UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Vinícius Franco Vasconcelos

# Análise Não-Standard: Aplicações à Análise Harmônica e à Probabilidade

Campinas

2021

Vinícius Franco Vasconcelos

# Análise Não-Standard: Aplicações à Análise Harmônica e à Probabilidade

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Pedro Jose Catuogno

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Vinícius Franco Vasconcelos e orientada pelo Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno.

Campinas

2021

**Dissertação de Mestrado defendida em 19 de julho de 2021 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSE CATUOGNO**

**Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO**

**Prof(a). Dr(a). MARCELO ESTEBAN CONIGLIO**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

V441a Vasconcelos, Vinícius Franco, 1991-
Análise não-standard : aplicações à análise harmônica e à probabilidade / Vinícius Franco Vasconcelos. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Pedro Jose Catuogno.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise matemática incomum. 2. Números hiperreais. 3. Princípio da transferência (Teoria do modelo). 4. Medidas de Loeb. I. Catuogno, Pedro Jose, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Nonstandard analysis : applications to harmonic analysis and probability
**Palavras-chave em inglês:**
Nonstandard mathematical analysis
Hyperreal numbers
Transfer principle (Model theory)
Loeb measures
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestre em Matemática
**Banca examinadora:**
Pedro Jose Catuogno [Orientador]
Paulo Regis Caron Ruffino
Marcelo Esteban Coniglio
**Data de defesa:** 19-07-2021
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-5375-1148
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7252498686746501

*Não dedico.*

*ou*

*Dedico a todos os leitores,*
*e a somente esses,*
*a quem este trabalho não é dedicado.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Pedro Jose Catuogno e ao meu "coorientador informal" Marcelo Esteban Coniglio, pela paciência, pela compreensão, pelo incentivo e pela enorme ajuda acadêmica e humana.

Agradeço à minha querida companheira Eliani Magalhães Beloni, pelo apoio e por ter estado ao meu lado num dos momentos mais difíceis desse processo. Embora não seja um agradecimento propriamente dito, cito aqui o meu filho Manuel Elícius Magalhães Franco, cujo nascimento distou menos de três dias da defesa deste trabalho, ressignificou vários aspectos da minha vida e abriu um novo rol de desafios.

Agradeço aos meus amigos que conheci no mestrado, em especial Fábio Campos Castro Meneghetti, Alejandro Otero Robles, Lina Isabel Triviño Vieira, e à minha amiga de graduação Andressa Paola Cordeiro, pelas conversas e por me ajudarem a não surtar. Infelizmente acabamos nos afastando nesse último ano de mestrado em decorrência da pandemia.

Agradeço à comunidade da Unicamp, pessoas que mantêm essa universidade funcionando mesmo em meio às adversidades. Não posso deixar de citar aqui sua infraestrutura, em particular do IMECC, das várias bibliotecas, dos restaurantes universitários, do SAPPE e do CECOM.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*"Não sou nada.*

*Nunca serei nada.*

*Não posso querer ser nada.*

*À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo."*

*(Álvaro de Campos, pseudônimo de Fernando Pessoa)*

# Resumo

Este trabalho visa apresentar uma introdução sucinta a métodos de Análise Não-Standard, bem como alguns exemplos de aplicações à Análise usual. Começando pela construção do conjunto dos números hiperreais utilizando ultraprodutos, no primeiro capítulo nós desenvolvemos o básico da teoria, passando pelo Princípio da Transferência até chegar às medidas de Loeb. Os capítulos seguintes são destinados a aplicações.

**Palavras-chave:** Análise Não-Standard. Números Hiperreais. Princípio da Transferência. Medidas de Loeb.

# Abstract

The present work aims to show a brief introduction to Nonstandard Analysis methods, as well as some examples of applications to usual Analysis. Beginning with hyperreal numbers set construction by ultraproducts, in the first chapter we develop the basic theory, through Transfer Principle up to Loeb measures. The subsequent chapters are for applications.

**Keywords:** Nonstandard Analysis. Hyperreal Numbers. Transfer Principle. Loeb Measures.

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Conjunto dos números naturais (com o zero) |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto dos números inteiros |
| $\mathbb{Q}$ | Conjunto dos números racionais |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais |
| $\mathbb{C}$ | Conjunto dos números complexos |
| $\mathbb{R}_+$ | Conjunto dos números reais não-negativos |
| $\mathbb{R}_+^*$ | Conjunto dos números reais positivos |
| $\beta\mathbb{R}$ | Compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{R}$ |
| $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ | Conjunto das matrizes $m$ por $n$ com entradas complexas |
| $\mathcal{P}(X)$ | Conjunto das partes de $X$ |
| $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ | Conjunto das partes finitas de $X$ |
| $\mathcal{P}_{\text{cof}}(X)$ | Conjunto das partes cofinitas de $X$ |
| $\mathcal{V}(X)$ | Conjunto universo extendido de $X$ |
| $\mathcal{V}_m(X)$ | Nível $m$ do universo extendido de $X$ |
| $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}(X)$ | Conjunto das funções em $\mathcal{V}(X)^{\mathbb{N}}$ de ranque constante |
| $M$ | Função colapso de Mostowski |
| ${}^*\mathbb{R}$ | Conjunto dos números hiperreais |
| ${}^*\mathbb{N}$ | Conjunto dos números hipernaturais |
| ${}^*X$ | Imagem de $X$ pela função $*$ |
| $\text{st}(X)$ | Parte standard de $X$ |
| $\text{Fin}(X)$ | Conjunto dos pontos finitos de $X$ |
| $\text{Ns}(X)$ | Conjunto dos pontos quase-standard de $X$ |
| $\sigma(X)$ | $\sigma$-Álgebra gerada por $X$ |
| $L(\mu)$ | Medida de Loeb associada a $\mu$ |
| $\{a,\dots,b\}$ | Conjunto $\{x \in {}^*\mathbb{Z} : a \le x \le b\}$ |
| $\{f(a),\dots,f(b)\}$ | Conjunto $\{f(x) : x \in \{a,\dots,b\}\}$ |
| $\dot\bigcup$ | União usual de conjuntos; notação utilizada quando os conjuntos envolvidos são dois a dois disjuntos |

# Sumário

# Panorama Histórico

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) é considerado, junto a Isaac Newton (1642-1727), um dos pais do Cálculo Diferencial e Integral. Cada um dos dois cientistas desenvolveu a teoria usando métodos distintos, sendo que Leibniz se aportava na noção de *números infinitesimais*. Embora a notação mais utilizada atualmente seja a de Leibniz, a posterior fundamentação do Cálculo veio com o conceito de *limite*, que é mais próxima da abordagem utilizada por Newton.

A noção de infinitesimal careceu de uma definição precisa por séculos, permanecendo somente a nível intuitivo. Algumas tentativas foram feitas, mas foi com Abraham Robinson (1918-1974) que, em 1961, o conceito de infinitesimal tomou forma. Usando métodos de Teoria dos Modelos, mais especificamente Modelos da Aritmética Não-Padrão, Robinson construiu o que chamou de *Análise Não-Padronizada* (referida neste trabalho como *Análise Não-Standard*).

Uma vez que junto a essa construção vem toda uma bagagem metamatemática, tal abordagem se mostra extremamente útil no tratamento de problemas em diversos ramos da Matemática. Segundo Kurt Gödel (1906-1978), *"a Análise Não-Standard com frequência torna as demonstrações substancialmente mais simples"*, e Robinson completa com *"a simplicidade facilita a descoberta"*.

Um breve resumo histórico pode ser encontrado nos prefácios de [10]. Para um texto mais aprofundado sobre a bibliografia de Robinson, consulte [3].

# Capítulo 1

# Conceitos de Análise Não-Standard

Nesse capítulo apresentamos o conjunto dos números hiperreais ao leitor, objeto básico da Análise Não-Standard, bem como todo um ambiente onde podemos fazer construções a partir dele. Apresentamos alguns resultados elementares que ilustram semelhanças e diferenças para com o conjunto dos números reais, particularmente o Princípio da Transferência, que será bem útil nos próximos capítulos. Ao final do capítulo também fazemos uma breve apresentação da medida de Loeb.

## 1.1 Filtros e Ultrafiltros

O objetivo dessa seção é apresentar o conceito de *ultrafiltro*, que será utilizado na construção do conjunto dos hiperreais. No decorrer dessa seção consideraremos fixado um conjunto não-vazio $a$.

**Definição 1.1.1.** Dizemos que um subconjunto $f \subseteq \mathcal{P}(a)$ é um *filtro* de $a$ se:

(i) $a \in f$ e $\varnothing \notin f$;

(ii) dados $u, v \in f$, temos $u \cap v \in f$;

(iii) dado $w \in f$, se $s \subseteq a$ é tal que $w \subseteq s$ então $s \in f$.

Alguns exemplos de filtros de $a$:

- Dado um subconjunto não-vazio $s \subseteq a$, o conjunto $\mathcal{P}_s(a) = \{k \in \mathcal{P}(a) : s \subseteq k\}$ é um filtro de $a$, chamado de *filtro principal gerado* por $s$.

- Se $a$ é infinito, então o conjunto $\mathcal{P}_{\text{cof}}(a) = \{k \in \mathcal{P}(a) : a \smallsetminus k \text{ é finito}\}$ é um filtro de $a$, chamado de *filtro de Fréchet* de $a$. Os elementos de $\mathcal{P}_{\text{cof}}(a)$ são chamados de subconjuntos *cofinitos* de $a$.

**Definição 1.1.2.** Seja $f$ um filtro de $a$. Dizemos que $f$ é um *filtro maximal* se para qualquer filtro $g$ de $a$ tal que $f \subseteq g$ temos $f = g$. Dizemos que $f$ é um *ultrafiltro* se para todo subconjunto $s \subseteq a$ temos $s \in f$ ou $a \smallsetminus s \in f$.

Os conceitos de filtro maximal e de ultrafiltro são literalmente o mesmo. Mas antes de provarmos isso, apresentamos um conceito relacionado ao de filtro: o da *propriedade da intersecção finita*. Dizemos que um conjunto não-vazio $c$ satisfaz a propriedade da intersecção finita se para todo subconjunto finito não-vazio $s \subseteq c$ temos $\bigcap s \neq \varnothing$. Assim, enunciamos o seguinte lema.

**Lema 1.1.3.** Dado um subconjunto não-vazio $c \subseteq \mathcal{P}(a)$, se $c$ satisfaz a propriedade da intersecção finita, então existe um filtro $f$ de $a$ tal que $c \subseteq f$.

*Demonstração.* Seja $f = \left\{k \in \mathcal{P}(a) : \exists w \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(c)\ (w \neq \varnothing \wedge \bigcap w \subseteq k)\right\}$. Claro que $a \in f$, $\varnothing \notin f$, e se $z \in f$ com $z \subseteq s \subseteq a$ então $s \in f$. Dados $x, y \in f$, existem $u, v \subseteq c$ finitos e não-vazios tais que $\bigcap u \subseteq x$ e $\bigcap v \subseteq y$, segue que $\bigcap(u \cup v) = \bigcap u \cap \bigcap v \subseteq x \cap y$, logo $x \cap y \in f$ e portanto $f$ é um filtro de $a$. Além disso, dado $t \in c$, claro que $\bigcap\{t\} \subseteq t$, logo $t \in f$ e portanto $c \subseteq f$. $\square$

**Proposição 1.1.4.** Dado um filtro $f$ de $a$, temos que $f$ é um ultrafiltro se e somente se $f$ é um filtro maximal.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $g$ um filtro de $a$ tal que $f \subseteq g$. Se $g \smallsetminus f \neq \varnothing$, então existe $t \in g \smallsetminus f$, e como $t \notin f$ temos $a \smallsetminus t \in f$, logo $a \smallsetminus t \in g$, o que implica $\varnothing = t \cap (a \smallsetminus t) \in g$, absurdo, logo $g \smallsetminus f = \varnothing$, isto é, $f = g$, e portanto $f$ é um filtro maximal.
($\Leftarrow$) Suponha que existe um subconjunto $s \subseteq a$ tal que $s \notin f$ e $a \smallsetminus s \notin f$. Claro que $s \neq \varnothing$. Seja $f_s = f \cup \{s\}$. Dado $u \subseteq f$ finito não-vazio, temos $\bigcap u \in f$, logo $\bigcap u \neq \varnothing$. Dado $v \in f$, se $v \cap s = \varnothing$ então $v \subseteq a \smallsetminus s$ e teríamos $a \smallsetminus s \in f$, absurdo, logo $v \cap s \neq \varnothing$. Assim, $\bigcap(u \cup \{s\}) = \left(\bigcap u\right) \cap s \neq \varnothing$, portanto $f_s$ satisfaz a propriedade da intersecção finita e existe um filtro $h$ de $a$ tal que $f_s \subseteq h$, o que implica $f \subsetneq h$, logo $f$ não é um filtro maximal. O resultado segue da contrapositiva. $\square$

**Proposição 1.1.5.** Dado um ultrafiltro $f$ de $a$, temos que se $u \cup v \in f$ então $u \in f$ ou $v \in f$.

*Demonstração.* Se $u \notin f$, então $a \setminus u \in f$, logo $(a \setminus u) \cap (u \cup v) \in f$, e como $(a \setminus u) \cap (u \cup v) = v \setminus u \subseteq v$, segue que $v \in f$. □

**Corolário 1.1.6.** Se $a$ é finito, então todos os ultrafiltros de $a$ são filtros principais.

*Demonstração.* Se $a = \{x_0, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, basta escrever $a = \{x_0\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$. □

**Lema 1.1.7.** Se $p$ é uma $\subset$-cadeia não-vazia cujos elementos são filtros de $a$, então $\bigcup p$ é um filtro de $a$.

*Demonstração.* Claro que $a \in \bigcup p$ e $\varnothing \notin \bigcup p$. Dados $u, v \in \bigcup p$, existem $f, g \in p$ tais que $u \in f$ e $v \in g$. Como $f \subseteq g$ ou $f \supseteq g$, isto é, $f \cup g = f$ ou $f \cup g = g$, temos $f \cup g \in p$ e $u, v \in f \cup g$, logo $u \cap v \in f \cup g$, e segue que $u \cap v \in \bigcup p$. Dados $w \in \bigcup p$ e $s \subseteq a$ tal que $w \subseteq s$, existe $h \in p$ tal que $w \in h$, logo $s \in h$ e segue que $s \in \bigcup p$. Portanto $\bigcup p$ é um filtro de $a$. □

**Teorema 1.1.8** (Tarski)**.** Dado um filtro $f$ de $a$, existe um ultrafiltro $g$ de $a$ tal que $f \subseteq g$.

*Demonstração.* Considere o conjunto $q = \{k \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)) : k \text{ é um filtro de } a \wedge f \subseteq k\}$ e a ordem da inclusão em $q$. Temos que $q \neq \varnothing$, pois $f \in q$. Além disso, pelo Lema 1.1.7, toda cadeia em $q$ tem um limitante superior, logo, pelo Lema de Zorn[1], segue que $q$ tem um elemento maximal $g$. □

Ultrafiltros capturam algumas características de demonstrações. Por exemplo, tome um ultrafiltro $h$ de $a$ fixado. Para cada fórmula $\varphi(z)$ com variável livre $z$, considere o conjunto $\widetilde{\varphi} = \{k \in a : \varphi(k)\}$.

- Se $\top$ é uma tautologia, então $\widetilde{\top} \in h$; se $\bot$ é uma contradição, então $\widetilde{\bot} \notin h$ (condição (i) da definição de filtro);
- Se $\widetilde{\phi} \in h$ e $\widetilde{\psi} \in h$, então $\widetilde{\phi \wedge \psi} \in h$ (condição (ii) da definição de filtro);

[1] Note que utilizamos o Lema de Zorn na demonstração do Teorema 1.1.8. De fato, esse não é um teorema de ZF, e como a existência do conjunto dos números hiperreais depende diretamente dele, segue que todo o trabalho que desenvolvemos foi desde o início fortemente embasado no Axioma da Escolha.

- Se $\widetilde{\phi} \in h$ e $\phi(z) \to \psi(z)$, então $\widetilde{\psi} \in h$ (condição (iii) da definição de filtro);
- Temos $\widetilde{\phi} \in h$ se e somente se $\widetilde{\neg\phi} \notin h$ (definição de ultrafiltro);
- Se $\widetilde{\phi \vee \psi} \in h$, então $\widetilde{\phi} \in h$ ou $\widetilde{\psi} \in h$ (Proposição 1.1.5).

Se $h$ é um ultrafiltro principal, isto é, existe $x \in a$ tal que $\{x\} \in h$, então $\widetilde{\varphi} \in h$ (que pode ser interpretado como a "veracidade" de $\varphi(z)$ em $h$) é equivalente a $\varphi(x)$. Deste modo, no que segue estaremos interessados em ultrafiltros que não sejam principais, ou, equivalentemente, que contenham o filtro de Fréchet de $a$ (em particular, $a$ deve ser necessariamente infinito).

Antes de prosseguir, vale comentar uma relação entre ultrafiltros e medidas com valores em $\{0,1\}$. Há uma bijeção natural entre o conjunto dos ultrafiltros de $a$ e o conjunto das medidas em $a$ com valores em $\{0,1\}$ sobre a $\sigma$-álgebra $\mathcal{P}(a)$ dada por

$$\begin{array}{ccccccc} f & \longmapsto & \mu_f & : & \mathcal{P}(a) & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & & & s & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } s \in f \\ 0 & \text{se } s \notin f, \end{cases} \end{array}$$

de modo que $\widetilde{\varphi} \in h$ é equivalente a dizer que $\varphi(z)$ é verificada $\mu_h$-q.t.p. Assim, quando $\widetilde{\varphi} \in h$, também dizemos que $\varphi(z)$ é verificada $h$-q.t.p. ou que $\varphi(z)$ é verificada em $h$.

## 1.2 Conjunto dos Números Hiperreais

O objetivo dessa seção é apresentar uma construção de ${}^*\mathbb{R}$, o *conjunto dos números hiperreais*, bem como mostrar que ${}^*\mathbb{R}$ é um corpo ordenado que estende $\mathbb{R}$. No decorrer dessa e das próximas seções desse capítulo consideraremos fixado um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}_{\text{cof}}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U}$.

Considere a relação $\sim_{\mathcal{U}}$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \quad \text{sse} \quad \{k \in \mathbb{N} : f(k) = g(k)\} \in \mathcal{U}.$$

Não é difícil ver que $\sim_{\mathcal{U}}$ é uma relação de equivalência. Definimos, então, o *conjunto dos* *números hiperreais*[2] como ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim_{\mathcal{U}}$. Perceba, deste modo, que a existência de ${}^*\mathbb{R}$ depende diretamente do Axioma da Escolha, bem como todos os resultados que decorrem da existência de ${}^*\mathbb{R}$. O quociente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim_{\mathcal{U}}$ também é chamado de *ultraproduto* de $\mathbb{R}$ em relação a $\mathcal{U}$, e denotado por $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$.

Definimos as operações em ${}^*\mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{U}} + [g]_{\mathcal{U}} &= [f+g]_{\mathcal{U}} \\ [f]_{\mathcal{U}} \cdot [g]_{\mathcal{U}} &= [f \cdot g]_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

e a ordem em ${}^*\mathbb{R}$ como

$$[f]_{\mathcal{U}} < [g]_{\mathcal{U}} \quad \text{sse} \quad \{k \in \mathbb{N} : f(k) < g(k)\} \in \mathcal{U},$$

para cada $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Para verificar que de fato as operações e a ordem estão bem definidas em ${}^*\mathbb{R}$, tome $a, b, c, d \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $a \sim_{\mathcal{U}} c$ e $b \sim_{\mathcal{U}} d$. Temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a \sim_{\mathcal{U}} c \\ b \sim_{\mathcal{U}} d \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a(k) = c(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\ b(k) = d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & a(k) = c(k) \ \wedge \ b(k) = d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} a(k) + b(k) = c(k) + d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\ a(k) \cdot b(k) = c(k) \cdot d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a + b \sim_{\mathcal{U}} c + d \\ a \cdot b \sim_{\mathcal{U}} c \cdot d \end{cases} \end{aligned}$$

O que mostra que as operações estão bem definidas. Além disso, como $a(k) = c(k)$ e

[2] Note que a definição de ${}^*\mathbb{R}$ depende diretamente de quem é $\mathcal{U}$. No entanto, na abordagem deste trabalho lidamos com propriedades que valem independentemente da escolha de $\mathcal{U}$, de modo a não nos preocuparmos com isso.

$b(k) = d(k)$ valem $\mathcal{U}$-q.t.p., temos:

$$\begin{aligned}
& a(k) < b(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\
\Leftrightarrow \quad & a(k) < b(k) \ \wedge \ a(k) = c(k) \ \wedge \ b(k) = d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\
\Leftrightarrow \quad & c(k) < d(k) \ \wedge \ a(k) = c(k) \ \wedge \ b(k) = d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \\
\Leftrightarrow \quad & c(k) < d(k) \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}
\end{aligned}$$

O que mostra que a ordem também está bem definida.

Falta mostrar que a ordem definida acima é de fato uma relação de ordem. Mais do que isso, afirmamos que ${}^*\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, com $0_{^*\mathbb{R}} = [\langle 0 : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$ e $1_{^*\mathbb{R}} = [\langle 1 : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$. Todas as propriedades são imediatas, exceto talvez pela tricotomia da ordem e pela existência de inverso multiplicativo.

Para verificar a tricotomia, dados $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, como

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{k \in \mathbb{N} : u(k) < v(k) \ \vee \ u(k) = v(k) \ \vee \ u(k) > v(k)\} \\
&= \{k \in \mathbb{N} : u(k) < v(k)\} \cup \{k \in \mathbb{N} : u(k) = v(k)\} \cup \{k \in \mathbb{N} : u(k) > v(k)\},
\end{aligned}$$

segue da Proposição 1.1.5 que um desses três conjuntos pertence a $\mathcal{U}$, isto é, $[u]_{\mathcal{U}} < [v]_{\mathcal{U}}$ ou $[u]_{\mathcal{U}} = [v]_{\mathcal{U}}$ ou $[v]_{\mathcal{U}} < [u]_{\mathcal{U}}$, e a definição de filtro implica que é somente um deles, já que são conjuntos disjuntos.

Para o inverso multiplicativo, seja $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $[w]_{\mathcal{U}} \neq 0_{^*\mathbb{R}}$, isto é, $w(k) \neq 0$ $\mathcal{U}$-q.t.p. Defina $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 \,/\, x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e tome $w' = \alpha \circ w$. Temos $\{k \in \mathbb{N} : w(k) \cdot w'(k) = 1\} = \{k \in \mathbb{N} : w(k) \neq 0\} \in \mathcal{U}$, isto é, $[w \cdot w']_{\mathcal{U}} = 1_{^*\mathbb{R}}$.

Note que a função $\iota : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ dada por $\iota(x) = [\langle x : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$ é um homomorfismo injetor, de maneira que ${}^*\mathbb{R}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$. Deste modo, identificaremos $\mathbb{R}$ com $\operatorname{Im} \iota$, escrevendo $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ e confundindo $\iota(x)$ com $x$.

## 1.3 Infinitesimais

Uma motivação por trás da construção dos hiperreais reside no fato de que em ${}^*\mathbb{R}$ existem números *infinitesimais*. Considere, por exemplo, os números $\varepsilon, \omega \in {}^*\mathbb{R}$ dados por $\varepsilon = [\langle 1 \,/\, \max\{1, k\} : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$ e $\omega = [\langle k : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$. Note que, qualquer que seja $r \in \mathbb{R}$ positivo, temos $\varepsilon < r < \omega$. Isso nos leva à seguinte definição.

**Definição 1.3.1.** Dado $x \in {}^*\mathbb{R}$, dizemos que

- $x$ é *infinitesimal* se $|x| < r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ positivo;
- $x$ é *infinito* se $|x| > r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ positivo;
- $x$ é *finito* se $|x| < r$ para algum $r \in \mathbb{R}$ positivo.

Onde o módulo é definido de maneira análoga a em $\mathbb{R}$ como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que, se $\eta \in {}^*\mathbb{R}$ é dada $\mathcal{U}$-q.t.p. pela sequência $\langle \eta_k \rangle$ (isto é, $\eta = [\langle \eta_k \rangle]_{\mathcal{U}}$), então $|\eta| = [\langle |\eta_k| \rangle]_{\mathcal{U}}$, de modo que temos a desigualdade triangular em ${}^*\mathbb{R}$, e em particular a soma de dois números finitos é finita e a soma de dois números infinitesimais é infinitesimal.

Considere a relação $\approx$ em ${}^*\mathbb{R}$ dada por

$$x \approx y \quad \text{sse} \quad x - y \text{ é infinitesimal.}$$

A relação $\approx$ assim definida é uma relação de equivalência, e dizemos que $x$ e $y$ são *infinitesimalmente próximos*. Além disso, se $x$ é finito, então existe um único $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ tal que $x \approx \mathrm{st}(x)$. O número $\mathrm{st}(x)$ é chamado de *parte standard* de $x$.

Para verificar que $\mathrm{st}(x)$ está bem definido, podemos assumir sem perda de generalidade que $x$ é positivo. Como $x$ é finito, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x < r$, logo o conjunto $a = \{k \in \mathbb{R} : k < x\}$ é limitado superiormente. Além disso, $a$ é não-vazio pois $0 \in a$. Seja $s = \sup a$. Se $x - s$ não é infinitesimal, então existe um $t \in \mathbb{R}$ positivo tal que $|x - s| > t$. Se $x - s > t$, então $s + t < x$, isto é, $s + t \in a$, absurdo pois $s$ é um limitante superior de $a$. Se $s - x > t$, então $s - t > x$, isto é, $s - t$ é um limitante superior de $a$, absurdo pois $s$ é o supremo de $a$. Assim, obtemos $x \approx s$. Ademais, a unicidade segue do fato de que o único infinitesimal em $\mathbb{R}$ é o zero, e portanto $\operatorname{st}(x)$ está bem definido.

Para ilustrar um pouco o comportamento da função st, considere $\langle \xi_k \rangle$ uma sequência limitada de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e tome $\xi = [\langle \xi_k \rangle]_{\mathcal{U}}$. Temos que $\xi$ é finito e, além disso, $\operatorname{st}(\xi)$ é um ponto de acumulação de $\langle \xi_k \rangle$ (qual dos pontos de acumulação é determinado por $\mathcal{U}$). Em particular, se $\langle \xi_k \rangle$ é convergente, então $\operatorname{st}(\xi) = \lim_{k \to \infty} \xi_k$.

**Proposição 1.3.2.** Se $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ são finitos, então valem:

(i) $x + y$ é finito e $\operatorname{st}(x + y) = \operatorname{st}(x) + \operatorname{st}(y)$;

(ii) $x \cdot y$ é finito e $\operatorname{st}(x \cdot y) = \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y)$;

(iii) $-x$ é finito e $\operatorname{st}(-x) = -\operatorname{st}(x)$;

(iv) se $x \not\approx 0$, então $1 / x$ é finito e $\operatorname{st}(1 / x) = 1 / \operatorname{st}(x)$.

A demonstração é imediata, observando, para os itens (ii) e (iv), que o produto de um infinitesimal por um número finito é ainda infinitesimal.

## 1.4 Universo Estendido

Dado um conjunto $s$, considere a sequência $\langle \mathcal{V}_t(s) : t \in \mathbb{N} \rangle$ dada recursivamente por

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0(s) = s \\ \mathcal{V}_{t+1}(s) = \mathcal{V}_t(s) \cup \mathcal{P}(\mathcal{V}_t(s)). \end{cases}$$

Definimos o *universo estendido* de $s$ como $\mathcal{V}(s) = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_t(s)$. O conjunto $\mathcal{V}_m(s)$ é chamado de *nível* $m$ da hierarquia e cada elemento de $\mathcal{V}_{m+1}(s) \setminus \mathcal{V}_m(s)$ é dito ser de *ranque* $m$ (os elementos de $s$ possuem ranque $-1$). Em outras palavras, o nível $m$ é formado pelos elementos de ranque menor do que $m$.

Nosso interesse não se restringe a ${}^*\mathbb{R}$, mas também a estruturas que possamos construir utilizando ${}^*\mathbb{R}$ e relacioná-las com suas respectivas formas *standard*. Assim, o objetivo dessa seção é construir um mergulho $* : \mathcal{V}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$.

Seja $\mathcal{U}$ como na seção 1.2 e, de forma análoga, considere a relação $\sim_{\mathcal{U}}$ em $\mathcal{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\alpha \sim_{\mathcal{U}} \beta \quad \text{sse} \quad \{k \in \mathbb{N} : \alpha(k) = \beta(k)\} \in \mathcal{U}.$$

Novamente temos que $\sim_{\mathcal{U}}$ é uma relação de equivalência.

Seja $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \cup \dot{\bigcup}_{t \in \mathbb{N}} (\mathcal{V}_{t+1}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}_t(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, isto é, $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ consiste dos elementos de $\mathcal{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ que possuem ranque constante. Definimos assim o *ultraproduto limitado* $\prod^0_{\mathcal{U}} \mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) / \sim_{\mathcal{U}}$. Considere agora a relação de $\mathcal{U}$-pertinência $\in_{\mathcal{U}}$ em $\prod^0_{\mathcal{U}} \mathcal{V}(\mathbb{R})$ definida como

$$[\alpha]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\beta]_{\mathcal{U}} \quad \text{sse} \quad \{k \in \mathbb{N} : \alpha(k) \in \beta(k)\} \in \mathcal{U}.$$

A verificação de que a relação de $\mathcal{U}$-pertinência está bem definida é análoga à da ordem dos hiperreais apresentada na seção 1.2. Veja que se $\beta \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ e $[\alpha]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\beta]_{\mathcal{U}}$, então $\alpha \in \mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, e portanto não existe uma sequência infinita $\in_{\mathcal{U}}$-decrescente, isto é, $\in_{\mathcal{U}}$ é bem-fundada.

Note que ${}^*\mathbb{R}$ é precisamente o ultraproduto $\mathcal{V}_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \sim_{\mathcal{U}}$, de modo que temos ${}^*\mathbb{R} \subseteq \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})/\sim_{\mathcal{U}}$. Considere as funções $\iota : \mathcal{V}(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})/\sim_{\mathcal{U}}$ e $M : \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})/\sim_{\mathcal{U}} \to \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$ dadas respectivamente por

$$\iota(x) = [\langle x : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}} \qquad \text{e} \qquad M(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{se } \gamma \in {}^*\mathbb{R} \\ \{M(\xi) : \xi \in_{\mathcal{U}} \gamma\} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e tome $* : \mathcal{V}(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$ como $* = M \circ \iota$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) / \sim_{\mathcal{U}} \\ {*} \searrow & \circlearrowleft & \swarrow M \\ & \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) & \end{array}$$

A função $M$ é chamada de *função colapso de Mostowski*, e satisfaz a propriedade de que, para cada $\sigma, \rho \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) / \sim_{\mathcal{U}}$, $\sigma \in_{\mathcal{U}} \rho$ se e somente se $M(\sigma) \in M(\rho)$. Em particular, $M\restriction_{^*\mathbb{R}}$ é a função identidade e

$$\begin{aligned}
*(\mathbb{R}) &= M(\iota(\mathbb{R}))\\
&= M([\langle \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}})\\
&= \left\{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : [\eta]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\langle \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}\right\}\\
&= \left\{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in \mathbb{R} \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\right\}\\
&= \left\{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}\right\}\\
&= \left\{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}\\
&= \left\{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : [\eta]_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{[\eta]_{\mathcal{U}} : [\eta]_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}\right\}\\
&= {}^*\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Essa construção nos permite estender, por exemplo, subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, bem como funções e conjuntos de funções entre esses espaços. No que segue, denotaremos $*(a)$ simplesmente por ${}^*a$, e por vezes omitiremos o asterisco de funções[3] e de outros objetos que queiramos tratar como *primitivos*. Os conjuntos ${}^*{+}$, ${}^*{\cdot}$, ${}^*{<}$ e ${}^*|\cdot|$ coincidem com suas respectivas notações sem asterisco apresentadas nas seções 1.2 e 1.3. Em particular, chamaremos os elementos de ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{C}$ respectivamente de *hipernaturais*, *hiperinteiros*, *hiperracionais* e *hipercomplexos*.

**Proposição 1.4.1.** Dados $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, a função $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) ${}^*\varnothing = \varnothing$;

(ii) ${}^*(a \cup b) = {}^*a \cup {}^*b$;

(iii) ${}^*(a \cap b) = {}^*a \cap {}^*b$;

(iv) se $a \subseteq b$ então ${}^*a \subseteq {}^*b$.

*Demonstração.* (i) Basta observar que se $\phi = \langle \varnothing : k \in \mathbb{N}\rangle$, então $[\alpha]_{\mathcal{U}} \notin_{\mathcal{U}} [\phi]_{\mathcal{U}}$ para todo $\alpha \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$.

[3] Na seção 1.5 mostraremos utilizando o Princípio da Transferência que se $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ é uma função de $u$ em $v$, então ${}^*f$ é uma função de ${}^*u$ em ${}^*v$.

(ii) Temos

$$\begin{aligned}
{}^*(a \cup b) &= M(\iota(a \cup b)) \\
&= \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in a \cup b \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \\
&= \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in a \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.} \ \vee \ \eta(k) \in b \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \\
&= \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in a \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \ \cup \ \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in b \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \\
&= {}^*a \cup {}^*b.
\end{aligned}$$

(iii) É idêntico ao item (ii) trocando os símbolos "$\cup$" por "$\cap$" e "$\vee$" por "$\wedge$".

(iv) Temos ${}^*a \subseteq {}^*a \cup {}^*b = {}^*(a \cup b) = {}^*b$. □

A proposição anterior nos diz que $*$ preserva uniões e intersecções finitas. Note que $*$ não preserva, no entanto, uniões e intersecções infinitas. Para ver isso, perceba que

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} {}^*\left]-\ell, \ell\right[ \;=\; \{r \in {}^*\mathbb{R} : r \text{ é finito}\} \;\neq\; {}^*\mathbb{R} \;=\; {}^*\Big(\textstyle\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left]-\ell, \ell\right[\Big)$$

e

$$\bigcap_{\ell=1}^{\infty} {}^*\left]-\tfrac{1}{\ell}, \tfrac{1}{\ell}\right[ \;=\; \{r \in {}^*\mathbb{R} : r \text{ é infinitesimal}\} \;\neq\; \{0\} \;=\; {}^*\Big(\textstyle\bigcap_{\ell=1}^{\infty} \left]-\tfrac{1}{\ell}, \tfrac{1}{\ell}\right[\Big).$$

Além disso, também temos que $*$ é injetora. De fato, dados $\xi, \vartheta \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ tais que $M([\xi]_{\mathcal{U}}) = M([\vartheta]_{\mathcal{U}})$, se $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, isto é, $[\xi]_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$, então é imediato que $[\vartheta]_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$ e $[\xi]_{\mathcal{U}} = [\vartheta]_{\mathcal{U}}$, caso contrário temos $[\lambda]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\xi]_{\mathcal{U}}$ se e somente se $[\lambda]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\vartheta]_{\mathcal{U}}$ para cada $\lambda \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, logo $\lambda(k) \in \xi(k)$ $\mathcal{U}$-q.t.p. se e somente se $\lambda(k) \in \vartheta(k)$ $\mathcal{U}$-q.t.p. para cada $\lambda \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, de onde obtemos $\xi(k) = \vartheta(k)$ $\mathcal{U}$-q.t.p., isto é, $[\xi]_{\mathcal{U}} = [\vartheta]_{\mathcal{U}}$, e obtemos que $M$ é injetora. Assim, como $\iota$ é claramente injetora, concluímos que $*$ é injetora.

Ademais, dados $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, temos $a \in b$ se e somente se $\iota(a) \in_{\mathcal{U}} \iota(b)$ se e somente se $M(\iota(a)) \in M(\iota(b))$, isto é, ${}^*a \in {}^*b$. No entanto, a função $*$ não é sobrejetora. Veremos algumas consequências disso na seção seguinte, mas antes apresentamos outra proposição a fim de evitar possíveis confusões nos argumentos futuros.

**Proposição 1.4.2.** Dados $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, a função $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) ${}^*\{a\} = \{{}^*a\}$;

(ii) ${}^*\{a, b\} = \{{}^*a, {}^*b\}$ (consequentemente para qualquer conjunto finito);

(iii) $^*(a,b) = (^*a, ^*b)$ (consequentemente para qualquer ênupla ordenada finita).

*Demonstração.* (i) Temos

$$\begin{aligned} ^*\{a\} &= M(\iota(\{a\})) \\ &= \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) \in \{a\} \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \\ &= \{M([\eta]_{\mathcal{U}}) : \eta(k) = a \quad \mathcal{U}\text{-q.t.p.}\} \\ &= \{M(\iota(a))\} \\ &= \{^*a\}. \end{aligned}$$

(ii) Temos $^*\{a,b\} = {}^*(\{a\} \cup \{b\}) = {}^*\{a\} \cup {}^*\{b\} = \{^*a\} \cup \{^*b\} = \{^*a, ^*b\}$.

(iii) Temos $^*(a,b) = {}^*\{\{a\},\{a,b\}\} = \{^*\{a\}, ^*\{a,b\}\} = \{\{^*a\},\{^*a, ^*b\}\} = (^*a, ^*b)$. □

## 1.5 Princípio da Transferência

O objetivo dessa seção é apresentar uma importante ferramenta de Análise Não-Standard: o *Princípio da Transferência*, que relaciona proposições acerca de objetos de $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ com proposições acerca de suas respectivas imagens por $*$ em $\mathcal{V}(^*\mathbb{R})$, bem como algumas consequências. A fim de prosseguir, precisamos antes apresentar o conceito de $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-*fórmula*.

Uma $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula é uma fórmula em que podem ocorrer os conectivos lógicos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\veebar$, $\to$, $\leftrightarrow$), os símbolos de corpo ordenado ($+$, $\cdot$, $<$, $|\cdot|$), a igualdade ($=$), a pertinência ($\in$), símbolos de variáveis, parênteses e os quantificadores lógicos ($\forall$, $\exists$) *limitados*, isto é, sempre que aparece um "$\forall x$" ou um "$\exists y$", deve ser da forma "$\forall x \in a$" ou "$\exists y \in b$". De fato, acabamos usando outros símbolos ($\subseteq$, $\varnothing$, $\leq$, $(\cdot,\cdot)$, etc), mas eles não passam de abreviações. Por exemplo, "$a \subseteq b$" é uma abreviação da $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula "$\forall x \in a\ (x \in b)$".

**Teorema 1.5.1** (Łoś)**.** Seja $\Phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ uma $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula com variáveis livres $x_k$, $k \in n$, $n \in \mathbb{N}$. Dados $f_k \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, $k \in n$, temos que

$$\Phi(M([f_0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n-1}]_{\mathcal{U}})) \qquad \text{sse} \qquad \{k \in \mathbb{N} : \Phi(f_0(k), \ldots, f_{n-1}(k))\} \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

*Demonstração.* A demonstração se dá por indução na complexidade da fórmula $\Phi$.

Se $\Phi$ é uma fórmula atômica das formas "$x_0 = x_1$" ou "$x_0 \in x_1$", a equivalência (1.1) é imediata da definição e da injetividade de $M$. Quanto à aparição em $\Phi$ dos símbolos $+$, $\cdot$, $<$, ou $|\cdot|$, como $M\restriction_{^*\mathbb{R}}$ é a função identidade, a equivalência (1.1) nada mais é do que a definição destes símbolos.

Considere duas $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmulas $\Phi_0(x_0^0, \ldots, x_{n_0-1}^0)$ e $\Phi_1(x_0^1, \ldots, x_{n_1-1}^1)$ e suponha que a equivalência (1.1) valha para $\Phi_0$ e para $\Phi_1$. Dados $f_k^0 \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, $k \in n_0$, e $f_k^1 \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, $k \in n_1$, temos

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(M([f_0^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}})) \ \wedge\ \Phi_1(M([f_0^1]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_1-1}^1]_{\mathcal{U}}))\\
\text{sse}\quad &\Phi_0(M([f_0^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}})) \quad \text{e} \quad \Phi_1(M([f_0^1]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_1-1}^1]_{\mathcal{U}}))\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \{k \in \mathbb{N} : \Phi_1(f_0^1(k), \ldots, f_{n_1-1}^1(k))\} \in \mathcal{U}\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \cap \{k \in \mathbb{N} : \Phi_1(f_0^1(k), \ldots, f_{n_1-1}^1(k))\} \in \mathcal{U}\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k)) \ \wedge\ \Phi_1(f_0^1(k), \ldots, f_{n_1-1}^1(k))\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\neg\,\Phi_0(M([f_0^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}}))\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \notin \mathcal{U}\\
\text{sse}\quad &\mathbb{N} \smallsetminus \{k \in \mathbb{N} : \Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U}\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \neg\,\Phi_0(f_0^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

isto é, a equivalência (1.1) também vale para $\Phi_0 \wedge \Phi_1$ e para $\neg\Phi_0$, e portanto[4] para $\Phi_0 \vee \Phi_1$, para $\Phi_0 \veebar \Phi_1$, para $\Phi_0 \to \Phi_1$ e para $\Phi_0 \leftrightarrow \Phi_1$.

Para verificar (1.1) para $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmulas que possuam quantificadores limitados[5], considere $\Phi_2(x_1^0, \ldots, x_{n_0-1}^0)$ da forma $\exists u \in x_1^0\ \Phi_0(u, x_1^0, \ldots, x_{n_0-1}^0)$. Temos

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(M([f_1^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}}))\\
\text{sse}\quad &\exists u \in M([f_1^0]_{\mathcal{U}})\ \Phi_0(u, M([f_1^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}}))\\
\text{sse}\quad &M([\xi]_{\mathcal{U}}) \in M([f_1^0]_{\mathcal{U}}) \ \wedge\ \Phi_0(M([\xi]_{\mathcal{U}}), M([f_1^0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n_0-1}^0]_{\mathcal{U}}))\\
&\qquad \text{para algum } \xi \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})\\
\text{sse}\quad &\{k \in \mathbb{N} : \xi(k) \in f_1^0(k) \ \wedge\ \Phi_0(\xi(k), f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U}\\
&\qquad \text{para algum } \xi \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

e como $\xi(k) \in f_1^0(k) \ \wedge\ \Phi_0(\xi(k), f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))$ implica $\Phi_2(f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))$

[4] Basta lembrar das equivalências $\Phi_0 \vee \Phi_1 \equiv \neg(\neg\Phi_0 \wedge \neg\Phi_1)$, $\Phi_0 \veebar \Phi_1 \equiv (\Phi_0 \vee \Phi_1) \wedge \neg(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$, $\Phi_0 \to \Phi_1 \equiv \neg\Phi_0 \vee \Phi_1$ e $\Phi_0 \leftrightarrow \Phi_1 \equiv (\Phi_0 \to \Phi_1) \wedge (\Phi_1 \to \Phi_0)$.

[5] Para o quantificador universal limitado, basta lembrar da equivalência $\forall u \in v\ \Phi_0 \equiv \neg\exists u \in v\ \neg\Phi_0$.

para cada $\xi \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, obtemos $\{k \in \mathbb{N} : \Phi_2(f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U}$, mostrando que a *ida* de (1.1) vale para $\Phi_2$. Para a *volta* de (1.1), se $\Phi_2(f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))$ vale $\mathcal{U}$-q.t.p., então podemos tomar $\xi \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ dada $\mathcal{U}$-q.t.p. por um elemento de $\{\ell \in f_1^0(k) : \Phi_0(\ell, f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\}$ (que é não-vazio $\mathcal{U}$-q.t.p.). Assim, obtemos $\{k \in \mathbb{N} : \xi(k) \in f_1^0(k) \wedge \Phi_0(\xi(k), f_1^0(k), \ldots, f_{n_0-1}^0(k))\} \in \mathcal{U}$ e o resultado segue. □

**Teorema 1.5.2** (Princípio da Transferência)**.** Seja $\Phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ uma $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula com variáveis livres $x_k$, $k \in n$, $n \in \mathbb{N}$. Dados $a_k \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, $k \in n$, temos que

$$\Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \text{ é satisfeita em } \mathcal{V}(\mathbb{R}) \qquad \text{sse} \qquad \Phi({}^*a_0, \ldots, {}^*a_{n-1}) \text{ é satisfeita em } \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}).$$

*Demonstração.* É imediato do Teorema de Łoś.

Sejam $f_k \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, $k \in n$, em que cada $f_k$ é a sequência constante $a_k$. Temos, para cada $k \in n$, ${}^*a_k = M([f_k]_{\mathcal{U}})$. Logo,

$$\begin{aligned} & \Phi({}^*a_0, \ldots, {}^*a_{n-1}) \\ \text{sse } & \Phi(M([f_0]_{\mathcal{U}}), \ldots, M([f_{n-1}]_{\mathcal{U}})) \\ \text{sse } & \{k \in \mathbb{N} : \Phi(f_0(k), \ldots, f_{n-1}(k))\} \in \mathcal{U} \\ \text{sse } & \{k \in \mathbb{N} : \Phi(a_0, \ldots, a_{n-1})\} \in \mathcal{U} \\ \text{sse } & \Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

□

O Princípio da Transferência tem muitas potencialidades, mas antes vejamos algumas limitações. Considere, por exemplo, a afirmação de que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo. Essa afirmação é verdadeira em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, ao passo que a afirmação de que o mesmo ocorre com ${}^*\mathbb{N}$ é falsa em $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$. Como exemplo de subconjunto que não satisfaz tal propriedade, considere ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$. Claro que ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \neq \varnothing$, e se $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, então $\omega - 1 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, de onde ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ não pode possuir um elemento mínimo. Isso ocorre porque não tomamos cuidado se as afirmações envolvidas poderiam efetivamente ser escritas como $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmulas.

De fato, a afirmação "todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo" pode ser escrita como uma $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula como

$$\Phi_N(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \;\equiv\; \text{"}\forall p \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ (p \neq \varnothing \to \exists m \in p\ \forall u \in p\ (m \leq u))\text{"},$$

e o Princípio da Transferência nos diz que ela é equivalente a

$$\Phi_N({}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})) \;\equiv\; \text{“}\forall p \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})\ (p \neq \varnothing \;\rightarrow\; \exists m \in p\ \forall u \in p\ (m \leq u))\text{”},$$

isto é, só temos a garantia de que um subconjunto não-vazio de ${}^*\mathbb{N}$ tem elemento mínimo se ele pertencer a ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (e não é o caso de ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$).

A questão é mais geral. Seja $\alpha \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ e considere $\beta \subseteq {}^*\alpha$. É verdade que $\beta \in \mathcal{P}({}^*\alpha)$, mas o que queremos é $\beta \in {}^*\mathcal{P}(\alpha)$. Isso nos leva à seguinte definição.

**Definição 1.5.3.** Dado $x \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$, dizemos que

- $x$ é *standard* se $x = {}^*y$ para algum $y \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$;
- $x$ é *interno* se $x \in {}^*y$ para algum $y \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$;
- $x$ é *externo* se $x$ não é interno.

Dito em outras palavras, $x$ é standard se $x \in \mathrm{Im}(*)$ e $x$ é interno se $x \in \mathrm{Im}(M)$.

Voltando à questão, se $\beta$ for interno, então $\beta \in {}^*\gamma$ para algum $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$. Como a $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula

$$\Phi_P(\alpha, \gamma, \mathcal{P}(\alpha)) \;\equiv\; \text{“}\forall w \in \gamma\ (w \subseteq \alpha \;\rightarrow\; w \in \mathcal{P}(\alpha))\text{”}$$

é trivialmente verdadeira, segue do Princípio da Transferência que também é verdadeira

$$\Phi_P({}^*\alpha, {}^*\gamma, {}^*\mathcal{P}(\alpha)) \;\equiv\; \text{“}\forall w \in {}^*\gamma\ (w \subseteq {}^*\alpha \;\rightarrow\; w \in {}^*\mathcal{P}(\alpha))\text{”},$$

em particular para $w = \beta$, e obtemos $\beta \in {}^*\mathcal{P}(\alpha)$.

Além disso, como $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, então $\gamma \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R})$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e vale a $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula

$$\Phi_T(\gamma, \mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \;\equiv\; \text{“}\forall w \in \gamma\ (w \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R}))\text{”},$$

e portanto

$$\Phi_T({}^*\gamma, {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \;\equiv\; \text{“}\forall w \in {}^*\gamma\ (w \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R}))\text{”},$$

logo temos $\beta \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})$. Assim, concluímos $\{k \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) : k \text{ é interno}\} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} {}^*\mathcal{V}_t(\mathbb{R})$.

Conjuntos internos desempenham um importante papel em Análise Não-Standard, pois eles são conjuntos “bem comportados” em relação ao Princípio da

Transferência. Como exemplo de resultado envolvendo conjuntos internos, apresentamos a seguinte proposição.

**Proposição 1.5.4.** Seja $s$ um conjunto interno.

(i) (*overflow*) se $\mathbb{N} \subseteq s$ então $s \cap ({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \neq \varnothing$;

(ii) (*underflow*) se ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq s$ então $s \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$;

(iii) se $\mathbb{R}^*_+ \subseteq s$ então $s \cap \{r \in {}^*\mathbb{R}^*_+ : r \text{ é infinitesimal}\} \neq \varnothing$;

(iv) se $\{r \in {}^*\mathbb{R}^*_+ : r \text{ é infinitesimal}\} \subseteq s$ então $s \cap \mathbb{R}^*_+ \neq \varnothing$.

Essencialmente, o que a Proposição 1.5.4 nos diz é que os conjuntos $\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*_+$ e $\{r \in {}^*\mathbb{R}^*_+ : r \text{ é infinitesimal}\}$ (consequentemente $\mathbb{R}$ e $\{r \in {}^*\mathbb{R} : r \text{ é infinitesimal}\}$) não são internos.

*Demonstração.* (i) Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ limitado superiormente tem máximo, logo a $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula

$$\begin{aligned} \Phi_I(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \quad \equiv \quad & \text{“}\forall u \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ((u \neq \varnothing\ \wedge\ \exists v \in \mathbb{N}\ \forall w \in u\ (w < v)) \\ & \to\ \exists v \in u\ \forall w \in u\ (w \leq v))\text{”} \end{aligned}$$

é verdadeira, e pelo Princípio da Transferência temos

$$\begin{aligned} \Phi_I({}^*\mathbb{N}, {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})) \quad \equiv \quad & \text{“}\forall u \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})\ ((u \neq \varnothing\ \wedge\ \exists v \in {}^*\mathbb{N}\ \forall w \in u\ (w < v)) \\ & \to\ \exists v \in u\ \forall w \in u\ (w \leq v))\text{”}, \end{aligned}$$

e como $s \cap {}^*\mathbb{N}$ é não-vazio, temos que $s \cap {}^*\mathbb{N}$ é ilimitado ou $s \cap {}^*\mathbb{N}$ tem máximo, em ambos os casos $s \cap ({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \neq \varnothing$.

(ii) Já vimos que ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ não é interno, logo $s \cap {}^*\mathbb{N} \neq {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, isto é, $s \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

(iii) Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo, logo a $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula

$$\begin{aligned} \Phi_{III}(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \quad \equiv \quad & \text{“}\forall u \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ ((u \neq \varnothing\ \wedge\ \exists v \in \mathbb{R}\ \forall w \in u\ (v < w)) \\ & \to\ \exists v \in \mathbb{R}\ ((\forall w \in u\ (v \leq w)) \wedge \\ & (\forall z \in \mathbb{R}\ ((\forall w \in u\ (z \leq w))\ \to\ z \leq v))))\text{”} \end{aligned}$$

é verdadeira, e pelo Princípio da Transferência temos

$$\begin{aligned}\Phi_{III}({}^*\mathbb{R}, {}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})) \;\equiv\; & \text{“}\forall u \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{R}) \; ((u \neq \varnothing \wedge \exists v \in {}^*\mathbb{R} \; \forall w \in u \; (v < w)) \\ & \to \exists v \in {}^*\mathbb{R} \; ((\forall w \in u \; (v \leq w)) \wedge \\ & (\forall z \in {}^*\mathbb{R} \; ((\forall w \in u \; (z \leq w)) \to z \leq v))))\text{”},\end{aligned}$$

e como $s \cap {}^*(\mathbb{R}^*_+) \neq \varnothing$, temos que $s \cap {}^*(\mathbb{R}^*_+)$ tem ínfimo. Seja $\sigma = \inf(s \cap {}^*(\mathbb{R}^*_+))$. Como $\sigma \leq r$ para todo $r \in \mathbb{R}^*_+$, obtemos que $\sigma$ é infinitesimal. Além disso, se $s \cap \{r \in {}^*\mathbb{R} : r > 0 \wedge r \text{ é infinitesimal}\} = \varnothing$, então qualquer infinitesimal é um limitante inferior de $s \cap {}^*(\mathbb{R}^*_+)$, e decorre que $2\sigma$ é um limitante inferior maior do que $\sigma$, absurdo.
(iv) Seja $h = \{k \in {}^*\mathbb{N} : 1 / k \in s\}$. Temos ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq h$, o que implica que se $h$ for interno, então $h \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$, e teremos $s \cap \mathbb{R}^*_+ \neq \varnothing$. Afirmamos que $h$ é interno, sendo imediato do *Princípio da Definição Interna*, apresentado a seguir. □

**Teorema 1.5.5** (Princípio da Definição Interna)**.** Seja $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ uma $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula com variáveis livres $x_k$, $k \in n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Dados $n$ conjuntos internos $a_k \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$, $k \in n$, temos que o conjunto definido por $\{x \in a_0 : \Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x)\}$ é interno.

O Princípio da Definição Interna segue do Princípio da Transferência e é bem útil no manuseio de conjuntos internos.

*Demonstração.* Como $a_k$, $k \in n$, são conjuntos internos, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})$ para todo $k \in n$. Deste modo, como a seguinte $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula é verdadeira:

$$\begin{aligned}\Phi_{PDI}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \;\equiv\; & \text{“}\forall u_0 \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \; \cdots \; \forall u_{n-1} \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \; \exists y \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \\ & (y = \{x \in u_0 : \Phi(u_0, \ldots, u_{n-1}, x)\})\text{”},\end{aligned}$$

e, pelo Princípio da Transferência,

$$\begin{aligned}\Phi_{PDI}({}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \;\equiv\; & \text{“}\forall u_0 \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \; \cdots \; \forall u_{n-1} \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \; \exists y \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \\ & (y = \{x \in u_0 : \Phi(u_0, \ldots, u_{n-1}, x)\})\text{”},\end{aligned}$$

fazendo $u_k = a_k$ para cada $k \in n$ obtemos o resultado desejado. □

Outro exemplo de resultado que podemos provar utilizando o Princípio da Transferência é o seguinte: Dados $a, b \in \mathcal{V}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$, temos ${}^*(a \times b) = {}^*a \times {}^*b$. De fato, temos a veracidade da seguinte $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula:

$$\begin{aligned}\Phi_C(a,b,a\times b) \quad &\equiv \quad \text{“}(\forall u\in a\ \forall v\in b\ \exists w\in a\times b\ ((u,v)=w))\wedge\\ &\qquad (\forall w\in a\times b\ \exists u\in a\ \exists v\in b\ ((u,v)=w))\text{”},\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\Phi_C({}^*a,{}^*b,{}^*(a\times b)) \quad &\equiv \quad \text{“}(\forall u\in {}^*a\ \forall v\in {}^*b\ \exists w\in {}^*(a\times b)\ ((u,v)=w))\wedge\\ &\qquad (\forall w\in {}^*(a\times b)\ \exists u\in {}^*a\ \exists v\in {}^*b\ ((u,v)=w))\text{”},\end{aligned}$$

mas isso é justamente dizer ${}^*(a\times b)={}^*a\times{}^*b$.

Como último exemplo de aplicação do Princípio da Transferência dessa seção, considere $a,b,f\in\mathcal{V}(\mathbb{R})\smallsetminus\mathbb{R}$ tais que $f:a\to b$, isto é,

$$\begin{aligned}\Phi_F(a,b,f) \quad &\equiv \quad \text{“}(\forall u\in a\ \exists v\in b\ ((u,v)\in f))\wedge\\ &\qquad (\forall v\in b\ \forall w\in b\ (\exists u\in a\ ((u,v)\in f\ \wedge\ (u,w)\in f)\ \to\ v=w))\text{”},\end{aligned}$$

logo também temos

$$\begin{aligned}\Phi_F({}^*a,{}^*b,{}^*f) \quad &\equiv \quad \text{“}(\forall u\in {}^*a\ \exists v\in {}^*b\ ((u,v)\in {}^*f))\wedge\\ &\qquad (\forall v\in {}^*b\ \forall w\in {}^*b\ (\exists u\in {}^*a\ ((u,v)\in {}^*f\ \wedge\ (u,w)\in {}^*f)\ \to\ v=w))\text{”},\end{aligned}$$

isto é, ${}^*f:{}^*a\to{}^*b$. Além disso, dado $x\in a$, temos ${}^*(f(x))=({}^*f)({}^*x)$, bastando notar que se $(x,f(x))\in f$ então $({}^*x,{}^*(f(x)))\in{}^*f$.

## 1.6 Pontos Quase-Standard, Limites e Continuidade

O objetivo dessa seção é generalizar os conceitos apresentados na Seção 1.3 para espaços métricos quaisquer, bem como caracterizar alguns conceitos em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ dentro de $\mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$. Para mais resultados topológicos de Análise Não-Standard, o leitor pode consultar [1] ou [2].

Dada uma sequência $f=\langle f_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ em um conjunto $s\in\mathcal{V}(\mathbb{R})$, o que temos é uma função $f:\mathbb{N}\to s$, logo podemos olhar para a extensão da sequência $f$ em ${}^*s$, isto é, para ${}^*f=\langle {}^*f_n : n\in{}^*\mathbb{N}\rangle$. Neste caso, denotaremos ${}^*f$ simplesmente por $f$ e ${}^*f_n$ simplesmente por $f_n$ para cada $n\in{}^*\mathbb{N}$, escrevendo $\langle f_n : n\in{}^*\mathbb{N}\rangle$ quando quisermos nos referir a ${}^*f$.

Dado um espaço métrico $m \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$, também podemos olhar para a função ${}^*d : {}^*m \times {}^*m \to {}^*\mathbb{R}_+$, que satisfaz todas as propriedades de uma métrica exceto pelo fato de que a distância entre dois pontos de ${}^*m$ não precisa necessariamente ser um número real. No que segue, denotaremos ${}^*d$ simplesmente por $d$ e consideraremos o espaço $m$ fixado ao longo dessa seção. Também omitiremos o asterisco de elementos de $m$ identificando-os com suas imagens por $*$ em ${}^*m$.

**Definição 1.6.1.** Dado $x \in {}^*m$, dizemos que

- $x$ é *quase-standard* se $d(x, y) \approx 0$ para algum $y \in m$;
- $x$ é *finito* se $d(x, y) < r$ para algum $y \in m$ e algum $r \in \mathbb{R}$.

Dado $a \subseteq {}^*m$, definimos também os conjuntos $\mathrm{Ns}(a) = \{k \in a : k \text{ é quase-standard}\}$ e $\mathrm{Fin}(a) = \{k \in a : k \text{ é finito}\}$.

Note que, em particular, $\mathrm{Ns}({}^*\mathbb{R}) = \mathrm{Fin}({}^*\mathbb{R})$. Não é difícil ver que, de fato, todo ponto quase-standard é finito, porém o contrário nem sempre é verdade. Considere, por exemplo, o espaço $\ell_\infty$ e a sequência $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ em que $e_n \in \ell_\infty$ é o vetor cuja $n$-ésima coordenada é igual a 1 e as demais iguais a 0. Olhe para $\langle e_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$. Ao tomarmos $e_\omega \in {}^*\ell_\infty$ com $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, temos que $e_\omega$ é finito e não é quase-standard.

Considere a relação $\approx$ em ${}^*m$ dada por

$$x \approx y \quad \text{sse} \quad d(x, y) \approx 0.$$

A relação $\approx$ assim definida é uma relação de equivalência, e dizemos que $x$ e $y$ são *infinitesimalmente próximos*. De forma análoga ao exposto na Seção 1.3, se $x$ é quase-standard, então existe um único $\mathrm{st}(x) \in m$ tal que $x \approx \mathrm{st}(x)$, e definimos a função *parte standard* em $m$ como

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{st} & : & \mathrm{Ns}({}^*m) \cup \mathcal{P}({}^*m) & \longrightarrow & m \cup \mathcal{P}(m) \\ & & s & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{st}(s) & \text{se } s \in \mathrm{Ns}({}^*m) \\ \{\mathrm{st}(k) : k \in \mathrm{Ns}(s)\} & \text{se } s \in \mathcal{P}({}^*m). \end{cases} \end{array}$$

As próximas duas proposições caracterizam em “termos não-standard” os conceitos de limite e de continuidade. Além disso, suas demonstrações ilustram como resultados da seção anterior podem ser utilizados.

**Proposição 1.6.2.** Seja $\langle \xi_n \rangle$ uma sequência em $m$. Temos $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = p$ se e somente se $\xi_\omega \approx p$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Como $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = p$, temos que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi_L(d, \xi, p, \varepsilon, n_0, \mathbb{N}) \equiv \text{“}\forall n \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \to d(\xi_n, p) < \varepsilon)\text{”}$$

é verdadeira, logo

$$\Phi_L(d, \xi, p, \varepsilon, n_0, {}^*\mathbb{N}) \equiv \text{“}\forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n > n_0 \to d(\xi_n, p) < \varepsilon)\text{”}.$$

Como para cada $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ temos $\omega > n_0$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, segue que $d(\xi_\omega, p) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, isto é, $d(\xi_\omega, p)$ é infinitesimal, logo $\xi_\omega \approx p$.
($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, seja $a_\varepsilon = \{k \in {}^*\mathbb{N} : \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n > k \to d(\xi_n, p) < \varepsilon)\}$. Temos pelo Princípio da Definição Interna que $a_\varepsilon$ é interno, e como ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq a_\varepsilon$, segue por *underflow* que existe $n_0 \in a_\varepsilon \cap \mathbb{N}$, logo $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = p$. □

Para a próxima proposição consideraremos fixado um segundo espaço métrico $m'$, cuja métrica também será denotada por $d$.

**Proposição 1.6.3.** Seja $f : m \to m'$. Temos que $f$ é contínua em $p \in m$ se e somente se $f(x) \approx f(p)$ para todo $x \in {}^*m$ tal que $x \approx p$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) De maneira análoga à demonstração da proposição anterior, temos que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ existe um $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tal que

$$\Phi_C(d, f, p, \varepsilon, \delta, m) \equiv \text{“}\forall x \in m\ (d(x, p) < \delta \to d(f(x), f(p)) < \varepsilon)\text{”}$$

é verdadeira, logo

$$\Phi_C(d, f, p, \varepsilon, \delta, {}^*m) \equiv \text{“}\forall x \in {}^*m\ (d(x, p) < \delta \to d(f(x), f(p)) < \varepsilon)\text{”},$$

de modo que se tomarmos $d(x, p)$ infinitesimal, então $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, isto é, $d(f(x), f(p))$ é infinitesimal, e segue que se $x \approx p$ então $f(x) \approx f(p)$.

($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, seja $a_\varepsilon = \{k \in {}^*\mathbb{R} : \forall x \in {}^*m\ (d(x,p) < k \rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon)\}$. Temos pelo Princípio da Definição Interna que $a_\varepsilon$ é interno, e como todos os infinitesimais positivos pertencem a $a_\varepsilon$, segue pelo item (iv) da Proposição 1.5.4 que existe $\delta \in a_\varepsilon \cap \mathbb{R}^*_+$, logo $f$ é contínua em $p$. □

## 1.7 Princípio da Saturação Enumerável

O objetivo dessa seção é apresentar o *Princípio da Saturação Enumerável*[6], que desempenha um papel central na demonstração do Teorema de Loeb.

**Teorema 1.7.1** (Princípio da Saturação Enumerável)**.** Seja $\langle \xi_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ uma sequência $\subset$-decrescente de conjuntos internos. Se $\xi_k \neq \varnothing$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \xi_k \neq \varnothing$.

*Demonstração.* Lembremos mais uma vez da construção feita na seção 1.4 e da função colapso de Mostowski. Como cada $\xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, é interno, existem sequências $\langle \xi^k_\ell : \ell \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ tais que $\xi_k = M([\langle \xi^k_\ell : \ell \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda_n = \{\ell \in \mathbb{N} : \ell \geq n \wedge \xi^n_\ell \neq \varnothing \wedge \forall j \in n\ (\xi^j_\ell \supseteq \xi^{j+1}_\ell)\}$ e considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(\ell) = \max(\{n \in \mathbb{N} : \ell \in \lambda_n\} \cup \{0\})$. Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \varnothing$, obtemos que $f$ está bem definida.

Para uma melhor visualização do que está sendo feito, disponha as sequências $\langle \xi^k_\ell : \ell \in \mathbb{N}\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, em linhas. Deste modo, se $\xi^0_\ell \neq \varnothing$, então $f(\ell)$ é o maior índice menor ou igual a $\ell$ da $\ell$-ésima coluna tal que $\xi^0_\ell \supseteq \cdots \supseteq \xi^{f(\ell)}_\ell \neq \varnothing$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\langle & \xi^0_0 & , & \xi^0_1 & , & \cdots & , & \xi^0_\ell & , & \cdots & \rangle \\
\langle & \xi^1_0 & , & \xi^1_1 & , & \cdots & , & \xi^1_\ell & , & \cdots & \rangle \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\langle & \xi^{f(\ell)}_0 & , & \xi^{f(\ell)}_1 & , & \cdots & , & \xi^{f(\ell)}_\ell & , & \cdots & \rangle \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\langle & \xi^{\ell+1}_0 & , & \xi^{\ell+1}_1 & , & \cdots & , & \xi^{\ell+1}_\ell & , & \cdots & \rangle \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Como $\xi^0_\ell \neq \varnothing$ $\mathcal{U}$-q.t.p., obtemos $\xi^{f(\ell)}_\ell \neq \varnothing$ $\mathcal{U}$-q.t.p. Assim, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\xi^{f(\ell)}_\ell \neq \varnothing$, tome $s_\ell \in \xi^{f(\ell)}_\ell$ e defina $s \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ dada $\mathcal{U}$-q.t.p. por $s(\ell) = s_\ell$. A fim de verificar que $[s]_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} [\langle \xi^k_\ell : \ell \in \mathbb{N}\rangle]_{\mathcal{U}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, note que $\lambda_k \subseteq \{\ell \in \mathbb{N} : s_\ell \in \xi^k_\ell\}$, o que juntamente com $\lambda_k \in \mathcal{U}$ nos fornece o resultado. □

[6] Esse princípio também é chamado de Princípio da $\aleph_1$-Saturação.

Da contrapositiva do Princípio da Saturação Enumerável obtemos, em particular, que se $\langle t_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ é uma sequência de conjuntos internos e $t = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} t_k$ também é interno, então existe um $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $t = \bigcup_{k \in \ell} t_k$, bastando para isso olhar para a sequência $\subset$-decrescente $\left\langle t \smallsetminus \bigcup_{k \in \ell} t_k : \ell \in \mathbb{N}\right\rangle$.

Vimos no capítulo 1.6 como estender uma sequência $\langle f_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ em um conjunto $s \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ a uma sequência $\langle f_k : k \in {}^*\mathbb{N}\rangle$. O Princípio da Saturação Enumerável nos permite agora estender uma sequência $\langle g_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ em um conjunto ${}^*s \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R})$ a uma sequência interna $\langle g_k : k \in {}^*\mathbb{N}\rangle$. Note a diferença: Não estamos mais com uma sequência em $\mathcal{V}(\mathbb{R})$, e embora todos os seus termos sejam internos, a sequência $\langle g_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ é necessariamente externa, uma vez que seu domínio, $\mathbb{N}$, é um conjunto externo.

A fim de mostrar a existência de uma sequência interna que estenda $\langle g_k : k \in \mathbb{N}\rangle$, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para algum $m \in \mathbb{N}$ fixado suficientemente grande, o conjunto $\varphi_n = \{h \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R}) : h \text{ é função} \wedge \operatorname{Dom} h = {}^*\mathbb{N} \wedge \forall k \in n\ (h(k) = g_k)\}$. Temos que $\langle \varphi_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ é uma sequência $\subset$-decrescente de conjuntos internos não-vazios, logo $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \neq \varnothing$, bastando assim tomar qualquer elemento dessa intersecção.

## 1.8 Conjuntos Hiperfinitos

O objetivo dessa seção é definir o que são *conjuntos hiperfinitos*, bem como ilustrar como se relacionam com conjuntos finitos e com conjuntos infinitos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos a função $\#_n : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{V}_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{N}$ que associa a cada conjunto finito $s \subseteq \mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ sua cardinalidade (que é um número natural). Observe que $\#_n(s)$ não depende diretamente de $n$, uma vez que $\langle \#_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ é uma sequência $\subset$-crescente, e portanto $\# = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \#_n$ ainda é uma função. No entanto, $\#$ não é um objeto de $\mathcal{V}(\mathbb{R})$.

Olhemos agora para as funções ${}^*\#_n : {}^*\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{V}_n(\mathbb{R})) \to {}^*\mathbb{N}$. Temos que $\langle {}^*\#_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$ também é uma sequência $\subset$-crescente, de modo que cada $s \in {}^*\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{V}_n(\mathbb{R}))$ possui uma $*$-cardinalidade (que não precisa coincidir com sua cardinalidade) que não depende de $n$ e é um elemento de ${}^*\mathbb{N}$. Tais conjuntos são chamados de *conjuntos hiperfinitos*, e denotaremos ${}^*\#_n(s)$ simplesmente por $|s|$.

Conjuntos hiperfinitos são particularmente interessantes porque, por um lado, eles se comportam de maneira similar a conjuntos finitos, e por outro, é possível "cobrir" conjuntos infinitos por conjuntos hiperfinitos. Como exemplo, tome $m, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e considere o conjunto $a = \left\{\frac{k}{m!} : k \in \{-m!\,n, \dots, m!\,n\}\right\}$, isto é, $a$ é uma malha de pontos do intervalo hiperreal $[-n, n]$ espaçados $\frac{1}{m!}$ um do outro. Temos $|a| = |\{-m!\,n, \dots, m!\,n\}| = 2m!\,n + 1 \in {}^*\mathbb{N}$, isto é, $a$ é um conjunto hiperfinito. Como $m!$ é múltiplo de todos os hipernaturais positivos menores ou iguais a $m$ (em particular de todos os números naturais positivos), obtemos que dados $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, temos $p \cdot \frac{m!}{q} \in \{-m!\,n, \dots, m!\,n\}$, o que implica $\frac{p}{q} \in a$, e portanto $\mathbb{Q} \subseteq a$. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in a$ tal que $|x - y| \leq \frac{1}{m!}$, isto é, $\mathrm{st}(y) = x$. Dito em outras palavras, a função $\mathrm{st} : \mathrm{Ns}(a) \to \mathbb{R}$ é sobrejetora.

Uma consequência do exemplo apresentado acima é a seguinte: Não existem conjuntos internos infinitos enumeráveis. De fato, o exemplo mostra, em particular, que $|\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{N}|$, logo ${}^*\mathbb{N}$ é não-enumerável. Como para cada $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\Phi_E(\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \equiv \text{“}\forall u \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R})\ (u \notin \mathbb{R} \to (|u| \in \mathbb{N} \vee |\mathbb{N}| \leq |u|))\text{”},$$

temos

$$\Phi_E({}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{R}, {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \equiv \text{“}\forall u \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})\ (u \notin {}^*\mathbb{R} \to (|u| \in {}^*\mathbb{N} \vee |{}^*\mathbb{N}| \leq |u|))\text{”},$$

observando que "$|{}^*\mathbb{N}| \leq |u|$" na fórmula acima é interpretado como "existe uma função injetora *interna* de ${}^*\mathbb{N}$ em $u$", implicando $|{}^*\mathbb{N}| \leq |u|$ no sentido usual[7]. Assim, temos que todo conjunto interno é hiperfinito ou não-enumerável. Seja $\alpha \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) \setminus {}^*\mathbb{R}$ um conjunto hiperfinito infinito, isto é, tal que $|\alpha| \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Sejam $t = |\alpha|$ e $f : \alpha \to \{0, \dots, t-1\}$ bijetora. Construímos a malha $b = \left\{\frac{k}{t} : k \in \operatorname{Im} f\right\}$ sobre o intervalo hiperreal $[0, 1]$ a fim de obter a função sobrejetora $g : \alpha \to [0, 1] \cap \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x)}{t}\right)$, o que implica que $\alpha$ é não-enumerável, e o resultado segue. De fato, o que provamos é mais forte: Todo conjunto interno infinito tem pelo menos a potência do continuum.

[7] Deve-se tomar um cuidado especial quando o Princípio da Transferência é usado no outro sentido. Por exemplo, temos

$$|{}^*\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{N}| \leq |{}^*\mathbb{R}|,$$

isto é, $|{}^*\mathbb{N}| = |{}^*\mathbb{R}|$, porém uma tal bijeção é necessariamente externa.
O fato de existir uma função bijetora de ${}^*\mathbb{N}$ em ${}^*\mathbb{R}$ que é necessariamente externa tem relação com a existência de um modelo enumerável de $\mathbb{R}$.

## 1.9 Medidas de Loeb

O objetivo dessa seção é apresentar as *medidas de Loeb*. No decorrer dela consideraremos $x \in \mathcal{V}({}^*\mathbb{R}) \setminus {}^*\mathbb{R}$ um conjunto interno fixado.

**Definição 1.9.1.** Dizemos que um subconjunto $\alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$ é uma *álgebra* sobre $x$ se:

(i) $x \in \alpha$ e $\varnothing \in \alpha$;

(ii) dados $u, v \in \alpha$, temos $u \cup v \in \alpha$;

(iii) dado $w \in \alpha$, temos $x \setminus w \in \alpha$.

Em particular, se $\alpha$ é uma álgebra e $u, v \in \alpha$, então $u \cap v \in \alpha$ e $u \triangle v \in \alpha$, isto é, $\alpha$ é um anel de conjuntos. Até o fim dessa seção consideraremos $\alpha$ um conjunto interno fixado tal que $\alpha$ é uma álgebra sobre $x$.

Uma vez que $\alpha$ é interno, temos que $\alpha$ é fechado sob uniões e intersecções hiperfinitas. De fato, basta considerar a $\mathcal{L}(\mathcal{V}(\mathbb{R}))$-fórmula

$$\begin{aligned}\Phi_U(f, \mathbb{N}, \mathcal{V}_m(\mathbb{R})) \equiv\ & \text{“}\forall \beta \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R})\ ((\varnothing \in \beta \wedge \forall u \in \beta\ \forall v \in \beta\ (u \cup v \in \beta)) \rightarrow \\ & \forall p \in \mathbb{N}\ (\forall q \in \mathbb{N}\ (q < p \rightarrow f(q) \in \beta) \rightarrow \forall w \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R}) \\ & (\forall t \in \mathcal{V}_m(\mathbb{R})\ (t \in w \leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}\ (q < p \wedge t \in f(q))) \\ & \rightarrow w \in \beta)))\text{”},\end{aligned}$$

que é trivialmente verdadeira para $f : \mathbb{N} \to \mathcal{V}_m(\mathbb{R})$, podendo ser descrita em língua portuguesa como “qualquer que seja $\beta$, se $\beta$ é fechado sob uniões finitas, então $\beta$ é fechado sob uniões indexadas por um número natural”. Assim, tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in {}^*\mathcal{V}_m(\mathbb{R})$ e aplicando o Princípio da Transferência a $\Phi_U$, obtemos que $\alpha$ é fechado sob uniões indexadas por um número hipernatural. O fechamento de $\alpha$ sob intersecções hiperfinitas segue por De Morgan. Cabe ressaltar, no entanto, que a indexação também precisa ser interna.

**Definição 1.9.2.** Dizemos que uma função $\nu : \alpha \to {}^*\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ é uma *medida finito-aditiva* em $x$ sobre a álgebra $\alpha$ se:

(i) $\nu(\varnothing) = 0$ e $\nu(x) > 0$;

(ii) dados $u, v \in \alpha$ tal que $u \subseteq v$, temos $\nu(u) \leq \nu(v)$;

(iii) dados $u, v \in \alpha$ disjuntos, temos $\nu(u \mathbin{\dot\cup} v) = \nu(u) + \nu(v)$.

Se, além disso, para cada família $\{w_k : k \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\alpha$ dois a dois disjuntos tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} w_k \in \alpha$ tivermos $\nu\Big(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} w_k\Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(w_k)$, então dizemos que $\nu$ é $\sigma$-*aditiva.*

Até o fim dessa seção também consideraremos $\nu$ um conjunto interno fixado tal que $\nu$ é uma medida finito-aditiva em $x$ sobre a álgebra $\alpha$. Nosso objetivo é obter, a partir da estrutura $(x, \alpha, \nu)$, um espaço de medida $(x, \sigma(\alpha), L(\nu))$.

Considere a medida finito-aditiva ${}^\circ\nu : \alpha \to \mathbb{R}_+ \mathbin{\dot\cup} \{\infty\}$ dada por

$$ {}^\circ\nu(s) = \begin{cases} \operatorname{st}(\nu(s)) & \text{se } \nu(s) \in \operatorname{Ns}({}^*\mathbb{R}_+) \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} $$

**Teorema 1.9.3** (Loeb)**.** A medida finito-aditiva ${}^\circ\nu$ possui uma única extensão $\sigma$-aditiva $L(\nu) : \sigma(\alpha) \to \mathbb{R}_+ \mathbin{\dot\cup} \{\infty\}$. Além disso, se ${}^\circ\nu(x) \in \mathbb{R}_+$, então para cada $a \in \sigma(\alpha)$ existe um $b \in \alpha$ tal que $L(\nu)(a \triangle b) = 0$; e dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existem $c, d \in \alpha$ tais que $c \supseteq a \supseteq d$ e $L(\nu)(c) - \varepsilon \leq L(\nu)(a) \leq L(\nu)(d) + \varepsilon$.

A medida $L(\nu)$ é chamada de *medida de Loeb* associada a $\nu$. Como estaremos particularmente interessados em espaços de probabilidade, isto é, tais que ${}^\circ\nu(x) = 1$, então a segunda parte do Teorema de Loeb também se aplicará.

A fim de demonstrar o Teorema de Loeb, faremos uso do Teorema de Carathéodory, enunciado a seguir.

**Teorema 1.9.4** (Carathéodory)**.** Dada uma medida finito-aditiva $\lambda : \alpha \to \mathbb{R}_+ \mathbin{\dot\cup} \{\infty\}$, se $\lambda$ é $\sigma$-aditiva, então existe uma medida $\mu : \sigma(\alpha) \to \mathbb{R}_+ \mathbin{\dot\cup} \{\infty\}$ tal que $\mu{\restriction}_\alpha = \lambda$. Além disso, se $\lambda$ é $\sigma$-finita, então a extensão $\mu$ é única.

*Demonstração do Teorema de Loeb.* Seja $\langle e_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ uma sequência de elementos de $\alpha$ dois a dois disjuntos e tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} e_k \in \alpha$. Como $\alpha$ é interno, temos que cada elemento de $\alpha$ é interno, e portanto existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} e_k = \dot{\bigcup}_{k \in \ell} e_k$. Isto é, $e_k = \varnothing$ para todo $k \geq \ell$, e obtemos

$$ {}^\circ\nu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} e_k\right) = {}^\circ\nu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \ell} e_k\right) = \sum_{k=0}^{\ell-1} {}^\circ\nu(e_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} {}^\circ\nu(e_k). $$

Uma vez que $^\circ\nu$ é $\sigma$-aditiva em $\alpha$, o Teorema de Carathéodory nos fornece a existência de $L(\nu)$, bem como sua unicidade no caso em que $^\circ\nu(x) \in \mathbb{R}_+$. Não nos ateremos à unicidade de $L(\nu)$ no caso em que $^\circ\nu(x) = \infty$.

Para a segunda parte da prova, dado $a \in \sigma(\alpha)$, temos

$$L(\nu)(a) \quad = \quad \inf\left\{\sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} {}^\circ\nu(\xi_k) : a \subseteq \bigcup\nolimits_{k\in\mathbb{N}} \xi_k \,\wedge\, \forall \ell \in \mathbb{N}\ (\xi_\ell \in \alpha)\right\},$$

de modo que dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existe uma sequência $\subset$-crescente $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ de elementos de $\alpha$ tal que $a \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k$ e $L(\nu)\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} {}^\circ\nu\left(c_k \smallsetminus \bigcup_{\ell\in k} c_\ell\right) < L(\nu)(a) + \varepsilon$. Assim, considere uma extensão interna da sequência $\langle c_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$ e o conjunto $\vartheta = \{k \in {}^*\mathbb{N} : c_k \in \alpha \,\wedge\, \nu(c_k) < L(\nu)(a) + \varepsilon \,\wedge\, \forall \ell_0, \ell_1 \in {}^*\mathbb{N}\ (\ell_0 < \ell_1 < k \,\rightarrow\, c_{\ell_0} \subseteq c_{\ell_1})\}$. Como $\vartheta$ é interno e $\mathbb{N} \subseteq \vartheta$, existe $\omega \in \vartheta \cap ({}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N})$. Tomando $c = c_\omega$, obtemos um $c \in \alpha$ tal que $c \supseteq a$ e $L(\nu)(c) \leq L(\nu)(a) + \varepsilon$. Utilizando um argumento análogo para $x \smallsetminus a$, obtemos um $x \smallsetminus d \in \alpha$ satisfazendo $x \smallsetminus d \supseteq x \smallsetminus a$ e $L(\nu)(x \smallsetminus d) \leq L(\nu)(x \smallsetminus a) + \varepsilon$, isto é, um $d \in \alpha$ tal que $d \subseteq a$ e $L(\nu)(d) \geq L(\nu)(a) - \varepsilon$.

Deste modo, existem sequências $\langle \underline{b}_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ $\subset$-crescente e $\langle \overline{b}_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ $\subset$-decrescente de elementos de $\alpha$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $\underline{b}_k \subseteq a \subseteq \overline{b}_k$ e $L(\nu)(\overline{b}_k) - \dfrac{1}{k+1} \leq L(\nu)(a) \leq L(\nu)(\underline{b}_k) + \dfrac{1}{k+1}$. Assim, de forma similar ao que foi feito acima, considere extensões internas $\langle \underline{b}_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$ e $\langle \overline{b}_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$ e o conjunto $\theta = \{k \in {}^*\mathbb{N} : \underline{b}_k \in \alpha \,\wedge\, \overline{b}_k \in \alpha \,\wedge\, \forall \ell_0, \ell_1 \in {}^*\mathbb{N}\ (\ell_0 < \ell_1 < k \,\rightarrow\, \underline{b}_{\ell_0} \subseteq \underline{b}_{\ell_1} \subseteq \overline{b}_{\ell_1} \subseteq \overline{b}_{\ell_0})\}$. Novamente, como $\theta$ é interno e $\mathbb{N} \subseteq \theta$, existe $\omega' \in \theta \cap ({}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N})$. Tomando $b \in \{\underline{b}_{\omega'}, \overline{b}_{\omega'}\}$, obtemos um $b \in \alpha$ tal que $L(\nu)(a \bigtriangleup b) < \dfrac{1}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $L(\nu)(a \bigtriangleup b) = 0$. $\square$

### 1.9.1 Exemplos de Medidas de Loeb

Como um primeiro exemplo de medida de Loeb, apresentamos a *medida de contagem de Loeb*. Dado $\omega \in {}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$, considere o conjunto $\ell = \{k \in {}^*\mathbb{N} : k < \omega\}$. Temos que $\ell$ é interno, e tomando sobre $\ell$ a álgebra ${}^*\mathcal{P}(\ell)$, podemos definir a medida finito-aditiva $\mathbf{c} : {}^*\mathcal{P}(\ell) \to [0,1]$ como $\mathbf{c}(s) = |s| \,/\, |\ell|$. A medida $L(\mathbf{c}) : \sigma({}^*\mathcal{P}(\ell)) \to [0,1] \cap \mathbb{R}$ obtida a partir de $\mathbf{c}$ é a medida de contagem de Loeb em $\ell$.

Como exemplo mais robusto, apresentamos a medida de Lebesgue sobre $[0,1] \cap \mathbb{R}$ construída via medida de Loeb. De maneira similar ao que fizemos na Seção 1.8, considere a função $f : \ell \to [0,1]$ dada por $f(t) = t\,/\,\omega$, de modo que $\operatorname{Im} f$ é uma malha sobre $[0,1]$ com passo infinitesimal constante. Como $[0,1]$ e $f$ são internos, podemos definir a medida finito-aditiva $\mu : {}^*\mathcal{P}([0,1]) \to [0,1]$ como $\mu(s) = \mathbf{c}(\{k \in \ell : f(k) \in s\})$, que essencialmente conta quantos pontos da malha $\operatorname{Im} f$ estão em $s$ e divide por $\omega$.

Agora, dado um intervalo *real* $i \subseteq [0,1] \cap \mathbb{R}$ infinito[8] (isto é, tal que $\inf i < \sup i$), temos ${}^*i \in {}^*\mathcal{P}([0,1])$. Como $\{k \in \ell : f(k) \in {}^*i\} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ é interno e limitado superiormente, existem $a = \min\{k \in \ell : f(k) \in {}^*i\}$ e $b = \max\{k \in \ell : f(k) \in {}^*i\}$. Além disso, temos $\operatorname{st}(f(a)) = \inf i$ e $\operatorname{st}(f(b)) = \sup i$, bem como

$$
\begin{aligned}
{}^\circ\mu({}^*i) &= {}^\circ\mathbf{c}(\{a, \dots, b\}) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{b - a + 1}{\omega}\right) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{b}{\omega}\right) - \operatorname{st}\left(\frac{a}{\omega}\right) + \operatorname{st}\left(\frac{1}{\omega}\right) \\
&= \sup i - \inf i.
\end{aligned}
$$

Seja $\gamma \subseteq \mathcal{P}([0,1] \cap \mathbb{R})$ a álgebra gerada pela topologia de $[0,1] \cap \mathbb{R}$ e considere a medida $\lambda : \sigma(\gamma) \to \mathbb{R}_+$ dada por $\lambda(s) = \sup\{L(\mu \restriction_{{}^*\gamma})(u) : u \subseteq {}^*s \wedge u \in \sigma({}^*\gamma)\}$. Temos que $\lambda$ é uma medida definida sobre os borelianos de $[0,1] \cap \mathbb{R}$ cujo valor em um intervalo fornece seu comprimento, isto é, o completamento de $\lambda$ é a medida de Lebesgue em $[0,1] \cap \mathbb{R}$.

[8] É fácil ver que se $i$ é finito então ${}^\circ\mu({}^*i) = 0$.

# Capítulo 2

# Teorema de Bochner

Salomon Bochner (1899-1982) foi um matemático cujo trabalho influenciou o desenvolvimento de diversos ramos de Análise no século XX. Seus artigos costumavam entrelaçar diferentes tópicos de interesse de modo que eles reforçavam-se uns aos outros. Isso frequentemente conduzia a um novo ponto de vista que instigava outros matemáticos a seguir novas linhas de investigação.

Segundo Maruyama [8], embora existam diversas maneiras de abordar o Teorema de Bochner, não parece haver uma maneira rápida e fácil de demonstrá-lo. Nesse capítulo apresentamos uma demonstração que, uma vez construído todo o arcabouço teórico do Capítulo 1, nos parece relativamente palatável.

## 2.1 Preliminares

Sejam $n \in \mathbb{N}$ ímpar e $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2n' + 1 = |\{-n', \dots, n'\}|$. Olharemos para os elementos de $\mathbb{C}^n$ como vetores com coordenadas indexadas de $-n'$ a $n'$.

Para cada $k \in \{-n', \dots, n'\}$, considere o vetor $v_k \in \mathbb{C}^n$ cuja $\ell$-ésima coordenada é $e^{2\pi i \frac{k\ell}{n}}$. Considere também a matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ cuja $k$-ésima linha é dada pelo vetor $v_k$. Como as entradas de $M$ são da forma $a_k^\ell$ (em que $a_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$), obtemos que cada uma das linhas de $M$ está em progressão geométrica. Além disso, como $a_k \neq a_{k'}$ se $k \neq k'$, obtemos por Vandermonde que $\det M \neq 0$, isto é, $\{v_{-n'}, \dots, v_{n'}\}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$.

Sejam $\mathcal{V} = \{v_{-n'}, \dots, v_{n'}\}$ e $\mathcal{B} = \{e_{-n'}, \dots, e_{n'}\}$ duas bases de $\mathbb{C}^n$, sendo $\mathcal{B}$ a base canônica. Para cada $a \in \{-n', \dots, n'\}$, considere a função $\delta_a : \{-n', \dots, n'\} \to \mathbb{C}$

dada por $\delta_a = \chi_{\{a\}}$. Temos $e_a = (\delta_a(-n'), \ldots, \delta_a(n'))_{\mathcal{B}}$. Seja $\hat{\delta}_a : \{-n', \ldots, n'\} \to \mathbb{C}$ tal que $e_a = (\hat{\delta}_a(-n'), \ldots, \hat{\delta}_a(n'))_{\mathcal{V}}$, isto é,

$$e_a = \sum_{k=-n'}^{n'} \hat{\delta}_a(k) v_k,$$

que restringindo à $\ell$-ésima coordenada fica

$$\delta_a(\ell) = \sum_{k=-n'}^{n'} e^{2\pi i \frac{k\ell}{n}} \hat{\delta}_a(k). \tag{2.1}$$

Como $M$ é a matriz de mudança de base de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{B}$ (note que $M = M^{\perp}$), obtemos

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{-n'}(-n') & \cdots & \hat{\delta}_{-n'}(n') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\delta}_{n'}(-n') & \cdots & \hat{\delta}_{n'}(n') \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que $M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}$. De fato,

$$\begin{aligned} M \cdot \overline{M} &= \begin{bmatrix} e^{2\pi i \frac{n'^2}{n}} & \cdots & e^{-2\pi i \frac{n'^2}{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-2\pi i \frac{n'^2}{n}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{n'^2}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \frac{n'^2}{n}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{n'^2}{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{2\pi i \frac{n'^2}{n}} & \cdots & e^{-2\pi i \frac{n'^2}{n}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^0 & \cdots & \displaystyle\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-4\pi i \frac{\ell n'}{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{4\pi i \frac{\ell n'}{n}} & \cdots & \displaystyle\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo que na última igualdade acima utilizamos o fato de que, como $n$ é ímpar, temos $\left\{e^{4\pi i \frac{\ell(k-k')}{n}} : \ell \in \{-n', \ldots, n'\}\right\} = \left\{e^{2\pi i \frac{\ell(k-k')}{n}} : \ell \in \{-n', \ldots, n'\}\right\}$, e como esse é o conjunto de vértices de um polígono regular de $n$ lados centrado em 0 se $k \neq k'$, obtemos que sua média (e por conseguinte sua soma) é igual a 0. Assim, obtemos $\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{n} e^{-2\pi i \frac{ak}{n}}$, que pode ser reescrito como

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-2\pi i \frac{k\ell}{n}} \delta_a(\ell). \tag{2.2}$$

Portanto, podemos passar da função $\delta_a$ para a função $\hat{\delta}_a$ e vice-versa através das igualdades (2.1) e (2.2). Uma questão que surge naturalmente é que relações podemos encontrar quando consideramos outras funções $f, \hat{f} : \{-n', \ldots, n'\} \to \mathbb{C}$ que representam o mesmo vetor em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}$, respectivamente. Isso nada mais é do que uma *transformada de Fourier discreta*: $\hat{f}$ é a *transformada de Fourier* de $f$, ao passo que $f$ é a *transformada inversa de Fourier* de $\hat{f}$.

Em particular, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.1.1.** Sejam $\mu, \hat{\mu} : \{-n', \ldots, n'\} \to \mathbb{C}$ tais que

$$(\mu(-n'), \ldots, \mu(n'))_{\mathcal{B}} = (\hat{\mu}(-n'), \ldots, \hat{\mu}(n'))_{\mathcal{V}}. \tag{2.3}$$

Se $\hat{\mu}$ é positiva-definida, então $\mu$ é uma função que assume valores reais não-negativos.

*Demonstração.* É imediato de (2.3) que

$$\mu(\ell) = \sum_{k=-n'}^{n'} e^{2\pi i \frac{k\ell}{n}} \hat{\mu}(k) \tag{2.4}$$

e

$$\hat{\mu}(k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-2\pi i \frac{k\ell}{n}} \mu(\ell). \tag{2.5}$$

Considere extensões de $\mu$ e de $\hat{\mu}$ definidas em $\mathbb{Z}$ periódicas de período $n$. Tais funções também serão denotadas por $\mu$ e por $\hat{\mu}$, respectivamente, e elas também satisfazem (2.4) e (2.5). Além disso, dado $a \in \{-n', \ldots, n'\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(a) &= \sum_{\ell=-n'}^{n'} \mu(\ell)\delta_a(\ell) \\
&= \sum_{\ell=-n'}^{n'} \mu(\ell)\,|\delta_a(\ell)|^2 \\
&= \sum_{\ell=-n'}^{n'} \mu(\ell)\delta_a(\ell)\overline{\delta_a(\ell)} \\
&\overset{(2.1)}{=} \sum_{\ell=-n'}^{n'} \sum_{k=-n'}^{n'} \sum_{k'=-n'}^{n'} \mu(\ell)e^{2\pi i\frac{k\ell}{n}}\hat{\delta}_a(k)\overline{e^{2\pi i\frac{k'\ell}{n}}\hat{\delta}_a(k')} \\
&= \sum_{\ell=-n'}^{n'} \sum_{k=-n'}^{n'} \sum_{k'=-n'}^{n'} e^{2\pi i\frac{\ell(k-k')}{n}}\mu(\ell)\hat{\delta}_a(k)\overline{\hat{\delta}_a(k')} \\
&= \sum_{k=-n'}^{n'} \sum_{k'=-n'}^{n'} \sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-2\pi i\frac{\ell(k'-k)}{n}}\mu(\ell)\hat{\delta}_a(k)\overline{\hat{\delta}_a(k')} \\
&\overset{(2.5)}{=} n \sum_{k=-n'}^{n'} \sum_{k'=-n'}^{n'} \hat{\mu}(k'-k)\hat{\delta}_a(k)\overline{\hat{\delta}_a(k')} \\
&= n \left\langle \begin{bmatrix} \hat{\mu}(0) & \cdots & \hat{\mu}(2n') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}(-2n') & \cdots & \hat{\mu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_a(-n') \\ \vdots \\ \hat{\delta}_a(n') \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{\delta}_a(-n') \\ \vdots \\ \hat{\delta}_a(n') \end{bmatrix} \right\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Teorema de Bochner

**Teorema 2.2.1** (Bochner)**.** Seja $\hat{\mu} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ uma função positiva-definida tal que $\hat{\mu}(0) = 1$. Existe uma medida de probabilidade de Borel $\tilde{\mu}$ em[1] $\beta\mathbb{R}$ tal que $\hat{\mu}(k) = \int_{\beta\mathbb{R}} e^{-ikx} d\tilde{\mu}(x)$ para todo $k \in \mathbb{Q}$. Além disso, $\tilde{\mu}(\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) = 0$, e portanto $\tilde{\mu}$ pode ser considerada como uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$.

A demonstração que apresentamos do Teorema de Bochner usa métodos não-standard. A ideia é aplicar o Princípio da Transferência à Proposição 2.1.1 para obtermos uma função não-negativa definida sobre um conjunto hiperfinito, a partir do qual construiremos uma malha hiperfinita que cubra $\mathbb{Q}$, similar à que apresentamos na Seção 1.8. A medida $\tilde{\mu}$ será uma medida de contagem dos pontos dessa malha com pesos dados pela função $\hat{\mu}$. O uso de $\beta\mathbb{R}$ se faz necessário devido a argumentos que dependem da

[1] O símbolo $\beta\mathbb{R}$ é usado para denotar a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{R}$.

compacidade do espaço, mas como a malha estará contida em ${}^*\mathbb{R}$, é natural esperar que $\tilde{\mu}(\beta\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}) = 0$.

*Demonstração.* Considere ${}^*\hat{\mu} : {}^*\mathbb{Q} \to {}^*\mathbb{R}$ (denotaremos ${}^*\hat{\mu}$ simplesmente por $\hat{\mu}$). Tome $n, n', n'' \in {}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$ tais que $n = 2n' + 1$ e $n' = (n''!\,)^2$.

Seja $q : \{-n', \dots, n'\} \to {}^*\mathbb{Q}$ dada por $q(k) = \frac{k}{n''!}$ e defina $\hat{\mu}' = \hat{\mu} \circ q$. Temos que $\hat{\mu}'$ é interna, e aplicando o Princípio da Transferência à Proposição 2.1.1, como $\hat{\mu}'$ é positiva-definida, obtemos uma função não-negativa $\mu' : \{-n', \dots, n'\} \to {}^*\mathbb{R}_+$ tal que valem (2.4) e (2.5). A fim de obter a malha hiperfinita, seja $\varphi : \{-n', \dots, n'\} \to {}^*\mathbb{R}$ dada por $\varphi(\ell) = 2\pi n''!\,\frac{\ell}{n}$. A malha em questão é $\operatorname{Im}\varphi$, e como $\varphi$ é injetora, podemos tomar $\varphi^{-1} : \operatorname{Im}\varphi \to \{-n', \dots, n'\}$ e definir $\mu'' = \mu' \circ \varphi^{-1}$.

Nosso objetivo agora é construir uma integral de Daniell em $\beta\mathbb{R}$. Para tanto, sejam $H = \{f \in \mathbb{R}^{\beta\mathbb{R}} : f \text{ é contínua}\}$ e $I : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(f) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{n} \sum_{x \,\in\, \operatorname{Im}\varphi} ({}^*f)(x)\mu''(x)\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{n} \sum_{\ell \,=\, -n'}^{n'} ({}^*f)(\varphi(\ell))\mu'(\ell)\right). \tag{2.6}$$

Como $\beta\mathbb{R}$ é compacto, temos que $f$ é limitada, logo ${}^*f$ também é limitada (em particular, $\min \operatorname{Im} f \leq \left({}^*f\right)(x) \leq \max \operatorname{Im} f$ para todo $x \in {}^*\beta\mathbb{R}$), e como $\frac{1}{n}\sum_\ell \mu'(\ell) = \hat{\mu}'(0) = \hat{\mu}(0) = 1$, obtemos que $\min \operatorname{Im} f \leq \frac{1}{n}\sum_\ell \left({}^*f\right)(\varphi(\ell))\mu'(\ell) \leq \max \operatorname{Im} f$, isto é, $\frac{1}{n}\sum_\ell \left({}^*f\right)(\varphi(\ell))\mu'(\ell)$ é limitado por um número real, de maneira que faz sentido tomar sua parte standard, e portanto $I$ está bem definida.

Claro que $I$ é linear e positiva. Seja $\langle f_m : m \in \mathbb{N}\rangle$ uma sequência em $H$ tal que $\langle f_m(x) : m \in \mathbb{N}\rangle$ é decrescente e $f_m(x) \to 0$ para cada $x \in \beta\mathbb{R}$. Novamente como $\beta\mathbb{R}$ é compacto, obtemos $f_m \to 0$ uniformemente, logo $0 \leq I(f_m) \leq \max \operatorname{Im} f_m \to 0$. Desta forma, concluímos que (2.6) de fato define uma integral de Daniell.

Além disso, $I(\chi_{\beta\mathbb{R}}) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{n}\sum_\ell \mu'(\ell)\right) = \operatorname{st}(\hat{\mu}'(0)) = \operatorname{st}(1) = 1$, o que implica que $I$ é a integral com respeito a uma medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ em $\beta\mathbb{R}$, e como $H$ é o conjunto de todas as funções contínuas de $\beta\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, temos que $\tilde{\mu}$ é de Borel.

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{Q}$, temos $n''!\,k \in \{-n', \ldots, n'\}$, logo

$$\begin{aligned}
\int_{\beta\mathbb{R}} e^{-ikx} d\tilde{\mu}(x) &\overset{(2.6)}{=} \operatorname{st}\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-ik\varphi(\ell)}\mu'(\ell)\right) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=-n'}^{n'} e^{-2\pi i \frac{n''!k\ell}{n}}\mu'(\ell)\right) \\
&\overset{(2.5)}{=} \operatorname{st}(\hat{\mu}'(n''!\,k)) \\
&= \operatorname{st}(\hat{\mu}(k)) \\
&= \hat{\mu}(k).
\end{aligned}$$

Para a segunda parte da prova, considere a sequência $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=-t}^{t} \mu'(\ell)\right).$$

Como $\mu'$ é não-negativa, obtemos que $h$ é crescente, além de que para cada $t \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
h(t) &\leq \operatorname{st}\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=-n'}^{n'} \mu'(\ell)\right) \\
&\overset{(2.5)}{=} \operatorname{st}(\hat{\mu}'(0)) \\
&= \operatorname{st}(1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

de modo que $h$ está bem-definida e é convergente. Ora, uma vez que $h$ é convergente, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\mathbb{R}) &\geq \lim_{t\to\infty} h(t) \\
&\approx h(n') \\
&\approx \frac{1}{n}\sum_{\ell=-n'}^{n'} \mu'(\ell) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

e portanto $\tilde{\mu}(\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) = 0$. $\square$

# Capítulo 3

# Teoremas de Tipo de Daniell-Kolmogorov

Andrei Nikolaevitch Kolmogorov (1903-1987) foi o pioneiro a trabalhar com a noção de espaço de probabilidade no contexto da Teoria da Medida, numa monografia publicada em 1933. Em sua abordagem, um *espaço de probabilidade* é um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ em que $P(\Omega) = 1$, e uma *variável aleatória* em $\Omega$ é simplesmente uma função mensurável de $\Omega$ em $\mathbb{R}$. Seu trabalho influenciou de sobremaneira o cálculo de probabilidades da época que se tornou a base da moderna Teoria das Probabilidades.

Nesse capítulo apresentamos demonstrações dos Teoremas de Tipo de Daniell-Kolmogorov que usam métodos não-standard. A ideia é trabalhar com conjuntos hiperfinitos e com a medida de Loeb.

## 3.1 Preliminares

A fim de evitar confusões no que se segue, fixamos algumas notações. Dada uma função $f : A \to B$ e subconjuntos $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$, escrevemos $f[A'] = \{f(a) : a \in A'\}$ e $f^{-1}[B'] = \{a : f(a) \in B'\}$. Denotamos por $\vec{f}$ a função $\vec{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ dada por $\vec{f}(X) = f[X]$.

Generalizamos a noção de variável aleatória num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ substituindo $\mathbb{R}$ por um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ qualquer, isto é, uma *variável aleatória* de $\Omega$ em $X$ é uma função mensurável de $(\Omega, \mathcal{A})$ em $(X, \mathcal{M})$. Ademais, cada variável aleatória $f : \Omega \to X$ induz uma medida de probabilidade $P_f$

em $(X, \mathcal{M})$ dada por $P_f(W) = P(f^{-1}[W])$.

Seja $E$ um espaço de medida munido de uma topologia de modo que $E$ seja um *espaço polonês*[1] (isto é, $E$ é separável e homeomorfo a um espaço métrico completo). Seja $\mathcal{B}$ a $\sigma$-álgebra dos conjuntos borelianos mensuráveis de $E$.

Seja $\Lambda$ um conjunto infinito e, dados $I$, $J$ subconjuntos de $\Lambda$ tais que $J \subseteq I$, seja $\pi^I_J : E^I \to E^J$ a projeção $\pi^I_J(f) = f\restriction_J$.

**Definição 3.1.1.** Uma *família projetiva de medidas de probabilidade* sobre $(E, \mathcal{B})$ e $\Lambda$ é uma família $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)\}$ tal que para cada $J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$ temos que $\mu_J$ é uma medida de probabilidade em $(E^J, \mathcal{B}^J)$ e se $J \subseteq I \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$ então $\mu_I = \mu_J \circ \vec{\pi}^I_J$.

Quando $\Lambda = \mathbb{R}_+$, dizemos que uma família projetiva de medidas de probabilidade $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)\}$ é contínua (à direita) se para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $t \in {\mathbb{R}_+}^m$, se $\langle t_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ é uma sequência em ${\mathbb{R}_+}^m$ decrescente componente a componente que converge a $t$, então $\mu_{\{\pi_1(t_n),\ldots,\pi_m(t_n)\}} \longrightarrow \mu_{\{\pi_1(t),\ldots,\pi_m(t)\}}$.

## 3.2 Teoremas de Tipo de Daniell-Kolmogorov

**Teorema 3.2.1** (Daniell-Kolmogorov)**.** Sejam $\Lambda$ infinito enumerável e $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)\}$ uma família projetiva de medidas de probabilidade sobre $(E, \mathcal{B})$ e $\Lambda$. Existem um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e uma família de variáveis aleatórias $\{x_t \in E^\Omega : t \in \Lambda\}$ tais que $\mu_I = P_{x_I}$ para cada $I \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$, onde $x_I : \Omega \to E^I$ é dado por $x_I(u)(t) = x_t(u)$.

*Demonstração.* Seja $\iota : \mathbb{N} \to \Lambda$ bijetora. Tome $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e considere $I_\omega = \operatorname{Im} {}^*\iota\restriction_\omega$. Temos $I_\omega \in {}^*\mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$ e $\Lambda \subseteq I_\omega$.

Considere a medida de probabilidade $L({}^*\mu_{I_\omega})$ em $\left(({}^*E)^{I_\omega}, \sigma(\mathcal{B}^{I_\omega})\right)$ e defina $\Omega = ({}^*E)^{I_\omega}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}^{I_\omega})$ e $P = L({}^*\mu_{I_\omega})$.

Seja $y : \Omega \times I_\omega \to {}^*E$ dada por $y(u,t) = u(t)$. Para cada $t \in \Lambda$ temos que $y(u,t)$ é $P$-q.t.p. quase-standard. Deste modo, para cada $t \in \Lambda$, seja $x_t : \Omega \to E$ a variável aleatória dada $P$-q.t.p. por $x_t(u) = \operatorname{st}(y(u,t))$. Agora, para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$, sejam $x_K : \Omega \to E^K$ e $y_K : \Omega \to ({}^*E)^K$ dadas por $x_K(u)(t) = x_t(u)$ e $y_K(u)(t) = y(u,t)$. Note que

$$x_K = \operatorname{st} \circ y_K \qquad P\text{-q.t.p.} \tag{3.1}$$

[1] Isso permite afirmar na Definição 3.1.1 que cada $\mu_\lambda$, $\lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$, é regular.

e $y_K(u) = u\restriction_K$, isto é,

$$y_K = \pi_K^{I_\omega}. \tag{3.2}$$

Pelo Princípio da Transferência, para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$, temos ${}^*\mu_{I_\omega} = {}^*\mu_K \circ \vec{\pi}_K^{I_\omega}$, logo

$$L({}^*\mu_{I_\omega}) = L({}^*\mu_K) \circ \vec{\pi}_K^{I_\omega}. \tag{3.3}$$

Dados $J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Lambda)$ e $\{A_t : t \in J\} \subseteq \mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned}
P_{x_J}\left(\prod_{t\in J} A_t\right) &= P\left({x_J}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right) \\
&\overset{(3.1)}{=} P\left({y_J}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right) \\
&\overset{(3.2)}{=} P\left({\pi_J^{I_\omega}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right) \\
&= L({}^*\mu_{I_\omega})\left({\pi_J^{I_\omega}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right) \\
&\overset{(3.3)}{=} L({}^*\mu_J)\left(\vec{\pi}_J^{I_\omega}\left({\pi_J^{I_\omega}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right)\right) \\
&= L({}^*\mu_J)\left(\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right) \\
&= \mu_J\left(\prod_{t\in J} A_t\right).
\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 3.2.2** (Daniell-Kolmogorov)**.** Seja $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)\}$ uma família projetiva de medidas de probabilidade contínua sobre $(E, \mathcal{B})$ e $\mathbb{R}_+$. Existem um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e uma família de variáveis aleatórias $\{x_t \in E^\Omega : t \in \mathbb{R}_+\}$ tais que $\mu_I = P_{x_I}$ para cada $I \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$, onde $x_I : \Omega \to E^I$ é dado por $x_I(u)(t) = x_t(u)$.

*Demonstração.* Tome $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e considere a função $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \left\{\frac{k}{n!} : k \in {}^*\mathbb{N}\right\}$ dada por $\varphi(z) = \frac{\lfloor n!z \rfloor}{n!}$. Note que $\mathrm{st}(\varphi(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{R}_+$, o que implica $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Ns}\left(\left\{\frac{k}{n!} : k \in {}^*\mathbb{N}\right\}\right)$.

Tomando $\Lambda = \mathbb{Q}_+$ e considerando a família projetiva de medidas de probabilidade como $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q}_+)\}$, podemos nos aproveitar do teorema anterior. Tome $I_\omega = \left\{\frac{k}{n!} : k \in (n!)^2\right\}$. Temos $I_\omega \in {}^*\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q}_+)$ e $\mathbb{Q}_+ \subseteq I_\omega$. Ademais, $\text{st}(\text{Ns}(I_\omega)) = \mathbb{R}_+$.

Assim como na demonstração do teorema anterior, sejam $\Omega = ({}^*E)^{I_\omega}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}^{I_\omega})$ e $P = L({}^*\mu_{I_\omega})$. Considere também $y : \Omega \times I_\omega \to {}^*E$ dada por $y(u,t) = u(t)$ e, para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I_\omega)$, a função $y_K : \Omega \to ({}^*E)^K$ dada por $y_K(u)(t) = y(u,t)$. Temos novamente $y_K = \pi_K^{I_\omega}$, isto é, (3.2).

Para cada $t \in \text{Ns}(I_\omega)$ temos que $y(u,t)$ é $P$-q.t.p. quase-standard. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, como $\text{Im}\,\varphi \subseteq I_\omega$, seja $x_t : \Omega \to E$ a variável aleatória dada $P$-q.t.p. por $x_t(u) = \text{st}(y(u,\varphi(t)))$. Defina ainda, para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$, a função $x_K : \Omega \to E^K$ dada por $x_K(u)(t) = x_t(u)$.

Para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$ e cada $t \in K$, como $\varphi(t) \approx t$ e $y$ é contínua, temos

$$\begin{array}{rcl} x_K(u)(t) & = & x_t(u) \\ & \overset{P\text{-q.t.p.}}{\approx} & y(u,\varphi(t)) \\ & \approx & y(u,t), \end{array}$$

e como quando $t$ varia em $K$, $\varphi(t)$ varia em $\vec{\varphi}(K)$, obtemos

$$x_K = \text{st} \circ y_{\vec{\varphi}(K)} \qquad P\text{-q.t.p.} \tag{3.4}$$

Vale (3.3) e, além disso, temos que a continuidade da família $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)\}$ implica

$$L({}^*\mu_K) = L({}^*\mu_{\vec{\varphi}(K)}) \tag{3.5}$$

para cada $K \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$. Logo, dados $J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$ e $\{A_t : t \in J\} \subseteq \mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned}
P_{x_J}\left(\prod_{t\in J} A_t\right) &= P\left({x_J}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right)\\
&\overset{(3.4)}{=} P\left({y_{\vec{\varphi}(J)}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right)\\
&\overset{(3.2)}{=} P\left({\pi^{I_\omega}_{\vec{\varphi}(J)}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right)\\
&= L({}^*\mu_{I_\omega})\left({\pi^{I_\omega}_{\vec{\varphi}(J)}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right)\\
&\overset{(3.3)}{=} L({}^*\mu_{\vec{\varphi}(J)})\left(\vec{\pi}^{I_\omega}_{\vec{\varphi}(J)}\left({\pi^{I_\omega}_{\vec{\varphi}(J)}}^{-1}\left[\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right]\right)\right)\\
&= L({}^*\mu_{\vec{\varphi}(J)})\left(\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right)\\
&\overset{(3.5)}{=} L({}^*\mu_J)\left(\mathrm{st}^{-1}\left[\prod_{t\in J} A_t\right]\right)\\
&= \mu_J\left(\prod_{t\in J} A_t\right).
\end{aligned}$$

□

# Referências


[1] Albeverio, S. et al. *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, Inc., 1986.

[2] Cutland, N. J. *Loeb Measures in Practice: Recent Advances.* LNM1751, Springer, 2001.

[3] Dauben, J. W. *Abraham Robinson, The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey.* Princeton University Press, 1995.

[4] Herzberg, F. *Simple Nonstandard Proofs of Daniell-Kolmogorov-Type Theorems.* Positivity 16, 627-631, (2012).

[5] Hurd, A. E.; Loeb, P. A. *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press, Inc., 1985.

[6] Knapp, A. W. *Salomon Bochner.* Biographical Memoirs: Volume 85, The National Academies Press, 2004.

[7] Loeb, P. A.; Wolff, M. *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Maruyama, T. *Herglotz-Bochner Representation Theorem via Theory of Distributions.* Journal of the Operations Research Society of Japan 60, 122-135, (2017).

[9] Nualart, D. *Kolmogorov and Probability Theory.* Arbor CLXXVIII 704, 607-619, (2004).

[10] Robinson, A.; Luxemburg W. A. J. *Non-Standard Analysis – Revised Edition.* Princeton University Press, 1996.

[11] Tlas, T. *Nonstandard Proofs of Herglotz, Bochner and Bochner-Minlos Theorems.* J Fourier Anal Appl 21, 1-10, (2015).

[12] Väth, M. *Nonstandard Analysis.* Birkhäuser-Verlag, 2007.