UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

CLÁUDIA MENEGHIN DE OLIVEIRA

Propostas de uso do Teorema de Euler para Poliedros em sala de aula

Campinas

2021

Cláudia Meneghin de Oliveira

Propostas de uso do Teorema de Euler para Poliedros em sala de aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Ricardo Miranda Martins

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Cláudia Meneghin de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4p Oliveira, Cláudia Meneghin de, 1982-
Propostas de uso do teorema de Euler para poliedros em sala de aula / Cláudia Meneghin de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Platão. 2. Teorema de Euler. 3. Poliedros. 4. Teoria dos grafos. 5. GeoGebra (Programa de computador). I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Proposed use of Euler's theorem for polyhedra in the classroom
Palavras-chave em inglês:
Plato
Euler theorem
Polyhedra
Graph theory
GeoGebra (Computer program)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Ricardo Miranda Martins [Orientador]
Lino Anderson da Silva Grama
Grasiele Cristiane Jorge
Data de defesa: 03-05-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-9374-3393
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4821890202183518

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 03 de maio de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Prof(a). Dr(a). GRASIELE CRISTIANE JORGE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço a minha família que teve paciência com a minha ausência durante dois anos de estudos intensos, que me deu apoio para começar e incentivo para não desistir.

Agradeço aos meus colegas de curso que esclareceram as minhas dúvidas com muita paciência.

Aos professores que dedicam seu tempo ao curso por amor ao que fazem, e que fazem com maestria.

Agradeço a Deus por ter me dado essa oportunidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a fórmula de Euler e suas aplicações aos poliedros de Platão.

A versão da fórmula de Euler para grafos é demonstrada, e também apresentada uma demonstração do teorema para poliedros usando ângulos esféricos. É demonstrada também a existência de apenas cinco poliedros com as características de Platão, usando teoria dos grafos.

Em sequência são apresentadas sequências didáticas abordando os sólidos e suas características. Também é mostrado como fazer a construção dos poliedros de Platão com o auxílio do software Geogebra e as relações de Euler aplicadas a estes.

Palavras-chave: Euler; Platão; Grafos; GeoGebra.

Abstract

The main aim of this work is to introduce Euler's formula and its applications to Plato's polyhedra.

We present the proof of the Euler's formula for graphs and we also give the proof of the Euler's formula for polyedra using spherical angles. We prove the existence of only five polyhedra with Plato's characteristics, using graph theory.

In sequence, is presented didactic sequences addressing solids and their characteristics. We also show how to make the constructions of Plato's polyhedra with the aid of the Geogebra software and the Euler relations applied to them.

Keywords: Euler; Plato; Graphs; GeoGebra.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Um dos grandes desafios do ensino da Matemática nos tempos atuais é mobilizar os estudantes em relação ao desenvolvimento de habilidades geométricas. Diante deste contexto, o presente trabalho constitui-se em uma proposta de trabalho com uma temática pertinente ao cotidiano dos estudantes, o Teorema de Euler para poliedros.

No primeiro capítulo é feita uma contextualização histórica, com uma breve apresentação das biografias de Platão e Leonhard Euler, diante das suas incontestáveis contribuições à Matemática como um todo, mas mais especificamente aos estudos dos poliedros.

Em seguida, no Capítulo 2, é feita a apresentação dos grafos, explorando as especificidades dos grafos nulos e completos, isomorfos e planares. Ainda no mesmo capítulo é discutida a relação entre grafos e número de arestas, assim como as condições necessárias para que um grafo seja considerado planar. Dadas as premissas estabelecidas, é evidenciado o teorema proposto por Euler e são analisados um clássico problema de aplicação da teoria dos grafos, "As pontes de Königsberg", e outras aplicações práticas.

No Capítulo 3, o olhar é mais voltado à reflexão acerca dos poliedros em diálogo com o Teorema de Euler, numa visão topológica da Matemática. Para tal é sintetizada a perspectiva topológica e apresentada a Característica de Euler-Poincaré. Os poliedros de Platão são analisados seguindo a linha de raciocínio da teoria dos grafos.

Dada a apresentação das bases teóricas, no Capítulo 4 o foco é a demonstração do Teorema de Euler. Foram feitas as provas: por indução em faces, apresentada por ORE e WILSON (1990) para demonstração da relação geral e por "ângulos esféricos", proposto por AZAMBUJA apud LIMA (1982).

O quinto capítulo reflete o produto elaborado durante o processo de desenvolvimento desta dissertação, uma sequência didática, composta por dois planos de aula que visam estabelecer uma relação entre o ensino de poliedros e a utilização de Tecnologias na Educação. Para tanto é feita uma contextualização legal, apresentando-se a documentação que embasa o planejamento, com destaque para a Base Nacional Comum Curricular e o Currículo Estadual Paulista. Foi proposto o uso do software GeoGebra, dada sua gratuidade e relativa facilidade de manuseio.

Considerando o papel formativo dos mestrados profissionais, os planos são sucedidos de um direcionamento de etapas que podem ser seguidas pelos docentes de Matemática e outras disciplinas que tenham interesse nesta forma de construção no Capítulo 6.

Encontram-se no último capítulo, uma série de materiais adicionais em anexo, para que seja possível o aprofundamento e a prática acerca do que aqui é proposto. Logo em seguida, as referências que sustentaram o trabalho são evidenciadas.

Espera-se que a presente dissertação contribua com o processo de formação continuada de outros docentes da área, assim como promoveu mudanças internas na sua autora.

1 Um pouco da história

Neste capítulo será feita uma abordagem histórica sobre o autor da famosa Fórmula de Euler e de tantas outras e, devido a sua aplicação aos poliedros de Platão, este também será brevemente apresentado.

Ao focar os estudos num determinado tema, deixa-se de perceber, por vezes, o quão importante é e quanta contribuição foi dada por um determinado personagem à matemática ao longo dos tempos. Para que se possa entender de quem estamos falando e de suas contribuições, eles serão apresentados a seguir.

1.1 Platão

Platão, cujo nome verdadeiro era Arístocles, recebeu o apelido "Platão" em alusão a sua forma física, seu porte atlético e seus "ombros largos". Platão em grego significa amplo. Uma perfeita combinação de corpo e intelecto. Há divergência de opiniões quando o assunto é sua data de nascimento, mas sugere-se algo em torno de 428 - 427 a.C. e teria falecido aos 80 anos. Viveu em Atenas, Grécia. Foi filósofo e matemático num período em que a filosofia se encontrava no auge na Grécia Antiga. Talvez isso tenha contribuído para o fato de ser considerado o maior filósofo da Antiguidade (PEREIRA, 2020).

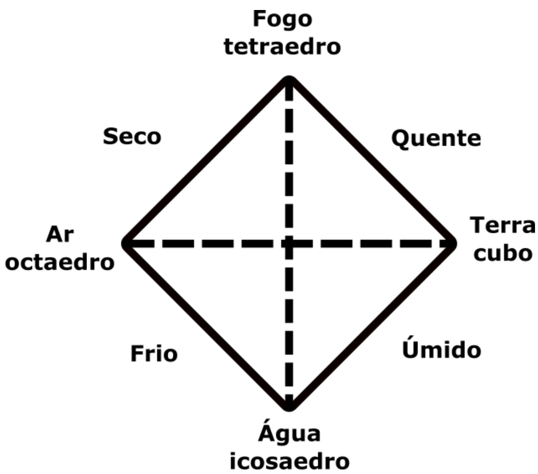
Apesar de Platão não ter dado contribuições matemáticas técnicas dignas de nota, ele era o centro da atividade matemática da época e inspirava seu desenvolvimento. Nas portas de sua academia estava escrito: "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Seu entusiasmo pelo assunto não o fez conhecido como matemático, mas como "criador de matemáticos". Platão teria se convertido à matemática em 388 a.C. em uma visita ao amigo Arquitas na Sicília. Os grandes matemáticos do seu tempo ou foram seus alunos, ou seus amigos. Para Platão, a aritmética é muito mais que uma ciência auxiliar: o seu valor reside em suas aplicações práticas, sem ela o homem não seria homem. Platão determina o valor cultural da matemática como algo que purifica e estimula a alma, um saber que faz voar o pensamento para os objetos mais sublimes, que arrasta a alma para o ser.

Talvez tenha sido durante a visita ao amigo Arquitas que Platão soube dos cinco sólidos regulares. O título de poliedros de Platão, referente a esses poliedros, foi dado a eles pela maneira como Platão os descreveu. Platão identificou os cinco poliedros que continham todas as faces iguais. Em um diálogo intitulado "Timeu", da obra de Platão Timeu-Crítias (LOPES et al., 2011), ele associou triângulos a elementos básicos que ele acreditava formar o mundo físico, e os sólidos formados por esses triângulos a elementos da natureza. A obra Timeu é constituída de duas partes: uma onde Timeu (personagem provavelmente fictício) e Sócrates relembram uma discussão do dia anterior e outra, onde Timeu expõe sua versão sobre a origem do universo e do homem.

Timeu descreveu a associação dos sólidos à elementos da natureza. É interessante observarmos os detalhes das descrições e como são feitas as associações:

> "Atribuamos à terra a forma cúbica, pois a terra, dos quatro elementos, é o que tem mais dificuldade em mover-se e, dos corpos, o mais adequado para ser moldado – inevitavelmente e com certeza que foi gerado deste modo para que tivesse as bases mais estáveis... manteremos a salvo o discurso verosímil se atribuirmos esta forma à terra, e, das que restam, a forma mais difícil de movimentar à água, a que se movimenta melhor ao fogo e a intermédia ao ar; o corpo mais pequeno ao fogo, o maior à água, e o médio ao ar; o que é mais agudo ao fogo, o segundo mais agudo ao ar e o terceiro à água." (LOPES et al., 2011).

Figura 1 – Elementos



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software inkscape

Curiosamente, na antiguidade e idade média, os sólidos de Platão foram considerados como símbolos da harmonia do universo.

1.2 Euler

Leonhard Euler nasceu em 15 abril de 1707 em Basel, na Suíça, e faleceu em 09 setembro de 1783 em São Petesburg, na Russia. Considerado o matemático mais fecundo da história, publicou mais de 500 livros e artigos durante sua vida.

Filho de pastor calvinista, seu pai o mandou para a faculdade aos 13 anos para prepará-lo para o magistério, porém a geometria o conquistou e seu pai, Paul Euler, que também dedicava-se a matemática, deu consentimento para que ele mudasse de área. No ano de 1727 se uniu a Bernoulli na Academia de Ciências de São Petesburgo. Foi médico-tenente na marinha russa (1727-1730), professor de física e de matemática. Deixou a academia de Bernoulli em 1741 para se juntar a Academia de Ciências de Berlim, onde permaneceu por 25 anos e tornou-se diretor da seção de matemática em 1746. Em 1766 retornou a São Petersburgo.

Aos 31 anos perdeu a visão de um olho e em 1771, após uma cirurgia de catarata, tornou-se totalmente cego o que não impediu que continuasse suas pesquisas e obras, pois devido à sua excelente memória, ainda era capaz de ditar tratados de matemática, física e astronomia. Neste mesmo ano um incendio acometeu sua casa. Euler, junto com a seus manuscritos foram salvos por um criado. Faleceu aos 76 anos de idade, subitamente, no fim da tarde de um dia produtivo de trabalho, enquanto brincava com um de seus netos (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

Pelas palavras do acadêmico francês François Arago (KEUNG, 2007): "Euler podia calcular sem qualquer esforço aparente, como os homens respiram, como as águias se sustentam no ar".

Atuou em matemática, teorias físicas e engenharia mecânica. Integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática, aprimorou a noção de função e muitas notações matemáticas comuns hoje em dia, foi pioneiro no campo da topologia e fez da teoria dos números uma ciência. Estudou sobre a teoria dos corpos rígidos, trabalhou, assim como seu professor Bernoulli, com mecânica contínua e também com a teoria cinética de gases com o modelo molecular. Estudou teoria lunar e desenvolveu pesquisas sobre elasticidade, acústica, teoria de onda de luz e hidromecânica de navios entre muitos outros temas. Após sua morte, a Academia de São Petersburgo continuou a publicar suas obras durante cinquenta anos. Estima-se que uma lista do total de obras de Euler contabilize por volta de 800 ítens (aproximadamente 500 publicados em vida e os demais após a sua morte) (D'AMBROSIO, 2009).

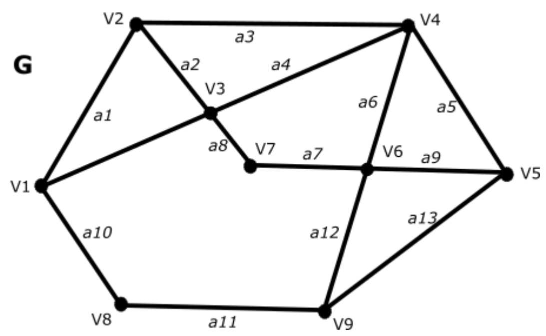
2 Grafos

Neste capítulo destaca-se a teoria dos grafos, ponto de partida para os estudos do Teorema de Euler e caminho para uma prova simples do teorema dele. Serão apresentadas definições, conceitos, a fórmula de Euler pela visão desta teoria, o problema motivador e uma aplicação prática para os grafos.

2.1 Conhecendo os grafos

Define-se grafo como um conjunto de vértices (V) e arestas (A) (ou arcos) que conectam alguns de seus vértices. Seja $G = (V, A)$ um grafo; denominamos, *ordem* de G (denotada por $|V|$) o número de vértices do grafo G, *dimensão* de G (denotada por $|A|$) o número de arestas de G e *valência* (ou grau) de um vértice (por exemplo o vértice x_i) o número de arestas incidentes em x_i e denota-se por $vG(x_i)$.

Figura 2 – Grafo



Fonte: Elaborado pela autora no software Inkscape

Em relação à sequência/ união de vértices e arestas de um grafo:

- um *passeio* é uma sequência da forma $x_1, x_1{-}x_2, x_2, ..., x_i, x_i{-}x_{i+1}, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_{k-1}{-}x_k, x_k$, onde x_i é um vértice e $x_i - x_{i+1}$ é a aresta que une o vértice x_i ao vértice x_{i+1}, (com eventual repetição de vértices e arestas); usa-se ainda a notação $x_1x_2...x_k$;

- um *caminho* é um passeio sem vértices repetidos;

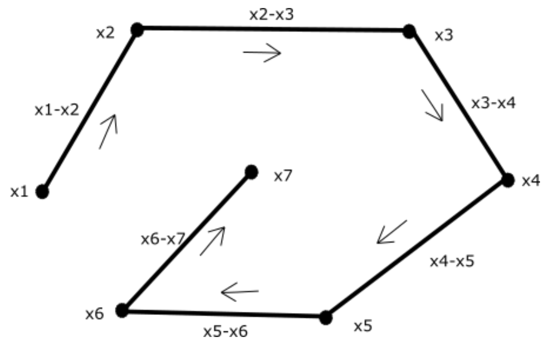
- um *trajeto* é um passeio sem arestas repetidas;

- um *ciclo* é um caminho fechado de comprimento não nulo, ou seja, com extremos coincidentes;

- um *circuito* é um trajeto fechado de comprimento não nulo.

Um grafo é chamado *conexo* se para cada par de vértices de um grafo existe pelo menos um passeio que os une.

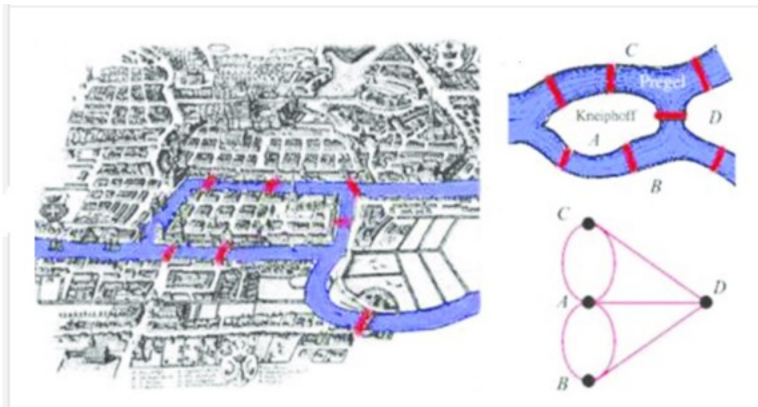
Figura 3 – Passeio



Fonte: Elaborado pela autora no software Inkscape

Para solucionar um dos mais conhecidos problemas que envolvem a teoria dos grafos: "*O problema das pontes de Königsberg*" [4], Leonard Euler, em 1736, introduziu o conceito que é desde então chamado Trajeto de Euler, que trata-se de um trajeto que contém todas as arestas e todos os vértices do grafo a que se refere e de Circuito de Euler todo o circuito que contenha todas as arestas e todos os vértices do grafo.

Figura 4 – Pontes de Königsberg

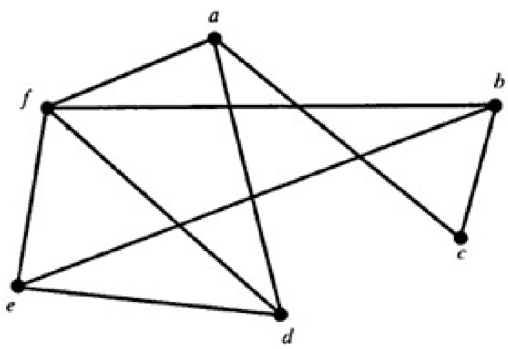


Fonte: Pinterest

2.1.1 Tipos de grafos

Por uma visão talvez mais popular mas nem por isso menos interessante, (ORE; WILSON, 1990) descreve um grafo como um diagrama geométrico, usado por exemplo para representar um campeonato de futebol, onde os times são representados por pontos (vértices) e os jogos entre dois times são representados como linhas retas (arestas) ligando os dois pontos que representam esses times como na figura 5, onde os times seriam a,b,c,d,e e f.

Figura 5 – Grafo - Campeonato

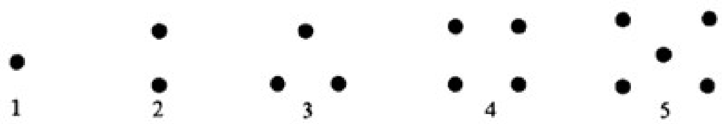


Fonte: Graphs and Their Uses (p.6)

2.1.1.1 Grafos nulos e grafos completos

Seguindo a linha de pensamento acima, imaginamos o campeonato antes do início, onde não houve jogos, então nosso diagrama seria representado por vários vértices isolados, sem arestas. Grafos como da figura 6 são chamados de grafos nulos.

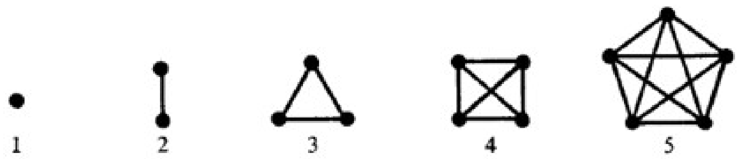
Figura 6 – Grafos nulos



Fonte: Graphs and Their Uses (p.7)

Pensando agora no final do campeonato, onde todos os times jogaram contra todos os outros times, o diagrama usado para tal representação teria arestas ligando todos os pares possíveis de vértices. Este tipo de grafo, como da figura 7 é chamado de grafo completo.

Figura 7 – Grafos completos

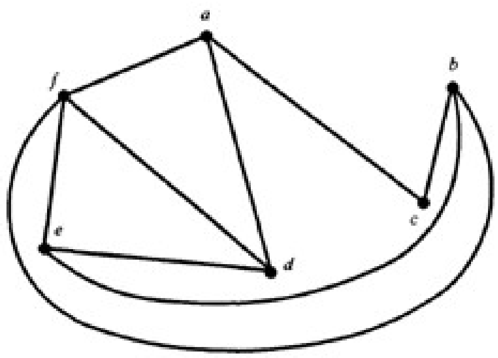


Fonte: Graphs and Their Uses (p.7)

2.1.1.2 Grafos isomorfos

Ao construir os grafos, temos um pouco de liberdade. As arestas não precisam necessariamente ser linhas retas, podemos construí-las curvas, de modo que não se cruzem em pontos que não sejam os vértices. Como na figura 8, representamos o mesmo grafo do campeonato de futebol, porém, sem as interseções.

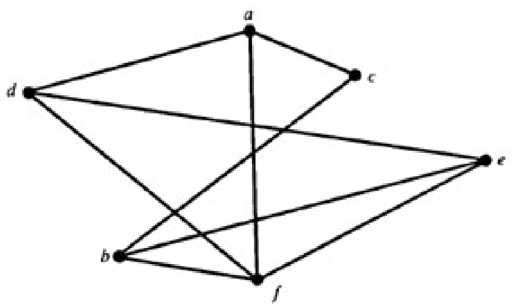
Figura 8 – Grafo sem interseções



Fonte: Graphs and Their Uses (p.9)

Podemos também posicionar os vértices em qualquer lugar no plano, como na figura 9.

Figura 9 – Grafo com interseções



Fonte: Graphs and Their Uses (p.10)

Se observarmos as figuras 5, 8 e 9 como representação dos jogos do campeonato, elas fornecem exatamente as mesmas informações a respeito de qual time jogou com qual e eles são, em algum sentido, o mesmo grafo. Isso nos leva a definição que se dois grafos representam a mesma situação são isomorfos, ou seja, dois grafos são isomorfos se existe uma bijeção f entre seus vértices de forma que existe uma aresta ligando os vértices a e b se, e somente se, existe uma aresta ligando os vértices $f(a)$ e $f(b)$. Mais direcionado à teoria dos grafos, se dois grafos são isomorfos então possuem o mesmo número de vértices e quaisquer dois vértices que são conectados por uma aresta em um dos grafos também serão no outro, apesar de serem "desenhados" de maneira diferente. O termo isomorfo é derivado do Grego iso, que significa "*o mesmo*" e morfo, que significa "*forma*".

2.1.1.3 Grafo planar

Um grafo que pode ser construído de modo que as arestas não possuam interseções ou pontos comuns além dos vértices é chamado de grafo planar. Portanto, o grafo representado na figura 5 pode ser considerado planar, pois é isomorfo ao grafo representado na figura 8 que é visivelmente um grafo planar. O grafo planar pode ser representado como um mapa rodoviário, mostrando as conexões entre várias estradas ou cidades.

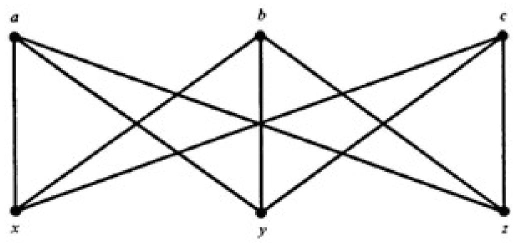
2.1.1.3.1 Problemas envolvendo grafos planares

Para a primeira ilustração será apresentado um problema antigo: os três poços.

Três casas foram construídas num pedaço de terra e três poços foram perfurados para a utilização dos moradores. A natureza da terra e o clima faziam com que, frequentemente, um ou outro poço secasse. Portanto é importante que os moradores das três casas tivessem acesso aos três poços. Depois de um tempo os moradores das casas a,b e c tiveram sérias desavenças entre eles e decidiram construir caminhos para os três poços $x,\ y\ e\ z$, de maneira que não se encontrassem indo e voltando dos poços.

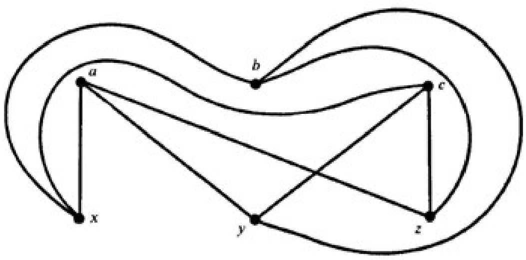
Na figura 10, é apresentado um modelo onde os moradores consigam acessar de maneira mais curta (em linha reta) os poços. Estes caminhos se intersectam em vários pontos das casas até os poços, mas essas interseções podem ser reduzidas para apenas uma, se construirmos os caminhos como na figura 11

Figura 10 – Problema dos três poços



Fonte: Graphs and Their Uses (p.15)

Figura 11 – Três poços com mínimo de interseções



Fonte: Graphs and Their Uses (p.15)

A questão que deve ser respondida é a seguinte: É possível traçar os caminhos de maneira a formar um grafo planar, ou seja, de modo que nenhuma aresta se intersecte em nenhum outro ponto que não os vértices?

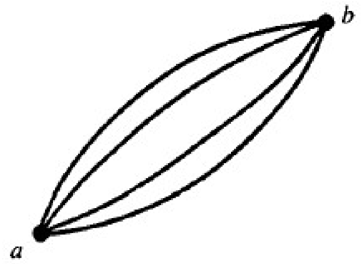
Ao tentar construir os caminhos de tal maneira não são encontradas soluções, porém, essa inabilidade em resolver o problema pelo método de tentativa e erro não constitui prova matemática de que esse caminho não exista.

Mais adiante em 2.1.1.5 serão apresentadas as condições para que um grafo seja planar, respondendo a pergunta do problema.

2.1.1.4 Número de arestas de um grafo

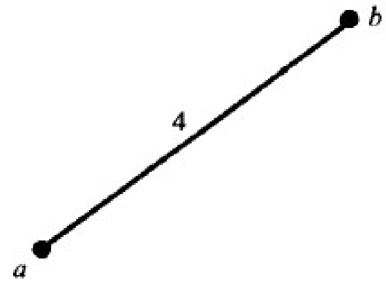
Quando dois vértices são unidos por mais que uma aresta, pode-se dizer que o grafo possui múltiplas arestas, ver figura 12. Ao invés de desenhar várias arestas, pode-se desenhar apenas uma e representar por um número a quantidade de arestas que une os dois vértices, ver figura 13.

Figura 12 – Múltiplas arestas



Fonte: Graphs and Their Uses (p.18)

Figura 13 – Múltiplas arestas com representação numérica



Fonte: Graphs and Their Uses (p.18)

O número de arestas incidente num vértice a é chamado de grau (ou valência) de a.

Para encontrar o número de arestas de um grafo pode-se contá-las, mas é mais fácil contar o número de arestas de cada vértice e depois somá-las, porém, cada aresta será contada duas vezes, considerando que cada aresta tem dois vértices como extremidade, logo ela será contada em ambos os vértices.

Por exemplo a figura 9 possui grau(a) (grau do vértice a) igual a 3, grau(b) igual a 3, grau(c) igual a 2, grau(d) igual a 3, grau(e) igual a 3 e grau(f) igual a 4, então o total de arestas A é obtido por

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left(\text{grau}(a) + \text{grau}(b) + \text{grau}(c) + \text{grau}(d) + \text{grau}(e) + \text{grau}(f)\right) \\
&= \frac{1}{2}(3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 18 = 9,
\end{aligned}
$$

como podemos verificar contando-as diretamente.

Por este resultado podemos observar que a soma dos graus de um grafo é sempre um número par, isto é, o dobro do número de arestas. Este resultado é atribuído ao matemático suíço Leonhard Euler.

Nos grafos, os vértices são classificados como vértices pares, cujos graus são números pares e vértices ímpares, cujos graus são números ímpares. No exemplo citado acima $(3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 4) = 18$, a soma é par, pois possui 4 termos ímpares.

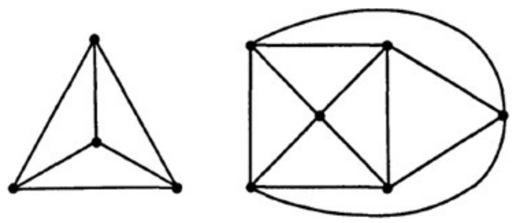
Para decidir no geral se a soma de números inteiros é par ou ímpar, podemos descartar os termos pares. A soma será par se possuir um número par de inteiros ímpares ou será ímpar se possuir um número ímpar de inteiros ímpares.

Essa informação pode ser aplicada ao *lema do aperto de mão*: "Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par"

Ao juntar essa informação ao fato de que a soma dos graus de um grafo é sempre par, concluí-se que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar (considera-se aqui o caso com nenhum vértice ímpar, pois zero é par).

Existem grafos especiais, cujos graus de seus vértices são todos os mesmos. Estes grafos são chamados de *regulares* de grau (g), onde g é o grau de seus vértices. De acordo com o lema do aperto de mão, $A = \frac{1}{2}vg$, onde v é o número de vértices, g o grau dos vértices e A o número de arestas. A figura 14 apresenta exemplos de grafos regulares de grau 3 e 4, respectivamente.

Figura 14 – Grafos Regulares



Fonte: Graphs and Their Uses (p.20)

Em um grafo completo K_n com n vértices, existem $n - 1$ arestas que unem cada vértice aos outros, então K_n é regular de grau $n-1$. O grafo nulo N_n é também regular, considerando que o grau de todo vértice é zero.

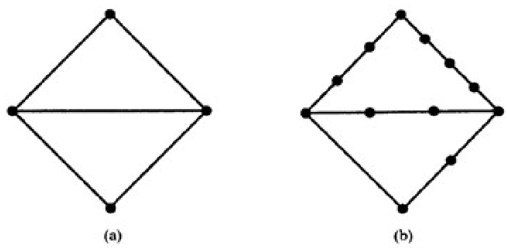
2.1.1.5 Condições para um grafo planar

Como já visto anteriormente, um grafo é chamado planar se suas arestas não se intersectam em pontos que não sejam os vértices ou se ele é isomorfo a um grafo cujas arestas não se intersectam.

Para estabelecer um critério sobre grafos planares, é possível analisar o teorema do matemático polonês Kuratowski (1930). Primeiro é necessário explicar o que se quer dizer com *expandir* e *contrair* um grafo.

Supondo que sejam adicionados vértices em algumas arestas, então estas arestas se tornam caminhos com várias arestas. Este processo é chamado de expandir o grafo.

Figura 15 – Grafo expandido

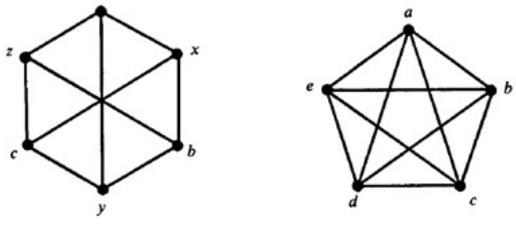


Fonte: Graphs and Their Uses (p.111)

Inversamente, supõe-se um grafo, como o (b) da figura 15, que possui caminhos divididos sem arestas unidas aos vértices intermediários, então é possível contrair este grafo para o grafo original (a), retirando os vértices internos ao caminho.

Agora podemos apresentar o Teorema de Kuratowski: *Um grafo é chamado planar, se e somente se, não contém nenhum grafo que pode ser contraído ao grafo hexagonal ou ao grafo pentagonal* da figura 16 (ORE; WILSON, 1990).

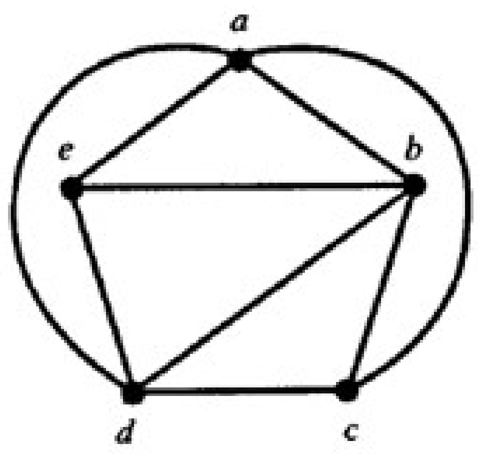
Figura 16 – Grafos não planares



Fonte: Graphs and Their Uses (p.110)

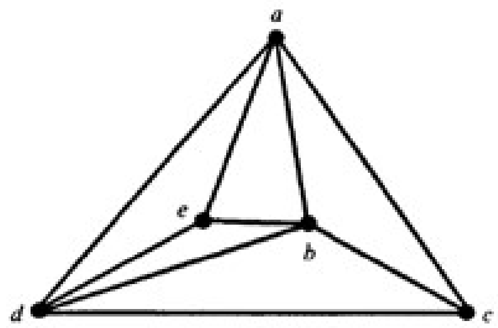
Para encontrar a representação planar de um grafo, pode-se desenhar engenhosamente, arestas como linhas curvas, desde que, nenhum par de vértices esteja conectado a mais de uma aresta. Como ilustração, são apresentados os grafos abaixo, onde a figura 17 possui arestas curvas e a figura 18 apenas retas.

Figura 17 – Grafo incluindo arestas curvas



Fonte: Graphs and Their Uses (p.110)

Figura 18 – Grafo com arestas retas

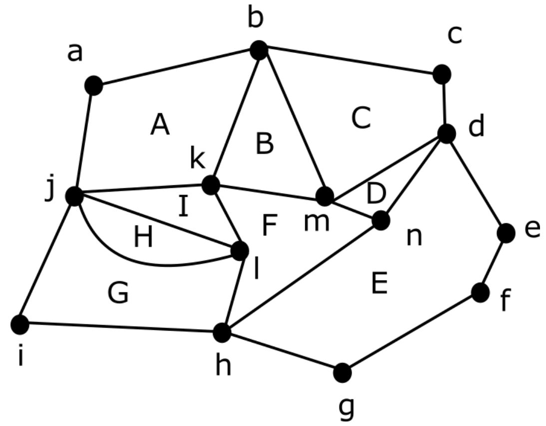


Fonte: Graphs and Their Uses (p.112)

2.2 Fórmula de Euler

Para iniciar os estudos dos grafos na fórmula de Euler, serão apresentados grafos planares que formam uma rede poligonal no plano. Considera-se que as arestas do grafo G (figura 19) formam vários polígonos no plano, dividindo o grafo em partes poligonais.

Figura 19 – Grafo poligonal



Fonte: Graphs and Their Uses (p.113)

Para evitar enganos, é necessário deixar claro que ao contrário do que é conhecido usualmente, ao falar de polígonos, não necessariamente afirma-se que as arestas são linhas retas. Elas podem ser linhas contínuas e curvas desde que não se intersectem (exceto nos vértices).

Um bom exemplo de um grafo poligonal é o mapa dos Estados Unidos da América (por possuir bastante linhas retas, de facil associação com as arestas), mostrando a divisão entre os estados, assim como vários mapas de divisas entre países também podem ser representados por um grafo poligonal, onde as divisas são as arestas e os estados ou países são os polígonos.

Voltando aos grafos poligonais, eles são conexos (se para cada par de vértices de um grafo existe pelo menos um passeio que os une) e mais ainda, é necessário que nenhum polígono seja completamente cercado por outro polígono (a menos que consideremos também o polígono formado pela face infinita). As arestas que cercam um polígono formam um ciclo, as vezes chamado de *ciclo mínimo*. A área cercada por esse ciclo é chamada de face do grafo. Existe também o *ciclo máximo* C_1, que envolve todo o grafo, com todas as suas faces.

Um dos princípios da matemática consiste em estabelecer algumas convenções para tornar algumas fórmulas tão simples quanto possível. No caso, será vantajoso considerar a parte do plano que se apresenta fora do ciclo C_1 como uma face do grafo, onde as arestas de C_1 são suas bordas. Esta é chamada de face infinita. Isso fica mais claro ao projetar-se o grafo G sobre a superfície de uma esfera, conforme citado anteriormente, pois realmente não há distinção entre a face infinita e as outras.

Apenas a critério de apresentação, no exemplo da figura 19 tem-se um grafo com 10 faces nomeadas de A a J. A face A é cercada pelo ciclo composto pelas arestas ab, bk, kj, ja, enquanto a face H é cercada apenas por duas arestas que ligam os vértices j e l. O ciclo máximo C_1 tem arestas que percorrem as letras de a a j, em ordem, e retornam a a. A face infinita J é o conjunto de todos os pontos fora de C_1.

Para poliedros, no espaço, existe uma relação interessante, observada primeiramente por Euler, que é comumente conhecida por *fórmula de Euler para poliedros*. Ela é válida também para grafos poligonais.

Num grafo como G denomina-se v, f e a, o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, de G.

A fórmula de Euler estabelece que

$$v - a + f = 2.$$

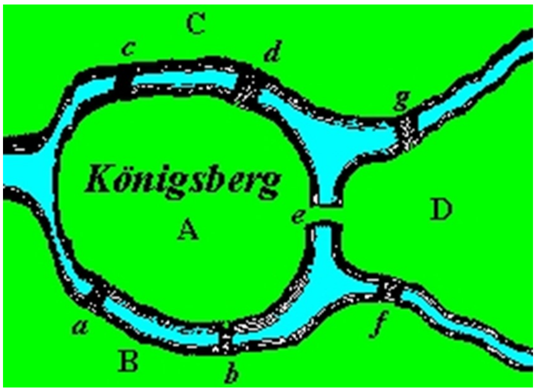
A demonstração desta fórmula será apresentada no capítulo 4

2.3 Um famoso problema envolvendo grafos: As pontes de Königsberg

No século XVIII, havia na cidade de Königsberg na Alemanha um conjunto de sete pontes (identificadas no desenho por letras de a a g) que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas entre si (A e D) e as ilhas com as margens (C e B).

Dizia-se que os habitantes da cidade, em seus dias de descanso, tentavam realizar um percurso que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como suas tentativas foram sempre falhas, muitos acreditavam que não era possível encontrar tal percurso.

Figura 20 – Mapa da cidade de Königsberg



Fonte: Setor de Informática e Estatística da Universidade Federal de Santa Catarina

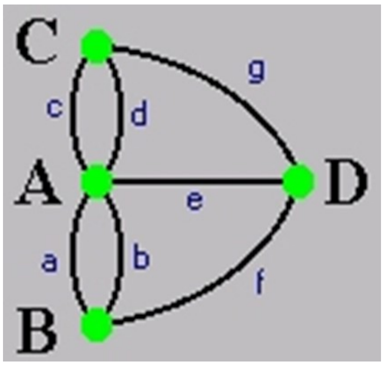
Nota-se que este problema foi o que motivou o trabalho de Euler que, ao estabelecer o corolário apresentado anteriormente e o teorema descrito abaixo, o resolveu de maneira eficiente.

Teorema (Euler, 1735): *Um grafo conexo, não nulo, admite um circuito de Euler, se e somente se, todos os seus vértices têm valência par* (ARAÚJO, 2012).

Corolário: *Um grafo conexo, não nulo, admite um trajeto de Euler se e somente se não possuir mais de dois vértices com valência ímpar* (ARAÚJO, 2012).

Retomando-se as definições de trajeto e circuito de Euler: trajeto é um passeio sem arestas repetidas e circuito é um trajeto fechado. Ambos, de Euler, possuem todas as arestas e vértices do grafo, logo um circuito de Euler é um passeio sem arestas repetidas e fechado (termina onde começou), passando por todos os vértices e arestas do grafo.

Figura 21 – Grafo representando o mapa de Königsberg



Fonte: Setor de Informática e Estatística da Universidade Federal de Santa Catarina

Traduzindo o problema de ser possível passar por todas as pontes sem repetí-las em "*O grafo que representa as pontes de Königsberg admite um circuito de Euler?*", é apresentada a solução: pela análise do grafo G (figura 21), observa-se que para todo $v \in V$, o grau (ou valência) de v é ímpar. Logo o grafo G não admite um circuito de Euler. Isso significa que o problema não possui solução.

Note que não é necessário que todos os vértices tenham valência ímpar, basta que exista pelo menos um vértice de valência ímpar para que o grafo não admita um circuito de Euler, e portanto, não tenha solução.

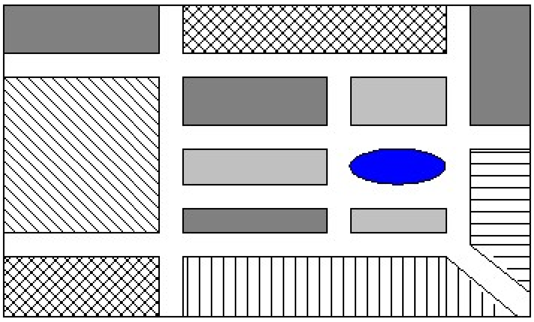
O Teorema de Euler permite ainda concluir que para cada número natural n, o grafo completo de n vértices tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas e, como tal, cada um dos n vértices tem valência $n-1$. Assim, os circuitos de Euler são possíveis para $n = 3, 5, 7, \ldots$. Este resultado foi estabelecido por Luis Poinsot em 1809.

2.4 Aplicação prática para os grafos

Um dos principais objetivos da ciência aplicada é buscar a melhor maneira de resolver um problema, ou em alguns casos a maneira mais rápida de se realizar um trabalho, ou mesmo a maximização de lucros ou minimização de custos.

Tem-se como exemplo o controle de estacionamento em uma cidade. Muitas cidades possuem parquímetros que necessitam ser controlados regularmente pela vigilância para que sejam evitadas fugas de pagamento. Tomando-se uma cidade imaginária, a teoria dos grafos pode ajudar o controle de estacionamento ser mais eficiente.

Figura 22 – Mapa da cidade

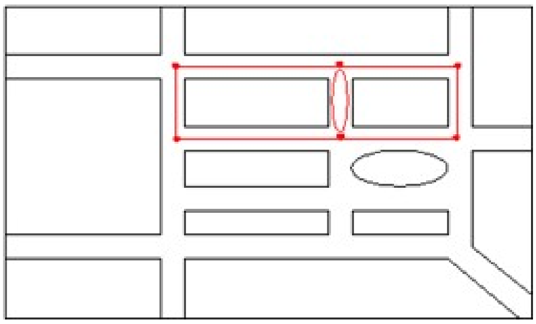


Fonte: Aderito Araujo, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Existem muitas possibilidades para o vigilante, a pé, controlar os parquímetros. Espera-se encontrar o caminho mais eficiente para tal controle com dois objetivos em mente: percorrer todas as ruas que possuem os parquímetros evitando passar duas vezes pela mesma rua, e, o caminho deve começar e acabar no mesmo ponto, onde, por exemplo, o vigilante deixou seu carro.

Passa-se então o mapa do percurso do vigilante para o modelo de um grafo, onde podemos desprezar o comprimento das ruas.

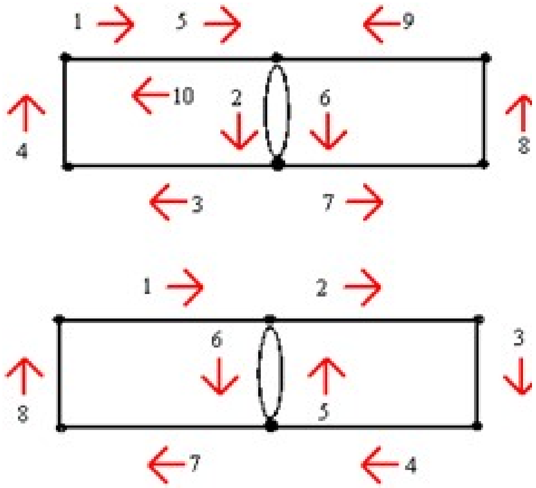
Figura 23 – Mapa do percurso



Fonte: Aderito Araujo, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

A figura abaixo apresenta dois percursos possíveis para o vigilante efetuar o controle.

Figura 24 – Percursos possíveis



Fonte: Aderito Araujo, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Nos dois percursos, o ponto de chegada corresponde ao ponto de partida, satisfazendo uma das condições, porém o segundo percurso sugerido é melhor, pois cada rua é percorrida apenas uma vez.

De acordo com a teoria dos grafos, o segundo percurso representa um circuito de Euler, logo, permitindo um caminho que possa ser percorrido sem repetição, otimizando nosso problema de controle de estacionamento. Este problema se assemelha ao problema do carteiro chinês, estudado em teoria dos grafos para otimização de percursos e também na área de ciências da computação.

3 Poliedros - abordagem matemática

Para dar início à discussão do tema serão apresentadas algumas definições em geometria: polígono, poliedro e seus componentes: vértices, faces e arestas.

Iniciando-se com a definição de polígono apresentada por (WAGNER, 2015): *"Dados os pontos $A_1, A_2, ..., A_n, A_1$, sendo três consecutivos não colineares, a união dos segmentos: $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ é um polígono de gênero n"*. De maneira, talvez mais simples, (BICUDO et al., 2009), definiu polígono como *"uma figura limitada por linhas retas, em número maior que quatro"*. E define figura como *"qualquer região de um plano cercada por uma ou mais bordas"*.

Para poliedros, é apresentada a definição de (LIMA et al., 2016):

"Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro."

Denomina-se *vértice* de um poliedro o ponto de interseção entre os segmentos que originam um ângulo ou onde se fusiona no mínimo três planos e suas faces são formadas por planos.

Em um poliedro, duas faces nunca estão no mesmo plano, mas estão no mesmo espaço. *Aresta* é a reta que se origina a partir de um vértice e o segmento de reta proveniente do encontro de duas faces. Uma aresta pertence apenas a duas faces distintas.

3.1 Poliedros e o Teorema de Euler

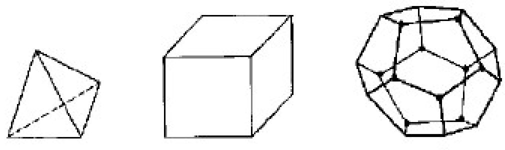
Para este estudo, será utilizada como referência a obra "*Meu Professor de Matemática*" (LIMA, 1991), onde o autor, de pseudônimo Zoroastro Azambuja Filho, apresenta pequenos ensaios sobre matemática elementar.

O Teorema de Euler, descoberto em 1758, diz que se um poliedro tem V vértices,

F faces e A arestas, então vale $V + F - A = 2$[1].

Quais as hipóteses sobre o poliedro? Inicialmente, acreditava-se que o teorema seria válido para todos os poliedros, num segundo momento afirmou-se que seriam apenas para poliedros convexos - como os da Figura 25 e posteriormente foi provado ser válido também para alguns outros poliedros.

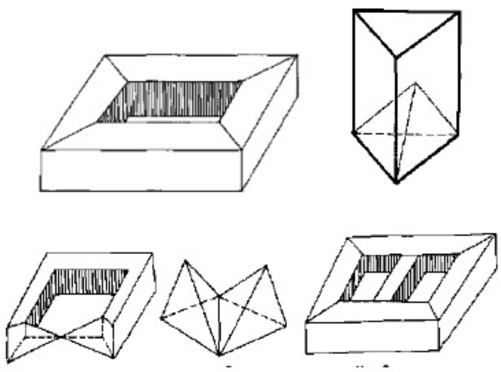
Figura 25 – Poliedros convexos



Fonte: Meu Professor de Matemática (p.69)

Euler nunca se deu ao trabalho de definir precisamente poliedro, o que leva a crer que ele não considerava como poliedros, sólidos como as imagens da figura 26, para os quais seu teorema é falso.

Figura 26 – Poliedros não convexos



Fonte: Meu Professor de Matemática (p.70,71,73)

Alguns autores limitam o teorema a poliedros convexos (situados do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces), porém ele também é válido para poliedros que não satisfazem essa característica, embora com variação da constante 2.

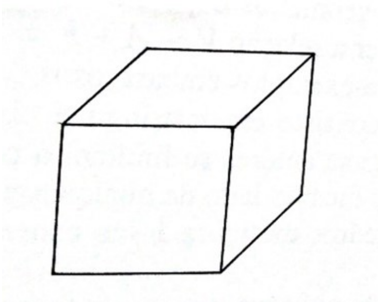
Deve-se então a Poincaré (1893) a solução deste problema que ao compreender que se tratava de um teorema de topologia e não de geometria, notou que o número $V + F - A$ é um "invariante topológico" do poliedro. Este invariante topológico é chamado de característica de Euler-Poincaré do poliedro. Não serão definidos estes conceitos e recomenda-se a referência (LIMA, 2012) para mais detalhes.

[1] Quando falamos de grafos, usamos f, a e v em minúsculas; para poliedros, vamos usar letras maiúsculas para denotar estes objetos

Será explicado de uma forma pouco precisa, mas bastante intuitiva, qual é esta classe maior de poliedros onde o Teorema de Euler ainda é verdadeiro.

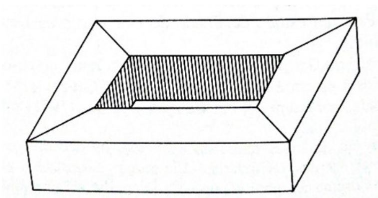
Imagine que cada poliedro é construído em borracha e os inflamos, injetando ar. O poliedro da figura 27 será transformado numa esfera, enquanto o da figura 28 se tornará um toro (câmara de ar). Assim, considera-se o poliedro da figura 27 "homeomorfo a uma esfera" e o poliedro da figura 28, "homeomorfo a um toro" (portanto, "não homeomorfo à esfera").

Figura 27 – Poliedro homeomorfo a uma esfera



Fonte: Meu Professor de Matemática (p.77)

Figura 28 – Poliedro não homeomorfo à esfera



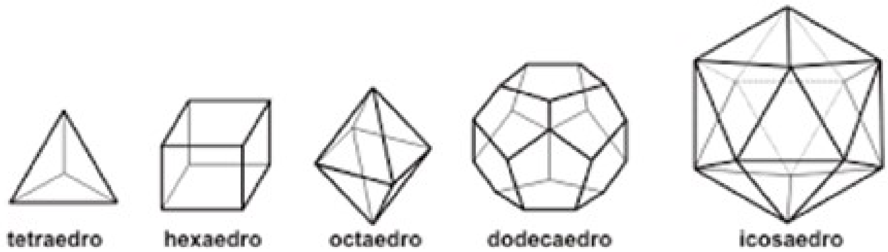
Fonte: Meu Professor de Matemática (p.77)

A relação de Euler $V + F - A = 2$ é válida para todos os poliedros homeomorfos a uma esfera.

3.2 Poliedros de Platão – Visão da teoria dos grafos

Quando são abordadas as relações de Euler, não podem ser deixados de lado alguns poliedros especiais, que são chamados poliedros de Platão por terem algumas características em comum e são eles:

Figura 29 – Poliedros de Platão



Fonte: Graphs and Their Uses (p.119)

As características que os classificam são as seguintes:

1) O número de arestas é igual em todas as faces.

2) Os ângulos poliédricos possuem o mesmo número de arestas, ou em outras palavras, o número de arestas incidentes em cada vértice é o mesmo.

3) Nos sólidos considerados poliedros de Platão vale a relação de Euler $V + F - A = 2$.

Na tabela abaixo, são apresentadas a quantidade de vértices e arestas de cada sólido e os cálculos para sua obtenção. O número de arestas, pelo produto do número de arestas em cada face pelo número de faces, e como cada aresta pertence a duas face, é dividido por 2, e o número de vértices, pelo mesmo produto anterior, porém, dividindo pelo número de vértices incidente em cada aresta.

Figura 30 – Tabela de cálculos de arestas e vértices

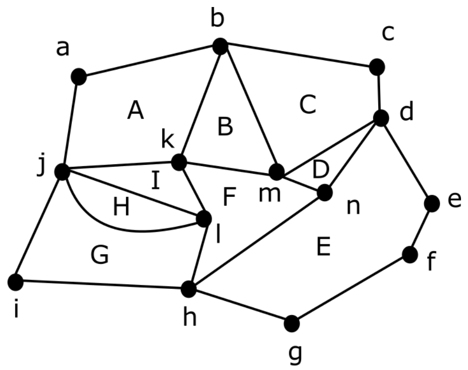
Sólido	Número de faces	Tipo de face	Arestas por face	Arestas	Vértices
Tetraedro	4	triângulo	3	$\frac{4.3}{2} = 6$	$\frac{4.3}{3} = 4$
Cubo	6	quadrado	4	$\frac{6.4}{2} = 12$	$\frac{6.4}{3} = 8$
Octaedro	8	triângulo	3	$\frac{8.3}{2} = 12$	$\frac{8.3}{4} = 6$
Dodecaedro	12	pentágono	5	$\frac{12.5}{2} = 30$	$\frac{12.5}{3} = 20$
Icosaedro	20	triângulo	3	$\frac{20.3}{2} = 30$	$\frac{20.3}{5} = 12$

Fonte: Elaborada pelo autor

Para mostrar a existência de somente cinco sólidos que satisfazem as características dos poliedros de Platão, será utilizada a teoria dos grafos, onde será destacado inicialmente o *grafo duplo*.

Uma maneira de contar arestas de um grafo é considerar a quantidade de arestas de cada face de um grafo poligonal. Tomando-se um grafo poligonal G, denota-se ϕ_k o número de faces em G cercadas por k arestas.

Figura 31 – Grafo poligonal G



Fonte: Graphs and Their Uses (p.113)

A figura acima apresenta $\phi_2 = 1,\ \phi_3 = 3,\ \phi_4 = 3,\ \phi_5 = 1,\ \phi_6 = 1,\ \phi_7 = \phi_8 = \phi_9 = 0\ e\ \phi_{10} = 1$. Em outras palavras, há uma face cercada por 2 arestas, 3 faces cercadas por 3 arestas, 3 faces cercadas por 4 arestas e assim por diante.

Então obtém-se a equação para faces (f):

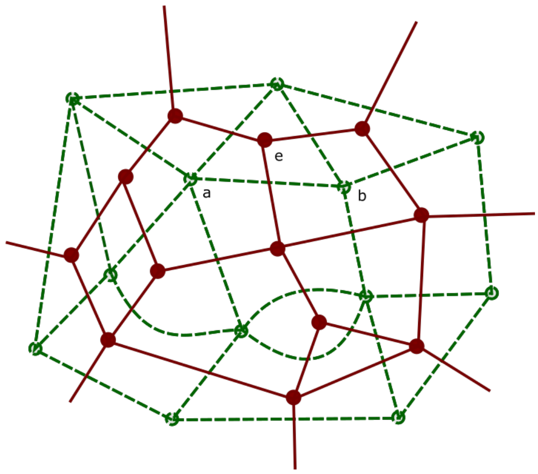
$$f = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \cdots + \phi_n$$

Lembrando que cada aresta pertence a duas faces obtém-se a fórmula para arestas (a):

$$2a = 2\phi_2 +\ 3\phi_3 +\ 4\phi_4 + \cdots +\ n\phi_n.$$

Para todo grafo poligonal G pode-se construir um novo grafo poligonal G^*, um grafo duplo, da seguinte maneira: em cada face, incluindo a face infinita, seleciona-se um único ponto. Dois pontos a e b serão unidos por uma aresta, se estes pertencerem a faces vizinhas e possuírem uma aresta em comum. Esta nova aresta cruzará esta aresta e mais nenhuma outra aresta no grafo. Este procedimento será repetido unindo todos os pontos, dois a dois, de maneira a cruzar apenas uma aresta cada. Na figura abaixo pode-se ver o grafo G, que possui linhas contínuas e o grafo duplo G^*, linhas tracejadas.

Figura 32 – Grafo G e grafo duplo G*



Fonte: Graphs and Their Uses (p.117)

Nota-se que, o número de vértices de G^* é igual ao número de faces de G, e a valência (grau) de cada vértice de G^* é igual ao número de arestas da face na qual o vértice foi construído. Os dois grafos possuem o mesmo número de arestas, o número de vértices em G^* é igual ao número de faces em G e o número de faces em G^* é igual ao número de vértices em G.

3.2.1 Os 5 Poliedros de Platão

Diz-se que um grafo é regular quando o número de arestas k incidentes em cada vértice v é o mesmo, ou seja, a valência (ou grau) de todo vértice é igual.

No caso de um grafo poligonal G, diz-se que ele é completamente regular se seu grafo duplo G^* também é regular. Isso significa que toda face em G é cercada pelo mesmo número de arestas, que chamaremos de k^*. Existem poucos grafos completamente regulares, como mostrado a seguir.

Ao utilizar a fórmula para contagem de arestas obtida anteriormente ($2a = 2\phi_2 + 3\phi_3 + 4\phi_4 + \cdots + n\phi_n$), no caso dos grafos completamente regulares, obtém-se:

$$2a = kv \ e \ 2a = k^* f$$

onde a = arestas de G, f = faces de G, k = número de arestas incidentes em cada vértice do grafo regular G e k^* = o número de arestas de cada face de G.

E então:

$$a = \frac{1}{2}kv \ e \ f = \frac{k}{k^*}v.$$

Substituindo na fórmula de Euler (vértices v, faces f e arestas a), tem-se que:

$$v + f - a = 2 \Rightarrow$$

$$v + \frac{k}{k^*}v - \frac{1}{2}kv = 2 \Rightarrow$$

$$v(1 + \frac{k}{k^*} - \frac{1}{2}k) = 2.$$

Multiplicando-se por $2k^*$ obtém-se:

$$v(2k^* + 2k^*\frac{k}{k^*} - 2k^*\frac{1}{2}k) = 4k^* \Rightarrow$$

$$v(2k^* + 2k - kk^*) = 4k^*.$$

Como $k \ e \ k^*$ são inteiros positivos, pode-se afirmar que a expressão entre parênteses deve resultar em um inteiro positivo

$$2k^* + 2k - kk^* > 0$$

Essa condição permite afirmar

$$kk^* - 2k - 2k^* < 0 \Rightarrow$$

$$kk^* - 2k - 2k^* + 4 < 4 \Rightarrow$$

$$(k - 2)(k^* - 2) < 4.$$

Esta equação será resolvida em dois passos.

Primeiramente deve ser considerado que $(k-2)$ e (k^*-2) são, ambos, positivos e então os únicos inteiros positivos cujo produto é menor que 4 são: 1 e 1, 1 e 2 e 1 e 3.

Então tem-se que $k-2 \leqslant 3$. Para $k-2=1 \Rightarrow k=3$, para $k-2=2 \Rightarrow k=4$ e para $k-2=3 \Rightarrow k=5$. De maneira análoga obtém-se os mesmos valores para $k*$. Neste caso, podem ser atribuídos somente 5 combinações para k e $k*$.

Figura 33 – Tabela de combinações de k e $k*$ - arestas incidentes em cada vértice

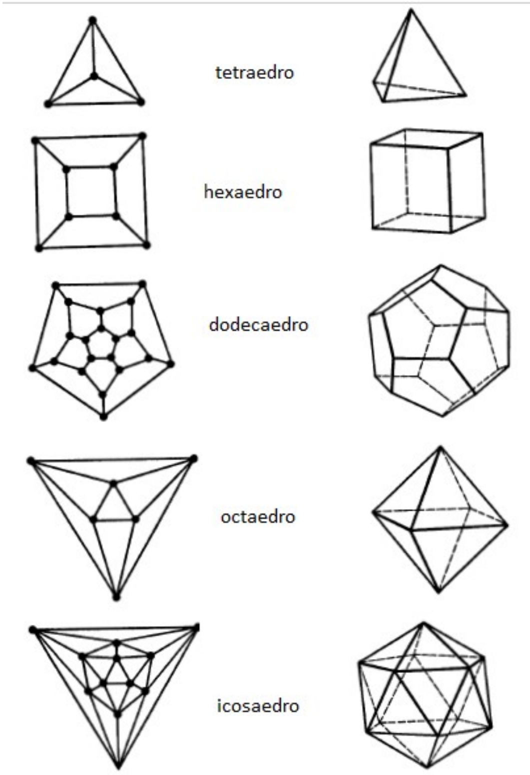
k	k*	v (vértices)	a (arestas)	f (faces)	tipo
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Hexaedro
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Fonte: Elaborado pelo autor

Conhecendo k e $k*$, para montar a tabela acima são utilizados os cálculos anteriores. Para obter $v : v + \dfrac{k}{k*}v - \dfrac{1}{2}kv = 2$, em seguida obter $a : a = \dfrac{1}{2}kv$ e f com a relação de Euler ou: $f = \dfrac{k}{k*}v$.

São apresentados na figura 34 os poliedros construídos (à direita) e sua representação em um grafo completamente regular (à esquerda), pois em cada vértice incide o mesmo número de arestas, para cada uma das figuras da tabela acima.

Figura 34 – Poliedros de Platão e seus grafos



Fonte: Graphs and Their Uses (p.119)

Retomando o conceito de grafo duplo de um grafo completamente regular, observa-se pela tabela que, que o grafo do octaedro, é duplo ao grafo do hexaedro, o icosaedro é duplo ao dodecaedro e o tetraedro é duplo de si próprio.

Relembrando que: $v^*,\ f^*\ e\ a^*$ são o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, do grafo duplo e v, f e a o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, do grafo inicial e ainda as relações entre o grafo duplo e o original, em que $v^* = f,\ f^* = v\ e\ a^* = a$.

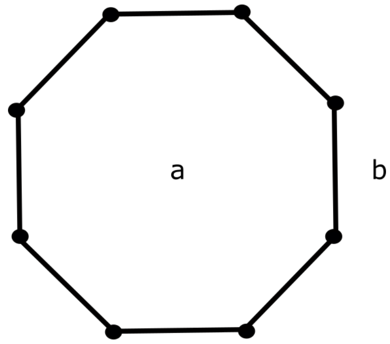
Para os cálculos acima, serão considerados valores de k e k^* maiores que 2, mas esta inequação também apresenta solução quando tomamos valores iguais a 1 e 2.

Se $k = 2$, é obtido um grafo conexo com duas arestas incidentes em cada vértice, resumindo, um ciclo.

Se $k^* = 2$, obtém-se $v(2k + 4 - 2k) = 8 \Rightarrow 4v = 8 \Rightarrow v = 2$ e o grafo consiste então em dois vértices conectados por um número de arestas.

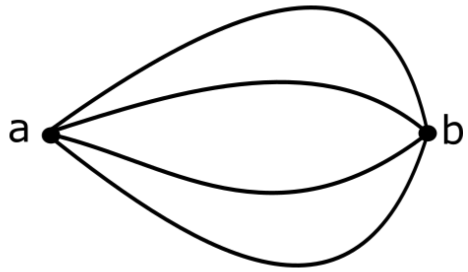
Observa-se que o grafo duplo de um ciclo com 2 faces, n vértices e n arestas possui 2 vértices, n faces e n arestas. Em outras palavras, o duplo de um ciclo como o da figura 35 é uma figura como a figura 36.

Figura 35 – Ciclo



Fonte: Graphs and Their Uses (p.120)

Figura 36 – Duplo de um ciclo



Fonte: Graphs and Their Uses (p.120)

Se $k = 1$, as inequações abaixo são satisfeitas para qualquer valor positivo de k^*. Porém um grafo conexo de somente uma aresta incidente em cada vértice consiste em uma única aresta, isto é, deve ter $v = 2$, $a = f = 1$, $k = 1$, $k^* = 2$.

E finalmente quando $k^* = 1$, o grafo é um único círculo com dois conjuntos de valores $v = 1$, $f = 2$, $k = 2$, $k^* = 1$.

Conclui-se então, com o estudo dos grafos completamente regulares, que não pode haver sólidos platônicos além dos cinco descritos acima.

4 Provas para o Teorema de Euler

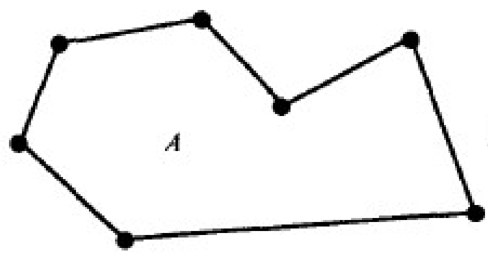
4.1 Prova por Indução - teoria dos grafos

O Teorema de Euler é muito conhecido para poliedros, mas será mostrado que também é válido para grafos poligonais. Seguindo pela teoria dos grafos, será utilizada indução para provar o teorema.

O Teorema de Euler afirma que $v - a + f = 2$, onde v é o número de vértices, a de arestas e f de faces.

PROVA: A fórmula é válida para o caso em que temos um único polígono de k arestas, onde $v = a = k, f = 2$ (A e B), e assim a Fórmula de Euler se mantém.

Figura 37 – Polígono de faces A e B

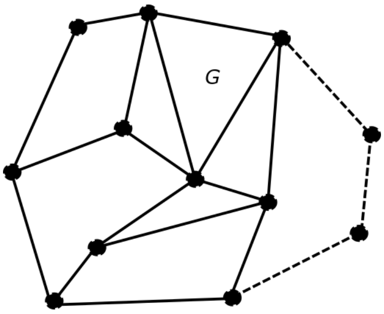


Fonte: Graphs and Their Uses (p.114)

Usando indução em faces para provar a relação geral, deve-se provar que se é válida para f faces, então é válida para $f + 1$ faces.

Os grafos poligonais podem ser construídos passo a passo, onde em cada etapa uma face é adicionada na região externa. Suponha que G seja um grafo poligonal de v vértices, a arestas e f faces, e que os valores de v, a e f satisfaçam a relação de Euler. É adicionada uma nova face (conforme mostra a parte tracejada da Figura 38), adicionando um “caminho” através da face infinita de G. Se este caminho tiver r arestas, adicionamos $r - 1$ vértices e 1 nova face. Então verifica-se que a relações de Euler permanece válida para o grafo aumentado, uma vez que $v - a + f = (v + r - 1) - (a + r) + (f + 1)$.

Figura 38 – Grafo poligonal adicionado uma face



Fonte: Graphs and Their Uses (p.115)

4.2 Prova por ângulos esféricos

Será apresentada a visão de "Zoroastro Azambuja Filho" da prova do teorema de Euler descrito por (LIMA, 1982). O Teorema a demonstrar é o seguinte:

Teorema: Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente que $F - A + V = 2$.

Antes da demonstração, vamos retomar algumas definições:

Um conjunto C, do plano ou do espaço é dito convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C.

Um *poliedro* é uma reunião de polígonos convexos, chamados de *faces* do poliedro. Os lados desse polígono chamam-se *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados de *vértices* do poliedro. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum ou seja vazia.

Diz-se que um poliedro é *convexo* quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro. Este fato está sendo usado como parte da definição, porém poderia ser demonstrado a partir dela.

Para demonstrar o Teorema de Euler, é escolhida uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. É tomado também o plano H, que não intersecta P e é perpendicular a r.

O plano H será chamado de *plano horizontal* e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas *retas verticais.*

H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado de semi-espaço superior, dado que seus pontos estão acima de H.

A cada ponto x do semi-espaço superior corresponte a um ponto x' em H, chamado a sombra de x, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x.

A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de X.

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazio) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P.

Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

A observação acima pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P.

Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno y' é a sombra de uma poligonal fechada y, formada por arestas de P. Cada ponto y' é a sombra de um único ponto de P (pertencente a y).

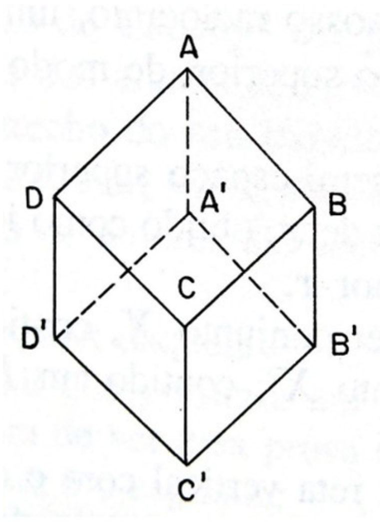
A poligonal y é chamada o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a y') é sombra de 2 pontos de P.

Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) será chamado *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado *sombrio*.

Assim o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente de y.

Por exemplo, seja P o cubo que tem quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces $AA'B'B$, $AA'D'D$ e $ABCD$ ficarão iluminadas e as outras 3 faces ficarão sombrias. O contorno aparente será a poligonal $A'B'BCDD'A'$.

Figura 39 – Cubo P



Fonte: Elaborado pela autora

Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente y. Cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1. Em outras palavras, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'. Usaremos a notação P_1' para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, pode-se também considerar o conjunto P_2, formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente de y. A regra que associa a cada ponto y de P_2 a sua sombra y' também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'. Escreve-se P_2' para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em P_2.

Para concluir a introdução para a demonstração do Teorema de Euler deve-se observar que se cada face de P for decomposta em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, será alterado os números F, A e V individualmente, mas a expressão $F - A + V$ permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o número V não muda. Na expressão $F - A + V$, os acréscimos de F e A se cancelam.

Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há perda de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Esta hipótese será assumida a partir de agora.

Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que $3F = 2A$. Esta relação será usada posteriormente.

A demonstração a ser desenvolvida consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a π radianos. Portanto $S = \pi * F$. Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$, pode-se escrever

$$S = 2\pi * A - 2\pi * F$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular S_1, parte-se da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos da sua sombra T'. Daí resulta que S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo P_1' sombra de P_1. Para calcular esta última soma, são somados os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-los triângulo por triângulo, como acima. Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente y. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Nota-se ainda que V_0 é também o número de vértices (e de lados) da poligonal y', contorno do polígono convexo P'.

Em P_1' temos V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices no contorno y'.

A soma dos ângulos que têm como vértice um dado vértice interior é igual a 2π radianos.

A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno y' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que

$$S_1 = 2\pi.V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, obtém-se

$$S_2 = 2\pi.V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

Somando estas duas igualdades, vem

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi$$

Comparando com a igualdade $S = 2\pi A - 2\pi F$, acima obtida, e dividindo por 2π, resulta que

$$A - F = V - 2,$$

Ou seja,

$$F - A + V = 2,$$

como queria-se demonstrar.

5 Planos de aula

5.1 Embasamento legal

Este plano de aula foi elaborado de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) e o Currículo Paulista (SÃO-PAULO, 2019).

O Currículo Paulista contempla as competências gerais discriminadas pela BNCC, aprovada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologada em 20 de dezembro de 2017, bem como os currículos e as orientações curriculares das redes de ensino públicas e privadas. Ele foi homologado pelo Secretário Estadual de Educação em 01 de agosto de 2019.

O Currículo Paulista estabelece competências específicas de matemática para o ensino fundamental, e são elas:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos,

tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceito de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Disponível nas páginas 305 e 306 do documento original)

O documento aponta que a aprendizagem deve focar-se no desenvolvimento de competências e habilidades. As habilidades de matemática estão agrupadas em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

O foco desta proposta de trabalho será **Geometria com uso de tecnologias digitais**, como está prevista na Competência 5, acima descrita.

A Geometria é um importante campo da matemática e instrumento para outras áreas do conhecimento. Serve para o estudante compreender o mundo em que vive, ser capaz de descrever, representar, estudar sua localização e deslocamentos, identificar formas, relacionar elementos de figuras planas e espaciais, desenvolvendo seu pensamento geométrico.

Desenvolve habilidades de percepção espacial, percepção de figuras planas e discriminação visual, que apoiam processos cognitivos relacionados à leitura e a escrita. Para desenvolvimento dessas habilidades pode se propor atividades geométricas problematizadoras, que envolvam experimentação e investigação, e manipulação de materiais.

Os anos finais do Ensino Fundamental, são momentos de consolidação e ampliação das aprendizagens, onde os estudantes devem ser capazes de identificar elementos e desenvolver conceitos necessários para as manipulações geométricas, que contribuem para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo.

A configuração do Organizador Curricular do Currículo Paulista apresenta as unidades temáticas, as habilidades e os objetos do conhecimento para cada ano do Ensino Fundamental. De acordo com o Organizador Curricular, foram selecionadas *habilidades* que contemplem o tema geometria incluindo os objetivos de trabalho deste plano de aula, e são elas:

5º ano – Habilidade (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. Objetos de Conhecimento: Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.

6º ano – Habilidade (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. Objetos de Conhecimento: Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).

7º ano – Habilidade (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. Objetos de Conhecimento: Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.

7º ano – Habilidade (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado. Objetos de Conhecimento: Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.

8º ano – Habilidade (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. Objetos de Conhecimento: Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

8º ano – Habilidade (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso. Objetos de Conhecimento: Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

9º ano – Habilidade (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. Objetos de Conhecimento: Vistas ortogonais de figuras espaciais.

Com base no que foi apresentado anteriormente, segue o plano de aula, proposto como atividade para o 6º ano do Ensino Fundamental.

5.2 Sequência Didática

Objetos de Estudo:

Poliedros, Poliedros de Platão, Relações de Euler e Planificações

Objetivos:

- Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. Objetos de Conhecimento: Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características;

- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. Objetos de Conhecimento: Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas);

Duração: 7 aulas de 45 minutos.

Atividades propostas para 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental. Desenvolvimento, materiais e avaliação: Ver planos de aula na sequência.

Obs: Vale ressaltar que os planos a seguir são sugestões de trabalho e podem (devem) ser adaptados de acordo com cada realidade. É importante que após a finalização de cada aula, o professor faça uma recapitulação do que foi realizado. Faça anotações sobre comentários dos alunos, imprevistos e sucessos, se o objetivo foi alcançado ou se deve repensar a metodologia para uma aplicação posterior. Essa prática leva à evolução profissional e melhora em sua didática ao longo do tempo.

5.2.1 Plano de aula 1

Temas: Poliedros

Ano/ Série: 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental

Disciplina: Matemática

Professor: Cláudia Meneghin de Oliveira

Conteúdo: Sólidos Geométricos

Objetivos: Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.

Objetos de Conhecimento: Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.

Materiais/ Equipamentos: Sólidos geométricos em madeira, sala de informática ou smartphones, software ou aplicativo GeoGebra, impressos de planificações dos sólidos de madeira, lousa e caderno, lápis, borracha, tesoura e cola branca.

Duração: 4 aulas

Avaliação: Construções

Desenvolvimento:

Aula 1 - 45 minutos:

Ao iniciar um novo tema de estudos, deve-se esclarecer aos alunos o que será trabalhado, como, que período, e como será a conclusão e avaliação dos trabalhos. As sequências apresentadas a seguir são apenas sugestões e podem ser adaptadas pelo professor.

Sequência das atividades:

1. Iniciar a aula entregando aos alunos alguns sólidos geométricos (em madeira, plástico ou mesmo construídos em papel pelo professor. Sugestão: esfera, prismas, pirâmides, cones e cilindros), para que observem, toquem e façam anotações quanto as caraterísticas observadas (10 minutos aproximadamente).

O objetivo nesse momento é deixá-los livres, eles podem observar pontas, bicos, cantos, lados, redondo, reto, pequeno, rola ou não rola, não é necessário fazer intervenções.

2. Socializar as observações e introduzir a nomenclatura utilizada para cada elemento observado (vértices, faces e arestas – no caso dos poliedros) e distinção entre poliedros e não poliedros (10 minutos).

3. Nesse momento é proposto um desafio aos alunos, entregar folhas de papel em branco e pedir aos alunos que construam, em papel, um dos sólidos que tem em suas mãos (20 minutos).

Certamente surgirão questionamentos de como fazer, pedidos de ajuda, mas novamente a ideia e deixá-los livres para pensar, para criar e usar a imaginação. É um momento no qual o professor deve observar as tentativas, alguns podem tentar desenhar a mão livre, outros com réguas ou outros materiais de apoio, podem só ir dobrando o papel, outros ainda podem ter a ideia de apoiar o sólido entregue sobre a folha e copiar suas faces, pode ser que desenhem polígonos separados e pensem em juntá-los depois, a ideia é deixar a imaginação rolar.

No caso de aula dupla, seguir para aula 2, caso contrário, sugerir que concluam as construções em casa e tragam "prontos" para a próxima aula.

Aula 2 – 45 minutos:

1. Socializar as construções obtidas (lembrando sempre de elogiar as tentativas) pedindo para que alguns alunos apresentem as ideias das construções (10 minutos).

2. Entregar folhas de papel impressos sólidos variados (ver anexos 6), dividindo a turma em grupos (dependendo do número de alunos) para que um único modelo de cada molde seja construído. Orientar os alunos quanto à montagem, recorte das partes, dobras, colagem e reforço do material caso queiram decorá-los para expor as construções às demais turmas da escola (15 minutos).

3. Socializar as construções, fazendo observações sobre características, nomen-

claturas utilizadas, definições e outras que julgar necessário. (20 minutos).

Aulas 3 e 4 – 1 hora e 30 minutos:

Sugestão: Levá-los à sala de informática para construção dos mesmos sólidos construídos na aula anterior em papel, agora com o auxílio do software GeoGebra.

Em duplas, entregar a folha com orientações sobre as construções (ou se preferir, disponibilizá-la por exemplo, no Google Classroom) - ver anexo 6.

Ao utilizar as construções apresentadas no capítulo 6 deste trabalho para demonstrações em sala de aula, pode-se não exibir alguns objetos, apenas clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto e desmarcando a opção exibir objeto, como por exemplo esconder o poliedro e exibir somente a planificação animada, pode-se esconder o poliedro e observar a planificação para reproduzir em papel, pode-se esconder a planificação e apenas girar o sólido para estudo de seus elementos: vértices, faces e arestas. Essas manipulações ficam a critério do professor e das suas necessidades.

O objetivo dessas 4 aulas foi apresentar sólidos aos alunos (mais especificamente os de Platão) e suas planificações, sem definições formais.

Avaliação: Análise das atividades realizadas: Construções em papel e no GeoGebra.

5.2.2 Plano de aula 2

Temas: Poliedros

Ano/ Série: 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental

Disciplina: Matemática

Professor: Cláudia Meneghin de Oliveira

Conteúdo: Sólidos Geométricos e as Relações de Euler.

Objetivos: Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos e Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Objetos de Conhecimento: Figuras geométricas espaciais: Poliedros de Platão e as características de Euler.

Materiais/ Equipamentos: Sala de multimídia (projetor ou tv com acesso a internet), lousa e caderno.

Duração: 3 aulas

Avaliação: Lista de exercícios.

Desenvolvimento:

Aula 1 – 45 minutos:

Como os alunos já tomaram conhecimento das formas geométricas sólidas, mais especificamente os poliedros e seus elementos (vértices, faces e arestas), agora daremos sequência aos estudos das Relações de Euler para poliedros convexos.

1. Inicialmente, para introduzir formalmente o tema poliedros propomos o Vídeo 1: POLIEDROS: CONCEITOS INICIAIS E RELAÇÃO DE EULER (AULA 1/16), do canal Equaciona Matemática, sobre poliedros e as relações de Euler (duração: 9:27 minutos). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=v_PQnBk-8Mc>

A opção por estudar os temas com uso de vídeos, foi feita pois:

→ Vídeos tendem a chamar mais atenção dos alunos;

→ As imagens ou fórmulas já estão construídas (recursos visuais) o que poupa tempo do professor;

→ Podem ser disponibilizados aos alunos para revisão do tema estudado (por exemplo numa sala de aula virtual).

→ O ponto de vista ou fala de outra pessoa pode ser compreendido melhor por alguns alunos.

Deixando claro que utilizar vídeos em aulas não exime a responsabilidade do professor pela aula ou pelo processo de ensino-aprendizagem. O professor pode fazer pausas e intervenções durante o vídeo para esclarecimento de dúvidas ou para fazer observações relevantes aos estudos. O professor pode também, após o vídeo, comentá-lo, levantar questionamentos, e até mesmo solicitar um resumo para uma aula seguinte, caso observe desatenção por parte da turma ou apenas queira fortalecer os conceitos estudados, disponibilizando o vídeo para nova consulta.

Sugestão: aos 8 minutos e 05 segundos do vídeo 2, pausar o vídeo e deixar os alunos tentarem resolver o problema, com estratégias próprias, pois ainda não devem ter trabalhado resolução de equações formalmente (15 a 20 minutos).

2. Após o vídeo e discussões, formalizar definição de poliedro, classificação em convexo e não convexo e elementos: faces, vértices e arestas, Relações de Euler. $V + F = A + 2$ e aplicações: Calcular número de vértices, faces ou arestas de poliedros. Apresentar exemplos de cálculos aos alunos, inclusive, podem ser confirmados nos sólidos que eles construíram nas aulas anteriores (25 a 30 minutos). Se necessário ver texto de apoio ao professor nos anexos 6

Obs: A relação de Euler pode ser considerada uma fórmula, com letras (incógnitas) o que poderia dificultar um pouco a realização de cálculos pelos alunos, porém, de acordo com a BNCC e o Currículo Paulista, os conceitos de álgebra já devem ter sido inseridos aos alunos em anos anteriores, ainda no ensino fundamental. Caso seja observado que os alunos não possuam tais conhecimentos prévios, recomenda-se uma pausa nos planos para introdução/ retomada dos conceitos necessários.

Aula 2 – 45 minutos:

1. Iniciar a aula retomando brevemente os temas vistos na aula anterior e dar sequência as aulas, abordando agora especificamente os poliedros de Platão. Para isso é proposto o Vídeo 2: GRANDES PENSADORES: PLATÃO, do canal Socrática Português, que conta um pouco da história de Platão (duração: 8 minutos e 08 segundos). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tL36cKPQzsw> (10 minutos)

Ao tomar conhecimento da história na matemática, ela passa a ter mais significado, deixa de ser abstrata e possuir apenas números e operações para fazer sentido num contexto, em um determinado momento histórico.

2. Como o vídeo é bastante simples, pode-se dar sequência à aula com o Vídeo 3: POLIEDROS DE PLATÃO (AULA 3/16) canal Equaciona Matemática (duração: 7:15 minutos). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=oLbzYParKtc&list=PLEfwqyY2ox87GYPpLcP1kv2Nt9xu0oBTy>

Como já comentado anteriormente, durante o vídeo podem ser feitas pausas e intervenções, questionamentos e esclarecer possíveis dúvidas (15 a 20 minutos)

3. Como complemento, é proposto o Vídeo 4: POLIEDROS REGULARES (AULA 4/16) (duração 10 minutos e 42 segundos). Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=n4RtMz5_5bY&list=PLEfwqyY2ox87GYPpLcP1kv2Nt9xu0oBTy&index=4>.

É sugerida uma pausa durante o vídeo para tentativa dos alunos de resolverem o exercício proposto (15 a 20 minutos)

Apesar da somatória dos tempos de duração dos vídeos ser de aproximadamente 25 minutos, podem ser reservados 45 minutos devido as pausas, comentários, complementos e imprevistos.

Aula 3 – 45 minutos:

Avaliação: Lista de exercícios, envolvendo cálculo de vértices, faces ou arestas, utilizando as Relações de Euler (ver anexo 6).

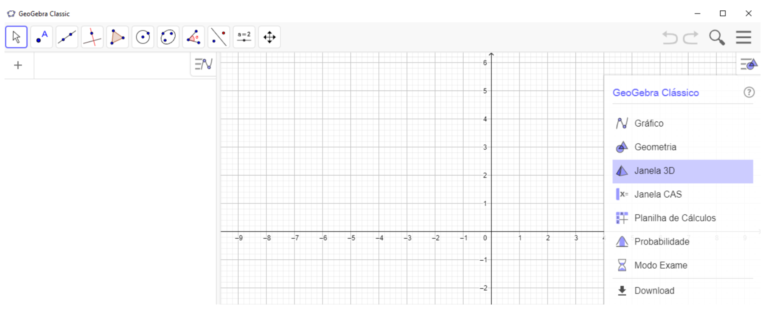
6 Poliedros de Platão - Construções no Geogebra

Optamos pela utilização da ferramenta GeoGebra para a atividade de construção dos sólidos de Platão: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, bem como das suas planificações, por se tratar de um software livre.

Construção Passo a passo

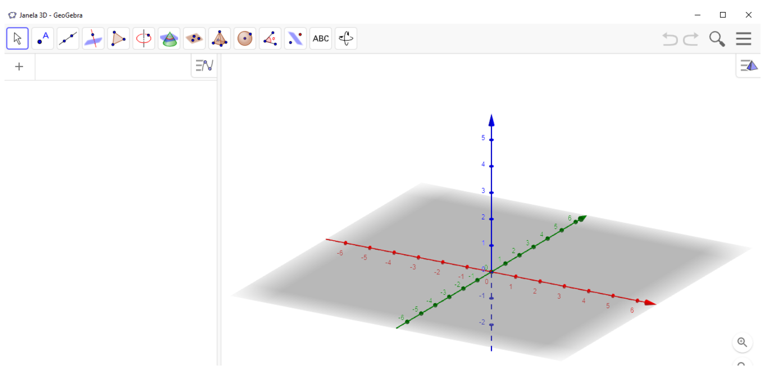
Passo 1: Abra o Geogebra e selecione a janela 3D

Figura 40 – Página inicial do GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

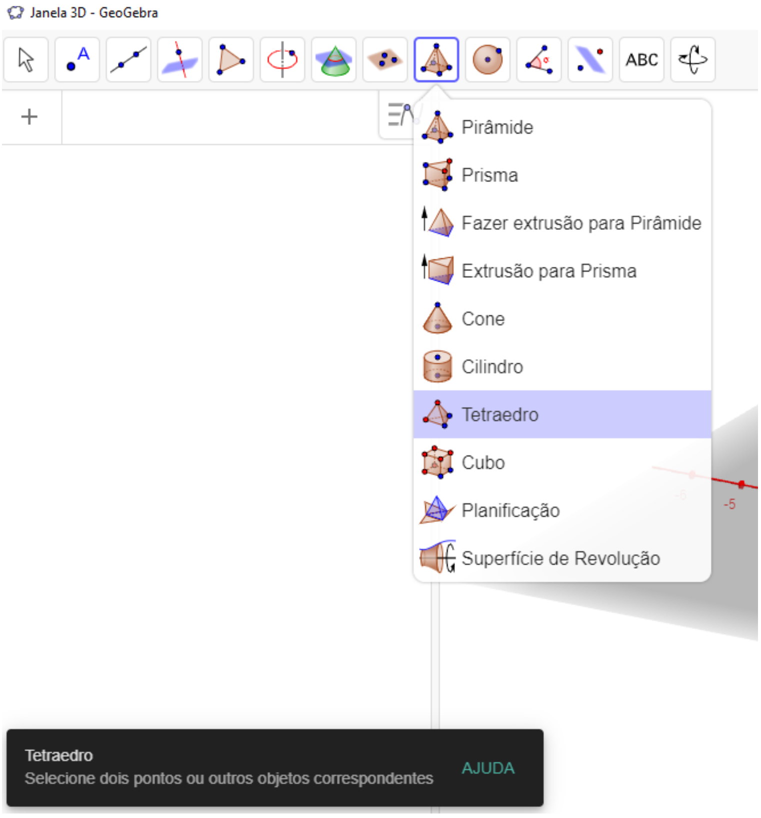
Figura 41 – Janela 3D



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Passo 2: Selecione no menu das figuras espaciais o sólido que deseja construir

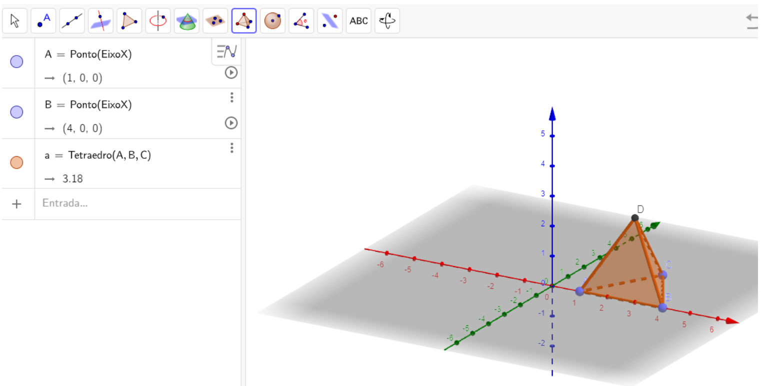
Figura 42 – Menu Poliedros



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Passo 3: Clique sobre dois pontos quaisquer

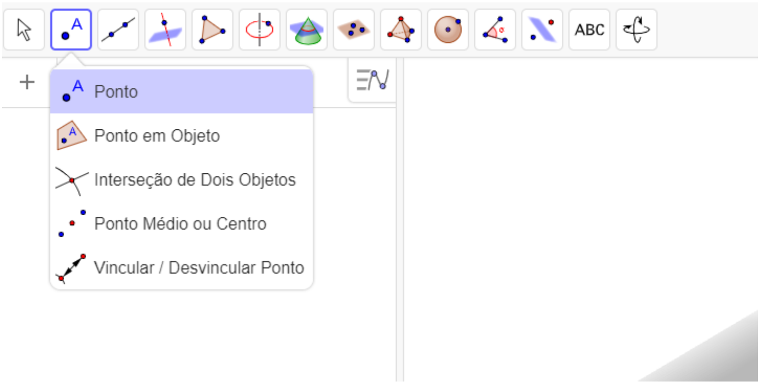
Figura 43 – Tetraedro



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

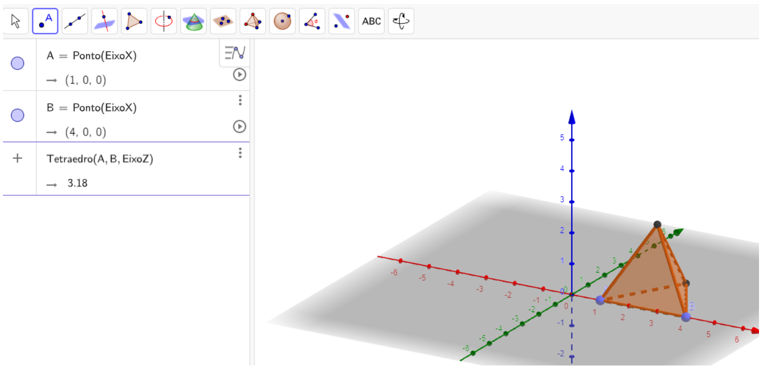
Ou, construa dois pontos quaisquer (A e B) e então no campo "Entrada" digite o nome do poliedro que deseja construir e selecione os dois pontos construídos anteriormente.

Figura 44 – Dois pontos



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Figura 45 – Entrada de comando

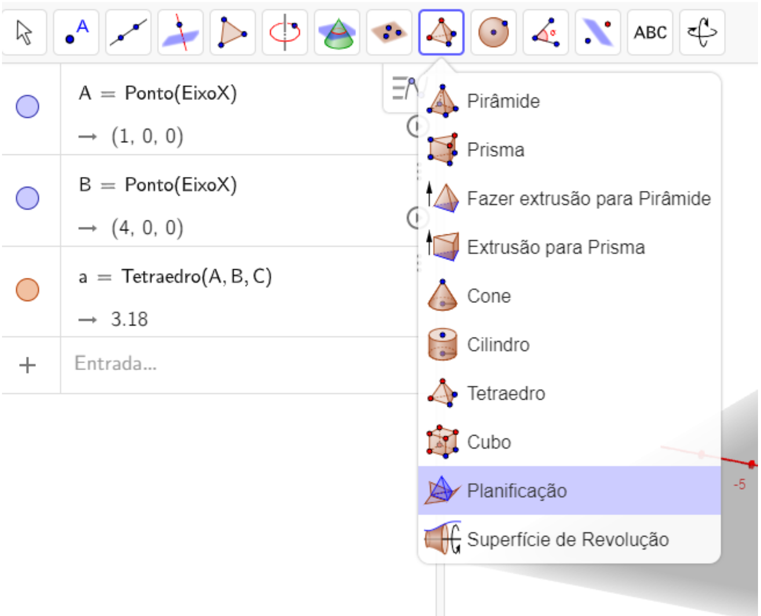


Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Concluída a construção do tetraedro, segue-se para sua planificação:

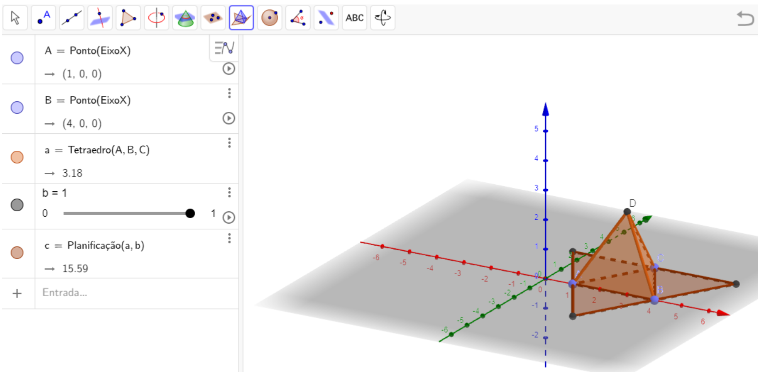
Passo 4: No menu de figuras espaciais, selecione a opção "Planificação" e selecione o poliedro a ser planificado.

Figura 46 – Menu Planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Figura 47 – Tetraedro com sua planificação

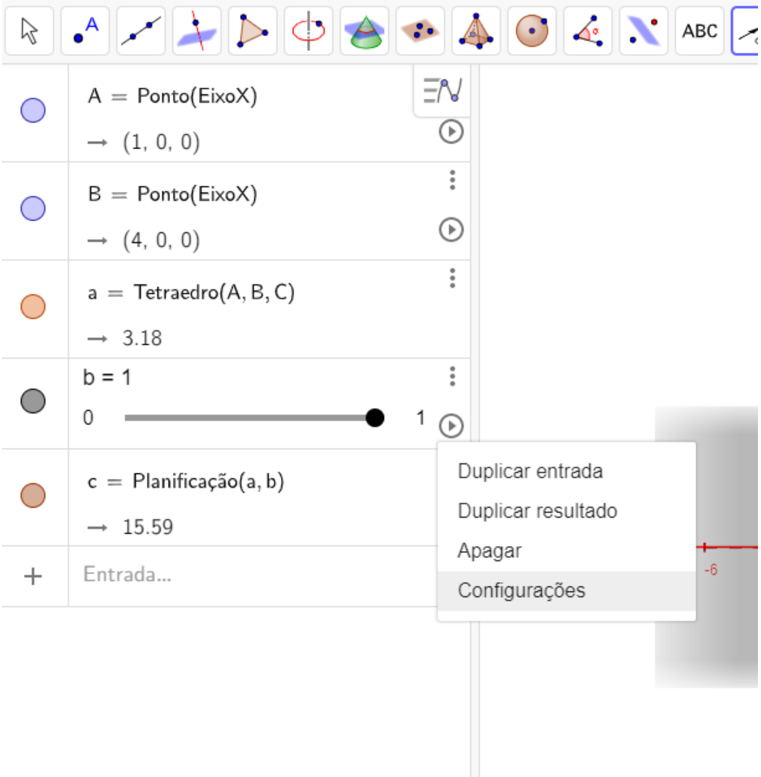


Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Dica: Altere a cor da planificação para melhor visualização

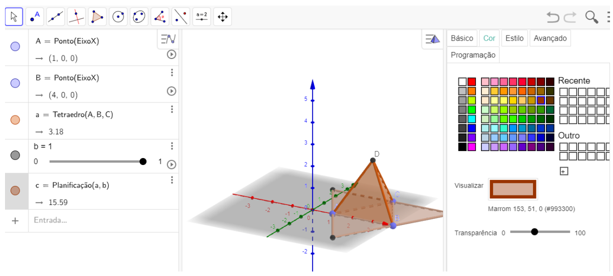
Passo 5: Clique com o botão direito do mouse sobre o item “Planificação”, em seguida em “Configurações” e no menu “Cor” escolha uma cor.

Figura 48 – Menu Configurações



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

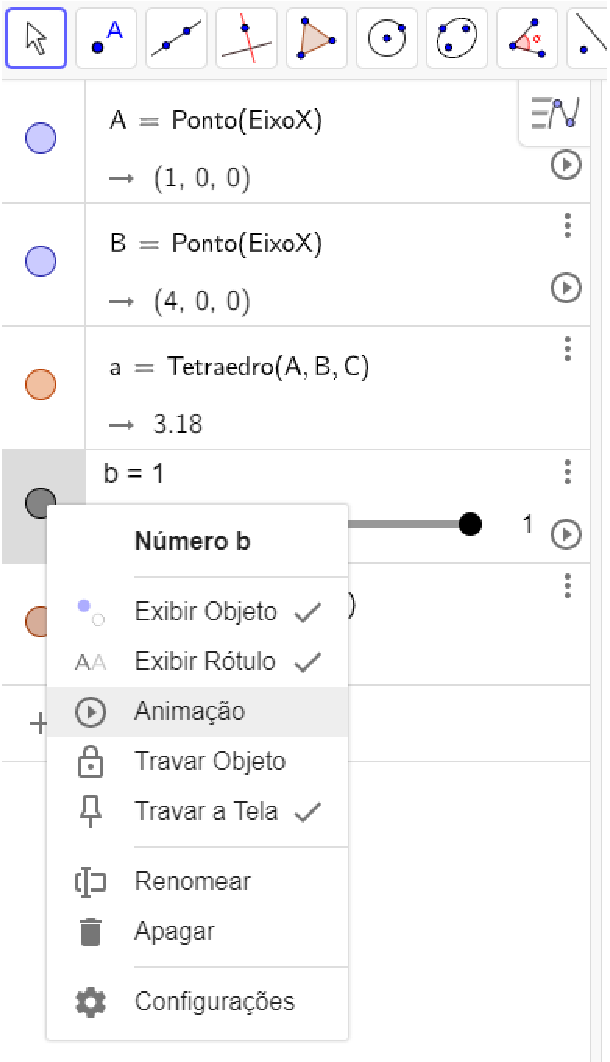
Figura 49 – Configurações - Cor



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Passo 6: Anime a planificação para melhor visualização. Ao gerar a planificação é gerado automaticamente este controle deslizante (b). Clique sobre este elemento com o botão direito do mouse e em seguida marque a opção “Animação”.

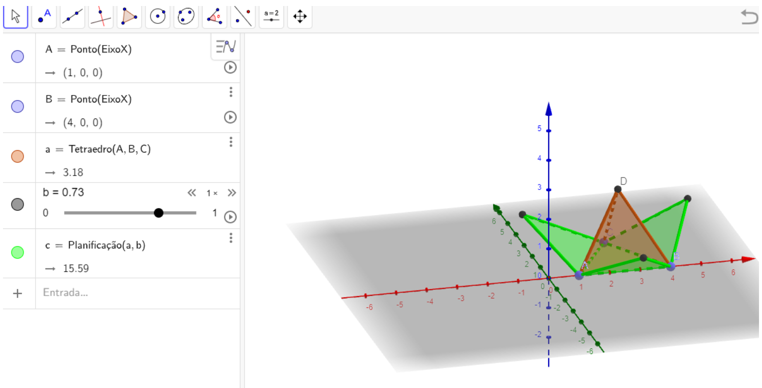
Figura 50 – Menu Animação do controle deslizante



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Observe a movimentação da planificação, até formar o poliedro construído.

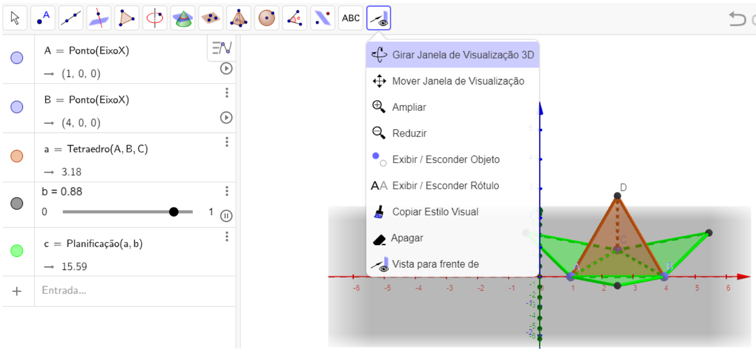
Figura 51 – Movimento da planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Passo 7: Para visualizar de diferentes ângulos o poliedro e a planificação, no menu "Girar Janela de Visualização 3D", gire com o mouse ou selecione a opção "Vista para a frente de" e clique sobre a face que deseja visualizar.

Figura 52 – Menu de movimentação Janela 3D

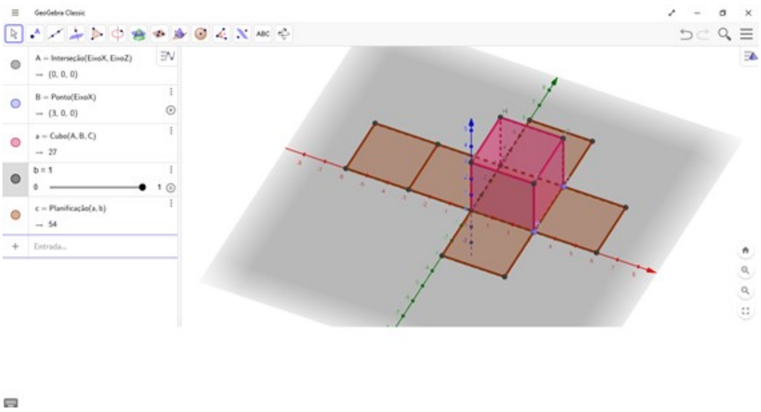


Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Siga novamente os passos 1 a 7 para a construção dos demais poliedros de Platão.

Hexaedro (6 faces quadrangulares)

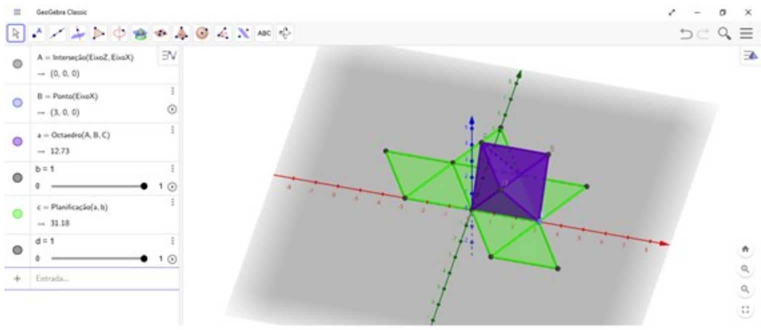
Figura 53 – Hexaedro com planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Octaedro (8 faces triangulares)

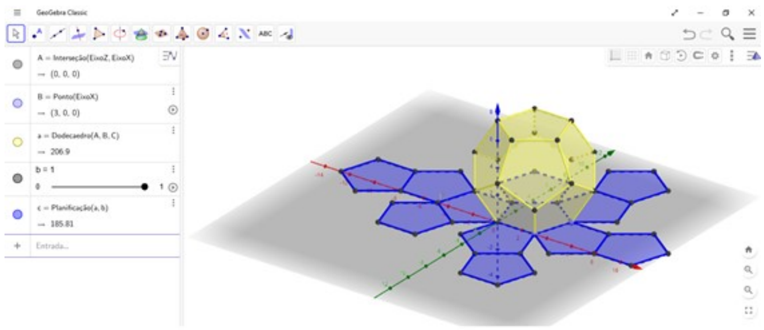
Figura 54 – Octaedro com planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Dodecaedro (12 faces pentagonais)

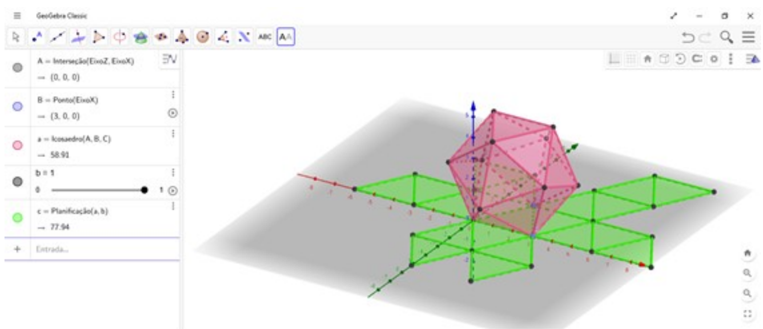
Figura 55 – Dodecaedro com planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Icosaedro (20 faces triangulares)

Figura 56 – Icosaedro com planificação



Fonte: Elaborado pela autora à partir do software GeoGebra

Links de acesso para os sólidos já construídos no GeoGebra:

Tetraedro: <https://www.geogebra.org/m/rwj23hqf>

Hexaedro: <https://www.geogebra.org/m/f829ta6a>

Octaedro: <https://www.geogebra.org/m/psbtzdzu>

Dodecaedro: <https://www.geogebra.org/m/pemr8eev>

Icosaedro: <https://www.geogebra.org/m/njtc3xm4>

Dentre os inúmeros recursos que discutem a usabilidade do software GeoGebra, destaca-se o portal "O GeoGebra", onde encontram-se vídeos e turoriais. O acesso é possível atraves do endereço eletrônico: <https://ogeogebra.com.br/>

Referências

ARAÚJO, A. As pontes de königsberg. *Universidade de Coimbra*, 2012. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~{}alma/escolas/pont>. Citado na página 28.

BICUDO, I. et al. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009. Citado na página 31.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - BNCC - lei nº 13.145. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília: MEC/SEF, 2018. Citado na página 47.

D'AMBROSIO, U. Euler, um matemático multifacetado. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 9, n. 17, p. 13–31, 2009. Disponível em: <http://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/167/153>. Citado na página 16.

KEUNG, S. M. Eulogy of leonhard euler (1707–1783). *MAA FOCUS*, p. 12, 2007. Disponível em: <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/dec07web.pdf#page=11>. Citado na página 16.

LIMA, E. L. O teorema de Euler sobre poliedros - demonstração de Cauchy. *Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática*, 1982. Citado na página 42.

______. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. [S.l.]: IMPA/ VITAE, 1991. Citado na página 31.

______. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. *Projeto Euclides, SBM*, 2012. Citado na página 32.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2. Citado na página 31.

LOPES, R. et al. *Timeu-Crítias*. [S.l.]: Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

MOREIRA, L. P. O que é poliedro? *Brasil Escola*, 2021. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-poliedro.htm>. Citado na página 73.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. The mathematics genealogy project - euler's biography. *School of Mathematics and Statistics - University of St Andrews, Scotland*, 1998. Disponível em: <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=38586>. Citado na página 16.

ORE, O.; WILSON, R. J. *Graphs and their uses*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. v. 34. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 24.

PEREIRA, R. M. T. Diógenes Laércio livro III: Platão-tradução. *Anais de Filosofia Clássica*, v. 14, n. 27, p. 372–414, 2020. Citado na página 14.

SÃO-PAULO. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias. *Secretaria de Educação do Estado de São Paulo*, São Paulo: SEE, 2019. Citado na página 47.

SILVA, M. N. P. da. Relação de Euler. *Brasil Escola*, 2021. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-euler.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 76.

WAGNER, E. Geometria: Polígonos e congruência de triângulos. *PAPMEM*, 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5Wz3V9K-Kns>. Citado na página 31.

ANEXOS

- ANEXO 1

  PLANO DE AULA 1 - MOLDES PARA IMPRIMIR - Sólidos

  Moldes dos 5 poliedros de Platão para imprimir disponíveis em:

  <https://www.polyhedra.net/en/pictures.php?type=p>

  Outras sugestões para encontrar moldes para imprimir (caso disponha de mais tempo):

  <https://www.espacoeducar.net/2012/08/50-moldes-de-solidos-geometricos-para.html>

  <https://www.soescola.com/2016/12/solidos-geometricos-recortar-e-montar.html>

  Como curiosidade - Vídeo como montar um sphericon:

  <https://www.youtube.com/watch?v=XRQViHtGAbA&feature=youtu.be>

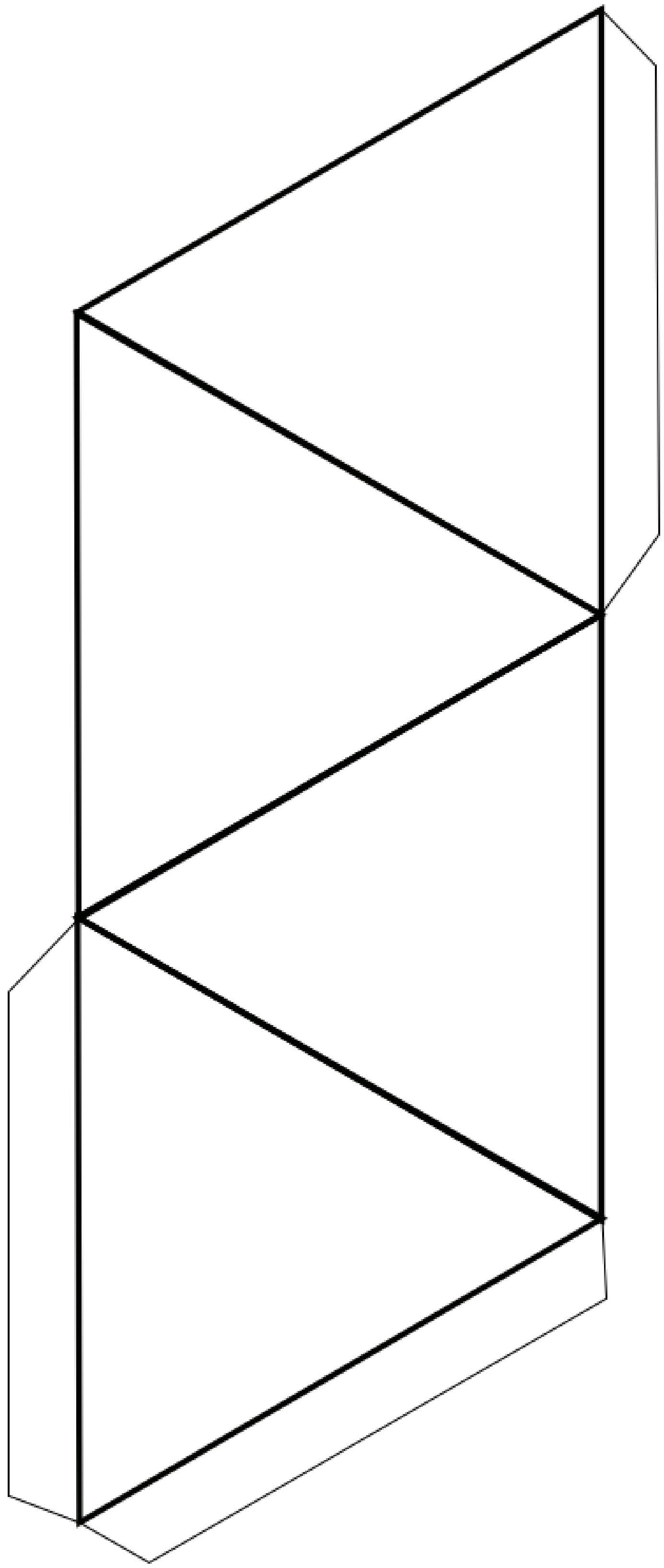


Figura 57 – Tetraedro

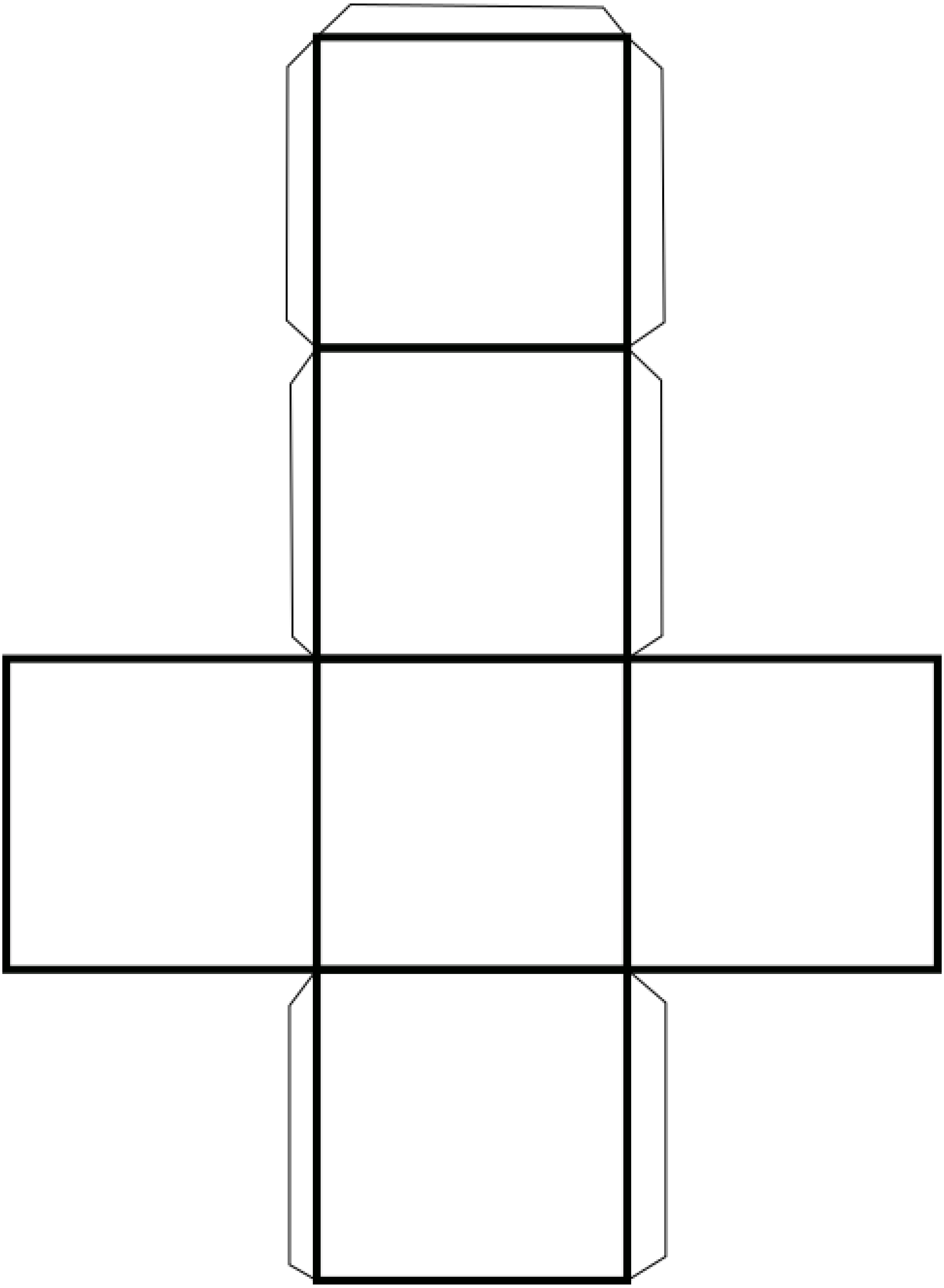


Figura 58 – Cubo

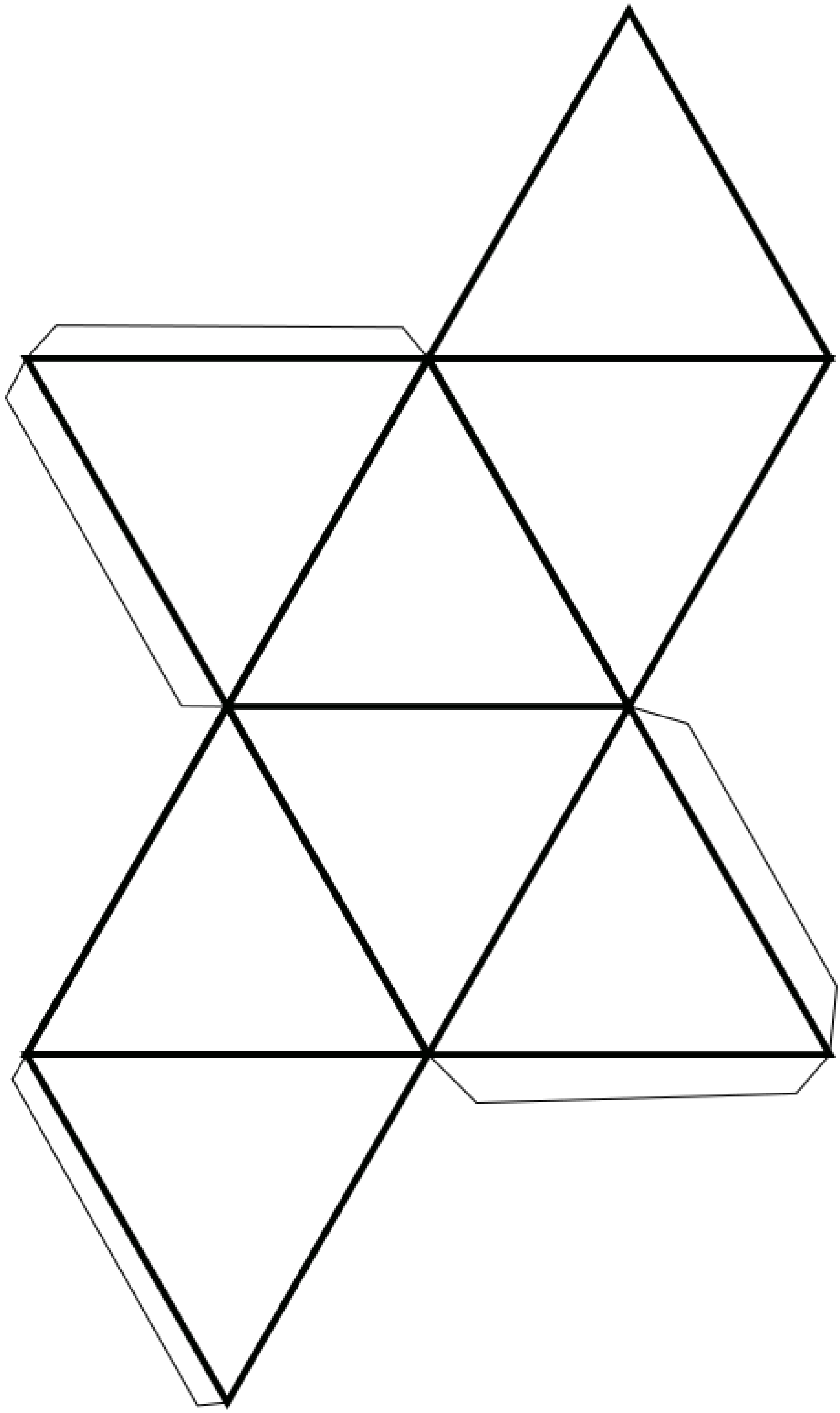


Figura 59 – Octaedro

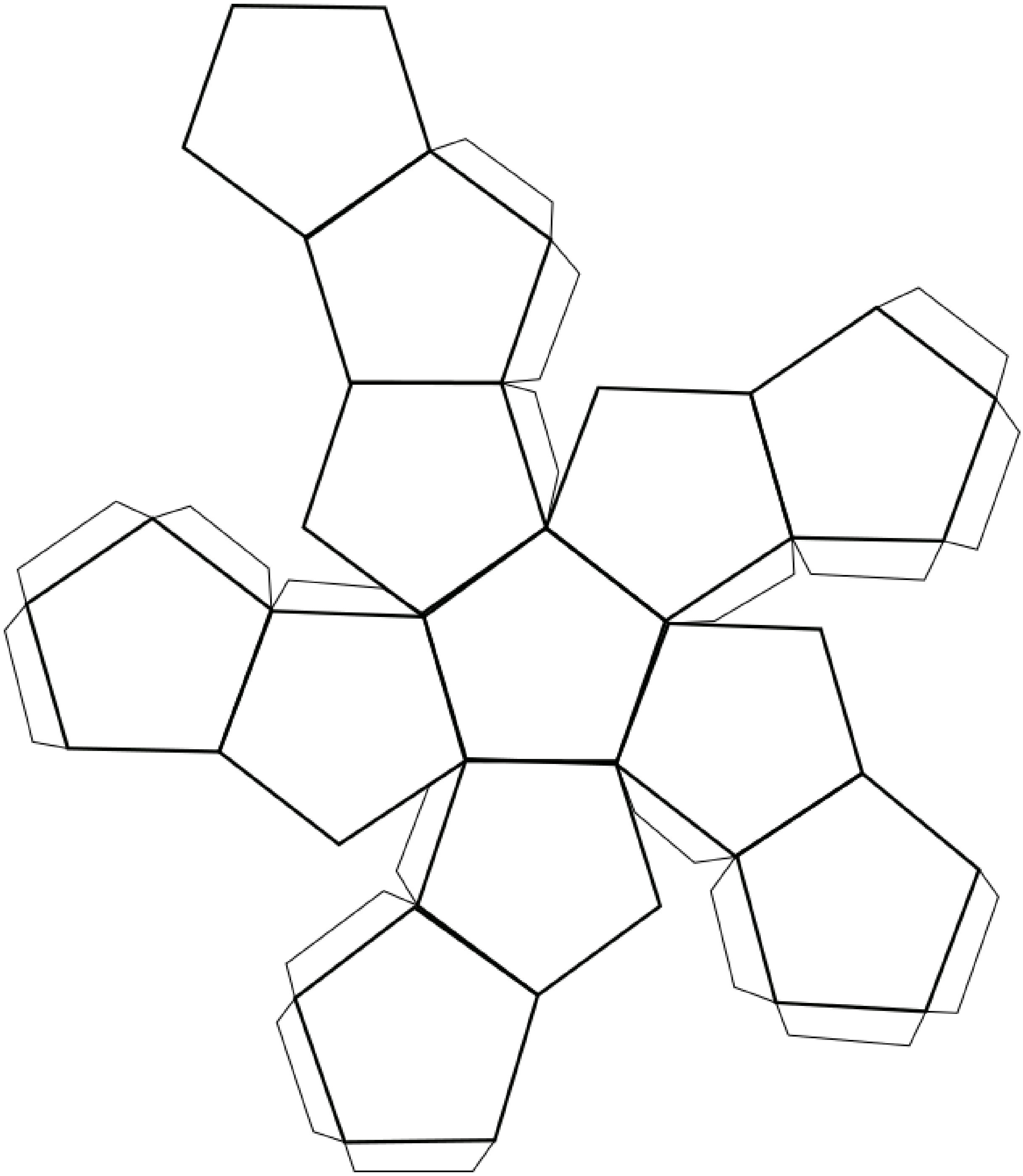


Figura 60 – Dodecaedro

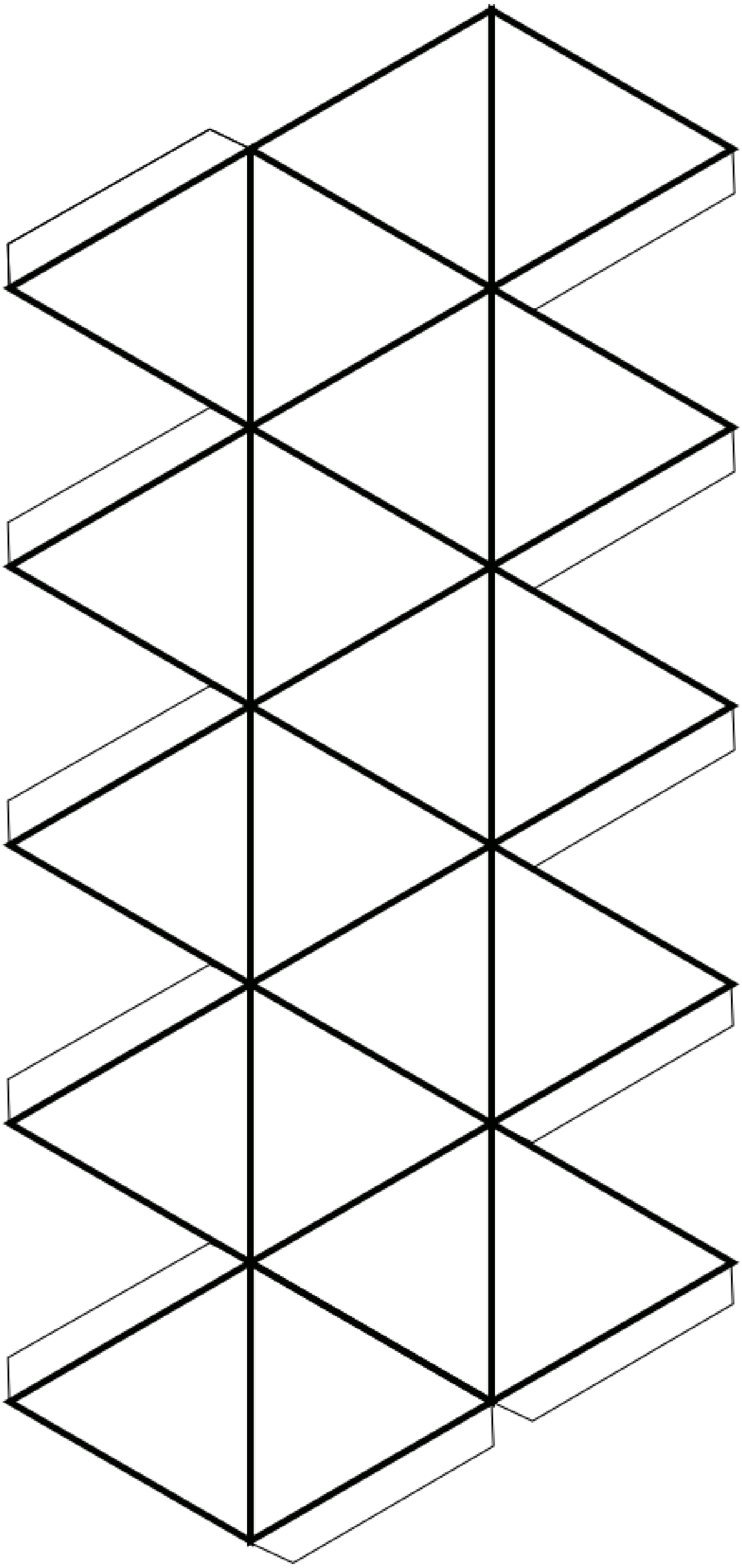


Figura 61 – Icosaedro

- ANEXO 2

PLANO DE AULA 1 - ORIENTAÇÕES PARA CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Passo a passo das construções:

- Passo 1: Abra o Geogebra e selecione a janela 3D

- Passo 2: Selecione no menu das figuras espaciais o sólido que deseja construir. Vamos começar pelo tetraedro.

- Passo 3: Clique sobre quaisquer dois pontos na tela ou, construa dois pontos quaisquer (A e B) no menu Ponto e clicando sobre a tela e então no campo "Entrada" digite o nome do poliedro que deseja construir e selecione os dois pontos construídos anteriormente (tetraedro(A,B)). Assim está pronto seu tetraedro. Agora vamos construir a sua planificação:

- Passo 4: No menu de figuras espaciais, selecione a opção "Planificação" e selecione o poliedro a ser planificado (clicando sobre ele).

- Passo 5: Clique com o botão direito do mouse sobre o item "Planificação", em seguida em "Configurações" e no menu "Cor" escolha uma cor. Dica: Altere a cor da planificação para melhor visualização.

- Passo 6: Anime a planificação para melhor visualização. Ao gerar a planificação é gerado automaticamente um controle deslizante (b). Clique sobre este elemento com o botão direito do mouse e em seguida marque a opção "Animação".

- Passo 7: Para visualizar de diferentes ângulos o poliedro e a planificação, no menu "Girar Janela de Visualização 3D", gire com o mouse ou selecione a opção "Vista para a frente de" e clique sobre a face que deseja visualizar.

- Siga novamente os passos 1 a 7 para a construção dos demais poliedros de Platão (cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro)

- ANEXO 3

PLANO DE AULA 2 - TEXTO DE APOIO AO PROFESSOR

Este anexo tem por objetivo auxiliar o professor com um texto simples, que pode ser trabalhado diretamente com alunos para melhor compreensão do tema estudado.

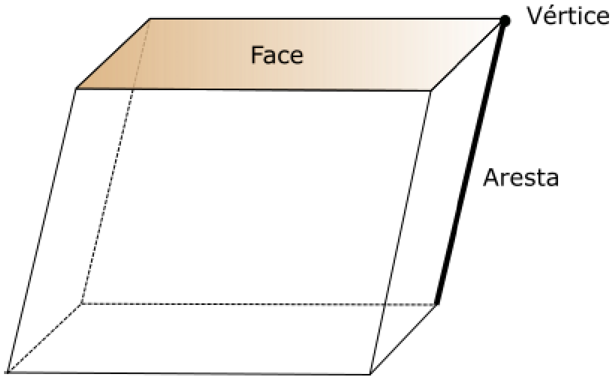
De acordo com (MOREIRA, 2021) Poliedros são sólidos geométricos limitados por polígonos, que, por sua vez, são partes de um plano limitadas por segmentos de reta que se tocam apenas em seus extremos. Os poliedros são tridimensionais, por isso, é possível observar profundidade neles, além da largura e comprimento. A seguir, são apresentados os principais elementos geométricos encontrados nos poliedros.

Faces: polígonos que limitam o poliedro;

Arestas: segmentos de reta resultantes do encontro de duas faces;

Vértices: pontos resultantes do encontro de três ou mais arestas.

Figura 62 – Poliedro

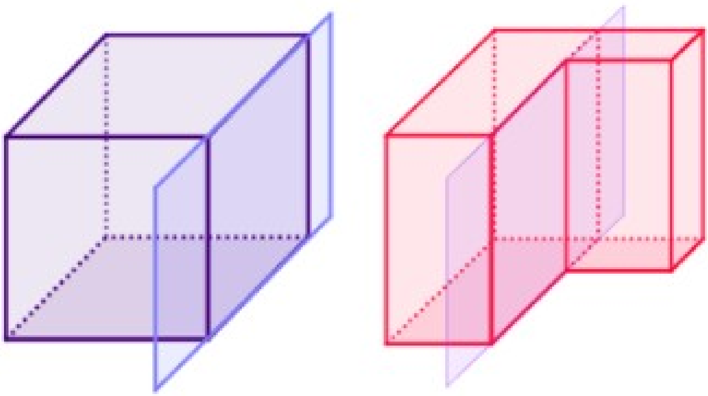


Fonte: Elaborado pela autora no softwase Inkscape

Poliedros convexos

Um plano divide o espaço em dois semiespaços. Esse conceito é usado para definir poliedros convexos, que são aqueles que estão em um mesmo semiespaço para todo plano que contém uma de suas faces. Em outras palavras, o plano que contém uma face de um poliedro convexo nunca corta a outra face, deixando parte do poliedro em um semiespaço e a outra parte em outro. Caso isso aconteça, dizemos que o poliedro é não convexo ou côncavo.

Figura 63 – Poliedros Convexo e Não Convexo



Fonte: Brasil Escola

Visualmente, poliedros convexos não possuem concavidade. Observe o exemplo acima: à esquerda, há um poliedro convexo; à direita, um poliedro não convexo.

De acordo com (SILVA, 2021) O teorema de Euler é usado para relacionar o número de faces, vértices e arestas de poliedros convexos. Assim, podendo facilitar a contagem desses elementos.

A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns não convexos. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar o número de elementos de um poliedro. A fórmula criada por Euler é a seguinte:

$$V - A + F = 2 \ ou \ V + F - A = 2$$

Nessa fórmula, V = número de vértices, A = número de arestas e F = número de faces.

(Dica para lembrar (1): Vamos Fazer Aula em Duplas ou Vida Feliz A Dois).

(Dica para lembrar (2): O número de arestas de um poliedro é igual a quantidade de polígonos vezes o número de lados de cada polígono, dividido por dois, tomando que cada aresta é lado de 2 polígonos).

Exemplo de questão envolvendo o Teorema de Euler: Determine o número de faces de um sólido que apresenta 10 arestas e 6 vértices. Resolução:

$$V - A + F = 2$$

$$6 - 10 + F = 2$$

$$-4 + F = 2$$

$$F = 4 + 2$$

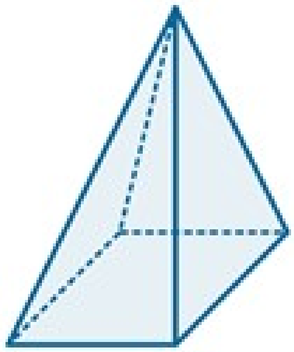
$$F = 6$$

O sólido possui, portanto, 6 faces.

2º Exemplo: Verificar se a relação de Euler é válida no poliedro a seguir:

Visivelmente, podemos afirmar que a pirâmide apresenta 5 vértices, 5 faces e 8 arestas.

Figura 64 – Pirâmide



Fonte: Brasil Escola

Vamos, agora, verificar se a relação de Euler é válida:

Resolução: $V - A + F = 2$, então: $5 - 8 + 5 = 2$". Logo, relação é válida.

Em caráter de curiosidade, é sugerido ao professor a leitura de algumas entre as vinte provas do Teorema de Euler que estão disponíveis em: <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

Árvores Interdigitantes	Indução nas faces	Passeios de Euler
Indução em Vértices	Indução nas Bordas	Enumeração de ponto inteiro
Dividir e conquistar	Carga elétrica	Arranjos de hiperplanos
Carga elétrica dupla	Soma dos ângulos	Avaliações
Ângulos esféricos	Teorema de Pick	Partição de espaço binário
Decomposição da orelha	Descascamento	Homologia Binária
Remoção de Triângulo	Arca de Noé	

- ANEXO 4

PLANO DE AULA 2 - LISTA DE EXERCÍCIOS

Lista de Exercícios sobre Relações de Euler:

1) O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Determine, utilizando a relação de Euler, o número de faces desse poliedro.

2) Sabendo que um poliedro possui 20 vértices e que em cada vértice se encontram 5 arestas, determine o número de faces dessa figura.

3) Sabendo que em um poliedro o número de vértices corresponde a 2/3 do número de arestas, e o número de faces é três unidades menos que o de vértices. Calcule o número de faces, de vértices e arestas desse poliedro.

4) Quantas faces, arestas e vértices possuem o poliedro chamado de Hexaedro?

5) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

6) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

7) O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Então, qual o número de faces do poliedro?

Questões extraídas de (SILVA, 2021).