

**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JULIANE CAROLINA BAIOSCHI DALBEN

**RELAÇÕES ENTRE DIFERENTES NOÇÕES DE  
SOLUÇÃO PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO**

Campinas  
2021

Juliane Carolina Baiochi Dalben

## **Relações entre diferentes noções de solução para Leis de Conservação**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Anne Caroline Bronzi

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Juliane Carolina Baiochi Dalben e orientada pela Profa. Dra. Anne Caroline Bronzi.

Campinas  
2021

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

D15r Dalben, Juliane Carolina Baiochi, 1997-  
Relações entre diferentes noções de solução para leis de conservação /  
Juliane Carolina Baiochi Dalben. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Anne Caroline Bronzi.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lei de conservação (Matemática). 2. Soluções estatísticas. 3. Solução a  
valor de medida. 4. Soluções fracas. I. Bronzi, Anne Caroline, 1984-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Relations between different notions of solution of conservation laws

**Palavras-chave em inglês:**

Conservation law (Mathematics)

Statistical solutions

Measure-valued solution

Weak solutions (Mathematics)

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestra em Matemática

**Banca examinadora:**

Anne Caroline Bronzi [Orientador]

Helena Judith Nussenzveig Lopes

Cecília Freire Mondaini

**Data de defesa:** 31-05-2021

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-3291-4355>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1769018867525973>

**Dissertação de Mestrado defendida em 31 de maio de 2021 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). ANNE CAROLINE BRONZI**

**Prof(a). Dr(a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES**

**Prof(a). Dr(a). CECÍLIA FREIRE MONDAINI**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Rosi e Flávio, por sempre estarem ao meu lado e me incentivarem a seguir meus sonhos independente das adversidades. Vocês me ensinam diariamente a batalhar pelo que acredito e certamente não seria a pessoa que sou hoje sem vocês, além de sempre estarem lá também nos momentos de comemoração.

Agradeço também à minha irmã, Vivi, por ser a irmã mais velha mais especial desse mundo. Sei que posso compartilhar todos os momentos com você e sei que você também estará lá para puxar minha orelha quando necessário. E, em especial, por você ter dado à luz durante meu mestrado a fofura de todos os meus dias, o Victor.

Certamente esse trabalho não poderia ter sido feito sem a participação de uma das mulheres mais incríveis que conheci na vida e que felizmente posso chamar de minha orientadora. Agradeço a você, Anne, que acredita em mim e luta ao meu lado a cada passo da vida e que foi uma das inspirações para que escolhesse trilhar meu caminho na Matemática.

Aliás, gostaria de agradecer a todas as mulheres e meninas que batalham diariamente para deixar suas histórias na Ciência e na Matemática, vocês me fortalecem.

Não poderia deixar de agradecer também aos meus amigos que estiveram e estão ao meu lado nos momentos de estudo, de jogatina, de cozinhar e de bater um papo relaxante. Em especial, Denise, Otavio e Piva, vocês são meus brócolis nesse mundo.

Por último, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa de pesquisa sob processo 132317/2019-2, que possibilitou que me dedicasse integralmente ao programa de pós-graduação, sendo um verdadeiro privilégio nestes tempos de desvalorização da pesquisa e da ciência.

# Resumo

Nesta dissertação de mestrado, apresentaremos três diferentes noções de solução para leis de conservação e as relações que existem entre elas. Começamos abordando a noção de solução estatística para sistemas autônomos introduzida por Illner e Wick em 1981 que baseou-se na noção de solução estatística proposta por Foias em 1973 para o estudo das equações de Navier-Stokes. No início dos anos 90, Illner e Wick estudaram solução estatística para leis de conservação e mostraram que toda solução neste sentido gera uma solução a valor de medida, conceito desenvolvido por DiPerna em 1985. Por outro lado, Illner e Wick construíram um exemplo de solução fraca para a equação de Burgers que não gera nenhuma solução estatística. Mais recentemente, outra noção de solução estatística foi proposta por Fjordholm, Lanthaler e Mishra em 2017 para leis de conservação hiperbólicas usando o conceito de medidas de correlação. Veremos neste trabalho que soluções fracas geram soluções estatísticas neste sentido e estas geram uma solução a valor de medida.

***Palavras-chave:*** lei de conservação; solução estatística; solução a valor de medida; solução fraca.

# Abstract

In this Master's degree dissertation, we will present three different notions of solution for conservation laws and the relations that exist between them. First, we will address the notion of statistical solution for autonomous systems which was introduced by Illner and Wick in 1981 and was based on the notion of statistical solution proposed by Foias in 1973 for the study of the Navier-Stokes equations. In the early 1990's, Illner and Wick studied statistical solution of conservation laws and showed that any solution in this sense generates a measure-valued solution, a concept developed by DiPerna in 1985. On the other hand, Illner and Wick constructed an example of a weak solution of the Burgers equation that does not generate any statistical solution. More recently, another notion of statistical solution was proposed by Fjordholm, Lanthaler and Mishra in 2017 for hyperbolic conservation laws using the concept of correlation measures. We will see in this work that weak solutions generate statistical solutions in this sense and these statistical solutions generate a measure-valued solution.

**Keywords:** conservation law; statistical solution; measure-valued solution; weak solution.

# Lista de Símbolos

$C_b(X)$	Espaço das funções reais, contínuas e limitadas em $X$
$C_c(X)$	Espaço das funções em $C_b(X)$ com suporte compacto
$C_0(X)$	Complemento de $C_c(X)$ na norma uniforme
$\text{Lip}(X)$	Espaço das funções Lipschitz contínuas
$\xi \cdot \eta$	Produto interno euclidiano entre $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$
$\mathcal{P}(X)$	Espaço das medidas de probabilidade em $X$
$\mathcal{B}(X)$	$\sigma$ -álgebra de Borel de $X$
$\mathcal{M}(X)$	Espaço das medidas de Radon finitas e com sinal em $(X, \mathcal{B}(X))$
$\text{Cil}(X)$	Coleção de todos os conjuntos cilíndricos de $X$
$\Pi(\mu, \rho)$	Conjunto de todos os planos de transporte entre as medidas $\mu$ e $\rho$
$W_p(\mu, \rho)$	Distância $p$ -Wasserstein entre as medidas $\mu$ e $\rho$
$\mathcal{H}^k(D; U)$	Espaço das funções de Carathéodory de $D^k$ em $U^k$
$\mathbb{1}_A$	Função característica do conjunto $A$
$\mathcal{L}^p(D; U)$	Conjunto das medidas de correlação de $D$ para $U$
$\mathcal{D}'(X)$	Espaço das distribuições em $X$
$H^1(X; Y)$	Espaço de Sobolev das funções de $X$ para $Y$
$\#$	Operador “pushforward”
$\mathbb{R}_+$	Intervalo $[0, \infty)$



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Conceitos de Teoria da Medida . . . . .	14
1.2 Espaços de Carathéodory . . . . .	19
1.3 Funções e Conjuntos Cilíndricos . . . . .	22
1.4 Teoria de Semigrupo . . . . .	25
1.5 Transporte Ótimo . . . . .	26
<b>2 Soluções Fracas</b>	<b>29</b>
2.1 Solução Fraca . . . . .	30
2.1.1 Solução de Entropia . . . . .	31
<b>3 Soluções Estatísticas e a Valor de Medida para Equações Dife- renciais</b>	<b>33</b>
3.1 Problema de Cauchy para um Sistema Autô-nomo . . . . .	34
3.2 Lei de Conservação . . . . .	47
3.2.1 Caso 1-dimensional . . . . .	48
3.2.2 Caso multidimensional . . . . .	52
<b>4 Soluções Estatísticas para Leis de Conservação Hiperbólicas</b>	<b>57</b>
4.1 Medidas de Correlação . . . . .	57
4.2 Demonstração do Teorema 4.2 . . . . .	61
4.3 Momentos de uma medida de correlação . . . . .	76
4.4 Soluções Estatísticas para Leis de Conservação . . . . .	79
4.4.1 Caso 1-dimensional . . . . .	79
4.4.2 Caso multidimensional . . . . .	80
4.5 Soluções Estatísticas para Leis de Conservação Escalares . . . . .	85
4.5.1 Solução Estatística Canônica . . . . .	85
4.5.2 Soluções Estatísticas de Entropia . . . . .	88

<b>5</b>	<b>Relações entre as diferentes noções de solução</b>	<b>95</b>
5.1	A Equação de Burgers . . . . .	95
5.2	Relações entre as soluções . . . . .	97
	<b>Conclusão</b>	<b>102</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Introdução

Diversos fenômenos físicos são modelados por sistemas de equações diferenciais parciais para os quais um resultado de boa-colocação global não é conhecido. Um exemplo disso são as leis de conservação, que modelam a evolução de um sistema físico que possui alguma propriedade que é conservada ao longo do tempo. Estas propriedades podem ser a conservação de energia, de momento linear, de momento angular, de carga elétrica, entre outros.

Uma forma bastante utilizada para abordar o problema de existência e unicidade global de solução suave é relaxar a noção de solução, sendo um exemplo disso a noção de solução fraca. A vantagem é que é mais fácil obter existência de solução fraca, enquanto a desvantagem é que resultados a respeito de regularidade e unicidade para essas soluções podem ser bastante trabalhosos de se demonstrar ou não serem verdadeiros.

A fim de extrair informação a respeito do comportamento das soluções das leis de conservação, podemos desenvolver o estudo estatístico dessas soluções. A ideia é que apesar das soluções do sistema poderem apresentar um comportamento bastante imprevisível, as médias temporais, espaciais e amostrais, em geral, apresentam um comportamento bastante regular e previsível.

Um avanço nesta direção foi a introdução da noção de solução estatística para as equações de Navier-Stokes feita por Foias entre os anos de 1972 e 1973, em [11] e [12]. As soluções estatísticas definidas rigorosamente por Foias são uma família de medidas de probabilidade  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  no espaço de fase  $H$  das equações de Navier-Stokes (onde  $H$  é o fecho do espaço dos campos vetoriais suaves de suporte compacto e divergente nulo com respeito à norma  $L^2$ ), que satisfazem uma determinada equação associada às equações de Navier-Stokes, além de condições de regularidade.

No caso de dimensão dois, onde o problema de valor inicial em  $H$  é bem-posto, as soluções estatísticas coincidem com as medidas induzidas pelo operador solução  $S_t$ , definido por  $S_t u_0 = u(t)$ , para  $u_0 \in H$ , onde  $u$  é a única solução das equações de Navier-Stokes tal que  $u(0) = u_0$ . Mais precisamente, se  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística, então  $\mu_t = S_t \mu_0$ , isto é,  $\mu_t(E) = \mu_0(S_t^{-1}E)$ , para todo conjunto de Borel  $E$ .

No ano de 1981, os matemáticos Illner e Wick introduziram no artigo [16] uma noção de solução estatística para sistemas autônomos introduzida por, que foi baseada no conceito de solução estatística proposto por Foias para o caso das equações de Navier-Stokes.

Já em 1985, DiPerna introduziu em [6] uma noção de solução para leis de conservação, conhecida por solução a valor de medida, sendo uma medida de Young que satisfaz uma determinada identidade relacionada à lei de conservação. Tal ideia foi motivada pela representação de limite fraco de soluções aproximadas de leis de conservação como uma medida de Young. E, no ano de 1987, DiPerna e Majda elaboraram o conceito de solução a valor de medida para as equações de Euler no artigo [7]. Tal conceito de solução a valor de medida foi mostrado ser muito amplo, no sentido de que, apesar de conseguirmos provar resultados de existência, demonstrar a regularidade ou unicidade destas solução é uma árdua tarefa e, muitas vezes, é falsa. Assim, matemáticos continuam na busca por alguma classe de soluções em que resultados de boa-colocação possam ser garantidos.

Posteriormente, no ano de 1991, Illner e Wick propuseram uma noção de solução estatística para o caso de leis de conservação. Esta solução estatística é uma família de medidas de probabilidade  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  definidas no espaço de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)$  que satisfazem uma certa equação relacionada à lei de conservação. Veremos neste trabalho que toda solução estatística de leis de conservação no sentido de Illner-Wick é uma solução a valor de medida proposta por DiPerna. Contudo, estas soluções estatísticas não estendem a noção de solução fraca, no sentido de que é possível mostrar a existência de uma solução fraca que não gera nenhuma solução estatística.

Recentemente, em [8], Fjordholm, Lanthaler e Mishra introduziram uma nova noção de solução estatística para sistemas de leis de conservação hiperbólicas. Para definirem esse conceito de solução, os autores utilizaram uma equivalência entre medidas de probabilidade nos espaços de funções  $p$ -integráveis e famílias infinitas de medidas de correlação, onde cada elemento dessas famílias é uma medida de Young em um domínio de dimensão finita.

Também veremos que toda solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra é uma solução a valor de medida para leis de conservação, mas com o proveito de que esta noção de solução estatística generaliza o conceito de solução fraca, no sentido de que toda solução fraca gera uma solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra. Ademais, veremos que no caso de sistemas de leis de conservação escalares, conseguimos provar a existência, a unicidade e a regularidade com respeito ao dado inicial de soluções estatísticas de entropia. Neste caso, como a equação é bem-posta para qualquer dado inicial em  $L^1 \cap L^\infty$ , teremos que as soluções estatísticas coincidem com as medidas induzidas pelo operador solução  $S_t$ , definido por  $S_t u_0 = u(t)$ , para  $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ , onde  $u$  é a única solução da lei de conservação tal que  $u(0) = u_0$ . Mais precisamente, se  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução

---

estatística, então  $\mu_t = S_t \# \mu_0$ . Esta família de medidas de probabilidade é conhecida por solução estatística canônica.

Em [10], esse novo conceito de solução foi aplicado por Fjordholm e Wiedemann para demonstrar uma versão da conjectura de Onsager para soluções estatísticas das equações de Euler.

Nesta dissertação de mestrado, vamos apresentar essas diferentes noções de solução para leis de conservação e seus respectivos resultados de existência e discutiremos suas possíveis (ou não) regularidades e unicidades. E, por último, estudaremos algumas relações entre esses diferentes conceitos de solução.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos algumas definições e propriedades de conceitos relacionados às teorias da medida, de semigrupo e de transporte ótimo. Tais assuntos serão amplamente utilizados ao longo dos capítulos subsequentes desta dissertação e os resultados que aqui não forem provados, aludiremos onde podem ser encontradas suas demonstrações.

### 1.1 Conceitos de Teoria da Medida

Nesta seção, faremos uma breve introdução a conceitos de teoria de medida utilizando como base os livros [14] e [21]. Enunciaremos os conceitos de medidas de Radon, de probabilidade e de Young, que serão utilizados ao longo de todos os capítulos. Também veremos a definição da  $p$ -distância de Wasserstein, que será de suma importância no capítulo 4 na demonstração de regularidade da solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra.

Para isto, denotaremos por  $\mathcal{B}(X)$  a família de conjuntos de Borel em um espaço topológico  $X$ , que é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os conjuntos abertos do espaço topológico. Quando  $X$  for um espaço de Banach reflexivo, então os conjuntos de Borel na topologia forte coincidem com os conjuntos de Borel na topologia fraca. E, uma medida  $\mu$  em um espaço topológico  $X$  é dita uma medida de Borel se  $\mu$  é definida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(X)$ .

Dizemos que um conjunto mensurável  $E$  carrega a medida de Borel  $\mu$  ou, também, que  $\mu$  é carregada por  $E$  se o conjunto tem medida total, ou seja,  $\mu(X \setminus E) = 0$ . Além disso, definimos o suporte de uma medida de Borel como o menor conjunto fechado de medida total e o denotamos por  $\text{supp } \mu$ .

Dados um mapa  $T : X \rightarrow Y$  Borel mensurável entre espaços topológicos e uma medida de Borel  $\mu$  em  $X$ , podemos induzir uma medida pelo operador  $T$ : a medida “pushforward”  $T\#\mu$  de  $\mu$  por  $T$ , que é uma medida de Borel em  $Y$  definida

por

$$T\#\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)),$$

para qualquer conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}(Y)$ .

A seguir, veremos a definição de uma classe de medidas de Borel especiais: as medidas de Radon. Tais objetos matemáticos precisam satisfazer três propriedades e serão a chave para definirmos as medidas de probabilidade, que vamos utilizar ao longo dos próximos capítulos.

**Definição 1.1.** *Uma medida de Radon em um espaço topológico  $X$  é uma medida de Borel que satisfaz as seguintes três propriedades:*

- (i) *É finita em todos os conjuntos compactos;*
- (ii) *É regular exterior em todos os conjuntos Borel mensuráveis;*
- (iii) *É regular interior em todos os conjuntos abertos.*

Denotaremos o conjunto de todas as medidas de Radon em  $X$  por  $\mathcal{M}(X)$ .

Lembrando que dizemos que uma medida  $\mu$  em  $X$  é regular exterior em um conjunto boreliano  $E \subset X$  se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ aberto em } X\}.$$

E dizemos que  $\mu$  é regular interior em  $E \in \mathcal{B}(X)$  se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto em } X\}.$$

No caso em que  $\mu$  é regular interior e exterior, dizemos simplesmente que é uma medida regular.

Podemos definir a função  $\mu \in \mathcal{M}(X) \mapsto |\mu|(X) \in \mathbb{R}$ , onde  $|\mu|$  representa a variação total da medida. Tal função define uma norma no espaço  $\mathcal{M}(X)$ . Ao longo do trabalho, apenas trabalharemos com medidas positivas e, neste caso, teremos que a norma em  $\mathcal{M}(X)$  para estas medidas é dada por  $\|\mu\|_{\mathcal{M}(X)} = \mu(X)$ .

No livro [14], é provado que o espaço das medidas de Radon  $\mathcal{M}(X)$  pode ser identificado como o espaço dual de  $C_0(X)$  através do par de dualidade

$$\langle \mu, f \rangle = \int_X f(\xi) d\mu(\xi),$$

para  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  e  $f \in C_0(X)$ . Essa dualidade induz uma topologia fraco-\* em  $\mathcal{M}(X)$ , em que dizemos que uma rede  $\{\mu_\alpha\}_\alpha$  de medidas de probabilidade em um espaço topológico  $X$  converge fraco-\* para uma medida de Borel de probabilidade  $\mu$  em  $X$  se

$$\int_X \varphi(x) d\mu_\alpha(x) \longrightarrow \int_X \varphi(x) d\mu(x),$$

para toda  $\varphi \in C_0(X)$ . Denotamos tal convergência por  $\mu_\alpha \xrightarrow{*} \mu$ .

Dizemos que  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  é um espaço de probabilidade se é um espaço de medida e  $\mu$  é uma medida de Radon positiva tal que  $\mu(X) = 1$ . Medidas dessa forma são chamadas de medidas de probabilidade e denotamos o conjunto de todas as medidas de probabilidade em um espaço  $X$  por  $\mathcal{P}(X)$ , ou seja,

$$\mathcal{P}(X) := \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu \geq 0 \text{ e } \mu(X) = 1\}.$$

Se  $p \in [1, \infty)$ ,  $\mathcal{P}^p(X)$  denota o subconjunto de  $\mathcal{P}(X)$  formado por todas as medidas de probabilidade  $\mu$  com  $p$ -momento finito, ou seja, das medidas  $\mu$  tais que

$$\langle \mu, |\xi|^p \rangle = \int_X |\xi|^p d\mu(\xi) < \infty.$$

A seguir, enunciaremos um resultado envolvendo medidas de probabilidade que nos fornece uma estimativa sobre a composição de integrais com funções convexas.

**Teorema 1.2** (Desigualdade de Jensen). *Sejam  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $f \in L^1(X, \mu)$  uma função real. Se  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, então*

$$\psi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\psi \circ f) d\mu.$$

Dados dois espaços mensuráveis  $(X, \mathcal{X})$  e  $(Y, \mathcal{Y})$ , uma função mensurável  $T : X \rightarrow Y$  e uma medida  $\mu$  em  $(X, \mathcal{X})$ , definimos a medida  $T\mu$  em  $\mathcal{Y}$  por  $T\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ , para todo  $E \in \mathcal{Y}$ . Essa medida é chamada de medida induzida por  $T$ . Note que se  $\mu$  é uma medida de probabilidade, então  $T\mu$  também é de probabilidade. Além disso,

$$\int_Y \varphi(y) dT\mu(y) = \int_X \varphi(T(x)) d\mu(x), \quad \forall \varphi \in L^1(\mu). \quad (1.1)$$

Assim, temos que  $\psi$  é  $T\mu$ -mensurável e  $\psi \circ T \in L^1(\mu)$  se e somente se  $\psi \in L^1(T\mu)$ .

O próximo passo será definir o conceito da  $p$ -medida de Wasserstein que, como dito no começo da seção, será utilizado para provar a regularidade das soluções estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra que estudaremos no capítulo 4. Além disso, apresentaremos alguns resultados envolvendo tal definição de distância.

**Definição 1.3.** *Dadas duas medidas de probabilidade  $\mu, \rho \in \mathcal{P}^p(X)$ , com  $p \in [1, \infty)$ , definimos a  $p$ -distância de Wasserstein por*

$$W_p(\mu, \rho) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \rho)} \left\{ \int_{X \times X} |\xi - \eta|^p d\pi(\xi, \eta) \right\}^{1/p},$$



onde o ínfimo é tomado sobre  $\Pi(\mu, \rho)$  formado por todos os planos de transporte entre  $\mu$  e  $\rho$ , isto é, o conjunto de medidas de probabilidade em  $X \times X$  com marginais  $\mu$  e  $\rho$  dado por

$$\Pi(\mu, \rho) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X \times X) : \pi(A \times X) = \mu(A) \text{ e } \pi(X \times A) = \rho(A), \forall A \subset \mathcal{B}(X) \right\}.$$

O teorema de Kantorovich-Rubinstein que tem sua demonstração feita em [21], mostra que, quando  $p = 1$ , podemos escrever

$$W_1(\mu, \rho) = \sup \left\{ \int_X \Psi(x) d(\mu - \rho)(x) : \Psi \in C_b(X) \text{ e } \|\Psi\|_{\text{Lip}} \leq 1 \right\},$$

onde o supremo é tomado dentre todas as funções Lipschitz contínuas com constante de Lipschitz menor ou igual a 1. Além disso, nesta mesma referência e em maiores detalhes em [1, Teorema 7.1.5], pode ser encontrada a demonstração do seguinte resultado:

**Teorema 1.4.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e seja  $p \in [1, \infty)$ . Então o conjunto das medidas de probabilidade com  $p$ -momento finito, isto é,*

$$\mathcal{P}^p(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < +\infty \text{ para algum } x_0 \in X \right\}$$

*é um espaço métrico completo e separável munido da  $p$ -distância de Wasserstein  $W_p$ . Além disso, temos que  $W_p$  metriza a topologia da convergência fraca em  $\mathcal{P}^p(X)$ .*

Apresentaremos a seguir uma outra classe de medida, conhecida por medida de Young. Tal conceito é a chave para conseguirmos trabalhar com as soluções a valor de medida e soluções estatísticas de Fjordholm-Lanthaler-Mishra nos capítulos 3 e 4, respectivamente.

**Definição 1.5.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^d$ . Dizemos que a função  $\nu : D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  é uma medida de Young se é um mapa mensurável fraco-\*, ou seja, se  $x \mapsto \langle \nu_x, f \rangle$  é um mapa Borel mensurável para toda  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Denotamos o conjunto de todas as medidas de Young de  $D$  para  $\mathbb{R}^N$  por  $\mathbf{Y}(D; \mathbb{R}^N)$ .*

Uma medida de Young  $\nu \in \mathbf{Y}(D; \mathbb{R}^N)$  é dita uniformemente limitada se existe um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^N$  tal que  $\text{supp } \nu_x \subset K$ , para todo  $x \in D$ .

Um exemplo simples de medida de Young é a medida atômica gerada a partir de uma função mensurável. De fato, se  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função mensurável, então  $\nu_x := \delta_{u(x)}$  é uma medida de Young, onde  $\delta_{u(x)}$  é a medida de Dirac concentrada em  $u(x) \in \mathbb{R}^N$ , para cada  $x \in D$ . Tal medida de Young é chamada atômica e, aliás, toda medida de Young atômica pode ser expressa por  $\delta_w$ , para alguma

função mensurável  $w$ . Note neste caso que, se  $\nu = \delta_u$  é medida atômica, então  $\nu$  é uniformemente limitada se, e somente se,  $u \in L^\infty(D; \mathbb{R}^N)$ .

Dada uma sequência de medidas de Young  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , precisamos dar algum sentido de convergência, quando for o caso, para tal sequência. Aqui consideraremos dois sentidos de convergência: a convergência fraco-\* e a convergência forte. No primeiro caso, de maneira similar ao caso de medidas de probabilidade, dizemos que a sequência  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge fraco-\* para uma medida de Young  $\nu$  e denotamos por  $\nu^k \xrightarrow{*} \nu$  se  $\langle \nu^k, f \rangle \xrightarrow{*} \langle \nu, f \rangle$  em  $L^\infty(D)$  para toda  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ , isto é, se

$$\int_D \varphi(z) \langle \nu_z^k, f \rangle dz \rightarrow \int_D \varphi(z) \langle \nu_z, f \rangle dz, \quad \forall \varphi \in L^1(D).$$

Já no segundo caso, dizemos que  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge fortemente para uma medida de Young  $\nu$  e denotamos por  $\nu^k \rightarrow \nu$  se  $\|W_p(\nu^k, \nu)\|_{L^p(D)} \rightarrow 0$ , para algum  $p \in [1, \infty)$ , onde  $W_p$  é a  $p$ -distância de Wasserstein definida anteriormente.

O teorema a seguir mostra que toda sequência  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  de medidas de Young admite subsequência que converge fraco-\* a uma função a valor de medida. Além disso, fornece condição que garante convergência a uma medida de Young. Sua demonstração pode ser conferida em [9, Teorema 13].

**Teorema 1.6** (Teorema Fundamental de Medidas de Young). *Dada uma sequência de medidas de Young  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $D$  para  $\mathbb{R}^N$ , existe uma subsequência  $(\nu^{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  de  $(\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  que converge fraco-\* para  $\nu$ , onde  $\nu : D \rightarrow \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$  é uma função a valor de medida não-negativa tal que*

- (i)  $\langle \nu_x^{k_m}, f \rangle \xrightarrow{*} \langle \nu, f \rangle$  em  $L^\infty(D)$ , para toda  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ ;
- (ii)  $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} \leq 1$ , para quase todo  $x \in D$ ;
- (iii) Se  $K \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto fechado e  $\text{supp } \nu_x^n \subset K$  para quase todo  $x \in D$  e  $n$  suficientemente grande, então  $\text{supp } \nu_x \subset K$  para quase todo  $x \in D$ .

Se além disso tivermos que para todo conjunto  $E \subset D$  mensurável e limitado, existe uma função não-negativa  $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \varphi(y) = +\infty$$

e

$$\sup_k \int_E \langle \nu_x^k, \varphi \rangle dx < +\infty,$$

então

- (iv)  $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = 1$  para quase todo  $x \in D$ , ou seja,  $\nu$  é uma medida de Young de  $D$  para  $\mathbb{R}^N$ .

## 1.2 Espaços de Carathéodory

No capítulo 4, provaremos a equivalência entre medidas de correlação e medidas de probabilidade com o intuito de conseguirmos definir soluções estatísticas para sistemas de leis de conservação hiperbólicas. Para enunciarmos tal equivalência e demonstrá-la, usaremos o conceito de funções e espaços de Carathéodory e algumas de suas propriedades, que serão enunciados e provados a seguir. Em tal seção, usamos o artigo [8] como referência.

**Definição 1.7.** *Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Uma função de Carathéodory de  $D^k$  para  $U^k$  é uma função mensurável  $g$  tal que  $g(x) \in C_0(U^k)$  para todo  $x \in D^k$  e*

$$\int_{D^k} \|g(x)\|_{C_0(U^k)} dx < +\infty,$$

onde  $C_0(U^k)$  é o completamento de  $C_c(U^k)$  com respeito à norma uniforme, assim,  $\|g(x)\|_{C_0(U^k)} = \sup\{|g(x)(\xi)| : \xi \in U^k\}$ . Denotamos o espaço de todas as funções de Carathéodory de  $D^k$  para  $U^k$  por  $\mathcal{H}^k(D; U)$  e definimos a norma deste espaço por

$$\|g\|_{\mathcal{H}^k} = \int_{D^k} \|g(x)\|_{C_0(U^k)} dx.$$

É imediato ver da definição acima que  $\mathcal{H}^k(D; U) = L^1(D^k; C_0(U^k))$ . E, por simplicidade de notação, escrevemos  $g(x, \xi)$  ao invés de  $g(x)(\xi)$ .

Comentamos na seção passada sobre o resultado de existência de um isomorfismo isométrico entre o espaço dual das funções contínuas que vão a zero no infinito,  $C_0(U^k)^*$ , e o espaço de Banach das medidas de Radon limitadas,  $\mathcal{M}(U^k)$ . Atrelando isto à propriedade de que  $C_0(U^k)$  é um espaço separável, podemos provar que existe um isomorfismo isométrico entre o espaço dual de  $L^1(D^k; C_0(U^k))$  e  $L_w^\infty(D^k; \mathcal{M}(U^k))$ , onde este representa o espaço  $L^\infty(D^k; \mathcal{M}(U^k))$  munido da topologia fraco-\*. Em outras palavras,  $L_w^\infty(D^k; \mathcal{M}(U^k))$  é o espaço de todos os mapas fraco-\* mensuráveis  $\nu^k : x \in D^k \mapsto \nu_x^k \in \mathcal{M}(U^k)$  tais que

$$\text{ess sup}_{x \in D^k} \|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)} < +\infty.$$

Além disso, esse isomorfismo isométrico é definido através da associação

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{D^k} \langle \mu(x), f(x, \cdot) \rangle dx,$$

como pode ser visto em maiores detalhes em [2, Páginas 211 e 212].

Dessa maneira, obtemos que o espaço dual de  $\mathcal{H}^k(D; U)$ , que denotaremos por  $\mathcal{H}^{k*}(D; U)$ , é isometricamente isomorfo a  $L_w^\infty(D^k; \mathcal{M}(U^k))$  e, assim, somos motivados a munir o espaço  $\mathcal{H}^{k*}(D; U)$  com a norma dada por

$$\|\nu^k\|_{\mathcal{H}^{k*}} = \text{ess sup}_{x \in D^k} \|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)},$$

para  $\nu^k \in \mathcal{H}^{k*}(D; U)$ .

O próximo resultado é um dos pontos chaves para a demonstração da equivalência entre medidas de probabilidade e medidas de correlação que estudaremos no capítulo 4.

**Proposição 1.8.** *Dada uma função de Carathéodory  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$ , o mapa  $L_g : L^p(D; U) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por*

$$L_g(u) = \int_{D^k} g(x, u(x)) dx$$

é uniformemente contínuo e satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|L_g\|_{C_b(L^p(D; U))} \leq \|g\|_{\mathcal{H}^k}.$$

*Demonstração.* Como a função  $g$  pertence ao espaço  $L^1(D^k; C_0(U^k))$ , existem funções simples  $\{\bar{g}_n\}$  dadas por

$$\bar{g}_n(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) \bar{f}_{n,i}(\xi),$$

para subconjuntos limitados  $A_{n,i} \subset D^k$  com medida de Lebesgue não-nula e funções contínuas  $\bar{f}_{n,i} \in C_0(U^k)$ , de forma que  $\bar{g}_n \rightarrow g$  em  $L^1(D^k; C_0(U^k))$ .

Agora, considere funções  $f_{n,i} \in C_0(U^k) \cap \text{Lip}(U^k)$  tais que

$$\|\bar{f}_{n,i} - f_{n,i}\|_{C_0(U^k)} \leq \frac{1}{|A_{n,i}|n^2},$$

que conseguimos obter, por exemplo, considerando molificações das  $\bar{f}_{n,i}$ . Definindo a função  $g_n$  como

$$g_n(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) f_{n,i}(\xi),$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\|(\bar{g}_n - g_n)(x)\|_{C_0(U^k)} &= \sup_{\xi \in U^k} |\bar{g}_n(x, \xi) - g_n(x, \xi)| \\
&= \sup_{\xi \in U^k} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) [\bar{f}_{n,i}(\xi) - f_{n,i}(\xi)] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)| \sup_{\xi \in U^k} |\bar{f}_{n,i}(\xi) - f_{n,i}(\xi)| \\
&= \sum_{i=1}^n |\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)| \|\bar{f}_{n,i} - f_{n,i}\|_{C_0(U^k)} \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)|}{|A_{n,i}|}
\end{aligned}$$

e, com isso, segue

$$\begin{aligned}
\|\bar{g}_n - g_n\|_{\mathcal{H}^k} &= \int_{D^k} \|(\bar{g}_n - g_n)(x)\|_{C_0(U^k)} dx \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \int_{D^k} \frac{|\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)|}{|A_{n,i}|} dx \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{|A_{n,i}|}{|A_{n,i}|} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Além disso, obtemos que

$$\begin{aligned}
&|L_{g_n}(u) - L_{g_n}(v)| = \\
&= \left| \int_{D^k} [g_n(x, u(x)) - g_n(x, v(x))] dx \right| \\
&= \left| \int_{D^k} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) [f_{n,i}(u(x)) - f_{n,i}(v(x))] dx \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \int_{A_{n,i}} [f_{n,i}(u(x)) - f_{n,i}(v(x))] dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{A_{n,i}} |f_{n,i}(u(x)) - f_{n,i}(v(x))| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{A_{n,i}} \|f_{n,i}\|_{\text{Lip}(U^k)} [|u(x_1) - v(x_1)| + \cdots + |u(x_k) - v(x_k)|] dx \\
&\leq c_n \|u - v\|_{L^p(D; U)},
\end{aligned}$$

para quaisquer  $u$  e  $v$  em  $L^p(D; U)$ , onde a penúltima desigualdade segue por Hölder e  $c_n$  é uma constante positiva que depende de  $|A_{n,i}|$  e  $\|f_{n,i}\|_{\text{Lip}(U^k)}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Portanto, concluímos que o mapa  $L_{g_n}$  é Lipschitz contínuo em  $U^k$ .

Note também que

$$\begin{aligned} |L_g(u) - L_{g_n}(u)| &= \left| \int_{D^k} [g(x, u(x)) - g_n(x, u(x))] dx \right| \\ &\leq \int_{D^k} |g(x, u(x)) - g_n(x, u(x))| dx \\ &\leq \int_{D^k} \|(g - g_n)(x, \cdot)\|_{C_0(U^k)} dx \\ &= \|g - g_n\|_{\mathcal{H}^k} \\ &\leq \|g - \bar{g}_n\|_{\mathcal{H}^k} + \|\bar{g}_n - g_n\|_{\mathcal{H}^k} \\ &\leq \|g - \bar{g}_n\|_{\mathcal{H}^k} + \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $n$  tende ao infinito, para toda  $u \in L^p(D; U)$ . Ou seja,  $L_{g_n} \rightarrow L_g$  uniformemente em  $L^p(D; U)$ . Assim, pelo fato de que todo limite uniforme de funções Lipschitz contínuas é uniformemente contínuo, concluímos que o mapa  $L_g$  é uniformemente contínuo. Ademais, pela definição da norma em  $C_0(U^k)$ , temos

$$|L_g(u)| \leq \int_{D^k} |g(x, u(x))| dx \leq \int_{D^k} \|g(x)\|_{C_0(U^k)} dx = \|g\|_{\mathcal{H}^k},$$

para qualquer função  $u \in L^p(D; U)$ . Logo, tomando o supremo em  $L^p(D; U)$ , segue que

$$\|L_g\|_{C_b(L^p(D; U))} \leq \|g\|_{\mathcal{H}^k},$$

como queríamos provar. □

### 1.3 Funções e Conjuntos Cilíndricos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes sobre funções e conjuntos cilíndricos que serão utilizados ao longo da dissertação, principalmente no capítulo 4. O principal resultado envolvendo esses objetos que introduziremos a seguir é a equivalência entre a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos e a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Para isto, basear-nos-emos na referência [8].

**Definição 1.9.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Uma função  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita cilíndrica se existem funcionais  $\psi_1, \dots, \psi_n$  em  $X^*$  e uma função real Borel mensurável  $\phi$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que*

$$\psi(x) = \phi(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)),$$

para todo  $x \in X$ .

Um conjunto  $Y \subset X$  é chamado de cilíndrico se a função  $x \mapsto \mathbb{1}_Y(x)$  é cilíndrica ou, equivalentemente, se  $Y$  é dado por

$$Y = \{x \in X : (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) \in W\},$$

para um conjunto boreliano  $W \subset \mathbb{R}^n$  e funcionais  $\psi_1, \dots, \psi_n \in X^*$ .

Denotamos a coleção de todos os conjuntos cilíndricos de  $X$  por  $\text{Cil}(X)$ .

Observe que a coleção  $\text{Cil}(X)$  é um anel pois, claramente,  $\emptyset \in \text{Cil}(X)$  e, se  $Y_1$  e  $Y_2$  são conjuntos cilíndricos, então são escritos como  $Y_i = \{x \in X : (\psi_1^i(x), \dots, \psi_{n_i}^i(x)) \in W_i\}$ , para algum conjunto boreliano  $W_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ , onde  $i = 1, 2$ ; assim,

$$Y_1 \cup Y_2 = \{x \in X : (\psi_1^1(x), \dots, \psi_{n_1}^1(x), \psi_1^2(x), \dots, \psi_{n_2}^2(x)) \in W_1 \times W_2\}$$

e

$$Y_1 \setminus Y_2 = \{x \in X : (\psi_1^1(x), \dots, \psi_{n_1}^1(x), \psi_1^2(x), \dots, \psi_{n_2}^2(x)) \in W_1 \times (W_2)^c\},$$

ou seja, ambos  $Y_1 \cup Y_2$  e  $Y_1 \setminus Y_2$  também são conjuntos cilíndricos.

Além disso, como é mostrado no próximo resultado, temos uma equivalência entre as  $\sigma$ -álgebras geradas pelos conjuntos borelianos e conjuntos cilíndricos e, como consequência, temos que se uma medida é zero em todo conjunto cilíndrico então ela é nula.

**Proposição 1.10.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado separável. Então:*

- (i) *A  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\text{Cil}(X)$  é igual a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(X)$ ;*
- (ii) *Se  $\mu$  é uma medida no espaço mensurável  $(X, \mathcal{B}(X))$  tal que  $\mu(Y) = 0$  para todo  $Y \in \text{Cil}(X)$ , então  $\mu = 0$ .*

Para conseguirmos demonstrar esta proposição, precisaremos antes do seguinte resultado:

**Lema 1.11.** *Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado separável. Então existe uma sequência  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no espaço dual  $X^*$  tal que, para todo  $x \in X$ ,*

$$\|x\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x).$$

*Demonstração.* Seja  $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$  a esfera unitária centrada na origem de  $X$ . Como  $S$  é um conjunto fechado e  $X$  é um espaço separável, então  $S$  é separável. Logo, existe um subconjunto enumerável  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  denso em  $S$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um funcional linear  $\psi_n \in X^*$  tal que  $\psi_n(x_n) = \|x_n\| = 1$  e  $\|\psi_n\|_{X^*} = \|x_n\| = 1$ , por um corolário do teorema de Hahn-Banach. Dados  $k \in \mathbb{N}$  e  $x \in S$ , pela densidade de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ , existe  $N_k \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_{N_k} - x\| < \frac{1}{k}$ . Assim,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \psi_{N_k}(x) = \psi_{N_k}(x_{N_k} - (x_{N_k} - x)) = \psi_{N_k}(x_{N_k}) - \psi_{N_k}(x_{N_k} - x) \\ &\geq 1 - \|\psi_{N_k}\|_{X^*} \|x_{N_k} - x\|_X \geq 1 - \frac{1}{k} = \|x\|_X - \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos que

$$\|x\|_X = \sup_{k \in \mathbb{N}} \psi_{N_k}(x),$$

como queríamos mostrar.  $\square$

*Demonstração da Proposição 1.10.* Primeiramente, vamos provar o item (i). Como todo conjunto cilíndrico é um conjunto boreliano, temos a primeira inclusão, isto é, que a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\text{Cil}(X)$  está contida em  $\mathcal{B}(X)$ . Por outro lado, considere a sequência  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$  como no lema anterior. Dados  $r > 0$  e  $x \in X$ , seja  $\overline{B}_r(x)$  a bola fechada em  $X$  de raio  $r$  centrada em  $x$ . Vamos mostrar que

$$\overline{B}_r(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{y \in X : \psi_n(y) \in (-\infty, \psi_n(x) + r]\},$$

onde  $(-\infty, \psi_n(x) + r]$  é um conjunto boreliano em  $\mathbb{R}$ . Para isto, note que se  $y \in \overline{B}_r(x)$ , então  $\|y - x\|_X \leq r$  e, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é válido

$$\psi_n(y) - \psi_n(x) = \psi_n(y - x) \leq |\psi_n(y - x)| \leq \|\psi_n\|_{X^*} \|y - x\|_X \leq r,$$

usando do lema anterior que  $\|\psi_n\|_{X^*} = 1$ . Logo,  $\psi_n(y) \leq \psi_n(x) + r$ , isto é,  $\psi_n(y) \in (-\infty, \psi_n(x) + r]$ , para todo natural  $n$ , provando a primeira inclusão. Para a segunda inclusão, considere  $y \in X$  tal que  $\psi_n(y) \leq \psi_n(x) + r$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo lema anterior, sabemos que

$$\|y - x\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(y - x)$$

e, pela linearidade dos funcionais  $\psi_n$ , temos que  $\psi_n(y - x) = \psi_n(y) - \psi_n(x) \leq r$ , para todo natural  $n$ . Portanto,  $\|y - x\|_X \leq r$ , ou seja,  $y \in \overline{B}_r(x)$  e, assim, demonstramos a igualdade dos conjuntos.

Por último, usando que a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas bolas fechadas em  $X$  é igual a  $\sigma$ -álgebra de Borel e o que provamos anteriormente, isto é, que  $\overline{B}_r(x)$  pode ser escrita como uma interseção enumerável de conjuntos cilíndricos, obtemos que



a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\text{Cil}(X)$  contém a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Portanto, ambas  $\sigma$ -álgebras coincidem.

Além disso, sendo  $\text{Cil}(X)$  um anel como discutido anteriormente e, por (i), sabemos que gera  $\mathcal{B}(X)$ , o item (ii) segue do fato de que toda medida que se anula em um anel também se anula na  $\sigma$ -álgebra gerada pelo anel.  $\square$

## 1.4 Teoria de Semigrupo

Seja  $X$  um espaço de Banach e considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

com condição inicial  $u_0 \in X$  e sendo  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  um operador linear não necessariamente limitado, cujo domínio  $\mathcal{D}(A)$  é um subespaço linear de  $X$ . A teoria de semigrupo visa estudar as soluções do problema (1.2), ou seja, buscamos a existência e unicidade de uma solução  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  da equação diferencial (1.2). Veremos que precisamos impor condições sob o operador  $A$  para que (1.2) tenha uma única solução para cada dado inicial  $u_0 \in X$ .

Primeiramente, vamos supor que o problema acima com condição inicial  $u_0 \in X$  tenha solução única  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ . Definimos para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  o operador linear  $S_t : X \rightarrow X$  como

$$S_t u_0 = u(t), \quad (1.3)$$

onde  $u$  é a única solução de (1.2) com dado inicial  $u_0 \in X$ . Veremos a seguir que esse operador recebe um nome especial.

**Definição 1.12.** *A família  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  de operadores lineares limitados que mapeiam o espaço de Banach  $X$  nele mesmo é chamada de semigrupo se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1)  $S_0 u_0 = u_0$ , para todo  $u_0 \in X$ ;
- (2)  $S_{t+s} u_0 = S_t S_s u_0 = S_s S_t u_0$ , para todos  $t, s \in \mathbb{R}_+$  e  $u_0 \in X$ ;
- (3) O mapa  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S_t u_0 \in X$  é contínuo para cada  $u_0 \in X$ .

Além disso, dizemos que  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é um semigrupo de contração se também tivermos

- (4)  $\|S_t\| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma de operador.

Note que a condição (2) representa a suposição de que  $u$  é a única solução do problema (1.2) e que o item (4) implica que  $\|S_t u_0\| \leq \|u_0\|$  para todos tempos  $t \in \mathbb{R}_+$  e  $u_0 \in X$ .

A seguir, veremos o resultado que garante a boa-colocação do problema (1.2), cuja demonstração pode ser vista em [15, Teorema I].

**Teorema 1.13.** *O problema de valor inicial (1.2) tem uma única solução se, e somente se, o operador  $A$  é o gerador de um semigrupo de contração  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Neste caso, a única solução de (1.2) é dada por  $u(t) = S_t u_0$ .*

Lembremos aqui que, se  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é um semigrupo de contração, definimos o gerador do semigrupo como sendo o operador  $A$  tal que

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_t f - f}{t},$$

para toda função  $f \in \mathcal{D}(A)$  no domínio do operador  $A$ , se e só se o limite existe.

## 1.5 Transporte Ótimo

A ideia de plano de transporte ótimo tem como motivação o problema de minimizar o custo para transportar uma certa quantia de material de um ponto para outro. Por exemplo, considere o cenário de transportar pães fabricados por algumas padarias para os restaurantes em que serão consumidos pelos clientes. Suponha que a quantidade de pães que cada padaria consegue produzir e a quantidade de pães consumidos em cada restaurante sejam sabidas. Podemos relacionar ambas quantias com as medidas de probabilidade  $\mu$  e  $\nu$ , respectivamente. Assim, podemos querer perguntar onde cada unidade de pão deve ir de maneira a minimizar o preço total do transporte dos pães entre as padarias e os restaurantes. Veremos que existe esse minimizante de custo e chamá-lo-emos de plano de transporte ótimo.

Para isto, vamos usar conceitos e resultados que podem ser encontrados nas referências [20, Capítulo 1] e [21, Capítulo 4], para provar a existência de um plano de transporte ótimo entre quaisquer duas medidas de probabilidade definidas em dois espaços poloneses. Tal resultado será utilizado na teoria de soluções estatísticas desenvolvida no capítulo 4.

**Definição 1.14.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços poloneses e  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  e  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  duas medidas de probabilidade em  $X$  e em  $Y$ , respectivamente. Definimos o conjunto de planos de transporte entre  $\mu$  e  $\nu$ , que denotamos por  $\Pi(\mu, \nu)$ , como o conjunto de todas as medidas de probabilidade de Borel  $\pi$  em  $X \times Y$  tais que para todos subconjuntos mensuráveis  $A \subset X$  e  $B \subset Y$ ,*

$$\pi(A \times Y) = \mu(A) \quad e \quad \pi(X \times B) = \nu(B).$$

Lembremos que um espaço polonês é um espaço topológico separável completamente metrizável, ou seja, é um espaço homeomorfo a um espaço métrico completo que tem um subconjunto enumerável denso. Clássicos exemplos de espaços poloneses são a reta real equipada com a distância euclidiana e quaisquer espaços de Banach separáveis. E, note que o conjunto  $\Pi(\mu, \nu)$  é sempre não-trivial, dado que a medida  $\mu \otimes \nu$  sempre está contida nele, que é conhecida como plano de transporte trivial.

O teorema a seguir é um resultado de compacidade em espaço de probabilidade que é discutido em maiores detalhes em [21] e utilizá-lo-emos para demonstrar a existência de um plano de transporte ótimo.

**Teorema 1.15** (Prokhorov). *Seja  $X$  um espaço polonês. Então o fecho de um conjunto  $K \subset \mathcal{P}(X)$  é sequencialmente compacto na topologia fraca-\* se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existir um conjunto compacto  $K_\epsilon$  tal que  $\mu(X \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$ , para toda medida  $\mu \in K$ .*

**Teorema 1.16.** *Sejam  $(X, \mu)$  e  $(Y, \nu)$  dois espaços poloneses de probabilidade e  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função semicontínua inferiormente. Então existe um plano de transporte  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  que minimiza o funcional  $F : \Pi(\mu, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$F(\rho) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\rho(x, y)$$

dentre todos os elementos  $\rho \in \Pi(\mu, \nu)$ . Em outras palavras,

$$\inf_{\rho \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\rho(x, y) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar que o conjunto dos planos de transporte  $\Pi(\mu, \nu)$  é compacto na topologia fraca-\* de  $\mathcal{P}(X \times Y)$ . Para isto, dado  $\epsilon > 0$ , considere dois conjuntos compactos  $K \subset X$  e  $L \subset Y$  tais que

$$\mu(X \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \nu(Y \setminus L) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

que existem pela propriedade de toda medida de Radon ser regular interior. Se  $(x, y) \in (X \times Y) \setminus (K \times L)$ , então ou  $x \notin K$  ou  $y \notin L$  e, portanto,  $(x, y) \in X \times (Y \setminus L) \cup (X \setminus K) \times Y$ . Assim, para todo  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , temos

$$\begin{aligned} \pi((X \times Y) \setminus (K \times L)) &\leq \pi(X \times (Y \setminus L)) + \pi((X \setminus K) \times Y) \\ &= \nu(Y \setminus L) + \mu(X \setminus K) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Prokhorov, o fecho do conjunto  $\Pi(\mu, \nu)$  é sequencialmente compacto na topologia fraca-\* de  $\mathcal{P}(X \times Y)$ .

Agora vamos mostrar que  $\Pi(\mu, \nu)$  é fechado na topologia fraca-\* de  $\mathcal{P}(X \times Y)$ . Para isto, considere uma sequência  $(\pi_n)$  em  $\Pi(\mu, \nu)$  que converge fraco-\* para uma medida  $\pi$  em  $X \times Y$ , ou seja,

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\pi_n(x, y) \rightarrow \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para toda  $f \in C_b(X \times Y)$ . Tomando  $f(x, y) = \tilde{f}(x)$ , onde  $\tilde{f} \in C_b(X)$ , temos

$$\int_X \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} \tilde{f}(x) d\pi(x, y) = \int_X \tilde{f}(x) dp_X \# \pi(x),$$

onde  $p_X(x, y) = x$  é a projeção sobre  $X$ ,  $p_X \# \pi$  é a medida “pushforward” de  $\pi$  induzida por  $p_X$  e a primeira igualdade segue de  $\nu$  ser uma medida de probabilidade. Como a expressão acima vale para qualquer função  $\tilde{f} \in C_b(X)$ , segue que  $p_X \# \pi = \mu$ . E, similarmente, obtemos que  $p_Y \# \pi = \nu$ . Logo,  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  e, então,  $\Pi(\mu, \nu)$  é fechado na topologia fraca-\*, como queríamos mostrar.

Agora, considere  $(\pi_n)$  em  $\Pi(\mu, \nu)$  um sequência minimizante de  $F$ , isto é, tal que

$$F(\pi_n) \rightarrow \inf_{\rho \in \Pi(\mu, \nu)} F(\rho) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como  $\Pi(\mu, \nu)$  é compacto na topologia fraca-\*, existe  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  tal que  $\pi_n \xrightarrow{*} \pi$ . Pelo teorema de Portmanteau, dizer que a sequência  $\pi_n \xrightarrow{*} \pi$  é equivalente a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi_n(x, y) \geq \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y),$$

para toda função  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  semicontínua inferiormente e limitada por baixo.

Nosso candidato para minimizar o funcional  $F$  é  $\pi$ . Assim, resta-nos mostrar isto: como  $c$  é uma função semicontínua inferiormente e limitada por baixo e  $\pi_n \xrightarrow{*} \pi$ , pelo comentário acima, temos

$$\inf_{\rho \in \Pi(\mu, \nu)} F(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_n(x, y) \geq \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = F(\pi).$$

Portanto o plano de transporte  $\pi$  é um minimizante de  $F$ , como queríamos.  $\square$

## Capítulo 2

# Soluções Fracas

Muitos fenômenos físicos em dinâmica dos fluidos são modelados por sistemas de equações diferenciais parciais para o qual, em geral, não se é sabida a existência de solução global clássica para o problema de Cauchy para todos os dados iniciais suaves. Na busca por novas ferramentas para investigar o comportamento de fluidos e na ausência de um resultado de existência e unicidade de solução no sentido clássico, uma estratégia é relaxar a definição de solução.

É de se desejar que possamos resolver a equação diferencial parcial no sentido que sua solução seja única e estável com respeito a um dado inicial. Neste caso, dizemos que o problema é bem-posto e a condição de continuidade com relação ao dado inicial é particularmente importante para problemas com motivações e aplicações físicas, pois queremos que a (única) solução varie pouco se as condições do problema variarem pouco.

Contudo, pedir que uma solução de uma equação diferencial parcial de ordem  $k$  seja  $k$  vezes continuamente diferenciável pode ser muito forte em vários casos, pois nem sempre podemos resolver um problema no sentido clássico. Nossa motivação ao longo deste capítulo será definir uma noção mais fraca de solução para uma classe de equações diferenciais conhecidas por leis de conservação de maneira a não envolvermos mais as derivadas da solução explicitamente.

Para isto, primeiramente, veremos a definição de soluções fracas para leis de conservação, que descrevem a evolução de sistemas físicos com alguma propriedade mensurável que não muda à medida que o sistema evolui ao longo do tempo. E, posteriormente, definiremos uma classe especial de soluções fracas que satisfazem uma condição de entropia.

Sejam  $u = u(x, t) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$  o vetor de variáveis conservadas e  $f = (f^1, \dots, f^d) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$  a função fluxo. Considere o problema

$$\partial_t u + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2.2}$$

isto é, uma equação diferencial parcial não-linear com dado inicial  $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $\partial_{x_l} f^l(u)$  é o vetor  $N$ -dimensional dado por

$$\partial_{x_l} f^l(u) = \begin{bmatrix} \partial_{x_l} f_1^l(u) \\ \vdots \\ \partial_{x_l} f_N^l(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_1^l}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_N^l}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \end{bmatrix},$$

para cada índice  $1 \leq l \leq d$ , o operador  $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$  e

$$\nabla_x \cdot f(u) = \sum_{l=1}^d \partial_{x_l} f^l(u).$$

Este sistema é dito uma lei de conservação hiperbólica (LCH) se a matriz Jacobiana do fluxo tem autovalores reais.

Note que no caso 1-dimensional, ou seja, quando  $x \in \mathbb{R}$ , a equação diferencial de (LCH) é escrita como

$$0 = \partial_t u + \partial_x f(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_N}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_1}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_N}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

A equação (2.1) governa vários fenômenos multidimensionais envolvendo dinâmica dos fluidos e, em particular, modela a formação e propagação de ondas de choque, que é uma curva de descontinuidade de uma solução  $u$ . Assim, se estamos interessados em estudar leis de conservação considerando a física por trás do problema, precisamos permitir que as soluções  $u$  não precisem ser continuamente diferenciáveis, nem sequer contínuas.

Apesar de em geral a lei de conservação não possuir solução clássica, veremos ao longo deste capítulo que ela é bem-posta no caso escalar se permitirmos soluções generalizadas adequadamente definidas. Assim, precisamos buscar uma classe maior de candidatos para soluções e, posteriormente para garantirmos a unicidade da solução, precisamos impor algum critério para selecionarmos a solução fisicamente correta, ou seja, a que esperamos que ocorra na natureza.

## 2.1 Solução Fraca

Na dificuldade de se obter uma solução clássica ou até mesmo na impossibilidade de sua existência (por exemplo, o problema pode desenvolver descontinuidades, como ondas de choque), podemos relaxar o conceito de solução do problema (LCH). A ideia é não envolver diretamente as derivadas da solução, surgindo assim a classe de soluções fracas, definidas a seguir, como pode ser visto em [9].

**Definição 2.1.** Uma função  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  é dita uma solução fraca do problema (LCH) se satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(x, t) u(x, t) + \nabla_x \varphi(x, t) \cdot f(u(x, t)) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) u_0(x) \, dx = 0, \quad (2.3)$$

para qualquer função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

No ano de 1970, Stanislav Kružkov demonstrou a boa-colocação para uma classe especial de soluções fracas de leis de conservação escalares no trabalho [18]: as soluções de entropia, que enunciaremos a seguir. Contudo, não é conhecido um resultado geral de existência global que valha para qualquer sistema multidimensional de leis de conservação. E, muito menos podemos garantir a regularidade ou unicidade deste tipo de solução. Pelo contrário, como demonstrado em [9], a unicidade de solução, mesmo as que satisfazem um critério de entropia, é falsa.

### 2.1.1 Solução de Entropia

Apesar de matemáticos terem conseguido provar a existência de soluções fracas para alguns casos particulares de leis de conservação, geralmente é muito mais complicado obter resultado de unicidade para estas. Para tal, geralmente são propostas que tais soluções satisfaçam condições extras, ou seja, impomos que as soluções satisfaçam o que chamamos de condição de entropia para garantirmos que sejam únicas. A condição de entropia está relacionada com a Segunda Lei da Termodinâmica, para que selecionemos as soluções fisicamente relevantes.

Para definirmos o que são as soluções de entropia, lembremos do conceito de par de entropia antes. O par  $(\eta, q)$  é dito de entropia se é formado por funções  $\eta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$  tais que  $\eta$  é convexa e  $q$  satisfaz a condição de compatibilidade  $q'(u) = \eta'(u) \cdot f'(u)$ .

**Definição 2.2.** Dizemos que uma solução fraca  $u$  do problema (LCH) satisfaz a condição de entropia se

$$\partial_t \eta(u) + \nabla_x \cdot q(u) \leq 0$$

no sentido das distribuições, isto é, em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ , para qualquer par de entropia  $(\eta, q)$ , ou seja, que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_t \varphi(x, t) \eta(u(x, t)) + \nabla_x \varphi(x, t) \cdot q(u(x, t))] \, dx \, dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) \eta(u_0(x)) \, dx \geq 0 \end{aligned}$$

vale para qualquer função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  não-negativa.

*E, neste caso, se  $u$  é uma solução fraca do problema (LCH) que satisfaz a condição de entropia, chamamos  $u$  de solução de entropia.*

Como comentado anteriormente, em [18], são provadas a existência, a unicidade e a estabilidade de soluções de entropia para leis de conservação escalares, ou seja, quando  $N = 1$ , usando o par de entropia  $(\eta, q)$  formado por uma função convexa  $\eta$  e  $q(u) := \int^u \eta'(\xi) f'(\xi) d\xi$ . Em particular, para o caso em que a função  $\eta(u) = |u - c|$ , onde  $c$  é uma constante real qualquer, obtemos a seguinte condição de entropia para o problema (LCH)

$$\partial_t |u - c| + \nabla_x \cdot q(u, c) \leq 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+),$$

onde  $q(u, c) = \text{sgn}(u - c) (f(u) - f(c))$ . Tal condição é conhecida por condição de entropia de Kruřkov e é a que utilizaremos futuramente no capítulo 4 para motivar a definição de solução estatística de entropia. Note que usando tal condição, impomos estabilidade da solução fraca do problema (LCH) com respeito a uma certa família de soluções estacionárias, as soluções constantes.

Contudo, após algumas simulações numéricas feitas no artigo [9], foi proposto que soluções de entropia podem não ser as melhores para trabalharmos com leis de conservação, dado que não podemos garantir unicidade nem estabilidade, principalmente em dimensões maiores, ou até mesmo em dimensão baixa quando há muita oscilação. Neste cenário, uma abordagem levantada foi a de considerar soluções de entropia a valor de medida: ao invés de usarmos funções integráveis, trabalhamos com medidas de probabilidade parametrizadas (medidas de Young).



## Capítulo 3

# Soluções Estatísticas e a Valor de Medida para Equações Diferenciais

Vamos primeiramente lembrar que no Capítulo 2 apresentamos o conceito de solução fraca para leis de conservação, que relaxa a noção de solução ao não envolver explicitamente as derivadas da solução na definição e, com este enfraquecimento, é mais fácil garantir a existência deste tipo de solução. Mas também podemos querer buscar informações estatísticas a respeito do comportamento de sistemas físicos governados por uma lei de conservação, surgindo, assim, o sentido de solução estatística, como foi feito por Reinhard Illner e Joachim Wick, em [17]. Outra motivação, baseada no artigo [6], é usando a representação de limite fraco de soluções aproximadas de leis de conservação como uma medida de Young, que origina a definição de solução a valor de medida.

Neste capítulo, mostraremos essas duas diferentes definições de solução primeiramente para o caso mais geral do problema de Cauchy de um sistema autônomo e, posteriormente, para leis de conservação e depois focaremos em quais são as relações entre essas soluções. Aliás, veremos que, dadas as duas definições aqui propostas, toda solução estatística gera uma solução a valor de medida, ou seja, existem mais soluções a valor de medida do que soluções estatísticas.

Atentemos ao fato de que ao longo deste capítulo apenas chamaremos de solução estatística a definição que proporemos, mas para diferenciar das outras noções de solução estatística do trabalho, quando necessário, referenciaremos como solução estatística no sentido de Illner-Wick.

### 3.1 Problema de Cauchy para um Sistema Autônomo

Considere um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x), \quad (3.1)$$

onde  $x = x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , com dado inicial  $x(t_0) = x_0$ , conhecido por problema de Cauchy. Estamos interessados nos pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tais que as soluções de (3.1) com dados iniciais  $x(t_0) = x_0$  bifurcam em  $x_0$ , assim, estamos interessados nos casos em que o problema não é bem-posto.

Por simplicidade, assumiremos que  $x_0 = 0$  e  $f(0) = 0$ , e também vamos impor que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x) \\ x(t_0) = z \end{cases}$$

é localmente bem-posto para todo  $z \neq 0$ , ou seja, que o problema de Cauchy tem uma única solução local. Além disso, vamos considerar que tal solução exista globalmente no tempo, a menos que passe pela origem em algum momento. Denotaremos tal operador solução, enquanto fizer sentido ele existir, por  $S_{\tau t_0}$ . Assim,  $S_{\tau t_0}x_0 = x(\tau)$ , onde  $x$  é solução de

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(S_{\tau t_0}x_0) = f(S_{\tau t_0}x_0) \\ S_{t_0 t_0}x_0 = x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

E, como o problema (3.2) é autônomo, temos que  $S_{\tau t_0}$  depende apenas de  $\tau - t_0$ .

Seja  $\mathbb{R}_+^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  e considere o conjunto

$$U := \{(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : S_{\tau t_0}x_0 \neq 0 \text{ para } 0 \leq \tau < +\infty\},$$

ou seja, todos os pontos  $(x_0, t_0)$  tais que  $S_{\tau t_0}x_0 = x(\tau)$ , que é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

não atingem a origem, isto é,  $S_{\tau t_0}x_0$  sempre é diferente de zero para qualquer tempo  $\tau$ . Também defina

$$V_a := \{(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : \text{existe } \beta = \beta(x_0, t_0) \text{ com } 0 < \beta < t_0 \text{ tal que } S_{\tau t_0}x_0 \neq 0 \text{ para } \beta < \tau < +\infty \text{ e } S_{\beta t_0}x_0 = 0\},$$

que representa o conjunto de pontos  $(x_0, t_0)$  tais que a solução  $S_{\tau t_0} x_0$  do problema (3.3) passou pela origem em algum momento  $\tau = \beta$  anterior ao tempo  $t_0$ . E, por último, considere

$$V_p := \{(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : \text{existe } \alpha = \alpha(x_0, t_0) \text{ com } t_0 < \alpha \text{ tal que } S_{\tau t_0} x_0 \neq 0 \text{ para } 0 < \tau < \alpha \text{ e } S_{\alpha t_0} x_0 = 0\},$$

ou seja, o conjunto de pontos  $(x_0, t_0)$  tais que a solução  $S_{\tau t_0} x_0 = x(\tau)$  do problema (3.3) não passa pela origem até o tempo  $\alpha$  posterior ao tempo  $t_0$ , isto é, existe um momento  $\alpha$  tal que a solução  $S_{\alpha t_0} x_0$  passará pela origem.

Vamos assumir também que os conjuntos  $V_a \cup V_p \neq \emptyset$ , dado que estamos interessados nos pontos  $(x_0, t_0)$  cujas soluções do problema (3.3) passam pela origem em algum momento, tanto antes quanto depois, para conseguirmos falar de bifurcação na origem. Além disso, vamos considerar que a interseção desses conjuntos é trivial, isto é,  $V_a \cap V_p = \emptyset$ , pois não queremos que uma trajetória passe pela origem mais de uma vez. E, por último, consideraremos que  $\mathbb{R}_+^{N+1} = U \cup V_a \cup V_p \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ .

Além disso, denotaremos da seguinte maneira os conjuntos

$$\begin{aligned} U(t_0) &:= \{x_0 \in \mathbb{R}^N : (x_0, t_0) \in U\} \\ V_a(t_0) &:= \{x_0 \in \mathbb{R}^N : (x_0, t_0) \in V_a\} \\ V_0 &:= \{x_0 \in \mathbb{R}^N : (x_0, 0) \in V_p\} \\ V_0(t_0) &:= \{x_0 \in V_0 : \alpha(x_0) \geq t_0\}. \end{aligned}$$

Note que  $U(t_0)$  e  $V_a(t_0)$  são as projeções no espaço  $\mathbb{R}_+^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  dos conjuntos  $U$  e  $V_a$ , para cada tempo  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Ademais, observe que o conjunto  $V_0(t_0)$  impõe mais condições que  $V_0$  pois seus pontos, além de termos que existe um tempo  $\alpha = \alpha(x_0) > 0$  tal que  $S_{\tau t_0} x_0 \neq 0$  para  $0 < \tau < \alpha$  e  $S_{\alpha t_0} x_0 = 0$ , pedimos que tal tempo  $\alpha$  seja maior ou igual que  $t_0$ .

Por último, considere o conjunto  $R_a \subset S^{N-1}$  dado por

$$R_a := \left\{ k \in S^{N-1} : k = k(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \beta(x_0, t_0)} \frac{S_{\tau t_0} x_0}{\|S_{\tau t_0} x_0\|}, \text{ para } x_0 \in V_a(t_0) \text{ e } t_0 \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

ou seja, o conjunto de todas as direções na esfera  $S^{N-1}$  nas quais a trajetória  $S_{\tau t_0} x_0$  passando pelo ponto  $x_0$  saiu da origem em um momento anterior ao tempo  $t_0$ . Vamos assumir que os vetores  $k(x_0)$  existem para todos  $x_0 \in V_a(t_0)$  e que o conjunto  $R_a \subset S^{N-1}$  é mensurável.

Para conseguirmos entender melhor o que cada conjunto representa, vamos considerar o seguinte exemplo

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} x = |x|^{1/2} \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Observe que a função  $f(x) = |x|^{1/2}$  não é de Lipschitz e, na origem,  $f(0) = 0$ . Ou seja, a solução do problema não estará bem-posta se passar pela origem, no sentido de que ela poderá bifurcar. Veremos a seguir que a trajetória da solução será determinada pelo seu dado inicial  $x_0$ .

Se  $x_0 > 0$ , então qualquer solução de (3.4) satisfaz  $x(\tau) > 0$ , pois  $\frac{dx}{d\tau} = |x|^{1/2} > 0$ . Além disso, a solução será dada por

$$x(\tau) = \left( \frac{\tau - t_0}{2} + x_0^{1/2} \right)^2,$$

para todo  $\tau \geq t_0$ . Além disso, para  $\beta = t_0 - 2x_0^{1/2}$ , temos

- (i)  $S_{\tau t_0} x_0 < 0$  se  $0 \leq \tau < \beta$ ;
- (ii)  $S_{\beta t_0} x_0 = 0$ ;
- (iii)  $S_{\tau t_0} x_0 > 0$  se  $\beta < \tau < t_0$ .

Se  $x_0 = 0$ , o problema (3.4) admite infinitas soluções pois, para todo  $c \geq t_0$ , a função definida por

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \leq c \\ \frac{(\tau - c)^2}{4} & \text{se } c < \tau \end{cases}$$

é uma solução de (3.4).

Se  $x_0 < 0$ , vamos ter problema, porque  $\frac{dx}{d\tau} = |x|^{1/2} > 0$ , logo  $x(\tau)$  é crescente e, eventualmente, pode passar pela origem. Enquanto  $x(\tau) < 0$ , temos

$$x(\tau) = - \left[ \frac{\tau - t_0}{2} + (-x_0^{1/2}) \right]^2,$$

para  $\tau \geq 0$ . E, se  $x(\tau) \geq 0$ , então a solução passou pela origem em algum momento. Este momento é  $\alpha = t_0 - 2(-x_0)^{1/2}$ .

Com essa análise, podemos representar graficamente quem são os conjuntos  $U(0)$ ,  $U$ ,  $U(t_0)$ ,  $V_a$ ,  $V_a(t_0)$ ,  $V_p$ ,  $V_0$  e  $V_0(t_0)$  neste exemplo como a seguir:

O próximo passo será definir o que é solução estatística para o problema de Cauchy para sistemas autônomos. Veremos qual é a definição rigorosa para esse conceito matemático mas, antes, vejamos uma motivação para obter a igualdade que toda solução estatística deverá satisfazer. Por simplicidade, vamos considerar o problema (3.2) com  $t_0 = 0$  e suponha que o problema possua solução única para cada ponto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  e denote o operador solução por  $S_t$ . Assuma também que todas as funções tenham a regularidade necessária de forma que as contas a seguir façam sentido. Dada uma medida de probabilidade inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , considere sua evolução temporal dada por

$$\mu_t(A) = \mu_0(S_t^{-1}A),$$

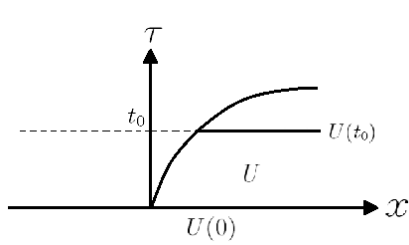


Figura 3.1

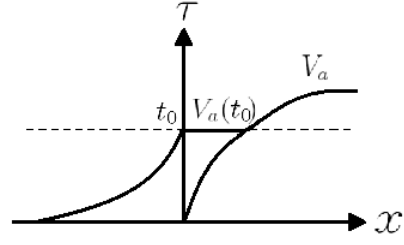


Figura 3.2

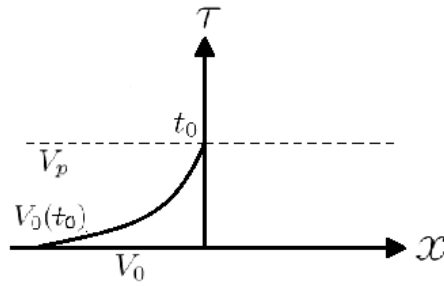


Figura 3.3

para todo conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ , isto é,  $\mu_t = S_t \# \mu_0$  é a medida “push-forward” de  $\mu_0$  induzida pelo operador solução  $S_t$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, t) d\mu_t(x) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(S_t x, t) d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \partial_t \varphi + \nabla_x \varphi \cdot \frac{d}{dt}(S_t x) \right] d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(S_t x) \cdot \nabla_x \varphi] d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] d\mu_t(x), \end{aligned}$$

para qualquer função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . Assim, integrando a expressão acima no intervalo temporal  $[0, \infty)$  e usando o teorema fundamental do cálculo, como supomos que todas as funções têm a regularidade necessária e  $\varphi$  tem suporte compacto em  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi](x, t) d\mu_t(x) dt &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, t) d\mu_t(x) \right] dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, 0) d\mu_0(x). \end{aligned}$$

Note que, apesar de termos precisado supor regularidade nas funções e a existência de uma única solução para o problema, a equação acima não envolve nada além do que já temos. Assim, parece ser uma boa expressão para ser usada na definição de uma solução mais geral.

A seguir veremos a definição de solução estatística para o problema (3.2) que, fisicamente, pode ser retratada como as possíveis evoluções temporais de uma nuvem de partículas cujas trajetórias satisfazem o problema de Cauchy (3.2). Observe que a equação que obtivemos acima, supondo toda a regularidade necessária, é a equação que toda solução estatística deve satisfazer.

**Definição 3.1** (Solução Estatística para o Problema de Cauchy (3.2)). *Uma solução estatística do problema (3.2) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  é uma função mensurável  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  que satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi](x, t) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) = 0, \quad (3.5)$$

para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

Também podemos imaginar a solução estatística de maneira a não termos explicitamente o dado inicial do problema, mas apenas uma distribuição de probabilidade do dado inicial. E, com isso, estamos interessados em obter a distribuição de probabilidade das trajetórias de solução em algum tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Além disso, observe que a equação (3.5) não envolve explicitamente o operador solução  $S_t$ , sendo um dos pontos fundamentais para que tal expressão seja uma generalização do problema (3.2). Mas, quando o operador solução  $S_t$  está bem-definido, então a família de medidas  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , onde  $\mu_t = S_t \# \mu_0$ , é uma solução estatística do problema com dado inicial  $\mu_0$ .

Nosso objetivo a seguir é provar a existência de soluções estatísticas do problema (3.2). Para isto, vamos construir uma família de medidas de Radon  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  em  $R_a \times \mathbb{R}_+$ , onde a quantidade  $P_t(Y \times I)$ , para  $Y \subset R_a$  e  $I \subset \mathbb{R}_+$ , pode ser entendida como a probabilidade de uma partícula que chega a origem no tempo  $t$  sair durante o intervalo temporal  $I$  em algumas das direções de  $Y \subset R_a$ . Aliás, o papel dessas medidas  $P_t$  é regular para onde irão as diversas trajetórias que passam pela origem e em qual momento isso acontecerá.

**Definição 3.2.** *A família  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  em  $R_a \times \mathbb{R}_+$  é formada por medidas positivas  $P_t \in \mathcal{M}(R_a \times \mathbb{R}_+)$  com massa maior total menor ou igual a um, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ , satisfazendo*

(i)  $\text{supp } P_t \subset R_a \times [t, \infty) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ ;

(ii) *E, o mapa  $t \mapsto P_t(X)$  é mensurável para qualquer conjunto boreliano  $X \subset R_a \times [t, \infty)$ .*

Na teoria de Cálculo Estocástico, a família  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é conhecida como família de medidas subestocásticas.

Agora, defina as probabilidades  $P(t, x, Y)$  como a probabilidade que uma partícula na posição  $x$  no tempo 0 esteja no conjunto  $Y$  no tempo  $t$  da seguinte maneira:  $P(t, x, Y)$  é a medida de probabilidade definida através de  $P_t$  por

$$P(t, x, Y) = \begin{cases} \delta_{S_t x}(Y) & \text{se } x \in U(0) \cup V_0(t) \\ P_{\alpha(x)}(\beta_t(Y \cap V_a(t))) \\ + \left(1 - \int_{R_a} P_{\alpha(x)}(dk, [0, t])\right) \delta_0(Y) & \text{se } x \in \bar{V}_0 \setminus V_0(t), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $\alpha(x) = \alpha(x, 0)$  e  $\beta(x) = \beta(x, 0)$  são os tempos obtidos na definição dos conjuntos  $V_p$  e  $V_a$  e  $Y \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto boreliano. Veja que o conjunto  $U(0)$  representa todos os pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que a solução  $S_t x_0$  do sistema autônomo (3.2) não passa pela origem em nenhum tempo  $0 \leq t < +\infty$ ; já o conjunto  $\bar{V}_0$  é formado pelos pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  em que a solução  $S_t x_0$  de (3.2) passa pela origem em algum momento. Portanto os conjuntos são complementares, isto é,  $U(0) = \bar{V}_0^c$  e a definição de  $P(t, x, Y)$  faz sentido. Além disso, para o termo  $\int_{R_a} P_{\alpha(x)}(dk, [0, t])$ , lembre que  $P_t \in \mathcal{M}(R_a \times \mathbb{R}_+)$  e, assim,  $P_t(\cdot, I) \in \mathcal{M}(R_a)$ .

Em Cálculo Estocástico, a medida  $P(t, x, Y)$  é conhecida como probabilidade de transição.

A partir destas medidas, podemos induzir uma evolução temporal de forma a obtermos medidas de probabilidade definidas da seguinte maneira: dada uma medida de probabilidade  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , considere sua evolução temporal  $H_t[\mu_0]$  sendo

$$H_t[\mu_0](Y) = \int_{\mathbb{R}^N} P(t, x, Y) d\mu_0(x)$$

para qualquer conjunto boreliano  $Y \subset \mathbb{R}^N$ . Consequentemente, para toda função  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ , é válida a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y) dH_t[\mu_0](y) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) P(t, x, dy) d\mu_0(x). \quad (3.7)$$

A seguir, mostraremos que a família  $\{H_t[\mu_0]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma solução estatística do problema de Cauchy com dado inicial  $\mu_0$ , ou seja, provaremos a existência de solução estatística de (3.2) por meio da construção de uma solução.

**Teorema 3.3** (Existência de Solução Estatística). *Dada uma medida de probabilidade  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , a família  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  definida por  $\mu_t = H_t[\mu_0]$ , para cada tempo  $t$ , é uma solução estatística do problema de Cauchy (3.2) com dado inicial  $\mu_0$ , para qualquer escolha de família de medidas subestocásticas  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfazendo as condições (i) e (ii).*

*Demonstração.* Nosso objetivo é provar a identidade (3.5) da definição de solução estatística do problema de Cauchy (3.2). Para isto, como  $\mathbb{R}^N = U(t) \cup V_a(t) \cup V_0 \cup \{0\}$ , para todo tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ , podemos separar a integral

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt$$

nas três seguintes integrais

$$(I) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt,$$

$$(II) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt$$

e

$$(III) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt,$$

já que o termo cuja integração seria sobre  $\{0\}$  é nulo, pois o conjunto tem medida nula.

Assim, para a primeira integral, usando (3.7), temos que

$$(I) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt$$

e, pela definição (3.6), sabemos que  $P(t, x, Y)$  é a probabilidade de uma partícula na posição  $x$  no tempo 0 estar em  $Y$  no tempo  $t$ , assim, se  $x \notin U(0)$  e  $Y \subset U(t)$ , então  $P(t, x, Y) = 0$  pois  $x \notin U(0)$  implica que  $S_t x$  vai passar pela origem em algum momento. Assim, separando a integral

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(0)} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus U(0)} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(0)} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt. \end{aligned}$$



Pela definição (3.6) da probabilidade  $P_t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(0)} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(0)} \int_{U(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) \delta_{S_t x}(dy) d\mu_0(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{U(0)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (S_t x, t) d\mu_0(x) dt.
\end{aligned}$$

E, dessa forma, podemos escrever

$$\text{(I)} = \int_{U(0)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d}{dt} [\varphi(S_t x, t)] dt d\mu_0(x) = - \int_{U(0)} \varphi(x, 0) d\mu_0(x),$$

usando o teorema de Fubini e o teorema fundamental do cálculo.

Para o terceiro termo integral, por (3.7), obtemos que

$$\begin{aligned}
\text{(III)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt.
\end{aligned}$$

Por raciocínio análogo ao que fizemos para (I), pela definição (3.6), sabemos que  $P(t, x, Y) = 0$  se  $x \notin V_0(t)$  e  $Y \subset V_0$ . E, então, separando a integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0(t)} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus V_0(t)} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0(t)} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt.
\end{aligned}$$

Usando a definição da probabilidade  $P_t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\text{(III)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0(t)} \int_{V_0} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) \delta_{S_t x}(dy) d\mu_0(x) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{V_0(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (S_t x, t) d\mu_0(x) dt
\end{aligned}$$

e, como  $t \leq \alpha(x)$  se  $x \in V_0(t)$ , usando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \text{(III)} &= \int_{V_0(t)} \int_0^{\alpha(x)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (S_t x, t) dt d\mu_0(x) \\ &= \int_{V_0} \int_0^{\alpha(x)} \frac{d}{dt} [\varphi(S_t x, t)] dt d\mu_0(x) \\ &= \int_{V_0} \varphi(0, \alpha(x)) d\mu_0(x) - \int_{V_0} \varphi(x, 0) d\mu_0(x), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do teorema fundamental do cálculo.

Agora, para a segunda integral, usando (3.7) e (3.6), temos

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P(t, x, dy) d\mu_0(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) P_{\alpha(x)}(\beta(dy, t)) d\mu_0(x) dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) \\ &\quad \quad \quad \times \left[ 1 - \int_{R_a} P_{\alpha(x)}(dk, [0, t]) \right] \delta_0(y) d\mu_0(x) dt \\ &= \text{(II.1)} + \text{(II.2)} \end{aligned}$$

já que, se  $x \notin \overline{V_0} \setminus V_0(t)$  e  $E \subset V_a(t)$ , então  $P(t, x, E) = 0$ .

Para o primeiro termo integral de (II), considere o mapa  $\sigma_t : V_a(t) \rightarrow R_a \times [0, t]$  definido por

$$\sigma_t(x) = (k, \beta(x, t)).$$

Lembremos que, para qualquer  $t \in \mathbb{R}_+$ , o mapa  $k : V_a(t) \rightarrow S^{N-1}$  é definido por

$$k(x) = \lim_{\tau \rightarrow \beta(x, t)} \frac{S_{\tau t} x}{\|S_{\tau t} x\|}.$$

Denotando a projeção na segunda coordenada de  $\sigma_t$  por  $\pi_2 \circ \sigma_t$ , isto é,  $\pi_2 \sigma_t(x) = \beta(x, t)$ , observe que  $\sigma_t^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, t) = 0$ , para todo  $k \in R_a$ . E, da expressão (II.1),

obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{(II.1)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \int_{V_a(t)} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (y, t) d(P_{\alpha(x)} \circ \pi_2 \sigma_t) (y) d\mu_0(x) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \int_0^t \int_{R_a} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (\sigma_t^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, \alpha(\xi)), t) \\
 &\quad \times P_{\alpha(x)}(dk, d\alpha(\xi)) d\mu_0(x) dt,
 \end{aligned}$$

onde  $\xi \in \overline{V_0} \setminus V_0(t)$ . Como a função  $t \mapsto (\sigma_t^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, \alpha(\xi)), t)$  é uma solução do problema (3.1) para  $t \geq \alpha(\xi)$ , podemos aplicar o teorema de Fubini e escrever o termo acima como

$$\begin{aligned}
 \text{(II.1)} &= \int_{\overline{V_0}} \int_{R_a} \int_{\overline{V_0}} \int_{\alpha(\xi)}^{\infty} \frac{d}{dt} [\varphi(\sigma_t^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, \alpha(\xi)), t)] dt P_{\alpha(x)}(dk, d\alpha(\xi)) d\mu_0(x) \\
 &= - \int_{\overline{V_0}} \int_{R_a} \int_{\overline{V_0}} \varphi(\sigma_{\alpha(\xi)}^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, \alpha(\xi)), \alpha(\xi)) P_{\alpha(x)}(dk, d\alpha(\xi)) d\mu_0(x),
 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do teorema fundamental do cálculo. Lembrando que  $\sigma_{\alpha(\xi)}^{-1} \circ \pi_2^{-1}(k, \alpha(\xi)) = 0$ , para todo  $k \in R_a$ , segue

$$\text{(II.1)} = - \int_{\overline{V_0}} \int_{R_a} \int_{\alpha(x)}^{\infty} \varphi(0, t) P_{\alpha(x)}(dk, dt) d\mu_0(x).$$

Por outro lado, observe que para o segundo termo integral de (II), como  $f(0) = 0$  temos

$$\begin{aligned}
 \text{(II.2)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\overline{V_0} \setminus V_0(t)} \partial_t \varphi(0, t) \left[ 1 - \int_{R_a} P_{\alpha(x)}(dk, [0, t]) \right] d\mu_0(x) dt \\
 &= \int_{\overline{V_0}} \int_{\alpha(x)}^{\infty} \partial_t \varphi(0, t) \left[ 1 - \int_{R_a} P_{\alpha(x)}(dk, [0, t]) \right] d\mu_0(x) dt,
 \end{aligned}$$

onde usamos o teorema de Fubini para a segunda igualdade. Agora, utilizando que  $P_{\alpha(x)}([0, \alpha(x))) = 0$ , por integração por partes, obtemos

$$\text{(II.2)} = - \int_{\overline{V_0}} \varphi(0, \alpha(x)) d\mu_0(x) + \int_{\overline{V_0}} \int_{\alpha(x)}^{\infty} \int_{R_a} \varphi(0, t) P_{\alpha(x)}(dk, dt) d\mu_0(x).$$

Logo, somando os termos (II.1) e (II.2), segue que

$$\text{(II)} = - \int_{\overline{V_0}} \varphi(0, \alpha(x)) d\mu_0(x).$$

E, somando (I), (II) e (III), concluímos que

$$\begin{aligned}
\text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt \\
&= - \int_{U(0)} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) - \int_{\overline{V_0}} \varphi(0, \alpha(x)) d\mu_0(x) \\
&\quad + \int_{V_0} \varphi(0, \alpha(x)) d\mu_0(x) - \int_{V_0} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) \\
&= - \int_{U_0 \cup V_0} \varphi(x, 0) d\mu_0(x),
\end{aligned}$$

já que os outros dois termos integrais se cancelam pois o conjunto de pontos em  $\overline{V_0} \setminus V_0$  tem medida nula. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt + \int_{U(0) \cup V_0} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) = 0.$$

Por último, note que  $U(0) \cup V_0 = \mathbb{R}^N$ , pois  $V_a(0) = \emptyset$ . Portanto, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi] (x, t) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) = 0,$$

que é exatamente a identidade da definição de solução estatística e, assim, concluímos a prova de existência deste tipo de solução.  $\square$

Observe que não conseguimos garantir a unicidade de soluções estatísticas para o problema (3.2) com o que temos até o momento, dado que nem temos unicidade para as soluções da forma  $\mu_t = H_t[\mu_0]$ , já que a família  $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  não é única. Mas, no caso em que o problema (3.2) é bem-posto, então teremos a unicidade de solução estatística.

**Teorema 3.4** (Unicidade de Solução Estatística). *Se o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução clássica no intervalo de tempo  $[0, T]$ , então  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística do problema com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  se, e somente se, é da forma  $\mu_t = S_{0t} \# \mu_0$ , onde  $S_{0t}$  é o operador solução do problema em  $[0, T]$ .*

*Demonstração.* Já vimos que  $\{\mu_t = S_{0t} \# \mu_0\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística de problema. Vamos provar agora que se  $\{\tilde{\mu}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  também é solução estatística do

problema com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  então  $\tilde{\mu}_t = \mu_t$ . Pela equação (3.5), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi](x, t) [d\tilde{\mu}_t(x) - d\mu_t(x)] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi](x, t) [d\tilde{\mu}_t(x) - d(S_{0t} \# \mu_0)(x)] dt, \end{aligned}$$

para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; \mathbb{R})$ .

Para cada função teste  $\varphi$ , existe uma função  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; \mathbb{R})$  tal que, se escrevermos  $\varphi$  como função de  $\psi$  da seguinte maneira

$$\varphi(x, t) = \int_0^t \psi(S_{\tau t} x, \tau) d\tau,$$

então  $\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi = \psi$ . De fato, denote por  $g(\tau, t) = \psi(S_{\tau t} x, \tau)$  e seja  $h$  tal que  $g(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, t)$ . Então

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(x, t) &= \partial_t (h(t, t) - h(0, t)) \\ &= \partial_\tau h(t, t) + \partial_t h(t, t) - \partial_t h(0, t) \\ &= g(t, t) + \partial_t h(t, t) - \partial_t h(0, t). \end{aligned}$$

Mas temos que

$$h(\tau, t) = \int_0^\tau g(s, t) ds + h(0, t),$$

então

$$\partial_t h(\tau, t) = \int_0^\tau \partial_t g(s, t) ds + \partial_t h(0, t).$$

Logo, obtemos

$$\partial_t h(t, t) - \partial_t h(0, t) = \int_0^t \partial_t [\psi(S_{\tau t} x, \tau)] d\tau = \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial t} S_{\tau t} x d\tau.$$

Como  $\frac{\partial}{\partial t} S_{\tau t} x = -f(x) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x)$ , então

$$\int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial t} S_{\tau t} x d\tau = - \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot (f(x) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x)) d\tau.$$

Por outro lado,

$$\nabla_x \varphi(x, t) = \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x) d\tau.$$

Dessa forma,

$$f(x) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) = \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot (f(x) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x)) \, d\tau.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(x, t) + f(x) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) &= g(t, t) - \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot (f(x) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x)) \, d\tau \\ &\quad + \int_0^t \nabla_x \psi(S_{\tau t} x, \tau) \cdot (f(x) \cdot \nabla_x(S_{\tau t} x)) \, d\tau \\ &= \psi(S_{tt} x, t) = \psi(x, t), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Portanto, obtemos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x, t) [d\tilde{\mu}_t(x) - d(S_{0t} \# \mu_0)(x)] \, dt,$$

para  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T]; \mathbb{R})$ . Assim, pela arbitrariedade da função  $\psi$ , concluimos que  $\tilde{\mu}_t - S_{0t} \# \mu_0 = 0$ , ou seja,  $\tilde{\mu}_t = S_{0t} \# \mu_0 = \mu_t$ . Em outras palavras, dadas as hipóteses do teorema, a única solução estatística do problema é a medida “pushforward” da medida inicial  $\mu_0$  induzida pelo operador solução  $S_{0t}$  do problema no intervalo  $[0, T]$ . □

A seguir, veremos uma outra noção de solução para o problema de Cauchy: as soluções a valor de medida. E, em seguida, provaremos que tal classe de soluções é ainda mais vasta que as soluções estatísticas vista anteriormente. De fato, mostraremos que toda solução estatística é uma solução a valor de medida do problema (3.1).

**Definição 3.5** (Solução a Valor de Medida para o Problema de Cauchy (3.1)). *Uma medida de Young  $\nu \in \mathbf{Y}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  é uma solução a valor de medida da equação diferencial (3.1) se  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \nu_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  é uma função mensurável que satisfaz a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left( \frac{d}{dt} \psi(t) \cdot \langle \nu_t, \xi \rangle + \psi(t) \cdot \langle \nu_t, f(\xi) \rangle \right) dt = 0,$$

para toda função teste  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty); \mathbb{R}^N)$ .

Lembremos que o par de dualidade  $\langle \nu, g(\xi) \rangle$  representa a integral

$$\langle \nu, g(\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) \, d\nu(\xi),$$

para quaisquer medida  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  e  $g$  função mensurável em  $\mathbb{R}^N$ .

**Teorema 3.6.** *Toda solução estatística com suporte compacto do problema de Cauchy (3.1) gera uma solução a valor de medida deste problema.*

*Demonstração.* Seja  $t \mapsto \mu_t$  uma solução estatística da equação (3.1) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  tais que  $\text{supp } \mu_0$  e  $\text{supp } \mu_t$  são conjuntos compactos, para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Então, para toda função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , é válida a expressão

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_x \varphi](x, t) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, 0) d\mu_0(x) = 0.$$

Como estamos considerando apenas as soluções estatísticas e os dados iniciais com suporte compacto, se tomarmos funções que são lineares na variável espacial  $x$ , ou seja, funções da forma  $\varphi(x, t) = \psi(t) \cdot x$ , onde  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty); \mathbb{R}^N)$ , então a integração acima faz sentido e tal igualdade se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{d}{dt} \psi(t) \cdot x + f(x) \cdot \psi(t) \right) d\mu_t(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \frac{d}{dt} \psi(t) \cdot \langle \mu_t, x \rangle + \psi(t) \cdot \langle \mu_t, f(x) \rangle \right) dt, \end{aligned} \quad (3.8)$$

para toda função  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty); \mathbb{R}^N)$ , usando que  $\varphi(x, 0) = \psi(0) \cdot x = 0$ , pois  $\psi$  tem suporte compacto em  $(0, \infty)$ . Observe que (3.8) é exatamente a igualdade que uma solução a valor de medida para a equação diferencial (3.1) deve satisfazer por definição. Ou seja, a família  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma solução a valor de medida do problema de Cauchy.  $\square$

Como provamos a existência de solução estatística do problema de Cauchy com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  e, agora, vimos que toda solução estatística gera uma solução a valor de medida, garantimos, portanto, a existência de solução a valor de medida do problema (3.1). E, por último, observe que, como não conseguimos a unicidade de solução estatística em geral e existem mais soluções a valor de medida do que soluções estatísticas, também não podemos afirmar nada sobre a unicidade de soluções a valor de medida.

## 3.2 Lei de Conservação

Nesta seção, começaremos apresentando o conceito de solução estatística para um problema de Cauchy para um sistema autônomo em  $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$  baseado no que fizemos na seção passada. Focaremos em seguida no caso específico em que este problema é uma lei de conservação. No primeiro cenário, abordaremos o caso de leis de conservação unidimensionais e apresentaremos os conceitos de solução estatística e de solução a valor de medida. E, posteriormente, veremos as noções dessas soluções no caso multidimensional.

### 3.2.1 Caso 1-dimensional

Primeiramente, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = Bu \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $B$  é um operador definido no espaço de Sobolev  $W^{1,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ , que é denso no espaço de Lebesgue  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ , e as funções  $u = u(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  pertencem a  $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ .

Assim como feito na seção passada, nosso objetivo será definir o que é uma solução estatística para o problema acima a partir de uma expressão que obtaremos a partir da suposição da regularidade necessária das funções e da existência e unicidade de solução deste problema. Dessa forma, suponha que (3.9) seja bem-posta para cada dado inicial  $f_0 \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$  e denote o operador solução por  $S_t$ . Dada uma medida de probabilidade inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$ , formalmente, seja  $\mu_t$  a evolução temporal de  $\mu_0$  através de  $S_t$ , que é a medida dada por

$$\mu_t(A) = \mu_0(S_t^{-1}A),$$

para todo conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$ , isto é,  $\mu_t = S_t\#\mu_0$  medida “pushforward” de  $\mu_0$  por  $S_t$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, t) d\mu_t(u) &= \\ &= \frac{d}{dt} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(S_t u, t) d\mu_0(u) \\ &= \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(S_t u, t) + (D_u \varphi(S_t u, t)) \left( \frac{d}{dt} S_t u \right) \right] d\mu_0(u) \\ &= \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(S_t u, t) + (D_u \varphi(S_t u, t)) (B(S_t u)) \right] d\mu_0(u) \\ &= \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(u, t) + (D_u \varphi(u, t)) (Bu) \right] d\mu_t(u), \end{aligned}$$

para qualquer função  $\varphi : H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  suave, onde  $D_u \varphi$  denota a derivada de Fréchet de  $\varphi$ , isto é,  $D_u \varphi : H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é um operador linear limitado tal que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|\varphi(u+v, t) - \varphi(u, t) - (D_u \varphi)(v)|}{\|v\|_{H^1}} = 0,$$



para  $v \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ . Assim, integrando a expressão acima no intervalo temporal  $[0, \infty)$  e usando o teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(u, t) + (D_u \varphi(u, t)) (Bu) \right] d\mu_t(u) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d}{dt} \left[ \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, t) d\mu_t(u) \right] dt \\ &= - \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, 0) d\mu_0(u). \end{aligned}$$

Note que, analogamente ao que obtivemos na seção passada para a motivação de solução estatística do problema de Cauchy para sistema autônomo, a equação acima não envolve o operador solução  $S_t$ . Assim, parece ser uma boa expressão para qual toda solução estatística de (3.9) deva satisfazer.

Veremos a seguir a definição rigorosa de solução estatística para o problema (3.9) usando uma classe ampla de funções testes, mas estaremos interessados no caso especial em que a equação diferencial deste problema representa uma lei de conservação. Posteriormente abordaremos tal caso, onde algumas restrições sob as funções testes serão impostas.

**Definição 3.7** (Solução Estatística para o Problema (3.9)). *Uma solução estatística do problema geral (3.9) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$  é uma função mensurável  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$  que satisfaz*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(u, t) + (D_u \varphi(u, t)) (Bu) \right] d\mu_t(u) dt \\ &+ \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, 0) d\mu_0(u) = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

para toda função teste  $\varphi : H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a derivada parcial  $\partial_t \varphi$  e a derivada de Fréchet  $D_u \varphi$  existem.

Nosso objetivo agora é definir o conceito de solução estatística para um caso particular do problema (3.9): as leis de conservação. Para isto, considere a lei dada por

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, \tag{3.11}$$

em  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , onde as funções  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Ou seja, consideramos a equação diferencial em (3.9) com  $Bu = -\partial_x (f(u))$ . Dessa forma, substituindo em (3.10) e utilizando resultado de integração por partes atrelado à suavidade necessária das funções testes envolvidas, podemos definir solução estatística de (3.11) como a seguir.

**Definição 3.8** (Solução Estatística para Lei de Conservação). *Uma solução estatística da lei de conservação (3.11) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$  é uma função mensurável  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N))$  que satisfaz a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(u, t) + (D_u \varphi(u, t)) (f(u)) \right] d\mu_t(u) dt \\ + \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, 0) d\mu_0(u) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

Visto que apresentamos resultados de existência e unicidade de solução estatística na seção passada para um caso mais geral que a lei de conservação, a lembrar, para o problema de Cauchy para um sistema autônomo, garantimos os resultados para este caso particular. Similarmente, podemos definir também outra classe de soluções, como feito na seção anterior: as soluções a valor de medida, agora, para a lei de conservação (3.11).

**Definição 3.9** (Solução a Valor de Medida para Lei de Conservação). *A medida de Young  $\nu \in \mathbf{Y}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  é dita uma solução a valor de medida do problema (3.11) com dado inicial  $\nu^0 \in \mathbf{Y}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$  se a função mensurável  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \nu_{t,x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  satisfaz a igualdade*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[ \partial_t \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, \xi \rangle + \partial_x \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, f(\xi) \rangle \right] dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \cdot \langle \nu_x^0, \xi \rangle dx = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

para toda função teste  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ .

Assim como feito anteriormente no Teorema 3.6, também sabemos que uma solução estatística da lei de conservação gera uma solução a valor de medida para este problema. Em outras palavras, a classe de soluções a valor de medida de (3.11) engloba a classe de soluções estatística desta mesma lei.

De fato, provemos de forma similar ao que fizemos na seção anterior: como estamos considerando apenas as soluções estatísticas e os dados iniciais com suporte compacto, se tomarmos funções  $\varphi$  que são lineares com respeito à função  $u \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ , isto é, funções  $\varphi$  da forma

$$\varphi(u, t) = \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(x, t), u(x) \rangle dx,$$

onde  $\psi(\cdot, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ , então a integração em (3.10) ainda fará sentido. Note que a derivada temporal de  $\varphi$  é dada por

$$\partial_t \varphi(u, t) = \int_{\mathbb{R}} \langle \partial_t \psi(x, t), u(x, t) \rangle dx$$

e, pela definição da derivada de Fréchet de  $\varphi$  no ponto  $(u, t)$  aplicada a  $v$ , isto é,  $(D_u \varphi)(v)$  que é dada pelo seguinte limite

$$\lim_{\|v\|_{H^1} \rightarrow 0} \frac{|\varphi(u+v, t) - \varphi(u, t) - (D_u \varphi)(v)|}{\|v\|_{H^1}} = 0$$

e usando a linearidade da função  $\varphi$  com respeito à primeira entrada, obtemos que a derivada de Fréchet de  $\varphi$  em  $f(u)$  é dada por

$$(D_u \varphi(u, t))(f(u)) = \varphi(f(u), t).$$

Assim, substituindo em (3.12), concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} [\langle \partial_t \psi(x, t), u(x) \rangle + \langle \partial_x \psi(x, t), f(u(x)) \rangle] dx d\mu_t(u) dt \\ & + \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(x, 0), u(x) \rangle dx d\mu_0(u) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Veja que estamos trabalhando com termos integrais do tipo

$$\int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle g(x, t), h(u(x)) \rangle dx d\mu_t(u),$$

onde a variável  $t$  é apenas um parâmetro por ora,  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  e  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é a função identidade em  $\mathbb{R}^N$  ou é a função  $f$  da lei de conservação (3.11). Assim, vamos considerar a expressão integral como sendo

$$\int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle g(x), h(u(x)) \rangle dx d\mu(u).$$

Podemos aplicar o Teorema de Fubini na expressão acima e, assim, mudar a ordem de integração, obtendo que

$$\int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle g(x), h(u(x)) \rangle dx d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \langle g(x), h(u(x)) \rangle d\mu(u) dx.$$

Assim, para quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}$ , podemos definir uma medida  $\nu_x$  com valores em  $\mathbb{R}^N$  a partir da identificação  $[C_0(\mathbb{R}^N)]^* \simeq \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ : para  $h \in C_0(\mathbb{R}^N)$ , defina

$$I_x(h) = \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} h(u(x)) d\mu(u).$$

Então  $I_x \in C_0(\mathbb{R}^N)$  e, como o dual de  $C_0(\mathbb{R}^N)$  é isometricamente isomorfo a  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ , então existe  $\nu_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$I_x(h) = \int_{\mathbb{R}^N} h(\xi) d\nu_x(\xi).$$

Observe que, como  $\mu$  é uma medida de probabilidade em  $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ , então  $\nu_x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , isto é,  $\nu_x$  também é de probabilidade. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle g(x), h(u(x)) \rangle dx d\mu(u) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \langle g(x), h(\xi) \rangle d\nu_x(\xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \langle \nu_x, h(\xi) \rangle dx. \end{aligned}$$

Agora, voltando à equação (3.14), obtemos pelo raciocínio anterior que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} [\langle \partial_t \psi(x, t), u(x, t) \rangle + \langle \partial_x \psi(x, t), f(u(x, t)) \rangle] dx d\mu_t(u) dt \\ &\quad + \int_{H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(x, 0), u(x, 0) \rangle dx d\mu_0(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, \xi \rangle + \partial_x \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, f(\xi) \rangle] dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \cdot \langle \nu_x^0, \xi \rangle dx, \end{aligned}$$

para  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ , que é a identidade que solução a valor de medida da lei de conservação precisa satisfazer. Ou seja, vimos que soluções estatísticas de (3.11) considerando as funções testes lineares com respeito à função  $u$  são soluções a valor de medida para (3.11). Portanto, como esperado pelo Teorema 3.6, toda solução estatística da lei de conservação gera uma solução a valor de medida.

### 3.2.2 Caso multidimensional

Agora, vamos considerar o caso multidimensional da lei de conservação, isto é, seja a equação diferencial

$$\partial_t u + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \tag{3.15}$$

como no capítulo 2, onde  $u = u(x, t) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $f = (f^1, \dots, f^d) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$  é a função fluxo.

Como feito ao longo deste capítulo e por contas motivacionais similares ao caso unidimensional que vimos, podemos definir o que é uma solução estatística da lei de conservação multidimensional (3.15), como a seguir:

**Definição 3.10** (Solução Estatística para Lei de Conservação). *Dizemos que uma função mensurável  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$  é uma solução estatística da lei de conservação (3.15) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$  se satisfaz*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)} \left[ \partial_t \varphi(u, t) + (D_u \varphi(u, t)) (f(u)) \right] d\mu_t(u) dt \\ + \int_{H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)} \varphi(u, 0) d\mu_0(u) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

Note que a identidade (3.16) que toda solução estatística deve satisfazer é uma simples generalização de (3.12) em que a variável espacial  $x$  agora pertence a  $\mathbb{R}^d$  e a lei de conservação pode ser vista como

$$0 = \partial_t u + \nabla_x \cdot f(u) = \begin{bmatrix} \partial_t u_1 \\ \vdots \\ \partial_t u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_1^l}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_N^l}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \end{bmatrix}.$$

Assim, também podemos definir o conceito de solução a valor de medida para a lei de conservação multidimensional acima como é mostrado abaixo.

**Definição 3.11** (Solução a Valor de Medida para Lei de Conservação). *Dizemos que uma medida de Young  $\nu \in \mathbf{Y}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  é uma solução a valor de medida do problema (3.15) com dado inicial  $\nu^0 \in \mathbf{Y}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)$  se a função mensurável  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \mapsto \nu_{t,x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  satisfaz a seguinte igualdade*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \partial_t \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, \xi \rangle + (\nabla_x \cdot \psi(x, t))_i \cdot \langle \nu_{t,x}, f_i(\xi) \rangle \right] dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, 0) \cdot \langle \nu_x^0, \xi \rangle dx = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

para toda função teste  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  e todo índice  $1 \leq i \leq d$ .

De maneira similar ao que fizemos para o caso da lei de conservação unidimensional e para o problema de Cauchy para um sistema autônomo, podemos provar que toda solução estatística de (3.15) gera uma solução a valor de medida do mesmo problema.

Mas nos atentemos ao fato de que soluções a valor de medida conseguem generalizar o conceito de solução para os problemas vistos ao longo deste capítulo, contudo, elas formam um conjunto muito grande. Em outras palavras, conseguimos garantir a existência desse tipo de solução, porém resultados de unicidade ou

regularidade com respeito ao dado inicial são difíceis de serem obtidos e, assim, perdemos o sentido físico dessas soluções.

Aliás, um exemplo mostrando que não podemos dizer que a solução a valor de medida de um problema é única é o seguinte: considere a equação de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

com dado inicial  $u_0(x) = \frac{x}{2}$ , para  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabemos que

$$u(x, t) = \frac{x}{2+t}$$

é uma solução clássica deste problema. E, tal solução gera uma solução a valor de medida dada por

$$\nu_{t,x} = \delta_{(x/(2+t))}$$

com  $\nu_x^0 = \delta_{u_0(x)} = \delta_{x/2}$ . Contudo, a família de medidas dadas por

$$\rho_{t,x} = \frac{1}{2} \delta_{(-t)} + \frac{1}{2} \delta_{((x+t+t^2/2)/(1+t))} \quad (3.18)$$

com  $\rho_x^0 = \delta_{u_0(x)} = \delta_{x/2}$  também é uma solução a valor de medida para o problema de valor inicial. De fato, para toda função teste  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \psi(x, t) \langle \rho_{t,x}, \xi \rangle dx dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \psi(x, t) \langle \rho_{t,x}, \frac{\xi^2}{2} \rangle dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \langle \delta_{x/2}, \xi \rangle dx = \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)}. \end{aligned}$$

Para a primeira integral, usando (3.18), temos

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \psi(x, t) \left[ \frac{-t}{2} + \frac{x+t+\frac{t^2}{2}}{2(1+t)} \right] dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \psi(x, t) \frac{(x-\frac{t^2}{2})}{2(1+t)} dx dt \end{aligned}$$

e, integrando por partes a expressão acima e usando que  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , obtemos

$$\text{(I)} = - \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \frac{x}{2} dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, t) \frac{(x+t+\frac{t^2}{2})}{2(1+t)^2} dx dt.$$

Para o segundo termo integral, usando a definição de  $\rho_{t,x}$  em (3.18), temos

$$(II) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \psi(x, t) \left[ \frac{t^2}{4} + \frac{(x + t + \frac{t^2}{2})^2}{4(1+t)^2} \right] dx dt$$

e, novamente por integração por partes e usando que  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , segue

$$(II) = - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, t) \frac{(x + t + \frac{t^2}{2})}{2(1+t)^2} dx dt.$$

Para a última integral, usando que  $\rho_x^0 = \delta_{x/2}$ , temos

$$(III) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \frac{x}{2} dx.$$

Logo, somando os três termos, obtemos que (I) + (II) + (III) = 0, mostrando, assim, que a família  $\{\rho_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma solução a valor de medida para o problema também. Portanto, as soluções a valor de medida não são únicas.

Porém, no trabalho [6], em que o conceito de solução a valor de medida para a lei de conservação foi proposto por DiPerna, também foi definida uma classe especial destas soluções: as soluções a valor de medida de entropia. Assim como foi proposta uma condição de entropia para as soluções fracas, como vimos no capítulo 2, definiremos a seguir a condição de entropia para soluções a valor de medida.

**Definição 3.12** (Solução a Valor de Medida de Entropia). *Uma medida de Young  $\nu \in \mathbf{Y}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  é uma solução a valor de medida de entropia da lei de conservação (3.15) com dado inicial  $\nu^0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  se é uma solução a valor de medida como visto anteriormente e, além disso, satisfaz a seguinte condição no sentido das distribuições*

$$\partial_t \langle \nu, \eta \rangle + \nabla_x \cdot \langle \nu, q \rangle \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+),$$

para todo par de entropia  $(\eta, q)$ , ou seja, se

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_t \varphi(x, t) \langle \nu_{t,x}, \eta \rangle + \nabla_x \varphi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, q \rangle] dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) \langle \nu_x^0, \eta \rangle dx \geq 0$$

para toda função não-negativa  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

Porém, mesmo impondo esta condição de entropia para soluções a valor de medida, em [19] é apresentado um exemplo de lei de conservação escalar, cujo dado inicial não é uma medida atômica, em que não há a unicidade de solução

a valor de medida de entropia. Dessa forma, se buscamos resultados envolvendo regularidade de solução ou até mesmo unicidade, procurar na classe de soluções a valor de medida parece não ser o melhor caminho em um caso geral.

Neste cenário, embarcaremos no próximo capítulo na busca de outro conceito de solução para as leis de conservação visando tentar conseguir uma classe menor de funções que satisfaçam uma equação relacionada à lei de conservação e de maneira que possamos conseguir provar a unicidade dessa nova noção de solução.



## Capítulo 4

# Soluções Estatísticas para Leis de Conservação Hiperbólicas

Como discutimos no capítulo anterior, não conseguimos um critério simples de admissibilidade que garanta regularidade ou unicidade para as soluções a valor de medida das leis de conservação. Mas, neste capítulo, vamos definir um outro conceito baseado no trabalho de Ulrik Skre Fjordholm, Samuel Lanthaler e Siddhartha Mishra (veja em [8]) de soluções estatísticas para leis de conservação hiperbólicas como uma família de medidas de probabilidade parametrizada pelo tempo em um espaço  $L^p$ . Para isto, provaremos equivalências entre medidas de probabilidade em  $L^p$ , medidas de correlação e seus momentos. E, posteriormente, veremos um resultado de unicidade para este novo conceito de solução estatística atrelado a uma condição de entropia.

Ao longo de todo o capítulo, consideraremos  $D \subset \mathbb{R}^d$  um espaço físico e  $U = \mathbb{R}^N$  um espaço de fase e denotaremos por  $\mathcal{F} = L^p(D; U)$  o espaço de funções, para  $1 \leq p < \infty$ . Além disso, equiparemos o espaço  $\mathcal{F}$  com a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ .

Além disso, neste capítulo apenas chamaremos de solução estatística a definição que vamos propor, mas para diferenciar das outras noções de solução estatística da dissertação, referenciaremos como solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, quando for necessário.

### 4.1 Medidas de Correlação

Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ , isto é, uma medida de probabilidade em  $L^p(D; U)$ , podemos considerar algumas quantidades como a média em um ponto  $x \in D$

dada por

$$m(x) = \int_{\mathcal{F}} u(x) d\mu(u);$$

ou também uma probabilidade conjunta de distribuições em dois pontos fixos  $x, y \in D$  definida por

$$p(x, y) = \int_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A(u(x)) \mathbb{1}_B(u(y)) d\mu(u),$$

que representa a probabilidade de  $u(x)$  e  $u(y)$  pertencerem aos conjuntos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Porém, essas quantidades nem sempre são simples de serem expressas, já que os valores  $u(\cdot)$  de uma função que sabemos apenas ser mensurável não são bem-definidos. Uma maneira para conseguirmos resolver este problema é tentar encontrar uma representação equivalente da medida de probabilidade  $\mu$  em termos de distribuições de probabilidade definidas localmente. Por exemplo, poderíamos representar as duas quantidades locais acima em termos das distribuições  $\nu_x^1$  e  $\nu_{x,y}^2$ , respectivamente, por

$$\int_U \xi d\nu_x^1(\xi)$$

e

$$\int_{U^2} \mathbb{1}_A(\xi) \mathbb{1}_B(\eta) d\nu_{x,y}^2(\xi, \eta).$$

Nossa ideia é considerar todas as distribuições conjuntas em finitos pontos e tomar a hierarquia  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  por elas geradas, ou seja, cada  $\nu^k$  mapeia  $D^k$  no conjunto de medidas de probabilidade em  $U^k$ ,  $\mathcal{P}(U^k)$ . Dessa forma, se provarmos uma equivalência entre  $\nu$  e  $\mu$ , resolveremos o problema, já que estabeleceríamos uma equivalência entre uma medida de probabilidade em um espaço infinito de funções e uma família de medidas que descrevem a correlação dos valores de tais funções em finitos pontos. Assim, o primeiro passo é definir quem é essa família  $\nu$ .

**Definição 4.1.** *Uma medida de correlação  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de mapas  $\nu^k : D^k \rightarrow \mathcal{P}(U^k)$  que satisfazem as seguintes propriedades:*

- (i) Mensurabilidade fraca-\*: Cada mapa  $\nu^k$  é fraco-\* mensurável, isto é,  $x \in D^k \mapsto \langle \nu_x^k, f \rangle \in \mathbb{R}$  é Borel mensurável, para toda  $f \in C_0(U^k)$ . Ou seja,  $\nu^k$  é uma medida de Young de  $D^k$  para  $U^k$ ;
- (ii) Limitação LP:  $\nu$  é LP-limitada, ou seja,

$$\int_D \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx < +\infty; \quad (4.1)$$

(iii) Simetria: Se  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, \dots, k\}$  e  $f \in C_0(\mathbb{R}^k)$ , denotando  $\sigma(x) = \sigma(x_1, \dots, x_k) = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_k})$  e  $\sigma(\xi) = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k) = (\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k})$ , então

$$\langle \nu_{\sigma(x)}^k, f(\sigma(\xi)) \rangle = \langle \nu_x^k, f(\xi) \rangle,$$

para quase todo  $x \in D^k$ ;

(iv) Consistência: Se  $f \in C_0(\mathbb{R}^k)$  é da forma  $f(\xi_1, \dots, \xi_k) = g(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ , para alguma  $g \in C_0(U^{k-1})$ , então

$$\langle \nu_{x_1, \dots, x_k}^k, f \rangle = \langle \nu_{x_1, \dots, x_{k-1}}^{k-1}, g \rangle,$$

para quase todo  $(x_1, \dots, x_k) \in D^k$ ;

(v) Continuidade diagonal: Se  $B_r(x) = \{y \in D : |x - y| < r\}$ , então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_D \int_{B_r(x)} \langle \nu_{x,y}^2, |\xi - \eta|^p \rangle dy dx = 0. \quad (4.2)$$

Chamamos cada elemento  $\nu^k$  de marginal de correlação e denotaremos o conjunto de todas as medidas de correlação de  $D$  para  $U$  por  $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(D; U)$ .

Lembre que, dados um conjunto boreliano  $X \subset \mathbb{R}^k$  e uma função mensurável  $f$ , a integral

$$\int_X f(x) dx := \frac{1}{|X|} \int_X f(x) dx$$

representa a média da função  $f$  sobre o conjunto  $X$ , onde  $|X|$  é a medida de Lebesgue  $k$ -dimensional do conjunto. Além disso, falamos que  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma hierarquia pois cada marginal de correlação  $\nu^k$  contém toda informação de marginais de correlação de ordem menor, isto é, de  $\nu^j$  onde  $1 \leq j \leq k-1$ , devido às propriedades de simetria e consistência.

Note também que sempre podemos gerar uma medida de correlação. De fato, toda função  $u \in L^p(D; U)$  gera uma medida  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  ao definirmos  $\nu_x^k = \delta_{u(x_1)} \otimes \dots \otimes \delta_{u(x_k)}$ . Neste caso, dizemos que  $\nu^k$  é um marginal de correlação atômico.

Vamos considerar a seguinte notação para o que vem a seguir: denotaremos

$$\langle \nu^k, g \rangle = \int_{D^k} \int_{U^k} g(x, \xi) d\nu_x^k(\xi) dx,$$

para toda  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $L_g : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  é o funcional definido para cada  $u \in \mathcal{F}$  por

$$L_g(u) = \int_{D^k} g(x, u(x)) dx.$$

O teorema a seguir é um dos principais resultados deste capítulo, quicá de todo este trabalho. Obteremos com sua demonstração a equivalência entre medidas de correlação e medidas de probabilidade, que será fundamental para a definição de soluções estatísticas para leis de conservação hiperbólicas. Contudo, tal demonstração não é tão simples, então a dividiremos em alguns casos ao longo da próxima seção. Primeiramente, vamos enunciá-lo.

**Teorema 4.2** (Equivalência entre medidas de correlação e de probabilidade). *Dada uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , existe uma única medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  satisfazendo*

$$\int_{\mathcal{F}} \|u\|_{\mathcal{F}}^p d\mu(u) < +\infty \quad (4.3)$$

tal que

$$\int_{D^k} \int_{U^k} g(x, \xi) d\nu_x^k(\xi) dx = \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} g(x, u(x)) dx d\mu(u) \quad (4.4)$$

para toda função de Carathéodory  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $u(x) = (u(x_1), \dots, u(x_k))$ .

Reciprocamente, dada uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  com momento finito, ou seja, que satisfaz a equação (4.3), existe uma única medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  tal que a equação (4.4) é válida para toda  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Temos também que a equação (4.4) é válida para toda função mensurável  $g : D \times U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|g(x, \xi)| \leq C|\xi|^p$ , para quase todo  $x \in D$ .

Observe que, pela notação anterior, a equação (4.4) pode ser reescrita como

$$\langle \nu^k, g \rangle = \langle \mu, L_g \rangle, \quad (4.5)$$

para toda  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ , pois

$$\langle \nu^k, g \rangle = \int_{D^k} \int_{U^k} g(x, \xi) d\nu_x^k(\xi) dx$$

e, além disso,

$$\langle \mu, L_g \rangle = \int_{\mathcal{F}} L_g(u) d\mu(u) = \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} g(x, u(x)) dx d\mu(u).$$

Portanto, segue a igualdade em (4.5) se, e somente se, a equação (4.4) é válida.

Como comentado anteriormente, pela grande força do teorema 4.2, é de se esperar que sua demonstração não seja tão trivial. Ela será dividida em quatro proposições na próxima seção: primeiramente, provaremos o lado mais simples,

que é a existência e unicidade da medida de correlação  $\nu$ , se possuímos uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ ; depois, dada uma medida de correlação  $\nu$ , provaremos que se existe uma medida de probabilidade  $\mu$  em  $\mathcal{F}$ , então ela é única; posteriormente, provaremos a existência da  $\mu$  no caso em que  $D$  é um conjunto limitado; e, por último, mostraremos que existe tal medida  $\mu$  satisfazendo (4.4) também no caso de  $D$  ser ilimitado.

## 4.2 Demonstração do Teorema 4.2

Começaremos os casos para a demonstração do teorema principal 4.2 provando a existência e a unicidade da medida de correlação  $\nu$ , se já nos for dada uma medida de probabilidade em  $L^p(D; U)$ .

**Proposição 4.3** (Existência e Unicidade de  $\nu$ ). *Dada uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  tal que*

$$\int_{\mathcal{F}} \|u\|_{\mathcal{F}}^p d\mu(u) < +\infty,$$

*então existe uma única medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  determinada por (4.4).*

*Demonstração.* Observe primeiramente que a relação

$$\int_{D^k} \int_{U^k} g(x, \xi) d\nu_x^k(\xi) dx = \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} g(x, u(x)) dx d\mu(u)$$

define unicamente  $\nu^k$  como um funcional linear em  $\mathcal{H}^k$ , que é contínuo pois

$$|\langle \nu^k, g \rangle| \leq \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} |g(x, u(x))| dx d\mu(u) \leq \int_{D^k} \|g(x)\|_{C_0(U^k)} dx = \|g\|_{\mathcal{H}^k}.$$

Portanto,  $\nu^k$  é um elemento do espaço dual de  $\mathcal{H}^k(D^k; U^k)$ , dado que  $\nu^k$  tem norma

$$\|\nu^k\|_{\mathcal{H}^{k*}} = \text{ess sup}_{x \in D^k} \|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)} = 1.$$

Pois  $\mathcal{H}^k(D^k; U^k)$  é isometricamente isomorfo ao espaço  $L_w^\infty(D^k; \mathcal{M}(U^k))$ , como visto no capítulo 1, então  $\nu^k$  é um mapa fraco-\* mensurável de  $x \in D^k$  para  $\nu_x^k \in \mathcal{M}(U^k)$ . Para satisfazer a propriedade (i) de medida de correlação, falta provar que na verdade  $\nu_x^k \in \mathcal{P}(U^k)$  para quase todo  $x \in D^k$ . Para isto, considere  $f \in C_0(U^k)$  uma função não-negativa e uma bola aberta  $B_r(x) \subset D^k$ . Observe que

$$\begin{aligned} \langle \nu^k, \mathbb{1}_{B_r(x)} f \rangle &= \int_{B_r(x)} \langle \nu_y^k, f \rangle dy \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_{B_r(x)} f(u(y_1), \dots, u(y_k)) dy d\mu(u) \\ &\leq \|f\|_{C_0(U^k)} |B_r(x)|, \end{aligned}$$

donde a última desigualdade segue do fato de  $\mu$  ser uma medida de probabilidade em  $\mathcal{F}$ . Assim,

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \langle \nu_y^k, f \, dy \leq \|f\|_{C_0(U^k)}.$$

Pelo Teorema de Diferenciação de Lebesgue, sabemos que para quase todo ponto  $x \in D^k$ , temos

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \langle \nu_y^k, f \, dy \rightarrow \langle \nu_x^k, f \rangle,$$

quando  $r$  tende a zero. Portanto,

$$\langle \nu_x^k, f \rangle \leq \|f\|_{C_0(U^k)}$$

para quase todo  $x \in D^k$ . Como as bolas abertas geram a  $\sigma$ -álgebra de Borel, o mesmo resultado segue para quaisquer subconjunto boreliano  $A \subset D^k$  e função não-negativa  $f \in C_0(U^k)$ .

Além disso, note que, para quase todo  $x \in D^k$ ,

$$\|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)} = \sup_{f \in C_0(U^k)} \frac{\langle \nu_x^k, f \rangle}{\|f\|_{C_0(U^k)}} \leq 1.$$

Assim, se provarmos que segue a igualdade para alguma função, então teremos que  $\|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)} = 1$  e, portanto, provaremos que tal medida é de probabilidade em  $U^k$ . Para isto, considere a sequência de funções  $(f_R)_{R \in \mathbb{N}}$  definidas em  $U^k$  por

$$f_R(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |x| \leq R \\ 2 - \frac{|x|}{R} & , \text{ se } R < |x| < 2R \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq 2R. \end{cases}$$

Observe que  $(f_R)$  é uma sequência crescente e  $f_R(x) \rightarrow 1$  quando  $R \rightarrow +\infty$ , para todo  $x \in U^k$ . E, para cada  $R \in \mathbb{N}$ , também temos que  $f_R \in C_0(U^k)$ , logo, para qualquer conjunto boreliano  $A \subset D^k$ , vale

$$\int_A \langle \nu_x^k, f_R \rangle \, dx = \int_{\mathcal{F}} \int_A f_R(u(x_1, \dots, u(x_k))) \, dx \, d\mu(u).$$

Usando novamente que  $f_R \in C_0(U^k)$  e que a sequência é crescente, pelo Teorema da Convergência Monótona, quando  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_A \langle \nu_x^k, f_R \rangle \, dx = \int_A \int_{U^k} f_R(\xi) \, d\nu_x^k(\xi) \rightarrow \int_A \int_{U^k} 1 \, d\nu_x^k(\xi) = \int_A \langle \nu_x^k, 1 \rangle$$

e, similarmente, usando que  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$

$$\int_{\mathcal{F}} \int_A f_R(u(x_1, \dots, u(x_k))) \, dx \, d\mu(u) \rightarrow \int_{\mathcal{F}} \int_A 1 \, dx \, d\mu(u) = |A|.$$

Pela unicidade do limite, obtemos a igualdade

$$\int_A \langle \nu_x^k, 1 \rangle \, dx = |A|,$$

para todo conjunto boreliano  $A \subset D^k$ . Novamente pelo Teorema de Diferenciação de Lebesgue, segue que

$$\langle \nu_x^k, 1 \rangle = 1,$$

para quase todo  $x \in D^k$ . Portanto,  $\|\nu_x^k\|_{\mathcal{M}(U^k)} = 1$ , para quase todo  $x \in D^k$ , provando finalmente que  $\nu_x^k \in \mathcal{P}(U^k)$ , para quase todo  $x \in D^k$ . Tomando  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , terminamos a demonstração da propriedade (i) da definição de medida de correlação.

Agora, para provar a propriedade (ii), isto é, a limitação  $L^p$  da medida  $\nu$  no sentido que

$$\int_D \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle \, dx < +\infty,$$

vamos considerar uma função  $g : D \times U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, \xi) = |\xi|^p$ . Seja  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  um sequência de funções em  $\mathcal{H}(D; U) = L^1(D, C_0(U))$  que truncam a função  $g$ . Então, para cada  $x \in D$ ,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$$

e,  $|g_n(x)| = g_n(x) \leq g(x)$ . Além disso, a função  $g$  é integrável em  $U$ , pois

$$\int_U g(x, u(x)) \, dx = \int_U |u(x)|^p \, dx = \|u\|_{\mathcal{F}}^p < +\infty,$$

portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Fazendo isso e lembrando que os elementos  $g_n \in \mathcal{H}(D; U)$  satisfazem (4.4), temos

$$\begin{aligned} \langle \nu^1, |\xi|^p \rangle &= \int_D \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle \, dx = \int_D \int_U |\xi|^p \, d\nu_x^1(\xi) \, dx \\ &= \int_D \int_U \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x, \xi) \, d\nu_x^1(\xi) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D \int_U g_n(x, \xi) \, d\nu_x^1(\xi) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{F}} \int_D g_n(x, u(x)) \, dx \, d\mu(u) = \int_{\mathcal{F}} \int_D \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x, u(x)) \, dx \, d\mu(u) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_D |u(x)|^p \, dx \, d\mu(u) = \int_{\mathcal{F}} \|u\|_{\mathcal{F}}^p \, d\mu(u) < +\infty, \end{aligned}$$

seguindo assim a limitação  $L^p$  de  $\nu$  que tanto queríamos.

Já as propriedades (iii) e (iv) de simetria e consistência seguem diretamente da definição dos marginais de correlação  $\nu^k$  dado pela expressão (4.4). Por último, para provarmos a continuidade diagonal de  $\nu$ , considere a função  $f : B_r(x) \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $y \mapsto |u(x) - u(y)|^p$ . Note que

$$\int_K |f(y)| dy = \int_K |u(x) - u(y)|^p dy \leq 2^{p+1} \|u\|_{\mathcal{F}}^p |K| < +\infty$$

para qualquer conjunto compacto  $K \subset B_r(x)$ , ou seja, a função  $f \in L_{\text{loc}}^\infty$ . Assim, podemos aplicar o Teorema de Diferenciação de Lebesgue que, aliás, nos dá

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_D \int_{B_r(x)} \langle \nu_{x,y}^2, |\xi - \eta|^p dy dx &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}} \int_D \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|^p dy dx d\mu(u) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_D |u(x) - u(x)|^p dx d\mu(u) = 0, \end{aligned}$$

o que completa a prova de que  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma medida de correlação relacionada à medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ . Ademais, obtemos a unicidade de  $\nu$  pela definição explícita de cada marginal  $\nu^k$  dado por (4.4).  $\square$

Como o fim desta prova, podemos explorar a recíproca deste resultado, ou seja, vamos embarcar na busca de uma medida de probabilidade em  $\mathcal{F}$ , se já nos for dada uma medida de correlação em  $\mathcal{L}^p(D; U)$ . O primeiro passo será provar sua unicidade, isto é, que existe no máximo uma medida de probabilidade associada à medida de correlação.

**Proposição 4.4** (Unicidade de  $\mu$ ). *Dadas duas medidas de probabilidade  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  satisfazendo as equações (4.3) e (4.4), então  $\mu_1 = \mu_2$ .*

*Demonstração.* Por hipótese,

$$\int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} g(x, u(x)) dx d\mu_1(u) = \int_{D^k} \int_{U^k} g(x, \xi) d\nu_x^k(\xi) dx = \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} g(x, u(x)) dx d\mu_2(u),$$

para toda função de Carathéodory  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Seja  $L > 0$  um número real positivo qualquer e defina a função  $\theta_L : D \times U \rightarrow U$  da seguinte maneira

$$\theta_L(x, \xi) = \begin{cases} \xi & , \text{ se } |\xi| \leq L \text{ e } |x| \leq L \\ \frac{\xi}{|\xi|} L & , \text{ se } |\xi| > L \text{ e } |x| \leq L \\ 0 & , \text{ se } |x| > L. \end{cases}$$

Se considerarmos uma função  $g : D \times U \rightarrow U$  da forma

$$g(x, \xi) = \psi_1(x_1) \cdots \psi_k(x_k) \theta_L(x_1, \xi_1) \cdots \theta_L(x_k, \xi_k),$$



para alguns funcionais  $\psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{F}^*$ , pelo Teorema da Convergência Dominada, a Desigualdade de Hölder e a hipótese de que o momento das medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são finitos, segue que a expressão acima também é válida para  $g$  definida desta forma, ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} [\psi_1(x_1) \cdots \psi_k(x_k) \theta_L(x_1, u(x_1)) \cdots \theta_L(x_k, u(x_k))] dx d\mu_1(u) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} [\psi_1(x_1) \cdots \psi_k(x_k) \theta_L(x_1, u(x_1)) \cdots \theta_L(x_k, u(x_k))] dx d\mu_2(u). \end{aligned}$$

Denotando  $\theta_L(u) = \theta_L(\cdot, u(\cdot))$ , obtemos que a equação (4.2) é também escrita como

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \psi_1, \theta_L(u) \rangle \cdots \langle \psi_k, \theta_L(u) \rangle d\mu_1(u) = \int_{\mathcal{F}} \langle \psi_1, \theta_L(u) \rangle \cdots \langle \psi_k, \theta_L(u) \rangle d\mu_2(u).$$

Ademais, podemos repetir os índices ao escolher alguns  $\psi_i$  para serem iguais e fazer a integração sob o espaço físico da equação acima, obtendo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}} \langle \psi_1, \theta_L(u) \rangle^{\alpha_1} \cdots \langle \psi_k, \theta_L(u) \rangle^{\alpha_k} d\mu_1(u) = \\ &= \int_{\mathcal{F}} \langle \psi_1, \theta_L(u) \rangle^{\alpha_1} \cdots \langle \psi_k, \theta_L(u) \rangle^{\alpha_k} d\mu_2(u), \end{aligned} \tag{4.6}$$

para quaisquer números naturais  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

Agora, considere a função  $\psi : L^p(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por

$$\psi(u) = (\langle \psi_1, u \rangle, \dots, \langle \psi_k, u \rangle).$$

E, além disso, defina o truncamento  $\psi_L : L^p(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  por

$$\psi_L(u) = (\langle \psi_1, \theta_L(u) \rangle, \dots, \langle \psi_k, \theta_L(u) \rangle).$$

Observe que, para qualquer  $1 \leq i \leq k$ ,

$$|\langle \psi_i, \theta_L(u) \rangle| \leq \|\psi_i\|_{\mathcal{F}^*} \|\theta_L(u)\|_{\mathcal{F}}.$$

Mas, como

$$\theta_L(x, u(x)) = \begin{cases} u(x) & , \text{ se } |u(x)| \leq L \text{ e } |x| \leq L \\ \frac{u(x)}{|u(x)|} L & , \text{ se } |u(x)| > L \text{ e } |x| \leq L \\ 0 & , \text{ se } |x| > L, \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|\theta_L(u)\|_{\mathcal{F}}^p &= \int_D \|\theta_L(x, u(x))\|_U^p dx \\
&= \int_{B_L(0)} \|\theta_L(x, u(x))\|_U^p dx \\
&= \int_{\{x \in D: |u(x)| \leq L\} \cap B_L(0)} \|\theta_L(x, u(x))\|_U^p dx \\
&\quad + \int_{\{x \in D: |u(x)| > L\} \cap B_L(0)} \|\theta_L(x, u(x))\|_U^p dx \\
&\leq L^p |\{x \in D : |u(x)| \leq L\} \cap B_L(0)| \\
&\quad + L^p |\{x \in D : |u(x)| > L\} \cap B_L(0)| \\
&= L^p |B_L(0)| = L^p m_d L^d,
\end{aligned}$$

onde,  $m_d$  é o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^d$ . Ou seja,  $\|\theta_L(u)\|_{\mathcal{F}} \leq m_d^{1/p} L^{1+d/p}$  e, portanto, para qualquer  $1 \leq i \leq k$ ,

$$|\langle \psi_i, \theta_L(u) \rangle| \leq m_d^{1/p} L^{1+d/p} \|\psi_i\|_{\mathcal{F}^*}.$$

Assim, concluímos que o truncamento  $\psi_L$  assume valores no conjunto

$$K_L = [-cL^{1+d/p}, cL^{1+d/p}]^k \subset \mathbb{R}^k,$$

que é compacto, onde  $c = m_d^{1/p} \max_{1 \leq i \leq k} \{\|\psi_i\|_{\mathcal{F}^*}\}$ .

Se considerarmos uma função continuamente diferenciável  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^k)$  e tomarmos sua restrição  $\phi_L$  em  $K_L$ , como este conjunto é compacto, existe uma sequência  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polinômios em  $\mathbb{R}^k$  tal que  $P_n \rightarrow \phi_L$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, obtemos que  $P_n(\psi_L(u)) \rightarrow \phi(\psi_L(u))$  uniformemente em  $L^p(D)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela equação (4.6) aplicada aos polinômios  $P_n$ , concluímos que

$$\int_{\mathcal{F}} P_n(\psi_L(u)) d\mu_1(u) = \int_{\mathcal{F}} P_n(\psi_L(u)) d\mu_2(u).$$

E, deste modo, pela convergência uniforme e unicidade do limite, segue a igualdade

$$\int_{\mathcal{F}} \phi(\psi_L(u)) d\mu_1(u) = \int_{\mathcal{F}} \phi(\psi_L(u)) d\mu_2(u).$$

Agora, considere as funções cilíndricas  $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Psi(u) = \phi(\psi(u))$$

e  $\Psi_L : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Psi_L(u) = \phi(\psi_L(u)).$$

Primeiramente, é imediato ver que  $|\Psi(u)| \leq \|\phi\|_{C_b(\mathbb{R}^k)}$  e  $|\Psi_L(u)| \leq \|\phi\|_{C_b(\mathbb{R}^k)}$ . Além disso, temos

$$\Psi(u) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \Psi_L(u),$$

para toda função  $u \in \mathcal{F}$ . Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\int_{\mathcal{F}} \Psi(u) d\mu_1(u) = \int_{\mathcal{F}} \Psi(u) d\mu_2(u).$$

Ou seja, obtemos a igualdade acima para qualquer função cilíndrica em  $\mathcal{F}$ .

Agora, considere um conjunto cilíndrico  $A \subset \mathbb{R}^k$ , isto é, a função característica  $\mathbb{1}_A$  é uma função cilíndrica. Então considere a sequência de funções  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1} \leq \mathbb{1}_A$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = \mathbb{1}_A(x),$$

para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^k$ . Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A(\langle \psi_1, u \rangle, \dots, \langle \psi_k, u \rangle) d\mu_1(u) = \int_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A(\langle \psi_1, u \rangle, \dots, \langle \psi_k, u \rangle) d\mu_2(u).$$

Ou seja, as medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  coincidem em todos os conjuntos cilíndricos. Pelo item (ii) da proposição 1.10, segue que  $\mu_1 = \mu_2$ , como queríamos provar.  $\square$

Provada a unicidade da medida de probabilidade  $\mu$  correspondente a uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p$ , agora nosso objetivo é provar sua existência para quando o domínio  $D \subset \mathbb{R}^d$  for limitado. Assim, a partir de agora, vamos considerar que  $D$  é limitado e, posteriormente, provaremos a existência para quando  $D$  for uma região qualquer de  $\mathbb{R}^d$ . Primeiramente, vamos definir o que é uma partição de um conjunto limitado.

**Definição 4.5.** Dizemos que  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  é uma partição de  $D$  se  $A_i$  são subconjuntos de  $D$  tais que:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^N A_i = D$ ;
- (ii)  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todos índices  $i \neq j$ ;
- (iii)  $|\overline{A}_i \cap \overline{A}_j| = 0$ , para todos  $i \neq j$ , onde  $\overline{A}_i$  é o fecho do conjunto  $A_i$ .

Dizemos que uma outra partição  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_M\}$  é um refinamento da partição  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  se, para todo índice  $1 \leq j \leq M$ , existe  $1 \leq i \leq N$  tal que  $\tilde{A}_j \subset A_i$ .

Dadas  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  uma medida de correlação e  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  uma partição de  $D$ , conseguimos definir uma medida de probabilidade  $\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}(U^N)$  da seguinte forma:

$$\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \rangle = \int_{A_1 \times \dots \times A_N} \langle \nu_x^N, \psi \rangle dx, \quad (4.7)$$

para  $\psi \in C_0(U^N)$  não-negativa. De fato,  $\rho_{\mathcal{A}}$  definida assim é uma medida de probabilidade, já que (4.7) é claramente um funcional linear contínuo não-negativo com norma

$$\|\rho_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}(U^N)} = \sup_{\psi \in C_0(U^N)} \frac{\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \rangle}{\|\psi\|_{C_0(U^N)}} = 1,$$

lembrando que o espaço das medidas de Radon  $\mathcal{M}(U^N)$  é isometricamente isomorfo ao espaço dual das funções contínuas que vão a zero no infinito  $C_0(U^N)$ . De fato a norma é unitária pois, por um lado, note que

$$\begin{aligned} |\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \rangle| &= \left| \int_{A_1 \times \dots \times A_N} \int_{U^N} \psi(\xi) d\nu_x^N(\xi) dx \right| \\ &\leq \|\psi\|_{C_0(U^N)} \frac{1}{|A_1 \times \dots \times A_N|} \int_{A_1 \times \dots \times A_N} d\nu_x^N \\ &= \|\psi\|_{C_0(U^N)}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de que  $\nu_x^N \in \mathcal{P}(U^N)$ . Disso, obtemos que

$$\|\rho_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}(U^N)} \leq 1. \quad (4.8)$$

Agora precisamos provar que na verdade vale a igualdade para a expressão acima. Para isto, defina  $A = A_1 \times \dots \times A_N$  e considere a sequência  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formada por funções que são contínuas e satisfazem

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \mathbb{1}_A(x) & , \text{ se } x \in D_{n-1} \\ 0 & , \text{ se } x \notin D_{n+1}, \end{cases}$$

onde a sequência  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}^d$  é composta de conjuntos definidos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por

$$D_n = \overline{\{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) < \frac{1}{n}\}} \subset \mathbb{R}^d,$$

Assim, é fácil ver que  $D_n \subset D_{n+1} \subset D$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, além disso,  $D_n \rightarrow D$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Mas observe também que a sequência de funções  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pertence a  $C_0(U^N)$  e converge pontualmente para a função característica  $\mathbb{1}_A$ ; e, ademais, temos a limitação  $|\psi_n| \leq 1$  para todo índice  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\|\rho_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}(U^N)} = \sup_{\psi \in C_0(U^N)} \frac{\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \rangle}{\|\psi\|_{C_0(U^N)}} \geq \int_A \langle \nu_x^N, \psi_n \rangle dx \rightarrow \int_A \langle \nu_x^N, 1 \rangle dx = 1,$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , ou seja,

$$\|\rho_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}(U^N)} = \sup_{\psi \in C_0(U^N)} \frac{\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \rangle}{\|\psi\|_{C_0(U^N)}} \geq 1. \quad (4.9)$$

Logo, por (4.8) e (4.9), segue que  $\|\rho_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}(U^N)} = 1$  e, conseqüentemente, obtemos que  $\rho_{\mathcal{A}}$  é uma medida de probabilidade em  $U^N$ , como desejávamos.

Com essa medida  $\rho_{\mathcal{A}}$  definida acima, podemos considerar uma outra medida de probabilidade  $\mu_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  como sendo a medida “pushforward” da  $\rho_{\mathcal{A}}$  pela função contínua  $\xi \in U^N \mapsto \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{F}$ , que é definida da seguinte maneira:

$$\langle \mu_{\mathcal{A}}, \psi \rangle = \left\langle \rho_{\mathcal{A}}, \psi \left( \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \right\rangle.$$

Por último, consideramos a medida  $\nu_{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}^p(D; U)$  como sendo a única medida de correlação correspondente à medida de probabilidade  $\mu_{\mathcal{A}}$ , que sabemos da existência e unicidade pela proposição 4.3. Chamamos tal medida de correlação  $\nu_{\mathcal{A}}$  de projeção de  $\nu$  sobre  $\mathcal{A}$ .

Observe que as medidas  $\nu_{\mathcal{A}}$  e  $\mu_{\mathcal{A}}$  são constantes por parte, isto é, cada marginal de correlação  $\nu_{\mathcal{A},x}^k$  é constante nos conjuntos da forma  $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_k}$  e  $\mu_{\mathcal{A}}$  está concentrada nas funções  $x \in D \mapsto \sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ . Além disso, note que podemos definir a projeção de  $\nu$  sobre  $\mathcal{A}$  por

$$\langle \nu_{\mathcal{A},x}^k, \psi \rangle = \sum_{\alpha \in [N]^k} \mathbb{1}_{A_{\alpha}}(x) \int_{A_1 \times \dots \times A_N} \langle \nu_y^N, \psi(\xi_{\alpha}) \rangle dy,$$

para todos  $x \in D^k$  e  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $[N] = \{1, \dots, N\}$ ,  $A_{\alpha} = A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_k}$  e  $\xi_{\alpha} = (\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_k})$ .

O resultado a seguir mostra uma estimativa para a p-distância de Wasserstein entre as medidas de probabilidade  $\mu_{\mathcal{A}}$  e  $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$ , quando  $\mathcal{A}$  e  $\tilde{\mathcal{A}}$  são partições de  $D$  e  $\tilde{\mathcal{A}}$  é um refinamento de  $\mathcal{A}$ . Tal resultado será de grande importância para conseguirmos provar a existência da medida de probabilidade  $\mu$ , que veremos ser o limite de uma sequência que, por este lema, será de Cauchy.

**Lema 4.6.** *Sejam  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  uma medida de correlação,  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  e  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_M\}$  duas partições do conjunto limitado  $D \subset \mathbb{R}^d$ , onde  $\tilde{\mathcal{A}}$  é um refinamento de  $\mathcal{A}$  e existem constantes positivas  $c$  e  $h$  tais que  $|A_i| \geq ch^d$  e  $\text{diam}(A_i) \leq h$ , para todos conjuntos  $A_i \in \mathcal{A}$ . Se  $\mu_{\mathcal{A}}$  e  $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$  são medidas de probabilidade correspondentes às projeções de  $\nu$  sobre  $\mathcal{A}$  e  $\tilde{\mathcal{A}}$ , respectivamente, então*

$$W_1(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}) \leq C \left( \int_D \int_{B_h(y)} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p},$$

onde  $B_h(y) = \{x \in D : |x - y| < h\}$  e  $C = C(c, p, d) > 0$ .

*Demonstração.* Sejam  $A = A_1 \times \dots \times A_N$  e  $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_M$ . Considere uma função Lipschitz contínua  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  com norma  $\|\psi\|_{\text{Lip}} = 1$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \psi(u) d(\mu_{\mathcal{A}} - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})(u) &= \langle \mu_{\mathcal{A}} - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}, \psi \rangle = \langle \rho_{\mathcal{A}} - \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}, \psi(\sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i}) \rangle \\ &= \int_A \langle \nu_x^N, \psi(\sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i}) \rangle dx - \int_{\tilde{A}} \langle \nu_y^M, \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dy. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{\mathcal{A}}$  é um refinamento da partição  $\mathcal{A}$ , para todo  $1 \leq j \leq M$ , existe um índice  $1 \leq i \leq N$  tal que  $\tilde{A}_j \subset A_i$ . Usando as propriedade da definição de partição, podemos escrever cada conjunto  $A_i = \dot{\cup}_{k=1}^R \tilde{A}_{j_k}$  e, da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_A \langle \nu_x^N, \psi(\sum_{i=1}^N \xi_i \mathbb{1}_{A_i}) \rangle dx - \int_{\tilde{A}} \langle \nu_y^M, \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dy \\ = \int_A \langle \nu_x^N, \psi(\sum_{j=1}^M \xi_{i(j)} \mathbb{1}_{\tilde{A}_{i(j)}}) \rangle dx - \int_{\tilde{A}} \langle \nu_y^M, \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dy, \end{aligned}$$

onde, para cada  $1 \leq j \leq M$ , o índice  $i(j)$  é o único inteiro entre 1 e N tal que  $\tilde{A}_j \subset A_{i(j)}$ . Pela propriedade de consistência da medida de correlação  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} \int_A \langle \nu_x^N, \psi(\sum_{j=1}^M \xi_{i(j)} \mathbb{1}_{\tilde{A}_{i(j)}}) \rangle dx - \int_{\tilde{A}} \langle \nu_y^M, \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dy \\ = \int_{\tilde{A}} \int_A \langle \nu_{x,y}^{N+M}, \psi(\sum_{j=1}^M \xi_{i(j)} \mathbb{1}_{\tilde{A}_{i(j)}}) - \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dx dy. \end{aligned}$$

Como a função  $\psi$  é Lipschitz contínua com norma unitária, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}} \int_A \langle \nu_{x,y}^{N+M}, \psi(\sum_{j=1}^M \xi_{i(j)} \mathbb{1}_{\tilde{A}_{i(j)}}) - \psi(\sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}) \rangle dx dy \\ \leq \int_{\tilde{A}} \int_A \langle \nu_{x,y}^{N+M}, \left\| \sum_{j=1}^M \xi_{i(j)} \mathbb{1}_{\tilde{A}_{i(j)}} - \sum_{j=1}^N \eta_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j} \right\|_{\mathcal{F}} \rangle dx dy \\ = \int_{\tilde{A}} \int_A \langle \nu_{x,y}^{N+M}, \left( \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| |\xi_{i(j)} - \eta_j|^p \right)^{1/p} \rangle dx dy. \end{aligned}$$

Mas, pela Desigualdade de Jensen, como a função  $g(t) = |t|^{1/p}$  é côncava, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{A}} \int_A \left\langle \nu_{x,y}^{N+M}, \left( \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| |\xi_{i(j)} - \eta_j|^p \right)^{1/p} \right\rangle dx dy \\ & \leq \int_{\tilde{A}} \int_A \left( \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| \langle \nu_{x,y}^{N+M}, |\xi_{i(j)} - \eta_j|^p \rangle \right)^{1/p} dx dy \\ & \leq \left( \int_{\tilde{A}} \int_A \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| \langle \nu_{x,y}^{N+M}, |\xi_{i(j)} - \eta_j|^p \rangle dx dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

E, novamente pela propriedade de consistência da medida de correlação,

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\tilde{A}} \int_A \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| \langle \nu_{x,y}^{N+M}, |\xi_{i(j)} - \eta_j|^p \rangle dx dy \right)^{1/p} \\ & = \left( \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| \int_{\tilde{A}} \int_A \langle \nu_{x_{i(j)},y_j}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p} \\ & = \left( \sum_{j=1}^M |\tilde{A}_j| \int_{\tilde{A}_j} \int_{A_{i(j)}} \langle \nu_{x_{i(j)},y_j}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx_{i(j)} dy_j \right)^{1/p} \\ & = \left( \sum_{j=1}^M \int_{\tilde{A}_j} \int_{A_{i(j)}} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade renomeamos as variáveis  $x_{i(j)}$  por  $x$  e  $y_j$  por  $y$ .

Portanto, chegamos na estimativa

$$\int_{\mathcal{F}} \psi(u) d(\mu_{\mathcal{A}} - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})(u) \leq \left( \sum_{j=1}^M \int_{\tilde{A}_j} \int_{A_{i(j)}} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p},$$

para toda  $\psi$  função real Lipschitz contínua em  $\mathcal{F}$ . E, por hipótese, sabemos que

$|A_i| \geq ch^d$  e  $\text{diam}(A_i) \leq h$ , assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \psi(u) d(\mu_{\mathcal{A}} - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})(u) &\leq \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{|A_{i(j)}|} \int_{\tilde{A}_j} \int_{A_{i(j)}} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{ch^d} \int_{\tilde{A}_j} \int_{A_{i(j)}} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^M \frac{|B_h(y)|}{ch^d} \int_{\tilde{A}_j} \int_{B_h(y)} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p} \\ &\leq C \left( \sum_{j=1}^M \int_{\tilde{A}_j} \int_{B_h(y)} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

onde  $C = (\frac{1}{ch^d})^{1/p} > 0$  é uma constante positiva. Por último, tomando o supremo dentre todas as funções  $\psi$  Lipschitz contínuas com norma  $\|\psi\|_{\text{Lip}} \leq 1$ , pela definição da distância de Wasserstein  $W_1$ , provamos o desejado.  $\square$

Com o final desta prova, finalmente podemos embarcar para a demonstração da existência da medida de probabilidade correspondente à medida de correlação fornecida, lembrando que estamos no caso de  $D$  ser um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposição 4.7** (Existência de  $\mu$  para  $D$  limitado). *Seja  $D$  um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^d$ . Dada uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , existe uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  que satisfaz (4.3) e (4.4).*

*Demonstração.* Considere uma sequência  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partições do conjunto  $D$  tal que cada  $\mathcal{A}_{n+1}$  é um refinamento da partição  $\mathcal{A}_n$  e que exista uma sequência  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais de forma que  $|A| \geq ch_n^d$  e  $\text{diam}(A) \leq h_n$ , para alguma constante  $c > 0$ , para todos os conjuntos  $A \in \mathcal{A}_n$  e para todo índice  $n \in \mathbb{N}$ . Nosso objetivo é mostrar que a sequência  $(\mu_{\mathcal{A}_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$  converge fracamente para uma medida de probabilidade  $\mu$  em  $\mathcal{F}$  e tal medida satisfaz a condição (4.3).

Como  $\mathcal{A}_{n+1}$  é um refinamento da partição  $\mathcal{A}_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pelo lema anterior, sabemos que

$$W_1(\mu_{\mathcal{A}_n}, \mu_{\mathcal{A}_m}) \leq C \left( \int_D \int_{B_{h_n}(y)} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy \right)^{1/p},$$

para qualquer  $m > n$ , onde a constante  $C > 0$  só depende de  $c$ ,  $p$  e  $d$ . Mas, pela propriedade de continuidade diagonal da medida de correlação  $\nu$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D \int_{B_{h_n}(y)} \langle \nu_{x,y}^2, |\zeta_1 - \zeta_2|^p \rangle dx dy = 0,$$



ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_1(\mu_{\mathcal{A}_n}, \mu_{\mathcal{A}_m}) = 0.$$

Isto implica que a sequência  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  munido da métrica  $W_1$ , que vimos ser um espaço métrico completo no capítulo 1. Portanto, existe uma medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  tal que  $\mu_{\mathcal{A}_n} \rightharpoonup \mu$ . Pela limitação  $L^p$  de  $\nu$ , segue que a medida  $\mu$  tem momento finito, isto é, satisfaz (4.3).

Agora, vamos mostrar que esta medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  satisfaz (4.4). Para isto, considere uma partição fixa  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_m = \{A_1, \dots, A_N\}$  do conjunto  $D$  e seja  $x \in D^k$ . Então existe um único  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in [N]^k$  tal que  $x \in \mathcal{A}_\alpha = A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_k}$ . Se  $x$  não pertence à diagonal, isto é, não pertence ao conjunto  $\{y \in D^k : y_i = y_j \text{ para algum } i \neq j\}$ , então  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , para todos  $i \neq j$  e, além disso,

$$\langle \nu_{\mathcal{A}, x}^k, \psi \rangle = \sum_{\alpha \in [N]^k} \mathbb{1}_{\mathcal{A}_\alpha}(x) \int_{A_\alpha} \langle \nu_y^k, \psi(\xi_\alpha) \rangle dy,$$

usando a propriedade de consistência da medida de correlação  $\nu$ . Assim, pelo Teorema de Diferenciação de Lebesgue, obtemos que

$$\nu_{\mathcal{A}_n, x}^k \rightarrow \nu_{\mathcal{A}, x}^k \text{ quando } m \rightarrow +\infty,$$

para quase todo  $x \in D^k$  fora da diagonal. Mas, como a diagonal é um conjunto de medida nula em  $D^k$ , segue

$$\nu_{\mathcal{A}_n}^k \xrightarrow{*} \nu^k \text{ em } \mathcal{H}^{k*}(D; U),$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \nu_{\mathcal{A}_n}^k, g \rangle = \langle \nu^k, g \rangle \tag{4.10}$$

para toda  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$ .

Assim, como sabemos do capítulo 1 que

$$L_g(u) = \int_{D^k} g(x, u(x)) dx \in C_b(\mathcal{F}),$$

para toda  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$ , obtemos

$$\langle \mu_{\mathcal{A}_n}, L_g \rangle = \langle \nu_{\mathcal{A}_n}^k, g \rangle,$$

para qualquer  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$ . E, pelo fato de  $\mu_{\mathcal{A}_n} \rightharpoonup \mu$  em  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  e por (4.10), segue

$$\langle \mu, L_g \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mu_{\mathcal{A}_n}, L_g \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \nu_{\mathcal{A}_n}^k, g \rangle = \langle \nu^k, g \rangle,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja, vale a equação (4.5), que vimos ser equivalente a (4.4).  $\square$

Agora queremos provar a existência da medida de probabilidade  $\mu$  associada a uma medida de correlação  $\nu$  no caso de  $D$  ser um domínio ilimitado de  $\mathbb{R}^d$ . A ideia para esta demonstração é construirmos uma medida de probabilidade em um conjunto limitado  $E \subset D$  e depois tomarmos o limite de  $E \uparrow D$ . Para isto, primeiramente, precisaremos do seguinte resultado:

**Lema 4.8.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto ilimitado e  $E \subset D$  um subconjunto qualquer. Seja  $\varphi : L^p(D; U) \rightarrow L^p(E; D)$  o mapa restrição, isto é,  $\varphi(u) = u|_E$  para qualquer  $u \in L^p(D; U)$ . Se  $\mu \in \mathcal{P}(L^p(D; U))$  é uma medida de probabilidade que tem associada uma medida de correlação  $\nu = (\nu^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , então a medida de probabilidade  $\varphi\#\mu \in \mathcal{P}(L^p(E, U))$  tem associada uma medida de correlação  $\nu|_E = (\nu^k|_E)_{k \in \mathbb{N}}$ .*

*Demonstração.* Dada  $g$  uma função em  $L^1(E^k; C_0(U^k))$ , considere a função  $G$  dada por  $G(x) = \mathbb{1}_E g(x, \cdot)$ . Então  $G \in L^1(D^k; C_0(U^k)) = \mathcal{H}^k(D; U)$  e, assim,

$$\begin{aligned} \int_{L^p(E, U)} \int_{E^k} g(x, u(x)) \, dx \, d(\varphi\#\mu)(u) &= \int_{L^p(D; U)} \int_{E^k} g(x, u|_E(x)) \, dx \, d\mu(u) \\ &= \int_{L^p(D; U)} \int_{D^k} \mathbb{1}_E g(x, u(x)) \, dx \, d\mu(u) \\ &= \int_{D^k} \left\langle \nu_x^k, \mathbb{1}_E g(x, \cdot) \right\rangle \, dx \\ &= \int_{E^k} \left\langle \left( \nu^k|_E \right)_x, g(x, \cdot) \right\rangle \, dx, \end{aligned}$$

isto é,  $\nu|_E$  é a medida de correlação correspondente à medida de probabilidade  $\varphi\#\mu$ .  $\square$

Utilizando o lema acima, conseguimos provar a existência da medida de probabilidade  $\mu$ , como feito a seguir.

**Proposição 4.9** (Existência de  $\mu$  para  $D$  ilimitado). *Seja  $D$  um conjunto mensurável arbitrário de  $\mathbb{R}^d$ . Dada uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , existe uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  que satisfaz (4.3) e (4.4).*

*Demonstração.* Seja  $R > 0$  dado e considere  $D_R = D \cap (-R, R)^d$ . Como a restrição  $\nu|_{D_R}$  de  $\nu$  a  $D_R$  é uma medida de correlação em  $\mathcal{L}^p(D_R; U)$  e  $D_R$  é um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^d$ , pelas proposições 4.4 e 4.7, existe uma única medida de probabilidade  $\tilde{\mu}_R \in \mathcal{P}(L^p(D_R; U))$  que satisfaz (4.3) e (4.4). Pelo lema 4.8, é de se esperar que a sequência  $(\tilde{\mu}_R)$  esteja relacionada à restrição de uma medida de probabilidade  $\mu$  correspondente à medida de correlação  $\nu$ .

Agora, seja  $\mu_R \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  a extensão de  $\tilde{\mu}_R$  tal que se anula no conjunto  $L^p(D; U) \setminus L^p(D_R; U)$ . Assim, gostaríamos que a sequência  $(\mu_R)$  esteja relacionada a mesma medida de probabilidade  $\mu$ . Aliás, note que para demonstrarmos a proposição 4.9, basta provarmos que a sequência  $(\mu_R)$  definida acima converge fracamente, quando  $R$  tende a infinito, para uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  que satisfaz (4.3) e (4.4).

Assim, considere uma função Lipschitz contínua  $\psi \in C_b(\mathcal{F})$  com norma  $\|\psi\|_{\text{Lip}(\mathcal{F})} \leq 1$ . Sejam  $H < R, R'$  e note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \psi(u) d(\mu_R - \mu_{R'})(u) &= \int_{\mathcal{F}} [\psi(u) - \psi(\mathbb{1}_{D_H} u)] d\mu_R(u) \\ &\quad + \int_{\mathcal{F}} \psi(\mathbb{1}_{D_H} u) d(\mu_R - \mu_{R'})(u) \\ &\quad + \int_{\mathcal{F}} [\psi(\mathbb{1}_{D_H} u) - \psi(u)] d\mu_{R'}(u). \end{aligned}$$

Pelo lema 4.8, sabemos que

$$\int_{\mathcal{F}} \psi(\mathbb{1}_{D_H} u) d(\mu_R - \mu_{R'})(u) = 0,$$

já que ambas as medidas  $\mu_R$  e  $\mu_{R'}$  se coincidem em  $L^p(D_H, U)$ . Agora, para o primeiro termo integral, usando que  $\|\psi\|_{\text{Lip}(\mathcal{F})} \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{F}} [\psi(u) - \psi(\mathbb{1}_{D_H} u)] d\mu_R(u) \right| &\leq \int_{\mathcal{F}} \|u - \mathbb{1}_{D_H} u\|_{\mathcal{F}} d\mu_R(u) \\ &\leq \left( \int_{\mathcal{F}} \|\mathbb{1}_{D_H^c} u\|_{\mathcal{F}}^p d\mu_R(u) \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{D_R \cap D_H^c} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{D \setminus D_H} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

já que  $D_R \cap D_H^c \subset D \setminus D_H$  e, similarmente, obtemos a seguinte estimativa para o terceiro termo da expressão integral

$$\left| \int_{\mathcal{F}} [\psi(\mathbb{1}_{D_H} u) - \psi(u)] d\mu_{R'}(u) \right| \leq \left( \int_{D \setminus D_H} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \right)^{1/p}.$$

Portanto, por ambas estimativas, concluímos

$$\int_{\mathcal{F}} \psi(u) d(\mu_R - \mu_{R'})(u) = 2 \left( \int_{D \setminus D_H} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \right)^{1/p}.$$

Agora, tomando o supremo dentre todas as funções Lipschitz contínuas com norma menor ou igual a 1, pela definição da 1-distância de Wasserstein, temos

$$W_1(\mu_R, \mu_{R'}) \leq 2 \left( \int_{D \setminus D_H} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \right)^{1/p}.$$

Como por hipótese o termo  $\int_D \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx$  é finito pois  $\nu$  é uma medida de correlação e, assim, satisfaz a propriedade de  $L^p$  limitação, segue que o termo

$$\int_{D \setminus D_H} \langle \nu_x^1, |\xi|^p \rangle dx \rightarrow 0 \text{ quando } H \rightarrow +\infty.$$

Ou seja,

$$W_1(\mu_R, \mu_{R'}) \rightarrow 0 \text{ quando } R, R' \rightarrow +\infty.$$

Como  $(\mathcal{P}(\mathcal{F}), W_1)$  é um espaço métrico completo, existe  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  tal que  $\mu_R \rightharpoonup \mu$  quando  $R \rightarrow +\infty$  fracamente no espaço das medidas de probabilidade em  $\mathcal{F}$ .

Por último, note que esta medida  $\mu$  é exatamente a medida de probabilidade correspondente à medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , pois sabemos que  $\nu^k|_{D_R} \xrightarrow{*} \nu^k$ ,  $\mu_R \rightharpoonup \mu$  e  $\langle \nu^k|_{D_R}, g \rangle = \langle \mu_R, L_g \rangle$ , para toda função de Carathéodory  $g \in \mathcal{H}^k(D; U)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, pela unicidade do limite, segue a expressão (4.5), cuja equivalência com a equação (4.4) já foi provada anteriormente e, com isso, provamos a existência da medida de probabilidade  $\mu$  associada à medida de correlação  $\nu$  no caso do domínio  $D$  ser ilimitado, como desejávamos.  $\square$

### 4.3 Momentos de uma medida de correlação

Na seção anterior, vimos uma relação entre medidas de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  e medidas de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$  com momento finito. Agora veremos uma outra relação envolvendo os momentos  $m^k$  de uma medida de correlação.

**Definição 4.10.** *Dados  $k \in \mathbb{N}$  e uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$ , dizemos que a função  $m^k : D^k \rightarrow U^{\otimes k}$  é um momento de  $\nu$  se*

$$m^k(x) = \int_{U^k} \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k d\nu_x^k(\xi),$$

onde  $U^{\otimes k}$  é o produto tensorial  $U \otimes \dots \otimes U$  repetido  $k$ -vezes e  $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k$  é um funcional que age em  $(U^{\otimes k})^* = U^{\otimes k}$  como

$$(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k) : (\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_k) = (\xi_1 \cdot \eta_1) \dots (\xi_k \cdot \eta_k).$$

Note que, se  $U = \mathbb{R}$ , os momentos  $m^k : D^k \rightarrow \mathbb{R}$  podemos ser escritos da seguinte maneira simplificada:

$$m^k(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \xi_1 \cdots \xi_k d\nu_x^k(\xi),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Suponhamos que

$$\int_{D^k} \int_{U^k} |\xi_1|^p \cdots |\xi_k|^p d\nu_x^k(\xi) < +\infty, \quad (4.11)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Mas, veja que usando o teorema de correspondência entre medidas de probabilidade e medidas de correlação, temos

$$\int_{D^k} \int_{U^k} |\xi_1|^p \cdots |\xi_k|^p d\nu_x^k(\xi) = \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} |u(x)|^p dx d\mu(u) = \int_{\mathcal{F}} \|u\|_{\mathcal{F}}^{kp} d\mu(u),$$

ou seja, a hipótese (4.11) é equivalente a supor

$$\int_{\mathcal{F}} \|u\|_{\mathcal{F}}^{pk} d\mu(u) < +\infty. \quad (4.12)$$

Dessa expressão, obtemos que os momentos  $m^k$  são funções bem-definidas no espaço  $L^p(D^k; U^{\otimes k})$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

O resultado a seguir diz que os momentos de uma medida de correlação a identificam unicamente, refletindo assim sua importância, pois serão uma das chaves essenciais para a próxima teoria que veremos: a formulação estatística das leis de conservação hiperbólicas.

**Teorema 4.11** (Caracterização de medida de correlação por seu momento). *Dada uma medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  que satisfaz (4.11), seus momentos  $m^k$  caracterizam unicamente tal medida  $\nu$ . Ou seja, se  $\tilde{\nu} \in \mathcal{L}^p(D; U)$  tem os mesmos momentos de  $\nu$ , então  $\tilde{\nu} = \nu$ .*

Contudo, antes de demonstrar o teorema acima, precisaremos enunciar o conceito de funcional característico e um resultado que será utilizado durante a prova. Assim, dada uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ , onde  $X$  é um espaço é um espaço de Banach separável qualquer munido da  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(X)$ , então  $\hat{\mu} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  é dito um funcional característico se é da forma

$$\hat{\mu}(\varphi) = \int_X e^{i\varphi(x)} d\mu(x),$$

para qualquer  $\varphi \in X^*$ .

**Lema 4.12.** *Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas de probabilidade em um espaço de Banach separável  $X$ . Se os funcionais característicos  $\hat{\mu}_1$  e  $\hat{\mu}_2$  são idênticos, então as medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  também se coincidem.*

*Demonstração.* Basta provar que as medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são iguais em um conjunto cilíndrico qualquer e, usando que a  $\sigma$ -álgebra  $\text{Cil}(X)$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra de Borel, segue o resultado. Assim, seja

$$E = \left\{ x \in X : (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in F \right\}$$

um conjunto cilíndrico, onde  $F \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto boreliano e  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$  são funcionais lineares. E sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  constantes. Por hipótese, como os funcionais característicos se coincidem, temos

$$\int_X e^{i\lambda_1\varphi_1(x)+\dots+i\lambda_n\varphi_n(x)} d\mu_1(x) = \int_X e^{i\lambda_1\varphi_1(x)+\dots+i\lambda_n\varphi_n(x)} d\mu_2(x).$$

Esta identidade implica que a função  $x \in X \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{R}^n$  mapeia as medidas de probabilidade  $\mu_1$  e  $\mu_2$  em medidas  $\tilde{\mu}_1$  e  $\tilde{\mu}_2$  em  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  com funcionais característicos idênticos. Logo, as medidas  $\tilde{\mu}_1$  e  $\tilde{\mu}_2$  são iguais e, conseqüentemente,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  se coincidem no conjunto cilíndrico  $E$ .  $\square$

*Demonstração do Teorema 4.11.* Pelo teorema de equivalência 4.2, consideremos as únicas medidas de probabilidade  $\mu$  e  $\tilde{\mu}$  em  $\mathcal{F}$  associadas às medidas de correlação  $\nu$  e  $\tilde{\nu}$ , respectivamente. Sejam  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\tilde{\mu}}$  seus funcionais característicos associados. Se provarmos que  $\hat{\mu} = \hat{\tilde{\mu}}$  então, pelo lema anterior, mostraremos que  $\mu = \tilde{\mu}$ .

Como a medida de correlação  $\nu \in \mathcal{L}^p(D; U)$  satisfaz (4.11), então sua medida de probabilidade associada  $\mu$  satisfaz (4.12) e, assim, faz sentido comutar a ordem de integração com a soma e obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\varphi) &= \int_{\mathcal{F}} e^{i\varphi(u)} d\mu(u) \\ &= \int_{\mathcal{F}} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \varphi(u)^k d\mu(u) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathcal{F}} \left( \int_D \varphi(x) \cdot u(x) dx \right)^k d\mu(u) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} (\varphi(x_1) \cdot u(x_1)) \cdots (\varphi(x_k) \cdot u(x_k)) dx d\mu(u) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathcal{F}} \int_{D^k} (u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_k)) : (\varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_k)) dx d\mu(u) \end{aligned}$$

Pelo teorema 4.2, podemos escrever a integração acima por

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\varphi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{D^k} \int_{U^k} (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) : (\varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_k)) \, d\nu_x^k(\xi) \, dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{D^k} \int_{U^k} m^k(x) : (\varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_k)) \, dx.\end{aligned}$$

E, por contas e argumentações análogas, temos

$$\hat{\tilde{\mu}}(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{D^k} \int_{U^k} \tilde{m}^k(x) : (\varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_k)) \, dx.$$

Como os momentos  $m^k$  e  $\tilde{m}^k$  de  $\nu$  e  $\tilde{\nu}$  se coincidem por hipótese, segue que  $\hat{\mu}(\varphi) = \hat{\tilde{\mu}}(\varphi)$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{F}^*$ , ou seja,  $\hat{\mu} = \hat{\tilde{\mu}}$ , como queríamos.  $\square$

## 4.4 Soluções Estatísticas para Leis de Conservação

Vimos nas seções anteriores relações entre medidas de probabilidade, medidas de correlação e seus momentos. Com essa bagagem, poderemos definir a seguir o que são soluções estatísticas para sistemas multidimensionais de leis de conservação. Primeiramente, vamos nos motivar pelo caso 1-dimensional e depois consideraremos dimensões arbitrárias.

### 4.4.1 Caso 1-dimensional

Considere a lei de conservação 1-dimensional que descreve a evolução de uma quantidade  $u(x, t)$  no tempo

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \quad (4.13)$$

Se  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  e  $u$  é uma solução suave da equação, isto é, possui a regularidade que precisamos para dar sentido as contas, então a derivada temporal do produto  $u(x_1, t)u(x_2, t)$  é

$$\begin{aligned}\partial_t [u(x_1, t)u(x_2, t)] &= [\partial_t u(x_1, t)]u(x_2, t) + u(x_1, t)[\partial_t u(x_2, t)] \\ &= [-\partial_{x_1} f(u(x_1, t))]u(x_2, t) + u(x_1, t)[-\partial_{x_2} f(u(x_2, t))] \\ &= -\partial_{x_1} [f(u(x_1, t))u(x_2, t)] - \partial_{x_2} [u(x_1, t)f(u(x_2, t))].\end{aligned}$$

Por indução, concluímos que, dado  $k \in \mathbb{N}$ , se  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  e  $u$  é solução suave de (4.13) com dado inicial  $u_0$ , então a derivada temporal do produto  $u(x_1, t) \cdots u(x_k, t)$  é

$$\partial_t[u(x_1, t) \cdots u(x_k, t)] = - \sum_{i=1}^k \partial_{x_i}[u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t)],$$

isto é,

$$\partial_t[u(x_1, t) \cdots u(x_k, t)] + \sum_{i=1}^k \partial_{x_i}[u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t)] = 0. \quad (4.14)$$

Ou, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \partial_t \varphi(x, t) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) \, dx \, dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^k \partial_{x_i} \varphi(x, t) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t) \, dx \, dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) \, dx = 0, \end{aligned}$$

para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

#### 4.4.2 Caso multidimensional

Agora, para o caso de sistemas multidimensionais, considere a lei de conservação que descreve a evolução de uma quantidade  $u(x, t)$  no tempo

$$\partial_t u + \nabla_x f(u) = 0,$$

onde  $u$  e  $f(u)$  são vetores em  $\mathbb{R}^N$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$ , se  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$  e  $u$  é solução suave da equação acima com dado inicial  $u_0$ , por contas similares ao caso unidimensional resultando em (4.14) mas agora envolvendo o produto tensorial  $u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_k)$ , temos que a derivada temporal deste produto é dada por

$$\partial_t[u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] + \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes f(u(x_i, t)) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] = 0. \quad (4.15)$$



Ou, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \partial_t \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes f(u(x_i, t)) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x, 0) : [u_0(x_1) \otimes \cdots \otimes u_0(x_k)] \, dx = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

para toda  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; (\mathbb{R}^N)^{\otimes k})$ .

**Lema 4.13.** *Seja  $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  uma solução fraca do problema (LCH). Então  $u$  satisfaz a equação (4.15) no sentido das distribuições, para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Ou seja, a seguinte equação é válida*

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \partial_t \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes f(u(x_i, t)) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x, 0) : [u_0(x_1) \otimes \cdots \otimes u_0(x_k)] \, dx = 0,
\end{aligned}$$

para toda  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; (\mathbb{R}^N)^{\otimes k})$ .

*Demonstração.* Provaremos este resultado para o caso unidimensional escalar, pois o caso geral segue de maneira similar. Assim, queremos obter que a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \partial_t \varphi(x, t) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^k \partial_{x_i} \varphi(x, t) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t) \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) \, dx = 0
\end{aligned}$$

é válida, para toda função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . A ideia será primeiramente provar para  $k = 1$  e depois utilizar indução.

Contudo, quando  $k = 1$ , a validade da expressão

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t) u(x, t) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \varphi(x, t) f(u(x, t)) \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u_0(x) \, dx = 0,
\end{aligned}$$

para qualquer  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , segue do fato de  $u$  ser uma solução fraca do problema (LCH).

Assim, suponhamos que a identidade é válida para algum  $k \in \mathbb{N}$  e provemos para  $k + 1$ . Considere uma função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  qualquer e seja  $\omega_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  um molificador simétrico tal que seu suporte  $\text{supp } \omega_\epsilon \subset [-\epsilon, +\epsilon]$ . Definindo a função  $\tilde{\varphi}$  da seguinte maneira

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \varphi(x, x_{k+1}, s) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds,$$

para  $x \in \mathbb{R}^k$ , obtemos que  $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  e, além disso,

$$\partial_t \tilde{\varphi}(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega'_\epsilon(t - s) \varphi(x, x_{k+1}, s) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds.$$

Somando e subtraindo o termo  $\omega_\epsilon(t - s) \partial_s \varphi(x, x_{k+1}, s)$  na integral, podemos escrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varphi}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[ -\partial_s (\omega_\epsilon(t - s) \varphi(x, x_{k+1}, s)) \right] u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \partial_s \varphi(x, x_{k+1}, s) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds. \end{aligned}$$

Mas, pelo passo inicial de quando  $k = 1$ , sabemos que

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_s (\omega_\epsilon(t - s) \varphi(x, x_{k+1}, s)) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \partial_{x_{k+1}} \varphi(x, x_{k+1}, s) f(u(x_{k+1}, s)) dx_{k+1} ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t) \varphi(x, x_{k+1}, 0) u_0(x_{k+1}) dx_{k+1}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varphi}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \partial_{x_{k+1}} \varphi(x, x_{k+1}, s) f(u(x_{k+1}, s)) dx_{k+1} ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t) \varphi(x, x_{k+1}, 0) u_0(x_{k+1}) dx_{k+1} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \partial_s \varphi(x, x_{k+1}, s) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds. \end{aligned}$$

Além disso, derivando parcialmente  $\tilde{\varphi}$  no espaço, temos

$$\partial_{x_i} \tilde{\varphi}(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \omega_\epsilon(t - s) \partial_{x_i} \varphi(x, x_{k+1}, s) u(x_{k+1}, s) dx_{k+1} ds,$$

para todo  $1 \leq i \leq k$ . Assim, pela hipótese de indução aplicada à função  $\tilde{\varphi}$  e denotando a variável  $\bar{x} = (x, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ , temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \partial_t \tilde{\varphi}(x, t) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) dx dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^k \partial_{x_i} \tilde{\varphi}(x, t) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t) dx dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{\varphi}(x, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \int_{\mathbb{R}_+} \omega_\epsilon(t-s) \partial_{x_{k+1}} \varphi(\bar{x}, s) f(u(x_{k+1}, s)) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) ds d\bar{x} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \omega_\epsilon(t) \varphi(\bar{x}, 0) u_0(x_{k+1}) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) d\bar{x} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \int_{\mathbb{R}_+} \omega_\epsilon(t-s) \partial_s \varphi(\bar{x}, s) u(x_{k+1}, s) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) ds d\bar{x} dt \\
&+ \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \int_{\mathbb{R}_+} \omega_\epsilon(t-s) \partial_{x_i} \varphi(\bar{x}, s) \\
&\quad \times u(x_{k+1}, s) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t) ds d\bar{x} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \int_{\mathbb{R}_+} \omega_\epsilon(-s) \varphi(\bar{x}, s) u(x_{k+1}, s) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) ds d\bar{x}.
\end{aligned}$$

Tomando o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$  e lembrando da simetria do molificador  $\omega_\epsilon$ , concluímos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \partial_{x_{k+1}} \varphi(\bar{x}, t) f(u(x_{k+1}, t)) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) d\bar{x} dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \varphi(\bar{x}, 0) u_0(x_{k+1}) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) d\bar{x} \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \partial_t \varphi(\bar{x}, t) u(x_{k+1}, t) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) d\bar{x} dt \\
&+ \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \partial_{x_i} \varphi(\bar{x}, t) u(x_{k+1}, t) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t) d\bar{x} dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \varphi(\bar{x}, 0) u_0(x_{k+1}) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) d\bar{x}.
\end{aligned}$$

Portanto, rearranjando os termos integrais, obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \partial_t \varphi(\bar{x}, t) u(x_1, t) \cdots u(x_{k+1}, t) \, d\bar{x} \, dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} \partial_{x_i} \varphi(\bar{x}, t) u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_{k+1}, t) \, d\bar{x} \, dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \varphi(\bar{x}, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_{k+1}) \, d\bar{x}, \end{aligned}$$

que é exatamente a expressão que queríamos obter para  $k+1$ . Pela arbitrariedade da função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , provamos o lema.  $\square$

Dada  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  uma solução fraca do problema (LCH), considere a medida de correlação atômica  $\nu_t = (\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  gerada por  $u(\cdot, t)$ , ou seja, os marginais de correlação são dados por  $\nu_{t,x}^k = \delta_{u(x_1,t)} \otimes \cdots \otimes \delta_{u(x_k,t)}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Então, de (4.15), obtemos

$$\partial_t \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle + \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes f(\xi_i) \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle = 0, \quad (4.17)$$

para todos  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $t > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Note que esta expressão é bem-posta sempre que

$$\int_{K^k} \langle \nu_{t,x}^k, |\xi_1| \cdots |\xi_k| \rangle \, dx < +\infty, \quad (4.18)$$

para todo subconjunto  $K \subset D$  e qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, (4.17) faz sentido mesmo no caso de  $\nu_t$  não ser uma medida de correlação atômica. Assim, somos motivados a definir solução estatística baseados nesta identidade. Mas, antes veja que podemos escrever a condição (4.18) em termos da medida de probabilidade  $\mu_t \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$  associada a medida de correlação  $\nu_t$  da seguinte forma:

$$\int_{L^1} \|u\|_{L^1(K^k)} \, d\mu_t(u) < +\infty, \quad (4.19)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e todo subconjunto  $K \subset D$  compacto. Chamaremos tal condição de taxa de decaimento.

**Definição 4.14** (Solução Estatística para Lei de Conservação). *Dada uma medida de probabilidade  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$  que satisfaz (4.19), uma solução estatística  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  do problema (2.1) com dado inicial  $\mu_0$  é um mapa fraco- $*$  mensurável  $t \in \mathbb{R} \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$  tal que cada medida de probabilidade  $\mu_t$*

satisfaz (4.19) e sua medida de correlação correspondente  $\nu_t = (\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz (4.17) no sentido das distribuições, ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes f(\xi_i) \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \quad (4.20) \\ & + \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) : \langle \nu_x^{0,k}, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx = 0, \end{aligned}$$

para qualquer  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; (\mathbb{R}^N)^{\otimes k})$  e todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $\nu^0$  é a medida de correlação associada à medida  $\mu_0$  dada.

Apesar de definirmos o conceito de solução estatística aqui no caso multidimensional, focaremos nossa atenção na próxima seção no caso de leis de conservação escalares, pois é neste contexto que conseguiremos provar a boa-colocação das soluções estatísticas.

## 4.5 Soluções Estatísticas para Leis de Conservação Escalares

Nesta seção iremos estudar a boa-colocação das soluções estatísticas para o caso especial de leis de conservação escalares. Vimos no capítulo 2 que o problema (LCH) escalar atrelado a uma condição de entropia é bem-posto. Neste caso, introduziremos o conceito de solução estatística de entropia e provaremos que essa solução estatística é única.

### 4.5.1 Solução Estatística Canônica

Primeiramente introduziremos o conceito de uma solução estatística especial, conhecida por solução estatística canônica. Essa solução é induzida pelo semigrupo  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , que sabemos ser bem-definido para o problema (LCH) atrelado à condição de entropia de Kružkov. Nesta subseção, provaremos que as soluções estatísticas de entropia são estáveis com relação aos dados iniciais e, posteriormente, veremos que as soluções estatísticas canônicas são as únicas soluções estatísticas que satisfazem a condição de entropia para leis de conservação hiperbólicas escalares.

**Definição 4.15** (Soluções Estatísticas Canônicas). *Dada uma medida de probabilidade  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  tal que  $\text{supp } \mu \subset L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ , a solução estatística*

canônica  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  do problema (2.1) com dado inicial  $\mu_0$  é a família definida pelas medidas

$$\mu_t = S_t \# \mu_0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

onde  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é o semigrupo de solução de entropia da lei de conservação escalar com dado inicial em  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ . Ou seja,  $\mu_t$  é a medida “pushforward” de  $\mu_0$  pelo operador  $S_t$ .

Lembremos que o operador “pushforward”  $\#$  age em cada elemento pertencente ao suporte da medida  $\mu_0$  aplicando o operador  $S_t$  da seguinte forma

$$\int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} f(u) d\mu_t(u) = \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} f(u) d(S_t \# \mu_0)(u) = \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} f(S_t u) d\mu_0(u), \quad (4.21)$$

para cada função  $f \in C_b(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ .

Além disso, se  $u_0 \in \text{supp } \mu_0$  é um dado inicial do problema (2.1) e  $u(t) = S_t u_0$  é a única solução de entropia deste problema, note que a solução estatística canônica, pela equação acima (4.21), está concentrada na solução  $u(t)$ .

A seguir provaremos que de fato soluções estatísticas canônicas do problema (2.1) são soluções estatísticas e que, além disso, tais soluções são estáveis com respeito às medidas de probabilidade iniciais definidas em  $L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ . Esta propriedade é essencial para conseguirmos mostrar a boa-colocação das soluções estatísticas.

**Teorema 4.16.** *Seja  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  uma medida de probabilidade que satisfaz a taxa de decaimento (4.19). Se  $\mu_t = S_t \# \mu_0$  para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ , então o mapa  $t \mapsto \mu_t$  é uma solução estatística com dado inicial  $\mu_0$  da lei de conservação hiperbólica (2.1).*

*Além disso, se  $\rho_t$  for outra solução estatística deste problema com dado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ , podemos garantir que a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$W_1(\mu_t, \rho_t) \leq W_1(\mu_0, \rho_0), \quad (4.22)$$

*ou seja, a solução estatística é estável com respeito ao dado inicial.*

*Demonstração.* Como o semigrupo  $S_t : L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \rightarrow L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  é um operador contínuo (veja no Capítulo 1), então o mapa  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  é fraco-\* mensurável.

Além disso, cada  $\mu_t$  satisfaz a taxa de decaimento (4.19). De fato, se  $k \in \mathbb{N}$  e

$K \subset D$  é um subconjunto compacto, então

$$\begin{aligned} \int_{L^1} \|u\|_{L^1(K^k)} d\mu_t(u) &= \int_{L^1} \|u\|_{L^1(K^k)} d(S_t\#\mu_0)(u) \\ &= \int_{L^1} \|S_t u\|_{L^1(K^k)} d\mu_0(u) \\ &\leq \int_{L^1} \|u\|_{L^1(K^k)} d\mu_0(u) < +\infty, \end{aligned}$$

por hipótese, onde a última desigualdade segue do fato de  $S_t$  ser uma semigrupo de contração.

Para concluirmos a demonstração de que  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística falta mostrarmos que, se  $\nu_t = (\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é a medida de correlação correspondente à medida de probabilidade  $\mu_t$ , para cada tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ , então (4.20) é satisfeita. Assim, seja  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . Então

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \cdots \xi_k \rangle dx dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \cdots f(\xi_i) \cdots \xi_k \rangle dx dt \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) \langle \nu^{0,k}, x, \xi_1 \cdots \xi_k \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{L^1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) u(x_1, t) \cdots u(x_k, t) dx d\mu_t(u) dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{L^1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \cdots f(u(x_i, t)) \cdots u(x_k, t)] dx d\mu_t(u) dt \\ &+ \int_{L^1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) d\mu_0(u_0) dx \\ &= \int_{L^1} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) S_t u_0(x_1) \cdots S_t u_0(x_k) d\mu_0(u_0) dx dt \\ &+ \int_{L^1} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) : \\ &\quad [S_t u_0(x_1) \cdots f(S_t u_0(x_i)) \cdots S_t u_0(x_k)] d\mu_0(u_0) dx dt \\ &+ \int_{L^1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) d\mu_0(u_0) dx = 0, \end{aligned}$$

porque  $S_t u_0$  é uma solução fraca do problema (LCH) sempre que o dado inicial  $u_0$  pertença a  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ .

Por último, considere  $\rho_t$  solução estatística da lei de conservação (2.1) com dado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  e seja  $\pi_0 \in \Pi(\mu_0, \rho_0)$  um plano de transporte ótimo entre  $\mu_0$  e  $\rho_0$  (veja no Capítulo 1). Se definirmos a família  $\pi_t = (S_t, S_t)\#\pi_0 \in \Pi(\mu_t, \rho_t)$ , então obtemos

$$\begin{aligned} W_1(\mu_t, \rho_t) &= \inf_{\nu \in \Pi(\mu_t, \rho_t)} \int_{(L^1)^2} \|u - v\|_{L^1} d\nu(u, v) \leq \int_{(L^1)^2} \|u - v\|_{L^1} d\pi_t(u, v) \\ &= \int_{(L^1)^2} \|u - v\|_{L^1} d(S_t\pi_0)(u, v) = \int_{(L^1)^2} \|S_t u_0 - S_t v_0\|_{L^1} d\pi_0(u_0, v_0) \\ &\leq \int_{(L^1)^2} \|u_0 - v_0\|_{L^1} d\pi_0(u_0, v_0) = W_1(\mu_0, \rho_0), \end{aligned}$$

como precisávamos para provar a estabilidade da solução estatística canônica.  $\square$

### 4.5.2 Soluções Estatísticas de Entropia

Vimos anteriormente que sempre podemos garantir a existência de solução estatística para uma lei de conservação hiperbólica com condição inicial no espaço de probabilidades  $\mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ , dado que a solução estatística canônica será uma. Apesar de termos também provado sua estabilidade com respeito ao dado inicial, não conseguimos garantir sua unicidade. Aliás, veremos nesta subseção que para obtermos unicidade da solução estatística para este problema, precisamos impor uma condição de entropia.

Se recordarmos o caso de solução fraca para leis de conservação escalares, também conseguíamos provar existência de soluções fracas, mas para que o problema fosse bem-posto, pedimos que tal solução satisfizesse a condição de entropia de Kružkov

$$\partial_t |u - c| + \nabla_x \cdot q(u, c) \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+), \quad (4.23)$$

onde  $q(u, c) = \text{sgn}(u - c)(f(u) - f(c))$  e  $c \in \mathbb{R}$ , que garantia a estabilidade com relação a uma família de soluções estacionárias, que eram as soluções constantes, como visto no capítulo 2.

Nosso objetivo agora, nesse sentido, é impormos uma condição sob as soluções estatísticas similar a obtida para as soluções fracas de modo a garantirmos sua unicidade. A nossa ideia será selecionar as soluções estatísticas estáveis com respeito a qualquer combinação convexa finita de medidas de Dirac. Contudo, como funções contantes trivialmente não são integráveis, o jeito para contornarmos o problema de definirmos solução de entropia com propriedades boas é usar o seguinte resultado que nos fornece uma caracterização do conjunto dos planos de transporte entre a medida do dado inicial e uma combinação convexa de medidas de Dirac qualquer.



**Lema 4.17.** *Sejam  $u_1, \dots, u_M \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  funções integráveis e  $\alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}_+$  constantes não-negativas tais que  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ . Considere a medida  $M$ -atômica com pesos  $\alpha_i$  da seguinte forma*

$$\rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{u_i} \in \mathcal{P} \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \right)$$

*e seja uma outra medida de probabilidade  $\mu$  neste mesmo espaço. Então uma medida  $\pi$  é um plano de transporte entre  $\mu$  e  $\rho$  se, e somente se, existem  $\mu_1, \dots, \mu_M \in \mathcal{P} \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \right)$  tais que*

$$\pi = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i \otimes \delta_{u_i}.$$

*E, em particular,  $\mu = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i$ .*

Note que, por este resultado, se  $\rho$  for uma combinação convexa finita de medidas de Dirac com pesos  $\alpha_i$ , garantimos uma equivalência entre um plano de transporte  $\pi \in \Pi(\mu, \rho)$  e um elemento do conjunto

$$\Lambda(\alpha, \mu) = \left\{ (\mu_1, \dots, \mu_M) : \mu_i \in \mathcal{P} \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \right) \text{ e } \sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i = \mu \right\}, \quad (4.24)$$

para qualquer  $M$ -upla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M$  tal que  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  e  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ . Observe que este conjunto  $\Lambda(\alpha, \mu)$  nunca é vazio, pois  $(\mu, \dots, \mu)$  sempre pertence a ele para quaisquer coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ .

*Demonstração.* Primeiramente, suponha que existam  $\mu_1, \dots, \mu_M \in \mathcal{P} \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \right)$  tais que  $\pi = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i \otimes \delta_{u_i}$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  com  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ . Como  $\mu_i \otimes \delta_{u_i}$  é um plano de transporte trivial entre  $\mu$  e  $\rho$ , então a medida de probabilidade  $\pi$  definida acima como combinação convexa finita deles também pertence a  $\Pi(\mu, \rho)$ .

Agora, suponha que  $\pi \in \Pi(\mu, \rho)$ . Defina, então, medidas  $\mu_1, \dots, \mu_M$  por

$$\mu_i(A) = \frac{\pi(A \times \{u_i\})}{\alpha_i},$$

para cada conjunto  $A \subset L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  e cada índice  $1 \leq i \leq M$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  e  $u_1, \dots, u_M \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  são funções distintas. Como

$$\pi \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \times \{u_i\} \right) = \rho(\{u_i\}) = \alpha_i,$$

segue que  $\mu_i \in \mathcal{P} \left( L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \right)$ , para cada  $1 \leq i \leq M$ . Além disso,

$$\pi(A \times \{u_i\}) = \alpha_i \mu_i(A) = \alpha_i (\mu_i \otimes \delta_{u_i})(A \times \{u_i\}),$$

para cada  $1 \leq i \leq M$ . Então  $\pi$  é da forma  $\sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i \otimes \delta_{u_i}$ .  $\square$

O resultado anterior nos motiva a definir o que são as soluções estatísticas de entropia para o problema de lei de conservação hiperbólica e, a partir de tal definição, conseguimos provar que as soluções estatísticas canônicas vistas na seção anterior satisfazem a condição de entropia que propomos.

**Definição 4.18.** *A família  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma solução estatística de entropia se, dados quaisquer coeficientes positivos  $\alpha_i$  tais que  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$  e qualquer  $M$ -upla  $(\mu_{0,1}, \dots, \mu_{0,M}) \in \Lambda(\alpha, \mu_0)$ , existir um mapa de  $\mathbb{R}_+$  para  $\Lambda(\alpha, \mu_t)$  dado por  $t \mapsto (\mu_{1,t}, \dots, \mu_{M,t})$  tal que  $\mu_{i,0} = \mu_{0,i}$  e*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^M \alpha_i \left[ |u(x, t) - c_i| \partial_t \varphi(x, t) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + q(u(x, t), c_i) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) \right] dx d\mu_{i,t}(u) dt \quad (4.25) \\ & + \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^M \alpha_i |u_0(x) - c_i| \varphi(x, 0) dx d\mu_{0,i}(u_0) \geq 0, \end{aligned}$$

para toda função não-negativa  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  e quaisquer constantes reais  $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 4.19.** *Toda solução estatística canônica é uma solução estatística de entropia.*

*Demonstração.* Seja  $(\mu_{0,1}, \dots, \mu_{0,M}) \in \Lambda(\alpha, \mu_0)$  com  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \subset \mathbb{R}_+^M$  formada por constantes não-negativas tais que  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ . Definindo  $\mu_{i,t} = S_t \# \mu_{0,i}$ , onde  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é o semigrupo de solução de entropia da lei de conservação escalar (2.1), temos que  $(\mu_{1,t}, \dots, \mu_{M,t}) \in \Lambda(\alpha, \mu_t)$ , já que  $\mu_{i,t} \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  e

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_{i,t} = \sum_{i=1}^M \alpha_i S_t \# \mu_{0,i} = S_t \# \mu_0 = \mu_t.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\mathbb{R}_+} \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x, t) - c_i| \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, d\mu_{i,t}(u) \, dt \\
& + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\mathbb{R}_+} \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} q(u(x, t), c_i) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) \, dx \, d\mu_{i,t}(u) \, dt \\
& + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - c_i| \varphi(x, 0) \, dx \, d\mu_{0,i}(u_0) \\
= & \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} |S_t u_0(x) - c_i| \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, dt \, d\mu_{0,i}(u_0) \\
& + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} q(S_t u_0(x), c_i) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) \, dx \, dt \, d\mu_{0,i}(u_0) \\
& + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - c_i| \varphi(x, 0) \, dx \, d\mu_{0,i}(u_0) \geq 0,
\end{aligned}$$

para toda função não-negativa  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , pois  $u(t) = S_t u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$  para todo tempo  $t \in \mathbb{R}_+$  é solução de entropia da lei de conservação, logo satisfaz a condição de entropia de Kružkov  $\partial_t |u(t) - c_i| + \nabla_x \cdot q(u(t), c_i) \leq 0$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ , como em (4.23), e obtemos a desigualdade usando integração por partes, já que os termos dentro dos colchetes são não-negativos.  $\square$

O lema a seguir será o penúltimo resultado que precisaremos para conseguirmos demonstrar a boa-colocação das soluções estatísticas de entropia e será importante por garantir estabilidade entre estas soluções e combinações convexas de medidas de Dirac.

**Lema 4.20.** *Dada uma solução de estatística de entropia com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  tal que  $\text{supp } \mu_0 \subset L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ , considere uma solução estatística de entropia  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  de (2.1) com condição inicial  $\mu_0$ . Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$  constantes positivas tais que  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$  e considere funções  $v_{0,1}, \dots, v_{0,M} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ . Se  $v_1, \dots, v_M$  são as únicas soluções de entropia de (2.1) com dado inicial  $v_{0,1}, \dots, v_{0,M}$ , respectivamente, ou seja,  $v_i$  é solução de entropia de (2.1) com dado inicial  $v_{0,i}$ , defina*

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{v_{0,i}}$$

e, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\rho_t = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{v_i(t)}.$$

Então, para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , temos

$$W_1(\rho_t, \mu_t) \leq W_1(\rho_0, \mu_0).$$

A demonstração do resultado acima pode ser conferida em [8, Lema 4.5] e usa o fato de que existe um plano de transporte ótimo entre as medidas  $\rho_0$  e  $\mu_0$ , que pode ser escrito como  $(\mu_{0,1}, \dots, \mu_{0,M}) \in \Lambda(\alpha, \mu_0)$ .

O próximo resultado envolve conceitos de topologia e teoria da medida e será utilizado para conseguirmos provar a unicidade das soluções estatísticas de entropia.

**Lema 4.21.** *Se  $X$  é um espaço polonês equipado com a  $\sigma$ -álgebra de Borel, então o fecho convexo do conjunto de todas as medidas de Dirac em  $X$  é denso em  $\mathcal{P}(X)$  segundo a topologia fraca.*

Lembre que um espaço polonês é um espaço homeomorfo a um espaço métrico completo que possui um subconjunto enumerável denso. Além disso, o fecho convexo de um conjunto  $Y$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que o contém, ou seja, é o menor conjunto convexo que contém o conjunto  $Y$ .

*Demonstração.* Precisamos provar que para qualquer medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ , existe uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{P}(X)$  tal que cada  $\mu_n$  é a combinação finita convexa de medidas de Dirac no espaço  $X$  e  $\mu_n \rightarrow \mu$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Usando [3, Seção 3.2], sabemos que a topologia da convergência fraca é gerada pelos conjuntos da aberto da forma

$$U_{\psi, \mu, \epsilon} = \left\{ \rho \in \mathcal{P}(X) : \left| \int_X \psi(x) d\mu(x) - \int_X \psi(x) d\rho(x) \right| < \epsilon \right\},$$

para  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\psi \in C_b(X)$ . Assim, para demonstrar o resultado, basta mostrarmos que todo conjunto  $U_{\psi, \mu, \epsilon}$  contém uma medida que é combinação finita convexa de medidas de Dirac.

Para isto, sejam  $\epsilon > 0$  e  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ . Como as funções simples são densas no conjunto das funções contínuas limitadas, dada  $\psi \in C_b(X)$ , considere uma função simples

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

tal que  $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = 1$  e

$$\sup_{x \in X} |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para cada conjunto  $A_i$ , considere um elemento  $x_i \in A_i$  fixo. Então defina a medida

$$\rho = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \delta_{x_i},$$

ou seja,  $\rho$  é uma combinação finita convexa de medidas de Dirac. Assim, como

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x_i)| &\leq |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| + |\tilde{\psi}(x) - \tilde{\psi}(x_i)| + |\tilde{\psi}(x_i) - \psi(x_i)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 0 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo  $x \in A_i$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_X \psi(x) d\mu(x) - \int_X \psi(x) d\rho(x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{A_i} [\psi(x) - \psi(x_i)] d\mu(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\psi(x) - \psi(x_i)| d\mu(x) \\ &< \epsilon \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \epsilon, \end{aligned}$$

portanto,  $\rho \in U_{\psi, \mu, \epsilon}$ , como queríamos provar.  $\square$

No próximo teorema, consideraremos o espaço polonês  $X$  do lema acima sendo o espaço  $L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ . De fato, este espaço é polonês pois é um espaço de Banach, logo é completamente metrizável; e, lembrando que  $L^p$  é separável para todo  $1 \leq p < \infty$ , em particular, temos que  $L^1$  é separável.

**Teorema 4.22.** *Dada uma medida de probabilidade  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  tal que  $\text{supp } \mu_0 \subset L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ , existe uma única solução estatística de entropia do problema (2.1) com dado inicial  $\mu_0$  e tal solução é exatamente a solução estatística canônica.*

*Demonstração.* Seja  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  uma solução estatística de entropia de (2.1) com dado inicial  $\mu_0$ . Como  $\mu_0 \in \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ , pelo lema anterior, existe uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  formada por medidas que são combinações finitas convexas de medidas de Dirac tal que  $\mu_n \rightharpoonup \mu_0$  em  $\mathcal{P}(L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $\mu_{n,t} = S_t \# \mu_n$ , então  $\{\mu_{n,t}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística canônica de (2.1) com dado inicial  $\mu_n$ . Assim, obtemos que  $\mu_{n,t} \rightarrow S_t \# \mu_0$  e, pela estabilidade entre soluções estatísticas de entropia e combinações convexas de medidas de Dirac vista no lema 4.20, segue que

$$W_1(\mu_t, \mu_{n,t}) \leq W_1(\mu_0, \mu_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Lembrando que  $W_1$  metriza a topologia da convergência fraca no conjunto das medidas de probabilidade, concluímos que  $\mu_{n,t} \rightarrow \mu_t$  e, portanto, pela unicidade do limite, obtemos que  $\mu_t = S_t \# \mu_0$ , ou seja,  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística canônica.  $\square$

Note que, pelo teorema acima, como obtemos a unicidade das soluções estatísticas das leis de conservação hiperbólicas escalares e já vimos que soluções estatísticas canônicas são estáveis com respeito aos dados iniciais, ganhamos então que as soluções de entropia são estáveis, isto é, se  $\mu_t$  e  $\rho_t$  são duas soluções estatísticas de entropia de (2.1) com condições iniciais  $\mu_0$  e  $\rho_0$ , respectivamente, então

$$W_1(\mu_t, \rho_t) \leq W_1(\mu_0, \rho_0)$$

é válida para todo tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

## Capítulo 5

# Relações entre as diferentes noções de solução

Neste capítulo, queremos discutir possíveis relações entre as diferentes noções de soluções abordadas nos capítulos 3 e 4: a solução estatística de Illner-Wick e solução a valor de medida vistas em [17] e, por último, a solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra definida no artigo [8].

Também mostraremos um exemplo de equação diferencial com uma solução fraca que não gera solução estatística no sentido de Illner-Wick, provando, assim, que a classe de soluções estatísticas neste sentido não engloba a classe de soluções fraca, diferentemente da solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, como veremos.

### 5.1 A Equação de Burgers

Considere a equação dada por

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0,$$

conhecida por equação de Burgers, que é uma lei de conservação hiperbólica, onde a função  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja

$$u_0(x) = x \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + (2-x) \mathbb{1}_{(1,2)}(x)$$

o dado inicial atrelado à equação. Então a função

$$u(x, t) = \left[ \frac{x}{1+t} \mathbb{1}_{(0,1+t)}(x) + \frac{2-x}{1-t} \mathbb{1}_{(1+t,2)}(x) \right] \mathbb{1}_{(0,1)}(t) \\ + \frac{x}{1+t} \mathbb{1}_{(0, \sqrt{2(1+t)})}(x) \mathbb{1}_{(1, \infty)}(t)$$

é uma solução fraca deste problema de valor inicial.

Contudo, vamos ver a seguir que a família  $\{\delta_{u(\cdot,t)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  de medidas de probabilidade gerada por esta solução fraca não é uma solução estatística no sentido de Illner-Wick. Para isto, considere uma função teste da forma

$$\varphi(v, t) = \phi(t) \int_{\mathbb{R}} v^2(x) dx$$

onde  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Considerando a equação (3.12) que toda solução estatística deve satisfazer com a função teste acima e as funções  $u(x, t)$  e  $u_0(x)$  dadas pelas expressões anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[ \partial_t \varphi(u, t) - D_u \varphi(u, t) \circ \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(u_0, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) u^2(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) u^2(x, t) [\partial_x u(x, t)]^2 dx dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} \phi(0) u_0^2(x) dx \\ &= \text{(I)} - \text{(II)} + \text{(III)}. \end{aligned}$$

Calculemos cada integral a seguir:

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \int_0^1 \int_0^{1+t} \phi'(t) \left( \frac{x}{1+t} \right)^2 dx dt + \int_0^1 \int_{1+t}^2 \phi'(t) \left( \frac{2-x}{1-t} \right)^2 dx dt \\ & \quad + \int_1^\infty \int_0^{\sqrt{2(1+t)}} \phi'(t) \left( \frac{x}{1+t} \right)^2 dx dt \\ &= \int_0^1 \phi'(t) \frac{1+t}{3} dt + \int_0^1 \phi'(t) \frac{1-t}{3} dt + \int_1^\infty \phi'(t) \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{1+t}} dt \\ &= \frac{2}{3} (\phi(1) - \phi(0)) + \frac{\sqrt{8}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi'(t)}{\sqrt{1+t}} dt \\ &= \frac{2}{3} (\phi(1) - \phi(0)) + \frac{\sqrt{8}}{3} \left[ \frac{-\phi(1)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{3/2}} dt \right] \\ &= \frac{-2}{3} \phi(0) + \frac{\sqrt{2}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{3/2}} dt; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(\text{II}) &= \int_0^1 \int_0^{1+t} \phi(t) \left( \frac{x}{1+t} \right)^2 \left( \frac{1}{1+t} \right)^2 dx dt \\
&\quad + \int_0^1 \int_{1+t}^2 \phi(t) \left( \frac{2-x}{1-t} \right)^2 \left( \frac{-1}{1-t} \right)^2 dx dt \\
&\quad + \int_1^\infty \int_0^{\sqrt{2(1+t)}} \phi(t) \left( \frac{x}{1+t} \right)^2 \left( \frac{1}{1+t} \right)^2 dx dt \\
&= \int_0^1 \frac{\phi(t)}{3(1+t)} dt + \int_0^1 \frac{\phi(t)}{3(1-t)} dt + \frac{\sqrt{8}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{5/2}} dt \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\phi(t)}{1-t^2} dt + \frac{\sqrt{8}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{5/2}} dt
\end{aligned}$$

e, por último,

$$(\text{III}) = \int_0^1 \phi(0)x^2 dx + \int_1^2 \phi(0)(2-x)^2 dx = \frac{2}{3}\phi(0).$$

Assim, somando os três termos integrais, temos

$$\begin{aligned}
(\text{I}) - (\text{II}) + (\text{III}) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{3/2}} dt + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\phi(t)}{1-t^2} dt + \frac{\sqrt{8}}{3} \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{(1+t)^{5/2}} dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\phi(t)}{1-t^2} dt + \int_1^\infty \frac{1+3\phi(t)}{(1+t)^{5/2}} dt \right],
\end{aligned}$$

que não é igual a zero para toda  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Por exemplo, tomando a função

$$\phi(t) = e^{-1/(1-t^2)} \mathbb{1}_{(0,1)}(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}),$$

temos que

$$(\text{I}) - (\text{II}) + (\text{III}) = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{e^{-1/(1-t^2)}}{1-t^2} dt \approx 0.124597 \neq 0.$$

Logo, provamos que as soluções fracas não precisam gerar soluções estatísticas no sentido de Illner-Wick.

## 5.2 Relações entre as soluções

Primeiramente, vamos mostrar que toda solução fraca para leis de conservação hiperbólicas gera uma solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra. Para isto, seja  $u(t)$  uma solução fraca do problema (LCH) com condição

inicial  $u_0$ , onde  $u_0$  e  $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)$  para quase todo tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Consideremos o caso de soluções estatísticas atômicas, isto é, sejam  $\mu_0 = \delta_{u_0}$  e  $\mu_t = \delta_{u(t)}$ . Então, pela identidade que toda solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra deve satisfazer vista na definição 4.14, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes f(\xi_i) \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \\
& + \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) : \langle \nu_{0,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx \\
= & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \int_{(\mathbb{R}^N)^k} \partial_t \varphi(x, t) : [\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k] d\nu_{t,x}^k(\xi) dx dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \int_{(\mathbb{R}^N)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \varphi(x, t) : [\xi_1 \otimes \cdots \otimes f(\xi_i) \otimes \cdots \otimes \xi_k] d\nu_{t,x}^k(\xi) dx dt \\
& + \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \int_{(\mathbb{R}^N)^k} \varphi(x, 0) : [\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k] d\nu_{0,x}^k(\xi) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{F}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] dx d\mu_t(u) dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{F}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) : \\
& \quad [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes f(u(x_i, t)) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] dx d\mu_t(u) dt \\
& + \int_{\mathcal{F}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] dx d\mu_0(u) \\
= & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] dx dt \\
& + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \varphi(x, t) : [u(x_1, t) \otimes \cdots \otimes f(u(x_i, t)) \otimes \cdots \otimes u(x_k, t)] dx dt \\
& + \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) : [u_0(x_1) \otimes \cdots \otimes u_0(x_k)] dx \\
= & 0,
\end{aligned}$$

para toda função  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; (\mathbb{R}^N)^{\otimes k})$ , pela definição de solução fraca de (2.1). Em outras palavras, toda solução fraca é uma solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra. Ou seja, a classe de soluções estatísticas neste sentido é maior que a classe de soluções fracas para uma lei de conservação

hiperbólica.

Agora, vamos provar que toda solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra gera uma solução a valor de medida. Para isto, considere  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  uma solução estatística da lei de conservação (2.1) com dado inicial  $\mu$  no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra. Se  $(\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é a medida de correlação associada à medida de probabilidade  $\mu_t$ , para cada tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ , sabemos que a seguinte igualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \partial_t \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \sum_{i=1}^k \nabla_{x_i} \cdot \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes f(\xi_i) \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx dt \\ & + \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(x, 0) : \langle \nu_{0,x}^k, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k \rangle dx = 0, \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e para toda função  $\varphi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^d)^k \times \mathbb{R}_+; (\mathbb{R}^N)^{\otimes k})$ . Em particular, quando  $k = 1$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^1, \xi \rangle dx dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \varphi(x, t) : \langle \nu_{t,x}^1, f(\xi) \rangle dx dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) : \langle \nu_{0,x}^1, \xi \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}^1, \xi \rangle dx dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_x \cdot \varphi(x, t))_i \cdot \langle \nu_{t,x}^1, f_i(\xi) \rangle dx dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) \cdot \langle \nu_{0,x}^1, \xi \rangle dx, \end{aligned}$$

para qualquer função  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  e qualquer índice  $1 \leq i \leq d$ , que é exatamente a identidade que toda solução a valor de medida da lei de conservação deve satisfazer. Portanto, a medida de Young  $\nu_1$  satisfaz a condição de ser solução a valor de medida.

Em outras palavras, concluímos que se  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é solução estatística da lei de conservação no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, cujas medidas de correlação correspondentes são  $(\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , então a família  $\{\nu_t^1\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma solução a valor de medida. Logo, a solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra possui mais informações que a solução a valor de medida, sendo esta, então, uma generalização da primeira.

Observemos que, como toda solução fraca da lei de conservação gera uma solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, sendo esta geradora de uma solução a valor de medida, concluímos que toda solução fraca gera

uma solução a valor de medida da lei de conservação. Mas, podemos calcular explicitamente isto também. Para tal, seja  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  uma solução fraca da lei de conservação com dado inicial  $u_0$ . Então a função  $u(x, t)$  satisfaz a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(x, t) u(x, t) + \nabla_x \varphi(x, t) \cdot f(u(x, t)) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) u_0(x) \, dx = 0, \quad (5.1)$$

para qualquer função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . Defina as medidas de probabilidade  $\nu_{t,x}$  por  $\delta_{u(x,t)}$  e  $\nu_{0,x} = \delta_{u_0(x)}$ . Seja  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$  uma função teste, onde cada  $\psi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . Então, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_t \psi(x, t) \cdot \langle \nu_{t,x}, \xi \rangle + (\nabla_x \cdot \psi(x, t)) \cdot \langle \nu_{t,x}, f(\xi) \rangle] \, dx \, dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, 0) \cdot \langle \nu_{0,x}, \xi \rangle \, dx \\ & = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_t \psi(x, t) \cdot \xi + (\nabla_x \cdot \psi(x, t)) \cdot f(\xi)] \, d\nu_{t,x}(\xi) \, dx \, dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x, 0) \cdot \xi \, d\nu_{0,x} \, dx \\ & = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_t \psi(x, t) \cdot u(x, t) + (\nabla_x \cdot \psi(x, t)) \cdot u(x, t)] \, dx \, dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, 0) \cdot u_0(x) \, dx \\ & = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \psi_i(x, t) u_i(x, t) + \nabla_x \psi_i(x, t) f_i(u(x, t)) \, dx \, dt \\ & \quad + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \psi_i(x, 0) u_{0,i}(x) \, dx \\ & = 0, \end{aligned}$$

pois cada termo do somatório é nulo, já que as componentes  $\psi_i$  satisfazem a igualdade de ser solução fraca, para cada  $1 \leq i \leq N$ . Ou seja, a família  $\{\nu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} = \{\delta_{u(t)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  gerada pela solução fraca é uma solução a valor de medida.

Dessa maneira, note também que conseguimos garantir a existência de solução a valor de medida da lei de conservação de três maneiras: a primeira, vista no capítulo 3, a partir de que toda solução estatística no sentido de Illner-Wick gera uma solução a valor de medida; a segunda, a partir da família formada pelos primeiros marginais de correlação das medidas  $(\nu_t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  correspondentes à solução estatística  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  de Fjordholm-Lanthaler-Mishra; e, a terceira, utilizando que

---

toda solução fraca da lei de conservação gera uma solução a valor de medida. Como a família de medidas de probabilidade gerada pela solução fraca é tanto uma solução a valor de medida, quanto uma solução estatística de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, essencialmente ganhamos duas maneiras de obter a existência de soluções a valor de medida para a lei de conservação.

Contudo, nada nos garante que ambas noções de soluções estatísticas geram a mesma solução a valor de medida. Assim, a questão de impor alguma condição para que as soluções a valor de medida tenham suficiente regularidade e, possivelmente, unicidade, não é esclarecida aqui.

## Conclusão

A falta de resultados de existência global no tempo de soluções fracas para leis de conservação multidimensionais e a não garantia de unicidade motivaram os matemáticos a buscarem novas definições de solução com o objetivo de obterem possíveis resultados de boa-colocação.

Vimos no capítulo 3 que no ano de 1985, DiPerna propôs em [6] o conceito de solução a valor de medida para as leis de conservação, oriundo da representação de limite fraco de soluções aproximadas de leis de conservação como uma medida de Young. Apesar de conseguirmos provar a existência deste tipo de solução, foi provado que mesmo as soluções a valor de medida que satisfazem uma condição de entropia não possuem unicidade, inclusive para o caso de leis de conservação escalares. Assim, a busca por condições adicionais sob as soluções a valor de medida de entropia foi natural.

Além disso, em 1972 e 1973, Foias propôs o estudo estatístico das equações de Navier-Stokes nos artigos [11] e [12], em que as soluções poderiam acomodar uma certa incerteza do dado inicial. Tendo em mente estudar um problema de valor inicial estatisticamente, alguns matemáticos partiram em busca de noções de solução estatística para diferentes problemas.

Nesse cenário, no início dos anos 1980, Illner e Wick introduziram em [16] a noção de solução estatística para sistemas autônomos baseada na noção de solução estatística proposta por Foias para as equações de Navier-Stokes. Em 1991, no artigo [17], Illner e Wick estabeleceram o conceito de solução estatística em para leis de conservação. Apesar de garantirem a existência e que toda solução neste sentido gera uma solução a valor de medida, eles construíram um exemplo de solução fraca que não gera solução estatística, como visto na primeira seção do capítulo 5. Ou seja, não conseguimos comparar a classe de soluções fracas com a classe de soluções estatísticas segundo a noção proposta por Illner e Wick. Ademais, não conseguimos um bom critério para possivelmente obter resultados de regularidade nem de unicidade para o problema.

Mais recentemente, em 2017, Fjordholm, Lanthaler e Mishra propuseram um conceito de solução estatística para leis de conservação hiperbólicas no artigo [8] a partir da equivalência entre medidas de probabilidade em  $L^p$  e medidas de

correlação, que são hierarquias de medidas de Young. No caso multidimensional de leis de conservação hiperbólicas escalares, foi demonstrada a boa-colocação das soluções estatísticas no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra que satisfazem uma condição de entropia, que é um análogo do critério proposto por Kružkov para soluções fracas para leis de conservação escalares, como visto no capítulo 4.

Provamos também que toda solução estatística no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra gera uma solução a valor de medida e, assim, a classe de soluções estatística neste sentido é menor que a classe de soluções a valor de medida, já que apresentam mais informações nos seus marginais de correlação. E tais informações permitem que provemos a regularidade com respeito ao dado inicial na métrica 1-Wasserstein  $W_1$  e a unicidade das soluções estatística de entropia de Fjordholm-Lanthaler-Mishra no caso escalar. Contudo, ainda não se sabe se a boa-colocação destas soluções se estende para o caso de sistemas multidimensionais de leis de conservação hiperbólicas.

Além dos vários bons resultados aqui vistos para as soluções estatísticas no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra, em 2018, no artigo [10], Fjordholm e Weidemann também demonstraram uma versão da conjectura de Onsager para soluções estatísticas das equações de Euler.

Nosso próximo passo é buscar possíveis novas relações entre as soluções estatísticas no sentido de Fjordholm-Lanthaler-Mishra e as soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes tratadas no artigo [13] de Foias, Rosa e Temam. Em 2016, Bronzi, Mondaini e Rosa generalizaram tal conceito de solução estatística para equações de evolução mais gerais no artigo [4]. Assim, posteriormente, a ideia é estabelecer relações entre as soluções estatísticas de Fjordholm-Lanthaler-Mishra e as soluções estatísticas de Bronzi-Mondaini-Rosa.

## Referências Bibliográficas

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli e G. Savare, *Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, sér. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2005.
- [2] J. Ball, “A version of the fundamental theorem for Young measures,” *Publ. Lab. Anal. Num.*, v. 88037, pp. 207–215, 2006.
- [3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, sér. Universitext. Springer New York, 2010.
- [4] A. Bronzi, C. Mondaini e R. Rosa, “Abstract framework for the theory of statistical solutions,” *Journal of Differential Equations*, v. 260, n. 12, pp. 8428–8484, 2016, ISSN: 0022-0396.
- [5] G. Da Prato e J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, sér. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2008.
- [6] R. J. DiPerna, “Measure-valued solutions to conservation laws,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 88, pp. 223–270, 1985.
- [7] R. J. Diperna e A. J. Majda, “Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations,” *Communications in Mathematical Physics*, v. 108, n. 4, pp. 667–689, 1987.
- [8] U. Fjordholm, S. Lanthaler e S. Mishra, “Statistical Solutions of Hyperbolic Conservation Laws: Foundations,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 226, n. 2, pp. 809–849, 2017, ISSN: 0003-9527.
- [9] U. S. Fjordholm, R. Käppeli, S. Mishra e E. Tadmor, “Construction of Approximate Entropy Measure-Valued Solutions for Hyperbolic Systems of Conservation Laws,” *Foundations of Computational Mathematics*, v. 17, n. 3, pp. 763–827, 2017, ISSN: 1615-3375.
- [10] U. Fjordholm e E. Wiedemann, “Statistical solutions and Onsager’s conjecture,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 376-377, pp. 259–265, 2018, Special Issue: Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Fluid Dynamics, ISSN: 0167-2789.



- 
- [11] C. Foias, “Statistical study of Navier-Stokes equations, I,” *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, v. 48, pp. 219–348, 1972.
- [12] C. Foias, “Statistical study of Navier-Stokes equations, II,” *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, v. 49, pp. 9–123, 1973.
- [13] C. Foias, R. M. S. Rosa e R. Temam, “Properties of time-dependent statistical solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations,” *Annales de l’Institut Fourier*, v. 63, n. 6, pp. 2515–2573, 2013.
- [14] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, sér. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.
- [15] J. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications: Second Edition*, sér. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2017.
- [16] R. Illner e J. Wick, “Statistical solutions of differential equations with non-uniquely solvable Cauchy problems,” *Journal of Differential Equations*, v. 41, n. 3, pp. 289–300, 1981, ISSN: 0022-0396.
- [17] R. Illner e J. Wick, “On statistical and measure-valued solutions of differential equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 157, n. 2, pp. 351–365, 1991, ISSN: 0022-247X.
- [18] S. N. Kružkov, “First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables,” *Sbornik: Mathematics*, v. 10, n. 2, pp. 217–243, 1970.
- [19] S. Schochet, “Examples of measure-valued solutions,” *Communications in Partial Differential Equations*, v. 14, n. 5, pp. 545–575, 1989.
- [20] M. Thorpe, *Introduction to Optimal Transport*, 2018.
- [21] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, sér. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2008.