



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DAYANE RIBEIRO CRUZ

**Análise de Melnikov em Sistemas Diferenciais
Descontínuos com Variedade de
Descontinuidade Não-Linear**

Campinas

2021

Dayane Ribeiro Cruz

**Análise de Melnikov em Sistemas Diferenciais
Descontínuos com Variedade de Descontinuidade
Não-Linear**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutora em Matemática.

Orientador: Douglas Duarte Novaes

Este exemplar corresponde à versão
final da Tese defendida pela aluna
Dayane Ribeiro Cruz e orientada pelo
Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C889a Cruz, Dayane Ribeiro, 1990-
Análise de Melnikov em sistemas diferenciais descontínuos com variedade de descontinuidade não-linear / Dayane Ribeiro Cruz. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Douglas Duarte Novaes.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Campos vetoriais descontínuos. 2. Sistemas de Filippov. 3. Órbitas periódicas. 4. Ciclos limite. I. Novaes, Douglas Duarte, 1988-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Melnikov analysis in differential systems discontinuous with non-linear switching manifold

Palavras-chave em inglês:

Discontinuous vector fields

Filippov systems

Periodic orbits

Limit cycles

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Douglas Duarte Novaes [Orientador]

Ricardo Miranda Martins

Ana Cristina de Oliveira Mereu

Débora Lopes da Silva

Murilo Rodolfo Cândido

Data de defesa: 28-05-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-8873-2745>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8013412145863592>

**Tese de Doutorado defendida em 28 de maio de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). DOUGLAS DUARTE NOVAES

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU

Prof(a). Dr(a). DÉBORA LOPES DA SILVA

Prof(a). Dr(a). MURILO RODOLFO CÂNDIDO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho ao meu esposo, Efraim, que me apoiou, incentivou, acolheu e amou por todo processo.

Ao meu saudoso pai, Ademilton, que teve tanto orgulho ao me ver doutoranda e por tudo que ele representa em minha vida.

À minha mãe, Lourdes, que sempre me cuidou, apoiou e lutou por mim.

Aos meus tios, Verônica e Eronildes que me estimularam a estudar desde pequena.

Aos meus amigos que estão sempre comigo, em especial Franciele Conrado dos Santos, e aos que fiz em Campinas-SP, em especial Adriana Juzga Leon.

Aos meus familiares que torcem por mim.

Aos professores que me inspiraram a ser quem sou hoje, em especial Débora Lopes da Silva.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Douglas Duarte Novaes, por ter aceitado me orientar antes mesmo de ter sido aprovada na primeira qualificação. Por ter me ajudado em problemas pessoais, além dos acadêmicos. Por toda compreensão, ajuda, força e ensinamentos.

À Kamila da Silva Andrade e ao Oscar A. R. Cespedes pela colaboração, generosidade e amizade durante todo o processo de produção e publicação do nosso artigo com o professor Douglas D. Novaes.

Ao professor Lucas C. F. Ferreira, que era coordenador do curso no ano do meu ingresso, por sua ótima recepção e acolhimento. Além disso, por ter tornado possível a minha continuidade com o doutorado quando meu pai faleceu.

A todos os professores do IMECC com os quais tive aula, por todo aprendizado obtido, em especial ao professor Lino A. S. Grama, que foi meu orientador do Programa de Estágio Docente e foi muito generoso e compreensivo.

Aos participantes do grupo de Sistemas Dinâmicos que me fizeram sentir bem recebida e confortável, pessoas agradáveis e divertidas. Em especial ao professor Ricardo Miranda Martins pelo incentivo nessa jornada.

À Unicamp por sua excelente estrutura, em especial aos profissionais do Sappe, que me ajudaram a lidar com perda do meu pai.

A todos os funcionários do IMECC pelos serviços prestados e pela simpatia.

Aos professores da banca pela colaboração para o aperfeiçoamento desta tese.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta tese, temos como objeto de estudo principal uma classe de sistemas diferenciais descontínuos com variedade de descontinuidade não-linear. Estamos interessados em determinar condições que garantam a existência de soluções periódicas para tais sistemas. Para isso, desenvolvemos a Teoria de Melnikov de ordem arbitrária para uma classe de sistemas descontínuos com variedade de descontinuidade não-linear. Além disso, realizamos uma comparação dessa teoria com a Teoria da Média. A recém-desenvolvida teoria de Melnikov é então aplicada para estudar o número de ciclos limite bifurcando de um centro em uma classe de sistemas perturbativos lineares por partes com uma curva de descontinuidade algébrica. Tal problema é reduzido ao estudo do número de zeros em combinações lineares de funções tomadas em um conjunto ordenado de funções. Este último problema pode ser atacado por meio da Teoria de Chebyshev. Assim, novas famílias de funções ordenadas são classificadas como sistemas-ECT ou sistemas-ET com acurácia. Como consequência, limites inferiores foram obtidos para o número máximo de ciclos limite bifurcando na família estudada de sistemas lineares por partes com uma curva de descontinuidade algébrica.

Palavras-chave: Campos vetoriais descontínuos, Sistemas de Filippov, Órbitas Periódicas, Ciclos Limite, Teoria de Chebyshev, Teoria de Melnikov, Teoria da Média.

Abstract

In this thesis, we are mainly concerned with discontinuous differential systems with non-linear switching manifold. We are interested in determining conditions that guarantee the existence of periodic solutions for such systems. For this, we developed the Melnikov Theory of arbitrary order for a class of discontinuous systems with non-linear switching manifold. A comparison with the Averaging Theory is performed. The newly developed Melnikov theory is then applied to study the number of limit cycles bifurcating from a center in a class of perturbed piecewise linear systems with an algebraic curve of discontinuity. As usual, such a problem is reduced to the study of the number of zeros of linear combinations of functions taken in an ordered set of functions. This equivalent problem can be attacked by means of Chebyshev Theory. New families of ordered functions are classified as ECT-system or ET-systems with accuracy. Accordingly, lower bounds were obtained for the maximum number of limit cycles bifurcating in the considered family of piecewise linear systems with an algebraic curve of discontinuity.

Keywords: Discontinuous vector fields, Filippov Systems, Periodic Orbits, Limit Cycles, Chebyshev Theory, Melnikov Theory, Averaging Theory.

Sumário

	Introdução	10
1	TEORIA DE MELNIKOV DE ORDEM SUPERIOR	14
1.1	Resultados preliminares	16
1.2	Prova do Teorema 1	20
2	FUNÇÕES DE MELNIKOV E PROMEDIADAS	30
2.1	Resultados preliminares	32
2.2	Prova do Teorema 2	38
2.3	Demonstração da Proposição 2	40
3	SISTEMAS ESTENDIDOS DE CHEBYSHEV COM ACURÁCIA . .	42
3.1	Novas famílias de Sistemas ET com acurácia	44
4	SISTEMAS DIFERENCIAIS LINEARES POR PARTES PLANARES	56
4.1	Estudo da Função de Melnikov de ordem 1, $M_1(r)$	59
4.1.1	$n = 2k + 1$	59
4.1.2	$n = 2k$	60
4.2	Estudo da Função de Melnikov de ordem ℓ, $\ell \in \{2, \dots, 6\}$, $M_\ell(r)$. . .	61
4.2.1	$n = 2$ e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$	61
4.2.2	$n = 2k$ e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$	61
4.2.3	$n = 2k + 1$ e $\ell \in \{2, \dots, 5\}$	62
4.2.4	$M_6(r)$, para $n = 2k + 1$	62
	REFERÊNCIAS	64

Introdução

Os principais resultados apresentados nesta tese foram publicados em [7] e são essencialmente sobre a classe de sistemas diferenciais descontínuos com variedade de descontinuidade não-linear, dados a seguir: Considere

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (1)$$

com

$$F_i(t, x) = \begin{cases} F_i^0(t, x), & 0 \leq t \leq \theta_1(x), \\ F_i^1(t, x), & \theta_1(x) \leq t \leq \theta_2(x), \\ \vdots \\ F_i^N(t, x), & \theta_N(x) \leq t \leq T, \end{cases}$$

e

$$R(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} R^0(t, x, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \theta_1(x), \\ R^1(t, x, \varepsilon), & \theta_1(x) \leq t \leq \theta_2(x), \\ \vdots \\ R^N(t, x, \varepsilon), & \theta_N(x) \leq t \leq T, \end{cases}$$

sendo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T$, $D \subset \mathbb{R}^d$ um aberto, $F_i^j : \mathbb{S}^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $R^j : \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, para $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, N$, funções de classe C^r , $r \geq k + 1$, e T -periódicas na variável t . Temos que a variedade de descontinuidade desse sistema é dada por $\Sigma = \{(\theta_j(x), x); x \in D, j = 0, 1, \dots, N\}$.

As soluções desses sistemas são estabelecidas pela *Convenção de Filippov* [9], a saber, as soluções para $\theta_j(x) \leq t \leq \theta_{j+1}(x)$ cruzam a variedade de descontinuidade transversalmente, para ε suficientemente pequeno, e se concatenam. Aqui, estamos interessados na existência de soluções T -periódicas. A Teoria de Melnikov é uma ferramenta clássica para atacar problemas sobre a determinação de existência de tais soluções. Aqui, generalizamos o resultado de [2] sobre Funções de Melnikov de ordem 1 e 2 para ordem arbitrária.

O resultado principal do Capítulo 1 fornece hipóteses de modo que garantem que os zeros simples das Funções de Melnikov estejam em relação injetiva com as soluções T -periódicas, $x(t, \varepsilon)$, isoladas do sistema (1), satisfazendo $x(0, \varepsilon) = x$. Além disso, determinaremos uma expressão recursiva para a Função de Melnikov de ordem i .

Uma outra ferramenta clássica para atacar problemas que envolvem a determinação de soluções periódicas é a Teoria da Média (ver [22, 6, 33]), que foi recentemente desenvolvida para sistemas diferenciais não suaves (ver [16, 20, 21, 25]). Contudo, nos trabalhos anteriores, algumas condições fortes são assumidas nos conjuntos de descontinuidade ao lidar com perturbações de ordem superior. Para sistemas do tipo (1), assumindo

que as funções θ_j , $j = 1, \dots, N$, são constantes, tal teoria foi desenvolvida para uma ordem qualquer em [21]. Nesse caso, foi mostrado que as Funções de Melnikov coincidem com as Funções Promediadas para sistemas suaves (ver [25]). Porém, em [20] foi observado que as Funções Promediadas de ordem igual ou maior que dois nem sempre controlam a bifurcação de soluções periódicas para sistemas diferenciais não suaves. Em [2] constatou-se que a Função de Melnikov de segunda ordem para sistema do tipo (1) é dada pela Função Promediada de ordem dois somado a um incremento que depende do salto de descontinuidade e da geometria da variedade de descontinuidade. O resultado principal do Capítulo 2 nos dá a expressão das Funções de Melnikov como a soma das Funções Promediadas e um incremento, recursivamente. Com isso foi possível verificar que assim como ocorre para Função de Melnikov de ordem 2, mostrado em [2], o incremento da Função de Melnikov para qualquer ordem depende apenas no salto de descontinuidade e da geometria da variedade de descontinuidade.

Uma vez que podemos determinar soluções periódicas do sistema (1) ao indicar o número de zeros simples da sua Função de Melnikov, o estudo de ferramentas para determinar quantidade de zeros simples de funções se faz necessário. A Teoria de Chebyshev é uma ferramenta clássica para atacar esse tipo de problema. No Capítulo 3, aplicamos a Teoria de Chebyshev para classificar algumas famílias a fim de determinar o número máximo de zeros simples que estas possuem, isso será de extrema importância para o capítulo seguinte.

No Capítulo 4, motivados pela segunda parte do 16° Problema de Hilbert, seguimos o interesse crescente em estabelecer um limite superior uniforme para o número máximo de ciclos limites que sistemas lineares planares por partes possam ter. Para isso aplicaremos a Teoria de Melnikov desenvolvida no Capítulo 1 a fim de determinar uma cota inferior para o número máximo de ciclos limites que o seguinte sistema diferencial linear por partes possui:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i P_i^+(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i Q_i^+(x, y) \end{pmatrix}, & y - x^n > 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i P_i^-(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i Q_i^-(x, y) \end{pmatrix}, & y - x^n < 0, \end{cases} \quad (2)$$

sendo n um inteiro positivo, e P_i^\pm e Q_i^\pm funções afins dadas por

$$\begin{aligned} P_i^+(x, y) &= a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y, \\ P_i^-(x, y) &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \alpha_{2i}y, \\ Q_i^+(x, y) &= b_{0i} + b_{1i}x + b_{2i}y, \\ Q_i^-(x, y) &= \beta_{0i} + \beta_{1i}x + \beta_{2i}y, \end{aligned}$$

com $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. A curva de descontinuidade do sistema (4.1) é dada por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^n\}$.

Consideramos o campo de vetores linear por partes (2) e, uma vez dado um inteiro positivo n , denotamos $H(n)$ o número máximo de ciclos limites que sistemas lineares por partes planares separados em duas zonas pela curva $y = x^n$ podem ter. Aqui, determinamos um limite inferior para $H(n)$.

Usualmente, soluções periódicas de sistemas são estudadas por meio dos mapas de Poincaré. Uma vez que o sistema (4.1) é dado como uma perturbação de ordem k do centro linear, $(x', y') = (y, -x)$, é fácil ver que, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, um mapa de Poincaré π_ε pode ser definido na seção $S = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$, que é parametrizada por x . Além disso, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, $(x; \varepsilon) \mapsto \pi_\varepsilon(x)$ é suave (pois é composição de funções suaves), assim, podemos calcular a expansão em série de Taylor de π_ε em torno de $\varepsilon = 0$ como

$$\pi_\varepsilon(x) = x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i M_i(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}).$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, a função M_i é chamada *Função de Melnikov de ordem i* . Denote $M_0 = 0$ e seja M_ℓ , para algum $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$, a primeira função de Melnikov não nula, isto é $M_i = 0$ para $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ e $M_\ell \neq 0$. Uma vez que as soluções periódicas do sistema (2) estão em relação biunívoca com os pontos fixos do mapa de Poincaré, π_ε , pode-se facilmente obter como uma simples consequência do *Teorema da Função Implícita* que os zeros simples de M_ℓ correspondem a ciclos limites de (2). Assim, denotamos por $m_\ell(n)$ o número máximo de zeros simples que a primeira função de Melnikov não nula, M_ℓ , pode ter para qualquer escolha dos parâmetros $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$.

Os valores $m_\ell(n)$, para $\ell \in \{1, \dots, k\}$, fornecem limites inferiores para $H(n)$: $H(n) \geq m_\ell(n)$ para cada $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Os valores conhecidos na literatura para $m_\ell(n)$, $\ell \in \{1, \dots, 6\}$, podem ser vistos na Tabela 1.

Resultados conhecidos para $m_\ell(n)$

		Ordem ℓ			
		1	2	3	$4 \leq \ell \leq 6$
Grau n	1	1	1	2	3
	2	2	–	–	–
	3	3	7	–	–
	$n \geq 3$	–	–	–	–

Tabela 1 – Valores conhecidos na literatura. Em particular, $H(1) \geq 3$, $H(2) \geq 2$, e $H(3) \geq 7$.

O resultado principal do Capítulo 4 completa a Tabela 1 fornecendo os valores $m_\ell(n)$, para $\ell \in \{1, \dots, 6\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Em particular, obtemos que $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 8$, $H(n) \geq 7$, para $n \geq 4$ par, e $H(n) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar, que melhora todos os resultados anteriores para $n \geq 2$. A nossa contribuição é resumida na Tabela 2.

Nossa contribuição

		Ordem ℓ					
		1	2	3	4	5	6
Grau n	1	1	1	2	3	3	3
	2	3	4	4	4	4	4
	3	3	7	7	7	7	$8 \leq m_6 \leq 10$
	$n \geq 4$ par	4	7	7	7	7	7
	$n \geq 5$ ímpar	3	7	7	7	7	$9 \leq m_6 \leq 14$

Tabela 2 – Nosso resultado principal completa a Tabela 1. Em particular, $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 8$, $H(n) \geq 7$, para $n \geq 4$ par, e $H(n) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar.

O nosso estudo da Função de Melnikov de ordem 6 considerando a curva de descontinuidade com grau ímpar maior que três, como pode ser visto na tabela 2, nos forneceu uma cota inferior e uma superior para m_6 . Tal fato ocorreu, pois o teorema aplicado nos dá apenas uma cota superior e a cota inferior foi estabelecida com a apresentação de um exemplo.

1 Teoria de Melnikov de ordem superior

Neste capítulo estabelecemos as Funções de Melnikov de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$, para a seguinte classe de sistemas descontínuos suave por partes: Sejam $D \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto e $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T$ para algum $T > 0$. Para k inteiro positivo, considere as funções C^{k-1} , $\theta_j : D \rightarrow \mathbb{S}^1$, $j = 1, \dots, N$, tal que $\theta_0(x) \equiv 0 < \theta_1(x) < \dots < \theta_N(x) < T \equiv \theta_{N+1}(x)$, para todo $x \in D$. Defina o seguinte sistema diferenciável suave por partes:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (1.1)$$

com

$$F_i(t, x) = \begin{cases} F_i^0(t, x), & 0 \leq t \leq \theta_1(x), \\ F_i^1(t, x), & \theta_1(x) \leq t \leq \theta_2(x), \\ \vdots \\ F_i^N(t, x), & \theta_N(x) \leq t \leq T, \end{cases}$$

e

$$R(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} R^0(t, x, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \theta_1(x), \\ R^1(t, x, \varepsilon), & \theta_1(x) \leq t \leq \theta_2(x), \\ \vdots \\ R^N(t, x, \varepsilon), & \theta_N(x) \leq t \leq T, \end{cases}$$

sendo $F_i^j : \mathbb{S}^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $R^j : \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, para $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, N$ funções classe C^r , $r \geq k + 1$, e T -periódicas na variável t . Temos que a variedade de descontinuidade desse sistema é dada por $\Sigma = \{(\theta_j(x), x); x \in D, j = 0, 1, \dots, N\}$. Por simplicidade, denotamos:

$$F^j(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i^j(t, x) + \varepsilon^{k+1} R^j(t, x, \varepsilon). \quad (1.2)$$

Como resultado principal deste capítulo, o Teorema 1 garantirá, sob algumas hipóteses, que os zeros simples das Funções de Melnikov estão em relação injetiva com as soluções T -periódicas $x(t, \varepsilon)$ isoladas do sistema (1.1), satisfazendo $x(0, \varepsilon) = x$. Além disso, determinaremos uma expressão recursiva para a Função de Melnikov de ordem i , da seguinte forma:

$$M_i(x) = \frac{1}{i!} z_i^N(T, x), \quad (1.3)$$

sendo que $z_i^j(t, x)$ é definida recursivamente, $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, N$, por:

$$\begin{aligned}
 z_1^0(t, x) &= \int_0^t F_1^0(s, x) ds, \\
 z_1^j(t, x) &= z_1^{j-1}(\theta_j(x), x) + \int_{\theta_j(x)}^t F_1^j(s, x) ds, \\
 z_i^0(t, x) &= i! \int_0^t \left(F_i^0(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \partial_x^{L_b} F_{i-l}^0(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m^0(s, x))^{b_m} \right) ds, \\
 z_i^j(t, x) &= z_i^{j-1}(\theta_j(x), x) \\
 &\quad + i! \int_{\theta_j(x)}^t \left(F_i^j(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \partial_x^{L_b} F_{i-l}^j(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m^j(s, x))^{b_m} \right) ds \\
 &\quad + i! \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (\delta_{i-p}^j (A_j^p(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

com $\delta_i^j(t, x) = \frac{1}{i!} (z_i^{j-1}(t, x) - z_i^j(t, x))$ e $A_j^p(x, \varepsilon) = \sum_{q=0}^p \frac{\varepsilon^q}{q!} \alpha_j^q(x)$, sendo

$$\alpha_j^q(x) = \sum_{l=1}^q \frac{q!}{l!} \sum_{u \in S_{q,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right), \text{ para } q = 1, \dots, k-1, \tag{1.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 w_1^j(x) &= z_1^{j-1}(\theta_j(x), x), \\
 w_i^j(x) &= \frac{1}{i!} z_i^{j-1}(\theta_j(x), x) \\
 &\quad + \sum_{a=1}^{i-1} \sum_{b \in S_a} \frac{1}{(i-a)! b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_a! a!^{b_a}} \partial_t^{L_b} z_{i-a}^{j-1}(\theta_j(x), x) \prod_{m=1}^a (\alpha_j^m(x))^{b_m}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Aqui, $\partial_x^L G(t, x)$ denota a derivada de ordem L de uma função G com respeito à variável x , S_a é o conjunto de todas as a -uplas de inteiros não negativos (b_1, b_2, \dots, b_a) satisfazendo $b_1 + 2b_2 + \dots + ab_a = a$, $L_b = b_1 + b_2 + \dots + b_a$ e $S_{q,a}$ é o conjunto de todas as a -uplas de inteiros positivos (b_1, b_2, \dots, b_a) satisfazendo $b_1 + b_2 + \dots + b_a = q$. Considerando essas notações, podemos enunciar nosso principal resultado sobre Funções de Melnikov.

Teorema 1. *Considere o sistema diferencial não suave (1.1) e denote $M_0 = 0$. Assuma que, para algum $\ell \in \{1, \dots, k\}$, $M_i = 0$, para $i = 1, \dots, \ell - 1$, e $M_\ell \neq 0$. Se $M_\ell(a^*) = 0$ e $\det(DM_\ell(a^*)) \neq 0$, para algum $a^* \in D$, então, para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução T -periódica $x(t, \varepsilon)$ do sistema (1.1) satisfazendo $x(0, \varepsilon) \rightarrow a^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

O Teorema 1 generaliza os resultados de [2]. De fato, aplicando a recursividade

acima para $i = 1, 2$, obtemos as expressões para M_1 e M_2 obtidas em [2], a saber:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \int_0^T F_1(s, x) ds, \\ M_2(x) &= \int_0^T \left[D_x F_1(s, x) \int_0^s F_1(t, x) dt + F_2(s, x) \right] ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^N (F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) - F_1^j(\theta_j(x), x)) \alpha_j^1(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.1 Resultados preliminares

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados que serão necessários para a prova do Teorema 1. O primeiro nos diz quem é a solução do sistema (1.1) que é de extrema importância para determinar as Funções de Melnikov.

Lema 1. *De acordo com a convenção de Filippov, a solução do sistema (1.1) é dada por*

$$\varphi(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_0(t, x, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \alpha_1(x, \varepsilon), \\ \varphi_1(t, x, \varepsilon), & \alpha_1(x, \varepsilon) \leq t \leq \alpha_2(x, \varepsilon), \\ \vdots \\ \varphi_N(t, x, \varepsilon), & \alpha_N(x, \varepsilon) \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.8)$$

sendo

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = F^j(t, \varphi_j(t, x, \varepsilon), \varepsilon), & \text{para } j = 0, 1, \dots, N, \text{ com} \\ \varphi_0(0, x, \varepsilon) = x \\ \varphi_j(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) = \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon), & \text{para } j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1.9)$$

Além disso, considere $\alpha_j(x, \varepsilon)$ como a notação para o menor tempo positivo para que a trajetória $\varphi_j(\cdot, x, \varepsilon)$, começando em $\varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}, x, \varepsilon) \in D$ intersecta a variedade de descontinuidade $\{(\theta_j(x), x) : x \in D\} \subset \Sigma$ (ver figura 1). Dessa maneira

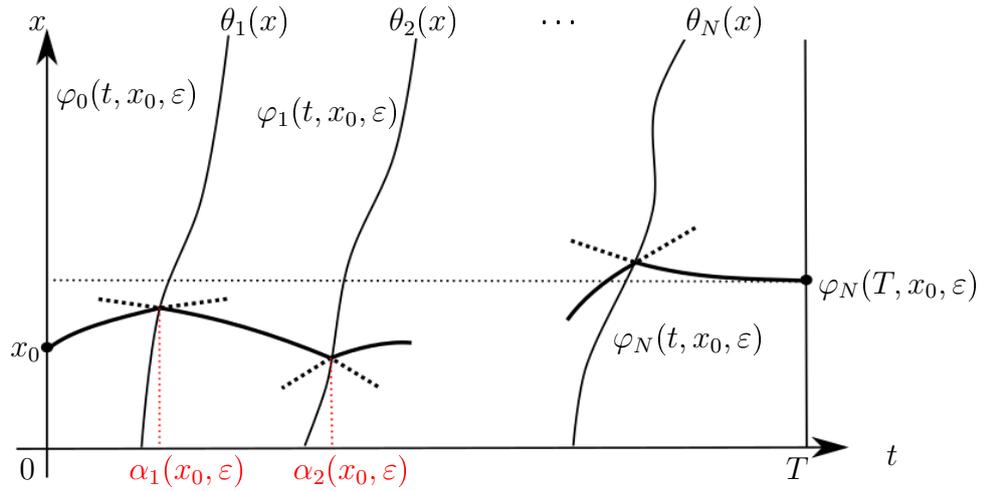
$$\alpha_j(x, \varepsilon) = \theta_j(\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon)), \text{ para } j = 1, 2, \dots, N, N + 1. \quad (1.10)$$

Por completude, consideramos $\alpha_0(x, \varepsilon) = 0$.

Demonstração. Considerando as partes suaves do sistema (1.1), temos o seguinte problema de valor inicial, P.V.I.,

$$\begin{cases} \dot{x} = F^j(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

sendo $F^j : \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r , $r \geq k + 1$ e T -periódica definida em (1.2). Pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe uma única função


 Figura 1 – Ilustração da solução do sistema (1.1) começando em x_0 .

$\varphi_j(\cdot, x, \varepsilon) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ que é solução do p.v.i. (1.11), ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = F^j(t, \varphi_j(t, x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \varphi_j(t_0, x_0, \varepsilon) = x_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{S}^1 \times D$. Temos ainda que φ_j é de classe C^r , $r \geq k + 1$.

Como o sistema (1.1) é descontínuo em t , sendo sua variedade de descontinuidade dada pelo conjunto

$$\Sigma = \{(\theta_j(x), x, \varepsilon) : x \in D; j = 0, \dots, N\}, \quad (1.13)$$

não temos uma direção bem definida nesses pontos. Para determinarmos a solução do sistema (1.1) vamos considerar a *Convenção de Filippov*, [9]. Uma vez que as soluções do sistema não perturbado, quando $\varepsilon = 0$, cruzam Σ transversalmente, pela continuidade das soluções, temos que as soluções φ_j mantêm essa propriedade para ε suficientemente pequeno. Portanto, concluímos, pela convenção de Filippov, que os pontos da variedade de descontinuidade são pontos costurantes e a solução de (1.1) é dada pela concatenação das φ_j 's.

Para realizar essa concatenação, primeiramente, vamos considerar a função $P_j : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$P_j(t, x, \varepsilon) = \theta_j(\varphi_{j-1}(t, x, \varepsilon)) - t,$$

sendo $U \subset \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ aberto, tal que $[\theta_j(x), \theta_{j+1}(x)] \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset U$, $j = 0, 1, \dots, N$. Note que P_j é C^k , visto que $\theta_j(x)$ e φ_{j-1} são. Além disso,

$$\begin{aligned} P_j(\theta_j(x_0), x_0, 0) &= \theta_j(\varphi_{j-1}(\theta_j(x_0), x_0, 0)) - \theta_j(x_0) \\ &= \theta_j(x_0) - \theta_j(x_0) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial t}(\theta_j(x_0), x_0, 0) &= D\theta_j(\varphi_{j-1}(\theta_j(x_0), x_0, 0)) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial t}(\theta_j(x_0), x_0, 0) - 1 \\ &= D\theta_j(x_0) \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma única função $\alpha_j : U_1 \subset D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow V$, tal que $P_j(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) = 0$, ou seja,

$$\alpha_j(x, \varepsilon) = \theta_j(\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon)),$$

sendo U_1 vizinhança do ponto $(x_0, 0)$ e V vizinhança do ponto $\theta_j(x_0)$. Portanto, existe uma única solução para o sistema (1.1) no intervalo $[\theta_j(x), \theta_{j+1}(x)]$ que é $\varphi_j : [\alpha_j(x, \varepsilon), \alpha_{j+1}(x, \varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Portanto, a solução do sistema (1.1) é dada por

$$\varphi(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_0(t, x, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \alpha_1(x, \varepsilon), \\ \varphi_1(t, x, \varepsilon), & \alpha_1(x, \varepsilon) \leq t \leq \alpha_2(x, \varepsilon), \\ \vdots \\ \varphi_M(t, x, \varepsilon), & \alpha_M(x, \varepsilon) \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.14)$$

de modo que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = F^j(t, \varphi_j(t, x, \varepsilon), \varepsilon), \\ \varphi_j(0, x, \varepsilon) = x, \\ \varphi_j(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) = \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon). \end{cases} \quad (1.15)$$

E, assim, concluimos a demonstração da Lema 1. \square

Observe que a expressão recursiva da Função de Melnikov (1.3) depende de $\alpha_j^q(x)$, $j = 1, \dots, N+1$ e $q = 1, \dots, k-1$, dada de forma recursiva em (1.5). O seguinte resultado é uma proposição técnica usada para determinar tal forma.

Proposição 1. *Seja $Q_l : \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função l -multilinear. Então,*

$$Q_l \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^l = \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} Q_l \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r} \right), \quad (1.16)$$

com $S_{p,l} = \{(u_1, \dots, u_l) \in (\mathbb{Z}^+)^l : u_1 + \dots + u_l = p\}$.

Demonstração. A prova desse resultado será feita por indução em l . Se $l = 1$, temos que

$$Q_1 \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right) = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i Q_1(x_i),$$

pois Q_1 é uma função linear. Note que $S_{p,1} = \{p\}$, assim

$$Q_1 \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right) = \sum_{p=1}^k \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,1}} Q_1 \left(\prod_{r=1}^1 x_{u_r} \right).$$

Isso prova a Proposição 1 para $l = 1$. Agora, por hipótese de indução, suponha que a Proposição 1 é válida para l e considere a aplicação l -multilinear

$$\tilde{Q}_l(x_1, \dots, x_l) = Q_{l+1} \left(x_1, \dots, x_l, \sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right). \quad (1.17)$$

Assim, temos

$$Q_{l+1} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^{l+1} = \tilde{Q}_l \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^l. \quad (1.18)$$

Por hipótese de indução e (1.17), temos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_l \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^l &= \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} \tilde{Q}_l \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r} \right) \\ &= \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, \sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, x_i \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Fazendo uma manipulação dos somatórios, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, x_i \right) &= \sum_{i=1}^k \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^{i+p} \sum_{u \in S_{p,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{q=l+i}^{kl+i} \varepsilon^q \sum_{u \in S_{q-i,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, x_i \right) \\ &= \sum_{q=l+1}^{k(l+1)} \varepsilon^q \sum_{i=1}^{q-l} \sum_{u \in S_{q-i,l}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^l x_{u_r}, x_i \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Considerando

$$S_{i,q,l+1} = \{(u_1, \dots, u_l, i); (u_1, \dots, u_l) \in S_{q-i,l}\} = \{(u_1, \dots, u_l, i); u_1 + \dots + u_l + i = q\}$$

e de (1.18), (1.19), (1.20), obtemos

$$Q_{l+1} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^{l+1} = \sum_{q=l+1}^{k(l+1)} \varepsilon^q \sum_{i=1}^{q-l} \sum_{u \in S_{i,q,l+1}} Q_{l+1} \left(\prod_{r=1}^{l+1} x_{u_r} \right). \quad (1.21)$$

Note que

$$S_{q,l+1} = \bigcup_{i=1}^{q-l} S_{i,q,l+1}. \quad (1.22)$$

De fato, se $(u_1, \dots, u_{l+1}) \in \bigcup_{i=1}^{q-l} S_{i,q,l+1}$, então $\sum_{m=1}^{l+1} u_m = q$, logo $(u_1, \dots, u_{l+1}) \in S_{q,l+1}$. Assim

$$\bigcup_{i=1}^{q-l} S_{i,q,l+1} \subset S_{q,l+1}.$$

Agora, suponha que $(u_1, \dots, u_{l+1}) \in S_{q,l+1}$ e $u_{l+1} > q - l$, então

$$q = \sum_{m=1}^l u_m + u_{l+1} > \sum_{m=1}^l u_m + q - l \Rightarrow \sum_{m=1}^l u_m < l,$$

o que é uma contradição, pois $u_m \geq 1$, para $m \in \{1, \dots, l\}$. Assim $(u_1, \dots, u_{l+1}) \in \bigcup_{i=1}^{q-l} S_{i,q,l+1}$,

logo $S_{q,l+1} \subset \bigcup_{i=1}^{q-l} S_{i,q,l+1}$. Portanto, por (1.21) e (1.22), temos

$$Q_{l+1} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i x_i \right)^{l+1} = \sum_{q=l+1}^{k(l+1)} \varepsilon^q \sum_{u \in S_{q,l+1}} Q \left(\prod_{r=1}^{l+1} x_{u_r} \right).$$

Mostrando que se a Proposição 1 vale para l , vale para $l+1$. O que conclui a demonstração. \square

1.2 Prova do Teorema 1

A prova do Teorema 1 é feita utilizando uma ferramenta clássica para determinação de soluções periódicas que é a transformação de Poincaré do sistema (1.1). Tal transformação é dada por

$$\Delta(x, \varepsilon) = \varphi(T, x, \varepsilon) - x,$$

sendo φ a solução do sistema (1.1) dada pelo Lema 1. Devido a definição de φ , temos que

$$\Delta(x, \varepsilon) = \varphi_N(T, x, \varepsilon) - x. \quad (1.23)$$

Note que Δ é uma função C^r , ($r \geq k+1$), e seus os zeros estão em relação biunívoca com as soluções periódicas do sistema (1.1). Fazendo a expansão em série de Taylor de Δ em torno de $\varepsilon = 0$, temos que

$$\Delta(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i M_i(x) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad (1.24)$$

sendo $M_0(x) = \Delta(x, 0) = 0$, pois a solução do sistema para $\varepsilon = 0$ são constantes. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, a função M_i é chamada *Função de Melnikov de ordem i* .

Considerando a seguinte função

$$\hat{\Delta}(x, \varepsilon) := \frac{\Delta(x, \varepsilon)}{\varepsilon^\ell} = M_\ell(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\ell+1}),$$

e as hipóteses do Teorema 1, temos que $\hat{\Delta}(a^*, 0) = M_\ell(a^*) = 0$ e $\det \left(\frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial x}(a^*, 0) \right) = \det(DM_\ell(a^*)) \neq 0$. Como consequência do Teorema da Função Implícita, existe uma única

função C^r , ($r \geq k + 1$), $a(\varepsilon) \in D$, definida para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, tal que $a(0) = a^*$ e $\Delta(a(\varepsilon), \varepsilon) = \widehat{\Delta}(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Além disso, $a(\varepsilon) \rightarrow a^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para concluirmos a demonstração precisamos determinar a expressão recursiva para $M_i(x)$. Para isso é preciso expandir φ_N , em torno de $\varepsilon = 0$. O lema seguinte nos diz que:

Lema 2. *A expansão em série de Taylor de φ_j dada no Lema 1, em torno de $\varepsilon = 0$, é dada por*

$$\varphi_j(t, x, \varepsilon) = x + \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^i}{i!} z_i^j(t, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$$

com as funções $z_i^j(t, x)$ dadas em (1.4), (1.5) e (1.6), para $j = 0, \dots, N$.

Assim, do Lema 2 e da expressão (1.23), obtemos

$$\Delta(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^i}{i!} z_i^N(T, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}).$$

Portanto, a função de Melnikov de ordem i é dada por

$$M_i(x) = \frac{1}{i!} z_i^N(T, x).$$

Agora, resta-nos provar o Lema 2, o que é feito a seguir.

Prova do Lema 2. A prova baseia-se em expandir φ_j , $j = 0, \dots, N$ em série de Taylor, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem k . Inicialmente, consideramos o sistema recursivo dado em (1.9), e obtemos que

$$\begin{cases} \varphi_0(t, x, \varepsilon) = x + \int_0^t F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds, \\ \varphi_j(t, x, \varepsilon) = \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds, \end{cases} \quad (1.25)$$

para $j = 1, \dots, N$. Note que por (1.2), temos

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds &= \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i^j(t, \varphi_j(s, x, \varepsilon)) \right) ds \\ &\quad + \varepsilon^{k+1} \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t R^j(t, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ &= \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i^j(t, \varphi_j(s, x, \varepsilon)) \right) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

para $j = 0, \dots, N$. Fazendo a expansão em série de Taylor de $F_i^j(t, \varphi_j(s, x, \varepsilon))$, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem $k - i$ e fazendo manipulações com os somatórios, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i^j(t, \varphi_j(s, x, \varepsilon)) &= \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^{k-i} \frac{\varepsilon^{i+l}}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_i^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-l} \frac{\varepsilon^{i+l}}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_i^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{p=l+1}^k \frac{\varepsilon^p}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_{p-l}^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (1.27) \\
 &= \sum_{p=1}^k \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\varepsilon^p}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_{p-l}^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_{i-l}^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, k$, e $j = 0, \dots, N$, denote

$$K_i^j(t, x) = \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} (F_{i-l}^j(t, \varphi_j(t, x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (1.28)$$

Substituindo (1.28) em (1.27) e depois em (1.26), obtemos

$$\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_i^j(s, x) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}). \quad (1.29)$$

Agora, expandindo $\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_i^j(s, x) ds$, em torno de $\varepsilon = 0$ até ordem $k - i$, segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_i^j(s, x) ds &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\sum_{p=0}^{k-i} \frac{\varepsilon^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_i^j(s, x) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k-i+1}) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{p=0}^{k-i} \frac{\varepsilon^{i+p}}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_i^j(s, x) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_{i-p}^j(s, x) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}). \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, N$, denote

$$I_i^j(t, x) = \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t K_{i-p}^j(s, x) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (1.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 I_1^j(t, x) &= \int_{\theta_j^t(x)}^t K_1^j(s, x) ds, \quad \text{para } j = 0, \dots, N, \\
 I_i^j(t, x) &= \int_{\theta_j^t(x)}^t K_i^j(s, x) ds + \tilde{K}_i^j(x), \quad \text{para } i = 2, \dots, k, \text{ e } j = 0, \dots, N,
 \end{aligned} \quad (1.32)$$

sendo

$$\tilde{K}_i^j(x) = - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(K_{i-p}^j(\alpha_j(x, \varepsilon), x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_j(x, \varepsilon) \right) \Bigg|_{\varepsilon=0}, \quad (1.33)$$

para $i = 1, \dots, k$, e $j = 0, \dots, N$.

Substituindo (1.31) em (1.30) e então em (1.29), obtemos

$$\int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i I_i^j(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Segue da expressão acima e de (1.25), que

$$\begin{cases} \varphi_0(t, x, \varepsilon) = x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i I_i^0(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}), \\ \varphi_j(t, x, \varepsilon) = \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i I_i^j(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}), \end{cases} \quad (1.34)$$

para $j = 1, \dots, N$.

Considerando a notação seguinte

$$\begin{cases} J_i^0(t, x, \varepsilon) = I_i^0(t, x), \\ J_i^j(t, x, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{j-1} I_i^l(\alpha_{l+1}(x, \varepsilon), x) + I_i^j(t, x), \end{cases} \quad (1.35)$$

para $i = 1, \dots, k$, e $j = 1, \dots, N$, φ_j é dado pela expressão

$$\varphi_j(t, x, \varepsilon) = x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i J_i^j(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad \text{para } j = 0, \dots, N. \quad (1.36)$$

De fato, vamos provar isso por indução. Note que (1.36) é válido para $j = 0$. Suponha, por indução, que (1.36) é válida para j . De (1.34), temos

$$\varphi_{j+1}(t, x, \varepsilon) = \varphi_j(\alpha_{j+1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i I_i^{j+1}(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Dada a expressão acima, a hipótese de indução e a expressão (1.35), segue que

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1}(t, x, \varepsilon) &= x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i J_i^j(\alpha_{j+1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i I_i^{j+1}(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}) \\ &= x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\sum_{l=0}^{j-1} I_i^l(\alpha_{l+1}(x, \varepsilon), x) + I_i^j(\alpha_{j+1}(x, \varepsilon), x) + I_i^{j+1}(t, x) \right) + O(\varepsilon^{k+1}) \\ &= x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\sum_{l=0}^j I_i^l(\alpha_{l+1}(x, \varepsilon), x) + I_i^{j+1}(t, x) \right) + O(\varepsilon^{k+1}) \\ &= x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i J_i^{j+1}(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Logo, isso conclui a prova da (1.36).

Isso posto, faremos a expansão de $J_i^j(t, x, \varepsilon)$ em torno de $\varepsilon = 0$ até ordem $k - i$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i J_i^j(t, x, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\sum_{p=0}^{k-i} \frac{\varepsilon^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (J_i^j(t, x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^{k-i-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (J_{i-p}^j(t, x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^{k+1}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Denotando

$$z_i^j(t, x) = i! \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (J_{i-p}^j(t, x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (1.39)$$

e substituindo (1.39) em (1.38), e depois em (1.36), temos que

$$\varphi_j(t, x, \varepsilon) = x + \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^i}{i!} z_i^j(t, x) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad \text{para } j = 0, \dots, N. \quad (1.40)$$

Por conseguinte, vamos determinar as expressões dos $z_i^j(t, x)$. Primeiro, consideramos $i = 1$. Substituindo (1.32) em (1.35) e depois em (1.39), temos

$$\begin{aligned} z_1^0(t, x) &= \int_0^t K_1^0(s, x) ds \\ z_1^j(t, x) &= \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\theta_l(x)}^{\theta_{l+1}(x)} K_1^l(s, x) ds + \int_{\theta_j(x)}^t K_1^j(s, x) ds \end{aligned} \quad (1.41)$$

Desta vez consideramos $i = 2, \dots, k$. Para $j = 0$, substituindo (1.32) em (1.35) e depois em (1.39), obtemos

$$\begin{aligned} z_i^0(t, x) &= i! \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (J_{i-p}^0(t, x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= i! \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (I_{i-p}^0(t, x)) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= i! I_i^0(t, x). \\ &= i! \left(\int_0^t K_i^0(s, x) ds + \tilde{K}_i^0(x) \right) \\ &= i! \int_0^t K_i^0(s, x) ds \end{aligned} \quad (1.42)$$

uma vez que $\tilde{K}_i^0(x) = 0$, que pode ser conferido na expressão (1.33). Para $j = 1, \dots, N$,

substituindo (1.35) em (1.39), temos

$$\begin{aligned}
 z_i^j(t, x) &= i! \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (J_{i-p}^j(t, x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= i! \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\sum_{l=0}^{j-1} I_{i-p}^l(\alpha_{l+1}(x, \varepsilon), x) + I_{i-p}^j(t, x) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= i! \left(\sum_{a=0}^{j-1} I_i^a(\theta_{a+1}(x), x) + I_i^j(t, x) \right) \\
 &\quad + i! \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \sum_{a=0}^{j-1} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (I_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

De (1.32), temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{a=0}^{j-1} I_i^a(\theta_{a+1}(x), x) + I_i^j(t, x) &= \sum_{a=0}^{j-1} \left(\int_{\theta_a(x)}^{\theta_{a+1}(x)} K_i^a(s, x) ds + \tilde{K}_i^a(x) \right) \\
 &\quad + \int_{\theta_j(x)}^t K_i^j(s, x) ds + \tilde{K}_i^j(x) \\
 &= \sum_{a=0}^{j-1} \int_{\theta_a(x)}^{\theta_{a+1}(x)} K_i^a(s, x) ds + \int_{\theta_j(x)}^t K_i^j(s, x) ds + \sum_{a=0}^j \tilde{K}_i^a(x).
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Para $i = 2$, de (1.32), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (I_1^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int_{\theta_a(x)}^{\alpha_{a+1}(x, \varepsilon)} K_1^a(s, x) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= K_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, 0), x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_{a+1}(x, 0) \\
 &= K_{i-p}^a(\theta_{a+1}(x), x) \frac{\partial \alpha_{a+1}}{\partial \varepsilon}(x, 0).
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Para $i = 3, \dots, k$, de (1.32), temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (I_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0} &= \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\int_{\theta_a(x)}^{\alpha_{a+1}(x, \varepsilon)} K_{i-p}^a(s, x) ds + \tilde{K}_{i-p}^a(x) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(K_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_{a+1}(x, \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Para $i = 2, \dots, k$. De (1.33) e das três expressões acima, temos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a=0}^j \tilde{K}_i^a(x) + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(I_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{a=0}^j \tilde{K}_i^a(x) + \sum_{a=0}^{j-1} \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(K_{i-p}^a(\alpha_{a+1}(x, \varepsilon), x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_{a+1}(x, \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= - \sum_{a=0}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(K_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \frac{\partial \alpha_a(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &+ \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(K_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_a(x, \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(\left(K_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - K_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \frac{\partial \alpha_a(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Portanto, de (1.41), (1.42), (1.43), (1.44), (1.45), (1.46) e (1.47), temos

$$\begin{aligned}
 z_1^0(t, x) &= \int_0^t K_1^0(s, x) ds \\
 z_1^j(t, x) &= \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\theta_l(x)}^{\theta_{l+1}(x)} K_1^l(s, x) ds + \int_{\theta_j(x)}^t K_1^j(s, x) ds \\
 z_i^j(t, x) &= i! \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\theta_l(x)}^{\theta_{l+1}(x)} K_i^l(s, x) ds + i! \int_{\theta_j(x)}^t K_i^j(s, x) ds \\
 &+ i! \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(\left(K_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - K_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \frac{\partial \alpha_a(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0},
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

para $i = 2, \dots, k$ e $j = 1, \dots, N$. Note que

$$K_i^j(t, x) = \frac{1}{i!} \frac{\partial z_i^j}{\partial t}(t, x), \text{ para } i = 1, \dots, k, \text{ e } j = 0, \dots, N.$$

Observe, considerando a expressão acima, que

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(\left(K_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - K_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \frac{\partial \alpha_a(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \frac{\partial^{p-1}}{\partial \varepsilon^{p-1}} \left(\left(\frac{1}{(i-p)!} \frac{\partial z_{i-p}^{a-1}}{\partial t}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - \frac{1}{(i-p)!} \frac{\partial z_{i-p}^a}{\partial t}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \frac{\partial \alpha_a(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\frac{1}{(i-p)!} z_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - \frac{1}{(i-p)!} z_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Denotando $\delta_i^j(t, x) := \frac{1}{i!} (z_i^{j-1}(t, x) - z_i^j(t, x))$, $A_a^p(x, \varepsilon) := \sum_{q=0}^p \frac{\varepsilon^q}{q!} \alpha_a^q(x)$ e $\alpha_a^q(x) = \frac{\partial^q \alpha_a}{\partial \varepsilon^q}(x, 0)$,

temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\frac{1}{(i-p)!} z_{i-p}^{a-1}(\alpha_a(x, \varepsilon), x) - \frac{1}{(i-p)!} z_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\delta_{i-p}^a(\alpha_a(x, \varepsilon), x) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} \left(\delta_{i-p}^a(A_a^p(x, \varepsilon), x) \right) \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Além disso, a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de ordem l de uma função composta é dada por: Seja g e h funções suficientemente suaves, então

$$\frac{d^l}{d\alpha^l} g(h(\alpha)) = \sum_{b \in S_l} \frac{l!}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} g^{(L_b)}(h(\alpha)) \prod_{j=1}^l (h^{(j)}(\alpha))^{b_j}, \quad (1.51)$$

com S_l o conjunto de todas as l -uplas de inteiros não negativos (b_1, b_2, \dots, b_l) tal que $b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l = l$ e $L = b_1 + b_2 + \dots + b_l$.

Aplicando a fórmula de Faà di Bruno na expressão (1.28), segue que

$$\begin{aligned} K_1^j(t, x) &= F_1^j(t, x), \\ K_i^j(t, x) &= F_i^j(t, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \partial_x^{L_b} F_{i-l}^j(t, x) \prod_{m=1}^l (z_m^j(t, x))^{b_m}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

para $i = 2, \dots, k$ e $j = 0, \dots, N$, com L_b e S_l definido em (1.51). Assim,

$$\begin{aligned} &\sum_{a=0}^{j-1} \int_{\theta_a(x)}^{\theta_{a+1}(x)} K_i^a(s, x) ds + \int_{\theta_j(x)}^t K_i^j(s, x) ds = \\ &= \int_0^t \left(F_i(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} B_b \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m(s, x))^{b_m} \right) ds \end{aligned} \quad (1.53)$$

sendo

$$z_i(t, x) = \begin{cases} z_i^0(t, x), & 0 \leq t \leq \theta_1(x), \\ z_i^2(t, x), & \theta_1(x) \leq t \leq \theta_2(x), \\ \vdots & \vdots \\ z_i^N(t, x), & \theta_N(x) \leq t \leq T. \end{cases}$$

Consequentemente, de (1.48), (1.49), (1.50), (1.52) e (1.53), temos

$$\begin{aligned} z_1^j(t, x) &= \int_0^t F_1(s, x) ds, \\ z_i^0(t, x) &= i! \int_0^t \left(F_i^0(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} B_b \partial_x^{L_b} F_{i-l}^0(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m^0(s, x))^{b_m} \right) ds, \\ z_i^j(t, x) &= i! \int_0^t \left(F_i(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} B_b \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m(s, x))^{b_m} \right) ds \\ &\quad + i! \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (\delta_{i-p}^a (A_a^p(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

para $i = 2, \dots, k$ e $j = 1, \dots, N$. Note que a fórmula (1.4) segue de (1.54) por indução em j . Portanto, a prova do Lema 2 é concluída demonstrando a seguinte afirmação:

Afirmção 1. Para $q = 1, \dots, k-1$ e $j = 1, \dots, N$, temos que $\frac{\partial^q \alpha_j}{\partial \varepsilon^q}(x, 0) = \alpha_j^q(x)$ é dada por (1.5).

De fato, do Lema 1, temos

$$\begin{aligned}\alpha_j^q(x) &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} (\alpha_j(x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} (\theta_j(\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0}.\end{aligned}\quad (1.55)$$

De (1.40) e da expressão acima, obtemos

$$\alpha_j^q(x) = \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} (\theta_j(x + h(x, \varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0},$$

com

$$h(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^i}{i!} z_i^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Calculando a expansão de $h(x, \varepsilon)$, em torno de $\varepsilon = 0$ até ordem $k - i$, temos

$$\begin{aligned}h(x, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^i}{i!} \sum_{a=0}^{k-i} \frac{\varepsilon^a}{a!} \frac{\partial^a}{\partial \varepsilon^a} (z_i^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \sum_{a=0}^{i-1} \frac{1}{(i-a)!a!} \frac{\partial^a}{\partial \varepsilon^a} (z_{i-a}^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^{k+1}).\end{aligned}\quad (1.56)$$

Para $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, N$, denote

$$w_i^j(x) = \sum_{a=0}^{i-1} \frac{1}{(i-a)!a!} \frac{\partial^a}{\partial \varepsilon^a} (z_{i-a}^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0}.\quad (1.57)$$

Expandindo $\theta_j(x + h(x, \varepsilon))$ em série de Taylor, em torno de $h(x, \varepsilon) = 0$ até ordem k , temos

$$\begin{aligned}\alpha_j^q(x) &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\theta_j(x) + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l \theta_j(x) (h(x, \varepsilon))^l + O((h(x, \varepsilon))^{k+1}) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l \theta_j(x) (h(x, \varepsilon))^l \right) \Big|_{\varepsilon=0}.\end{aligned}\quad (1.58)$$

Assim, substituindo (1.57) em (1.56), e depois na expressão acima, obtemos

$$\alpha_j^q(x) = \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l \theta_j(x) \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i w_i^j(x) + O(\varepsilon^{k+1}) \right)^l \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Da multilinearidade de $D^l \theta_j(x)$ e da expressão acima, temos

$$\begin{aligned}\alpha_j^q(x) &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l \theta_j(x) \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i w_i^j(x) \right)^l + O(\varepsilon^{k+1}) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} D^l \theta_j(x) \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^i w_i^j(x) \right)^l \right) \Big|_{\varepsilon=0}.\end{aligned}$$

Dada a expressão acima e a Proposição 1, segue que

$$\begin{aligned} \alpha_j^q(x) &= \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \sum_{p=l}^{kl} \varepsilon^p \sum_{u \in S_{p,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \sum_{p=l}^{kl} \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} (\varepsilon^p) \Big|_{\varepsilon=0} \sum_{u \in S_{p,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right), \end{aligned} \quad (1.59)$$

com $S_{p,l} = \{(u_1, \dots, u_l) \in (\mathbb{N}^*)^l : u_1 + \dots + u_l = p\}$.

Note que

$$\frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} (\varepsilon^p) \Big|_{\varepsilon=0} = \begin{cases} q!, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Portanto, disso e de (1.59), temos

$$\alpha_j^q(x) = \sum_{l=1}^k \frac{q!}{l!} \sum_{u \in S_{q,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right). \quad (1.60)$$

Note que, $S_{q,l} = \emptyset$ para $q < l$. De fato, $(b_1, \dots, b_l) \in S_{q,l}$, então $l \leq \sum_{t=1}^l b_t = q < l$, visto que $b_t \geq 1$. Logo, $l \leq q \leq k$, assim

$$\alpha_j^q(x) = \sum_{l=1}^q \frac{q!}{l!} \sum_{u \in S_{q,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right),$$

com

$$w_1^j(x) = z_1^{j-1}(\theta_j(x), x)$$

e aplicando a fórmula de Faà di Bruno em (1.57), temos

$$\begin{aligned} w_i^j(x) &= \frac{1}{i!} z_i^{j-1}(\theta_j(x), x) \\ &+ \sum_{a=1}^{i-1} \sum_{b \in S_a} \frac{1}{(i-a)! b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_a! a!^{b_a}} \partial_t^{L_b} z_{i-a}^{j-1}(\theta_j(x), x) \prod_{m=1}^a (\alpha_j^m(x))^{b_m}. \end{aligned}$$

Isso finaliza a prova da Afirmação 1. □

2 Funções de Melnikov e Promediadas

A Teoria de Melnikov e a Teoria da Média são ferramentas clássicas para o estudo de existência de ciclos limites. Ambas têm sido desenvolvidas também para sistemas diferenciais não suaves (ver [16, 20, 21, 25]).

Em [21], a Teoria da Média foi desenvolvida para uma ordem qualquer para sistemas do tipo (1.1), assumindo que as funções θ_j , $j = 1, \dots, N$, são constantes. Foi mostrado que nesse caso as Funções de Melnikov coincidem com as Funções Promediadas para sistemas suaves (ver [25]). Estas serão denotadas da seguinte forma:

$$f_i(x) = \frac{1}{i!} \tilde{z}_i(T, x), \quad (2.1)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(t, x) &= \int_0^t F_1(s, x) ds \\ \tilde{z}_i(t, x) &= i! \int_0^t \left(F_i(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

para $i = 2, \dots, k$.

Em [20] foi demonstrado que a Função Promediada de primeira ordem controla a bifurcação de soluções periódicas para sistemas diferenciais não suaves. Porém, foi observado que as Funções Promediadas de ordem igual ou maior que dois nem sempre controlam tais bifurcações. Em [2] constatou-se que a Função de Melnikov de segunda ordem para sistema do tipo (1.1) é dado pela Função Promediada de ordem dois somado a um termo extra que depende do salto de descontinuidade e da geometria da variedade de descontinuidade, a saber,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^T F_1(s, x) ds \\ f_2(x) &= \int_0^T \left[D_x F_1(s, x) \int_0^s F_1(t, x) dt + F_2(s, x) \right] ds \\ &\quad + \sum_{a=1}^N (F_1^{a-1}(\theta_a(x), x) - F_1^a(\theta_a(x), x)) D\theta_a(x) \int_0^{\theta_a(x)} F_1(s, x) ds \end{aligned}$$

O resultado principal desse capítulo nos dá a expressão das Funções de Melnikov como a soma das Funções Promediadas e um incremento, de forma recursiva.

Teorema 2. *A Função de Melnikov do sistema (1.1) pode ser expressa como*

$$M_i(x) = f_i(x) + f_i^*(x),$$

sendo f_i as Funções Promediadas dadas em 2.1 e

$$f_i^*(x) = \frac{1}{i!} \widehat{z}_i^N(T, x), \quad (2.3)$$

com

$$\widehat{z}_i(t, x) = \widehat{z}_i^j(t, x), \text{ se } t \in [\theta_j(x), \theta_{j+1}(x)] \quad (2.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1^j(t, x) &= \widehat{z}_i^0(t, x) = 0 \\ \widehat{z}_i^j(t, x) &= g_i^*(t, x) + g_i^j(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

e

$$\begin{aligned} g_2^*(t, x) &= 0, \\ g_i^*(t, x) &= i! \sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=2}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{i,b}^{l,q}(s, x) ds \\ g_i^j(x) &= i! \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (\delta_{i-p}^a (A_a^p(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

uma vez que se $b = (b_1, \dots, b_l) \in S_l$, b_i é um inteiro não negativo e $b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l = l$, temos, para $3 \leq i \leq k$, que

$$\begin{aligned} X_{i,b}^{l,q}(s, x) &= 0 \text{ se } b_q = 0, \\ X_{i,b}^{l,q}(s, x) &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \dots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=q}^l \binom{b_p}{n_p} \right) \\ &\quad \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{q-1} (\widetilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l (\widetilde{z}_m(s, x))^{b_m - n_m} (\widehat{z}_m(s, x))^{n_m} \right), \\ X_{i,b}^{l,l}(s, x) &= \begin{cases} 0, & \text{se } b \neq e_l \\ \partial_x F_{i-l}(s, x) \widehat{z}_l(s, x), & \text{se } b = e_l. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Além disso, temos que $\delta_i^j(t, x) = \frac{1}{i!} (z_i^{j-1}(t, x) - z_i^j(t, x))$ e $A_j^p(x, \varepsilon) = \sum_{q=0}^p \frac{\varepsilon^q}{q!} \alpha_j^q(x)$, com

$$\alpha_j^q(x) = \sum_{l=1}^q \frac{q!}{l!} \sum_{u \in S_{q,l}} D^l \theta_j(x) \left(\prod_{r=1}^l w_{u_r}^j(x) \right), \text{ for } q = 1, \dots, k-1, \quad (2.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} w_1^j(x) &= z_1^{j-1}(\theta_j(x), x), \\ w_i^j(x) &= \frac{1}{i!} z_i^{j-1}(\theta_j(x), x) \\ &\quad + \sum_{a=1}^{i-1} \sum_{b \in S_a} \frac{1}{(i-a)! b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_a! a!^{b_a}} \partial_t^{L_b} z_{i-a}^{j-1}(\theta_j(x), x) \prod_{m=1}^a (\alpha_j^m(x))^{b_m}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

e $S_{q,a}$ é o conjunto de todas as a -uplas de inteiros positivos (b_1, b_2, \dots, b_a) satisfazendo $b_1 + b_2 + \dots + b_a = q$.

Observação 1. Note que

$$f_2^*(x) = \sum_{a=1}^N (F_1^{a-1}(\theta_a(x), x) - F_1^a(\theta_a(x), x)) D\theta_a(x) \int_0^{\theta_a(x)} F_1(s, x) ds,$$

que coincide com o incremento obtido em [2].

Em [20] foi mostrado que as funções de Melnikov e Promediada de primeira ordem coincidem para sistemas suaves. Em [2] podemos ver que o mesmo acontece para a ordem dois, pois temos que o incremento é identicamente nulo para esse caso. Além disso, em [2] foi notado que se variedade de descontinuidade é constante, temos que o incremento também é identicamente nulo. Com a proposição seguinte, notamos que o mesmo ocorre para ordem qualquer.

Proposição 2. Considere $M_i(x)$ dada pelo Teorema 2, para $i = 1, \dots, \ell$. Se $g_i^j(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, \ell$ e $j = 1, \dots, N$, então $\hat{z}_i(t, x) = 0$, para todo $i = 1, \dots, \ell$. Em particular, para todo $i = 1, \dots, \ell$,

$$M_i(x) = f_i(x).$$

2.1 Resultados preliminares

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar o seguinte lema técnico, que será usado para provar o Teorema 2:

Lema 3. Considere l inteiro positivo, $b = (b_1, \dots, b_l) \in (\mathbb{Z}_+)^l$, $L_b = b_1 + \dots + b_l$ e $0^0 = 1$. Dado um operador L_b -multilinear Q , então

$$Q \prod_{m=1}^l (x_m + y_m)^{b_m} = Q \prod_{m=1}^l x_m^{b_m} + \sum_{q=1}^l X_{Q,b}^{l,q}, \quad (2.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} X_{Q,b}^{1,1} &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \binom{b_1}{n_1} Q(x_1^{b_1-n_1} y_1^{n_1}), \quad b_1 > 0, \\ X_{Q,b}^{l,1} &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \dots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=1}^l \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right), \quad b_1 > 0, \\ X_{Q,b}^{l,q} &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \dots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=q}^l \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^{q-1} x_m^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right), \quad b_q > 0, \\ X_{Q,b}^{l,l} &= \sum_{n_l=1}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) (x_l^{b_l-n_l} y_l^{n_l}), \quad b_l > 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e, se $b_q = 0$, então $X_{Q,b}^{l,q} = 0$.

Porém, antes de demonstrarmos tal lema, vamos considerar L e a inteiros positivos de modo que $L - a \geq 1$ e Q_L um operador L -multilinear para definirmos P_L^a o operador $(L - a)$ -multilinear, dado por:

$$P_L^a \prod_{n=1}^{L-a} u_n = Q_L \left(\prod_{n=1}^{L-a} u_n \right) \left(\prod_{n=1}^a v_n \right). \quad (2.12)$$

Tal operador servirá de referência para a demonstração do Lema 3 e da proposição seguinte. Esta será usada para provar o Lema 3, por isso vamos enunciá-la e prová-la a seguir.

Proposição 3. *Considere L um inteiro positivo e um operador L -multilinear Q_L .*

$$Q_L(x + y)^L = \sum_{n=0}^L \binom{L}{n} Q_L x^{L-n} y^n, \quad (2.13)$$

$$\text{com } \binom{L}{n} = \frac{L!}{n!(L-n)!}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução em L . Note que para $L = 1$ a proposição é válida, porque Q_1 é linear e

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^1 \binom{1}{n} Q_1 x^{1-n} y^n &= \binom{1}{0} Q_1 x^1 y^0 + \binom{1}{1} Q_1 x^0 y^1 \\ &= Q_1 x + Q_1 y \\ &= Q_1(x + y). \end{aligned}$$

Por conseguinte, suponha como hipótese de indução que a proposição é válida para $L - 1$. Da expressão (2.12) e assumindo $v_1 = u_n = x + y$, para $n = 1, \dots, L - 1$, temos

$$Q_L(x + y)^L = P_L^1(x + y)^{L-1} \quad (2.14)$$

e por hipótese de indução, segue que

$$P_L^1(x + y)^{L-1} = \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} P_L^1 x^{L-1-n} y^n. \quad (2.15)$$

Da expressão (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} P_L^1 x^{L-1-n} y^n &= \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-1-n} y^n (x + y) \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-n} y^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-1-n} y^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Uma vez que $\sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-1-n} y^{n+1} = \sum_{n=1}^L \binom{L-1}{n-1} Q_L x^{L-n} y^n$, note que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-n} y^n + \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-1-n} y^{n+1} = \\
& = \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-n} y^n + \sum_{n=1}^L \binom{L-1}{n-1} Q_L x^{L-n} y^n \\
& = \binom{L-1}{0} Q_L x^L + \binom{L-1}{L-1} Q_L y^L \\
& \quad + \sum_{n=1}^{L-1} \binom{L-1}{n} Q_L x^{L-n} y^n + \sum_{n=1}^{L-1} \binom{L-1}{n-1} Q_L x^{L-n} y^n \\
& = Q_L x^L + \sum_{n=1}^{L-1} \left(\binom{L-1}{n} + \binom{L-1}{n-1} \right) Q_L x^{L-n} y^n + Q_L y^L.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pela *Regra de Pascal*, temos

$$\binom{L-1}{n} + \binom{L-1}{n-1} = \binom{L}{n}. \tag{2.18}$$

Substituindo a expressão (2.18) na (2.17), depois na (2.16), em seguida na (2.15) e por fim na (2.14), temos

$$\begin{aligned}
Q(x+y)^L &= Qx^L + \sum_{n=1}^{L-1} \binom{L}{n} Qx^{L-n} y^n + Qy^L \\
&= \sum_{n=0}^L \binom{L}{n} Qx^{L-n} y^n,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

como queríamos. Portanto, a proposição é válida para todo L inteiro positivo. \square

Prova do Lema 3. Note que para $l = 1$ estamos no caso da Proposição 3 e não há nada que precisa ser feito. Assim, vamos demonstrar usando a indução em l , iniciando provando que o lema é válido pra $l = 2$.

Considere $l = 2$. Para $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$, temos pela Proposição 3 e por (2.11)

que

$$\begin{aligned}
 Q \prod_{m=1}^2 (x_m + y_m)^{b_m} &= Q(x_2 + y_2)^{b_2} \\
 &= \sum_{n_2=0}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &= Q x_2^{b_2} + \sum_{n_2=1}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &= Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \sum_{n_2=1}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &= Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \sum_{n_2=1}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q x_1^{b_1} x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &= Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + X_{Q,b}^{2,2}. \\
 &= Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \sum_{q=1}^2 X_{Q,b}^{2,q}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

De forma análoga, para $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$, temos, pela Proposição 3 e por (2.11), que

$$Q \prod_{m=1}^2 (x_m + y_m)^{b_m} = Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \sum_{q=1}^2 X_{Q,b}^{2,q}. \tag{2.21}$$

Para $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, tomando $u_n = x_1 + y_1$ para $n = 1, \dots, b_1$ e $v_n = x_2 + y_2$ para $n = 1, \dots, b_2$ em (2.12), temos

$$Q \prod_{m=1}^2 (x_m + y_m)^{b_m} = P_{b_1+b_2}^{b_2} (x_1 + y_1)^{b_1}. \tag{2.22}$$

Pela Proposição 3 e a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
 P_{b_1+b_2}^{b_2} (x_1 + y_1)^{b_1} &= \sum_{n_1=0}^{b_1} \binom{b_1}{n_1} P_{b_1+b_2}^{b_2} x_1^{b_1-n_1} y_1^{n_1} \\
 &= \sum_{n_1=0}^{b_1} \binom{b_1}{n_1} Q x_1^{b_1-n_1} y_1^{n_1} (x_2 + y_2)^{b_2}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tomando $a = b_1$, $u_n = x_2 + y_2$ para $n = 1, \dots, b_2$, e $\prod_{n=1}^{b_1} v_n = x_1^{b_1-n_1} y_1^{n_1}$ em (2.12), segue que

$$Q x_1^{b_1-n_1} y_1^{n_1} (x_2 + y_2)^{b_2} = P_{b_1+b_2}^{b_1} (x_2 + y_2)^{b_2}. \tag{2.24}$$

Pela Proposição 3 e a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
 P_{b_1+b_2}^{b_1} (x_2 + y_2)^{b_2} &= \sum_{n_2=0}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} P_{b_1+b_2}^{b_1} x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &= \sum_{n_2=0}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim, substituindo (2.25) em (2.24), em seguida em (2.23) e por fim em (2.22), temos

$$\begin{aligned}
 Q \prod_{m=1}^2 (x_m + y_m)^{b_m} &= \sum_{n_1=0}^{b_1} \binom{b_1}{n_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \\
 &= \sum_{n_1=0}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \left(\prod_{m=1}^2 \binom{b_m}{n_m} \right) Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \\
 &= \sum_{n_2=0}^{b_2} \left(\binom{b_2}{n_2} \right) Q x_1^{b_1} x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &\quad + \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \left(\prod_{m=1}^2 \binom{b_m}{n_m} \right) Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \\
 &= Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \sum_{n_2=1}^{b_2} \binom{b_2}{n_2} Q x_1^{b_1} x_2^{b_2-n_2} y_2^{n_2} \\
 &\quad + \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \left(\prod_{m=1}^2 \binom{b_m}{n_m} \right) Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Considerando as expressões em (2.11), temos

$$Q \prod_{m=1}^2 (x_m + y_m)^{b_m} = Q \prod_{m=1}^2 x_m^{b_m} + \prod_{q=1}^2 X_{Q,b}^{2,q} \tag{2.27}$$

como queríamos. Portanto, o lema é válida para $l = 2$

Agora, suponha que o lema é válida para $l - 1$, $l \geq 2$. Da expressão (2.12), uma vez que $a = b_l$, $v_n = x_l + y_l$ para $n = 1, \dots, b_l$, $u_m = x_m + y_m$, $m = 1, \dots, b_l$, temos

$$Q \prod_{m=1}^l (x_m + y_m)^{b_m} = P_{L-b_l}^{b_l} \prod_{m=1}^{l-1} (x_m + y_m)^{b_m}. \tag{2.28}$$

Por hipótese de indução, uma vez que $\hat{b} = \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$, temos

$$P_{L-b_l}^{b_l} \prod_{m=1}^{l-1} (x_m + y_m)^{b_m} = P_{L-b_l}^{b_l} \prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} + \sum_{q=1}^{l-1} X_{P_{L-b_l}^{b_l}, \hat{b}}^{l-1,q}. \tag{2.29}$$

De (2.12), temos

$$P_{L-b_l}^{b_l} \prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} = Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) (x_l + y_l)^{b_l}. \tag{2.30}$$

De (2.12), uma vez que $a = L - b_l$, $u_n = x_l + y_l$ para $n = 1, \dots, b_l$, e $v_m = x_m^{b_m}$, $m = 1, \dots, l - 1$, temos

$$Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) (x_l + y_l)^{b_l} = P_L^{L-b_l} (x_l + y_l)^{b_l} \tag{2.31}$$

e da Proposição 3, da expressão acima, de (2.30) e de (2.11), temos

$$\begin{aligned}
 P_L^{L-b_l}(x_l + y_l)^{b_l} &= \sum_{n_l=0}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} P_L^{L-b_l} x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= \sum_{n_l=0}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) x^{b_l} + \sum_{n_l=1}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m} \right) + X_{Q,b}^{l,l}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Substituindo (2.32) em (2.31), depois em (2.30), em seguida em (2.29) e por fim em (2.28), temos

$$\begin{aligned}
 Q \prod_{m=1}^l (x_m + y_m)^{b_m} &= Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m} \right) + X_{Q,b}^{l,l} + \sum_{q=1}^{l-1} X_{P_{L-b_l}^{b_l, \hat{\delta}}}^{l-1,q} \\
 &= Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m} \right) + X_{Q,b}^{l,l} + X_{P_{L-b_l}^{b_l, \hat{\delta}}}^{l-1,1} + \sum_{q=2}^{l-1} X_{P_{L-b_l}^{b_l, \hat{\delta}}}^{l-1,q}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Note que de (2.11), (2.30) e da Proposição 3, temos

$$\begin{aligned}
 X_{P_{L-b_l}^{b_l, \hat{\delta}}}^{l-1,1} &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \cdots \sum_{n_{l-1}=0}^{b_{l-1}} \left(\prod_{p=1}^{l-1} \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) (x_l + y_l)^{b_l} \\
 &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \cdots \sum_{n_{l-1}=0}^{b_{l-1}} \left(\prod_{p=1}^{l-1} \binom{b_p}{n_p} \right) \\
 &\quad \sum_{n_l=0}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \cdots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=1}^l \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) \\
 &= X_{Q,b}^{l,1},
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
 X_{P_{L-b_l}^{b_l, \hat{\delta}}}^{l-1,q} &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \cdots \sum_{n_{l-1}=0}^{b_{l-1}} \left(\prod_{p=q}^{l-1} \binom{b_p}{n_p} \right) \\
 &\quad Q \left(\prod_{m=1}^{q-1} x_m^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^{l-1} x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) (x_l + y_l)^{b_l} \\
 &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \cdots \sum_{n_{l-1}=0}^{b_{l-1}} \left(\prod_{p=q}^{l-1} \binom{b_p}{n_p} \right) \\
 &\quad \sum_{n_l=0}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{q-1} x_m^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^{l-1} x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \cdots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=q}^l \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^{q-1} x_m^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l x_m^{b_m-n_m} y_m^{n_m} \right) \\
 &= X_{Q,b}^{l,q},
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 X_{P_{L-b_l, \hat{b}}}^{l-1, l-1} &= \sum_{n_{l-1}=1}^{b_{l-1}} \binom{b_{l-1}}{n_{l-1}} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) (x_l^{b_l-n_l} y_l^{n_l}) (x_l + y_l)^{b_l} \\
 &= \sum_{n_{l-1}=1}^{b_{l-1}} \binom{b_{l-1}}{n_{l-1}} \sum_{n_l=0}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) (x_l^{b_l-n_l} y_l^{n_l}) x^{b_l-n_l} y^{n_l} \\
 &= \sum_{n_{l-1}=1}^{b_{l-1}} \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=l-1}^l \binom{b_p}{n_p} \right) Q \left(\prod_{m=1}^{l-1} x_m^{b_m} \right) \left(\prod_{m=l-1}^l x_l^{b_l-n_l} y_l^{n_l} \right) \\
 &= X_{Q, b}^{l, l-1}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Assim, substituindo (2.34), (2.35) e (2.36) em (2.33), temos

$$Q \prod_{m=1}^l (x_m + y_m)^{b_m} = Q \left(\prod_{m=1}^l x_m^{b_m} \right) + \sum_{q=1}^l X_{Q, b}^{l, q}, \tag{2.37}$$

como queríamos. Portanto, o lema é válido para todo l inteiro positivo. \square

2.2 Prova do Teorema 2

Demonstração. Uma vez que

$$M_i(x) = \frac{1}{i!} z_i^N(T, x)$$

e $M_1(x) = f_1(x)$, é suficiente provar que $z_i^j(t, x) = \tilde{z}_i^j(t, x) + \hat{z}_i^j(t, x)$, $i = 2, \dots, k$ e $j = 1, \dots, N$, expressas em (2.2) e (2.46). Como consequência, obtemos

$$M_i(x) = f_i(x) + f_i^*(x), \quad i = 1, \dots, k, \tag{2.38}$$

sendo $f_i(x) = \frac{1}{i!} \tilde{z}_i^N(T, x)$ e $f_i^*(x) = \frac{1}{i!} \hat{z}_i^N(T, x)$, como queríamos.

Pela expressão (1.4), sabemos que

$$\begin{aligned}
 z_i^j(t, x) &= i! \int_0^t \left(F_i(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2! b_2 \dots b_l! l! b_l} \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m(s, x))^{b_m} \right) ds \\
 &\quad + i! \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (\delta_{i-p}^a (A_a^p(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0},
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

para $i = 2, \dots, k$ e $j = 1, \dots, N$. Denotamos por

$$g_i^j(x) = i! \sum_{a=1}^j \sum_{p=1}^{i-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon^p} (\delta_{i-p}^a (A_a^p(x, \varepsilon), x)) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Note que $\partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x)$ é um operador L_b -multilinear aplicado em $\prod_{m=1}^l (\tilde{z}_m(s, x) + \hat{z}_m(s, x))^{b_m}$. Considerando $\partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) = Q$, $\tilde{z}_m(s, x) = x_m$ e $\hat{z}_m(s, x) = y_m$, temos, como consequência

do Lema 3, que

$$\partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (z_m(s, x))^{b_m} = \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} + \sum_{q=1}^l X_{i,b}^{l,q}(s, x), \quad (2.40)$$

com

$$\begin{aligned} X_{i,b}^{1,1}(s, x) &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \binom{b_1}{n_1} \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) (\tilde{z}_1(s, x))^{b_1-n_1} \hat{z}_1(s, x)^{n_1}, \quad b_1 > 0, \\ X_{i,b}^{l,1}(s, x) &= \sum_{n_1=1}^{b_1} \sum_{n_2=0}^{b_2} \cdots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=1}^l \binom{b_p}{n_p} \right) \\ &\quad \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^l \tilde{z}_m(s, x)^{b_m-n_m} \hat{z}_m(s, x)^{n_m} \right), \quad b_1 > 0, \\ X_{i,b}^{l,q}(s, x) &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \cdots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=q}^l \binom{b_p}{n_p} \right) \\ &\quad \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{q-1} \tilde{z}_m(s, x)^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l \tilde{z}_m(s, x)^{b_m-n_m} \hat{z}_m(s, x)^{n_m} \right), \quad b_q > 0, \\ X_{i,b}^{l,l}(s, x) &= \sum_{n_l=1}^{b_l} \binom{b_l}{n_l} \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{l-1} z_m(s, x)^{b_m} \right) (\tilde{z}_l(s, x))^{b_l-n_l} \hat{z}_l(s, x)^{n_l}, \quad b_l > 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

e se $b_q = 0$, então $X_{i,b}^{l,q}(s, x) = 0$. Uma vez que $\hat{z}_1^j(s, x) = 0$, temos

$$X_{i,b}^{1,1}(s, x) = X_{i,b}^{l,1}(s, x) = 0. \quad (2.42)$$

Considere $b = (b_1, \dots, b_l) \in S_l$, então $b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l = l$.

$$X_{i,b}^{l,l}(s, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } b \neq e_l \\ \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \tilde{z}_l(s, x) \hat{z}_l(s, x), & \text{se } b = e_l. \end{cases}$$

De fato, suponha que $b_l > 0$. Se $b_l > 1$, então $b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l > l$. Logo, $b_l = 1$, consequentemente, $b_i = 0$ para $i = 1, \dots, l-1$.

Assim, de (2.39) e (2.40), temos

$$\begin{aligned} z_i^j(t, x) &= i! \int_0^t F_i(s, x) ds \\ &+ i! \int_0^t \left(\sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \left(\partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} + \sum_{q=1}^l X_{i,b}^{l,q}(s, x) \right) \right) ds \\ &+ g_i^j(x) \\ &= i! \int_0^t \left(F_i(s, x) + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \partial_x^{L_b} F_{i-l}(s, x) \prod_{m=1}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) ds \\ &+ i! \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{q=1}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{i,b}^{l,q}(s, x) ds + g_i^j(x) \\ &= \tilde{z}_i^j(t, x) + \hat{z}_i^j(t, x), \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo

$$\widehat{z}_i^j(t, x) = g_i^*(t, x) + g_i^j(x), \quad (2.44)$$

denotando como

$$g_i^*(t, x) = i! \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{q=1}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{i,b}^{l,q}(s, x) ds.$$

Uma vez que $X_{i,b}^{1,1}(s, x) = X_{i,b}^{l,1}(s, x) = 0$, visto em (2.42), temos que

$$\begin{aligned} g_2^*(t, x) &= 0, \\ g_i^*(t, x) &= i! \sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=2}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{i,b}^{l,q}(s, x) ds, \end{aligned}$$

para $i = 3, \dots, k$. □

2.3 Demonstração da Proposição 2

Demonstração. Supondo que $g_i^j(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, \ell$ e $j = 1, \dots, N$, temos, para $i = 3, \dots, \ell$, que

$$\begin{aligned} \widehat{z}_2^j(t, x) &= 0 \\ \widehat{z}_i^j(t, x) &= g_i^*(t, x). \\ &= i! \sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=2}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{i,b}^{l,q}(s, x) ds \end{aligned} \quad (2.45)$$

Lembrando que

$$\widehat{z}_i(t, x) = \widehat{z}_i^j(t, x), \text{ se } t \in [\theta_j(x), \theta_{j+1}(x)] \quad (2.46)$$

provaremos o teorema usando indução em i . Suponhamos que

$$\widehat{z}_2^j(t, x) = g_2^j(x) = 0 \text{ e } g_3^j(x) = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} \widehat{z}_3^j(t, x) &= g_3^*(t, x). \\ &= 3! \sum_{b \in S_2} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2}} \int_0^t X_{3,b}^{2,2}(s, x) ds \\ &= \frac{3!}{2} \int_0^t X_{3,(0,1)}^{2,2}(s, x) ds \\ &= \frac{3!}{2} \int_0^t \partial_x F_1(s, x) \widehat{z}_2(s, x) ds \\ &= \frac{3!}{2} \int_0^t \partial_x F_1(s, x) \cdot 0 ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Agora suponha que a hipótese de indução é válida para $\ell - 1$. Assim, suponhamos que $g_i^j(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, \ell$. Temos que

$$\hat{z}_\ell^j(t, x) = \ell! \sum_{l=2}^{\ell-1} \sum_{q=2}^l \sum_{b \in S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \int_0^t X_{\ell, b}^{l, q}(s, x) ds \quad (2.48)$$

sendo

$$\begin{aligned} X_{\ell, b}^{l, q}(s, x) &= 0 \text{ se } b_q = 0, \\ X_{\ell, b}^{l, q}(s, x) &= \sum_{n_q=1}^{b_q} \sum_{n_{q+1}=0}^{b_{q+1}} \dots \sum_{n_l=0}^{b_l} \left(\prod_{p=q}^l \binom{b_p}{n_p} \right) \\ &\quad \partial_x^{L^b} F_{\ell-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{q-1} (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m - n_m} (\hat{z}_m(s, x))^{n_m} \right), \\ X_{\ell, b}^{l, l}(s, x) &= \begin{cases} 0, & \text{se } b \neq e_l \\ \partial_x F_{\ell-l}(s, x) \hat{z}_l(s, x), & \text{se } b = e_l. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Note que em $X_{\ell, b}^{l, q}(s, x)$, para $n_q = 1$, temos que

$$\begin{aligned} &\partial_x^{L^b} F_{\ell-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{q-1} (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) \left(\prod_{m=q}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m - n_m} (\hat{z}_m(s, x))^{n_m} \right) \\ &= \partial_x^{L^b} F_{\ell-l}(s, x) \left(\prod_{m=1}^{q-1} (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m} \right) ((\tilde{z}_q(s, x))^{b_q - 1} (\hat{z}_q(s, x))) \\ &\quad \left(\prod_{m=q+1}^l (\tilde{z}_m(s, x))^{b_m - n_m} (\hat{z}_m(s, x))^{n_m} \right) \end{aligned}$$

Uma vez que $2 \leq q < l \leq \ell - 1$, por hipótese de indução, temos que $\hat{z}_q(s, x) = \hat{z}_l(s, x) = 0$, logo $X_{\ell, b}^{l, q}(s, x) = X_{\ell, b}^{l, q}(s, x) = 0$. Consequentemente, $\hat{z}_\ell(s, x) = 0$. Portanto, temos o que queríamos. \square

3 Sistemas Estendidos de Chebyshev com acurácia

No Capítulo 4 aplicaremos o Teorema 1 a fim de determinar uma cota inferior para o número máximo de ciclos limites de uma classe de sistemas diferenciais lineares por partes planares. Com esse propósito calcularemos as Funções de Melnikov, até ordem 6, de tal classe e determinaremos a quantidade máxima de zeros simples destas funções. Uma vez que tais funções pertencem ao espaço de funções gerado pela combinação linear de um conjunto ordenado de funções, definidas posteriormente, aplicamos a Teoria de Chebyshev para determinar o número máximo de zeros que um elemento desse conjunto pode ter.

Frente a isso, faz-se necessário a aplicação da Teoria de Chebyshev, esta que é uma ferramenta clássica para atacar esse tipo de problema. Inicialmente, tal teoria foi usada na Teoria da Aproximação, no estudo de Funções *Spline* e na Teoria do Momento *Fine* (ver [18, 17]). Recentemente, foi usada na Teoria de Equações Diferenciais para estudar desdobramentos versais de singularidades de campos de vetores (ver [29, 32]). Na Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, é usada para estudar o número de órbitas periódicas isoladas (ciclos limites) bifurcando-se de um anel de órbitas periódicas, ver também [32]. Mais especificamente, é útil para obter limitantes superiores para o número de zeros da Função de Melnikov. Esses estudos forneceram limitantes inferiores para o chamado versão fraca do 16º Problema de Hilbert (ver [5, 34]).

Considere $\mathcal{F} = [u_0, \dots, u_n]$ como sendo um conjunto ordenado de funções suaves definidas no intervalo fechado $[a, b]$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$ o número máximo de zeros, contando a multiplicidade, de qualquer função não trivial em $\text{Span}(\mathcal{F})$, sendo este o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de \mathcal{F} . A seguir apresentaremos definições e teoremas sobre a Teoria de Chebyshev que aplicaremos para classificar os conjuntos ordenados de funções a serem definidos posteriormente.

Definição 1. [18] *O conjunto \mathcal{F} é dito um Sistema Estendido de Chebyshev ou apenas sistema ET em $[a, b]$, se $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) \leq n$.*

Definição 2. [31] *Quando $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) = n + k$, o conjunto \mathcal{F} é chamado um sistema ET com acurácia k em $[a, b]$.*

Definição 3. *Dizemos que \mathcal{F} é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev ou um sistema ECT em um intervalo fechado $[a, b]$ se, e somente se, para qualquer k , $0 \leq k \leq n$, $[u_0, u_1, \dots, u_k]$ é um sistema ET ("Extended Tchebyshev System").*

A seguir enunciaremos resultados da Teoria da Chebyshev que serão utilizados para a classificação desejada.

Definição 4. *O Wronskiano do conjunto ordenado $[u_0, \dots, u_s]$, de $s+1$ funções, é definido como*

$$W_s(x) = W_s(u_0, \dots, u_s)(x) = \det(M(u_0, \dots, u_s)(x)),$$

com

$$M(u_0, \dots, u_s)(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) & \dots & u_s(x) \\ u_0'(x) & \dots & u_s'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_0^{(s)}(x) & & u_s^{(s)}(x) \end{pmatrix}.$$

Teorema 3. [18] *\mathcal{F} é um sistema ECT em $[a, b]$ se, e somente se, $W_k(u_0, u_1, \dots, u_k)(t) \neq 0$ em $[a, b]$ para $0 \leq k \leq n$.*

Teorema 4. [18] *Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um sistema ECT em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, o número de zeros isolados para todo elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não ultrapassa n . Além disso, para cada configuração de $m \leq n$ zeros, contando sua multiplicidade, existe $F \in \text{Span}(\mathcal{F})$ com essa configuração de zeros.*

Os próximos resultados, provados em [31], estende o teorema acima quando alguns Wronskianos possuem zeros.

Teorema 5. [31] *Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um conjunto ordenado de funções definidas em $[a, b]$. Assuma que todos os Wronskianos $W_i(x)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, não possuem zeros em $[a, b]$, exceto $W_n(x)$, que tem exatamente um zero em (a, b) e esse zero é simples. Então, o número de zeros isolados para todo elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede $n+1$. Além disso, para qualquer configuração de $m \leq n+1$ zeros existe $F \in \text{Span}(\mathcal{F})$ com essa configuração de zeros.*

Teorema 6. [31] *Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um conjunto ordenado de funções analíticas em $[a, b]$. Assuma que todos os ν_i zeros do Wronskiano W_i são simples para $i \in \{0, \dots, n\}$. Então o número de zeros isolados para todos elementos de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede*

$$n + \nu_n + \nu_{n-1} + 2(\nu_{n-2} + \dots + \nu_0) + \mu_{n-1} + \dots + \mu_3 \quad (3.1)$$

com $\mu_i = \min(2\nu_i, \nu_{i-3} + \dots + \nu_0)$, para $i \in \{3, \dots, n-1\}$.

Observação 2. *No Teorema 6, assumimos que todos os zeros dos Wronskianos W_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, são simples. Essa condição pode ser eliminada da seguinte forma:*

Assuma que, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, Wronskiano W_i tem ν_i zeros contando a multiplicidade. Então, o número de zeros simples para cada elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede o número dado na equação (3.1).

De fato, se existe um elemento $f = \sum_{i=0}^n a_i u_i \in \text{Span}(\mathcal{F})$ tal que o número de zeros simples excede o número dado na equação (3.1), então perturbando as funções u_i , denotada como u_i^ε , para $i \in \{0, \dots, n\}$, a função $f_\varepsilon = \sum_{i=0}^n a_i u_i^\varepsilon$ ainda iria exceder o número dado na equação (3.1), porque assumimos que os zeros de f são simples. Além do mais, essa perturbação pode ser escolhida de modo que cada Wronskiano W_i^ε do conjunto ordenado de funções $[u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon, \dots, u_i^\varepsilon]$, para $i \in \{0, \dots, n\}$, tem menos ou exatamente ν_i zeros, todos eles simples. Isso contradiz o Teorema 6.

3.1 Novas famílias de Sistemas ET com acurácia

Considere as seguintes famílias de funções ordenadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^k &= [u_1^k, u_{12}^k, u_4^k], \\
\mathcal{F}_2^k &= [u_{13}^k, u_{15}^k, u_5^k, u_2^k], \\
\mathcal{F}_3^k &= [u_1^k, u_4^k, u_9^k, u_{16}^k, u_{17}^k], \\
\mathcal{F}_4^k &= [u_4^k, u_9^k, u_6^k, u_3^k, u_{16}^k, u_{17}^k], \\
\mathcal{F}_5^k &= [u_1^k, u_4^k, u_7^k, u_8^k, u_{10}^k, u_5^k, u_{11}^k, u_{14}^k], \\
\mathcal{F}_6^k &= [u_1^k, u_4^k, u_9^k, u_6^k, u_3^k, u_{16}^k, u_{17}^k], \\
\mathcal{F}_7^{k,\lambda} &= [u_{18}^k, u_{19}^k, u_{20}^k, u_{21}^k, u_{22}^k, u_{23}^k, u_{24}^{k,\lambda}],
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e as funções $u_1^k, \dots, u_{23}^k, u_{24}^{k,\lambda}$ definidas em $(0, \infty)$ como

$$\begin{aligned}
u_1^k(x) &= 1, & u_2^k(x) &= x, \\
u_3^k(x) &= x^{2k-2}, & u_4^k(x) &= x^{2k}, \\
u_5^k(x) &= x^{2k+1}, & u_6^k(x) &= x^{4k-2}, \\
u_7^k(x) &= x^{4k}, & u_8^k(x) &= x^{4k+1}, \\
u_9^k(x) &= x^{6k-2}, & u_{10}^k(x) &= x^{6k}, \\
u_{11}^k(x) &= x^{6k+1}, & u_{12}^k(x) &= x(1+x^{4k}), \\
u_{13}^k(x) &= x^{4k} + x^2, & u_{14}^k(x) &= x + (2k+1)x^{8k+1}, \\
u_{15}^k(x) &= (x^{4k} + x^2) \operatorname{tg}^{-1}(x^{2k-1}), & u_{16}^k(x) &= (x^{4k-2} + 1)(2kx^{4k-1} + x), \\
u_{17}^k(x) &= (x^{4k-2} + 1)(2kx^{4k-1} + x) \operatorname{tg}^{-1}(x^{2k-1}), & u_{18}^k(x) &= x^{1/k}((2k+1)x^2 + 1)^3, \\
u_{19}^k(x) &= -x^{1/k}((2k+1)x^3 + x)^2, & u_{20}^k(x) &= -x^{\frac{1}{k}+3}((2k+1)x^2 + 1)^2, \\
u_{21}^k(x) &= x^{\frac{3}{2k}+1}((2k+1)x^2 + 1)^3, & u_{22}^k(x) &= x^{\frac{1}{k}+1}((2k+1)x^2 + 1)^3, \\
u_{23}^k(x) &= (x^2 + 1)x^{\frac{3}{2k}}((2k+1)x^2 + 1)^3,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_{24}^{k,\lambda}(x) &= x^5 \lambda^3 (2k+1)^3 + x^2 (3(8k^2 + 6k + 1)\lambda^2 + 1) + \lambda x (-4k^2 \lambda^2 - 2k(\lambda^2 - 3) + 3) \\
&\quad + 1 + (2k+1)(\lambda x^3((4k^2 + 1)\lambda^2 + k(4\lambda^2 - 6) + 3) + x^4(3\lambda^2 + k(6\lambda^2 + 2))).
\end{aligned}$$

Nesta seção, vamos enunciar e provar os resultados usados para classificar essas famílias. Tal classificação pode ser observada na tabela 3.

Sistema	Famílias	\mathcal{Z}
ECT	\mathcal{F}_2^1	3
	\mathcal{F}_3^1	4
	\mathcal{F}_4^2	5
	$\mathcal{F}_5^k, k \geq 1$	7
ET com acurácia 1	$\mathcal{F}_1^k, k \geq 1$	3
	$\mathcal{F}_4^k, k > 2$	6
	$\mathcal{F}_2^k, k \geq 2$	4
	$\mathcal{F}_6^k, k \geq 2$	7
ET com acurácia $ac, 2 \leq ac \leq 4$	$\mathcal{F}_7^{1,\lambda}$	$8 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{1,\lambda}) \leq 10$
ET com acurácia $ac, 3 \leq ac \leq 8$	$\mathcal{F}_7^{k,\lambda}$	$9 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda}) \leq 14$

Tabela 3 – Sistemas de Chebyshev

Proposição 4. *Os conjuntos de funções $\mathcal{F}_2^1, \mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_4^2$, e \mathcal{F}_5^k , para $k \geq 1$ são sistemas ECT em $[a, b]$, para qualquer $0 < a < b$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3 é suficiente mostrar que os Wroskianos definidos pelos conjuntos $\mathcal{F}_2^1, \mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_4^2$ e $\mathcal{F}_5^k, k \geq 1$, não possuem zeros em $(0, \infty)$, o que implica que cada um desses conjuntos é um sistema ECT.

Segundo a Definição 4, os Wroskianos da família \mathcal{F}_2^1 são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^2 + x^4, \\ W_1(x) &= x^2(x^4 + x^2), \\ W_2(x) &= -\frac{4x^9}{x^4 + x^2}, \\ W_3(x) &= \frac{32x^9}{(x^2 + x^4)^2}, \end{aligned}$$

e note que $W_0(x) > 0, W_1(x) > 0, W_2(x) < 0$ e $W_3(x) > 0$ em $(0, \infty)$, logo estes não possuem zeros em $(0, \infty)$.

Os Wroskianos de \mathcal{F}_3^1 são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= 2x, \\ W_2(x) &= 16x^3, \\ W_3(x) &= 48x(1 - 3x^2 + 10x^4), \\ W_4(x) &= \frac{1536x^3(9 + 2x^2)}{(1 + x^2)^3}, \end{aligned}$$

e observe que $W_0(x) > 0$, $W_1(x) > 0$, $W_2(x) > 0$ e $W_4(x) > 0$ em $(0, \infty)$. Além disso, sendo $\text{Dis}(1 - 3x^2 + 10x^4) < 0$, temos que $W_3(x) > 0$ em $(0, \infty)$. Portanto, $W_i(x)$ não possui zeros em $(0, \infty)$ para $i = 0, \dots, 4$.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_4^2 são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^4, \\ W_1(x) &= 6x^{13}, \\ W_2(x) &= -48x^{17}, \\ W_3(x) &= 3072x^{16}, \\ W_4(x) &= 27648x^{13} (924x^{12} - 25x^6 + 15), \\ W_5(x) &= \frac{47775744x^{24} (2464x^{18} + 42156x^{12} + 3975x^6 + 3325)}{(x^6 + 1)^4}. \end{aligned}$$

que, observe que $W_0(x) > 0$, $W_1(x) > 0$, $W_2(x) < 0$ e $W_3(x) > 0$ em $(0, \infty)$. Além disso, sendo $\text{Dis}(924x^{12} - 25x^6 + 15) < 0$ e $\text{Dis}(2464x^{18} + 42156x^{12} + 3975x^6 + 3325) < 0$, temos que $W_4(x) > 0$ e $W_5(x) > 0$ em $(0, \infty)$. Portanto, $W_i(x)$ não possui zeros em $(0, \infty)$ para $i = 0, \dots, 5$.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_5^k são

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= 2kx^{2k-1}, \\ W_2(x) &= 16k^3x^{6k-3}, \\ W_3(x) &= 16k^3(8k^2 + 6k + 1)x^{10k-5}, \\ W_4(x) &= 768k^6(2k-1)(8k^2 + 6k + 1)x^{16k-9}, \\ W_5(x) &= -1536k^7(1-4k^2)^2(16k^2-1)x^{18k-13}, \\ W_6(x) &= -12288k^9(2k+1)^3(4k-1)(6k+1)(-8k^2+2k+1)^2x^{24k-18}, \\ W_7(x) &= -589824k^{12}(2k+1)^3(4k-1)(6k+1)(-8k^2+2k+1)^2x^{24(k-1)} \\ &\quad (48k^3 - 44k^2 + 12k - 1 + (2k+1)^2(4k+1)(6k+1)(8k+1)x^{8k}). \end{aligned}$$

Note que $W_0(x) > 0$, $W_1(x) > 0$, $W_2(x) > 0$ para $k \in \mathbb{Z}_+$ e $x \in (0, \infty)$. Uma vez que os coeficientes da variável x dos wronskianos $W_3(x)$ e $W_4(x)$ são positivos para $k \in \mathbb{Z}_+$, temos que $W_3(x) > 0$, $W_4(x) > 0$. Da mesma forma, sendo os coeficientes da variável x dos wronskianos $W_5(x)$ e $W_6(x)$ negativos para $k \in \mathbb{Z}_+$, temos que $W_5(x) < 0$, $W_6(x) < 0$. Observe que por $48k^3 - 44k^2 + 12k - 1 > 0$ para $k \in \mathbb{Z}_+$, $W_7(x)$ possui zero em $(0, \infty)$. Isso finaliza a prova da Proposição 4. \square

Proposição 5. *Os conjuntos de funções \mathcal{F}_1^k , para $k \geq 1$, \mathcal{F}_2^k , para $k \geq 2$, \mathcal{F}_4^k , para $k > 2$, e \mathcal{F}_6^2 são sistemas ET com acurácia 1 em $[a, b]$, para qualquer $0 < a < b$.*

Demonstração. Para cada conjunto \mathcal{F}_1^k , para $k \geq 1$, \mathcal{F}_4^k , $k > 2$, e \mathcal{F}_2^k , \mathcal{F}_6^k , para $k \geq 2$, mostraremos que todos seus Wronskianos não possuem zeros em $(0, \infty)$, exceto o último

que tem exatamente um zero simples em $(0, \infty)$. Então, pelo Teorema 5, teremos que cada um desses conjuntos é um sistema ET com acurácia 1.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_1^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= (4k+1)x^{4k} + 1, \\ W_2(x) &= 2kx^{2(k-1)}(-(1+6k+8k^2)x^{4k} + 2k-1). \end{aligned}$$

Note para $k \in \mathbb{Z}_+$, os Wronskianos $W_0(x)$ e $W_1(x)$ não possuem zeros em \mathbb{R} e $W_2(x)$ tem exatamente um zero positivo, que é simples.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_2^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^2 + x^{4k}, \\ W_1(x) &= (2k-1)(x^{2k+2} + x^{6k}), \\ W_2(x) &= -\frac{4(2k-1)^3 x^{8k+1}}{x^2 + x^{4k}}, \\ W_3(x) &= -\frac{16k(2k-1)^3 x^{8k-3} ((k-1)(4k-1)x^{4k-2} + 1 - 3k)}{(x^{4k-2} + 1)^2}. \end{aligned}$$

Novamente, observe que, para $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k \geq 2$, os Wronskianos $W_0(x), W_1(x), W_2(x)$ são positivos para $x \in (0, \infty)$ e $W_3(x)$ tem um único zero positivo, que é simples.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_4^k , para $k > 2$, são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^{2k}, \\ W_1(x) &= (4k-2)x^{8k-3}, \\ W_2(x) &= -8(k-1)k(2k-1)x^{12k-7}, \\ W_3(x) &= 128(k-1)k^3(2k-1)x^{14k-12}, \\ W_4(x) &= 128(k-1)k^3(2k-1)^3 x^{14k-15} P_{0,k}(x^{4k-2}), \\ W_5(x) &= \frac{8192(1-2k)^6(k-1)k^3 x^{24k-16}}{(x^{4k} + x^2)^4} P_{1,k}(x^{4k-2}), \end{aligned}$$

com

$$P_{0,k}(x) = 6k(4k-1)(6k-1)x^2 - (2k+1)^2 x + 3(2k(4k-9) + 9),$$

e

$$\begin{aligned} P_{1,k}(x) &= -4(k-1)k(2k-5)(3k-2)(4k-1)(6k-1)x^3 \\ &\quad + 4(k(k(k(4k(9k(8k+3) - 281) + 949) - 249) + 20) - 1)x^2 \\ &\quad + (3k-1)(4k(k(4k(36k-89) + 185) + 5) - 29)x \\ &\quad + (2k-3)(3k-1)(4k-3)(4k-1)(10k-1). \end{aligned}$$

Note que os Wronskianos $W_i(x) \neq 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$ não possuem zeros em $(0, \infty)$. Em seguida, devemos mostrar que $W_4(x) > 0$ em $(0, \infty)$ e $W_5(x)$ tem um zero positivo, que é simples. Para isso, calculamos o discriminante de $P_{0,k}$ e $P_{1,k}$, obtemos

$$\text{Dis}(P_{0,k}) = -13824k^5 + 36880k^4 - 29056k^3 + 7800k^2 - 640k + 1,$$

e

$$\begin{aligned} \text{Dis}(P_{1,k}) = & -16(2k-1)^6(3k-1)(576k^6 - 720k^5 + 380k^4 - 212k^3 + 183k^2 - 89k + 17) \\ & (41 - 12428k - 51458k^2 + 3664611k^3 - 32461588k^4 + 126891032k^5 - \\ & 257528192k^6 + 276914736k^7 - 143578944k^8 + 22830336k^9 + 3317760k^{10}). \end{aligned}$$

Para $k > 2$, $\text{Dis}(P_{0,k}), \text{Dis}(P_{1,k}) < 0$. Uma vez que $P_{0,k}(x)$ é um polinômio de grau 2, este não admite zeros reais. E sendo $P_{1,k}(x)$ um polinômio de grau 3 e possuir discriminante negativo, este tem no máximo um zero real, contando multiplicidade. Consequentemente, $W_4(x)$ não possui zeros em \mathbb{R} e $W_5(x)$ tem no máximo um zero positivo, que é simples se existir. Agora,

$$P_{1,k}(0) = (-3 + 2k)(-1 + 3k)(-3 + 4k)(-1 + 4k)(-1 + 10k) > 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sgn}(P_{1,k}(x)) = \text{sgn}(40k - 516k^2 + 2220k^3 - 3808k^4 + 2640k^5 - 576k^6) < 0.$$

Portanto, $W_5(x)$ tem exatamente um zero, que é simples.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_6^2 são

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= 4x^3, \\ W_2(x) &= 240x^{11}, \\ W_3(x) &= -11520x^{14}, \\ W_4(x) &= 1474560x^{12}, \\ W_5(x) &= 13271040x^8 P_{2,2}(x^6), \\ W_6(x) &= -\frac{183458856960x^{18} P_{4,2}(x^6)}{(x^6 + 1)^5}, \end{aligned}$$

com

$$P_{2,2}(x) = 15 - 175x + 12012x^2$$

e

$$P_{4,2}(x) = 8008x^4 + 460390x^3 - 993711x^2 + 29800x - 6650.$$

Nota-se que $W_i(x) \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ para $x \in (0, \infty)$. Uma vez que o $\text{Dis}(P_{2,2}), \text{Dis}(P_{4,2}) < 0$, temos que $W_5(x) > 0$ e por ser um polinômio de grau 4 e ter discriminante negativo, $P_{4,2}(x)$ tem no máximo dois zeros reais contando multiplicidade. Além disso, $P_{4,2}(0) = -6650$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} P_{4,2}(x) = \infty$. Portanto, $P_{4,2}(x)$ e, consequentemente, $W_6(x)$ tem exatamente um zero positivo, que é simples. Isso finaliza a prova da Proposição 5.

□

Proposição 6. *Os conjuntos de funções \mathcal{F}_6^k , para $k > 2$, são sistemas ET com acurácia 1 em $[a, b]$, para qualquer $0 < a < b$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}^k = [u_1^k, u_4^k, u_9^k, u_6^k, u_3^k, u_{16}^k]$ e $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k = [u_4^k, u_9^k, u_6^k, u_3^k, \alpha u_1^k + \beta u_{16}^k + u_{17}^k]$ conjuntos ordenados. Observe que

$$\text{Span}(\mathcal{F}_6^k) = \text{Span}(\mathcal{G}^k) \cup \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \text{Span}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k).$$

A demonstração será feita em duas etapas. Primeiramente, mostraremos que os Wronskianos definidos por \mathcal{F}_6^k não possuem zeros exceto o último, que tem dois zeros simples. Aplicando os Teoremas 5 e 6, temos que $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{F}_6^k) \leq 8$. Em seguida, provaremos que \mathcal{G}^k é um sistema ECT, e do Teorema 4, temos $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^k) = 5$, e que os Wronskianos definidos por $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k$ não possuem zeros, exceto o último que tem no máximo 3 zeros, contando a multiplicidade. Então, dos Teoremas 5, 6 e a Observação 2, temos que $4 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 7$. Portanto, concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_6^k) = 7$.

Os Wronskianos da família \mathcal{F}_6^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= 2kx^{2k-1}, \\ W_2(x) &= 8k(k(6k-5)+1)x^{8k-5}, \\ W_3(x) &= -64(1-2k)^2(k-1)k^2(3k-1)x^{12k-10}, \\ W_4(x) &= 2048k^4(3k-1)(2k^2-3k+1)^2x^{14k-16}, \\ W_5(x) &= 2048(1-2k)^4(k-1)^2k^4(3k-1)x^{14k-20}P_{2,k}(x^{4k-2}), \\ W_6(x) &= \frac{262144(k-1)^2k^4(2k-1)^7(3k-1)x^{24k-20}P_{4,k}(x^{4k-2})}{(x^{4k}+x^2)^5}, \end{aligned}$$

com

$$P_{2,k}(x) = 6k(4k-1)(6k-1)(8k-3)x^2 - (4k-1)(2k+1)^2x + 3(2k(4k-9)+9)$$

e

$$\begin{aligned} P_{4,k}(x) &= 4(k-1)^2k(2k-5)(3k-2)(4k-1)(6k-1)(8k-3)x^4 \\ &- 2(3k-2)(4k-1)(k(4k(k(4k(2k(78k-179)+235)-89)-59)+35)-1)x^3 \\ &+ (3k-2)(k(4k(2k(10k(k(4k(48k-61)+177)-183)+1017)-465)+201)-19)x^2 \\ &- 4(3k-1)(5k-2)(2k(k(4k(k(4k-19)+44)-75)-19)+13)x \\ &+ (2k-3)(3k-1)(4k-3)(4k-1)(5k-2)(10k-1). \end{aligned}$$

Nota-se que $W_i(x) \neq 0$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Agora, mostramos que, para $k > 2$, $W_5(x) > 0$ em $(0, \infty)$ e $W_6(x)$ tem dois zeros positivos, que são simples. Calculando o discriminante de $P_{2,k}$ e $P_{4,k}$ obtemos

$$\text{Dis}(P_{2,k}) = -(4k-1)A_k,$$

com

$$A_k = 1 + 1948k - 20744k^2 + 66464k^3 - 77296k^4 + 27584k^5,$$

e

$$\text{Dis}(P_{4,k}) = -192(2-3k)^2(1-2k)^{12}(3k-1)(4k-1)(5k-2)B_kC_k,$$

com

$$\begin{aligned}
B_k &= -1917k + 5508k^2 + 14166k^3 - 161955k^4 + 507294k^5 - 336876k^6 - 2819520k^7 \\
&\quad + 11872944k^8 - 24994208k^9 + 32211648k^{10} - 24318720k^{11} + 8294400k^{12} + 206, \\
C_k &= 1234 + 1406151k - 140801881k^2 + 1655961863k^3 + 15757275163k^4 \\
&\quad - 454467427122k^5 + 3991908595280k^6 - 18758368588312k^7 + 52157245218176k^8 \\
&\quad - 84657031448672k^9 + 65764683807488k^{10} + 13116254256768k^{11} \\
&\quad - 75206228610816k^{12} + 66368938080256k^{13} + 1454789099520k^{17}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $A_k, B_k, C_k > 0$, temos que $\text{Dis}(P_{4,k}), \text{Dis}(P_{2,k}) < 0$. Portanto, $P_{2,k}(x)$ e, conseqüentemente, $W_5(x)$, não admite zeros reais. Além disso, por ser um polinômio de grau 4 e ter discriminante negativo, $P_{4,k}(x)$ e, conseqüentemente, $W_6(x)$ tem no máximo dois zeros positivos contando multiplicidade. E ainda,

$$\begin{aligned}
P_{4,k}(0) &= (2k-3)(3k-1)(4k-3)(4k-1)(5k-2)(10k-1), \\
P_{4,k}(2) &= -6 - 3687k + 63459k^2 - 351684k^3 + 787140k^4 - 528768k^5 \\
&\quad - 478272k^6 + 738816k^7 - 221184k^8,
\end{aligned}$$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} P_{4,k}(x) = \infty$. Sendo $\text{sgn}(P_{4,k}(0)) = -\text{sgn}(P_{4,k}(2)) = 1$, segue que $P_{4,k}(x)$ e, conseqüentemente, $W_6(x)$ tem exatamente dois zeros positivos, que são simples. Portanto, tomando um intervalo tal que $W_6(x)$ tenha apenas um zero simples, temos pelo Teorema 5 que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_6^k) = 7$. Porém, se considerarmos um intervalo em que $W_6(x)$ tenha dois zeros simples, temos pelo Teorema 6 que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_6^k) \leq 8$. Logo, $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{F}_6^k) \leq 8$.

Sendo os Wronskianos de \mathcal{G}^k iguais aos seis primeiros Wronskianos de \mathcal{F}_6^k , temos que $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^k)$ é um sistema ECT e, do Teorema 4, segue que $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^k) = 5$.

Agora, calculando os Wronskianos de $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k$, obtemos

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= x^{2k}, \\
W_1(x) &= (4k-2)x^{8k-3}, \\
W_2(x) &= -8(k-1)k(2k-1)x^{12k-7}, \\
W_3(x) &= 128(k-1)k^3(2k-1)x^{14k-12}, \\
W_4(x) &= 128(2k-1)^3(k-1)k^3x^{14k-15}S_3^k(x^{4k-2})Q_{\alpha,\beta}^k(x),
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha,\beta}^k(x) &= \left(\frac{\alpha S_1^k(x) + (2k-1)x^{2k+9}S_2^k(x^{4n-2})}{(2k-1)x^4(x^{4k}+x^2)^3S_3^k(x^{4k-2})} + \text{tg}^{-1}(x^{2k-1}) + \beta \right), \\
S_1^k(x) &= 16(-1+k)k(-1+3k)x^3(x^2+x^{4k})^3, \\
S_2^k(x) &= -3(9+2k(-9+4k)) + (-71+4(37-15k)k)x \\
&\quad + (-1+2k)(61+2k(-37+92k))x^2 \\
&\quad + (-1+4k(3+k(-41+96k)))x^3 + 6k(-1+4k)(-1+6k)x^4, \\
S_3^k(x) &= 3(9+2k(-9+4k)) - (1+2k)^2x + 6k(-1+4k)(-1+6k)x^2.
\end{aligned}$$

Novamente, temos $W_i(x) \neq 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Para analisar os zeros de $W_4(x)$, vamos analisar os zeros de $Q_{\alpha,\beta}^k(x)$. A derivada de $Q_{\alpha,\beta}^k(x)$ pode ser escrita como

$$(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x) = R^k(x)S_{\alpha}^k(x),$$

com

$$R^k(x) = \frac{-16(k-1)k(3k-1)x^2q_1^k(x^{4k-2})}{(2k-1)x^8S_3^k(x^{4k-2})^2},$$

$$S_{\alpha}^k(x) = \alpha + \frac{4(1-2k)^2x^{10k+4}q_2^k(x^{4k-2})}{(k-1)k(3k-1)(x^{4k}+x^2)^4q_1^k(x^{4k-2})},$$

sendo

$$\begin{aligned} q_1^k(x) &= 6k(4k-1)(6k-1)(8k-3)x^2 - (2k+1)^2(4k-1)x + 3(2k(4k-9) + 9), \\ q_2^k(x) &= 9 - 171k + 1052k^2 - 2692k^3 + 2816k^4 - 960k^5 \\ &\quad + (-29 + 107k + 680k^2 - 3644k^3 + 4848k^4 - 1728k^5)x \\ &\quad + (4 - 80k + 996k^2 - 3796k^3 + 4496k^4 - 432k^5 - 1152k^6)x^2 \\ &\quad + (-40k + 516k^2 - 2220k^3 + 3808k^4 - 2640k^5 + 576k^6)x^3. \end{aligned}$$

Observe que, para $k > 2$, a função $q_1^k(x)$ é positiva. De fato,

$$\text{Dis}(q_1^k) = -(4k-1)(1 + 1948k - 20744k^2 + 66464k^3 - 77296k^4 + 27584k^5) < 0$$

e $q_1^k(0) > 0$. Assim, note que $R^k(x)$ não possui zeros em $(0, \infty)$. E considere

$$(S_{\alpha}^k)'(x) = \frac{8(1-2k)^2x^{10k-5}q_3(x^{4k-2})q_4^k(x^{4k-2})}{(k-1)k(3k-1)(1+x^{4k-2})^5(q_1^k(x^{4k-2}))^2},$$

com

$$\begin{aligned} q_3^k(x) &= -27 - 6k(-9 + 4k) + (1 + 4k(1 + k))x - 6k(-1 + 4k)(-1 + 6k)x^2, \\ q_4^k(x) &= (-3 + 2k)(-1 + 3k)(-3 + 4k)(-1 + 4k)(-2 + 5k)(-1 + 10k) - \\ &\quad 4(-1 + 3k)(-2 + 5k)(13 + 2k(-19 + k(-75 + 4k(44 + k(-19 + 4k))))))x \\ &\quad + (38 - 459k + 4323k^2 - 21852k^3 + 53688k^4 - 72240k^5)x^2 \\ &\quad + (81520k^6 - 89280k^7 + 46080k^8)x^2 + (4 - 162k + 1738k^2 - 4608k^3)x^3 \\ &\quad + (-17208k^4 + 114176k^5 - 226240k^6 + 192384k^7 - 59904k^8)x^3 \\ &\quad + (4(-1 + k)^2k(-5 + 2k)(-2 + 3k)(-1 + 4k)(-1 + 6k)(-3 + 8k))x^4. \end{aligned}$$

Pelo cálculo do discriminante de q_3^k e q_4^k , obtemos

$$\text{Dis}(q_3^k) = 1 - 8k(80 + k(-975 + 2k(1816 + k(-2305 + 864k))))$$

e

$$\text{Dis}(q_4^k) = -192(3k-2)^2(2k-1)^{12}(3k-1)(4k-1)(5k-2)D_kE_k,$$

com

$$D_k = 206 - 1917k + 5508k^2 + 14166k^3 - 161955k^4 + 507294k^5 - 336876k^6 \\ - 2819520k^7 + 11872944k^8 - 24994208k^9 + 32211648k^{10} - 24318720k^{11} \\ + 8294400k^{12},$$

$$E_k = 1234 + 1406151k - 140801881k^2 + 1655961863k^3 + 15757275163k^4 \\ - 454467427122k^5 + 3991908595280k^6 - 18758368588312k^7 + 52157245218176k^8 \\ - 84657031448672k^9 + 65764683807488k^{10} + 13116254256768k^{11} \\ - 75206228610816k^{12} + 66368938080256k^{13} - 30092670877696k^{14} \\ + 12225870102528k^{15} - 5928649555968k^{16} + 1454789099520k^{17}.$$

Assim, por cálculos diretos, obtemos $\text{Dis}(q_3^k), \text{Dis}(q_4^k) < 0$, para $k > 2$. Portanto, por ser um polinômio de grau 2 e ter discriminante negativo, $q_3(x)$ não admite zeros reais e $q_4^k(x)$, por ser um polinômio de grau 4 e ter discriminante negativo, tem no máximo dois zeros positivos contando multiplicidade. Isso implica que o número de zeros de $(S_\alpha^k)'(x)$ contando multiplicidade é no máximo dois. Consequentemente, $(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)$ tem no máximo três zeros. Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}((Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{sgn}((Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)) = -\alpha.$$

Para $\alpha \neq 0$, segue que $(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)$ tem no máximo dois zeros. Portanto, $Q_{\alpha,\beta}^k$ e, consequentemente, W_4 tem no máximo três zeros positivos. Assim, do Teorema 6 e da Observação 2, temos que $4 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 7$. Para $\alpha = 0$, segue que $\text{Span}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \subset \text{Span}(\mathcal{F}_4^k)$. Considerando a Proposição 5, temos que $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 6$. Isso finaliza a prova da Proposição 6. \square

Proposição 7. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{1,\lambda}) \leq 10$ em $[a, b]$, para qualquer $0 < a < b$. Além disso, para $\lambda = 2$, existe uma função em $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{1,2})$ que tem oito zeros simples em $(0, \infty)$.

Demonstração. Seja

$$f(x) = a_0 u_{18}^1(x) + a_1 u_{19}^1(x) + a_2 u_{20}^1(x) + a_3 u_{21}^1(x) + a_4 u_{22}^1(x) + a_5 u_{23}^1(x) + a_6 u_{24}^{1,\lambda}(x)$$

uma função em $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{1,\lambda})$. A quinta derivada de $f(x)$, $f^{(5)}(x)$, é escrita como uma combinação linear das funções do conjunto ordenado

$$J_0 = [1, x, x^2, x^3, (u_{21}^1)^{(5)}(x), (u_{23}^1)^{(5)}(x)].$$

Calculando os Wronskianos de J_0 , obtemos

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= 1, \\ W_2(x) &= 2, \\ W_3(x) &= 12, \\ W_4(x) &= \frac{8505(9(429(85x^4 + x^2) + 35)x^2 + 55)}{128x^{13/2}}, \\ W_5(x) &= \frac{120558375}{65536x^{15}} (409280498055x^{14} + 16979438619x^{12} + 2324256363x^{10} \\ &\quad + 589231071x^8 + 64265157x^6 + 508833x^4 + 23177x^2 + 1573). \end{aligned}$$

Note que todos os Wronskianos acima não possuem zeros em $(0, \infty)$, o que implica que J_0 é um Sistema ECT. Do Teorema 4, $f^{(5)}(x)$ tem no máximo cinco zeros e, portanto, $f(x)$ tem no máximo dez zeros. Consequentemente, $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda}) \leq 10$.

Finalmente, seja $f(x) \in \text{Span}(F_7^{1,2})$ dado por

$$f(x) = a_0 u_{18}^1(x) + a_1 u_{19}^1(x) + a_2 u_{20}^1(x) + a_3 u_{21}^1(x) + a_4 u_{22}^1(x) + a_5 u_{23}^1(x) + u_{24}^{1,2}(x),$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= -29.674872845038724, & a_1 &= -88.998921871, \\ a_2 &= 1.777150602939737, & a_3 &= -2.0194231196937788 \times 10^{-5}, \\ a_4 &= 0.5926213398946085, & a_5 &= 3.18899089714221 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

A função g , definida por $g(x) = f(x^2)$, uma função polinomial de grau dezenove no intervalo $(0, \infty)$. Por cálculos diretos mostramos que g tem oito zeros, que são simples visto que $\text{Dis}(g) \neq 0$. \square

Proposição 8. Para $k > 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda}) \leq 14$ em $[a, b]$, para qualquer $0 < a < b$. Além disso, para $\lambda = 1$, existe uma função em $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,1})$ que tem nove zeros simples em $(0, \infty)$.

Demonstração. Seja

$$f(x) = a_0 u_{18}^k(x) + a_1 u_{19}^k(x) + a_2 u_{20}^k(x) + a_3 u_{21}^k(x) + a_4 u_{22}^k(x) + a_5 u_{23}^k(x) + a_6 u_{24}^{k,\lambda}(x)$$

uma função em $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda})$. Uma vez que $(u_{24}^{k,\lambda})^{(8)} = 0$ para cada $k > 1$, $f^{(8)}(x)$ é escrito como uma combinação linear das funções do conjunto ordenado

$$\mathcal{H}^k = [(u_{18}^k)^{(8)}, (u_{19}^k)^{(8)}, (u_{20}^k)^{(8)}, (u_{21}^k)^{(8)}, (u_{22}^k)^{(8)}, (u_{23}^k)^{(8)}].$$

Calculando os Wronskianos de \mathcal{H}^k , obtemos

$$\begin{aligned} W_0(x) &= -\frac{(k-1)x^{\frac{1}{k}-8}}{k^8} U_0^k(x), \\ W_1(x) &= \frac{2(k-1)^2(k+1)(2k-1)(2k+1)(3k-1)x^{\frac{2}{k}-15}}{k^{16}} U_1^k(x), \\ W_2(x) &= \frac{6(k-1)^2(k+1)^2(2k-1)(2k+1)^2(9k^2-1)x^{\frac{3}{k}-22}}{k^{24}} U_2^k(x), \\ W_3(x) &= \frac{81(2k-1)(2k+1)^3(k^2-1)^2(18k^3+27k^2-2k-3)x^{\frac{9}{2k}-32}}{1024k^{35}} U_3^k(x), \\ W_4(x) &= -\frac{81(1-2k)^2(2k^3+k^2-2k-1)^3(18k^3+27k^2-2k-3)x^{\frac{11}{2k}-43}}{1024k^{44}} U_4^k(x), \\ W_5(x) &= -\frac{729(1-2k)^2(2k^3+k^2-2k-1)^3(18k^3+27k^2-2k-3)x^{7(\frac{1}{k}-8)}}{4194304k^{56}} U_5^k(x), \end{aligned}$$

com U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 funções polinomiais de grau 6, 8, 12, 18, 22 e 30, respectivamente. Além disso, temos que $U_i(x)$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, não possuem zeros em $(0, \infty)$ e $U_5(x)$

tem exatamente um zero positivo, que é simples. Do Teorema 5, segue que $\mathcal{Z}(\mathcal{H}^k) = 6$. Consequentemente, concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda}) \leq 14$.

No que segue, devemos provar que existe uma função em $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,1})$ que tem nove zeros simples em $(0, \infty)$. Portanto, seja $f(x; a) \in \text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,1})$ dado por

$$f(x; a) = (1 + 2k)(a_0 - 4(1 + k))u_{19}^k(x) + (-3a_3 + a_1(1 + 2k))(1 + 2k)u_{20}^k(x) \\ - 4(1 + k)u_{18}^k(x) + a_2u_{21}^k(x) + (-2a_3 + a_1(1 + 2k))u_{22}^k(x) + a_4u_{23}^k(x) + u_{24}^{k,1}(x),$$

com $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$.

Denote $g_k(x; a) := f(x^{2k}; a)$. Primeiro, provaremos que, para cada inteiro $k > 1$, existe $\delta_k > 0$, tal que $g_k(x; a)$ tem no mínimo quatro zeros simples em $(0, 2)$, para cada $a \in B(0, \delta_k)$. Note que $g_k(x; 0)$ tem no mínimo quatro zeros em $(0, 2)$ com multiplicidade ímpar, para cada $k > 1$. De fato,

$$g_k(0; 0) > 0, \quad g_k(1/2; 0) < 0, \quad g_k(1; 0) = 0, \quad g_k'(1; 0) < 0, \quad \text{and} \quad g_k(2; 0) > 0.$$

Isso garante que $g_k(x; 0)$ tem no mínimo quatro zeros em $(0, 2)$. Para $2 \leq k \leq 30$, é relativamente fácil ver que $\text{Dis}(g_k(x; 0)) \neq 0$, que implica que os quatros zeros acima são simples. Agora, para $k > 30$, temos que

$$g_k(x; 0) = H_1(x^{2k}) + H_2(x^{2k}),$$

com

$$H_1(x) = (8k^3 + 6k + 4)x^3 + 2(12k^2 + 9k + 2)x^2 + (-4k^2 + 4k + 3)x + 1 \\ + (16k^2 + 14k + 3)x^4 + (2k + 1)^3x^5, \\ H_2(x) = -8(k^2 + 3k + 1)x^{\frac{1}{k}+2} - 4(k + 1)(2k + 1)^2x^{\frac{1}{k}+4} - 4(k + 1)x^{1/k}.$$

Note que $H_1(x) > 0$ para $x > 0$. O Wronskiano de $[H_1(x), H_2(x)]$ pode ser escrito como

$$W_1(x) = \frac{4(k + 1)x^{\frac{1}{k}-1}}{k} P_{5,k}(x), \text{ com}$$

$$P_{5,k}(x) = -1 - (4(k - 2)k^2 + k + 3)x + 2(k(24k^2 + 2k - 9) - 3)x^2 \\ + 10(k - 1)(2k + 1)(2k^2 + k + 1)x^3 - 2(2k + 1)(k(12k + 19) + 6)x^4 \\ + 2(k - 1)(2k + 1)^2(5k(2k + 1) + 6)x^5 \\ - 2(2k + 1)^2(k(2k(12k + 7) + 15) + 5)x^6 \\ + 2(2k + 1)^3((2k - 5)k^2 + 3)x^7 + (k - 1)(2k + 1)^5x^9 - (2k + 1)^3(8k + 3)x^8.$$

Uma vez que $\text{Dis}\left(P_{5,k}^{(3)}\right) < 0$ e $P_{5,k}^{(3)}(x)$ tem grau seis, concluímos que $P_{5,k}^{(3)}(x)$ tem no máximo quatro zeros, contando multiplicidade. Além disso, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{5,k}^{(3)}(x) > 0$, $P_{5,k}^{(3)}(-1/2) < 0$, $P_{5,k}^{(3)}(0) > 0$, e $P_{5,k}^{(3)}(1/2) < 0$. Deste modo, $P_{5,k}^{(3)}(x)$ tem dois zeros em $(-\infty, 0)$ e dois zeros em $(0, \infty)$. Portanto, $P_{5,k}^{(2)}(x)$ tem no máximo três zeros em $(0, \infty)$, contando multiplicidade. Sendo

$$P_{5,k}^{(2)}(0) > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} P_{5,k}^{(2)}(x) > 0,$$

segue que $P_{5,k}^{(2)}(x)$ tem no máximo dois zeros positivos, contando multiplicidade. Logo, $P_{5,k}(x)$ tem no máximo quatro zeros positivos. Além disso,

$$P_{5,k}(0) < 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} P_{5,k}(x) > 0.$$

Assim, $P_{5,k}(x)$ tem no máximo três zeros, contando multiplicidade, em $(0, \infty)$. Do Teorema 6 e a Observação 2, temos que $g_k(x; 0)$ tem no máximo quatro zeros simples em $(0, \infty)$. Consequentemente, $g_k(x; 0)$ tem no mínimo quatro zeros simples em $(0, 2)$.

Assim, provamos que, para cada $k > 1$, $g_k(x; 0)$ tem no mínimo quatro zeros simples em $(0, 2)$. Desde que $g_k(x; a)$ depende continuamente de a , para cada $k > 1$ existe $\delta_k > 0$ tal que $g_k(x; a)$ tem no mínimo quatro zeros simples em $(0, 2)$, para cada $a \in B(0, \delta_k)$.

Agora, provamos que, para cada inteiro $k > 1$, existe $a_k \in B(0, \delta_k)$ tal que $g_k(x; a_k)$ tem cinco zeros simples adicionais em $(2, \infty)$. Para isso, tomando $x = y^{-1}$ em $(0, \infty)$, vemos que

$$g_k(y^{-1}; a) = \frac{1}{y^{3+16k}} h_k(y; a),$$

com $h_k(y; a)$, em torno de $y = 0$, temos

$$\begin{aligned} h_k(y; a) = & a_4 + a_2 y^{2k} + a_3 y^{2k+1} + \frac{2a_4(2+k)}{1+2k} y^{4k} - a_0 y^{4k+1} + \frac{3a_2}{2k+1} y^{6k} + a_1 y^{6k+1} \\ & + y^{6k+3} + O(y^{6k+4}). \end{aligned}$$

Portanto, para cada inteiro $k > 1$, podemos escolher $a \in B(0, \delta_k)$ a fim de que $h_k(y; a)$ tenha cinco zeros simples positivos em uma vizinhança de $y = 0$. Consequentemente, $g_k(x; a)$ tem cinco zeros simples positivos adicionais em uma vizinhança do infinito. Portanto, encontramos uma função em $\mathcal{F}_7^{k,1}$ que tem no mínimo nove zeros simples. \square

4 Sistemas diferenciais planares lineares por partes

Motivado pela segunda parte do 16° Problema de Hilbert, existe um interesse crescente em estabelecer um limite superior uniforme para o número máximo de ciclos limites que sistemas lineares planares por partes possam ter. Na literatura, pode-se encontrar muitos artigos abordando esse problema assumindo que a curva de descontinuidade é uma reta (ver, por exemplo, [1, 4, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 23, 24, 26, 27], e suas referências). Nesse caso, não é conhecido exemplos com mais de três ciclos limites. Em [3, 30], é mostrado que tal limite superior está estritamente relacionado com a não linearidade da curva de descontinuidade. Nessa direção, sistemas lineares por partes separados em duas zonas pela curva $y = x^n$, com n um inteiro positivo, têm sido abordados (ver, por exemplo, [2, 20, 28]).

Dado um inteiro positivo n , denote por $H(n)$ o número máximo de ciclos limites que sistemas lineares por partes planares separados em duas zonas pela curva $y = x^n$ podem ter. Aqui, estamos interessados em determinar um limite inferior para $H(n)$. Para isso, consideramos campos de vetores lineares por partes dados da seguinte forma

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i P_i^+(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i Q_i^+(x, y) \end{pmatrix}, & y - x^n > 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i P_i^-(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i Q_i^-(x, y) \end{pmatrix}, & y - x^n < 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo n um inteiro positivo, e P_i^\pm e Q_i^\pm funções afins dadas por

$$\begin{aligned} P_i^+(x, y) &= a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y, \\ P_i^-(x, y) &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \alpha_{2i}y, \\ Q_i^+(x, y) &= b_{0i} + b_{1i}x + b_{2i}y, \\ Q_i^-(x, y) &= \beta_{0i} + \beta_{1i}x + \beta_{2i}y, \end{aligned}$$

com $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. A curva de descontinuidade do sistema (4.1) é dada por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^n\}$.

Realizando uma mudança de coordenadas no sistema (4.1) para coordenadas polares é possível escrevê-lo na forma do sistema (1.1) nas condições do Teorema 1, podendo

assim calcular as Funções de Melnikov. Aqui, denotamos por $m_\ell(n)$ o número máximo de zeros simples que a primeira Função de Melnikov não nula, M_ℓ , pode ter para qualquer escolha dos parâmetros $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$.

Os valores $m_\ell(n)$, para $\ell \in \{1, \dots, k\}$, fornecem limites inferiores para $H(n)$, de fato $H(n) \geq m_\ell(n)$ para cada $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Em [4] foi realizada uma análise de ordem superior do sistema (4.1) assumindo uma reta como a curva de descontinuidade, isto é $n = 1$. Foi mostrado que $m_1(1) = m_2(1) = 1$, $m_3(1) = 2$, e $m_\ell(1) = 3$ para $\ell \in \{4, \dots, 7\}$. O caso de curvas de descontinuidade não lineares foi inicialmente abordado em [20] por meio da *Teoria da Média*. Em particular, foi mostrado que $m_1(2) = 3$. Em [2] foi mostrado que $m_1(3) = 3$ e $m_2(3) = 7$. Os valores conhecidos na literatura para $m_\ell(n)$, para $\ell \in \{1, \dots, 6\}$, são resumidos na Tabela 4. Em particular, os trabalhos anteriores forneceram $H(1) \geq 3$, $H(2) \geq 2$, e $H(3) \geq 7$.

Resultados conhecidos para $m_\ell(n)$

		Ordem ℓ			
		1	2	3	$4 \leq \ell \leq 6$
Grau n	1	1	1	2	3
	2	2	–	–	–
	3	3	7	–	–
	$n \geq 3$	–	–	–	–

Tabela 4 – Valores conhecidos na literatura da pesquisa. Em particular, $H(1) \geq 3$, $H(2) \geq 2$, e $H(3) \geq 7$.

O resultado principal desse capítulo completa a Tabela 4 fornecendo os valores $m_\ell(n)$, para $\ell \in \{1, \dots, 6\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Em particular, obtemos que $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 8$, $H(n) \geq 7$, para $n \geq 4$ par, e $H(n) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar, que melhora todos os resultados anteriores para $n \geq 2$. A contribuição do Teorema 7 é resumida na Tabela 5.

Teorema 7. *Considere o sistema diferencial linear por partes planar (4.1). Para $n \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \{1, \dots, 6\}$, temos os seguintes valores para $m_\ell(n)$:*

- (i) $m_1(1) = 1$, $m_1(2) = 3$, $m_1(n) = 3$ para $n \geq 3$ ímpar, e $m_1(n) = 4$ para $n \geq 4$ par;
- (ii) $m_2(1) = 1$, $m_2(2) = 4$, $m_2(n) = 7$ para $n \geq 3$;
- (iii) $m_3(1) = 2$, $m_3(2) = 4$, $m_3(n) = 7$ para $n \geq 3$;
- (iv) para $\ell \in \{4, 5\}$, $m_\ell(1) = 3$, $m_\ell(2) = 4$, $m_\ell(n) = 7$ para $n \geq 3$;
- (v) $m_6(1) = 3$, $m_6(2) = 4$, $8 \leq m_6(3) \leq 10$, $m_6(n) = 7$ para $n \geq 4$ par, e $9 \leq m_6(n) \leq 14$ para $n \geq 5$ ímpar.

Consequentemente, $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 8$, $H(n) \geq 7$, para $n \geq 4$ par, e $H(n) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar.

Nossa contribuição

		Ordem ℓ					
		1	2	3	4	5	6
Grau n	1	1	1	2	3	3	3
	2	3	4	4	4	4	4
	3	3	7	7	7	7	$8 \leq m_6 \leq 10$
	$n \geq 4$ par	4	7	7	7	7	7
	$n \geq 5$ ímpar	3	7	7	7	7	$9 \leq m_6 \leq 14$

Tabela 5 – Nosso resultado principal completa a Tabela 4. Em particular, $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 8$, $H(n) \geq 7$, para $n \geq 4$ par, e $H(n) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar

Demonstração. A fim de provar o Teorema 7, devemos primeiro calcular as Funções de Melnikov até ordem seis para o sistema (4.1). Para isso, o Teorema 1 fornece as Funções de Melnikov de ordem superiores para uma classe de sistemas diferenciais com variedade de descontinuidade não linear, que generaliza para qualquer ordem os resultados obtidos em [2]. Alguns resultados recentes sobre Sistemas Estendido de Chebyshev com acurácia positiva [31] são também aplicadas a fim concluir a demonstração do Teorema 7.

A fim de aplicar o Teorema 1, primeiro reescrevemos o sistema (4.1) em coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$, da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^T = (0, -1)^T + \sum_{i=1}^6 \varepsilon^i G_i(\theta, r), \tag{4.2}$$

com

$$G_i(r) = \begin{cases} (A_i^+(r, \theta), B_i^+(r, \theta))^T, & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) > 0, \\ (A_i^-(r, \theta), B_i^-(r, \theta))^T, & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) < 0, \end{cases}$$

sendo

$$\begin{aligned} A_i^+ &= \cos(\theta)(a_{0i} + r(a_{2i} + b_{1i})\sin(\theta)) + a_{1i}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(b_{0i} + b_{2i}r\sin(\theta)), \\ B_i^+ &= r^{-1}[-\sin(\theta)(a_{0i} + a_{2i}r\sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(b_{2i} - a_{1i})\sin(\theta) + b_{0i}) + b_{1i}r \cos^2(\theta)], \\ A_i^- &= \cos(\theta)(\alpha_{0i} + r(\alpha_{2i} + \beta_{1i})\sin(\theta)) + \alpha_{1i}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(\beta_{0i} + \beta_{2i}r\sin(\theta)), \\ B_i^- &= r^{-1}[-\sin(\theta)(\alpha_{0i} + \alpha_{2i}r\sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(\beta_{2i} - \alpha_{1i})\sin(\theta) + \beta_{0i}) + \beta_{1i}r \cos^2(\theta)]. \end{aligned}$$

Assim, tomando θ como nova variável independente, o sistema (4.2) é escrito como

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^6 \varepsilon^i A_i^+(r, \theta)}{-1 + \sum_{i=1}^6 \varepsilon^i B_i^+(r, \theta)}, & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) > 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^6 \varepsilon^i A_i^-(r, \theta)}{-1 + \sum_{i=1}^6 \varepsilon^i B_i^-(r, \theta)}, & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Portanto, para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (4.3) e, conseqüentemente, o sistema (4.2) torna-se equivalente a

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 \varepsilon^i F_i^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^7), & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) > 0, \\ \sum_{i=1}^6 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^7), & \text{se } \sin(\theta) - r^{n-1} \cos^n(\theta) < 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

com

$$\begin{aligned} F_1^+(r, \theta) &= -\cos(\theta)(a_{01} + r(a_{21} + b_{11})\sin(\theta)) - a_{11}r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(b_{01} + b_{21}r\sin(\theta)), \\ F_1^-(r, \theta) &= -\cos(\theta)(\alpha_{01} + r(\alpha_{21} + \beta_{11})\sin(\theta)) - \alpha_{11}r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(\beta_{01} + \beta_{21}r\sin(\theta)). \end{aligned}$$

Seja $\theta_1(r) = \arctan(r^{n-1})$ a solução da equação $\sin\theta - r \cos^{n-1}\theta = 0$ em $[0, \pi/2]$. Assim, para $r > 0$, $\sin\theta - r \cos^{n-1}\theta < 0$ se, e somente se, $0 < \theta < \theta_1(r)$ ou $\pi - (-1)^n \theta_1(r) < \theta < 2\pi$; e $\sin\theta - r \cos^{n-1}\theta > 0$ se, e somente se, $\theta_1(r) < \theta < \pi - (-1)^n \theta_1(r)$.

4.1 Estudo da Função de Melnikov de ordem 1, $M_1(r)$

Agora, vamos desenvolver a prova da afirmação (i) do Teorema 7. De acordo com (1.7), a função de Melnikov de primeira ordem do sistema (4.4) é dado por

$$M_1(r) = \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_1(r)}^{\pi - (-1)^n \theta_1(r)} F_1^+(\theta, r) d\theta + \int_{\pi - (-1)^n \theta_1(r)}^{2\pi} F_1^-(\theta, r) d\theta. \quad (4.5)$$

A fim de calcular a expressão exata da função de Melnikov (4.5) dividimos em dois casos, dependendo de n .

4.1.1 $n = 2k + 1$

Ao calcularmos a função de Melnikov de ordem 1, obtemos

$$M_1(r) = \frac{1}{2}(v_0 \cos(\theta_1(r)) + rv_1 + v_2 \sin(\theta_1(r))),$$

com

$$\begin{aligned}v_0 &= 4\beta_{01} - 4b_{01}, \\v_1 &= -\pi(a_{11} + \alpha_{11} + b_{21} + \beta_{21}), \\v_2 &= 4(a_{01} - \alpha_{01}).\end{aligned}$$

Note que o vetor de parâmetros $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ depende dos parâmetros originais de uma forma sobrejetiva. Tomando $x = r \cos(\theta_1(r))$, segue que

$$x^2 + x^{4k+2} = r^2, \text{ e } \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^{2k+1}}{r}.$$

Consequentemente, $M_1(r) = \frac{q_1^k(x)}{2\sqrt{x^{4k} + 1}}$, com

$$q_1^k(x) = v_1 u_{12}^k(x) + v_2 u_4^k(x) + v_0 u_1^k(x),$$

que pertence a \mathcal{F}_1^k , dada em (3.2). Assim, o número máximo de zeros positivos da função polinomial $q_1^k(x)$ coincide com $m_1(2k + 1)$.

Note que $q_1^0(x)$ é um polinômio de grau um, logo o número máximo de zeros simples positivos é 1. Para $k \geq 1$, segue da Proposição 5 que \mathcal{F}_1^k é um sistema ET com acurácia 1 em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Portanto, o número máximo de zeros simples positivos de $q_1^k(x)$ é 3 e que existe $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ para que $q_1^k(x)$ tem exatamente 3 zeros simples positivos. Logo, $m_1(1) = 1$ e $m_1(2k + 1) = 3$ para $k \geq 1$.

4.1.2 $n = 2k$

Temos, para esse caso, que

$$M_1(r) = rv_0 + rv_1 \sin(\theta_1(r)) \cos(\theta_1(r)) + rv_2 \theta_1(r) + v_3 \cos(\theta_1(r)),$$

com

$$\begin{aligned}v_0 &= -\frac{\pi(a_{11} + \alpha_{11} + b_{21} + \beta_{21})}{2}, \\v_1 &= a_{11} - \alpha_{11} - b_{21} + \beta_{21}, \\v_2 &= a_{11} - \alpha_{11} + b_{21} - \beta_{21}, \\v_3 &= 2(\beta_{01} - b_{01}).\end{aligned}$$

Note que o vetor de parâmetros $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4$ depende dos parâmetros originais de forma sobrejetiva. De novo, tomando $x = r \cos(\theta_1(r))$, segue que $M_1(r) = \frac{q_2^k(x)}{\sqrt{x^2 + x^{4n}}}$, com

$$q_2^k(x) = v_0 u_{13}^k(x) + v_1 u_5^k(x) + v_2 u_{15}^k(x) + v_3 u_2^k(x),$$

que pertence a $\text{Span}(\mathcal{F}_2^k)$, sendo \mathcal{F}_2^k dada em (3.2). Da Proposição 4, \mathcal{F}_2^1 é um sistema ECT em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Assim, o número máximo de zeros simples positivos de $q_2^1(x)$ é 3 e existe $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4$, tal que $q_2^1(x)$ tem exatamente 3 zeros simples positivos. Portanto, $m_1(2) = 3$. E para $k \geq 2$, da Proposição 5, \mathcal{F}_2^k é um sistema ET com acurácia 1 em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Assim, o número máximo de zeros simples positivos de $q_2^k(x)$ é 4 e existe $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4$, tal que $q_2^k(x)$ tem exatamente 4 zeros simples positivos. Portanto, $m_1(2k) = 4$ para $k \geq 2$.

4.2 Estudo da Função de Melnikov de ordem ℓ , $\ell \in \{2, \dots, 6\}$, $M_\ell(r)$

Agora, vamos desenvolver a prova das afirmações (ii)-(v) do Teorema 7 para $\ell = 2, \dots, 6$. Do Teorema 1, os zeros simples da Função de Melnikov de ordem ℓ , M_ℓ , fornece soluções periódicas do (4.4) sempre que $M_i = 0$, para $i = 1, \dots, \ell - 1$. Em nosso problema, pode-se ver que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$, existe $\ell - 1$ conjuntos minimais de condições para os parâmetros da perturbação, $K_{\ell,1}^n, \dots, K_{\ell,\ell-1}^n$, tal que $M_i(x) = 0$ para $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. A fim de obter $m_\ell(n)$, temos que estudar M_ℓ para cada conjunto de condições. Ao assumir as condições $K_{\ell,i}^n$, podemos ver que $M_\ell = M_{\ell,i}^n$, com

$$M_{\ell,i}^n(x) = \frac{p_{\ell,i}^n(x)}{q_{\ell,i}^n(x)},$$

sendo $q_{\ell,i}^n(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ e

$n = 2$	$p_{\ell,i}^n(x) \in \text{Span}(\mathcal{F}_3^1)$	$\ell = 2, \dots, 6$ e $i = 1, \dots, \ell - 1$
$n = 2k$	$p_{\ell,i}^n(x) \in \text{Span}(\mathcal{F}_6^k)$	$\ell = 2, \dots, 6$ e $i = 1, \dots, \ell - 1$
$n = 2k + 1$	$p_{\ell,i}^n(x) \in \text{Span}(\mathcal{F}_5^k)$	$\ell = 2, \dots, 5$ e $i = 1, \dots, \ell - 1$
	$p_{6,i}^n(x) \in \text{Span}(\mathcal{F}_5^k)$	$i = 1, \dots, 4$
	$p_{6,5}^n(x) \in \text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda})$	

Tabela 6 – Estrutura das funções de Melnikov de ordem superior.

4.2.1 $n = 2$ e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$

Assumindo as condições dos parâmetros da perturbação, tal que $M_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$, a função de Melnikov de ordem ℓ é dado por

$$M_\ell(x) = \frac{1}{(1 + 2x^2)^2} P_\ell(x),$$

com

$$P_\ell(x) = C_0^\ell u_1^1(x) + C_1^\ell u_4^1(x) + C_2^\ell u_9^1(x) + C_3^\ell u_{16}^1(x) + C_4^\ell u_{17}^1(x),$$

que pertence a $\text{Span}(\mathcal{F}_3^1)$ (ver Tabela 6). Além disso, podemos ver que o vetor de parâmetros $(C_0^\ell, \dots, C_4^\ell) \in \mathbb{R}^5$ depende dos coeficientes originais da perturbação de forma sobrejetiva. Da Proposição 4, \mathcal{F}_3^1 é um sistema ECT em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Assim, concluímos que o número máximo de zeros simples positivos de $P_\ell(x)$ é 4 e existe $(C_0^\ell, \dots, C_4^\ell) \in \mathbb{R}^5$ tal que $P_\ell(x)$ tem exatamente 4 zeros positivos simples. Portanto, $m_\ell(2) = 4$ para $\ell = 2, \dots, 6$.

4.2.2 $n = 2k$ e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$

Seja $n = 2k$, $k > 1$, e $\ell \in \{2, \dots, 6\}$. Assumindo as condições dos parâmetros da perturbação tal que $M_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$, a Função de Melnikov de ordem ℓ é

dada por

$$M_\ell(x) = \frac{1}{(1 + 2kx^{4k-2})^2} Q_\ell^k(x),$$

com

$$Q_\ell(x) = C_0^\ell u_1^k(x) + C_1^\ell u_4^k(x) + C_2^\ell u_9^k(x) + C_3^\ell u_6^k(x) + C_4^\ell u_3^k(x) + C_5^\ell u_{16}^k(x) + C_6^\ell u_{17}^k(x),$$

que pertence a $\text{Span}(\mathcal{F}_6^k)$ (ver Tabela 6). Além disso, podemos ver que o vetor de parâmetros $(C_0^\ell, \dots, C_6^\ell) \in \mathbb{R}^7$ depende dos coeficientes originais da perturbação de forma sobrejetiva. Da Proposição 5 e 6, \mathcal{F}_6^k é um sistema ET com acurácia 1 em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Logo, concluímos que o número máximo de zeros simples de $Q_\ell^k(x)$ é 7 e existe $(C_0^\ell, \dots, C_6^\ell) \in \mathbb{R}^7$, tal que $Q_\ell^k(x)$ tem exatamente 7 zeros positivos simples. Portanto, $m_\ell(2k) = 7$ para $k > 1$ e $\ell = 2, \dots, 6$.

4.2.3 $n = 2k + 1$ e $\ell \in \{2, \dots, 5\}$

Assumindo as condições dos parâmetros da perturbação tal que $M_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$, a Função de Melnikov de ordem ℓ é dada por

$$M_\ell(x) = \frac{1}{(1 + (1 + 2k)x^{4k})^2} R_\ell^k(x),$$

com

$$R_\ell^k(x) = C_0^\ell u_1^k(x) + C_1^\ell u_4^k(x) + C_2^\ell u_7^k(x) + C_3^\ell u_8^k(x) + C_4^\ell u_{10}^k(x) + C_5^\ell u_5^k(x) + C_6^\ell u_{11}^k(x) + C_7^\ell u_{14}^k(x),$$

que pertence a $\text{Span}(\mathcal{F}_5^k)$ (ver Tabela 6). Além disso, podemos ver que o vetor de parâmetros $(C_0^\ell, \dots, C_7^\ell) \in \mathbb{R}^8$ depende dos coeficientes originais da perturbação de forma sobrejetiva. Da Proposição 4, \mathcal{F}_5^k é um sistema ECT em $[a, b]$ para qualquer $0 < a < b$. Assim, concluímos que o número máximo de zeros simples positivos do $R_\ell^k(x)$ é 7 e existe $(C_0^\ell, \dots, C_7^\ell) \in \mathbb{R}^8$, tal que $R_\ell^k(x)$ tem exatamente 7 zeros. Portanto, $m_\ell(2k + 1) = 7$ para $k > 0$ e $\ell = 1, \dots, 5$.

4.2.4 $M_6(r)$, para $n = 2k + 1$

Assumindo as condições dos parâmetros da perturbação tal que $M_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, 5\}$, a Função de Melnikov de ordem 6 tem duas formas possíveis (ver Tabela 6). A primeira, tem o numerador um elemento do $\text{Span}(\mathcal{F}_5^k)$, que, da Proposição 4, tem no máximo 7 zeros simples positivos. O segundo é dado por

$$M_6(x) = \frac{L^k(x^{2k})}{x^2(1 + (1 + 2k)x^{4k})^2},$$

com

$$L^k(x) = C_0 u_{18}^k(x) + C_1 u_{19}^k(x) + C_2 u_{20}^k(x) + C_3 u_{21}^k(x) + C_4 u_{22}^k(x) + C_5 u_{23}^k(x) + C_6 u_{24}^{k,\lambda}(x),$$

que pertence a $\text{Span}(\mathcal{F}_7^{k,\lambda})$ (ver Tabela 6). Além disso, podemos ver que o vetor de parâmetros $(C_0^\ell, \dots, C_6^\ell) \in \mathbb{R}^7$ depende dos coeficientes da perturbação de forma sobrejetiva. Para $k = 1$, a Proposição 7 fornece que $L^1(x)$ tem no máximo 10 zeros simples positivos e existe $(C_0^\ell, \dots, C_6^\ell) \in \mathbb{R}^7$ tal que $L^1(x)$ tem no mínimo 8 zeros simples positivos. Para $k > 1$, a Proposição 8 fornece que $L^k(x)$ tem no máximo 14 zeros simples positivos e existe $(C_0^\ell, \dots, C_6^\ell) \in \mathbb{R}^7$ tal que $L^k(x)$ tem no mínimo 9 zeros simples positivos. Portanto, $8 \leq m_6(3) \leq 10$ e, para $k > 1$, $9 \leq m_6(2k + 1) \leq 14$.

Consequentemente, concluímos a prova do Teorema 7. □

Referências

- [1] Joan C Artés, Jaume Llibre, Joao C Medrado, and Marco A Teixeira. Piecewise linear differential systems with two real saddles. *Mathematics and Computers in Simulation*, 95:13–22, 2014. Citado na página 56.
- [2] Jéfferson L.R. Bastos, Claudio A. Buzzi, Jaume Llibre, and Douglas D. Novaes. Melnikov analysis in nonsmooth differential systems with nonlinear switching manifold. *Journal of Differential Equations*, 267(6):3748 – 3767, 2019. Citado 9 vezes nas páginas 10, 11, 15, 16, 30, 32, 56, 57 e 58.
- [3] Denis De Carvalho Braga and Luis Fernando Mello. More than three limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(04):1450056, 2014. Citado na página 56.
- [4] Claudio Buzzi, Claudio Pessoa, and Joan Torregrosa. Piecewise linear perturbations of a linear center. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9):3915–3936, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- [5] C. Li C. Christopher. *Limit Cycles of Differential Equations, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. Citado na página 42.
- [6] Murilo R. Cândido, Jaume Llibre, and Douglas D. Novaes. Persistence of periodic solutions for higher order perturbed differential systems via Lyapunov-Schmidt reduction. *Nonlinearity*, 30(9):3560–3586, 2017. Citado na página 10.
- [7] Kamila da S. Andrade, Oscar A. R. Cespedes, and Dayane R. Cruz e Douglas D. Novaes. Higher order Melnikov analysis for planar piecewise linear vector fields with nonlinear switching curve. *Journal of Differential Equations*, 287:1–36, 2021. Citado na página 10.
- [8] Denis de Carvalho Braga and Luis Fernando Mello. Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane. *Nonlinear Dynamics*, 73(3):1283–1288, 2013. Citado na página 56.
- [9] Aleksei Fedorovich Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, volume 18. of Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. Translated from the Russian, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 17.

-
- [10] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Francisco Torres. Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(1):181–211, 2012. Citado na página 56.
- [11] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Francisco Torres. The discontinuous matching of two planar linear foci can have three nested crossing limit cycles. *Publicacions matemàtiques*, pages 221–253, 2014. Citado na página 56.
- [12] Fotios Giannakopoulos and Karin Pliete. Planar systems of piecewise linear differential equations with a line of discontinuity. *Nonlinearity*, 14(6):1611, 2001. Citado na página 56.
- [13] Maoan Han and Weinian Zhang. On hopf bifurcation in non-smooth planar systems. *Journal of Differential Equations*, 248(9):2399–2416, 2010. Citado na página 56.
- [14] Song-Mei Huan and Xiao-Song Yang. Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle–saddle dynamics. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 92:82–95, 2013. Citado na página 56.
- [15] Song-Mei Huan and Xiao-Song Yang. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node–node types. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 411(1):340–353, 2014. Citado na página 56.
- [16] Jackson Itikawa, Jaume Llibre, and Douglas D. Novaes. A new result on averaging theory for a class of discontinuous planar differential systems with applications. *Rev. Mat. Iberoam.*, 33(4):1247–1265, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 30.
- [17] R. A. Zalik J. M. Carnicer, J. M. Peña. Strictly totally positive systems. *Journal of Approximation Theory*, 92:411–441, 1998. Citado na página 42.
- [18] S Karlin and WJ Studden. *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*. Interscience, New York, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- [19] Liping Li. Three crossing limit cycles in planar piecewise linear systems with saddle-focus type. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2014(70):1–14, 2014. Citado na página 56.
- [20] Jaume Llibre, Ana C. Mereu, and Douglas D. Novaes. Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems. *Journal of Differential Equations*, 258(11):4007–4032, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 30, 32, 56 e 57.
- [21] Jaume Llibre, Douglas D. Novaes, and Camila A. B. Rodrigues. Averaging theory at any order for computing limit cycles of discontinuous piecewise differential systems with many zones. *Phys. D*, 353/354:1–10, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 30.

- [22] Jaume Llibre, Douglas D. Novaes, and Marco A. Teixeira. Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree. *Nonlinearity*, 27(3):563–583, 2014. Citado na página 10.
- [23] Jaume Llibre, Douglas D. Novaes, and Marco A. Teixeira. Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(11):1550144, 2015. Citado na página 56.
- [24] Jaume Llibre, Douglas D. Novaes, and Marco A. Teixeira. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems. *Nonlinear Dynam.*, 82(3):1159–1175, 2015. Citado na página 56.
- [25] Jaume Llibre, Douglas D. Novaes, and Marco A. Teixeira. On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems. *Bull. Sci. Math.*, 139(3):229–244, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 30.
- [26] Jaume Llibre and Enrique Ponce. Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, 19(3):325–335, 2012. Citado na página 56.
- [27] Jaume Llibre, Marco Antonio Teixeira, and Joan Torregrosa. Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(04):1350066, 2013. Citado na página 56.
- [28] Jaume Llibre and Xiang Zhang. Limit cycles for discontinuous planar piecewise linear differential systems separated by an algebraic curve. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(02):1950017, 2019. Citado na página 56.
- [29] P. Marděsić. Chebyshev systems and the versal unfolding of the cusps of order n , travaux en cours [works in progress]. *Hermann*, 57, 1998. Citado na página 42.
- [30] Douglas D. Novaes and Enrique Ponce. A simple solution to the braga–mello conjecture. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(01):1550009, 2015. Citado na página 56.
- [31] Douglas D. Novaes and Joan Torregrosa. On extended chebyshev systems with positive accuracy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 448(1):171 – 186, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 58.
- [32] R. Roussarie. Bifurcation of planar vector fields and Hilbert’s sixteenth problem. *Progress in Mathematics*, 164, 1998. Citado na página 42.

-
- [33] Jan A Sanders, Ferdinand Verhulst, and James A Murdock. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, volume 59. Springer, 2007. Citado na página 10.
- [34] S. Yakovenko. Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16th problem. *On Finiteness in Differential Equations and Diophantine Geometry*, 24:41–109, 2005. Citado na página 42.