UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

PRISCILA SANTOS RAMOS

EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS IMPULSIVAS: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E CONTROLABILIDADE DE SOLUÇÕES SUAVES EM ESPAÇOS DE BANACH

CAMPINAS
2021

Priscila Santos Ramos

Equações integro-diferenciais fracionárias impulsivas: existência, unicidade e controlabilidade de soluções suaves em espaços de Banach

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa

Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Priscila Santos Ramos, e orientada pelo Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa.

Campinas
2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R147e

Ramos, Priscila Santos, 1981-
Equações integro-diferenciais fracionárias impulsivas : existência, unicidade e controlabilidade de soluções suaves em espaços de Banach / Priscila Santos Ramos. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa.
Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações integro-diferenciais fracionárias. 2. Derivada fracionária psi-Hilfer. 3. Solução suave (Equações diferenciais). 4. Existência de solução (Equações diferenciais). 5. Unicidade de solução (Equações diferenciais). 6. Controlabilidade. 7. Teoria do ponto fixo. I. Sousa, José Vanterler da Costa, 1985-. II. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Impulsive fractional integro-differential equations : existence, uniqueness and controllability of mild solutions in Banach spaces
Palavras-chave em inglês:
Fractional integro-differential equations
psi-Hilfer fractional derivative
Mild solution (Differential equations)
Existence of solution (Differential equations)
Uniqueness of solution (Differential equations)
Controllability
Fixed point theory
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutora em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Vanterler da Costa Sousa [Orientador]
Rubens de Figueiredo Camargo
Daniela dos Santos de Oliveira
Felix Silva Costa
Adrian Ricardo Gomez Plata
Data de defesa: 15-06-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-3394-764X
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4403247651001623

Tese de Doutorado defendida em 15 de junho de 2021 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Prof(a). Dr(a). DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). FELIX SILVA COSTA

Prof(a). Dr(a). ADRIAN RICARDO GOMEZ PLATA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais, à minha avó Dosília, aos meus irmãos, Robson e Patricia e aos meus sobrinhos, Valentina e Isaque, dedico!

AGRADECIMENTOS

A Deus seja toda a honra.

Ao meu orientador, professor José Vanterler da Costa Sousa pela disponibilidade, apoio e amizade e ao meu coorientador, professor Edmundo Capelas de Oliveira pela disponibilidade e apoio.

À toda a minha família pelo amor e compreensão.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Unicamp, pela oportunidade de realizar o Doutorado.

À Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB) por permitir o doutoramento.

Aos amigos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização dessa etapa: Ana Mapeli, Crisberg, Welton, Wellington, Liliane, Geizane, Giane, Leomaques, Lisbeth, Fernanda Paula, David, Oscar, Beatriz Laiate, Vinicius, Livia e Fernanda Teixeira.

RESUMO

Na teoria de equações diferenciais fracionárias, é de suma relevância e importância investigar propriedades de existência, unicidade e controlabilidade de soluções, visto que muitas vezes, não há garantia de existência, muito menos, da unicidade de soluções. Diante disto e do crescente estudo que envolve as equações diferenciais fracionárias, propomos uma classe de equações integro-diferenciais fracionárias quase lineares com impulsos, a partir da escolha da derivada fracionária de Caputo, a qual consiste em um caso particular da derivada fracionária ψ-Hilfer. Nesse sentido, inferimos condições necessárias e suficientes, e garantimos a existência e unicidade de soluções suaves para uma classe de equações integro-diferenciais fracionárias em espaços de Banach, por meio da teoria de medida de não compacidade de Hausdorff e teorias de ponto fixo em espaços de Banach. Por fim, impomos o termo controle no problema anterior e estabelecemos condições que asseguram a controlabilidade para um sistema de controle integro-diferencial impulsivo fracionário em espaços de Banach utilizando a técnica do ponto fixo e o operador (α, θ)-resolvente.

Palavras-chave: Equações integro-diferenciais fracionárias, derivada fracionária ψ-Hilfer, solução suave, existência e unicidade, medida de não compacidade de Hausdorff, controlabilidade, ponto fixo, operador resolvente.

ABSTRACT

In the theory of fractional differential equations, it is extremely important and important to investigate properties of existence, uniqueness and controllability of solutions, since, many times, there is no guarantee of existence, much less, of the uniqueness of solutions. In view of this and the growing study involving fractional differential equations, we propose a class of almost linear fractional integro-differential equations with impulses, based on the choice of Caputo fractional derivative, which consists of a particular case of the fractional derivative ψ-Hilfer. In this sense, we infer necessary and sufficient conditions, and guarantee the existence and uniqueness of mild solutions for a class of fractional integro-differential equations in Banach spaces, through Hausdorff's non-compactness measurement theory and fixed point theories in spaces of Banach. Finally, we impose the term control in the previous problem and establish conditions that ensure controllability for a fractional impulsive integro-differential control system in Banach spaces using the fixed point technique and the (α, θ)-resolvent operator.

Keywords: Fractional integro-differential equations, ψ-Hilfer fractional derivative, mild solution, existence and uniqueness, Hausdorff measure noncompactness, controllability, fixed point, resolvent operator.

Sumário

Introdução

Por que discutir propriedades de equações diferenciais? Quais consequências importantes são obtidas? Ao longo das décadas, é notável o crescimento e foco pela abordagem nas propriedades qualitativas de soluções de equações diferenciais e integro-diferenciais, sejam elas no sentido de existência, unicidade, estabilidade, controlabilidade, dentre outras propriedades, têm sido alvo de investigação de suma importância em diversas áreas, de modo especial, na própria matemática com sua abordagem analítica [18, 72, 85]. No entanto, para discutir tais propriedades, ferramentas matemáticas são de grande relevância, por exemplo, medida de não compacidade e teoria de ponto fixo, dentre outras [12, 13, 27, 106].

Por outro lado, a teoria das equações diferenciais impulsivas aparece como uma descrição natural de vários processos reais sujeitos a certas perturbações instantâneas, cuja duração é insignificante em comparação com a duração do processo [34, 52, 56, 64]. Na prática, os efeitos impulsivos são exibidos em muitos fenômenos biológicos envolvendo limiares, modelos de ritmo de ruptura em medicina e biologia, modelos de controle ótimo em economia, farmacocinética, sistemas modulados por frequência, bem como na injeção de algum medicamento.

Pesquisadores importantes vêm desenvolvendo teorias e fornecendo resultados de ponta e promissores que contribuíram e vêm contribuindo significativamente para a área de equações diferenciais impulsivas e suas aplicações, dentre esses, mencionamos alguns trabalhos [7, 29, 31, 33, 34, 36, 41, 55, 84].

Em 2012, Arjunan et. al. [6] investigaram a existência de soluções para equações integro-diferenciais impulsivas com condições não locais, em um espaço de Banach X, da forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & Au(t) + f(t, u(t)), t \in [0, b], t \neq t_i \\ u(0) & = & g(u) \\ \Delta\theta(t_i) & = & I_i(\theta(t_i)),\ i = 1, ..., n, 0 < t_1 < ... < t_n < b \end{array}\right.$$

onde $A : D(A) \subset X$ é um operador definido não densamente, $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$, com $u(t_i^-)$, $u(t_i^+)$ os limites à direita e à esquerda de u em t_i, respectivamente.Neste artigo, os autores apresentam um exemplo para ilustrar o resultado principal.

É indiscutível a importância e relevância que o cálculo fracionário, ao longo dos anos, proporciona às inúmeras áreas, em particular, física, engenharia, medicina, biologia, dentre outras [1, 2, 3, 4, 68, 70, 73, 104, 113]. Atualmente, a teoria do cálculo fracionário está bem consolidada e o que se tem notado é o número crescente de pesquisadores utilizando ferramentas discutidas no cálculo fracionário e aplicando em outras áreas, proporcionando essa ligação importante e que cresce exponencialmente ao longo dos anos [20, 22, 63, 71, 82, 87]. Aqui vamos destacar as equações diferenciais fracionárias, que têm sido alvo de estudo de vários pesquisadores [26, 48, 53, 116].

A teoria de equações diferenciais fracionárias é de suma importância tanto no aspecto teórico, quanto prático. Dentre muitos outros trabalhos que possibilitaram o crescimento e fortalecimento da área, podemos citar [14, 17, 107, 108]. Recentemente, Sousa, Oliveira e colaboradores [90, 92, 93, 94, 98], têm discutido alguns resultados sobre a existência, unicidade e estabilidade de soluções de equações diferenciais fracionárias via derivada fracionária ψ-Hilfer, obtendo uma ampla classe de casos particulares. Outros trabalhos, envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer podem ser encontrados em [88, 96, 97, 101].

Por outro lado, podemos destacar o importante trabalho de Hu et al. [38] sobre a existência e unicidade de soluções suaves para equações integro-diferenciais semilineares com condições iniciais não locais e atraso, em 2009. Este trabalho é de fundamental importância para a teoria das equações diferenciais fracionárias, especialmente equações com atraso.

Em 2010, Debbouche [23] discutiu a existência e unicidade de soluções locais e clássicas de uma classe de sistemas integro-diferenciais de evolução fracionária não linear com condições não locais da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}u(t) + A(t)u(t) &= f(t,u(t)) + \displaystyle\int_0^t B(t-s)g(s,u(s))ds, \\ u(t_0) + h(u) &= u_0 \end{cases}$$

no espaço de Banach X, onde $\dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ denota a derivada fracionária de Riemann-Liouville, $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq t_0 < t$, $-A(t)$ é um operador linear fechado definido em um domínio denso $D(A) \subset X$ em X tal que $D(A)$ é independente de t. Também considera-se que $-A(t)$ gera um operador de evolução em um espaço de Banach X, a função B é de valor real e localmente integrável em $[t_0,\infty]$, as aplicações não lineares f e g são definidas em $[t_0,\infty]\times X$ em X e $h : C(J,X) \to \overline{D(A)}$ é uma função dada. Além desses resultados importantes, Debbouche e Baleanu [24], discutiram resultados sobre controlabilidade de equações integro-diferenciais fracionárias. Também podemos destacar o importante trabalho, realizado por Gou e Li [31], sobre a existência local e global de soluções suaves para uma equação integro-diferencial semilinear fracionária impulsiva com semigrupo não compacto.

Por outro lado, podemos destacar a teoria de controle que envolve trabalhos de alta qualidade e que impactam positivamente diversas áreas das ciências. Com a expansão da teoria do controle ao longo da década, motivou e atraiu inúmeros pesquisadores de áreas próximas, que tornou a área mais robusta e de forma incontestável, por seus resultados de alto impacto e relevância. Controlabilidade é um dos conceitos elementares da teoria matemática do controle e também sabe-se que desempenha um papel fundamental no design de problemas de controle de engenharia [5, 15, 67, 109, 117]. É possível encontrar muitos trabalhos de equações diferenciais e integro-diferenciais que discutem a controlabilidade de soluções, como em [16, 69, 76, 117] e suas referências.

Uma consequência natural da expansão do cálculo fracionário em diversas áreas e que permite a investigação de novos resultados, é a criação de novas possíveis áreas, e consequências importantes na comunidade científica. Nota-se que, ao longo dessas décadas, o crescente interesse pelo cálculo fracionário, é interessante e importante, desde a inclinação pela investigação na própria teoria, quanto pela utilização das ferramentas do cálculo fracionário, para resolver problemas de outras áreas. Nesse sentido, inúmeros pesquisadores, notaram que, uma vez que se tem em mãos a teoria do controle, em particular a controlabilidade, e uma base sólida do cálculo fracionário, investigar soluções de equações diferenciais e integro-diferenciais fracionárias com impulsos não instantâneos, evolutivos e abstratos, passou a ser atrativo e interessante, uma vez que a ordem fracionária da equação, possibilita realizar uma análise mais detalhada dos resultados [5, 24, 25, 49, 50, 76, 102, 103, 109, 110].

Em 2011, Debbouche e Baleanu [24], apresentaram um estudo sobre o sistema de controle integro-diferencial impulsivo não local dado por

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} + \mathcal{A}(t, u(t))u(t) &= (B\mu)(t) + \phi\Big(t, f(t, u(\beta(t))), \int_0^t g(t, s, u(\gamma(s)))ds\Big), \\ u(0) + h(u) &= u_0 \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)), \end{aligned}$$

onde $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ denota a derivada fracionária de Riemann-Liouville, u assume valores no espaço de Banach X, $0 < \alpha \leq 1, t \in [0, a]$, $u_0 \in X$, $i = 1, 2, ..., m$ e $0 < t_1 < t_2 < \cdots t_m < a$. Seja $-\mathcal{A}(t, .)$ um operador linear fechado definido em um domínio denso $D(\mathcal{A})$ de X em X tal que $D(\mathcal{A})$ é independente de t. Considere também que $-\mathcal{A}(t, .)$ gera um operador de evolução no espaço de Banach X, um espaço de Banach de funções controle admissíveis com U um espaço de Banach e $B : U \to X$ um operador linear limitado. As funções $f : J \times X^r \to X$,$g : \Lambda \times X^k \to X$, $\phi : J \times X^2 \to X$, $h : PC(J, X) \to X$, $u(\beta) = u(\beta_1), \cdots, u(\beta_r)$, $u(\gamma) = u(\gamma_1), \cdots, u(\gamma_k)$ e $\beta_p, \gamma_q : J \to J$ são dados onde $p = 1, 2, \cdots, r$ e $q = 1, 2, \cdots, k$. Considere $J = [0, a]$ e $\Lambda = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq a\}$. Esse trabalho, serviu como motivação para outros diversos trabalhos na literatura.

Em 2015, Liu and Li [61], investigaram a controlabilidade aproximada de sistemas de controle de evolução fracionária envolvendo derivadas fracionárias de Riemann-Liouville. Mais recente, Kumar et al. [51], impondo condições necessárias e suficientes, investigaram o sistema diferencial amortecido de estabilidade fracionária com impulso não instantâneo. Outros temas interessantes sobre controlabilidade podem ser encontrados em [15, 16, 21, 30, 40, 47, 57, 61, 66, 67, 80, 81, 111, 112, 114, 115, 117].

Conforme discutido e apresentado até aqui, é notável o vasto número de artigos de extrema importância e relevância publicados ao longo da década. No entanto, trabalhos envolvendo uma família (α, θ)-resolvente de problemas de equações diferenciais e integro-diferenciais fracionárias com impulsos ainda são restritos, muitas vezes por ser uma questão em aberto, ou pela área ainda estar em construção.

Então, naturalmente surgem algumas questões, a saber:

1. Quais são os problemas, envolvendo uma família (α, θ)-resolvente de solução suave de equações integro-diferenciais, que impedem discutir propriedades, como existência, unicidade e controlabilidade?

2. Sabendo quais problemas, então temos que responder quais condições devem ser impostas para tentar obter tais resultados?

3. Os resultados obtidos, são importantes e relevantes ao ponto de contribuir significativamente para a área?

Motivados pelas questões e trabalhos acima, até aqui abordados, pela restrição de trabalhos na área e na busca por fornecer novos resultados, neste presente trabalho temos como objetivo investigar propriedades qualitativas de uma classe de soluções suaves de um sistema de equações integro-diferenciais fracionário com impulso no sentido da derivada fracionária de Caputo. A fim de tornar claro o desenvolvimento e entendimento das principais contribuições do presente trabalho, a seguir dividimos em duas etapas, a saber:

Na primeira etapa e contribuição deste trabalho, vamos investigar a existência e unicidade de uma classe de soluções suave por meio das condições necessárias e suficientes **EC**$_1$-**EC**$_9$ e **UC**$_1$-**UC**$_5$ (ver Capítulo 3) da equação integro-diferencial fracionária impulsiva dada por

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\theta(t) + \mathcal{A}(t,\theta(t))\theta(t) & = & \Phi(t,\theta(t)) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(t,s,\theta(s))ds, t \in [0,b], t \neq t_i \\ \theta(0) + \Xi(\theta) & = & \theta_0 \\ \Delta\theta(t_i) & = & I_i(\theta(t_i)),\ i = 1,...,n, 0 < t_1 < ... < t_n < b \end{cases} \tag{1}$$

onde ${}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1, t \in [0,b]$, $\mathcal{A} : [0,b]\times\Lambda \to \Lambda$ é um operador fechado e linear, gerador de uma família (α, u)-resolvente, $\theta_0 \in \Lambda$ (Λ é um espaço de Banach), $\Phi : [0,b]\times\Lambda \to \Lambda$, $g : \Omega\times\Lambda \to \Lambda$, $\Xi : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)\times\Lambda \to \Lambda$ e $\Delta\theta(t_i) = \theta(t_i^+) - \theta(t_i^-)$ constitui uma condição de impulso. Neste trabalho, consideramos $\Omega = \{(t,s); 0 \leq s \leq t \leq b\}$.

Em outras palavras, vamos discutir os seguintes resultados:

Teorema 1. Considere as condições **EC**$_1$-**EC**$_6$. Então, o problema não local impulsivo Eq.(1) tem pelo menos uma solução suave.

Teorema 2. Suponha as condições **EC**$_1$-**EC**$_2$ e **EC**$_7$-**EC**$_8$. Então, a Eq.(1) tem pelo menos uma solução suave se

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{r}\left(\varphi(r) + \phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{G_1\chi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right) < 1 \tag{2}$$

onde $\varphi(r) = \sup\{\|\Xi(\theta)\|,\ \|u\| < r\}$.

Teorema 3. Sejam $0 < \alpha < 1$ e as condições **EC**$_1$-**EC**$_9$. Então, a Eq.(1) tem pelo menos uma solução suave se

$$\mathbf{M}_0^{\alpha}\left(L_0 + 4\int_0^t \left(k_1(s) + \frac{2G_0k_3(s)(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds + \sum_{i=1}^n l_i\right) < 1.$$

Teorema 4. Considere as condições **EC**$_1$**-EC**$_9$. Então, a equação Eq.(1) tem pelo menos uma solução suave se Eq.(3.20) (ver Capítulo 3) e a seguinte condição é satisfeitas

$$\mathbf{M}_0^{\alpha}L_0 + \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{r}\left(\phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{\chi(r)G_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right) < 1. \tag{3}$$

Teorema 5. Sejam $\theta_0 \in \Lambda$ e $\mathbf{B}_r = \Big\{\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda);\ \|\theta\| \leq r\Big\}$, com $r > 0$. Suponha as condições **UC**$_1$**-UC**$_5$. Então, Eq.(1) tem uma única solução suave.

Uma das questões que surgiu, após a discussão da primeira etapa (existência e unicidade), foi a possibilidade de investigar a controlabilidade de soluções suaves e, nesta perspectiva, nos perguntamos sobre as condições que deveriam ser consideradas e o que deveria ser modificado no sistema Eq.(1). Então, notamos que era preciso adicionar um operador B e a função controle μ no sistema Eq.(1), além das condições necessárias e suficientes **CC**$_1$**-CC**$_5$ (ver Capítulo 4), para que se tornasse possível. Assim, na segunda etapa a contribuição deste trabalho foi investigar a controlabilidade de soluções suaves do sistema integro-diferencial fracionário com impulsos, dado por

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\theta(t) + \mathcal{A}(t,\theta(t))\theta(t) &=& (B\mu)(t) + \Phi(t,\theta(t)) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(t,s,\theta(s))ds, \\ \theta(0) + \Xi(\theta) &=& \theta_0 \\ \Delta\theta(t_i) &=& I_i(\theta(t_i)),\ i=1,...,n, 0<t_1<...<t_n<b \end{cases} \tag{4}$$

onde a função controle μ pertence ao espaço de Banach $L^2(J,U)$ de funções controle admissíveis com U um espaço de Banach e $B: U \to \Lambda$ um operador linear limitado.

Em outras palavras, investigamos o seguinte resultado:

Teorema 6. Suponha que o operador $-\mathcal{A}(t,\theta)$ gera uma família (α,θ)-resolvente com $\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\| \leq Me^{-\sigma(t-s)}$ para algumas constantes $M, \sigma > 0$. Se as condições $(\mathbf{CC}_1)$ - $(\mathbf{CC}_6)$ são satisfeitas, então o sistema integro-diferencial de controle fracionário com condição não local e impulsiva (4) é controlável em J.

Quando se investiga um determinado problema em cálculo fracionário, em particular envolvendo equações diferenciais fracionárias, é natural e se espera que, quando a ordem fracionária do problema neste caso α, for um número inteiro, temos o caso clássico. Nesse trabalho, podemos afirmar que todos os resultados obtidos, isto é, os Teorema 2 - Teorema 5 e o Teorema 6 , são válidos para o caso clássico. Além disso, podemos destacar uma vantagem importante e relevante ao se discutir determinados problemas envolvendo a ordem fracionária, a liberdade de escolha de $0 < \alpha \leq 1$, e o comportamento da solução suave, a medida que α varia. Essa é um das principais características em trabalhar com derivadas fracionárias. Isto é ainda mais notável ao realizar uma aplicação real, pois por meio da análise gráfica o comportamento das soluções suaves fica mais evidente, sendo possível comparar as soluções suaves geradas pelo caso fracionário com a solução inteira.

O presente trabalho está organizado na seguinte forma: no Capítulo 1, vamos apresentar uma estrutura (espaços de funções) com suas respectivas normas e alguns conceitos básicos de integrais e derivadas fracionárias. Por outro lado, apresentamos conceitos fundamentais de medida de não compacidade de Hausdorff e operador resolvente, bem como resultados de suma importância na discussão dos principais resultados discutidos no Capítulo 3. No Capítulo 2, é realizado um estudo amplo da derivada fracionária ψ-Hilfer, discutindo sua definição, relações com outras derivadas fracionárias e resultados básicos e essenciais do cálculo fracionário. Por fim, observações sobre uma ampla classe de casos particulares tanto no sentido de derivadas fracionárias, como nos resultados discutidos, são apresentadas. No Capítulo 3, vamos apresentar uma representação para a solução suave da Eq.(1) em termos de $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}$, chamada de família (α,θ)-resolvente gerada por $-\mathcal{A}(t,\theta)$. Nesse sentido, vamos discutir a primeira contribuição deste trabalho, ou seja, estabelecer condições necessárias e suficientes para obter a existência de soluções suaves para a Eq.(1) no espaço de Banach. Além disso, como segunda contribuição, vamos garantir a unicidade de soluções suaves para a Eq.(1). No Capítulo 4, apresentaremos a equação integral que representa a solução suave para o sistema (4), condições para o estudo da controlabilidade serão estabelecidas e em seguida provaremos nossa contribuição. Por fim, conclusões e perspectivas futuras, fecham o trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar alguns conceitos e resultados fundamentais para discussão das principais contribuições deste trabalho. Iniciamos com uma pequena abordagem de espaços de funções p-integráveis, espaços das funções contínuas e absolutamente contínuas e o espaço das funções contínuas por partes, bem como suas respectivas normas. Nesse sentido, apresentamos resultados sobre a medida de não compacidade de Hausdorff e o operador resolvente, ambas abordagens, são de suma importância para a discussão da solução suave de equações diferenciais e integro-diferenciais fracionárias.

Sejam $p \in [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ e $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. O espaço das funções reais p-integráveis, no sentido de Lebesgue, $L^p(J)$, munido de sua norma canônica, é dado por [88]

$$L^p(J) := \left\{ f : J \to \mathbb{R};\ \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

e

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

respectivamente. O par $(L^p(J), \|f\|_p)$ é um espaço de Banach.

Considere o espaço de Banach $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, o intervalo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. O espaço das funções contínuas e o espaço das funções continuamente diferenciáveis n-vezes:

$$\Big(C(J, \mathbf{E}) := \{ f : J \to \mathbf{E};\ f : \text{contínua} \}, \quad \|f\|_C := \sup_{t \in J} |f(t)| \Big) \quad \text{e}$$
$$\Big(C^n(J, \mathbf{E}) := \Big\{ f : J \to \mathbf{E};\ f^{(n)} \in C(J, \mathbf{E}) \Big\}, \quad \|f\|_{C^n} := \sup_{t \in J} |f^{(n)}(t)| \Big)$$

são espaços de Banach.

Seja $J = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$ um intervalo, com $0 < a < b < \infty$, então o espaço das funções n-vezes absolutamente contínuas é dado por [88]

$$AC^n(J, \mathbb{R}) = AC^n(J) = \Big\{ f : J \to \mathbb{R};\ f^{(n-1)} \in AC(J) \Big\}.$$

Suponha $\mathbf{E}$ um espaço de Banach e $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ uma n-partição do intervalo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. O espaço das funções contínuas por partes dado por

$$\mathcal{PC}(J, \mathbf{E}) := \left\{ \begin{array}{l} f : J \to \mathbf{E};\ f(t) \text{ seja contínua em } t \neq t_k,\ \text{contínua à esquerda} \\ \text{em } \ t = t_k \text{ e exista o limite à direita}, f(t_k^+), \text{para } k = 1, 2, \ldots n. \end{array} \right\},$$

equipado com a norma $\|f\|_{\mathcal{PC}} = \{\sup\|f(t)\|;\ t \in J\}$ é um espaço de Banach.

Denota-se $\mathscr{L}([0,b],\Lambda)$ o espaço das Λ - valores funções integráveis de Bochner em $[0,b]$ com a norma [116]

$$\|\theta\|_{\mathscr{L}} = \int_0^b \|\theta(t)\|\ dt.$$

Seja $J = [a,b] \subset \mathbb{R}_+$ um intervalo, com $0 < a < b < \infty$. O espaço ponderado $C_{\gamma;\psi}(J,\mathbb{R})$ das funções f sobre $(a,b]$ é definido por [88]

$$C_{\gamma;\psi}(J) = \left\{ f : (a,b] \to \mathbb{R};\ \Big(\psi(t) - \psi(a)\Big)^{\gamma} f(t) \in C(J) \right\}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma dada por

$$\|f\|_{C_{\gamma;\psi}(J)} = \left\| \Big(\psi(t) - \psi(a)\Big)^{\gamma} f(t) \right\|_{C(J)} = \max_{t \in J} \left| \Big(\psi(t) - \psi(a)\Big)^{\gamma} f(t) \right|.$$

Quando ψ é a função identidade ($\psi(t) = t$) e $J = [0,b]$, temos o espaço ponderado:

$$C_{\gamma}(J) = \{ f : (0,b] \to \mathbb{R};\ t^{\gamma} f(t) \in C(J) \}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1.$$

O espaço ponderado $C^n_{\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ da função f em $(a,b]$ é definida por

$$C^n_{\gamma;\psi}(J) = \left\{ f : (a,b] \to \mathbb{R};\ f(t) \in C^{n-1}(J),\ f^{(n)}(t) \in C_{\gamma;\psi}(J) \right\}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}(J)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f^{(k)} \right\|_{C(J)} + \left\| f^{(n)} \right\|_{C_{(\gamma;\psi)}(J)}.$$

Para $n = 0 \Rightarrow C^0_{\gamma;\psi}(J,\mathbb{R}) = C_{\gamma;\psi}(J,\mathbb{R})$. Ainda, $C^n_{\gamma,\psi}(J) \subset AC^n(J)$. Para $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ implica $C^n_{\gamma_1;\psi}(J) \subset C^n_{\gamma_2;\psi}(J)$.

1.1 Medida de não compacidade de Hausdorff e operador resolvente

Medidas de não compacidade e teoremas de ponto fixo são usados para estabelecer resultados sobre a existência de soluções de equações diferenciais como apresentados em [11, 27, 85, 106]. Além disso, há notáveis trabalhos que envolvem medida de não compacidade e espaços de Banach [28, 29, 33, 77, 85]. Nesta seção, vamos apresentar a definição de medida de não compacidade de Hausdorff e alguns resultados de suma importância para a investigação da primeira etapa deste trabalho, isto é, a garantia da existência de solução suave para a equação integro-diferencial fracionária quase linear com impulsos e não local, dada pela Eq.(1) em espaços de Banach. Nesse sentido, abordamos o conceito de família (α,θ)-resolvente, semigrupo equicontínuo e o lema de Darbo-Sadovskii.

Definição 1.1. [12, 116] *A medida de não compacidade de Hausdorff, denotada por $\mu_\Omega(\cdot)$ é definida por*

$$\mu(\mathbf{B}) = \inf\{r > 0, \mathbf{B} \textit{ pode ser coberto por um número finito de bolas com raio } r\}$$

para o conjunto limitado $\mathbf{B}$ em um espaço de Banach Ω.

Lema 1.1. [12, 116] *Sejam Ω um espaço de Banach real e $\mathbf{B},\mathbf{E}\subseteq\Omega$ subconjuntos limitados. Neste caso tem-se as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{B}$ *é pré-compacto se, e somente se,* $\mu_\Omega(\mathbf{B})=0$*;*
2. $\mu_\Omega(\mathbf{B})=\mu_\Omega(\bar{\mathbf{B}})=\mu_\Omega(con\ \mathbf{B})$*, onde* $\bar{\mathbf{B}}$ *e* $\mathbf{B}$ *significam o fecho e a casca convexa de* $\mathbf{B}$*, respectivamente;*
3. $\mu_\Omega(\mathbf{B})\leq\mu_\Omega(\mathbf{E})$*, onde* $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{E}$*;*
4. $\mu_\Omega(\mathbf{B}+\mathbf{E})\leq\mu_\Omega(\mathbf{B})+\mu_\Omega(\mathbf{E})$*, onde* $\mathbf{B}+\mathbf{E}=\{x+y;x\in\mathbf{B},y\in\mathbf{E}\}$*;*
5. $\mu_\Omega(\mathbf{B}\cup\mathbf{E})\leq\max\{\mu_\Omega(\mathbf{B}),\mu_\Omega(\mathbf{E})\}$*;*
6. $\mu_\Omega(\lambda\mathbf{B})\leq\ |\lambda|\ \mu_\Omega(\mathbf{B})$*, para qualquer* $\lambda\in\mathbb{R}$*;*
7. *Se a aplicação* $\Theta:D(\Theta)\subset\Omega\to\mathbb{Z}$ *é Lipschitz contínua com constante* r*, então* $\mu_{\mathbb{Z}}(\Theta\mathbf{B})\leq r\mu\Omega(\mathbf{B})$ *para qualquer subconjunto limitado* $\mathbf{B}\subseteq D(\Theta)$*, onde* $\mathbb{Z}$ *é um espaço de Banach;*
8. $\mu_\Omega(\mathbf{B})=\inf\{d_\Omega(\mathbf{B},\mathbf{E});\Theta\subseteq\Omega$ *é pré-compacto*$\}=\inf\{d_\Omega(\mathbf{B},\mathbf{E});\mathbf{E}\subseteq\Omega$ *tem valor finito*$\}$*, onde* $d_\Omega(\mathbf{B},\mathbf{E})$ *significa a distância de Hausdorff não simétrica* (ou simétrica) *entre* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{E}$ *em* Ω*;*
9. $\{\mathbb{W}_n\}_{n=1}^\infty$ *é uma sequência decrescente de subconjuntos não vazios fechados e limitados de* Ω *e* $\lim_{n\to\infty}\mu_\Omega(\mathbb{W}_n)=0$*, então* $\bigcap_{n=1}^\infty\mathbb{W}_n$ *é não vazio e compacto em* Ω*.*

A aplicação $\mathbb{W}\subseteq\Omega\to\Omega$ é dita ser uma μ_Ω-contração se existe uma constante positiva $r<1$ tal que $\mu_\Omega(\Theta(\mathbf{B}))\leq r\mu_\Omega(\mathbf{B})$ para qualquer subconjunto fechado limitado $\mathbf{B}\subseteq\mathbb{W}$, onde Ω é um espaço de Banach.

A seguir, apresentamos alguns resultados que englobam a medida de não compacidade que são importantes no decorrer do trabalho.

Lema 1.2 (Darbo-Sadovskii)**.** [12, 116] *Se* $\mathbb{W}\subseteq\Omega$ *é limitado fechado e convexo, a aplicação contínua* $\Theta:\mathbb{W}\to\mathbb{W}$ *é uma* μ_Ω*-contração, a aplicação* Θ *tem pelo menos um ponto fixo em* $\mathbb{W}$*.*

Teorema 1.1 (Ponto fixo de Schauder)**.** *Suponha que* $K\subset X$ *é compacto e convexo, e admita que* $A:K\to K$ *é contínua. Então* A *possui um ponto fixo.*

Denotamos por μ a medida de não compacidade de Hausdorff de Λ e admita μ_c a medida de não compacidade de Hausdorff de $\mathcal{PC}([a,b];\Lambda)$.

Lema 1.3. [116] *Se* W *é limitado, então para cada* $\epsilon>0$*, existe uma sequência* $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{W}$*, tal que*

$$\mu(\mathbb{W})\leq 2\mu\Big(\{\theta_n\}_{n=1}^\infty\Big)+\varepsilon.$$

Lema 1.4. [12] *Se* $\mathbb{W}\subseteq\mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ *é limitado, então* $\mu(\mathbb{W}(t))\leq\mu_c(\mathbb{W})$*, para todo* $t\in[0,b]$*, onde* $\mathbb{W}(t)=\{\theta(k);\theta\in\mathbb{W}\}\subseteq\Lambda$*. Além disso, se* $\mathbb{W}$ *é equicontínuo em* $[0,b]$*, então* $\mu(\mathbb{W}(t))$ *é contínuo em* $[a,b]$ *e* $\mu_c(\mathbb{W})=\sup\{\mu(\mathbb{W}(t)),\ t\in[a,b]\}$*.*

Lema 1.5. [35, 46, 116]. *Se* $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty\subset L^1([a,b],\Lambda)$ *é uniformemente integrável, então a função* $\mu(\{\theta_n\}_{n=1}^\infty)$ *é mensurável e*

$$\mu\left(\left\{\int_0^t\theta_n(s)ds\right\}_{n=1}^\infty\right)\leq 2\int_0^t\mu\left(\{\theta_n(s)\}_{n=1}^\infty\right)ds.$$

Lema 1.6. [12, 116] *Se* $\mathbb{W} \subseteq \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ *é limitado e equicontínuo, então* $\mu(\mathbb{W}(t))$ *é contínua e*

$$\mu\Big(\int_0^t \mathbb{W}(s)ds\Big) \leq \int_0^t \mu(\mathbb{W}(s))ds,$$

para todo $t \in [0,b]$*, onde*

$$\int_0^t \mu(\mathbb{W}(s))ds = \Big\{\int_0^t \theta(s)ds; \theta \in \mathbb{W}\Big\}.$$

A importância do conceito de família de resolvente está intimamente ligada ao estudo de soluções para problemas envolvendo equações integro-diferenciais fracionárias, como apresentado em [10, 32, 85]. Exibimos, de modo sucinto e objetivo, os principais conceitos e resultados que conduzem ao entendimento de solução suave, bem como dos resultados discutidos no Capítulo 3.

Definição 1.2. [116] *O* C_0*-semigrupo* $U_\theta(t,s)$ *é dito ser equicontínuo se* $(t,s) \to \Big\{U_\theta(t,s)\theta(s); \theta \in \mathbf{B}\Big\}$ *é equicontínuo para* $t > 0$ *para todo conjunto limitado* $\mathbf{B}$ *em* Λ.

Lema 1.7. [116] *Se a família de evolução* $\Big\{U_\theta(t,s)\Big\}_{0\leq s\leq t\leq b}$ *é equicontínuo e* $\eta \in \mathscr{L}([a,b],\mathbb{R}^+)$*, então o conjunto* $\Big\{\int_0^t U_\theta(t,s)\theta(s)ds\Big\}$*,* $\|\theta(s) \leq \eta(s)\|$ *para quase todo* $s \in [0,b]\Big\}$ *é equicontínuo para* $t \in [0,b]$.

Segue da referência [11] que para qualquer $\theta \in \mathcal{PC}([0,b,\Lambda])$ fixo, existe uma única função contínua $U_\theta : [0,b]\times[0,b] \to B(\Lambda)$ definida em $[0,b]\times[0,b]$ tal que

$$U_\theta(t,s) = I + \int_s^t \mathcal{A}_\theta(w)U_\theta(w,s)dw, \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{B}(\Lambda)$ denota o espaço de Banach de operadores lineares limitados de Λ em Λ com a norma $\|\Theta\| = \sup\{\|\Theta(\theta)\|; \|\theta\| = 1\}$ e I representa o operador identidade em Λ, $\mathcal{A}_\theta = \mathcal{A}(t,\theta(b))$, temos

$$U_\theta(t,t) = I,\ U_\theta(t,s)U_\theta(s,r) = U_\theta(t,r),\ (t,s,r) \in [0,b]\times[0,b]\times[0,b]$$

e

$$\frac{\partial U_\theta(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}_\theta(t)U_\theta(t,s),\ \text{para quase todo } t,s \in [0,b].$$

Agora considere a seguinte definição.

Definição 1.3. [23, 24] *Seja* $-\mathcal{A}(t,\theta)$ *um operador fechado e linear com domínio* $D(\mathcal{A})$ *definido sobre um espaço de Banach* Λ *e* $\alpha > 0$. *Seja* $\rho(\mathcal{A}(t,\theta))$ *o conjunto resolvente de* $-\mathcal{A}(t,\theta)$. *Chamamos* $-\mathcal{A}(t,\theta)$ *o gerador de uma família* (α,θ)*-resolvente se existe* $w \geq 0$ *e uma função fortemente contínua* $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathscr{L}(\Lambda)$ *tal que* $\{\lambda^\alpha : R_e(\lambda) > w\} \subset \rho(\mathcal{A})$ *e para* $0 \leq s \leq t \leq \infty$,

$$\Big(\lambda^\alpha I - \mathcal{A}(s,\theta)\Big)^{-1} v = \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)}\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\ v\ dt,\ R_e(\lambda) > w,\ (\theta,v) \in X^2. \tag{1.2}$$

Neste caso, $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)$ é chamada a família (α,θ)-resolvente gerada por $-\mathcal{A}(t,\theta)$.

Notamos que o Lema 1.1, itens a) e b), é bem posto se, e somente se, $-\mathcal{A}(t,\theta)$ é o gerador da família (α,θ)-resolvente e também observamos que $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)$ pode ser extraído do operador de evolução do gerador $-\mathcal{A}(t,\theta)$ e que a família (α,θ)-resolvente é semelhante à equação diferencial não autônoma de evolução em um espaço de Banach.

Capítulo 2

Derivada fracionária ψ-Hilfer

Ao longo dos últimos anos, o cálculo fracionário tem ganhado cada vez mais destaque na comunidade científica, tanto pela solidez de sua teoria, quanto pelas inúmeras aplicações. No entanto, muitos pesquisadores questionavam-se sobre como escolher e saber a melhor derivada fracionária para fitar dados, isto é, modelar determinados fenômenos. Em 2017 Almeida [1], considera a derivada fracionária de Caputo com respeito a outra função e investiga algumas propriedades básicas e alguns exemplos são apresentados e discutidos por meio de gráficos. Uma propriedade interessante, é que preserva as propriedades dos possíveis casos particulares. Como pode ser notado (veja citações no google scholar), o trabalho foi bem recebido pela comunidade científica. Foi então que em 2018 Sousa e Oliveira [89] introduziram a chamada derivada fracionária ψ-Hilfer com o objetivo de unificar em uma única derivada fracionária uma ampla classe de derivadas fracionárias que preservaria suas propriedades. Também como motivação para a discussão dessa nova formulação de derivada fracionária, Sousa e Oliveira, basearam-se na derivada fracionária de Hilfer que unifica as derivadas fracionárias de Riemman-Liouville e Caputo, bem como no trabalho de Almeida em [1].

Desde as primeiras ideias apresentadas no trabalho sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer [89], tem recebido notória atenção por inúmeros pesquisadores de diversas áreas, de modo especial, envolvendo equações diferenciais fracionárias. Atualmente, são mais de 1100 citações dessa derivada relacionadas com estudos de existência e unicidade de soluções suaves, estabilidade e controlabilidade. Embora muitos trabalhos vêm sendo investigados via derivada fracionária ψ-Hilfer, em particular, as extensões para pseudo-operadores fracionários e derivadas fracionárias de ordem variável [95, 99], ainda existem inúmeros problemas em aberto a ser discutidos.

Antes de iniciar a abordagem sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer, vamos primeiramente realizar uma abordagem de duas derivadas fracionárias consolidadas e com muita importância na construção do cálculo fracionário, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo.

Definição 2.1. [48] *Sejam* (a,b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *um intervalo finito ou infinito de* $\mathbb{R}$ *e* $\alpha > 0$. *Além disso, considere* $\psi(t)$ *uma função crescente e positiva em* $(a,b]$, *com* $\psi'(t)$ *contínua em* (a,b). *Assim, as integrais fracionárias da função* f *com respeito a outra função* ψ *em* $[a,b]$ *à direita e à esquerda, respectivamente, são definidas por*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.1}$$

e

$$I_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.2}$$

onde, em ambas as equações, $\Gamma(\cdot)$ *é a função gama e* $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.

Em particular, para $\psi(x) = x$ nas Eq.(2.1) e Eq.(2.2), temos a integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, como definidas a seguir.

Definição 2.2. [48] *Seja* (a,b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *um intervalo finito ou infinito de* $\mathbb{R}$. *As integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita da função* f *de ordem* α, *com* $\alpha > 0$ *são dadas, respectivamente, por*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \ x > a \tag{2.3}$$

e

$$I^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \ x < b, \tag{2.4}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ *é a função gama e* $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.

Note que se $a = 0$, podemos escrever $I^{\alpha} f(t) = (g_{\alpha} * f)(t)$, onde

$$g_{\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Denotamos por $*$ a convolução de funções e $\lim_{\alpha \to 0} g_{\alpha}(x) = \delta(x)$ a função delta.

Ressaltamos que para cada escolha da função $\psi(\cdot)$, obtemos uma ampla classe de integrais fracionárias como casos particulares das Eq.(2.1) e Eq.(2.2). A seguir apresentamos alguns resultados clássicos envolvendo as integrais fracionárias das equações Eq.(2.1) e Eq.(2.2).

Lema 2.1. [48] *Sejam* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$. *Então vale a propriedade de semigrupo dada por*

1. $I^{\alpha;\psi}_{a+} I^{\beta;\psi}_{a+} f(x) = I^{\alpha+\beta;\psi}_{a+} f(x)$.
2. $I^{\alpha;\psi}_{b-} I^{\beta;\psi}_{b-} f(x) = I^{\alpha+\beta;\psi}_{b-} f(x)$.

Demonstração. *1.* Segue da Definição 2.1 e do teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} I^{\alpha;\psi}_{a+}\left(I^{\beta;\psi}_{a+} f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} \left(I^{\beta;\psi}_{a+} f(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} \left(\int_a^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1} f(\xi)\, d\xi\right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \psi'(\xi) f(\xi) \left(\int_{\xi}^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1}\, dt\right) d\xi. \end{aligned}$$

Considerando $Q = \displaystyle\int_{\xi}^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1}\, dt$ e integrando-a por partes com $u = (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}$, temos

$$Q = \frac{\alpha-1}{\beta} \int_{\xi}^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta} dt.$$

Integrando por partes $(\alpha-1)$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta(\beta+1)...(\beta+(\alpha-2))}\int_{\xi}^{x}\psi'(t)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta+(\alpha-2)}\,dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\left(I_{a+}^{\beta;\psi}f(x)\right) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{a}^{x}\psi'(\xi)(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{a}^{x}\psi'(\xi)(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,d\xi \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta;\psi}f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, provamos o item *2.* □

Lema 2.2. [48] *Sejam $\alpha>0$ e $\delta>0$.*

1. Se $f(x)=(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}$, então

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(x)=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+\delta-1}.$$

2. Se $f(x)=(\psi(b)-\psi(x))^{\delta-1}$, então

$$I_{b^-}^{\alpha;\psi}f(x)=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(b)-\psi(x))^{\alpha+\delta-1}.$$

Demonstração. 1. Considerando $f(x)=(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}$ na Definição 2.1, obtemos

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(x)=I_{a^+}^{\alpha;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}\,dt.$$

Integrando por partes, sendo $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}$ e $dv=\psi'(t)(\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}dt$, temos

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(x) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)\delta}\int_{a}^{x}\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t)-\psi(a))^{\delta}dt.$$

Repetindo a integração por partes, com a mudança de variável $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}$, temos

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\delta(\delta+1)}\int_{a}^{x}\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-3}(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+1}\,dt.$$

Integrando por partes, $\alpha-1$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\delta(\delta+1)...(\delta+\alpha-2)}\int_{a}^{x}\psi'(t)(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+\alpha-2}dt \\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta+\alpha)}\left(\psi(t)-\psi(a)\right)^{\delta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

De maneira análoga provamos o item *2.* □

Muitas outras propriedades das integrais fracionárias Eq.(2.1) e Eq.(2.2), podem ser encontradas em [1, 89].

Vamos a seguir apresentar alguns tipos de derivadas fracionárias, e consequentemente, alguns resultados básicos.

Definição 2.3. [48] *Sejam o intervalo* $[a,b]$ *com* $(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$, $\alpha > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Considere* $f(x) \in AC^n(J)$ *e* $\psi'(x) \neq 0$. *Então as derivadas fracionárias* ψ*-Riemann-Liouville à esquerda e à direita de uma função* f *com respeito a uma função* ψ *de ordem* α *são definidas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) &= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha;\psi}_{a+} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1} f(t)dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha;\psi}_{b-} f(x) &= \left(\frac{-1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha;\psi}_{b-} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $n = [\alpha] + 1$.

Nos resultados que seguem usamos, frequentemente, as notações

$$f^{[n]}_{\psi^+} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \quad \text{e} \quad f^{[n]}_{\psi^-} f(x) = \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

onde $\dfrac{d}{dx}$ denota a derivada de primeira ordem e $\psi'(x)$ é a derivada de primeira ordem de uma função crescente e positiva $\psi(\cdot)$, tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$ com $(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$.

Considere um caso particular da Definição 2.3 quando $\psi(x) = x$. Neste caso, temos a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville, como segue:

Definição 2.4. [48] *Sejam* (a,b), $f(x) \in AC^n(a,b)$ *e* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}_0$. *As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita da função* f *de ordem* α, *são dadas, respectivamente, por*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \tag{2.8}$$

e

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-} f(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{b-} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.9}$$

Definição 2.5. [1] *Sejam* $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $[a,b]$ *o intervalo* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. *Considere as funções* $f, \psi \in C^n([a,b], \mathbb{R})$ *tal que* ψ *é crescente e* $\psi'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$. *As derivadas fracionárias* ψ*-Caputo à esquerda e à direita de* f *de ordem* α *são dadas, respectivamente, por*

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) = I^{n-\alpha;\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \tag{2.10}$$

e

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha;\psi}f(x) = I_{b-}^{n-\alpha;\psi}\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x). \tag{2.11}$$

onde $n = [\alpha] + 1$ *para* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *e* $n = \alpha$ *para* $\alpha \in \mathbb{N}$

Para $\psi(x) = x$, obtemos as derivadas fracionárias de Caputo, as quais são definidas a seguir.

Definição 2.6. [48] *As derivadas fracionárias de Caputo à esquerda e à direita da função* $f \in AC^n[a,b]$ *de ordem* $\alpha > 0$ *são definidas, respectivamente, por*

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = I_{a+}^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x) \tag{2.12}$$

e

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = I_{b-}^{n-\alpha}(-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x). \tag{2.13}$$

A seguir, vamos apresentar uma derivada fracionária que é uma interpolação entre as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville, denominada derivada fracionária de Hilfer.

Definição 2.7. [37] *As derivadas fracionárias de Hilfer à esquerda e à direita de uma função* $f \in C^n(a,b)$ *de ordem* $n-1 < \alpha < n$ *e tipo* $0 \leq \beta \leq 1$, *são definidas, respectivamente, por*

$$ D_{a^+}^{\alpha,\beta}f(x) = I_{a^+}^{\beta(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}f(x) \tag{2.14}$$

e

$$ D_{b^-}^{\alpha,\beta}f(x) = I_{b^-}^{\beta(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} I_{b^-}^{(1-\beta)(n-\alpha)}f(x)$$

com $\beta(n-\alpha) = \gamma - \alpha$.

Lema 2.3. [48] *Sejam* $\alpha > 0$ *e* $\delta > 0$.

1. *Se* $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, *então*

$$ \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1}.$$

2. *Se* $f(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, *então*

$$ \mathcal{D}_{b-}^{\alpha;\psi}f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(b) - \psi(x))^{\delta-\alpha-1}.$$

Agora apresentamos uma relação entre as derivadas fracionárias de ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo.

Teorema 2.1. [1] *Se* $f \in C^n[a,b]$ *e* $a > 0$, *então*

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha;\psi}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(x)-\psi(a)\Big)^{k} f_{\psi+}^{[k]}f(a)\Big]$$

e

$$ {}^{C}D_{b-}^{\alpha;\psi}f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha;\psi}\Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(b)-\psi(x)\Big)^{k} f_{\psi+}^{[k]}f(b)\Big].$$

Motivado pelas derivadas fracionárias ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, bem como, resultados pertinentes a continuidade e convergência do operador, vamos a seguir apresentar uma discussão detalhada da derivada fracionária ψ-Hilfer.

Definição 2.8. [89] *Sejam $n-1<\alpha<n$ com $n\in\mathbb{N}$, $I=[a,b]$ um intervalo tal que $-\infty\leq a<b\leq\infty$ e $f,\psi\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ duas funções tal que ψ é crescente e $\psi'(x)\neq 0$ para todo $x\in I$. As derivadas fracionárias ψ-Hilfer (à esquerda e à direita) da função f de ordem α e tipo $0\leq\beta\leq 1$ são definidas por:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x)=I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}f(x) \tag{2.15}$$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}f(x)=I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{b-}\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{b-}f(x), \tag{2.16}$$

respectivamente.

As derivadas fracionárias ψ-Hilfer também podem ser escritas em termos da integral fracionária com respeito a outra função e das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville de uma função com respeito a outra da seguinte forma:

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x)=I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{a+}f(x)\quad\text{e}\quad {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}f(x)=I^{\gamma-\alpha;\psi}_{b-}\mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{b-}f(x) \tag{2.17}$$

com $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

De fato,

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) &= I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}f(x)\\ &= I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{n-\alpha-\beta(n-\alpha);\psi}_{a+}f(x)\\ &= I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{n-\gamma;\psi}_{a+}f(x)\\ &= I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha;\psi}_{a+}f(x). \end{aligned}$$

Além disso, para $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$ temos

$$ f^{[n]}_{\psi+}f(x)=\lim_{\alpha\to n-}\mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{a+}f(x)\quad\text{e}\quad f^{[n]}_{\psi-}f(x)=\lim_{\alpha\to n-}\mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{b-}f(x). \tag{2.18}$$

Com efeito, uma vez que

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}f(x)=\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{n-\gamma;\psi}_{a+}f(x),$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to n-}\mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{a+}f(x) &= \lim_{\alpha\to n-}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{n-\gamma;\psi}_{a+}f(x)\\ &= \lim_{\alpha\to n-}\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{(n-\gamma)-1}f(t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes com $u = f(t), dv = \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{(n-\gamma)-1}$, $du = f'(t)dt$ e $v = \dfrac{\Big(\psi(x)-\psi(t)\Big)^{n-\gamma}}{n-\gamma}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n-} \mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{a+} f(x) &= \lim_{\alpha\to n-} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-\beta(n-\alpha)+1)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \right) \\
&\times \left[f(a)(\psi(x)-\psi(a))^{n-\alpha-\beta(n-\alpha)} + \int_a^x f'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-\beta(n-\alpha)} dt \right] \\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left[f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \right] \\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \\
&= f^{[n]}_{\psi+} f(x).
\end{aligned}$$

Analogamente provamos que

$$f^{[n]}_{\psi-} f(x) = \lim_{\alpha\to n-} \mathcal{D}^{\gamma;\psi}_{b-} f(x).$$

Algumas propriedades da derivada fracionária ψ-Hilfer são provados a seguir. Discutiremos as provas dos respectivos resultados, apenas para a derivada fracionária ψ-Hilfer à direita, pois os resultados para a derivada fracionária ψ-Hilfer à esquerda são análogos. Para obter suas respectivas provas à esquerda, recomendamos o trabalho [89].

Propriedade 2.1 (Linearidade)**.** [89] *Considere* $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N},\ 0\le\beta\le 1$ *e* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. *Sejam* $f,g\in C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ *tais que existam* ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(\cdot)$ *e* ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(\cdot)$. *A derivada fracionária* ψ*-Hilfer é um operador linear, isto é,*

$$ {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(t) + \mu\, {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(t). \tag{2.19}$$

Demonstração. Segue da definição da derivada fracionária ψ-Hilfer, da linearidade dos operadores $I^{\alpha;\psi}_{a+}(\cdot)$ e da derivada de ordem inteira, a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} [\lambda f(t) + \mu g(t)] &= I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} [\lambda f(t) + \mu g(t)] \\
&= I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right) \left[\lambda I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} f(t) + \mu I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} g(t) \right] \\
&= \lambda I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} f(t) \\
&+ \mu I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} g(t) \\
&= \lambda\, {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(t) + \mu\, {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(t).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. [89] *Suponha que* $f, \psi \in C^{n+1}[a,b]$. *Então, para todo* $n-1<\alpha<n$, $0 \leq \beta \leq 1$ *e* $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$, *temos*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt \tag{2.20}$$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \frac{(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi} f(a) - \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_x^b (\psi(t)-\psi(x))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt. \tag{2.21}$$

Demonstração. Da Eq.(2.17), temos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt.$$

Fazendo integração por partes com $u = \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)$, $dv = \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\ dt$, $du = \dfrac{d}{dt}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)$ e $v = -\dfrac{(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \left[(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) + \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt \right] \\ &= \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt. \end{aligned}$$

Dessa forma temos uma relação entre a derivada ψ-Hilfer e a derivada ψ-Riemann-Liouville, que é o resultado desejado. □

Proposição 2.1. [89] *Sejam* $f, \psi \in C^{n+1}[a,b]$. *Então, é válido que*

i) $\lim_{\alpha\to n-} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f_{\psi+}^{[n]} f(x)$

ii) $\lim_{\alpha\to n-} {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f_{\psi-}^{[n]} f(x)$.

Demonstração. i) Usando o Teorema 2.2, a Eq.(2.18) e sabendo que $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to n-} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= \lim_{\alpha\to n-} \Big[\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt \Big] \\ &= \lim_{\alpha\to n-} \Big[\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\beta(n-\alpha)}}{\Gamma(\beta(n-\alpha)+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) \\ &\quad + \frac{1}{\beta(n-\alpha)+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\beta(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt \Big] \\ &= \lim_{\alpha\to n-} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\ dt \right] \\ &= \lim_{\alpha\to n-} \left[\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) + \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) - \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a) \right] \\ &= \lim_{\alpha\to n-} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) \\ &= f_{\psi+}^{[n]} f(x), \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

Analogamente, provamos o item *ii).* □

Teorema 2.3. [89] *As derivadas fracionárias ψ-Hilfer são operadores limitados, para todo $n-1<\alpha<n$ e $0\leq\beta\leq 1$, dados por*

$$\|{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)\|_{C_{\gamma,\psi}}\leq k\ \|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}} \quad e \quad \|{}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)\|_{C_{\gamma,\psi}}\leq k\ \|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}},$$

onde $k=\dfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}$ *e* $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

Demonstração. Segue da definição de derivada fracionária de ψ-Riemann-Liouville (veja Definição 2.4) que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f\|_{C_{\gamma,\psi}} &= \left\|\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{n-\gamma;\psi}f\right\|_{C_{\gamma,\psi}}\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{n-\gamma;\psi}f(x)\right|\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\right.\\
&\times \left.\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}f(t)\,dt\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}f_{\psi+}^{[n]}f(t)\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Como $\|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}}=\max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}f_{\psi+}^{[n]}f(t)dt\right|$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f\|_{C_{\gamma,\psi}} &= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}f_{\psi+}^{[n]}(t)\,dt\right|\\
&\leq \frac{\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral por substituição com $u=(\psi(x)-\psi(t))$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f\|_{C_{\gamma,\psi}} &\leq \frac{\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)}\max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{n-\gamma}\right|\\
&\leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f\|_{C_{\gamma,\psi}}\leq\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)}(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}. \tag{2.22}$$

Considerando a Eq.(2.17) e a desigualdade $\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x)\right|\leq\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f\|_{C_{\gamma,\psi}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|{}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f\|_{C_{\gamma,\psi}} &= \|I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f\|_{C_{\gamma,\psi}}\\
&= \max_{x\in[a,b]} \left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma} I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\right|\\
&= \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(t)\, dt\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f\|_{C_{\gamma;\psi}} \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\, dt\right|.
\end{aligned}$$

Integrando por substituição com $u=(\psi(x)-\psi(t))$, obtemos

$$\|{}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f\|_{C_{\gamma,\psi}} \leq \frac{\|\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f\|_{C_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \max_{x\in[a,b]} \left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}\right|.$$

Da Eq.(2.22) segue que

$$\begin{aligned}
\|{}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f\|_{C_{\gamma,\psi}} &\leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\alpha-1)\;\Gamma(n-\gamma+1)}\|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}}\\
&= \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha-1)\;\Gamma(n-\gamma+1)}\|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}}\\
&= k\|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}},
\end{aligned}$$

onde $k=\dfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}$.

Logo, o operador derivada fracionária ψ-Hilfer é limitado. □

Além disso, é possível estabelecer uma relação entre as derivadas fracionárias ψ-Hilfer e ψ-Caputo. Para ver isto, considere as funções como seguem

$$g(x)=I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}f(x) \quad \text{e} \quad h(x)=I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha)}f(x).$$

Pela definição da derivada de ψ-Hilfer com $\mu=n(1-\beta)+\beta\alpha$, temos

$${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=I_{a+}^{(n-\mu);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n g(x) \;\text{ e }\; {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=I_{b-}^{(n-\mu);\psi}\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n h(x).$$

Desse modo, são válidas as seguintes relações entre as derivadas ψ-Hilfer e ψ-Caputo:

$${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)={}^C D_{a+}^{\mu;\psi}g(x)={}^C D_{a+}^{\mu;\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)\right] \tag{2.23}$$

e

$${}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)={}^C D_{b-}^{\mu;\psi}h(x)={}^C D_{b-}^{\mu;\psi}\left[I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)\right]. \tag{2.24}$$

A seguir, discutiremos uma relação entre as derivadas fracionárias ψ-Hilfer e a ψ-Riemann-Liouville e a integral fracionária com respeito a outra função.

Teorema 2.4. [89] *Sejam* $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ *e* $0\leq\beta\leq 1$. *Se* $f\in C^n[a,b]$, *então*

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta(n-\alpha);\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(x)-\psi(a)\Big)^{k}\mathcal{D}_{a+,k}^{\gamma;\psi}f(a)\right]$$

e

$$^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-\beta(n-\alpha);\psi}\left[I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\frac{1}{k!}\left(\psi(b)-\psi(x)\right)^{k}\mathcal{D}_{b-,k}^{\gamma;\psi}f(b)\right],$$

onde $\gamma=\alpha+\beta(k-\alpha)$.

Demonstração. Considere $g(x)=I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)$ e $\mu=n-\beta(n-\alpha)$. Usando a Eq.(2.23) e o Teorema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= {}^{C}D_{a+}^{\mu;\psi}g(x)=\mathcal{D}_{a+}^{\mu;\psi}\Big[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(x)-\psi(a)\Big)^{k}g_{\psi}^{k}(a)\Big]\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\mu;\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{k}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{k}I_{a+}^{1-\beta(k-\alpha);\psi}f(a)\right]\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\mu;\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{k}\mathcal{D}_{a+,k}^{\alpha;\beta}f(a)\right],
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.5. [89] *Se* $f\in C^n[a,b]$, $n-1<\alpha<n$ *e* $0\leq\beta\leq 1$, *então*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}\;{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Big(\psi(x)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi^{+}}^{[n-k]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)$$

e

$$I_{b-}^{\alpha;\psi}\;{}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Big(\psi(b)-\psi(x)\Big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi^{-}}^{[n-k]}I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(b),$$

onde $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

Demonstração. Pela definição da derivada fracionária de ψ-Hilfer e pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha;\psi}\;{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= I_{a+}^{\alpha;\psi}\Big(I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)\Big)=I_{a+}^{\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t)\;dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\;dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\;dt.
\end{aligned}$$

Como $f_{\psi^{+}}^{[n-1]}f(t)=\left(\dfrac{1}{\psi'(t)}\dfrac{d}{dt}\right)^{n-1}f(t)$, então

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}\;{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\frac{d}{dt}f_{\psi^{+}}^{[n-1]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\;dt.$$

Resolvendo esta última integral por partes com $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}$,
$dv=\dfrac{d}{dt}f_{\psi^+}^{[n-1]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\ dt,\ \ du=-\psi'(t)(\gamma-1)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}$ e
$v=f_{\psi^+}^{[n-1]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)$, temos

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1}f_{\psi^+}^{[n-1]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}\frac{d}{dt}f_{\psi^+}^{[n-2]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\ dt. \end{aligned}$$

Integrando, novamente, por partes com $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}$,
$dv=\dfrac{d}{dt}f_{\psi^+}^{[n-2]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\ dt$, $du=-\psi'(t)(\gamma-2)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-3}\ dt$ e
$v=f_{\psi^+}^{[n-2]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1}f_{\psi^+}^{[n-1]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)\\ &\quad-\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}f_{\psi^+}^{[n-2]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\gamma-2)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-3}\frac{d}{dt}f_{\psi^+}^{[n-3]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\ dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes n vezes, temos

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\big(\psi(x)-\psi(a)\big)^{\gamma-(k+1)}}{\Gamma(\gamma-k)}f_{\psi^+}^{[n-(k+1)]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\gamma-n)}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-n-1}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)\ dt\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\psi(x)-\psi(a)\big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi^+}^{[n-k]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)+I_{a+}^{(\gamma-n);\psi}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x). \end{aligned}$$

Observe que, $\gamma-n=\alpha+\beta(n-\alpha)-n$ e $(1-\beta)(n-\alpha)=n-\alpha-\beta n+\beta\alpha$. Portanto, $\gamma-n+(1-\beta)(n-\alpha)=0$.

Logo,

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\psi(x)-\psi(a)\big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi^+}^{[n-k]}I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a),$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.6. [89] *Se $f,g\in C^n[a,b]$, $n-1<\alpha\leq n$ e $0\leq\beta\leq1$. Então,*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)={}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k\big(\psi(x)-\psi(a)\big)^{\gamma-k}$$

e

$${}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)={}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{n}d_k\big(\psi(b)-\psi(x)\big)^{\gamma-k},$$

onde $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$, $c_k = \dfrac{(f-g)\psi_+^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(a)}{\Gamma(\gamma+1-k)}$ *e*
$d_k = \dfrac{(f-g)\psi_-^{[n-k]} I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(b)}{\Gamma(\gamma+1-k)}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(x)$. Isto resulta em ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) - {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) = 0$, o que implica em

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x) - g(x)) = 0. \tag{2.25}$$

Aplicando o operador integral em ambos os lados da Eq.(2.25), obtemos

$$ I_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x) - g(x)) = 0.$$

Usando o Teorema 2.5, temos

$$ f(x) - g(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} (f-g)\psi_+^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(a) = 0$$

$$ \Rightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\Gamma(\gamma-k+1)}{\Gamma(\gamma-k+1)} (f-g)\psi_+^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(a).$$

Portanto, podemos escrever

$$ f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}.$$

($\Leftarrow$) Agora aplicando o operador ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ em $f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}$, obtemos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left[g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right] \\ &= {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}. \end{aligned}$$

Usando a Eq.(2.32), concluímos que

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(x).$$

Analogamente, prova-se que

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k \big(\psi(b)-\psi(x)\big)^{\gamma-k},$$

que é o resultado desejado. □

Lema 2.4. [89] *Sejam* $n-1 \le \gamma < n$ *e* $f \in C_\gamma[a,b]$. *Então,*

$$ I_{a+}^{\alpha;\psi} f(a) = \lim_{x\to a+} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0 \quad e \quad I_{b-}^{\alpha;\psi} f(b) = \lim_{x\to b-} I_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = 0.$$

Demonstração. Visto que $I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) \in C_\gamma[a,b]$, temos que o operador $I_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ é limitado. Considere $f \in C_\gamma[a,b]$ e assim, temos que $(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}$ é contínua em $[a,b]$.

Portanto, para todo $x \in [a,b]$ e uma constante positiva M temos

$$|(\psi(x)-\psi(a))^\gamma f(x)| < M \Rightarrow |(\psi(x)-\psi(a))^\gamma| \, |f(x)| < M$$

$$\Rightarrow \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}\Big| \, \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\Big| \, \Big|f(x)\Big| < \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}\Big| M$$

$$\Rightarrow \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\Big| \, \Big|f(x)\Big| < \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}\Big| M.$$

Assim, para todo $x \in [a,b]$ e uma constante positiva M obtemos

$$\Big|f(x)\Big| < \Big|(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}\Big| M. \tag{2.26}$$

Aplicando o operador integral $I_{a+}^{\alpha;\psi} f(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(2.26) e usando o Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned}
\Big|I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\Big| &< \Big|I_{a+}^{\alpha;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}\Big| M \\
&= M\Big|\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+(1-\gamma)-1}\Big| \\
&= M\left[\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha-\gamma}\right].
\end{aligned}$$

Sabendo que $\gamma < \alpha$, $M\dfrac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha-\gamma} \longrightarrow 0$, quando $x \longrightarrow a+$ e portanto,

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(a) = \lim_{x\to a+} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0.$$

A prova para o operador $I_{b-}^{\alpha;\psi} f(\cdot)$ é análoga. □

Teorema 2.7. [89] *Sejam* $f \in C^1[a,b]$, $\alpha > 0$ *e* $0 \leq \beta \leq 1$. *Então*

$${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = f(x) \ e \ {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} I_{b-}^{\alpha;\psi} = f(x).$$

Demonstração. Pela definição de derivada fracionária de ψ-Hilfer, pelo Lema 2.1 e pela Eq.(2.17), temos

$$\begin{aligned}
{}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) &= I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) \\
&= I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{n-\beta(\alpha-n);\psi} f(x) \\
&= I_{a+}^{(\gamma-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{n-(\gamma-\alpha);\psi} f(x) \\
&= I_{a+}^{(\gamma-\alpha);\psi} D_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} f(x),
\end{aligned}$$

onde $\gamma - \alpha = \beta(n-\alpha)$.

Usando o Teorema 2.5 e o Lema 2.4, temos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) &= I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+} \mathcal{D}^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+} f(x) \\
&= f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f^{[n-k]}_{\psi+} I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} f(a) \\
&= f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f^{[n-k]}_{\psi+} \Big(\lim_{x\to a+} I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} f(x) \Big) \to 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) = f(x). $$

Assim, mostramos que o operador $I^{\alpha;\psi}_{a+}(\cdot)$ é um inverso à direita do operador ψ-Hilfer à esquerda. Analogamente, mostra-se que o operador $I^{\alpha;\psi}_{b-}(\cdot)$ é um inverso à direita do operador ψ-Hilfer à direita. □

A seguir são apresentados alguns resultados sobre convergência uniforme e funções uniformemente contínuas.

Teorema 2.8. [89] *Sejam* $0 < \alpha < 1$, $J = [a,b]$ *um intervalo finito ou infinito e* $\psi \in [a,b]$ *uma função crescente tal que* $\psi'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in J$ *e* $f \in C([a,b],\mathbb{R})$*. Então, para todo* $x_1, x_2 \in [a,b]$*, temos*

$$ \|I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x_1) - I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x_2)\| \leq \; 2\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} |\psi(x_1)-\psi(x_2)|^{\alpha}. $$

Demonstração. Usando a definição do operador fracionário $I^{\alpha;\psi}_{a+}(\cdot)$, Definição 2.1, considerando $x_1 < x_2$, sabendo que $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ e usando a hipótese de ψ ser crescente, temos

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x_1) - I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x_2)\| &= \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \psi'(t)(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)\, dt \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^{x_2} \psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)\, dt \Big\| \\
&= \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \psi'(t)\Big[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} - (\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}\Big] \\
&\quad \times f(t)\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)\, dt \Big\| \\
&\leq \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \psi'(t)\Big[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} - (\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}\Big] \\
&\quad \times f(t)\, dt \Big\| + \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \psi'(t)(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)\, dt \Big\| \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \Big| \psi'(t)\Big[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} - (\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}\Big] \Big|\, dt \\
&\quad + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \Big| \psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} \Big|\, dt.
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais por partes, temos

$$\begin{aligned}
\|I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x_1) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x_2)\| &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\Big((\psi(x_1)-\psi(a))^\alpha + (\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha \\
&\quad -(\psi(x_2)-\psi(a))^\alpha\Big) + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}((\psi(x_1)-\psi(a))^\alpha + 2(\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha \\
&\quad -(\psi(x_2)-\psi(a))^\alpha).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x_1) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x_2)\| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}|\psi(x_1)-\psi(x_2)|^\alpha,$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.9. [89] *Sejam $n-1<\alpha<n$, $J=[a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi \in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0, \forall x \in J$. Suponha que $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas sobre $[a,b]$. Então é possível trocar a ordem do operador integral fracionário com o limite, isto é,*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x).$$

Em particular, a sequência de funções $\left(I_{a+}^{\alpha;\psi} f\right)_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente.

Demonstração. Considere a função contínua f sendo o limite da sequência $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Sendo f contínua, sabendo que $|f_n(t)-f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, e usando a definição do operador $I_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$, temos

$$\begin{aligned}
\left| I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}|f_n(t)-f(t)|\, dt \\
&\leq \frac{\|f_n-f\|_\infty}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\, dt.
\end{aligned}$$

Realizando a seguinte mudança de variável $u=(\psi(x)-\psi(t))$ e $du=-\psi(t)\,dt$, temos

$$\left| I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\right| \leq \frac{\|f_n-f\|_\infty}{\Gamma(\gamma+1)}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^\alpha}{\alpha}\right).$$

Portanto, obtemos

$$\left| I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\right| \leq \frac{(\psi(x)-\psi(t))^\alpha}{\Gamma(\gamma+1)}\|f_n-f\|_\infty. \tag{2.27}$$

Por hipótese, sabemos que $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente. Disto e aplicando o limite em ambos os lados da Eq.(2.27), temos

$$\lim_{n\to\infty}\left| I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\right| \leq \frac{(\psi(x)-\psi(t))^\alpha}{\Gamma(\gamma+1)}\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Isto implica em

$$\lim_{n\to\infty} I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0.$$

Consequentemente, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} I_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) = I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = I_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

que é o desejado. $\square$

Teorema 2.10. [89] *Sejam* $J = [0,b]$ *um intervalo finito e* $\psi \in [0,b]$ *uma função crescente tal que* $\psi'(x) \neq 0, \forall x \in J$. *Além disso, considere* $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função uniformemente contínua. Se existe algum* $0 < \alpha \leq 1$ *tal que* $\lim_{x\to\infty} I_{x_0}^{\alpha;\psi} |f(x)| = 0$, *então* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Demonstração. Suponha $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. Então, existe uma sequência x_i, com $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x_i)| \;\geq\; \varepsilon,\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\text{ e }\; \forall\, x_i \in [0,b]. \tag{2.28}$$

Como f é uniformemente contínua, então

$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in\; [x_i - \delta, x_i + \delta]. \tag{2.29}$$

Usando as Eq.(2.28) e Eq.(2.29), temos

$$|f(x)| \;\geq\; |f(x_i)| - |f(x_i) - f(x)| \;\geq \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall\, x \in\; [x_i - \delta, x_i + \delta]. \tag{2.30}$$

Escrevendo a integral fracionária do valor absoluto de f em $[x_0, x_i]$, temos

$$\begin{aligned} I_{x_0}^{\alpha;\psi} |f(x_i)| \;&=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_{i-1}} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha} |f(t)|\, dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-\delta}} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha} |f(t)|\, dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_{i-\delta}}^{x_i} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha} |f(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Note que $|f(x)| \;\leq\; \dfrac{\psi'(t)\, |f(t)|}{(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha}}$, $\forall\, t\; \in [x_{i-1}, x_i]$. Assim, usando a Eq.(2.30), obtemos

$$\begin{aligned} I_{x_0}^{\alpha;\psi} |f(x_i)| \;&\geq\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_{i-1}} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha} |f(t)|\, dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-\delta}} |f(t)|\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_{i-\delta}}^{x_i} |f(t)|\, dt \\ &\geq \frac{\varepsilon\delta}{2\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Sendo $\dfrac{\varepsilon\delta}{2\Gamma(\alpha)} \neq 0$, não é possível obtermos $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Portanto, por contradição, concluímos a prova. $\square$

Teorema 2.11. [89] *Seja* ${}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x)$ *uma função uniformemente contínua em* $C_{1-\gamma;\psi}^{1}([0,b],\mathbb{R})$ *com* $x \geq 0$. *Se* $f(x) \to f(0)$ *quando* $x \to \infty$, *então* ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \to 0$ *quando* $x \to \infty$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.5, temos

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi^{+}}^{[1-k]}I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(0)\\
&= f(x)-\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(1)\\
&= f(x)-\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(\psi(x)-\psi(0))^{1-1}\\
&= f(x)-\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\frac{\Gamma(1)(\psi(x)-\psi(0))^{(1-\beta)(1-\alpha)}}{\Gamma(1+(1-\beta)(1-\alpha))}.
\end{aligned}$$

Sabendo que $\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$ e que $(1-\beta)(1-\alpha)=1-\alpha-\beta+\beta\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= \frac{f(x)-(\psi(x)-\psi(0))^{\alpha+\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{1-\alpha-\beta+\beta\alpha}}{\Gamma(2-\gamma)}\\
&= f(x)-\frac{f(0)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-\gamma)}\\
&\leq f(x)-f(0).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$I_{0+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)\leq f(x)-f(0). \tag{2.31}$$

Tomando o limite nos dois membros da desigualdade (2.31), temos

$$\lim_{n\to\infty}I_{0+}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)\leq\lim_{n\to\infty}(f(x)-f(0))=0.$$

Logo, pelo Teorema 2.10, concluímos que

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)\to 0 \quad\text{quando}\quad x\to\infty,$$

que é o resultado esperado. □

Teorema 2.12. *Sejam $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $J=[a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi\in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x)\neq 0,\forall x\in J$. Suponha que $\left(f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas sobre $[a,b]$ e $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f_k$ existe para todo k. Além disso, suponha que $\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre $[a+\epsilon,b],\forall\epsilon>0$. Então, para todo $x\in(a,b]$, temos*

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f_k(x)=\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x).$$

Demonstração. Considere a derivada fracionária de ψ-Riemann-Liouville, Eq.(2.6), e admita que a sequência $\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente (veja [89]) e

$$I_{a+}^{n-\alpha;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}I_{a+}^{n-\alpha;\psi}f_k(x).$$

Além disso, por hipótese, $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x)$ é uniformemente convergente sobre $[a+\epsilon,b],\forall\epsilon>0$. Então, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I_{a+}^{n-\alpha;\psi}f_k(x) &= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I_{a+}^{n-\alpha;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x)\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x),
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.13. [89] *Sejam $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}, 0\leq\beta\leq 1$ e $J=[a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi\in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x)\neq 0, \forall x\in J$. Suponha que $\left(f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente uniformemente de funções contínuas sobre $[a,b]$ e ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f_k$ existe para todo k. Além disso, suponha que $\left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre $[a+\epsilon,b], \forall\epsilon>0$. Então, para todo $x\in(a,b]$, temos*

$$\lim_{k\to\infty}{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f_k(x)={}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x).$$

Demonstração. Pela definição do operador fracionário ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$, pela Eq.(2.17) e pelos Teorema 2.9 e Teorema 2.12, temos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f_k(x) &= \lim_{k\to\infty}I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f_k(x)\\ &= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\lim_{k\to\infty}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f_k(x)\\ &= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\lim_{k\to\infty}f_k(x).\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova. □

Lema 2.5. [89] *Dado $\delta>0$, considere as funções $f(x)=(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}$ e $g(x)=(\psi(b)-\psi(x))^{\delta-1}$, onde $\delta>n$. Então, para $n-1<\alpha<n$ e $0\leq\beta\leq 1$, temos*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-1}$$

e

$${}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(b)-\psi(x))^{\delta-\alpha-1}.$$

Demonstração. Pela Definição 2.1 e pelos Lema 2.3 e Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) &= I_{a^+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\delta-1}\\ &= I_{a^+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\delta-\alpha-1}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}I_{a^+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\delta-\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}\frac{\Gamma(\delta-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+\delta-\gamma)}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\delta-\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\delta-\alpha-1}.\end{aligned}$$

□

Observe que, em particular, dado $n\leq k\ \in\mathbb{N}$ e $\delta>n$, temos

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{k}=\frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha}$$

e

$${}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\psi(b)-\psi(x)\right)^{k}=\frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}(\psi(b)-\psi(x))^{k-\alpha}.$$

Para o caso em que $n > k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^k = 0 \;\; \text{e} \;\; ^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\psi(b)-\psi(x)\right)^k = 0. \tag{2.32}$$

Outros resultados sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer podem ser encontrados em [91], em particular uma generalização da regra de Leibniz.

É importante observar que a partir da particular escolha de $\psi(\cdot)$ e dos limites de $\beta \to 1$ e $\beta \to 0$, obtemos uma ampla classe de casos particulares de derivadas fracionárias existentes na literatura. Alguns exemplos dessas escolhas, considerando a Eq.(2.15) são apresentados na tabela a seguir:

Escolha para a função $\psi(\cdot)$	Escolha para β	Derivada fracionária resultante
$\psi(x) = x^\rho$	$\beta \to 0$	Katugampola
$\psi(x) = x^\rho$	$\beta \to 1$	Caputo-Katugampola
$\psi(x) = \ln x$	$\beta \to 0$	Hadamard
$\psi(x) = \ln x$	$\beta \to 1$	Caputo-Hadamard

Mais sobre estas e outras derivadas fracionárias como consequência da derivada fracionária ψ-Hilfer e das escolhas da função ψ e dos limites de $\beta \to 1$ e $\beta \to 0$, veja as referências [74, 89]. Dessa maneira, os resultados discutidos neste capítulo, são válidos para seus respectivos casos particulares [89].

Outros trabalhos envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer de ordem variável e pseudo-operadores, podem ser encontrados em [95, 99]. Finalizamos o Capítulo 2 com algumas considerações importantes sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer, reiteramos que ao longo do Capítulo 3 usamos a derivada fracionária de Caputo, caso particular da ψ-Hilfer, visto que esta escolha é mais adequada para desenvolver os estudos que serão apresentados.

Capítulo 3

Existência e unicidade

Neste capítulo, vamos discutir o primeiro resultado deste trabalho, ou seja, vamos impor condições necessárias e suficientes para garantir a existência e unicidade de soluções suaves para a equação integro-diferencial fracionária Eq.(1).

3.1 Equações integro-diferenciais fracionárias

Como discutido na introdução, a teoria de equações integro-diferenciais fracionárias, é de fato uma área a qual inúmeros pesquisadores ao longo desses anos, vêm desenvolvendo sua pesquisa, por diversos motivos, em particular, por proporcionar resultados mais gerais e permitir discutir comportamento qualitativos de solução suaves, clássicas, fortes, dentre outras [86, 100, 105]. As referências citadas em [86, 100, 105] também merecem ser pesquisadas, uma vez que contêm trabalhos relevantes da área. Por outro lado, a teoria de equações diferenciais impulsivas também é bastante explorada para a compreensão de processos de evolução em biologia, de controle ótimo e economia, entre outros, conforme apresentado em [85]. Também em [85], Samuel e Balachandran definem por impulso, processos sujeitos à perturbações instantâneas, de curto prazo, cuja duração é insignificante em comparação com a duração do processo. Muitos estudos relevantes sobre equações diferenciais impulsivas já foram publicados como apresentado em [8, 9, 19, 42, 52, 54, 55, 58, 59, 60] e suas respectivas referências.

Motivados pelos trabalhos da literatura (veja introdução), apresentamos nas seções que seguem, a primeira parte das contribuições da nossa pesquisa. Na Seção 3.2, estabelecemos condições para obter a existência de solução suave para a Eq.(1) e na Seção 3.3, estabelecemos condições para obter a unicidade de solução suave para a Eq.(1). Para investigar tais resultados, vamos utilizar as ferramentas de medida de não compacidade e os teoremas de ponto fixo de Darbo-Sadovskii e de Schauder.

3.2 A existência de solução suave

O primeiro passo para investigar a existência de solução suave da Eq.(1), é apresentar uma representação da solução da Eq.(1). Então, segue:

Definição 3.1. [23, 24] *Chamamos solução suave da* Eq.(1) *uma função $\theta \in \mathcal{PC}(J,\Lambda)$ com valores em Ω satisfazendo a equação integral*

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)[\theta_0 - \Xi(\theta)] + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)(t,t_i)\, I_i(\theta(t_0)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x))dx\right) ds \end{aligned} \tag{3.1}$$

$t \in J$ para todo $\theta_0 \in \Lambda$ e $0 < \alpha < 1$.

Denotamos por

$$\mathbf{M}_0^\alpha = \sup\{\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s); (t,s) \in [0,b]\times[0,b], 0<\alpha<1\}$$

para todo $\theta \in \Lambda$. Sem perda de generalidade, façamos $\theta_0 = 0$.

Para investigar a existência de solução de uma determinada equação diferencial e integro-diferencial é necessário impor certas condições, a fim de que se torne possível obter o resultado desejado. Então, inicialmente, estabelecemos as seguintes condições:

EC$_1$: A família de evolução $\left\{\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\}_{0\le s\le t\le b}$ é chamada a (α,θ)-resolvente gerada por $\mathcal{A}(t,\theta(t))$ é equicontínua e $\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| \le \mathbf{M}_0^\alpha$ para quase todo ponto (q.t.p.) $t,s \in [0,b]$ e $0<\alpha<1$.

EC$_{2.1}$: A função $\Xi : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda) \to \Lambda$ é contínua e compacta.

EC$_{2.2}$: Existe $\mathbf{N}_0 > 0$ tal que $\|\Xi(\theta)\| \le \mathbf{N}_0$.

EC$_{3.1}$: A função não linear $\Phi : [0,b]\times\Lambda \to \Lambda$ satisfaz as condições tipo Carathéodory, isto é, $\Phi(\cdot,\theta)$ é mensurável para todo $\theta \in \Lambda$ e $\Phi(t,\cdot)$ é contínua para q.t.p. $t \in [0,b]$.

EC$_{3.2}$: Existe uma função $\xi \in \mathscr{L}([0,b];\mathbb{R}^+)$ tal que para cada $\theta \in \Lambda$, temos

$$\|\Phi(t,\theta)\| \le \xi(t)(1+\|\theta\|), \text{ q.t.p. } t \in [0,b].$$

EC$_{3.3}$: Existe uma função $K_1 \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ tal que, para cada subconjunto limitado $D \subset \Lambda$, temos

$$\mu(\Phi(t,D)) \le k_1(t)\,\mu(D), \text{ q.t.p. } t \in [0,b]. \tag{3.2}$$

EC$_{4.1}$: A função não linear $g : [0,b]\times[0,b]\times\Lambda \to \Lambda$ satisfaz as condições tipo Carathéodory, isto é, $g(\cdot,\cdot,\theta)$ é contínua q.t.p. $t \in [0,b]$;

EC$_{4.2}$: Existem duas funções $\beta_1 \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ e $\beta_2 \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ tal que para cada $\theta \in \Lambda$, temos

$$\|g(t,s,\theta(s))\| \le \beta_1(t)\beta_2(t)(1+\|\theta(s)\|), \text{ q.t.p. } t \in [0,b]; \tag{3.3}$$

EC$_{4.3}$: Existem funções $k_2, k_3 \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ tal que, para cada subconjunto limitado $D \subset \Lambda$, temos

$$\mu(g(t,s,D)) \le k_2(t)k_3(t)\,\mu(D), \text{ q.t.p. } t \in [0,b]. \tag{3.4}$$

EC$_{5.1}$: O limite de $\int_0^t k_2(t)ds$ é finito, G_0.

EC$_{5.2}$: Para cada $t \in [0,b]$ existem constantes positivas $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$, de modo que temos a equação escalar

$$m^\alpha(t) = \mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_2 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\xi(t) + C_0(t-s)^{\alpha-1}\beta_2(s)\right)(1+m(s))\ ds + \sum_{i=1}^n\ d_i\right], \tag{3.5}$$

for $0 < \alpha < 1$.

EC$_6$: $I_i : \Lambda \to \Lambda$ é contínua. Existe uma constante $d_i > 0,\ i = 1, ..., n$ tal que

$$\|I_i(\theta(t_i))\| \leq \sum_{i=1}^n d_i,\ i = 1, ..., n. \tag{3.6}$$

Para qualquer subconjunto limitado $D \subset \Lambda$, existe uma constante $l_i > 0$ tal que

$$\mu(I_i(D)) \leq \sum_{i=1}^n l_i\ \mu(D),\ i = 1, ..., n. \tag{3.7}$$

Nesse sentido, a ideia de investigar a existência de solução suave para a Eq.(1), passa por algumas modificações nas condições impostas, isto é, a priori, vamos considerar as condições **EC**$_1$-**EC**$_6$ e discutir a existência de solução suave. Depois, vamos retirar as condições **EC**$_3$-**EC**$_4$, e impor as condições **EC**$_7$-**EC**$_8$. Por fim, finalizamos a seção, impondo a condição **EC**$_9$. A partir dessas mudanças, ainda podemos garantir a existência de solução suave para a Eq.(1).

O primeiro resultado que vamos investigar, é o Teorema 3.1, a seguir, com algumas condições conforme apresentadas anteriormente. Nesse sentido, os demais resultados que discutiremos nesta seção, utilizamos as condições **EC**$_1$-**EC**$_6$ e impondo outras condições.

Teorema 3.1. *Considere as condições* **EC**$_1$-**EC**$_6$. *Então, o problema não local impulsivo* Eq.(1) *tem pelo menos uma solução suave.*

Demonstração. Considere

$$m^\alpha(t) = \mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\xi(t) + C_0(t-s)^{\alpha-1}\beta_2(s)\right)(1+m(s))\ ds + \sum_{i=1}^n\ d_i\right)$$

uma solução e seja C_0 o limite finito de $\int_0^t \beta_1(s)\ ds$ para $t \in [0,b]$.

Considere a aplicação $\Theta : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda) \to \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ definida por

$$\begin{aligned}(\Theta\theta)(t) \quad &= \quad \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)[\theta_0 - \Xi(\theta)] + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s))\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x))dx\right)ds,\end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo $\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ e $\mathbb{W}_0 = \{\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda),\ \|\theta(t)\| \leq m^\alpha(t),\ \text{para todo } t \in [0,b]\}$. Então, $\mathbb{W}_0 \subseteq \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ é limitado e convexo.

Por outro lado, definimos $\mathbb{W}_1 = \overline{con}\,\Theta(\mathbb{W}_0)$, onde $\overline{cov}$ denota o fecho da casca convexa em $\mathcal{PC}([0,b],X)$ é limitado. Pelo Lema 1.7, usando as condições, $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ é limitado, fechado, convexo, não vazio e equicontínuo em $[0,b]$.

Agora, para $\theta \in \Theta(\mathbb{W}_0)$, temos

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\| \\
= &\left\| -\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\Xi(\theta) + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i)) \right. \\
&\left. + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x))dx\right) ds \right\| \\
\leq &\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\Xi(\theta)\right\| + \sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i))\right\| \\
&+ \int_0^t \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x))dx\right)\right\| ds \\
\leq &\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\right\| \|\Xi(\theta)\| + \sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\right\| \|I_i(\theta(t_i))\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| (s-x)^{\alpha-1}\|g(s,x,\theta(x))\|\,dxds \\
&+ \int_0^t \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| \|\Phi(s,\theta(s))\|\,ds \\
\leq &\mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t \|\Phi(s,\theta(s))\|\,ds + \mathbf{M}_0^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}\|g(s,x,\theta(x))\|\,dxds \\
&+ \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i.
\end{aligned}$$

Usando as condições $\mathbf{EC}_{2.1}$, $\mathbf{EC}_{2.2}$, $\mathbf{EC}_{3.2}$, $\mathbf{EC}_{4.2}$ e $\mathbf{EC}_6$, temos

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\| \\
\leq &\mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t \xi(s)(1+\|\theta(s)\|)ds \\
&+ \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t\int_0^s \frac{(s-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\beta_1(s)\beta_2(s)(1+\|\theta(x)\|)dxds + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
\leq &\mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t \xi(s)(1+m(s))ds + \mathbf{M}_0^\alpha C_0 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\beta_2(s)(1+\|\theta(s)\|)ds \\
&+ \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
\leq &\mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t \xi(s)(1+m(s))ds + \mathbf{M}_0^\alpha C_0 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\beta_2(s)(1+m(s))ds \\
&+ \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
= &\mathbf{M}_0^\alpha \mathbf{N}_0 + \mathbf{M}_0^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left(\xi(s) + C_0(t-s)^{\alpha-1}\beta_2(s)\right)(1+m(s))ds + \sum_{i=1}^n d_i\right) \\
= &m^\alpha(t).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Segue que $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_0$. Definimos $\mathbb{W}_{n+1} = \overline{con}\ \Theta(\mathbb{W}_n)$, for $n = 1, 2, 3, ...$ Disto sabemos que $\{\mathbb{W}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos limitados, fechados, convexos e equicontínuos em $[0, b]$ e subconjuntos não vazios em $\mathcal{PC}([0, b], \Lambda)$.

Agora para $n \geq 1$ e $t \in [0, b]$, $\mathbb{W}_n(t)$ e $\Theta(\mathbb{W}_n(t))$ são subconjuntos limitados de Λ, portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{W}_n$, usando os Lema 1.3, Lema 1.4, Lema 1.5 e Lema 1.6, temos

$$\begin{aligned}
& \mu\left(\mathbb{W}_{n+1}(t)\right) \\
= \ & \mu\left(\Theta\left(\mathbb{W}_n\left(t\right)\right)\right) \\
= \ & \mu\Bigg(\mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,0)\ \Xi(\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}) + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,t_i) I_i(\theta(t_i)) \\
& + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,s)\left(\Phi(s,\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})dx\right) ds\Bigg) \\
\leq \ & 2\mu\left(\int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,s)\Phi(s,\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty})ds\right) + 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,t_i) I_i(\{\theta_k(t_i)\}_{n=1}^{\infty})\right) \\
& +2\mu\left(\int_0^t \int_0^s \mathcal{R}_{(\alpha,\theta_k)}(t,s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})dxds\right) + \varepsilon \\
\leq \ & 4\mathbf{M}_0^{\alpha} \int_0^t \mu\left(\Phi(s,\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty})\right) ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} \mu\left(g(s,x,\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})\right) dxds \\
& +4\mathbf{M}_0^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(I_i(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty})\right) + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Disto, usando as condições $\mathbf{EC}_{3.3}$, $\mathbf{EC}_{4.3}$ e $\mathbf{EC}_6$, segue que

$$\begin{aligned}
& \mu\left(\mathbb{W}_{n+1}(t)\right) \\
= \ & \mu\left(\Theta\left(\mathbb{W}_n\left(t\right)\right)\right) \\
\leq \ & 4\mathbf{M}_0^{\alpha} \int_0^t k_1(s)\mu\left(\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}\right) ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} k_2(s) k_3(x) \mu\left(\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\right) dxds \\
& +4\mathbf{M}_0^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} l_i \mu\left(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty}\right) + \varepsilon \\
\leq \ & 4\mathbf{M}_0^{\alpha} \int_0^t k_1(s)\mu\left(\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}\right) ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha} G_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k_3(s) \mu\left(\{\theta_k(s)\}_{k=1}^{\infty}\right) ds \\
& +4\mathbf{M}_0^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} l_i \mu\left(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty}\right) + \varepsilon \\
\leq \ & 4\mathbf{M}_0^{\alpha}\left(\int_0^t k_1(s)\mu\left(\mathbb{W}_n(s)\right) ds + \frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k_3(s) \mu\left(\mathbb{W}_n(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{\infty} l_i \mu\left(\mathbb{W}_n(t_0)\right)\right) \\
& +\varepsilon.
\end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, usando a desigualdade (3.10), temos

$$\mu\left(\mathbb{W}_{n+1}(t)\right) \leq 4\mathbf{M}_0^{\alpha}\Big(\int_0^t k_1(s)\mu\left(\mathbb{W}_n(s)\right) ds + \frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k_3(s) \tag{3.11}$$

$$\times\ \mu\left(\mathbb{W}_n(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{\infty} l_i \mu\left(\mathbb{W}_n(t_i)\right)\Big) \tag{3.12}$$

para todo $t \in [0,b]$ e $0 < \alpha \leq 1$. Pelo fato de $\mathbb{W}_n$ ser decrescente para n, resulta em

$$\mathbf{H}(t) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathbb{W}_n(t)) \tag{3.13}$$

para todo $t \in [0,b]$. Então, pelas desigualdades (3.11) e (3.13), temos

$$\mathbf{H}(t) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\mathbb{W}_n(t)\right) \leq 4\mathbf{M}_0^\alpha \left(\int_0^t \left(k_1(s) + \frac{2G_0k_3(s)}{\Gamma(\alpha)}\right)\mathbf{H}(s)ds + \sum_{i=1}^n l_i\mathbf{H}(t_i)\right) \tag{3.14}$$

para $t \in [0,b]$, o que implica em $\mathbf{H}(t) = 0$ para todo $t_i \in [0,b]$.

Usando o Lema 1.4, temos $\lim_{n\to\infty} \mu\left(\mathbb{W}_n(t)\right) = 0$. Por outro lado, pelo Lema 1.1, temos $\mathbb{W} = \bigcap_{n=1}^\infty w_n$ é convexo, compacto e não vazio em $\mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ e $\Theta(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W}$. Finalmente, fazendo o uso do teorema do ponto fixo de Schauder, existe pelo menos uma solução θ do problema de valor inicial dado pela Eq.(1), onde $\theta \in \mathbb{W}$ é um ponto fixo da aplicação contínua Θ. $\square$

A pergunta natural que surge é a seguinte: será possível obter a existência de solução para a Eq.(1), excluindo algumas das condições $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_6$ e substituindo por outras? A princípio, a resposta é sim. Então, vamos trocar as condições $\mathbf{EC}_3$-$\mathbf{EC}_4$, pelas seguintes condições:

1. $\mathbf{EC}_7$: Existem a função $p \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ e a função crescente $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$\|t,\theta)\| \leq p(t)\phi(\|\theta\|)$$

q.t.p. $t \in [0,b]$ e para todo $\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$.

2. $\mathbf{EC}_8$: Existem duas funções $q \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ e $\hat{q} \in \mathscr{L}([0,b],\mathbb{R}^+)$ e uma função crescente $\chi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$\|g(t,s,\theta)\| \leq q(t)\hat{q}(s)\chi(\|\theta\|),$$

q.t.p. $t \in [0,b]$ e para todo $\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$. Considere que o limite finito de $\int_0^t g(s)ds$ seja G_1.

Teorema 3.2. *Admita as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_2$ *e* $\mathbf{EC}_7$-$\mathbf{EC}_8$. *Então, a* Eq.(1) *tem pelo menos uma solução suave se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\mathbf{M}_0^\alpha}{r}\Big(\varphi(r) + \phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{G_1\chi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\Big) < 1 \tag{3.15}$$

onde $\varphi(r) = \sup\{\|\Xi(\theta)\|,\ \|\theta\| < r\}$.

Demonstração. A desigualdade (3.15) implica na existência de uma constante $r > 0$ tal que

$$\mathbf{M}_0^\alpha\left[\varphi(r) + \phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{G_1\chi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right] < r. \tag{3.16}$$

Agora, vamos considerar os seguintes conjuntos $\mathbb{W}_0 = \{\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda), \|\theta\| \leq r\}$ e $\mathbb{W}_1 = \overline{con}\Theta\mathbb{W}_0$. Então, para qualquer $\theta \in \mathbb{W}_1$, e usando as condições $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_2$ e $\mathbf{EC}_7$-$\mathbf{EC}_8$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\theta(t)\| \;\leq\; & \Bigg\| -\mathcal{R}_{\alpha,\theta}(t,0)\Xi(\theta) + \sum_{0<t_i<t}\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i)) \\ & + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}g(s,x,\theta(x))dx\right)ds\Bigg\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\right\| \|\Xi(\theta)\| + \int_0^t \left\|R_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| \|\Phi(s,\theta(s))\| \, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_i<t} \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\right\| \|I_i(\theta(t_i))\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| (s-x)^{\alpha-1} \|g(s,x,\theta(x))\| \, dxds \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \varphi(r) + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t p(s)\phi(\|\theta(s)\|)ds \\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} q(s)\hat{q}(x)\chi(\|\theta(x)\|)dxds + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \varphi(r) + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t p(s)\phi(\|\theta(s)\|)ds + \frac{\mathbf{M}_0^\alpha G_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)\chi(\|\theta(s)\|)ds \\
&\quad + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \varphi(r) + \mathbf{M}_0^\alpha \phi(r) \int_0^t p(s)ds + \frac{\mathbf{M}_0^\alpha G_1 \chi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i.
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
\|\theta(t)\| \leq \mathbf{M}_0^\alpha \left[\varphi(r) + \phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{G_1\chi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right] < r
$$

para $t \in [0,b]$. Isto significa que $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2$. Assim, concluímos a prova de maneira análoga ao Teorema 3.1. □

Agora vamos investigar a existência da solução suave para a função Ξ sendo Lipschitz, no entanto ϕ, g e I_i não são Lipschitz. Primeiro, admitimos a seguinte condição:

1. $\mathbf{EC}_9$: A função Ξ é Lipschitz contínua em Λ, existe uma constante $L_0 > 0$ tal que

$$
\|\Xi(\theta) - \Xi(\nu)\| \leq L_0\|\theta - \nu\|, \ \theta, \nu \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda).
$$

Teorema 3.3. *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$. *Então, a* Eq.(1) *tem pelo menos uma solução suave desde que*

$$
\mathbf{M}_0^\alpha \left[L_0 + 4\int_0^t \left(k_1(s) + \frac{2G_0k_3(s)(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) ds + \sum_{i=1}^n l_i\right] < 1.
$$

Demonstração. Para a prova, consideramos a aplicação $\Theta : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda) \to \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ definida por $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, onde

$$
(\Theta_1\theta)(t) = \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\ \Xi(\theta)
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\Theta_2\theta)(t) &= \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\Phi\left((s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}g(s,x,\theta(x))dx\right) ds \\
&\quad + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i))
\end{aligned}
$$

para $\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$.

Como na prova do Teorema 3.1, consideramos $\mathbb{W}_0 = \{\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda); \|\theta(t)\| \leq m^{\alpha}(t)$, para todo $t \in [0,b]\}$ e seja $\mathbb{W} = \overline{\text{con}}\,\Theta\mathbb{W}_0$. Então, pela prova do Teorema 3.1 sabemos que $\mathbb{W}$ é um subconjunto limitado, fechado, convexo e equicontínuo de $\mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ e $\Theta\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$. Provaremos que Θ é μ_c-contração em $\mathbb{W}$. Assim, poderemos usar o teorema de ponto fixo de Darbo-Sadovskii para obter um ponto fixo de Θ em $\mathbb{W}$, que é uma solução suave da Eq.(1). Primeiro, para cada subconjunto limitado $\mathbf{B} \subset \mathbb{W}$, usando a condição $\mathbf{EC}_9$ e o Lema 1.1, temos

$$\begin{aligned} \mu_c(\Theta_1\mathbf{B}) &= \mu_c\left(\mathcal{R}_{(\alpha,\mathbf{B})}(t,0)\Xi(\mathbf{B})\right) \\ &\leq \mathbf{M}_0^{\alpha}\ \mu_c(\Xi(\mathbf{B})) \\ &\leq \mathbf{M}_0^{\alpha} L_0\ \mu_c(\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para cada subconjunto limitado $\mathbf{B} \subset \mathbb{W}$, para $t \in [0,b]$ e todo $\varepsilon > 0$, existe a sequência $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}$, tal que

$$\mu\left(\Theta_2(\mathbf{B}(t))\right) \leq 2\mu\left(\{\Theta_2\ \theta_k(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) + \varepsilon.$$

Note que $\mathbf{B}$ e $\Theta_2\mathbf{B}$ são equicontínuos. Então, pelos Lemas 1.1, 1.3, 1.5, 1.6 e usando as condições $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$, obtemos

$$\begin{aligned} &\mu\left(\Theta_2\left(\mathbf{B}\left(t\right)\right)\right) \\ = \ &\mu\Bigg(\int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x))dx\right)ds \\ &+ \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i) I_i(\theta(t_i))\Bigg) \\ \leq \ &2\mu\left(\int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\Phi(s,\{\theta_k(s)\}_{k=1}^{\infty})ds\right) \\ &+\frac{2\mu}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t\int_0^s \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)(x-s)^{\alpha-1} g(s,x,\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})dxds\right) \\ &+2\mu\left(\sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i) I_i(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty})\right) \\ \leq \ &4\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t \mu\left(\Phi(s,\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty})\right)ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}\mu\left(g(s,x,\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})\right)dxds \\ &+4\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{0<t_i<t}\mu\left(I_i(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty})\right) \\ \leq \ &4\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t k_1(s)\mu(\{\theta_k(s)\}_{k=1}^{\infty})ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (s-x)^{\alpha-1} k_2(s)k_3(x)\mu(\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty})dxds \\ &+4\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{0<t_i<t} l_i\ \mu(\{\theta_k(t_i)\}_{k=1}^{\infty}) \\ \leq \ &4\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t k_1(s)\mu(\mathbf{B})ds + \frac{8\mathbf{M}_0^{\alpha}G_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k_3(s)\mu(\mathbf{B})ds + 4\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n} l_i\ \mu(\mathbf{B}) + \varepsilon \\ \leq \ &4\mathbf{M}_0^{\alpha}\left(\int_0^t k_1(s)\mu(\mathbf{B})ds + \frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k_3(s)\mu(\mathbf{B})ds + \sum_{i=1}^{n} l_i\ \mu(\mathbf{B})\right) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário e usando a desigualdade (3.18) acima (Note que,

$\mu_c(\mathbb{W}) = \sup\{\mu(w(t)), t \in [0,b]\})$, temos

$$\mu_c(\Theta_2(\mathbf{B}(t))) \leq 4\mathbf{M}_0^\alpha \left[\int_0^t \left(k_1(s) + \frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}k_3(s)\right) ds + \sum_{i=1}^n l_i\right] \mu_c(\mathbf{B}) \tag{3.19}$$

para qualquer subconjunto limitado $\mathbf{B} \subset \mathbb{W}$.

Agora, para qualquer subconjunto $\mathbf{B} \subset \mathbb{W}$, usando o Lema 1.1 e as desigualdades (3.17) e (3.19), temos

$$\begin{aligned}
\mu_c(\Theta\mathbf{B}) &= \mu_c(\Theta_1\mathbf{B} + \Theta_2\mathbf{B}) \leq \mu_c(\Theta_1\mathbf{B}) + \mu_c(\Theta_2\mathbf{B}) \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha L_0 \mu_c(\mathbf{B}) + 4\mathbf{M}_0^\alpha \left(\int_0^t \left(k_1(s) + \frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}k_3(s)\right) ds + \sum_{i=1}^n l_i\right) \mu_c(\mathbf{B}) \\
&= \mathbf{M}_0^\alpha \left(L_0 + 4\int_0^t \left(k_1(s)\frac{2G_0}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}k_3(s)\right) ds + \sum_{i=1}^n l_i\right) \mu_c(\mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Então, pela desigualdade (3.20), obtemos que Θ é uma μ_c-contração em $\mathbb{W}$. Portanto, pelo Lema 1.2, existe um ponto fixo θ de Θ em $\mathbb{W}$, o qual é uma solução da Eq.(1). □

Por fim, o Teorema 3.4, a seguir, também tem como objetivo discutir a existência de solução suave utilizando as condições $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$.

Teorema 3.4. *Considere as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$. *Então, a* Eq.(1) *tem pelo menos uma solução suave se a* Eq.(3.20) *e a condição a seguir são satisfeitas*

$$\mathbf{M}_0^\alpha L_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}_0^\alpha}{r}\left(\phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{\chi(r)G_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right) < 1. \tag{3.21}$$

Demonstração. Usando a condição (3.21) e o fato que $L_0 < 1$, existe uma constante $r > 0$ tal que

$$\mathbf{M}_0^\alpha \left(L_0 r + \|\Xi(0)\| + \phi(r)\int_0^t p(s)ds + \frac{\chi(r)G_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i\right) < r.$$

Agora, consideramos $\mathbb{W}_0 = \{\theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda), \|\theta(t)\| \leq r, \text{ para todo } t \in [0,b]\}$. Então, para cada $\theta \in \mathbb{W}_0$ e usando a condição $\mathbf{EC}_9$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\Theta\theta(t)\| \\
\leq\ & \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\Xi(\theta)\right\| + \left\|\sum_{0<t_i<t}\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i))\right\| \\
&+ \left\|\int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}g(s,x,\theta(x))dx\right) ds\right\| \\
\leq\ & \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\right\| \|\Xi(\theta)\| + \int_0^t \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| \|\Phi(s,\theta(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| (s-x)^{\alpha-1} \|g(s,x,\theta(x))\| dxds + \sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\right\| \|I_i(\theta(t_i))\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \left\|\Xi(\theta)-\Xi(0)+\Xi(0)\right\| + \mathbf{M}_0^\alpha \int_0^t p(s)\phi(\|\theta(s)\|)ds \\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} q(s)\hat{q}(x)\chi(\|\theta(x)\|)dxds + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n d_i \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \Bigg(\|\Xi(\theta)-\Xi(0)\| + \|\Xi(0)\| + \int_0^t p(s)\phi(\|\theta(s)\|)ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} q(s)\hat{q}(x)\chi(\|\theta(x)\|)dxds + \sum_{i=1}^n d_i \Bigg) \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \Big(L_0\, r + \|\Xi(0)\| + \int_0^t p(s)\phi(\|\theta(s)\|)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} q(s)\hat{q}(x)\chi(\|\theta(x)\|)dxds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n d_i \Big) \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha \left(L_0 r + \|\Xi(0)\| + \phi(r) \int_0^t p(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \chi(r) G_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i \right). \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|\Theta\theta(t)\| \leq \mathbf{M}_0^\alpha \left(L_0\, r + \|\Xi(0)\| + \phi(r) \int_0^t p(s)ds + \frac{\chi(r)G_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\hat{q}(s)ds + \sum_{i=1}^n d_i \right) < r,
$$

para todo $t \in [0,b]$. Isto significa que $\Theta\mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_0$.

Defina $\mathbb{W} = \overline{\text{con}}\, \Theta\mathbb{W}_0$. A prova acima, implica em $\Theta\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$. Assim, podemos finalizar a prova deste Teorema de maneira análoga ao Teorema 3.3. □

Uma das consequências diretas do cálculo fracionário, de modo particular à discussão de equações diferenciais fracionárias, é verificar o caso especial $\alpha = 1$. Então, nesse sentido, vamos apresentar os resultados para o caso inteiro, para a Eq.(1). Portanto, considerando o limite $\alpha \to 1$ na Eq.(1), temos

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\theta'(t) + A(t,\theta(t))\theta(t) &=& \Phi(t,\theta(t)) + \displaystyle\int_0^t g(t,s,\theta(s))ds, t \in [0,b], t \neq t_i, \\
\theta(0) + \Xi(\theta) &=& \theta_0, \\
\Delta\theta(t_i) &=& I_i(\theta(t_i)),\ i = 1,...,n, 0 < t_1 < ... < t_n < b.
\end{array}
\right. \qquad (3.23)
$$

Consequentemente, considerando o limite $\alpha \to 1$ na Eq.(3.1), temos a solução suave da Eq.(3.23), dada por

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= U_\theta(t,0)[\theta_0 - \Xi(\theta)] + \int_0^t U_\theta(t,s) \left(\Phi(s,\theta(s)) + \int_0^s g(s,x,\theta(x))dx \right) ds \\
&\quad + \sum_{0<t_i<t} U_\theta(t,t_i) I_i(\theta(t_i)), \quad 0 \leq t \leq b.
\end{aligned}
$$

Os resultados a seguir são consequências diretas dos resultados de existência já investigados anteriormente. Desta maneira, omitimos suas respectivas provas.

Teorema 3.5. *Suponha as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_6$. *Então, a* Eq.(3.23) *tem pelo menos uma solução suave.*

Demonstração. A prova é consequência direta do Teorema 3.1. □

Teorema 3.6. *Considere as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_2$ *e as condições* $\mathbf{EC}_7$-$\mathbf{EC}_8$. *Então, a* Eq.(3.23) *tem pelo menos uma solução suave se*

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\mathbf{M}_0}{r}\left(\varphi(r)+\phi(r)\int_0^t p(s)ds+G_1\chi(r)\int_0^t\hat{q}(s)ds+\sum_{i=1}^n d_i\right)<1,$$

onde, $\varphi(r)=\sup\{\|\Xi(\theta)\|,\|\theta\|< r\}$.

Demonstração. A prova é consequência direta do Teorema 3.2. □

Teorema 3.7. *Considere as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$. *Logo, a* Eq.(3.23) *tem pelo menos uma solução suave se*

$$\mathbf{M}_0\left(L_0+4\int_0^t(k_1(s)+2G_0k_3(s))\,ds+\sum_{i=1}^n l_i\right)<1.$$

Demonstração. A prova é consequência direta do Teorema 3.3. □

Teorema 3.8. *Suponha as condições* $\mathbf{EC}_1$-$\mathbf{EC}_9$, *então a* Eq.(3.23) *tem pelo menos uma solução suave se* Eq.(3.20) (com $\alpha\to 1$) e a seguinte condição é satisfeita

$$\mathbf{M}_0L_0+\lim_{r\to\infty}\frac{\mathbf{M}_0}{r}\left(\varphi(r)\int_0^t p(s)ds+\chi(r)G_1\int_0^t\hat{q}(s)ds+\sum_{i=1}^n d_i\right)<1.$$

Demonstração. A prova é consequência direta do Teorema 3.4. □

Finalizamos a seção sobre existência de solução suave para a equação integro-diferencial fracionária quase linear com condições impulsivas e não local dada pela Eq.(1), discutindo algumas condições necessárias e suficientes. Discutimos o caso especial, isto é, quando $\alpha=1$ (caso inteiro). Nesse sentido, a próxima seção, é destinada a investigar a unicidade de solução suave para Eq.(1).

3.3 A unicidade de solução suave

Nesta seção, apresentamos o segundo principal resultado deste trabalho, ou seja, a unicidade de solução suave para Eq.(1), utilizando o teorema do ponto fixo de Banach.

Para este propósito, é necessário, primeiramente, que condições sejam estabelecidas. Então, considere:

1. $\mathbf{UC}_1:\Phi:[0,b]\times\Lambda\to\Lambda$ é contínua e existem constantes $F_{\mathcal{A}}>0$, e $F_0>0$ tais que

$$\|\Phi(t,\theta)-\Phi(t,\nu)\|\le F_{\mathcal{A}}\|\theta-\nu\|,\ \theta,\nu\in\Lambda \text{ e } \Theta_0=\max_{t\,\in\,[0,b]}\|\Phi(t,0)\|.$$

2. $\mathbf{UC}_2:g:[0,b]\times\Omega\to\Lambda$ é contínua e existem constantes $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}>0$, e $\mathbf{H}_0>0$ tais que

$$\int_0^t\|g(t,\theta)-g(t,\nu)\|ds\le\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\|\theta-\nu\|,\ F_0=\max_{t\,\in\,[0,b]}\left\{\int_0^t\|g(t,0)\|ds;\ t\in[0,b]\right\}.$$

3. $\mathbf{UC}_3 : h : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda) \to \Omega$ é Lipschitz contínua em Λ e existe uma constante $G_{\mathcal{A}} > 0$, tal que
$$\|\Xi(\theta) - \Xi(\nu)\| \leq G_{\mathcal{A}} \|\theta - \nu\|_{\mathcal{PC}},\ \theta, \nu \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda).$$

4. $\mathbf{UC}_4 : I_i : \Omega \to \Omega$ é contínua e existe uma constante $l_i > 0,\ i = 1, ..., n$ tal que
$$\|I_i(\theta) - I_i(\nu)\| \leq l_i \|\theta - \nu\|,\ \theta, \nu \in \Lambda.$$

5. $\mathbf{UC}_5$: Seja
$$\rho = \left\{ k_0 ar + 2k_0 a \left(rG_{\mathcal{A}} + \|g(0)\| \right) + a\mathbf{M}_0^\alpha \Theta_{\mathcal{A}} + a \frac{\mathbf{M}_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)} H_A + k_0 ar \sum_{i=1}^n l_i + \mathbf{M}_0^\alpha \sum_{i=1}^n l_i \right\}$$
tal que $0 < \rho < 1$.
Além disso, existe uma constante k_0 tal que para cada $\theta, v \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$ e $y \in \Lambda$, temos
$$\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)y - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s)y\| \leq k_0\ a\ \|y\|_\Lambda\ \|\theta - v\|_{\mathcal{PC}},$$
for $0 < \alpha < 1$.

Teorema 3.9. *Sejam* $\theta_0 \in \Lambda$ *e* $\mathbf{B}_r = \left\{ \theta \in \mathcal{PC}([0,b],\Lambda);\ \|\theta\| \leq r \right\}$*, com* $r > 0$*. Se as condições* $\mathbf{UC}_1$-$\mathbf{UC}_5$ *são satisfeitas, então a* Eq.(1) *tem uma única solução suave.*

Demonstração. Considere $\theta_0 \in \Lambda$ (fixado) e o operador Θ em $\mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$, dado por
$$\begin{aligned}(\Theta\theta)(t) &= \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)[\theta_0 - \Xi(\theta)] + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i) I_i(\theta(t_i)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s) \left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x)) dx \right) ds.\end{aligned}$$

Note que $\Theta : \mathcal{PC}([0,b],\Lambda) \longrightarrow \mathcal{PC}([0,b],\Lambda)$. Além disso, temos
$$\begin{aligned}
& \|(\Theta\theta)(t) - (\Theta\nu)(t)\| \\
= & \Bigg\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)[\theta_0 - \Xi(\theta)] - \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,t_i) I_i(\nu(t_i)) \\
& + \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s) \left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x)) dx \right) ds \\
& + \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i) I_i(\theta(t_i)) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)[\theta_0 - \Xi(\nu)] \\
& - \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,s) \left(\Phi(s,\nu(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\nu(x)) dx \right) ds \Bigg\| \\
\leq & \left\| \left(\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0) \right) \theta_0 \right\| + \left\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\Xi(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)\Xi(\theta) \right\| \\
& + \int_0^t \left\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s) \left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,\theta(x)) dx \right) \right\| ds \\
& - \int_0^t \left\| \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,s) \left(\Phi(s,\nu(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-x)^{\alpha-1} g(s,x,(x)) dx \right) \right\| ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i))\right\|-\sum_{0<t_i<t}\left\|R_{(\alpha,\nu)}(t,t_i)I_i(\nu(t_i))\right\| \\
\leq\ &\left\|\left(\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)-\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)\right)\theta_0\right\|+\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\Xi(\theta)-\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)\Xi(\nu)\right\| \\
&+\int_0^t\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\|\|\Phi(s,\theta(s))\|\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\| \\
&\times\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\|g(s,x,\theta(x))\|\,dxds-\int_0^t\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,s)\right\|\|\Phi(s,\nu(s))\|\,ds \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,s)\right\|\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\|g(s,x,\nu(x))\|\,dxds \\
&+\sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)I_i(\theta(t_i))\right\|-\sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,t_i)I_i(\nu(t_i))\right\|. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Usando

$$\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\right\|\leq\mathbf{M}_0^\alpha,\ \ \|g(\theta)\|\leq G_{\mathcal{A}}\|\theta\|_{\mathcal{PC}}$$

e

$$\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)y-\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s)y\right\|\leq k_0\ a\|y\|_X\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}$$

com k_0 constante, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)-\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)\right\| &\leq \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)\right\|\|g(\nu)\|+\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\right\|\|g(\theta)\| \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha\ \|g(\nu)\|+\mathbf{M}_0^\alpha\,\|g(\theta)\| \\
&\leq \mathbf{M}_0^\alpha\ G_{\mathcal{A}}\|\theta-v\|. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)-\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\theta)\right\| &\leq k_0\ a\|g(\theta)\|\ \|\theta-\nu\| \\
&\leq k_0\ a\ G_{\mathcal{A}}\|\theta\|(\|\theta\|+\|\nu\|)\,. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Usando as Eq.(3.25) e Eq.(3.26), temos

$$\mathbf{M}_0^\alpha\ G_{\mathcal{A}}\ \ (\|\theta\|+\|\nu\|)\leq a\ k_0\ G_{\mathcal{A}}\,\|\theta\|\,(\|\theta\|+\|\nu\|)\,.$$

Portanto, concluímos que

$$\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)-\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)\right\|\leq\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)-\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)\right\|. \qquad (3.27)$$

Agora, usando a desigualdade (3.27), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)\right\| \\
= & \left\| \begin{array}{c} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu) + \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) \\ +\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) + \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0) \end{array} \right\| \\
\leq & \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)\right\| + \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu) - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)\right\| \\
& + \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0)\right\| + \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0)\right\| \\
\leq & \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)\right\| + \left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu) - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta)\right\| \\
& +2\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0)\right\| \\
\leq & \ 2\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(\nu)\right\| + 2\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)g(0) - \mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,0)g(0)\right\| \\
\leq & \ 2k_0 a \left\|g(\theta)\right\|_X \ \left\|\theta - \nu\right\|_{\mathcal{PC}} + 2k_0 a \left\|g(0)\right\|_X \ \left\|\theta - \nu\right\|_{\mathcal{PC}} \\
\leq & \ 2k_0 a G_{\mathcal{A}} \left\|\theta\right\|_{\mathcal{PC}} \ \left\|\theta - \nu\right\|_{\mathcal{PC}} + 2k_0 a G_{\mathcal{A}} \left\|g(0)\right\|_X \ \left\|\theta - \nu\right\|_{\mathcal{PC}} \\
= & \ 2k_0 a \left(G_{\mathcal{A}}\|\theta\| + \|g(0)\|\right) \|\theta - \nu\|_{\mathcal{PC}}.
\end{aligned}
$$

Agora, retornando à desigualdade (3.24), temos

$$
\begin{aligned}
& \|(\Theta\theta)(t)-(\Theta\nu)(t)\| \\
\leq\ & k_0\ a\,\|\theta\|\ \ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ +2k_0 a\,(G_{\mathcal{A}}\,\|\theta\|+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t\|\Theta(s,\theta(s))\|ds\ \frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^t\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\,\|g(s,x,\theta(x))\|\,dxds \\
& -\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t\|\Phi(s,\nu(s))\|ds\ \frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^t\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\,\|g(s,x,\nu(x))\|\,dxds \\
& +\sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)-\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,t_i)\right\|\,\|I_i(\theta(t_i))\|+\sum_{0<t_i<t}\left\|\mathcal{R}_{(\alpha,\nu)}(t,t_i)\right\|\,\|I_i(\theta(t_i))-I_i(\nu(t_i))\| \\
\leq\ & k_0\ a\,\|\theta\|\ \ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+2k_0 a\,(G_{\mathcal{A}}\,\|\theta\|+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t(\|\Phi(s,\theta(s))-\Phi(s,0)\|+\|\Phi(s,0)\|)\,ds \\
& +\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\,(\|g(s,x,\theta(x))-g(s,0,0)\|+\|g(s,0,0)\|)\,dxds \\
& -\mathbf{M}_0^{\alpha}\int_0^t(\|\Phi(s,\theta(s))-\Phi(s,0)\|+\|\Phi(s,0)\|)\,ds \\
& -\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s(s-x)^{\alpha-1}\,(\|g(s,x,\nu(x))-g(s,0,0)\|+\|g(s,0,0)\|)\,dxds \\
& +\sum_{i=1}^{n}k_0\ a\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ l_i\|\theta(t_i)\|+\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
\leq\ & k_0\ a\|\theta\|\ \ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+2k_0 a\,(G_{\mathcal{A}}\|\theta\|+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\ F_{\mathcal{A}}\int_0^t(\|\theta(s)\|-\|\nu(s)\|)\,ds+\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\int_0^t(\|\theta\|-\|\nu\|)\,ds \\
& +\sum_{i=1}^{n}k_0\ a\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ l_i\|\theta(t_i)\|+\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
\leq\ & k_0\ a\|\theta\|\ \ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+2k_0 a\,(G_{\mathcal{A}}\|\theta\|+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\ F_{\mathcal{A}}\int_0^t\|\theta(s)-\nu(s)\|ds+\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\int_0^t\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ ds \\
& +\sum_{i=1}^{n}k_0\ a\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ l_i\|\theta(t_i)\|+\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
\leq\ & k_0\ a\ r\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+2k_0 a\,(G_{\mathcal{A}}\ r+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\ F_{\mathcal{A}}\int_0^t\|\theta-v\|_{\mathcal{PC}}\ ds+\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\int_0^t\|\theta-v\|_{\mathcal{PC}}\ ds \\
& +\sum_{i=1}^{n}k_0\ a\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\ l_i\ r+\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
\leq\ & k_0\ a\ r\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+2\ k_0\ a\ \ (G_{\mathcal{A}}\ r+\|g(0)\|)\,\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +\mathbf{M}_0^{\alpha}\ F_{\mathcal{A}}\ a\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}+\frac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\ a\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
& +k_0\ a\ r\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\sum_{i=1}^{n}l_i+\mathbf{M}_0^{\alpha}\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}}\sum_{i=1}^{n}l_i \\
=\ & \left[\begin{array}{c} k_0\ a\ r+2k_0\ a\,(G_{\mathcal{A}}\ r+\|g(0)\|)+\mathbf{M}_0^{\alpha}\ F_{\mathcal{A}}\ a \\ +\dfrac{\mathbf{M}_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{H}_{\mathcal{A}}\ a+k_0\ a\ r\sum_{i=1}^{n}l_i+\mathbf{M}_0^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i \end{array}\right]\|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}} \\
=\ & \rho\ \|\theta-\nu\|_{\mathcal{PC}},\ \ \theta,\nu\in\mathcal{PC}([0,b],\Lambda).
\end{aligned}
$$

Desta desigualdade, segue que para qualquer $t \in [0, b]$, temos

$$\|(\Theta\theta)(t) - (\Theta\nu)(t)\| \leq \rho \, \|\theta - \nu\|_{\mathcal{PC}}\,, \text{ com } \theta, \nu \in \mathcal{PC}([0, b], \Lambda),$$

que é o resultado desejado. □

Como apresentado na Seção 3.2, aqui também temos o caso especial, quando escolhemos $\alpha = 1$, dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.10. *Sejam* $\theta_0 \in \Lambda$ *e* $\mathbf{B}_r = \{\theta \in \mathcal{PC}([0, b], \Lambda); \|\theta\| \leq r\}$, $r > 0$. *Se as condições* $\mathbf{UC}_1$-$\mathbf{UC}_5$ *são satisfeitas, então a* Eq.(1) *tem uma única solução suave.*

Demonstração. A prova segue diretamente do Teorema 3.9. □

Capítulo 4

Controlabilidade

O conceito de controlabilidade foi introduzido pela primeira vez por Kalman no início dos anos 1960 [43, 44, 45]. Algumas conclusões muito importantes sobre o comportamento de sistemas dinâmicos lineares e não lineares são obtidas. No campo da tecnologia de engenharia, existem muitos sistemas reais controlados com óbvio efeito de retardo, como o sistema de suspensão ativa do veículo, o sistema dinâmico de combustão do motor de foguete e outros sistemas mecânicos. O efeito de atraso leva à evolução do estado do sistema com o tempo, não apenas dependendo do estado atual do sistema, mas também dependendo do estado do sistema por um determinado período de tempo no passado.

Por outro lado, também podemos destacar que a controlabilidade desempenha um papel importante na teoria e engenharia de controle, que pode ser categorizada em dois tipos: controlabilidade exata e controlabilidade aproximada. Controlabilidade exata significa que sob alguma entrada de controle admissível, um sistema pode ser direcionado de um estado inicial para um estado final arbitrário, enquanto a controlabilidade aproximada permite direcionar o sistema para uma pequena vizinhança arbitrária do estado final. Comparada com a controlabilidade exata, a controlabilidade aproximada é um conceito mais fraco, totalmente adequado em aplicações. Nos últimos anos, muitos pesquisadores dedicam em estabelecer condições suficientes para a existência e controlabilidade de equações de evolução fracionária e inclusões [39, 62, 65, 83].

No Capítulo 3, sob determinadas condições, investigamos a existência e unicidade de soluções suaves para a equação integro-diferencial com impulsos dada pela Eq.(1). Visto que o problema discutido na Eq.(1) possibilitava investigar a controlabilidade, neste capítulo definimos uma função controle μ, um operador B e estabelecemos algumas condições a fim de determinarmos a controlabilidade do sistema integro-diferencial fracionário apresentado pela Eq.(4).

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de solução suave para a Eq.(4).

Definição 4.1. *Denominamos solução suave do sistema* Eq.(4) *uma função* $\theta \in \mathcal{PC}(J;\Lambda)$ $(J=[0,b])$ com valores em $\bar{\Omega} \subset \Lambda$ satisfazendo a equação integral

$$\begin{aligned} \theta_\mu(t) &= \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)[\theta_0 - h(\theta)] \\ &+ \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\left[(B\mu)(s) + \Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\eta)^{\alpha-1} g(s,\eta,\theta(\eta))\, d\eta\right] ds \end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $t \in J$, para todo $\theta_0 \in \Lambda$ e controle admissível $\mu \in L^2(J,U)$, onde U é um espaço de Banach.

Para provar o principal resultado deste capítulo, consideramos as seguintes condições:

CC$_1$: O operador linear limitado $W : L^2(J,U) \to \Lambda$ definido por

$$W_\mu = \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)(B\mu)(s)\ ds,$$

tem um operador inverso induzido $\tilde{W}^{-1}$ que tem valores em $L^2(J,U)/\ker W$ e existem constantes positivas M_1 e M_2 tais que $\|B\| \leq M_1$ e $\|\tilde{W}^{-1}\| \leq M_2$.

CC$_2$: $h : \mathcal{PC}(J;\bar{\Omega}) \to Y$ (Y é um espaço de Banach, denso e contínuo em Λ) é Lipschitz contínuo em Λ e limitado em Y, isto é, existem constantes $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$\|h(\theta)\|_Y \leq k_1,$$

$$\|h(\theta) - h(v)\|_Y \leq k_2 \max_{t\in J} \|\theta - v\|_{\mathcal{PC}}, \quad \theta, v \in \mathcal{PC}(J;\Lambda).$$

Para as condições (**CC**$_3$) - (**CC**$_5$), considere Z como ambos Λ e Y.

CC$_3$: $g : \Omega \times Z \to Z$ é contínua e existem constantes $k_3 > 0$ e $k_4 > 0$ tais que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|g(t,s,\theta) - g(t,s,v)\|_Z\ ds\ \leq k_3\|\theta - v\|_Z,\ \theta, v \in Z,$$

$$k_4 = \max\left\{\int_0^t \|g(t,s,0)\|_Z\ ds;\ (t,s) \in \Omega\right\}.$$

CC$_4$: $f : J \times Z \to Z$ é contínua e existem constantes $k_5 > 0$ e $k_6 > 0$ tais que

$$\|\Phi(t,\theta) - \Phi(t,v)\|_Z \leq k_5\|\theta - v\|_Z,\ \theta, v \in \Lambda,$$

$$k_6 = \max_{t\in J} \|\Phi(t,0)\|_Z.$$

CC$_5$: $I_i : \Lambda \to \Lambda$ são contínuas e existem constantes $l_i > 0,\ i = 1,2,...,m$ tais que

$$\|I_i(\theta) - I_i(v)\| \leq l_i\|\theta - v\|,\ \theta, v \in \Lambda.$$

Consideramos $M_0 = \max\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)(t,s)}\|_{B(Z)},\ 0 \leq s \leq t \leq b,\ \theta \in \bar{\Omega}$.

CC$_6$: Existem constantes positivas $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in (0, \delta/3]$ tais que

$$\delta_1 = M_0\|\theta_0\| + M_0k_1\delta_2 = M_0M_1M_2b\left(\|\theta_1\| + M_0\|\theta_0\| + M_0k_1 + M_0\tilde{\theta} + M_0\xi\right) \text{ e}$$

$$\delta_3 = M_0\tilde{\theta} + M_0\xi,$$

onde $\xi = \sum_{i=1}^m (l_i\delta + \|I_i(0)\|)$.

Definição 4.2. *O sistema fracionário* Eq.(4) *é controlável no intervalo* $J = [0,b]$ *se, para todo* $\theta_0, \theta_1 \in \Lambda$, *existe um controle* $\mu \in L^2(J,U)$, *tal que a solução suave* $\theta(\cdot)$ *de* Eq.(4) *correspondente a* μ, *verifica:* $\theta(0) + h(\theta) = \theta_0,\ \Delta\theta(t_i) = I_i(\theta(t_i)),\ i = 1,2,...,m$ *e* $\theta_\mu(b) = \theta_1$.

Lema 4.1. *Seja $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)(t,s)}$ a família (α,θ)-resolvente do problema fracionário* Eq.(4). *Existe uma constante $k>0$ tal que*

$$\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\omega-\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s)\omega\|\leq k\|\omega\|_Y\int_s^t\|\theta(\tau)-v(\tau)\|\ d\tau,$$

para todo $\theta,v\in\mathcal{PC}(J;\Lambda)$ com valores em $\bar{\Omega}$ e todo $\omega\in Y$.

Demonstração. Ver [75]. □

Lema 4.2. *Seja $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^t\left(\Phi(s,\theta(s))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}g(s,\eta,\theta(\eta))\ d\eta\right)\ ds$, com $t\in J$ e $\Phi(\cdot,\cdot)$ e g conforme as condições da* Eq.(4). *Então, $\|\varphi(t)\|\leq\ \tilde{\theta}$.*

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(t)\|\\
=&\left\|\int_0^t\left(\Phi(s,\theta(s))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}g(s,\eta,\theta(\eta))\ d\eta\right)\ ds\right\|\\
=&\left\|\int_0^t\left(\Phi(s,\theta(s))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}\left(g(s,\eta,\theta(\eta))\ d\eta-g(s,\eta,0)+g(s,\eta,0)\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\Phi(s,0)-\Phi(s,0)\right)\ ds\right\|\\
\leq&\int_0^t\left(\|\Phi(s,\eta(s))-\Phi(s,0)\|+\|\Phi(s,0)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}\|g(s,\eta,\theta(\eta))-g(s,\eta,0)\|\ d\eta\right.\\
+&\left.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}\|g(s,\eta,0)\|\ d\eta\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Usando ($\mathbf{CC}_3$) e ($\mathbf{CC}_4$), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\|&\leq\int_0^t(k_5\|\theta(s)\|+k_6+k_3\|\theta(s)\|+k_4)\ ds\\
&=k_5\int_0^t\|\theta(s)\|\ ds+k_6\int_0^t\ ds+k_3\int_0^t\|\theta(s)\|\ ds+k_4\int_0^t ds\\
&\leq k_5\int_0^t\ \|\theta(s)\|\ ds+k_6b+k_4b+k_3\int_0^t\ \|\theta(s)\|\ ds,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Teorema 4.1. *Suponha que o operador $-\mathcal{A}(t,\theta)$ gera uma família (α,θ)-resolvente com $\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\|\leq Me^{-\sigma(t-s)}$ para alguma constante M e $\sigma>0$. Se as condições* ($\mathbf{CC}_1$) - ($\mathbf{CC}_6$) *são satisfeitas, então a equação integro-diferencial de controle fracionária com condição não local e condição impulsiva* Eq.(4) *é controlável em J.*

Demonstração. Usando a condição ($\mathbf{CC}_1$), para uma função arbitrária $\theta(\cdot)$, definimos o controle

$$\begin{aligned}
\mu(t)&=\tilde{W}^{-1}\Big[\theta_1-\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\theta_0+\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)h(\theta)\\
&-\int_0^b\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\left(\Phi(s,\theta(s))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}g(s,\eta,\theta(\eta))\ d\eta\right)\ ds\\
&-\sum_{i=1}^m\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,t_i)\ I_i(\theta(t_i))\Big](t).
\end{aligned}$$

Seja $S_\delta = \{\theta : \theta \in \mathcal{PC}(J, \mathbf{\Lambda}),\ \theta(0) + \Xi(\theta) = \theta_0,\ \Delta\theta(t_i) = I_i(\theta(t_i)),\ \|\theta\| = \delta\}$, para $t \in J$, $\delta > 0, \theta_0 \in \Lambda$ e $i = 1, ..., n$.

Definimos operador $Q : S_\delta \to S_\delta$ por

$$\begin{aligned}
(Q\theta_\mu)(t) &= \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\theta_0 - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)h(\theta) \\
&+ \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,\eta)\ B\tilde{W}^{-1}\Big[\theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)h(\theta) \\
&- \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\left(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\right)\ ds \\
&- \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,t_i)\ I_i(\theta(t_i))\Big](\eta)\ d\eta \\
&+ \int_0^t \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\Big(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Big)\ ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\ I_i(\theta(t_i)).
\end{aligned}$$

Usando este controlador, devemos ter que o operador Q tem um ponto fixo, o qual é uma solução da Eq.(1.2).

Claramente $Q\theta_\mu(b) = \theta_1$, o que significa que o controle μ direciona uma solução da Eq.(4) do estado inicial θ_0 para o estado final θ_1 no tempo b, desde que possamos obter um ponto fixo do operador não linear Q.

Agora mostramos Q mapeia S_δ em si mesmo.

$$\begin{aligned}
\|(Q\theta_\mu)(t)\| &\leq \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\theta_0\| + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)h(\theta)\| \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,\eta)\|\ \|B\tilde{W}^{-1}\|\Big[\|\theta_1\| + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\theta_0\| + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)h(\theta)\| \\
&+ \int_0^b \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big(\|\Phi(s,\theta(s))\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\Big(\|g(s,\tau,\theta(\tau))\|\ d\tau\Big)\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^m \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,t_i)\|\|\{I_i(\theta(t_i)) - I_i(0)\| + \|I_i(0)\|\}\Big]\ d\eta \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\|\Big(\|\Phi(s,\theta(s))\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\|g(s,\tau,\theta(\tau))\|\ d\tau\Big)\ ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\|\Big\{\|I_i(\theta(t_i)) - I_i(0)\| + \|I_i(0)\|\Big\}.
\end{aligned}$$

Usando as condições ($\mathbf{CC}_1$), ($\mathbf{CC}_2$), ($\mathbf{CC}_5$), ($\mathbf{CC}_6$) e o Lema 4.2, temos

$$\begin{aligned}
\|(Q\theta_\mu)(t)\| &\leq M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+\int_0^t M_0M_1M_2\Bigg[\|\theta_1\|+M_0\|\theta_0\|+M_0K_1\\
&+ \int_0^b M_0\Big(\|\Phi(s,\theta(s))\|\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}\|g(s,\tau,\theta(\tau))\|\,d\tau\Big)\,ds\\
&+ M_0\sum_{i=1}^m\left(I_i\delta+\|I_i(0)\|\right)\Bigg]\,d\eta\\
&+ M_0\int_0^t\Big(\|\Phi(s,\theta(s))\|\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}\|g(s,\tau,\theta(\tau))\|\,d\tau\Big)\,ds\\
&+ M_0\sum_{i=1}^m\left(I_i\delta+\|I_i(0)\|\right)\\
&\leq M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0M_1M_2\int_0^t\Bigg[\|\theta_1\|+M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0\tilde{\tau}\\
&+ M_0\sum_{i=1}^m\left(I_i\delta+\|I_i(0)\|\right)\Bigg]\,d\eta+M_0\tilde{\tau}+M_0\sum_{i=1}^m\left(I_i\delta+\|I_i(0)\|\right)\\
&= M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0M_1M_2\int_0^t\Big[\|\theta_1\|+M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0\tilde{\tau}+M_0\xi\Big]\,d\eta\\
&+ M_0\tilde{\tau}+M_0\xi\\
&\leq M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0M_1M_2\;b\left(\|\theta_1\|+M_0\|\theta_0\|+M_0k_1+M_0\tilde{\tau}+M_0\xi\right)\\
&\quad +M_0\tilde{\tau}+M_0\xi,
\end{aligned}$$

onde $\xi=\sum_{i=1}^m\left(I_i\delta+\|I_i(0)\|\right)$.

Pela condição ($\mathbf{CC}_6$), obtemos $\|(Q\theta_\mu)(t)\|\leq\delta$. Assim, o operador Q mapeia S_δ em si mesmo.

Agora para $\theta, v\in S_\delta$, temos

$$\|(Q\theta_\mu)(t)-(Qv_\mu)(t)\|\leq I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{4.2}$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\theta_0 - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\theta_0\| + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)h(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)h(v)\|,\\
I_2 &= \int_0^t \Bigg\{ \Bigg\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,\eta)\ B\tilde{W}^{-1}\ \Bigg[\theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\ h(\theta)\\
&- \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big(\Phi(s,\theta(s))\ ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Big)\ ds\\
&- \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,t_i) I_i(\theta(t_i))\Bigg] - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,\eta)\ B\tilde{W}^{-1}\Bigg[\theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ h(v)\\
&- \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,s)\Big(\Phi(s,v(s))\ ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,v(\tau))\ d\tau\Big)\ ds\\
&- \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,t_i) I_i(v(t_i))\Bigg]\Bigg\|\Bigg\},\\
I_3 &= \int_0^t \Bigg\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s)\Bigg(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Bigg)\\
&- \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s)\Big(\Phi(s,v(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,v(\tau))\ d\tau\Big)\Bigg\|\ ds
\end{aligned}
$$

e

$$
I_4 = \sum_{i=1}^m \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i) I_i(\theta(t_i)) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,t_i) I_i(v(t_i))\|.
$$

Aplicando o Lema 4.1 e a condição ($\mathbf{CC}_2$), temos

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\ \theta_0 - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\ \theta_0\| + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,0)\ h(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\ h(v)\|\\
&+ \|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\ h(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\ h(v)\|\\
&\leq k\ \|\theta_0\|_Y \int_0^t \|\theta(\tau) - v(\tau)\| d\tau + k\|h(\theta)\| \int_0^t \|\theta(\tau) - v(\tau)\| d\tau\\
&+ \ \|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,0)\|\ \|h(\theta) - h(v)\|\\
&\leq k\ \|\theta_0\| \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\|\ a + k\ a\ k_1\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau) - v(\tau)\| + M_0\ k_2\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau) - v(\tau)\|\\
&= (k\ \|\theta_0\|\ a + k\ a\ k_1 + M_0\ k_2)\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau) - v(\tau)\|. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Sejam $\tilde{A}(\theta)$ e $\tilde{B}(v)$ dados por

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(\theta) &= \theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\ h(\theta)\\
&- \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Big)\ ds\\
&- \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,t_i) I_i(\theta(t_i))
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}(v) &= \theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ h(v)\\
&- \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,s)\Big(\Phi(s,v(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,v(\tau))\ d\tau\Big)\ ds\\
&- \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,t_i) I_i(v(t_i)).
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 4.1 e a condição ($\mathbf{CC}_1$), obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,\eta)B\tilde{W}^{-1}\tilde{A}(\theta) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,\eta)B\tilde{W}^{-1}\tilde{A}(v)\|\ d\eta \\
&\leq \|B\|\|\tilde{W}^{-1}\|\ K\ 2\max\Big\{\|\tilde{A}(\theta),\tilde{B}(v)\|\Big\}\int_0^t\|\theta(\tau)-v(\tau)\|\ d\tau \\
&\leq M_1M_2k\ 2\max\Big\{\|\tilde{A}(\theta),\tilde{B}(v)\|_Y\Big\}\ a^2\max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\|. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Note que,

$$\max\|\tilde{A}(\theta),\tilde{B}(v)\|_Y \leq \|\tilde{A}(\theta)\|_Y+\|\tilde{B}(v)\|_Y.$$

Usando o Lema 4.1, a as condições ($\mathbf{CC}_2$), ($\mathbf{CC}_5$) e ($\mathbf{CC}_6$), segue que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{A}(\theta)\|_Y &= \Big\|\theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\ h(\theta) - \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big(\Phi(s,\theta(s)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Big)\ ds \\
&\quad -\sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,\theta)\Big[\Big(I_i(\theta(t_i)) - I_i(0)\Big) + I_i(0)\Big]\Big\| \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + \|\ \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\|_Y\ \|\theta_0\|_Y + \|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,0)\|_Y\|\ h(\theta)\|_Y \\
&+ \int_0^b \Big\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big\|\ \|\Phi(s,\theta(s))\|\ ds \\
&+ \int_0^b \Big\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(b,s)\Big\|\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\|g(s,\tau,\theta(\tau))\|\ d\tau\right)\ ds \\
&+ \sum_{i=1}^m M_0\ \Big(\|I_i(\theta(t_i)) - I_i(0)\|+\|I_i(0)\|\Big) \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + M_0\|\theta_0\|_Y + M_0k_1 + M_0\tilde{\tau}\ +\ M_0\ \left\{\sum_{i=1}^m I_i\delta + \|I_i(0)\|\right\} \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + M_0\|\theta_0\|_Y + M_0k_1 + M_0\tilde{\tau}\ +\ M_0\ \xi, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\tilde{B}(\theta)\|_Y &= \Big\|\theta_1 - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ \theta_0 + \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\ h(v) - \int_0^b \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,s)\Big(\Phi(s,v(s)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}g(s,\tau,v(\tau))\ d\tau\Big)\ ds - \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,t_i)I_i(v(t_i))\Big\| \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + \|\ \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\|_Y\ \|\theta_0\|_Y + \|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,0)\|_Y\|\ h(v)\|_Y \\
&+ \int_0^b \Big\|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,v)\Big\|\Big(\Phi(s,v(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}g(s,\tau,\theta(\tau))\ d\tau\Big)\ ds \\
&+ \sum_{i=1}^m \Big\|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(b,t_i)\Big\|\Big(\|I_i(v(t_i)) - I_i(0)\|+\|I_i(0)\|\Big) \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + M_0\|\theta_0\|_Y + M_0k_1 + M_0\tilde{\tau}\ +\ M_0\ \left\{\sum_{i=1}^m I_i\delta + \|I_i(0)\|\right\} \\
&\leq \|\theta_1\|_Y + M_0\|\theta_0\|_Y + M_0k_1 + M_0\tilde{\tau}\ +\ M_0\ \xi, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

onde $\xi = \sum_{i=1}^m (I_i\delta + \|I_i(0)\|)$.

Substituindo as desigualdades (4.5) e (4.6) na desigualdade (4.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq M_1 M_2 k \; 2 \max \Big\{ \|\tilde{A}(\theta), \tilde{B}(v)\|_Y \Big\} \; a^2 \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \\
&\leq M_1 M_2 2 k a^2 \left\{ \|\theta_1\|_Y + M_0 \left(\|\theta_0\|_Y + k_1 + \tilde{\tau} + \xi \right) \right\} \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\|. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Novamente, usando os Lema 4.1, Lema 4.2, e as condições $(\mathbf{CC}_3)$, $(\mathbf{CC}_4)$ e $(\mathbf{CC}_6)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_3 \leq & \int_0^t \Bigg\{ \Bigg\| \mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,s) \Bigg(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau)) \, d\tau \Bigg) \\
- & \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s) \Big(\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau)) \, d\tau \Big) \Bigg\| \\
+ & \Bigg\| \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s) \Big(\Phi(s,v(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,v(\tau)) \, d\tau \Big) \\
- & \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,s) \Big(\Phi(s,v(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,v(\tau)) \, d\tau \Big) \Bigg\| \Bigg\} \, ds \\
\leq & \; k \int_0^t \|\Phi(s,\theta(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} g(s,\tau,\theta(\tau)) \, d\tau \|_Y \int_s^t \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \, d\tau \, ds \\
+ & \; M_0 \int_0^t \Big(\|\Phi(s,\theta(s)) - \Phi(s,v(s))\| \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} \|g(s,\tau,\theta(\tau)) \, d\tau - g(s,\tau,v(\tau))\| \, d\tau \Big) \, ds \\
\leq & \; k \; \tilde{\tau} \; a \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \\
+ & \; M_0 k_1 \int_0^t \|\theta(s) - v(s)\| \, ds \; + \; M_0 k_3 \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \\
\leq & \; k \; \tilde{\tau} \; a \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| + M_0 k_1 \; a \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \\
& + M_0 k_3 \; a \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\| \\
= & \; \Big(k \; \tilde{\tau} \; a \; + \; M_0 \; k_1 \; a \; + \; M_0 \; k_3 \; a \Big) \; \max_{\tau\in J} \|\theta(\tau) - v(\tau)\|. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando o Lema 4.1 e as condições ($\mathbf{CC}_5$) e ($\mathbf{CC}_6$), obtemos

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \sum_{i=1}^{m}\Big(\|\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}(t,t_i)\ I_i(\theta(t_i)) - \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,t_i)\ I_i(v(t_i))\|+\|\mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,t_i)\ I_i(\theta(t_i)) \\
&- \mathcal{R}_{(\alpha,v)}(t,t_i)\ I_i(v(t_i))\|\Big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\Big[K\Big(\|I_i(\theta(t_i)) - I_i(0)\|+\|I_i(0)\|\Big)\int_{t_i}^{t}\|\theta(\tau)-v(\tau)\|\ d\tau \\
&+ M_0\ \|I_i(\theta(t_i)) - I_i(v(t_i))\|\Big] \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\Big[K\Big(l_i\ \delta + \|I_i(0)\|\Big)\int_{t_i}^{t}\|\theta(\tau)-v(\tau)\|\ d\tau + M_0\ l_i\ \|\theta(\tau)-v(\tau)\|\Big] \\
&\leq k\sum_{i=1}^{m}\Big(l_i\ \delta + \|I_i(0)\|\Big)\ a\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| + M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&= k\ \xi\ a\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| + M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&= \Big(k\ \xi\ a\ +\ M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\Big)\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\|. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Substituindo as desigualdades (4.3), (4.7), (4.8) e (4.9) na desigualdade (4.2), temos

$$\begin{aligned}
\|(Q\theta_\mu)(t) - (Qv_\mu)(t)\| &\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
&= \Big(k\ \|\theta_0\|\ a +\ k\ k_1\ +\ M_0\ k_2\Big)\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&+ M_1\ M_2\ 2a^2\ k\Big(\|\theta_1\|_Y + M_0(\ \|\theta_0\|_Y + k_1\ +\ \tilde{\tau}\ +\ \xi)\Big) \\
&\quad \times\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&+ \Big(k\ \xi\ a\ +\ M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\Big)\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&+ \Big(k\ \xi\ a\ +\ M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\Big)\max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&= \Big\{k\ \|\theta_0\|\ a\ +\ k\ a\ k_1 + M_0\ k_2\ +\ M_1\ M_2\ 2a\ k\Big(\|\theta_1\|_Y \\
&+ M_0(\ \|\theta_0\|_Y + k_1\ +\ \tilde{\tau}\ +\ \xi)\Big)\ +\ K\ \tilde{\tau}\ a\ +\ M_0\ k_1\ a\ +\ M_0\ k_3 \\
&+ k\ \xi\ a + M_0\sum_{i=1}^{m} l_i\Big\}\max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\| \\
&= \lambda\ \max_{\tau\in J}\|\theta(\tau)-v(\tau)\|,
\end{aligned}$$

onde $\lambda = k\ \|\theta_0\|\ a\ +\ k\ a\ k_1 + M_0\ k_2\ +\ M_1\ M_2\ 2a\ k\Big(\|\theta_1\|_Y + M_0(\ \|\theta_0\|_Y + k_1\ +\ \tilde{\tau}\ +\ \xi)\Big)$ $+\ k\ \tilde{\tau}\ a\ +\ M_0\ k_1\ a\ +\ M_0\ k_3\ +\ k\ \xi\ a\ + M_0\sum_{i=1}^{m} l_i$.

Portanto, Q é uma contração e, portanto, existe um único ponto fixo $\theta \in \Lambda$, tal que $Q\theta(t) = \theta(t)$. Qualquer ponto fixo de Q é uma solução suave de (4) em J que satisfaz $\theta(b) = \theta_1$. Assim, concluímos que o sistema (4) é controlável em J. $\square$

Ressaltamos que assim como os resultados que foram apresentados no capítulo 3, o Teorema (4.1) também satisfaz o caso especial, quando escolhemos $\alpha = 1$.

Conclusões e Perspectivas

Antes de investigar os principais resultados deste trabalho, realizou-se um estudo detalhado sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer proposto por Sousa e de Oliveira [89] em 2018. Nesse sentido, a partir da particular escolha de $\psi(\cdot)$ e do limite de β, obtivemos a derivada fracionária de Caputo, ferramenta principal da formulação dos problemas discutidos neste trabalho. Além disso, recuperamos alguns resultados preliminares sobre medida de não compacidade de Hausdorff e operador resolvente.

O cerne da primeira etapa da pesquisa consistiu em investigar a existência e unicidade de soluções suaves para uma equação integro-diferencial fracionária quase linear com impulso e não local. Para isto, primeiramente formulamos o problema principal dado pela Eq.(1). Nesse sentido, foram impostas condições necessárias e suficientes, e por meio da técnica da medida de não compacidade de Hausdorff, do uso do operador resolvente e de teoremas de ponto fixo, obtivemos os resultados desejados. Como fruto dos resultados obtidos nessa etapa, foi publicado o artigo científico intitulado "Existence and Uniqueness of mild solutions for quasilinear fractional integrodifferential equations"[78].

Motivados pela crescente expansão na pesquisa envolvendo o cálculo fracionário e equações diferenciais de diversos tipos, sejam em suas perspectivas analíticas ou em aplicações, investigamos condições que assegurem a existência e a unicidade de soluções suaves para uma classe de equações integro-diferenciais fracionárias com impulsos em espaço de Banach, cuja solução suave é dada em termos de $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}$ chamada de família (α,θ)-resolvente gerada por $-\mathcal{A}(t,\theta)$. Nesse sentido, motivados pelos primeiros resultados, surgiram algumas indagações que nos permitiram investigar a controlabilidade para um sistema de controle integro-diferencial impulsivo fracionário em espaços de Banach, cuja solução suave, é dada em termos de $\mathcal{R}_{(\alpha,\theta)}$ e de uma função controle μ.

Na segunda etapa da pesquisa, direcionamos nossa atenção para o problema da controlabilidade. Para esta finalidade, formulamos o sistema de controle integro-diferencial impulsivo fracionário em espaços de Banach Eq.(4) e nos questionamos sobre quais condições necessárias e suficientes deveriam ser satisfeitas para garantir a controlabilidade do sistema. Para estabelecer o resultado de controlabilidade admitimos algumas condições e usamos a técnica do ponto fixo e o operador (α,θ)-resolvente. Mediante este novo resultado obtido, elaboramos o segundo artigo científico e já submetido, intitulado "Controllability of fractional impulsive integro-differential control system"em Journal of Applied Analysis & Computation [79].

Diante do exposto, o propósito da nossa pesquisa foi alcançado, isto é, os estudos da existência e unicidade de soluções suaves e controlabilidade em espaços de Banach utilizando o cálculo fracionário, a família (α,θ)-resolvente gerada por $-\mathcal{A}(t,\theta)$ e os teoremas de ponto fixo. Vale destacar que as condições estabelecidas para a existência e unicidade de soluções suaves e também para a controlabilidade do sistema foram cruciais para a obtenção dos resultados e foram escolhidas de modo a satisfazerem os operadores e as funções envolvidas nos problemas.

Porém, outras questões relevantes, como tratar sobre a estabilidade de Ulam-Hyers, atratividade de soluções suaves e observabilidade de sistemas, fazem parte de um projeto de pesquisa futuro, que dará uma natural continuidade a esse projeto de Doutorado. Perspectivas de novos resultados e parcerias futuras com pesquisadores da área no Brasil e no exterior também são partes desta natural continuidade do trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **44** (2017), 460–481.

[2] R. Almeida, A. M. C. Brito da Cruz, N. Martins, and M. T. T. Monteiro, *An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative*, Inter. J. Dyn. Control **7** (2019), no. 2, 776–784.

[3] R. Almeida, A. B. Malinowska, and T. Odzijewicz, *On systems of fractional differential equations with the ψ-Caputo derivative and their applications*, Math. Meth. Appl. Sci. (2019), 1–16.

[4] M. R. S. Ammi and D. F. M. Torres, *Optimal control of a nonlocal thermistor problem with ABC fractional time derivatives*, Comput. Math. Appl. **78** (2019), no. 5, 1507–1516.

[5] K. Anukiruthika, N. Durga, and P. Muthukumar, *Approximate controllability of semilinear retarded stochastic differential system with non-instantaneous impulses: Fredholm theory approach*, IMA J. Math. Control Infor. (2021).

[6] M. M. Arjunan, V. Kavitha, and S. Selvi, *Existence results for impulsive differential equations with nonlocal conditions via measures of noncompactness*, J. Nonlinear Sci. Appl. **5** (2012), 195–205.

[7] D. Bainov and P. Simeonov, *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*, vol. 66, CRC Press, New York, 1993.

[8] ———, *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*, World Scientific, Singapore, 1995.

[9] ———, *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Routledge, England, 2017.

[10] E. G. Bajlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.

[11] K. Balachandran and F. P. Samuel, *Existence of mild solutions for quasilinear integrodifferential equations with impulsive conditions.*, Electronic Journal of Differential Equations **2009** (2009), no. 84, 1–9.

[12] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Commen. Math. Univ. Carolinae **21** (1980), no. 1, 131–143.

[13] J. Banaś and W. G. El-Sayed, *Measures of noncompactness and solvability of an integral equation in the class of functions of locally bounded variation*, J. Math. Anal. Appl. **167** (1992), no. 1, 133–151.

[14] M. Benchohra, S. Litimein, and J. J. Nieto, *Semilinear fractional differential equations with infinite delay and non-instantaneous impulses*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), no. 1, 21.

[15] L. Berrahmoune, *A variational approach to constrained controllability for distributed systems*, J. Math. Anal. Appl. **416** (2014), no. 2, 805–823.

[16] ______, *Constrained controllability for lumped linear systems*, Evolution Equations & Control Theory **4** (2015), no. 2, 159.

[17] A. Boudjerida, D. Seba, and G. M. N'Guérékata, *Controllability of coupled systems for impulsive φ-Hilfer fractional integro-differential inclusions*, Applicable Anal. **99** (2020), 1–18.

[18] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. **162** (1991), no. 2, 494–505.

[19] T. Cardinali and P. Rubbioni, *Mild solutions for impulsive semilinear evolution differential inclusions.*, J. Appl. Funct. Anal. **1** (2006), no. 3, 303–325.

[20] D. N. Chalishajar, K. Malar, and R. Ilavarasi, *Existence and controllability results of impulsive fractional neutral integro-differential equation with sectorial operator and infinite delay*, AIP Conference Proceedings, vol. 2159, AIP Publishing LLC, 2019, p. 030006.

[21] Y. Cheng, R. P. Agarwal, and D. O'Regan, *Existence and controllability for nonlinear fractional differential inclusions with nonlocal boundary conditions and time-varying delay*, Frac. Calc. Appl. Anal. **21** (2018), no. 4, 960–980.

[22] J. Dabas and A. Chauhan, *Existence and uniqueness of mild solution for an impulsive neutral fractional integro-differential equation with infinite delay*, Math. Computer Modell. **57** (2013), no. 3-4, 754–763.

[23] A. Debbouche, *Fractional evolution integro-differential systems with nonlocal conditions*, Adv. Dyn. Sys. Appl. **5** (2010), no. 1, 49–60.

[24] A. Debbouche and D. Baleanu, *Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), no. 3, 1442–1450.

[25] A. Debbouche and D. F. M. Torres, *Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces*, Inter. J. Control **86** (2013), no. 9, 1577–1585.

[26] K. Diethelm and N. J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **265** (2002), no. 2, 229–248.

[27] G. Emmanuele, *Measure of weak noncompactness and fixed point theorems*, Bull. Math. Soc. des Sci. Math. République Socialiste de Roumanie **25** (1981), 353–358.

[28] Z. Fan, Q. Dong, and G. Li, *Semilinear differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces*, Inter. J. Nonlinear Sci. **2** (2006), no. 3, 131–139.

[29] Z. Fan and G. Li, *Existence results for semilinear differential equations with nonlocal and impulsive conditions*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 5, 1709–1727.

[30] S. Farahi and T. Guendouzi, *Approximate controllability of fractional neutral stochastic evolution equations with nonlocal conditions*, Results Math. **65** (2014), no. 3, 501–521.

[31] Haide Gou and Baolin Li, *Local and global existence of mild solution to impulsive fractional semilinear integro-differential equation with noncompact semigroup*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **42** (2017), 204–214.

[32] G. S. Gouveia, *Sobre equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado e equações semilineares hiperbólicas*, Ph.D. thesis, Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

[33] T. Gunasekar, F. P. Samuel, and M. M. Arjunan, *Existence results for impulsive neutral functional integrodifferential equation with infinite delay*, J. Nonlinear Sci. Appl **6** (2013), 234–243.

[34] D. Guo and X. Liu, *Extremal solutions of nonlinear impulsive integrodifferential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl **177** (1993), no. 2, 538–552.

[35] H-P Heinz, *On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-value functions*, Nonlinear Anal. **7** (1983), no. 12, 1351–1371.

[36] E. Hernández and Donal O'Regan, *On a new class of abstract impulsive differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 5, 1641–1649.

[37] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, vol. 35, World Scientific, Singapore, 2000.

[38] L. Hu, Y. Ren, and R. Sakthivel, *Existence and uniqueness of mild solutions for semilinear integro-differential equations of fractional order with nonlocal initial conditions and delays*, Semigroup Forum, vol. 79, Springer, 2009, p. 507.

[39] Y. Huang, Z. Liu, and C.-F. Wen, *Approximate controllability for fractional semilinear parabolic equations*, Comput. Math. Appl. **77** (2019), no. 11, 2971–2979.

[40] Jin-M. Jeong, Jin-R. Kim, and Hyun-H. Roh, *Controllability for semilinear retarded control systems in Hilbert spaces*, J. Dyn. Control Sys. **13** (2007), no. 4, 577–591.

[41] S. Ji and G. Li, *Existence results for impulsive differential inclusions with nonlocal conditions*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), no. 4, 1908–1915.

[42] Sun Jinli and Ma Yihai, *Initial value problems for the second order mixed monotone type of impulsive differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000), no. 2, 506–516.

[43] R. . Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*, Bol. soc. Mat. Mexicana **5** (1960), no. 2, 102–119.

[44] R. E. Kalman, *On the general theory of control systems*, Proceedings First International Conference on Automatic Control, Moscow, USSR, 1960, pp. 481–492.

[45] ———, *Mathematical description of linear dynamical systems*, J. Soc. Indu. Appl. Math., Series A: Control **1** (1963), no. 2, 152–192.

[46] M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, and P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin, 2001.

[47] L. Kexue, P. Jigen, and G. Jinghuai, *Controllability of nonlocal fractional differential systems of order $\alpha \in (1, 2]$ in Banach spaces*, Reports Math. Phys. **71** (2013), no. 1, 33–43.

[48] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204, Elsevier, North-Holland, New York, 2006.

[49] Avadhesh Kumar, Ramesh K Vats, Ankit Kumar, and Dimplekumar N Chalishajar, *Numerical approach to the controllability of fractional order impulsive differential equations*, Demonstratio Math. **53** (2020), no. 1, 193–207.

[50] S. Kumar and N. Sukavanam, *Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay*, J. Diff. Equ. **252** (2012), no. 11, 6163–6174.

[51] V. Kumar, M. Malik, and A. Debbouche, *Stability and controllability analysis of fractional damped differential system with non-instantaneous impulses*, Appl. Math. Comput. **391** (2021), 125633.

[52] V. Lakshmikantham and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, vol. 6, World Scientific, Singapore, 1989.

[53] V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **69** (2008), no. 8, 2677–2682.

[54] X. Li, M. Bohner, and C.-K. Wang, *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*, Automatica **52** (2015), 173–178.

[55] Y. Li and Z. Liu, *Monotone iterative technique for addressing impulsive integro-differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **66** (2007), no. 1, 83–92.

[56] J. Liang, J. H. Liu, and T.-J. Xiao, *Nonlocal impulsive problems for nonlinear differential equations in Banach spaces*, Math. Comput. Model. **49** (2009), no. 3-4, 798–804.

[57] J. Liang and H. Yang, *Controllability of fractional integro-differential evolution equations with nonlocal conditions*, Appl. Math. Comput. **254** (2015), 20–29.

[58] J. H. Liu, *Nonlinear impulsive evolution equations*, Dyn. Cont. Disc. Impulsive Sys. **6** (1999), no. 1, 77–85.

[59] X. Liu and D. Guo, *Initial value problems for first order impulsive integro-differential equations in Banach spaces*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **2** (1995), no. 1, 65–83.

[60] Y. Liu, *Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **70** (2009), no. 5, 2106–2122.

[61] Z. Liu and X. Li, *Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann–Liouville fractional derivatives*, SIAM J. Control Opt. **53** (2015), no. 4, 1920–1933.

[62] ———, *Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann–Liouville fractional derivatives*, SIAM J. Control Opt. **53** (2015), no. 4, 1920–1933.

[63] Z. Liu, J. Lv, and R. Sakthivel, *Approximate controllability of fractional functional evolution inclusions with delay in Hilbert spaces*, IMA J. Math. Control Infor. **31** (2014), no. 3, 363–383.

[64] Z. Luo and J. J. Nieto, *New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **70** (2009), no. 6, 2248–2260.

[65] N. I. Mahmudov, *Finite-approximate controllability of semilinear fractional stochastic integro-differential equations*, Chaos, Solitons & Fractals **139** (2020), 110277.

[66] N. I. Mahmudov and S. Zorlu, *On the approximate controllability of fractional evolution equations with compact analytic semigroup*, J. Comput. Appl. Math. **259** (2014), 194–204.

[67] S. Micu and E. Zuazua, *An introduction to the controllability of partial differential equations*, Quelques questions de théorie du contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann (2004), 69–157.

[68] B. P. Moghaddam, J. A. T. Machado, and M. L. Morgado, *Numerical approach for a class of distributed order time fractional partial differential equations*, Appl. Numer. Math. **136** (2019), 152–162.

[69] F. Z. Mokkedem and X. Fu, *Approximate controllability of semi-linear neutral integro-differential systems with finite delay*, Appl. Math. Comput. **242** (2014), 202–215.

[70] S. Nemati, P. M. Lima, and D. F. M. Torres, *A numerical approach for solving fractional optimal control problems using modified hat functions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **78** (2019), 104849.

[71] R. J. Nirmala, K. Balachandran, and J. J. Trujillo, *Null controllability of fractional dynamical systems with constrained control*, Fract. Calc. Appl. Anal. **20** (2017), no. 2, 553.

[72] S. K. Ntouyas and P. Ch. Tsamatos, *Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions*, J. Math. Anal. Appl. **210** (1997), no. 2, 679–687.

[73] M. D. Ortigueira, D. Valério, and J. A. T. Machado, *Variable order fractional systems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **71** (2019), 231–243.

[74] Martha Aurora Parra Pulido et al., *Derivada fracionária ψ-hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers*, 2020.

[75] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 44, Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[76] J Priyadharsini and P Balasubramaniam, *Controllability of fractional noninstantaneous impulsive integrodifferential stochastic delay system*, IMA J. Math. Control Infor. (2021).

[77] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications*, Filomat **12** (1998), no. 2, 87–120.

[78] P. Santos Ramos, J. Vanterler da C. Sousa, and E Capelas de Oliveira, *Existence and uniqueness of mild solutions for quasi-linear fractional integrodifferential equations*, Evolution Equations & Control Theory **9** (2020), 1–24.

[79] ______, *Controllability of fractional impulsive integro-differential control system*, Submetido (2021).

[80] R. Sakthivel, Q. H. Choi, and S. M. Anthony, *Controllability result for nonlinear evolution integrodifferential systems*, Appl. Math. Lett. **17** (2004), no. 9, 1015–1023.

[81] R. Sakthivel, R. Ganesh, Y. Ren, and S. M. Anthoni, *Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **18** (2013), no. 12, 3498–3508.

[82] R. Sakthivel, N. I. Mahmudov, and J. J. Nieto, *Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), no. 20, 10334–10340.

[83] R. Sakthivel, Y. Ren, and N. I. Mahmudov, *On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), no. 3, 1451–1459.

[84] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[85] F. P. Samuel and K. Balachandran, *Existence of solutions for quasi-linear impulsive functional integrodifferential equations in Banach spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl. **7** (2014), 115–125.

[86] R. M. Shabestari, R. Ezzati, and T. Allahviranloo, *Solving fuzzy Volterra integrodifferential equations of fractional order by Bernoulli wavelet method*, Adv. Fuzzy Sys. **2018** (2018), 5603560:1–5603560:11.

[87] Xiao-Bao Shu and Y. Shi, *A study on the mild solution of impulsive fractional evolution equations*, Appl. Math. Comput. **273** (2016), 465–476.

[88] J. Vanterler da C. Sousa, M. Benchohra, and Gaston M. N'Guérékata, *Attractivity for differential equations of fractional order and ψ-Hilfer type*, Fract. Cal. Appl. Anal. **23** (2020), no. 4, 1188–1207.

[89] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, *On the ψ-Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **60** (2018), 72–91.

[90] ———, *On the Ulam–Hyers–Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the ψ-Hilfer operator*, J. Fixed Point Theory Appl. **20** (2018), no. 3, 1–21.

[91] ———, *Leibniz type rule: ψ-Hilfer fractional operator*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **77** (2019), 305–311.

[92] ———, *On the ψ-fractional integral and applications*, Comput. Appl. Math. **38** (2019), no. 1, 4.

[93] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, and L. A. Magna, *Fractional calculus and the ESR test*, AIMS Math. **2** (2017), no. 4, 692–705.

[94] J. Vanterler da C. Sousa, M. N. N. dos Santos, L. A. Magna, and E. Capelas de Oliveira, *Validation of a fractional model for erythrocyte sedimentation rate*, Comput. Appl. Math. **37** (2018), no. 5, 6903–6919.

[95] J. Vanterler da C. Sousa, G. S. F. Frederico, and E. Capelas de Oliveira, *ψ-Hilfer pseudo-fractional operator: new results about fractional calculus*, Comput. Appl. Math. **39** (2020), no. 4, 1–33.

[96] J. Vanterler da C. Sousa, D. F. Gomes, and E. Capelas de Oliveira, *A new class of mild and strong solutions of integro-differential equation of arbitrary order in Banach space*, arXiv:1812.11197 (2018).

[97] J. Vanterler da C. Sousa, F. Jarad, and T. Abdeljawad, *Existence of mild solutions to Hilfer fractional evolution equations in Banach space*, Annals Funct. Anal. **12** (2021), no. 1, 1–16.

[98] J Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche, and E. Capelas de Oliveira, *Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **88** (2019), 73–80.

[99] J. Vanterler da C. Sousa, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira, *The ψ-Hilfer fractional calculus of variable order and its applications*, Comput. Appl. Math. **39** (2020), no. 4, 1–35.

[100] J. Vanterler da C. Sousa, D. S. Oliveira, and E. Capelas de Oliveira, *On the existence and stability for noninstantaneous impulsive fractional integrodifferential equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (2019), no. 4, 1249–1261.

[101] ———, *A note on the mild solutions of Hilfer impulsive fractional differential equations*, Chaos, Solitons & Fractals **147** (2021), 110944.

[102] N. Sukavanam and S. Kumar, *Approximate controllability of fractional order semilinear delay systems*, J. Opt. Theory Appl. **151** (2011), no. 2, 373.

[103] B. Sundaravadivoo, *Controllability analysis of nonlinear fractional order differential systems with state delay and non-instantaneous impulsive effects*, Disc. Cont. Dyn. Sys.-S **13** (2020), no. 9, 2561.

[104] G. S. Teodoro, J. A. T. Machado, and E. Capelas de Oliveira, *A review of definitions of fractional derivatives and other operators*, J. Comput. Phys. **388** (2019), 195–208.

[105] S. Thabet and M. B. Dhakne, *On abstract fractional integro-differential equations via measure of noncompactness*, Adv. Fixed Point Theory **6** (2016), no. 2, 175–193.

[106] J. M. A. Toledano, T. D. Benavides, and G. L. Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, vol. 99, Birkhauser, Basel, 1997.

[107] N. Tuan, E. Nane, D. O'Regan, and N. Phuong, *Approximation of mild solutions of a semilinear fractional differential equation with random noise*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 8, 3339–3357.

[108] N. H. Tuan, A. Debbouche, and T. B. Ngoc, *Existence and regularity of final value problems for time fractional wave equations*, Comput. Math. Appl. **78** (2019), no. 5, 1396–1414.

[109] V. Vijayakumar, *Approximate controllability results for abstract neutral integro-differential inclusions with infinite delay in Hilbert spaces*, IMA J. Math. Control Infor. **35** (2018), no. 1, 297–314.

[110] J. Wang, M. Fečkan, and Y. Zhou, *Approximate controllability of Sobolev type fractional evolution systems with nonlocal conditions*, Evolution Equations & Control Theory **6** (2017), no. 3, 471.

[111] J. Wang, A. G. Ibrahim, M. Fečkan, and Y. Zhou, *Controllability of fractional non-instantaneous impulsive differential inclusions without compactness*, IMA J. Math. Control Infor. **36** (2019), no. 2, 443–460.

[112] X. Wang, J. Wang, and M. Fečkan, *Controllability of conformable differential systems*, Nonlinear Anal: Modell. Control **25** (2020), no. 4, 658–674.

[113] Xiao-Jun Yang, F. Gao, J. A. T. Machado, and D. Baleanu, *Exact travelling wave solutions for local fractional partial differential equations in mathematical physics*, Math. Meth. Engineering, vol. 24, Springer, Cham, 2019, pp. 175–191.

[114] Xian-F. Zhou, J. Wei, and L.-Gen Hu, *Controllability of a fractional linear time-invariant neutral dynamical system*, Appl. Math. Lett. **26** (2013), no. 4, 418–424.

[115] Y. Zhou, V. Vijayakumar, and R. Murugesu, *Controllability for fractional evolution inclusions without compactness*, Evolution Equations & Control Theory **4** (2015), no. 4, 507.

[116] Y. Zhou, J. Wang, and L. Zhang, *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, World Scientic, Hackensack, NJ, 2016.

[117] E. Zuazua, *Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems*, Handbook of differential equations: evolutionary equations, vol. 3, Elsevier, 2007, pp. 527–621.