,j+1} = 0$, logo $d^2_{i,j} = 0$. Portanto,*

$$E^3_{i,j} = \ker(d^2_{i,j})/\operatorname{Im}(d^2_{i+2,j-1}) = E^2_{i,j}/0 \simeq E^2_{i,j}.$$

Analogamente, $d^3_{i,j} : E^3_{i,j} \to E^3_{i-3,j+2}$ e, como ou $E^3_{i,j} = 0$ ou $E^3_{i-3,j+2} = 0$, temos que $d^3_{i,j} = 0$ e $E^4_{i,j} = E^3_{i,j}$. De modo geral, $d^p_{i,j} = 0$ e $E^p_{i,j} = E^{p-1}_{i,j}$. Assim, concluímos que $E^{\infty}_{i,j} = E^2_{i,j}$.

O exemplo anterior funcionaria da mesma forma se fixássemos uma reta $i = i_0$.

Quando temos uma sequência espectral em que os diferenciais são todos nulos como no Exemplo 1.7.4, dizemos que a sequência espectral colapsa.

2 Álgebra Comutativa

2.1 Localização

Seja R um anel comutativo com unidade. Um subconjunto multiplicativamente fechado de R é um subconjunto S de R tal que $1 \in S$ e S é fechado por multiplicação. Defina uma relação $\sim$ em $R \times S$ dada por

$$(a,s) \sim (b,t) \iff (at - bs)u = 0, \tag{2.1}$$

para algum $u \in S$. Vemos que essa é uma relação de equivalência. De fato, $\sim$ é claramente reflexiva, além disso, $\sim$ é simétrica, pois se $(a,s) \sim (b,t)$, então existe $u \in S$ tal que $(at - bs)u = 0$, logo

$$(bs - at)u = -(at - bs)u = 0,$$

logo, $(b,t) \sim (a,s)$. Por fim, resta mostrar que é transitiva. Assim, seja $(a,s) \sim (b,t)$ e $(b,t) \sim (c,r)$. Então existem $u, v \in S$ tais que $(at - bs)u = 0$ e $(br - ct)v = 0$, de onde temos que

$$(at - bs)urv = 0$$
$$(br - ct)vsu = 0$$

e somando essas equações obtemos

$$aturv - ctvsu = 0$$
$$(ar - cs)tuv = 0,$$

e, como S é fechado por multiplicação, temos que $tuv \in S$ e portanto, $(a,s) \sim (c,r)$. Portanto, concluímos que a relação $\sim$ definida em (2.1) é uma relação de equivalência.

Assim, a partir de agora, denotamos por $S^{-1}R$ o conjunto dessas classes de equivalência e por a/s a classe de equivalência de (a,s). Queremos que $S^{-1}R$ esteja munido com uma estrutura de anel, portanto definimos a soma em $S^{-1}R$ por

$$a/s + b/t = (at + bs)/st$$

e definimos a multiplicação em $S^{-1}R$ por

$$(a/s)(b/t) = (ab/st).$$

Podemos ver que essas operações estão bem definidas.

O anel $S^{-1}R$ definido acima é chamado de anel de frações de R com relação a S. Mais ainda, se R é um domínio de integridade e $S = R\backslash\{0\}$, então $S^{-1}R$ é o de corpo de frações de R.

Podemos definir também o homomorfismo $f : R \to S^{-1}R$ por $f(x) = x/1$.

Proposição 2.1.1 ([2], 3.1)**.** *Seja $g : R \to B$ um homomorfismo de anéis comutativos com unidade tal que $g(s)$ é uma unidade em B para todo $s \in S$. Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \to B$ tal que $g = h \circ f$, i.e., o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} S^{-1}R \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ R \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Além disso, o anel $S^{-1}R$ e o homomorfismo $f : R \to S^{-1}R$ têm as seguintes propriedades:

1. Se $s \in S$, então $f(s)$ é uma unidade em $S^{-1}R$.
2. Se $f(a) = 0$, então $as = 0$ para algum $s \in S$.
3. Todo elemento de $S^{-1}R$ é da forma $f(a)f(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.

Mais ainda, essas três condições determinam o anel $S^{-1}R$ a menos de isomorfismo.

Exemplo 2.1.2. *Considere o anel $\mathbb{Z}[x]$. Sabemos que $\mathbb{Z}[x]$ é um domínio de integridade. Seja $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\}$. Então, $S^{-1}\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ é a álgebra do grupo $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

O exemplo a seguir nos levará a duas definições importantes.

Exemplo 2.1.3. *Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R. Então, o conjunto $S = R \backslash \mathfrak{p}$ é multiplicativamente fechado. De fato, se $m, n \notin \mathfrak{p}$, então $mn \notin \mathfrak{p}$, logo $mn \in S$. Neste caso, denotamos $S^{-1}R$ por $R_{\mathfrak{p}}$. Além disso, os elementos $p/s \in R_{\mathfrak{p}}$ com $p \in \mathfrak{p}$ formam um ideal $\mathfrak{m}$ em $R_{\mathfrak{p}}$. Se $b/t \notin \mathfrak{m}$, então $b \notin \mathfrak{p}$, portanto, $b \in S$ e então, b/t é uma unidade em $S^{-1}R$. Segue que se $\mathfrak{a}$ é um ideal em $R_{\mathfrak{p}}$ e $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{a}$ contém uma unidade e, portanto, $\mathfrak{a}$ é o anel inteiro. Assim, $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal de $R_{\mathfrak{p}}$.*

Definição 2.1.4. *Seja R um anel que contém um único ideal maximal $\mathfrak{m}$. Dizemos, então que R é um anel local.*

Assim, o anel $R_{\mathfrak{p}}$ do exemplo 2.1.3, é um anel local.

Definição 2.1.5. *O processo de passar de R para $R_{\mathfrak{p}}$ como feito no Exemplo 2.1.3 é chamado localização em $\mathfrak{p}$.*

Exemplo 2.1.6. *Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, onde k é um corpo e os x_i's são variáveis independentes e seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de A. Então $R_{\mathfrak{p}}$ é o anel de todas as funções racionais f/g, onde $g \notin \mathfrak{p}$.*

Agora, considere um R-módulo M. Como S é um subconjunto de R, podemos considerar a ação de S sobre M, e definir uma relação de equivalência similar em $M \times S$, por

$$(m, s) \sim (n, t) \iff u(mt - ns) = 0, \tag{2.2}$$

para algum $u \in S$ e a classe de equivalência de (m, s) é denotada por m/s. Note que podemos definir uma soma em $S^{-1}M$ da mesma forma que definimos em $S^{-1}R$, além disso, podemos definir em $S^{-1}M$, uma multiplicação por um elemento de $S^{-1}R$ por

$$(a/s)(m/t) = (am/st),$$

dessa forma, vemos $S^{-1}M$ como um $S^{-1}R$-módulo.

Agora, seja $u : M \to M'$ um homomorfismo de R-módulos. Então temos um homomorfismo de $S^{-1}R$-módulos $S^{-1}u : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ dado por

$$m/s \mapsto u(m)/s.$$

Além disso, se $v : M' \to M''$ é outro homomorfismo de R-módulos, temos que

$$S^{-1}(v \circ u) = (S^{-1}v) \circ (S^{-1}u).$$

Temos ainda que se M' é um submódulo de M, a aplicação $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ é injetiva, logo, $S^{-1}M'$ pode ser visto como um submódulo de $S^{-1}M$.

Proposição 2.1.7 ([2], 3.5)**.** *Seja M um R-módulo. Então existe um isomorfismo de $S^{-1}R$-módulos $f : S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M$ dado por*

$$f((a/s) \otimes m) = am/s$$

para todos $a \in R$, $m \in M$ e $s \in S$.

Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R. Lembramos a notação do Exemplo 2.1.3, onde $R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R$ para $S = R \backslash \mathfrak{p}$. Note também que podemos usar a mesma notação para ideais maximais, pois estes são também primos.

Proposição 2.1.8 ([2], 3.8)**.** *Seja M um R-módulo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) $M = 0$;

ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$ *de* R;

iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* R.

Vamos obter ainda uma relação entre os ideais primos do anel inicial R com os ideais primos da localização de R. Para isso, considere a seguinte definição.

Definição 2.1.9. *Seja R um anel. O conjunto dos ideais primos de R é denotado por* $\operatorname{Spec}(R)$ *e é chamado espectro de R.*

Assim, temos o importante teorema.

Teorema 2.1.10 ([7], 4.3.1)**.** *Sejam R um anel e $S \subset R$ um subconjunto fechado por multiplicação. Denote por $\rho : R \to S^{-1}R$ o mapa de localização.*

1. *Se $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal de R, então $S^{-1}\mathfrak{a} \subset S^{-1}R$ é um ideal de $S^{-1}R$. Reciprocamente, todo ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ é da forma $S^{-1}\mathfrak{a}$ para algum ideal $\mathfrak{a} \subset R$; podemos tomar $\mathfrak{a} = \rho^{-1}\mathfrak{b}$.*

2. *O mapa de espectros*
$$\operatorname{Spec}(\rho) : \operatorname{Spec} S^{-1}R \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$$
é injetor e tem como imagem o conjunto
$$D_S = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$$
dos primos $\mathfrak{p}$ que não interceptam S. A pré-imagem de $\mathfrak{p} \in D_S$ é dada por $S^{-1}\mathfrak{p}$.

Isso mostra que temos uma correspondência entre ideais de R que não interceptam S e ideais de $S^{-1}R$. Essa correspondência leva ideais primos em ideais primos que não interceptam S.

2.2 Anéis Noetherianos

Vamos começar com uma definição.

Definição 2.2.1. *Seja R um anel. Um R-módulo M é dito Noetheriano se satisfaz as seguintes condições equivalentes:*

(i) *todo submódulo N de M é finitamente gerado.*

(ii) *toda cadeia ascendente de submódulos de M estabiliza, isto é, se*
$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$
é uma cadeia de submódulos de M, então existe n_0 tal que $N_n = N_{n_0}$ para todo $n \geqslant n_0$.

(iii) *todo conjunto $\mathcal{S}$ de submódulos de M tem um elemento maximal em $\mathcal{S}$ com relação à inclusão.*

A demonstração de que as condições acima são equivalentes pode ser encontrada em [7], na Definição 6.1.1. Aqui, focaremos em anéis Noetherianos, que terão uma definição similar à de módulos Noetherianos.

Definição 2.2.2. *Seja R um anel associativo. Dizemos que R é um anel Noetheriano à esquerda se cada ideal à esquerda $\mathfrak{a}$ de R é finitamente gerado como R módulo à esquerda, isto é, existem $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\mathfrak{a} = Ra_1 + \cdots + Ra_n$.*

Exemplo 2.2.3. *Corpos e domínios de ideais principais são Noetherianos pois todos os seus ideais são finitamente gerados por um único elemento.*

Teorema 2.2.4. *Seja R um anel associativo. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

i) R é um anel Noetheriano à esquerda.

ii) Dada uma cadeia ascendente de ideais à esquerda de R

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

existe um n_0 tal que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1}$ para todo $n \geqslant n_0$.

iii) Todo conjunto $\mathcal{I} \neq \emptyset$ de ideais à esquerda de R possui um elemento que é maximal em $\mathcal{I}$ com relação à inclusão.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que R é Noetheriano à esquerda. Dada uma cadeia

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

de ideais de R, defina $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_i$. Como os ideais à esquerda $\mathfrak{a}_i$'s estão em uma cadeia crescente de ideais, temos que $\mathfrak{a}$ é também um ideal à esquerda. Agora, pela hipótese, podemos escrever

$$\mathfrak{a} = Ra_1 + \cdots + Ra_n.$$

Tome, então n_0 tal que $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}_{n_0}$. Temos então que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{n_0}$ e, portanto, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{n_0}$ para todo $i \geqslant n_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Agora suponha que a segunda condição vale e seja $\mathcal{I} \neq \emptyset$ um conjunto de ideais à esquerda de R. Tome $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{I}$. Se $\mathfrak{a}$ é maximal em $\mathcal{I}$, acabou. Caso contrário, existe $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{I}$ tal que $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2$. Novamente, se $\mathfrak{a}_2$ é maximal em $\mathcal{I}$, acabou. Caso contrário, podemos continuar o processo. Note que esse processo termina em algum momento, pois, caso contrário, obteríamos uma cadeia de ideais à esquerda

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

que não estabiliza, contrariando a hipótese. Assim, concluímos que $\mathcal{I}$ tem um elemento maximal.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Por fim, suponha que a terceira condição vale. Seja $\mathfrak{a}$ um ideal à esquerda de R e $\mathcal{I}$ o conjunto dos ideais à esquerda de R contidos em $\mathfrak{a}$ que são finitamente gerados como R-módulos. Como $0 \in \mathcal{I}$, sabemos que $\mathcal{I} \neq \varnothing$, logo, por hipótese, $\mathcal{I}$ possui um elemento maximal $\mathfrak{a}_0$. Sabemos que $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}$, agora, suponha que exista $x \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{a}_0$. Assim, teríamos que $\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_0 + Rx \subseteq \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}_0 + Rx \in \mathcal{I}$, uma contradição, pois $\mathfrak{a}_0$ é maximal. Portanto, não existe $x \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{a}_0$, i.e., $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$. $\square$

Podemos pensar também que R é um anel Noetheriano à esquerda se R é Noetheriano visto como R-módulo à esquerda.

Exemplo 2.2.5. *Seja k um corpo. O anel $k[x_1, x_2, \ldots]$ de polinômios nas variáveis comutativas $x_1, x_2, \ldots$ e coeficientes em k não é Noetheriano. De fato, podemos considerar a cadeia estritamente ascendente de ideais de $k[x_1, x_2, \ldots]$*

$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \ldots$$

Teorema 2.2.6 ([2], 6.5)**.** *Seja R um anel Noetheriano à esquerda e V um R-módulo finitamente gerado. Então V é um módulo Noetheriano.*

Teorema 2.2.7 ([2], 6.6)**.** *Seja R um anel Noetheriano à esquerda e $\mathfrak{a}$ um ideal de R. Então $R/\mathfrak{a}$ é um anel Noetheriano à esquerda.*

Temos ainda um resultado relacionando a localização de um anel Noetheriano.

Teorema 2.2.8 ([2], 7.3)**.** *Seja R um anel Noetheriano e comutativo e S um subconjunto multiplicativamente fechado de R, então $S^{-1}R$ é Noetheriano.*

Em particular, se R é um anel Noetheriano e comutativo e $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R, então $R_{\mathfrak{p}}$ é também Noetheriano e comutativo.

Teorema 2.2.9 (Hilbert)**.** *Seja R um anel comutativo com unidade e Noetheriano. Então $R[x_1, \ldots, x_n]$ é também Noetheriano.*

Demonstração. Note que, como $R[x_1, \ldots, x_n]$ é isomorfo a $R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$, basta provarmos que $R[x]$ é Noetheriano sempre que R for Noetheriano e o teorema segue por indução.

Assim, seja I um ideal em $R[x]$ e seja J o conjunto dos coeficientes líderes de todos os polinômios de I. Note que, se $a \in J$, então existe polinômio $p(x) \in I$ tal que

$$p = ax^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

logo, como I é ideal, dado $r \in R$, temos que

$$rp = rax^d + ra_{d-1}x^{d-1} + \ldots + ra_1 x + ra_0 \in I,$$

logo ra é um coeficiente líder, i. e., $ra \in J$. Além disso, de $a, b \in J$, então existem $p, q \in I$, tais que $p = ax^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e $q = bx^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ldots + b_1x + b_0$. Sem perda de generalidade, assuma $d \geqslant r$ e denote por $s = d - r$. Assim, como I é ideal note que

$$\begin{aligned} p + x^s q &= ax^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1x + a_0 + bx^d + b_{r-1}x^{d-1} + \ldots + b_1x^{s-1} + b_0x^s \\ &= (a+b)x^d + (a_{d-1} + b_{r-1})x^{d-1} + \ldots + (a_{d-r} + b_0)x^s + \ldots + a_1x + a_0. \end{aligned}$$

Portanto, $a + b$ é um coeficiente líder de um polinômio em I. Assim, provamos que J é um ideal de R.

Agora, como R é Noetheriano, existem $c_1, \ldots, c_t \in J$ que geram J. Para cada $1 \leqslant i \leqslant t$, seja f_i o polinômio em I tal que c_i é coeficiente de f_i. Tome um inteiro N maior do que o grau de cada f_i e para cada $m \leqslant N$, seja J_m o ideal de R que consiste de todos os coeficientes líderes de todos os polinômios $f \in I$ tais que $\deg(f) \leqslant m$. Seja agora $\{f_{mj}\}$ um conjunto finito de polinômios em I de grau $\leqslant m$ cujos coeficientes líderes geram J_m e seja I' o ideal gerado pelos f_i's e por todos os f_{mj}'s. Como existem finitos f_i's e finitos f_{mj}'s, vamos provar que $I' = I$ e conseguimos o resultado desejado.

Suponha que I' seja menor do que I e seja g um elemento de I de menor grau tal que $g \notin I'$. Se $\deg(g) > N$, podemos achar polinômios q_i tais que $\sum q_i f_i$ e g têm o mesmo coeficiente líder. Mas então

$$\deg\left(g - \sum q_i f_i\right) < \deg(g),$$

portanto,

$$g - \sum q_i f_i \in I',$$

logo, $g \in I'$. Analogamente, se $\deg(g) = m \leqslant N$, podemos diminuir o grau subtraindo $\sum q_i f_i$ para alguns q_i's. Isso prova o teorema. □

Deste resultado, podemos obter um corolário importante.

Corolário 2.2.10. *Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Então $\mathbb{Z}G$ é um anel Noetheriano.*

Demonstração. Como G é um grupo abeliano finitamente gerado, temos que G é um quociente de $\mathbb{Z}^n$ para algum n. Logo, existe um epimorfismo anéis

$$\varphi : \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] \to \mathbb{Z}G.$$

Sabemos também que $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ é Noetheriano pelo Teorema de Hilbert (2.2.9). Agora, $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$ é obtido do anel de polinômios $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ invertendo $x_1, \ldots, x_n$, logo, pelo teorema 2.2.8, temos que $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$ é Noetheriano. Por fim, como $\mathbb{Z}G$ é quociente de $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$, pelo teorema 2.2.7 concluímos que $\mathbb{Z}G$ é um anel Noetheriano. □

2.3 Ideais primos associados

Nesta seção, R denotará sempre um anel comutativo, associativo com unidade.

Definição 2.3.1. *Seja R um anel comutativo. O nilradical de R é o ideal dado por*

$$\mathfrak{N} = \sqrt{0} = \{r \in R : r^n = 0 \text{ para algum } n \geqslant 1\}.$$

Teorema 2.3.2 ([2], 1.8)**.** *O nilradical $\mathfrak{N}$ de um anel R é a interseção de todos os ideais primos de R.*

Equivalentemente, temos que o nilradical de R é a interseção de todos os ideais primos minimais de R.

Dizemos que um ideal $\mathfrak{q}$ de R é um ideal primário se $\mathfrak{q} \neq R$ e, se $xy \in \mathfrak{q}$, então $x \in \mathfrak{q}$ ou $y^n \in \mathfrak{q}$ para algum $n > 0$. Nitidamente, cada ideal primo é primário. Se $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, então $\mathfrak{q}$ é dito $\mathfrak{p}$-primário.

Uma decomposição primária de um ideal $\mathfrak{a}$ de R é uma expressão de $\mathfrak{a}$ como a interseção finita de ideais primários, i.e., uma expressão do tipo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_j,$$

onde cada $\mathfrak{q}_i$ é primário, com $1 \leqslant i \leqslant j$.

Teorema 2.3.3 ([2], 7.13)**.** *Seja R um anel Noetheriano, então todo ideal de R tem uma decomposição primária.*

Assim, consideramos o seguinte teorema.

Teorema 2.3.4. *Seja R um anel Noetheriano, então R possui apenas um número finito de ideais primos minimais.*

Demonstração. Sabemos que cada ideal $\mathfrak{a}$ de R é uma interseção finita de ideais primários. Em particular, seja $\mathfrak{a} = 0$ e escreva

$$0 = \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_j.$$

Assim, se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo contendo $\mathfrak{a}$, então existe $1 \leqslant i \leqslant j$ tal que $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Portanto, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Mas sabemos que $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ é um ideal primo. Portanto, todos os elementos minimais do conjunto de ideais primos contendo $\mathfrak{a} = 0$ são também elementos do conjunto $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_j\}$. E concluímos a demonstração. $\square$

Assim, se R é Noetheriano, seu radical nilpotente $\mathfrak{N}$ é a interseção finita de seus ideais primos minimais. Portanto, para todo ideal $\mathfrak{a}$ de R, temos que

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{r \in R : r^n \in \mathfrak{a} \text{ para algum } n \geqslant 1\} = \widetilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{\mathfrak{p}}_j,$$

onde $\widetilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{p}}_j$ são os ideais primos minimais de R que contêm $\mathfrak{a}$.

De forma análoga, temos o conceito de radical de Jacobson.

Definição 2.3.5. *O radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ de R é definido como a interseção de todos os ideais maximais de R.*

Como visto em 2.1.4, um anel local é um anel R que contém um único ideal maximal $\mathfrak{m}$, logo, seu ideal de Jacobson é $\mathfrak{R} = \mathfrak{m}$.

Lema 2.3.6 (Nakayama, [2], 2.6)**.** *Sejam M um R-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{a}$ um ideal contido no ideal de Jacobson $\mathfrak{R}$ de R. Se $\mathfrak{a}M = M$, então $M = 0$.*

Definição 2.3.7. *Seja M um R-módulo finitamente gerado. Um primo associado de M é um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R tal que $\mathfrak{p} = ann_R(m) = \{r \in R : mr = 0\}$, para algum $m \in M$.*

O conjunto de todos primos associados de M é sempre finito e é denotado por $\mathrm{Ass}(M)$.

Lema 2.3.8 ([11], 3.6)**.** *Sejam M, M' e M'' R-módulos tais que existe uma sequência exata curta*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Então $\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

Teorema 2.3.9 ([11], 3.7)**.** *Se R é um anel Noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, então M tem uma filtração*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

onde cada $M_{i+1}/M_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ para algum ideal primo $\mathfrak{p}_i$.

Assim, seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado com filtração

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

como no teorema anterior. Para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, considere a sequência exata curta

$$0 \to M_i \to M_{i+1} \to M_{i+1}/M_i \to 0.$$

Pelo lema 2.3.8, temos que $\mathrm{Ass}(M_{i+1}) \subset \mathrm{Ass}(M_i) \cup \mathrm{Ass}(M_{i+1}/M_i)$. Indutivamente,

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M_n) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ass}(M_{i+1}/M_i) \subseteq \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}.$$

Definição 2.3.10. *Seja M um R-módulo. O suporte de M é definido como o conjunto de primos*

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Teorema 2.3.11. *Seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Supp}(M)$ e esses dois conjuntos possuem os mesmos ideais primos minimais.*

O teorema acima está enunciado e demonstrado de forma mais completa em [7], como Teorema 12.2.6. Aqui deixamos o enunciado mais simples, para não precisarmos nos aprofundar nesta teoria.

Mais ainda, temos que

$$Ass(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\} \subseteq \operatorname{Supp}(M)$$

e os três conjuntos possuem os mesmos ideais primos minimais.

2.4 Dimensão de Krull

Definição 2.4.1. *Seja R um anel comutativo Noetheriano com 1. A dimensão de Krull de R, denotada por $\dim R$, é definida como o maior n tal que existe uma cadeia de ideais primos em R*

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n$$

tal que $\mathfrak{p}_i$ é diferente de $\mathfrak{p}_{i+1}$ para cada i.

Exemplo 2.4.2. *Sejam k um corpo e $k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel dos polinômios comutativos com n variáveis e coeficientes em k. A dimensão de Krull de $k[x_1, \ldots, x_n]$ é n. Aqui uma cadeia maximal de primos é*

$$0 \subseteq (x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq \ldots \subseteq (x_1, \ldots, x_n)$$

Exemplo 2.4.3. *A dimensão de Krull de $\mathbb{Z}$ é 1. De fato, os ideais primos de $\mathbb{Z}$ são $p\mathbb{Z}$ ou 0. Assim, como os ideias $p\mathbb{Z}$ são maximais, uma cadeia maximal é*

$$0 \subseteq p\mathbb{Z}.$$

Exemplo 2.4.4. *$\mathbb{Z}[x]$ tem dimensão de Krull 2, com uma cadeia maximal*

$$0 \subseteq p\mathbb{Z} \subseteq (p, x).$$

Exemplo 2.4.5. *Seja R um anel comutativo Noetheriano com unidade. Como $S^{-1}R$ também é um anel comutativo Noetheriano e com unidade, a dimensão de Krull de $S^{-1}R$ também está definida. Além disso, como temos uma correspondência entre os ideais de R e os ideais de $S^{-1}R$, obtemos que*

$$\dim S^{-1}R \leqslant \dim R.$$

Podemos ainda definir a dimensão de Krull de um módulo finitamente gerado.

Definição 2.4.6. *Seja R um anel comutativo e M um R-módulo finitamente gerado. Definimos o ideal*

$$\mathfrak{a} = \mathrm{ann}_R(M) = \{r \in R : rM = 0\}.$$

Definição 2.4.7. *Sejam R um anel comutativo, M um R-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{a} = \mathrm{ann}_R(M)$. Definimos a dimensão de Krull de M por*

$$\dim(M) = \dim(R/\mathfrak{a}).$$

Note que, se M é um módulo cíclico, então M é isomorfo a $R/\mathfrak{a}$, logo, como $R/\mathfrak{a}$ é um anel, M tem estrutura de anel.

Exemplo 2.4.8. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado, então, pelo Teorema 2.3.9, existe uma cadeia de R-submódulos de M,*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

onde cada $M_{i+1}/M_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ para algum ideal primo $\mathfrak{p}_i$. Se a dimensão de Krull de M é 1, então todas as dimensões de Krull de $R/\mathfrak{p}_i$ são no máximo 1 e existe no mínimo um j tal que $R/\mathfrak{p}_j$ tem dimensão de Krull exatamente 1.

3 Módulos e grupos do tipo FP_n

3.1 Módulos do tipo FP_n

Nesta seção, estamos interessados em definir módulos finitamente apresentáveis e, mais geralmente, módulos do tipo FP_n.

Seja M um R-módulo, onde R é um anel associativo com unidade. Sabemos que M é finitamente gerado como R-módulo se, e somente se, existe um epimorfismo de R-módulos $f : R^n \to M$.

Para prosseguir, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.1.1 (Schanuel, [8], 4.2)**.** *Sejam* $0 \to K \to P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ *e* $0 \to K' \to P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$ *duas sequências exatas curtas com* P *e* P' *projetivos. Então* $P \oplus K' \simeq P' \oplus K$*.*

Demonstração. Defina Q como o pullback das aplicações π e π', ou seja, Q é o submódulo de $P \oplus P'$ consistindo dos pares (x, x') tais que $\pi(x) = \pi'(x')$. Considere, então o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

As aplicações $K' \to Q$ e $K \to Q$ são dadas pelas inclusões naturais logo, são injetivas. Além disso, como a aplicação $P' \to M$ é sobrejetiva pelo próprio enunciado, então, para todo $p \in P$, denotando $m = \pi(p)$, sabemos que existe $p' \in P'$ tal que $\pi'(p') = m$, logo $(p, p') \in Q$, e portanto $Q \to P$ é sobrejetiva. Analogamente, verificamos que $Q \to P'$ é sobrejetiva. Assim, temos que as sequências $0 \to K' \to Q \to P \to 0$ e $0 \to K \to Q \to P' \to 0$ são exatas. Mas, como os módulos P e P' são projetivos, pelo Teorema 1.2.12, isso implica que essas sequências cindem, isto é, $K' \oplus P \simeq Q \simeq K \oplus P'$. $\square$

Com isso, podemos provar o próximo lema, que nos dará a definição de módulo finitamente apresentável.

Lema 3.1.2 ([8], 4.1)**.** *As seguintes condições sobre um* R*-módulo* M *são equivalentes:*

(i) Existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$, para algum par de inteiros m e n.

(ii) Existe uma sequência exata $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, com P_1 e P_0 módulos projetivos finitamente gerados.

(iii) M é finitamente gerado e para cada sobrejeção $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$, com P projetivo e finitamente gerado, $\ker \epsilon$ é finitamente gerado.

Demonstração. Suponha que (iii) vale, então, como M é finitamente gerado como R-módulo, existe n tal que $f : R^n \to M$ é sobrejeção. Além disso, note que R^n é projetivo, pois é livre, logo, por hipótese, $\ker f$ é finitamente gerado como R-módulo, isto é, existe m inteiro tal que existe um epimorfismo de R-módulos $R^m \to \ker(f)$. Unindo essas duas projeções, obtemos uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$. Assim $(iii) \Rightarrow (i)$.

Agora, note que, como todo módulo livre é projetivo, já temos a implicação $(i) \Rightarrow (ii)$.

Por fim, suponha (ii). Note que, como $P_0 \xrightarrow{\varphi} M$ é sobrejeção e P_0 é finitamente gerado, então M também o é. Agora aplicamos o Lema de Schanuel (3.1.1) para as sequências exatas $0 \to \ker \epsilon \to P \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ e $0 \to \ker \varphi \to P_0 \to M \to 0$ e obtemos que $P \oplus \ker(P_0 \to M) \simeq P_0 \oplus \ker \epsilon$. Sabemos que P é finitamente gerado por hipótese e

$$\ker \varphi = \operatorname{Im}(P_1 \to P_0) \simeq P_1 / \ker(P_1 \to P_0)$$

é finitamente gerado, pois P_1 é finitamente gerado. Portanto $P \oplus \ker(P_0 \to M)$ é finitamente gerado, o que implica que $P_0 \oplus \ker \epsilon$ também o é e concluímos que $\ker \epsilon$ é finitamente gerado. Logo $(ii) \Rightarrow (iii)$. □

Assim, um módulo M é dito finitamente apresentável se satisfaz as condições do Lema acima e a sequência exata dada na condição (i) é dita uma apresentação finita de M com n geradores e m relações. Podemos ainda generalizar essa definição para a ideia de módulo do tipo FP_n. Para fazer isso, vamos primeiro precisar da generalização do Lema 3.1.1.

Lema 3.1.3 ([8], 4.4)**.** *Sejam*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

e

$$0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_1 \to P'_0 \to M \to 0$$

duas sequências exatas com P_i e P'_i projetivos para todo $i \leqslant n-1$. Então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \simeq P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \dots \ .$$

Consequentemente, se P_i e P'_i são finitamente gerados para todo $i \leqslant n-1$, então P_n é finitamente gerado se, e somente se P'_n é finitamente gerado.

Com isso, podemos seguir para o lema que nos ajudará a definir módulos do tipo FP_n.

Lema 3.1.4 ([8], 4.3)**.** *Para um módulo M e um inteiro $n \geqslant 0$, as seguintes proposições são equivalentes.*

(i) Existe uma resolução livre parcial $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ com cada F_i de posto finito.

(ii) Existe uma resolução projetiva parcial $P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ com cada P_i finitamente gerado.

(iii) M é finitamente gerado e para cada resolução parcial $P'_k \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$ com cada P'_i projetivo e finitamente gerado e $k \leqslant n-1$, $\ker(P'_k \to P'_{k-1})$ é finitamente gerado.

Demonstração. Novamente, como cada módulo livre é projetivo, segue que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Agora, suponha que (ii) vale. Note que, como a sequência dada em (ii) é exata em M e P_0 é finitamente gerado, então M também o é. Além disso, para cada sequência exata $P'_k \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$ como em (iii), podemos aplicar o lema anterior (3.1.3) para as sequências

$$0 \to \ker(P_k \to P_{k-1}) \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

e

$$0 \to \ker(P'_k \to P'_{k-1}) \to P'_k \to P'_{k-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

e, como

$$\ker(P_k \to P_{k-1}) = \mathrm{Im}(P_{k+1} \to P_k) \simeq P_{k+1}/\ker(P_{k+1} \to P_k)$$

é finitamente gerado, obtemos que $\ker(P'_k \to P'_{k-1})$ também é finitamente gerado. Assim, $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Por fim, suponha que (iii) vale. Como M é finitamente gerado, então existe epimorfismo $f : R^{m_0} \to M$ para algum m_0. Denote por $F_0 = R^{m_0}$. Além disso, note que R^{m_0} é projetivo, pois é livre, logo, por hipótese, $\ker f$ é finitamente, ou seja, existe um epimorfismo $R^{m_1} \to \ker(f)$ para algum inteiro m_1. Denote por $F_1 = R^{m_1}$. Podemos continuar essa construção para todo $k \leqslant n-1$ até obtermos que $\ker(F_{n-1} \to F_{n-2})$ é finitamente gerado e existe epimorfismo $F_n = R^{m_n} \to \ker(F_{n-1} \to F_{n-2})$, donde podemos construir a sequência exata $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ como no item (i). Portanto, $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Assim, se um módulo M satisfaz as condições acima para um inteiro $n \geqslant 0$, dizemos que M é de tipo FP_n. Mais ainda, se M satisfaz as proposições acima para todo $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que M é de tipo FP_∞.

Teorema 3.1.5 ([5], 3.1)**.** *Seja M um R-módulo à esquerda. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(i) M é de tipo FP_n como R-módulo.

(ii) M é de tipo FP_1 e $\operatorname{Tor}_k^R(\Pi R, M) = 0$ para cada $1 \leqslant k \leqslant n-1$ e o número de cópias de R no produto direto ΠR é arbitrário.

É interessante fazer uma pequena observação sobre esse teorema. Suponha que no produto ΠR o número de cópias de R é finito, isto é, $\Pi R = R^n = \bigoplus_n R$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Então, pelo Teorema 1.4.5, temos que $\operatorname{Tor}_k^R(\bigoplus_n R, M) \simeq \bigoplus_n \operatorname{Tor}_k^R(R, M)$. Agora, sabemos que R como R-módulo é livre e, portanto, projetivo. Assim, $\bigoplus \operatorname{Tor}_k^R(R, M) = 0$ para $k \geqslant 1$. Note que não usamos nada sobre o módulo M.

Lembramos o conceito de grupo policíclico. Um grupo G é dito policíclico se existe uma cadeia de subgrupos

$$G_0 = 1 < G_1 < \cdots < G_i < G_{i+1} < \cdots < G_m = G$$

tais que $G_i \lhd G_{i+1}$ e G_{i+1}/G_i é cíclico para cada i. Note que isso não quer dizer que G_i seja normal em G.

Agora, considere então um grupo policíclico G. Sabemos que G é finitamente gerado. Além disso, se $R = \mathbb{Z}G$ é a álgebra do grupo G com coeficientes no anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, então R é um anel Noetheriano à esquerda. Como consequência disso, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.6. *Sejam G um grupo policíclico e M um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda finitamente gerado. Então M é finitamente apresentável como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Demonstração. Para simplificar a notação, defina $R = \mathbb{Z}G$. Como M é finitamente gerado, então sabemos que existe epimorfismo $f : R^n \to M$ para algum inteiro n. Sabemos também, pelo Teorema 2.2.6, que M é Noetheriano, logo, $\ker f$ é finitamente gerado, isto é, existe epimorfismo $g : R^m \to \ker f$ para algum inteiro m. A partir desses dois epimorfismos, obtemos a sequência exata de R-módulos

$$R^m \to R^n \to M \to 0.$$

Portanto, M satisfaz a condição (i) do Lema 3.1.2, que define módulos finitamente apresentáveis. □

3.2 Grupos de tipo FP_n

Dizemos que um grupo G é do tipo FP_n sobre um anel R, para um $n = \infty$ ou $n \geqslant 0$, se o G-módulo trivial R é do tipo FP_n como RG-módulo.

Note que, se G é um grupo do tipo FP_n sobre $\mathbb{Z}$, então G é um grupo do tipo FP_n sobre qualquer anel R. De fato, suponha que G é um grupo do tipo FP_n sobre $\mathbb{Z}$ e seja

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

uma resolução livre do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com P_i módulo finitamente gerado para todo $i \leqslant n$. Seja R um anel qualquer e defina o complexo

$$\mathbf{S} = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P} = \ldots \to R \otimes_{\mathbb{Z}} P_i \to R \otimes_{\mathbb{Z}} P_{i-1} \to \ldots \to R \otimes_{\mathbb{Z}} P_0 \to R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to 0$$

Agora, sabemos que $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq R$ e $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \simeq RG$. Assim, para todo $i \leqslant n$, temos que

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} P_i \simeq R \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}G)^{m_i} \simeq (R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G)^{m_i}$$

para algum inteiro m_i. Assim, temos

$$\mathbf{S} = \ldots \to R \otimes_{\mathbb{Z}} P_{n+1} \to (RG)^{m_n} \to \ldots \to (RG)^{m_0} \to R \to 0$$

logo, se $\mathbf{S}$ for um complexo exato, então é uma resolução projetiva do módulo R, com cada módulo finitamente gerado até dimensão n. Agora, note que $H_0(\mathbf{S}) = 0$, pois o produto tensorial é exato à direita. Além disso, $H_i(\mathbf{S}) \simeq Tor_i^{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) = 0$ para todo $i \geqslant 1$, pois $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre. Dessa forma, $\mathbf{S}$ é uma resolução de R onde cada módulo é um RG-módulo livre até dimensão n, o que mostra que G é um grupo do tipo FP_n sobre R.

Teorema 3.2.1 ([5], 2.1)**.** *Um grupo G é do tipo FP_1 sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que G é finitamente gerado, isto é, $G = \langle X \rangle$ com $|X| = m < \infty$. Então o ideal de augmentação $\mathfrak{g}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Então podemos construir uma resolução livre

$$\oplus_{x \in X} \mathbb{Z}Ge_x \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

onde e_x é o elemento que é mandado para $x - 1$ e cada $\mathbb{Z}Ge_x$ é isomorfo a $\mathbb{Z}G$. Logo, G é do tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}$ e, portanto, sobre qualquer anel R.

Agora suponha que G é do tipo FP_1 sobre R. Então, pelo Lema 3.1.2, o núcleo $\mathfrak{g}$ da aplicação $RG \to R$ é finitamente gerado sobre RG. Portanto, existem finitos $g_1, \ldots, g_n \in G$, tais que os elementos $g_i - 1$ geram $\mathfrak{g}$ como RG-módulo. Defina, então, o subgrupo de G, $S = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ e seu ideal de augumentação γ. Então $RG\gamma = \mathfrak{g}$. Agora considere a sequência exata curta

$$0 \to \gamma \to RS \to R \to 0.$$

Como S é um subgrupo de G, então podemos escrever G como a união disjunta de classes laterais t_jS, logo $RG = \oplus_j t_j RS$, isto é, RG é um RS-módulo livre. Mas isso implica que o funtor $RG \otimes_{RS} -$ é exato, logo, aplicando o funtor $RG \otimes_{RS} -$, obtemos a sequência exata

$$0 \to RG \otimes_{RS} \gamma \to RG \otimes_{RS} RS \to RG \otimes_{RS} R \to 0.$$

Além disso, observamos que as aplicações $RG \otimes_{RS} R \to R(G/S)$, definida por $x \otimes r \mapsto rxS$, e $RG \otimes_{RS} \gamma \to RG\gamma = \mathfrak{g}$, definida por $x \otimes (s-1) \mapsto x(s-1)$, são isomorfismos. Dessa forma, ficamos com a sequência exata

$$0 \to \mathfrak{g} \to RG \to R(G/S) \to 0$$

Agora, note que, se G/S denota o conjunto das classes laterais de S em G e $R(G/S)$ é o R-módulo livre com base G/S, então, pelo Corolário 1.2.12, a sequência acima cinde, logo

$$R(G/S) \simeq RG/\mathfrak{g} \simeq R,$$

porém, pelo Teorema 1.2.5, isso implica que $|G/S| = 1$, logo $G = S$, portanto G é finitamente gerado. $\square$

Como corolário desse teorema e do Teorema 3.1.5, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.2. *Um grupo G é do tipo FP_n sobre R, com $1 \leqslant n \leqslant \infty$, se, e somente se, G é finitamente gerado e $H_k(G, \prod RG) = 0$ para todo $1 \leqslant k < n$.*

Podemos ainda generalizar esse corolário para o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 ([5], 2.4)**.** *Para um grupo G, as seguintes condições são equivalentes.*

(i) G é do tipo FP_∞ sobre R.

(ii) $H_k(G, -)$ comuta com produtos diretos para todo $k \geqslant 0$.

(iii) $H^k(G, -)$ comuta com limites diretos para todo $k \geqslant 0$.

Lema 3.2.4 ([5], 2.6)**.** *Se $[G : S] < \infty$, então existe um isomorfismo natural de RG-módulos $\theta : \mathrm{Hom}_{RS}(RG, A) \to RG \otimes_{RS} A$.*

Demonstração. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_m$ um transversal à direita de G mod S e defina θ : $\mathrm{Hom}_{RS}(RG, A) \to RG \otimes_{RS} A$ por $\theta(f) = \sum_{i=1}^{m} r_i^{-1} \otimes f(r_i)$. Então, se $x \in RG$, temos que

$$\begin{aligned}\theta(x \circ f) &= \sum r_i^{-1} \otimes (x \circ f)(r_i) \\ &= \sum r_i^{-1} \otimes f(r_i x) \\ &= \sum r_i^{-1} \otimes f(r_i x \cdot \overline{r_i x}^{-1} \overline{r_i x}) \\ &= \sum r_i^{-1} \otimes r_i x \cdot \overline{r_i x}^{-1} f(\overline{r_i x}) \\ &= \sum x \cdot \overline{r_i x}^{-1} \otimes f(\overline{r_i x}) \\ &= x \cdot \theta(f),\end{aligned}$$

onde $\overline{r_i x}$ é o representante da classe lateral de $r_i x$ em G/S, isto é, $S\overline{r_i x} = Sr_j$ para exatamente um r_j. Assim, θ é um RG-homomorfismo. Agora, como

$$\mathrm{Hom}_{RS}(RG, A) \simeq \mathrm{Hom}_{RS}(\oplus RS, A) \simeq \oplus A \simeq \oplus(RS \otimes_{RS} A) \simeq (\oplus RS \otimes_{RS} A) \simeq RG \otimes_{RS} A$$

temos que θ é um isomorfismo de RG-módulos. $\square$

Teorema 3.2.5 ([5], 2.5)**.** *Sejam G um grupo e $S \leqslant G$ um subgrupo de índice finito. Então G é do tipo FP_n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$ se, e somente se, S o é.*

Demonstração. Sabemos que, pelo Lema de Shapiro (1.6.7), $H_p(S, V) \simeq H_p(G, RG \otimes_{RS} V)$ para cada RS-módulo à esquerda V.

Usando isso, podemos provar o teorema. Para todo n, temos que

$$\begin{aligned} H_n(S, \prod RS) &\simeq H_n(G, RG \otimes_{RS} (\prod RS)) \\ &\simeq H_n(G, \mathrm{Hom}_{RS}(RG, \prod RS)) \quad \text{, pelo Lema 3.2.4} \\ &\simeq H_n(G, \prod \mathrm{Hom}_{RS}(RG, RS)) \\ &\simeq H_n(G, \prod (RG \otimes_{RS} RS)) \quad \text{, pelo Lema 3.2.4} \\ &\simeq H_n(G, \prod RG) \end{aligned}$$

assim, pelo Corolário 3.2.2, G é do tipo FP_n se, e somente se, S é do tipo FP_n. $\square$

Teorema 3.2.6. *Seja $0 \to N \to G \to Q \to 0$ uma sequência exata curta de grupos e suponha que N é do tipo FP_n sobre R para algum $n \geqslant 1$. Então G é do tipo FP_n se, e somente se, Q é do tipo FP_n.*

Demonstração. Considere a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre no primeiro quadrante, como no Teorema 1.7.2

$$H_p(Q, H_q(N, \prod RG)) \Rightarrow H_{p+q}(G, \prod RG).$$

Como N é do tipo FP_n, então para $0 \leqslant q \leqslant n-1$,

$$H_q(N, \prod RG) \simeq \prod H_q(N, RG).$$

Além disso, como RG é RN-módulo livre, temos que para $1 \leqslant g \leqslant n-1$,

$$H_q(N, RG) = 0.$$

Assim, temos que para $1 \leqslant g \leqslant n-1$,

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(N, \prod RG)) \simeq H_p(Q, 0) \simeq 0.$$

Como $E^\infty_{p,q}$ é um submódulo quociente de $E^2_{p,q}$, concluímos que $E^\infty_{p,q} \simeq 0$ para todo $p \geqslant 0$ e $1 \leqslant q \leqslant n-1$.

Agora, note que

$$H_0(N, \prod RG) \simeq \prod H_0(N, RG) \simeq \prod R \otimes_{RN} RG \simeq \prod R(G/N) = \prod RQ.$$

Assim, concluímos que $E^2_{p,0} = H_p(Q, \prod RQ)$.

Agora, vamos calcular $E^\infty_{p,0}$ para $p \leqslant n-1$. Neste caso, temos que os diferencias $d^s_{p+s,-s+1} : 0 \to E^s_{p,0}$ são nulos, pois partem do módulo 0, logo $\operatorname{Im}(d_{p+s,-s+1}) = 0$. Agora, para os diferenciais $d^s_{p,0} : E^s_{p,0} \to E^s_{p-s,s-1}$ podemos ter que $p < s$ e, neste caso, teríamos $E^s_{p-s,s-1} = 0$, pois a sequência está no primeiro quadrante, ou podemos ter que $s \leqslant p$, mas então, como $p \leqslant n-1$, teríamos que $s \leqslant n-1$ e, portanto, de acordo com o que mostramos anteriormente, temos que $E^2_{p-s,s-1} = 0$, e novamente, $E^s_{p-s,s-1} = 0$. Assim, $d^s_{p,0} = 0$, logo $\ker(d^s_{p,0}) = E^s_{p,0}$. Portanto, pela definição de $E^{s+1}_{p,0}$, temos que

$$E^{s+1}_{p,0} = \ker(d^s_{p,0})/\operatorname{Im}(d_{p+s,-s+1}) \simeq E^s_{p,0}$$

para $p \leqslant n-1$, logo $E^\infty_{p,0} \simeq E^2_{p,0}$ se $p \leqslant n-1$.

Assim, se temos $p+q \leqslant n-1$ com $p+q$ fixo, então o único caso em que $E^\infty_{p,q}$ não é o módulo nulo é quando $q = 0$.

Note, então, que, se $p+q \leqslant n-1$, então $H_{p+q}(G, \prod RG) \simeq E^\infty_{p+q,0}$, mas, por outro lado, $E^\infty_{p+q,0} \simeq E^2_{p+q,0} \simeq H_{p+q}(Q, \prod RQ)$.

Assim, mostramos que, para $i \leqslant n-1$, $H_i(G, \prod RG) \simeq H_i(Q, \prod RQ)$. Agora, note também que, como N é finitamente gerado, então G é finitamente gerado se, e somente se, $Q = G/N$ é finitamente gerado.

Portanto, concluímos que G é FP_n se, e somente se, Q é FP_n □

3.3 Grupos Livres

Nesta seção queremos explorar o conceito de grupo livre. Sejam X um conjunto e $M(X)$ o conjunto de todas as sequências finitas $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ em X com $n \geqslant 0$ e defina uma multiplicação em $M(X)$ dada por

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}).$$

Assim $M(X)$ equipado com essa multiplicação é um monóide, pois a multiplicação é associativa e possui elemento neutro igual à sequência vazia. Note que, com essa operação, se identificamos os elementos x de X com as sequências de um elementos só (x), então podemos escrever cada elemento de $M(X)$ como um produto $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ para algum n.

Porém, queremos construir um grupo a partir de X, portanto precisamos de inversos. Assim, tome um conjunto X^{-1} que seja bijetivo com X pela bijeção $x \mapsto x^{-1}$ e tal que $X \cap X^{-1} = \varnothing$. Assim, denote x por x^1.

Os elementos de $M(X \cup X^{-1})$ são chamados palavras em X e, se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ é uma palavra em X, chamamos $|w| = n$ de comprimento de w e chamamos os $x_{i_r}^{\epsilon_r}$ de letras de w. Dizemos que a palavra w é reduzida se for a palavra vazia ou se, para $1 \leqslant r \leqslant n-1$, ou $i_{r+1} \neq i_r$ ou $i_{r+1} = i_r$ mas $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$.

Agora, suponha que w não é reduzida e escolha r tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$. Então, defina w' como a palavra obtida de w deletando as letras $x_{i_r}^{\epsilon_r}$ e $x_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}$. Dizemos que w' é obtida de w por um redução elementar e, se w'' é obtida de w por uma sequência de reduções elementares, dizemos que w'' é obtida de w por redução.

Vamos, por fim, definir uma relação de equivalência neste conjunto $M(X \cup X^{-1})$. Defina então a relação $\sim$ dada por: $w \sim w'$ se, e somente se, ou w é idêntico a w' ou existe uma sequência de palavras $w_1, \dots, w_k$ para algum k tais que $w_1 = w$, $w_k = w'$ e, para cada $j < k$, uma das palavras w_{j+1} e w_j é obtida da outra por uma redução elementar. Vamos verificar que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência. Note que $w \sim w$ para toda palavra w em X, pois basta tomar a sequência de um elemento só $w_1 = w$. Além disso, se $w \sim w'$ então conseguimos uma sequência $w_1, \dots, w_k$ como acima e, da mesma forma, pela sequência $w_k, \dots, w_1$ obtemos que $w' \sim w$. Por fim, se temos que $w \sim w'$ e $w' \sim w''$, então existem sequências $w = w_1, \dots, w_k = w'$ e $w' = w'_1, w'_2, \dots, w'_l = w''$, logo, pela sequência $w = w_1, \dots, w_k, w'_2, \dots, w'_l = w''$, temos que $w \sim w''$. Portanto, a relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

Assim, vamos denotar o conjunto dessas classes de equivalência por $F(X)$ e a classe de equivalência da palavra w será denotada por $[w]$. Com um argumento análogo ao utilizado para mostrar a transitividade da relação de equivalência, vemos que se u, v, w, w' são palavras em X tais que $w \sim w'$ então $uwv \sim uw'v$. Assim, se $u \sim u'$ e $w \sim w'$, então $uw \sim uw' \sim u'w'$ e portanto, podemos definir a multiplicação em $F(X)$ por $[u][w] = [uw]$. Com essa multiplicação, $F(X)$ ganha a estrutura de grupo, pois a multiplicação é associativa, tem elemento neutro que é a classe de equivalência da sequência vazia e dada uma palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ de X, sua inversa é dada por $w^{-1} = x_{i_n}^{-\epsilon_n} \dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Chamamos $F(X)$ de grupo livre sobre X e, considerando a função $i : X \to F(X)$ dada por $x \mapsto [x]$, dizemos que o par $(F(X), i)$ é livre em X.

Teorema 3.3.1. *Sejam X um conjunto, $F(X)$ o grupo livre sobre X como construído* *acima e $i : X \to F(X)$ a aplicação dada por $x \mapsto [x]$. Então, o par livre $(F(X), i)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo grupo G e aplicação $f : X \to G$, existe um homomorfismo único $\varphi : F(X) \to G$ tal que $f = \varphi i$, i. e., o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & G \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Note que a aplicação $f : X \to G$ pode ser estendida para uma aplicação de $M(X \cup X^{-1})$ em G que leva a palavra $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ em $f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$. Agora, se w' é obtida de $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ por uma redução elementar, então existe $r \leqslant n-1$ tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$, podemos escrever $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_r}^{\epsilon_r} x_{i_r}^{-\epsilon_r} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}} x_{i_{r+2}}^{\epsilon_{r+2}} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, logo

$$\begin{aligned}
f(w) &= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_r})^{\epsilon_r} f(x_{i_r})^{-\epsilon_r} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \\
&= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_{r-1}})^{\epsilon_{r-1}} f(x_{i_{r+2}})^{\epsilon_{r+2}} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \\
&= f(w').
\end{aligned}$$

Segue que se $w \sim w''$, então $f(w) = f(w'')$. Portanto, o homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$ dado por $\varphi([w]) = f(w)$ está bem definido. Além disso, pela própria construção de φ, temos que $f = \varphi i$ e, como $i(X)$ gera o grupo $F(X)$, o homomorfismo φ é único. $\square$

Note que isso implica que esse grupo livre é o único grupo a menos de isomorfismo que satisfaz essa propriedade universal, pois, se temos dois pares (G_1, i_1) e (G_2, i_2) satisfazendo a propriedade universal, conseguimos homomorfismos únicos $\varphi : (G_1, i_1) \to (G_2, i_2)$ e $\psi : (G_2, i_2) \to (G_1, i_1)$ tais que $\varphi i_1 = i_2$ e $\psi i_2 = i_1$, donde obtemos $\psi \varphi i_1 = i_1 = \mathrm{id}_{G_1} i_1$, e, pela unicidade dos homomorfismos, temos $\psi \varphi = \mathrm{id}_{G_1}$, analogamente, obtemos $\varphi \psi = \mathrm{id}_{G_2}$. Portanto, φ e ψ são isomorfismos.

Para termos o grupo livre bem definido e estruturado, ainda falta mostrar que cada classe de equivalência pode ser representada por exatamente uma palavra reduzida. Isso será provado pelo próximo teorema.

Teorema 3.3.2 (Teorema da forma normal para grupos livres,[10], Capítulo 1, Teorema 4)**.** *Existe exatamente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência.*

Demonstração. Vamos provar o teorema usando o método de van der Waerden.

Primeiramente, note que cada classe de equivalência contém ao menos uma palavra reduzida. De fato, cada redução elementar diminui o comprimento da palavra, logo, dada uma palavra w em X, se aplicarmos reduções elementares sucessivas a w até que não possamos mais aplicar nenhuma redução elementar, nós chegamos a uma palavra reduzida.

Agora, sejam S o conjunto de todas as palavras reduzidas e G o grupo de todas as permutações de S. Queremos definir um homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$ tal que $\varphi([w])$ agindo na sequência vazia $(\ )$ nos dá a sequência w sempre que w for uma palavra reduzida.

Como já mostramos que $F(X)$ satisfaz a propriedade universal do Teorema 3.3.1, vamos definir uma função $f : X \to G$ para obter $\varphi : F(X) \to G$. Definimos $f(x)$ como a permutação que leva w para xw se w não começa em x^{-1} e leva w para u se $w = x^{-1}u$. Então, isso é uma permutação em S, cuja inversa leva w para $x^{-1}w$ se w não começa em x e leva w para v se $w = xv$.

Assim, se w é a palavra reduzida $x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, então $\varphi([w]) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \ldots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$ e, portanto,

$$\varphi([w])(\ ) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \ldots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}(\ ) = x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n} = w,$$

como queríamos.

Em particular, se w e w' são duas palavras reduzidas com $w \sim w'$ então $[w] = [w']$ e, portanto, como $w = \varphi([w])(\ )$ e $w = \varphi([w'])(\ )$, temos que $w = w'$. □

Esse teorema mostra que, dada uma palavra w, há exatamente uma palavra reduzida que pode ser obtida de w. Além disso, dados x e y em X distintos, temos que as palavras x e y são palavras reduzidas distintas, logo, pelo teorema, estão em classes de equivalência distintas, o que mostra que a aplicação $i : X \to F(X)$ é injetiva.

Proposição 3.3.3 ([10], Capítulo 1, Proposição 6)**.** *$F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$.*

Teorema 3.3.4. *Todo grupo G é isomorfo a um quociente de um grupo livre.*

Demonstração. Denote por X o conjunto dos elemento de G e seja $F(X)$ o grupo livre com base X. Denote também por $i : X \to F(X)$ a injeção natural e por $f : X \to G$ a aplicação definida por $f(g) = g$. Pelo Teorema 3.3.1, temos que existe um homomorfismo único $\varphi : F(X) \to G$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & G \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora, note que, como f é sobrejetora, φ também o é. Assim, denotando por N o núcleo do homomorfismo φ, temos que

$$F(X)/N \simeq G.$$

□

3.4 Grupos finitamente apresentáveis

Para prosseguir, vamos entender o que é apresentação de um grupo G e o que significa dizer que um grupo é finitamente apresentável.

Assim, dado um subconjunto R de um grupo G, dizemos que R gera N como subgrupo normal quando N é o menor subgrupo normal de G que contém R, i. e., $N = \langle grg^{-1} | g \in G, r \in R\rangle$

Agora, seja $\varphi : F(X) \to G$ um epimorfismo de grupos, onde $F(X)$ é o grupo livre com base X e denote por $N = \ker(\varphi)$. Pelo Teorema do Isomorfismo, sabemos que $F(X)/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$, isto é, $G \simeq F(X)/N$. Assim, se R denota o subconjunto de G que gera N como subgrupo normal, então $\langle X|R\rangle$ é chamado apresentação do grupo G por meio de geradores X e relações R. Podemos ainda denotar a apresentação de G por $\langle X|R\rangle^{\varphi}$, se quisermos enfatizar o epimorfismo da apresentação.

Exemplo 3.4.1. *Tome $G = \mathbb{Z}^2$, então, $\langle x, y|[x, y]\rangle$ é uma apresentacão de G, onde $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Note que a apresentação de um grupo não é única. De fato, $\langle x, y, z|[x, y], z(xy)^{-1}\rangle$ é outra apresentação do mesmo grupo G, mas nessa apresentação os geradores são x, y, z e, em G, temos que $[x, y] = 1$ e $z(xy)^{-1} = 1$, logo $z = xy$ o que implica que z não é necessário como gerador.*

Definição 3.4.2. *Um grupo G é dito finitamente apresentável se existir apresentação $\langle X|R\rangle$ de G com ambos X e R finitos.*

Lema 3.4.3 (P. Hall, [19], 2.2.4)**.** *Seja G um grupo com subgrupo normal N tal que N e G/N são finitamente apresentáveis, então G é finitamente apresentável.*

Exemplo 3.4.4. *Todo grupo finito G é finitamente apresentável.*

Exemplo 3.4.5. *Grupos abelianos finitamente gerados são finitamente apresentáveis. De fato, seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Então $G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus H$, onde H é algum grupo abeliano finito. Agora, $\mathbb{Z}^n$ é finitamente apresentável, pois podemos tomar a apresentação $\langle x_1, ..., x_n|[x_i, x_j]$ para $1 \leqslant i < j \leqslant n\rangle$. Além disso, H é finitamente apresentável, pois é finito. Portanto, pelo último lema, temos que G é finitamente apresentável.*

Exemplo 3.4.6. *Grupos cíclicos são finitamente apresentáveis. De fato, seja G um grupo cíclico. Se $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algum n, então G tem a apresentação $\langle x|x^n\rangle$. Se $G \simeq \mathbb{Z}$, então G tem a apresentação $\langle x|\varnothing\rangle$.*

Exemplo 3.4.7. *Grupos policíclicos são finitamente apresentáveis. De fato, se G é um grupo policíclico, então, temos uma cadeia de subgrupos*

$$1 = H_1 < H_2 < ... < H_i < H_{i+1} < ... < H_s = G$$

onde $H_i \lhd H_{i+1}$ e H_{i+1}/H_i é um grupo cíclico para cada $1 \leqslant i \leqslant s-1$. Vamos mostrar por indução em i. Sabemos que $H_1 = 1$ é finitamente apresentável e que $H_2 \simeq H_2/H_1$ também é finitamente apresentável, pois é cíclico. Agora, suponha que H_i é finitamente apresentável. Mas sabemos que H_i é normal em H_{i+1} e H_{i+1}/H_i é cíclico e, portanto, finitamente apresentável. Assim, pelo Lema 3.4.3, H_{i+1} é finitamente apresentável.

Note que grupos nilpotentes finitamente gerados são sempre policíclicos, logo, são finitamente apresentáveis, mas existem grupos solúveis (de fato, abelianos-por-abelianos) que são finitamente gerados, mas não são finitamente apresentáveis. De fato, veremos um exemplo a seguir. Porém, para melhor entendermos o exemplo, vamos precisar de alguns resultados e conceitos.

Teorema 3.4.8 ([5], 2.2)**.** *Se G é um grupo finitamente gerado, então $G = F(X)/N$ é FP_2 se, e somente se, N/N' é um $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado.*

Corolário 3.4.9. *Todo grupo G finitamente apresentável é de tipo FP_2.*

Seja A um grupo abeliano. Definimos o quadrado exterior de A por

$$A \wedge A = (A \otimes A)/D,$$

onde $D = \{a \otimes a : a \in A\}$. Note que, denotando por $a_1 \wedge a_2$ o elemento $a_1 \otimes a_2 + D$, então temos que $(a_1 + a_2) \wedge (a_1 + a_2) = 0$, o que mostra que $a_1 \wedge a_2 = -(a_2 \wedge a_1)$.

Teorema 3.4.10. *Seja A um grupo abeliano, então $H_2(A, \mathbb{Z}) \simeq A \wedge A$.*

O teorema acima está enunciado e provado de forma mais geral em [8], como Teorema 6.4. De fato, lá temos que a aplicação $\psi : (A \otimes k) \wedge (A \otimes k) \to H_2(A, k)$ é um isomorfismo quando $k = \mathbb{Z}$. Assim, substituindo k, temos que

$$\begin{aligned}(A \otimes k) \wedge (A \otimes k) &\simeq H_2(A, k)\\ (A \otimes \mathbb{Z}) \wedge (A \otimes \mathbb{Z}) &\simeq H_2(A, \mathbb{Z})\\ A \wedge A &\simeq H_2(A, \mathbb{Z}),\end{aligned}$$

que é o isomorfismo que queremos.

Finalmente, podemos passar ao nosso exemplo.

Exemplo 3.4.11. *Sejam $F = F(X)$, onde $X = \{x, y\}$ e defina $G = F/F''$, onde $F'' = [F', F']$. Então G é um grupo abeliano-por-abeliano (metabeliano), pois ele tem subgrupo normal $A = F'/F''$ abeliano tal que G/A é abeliano. Suponha que G seja finitamente apresentável. Então, pelo Corolário 3.4.9, G é do tipo FP_2, logo, existe uma resolução livre do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$*

$$\mathbf{F} = \ldots \to F_i \to F_{i-1} \to \ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

com F_0, F_1, F_2 finitamente gerados. Aplicamos o funtor $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}-$ sobre o complexo e obtemos

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbf{F} = \ldots \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_3 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_0 \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbb{Z} \to 0$$

Mas $\mathbf{F}$ é um complexo exato de $\mathbb{Z}A$-módulos e os módulos em dimensões estritamente maiores do que -1 são $\mathbb{Z}A$-módulos livres, pois cada $\mathbb{Z}G$-módulo livre é $\mathbb{Z}A$-módulo livre. Assim, pensamos em $\mathbf{F}$ como resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}A$-módulo. Agora, como A é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, podemos escrever $A = \oplus_{y\in Y}\mathbb{Z}y$, assim, temos que

$$A \wedge A = \oplus_{y_1<y_2}\mathbb{Z}y_1 \wedge y_2,$$

que é um $\mathbb{Z}$-módulo livre. Sabemos também que F_2 é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre finitamente gerado, logo, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $F_2 = (\mathbb{Z}G)^s$, assim, denotando por $Q = G/A$, temos que

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_2 \simeq \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}(\mathbb{Z}G)^s \simeq (\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbb{Z}G)^s \simeq (\mathbb{Z}(G/A))^s = (\mathbb{Z}Q)^s.$$

Dessa forma também vemos que cada módulo em $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbf{F}$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo. Agora, $\mathbb{Z}Q$ é um anel abeliano Noetheriano, pelo Teorema 2.2.9. Assim, usando também o Teorema 3.4.10, temos que

$$A \wedge A = H_2(A,\mathbb{Z}) \simeq H_2(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbf{F}) = \ker(d_2)/\operatorname{Im}(d_3),$$

Mas vimos que $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A} F_2 \simeq (\mathbb{Z}Q)^s$ e $\mathbb{Z}Q$ é um anel Noetheriano abeliano. Agora, como $(\mathbb{Z}Q)^s$ é um módulo finitamente gerado sobre o anel Noetheriano $\mathbb{Z}Q$, então é Noetheriano como $\mathbb{Z}Q$-módulo, logo, cada submódulo é finitamente gerado. Além disso, sabemos que $\ker(d_2)$ *é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado e $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A}\mathbf{F}$ é um complexo de $\mathbb{Z}Q$-módulos e todos os diferenciais são homomorfismos de $\mathbb{Z}Q$-módulos. Assim, $A \wedge A$ também é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Aqui Q age à esquerda sobre $A \wedge A$ via ação diagonal, i. e.,*

$$q * (a_1 \wedge a_2) = (q * a_1 \wedge q * a_2),$$

onde Q age à esquerda sobre A por conjugação. Por outro lado, podemos provar que no nosso exemplo $A \wedge A$ não é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Para isso, note que, como $|X| = 2$, temos que $A \simeq \mathbb{Z}Q$, logo, A é $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda via conjugação, além disso, o gerador de A como $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda é $[x,y]$, logo $A \wedge A \simeq \mathbb{Z}Q \wedge \mathbb{Z}Q$, que não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. De fato, se $A \wedge A$ fosse finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, então $A \otimes A$ também seria finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo via ação diagonal, logo, teríamos $A\otimes A \simeq \mathbb{Z}[Q\times Q]$, portanto $\mathbb{Z}[Q\times Q]$ vira $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado e ação diagonal aqui significa que $\mathbb{Z}[Q \times Q]$ vira finitamente gerado como módulo sobre o seu subanel $\mathbb{Z}[\operatorname{diag}(Q)]$, onde $\operatorname{diag}(Q) = \{(q,q)|q \in Q\}$ é o subgrupo diagonal em $Q \times Q$, mas isso não é verdade aqui, pois Q é infinito.

Teorema 3.4.12 ([21], 10.4)**.** *Se G é um grupo livre com base X, então o ideal augumentado $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $X - 1 = \{x - 1|x \in X\}$.*

Teorema 3.4.13 (von Dyck, [10], Capítulo 1, Teorema 14)**.** *Sejam $G = \langle X|R\rangle^{\varphi}$, $f : X \to H$ uma aplicação, onde H é um grupo, e $\theta : F(X) \to H$ o homomorfismo correspondente. Então existe um homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que $f(x) = \psi(\varphi(x))$ para todo $x \in X$ se $\theta(r) = 1$ para todo $r \in R$. Além disso, φ é um epimorfismo se $f(X)$ gera H.*

Em particular, a inclusão de $i : X \to X \cup Y$ induz um homomorfismo de $\langle X|R\rangle$ em $\langle X \cup Y|R \cup S\rangle$ para todo subconjunto S de $F(X \cup Y)$.

Como vimos anteriormente no Exemplo 3.4.1, dados um conjunto X e um homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$, o grupo G pode ter várias apresentações.

Seja $\langle X|R\rangle$ uma apresentação de G. Então, se S está contido em $\langle R\rangle^{F(X)}$, $\langle X|R \cup S\rangle$ também é uma apresentação de G e dizemos que $\langle X|R \cup S\rangle$ é obtida de $\langle X|R\rangle$ por uma transformação geral de Tietze de tipo I e $\langle X|R\rangle$ é obtida de $\langle X|R \cup S\rangle$ por uma transformação geral de Tietze de tipo I'. Mais ainda, se S é um conjunto unitário, dizemos que a transformação de Tietze é simples.

Agora, sejam Y um conjunto tal que $X \cap Y = \varnothing$ e $u_y \in F(X)$ para cada $y \in Y$. Então $\langle X \cup Y \mid R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\}\rangle$ também é uma apresentação de G, onde $\psi(x) = \varphi(x)$ e $\psi(y) = \varphi(u_y)$. Agora, seja N o subgrupo normal de $F(X \cup Y)$ gerado por $R \cup \{yu_y^{-1}\}$. Então, como $\psi(R \cup \{yu_y^{-1}\})$, ψ induz um epimorfismo $\pi : F(X \cup Y)/N \to G$. Mas, pelo Teorema 3.4.13, também existe um epimorfismo $\theta : G \to F(X \cup Y)/N$ com $\theta(\varphi(x)) = xN$. Assim, $\pi\theta$ é a aplicação identidade, além disso, como

$$\theta(\pi(yN)) = \theta(\psi(y)) = \theta(\psi(u_y)) = \theta(\varphi(u_y)) = u_yN = yN,$$

concluímos que $\theta\pi$ é a aplicação identidade.

Dizemos que $\langle X \cup Y|R \cup \{yu_y^{-1}y \in Y\}\rangle$ é obtido de $\langle X|R\rangle$ por uma transformação geral de Tietze de tipo II e que $\langle X|R\rangle$ é obtido de $\langle X \cup Y|R \cup \{yu_y^{-1}y \in Y\}\rangle$ por uma transformação de Tietze de tipo II'. Novamente, se o conjunto Y é unitário, dizemos que a transformação de Tietze é simples.

Teorema 3.4.14 ([10], Capítulo 1, Teorema 15)**.** *Quaisquer duas apresentações de um mesmo grupo podem ser obtidas uma da outra por uma sequência de transformações gerais de Tietze. Se ambas as apresentações são finitas, então uma pode ser obtida da outra por uma sequência de transformações de Tietze simples.*

Proposição 3.4.15 ([10], Capítulo 1, Proposição 16)**.** *Sejam G um grupo finitamente gerado e $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ uma apresentação de G. Então existe um subconjunto finito de Y que gera G.*

Demonstração. Seja X um subconjunto finito de G que gera G. Como $\langle Y|S\rangle^{\psi}$ é uma apresentação de G, cada $x \in X$ é o produto de um número finito de elementos de $\psi(Y)$ e seus inversos. Assim, existe um subconjunto finito Y_1 de Y tal que $X \subset \langle \psi(Y_1) \rangle$. Assim, concluímos que Y_1 gera G. □

Proposição 3.4.16 ([10], Capítulo 1, Proposição 17)**.** *Sejam $\langle X|R \rangle^{\varphi}$ e $\langle Y|S \rangle^{\psi}$ duas apresentações de G. Se X, R e Y são finitos, então existe um subconjunto S_1 de S tal que $\langle Y|S_1 \rangle^{\psi}$.*

Lema 3.4.17. *Sejam H um grupo e K um subgrupo normal de H tais que H é finitamente apresentável e K é finitamente gerado como subgrupo normal. Então H/K é finitamente apresentável.*

Demonstração. Seja $H = \langle X|R \rangle$ uma apresentação finita de H, isto é, X e R são finitos. Seja também $K = \langle b_1^H, \ldots, b_s^H \rangle$, onde $b^H = \{h^{-1}bh : h \in H\}$. Seja $F = F(X)$ o grupo livre com base X e $\pi : F \to H$ o homomorfismo que induz a representação de H. Então temos que $\ker(\pi) = \langle \{r^F : r \in R\} \rangle$. Agora, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, escolha um $a_i \in F$ tal que $\pi(a_i) = b_i$. Denote, então, por $\rho : H \to H/K$ o homomorfismo canônico e $\gamma : F \to H/K$ a composição $\rho \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ H \arrow[r, "\rho"] & H/K \end{tikzcd}$$

Então, $\ker(\gamma)$ é o fecho normal de $R \cup \{a_1, ..., a_s\}$ em F. Portanto, H/K tem apresentação $\langle X|R \cup \{a_1, ..., a_s\} \rangle$. Concluímos que H/K é finitamente apresentável. □

Lema 3.4.18. *Seja $0 \to K \to C \to D \to 0$ uma sequência exata curta de grupos, onde C é finitamente gerado e D é finitamente apresentável. Então K é finitamente gerado como subgrupo normal em C, i.e., existe um conjunto finito Y tal que K é o fecho normal de Y em C.*

Demonstração. Pela sequência exata, podemos escrever $D \simeq C/K$. Então, seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um conjunto finito de geradores de D para o qual existe uma apresentação finita $\langle S|R \rangle$ de D. Como C é finitamente gerado, podemos tomar $T \subset K$ um conjunto finito tal que $C = \langle S \cup T \rangle$, logo $\langle S \cup T|R \cup T \rangle$ é uma apresentação finita de D. Tomando $Y = R \cup T$, temos que K é o fecho normal de Y, que é finito. □

3.5 Grupos quase finitamente apresentáveis

Vimos que grupos finitamente apresentáveis são do tipo FP_2, porém não tem equivalência.

Em [4], Bestvina e Brady constroem uma classe de grupos que são de tipo homológico FP_2, mas não são finitamente apresentáveis. Essa construção é demasiado complicada e é de fato o tema de todo o artigo [4], por isso, não vamos mostrar exemplos de tais grupos aqui, apenas enunciamos o resultado aqui e deixamos o artigo na bibliografia.

Teorema 3.5.1 (Bestvina-Brady, [4])**.** *Existem grupos de tipo FP_2 que não são finitamente apresentáveis.*

O Teorema 3.5.1 nos diz que um grupo G do tipo FP_2 não é necessariamente finitamente apresentável. Porém, podemos garantir uma outra condição sobre G um pouco mais fraca.

G é dito quase finitamente apresentável sobre R se existe uma sequência exata curta de grupos

$$0 \to K \to F \to G \to 0,$$

onde F é um grupo livre finitamente gerado e $R \otimes (K/K')$ é finitamente gerado como um RG-módulo. Vamos entender a estrutura de RG-módulo de $R \otimes (K/K')$. Seja $g \in G$, escreva $g = fK$ para algum $f \in F$, pois $G \simeq F/K$, e denote por $\pi : F \to G$ a projeção da sequência exata curta. Sabemos que $\ker(\pi) = K$, logo $g = \pi(f)$. Definimos a ação de F sobre K à esquerda por conjugação. Sabemos que K é normal em F, logo isso induz uma ação de F sobre K/K'. Nessa ação, K age trivialmente, e isso dá uma ação à esquerda de G sobre K/K'. Escrevendo explicitamente, temos que $g * (kK') = fkf^{-1}K'$, onde $g = \pi(f)$.

Lema 3.5.2. *Grupos finitamente apresentáveis são quase finitamente apresentáveis sobre qualquer anel R.*

Demonstração. Seja G um grupo finitamente apresentável e escreva $G = F/K$, onde F é um grupo livre gerado por um conjunto finito X. Assim, seja

$$0 \to K \to F \to G \to 0$$

uma sequência exata curta de grupos. Como G é finitamente apresentável, existe uma apresentação $\langle X|R_0\rangle$, onde R_0 é finito e gera K como subgrupo normal de F, isto é, $K = \langle frf^{-1}|r \in R_0, f \in F\rangle$, portanto R_0 é gerador de K/K' como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda. Assim, G é quase finitamente apresentável sobre $\mathbb{Z}$, o que implica que é quase finitamente apresentável para qualquer anel R. □

Como dito anteriormente, a volta não vale e é o Teorema 3.5.1. Porém, conseguimos a equivalência entre um grupo G ser do tipo FP_2 e ser quase finitamente apresentável. Vemos isso na próxima proposição.

Proposição 3.5.3 ([5], 2.2)**.** *Seja R um anel associativo, comutativo com unidade. Um grupo G é do tipo FP_2 sobre R se, e somente se, G é quase finitamente apresentável sobre R.*

Demonstração. Seja F o grupo livre tal que G é isomorfo a um quociente de F, digamos $G \simeq F/K$, e tome a sequência de RF-módulos livres abaixo

$$N \to RF \to R \to 0,$$

onde $RF \to R$ é o mapa dado por $\sum r_i f_i \mapsto \sum r_i$ e N o núcleo dessa aplicação. Note que a projeção canônica $F \to G$ induz um epimorfismo de anéis $RF \to RG$. Via esse epimorfismo, podemos considerar RG como RF-módulo. Assim, aplicando o funtor $Tor_*^{RF}(RG, -)$, a sequência acima nos dá a sequência exata

$$0 \to Tor_1^{RF}(RG, R) \to RG \otimes_{RF} N \to RG \otimes_{RF} RF \to RG \otimes_{RF} R \to 0,$$

onde a primeira aplicação decorre do fato de que $Tor_1^{RF}(RG, RF) = 0$, pois RF é um RF-módulo livre. Agora, sabemos também que $R \otimes_{RK} RF \simeq RG$ como RF-módulos, portanto, temos que

$$Tor_1^{RF}(RG, R) = H_1(F, RG) \simeq H_1(F, R \otimes_{RK} RF),$$

agora, usando o Lema de Shapiro (1.6.7) e o Teorema (1.6.5), temos que

$$H_1(F, R \otimes_{RK} RF) \simeq H_1(K, R) \simeq R \otimes_{\mathbb{Z}} K/K'.$$

Além disso, $RG \otimes_{RF} R \simeq R$. Assim, temos a sequência exata

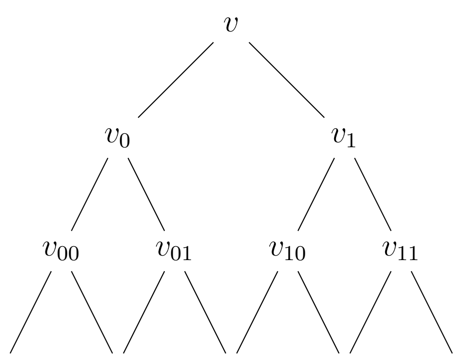
$$0 \to R \otimes_{\mathbb{Z}} K/K' \to RG \otimes_{RF} N \to RG \to R \to 0.$$

Note que, pelo Teorema 3.4.12, o RG-módulo $RG \otimes_{RF} N$ é livre com base $\{1 \otimes (x_i - 1)\}$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são os geradores de F, pois N é um $\mathbb{Z}F$-módulo livre à esquerda com geradores $x_i - 1$, onde $x_i \in X$. Assim, concluímos que G é de tipo FP_2, se, e somente se, $R \otimes_{\mathbb{Z}} K/K'$ é finitamente gerado como RG-módulo, isto é, G é de tipo FP_2, se, e somente se, G é quase finitamente apresentável. $\square$

4 Grupos autossimilares do tipo FP_n

4.1 Grupos transitivos autossimilares e endomorfismos virtuais

Considere o conjunto $X = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, para algum m inteiro positivo, e seja $M(X)$ o monóide livre gerado por X. Vamos definir a m-árvore infinita regular de uma raiz $\mathcal{T}_m$ como o grafo de vértices $\{v_i : i \in M(X)\}$ e cada dois vértices v_i e v_j estão ligados se, e somente se, seus índices i e j são da forma u e ux, com $u \in M(X)$ e $x \in X$. Para exemplificar, temos a árvore binária $\mathcal{T}_2$ abaixo.



Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o n-ésimo nível de $\mathcal{T}_m$ como o conjunto dos vértices indexados por palavras de comprimento n.

Agora, seja G um grupo e H um subgrupo de G de índice finito, digamos $[G : H] = m$. Se $f : H \to G$ é um homomorfismo, dizemos que f é um endomorfismo virtual. Vamos construir uma ação de G sobre a árvore $\mathcal{T}_m$. Assim, seja $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}\}$ um transversal de H em G, isto é, podemos escrever G como $G = \bigcup_{t \in T} Ht$. Sabemos que G age no conjunto das classes laterais de H pela multiplicação à direta, assim, para cada g obtemos um elemento do grupo de permutações $\sigma \in S_m$ dado por

$$Ht_i g = Ht_{(i)\sigma}.$$

Dessa forma, podemos definir ainda os cofatores de g por

$$t_0 g t_{(0)\sigma}^{-1}, \ldots, t_{m-1} g t_{(m-1)\sigma}^{-1},$$

e note que cada cofator de g é um elemento de H, de modo que podemos olhar sua imagem por f, assim definindo elementos $g_0, \ldots, g_m \in G$, por

$$g_i = f(t_i g t_{(i)\sigma}^{-1})$$

para todo $i \in X = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ e os elementos g_i são denominados estados de g.

Com isso, podemos definir recursivamente a ação do elemento $g \in G$ na m-árvore infinita regular $\mathcal{T}_m$. De fato, denotando, como anteriormente, por v a raiz de $\mathcal{T}_m$ e $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ os vértices do primeiro nível. Note que, se denotamos por $\mathcal{T}_m^{(i)}$ a subárvore que começa com v_i e contém todos os seus desdentes, então $\mathcal{T}_m^{(i)}$ é isomorfa à árvore original. Assim, a permutação σ definida por g age no primeiro nível da árvore levando $\mathcal{T}_m^{(i)}$ em $\mathcal{T}_m^{(i)\sigma}$ e cada g_i age somente sobre $\mathcal{T}_m^{(i)}$, fixando os outros vértices de $\mathcal{T}_m$ que não estão em $\mathcal{T}_m^{(i)}$. A ação de g_i sobre $\mathcal{T}_m^{(i)}$, por sua vez será dada da mesma forma que a ação de g sobre $\mathcal{T}_m$ foi estabelecida, isto é, a partir de g_i, obtemos $\sigma_i \in S_m$, esse σ_i dá a ação de g_i sobre os descendentes de v_i. Fazemos isso para todo i e todos os descendentes de todos os v_i. Assim, temos a ação de g nos vértices da segunda linha da árvore $\mathcal{T}_m$. Prosseguindo assim, obtemos a ação de g sobre toda a árvore $\mathcal{T}_m$.

Assim, escrevemos

$$g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})\sigma \in G \wr S_m,$$

onde $G \wr S_m$ denota o produto entrelaçado de G e S_m, isto é, $G \wr S_m$ é o produto semidireto $(G \times \ldots \times G) \rtimes S_m$, onde temos m fatores G. Assim, o produto de dois elementos dessa forma é dado por

$$(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})\sigma(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{m-1})\tilde{\sigma} = (g_0\tilde{g}_{(0)\sigma}, g_1\tilde{g}_{(1)\sigma}, \ldots, g_{m-1}\tilde{g}_{(m-1)\sigma})\sigma\tilde{\sigma}.$$

Note que essa ação de G sobre $\mathcal{T}_m$ é fiel, fechada por estados, isto é, para todo elemento $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})\sigma \in G$, os seus estados $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ são também elementos de G, e a ação também é transitiva no primeiro nível da árvore $\mathcal{T}_m$, i.e., é transitiva no conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$.

Definição 4.1.1. *Seja G um grupo que age fielmente em uma árvore infinita regular de uma raiz $\mathcal{T}_m$ e cuja ação é fechada por estados. Então G é dito um grupo autossimilar.*

Assim, nosso grupo G é um grupo autossimilar. Além disso, o grau dessa apresentação de G como um grupo autossimilar é o índice $[G : H] = m$.

Por outro lado, a volta também é valida, i. e., se G é um grupo autossimilar, ou seja, existe uma ação fiel e fechada por estados de G na m-árvore infinita regular de uma raiz $\mathcal{T}_m$, e se essa ação é transitiva no primeiro nível de $\mathcal{T}_m$, então podemos obter um subgrupo H de G de índice finito m e um homomorfismo virtual $f : H \to G$.

Vamos descrever a ação de G sobre $\mathcal{T}_m$ de forma análoga à feita anteriormente. Assim, dado $g \in G$, seja $\sigma \in S_n$ a permutação que descreve a ação de g no primeiro nível da árvore $\mathcal{T}_m$ e sejam $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ os elementos de G que descrevem a ação de g nas subárvores $\mathcal{T}_m^{(0)}, \mathcal{T}_m^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_m^{(m-1)}$ respectivamente, onde as subárvores $\mathcal{T}_m^{(0)}, \mathcal{T}_m^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_m^{(m-1)}$ são definidas como anteriormente, isto é, $\mathcal{T}_m^{(i)}$ é a subárvore isomorfa a $\mathcal{T}_m$ que parte do vértice v_i. Dessa forma, novamente escrevemos $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})\sigma \in G \wr S_m$.

Lembrando que $X = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, defina por H o estabilizador de $0 \in X$ em G. Portanto, $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})\sigma \in H$ se, e somente se, $(0)\sigma = 0$. Dessa forma, podemos definir $f : H \to G$ por $f(g) = g_0$ e $[G : H] = m$.

Assim, vamos definir recursivamente o conjunto de estados $\mathcal{Q}(g)$ dos elementos de g como o subconjunto do conjunto $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$ dos automorfismos de $\mathcal{T}_m$ dado por

$$\mathcal{Q}(g) = \{g\} \cup \bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}(g_i).$$

Por fim, se G é um grupo autossimilar, dizemos que G é um grupo autômata, ou um grupo autossimilar de estado finito, se existe um conjunto finito Y gerador de G tal que, para todo $g \in G$, $\mathcal{Q}(g)$ é finito.

4.2 Grupos nilpotentes-por-abelianos

Primeiramente, vamos definir valorização de um anel.

Definição 4.2.1. *Uma valorização de um anel A é uma aplicação $v : A \to \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que, para todos $d_1, d_2 \in A$,*

(i) $v(d_1 d_2) = v(d_1) + v(d_2)$

(ii) $v(d_1 + d_2) \geqslant min\{v(d_1), v(d_2)\}$

Agora, considere o seguinte teorema sobre o tipo homotópico de alguns grupos S-aritméticos. Para um corpo k, denotamos por $k(x)$ o corpo de frações do anel de polinômios $k[x]$.

Teorema 4.2.2 ([9], Teorema A)**.** *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Chevalley, $\mathcal{B}$ seu subgrupo de Borel, K um corpo que é uma extensão finita de $k(x)$, onde k é um corpo finito e S é um conjunto finito de valorizações. Seja $\mathcal{O}_S = \{t \in K | v(t) \geqslant 0$ para $v \notin S\}$. Então $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ é do tipo F_{d-1}, mas não é do tipo FP_d, onde $d = |S|$.*

Aqui, um grupo G ser de tipo F_1 significa que G é finitamente gerado, F_2 significa que G é finitamente apresentável e F_k para $k > 2$ significa que G é finitamente apresentável e é do tipo FP_k.

O Teorema 4.2.2 é o resultado principal do artigo [9] de Kai-Uwe Bux. Este resultado segue de um teoria complexa que não será desenvolvida aqui, iremos apenas aplicar o teorema ao grupo que construiremos a seguir.

Tome p um primo e defina por $k = \mathbb{F}_p$ o corpo de p elementos, K o corpo de frações de $k[x]$, seu anel de polinômios, e

$$x = f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{F}_p[x] \backslash \mathbb{F}_p(x-1)$$

polinômios mônicos irredutíveis distintos.

Para cada polinômio irredutível $f \in \mathbb{F}_p[x]\backslash\mathbb{F}_p$, definimos a valorização f-ádica $v_f : \mathbb{F}_p[x] \to \mathbb{N}$ por $v_f(g) = s$, onde s é o maior expoente de f tal que f^s divide g. Seja ainda v_0 a valorização definida por $v_0(g) = -\deg(g)$, onde $\deg(g)$ denota o grau de g. Assim, definimos o conjunto $S = \{v_0, v_{f_i} : 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ e note que $|S| = n+1$.

Vamos denotar ainda por $\mathcal{G} = GL_m$ o grupo da matrizes $m \times m$ inversíveis e $\mathcal{B} = UT$, onde T é o grupo das matrizes diagonais em $\mathcal{G}$ e U é o grupo das matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal. Assim, definimos

$$A := \mathcal{O}_S = \mathbb{F}_p\left[x^{\pm 1}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \ldots, \frac{1}{f_{n-1}}\right].$$

Além disso, denote por $N = U(A)$ o grupo das matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal e entradas em A. Defina ainda Q_0 como o subgrupo de $A\backslash\{0\}$ gerado por $x = f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ e, denote, então, por $Q = (\mathbb{F}_p^* \times Q_0)^m$. Então, $\mathbb{F}_p^* \times Q_0$ são exatamente os elementos invertíveis de A. Definimos

$$G_0 = \mathcal{B}(\mathcal{O}_S) = N \rtimes Q.$$

Assim, o centro de G_0, $Z(G_0)$ é o grupo de matrizes λI_m, onde $\lambda \in A^* = F_p^* \times Q_0$. Em particular $Z(G_0)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, portanto é de tipo FP_∞ e finitamente apresentável. Por fim, defina

$$G = G_0/Z(G_0).$$

Aplicando o Teorema 4.2.2 ao nosso caso, como $|S| = n+1$, isto é, $d = n+1$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.3. *G_0 é do tipo F_n, mas não é do tipo FP_{n+1}.*

Corolário 4.2.4. *Para $n \geqslant 2$, G é F_n, mas não é de tipo FP_{n+1}. Em particular, G é finitamente apresentável.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$1 \to Z(G_0) \to G_0 \to G \to 1.$$

Sabemos que G_0 é F_n, isto é, G_0 é finitamente apresentável e é de tipo FP_n, mas não é de tipo FP_{n+1}, portanto, pelo Teorema 3.2.6, temos que G é de tipo FP_n, mas não é de tipo FP_{n+1}. Agora, como G_0 é finitamente apresentável e $Z(G_0)$ é finitamente gerado como subgrupo normal de G, concluímos que $G = G_0/Z(G_0)$ é finitamente apresentável pelo Lema 3.4.17. □

Agora considere o ideal de A, $\mathfrak{a} = (x-1)A$. Então obtemos o seguinte lema.

Lema 4.2.5 ([15], 3.3). *$\mathfrak{a} \neq A$ e $A = \mathfrak{a} \bigoplus \mathbb{F}_p$ como espaço vetorial.*

Demonstração. Considere o anel $B = \mathbb{F}_p[x]/(x-1) \simeq \mathbb{F}_p$, isto é, B é um corpo. Sejam então $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ as imagens de $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ em B. Note que definimos as f_i's tais que $f_i \notin (x-1)\mathbb{F}_p$, logo, para cada i, g_i não é 0 em B, pela própria definição de f_i. Portanto, para cada i, $1/g_i$ já está em B, logo $B[1/g_0, ..., 1/g_{n-1}] = B$. Assim,

$$A/\mathfrak{a} \simeq B\left[\frac{1}{g_0}, ..., \frac{1}{g_{n-1}}\right] = B \neq 0,$$

isto é, $\mathfrak{a} \neq A$. Agora, note que A é grupo abeliano por meio de adição, logo

$$[A : \mathfrak{a}] = |A/\mathfrak{a}| = |\mathbb{F}_p| = p < \infty,$$

donde obtemos que $A = \mathfrak{a} \bigoplus \mathbb{F}_p$. □

Mais ainda, temos que $[A : \mathfrak{a}^s] = p^s$. Para ver isso, vamos usar indução por s. Já sabemos que $[A : \mathfrak{a}^2] = [A : \mathfrak{a}][\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^2]$ e $\mathfrak{a}^2 = (x-1)^2 A$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \simeq A/\mathfrak{a}$, logo $[A : \mathfrak{a}^2] = [A : \mathfrak{a}][\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^2] = p.p = p^2$. Agora, se $[A : \mathfrak{a}^s] = p^s$ para todo $s < S$, então, temos que $[A : \mathfrak{a}^S] = [A : \mathfrak{a}][\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^S] = p \cdot p^{S-1} = p^S$.

Lembramos que definimos anteriormente o grupo $N = U(A)$. Assim, considere o seguinte lema.

Lema 4.2.6. *N é um grupo nilpotente de classe de nilpotência m.*

Demonstração. Se denotamos por $\gamma_1(N) = [N, N]$ o primeiro elemento da série central inferior de N, temos que essas matrizes tem entradas 0 na diagonal exatamente acima da diagonal principal. Analogamente, $\gamma_2(N) = [[N, N], N]$ e essas matrizes têm entradas 0 nas duas diagonais exatamente acima da diagonal principal. De modo geral $\gamma_i(N) = [N, ...N]$, onde aparecem i vezes comutadores normados à esquerda, então essas matrizes têm entradas 0 nas primeiras i diagonais acima da diagonal principal e assim por diante. Concluímos que $\gamma_m(N) = [N, \ldots, N]$, com m entradas de N, tem somente 0 acima da diagonal principal. Assim, $\gamma_m(N) = I_m$, o que mostra que N é um grupo nilpotente de classe de nilpotência m. □

Note que isso implica que, se $m = 2$, então N é abeliano.

Além disso, seja N_0 o subgrupo do grupo nilpotente N das matrizes $(a_{i,j})$ tais que $a_{i,j} \in \mathfrak{a}^{j-i}$ e observe que, como $[A : \mathfrak{a}^s]$ é finito, temos também que $[N : N_0]$ é finito, pois

$$[N : N_0] = \Pi_{j-i \geqslant 1}[A : \mathfrak{a}^{j-i}],$$

onde cada fator $[A : \mathfrak{a}^{j-i}]$ aparece $m - (j-i)$ vezes.

Então defina o homomorfismo de grupos

$$\theta : N_0 \to N$$

dado por $\theta(M) = \widetilde{M}$, onde $M = (a_{i,j})$, $\widetilde{M} = (\widetilde{a}_{i,j})$ e

$$\widetilde{a}_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{(x-1)^{j-i}}.$$

Vamos ver que θ é um homomorfismo, de fato, sejam $C = (c_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$, então temos que

$$\theta((c_{i,j})(b_{i,j})) = \theta\left(\sum_{k=1}^{m} c_{i,k}b_{k,j}\right) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} c_{i,k}b_{k,j}}{(x-1)^{j-i}}\right),$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\theta((c_{i,j}))\theta((b_{i,j})) &= \left(\frac{c_{i,j}}{(x-1)^{j-i}}\right)\left(\frac{b_{i,j}}{(x-1)^{j-i}}\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{i,k}b_{k,j}}{(x-1)^{(j-k)+(k-i)}}\right)\\ &= \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} c_{i,k}b_{k,j}}{(x-1)^{j-i}}\right).\end{aligned}$$

Assim, lembrando que definimos Q anteriormente por $Q = (\mathbb{F}_p^* \times Q_0)^m$, defina $H = N_0 \rtimes Q$ um subgrupo de G e $f : H \to G_0$, onde a restrição de f em Q é a identidade e a restrição de f em N_0 é θ.

Teorema 4.2.7 ([15], 3.4)**.** *f é um endomorfismo virtual de grupos e $Z(G_0)$ é o subgrupo normal e f-invariante maximal K de G_0 que está contido em H. Portanto, $G = G_0/Z(G_0)$ é um grupo transitivo autossimilar de grau p^l, onde l é um polinômio cúbico de m.*

Demonstração. Primeiramente, note que

$$[G_0 : H] = [N : N_0] = \prod_{j-i\geqslant 1}[A : \mathfrak{a}^{j-i}],$$

onde cada fator $[A : \mathfrak{a}^{j-i}]$ aparece $m-(j-i)$ vezes. Agora, note que, se $j-i=1$ vamos ter entradas na diagonal exatamente acima da diagonal principal e existem $m-1$ entradas desse tipo, assim,

$$\prod_{j-i=1}[A : \mathfrak{a}^{j-i}] = ([A : \mathfrak{a}])^{m-1} = p^{m-1}.$$

Analogamente vemos que, em geral,

$$\prod_{j-i=k}[A : \mathfrak{a}^{j-i}] = ([A : \mathfrak{a}^{k}])^{m-k} = (p^k)^{m-k}.$$

Assim, concluímos que

$$[G_0 : H] = p^{m-1}p^{2(m-2)}\dots p^{i(m-i)}\dots p^{m-1} = p^l < \infty,$$

onde $l = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} i(m-i)$ é um polinômio cúbico de m, pois

$$l = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} i(m-i) = m \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} i - \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} i^2 = m\frac{m(m+1)}{2} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Agora, seja K um subgrupo normal de G_0 contido em H e tal que $f(K) \subseteq K$ e defina $K_0 = K \cap N$. Então temos que $f(K_0) \subseteq K_0$ e, portanto, para $B = (b_{i,j}) \in K_0$ temos que B é uma matriz triangular superior com 1 na diagonal, e $b_{i,j} \in \bigcap_{s \geqslant 1} \mathfrak{a}^s = 0$ para $i < j$. Portanto, B é a matriz identidade I_m, logo, $K_0 = K \cap N$ é o grupo trivial.

Assim, N intercepta K trivialmente e ambos são normais em G, deduzimos que $NK \simeq N \times K$, logo

$$K \subseteq C_{G_0}(N) = \{g \in G_0 : [g, N] = 1\} = \langle Z(N), Z(G_0) \rangle = Z(N) \times Z(G_0).$$

Agora, para $(\alpha, \beta) \in Z(N) \times Z(G_0)$, temos $f(\alpha, \beta) = (\alpha/(x-1)^{m-1}, \beta)$ e deduzimos que para $(\alpha, \beta) \in K$, temos $\alpha = 1_{G_0}$, pois K e N têm interseção trivial. Portanto, $K \subseteq Z(G_0)$, como queríamos.

Por fim, como $Z(G_0)$ são as matrizes escalares λI_m, onde $\lambda \in \mathbb{F}_p^* \times Q_0$ e I_m é a matriz identidade, temos que $Z(G_0) \subseteq Q$. Portanto, $f(Z(G_0)) = Z(G_0)$. $\square$

Teorema 4.2.8 ([15], 3.5). *O grupo G é um grupo autômata transitivo.*

Demonstração. Para $1 \leqslant i, j \leqslant m$, seja $x_i^{(j)}$ a matriz diagonal $diag(1, \ldots, 1, f_j, 1, \ldots, 1)$, onde o polinômio f_j está na i-ésima entrada. Seja u_i a matriz com entradas 1 na diagonal principal, 0 abaixo da diagonal principal e acima da diagonal principal todas as entradas são 0 exceto a $(i, i+1)$-ésima entrada, que é igual a 1.

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{i,i+1} = 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Note que o ideal $\mathfrak{a}^j = (x-1)^j A$ de A tem um transversal T_j em A definido por

$$T_j = \{g \in \mathbb{F}_p[x] : \deg(g) \leqslant j-1 \text{ ou } g = 0\}.$$

Vamos então fixar o seguinte transversal de H em G.

$$T = \{(a_{i,j}) \in M_m(\mathbb{F}_p[x]) : a_{i,j} = 0 \text{ se } j < i, a_{i,i} = 1, a_{i,j} \in T_{j-i} \text{ se } i < j\}.$$

Assim, G_0 é a união disjunta $\bigcup_{t \in T} Ht$. Agora, note que $Tu_i = T$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m - 1$. Portanto, $\mathcal{Q}(u_i) \backslash \{u_i\}$ contém apenas o grupo trivial.

Afirmação 1. Seja $t \in T$, então $t^{-1} \in T$.

Prova da afirmação 1. Vamos usar indução sobre m. Seja $t = (a_{i,j}) \in T$ uma matriz $m \times m$. Então $a_{i,i} = 1$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$, $a_{i,j} = 0$ para todos $1 \leqslant j < i \leqslant m$ e $\deg(a_{i,j}) \leqslant j - i - 1$ para $1 \leqslant i < j \leqslant m$ se $a_{i,j} \neq 0$.

Seja $B = A^{-1} = (b_{i,j})$. A afirmação 1 é equivalente a $b_{i,i} = 1$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$, $b_{i,j} = 0$ para todos $1 \leqslant j < i \leqslant m$ e $\deg(b_{i,j}) \leqslant j - i - 1$ para $1 \leqslant i < j \leqslant m$ se $b_{i,j} \neq 0$. As duas primeiras propriedades valem, pois A é uma matriz triangular superior.

Agora, seja $M = (m_{i,j})$ a matriz $(m - 1) \times (m - 1)$, onde $m_{i,j} = a_{i+1,j+1}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant m - 1$, isto é, M é a matriz obtida de A apagando a primeira linha e a primeira coluna. Então, como A é uma matriz triangular superior, se $\widetilde{M} = (\widetilde{m}_{i,j})$ é a matriz $(m - 1) \times (m - 1)$ definida por $\widetilde{m}_{i,j} = b_{i+1,j+1}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant m - 1$, isto é, $\widetilde{M}$ é a matriz obtida de $B = A^{-1}$ apagando a primeira linha e a primeira coluna, então temos que, como $AB = I_m$, a matriz obtida de AB apagando a primeira linha e a primeira coluna é a matriz identidade I_{m-1}, mas $M\widetilde{M}$ é exatamente essa matriz, assim $M\widetilde{M} = I_{m-1}$, logo $\widetilde{M} = M^{-1}$. Usando indução em m, temos que

$$\deg(\widetilde{m}_{i,j}) \leqslant j - i - 1 \text{ se } 1 \leqslant i < j \leqslant m - 1 \text{ e } \widetilde{m}_{i,j} \neq 0. \tag{4.1}$$

Analogamente, definimos $S = (s_{i,j})$ a matriz $(m-1) \times (m-1)$, onde $m_{i,j} = a_{i,j}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant m - 1$ e $\widetilde{S} = (\widetilde{s}_{i,j})$ é a matriz $(m - 1) \times (m - 1)$ definida por $\widetilde{s}_{i,j} = b_{i,j}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant m - 1$. Novamente, como A é uma matriz triangular superior, temos que $\widetilde{S} = S^{-1}$ e por indução sobre m temos que

$$\deg(\widetilde{s}_{i,j}) \leqslant j - i - 1 \text{ se } 1 \leqslant i < j \leqslant m - 1 \text{ e } \widetilde{s}_{i,j} \neq 0. \tag{4.2}$$

Combinando as Equações 4.1 e 4.2, obtemos

$$\deg(b_{i,j}) \leqslant j - i - 1 \text{ se } 1 \leqslant i < j \leqslant m, (i, j) \neq (1, m) \text{ e } b_{i,j} \neq 0.$$

Por fim, então, temos que considerar o coeficiente $b_{1,m}$. Agora, note que, como $AB = I_m$, temos que

$$0 = b_{1,m} + a_{1,2}b_{2,m} + \ldots + a_{1,m-1}b_{m-1,m} + a_{1,m}. \tag{4.3}$$

Se $a_{1,i}b_{i,m} \neq 0$ para $2 \leqslant i \leqslant m - 1$, então

$$\deg(a_{1,i}b_{i,m}) = \deg(a_{1,i}) + \deg(b_{i,m}) \leqslant i - 2 + m - i - 1 = m - 3 < m - 2. \tag{4.4}$$

Assim, das Equações 4.3 e 4.4 e do fato de que $\deg(a_{1,m}) \leqslant m - 2$ se $a_{1,m} \neq 0$, temos que

$$\deg(b_{1,m}) \leqslant m - 2 \text{ se } b_{1,m} \neq 0.$$

O que termina a demonstração da afirmação 1.

Agora considere o conjunto abaixo.

$$\Delta_k^{(s)} = \{(a_{i,j}) \in M_m(\mathbb{F}_p[x]) : a_{i,j} = 0 \text{ se } i > j, a_{i,i} = 1 \text{ se } i \neq k,$$
$$a_{k,k} = f_s \text{ e, se } i < j, \deg(a_{i,j}) \leqslant \deg(f_s) \text{ ou } a_{i,j} = 0\}$$

Afirmação 2. O conjunto dos estados $\mathcal{Q}(x_k^{(s)})$ está contido em $\Delta_k^{(s)}$. Em particular, $\mathcal{Q}(x_k^{(s)})$ é finito.

Prova da afirmação 2. Primeiramente, lembre que definimos $x_k^{(s)}$ no início da demonstração por $x_k^{(s)} = diag(1, \ldots, 1, f_s, 1, \ldots, 1)$, onde f_s está na k-ésima posição. Assim, $x_k^{(s)} \in \Delta_k^s$, portanto, vamos mostrar que

$$\bigcup_{\delta \in \Delta_k^{(s)}} \mathcal{Q}(\delta) \subseteq \Delta_k^{(s)}.$$

Portanto, seja $\delta \in \Delta_k^{(s)}$. Seja $d = [G_0 : H]$, vamos calcular os estados $\delta_1, \ldots, \delta_d$ de δ tais que a descrição recursiva de δ é

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)\sigma$$

para algum $\sigma \in S_d$. Queremos mostrar que $\delta_r \in \Delta_k^{(s)}$ para todo $1 \leqslant r \leqslant d$.

Seja $t_1 \in T$. Então existe um único $t_2 \in T$ tal que $t_1 \delta t_2^{-1} \in H$. Denote por

$$t_1 = (a_{i,j}), \delta = (b_{i,j}), t_2^{-1} = (c_{i,j}), t_1 \delta t_2^{-1} = (d_{i,j}).$$

Sabemos pela afirmação 1 que t_2^{-1} é uma matriz triangular superior tal que $t_2^{-1} \in T$, logo todas as matrizes t_1, δ e t_2^{-1} são matrizes triangulares superiores. Então

$$d_{i,j} = \sum_{i \leqslant r \leqslant u \leqslant j} a_{i,r} b_{r,u} c_{u,j}$$

para $i \leqslant j$, e $d_{i,j} = 0$ para $i > j$. Então os estados $\delta_1, \ldots, \delta_d$ de δ são

$$f(t_1 \delta t_2^{-1}) = (e_{i,j}).$$

Assim, pela definição do endomorfismo virtual f, temos

$$e_{i,j} = d_{i,j}/(x-1)^{j-i}$$

para $i \leqslant j$ e $e_{i,j} = 0$ para $i > j$. Queremos mostrar que $e_{i,j} \in \Delta_k^{(s)}$. Note que na diagonal de $(e_{i,j})$, temos $e_{i,i} = d_{i,i}/(x-1)^{i-i} = d_{i,i}$. Assim, a diagonal de $(e_{i,j})$ é igual à diagonal de $(d_{i,j})$, onde o polinômio f_s está na k-ésima entrada, que por sua vez é igual a $diag(1, \ldots, 1, f_s, 1, \ldots, 1)$, pois $(a_{i,j}), (c_{i,j}) \in T$ e $(b_{i,j}) \in \Delta_k^{(s)}$. Agora, note que, se $e_{i,j} \neq 0$, então

$$\deg(e_{i,j}) = \deg(d_{i,j}) - (j - i) \tag{4.5}$$

e

$$\deg(d_{i,j}) \leqslant \max_{\substack{i\leqslant r\leqslant u\leqslant j \\ a_{i,r},b_{r,u},c_{u,j}\neq 0}} \{\deg(a_{i,r}) + \deg(b_{r,u}) + \deg(c_{u,j})\}. \tag{4.6}$$

Agora note que $\deg(b_{r,u}) \leqslant \deg(f_s)$ para $b_{r,u} \neq 0$, $\deg(a_{i,r}) \leqslant r - i$ para $a_{i,r} \neq 0$ e $\deg(c_{u,j}) \leqslant j - u$ para $c_{u,j} \neq 0$, logo

$$\deg(a_{i,r}) + \deg(b_{r,u}) + \deg(c_{u,j}) \leqslant (r-i) + \deg(f_s) + (j-u) \leqslant \deg(f_s) + (j-i), \tag{4.7}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que $r \leqslant u$, logo $r - u \leqslant 0$. Assim, combinando 4.5, 4.6 e 4.7, temos que, para $i < j$, se $e_{i,j} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \deg(e_{i,j}) &= \deg(d_{i,j}) - (j-i) \\ &\leqslant (\deg(f_s) + (j-i)) - (j-i) \\ &\leqslant \deg(f_s). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $(e_{i,j}) \in \Delta_k^{(s)}$. O que completa a prova da afirmação 2.

Finalmente, observamos que G_0 é gerado como grupo pelo conjunto finito

$$\{x_i^{(j)} : 1 \leqslant i, j \leqslant m\} \bigcup \{u_i : 1 \leqslant i \leqslant m-1\}.$$

□

4.3 Grupos metabelianos

Definição 4.3.1. *Seja G um grupo finitamente gerado. Dizemos que G é um grupo metabeliano, ou ainda um grupo abeliano-por-abeliano, se existem e A e Q grupos abelianos e uma sequência exata curta*

$$1 \to A \to G \to Q \to 1$$

Sejam G, A e Q como na definição acima e sejam $a \in A$ e $q \in Q$. Podemos definir a ação de Q sobre A por $a \circ q = g^{-1}ag$, onde $q = gA$, pois $Q \simeq G/A$. Note que a ação não depende do representante escolhido g. De fato, seja g' um outro representante da classe de g, i.e., $q = g'A$. Então $g'A = gA$, i.e., $g^{-1}g' = a_0$ para algum $a_0 \in A$, ou ainda, $g' = a_0 g$. Assim, usando também que A é abeliano, temos que

$$(g')^{-1}ag' = (a_0g)^{-1}a(a_0g) = g^{-1}a_0^{-1}aa_0g = g^{-1}aa_0^{-1}a_0g = g^{-1}ag.$$

Aqui A é normal em G, logo a ação de G sobre A por conjugação passa para a ação de $Q \simeq G/A$ sobre A por conjugação, pois o próprio A age sobre si mesmo trivialmente, pois é abeliano. Agora pensamos em A como $\mathbb{Z}Q$-módulo, onde a ação de Q é a definida acima. Agora, como A é um grupo abeliano, mudamos de notação multiplicativa para aditiva.

Queremos aplicar o Lema 3.4.18 para $1 \to A \to G \to Q \to 1$. Sabemos que Q é um grupo abeliano finitamente gerado, portanto $Q = \mathbb{Z}^n \times Q_0$, onde Q_0 é um grupo abeliano finito, logo um produto direto de grupos cíclicos finitos. Agora, como grupos finitos são finitamente apresentáveis e $\mathbb{Z}$ é finitamente apresentável, concluímos que Q é finitamente apresentável. Assim, como G é finitamente gerado, do Lema 3.4.18 obtemos que A é finitamente gerado como subgrupo normal em G.

Agora, consideremos Q com notação multiplicativa e $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais um grupo com respeito à operação $+$. Então

$$\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n \times Q_0, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \bigoplus \mathrm{Hom}(Q_0, \mathbb{R})$$

Agora, $\mathrm{Hom}(Q_0, \mathbb{R}) = 0$, pois $\mathbb{R}$ é livre de torção. Assim,

$$\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \simeq \bigoplus \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}),$$

onde temos n cópias na soma direta. Mas $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, logo

$$\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n,$$

que é um grupo abeliano com respeito a $+$.

Agora, defina em $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ a relação de equivalência $\sim$ dada por $\chi_1 \sim \chi_2$ se, e somente se, existe um número real positivo r tal que $\chi_1 = r\chi_2$. Assim, defina

$$S(Q) = \frac{\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})\backslash\{0\}}{\sim} \simeq S^{n-1},$$

onde S^{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e o último isomorfismo vem do fato provado acima de que $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. $S(Q)$ é chamada esfera de caracteres.

Vamos denotar por $[\chi]$ a classe de equivalência de $\chi \in \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ e definimos o monoide

$$Q_\chi = \{q \in Q : \chi(q) \geqslant 0\}.$$

Por fim, considere o invariante de Bieri-Strebel definido em [6] por

$$\Sigma_A(Q) = \{[\chi] : A \text{ é finitamente gerado como } \mathbb{Z}Q_\chi\text{-módulo}\}.$$

O invariante definido acima foi usado em [6] na classificação de grupos metabelianos finitamente apresentáveis.

Teorema 4.3.2 ([6]). *Seja $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma sequência exata curta de grupos com G finitamente gerado e A e Q abelianos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *G é finitamente apresentável;*

2. *G é de tipo homológico FP_2;*

3. *$\Sigma_A(Q) \cup -\Sigma_A(Q) = S(Q)$.*

Este Teorema é provado em [6], como Teorema A e Teorema 5.4.

Vamos denotar o complementar $S(Q) \backslash \Sigma_A(Q)$ por $\Sigma_A^c(Q)$ e vamos dizer que A é m-tame como $\mathbb{Z}Q$-módulo se para cada $[\chi_1], \ldots, [\chi_m] \in \Sigma_A^c(Q)$ não necessariamente diferentes temos que $\chi_1 + \ldots + \chi_m \neq 0$. A terceira afirmação no Teorema 4.3.2 é equivalente a A ser 2-tame como $\mathbb{Z}Q$-módulo. A seguinte conjectura sugere quando um grupo metabeliano é de tipo FP_m.

Conjectura 4.3.3 (Conjectura FP_m para grupos metabelianos)**.** *Seja*

$$1 \to A \to G \to Q \to 1$$

uma sequência exata curta de grupos com G finitamente gerado e A e Q abelianos. Então G é de tipo FP_m se, e somente se, A é m-tame como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Vamos ver alguns casos em que a Conjectura FP_m vale, mas primeiro, considere a seguinte definição.

Definição 4.3.4. *Dizemos que um grupo G tem posto de Prüfer finito se existe um inteiro d tal que todo subgrupo finitamente gerado de G pode ser gerado por no máximo d elementos.*

Se G é uma extensão de A por Q com ambos A e Q abelianos e G finitamente gerado, então G tem posto de Prüfer finito exatamente quando $\dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) < \infty$ e a parte de torção de A é finita.

Assim, podemos considerar o seguinte teorema.

Teorema 4.3.5. *A Conjectura FP_m vale quando:*

1. *G tem posto de Prüfer finito;*

2. *A tem expoente finito e dimensão de Krul 1.*

Neste teorema, o expoente de A é o menor n natural tal que $nA = 0$.

A primeira parte deste teorema foi provada em [1] na seção III e a segunda parte foi provada em [14] como Teorema A.

4.4 Abordagem por Álgebra Comutativa

Considere o seguinte lema.

Lema 4.4.1 ([15], 6.1)**.** *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de $\mathbb{Z}Q$ tal que $B = \mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}$ tem dimensão de Krull 1. Então todo ideal não zero $\mathfrak{a}$ de B tem índice finito, i. e., $B/\mathfrak{a}$ é um anel finito.*

Antes de demonstrar o lema, vamos ver o seguinte exemplo.

Exemplo 4.4.2. *Tome $B = \mathbb{Z}$, que tem dimensão de Krull 1. Sabemos que todo ideal não nulo $\mathfrak{a}$ de $B = \mathbb{Z}$ é da forma $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$. Assim, pelo lema anterior, o anel $B/\mathfrak{a} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é finito.*

Demonstração do Lema 4.4.1. Primeiramente, note que sabemos que $\mathbb{Z}Q$ é um anel Noetheriano, pois Q é um grupo abeliano finitamente gerado. Agora, seja $\mathfrak{a}$ um ideal não nulo de B e considere o ideal radical de $\mathfrak{a}$ definido por

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{r \in B : \text{existe } k \geqslant 1 \text{ tal que } r^k \in \mathfrak{a}\}.$$

Existe apenas um número finito de ideais primos minimais de B acima de qualquer ideal, em particular acima de $\mathfrak{a}$. Portanto, sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ os ideais primos minimais de B acima de $\mathfrak{a}$. Então

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_k.$$

Como B tem dimensão de Krull 1 e B é um domínio, deduzimos que $0 \subset \mathfrak{p}_i$ é uma cadeia maximal de ideais primos para cada i, logo $\mathfrak{p}_i$ é um ideal maximal de B. Agora, considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{Z}Q \to B$. Como, $\mathfrak{p}_i$ é um ideal maximal em B, sabemos que $\mathfrak{q}_i = \pi^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ é um ideal maximal em $\mathbb{Z}Q$. Mas os ideais maximais em $\mathbb{Z}Q$ têm índice finito (de fato, isso é provado para o caso em que Q é policíclico em [20]), i.e., $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{q}_i$ é um anel finito. Assim, pelo isomorfismo de anéis induzido por π, temos que

$$\mathbb{Z}Q/\mathfrak{q}_i \simeq B/\mathfrak{p}_i.$$

Logo $B/\mathfrak{p}_i$ é finito para todo i. Assim concluímos que $B/\sqrt{\mathfrak{a}}$ mergulha no anel finito $B/\mathfrak{p}_1 \times B/\mathfrak{p}_2 \times \ldots \times B/\mathfrak{p}_k$ via mapa diagonal, i. e., $b + \sqrt{\mathfrak{a}}$ vai para $(b + \mathfrak{p}_1, \ldots, b + \mathfrak{p}_k)$. Em particular, $B/\sqrt{\mathfrak{a}}$ é finito.

Como B é um anel Noetheriano, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ é finitamente gerado como ideal, logo, seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto gerador de $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Então existe um inteiro positivo k tal que $b_i^k \in \mathfrak{a}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$. Agora, seja $b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, então podemos escrever $b = b_1a_1 + \ldots + b_ma_m$, onde $a_1, \ldots, a_m$ são elementos de B, logo, seja $s = m(k-1)+1$, então $b^s = (b_1a_1 + \ldots + b_ma_m)^s$, ou ainda

$$b^s = \sum_{z_1+\ldots+z_m=s} (b_1a_1)^{z_1} \ldots (b_ma_m)^{z_m}.$$

Agora, como $s = m(k-1)+1$, sabemos que para cada termo do somatório acima, existe um i tal que $z_i \geqslant k$, logo, $(b_i a_i)^{z_i} \in \mathfrak{a}$ e $(b_1 a_1)^{z_1} \ldots (b_m a_m)^{z_m} \in \mathfrak{a}$. Portanto, $b^s \in \mathfrak{a}$. Concluímos que

$$\sqrt{\mathfrak{a}}^s \subseteq \mathfrak{a} \text{ para } s = m(k-1)+1. \tag{4.8}$$

Assim, temos a filtração de ideais em B dada por

$$\sqrt{\mathfrak{a}}^s \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}^{s-1} \subseteq \ldots \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}^i \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}^{i-1} \subseteq \ldots \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Como B é Noetheriano, sabemos que cada quociente $\sqrt{\mathfrak{a}}^{i-1}/\sqrt{\mathfrak{a}}^i$ é um B-módulo finitamente gerado onde a ação de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ é nula, i. e., cada quociente $\sqrt{\mathfrak{a}}^{i-1}/\sqrt{\mathfrak{a}}^i$ é um $B/\sqrt{\mathfrak{a}}$-módulo finitamente gerado. Portanto, como vimos que $B/\sqrt{\mathfrak{a}}$ é finito, concluímos que cada quociente $\sqrt{\mathfrak{a}}^{i-1}/\sqrt{\mathfrak{a}}^i$ é finito. Assim,

$$\sqrt{\mathfrak{a}}/\sqrt{\mathfrak{a}}^s$$

é finito. Logo, novamente como $B/\sqrt{\mathfrak{a}}$ é finito, $B/\sqrt{\mathfrak{a}}^s$ é finito. Por fim, concluímos que $B/\mathfrak{a}$ é finito. □

Definição 4.4.3. *Seja P uma propriedade. Dizemos que um grupo G é residualmente P se a interseção de todos subgrupos normais K de G tais que G/K tem a propriedade P é o subgrupo trivial.*

$$\bigcap \{K : K \trianglelefteq G,\ G/K \textit{ tem a propriedade } P\} = 1.$$

Isso é equivalente a G ser subgrupo de um produto direto de grupos com a propriedade P. De fato, defina por $C = \{K : K \trianglelefteq G,\ G/K \text{ tem a propriedade } P\}$. Defina também

$$\theta : G \to \prod_{K \in C} G/K,$$

dada por $\theta(g) = (\ldots, gK, \ldots)$. Note também que $\ker(\theta) = \bigcap_{K \in C} K$. Assim, θ é injetiva se, e somente se $\bigcap \{K : K \trianglelefteq G,\ G/K \text{ tem a propriedade } P\} = 1$.

Exemplo 4.4.4. *Grupos livres são residualmente finitos ([10], Capítulo 1, Proposição 5).*

Exemplo 4.4.5. *Todo grupo abeliano-por-nilpotente é residualmente finito ([13], Teorema 1). Em particular, todo grupo metabeliano finitamente gerado é residualmente finito.*

Teorema 4.4.6 ([15], 6.2)**.** *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e B um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $C_Q(B) = \{q \in Q : B(q-1) = 0\} = 1$. Sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ ideais primos de $\mathbb{Z}Q$ tais que:*

a) Existe uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-módulos de B

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_i \subset B_{i+1} \subset \ldots \subset B_{r-1} \subset B_r = B,$$

onde $B_i/B_{i-1} \simeq \mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_{\alpha_i}$ para $1 \leqslant i \leqslant r$, onde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} = \{1, 2, \ldots, s\}$;

b) *Existe $d \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tal que o domínio $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$ tem dimensão de Krull 1 para todo $1 \leqslant i \leqslant d$ e, se $d < s$, o domínio $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$ tem dimensão de Krull 0 (i. e., é finito) para todo $d + 1 \leqslant i \leqslant s$;*

c) *Existe um elemento $\delta \in \mathbb{Z}Q \backslash \left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i \right)$ tal que a imagem de δ em $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$ não é invertível para cada $1 \leqslant i \leqslant d$.*

Então $G = B \rtimes Q$ é um grupo transitivo autossimilar.

Demonstração. Suponha que existe um homomorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos

$$\widetilde{f} : \widetilde{B} \to B, \tag{4.9}$$

tal que $\widetilde{B}$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de B de índice finito, i. e., $B/\widetilde{B}$ é finito, e não existe um $\mathbb{Z}Q$-submódulo M de $\widetilde{B}$ não-trivial tal que $\widetilde{f}(M) \subseteq M$. Assim, definimos

$$H = \widetilde{B} \rtimes Q$$

e extendemos $\widetilde{f}$ para um endomorfismo virtual de grupos

$$f : H \to G,$$

definindo $f|_Q = \mathrm{id}_Q$. Vamos provar que f é um endomorfismo virtual de G. Suponha que K é um subgrupo normal de G tal que $f(K) \subseteq K$. Então $M = K \cap B = K \cap \widetilde{B}$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $\widetilde{B}$ tal que $f(M) \subseteq M$, logo $M = 0$. Então $BK \simeq B \times K$, logo K age trivialmente em B via conjugação. Então, para o mapa canônico $\pi : G \to G/B = Q$ temos que $\pi(K) \subseteq C_Q(B)$ e, por hipótese, $C_Q(B) = 1$. Agora, como $B \cap K = 0$ deduzimos que $K \simeq \pi(K) = 1$, logo, f é um endomorfismo simples. Portanto, G é um grupo transitivo autossimilar.

Agora precisamos mostrar que o homomorfismo como enunciado em 4.9 de fato existe.

Note que existem $b_1, \ldots, b_r \in B$ tais que

$$B_i = b_1\mathbb{Z}Q + \ldots + b_i\mathbb{Z}Q$$

para $1 \leqslant i \leqslant r$.

Afirmação 1. Existe um $\mathbb{Z}Q$-submódulo C de índice finito em $B = B_r$ tal que, se $B_i/B_{i-1} \simeq \mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_{\alpha_i}$ é finito para algum $1 \leqslant i \leqslant r$, então $C \cap B_i = C \cap B_{i-1}$.

Note que, se a afirmação é verdadeira, como C tem índice finito em B, sempre que B_i/B_{i-1} é infinito, o quociente $(B_i \cap C)/(B_{i-1} \cap C)$ é um ideal de índice finito em B_i/B_{i-1}.

Prova da afirmação 1. Para provar a existência de C, nós vamos usar indução em r.

Suponha que $r = 1$. Então, a filtração do enunciado é $0 = B_0 \subset B_1 = B$. Se $B_1/B_0 \simeq B$ é finito, tome $C = 0$, e temos que C tem índice finito e $B_0 \cap C = 0 = B_1 \cap C$. Se $B_1/B_0 \simeq B$ é infinito, tome $C = B$ e temos que $B/C = 0$ e não há mais nada a se mostrar.

Assim, suponha, pela hipótese de indução, que existe um $\mathbb{Z}Q$-submódulo $\widetilde{C}$ de B_{r-1} tal que, se $B_i/B_{i-1} \simeq \mathbb{Z}Q/P_{\alpha_i}$ é finito para algum $1 \leqslant i \leqslant r-1$, então $\widetilde{C} \cap B_i = \widetilde{C} \cap B_{i-1}$. Se B_r/B_{r-1} é finito, então definimos $C = \widetilde{C}$. Assim, temos que $[B : \widetilde{C}] = [B : B_{r-1}][B_{r-1} : \widetilde{C}] < \infty$, portanto, C tem índice finito em B. Além disso, como $\widetilde{C} \subseteq B_{r-1}$, temos que $\widetilde{C} \cap B_{r-1} = \widetilde{C} = \widetilde{C} \cap B$.

Agora, suponha que B_r/B_{r-1} é infinito. É suficiente achar um $\mathbb{Z}Q$-submódulo C de índice finito em B tal que $C \cap B_{r-1} \subseteq \widetilde{C}$. Considere o grupo

$$\widetilde{G} = (B/\widetilde{C}) \rtimes Q.$$

Como todo grupo metabeliano finitamente gerado é residualmente finito (4.4.5) e $B_{r-1}/\widetilde{C}$ é finito, existe um epimorfismo

$$\theta : \widetilde{G} \to \Delta,$$

onde Δ é um grupo finito tal que $\ker(\theta) \cap (B_{r-1}/\widetilde{C}) = 1$. Então, se denotamos por $V = \ker(\theta) \cap (B/\widetilde{C})$, temos que V é um subgrupo normal de $\widetilde{G}$ dentro de $B/\widetilde{C}$, logo V é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $B/\widetilde{C}$. Finalmente, definimos C como a pré-imagem de V em B pelo epimorfismo canônico $\pi : B \to B/\widetilde{C}$, ou seja, $C = \pi^{-1}(V)$.

Assim, usando o elemento δ do enunciado do teorema, podemos definir o endomorfismo virtual

$$f : \widetilde{B} = C\delta \to B$$

dado por $f(c\delta) = c$ para $c \in C$. Observe que f é um homomorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos e f é bem definida, pois δ não é um divisor de zero em todo quociente $(C \cap B_i)/(C \cap B_{i-1})$ para $1 \leqslant i \leqslant r$, logo δ não é um divisor de zero em C. De fato, ou $(C \cap B_i)/(C \cap B_{i-1}) = 0$ ou $(C \cap B_i)/(C \cap B_{i-1})$ tem índice finito em B_i/B_{i-1} e B_i/B_{i-1} tem dimensão de Krull 1. Por hipótese, δ não é um divisor de zero em B_i/B_{i-1} se B_i/B_{i-1} tem dimensão de Krull 1, pois definimos δ tal que $\delta \in \mathbb{Z}Q \backslash \left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i \right)$.

Observe também que, como $(C \cap B_i)/(C \cap B_{i-1}) = 0$ ou $(C \cap B_i)/(C \cap B_{i-1})$ tem índice finito em B_i/B_{i-1} e B_i/B_{i-1} tem dimensão de Krull 1, existe uma filtração de C

$$0 = C \cap B_0 \subset C \cap B_1 \subset C \cap B_2 \subset \ldots \subset C \cap B_i \subset C \cap B_{i+1} \subset \ldots \subset C \cap B_{r-1} \subset C \cap B_r = C$$

com quocientes M_j, onde cada M_j é um $\mathbb{Z}Q$-módulo cíclico de dimensão de Krull no máximo 1. Então, pelo Lema 4.4.1, $M_j/M_j\delta$ é finito para cada j e então $C/C\delta$ é finito. Como B/C é finito, temos que $[B : \widetilde{B}] = [B : C][C : \widetilde{B}] < \infty$, logo $\widetilde{B} = C\delta$ tem índice finito em B.

Suponha que M é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $\widetilde{B}$ tal que $f(M) \subseteq M$. Então

$$M \subseteq \cap_{j\geqslant 1} C\delta^j$$

e $(M \cap B_i)/(M \cap B_{i-1}) = (M \cap B_i \cap C)/(M \cap B_{i-1} \cap C)$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $(B_i \cap C)/(B_{i-1} \cap C)$. Se B_i/B_{i-1} é finito, sabemos que $(B_i \cap C)/(B_{i-1} \cap C) = 0$ e portanto, $M \cap B_i = M \cap B_{i-1}$.

De agora em diante, suponha então que B_i/B_{i-1} é infinito. Então B_i/B_{i-1} é um domínio de dimensão de Krull 1.

Afirmação 2. Definindo a imagem de $M \cap B_i$ em $V_i = B_i/B_{i-1}$ por M_i, temos que $M_i \subseteq \cap_{j\geqslant 1} V_i\delta^j$.

Prova da afirmação 2. Recordamos que V_i é um domínio. Observe que δ não é um divisor de zero de $C/(C \cap B_i)$, pois $C/(C \cap B_i)$ tem uma filtração

$$0 = (C \cap B_i)/(C \cap B_i) \subset (C \cap B_{i+1})/(C \cap B_i) \subset \ldots \subset (C \cap B_r)/(C \cap B_i) = C/(C \cap B_i)$$

com quocientes $(C \cap B_j)/(C \cap B_{j-1})$ para $j \geqslant i+1$ que são ou 0 ou são ideias de índice finito em V_j e V_j tem dimensão de Krull 1 e, neste caso, por hipótese, δ não é um divisor de zero. Agora, como δ não é um divisor de zero em $C/(C \cap B_i)$, temos que $C\delta \cap B_i = (C \cap B_i)\delta$ e, por indução em j, temos que $C\delta^j \cap B_i = (C \cap B_i)\delta^j$. Portanto,

$$M \cap B_i \subseteq B_i \cap (\cap_{j\geqslant 1} C\delta^j) \subseteq \cap_{j\geqslant 1}(C \cap B_i)\delta^j \subseteq \cap_{j\geqslant 1} B_i\delta^j.$$

Como a imagem de δ não é invertível em V_i temos que $V_i\delta$ é um ideal próprio de V_i. Seja $\widetilde{\mathfrak{q}}_i$ um ideal maximal de V_i que esteja acima de $V_i\delta$. Considere o conjunto multiplicativamente fechado $S_i = V_i \backslash \widetilde{\mathfrak{q}}_i$ e a localização $V_i S_i^{-1}$. Então, $\mathfrak{q}_{0,i} = \widetilde{\mathfrak{q}}_i S_i^{-1}$ é o único ideal maximal de $A_i = V_i S_i^{-1}$, i. e., A_i é um anel local. Então o radical de Jacobson $J(A_i) = \mathfrak{q}_{0,i}$ e, definindo $\mathfrak{a}_i = \cap_{j\geqslant 1} \mathfrak{q}_{0,i}^j$, pelo Lema de Nakayama, temos que $\mathfrak{a}_i = 0$, logo $\cap_{j\geqslant 1} V_i\delta^j = 0$ e, consequentemente,

$$0 = M_i = (M \cap B_i)/(M \cap B_{i-1}).$$

De fato, se $\mathfrak{a}_i \neq 0$, então seu radical $\sqrt{\mathfrak{a}_i}$ é a interseção de todos os ideais primos acima dele. Como A_i tem dimensão de Krull 1, todo ideal primo acima de $\sqrt{\mathfrak{a}_i}$ é maximal, logo, como $\mathfrak{q}_{0,i}$ é o único maximal, temos que $\sqrt{\mathfrak{a}_i} = \mathfrak{q}_{0,i}$. Como A_i é Noetheriano, existe um inteiro k tal que

$$\mathfrak{q}_{0,i}^k = \sqrt{\mathfrak{a}_i}^k \subseteq \mathfrak{a}_i = \bigcap_{j\geqslant 1} \mathfrak{q}_{0,i}^j.$$

Portanto,

$$\mathfrak{q}_{0,i}^k = \mathfrak{q}_{0,i}^{k+1} = \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i\mathfrak{q}_{0,i}$$

e, pelo Lema de Nakayama (2.3.6), $\mathfrak{a}_i = 0$, uma contradição.

Note que provamos que $M \cap B_j = M \cap B_{j-1}$ para todo $1 \leqslant j \leqslant r$, portanto, $M = 0$ e f é um endomorfismo simples. □

Teorema 4.4.7 ([15], 6.3)**.** *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e B um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado de dimensão de Krull igual a 1 tal que*

$$C_Q(B) = \{q \in Q : B(q-1) = 0\} = 1.$$

Então, $G = B \rtimes Q$ é um grupo transitivo autossimilar.

Demonstração. Queremos mostrar que Q e B satisfazem as hipóteses do teorema anterior. Pela teoria do Capítulo 2, sabemos que existem ideais primos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ de $\mathbb{Z}Q$ tais que existe uma filtração de $\mathbb{Z}Q$-submódulos de B

$$0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_i \subseteq B_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq B_{r-1} \subseteq B_r = B,$$

onde $B_i/B_{i-1} \simeq \mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_{\alpha_i}$, para $1 \leqslant i \leqslant r$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} = \{1, 2, \ldots, s\}$ e mais ainda

$$Ass(B) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\} \subseteq Supp(B),$$

onde os elementos minimais dos três conjuntos de primos considerados acima são os mesmos. Como B tem dimensão de Krull 1, cada quociente $B_i/B_{i-1} \simeq \mathbb{Z}Q/P_{\alpha_i}$ tem dimensão de Krull no máximo 1, isto é, cada um desses quocientes tem dimensão de Krull 1 ou 0, no último caso, ele é finito.

Sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_d$ os ideais do conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$ para os quais $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$ tem dimensão de Krull 1. Para $1 \leqslant i \leqslant d$, seja $\mathfrak{q}_i$ um ideal maximal de $\mathbb{Z}Q$ tal que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{q}_i$ para $1 \leqslant i \leqslant d$.

Vamos mostrar que existe um elemento

$$\delta \in \mathbb{Z}Q \backslash \left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i \right)$$

tal que para cada $1 \leqslant i \leqslant d$ a imagem de δ em $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$ não é invertível. Basta mostrar que

$$\delta \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i$$

para garantir que a imagem de δ não é invertível em $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_i$, para $1 \leqslant i \leqslant d$. Assim, precisamos mostrar que a seguinte inclusão não pode contecer

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i.$$

Assim, suponha que a contingência acima vale. Podemos escolher $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ para $i \neq j$, logo, $\mathfrak{q}_i$ e $\mathfrak{q}_j$ são ideais coprimos, i.e., $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = \mathbb{Z}Q$, logo, $\cap_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i$ e portanto,

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i.$$

Suponha que j é o menor número tal que para algum $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant d$ temos

$$\mathfrak{q}_{i_1} \ldots \mathfrak{q}_{i_j} \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i.$$

Se $j \geqslant 2$, então temos elementos $q_2 \in \mathfrak{q}_{i_2}, \ldots, q_j \in \mathfrak{q}_{i_j}$ tais que $q_2 \ldots q_j \notin \cup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i$. Agora, como

$$\mathfrak{q}_{i_1} q_2 \ldots q_j \subseteq \mathfrak{q}_{i_1} \ldots \mathfrak{q}_{i_j} \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i$$

e cada $\mathfrak{p}_i$ é primo, concluímos que, para $\widetilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_{i_1}$, então

$$\widetilde{\mathfrak{q}} \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i,$$

uma contradição com a escolha de j. Assim, temos que $j = 1$ e a contingência acima ainda é válida.

Agora, seja $\mathfrak{b}_i = \widetilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_i$. Então,

$$\widetilde{\mathfrak{q}} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{b}_i.$$

Assim, suponha que podemos escolher, para cada j,

$$q_j \in \left(\bigcap_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \mathfrak{b}_i \right) \backslash \mathfrak{b}_j.$$

Então,

$$q = q_1 + \ldots + q_d \in \widetilde{\mathfrak{q}} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{b}_i$$

logo, para algum i, temos que $q \in \mathfrak{b}_i$. Portanto, $q_i = q - (\sum_{j \neq i} q_j) \in \mathfrak{b}_i$, uma contradição. Então, para algum $1 \leqslant j \leqslant d$, temos que $\cap_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}_j$, logo

$$\prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \mathfrak{b}_i \subseteq \bigcap_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}_j \subseteq \mathfrak{p}_j.$$

Como $\mathfrak{p}_j$ é um ideal primo, para algum $i \neq j$, temos que $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$, logo,

$$\widetilde{\mathfrak{q}} \mathfrak{p}_i \subseteq \widetilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_i = \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{p}_j.$$

Usando novamente que $\mathfrak{p}_j$ é primo e $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_j$ para $1 \leqslant i \neq j \leqslant d$, deduzimos que

$$\widetilde{\mathfrak{q}} \subseteq \mathfrak{p}_j.$$

Assim, o anel infinito (de dimensão de Krull 1) $\mathbb{Z}Q/\mathfrak{p}_j$ é um anel quociente do anel finito (de dimensão de Krull 0) $\mathbb{Z}Q/\widetilde{\mathfrak{q}}$, uma contradição.

Concluimos que existe um elemento $\delta \in \mathbb{Z}Q$ tal que

$$\delta \in \mathbb{Z}Q \backslash \left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{p}_i \right)$$

e

$$\delta \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathfrak{q}_i.$$

Por fim, basta usar esse elemento δ para aplicar o teorema anterior. □

Referências

[1] Åberg, H.; *Bieri-Strebel valuations (of finite rank).* Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), no. 2, 269 - 304.

[2] Atiyah, M.; *Introduction to commutative algebra.* Westview Press, 1994.

[3] Bartholdi, L.; Neuhauser, M.; Woess, W.;*Horocyclic products of trees.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 10 (2008), no. 3, 771 - 816.

[4] Bestvina, M.; Brady, N.; *Morse theory and finiteness properties of groups.* Inventiones Mathematicae, vol. 129 (1997), no. 3, pp. 445 - 470.

[5] Bieri, R.; *Homological dimension of discrete groups.* Queen Mary College, London, 1981.

[6] Bieri, R.; Strebel, R.; *Valuations and finitely presented metabelian groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980), no. 3, 439 - 464.

[7] Borges, H.; Tengan, E.; *Álgebra comutativa em quatro movimentos.* IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[8] Brown, K. S.; *Cohomology of groups.* Springer, 1982.

[9] Bux, K. U.; *Finiteness properties of soluble arithmetic groups over global function fields.* Geom. Topol. 8 (2004), 611 - 644.

[10] Cohen, D. E.; *Combinatorial Group Theory: a topological approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[11] Eisenbud, D.; *Commutative algebra: With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[12] Evens, L.; *The Cohomology of Groups.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1991.

[13] Hall, P.; *On the finiteness of certain soluble groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 9 1959, 595 - 622.

[14] Kochloukova, D. H.; *The FP_m-conjecture for a class of metabelian groups.* J. Algebra 184 (1996), no. 3, 1175 - 1204.

[15] Kochloukova, D. H.; Sidki, S. N.; *Self-similar groups of type FP_n*

[16] Nekrashevych, V.; *Self-similar groups.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 117.

[17] Nekrashevych,V.; *Virtual endomorphisms of groups.* Algebra and Discrete Mathematics 1, (2002), no. 1, 96-136.

[18] Nekrashevych, V.; Sidki, S.; *Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms.* Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects, 375 - 404, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 311, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[19] Robinson, D. J. S.; *A course in the theory of groups.* Springer-Verlag New York, 1996.

[20] Roseblade, J. E.; *Group rings of polycyclic groups.* J. Pure Appl. Algebra 3 (1973), 307 - 328.

[21] Rotman, J. J.; *An introduction to homological algebra.* Academic Press, New York, 1979.