



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

JOYRLES FERNANDES DE MORAES

# Redatumação Utilizando Retropropagação dos Campos de Onda

CAMPINAS  
2021

**JOYRLES FERNANDES DE MORAES**

# **Redatumação Utilizando Retropropagação dos Campos de Onda**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo, na área de Reservatórios e Gestão.

Orientador: Prof. Dr. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO  
ALUNO Joyrles Fernandes de Moraes E ORIENTADO  
PELO PROF. DR. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher.

**CAMPINAS  
2021**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M791r Moraes, Joyrles Fernandes de, 1996-  
Redatumação utilizando retropropagação dos campos de onda / Joyrles  
Fernandes de Moraes. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade  
de Engenharia Mecânica.

1. Ondas sísmicas. 2. Interferometria. 3. Geofísica. 4. Método sísmico de  
reflexão. 5. Ondas sísmicas - Modelos matemáticos. I. Schleicher, Joerg  
Dietrich Wilhelm, 1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Backpropagation - based redatuming

**Palavras-chave em inglês:**

Seismic waves

Interferometry

Geophysics

Seismic reflection method

Seismic waves - Mathematical models

**Área de concentração:** Reservatórios e Gestão

**Titulação:** Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

**Banca examinadora:**

Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher [Orientador]

Ricardo Caetano Azevedo Biloti

Jessé Carvalho Costa

**Data de defesa:** 28-05-2021

**Programa de Pós-Graduação:** Ciências e Engenharia de Petróleo

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-1829-605X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8200920787384220>

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## **Redatumação Utilizando Retropropagação dos Campos de Onda**

Autor: Joyrles Fernandes de Moraes

Orientador: Prof. Dr. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

**Prof. Dr. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher, Presidente**  
DMA/IMECC/UNICAMP

**Prof. Dr. Ricardo Caetano Azevedo Biloti**  
DMA/IMECC/UNICAMP

**Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa**  
IGEOP/UFPA

A Ata da defesa com as respectivas assinatura dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 28 de maio de 2021.

*Dedico este trabalho a todos os meus professores, desde os que acreditaram em meu potencial no campo, aos que fui encontrando na minha caminhada. Vocês transformam sonhos em realidade e mudam vidas, mesmo com todas as dificuldades impostas pelo estado.*

*”Minha vida é andar por esse país, pra  
ver se um dia descanso feliz, guardando  
as recordações, das terras onde passei, an-  
dando pelos sertões e dos amigos que lá  
deixei.”*

*Luiz Gonzaga*

## Agradecimentos

Ao meu orientador Joerg Schleicher, que sempre teve atenção, paciência e prazer em ajudar. Obrigado por abrir as portas e por me inspirar a ser um dia um grande profissional.

Ao professor Ricardo Biloti por toda base, cobrança, discussões e ensinamentos que foram primordiais para eu acreditar que seria capaz.

À professora Maria Amélia, que além de excelente educadora, sempre me incentivou e cobrou desde a minha entrada.

Ao professor Lúcio Tunes dos Santos pelas aulas perfeitas e pelo elevado grau de exigência.

Ao professor Jessé Carvalho pela contribuição na elaboração dos códigos usados nesse trabalho e pelas primorosas sugestões no exame de qualificação.

Ao meu ex-orientador Igo Paulino, da Universidade Federal de Campina Grande, por me ensinar o que é ciência e acreditar que um dia posso ser um grande cientista.

Aos meus colegas do Laboratório de Geofísica Computacional (LGC) que sempre me deram suporte, em especial ao Bruno, Peter, João, Joan, Kaique e Carlos.

Às amizades feitas em Campinas - SP, em especial a Barbara, Camilo, Gelton, Nara e Vinicius.

Aos amigos de Campina Grande - PB e Conceição - PB, que sempre estarão presente em meus passos.

À minha família, em especial a Pai, Mãe, Emidia, Janielison e Edjanile, que sempre fizeram da minha educação uma prioridade, sempre dando força, mesmo em momentos de extrema dificuldade.

À Unicamp, IMECC e DEP pela estrutura e excelência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da PETROBRÁS, através do PRH-PB 230.

## Resumo

A redatumação consiste em mover fontes e receptores para um novo nível de profundidade. Esse objetivo pode ser alcançado por diferentes metodologias, como as que usam as técnicas interferométricas, ou por continuação dos campos de onda. Nesse trabalho, propomos usar a redatumação com base na retropropagação dos dados sísmicos. Para aplicar essa técnica, é necessário o conhecimento do modelo de velocidade da superfície de aquisição ao datum. Para validar a teoria, realizamos testes em dados sintéticos de diferentes complexidades e comparamos os resultados com testes usando a redatumação por correlação. Foi possível observar que a técnica de redatumação por retropropagação apresentou resultados bastante similar aos obtidos usando redatumação por correlação, tanto no posicionamento dos eventos, quanto na adição de artefatos ao resultado final. Também observamos que as técnicas apresentam a mesma sensibilidade quando se usa um modelo de velocidade inexato. Apesar das semelhanças, a técnica baseada na continuação dos campos de onda apresentou um tempo computacional muito menor, quando comparado a técnica interferométrica.

**Palavras Chave:** Redatumação; Retropropagação; Convolução.

## Abstract

Redatuming is used to relocate sources and receivers to a new depth level. This aim can be achieved by different techniques, for example the interferometric method or the wavefield continuation. In this work, we propose to use redatuming by backpropagating the seismic records. To apply this methodology, we need to know the medium above the redatuming level. To validate the theory discussed, we used 2D synthetic examples with different complexities in the overburden, and we compare the results to those of correlation-based redatuming. It was possible to note that the backpropagation-based redatuming presented similarities to the correlation-based one, regarding the events positioning and in the addition of artifacts. We also note that both techniques presented almost the same sensibility to an inexact velocity model. Despite the similarities, the method based on the wavefield continuation required significantly less computation time when we compare it to the interferometric technique.

**Key Word: Redatuming; Backpropagation; Convolution.**

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
2.1	Equação da onda acústica 3D	15
2.2	Teorema de Gauss	16
2.3	Teorema da reciprocidade da convolução	17
2.4	Decomposição das superfícies	20
2.5	Decomposição dos campos de onda em sentido único	21
2.6	Teorema da reciprocidade da convolução unidirecional	22
2.7	Teorema da reciprocidade fonte - receptor	23
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>25</b>
3.1	Análise dos campos de onda	25
3.2	Aproximação para as funções de Green próximas à fonte	27
3.3	Redatumação por retropropagação	29
3.4	Redatumação por correlação	31
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES E RESULTADOS</b>	<b>32</b>
4.1	Datum acima de refletor plano horizontal	32
4.2	Datum abaixo de heterogeneidades	39
4.3	Modelo SEG/EAGE Overthrust.	43
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>50</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>53</b>
A	Redatumação por correlação	53
B	Solução numérica da equação da onda 2D	58

B.1	Condições iniciais e de fronteira . . . . .	59
B.2	Análise de estabilidade e dispersão . . . . .	60

# 1 INTRODUÇÃO

Com o petróleo ainda sendo a principal matéria-prima para diversos segmentos da indústria, sua exploração é uma etapa crucial. Para que seja realizada de maneira eficaz e eficiente faz-se necessário a existência de técnicas para conhecer as estruturas de subsuperfície. A técnica mais empregada para essa finalidade é a sísmica de reflexão. Nesse método, fontes posicionadas na superfície produzem um campo de onda em subsuperfície, que sofre espalhamento ao encontrar variações de propriedades físicas, retornando à superfície, onde é registrado nos receptores. Na Figura 1 é mostrado um esquema simplificado de um levantamento sísmico de reflexão.

O principal objetivo da sísmica de reflexão é a construção de imagens de subsuperfície. Para este fim, empregam-se desde procedimentos mais simples como o empilhamento, a métodos mais robustos como a migração. Para que os eventos que se deseja observar estejam posicionados de maneira correta, existe a necessidade da construção de um modelo de velocidade prévio, principalmente quando se trata de técnicas mais avançadas.

A maioria dos métodos empregados para este fim presumem uma geometria de aquisição regular em uma superfície plana. Assim, a topografia da superfície de aquisição (Schneider et al., 1995; Yilmaz, 2001), espaçamento irregular de fontes ou receptores (Bevc, 2001) ou a presença de heterogeneidades nas camadas mais rasas do modelo (por exemplo, zonas de in-

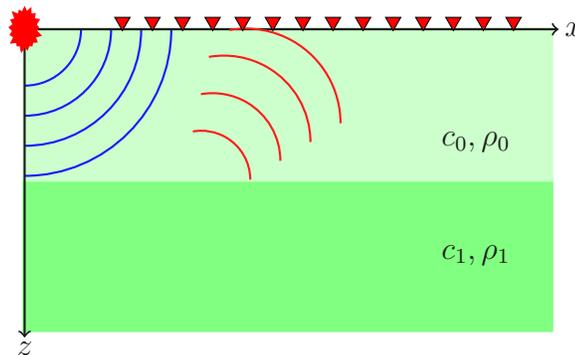


Figura 1: Esquema simplificado do experimento sísmico. O elemento no canto superior esquerdo representa a fonte e os triângulos representam os receptores. Os semicírculos em azul representam frentes de ondas incidentes, enquanto os semicírculos em vermelho representam ondas refletidas pela interface separando unidades geológicas com diferentes velocidades ( $c$ ) e densidades ( $\rho$ ).

temperismo) podem levar a dificuldades na construção de modelos com alvos mais distantes e abaixo de estruturas geológicas mais complexas. Quando as informações nas primeiras camadas forem possíveis de serem obtidas, os métodos de redatumação tornam-se viáveis, minimizando esses problemas. Redatumar consiste em mover virtualmente as fontes e receptores a partir de um determinado nível de profundidade para um novo nível, chamado datum. Feito isso, é possível focar o processamento dos dados sísmicos mais próximo ao alvo em uma região específica de subsuperfície (Wapenaar et al., 1992).

A primeira técnica de redatumação foi apresentada por Berryhill (1979) baseado na continuação dos campos de onda. Nessa técnica a equação da onda era resolvida por meio da integral de Kirchhoff em um meio 2D (Berryhill, 1984). Apesar das formulações integrais representarem bem os campos de onda usados na redatumação, a necessidade de um modelo de velocidade detalhado se tornou a principal limitação do método.

Nos anos seguintes surgiram as conhecidas técnicas interferométricas (Schuster, 2009). Nesse procedimento, o novo datum é criado a partir da recuperação das funções de Green por correlação, convolução ou deconvolução dos dados dados sísmicos (Lu et al., 2008; Ploegstra, 2015; Ravasi et al., 2015; Schuster e Zhou, 2006; van der Neut et al., 2011). Com isso, o método que era antes guiado a partir do modelo de velocidade, passou a ser guiado pelos próprios dados sísmicos. As técnicas interferométricas têm como base os princípios da reciprocidade (Hoop, 1992; Wapenaar e Grimbergen, 1996). As técnicas representariam soluções exatas caso os dados pudessem ser obtidos em uma superfície fechada, o que na prática não ocorre.

Cada técnica interferométrica traz consigo vantagens e limitações. As técnicas baseadas na correlação são consideradas as mais clássicas de redatumação. Contudo, as técnicas supõem algumas hipóteses que não são obtidas na prática, como por exemplo, perdas intrínsecas devido à perturbação do meio não são consideradas. Além disso, eventos não físicos podem ser incorporados aos resultados (Snieder et al., 2006b). Fokkema e Van de Berg (1993) afirmam que as técnicas baseadas na convolução representam uma importante ferramenta para remoção de múltiplas, assim como, as técnicas que usam inversão do campo espalhado, como é o caso da redatumação por deconvolução. No entanto, as técnicas aumentam consideravelmente o custo computacional pela necessidade de usar métodos de inversão, principalmente

quando esse processo é realizado em três dimensões (Snieder et al., 2006a; van der Neut et al., 2011).

Com o avanço do poder computacional, a equação da onda passou a ser solucionada numericamente. Uma das técnicas para realizar esse procedimento é a utilização dos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos, que fazem uso de aproximações de Taylor para aproximar as derivadas parciais que estão presentes na equação da onda por diferenças do campo de onda a ser propagado. Com essas metodologias, os campos de onda são continuados numericamente utilizando modelos de velocidade. O método das diferenças finitas faz com que o campo seja recuperado de forma completa, incluindo reflexões primárias, múltiplas e difrações. No entanto, a utilização do método implica em um alto custo computacional. Uma implementação do esquema de diferenças finitas a equação da onda reversa no tempo, usando os dados sísmicos como condições de contorno, permite recuperar o campo de onda em toda malha, e assim, redatumar os dados para um novo nível de profundidade (Bording e Lines, 1997).

O presente trabalho mostra os resultados obtidos com a técnica de redatumação utilizando retropropagação dos campos de onda e compara-os com resultados obtidos pela redatumação por correlação. Na primeira parte do segundo capítulo, apresentamos a equação da onda acústica 3D no domínio do tempo e da frequência e, em seguida, mostramos como obter o teorema da reciprocidade da convolução e o teorema da reciprocidade fonte-receptor para o caso 3D. Ainda no Capítulo 2 mostramos como obtemos o campo de onda unidirecional a partir do teorema da reciprocidade da convolução. Estes teoremas são a base para justificar a técnica de redatumação usando a retropropagação. No Capítulo 3 entramos em detalhes na técnica de redatumação por retropropagação e discutimos de forma breve sobre a redatumação por correlação, na qual abordamos como mudar o nível de profundidade onde ocorreu a aquisição. No Capítulo 4 apresentamos exemplos numéricos sintéticos para validar a teoria discutida no escopo dessa dissertação e analisar diferentes aplicações das técnicas de redatumação. Um resumo da teoria da redatumação por correlação cruzada, usada para fins de comparação dos resultados numéricos, é apresentado no Apêndice A.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo resumimos a dedução do teorema da reciprocidade da convolução. Esse teorema permite relacionar dois estados acústicos independentes em um mesmo domínio. Essa relação pode ser observada em termos dos produtos escalares de vetores que representam a excitação da fonte e o campo nos receptores, ou por meio da interação de quantidade dos campos nos receptores em diferentes estados (Knopoff e Gangi, 1959). O teorema da reciprocidade da convolução é a equação base para implementação do método da redatumação por retropropagação. Para isso, partimos da equação da onda acústica 3D, que descreve o deslocamento de partículas em meios sem a presença de cisalhamento. Também dissertamos de forma breve sobre o teorema de Gauss, ferramenta utilizada em diferentes etapas desse trabalho.

### 2.1 Equação da onda acústica 3D

Denotando a variável temporal por  $t$  e a variável espacial como sendo  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , a equação diferencial parcial que determina a propagação de ondas acústicas em um meio 3D com velocidade de propagação  $c(\mathbf{x})$  e densidade  $\rho(\mathbf{x})$  é dada por (Bleistein et al., 2001)

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{x}, t) = -F(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

onde  $P(\mathbf{x}, t)$  é o campo de onda escalar a ser descrito,  $F(\mathbf{x}, t)$  é a função que descreve o termo fonte e o operador  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ . Para determinadas situações, é preferível manipular a equação de Helmholtz, que é obtida a partir da transformação da equação da onda para o domínio da frequência. Usamos a seguinte convenção para a transformada de Fourier

$$\hat{P}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (2)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3)$$

com  $i$  sendo o número imaginário e  $\omega$  a frequência angular.

Aplicando a transformada de Fourier na equação (1) obtemos a equação de Helmholtz dada por

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) = -\hat{F}(\mathbf{x}, \omega). \quad (4)$$

Quando o termo fonte  $F(\mathbf{x}, t)$  é uma fonte pontual no espaço e no tempo, ou seja,  $F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^S)\delta(t)$ , a solução da equação da onda é a função de Green (Bleistein et al., 2001). Dessa forma, a equação de Helmholtz se torna

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^S) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^S) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^S), \quad (5)$$

onde  $\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^S)$  é a função de Green avaliada em  $\mathbf{x}$  com fonte em  $\mathbf{x}^S$ . Aqui,  $\delta(\mathbf{x})$  representa a distribuição Delta de Dirac. Para que a causalidade seja satisfeita,  $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}^S) = 0$  para  $t < 0$ , ou seja, supõe-se que não existe propagação de ondas até o instante em que o meio é excitado. Consideramos o espaço como infinito em todas as direções. Sendo assim, as condições de fronteira são tais que os campos de onda no infinito decaíam de tal maneira que não possam contribuir para campos medidos em pontos  $x$  finitos. Para campos causais, essas são as conhecidas condições de Sommerfeld (Bleistein et al., 2001).

## 2.2 Teorema de Gauss

Uma importante relação no tópico de redatumação, principalmente na redatumação interferométrica, é o Teorema de Gauss. Inicialmente considera-se um volume arbitrário  $V$  no  $\mathbb{R}^3$ , limitado por uma superfície orientável  $S$ . Se existe um vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  exterior a  $S$ , como mostrado na Figura 2, e um campo vetorial  $\Phi$  contínuo, que possui derivadas parciais de primeira ordem também contínuas em um domínio que contém  $V$ , podemos dizer que (Morse e Feshbach, 1953)

$$\oint_S \Phi \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V (\nabla \cdot \Phi) dV. \quad (6)$$

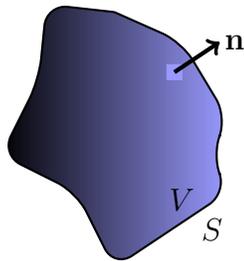


Figura 2: Volume  $V$  delimitado pela fronteira  $S$  com vetor normal  $\mathbf{n}$  externo à superfície.

### 2.3 Teorema da reciprocidade da convolução

Nesta seção demonstramos como relacionar campos de onda a partir do teorema da reciprocidade da convolução em dois estados acústicos distintos. Esse teorema é de importância significativa para sismica, principalmente no que tange à recuperação das funções de Green, tópico muito relevante na interferometria sísmica (Wapenaar e Fokkema, 2006).

A dedução a seguir tem como base a tese de doutorado de Barrera (2017). Inicialmente consideramos dois estados A e B para a equação de Helmholtz e assumimos que os dois estados possuem, dentro de um domínio  $V$  de interesse, as mesmas propriedades,  $\rho(\mathbf{x})$  e  $c(\mathbf{x})$ . Assumindo também a existência de fontes posicionadas em  $\mathbf{x}^A$  e  $\mathbf{x}^B$ , como mostrado na Figura 3, podemos reescrever a equação de Helmholtz para cada estado como

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{P}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) = -\hat{F}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A), \quad (7)$$

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{P}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = -\hat{F}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B). \quad (8)$$

Daqui a diante utilizamos uma notação simplificada onde  $\hat{P}^A$  e  $\hat{P}^B$  denotam os campos de onda que se propagam no estado A e B, respectivamente. Vamos escrever também que as fontes que atuam em  $\mathbf{x}^A$  e  $\mathbf{x}^B$  são denotadas por  $\hat{F}^A$  e  $\hat{F}^B$ , respectivamente. Multiplicando a equação (7) por  $\hat{P}^B$  e a equação (8) por  $\hat{P}^A$ , obtemos

$$\hat{P}^B \rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^A \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{P}^B \hat{P}^A = -\hat{P}^B \hat{F}^A, \quad (9)$$

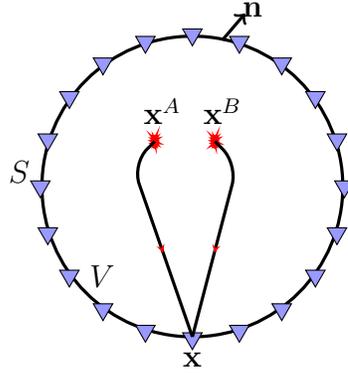


Figura 3: Volume  $V$  delimitado pela fronteira  $S$  com vetor normal  $\mathbf{n}$  externo à superfície.  $\mathbf{x}^A$  e  $\mathbf{x}^B$  representam as posições das fontes para os estados A e B, respectivamente.  $\mathbf{x}$  representa as coordenadas onde o campo de onda é observado.

$$\hat{P}^A \rho(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^B \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{P}^A \hat{P}^B = -\hat{P}^A \hat{F}^B. \quad (10)$$

Subtraindo a (10) de (9) ficamos com

$$\hat{P}^B \rho(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^A \right] - \hat{P}^A \rho(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^B \right] = -\hat{P}^B \hat{F}^A + \hat{P}^A \hat{F}^B. \quad (11)$$

Somando e subtraindo o termo  $\nabla \hat{P}^A \cdot \nabla \hat{P}^B$  e colocando  $\rho(\mathbf{x})$  no lado esquerdo da equação (11) em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{x}) \left[ \hat{P}^B \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^A \right) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^A \cdot \nabla \hat{P}^B \right] - \\ & \rho(\mathbf{x}) \left[ \hat{P}^A \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^B \right) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{P}^B \cdot \nabla \hat{P}^A \right] = \hat{P}^A \hat{F}^B - \hat{P}^B \hat{F}^A. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando que  $\nabla \cdot (f\Phi) = \nabla f \cdot \Phi + f \nabla \cdot \Phi$ , onde  $f$  é um campo escalar e  $\Phi$  um campo vetorial, podemos simplificar a equação (12) e reescrevê-la como

$$\rho(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \right] = \hat{P}^A \hat{F}^B - \hat{P}^B \hat{F}^A. \quad (13)$$

Integrando ambos os lados da equação (13) sobre o volume arbitrário  $V$ , sendo esse pertencente ao  $\mathbb{R}^3$ , limitado por uma superfície  $S$ , com um vetor normal  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  apontando para fora da superfície, e aplicando o teorema de Gauss (ver seção 2.2) ficamos

com

$$\oiint_S \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^A \hat{F}^B - \hat{P}^B \hat{F}^A) dV. \quad (14)$$

Vale ressaltar que a igualdade imposta aos parâmetros do meio deve ser respeitada apenas dentro do volume de integração  $V$ . Isso implica que os meios considerados nos dois estados A e B podem ser distintos fora do domínio de integração, possibilidade da qual a redatuação desenvolvida neste trabalho faz uso.

Se assumirmos que  $\hat{P}^A$  e  $\hat{P}^B$  na equação (14) satisfazem as condições de radiação de Sommerfeld, a unicidade da solução da equação de Helmholtz é garantida (Bleistein, 1984). As condições são

$$\begin{cases} r\hat{P} \text{ ser limitado,} \\ r \left( \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} - \frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \hat{P} \right) \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty, \text{ sendo } r = |\mathbf{x}|. \end{cases} \quad (15)$$

Notamos imediatamente que a integral de volume do lado direito da equação (14) é nula se todas as fontes estiverem fora do volume de integração, pois neste caso, dentro de  $V$ , temos  $\hat{F}^A = \hat{F}^B = 0$ . O mesmo resultado é válido se todas as fontes estiverem dentro de  $V$ . Neste caso, o domínio de integração da integral de volume pode ser estendida até o  $\mathbb{R}^3$  completo sem alterar o seu valor, pois fora de  $V$  temos  $\hat{F}^A = \hat{F}^B = 0$ . Estendido o volume até infinito, observamos que a sua superfície ficará infinitamente distante de qualquer fonte, o que implica pelas condições de Sommerfeld, que o campo nela esteja desaparecendo, fazendo com que a integral de superfície do lado direito da equação (14) seja nula. Como esta deformação do volume de integração não altera o valor da integral de volume, podemos concluir que, para qualquer superfície fechada  $S$ ,

$$\oiint_S \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (16)$$

contanto que todas as fontes estejam dentro do volume  $V$  limitado por  $S$  ou fora dele. A equação 16 é conhecida como o teorema da reciprocidade da convolução, uma vez que a multiplicação no domínio da frequência é equivalente a uma convolução no domínio do tempo.

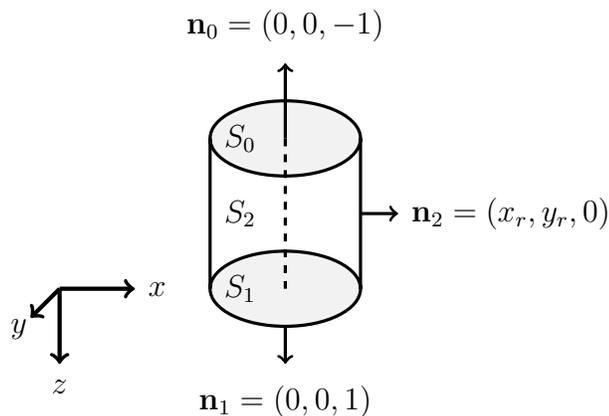


Figura 4: Esquema representando a divisão da superfície fechada  $S$  em três superfícies  $S_0$ ,  $S_1$  e  $S_2$ , com seus respectivos vetores normais.

## 2.4 Decomposição das superfícies

Nosso objetivo é encontrar uma expressão que descreva o campo acústico em sub-superfície em termos do campo na superfície de aquisição. Para fazer uso da integral (16) vamos considerar a geometria da Figura 4. Nessa situação, a superfície fechada  $S$  consiste de três partes, sendo elas a superfície de aquisição  $S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = z_0\}$ , uma superfície inferior  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = z_1\}$  e uma cilíndrica  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = r^2, z_0 < z < z_1\}$  simétrica a  $z$ , com  $r$  sendo o raio do cilindro. Como assumimos que as superfícies  $S_0$  e  $S_1$  são planas, elas possuem vetores normais unitários  $\mathbf{n}_0 = (0, 0, -1)$  e  $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ , respectivamente. A superfície  $S_2$  tem vetor normal unitário  $\mathbf{n}_2 = (x_r, y_r, 0)$ , com  $y_r = \sqrt{1 - x_r^2}$ . Além disso, assumimos que o campo acústico produzido por fontes posicionados dentro do volume de integração tem sido registrado na superfície de aquisição  $S_0$ . Com essa configuração, podemos escrever

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n}_0 dS + \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0. \quad (17)$$

Nessa situação a integral em  $S_2$  vai a zero quando o raio da casca cilíndrica vai ao infinito. Isso acontece, pois assumimos que os campos  $\hat{P}^A$  e  $\hat{P}^B$  satisfazem as condições de

radiação de Sommerfeld. Dessa maneira, a equação (17) pode ser simplificada para

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n}_0 dS = - \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^B \nabla \hat{P}^A - \hat{P}^A \nabla \hat{P}^B) \cdot \mathbf{n}_1 dS. \quad (18)$$

Quando o raio do cilindro na Figura 4 vai para infinito, as superfícies  $S_0$  e  $S_1$  devem ser interpretados como sendo dois planos horizontais inteiros.

## 2.5 Decomposição dos campos de onda em sentido único

Em termos práticos, os levantamentos sísmicos são realizados em sua grande maioria com fontes apenas em superfície. Isso implica que o meio de interesse será iluminado por apenas um lado. Mehta et al. (2007) demonstrou que a decomposição dos campos de onda em suas componentes ascendente e descendente pode melhorar a qualidade dos dados gerados virtualmente. Isso ocorre, pois esse procedimento diminui os artefatos produzidos pela abertura limitada.

Podemos decompor um campo de onda completo em dois campos de sentido único de acordo com Wapenaar e Berkhout (1989)

$$\hat{P}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{P}_+(\mathbf{x}, \omega) + \hat{P}_-(\mathbf{x}, \omega) \quad (19)$$

onde o subscrito + se refere ao campo descendente e – ao campo ascendente.

Com essa expressão é possível escrever o teorema da reciprocidade da convolução em sentido único, que é a equação base usada para implementação do método de redatumação interferométrica por retropropagação.

## 2.6 Teorema da reciprocidade da convolução unidirecional

Para escrever do teorema da reciprocidade da convolução em sentido único, vamos substituir a equação (19) na expressão (18), então obtemos

$$\begin{aligned} & \iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left[ (\hat{P}_+^B + \hat{P}_-^B) \nabla(\hat{P}_+^A + \hat{P}_-^A) - (\hat{P}_+^A + \hat{P}_-^A) \nabla(\hat{P}_+^B + \hat{P}_-^B) \right] \cdot \mathbf{n}_0 dS = \\ & - \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left[ (\hat{P}_+^B + \hat{P}_-^B) \nabla(\hat{P}_+^A + \hat{P}_-^A) - (\hat{P}_+^A + \hat{P}_-^A) \nabla(\hat{P}_+^B + \hat{P}_-^B) \right] \cdot \mathbf{n}_1 dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Assumindo que exista um campo de velocidades que varia de forma suave ao redor da posição  $\mathbf{x}$ , local onde o campo de onda é avaliado, podemos escrever os campos localmente através de uma aproximação assintótica na forma (Bleistein, 1984)

$$\hat{P}_\pm \approx A_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \exp[-i\omega T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)], \quad (21)$$

onde  $A_\pm$  representa a amplitude, determinada em grande parte pelo espalhamento geométrico, e  $T_\pm$  é a função tempo de trânsito que satisfaz  $\|\nabla T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)\|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}$ .

O gradiente da equação (21) pode ser escrito como

$$\nabla \hat{P}_\pm = \nabla A_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \exp[-i\omega T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)] - i\omega \nabla T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) A_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \exp[-i\omega T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)]. \quad (22)$$

Quando a expressão acima é avaliada para altas frequências,  $\nabla A_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s) \exp[\mp i\omega T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)]$  pode ser negligenciado, uma vez que o termo com  $i\omega$  será bem maior. Isso faz com as variações de amplitude não sejam consideradas no decorrer da dedução. Esta aproximação é justificada em situações físicas nas quais as variações do campo de onda sejam causadas predominantemente pelas variações de fase. Com isso o gradiente pode ser aproximado por

$$\nabla \hat{P}_\pm \approx -i\omega \hat{P}_\pm \nabla T_\pm(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s), \quad (23)$$

onde o sinal do gradiente dos tempos de trânsito depende da direção de propagação dos campos individuais. Dessa forma, nos pontos estacionários das integrais na equação (20), onde as direções dos gradientes dos tempos de trânsito se alinham, temos  $\nabla T_- = -\nabla T_+$ .

Com essas aproximações podemos substituir os campos e seus gradientes na equação (20) pelas aproximações de alta frequência (equações (21) e (23)). Uma vez que as principais contribuições das integrais osciladoras da equação (20) provêm dos seus pontos estacionários, podemos concluir que os campos  $\hat{P}_+^B \nabla \hat{P}_-^A$  e  $-\hat{P}_+^A \nabla \hat{P}_+^B$  contribuem da mesma maneira na equação (20), enquanto  $-\hat{P}_+^B \nabla \hat{P}_+^A$  e  $\hat{P}_+^A \nabla \hat{P}_+^B$  se cancelam, o que resulta em

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}_+^B \nabla \hat{P}_-^A + \hat{P}_-^B \nabla \hat{P}_+^A) \cdot \mathbf{n}_0 dS \approx - \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}_+^B \nabla \hat{P}_-^A + \hat{P}_-^B \nabla \hat{P}_+^A) \cdot \mathbf{n}_1 dS. \quad (24)$$

Considerando que as superfícies  $S_0$  e  $S_1$  possuem vetores normais à superfície em sentidos opostos, como expressados na Figura 4, podemos reescrever a equação (24) na forma

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}_-^B \partial_z \hat{P}_+^A - \hat{P}_-^A \partial_z \hat{P}_+^B) dS \approx \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}_+^B \partial_z \hat{P}_-^A + \hat{P}_-^B \partial_z \hat{P}_+^A) dS. \quad (25)$$

A equação (25) representa o teorema da reciprocidade da convolução em sentido único. Em casos onde existam variações na topografia das superfícies  $S_0$  ou  $S_1$ , as derivadas verticais devem ser substituídas pelas respectivas derivadas normais à superfície, orientadas na direção positiva de  $z$ .

## 2.7 Teorema da reciprocidade fonte - receptor

Outra importante conclusão pode ser obtida da equação (14). Como a integral de superfície (lado esquerdo da equação (14)) é nula para qualquer superfície fechada que limita  $V$ , desde que todas as fontes estejam contidas em  $V$ , podemos dizer que

$$\iiint_V \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\hat{P}^A \hat{F}^B - \hat{P}^B \hat{F}^A) dV = 0. \quad (26)$$

Considerando que fontes pontuais existam dentro do volume  $V$  posicionados em  $\mathbf{x}^A$  e  $\mathbf{x}^B$ , ou seja,  $\hat{F}^A = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^A)$  e  $\hat{F}^B = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^B)$ , as soluções da equação de Helmholtz para esses casos serão  $\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)$  e  $\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ , respectivamente. Substituindo as funções

de Green na equação (26) ficamos com

$$\iiint_V \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left( \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^B) - \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^A) \right) dV = 0. \quad (27)$$

Aplicando a propriedade de filtragem da distribuição  $\delta(\mathbf{x})$  obtemos

$$\frac{\hat{G}(\mathbf{x}^B, \omega; \mathbf{x}^A)}{\rho(\mathbf{x}^B)} = \frac{\hat{G}(\mathbf{x}^A, \omega; \mathbf{x}^B)}{\rho(\mathbf{x}^A)}. \quad (28)$$

No caso simplificado em que as densidades nos pontos  $\mathbf{x}^A$  e  $\mathbf{x}^B$  são iguais obtemos a seguinte identidade

$$\hat{G}(\mathbf{x}^B, \omega; \mathbf{x}^A) = \hat{G}(\mathbf{x}^A, \omega; \mathbf{x}^B). \quad (29)$$

Esse resultado, conhecido como o Reciprocidade Fonte - Receptor, afirma que os registros da função de Green em  $\mathbf{x}^B$  produzida por uma fonte localizada em  $\mathbf{x}^A$  serão iguais aos registros em  $\mathbf{x}^A$  da função de Green gerada por uma fonte posicionada em  $\mathbf{x}^B$ .

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo, nós deduzimos a equação básica da redatumação por retropropagação baseado na simplificação e representação dos campos de onda representados no teorema da reciprocidade da convolução em sentido único (ver equação (25)). Também dissertamos de forma breve sobre a redatumação por correlação.

#### 3.1 Análise dos campos de onda

Nesta seção, nós mostramos como se deve proceder para determinar, a partir dos campos de onda registrado em um levantamento sísmico feito em superfície, o campo de onda que teria sido registrado se o levantamento sísmico tivesse sido feito em uma nova superfície, localizado em um novo nível de profundidade, chamado datum.

Para iniciar nossa análise, consideramos dois estados de acordo com van der Neut et al. (2015). Em cada um desses estados os campos de onda na equação (25) são avaliados em dois níveis de profundidade, chamados aqui de  $S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = z_0\}$  e  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = z_1\}$ , que representam a superfície de aquisição e o novo datum, respectivamente. Os campos foram decompostos em suas constituintes ascendente e descendente, representados pelo subscrito  $-$  e  $+$ , respectivamente. A equação (25) é válida quando os parâmetros de ambos os estados são iguais e quando todas as fontes estão posicionadas entre as duas superfícies de integração. Essas propriedades podem diferir tanto acima de  $S_0$  quanto abaixo de  $S_1$ .

No estado A, consideramos que todas as heterogeneidades do meio estão confinados ao espaço limitado pelas superfícies  $S_0$  e  $S_1$ . Acima e abaixo delas, consideramos meios homogêneos onde não ocorrem reflexões. Esse meio do estado A chamamos de “meio truncado”. No estado B temos as mesmas heterogeneidades entre as superfícies e acima de  $S_0$  um meio homogêneo livre de reflexões como no estado A. No entanto, abaixo da superfície  $S_1$  temos um meio espalhador. Esse meio B representa a situação real de um levantamento sísmico, enquanto o meio truncado representa um estado de referência. Em outras palavras, para o estado A supomos que temos conhecimento parcial da distribuição real dos parâmetros

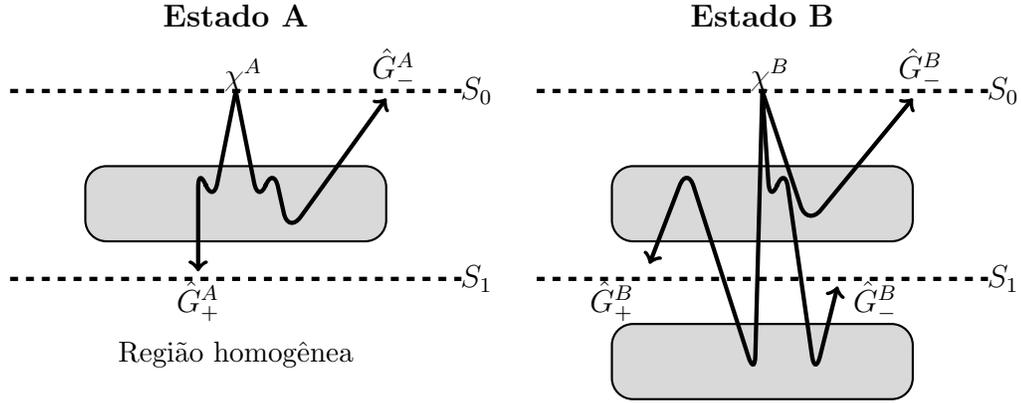


Figura 5: Representação dos campos de onda nos estados A (direita) e B (esquerda) avaliados na superfície de aquisição  $S_0$  e no datum  $S_1$ .

físicos do meio, no que se refere à região entre as superfícies  $S_0$  e  $S_1$ . Não supomos nenhum conhecimento sobre o meio na parte abaixo da superfície  $S_1$ .

No estado A, definimos a presença de uma fonte pontual imediatamente abaixo de  $S_0$  em  $\mathbf{x}^A$ , criando um campo em  $S_0$  dado por  $\hat{P}_+^A = \hat{G}_+^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)$ . O campo ascendente que retorna à superfície de aquisição após sofrer espalhamento é  $\hat{P}_-^A = \hat{G}_-^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)$ . Para facilitar a distinção, denotamos por  $\mathbf{x}'$  a varável de integração da integral sobre  $S_1$ , i.e., a coordenada espacial na superfície  $S_1$ . Então temos que o campo descendente no meio truncado em  $S_1$  é dado por  $\hat{P}_+^A = \hat{G}_+^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A)$ , sendo este o campo transmitido. Como consideramos abaixo de  $S_1$ , um meio homogêneo (livre de heterogeneidade e, portanto, não gerando reflexões ou qualquer evento de retroespalhamento), podemos concluir que não existe campo ascendente nesse nível, ou seja,  $\hat{P}_-^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A) = 0$ .

De maneira similar, no estado B temos uma fonte pontual posicionada imediatamente abaixo de  $S_0$  em  $\mathbf{x}^B$  gerando um campo em  $S_0$  definido por  $\hat{P}_+^B = \hat{G}_+^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ . O campo ascendente registrado na superfície de aquisição é  $\hat{P}_-^B = \hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ , que representa o dado a ser redatumado. Na superfície  $S_1$  do estado B temos que os campos ascendente e descendente são  $\hat{P}_\pm^B = \hat{G}_\pm^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)$ . Essa análise é ilustrada na Figura 5.

Substituindo essas expressões para os campos  $\hat{P}_A$  e  $\hat{P}_B$  na equação (25) ficamos com

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left[ \hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \partial_z \hat{G}_+^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) - \hat{G}_-^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) \partial_z \hat{G}_+^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right] dS = \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} \hat{G}_-^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B) \partial_z \hat{G}_+^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A) dS(\mathbf{x}'). \quad (30)$$

A equação (30) é equação base para a redatumação por retropropagação. Desejamos obter a função de Green que sofreu espalhamento e é medida em  $S_1$ , ou seja, nosso interesse é obter  $\hat{G}_-^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)$ . No entanto, precisamos inicialmente conhecer a contribuição das funções de Green medidas imediatamente abaixo da fonte, que são as derivadas verticais das funções de Green medidas na superfície de aquisição representadas por  $\hat{G}_+^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)$  e  $\hat{G}_+^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ .

### 3.2 Aproximação para as funções de Green próximas à fonte

As deduções a seguir são realizadas de acordo com Wapenaar et al. (2014). Foi mencionado na seção 2 que a função de Green é a solução da equação da onda com fonte pontual. Como a fonte foi posicionada imediatamente abaixo da superfície  $S_0$  em  $\mathbf{x}^A = (x^A, y^A, z^A)$ , podemos escrever a equação de Helmholtz como

$$\rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) = -\delta(x - x^A)\delta(y - y^A)\delta(z - z^A). \quad (31)$$

Queremos avaliar a função de Green imediatamente acima e abaixo da fonte, ou seja, em  $z^A - \alpha$  e  $z^A + \alpha$ , respectivamente, com  $\alpha \rightarrow 0$ . Para tal, inicialmente, vamos integrar ambos os lados da equação de 31 neste pequeno intervalo em  $z$ , obtendo

$$\int_{z^A - \alpha}^{z^A + \alpha} \rho(\mathbf{x})\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) \right) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) dz = \int_{z^A - \alpha}^{z^A + \alpha} \delta(x - x^A)\delta(y - y^A)\delta(z - z^A) dz. \quad (32)$$

Como o intervalo  $(z^A - \alpha, z^A + \alpha)$  é pequeno, podemos supor que as propriedades do meio  $\rho$  e  $c$  são constantes nele. Neste caso todos os termos do lado esquerdo da equação (32) vão a zero quando  $\alpha \rightarrow 0$ , exceto aqueles envolvendo as derivadas verticais. Assim, podemos escrever

$$\int_{z^A - \alpha}^{z^A + \alpha} \partial_z^2 \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A) dz = -\delta(x - x^A)\delta(y - y^A). \quad (33)$$

O resultado da integral do lado esquerdo da equação (33) é a diferença dos valores da derivada vertical da função de Green nos níveis  $z^A + \alpha$  e  $z^A - \alpha$ . O lado direito da equação

(33) não depende de  $\alpha$ , de modo que obtenhamos no limite quando  $\alpha$  tende a zero:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \partial_z \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z^A+\alpha} - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \partial_z \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z^A-\alpha} = -\delta(x - x^A)\delta(y - y^A). \quad (34)$$

O primeiro termo da equação (34) é referente ao campo produzido em  $\mathbf{x}^A$  avaliado imediatamente abaixo de  $\mathbf{x}$ , o que representa o campo descendente. De maneira análoga, o segundo termo faz referência ao campo medido imediatamente acima de  $\mathbf{x}$ , representando o campo ascendente. Sob a hipótese de que existe homogeneidade local ao redor da fonte, podemos então reescrever a expressão 34 como

$$\partial_z \hat{G}_+(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z=z^A} - \partial_z \hat{G}_-(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z=z^A} = -\delta(x - x^A)\delta(y - y^A). \quad (35)$$

Uma vez que a fonte irradia energia igualmente para cima e para baixo, podemos afirmar que os dois termos do lado esquerdo da equação (35) tem que ter a mesma contribuição, o que implica que as derivadas verticais das funções de Green avaliadas imediatamente próximas a fonte sejam dadas por

$$\partial_z \hat{G}_+(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z=z^A} = -\frac{1}{2}\delta(x - x^A)\delta(y - y^A), \quad (36)$$

$$\partial_z \hat{G}_-(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)|_{z=z^A} = \frac{1}{2}\delta(x - x^A)\delta(y - y^A). \quad (37)$$

De maneira análoga, obtemos o seguinte resultado para a fonte posicionada em  $\mathbf{x}^B = (x^B, y^B, z^B)$

$$\partial_z \hat{G}_+(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)|_{z=z^B} = -\frac{1}{2}\delta(x - x^B)\delta(y - y^B), \quad (38)$$

$$\partial_z \hat{G}_-(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)|_{z=z^B} = \frac{1}{2}\delta(x - x^B)\delta(y - y^B). \quad (39)$$

Aplicando esses resultados na equação (30) ficamos com

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left[ \hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \frac{1}{2}\delta(x - x^A)\delta(y - y^A) - \hat{G}_-^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \frac{1}{2}\delta(x - x^B)\delta(y - y^B) \right] dS = \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \hat{G}_-^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B) \partial_z \hat{G}_+^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A) dS. \quad (40)$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo da equação (40) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho(\mathbf{x}^A)}\hat{G}_-^B(\mathbf{x}^A, \omega; \mathbf{x}^B) - \frac{1}{2\rho(\mathbf{x}^B)}\hat{G}_-^A(\mathbf{x}^B, \omega; \mathbf{x}^A) = \\ \iint_{S_1} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\hat{G}_-^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)\partial_z\hat{G}_+^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A)dS. \end{aligned} \quad (41)$$

A equação (41) afirma que a diferença entre os campos ascendentes na superfície  $S_0$  dos estados A e B pode ser escrito como superposição dos campos ascendentes na superfície  $S_1$  do estado B, extrapolados pelas derivadas verticais das funções de Green descendentes do estado A, transmitidas da superfície  $S_0$  a  $S_1$ . Invertendo essa equação podemos recuperar a função de Green ascendente no datum desde que conheçamos as funções de Green na superfície de aquisição, além de informações sobre a distribuição da velocidade entre as superfícies.

Barrera et al. (2021) propõe o uso da equação (41) para uma inversão por meio de deconvolução, o que permite a determinação do campo redatumado. Em nosso trabalho, interpretamos a superposição dos campos extrapolados como uma propagação dos campos de onda envolvidos, e realizamos a inversão da equação (41) por meio da retropropagação dos campos registrados, implicitamente usando a reciprocidade fonte-receptor de que o campo descendente de  $\mathbf{x}^A$  até  $\mathbf{x}'$  é igual ao campo ascendente de  $\mathbf{x}'$  até  $\mathbf{x}^A$ .

### 3.3 Redatumação por retropropagação

Considerando que existam somente variações de velocidade suaves entre o datum e a superfície de aquisição podemos negligenciar o campo de onda ascendente do estado A. Isso permite simplificar a equação (41). Considerando ainda o caso particular em que a densidade é constante, a equação (41) se reduz para

$$\hat{G}_-^B(\mathbf{x}^A, \omega; \mathbf{x}^B) \approx 2 \iint_{S_1} \hat{G}_-^B(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)\partial_z\hat{G}_+^A(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^A)dS. \quad (42)$$

A aproximação (42) mostra que os dados registrados na superfície de aquisição podem ser calculados através da convolução da função de Green em uma superfície de referência, o datum, com a derivada vertical do campo transmitido a partir de uma fonte no meio

truncado, também obtido no datum. Isso é válido uma vez que o produto na frequência corresponde a uma convolução no tempo. A operação de convolução representa a propagação da função de Green até a superfície de aquisição. Com isso, a operação inversa, chamada de deconvolução, representa a retropropagação do dado ao datum. A aproximação (42) pode ser invertida tanto analiticamente (Barrera, 2017), como numericamente. Em nosso trabalho, a retropropagação foi executada usando um esquema de diferenças finitas, decrito no Apêndice B dessa dissertação.

A retropropagação dos dados sísmicos é a principal etapa do processo de redatumação estudado nesse trabalho. A partir desse procedimento são removidos os efeitos da propagação nos dados sísmicos. As formas de retropropagar um dado são as mesmas da propagação, porém, reversas no tempo. O processo de redatumação por retropropagação acontece em duas etapas que levam uma série de registros sísmicos com fontes e receptores na superfície a outro nível de profundidade.

A primeira etapa é relativa a retropropagação dos registros nos receptores. Para cada configuração de tiro comum os campos obtidos nos receptores, os dados, são retropropagados para um ponto no datum, desfazendo assim os efeitos de propagação descritos pela aproximação (42). Esse passo resulta em um registro virtual com fontes na superfície e os receptores no datum.

O segundo passo consiste na propagação das fontes até o datum. Aplicando o princípio da reciprocidade Fonte-Receptor, podemos afirmar que o registro no datum é igual ao campo que teria sido registrado na superfície caso fontes pontuais estivessem no datum, ou seja,  $\hat{G}(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B) = \hat{G}(\mathbf{x}^B, \omega; \mathbf{x}')$ . Dessa forma, para cada ponto de registro no datum, podemos agrupar os dados de todas as fontes na superfície em uma seção de receptor comum. Tratando essa seção como se fosse uma seção de fonte comum no datum e receptores na superfície, podemos fazer a retropropagação do campo de onda das posições das fontes na superfície até o datum, resultando em um levantamento sísmico com fontes e receptores em um novo nível de profundidade.

### 3.4 Redatumação por correlação

Um dos objetivos de nosso trabalho é comparar algumas características da implementação da redatumação por retropropagação com os correspondentes resultados da técnica de redatumação por correlação, que já é bem discutida na literatura. Nessa seção, mostramos a equação básica que governa a técnica. A dedução dessa equação é mostrada com mais detalhes no Apêndice A dessa dissertação. Em nossa análise, mostramos que apenas a integral sobre a superfície  $S_0$  contribui para o cálculo de  $\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)$ . Podemos assumir então que  $\hat{G}_-^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$  medido na superfície  $S_0$  pode ser interpretado como o dado sísmico  $\hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ . Assim, de acordo com Vasconcelos et al. (2009), o campo de onda medido no novo datum com fontes na superfície de aquisição,  $\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)$ , para o caso onde a densidade é constante pode ser escrito como

$$\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B) \approx 2 \iint_{S_0} \hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \partial_z \hat{G}_-^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') dS \quad (43)$$

Essa aproximação permite realocar receptores em uma posição arbitrária no datum usando correlação do dado sísmico,  $\hat{G}_-^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ , com a derivada vertical da função de Green, modelada na superfície de aquisição, com fontes no datum, e integrando sobre a superfície  $S_0$ .

Uma única aplicação da equação (43) apenas completa metade do processo. Como desejamos obter fontes e receptores no datum, podemos aplicar novamente a equação (43). Para fazer isso, primeiro usamos o princípio da reciprocidade fonte-receptor, de maneira similar ao que explicitamos acima no contexto da redatumação por retropropagação, e reorganizamos os dados na configuração receptor comum. Fazendo isso, podemos voltar a realizar as correlações.

## 4 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Nessa seção, apresentamos resultados dos testes numéricos usando as técnicas de redatumação por retropropagação e correlação, com a finalidade de validar a teoria abordada nesta dissertação. Para tal, fizemos testes numéricos com diferentes níveis de complexidade.

### 4.1 Datum acima de refletor plano horizontal

Este primeiro teste foi usado para validar nossa implementação e para mostrar de forma prática como ocorre o procedimento de redatumação por retropropagação. Para cumprir esse objetivo, os dados sísmicos usados como entrada para o método foram modelados a partir do modelo de velocidade mostrado na Figura 6, usando o modelador Csmodeling, que faz uso de traçamento de raios para solucionar a equação da onda acústica. O modelo consiste em dois semi-espacos homogêneos separados por um refletor plano horizontal, localizado em 1.5 km de profundidade, com velocidade de propagação da primeira camada de 1.5 km/s. O modelo possui 10 km de extensão e 3 km de profundidade. Para a aquisição foram usadas 201 fontes e 201 receptores espaçados a cada 25 m, e um intervalo de amostragem de 4 ms. Uma seção de fonte comum dos dados sintéticos é mostrada na Figura 7.

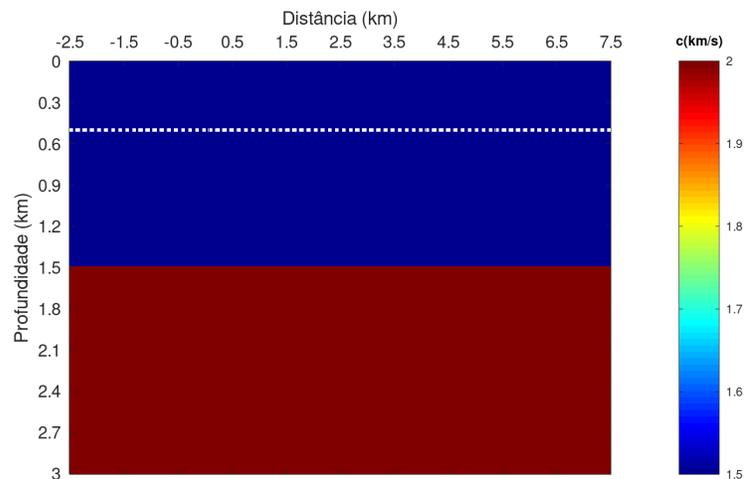


Figura 6: Modelo de velocidade usado na aquisição do dado sintético e usado na retropropagação.

Para esse primeiro teste, o novo datum foi posicionado em 500 m, representado pela

linha tracejada na Figura 6. Para executar o teste, foram usados no datum 201 fontes e 201 receptores no datum, também espaçados a cada 25 m. Para retropropagar os registros usando o método de diferenças finitas foi usado um modelo de velocidade acima do datum exato, que consiste de um meio com velocidade constante 1.5 km/s, sendo o espaçamento da malha regular igual a 15 m. Além disso, bordas absorventes foram adicionadas nas quatro extremidades da malha para evitar reflexões indesejáveis.

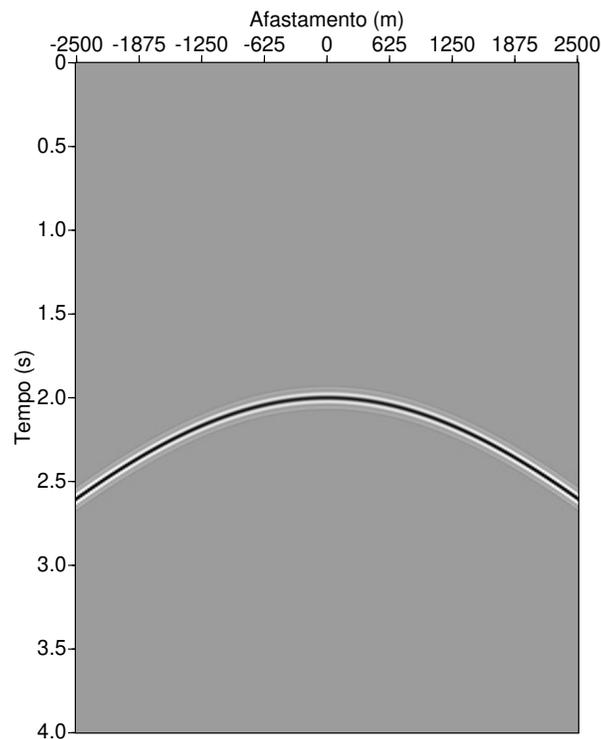


Figura 7: Seção de tiro comum, do dado sintético, com um único evento de reflexão usado como entrada na redatumação.

A técnica de redatumação consiste em duas etapas. A primeira é relativa a retropropagação dos registros na superfície até o datum. Espera-se que o evento de afastamento nulo esteja posicionado no tempo de 1.667 s, uma vez que a onda percorreu 2.5 km até chegar ao datum, em um meio com velocidade de propagação igual a 1.5 km/s. Para ilustrar essa etapa, a Figura 8 mostra a trajetória dos dados sendo retropropagados em diferentes instantes de tempo. A linha constante tracejada nos painéis da Figura 8 representa a posição do datum.

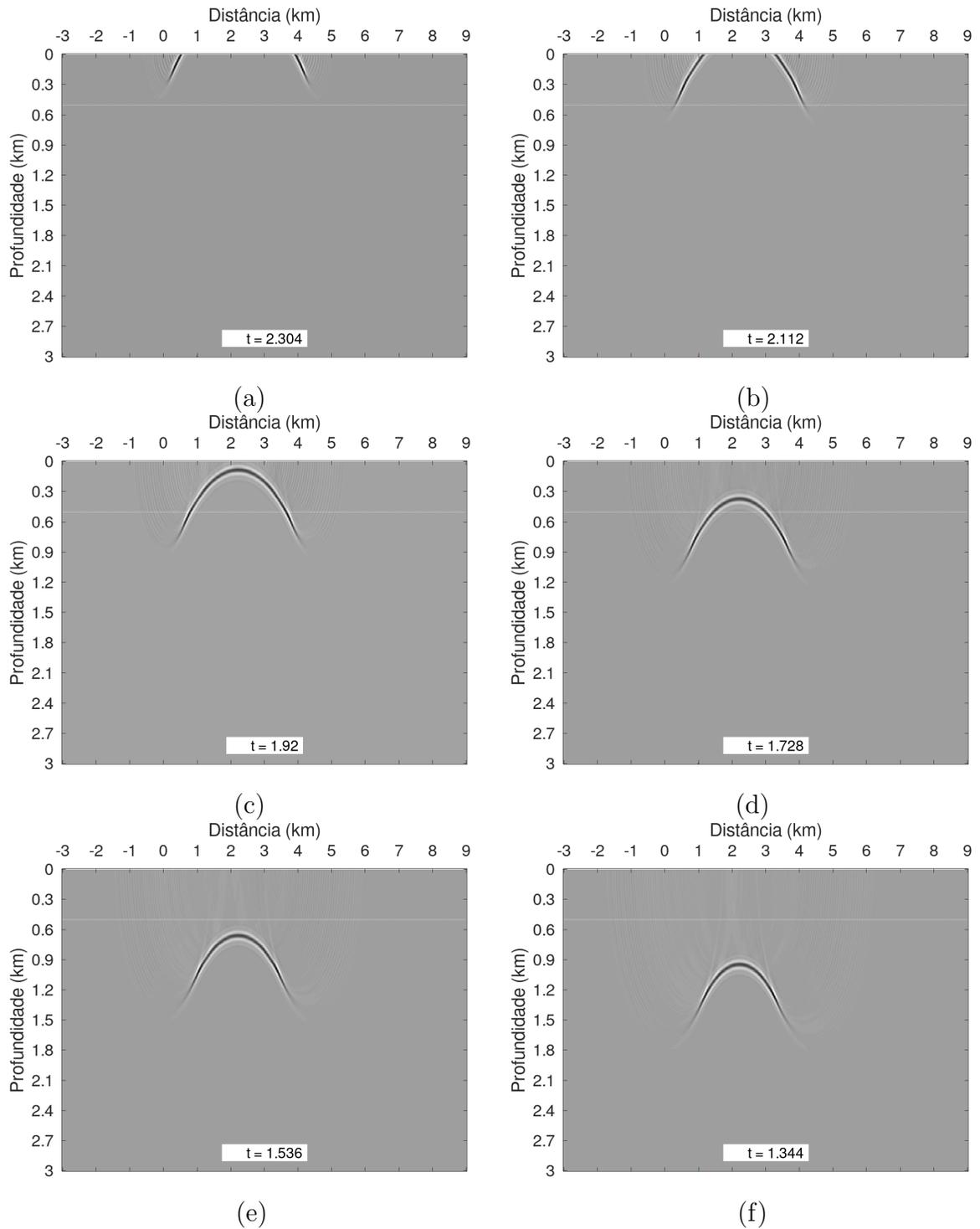


Figura 8: Snapshots referentes a primeira etapa da redatumação por retropropagação. Os painéis de (a) a (f) representam diferentes instantes de tempo. A retropropagação mostrada corresponde aos registros do tiro posicionado em 2.5 km.

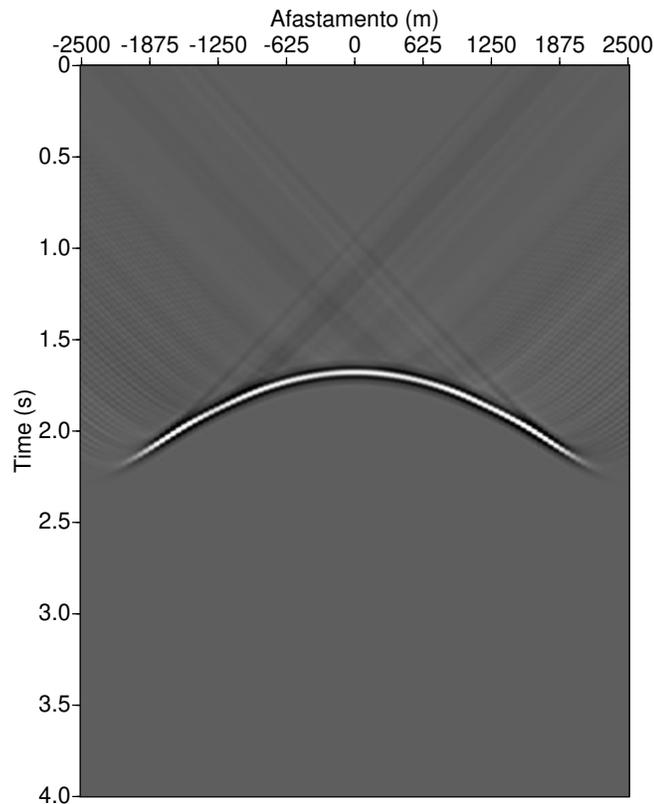


Figura 9: Seção mostrando o resultado da primeira etapa de redatumação, que corresponde a fonte na superfície e registros no datum.

É possível perceber na Figura 8 que o dado cruza totalmente o datum entre 1.728 s e 1.536 s, como esperado. Além disso, como os dados foram injetados de forma reversa no tempo, também podemos perceber que maiores afastamentos chegam mais rápido ao datum. As extremidades dos painéis na Figura 8 coincidem com as bordas do modelo. Percebe-se que nenhuma reflexão indesejada, ou seja, oriundas das bordas do modelo, tem sido registrada, uma vez que utilizamos bordas absorventes no esquema de diferenças finitas.

A Figura 9 mostra a seção obtida após a primeira etapa da redatumação. Nessa seção já é possível perceber a presença de artefatos lineares, que aparecem sobre a hipérbole que representa o evento de reflexão. Esses artefatos são produzidos nas bordas do modelo devido a abertura limitada da linha de aquisição e atuam como se fontes secundárias tivessem radiando energia, que é recuperada no datum. Para reduzir esses artefatos, foi aplicado um filtro de mergulho após completarmos o processo de redatumação.

Os snapshots que representam a segunda etapa do processo de redatumação por retropropagação, que diz respeito a injeção das fontes, são mostrados na Figura 10. Vale ressaltar que os dados foram organizados na configuração de receptor comum, antes da injeção. Os painéis representam diferentes instantes de tempo, para o receptor localizado na posição de 2.5 km, no datum. É possível observar que o dado retropropagado ultrapassa o datum entre 1.34 s e 1.15 s. Além disso, percebemos que mais artefatos vindos das bordas do modelo são incorporados no processo. Para essa situação, esperamos que o evento de afastamento nulo ocorra em 1.333 s.

Na Figura 11(a) é mostrado uma seção de tiro comum que representa o dado redatumado após a segunda etapa do processo de retropropagação. Para avaliar a eficiência do método, plotamos na Figura 11(b) o dado modelado com a mesma geometria de aquisição no datum. O dado modelado foi construído com o mesmo modelador, porém, com um deslocamento vertical no modelo de 500 m para compensar o datum. É possível observar que o evento sob estudo foi posicionado em tempos próximos aos do evento modelado representado na seção a direita. Além disso, observamos que os artefatos incorporados nas duas etapas foram bem atenuados pelo filtro de mergulho.

Para verificarmos se os eventos foram posicionados com precisão, construímos a Figura 12. O traço pontilhado em preto representa do dado redatumado com fonte e receptor posicionados em 2.5 km, ou seja, um traço de afastamento nulo. O traço contínuo em vermelho representa um traço modelado de afastamento nulo, que contem o evento sob estudo na posição esperada. A amplitude de cada traço foi normalizada pela máxima amplitude de cada um para ficar na mesma escala. Percebe-se que o dado redatumado possui um atraso de 4 amostras de tempo, quando comparado ao traço modelado. O pulso sísmico apresentou pouca deformação e uma pequena variação de fase. O evento também não apresentou erro de polaridade.

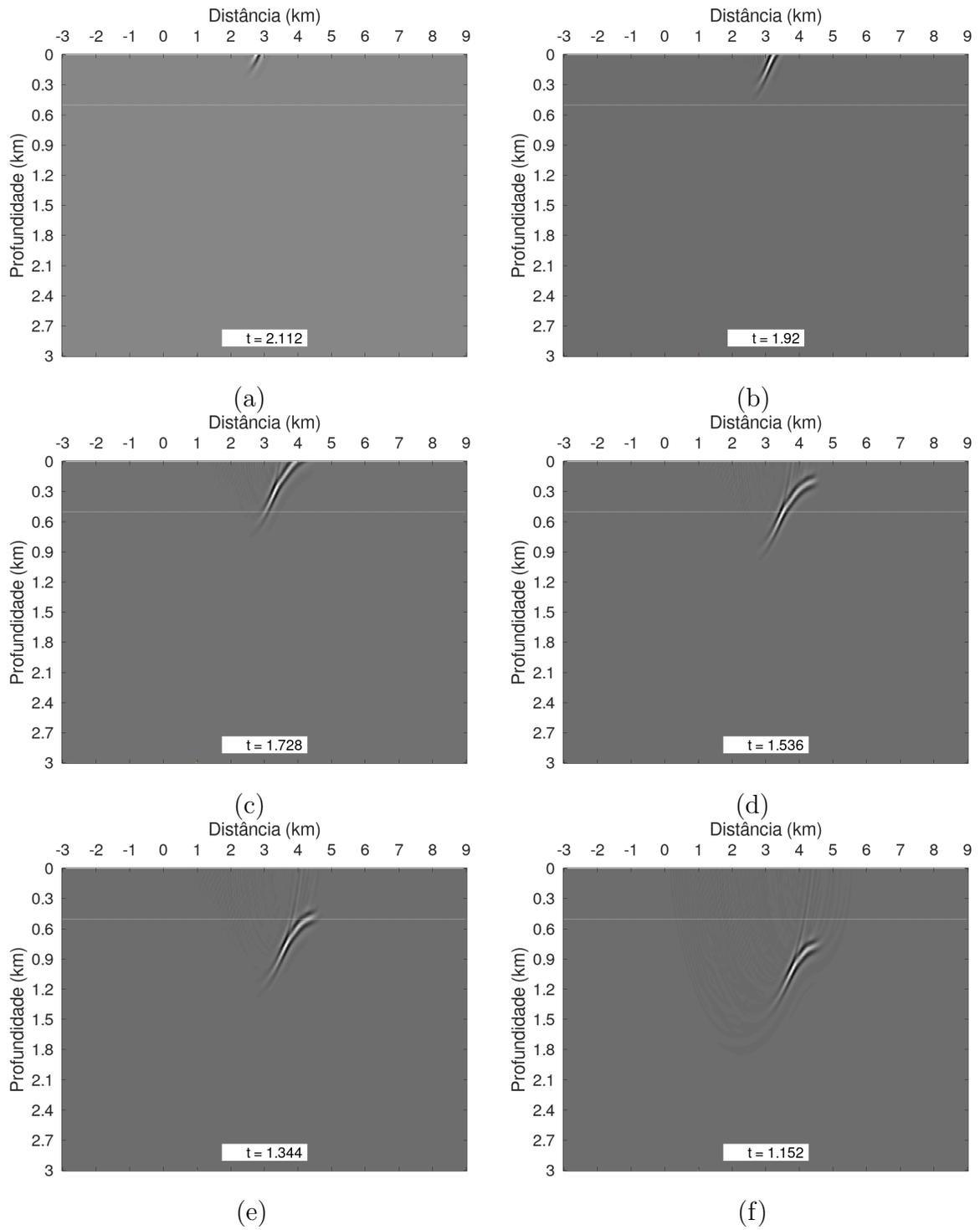
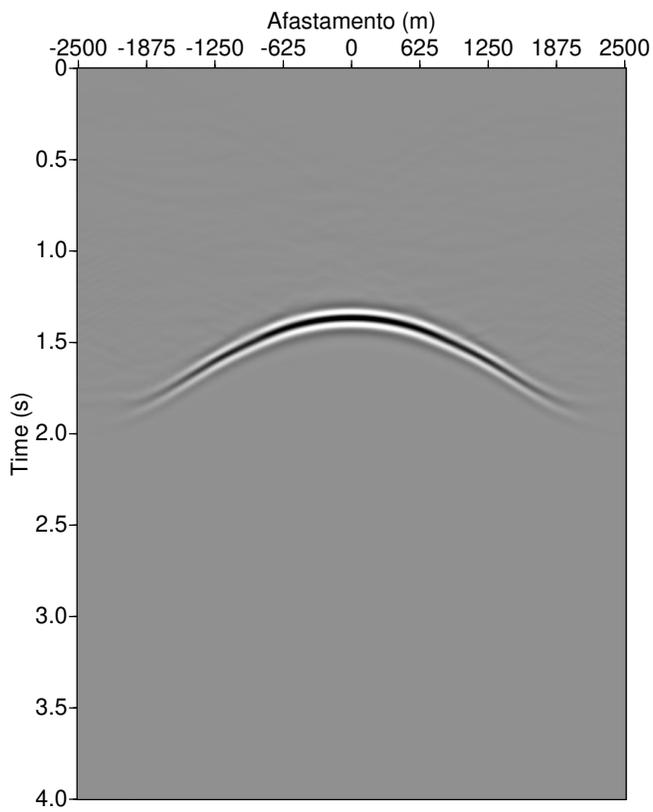
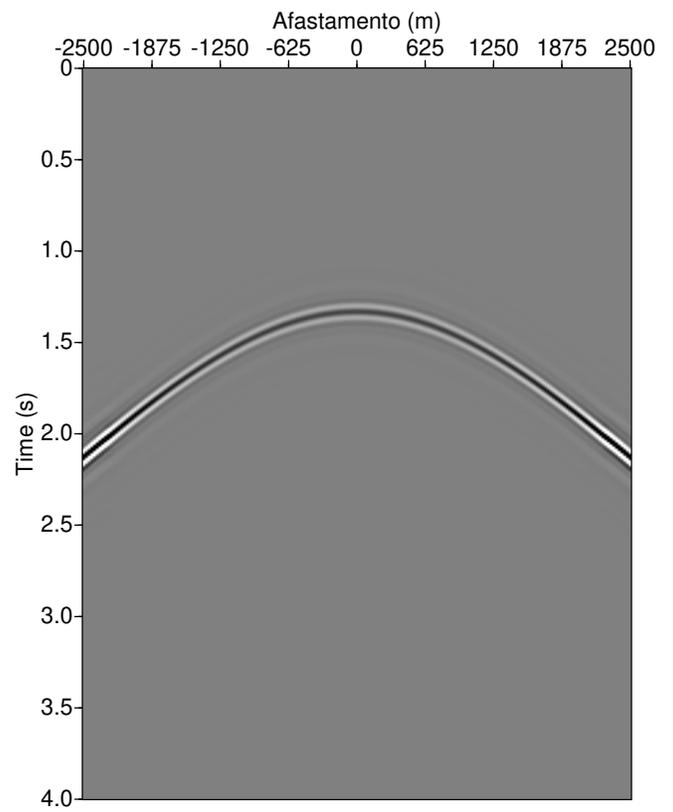


Figura 10: Snapshots relativos a retropropagação das fontes ao datum. Os painéis de (a) a (f) representam diferentes instantes de tempo.



(a)



(b)

Figura 11: (a) Seção de tiro comum após o processo de redatumação e (b) seção de tiro comum do dado modelado com fontes e receptores no datum.

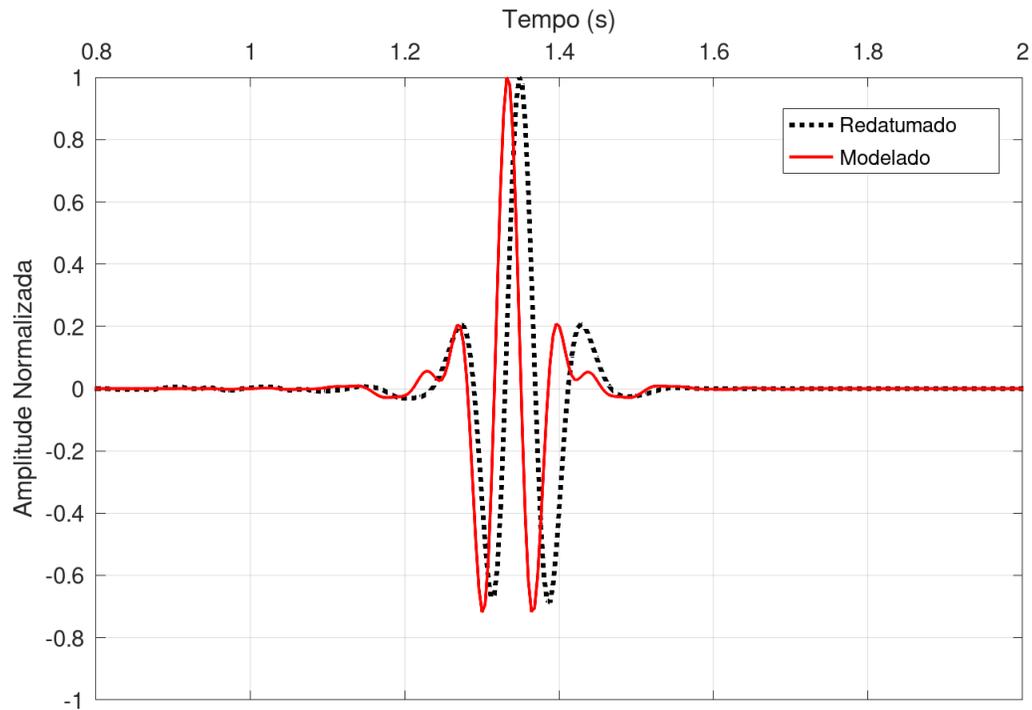


Figura 12: Comparação dos traços de afastamentos nulos após redatumação. Os dados foram obtidos com fontes e receptores na posição de 2.5 km

## 4.2 Datum abaixo de heterogeneidades

Na dedução da equação 42 optamos por desconsiderar o campo produzido por heterogeneidades entre o datum e a superfície. Esse argumento deve ser válido desde que ocorram somente variações suaves entre esses dois níveis. Para avaliar como o processo de redatumação por retropropagação lida com essas heterogeneidades entre a superfície de aquisição e o novo datum, realizamos um teste com o datum posicionado abaixo de uma interface, na profundidade de 1.5 km. Também avaliamos a situação em que não temos informações exatas do modelo de velocidade entre o datum e a superfície de aquisição. Para fazer isso, consideramos um modelo de velocidade exato e outro suavizado, como mostrados nas Figuras 13(a) e 13(b), respectivamente.

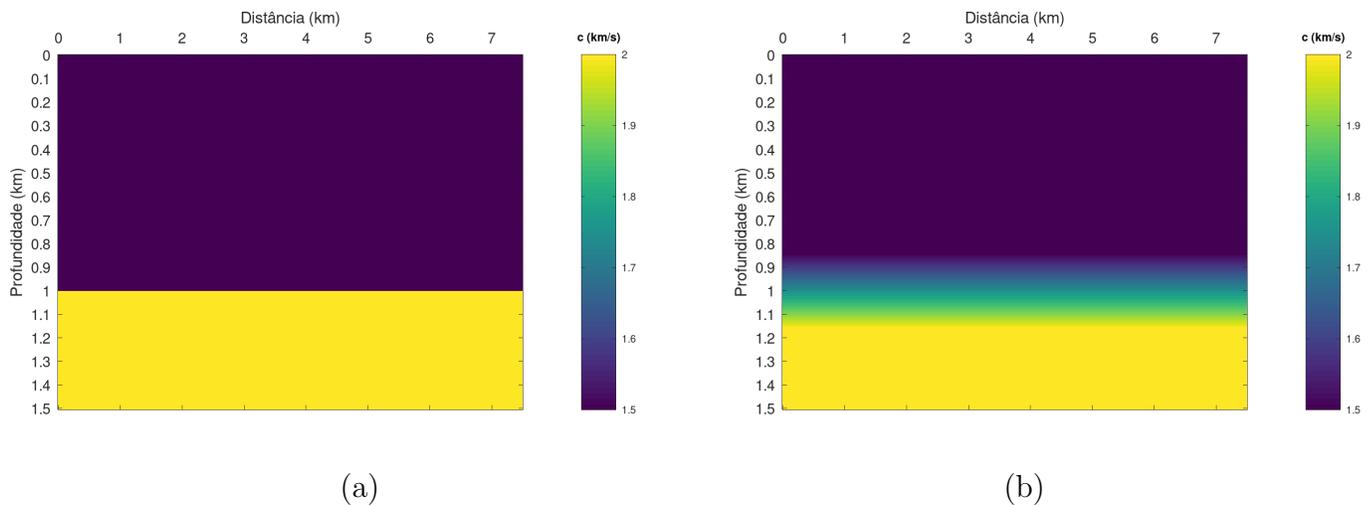


Figura 13: (a) Modelo de velocidade da superfície de aquisição ao datum exato e (b) suavizado. A barra de cores indica a velocidade de propagação em quilômetros por segundo.

O modelo possui dois refletores planos posicionados em 1.0 km e 2.0 km, com camadas cujas velocidades de propagação são 1.5 km/s e 2 km/s. A aquisição foi simulada com 41 fontes espaçados a cada 50 m e grupos de 100 receptores, posicionados a cada 20 m. A Figura 13 mostra uma seção de fonte comum desse dado sintético. O dado também foi modelado usando o Csmodeling, e apenas eventos de ondas primárias foram registrados, visto que não incluímos múltiplas no modelamento. Para o resultado, definimos a saída com a mesma configuração como no primeiro experimento numérico.

Geramos dados redatumados usando as técnicas de redatumação por retropropagação e por correlação. As Figuras 15(a) e 15(b) mostram uma seção de tiro comum redatumado por retropropagação usando o modelo de velocidades correto e suave, respectivamente, enquanto as Figuras 15(c) e 15(d) mostram os resultados obtidos por correlação, com os mesmos modelos. Os modelos de velocidades foram usados na redatumação por correlação para modelar as derivadas verticais dos campos usados na equação (43). Um filtro de mergulho também foi aplicado aos dados redatumados para remover os artefatos produzidos pela abertura limitada da linha de aquisição.

Para esse caso, esperamos que apenas o segundo evento de reflexão apareça na seção redatumada. Nas Figuras 15 (a-d), podemos observar que ambas as técnicas recuperaram bem o segundo evento, sendo que em todos os casos, mesmo com a velocidade não sendo totalmente exata, os eventos de afastamento nulo estiveram próximo a  $t = 0.5$  s, como es-

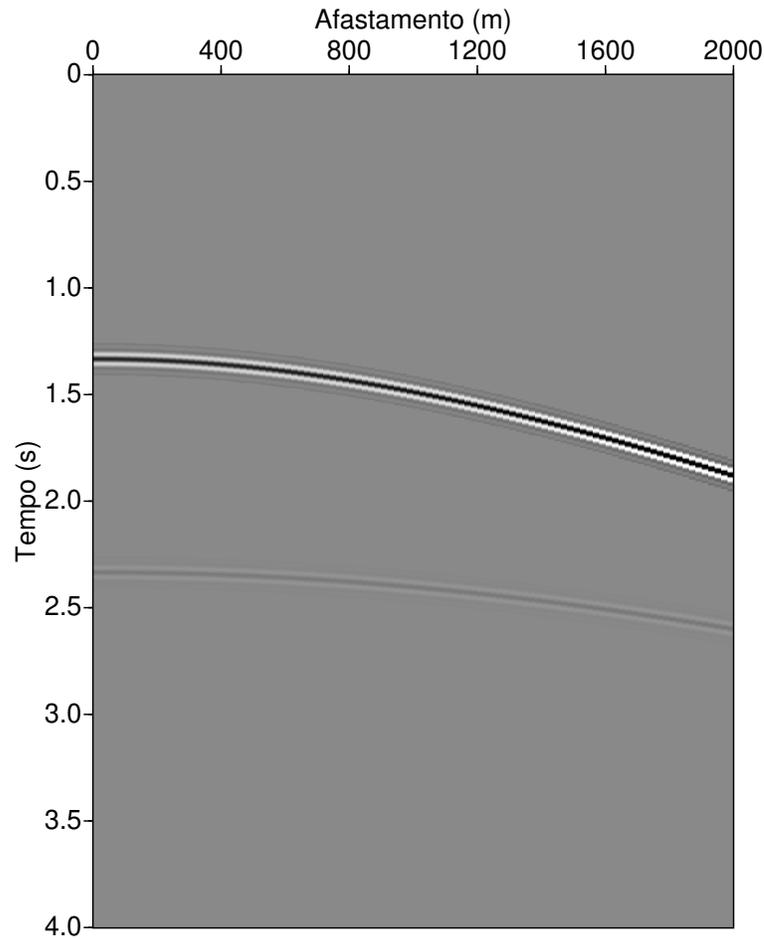


Figura 14: Seção de tiro comum modelado com dois eventos horizontais.

perado. No entanto, reflexões originadas pelo primeiro evento de reflexão ainda se fazem presentes para afastamento superiores a 0.5 km. Esses artefatos são mais nítidos nos dados redatumados por retropropagação. Esse exemplo nos leva a concluir que a técnica de redatumação por retropropagação produz resultados bastantes semelhantes à técnica baseada na correlação, até mesmo quando informações a respeito da velocidade entre o datum e a superfície de aquisição não são exatas. Apesar da semelhança nos resultados, a técnica de retropropagação mostrou ser um processo que demanda menos tempo computacional.

Para uma inspeção mais detalhada das seções, mostramos na Figura 16 traços de afastamento nulo com a amplitude normalizada pelos eventos de maior amplitude. Na Figura 16 também plotamos um traço modelado com fontes e receptores no datum. Podemos observar

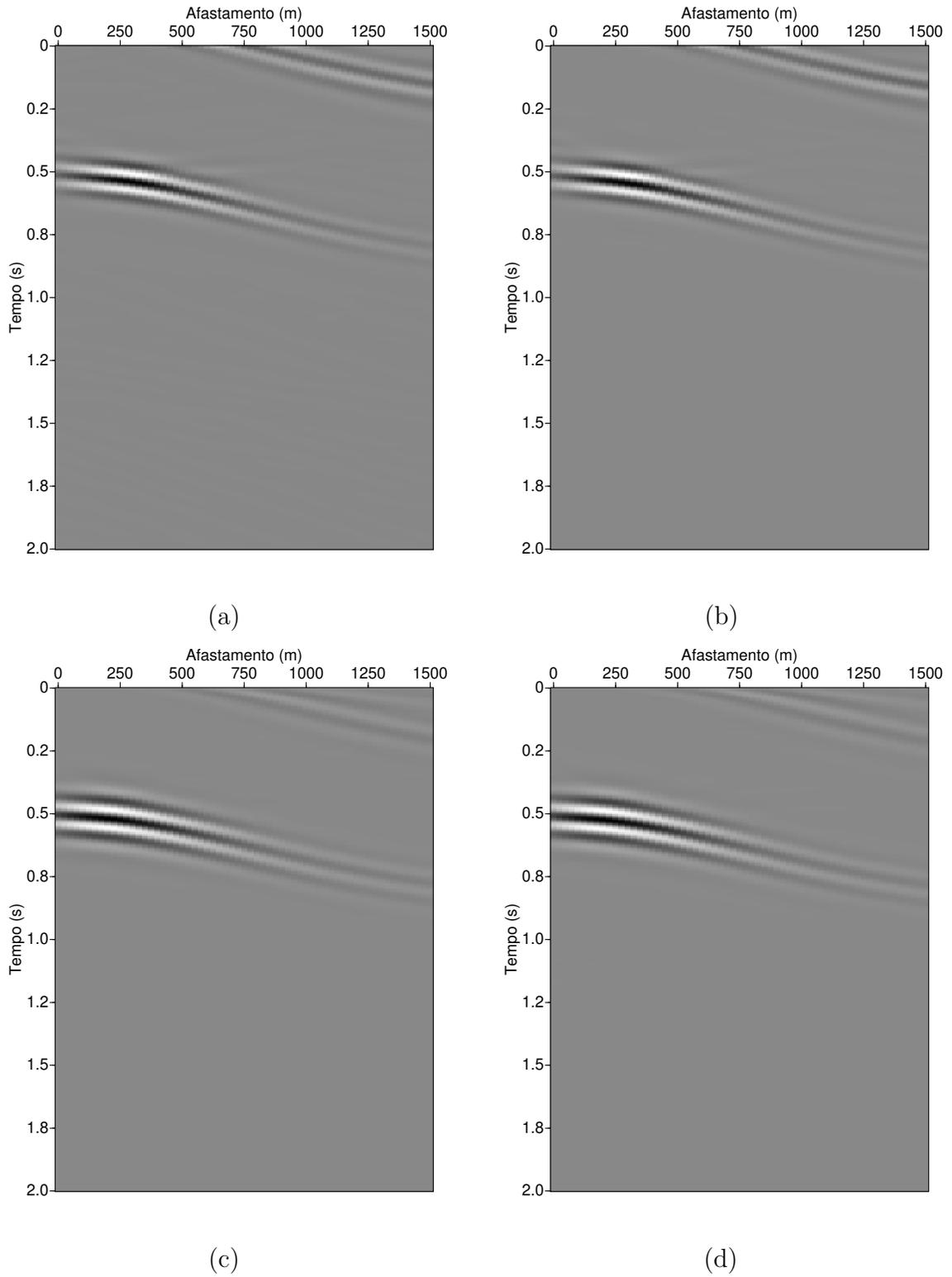


Figura 15: Dado redatumado usando retropropagação(a,b) com modelo de velocidade exato (a) e suave (b). (c,d) Representam o dado redatumado por correlação com modelo exato (c) e suavizado (d).

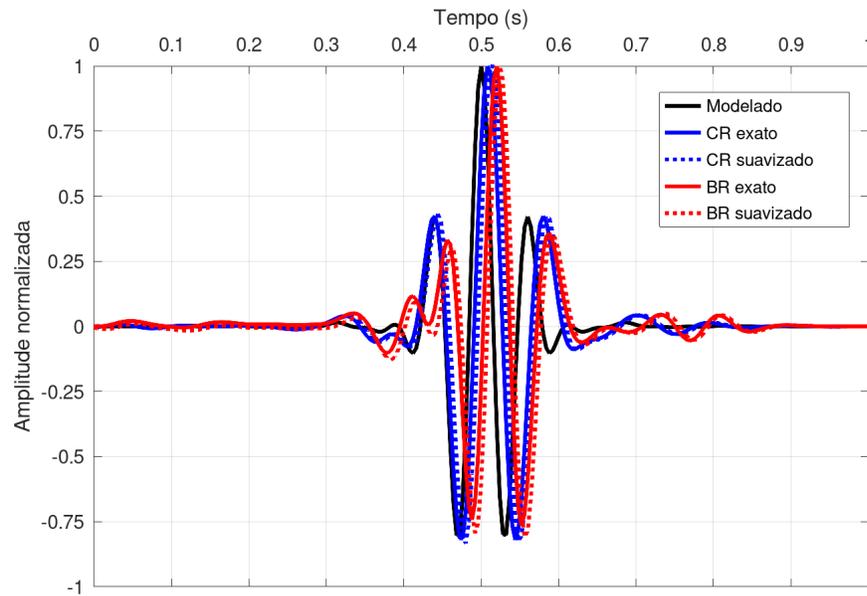


Figura 16: Comparação dos traços de afastamento nulo obtidos por retropropagação (BR) e correlação (CR). O traço em preto representa o traço modelado.

que a técnica de redatumação por correlação apresenta uma leve melhoria no posicionamento do evento, quando comparado ao traço modelado. Além disso, o modelo de velocidade suavizado produz um atraso de duas amostras de tempo no evento em ambas as técnicas, o que nos leva a concluir que a suavização do modelo atua da mesma maneira em ambas os métodos.

### 4.3 Modelo SEG/EAGE Overthrust.

Para avaliar o desempenho da técnica de redatumação por retropropagação em um cenário mais realístico, aplicamos a técnica a uma seção do modelo Modelo SEG/EAGE Overthrust, mostrado na Figura 17(a). Usamos o modelo com 4.5 km de profundidade e 4 km de extensão, com velocidades variando de 2 km/s a 6 km/s (Aminzadeh et al., 1997). Para testar o desempenho das técnicas para a situação em que não conhecemos o modelo de velocidade exato, também geramos resultados utilizando uma versão suavizada do modelo, como mostrado na Figura 17(b). O processo de suavização desse modelo foi realizado com um filtro gaussiano usando a vagarosidade, uma vez que preserva melhor a cinemática de ondas propagadas no modelo.

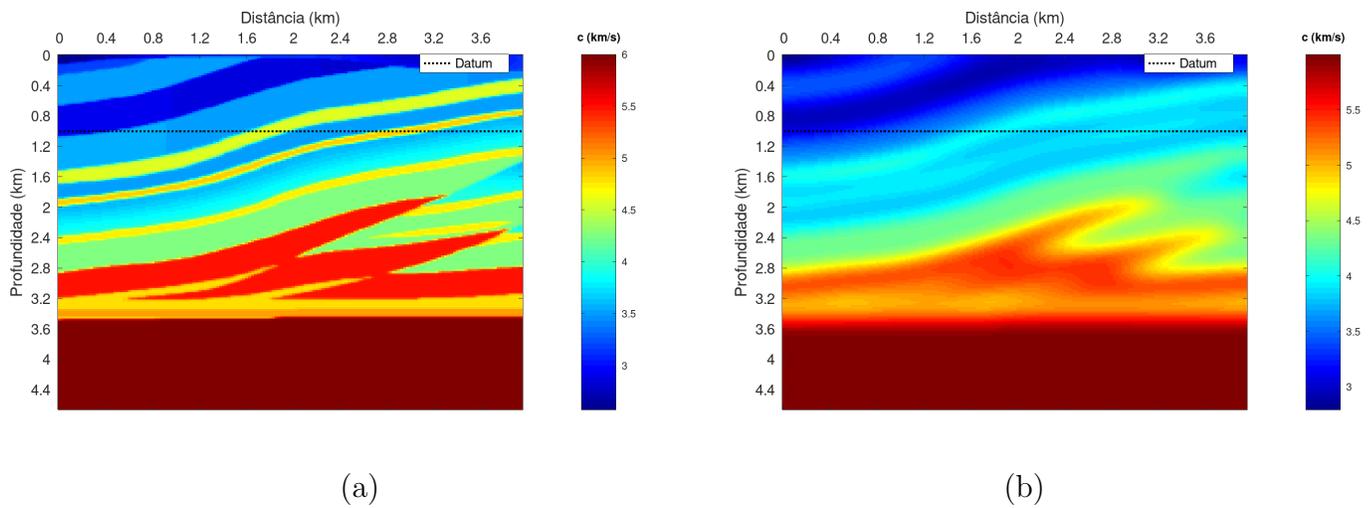


Figura 17: (a) Seção do modelo 2D SEG/EAGE Overthrust exato e (b) sua versão suavizada a partir da vagarosidade. A barra de cores indica a velocidade de propagação em quilômetros por segundo.

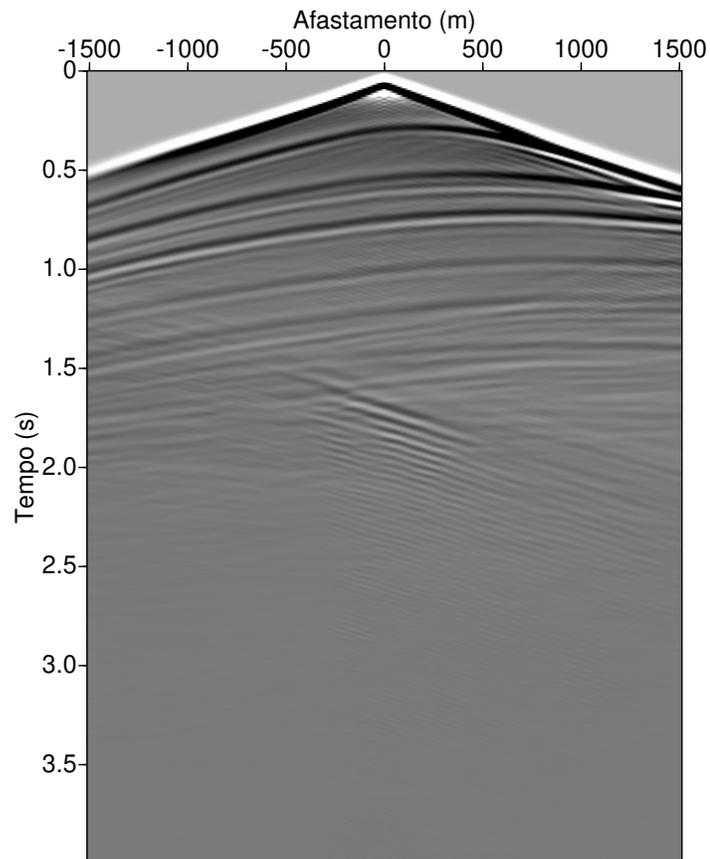


Figura 18: Seção de tiro comum obtido usando o modelo 2D SEG/EAGE Overthrust

Para geração do dado sintético usamos o modelador `sufdmod2`, do pacote de código aberto **Seismic Un\*x**, que faz uso da aproximação da equação da onda acústica por diferenças finitas. Foram disparados 159 tiros, espaçados a cada 25 m, e para cada tiro foram usados um grupo de 159 receptores também espaçados a cada 25 m. Uma seção de tiro comum é mostrada na Figura 18. Definimos o novo datum como estando posicionado na profundidade de 1 km e usamos a mesma configuração de saída.

Uma seção de tiro comum mostrando o resultado processo de redatumação por retropropagação usando o modelo de velocidade exato e suave são mostrados na Figura 19(a) e 19(b), respectivamente. Na Figura 19(c) e 19(d) são mostrados os resultados para o mesmo teste, porém usando redatumação por correlação com modelos exatos e suaves, respectivamente. Para compararmos o desempenho de ambas as técnicas, também plotamos o dado modelado na Figura 20. Um filtro de mergulho foi aplicado no dado modelado para remover eventos de onda direta e facilitar a observação.

Podemos perceber que ambas as técnicas recuperaram bem os eventos mostrados na Figura 20. Além disso, ambas as técnicas apresentaram resultados similares no que diz respeito à quantidade de artefatos gerados e à cinemática dos eventos, mesmo quando se redatumou com o modelo de velocidade suavizado, como observado nas Figuras 19(b) e 19(d). Apesar da semelhança entre as duas técnicas, podemos perceber que o resultado baseado na correlação se mostrou mais eficaz na recuperação dos eventos em afastamentos superiores a 1000 m. A maior diferença entre as técnicas está no tempo computacional, no qual a técnica baseada na correlação necessitou de aproximadamente 1.5 vezes mais tempo para completar a redatumação, quando comparado à retropropagação.

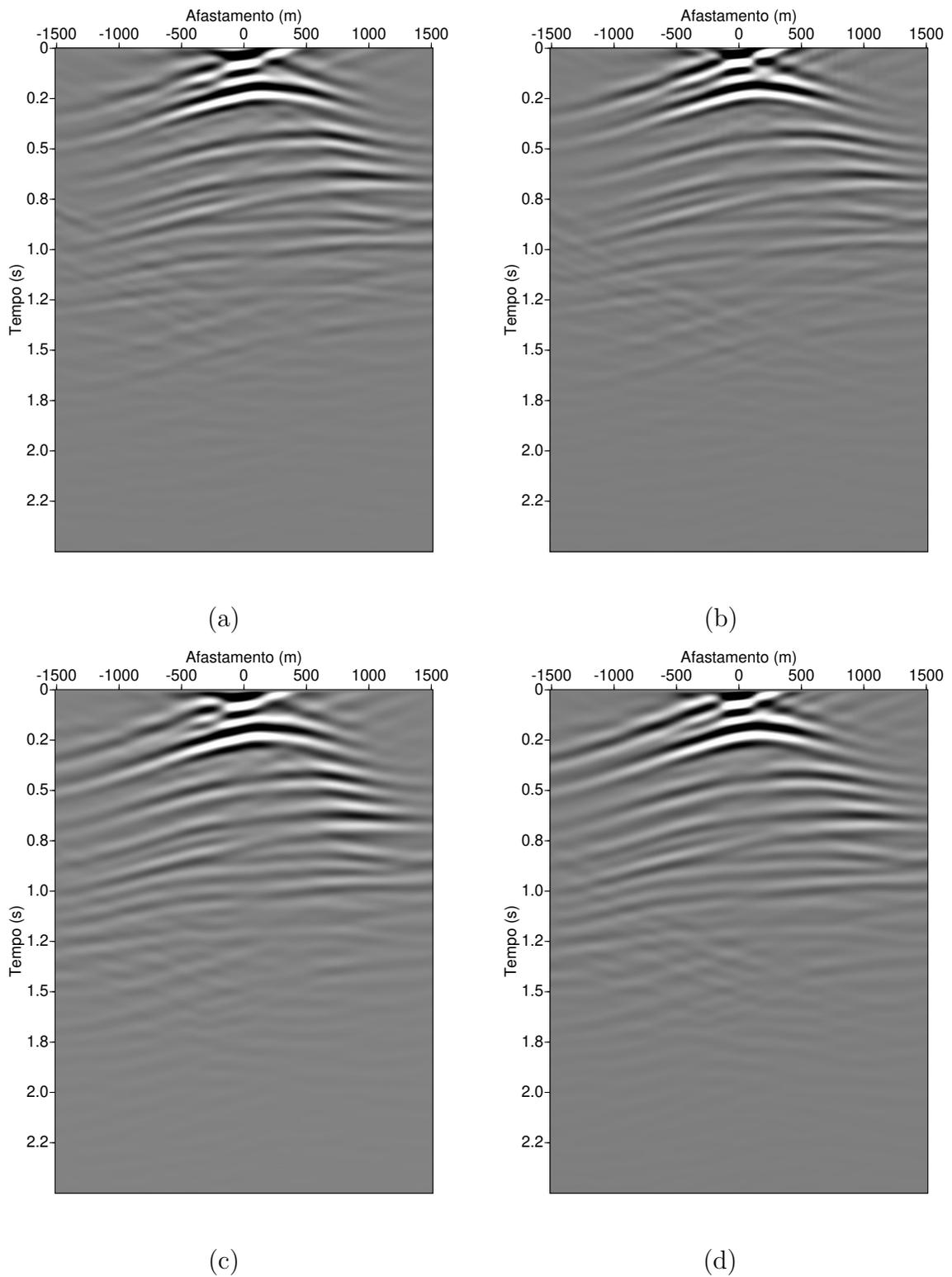


Figura 19: Dado redatumado usando retropropagação (a,b) com modelo de velocidade exato (a) e suave (b). (c,d) Representam o dado redatumado por correlação com modelo exato (c) e suavizado (d).

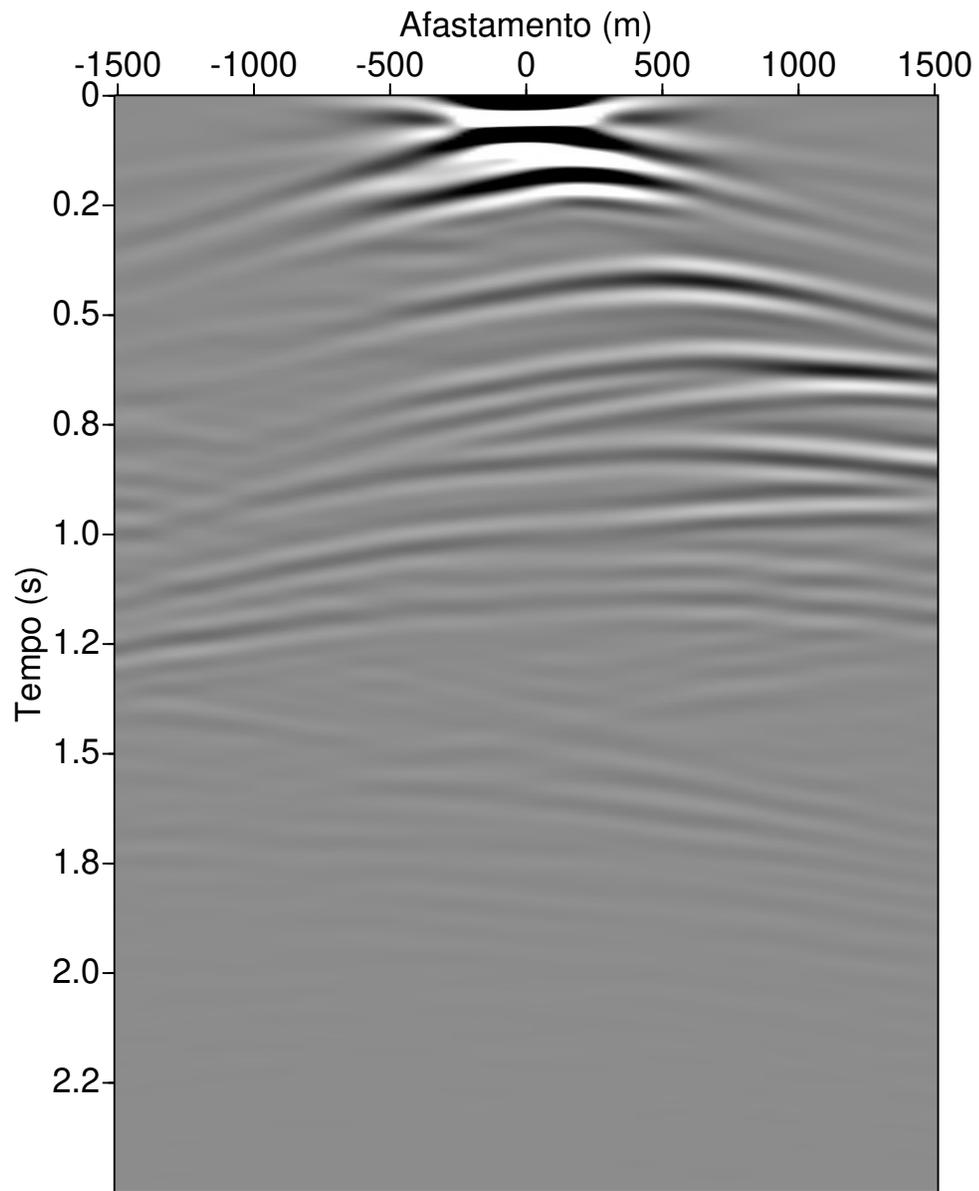


Figura 20: Dado modelado com fontes e receptores no datum.

## 5 CONCLUSÕES

O dado sísmico registrado na superfície de aquisição foi interpretado nesse trabalho como a propagação da função de Green medido em um novo nível de profundidade, chamado datum, através da derivada vertical do campo transmitido também avaliado no datum. Desfazer essa propagação significa retropropagar os dados, obtendo a função do Green no datum, o que caracteriza uma etapa do processo de redatumação por retropropagação. Essa técnica discutida em nosso trabalho faz de um esquema de diferenças finitas para retropropagar os dados sísmicos.

Para avaliar as limitações da redatumação por retropropagação, comparamos alguns testes numéricos com a clássica técnica de redatumação interferométrica por correlação. Enquanto a retropropagação recorre a duas aplicações de um esquema de diferenças finitas para desfazer o efeito da Equação (42), a técnica baseada na correlação usa a derivada vertical da função de Green modelada na superfície de aquisição, que quando correlacionada com o dado sísmico produz o campo de onda espalhado que é observado no datum.

Por meio de um exemplo numérico com um único refletor plano, e um modelo de velocidade constante entre a superfície de aquisição e o datum, podemos garantir o funcionamento da implementação de redatumação por retropropagação. O resultado obtido recuperou bem o evento desejado, e apenas gerou artefatos lineares devido a abertura limitada da aquisição. Esses eventos puderam ser removidos do dado redatumado usando um filtro de mergulho ao final do processo.

Através de exemplos numéricos mais complexos, comparamos a técnica de redatumação por retropropagação com a técnica baseada na correlação. Ambas as técnicas usam os mesmos dados de entrada e realizam o processo em duas etapas, o que produziu resultados bastantes semelhantes. Essas semelhanças vão desde a recuperação dos eventos, aos artefatos gerados no dado redatumado. Podemos observar ainda que a redatumação por retropropagação apresenta a mesma sensibilidade da redatumação por correlação quanto ao uso de modelos de velocidades inexatos, sendo uma ótima alternativa quando se deseja redatumar com um menor tempo computacional.

Ambas as técnicas apresentadas nesse trabalho recuperaram bem a cinemática dos

eventos. Um pequeno deslocamento temporal do pico dos eventos sob estudo foi observado, sendo esse deslocamento 2 vezes maior quando se usou a método baseado na retropropagação. Recuperar bem a cinemática dos eventos durante a redatumação é muito importante, principalmente quando se deseja usar a migração Kirchhoff, que possui limitações para lidar com estruturas mais complexas como cáusticas, ondas refletidas criticamente ou múltiplas chegadas. O fato da redatumação corrigir distorções produzidas pelas variações de topografia e pela complexidade do meio entre o datum e a superfície também se apresenta como sendo uma excelente ferramenta para ser usada antes da tomografia sísmica e do processo de análise de velocidade.

## REFERÊNCIAS

- Aminzadeh, F., J. Brac e T. Kunz, 1997, 3-D salt and overthrust models: SEG/EAGE 3-D Modeling Series No.1.
- Barrera, D. F., 2017, Convolution and correlation - based interferometric redatuming: Tese de Doutorado, University of Campinas, e Mechanical Engineering Faculty.
- Barrera, D. F., J. Schleicher e J. Brackenhoff, 2021, Interferometric redatuming by deconvolution and correlation-based focusing: *Geophysics*, **86**, no. 1, Q1–Q13.
- Berenger, J.-P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves: *J. Comput. Phys.*, **114**, 185–200.
- Berryhill, J. R., 1979, Wave-equation datuming: *Geophysics*, **44**, 1329–1344.
- , 1984, Wave-equation datuming before stack: *Geophysics*, **49**, 2064–2066.
- Bevc, D., 2001, Compensating for irregular sampling and rugged topography: Report, **84**, 1–326.
- Bleistein, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*: Academic Press, INC.
- Bleistein, N., J. Cohen e J. Stockwell, 2001, *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*: Springer, New York, USA.
- Bording, R. P. e L. R. Lines, 1997, *Seismic modeling and imaging with the complete wave equation*: Society of Exploration Geophysicists, United Kingdom.
- Bulcão, A., 2004, *Modelagem e migração reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos*: Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Camargo, A. W., 2014, *Analysis of a finite difference scheme with adaptive spacial operator*: Dissertação de Mestrado, University of Campinas.
- Fokkema, J. e P. Van de Berg, 1993, *Seismic applications of acoustic reciprocity*: Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands.
- Hoop, M. D., 1992, *Directional decomposition of transient acoustic wave fields*: Delft University Press.
- Knopoff, L. e A. F. Gangi, 1959, Seismic reciprocity: *Geophysics*, **24**, 681–691.

- Lu, R., M. Willis, X. Campman, J. Ajo-Franklin e M. N. Toksöz, 2008, Redatuming through a salt canopy and target-oriented salt-flank imaging: *Geophysics*, **73**, S63–S71.
- Mehta, K., A. Bakulin, J. Sheiman, R. Calvert e R. Snieder, 2007, Improving the virtual source method by wavefield separation: *Geophysics*, **72**, V79–V86.
- Morse, M. M. e H. Feshbach, 1953, *Methods of modern physics vol.i and ii*: McGraw-Hill.
- Ploegstra, J., 2015, *Seismic interferometry by cross-convolution*: Dissertação de Mestrado, Utrecht University, Department of Earth Sciences.
- Ravasi, M., G. Meles, A. Curtis, Z. Rawlinson e L. Yikuo, 2015, Seismic interferometry by multidimensional deconvolution without wavefield separation: *Geophysical Journal International*, **202**, 1–16.
- Roden, J. A. e S. D. Gedney, 2000, Convolution pml (cpml): An efficient fdtd implementation of the cfs–pml for arbitrary media: *Microwave and Optical Technology Letters*, **27**, 334–339.
- Schneider, W., L. D. Phillip e E. F. Paal, 1995, Wave-equation velocity replacement of the low-velocity layer for overthrust-belt data: *Geophysics*, **60**, 573–579.
- Schuster, G. T., 2009, *Seismic interferometry*: Cambridge University Press.
- Schuster, G. T. e M. Zhou, 2006, A theoretical overview of model-based and correlation-based redatuming methods: *Geophysics*, **71**, SI103–SI110.
- Snieder, R., J. Sheiman e R. Calvert, 2006a, Equivalence of the virtual-source method and wave-field deconvolution in seismic interferometry: *Phys. Rev. E*, **73**, no. 6, 066620.
- Snieder, R., K. Wapenaar e K. Larner, 2006b, Spurious multiples in seismic interferometry of primaries: *Geophysics*, **71**, SI111–SI124.
- van der Neut, J., J. Thorbecke, K. Mehta, E. Slob e K. Wapenaar, 2011, Controlled-source interferometric redatuming by crosscorrelation and multidimensional deconvolution in elastic media: *Geophysics*, **76**, SA63–SA76.
- van der Neut, J., I. Vasconcelos e K. Wapenaar, 2015, On Green’s function retrieval by iterative substitution of the coupled Marchenko equations: *Geophysical Journal International*, **203**, 792–813.
- Vasconcelos, I., R. Snieder e H. Douma, 2009, Representation theorems and green’s function retrieval for scattering in acoustic media: *Phys. Rev. E*, **80**, no. 3, 036605.

- Wapenaar, C. P. A. e A. J. Berkhout, 1989, Elastic wave field extrapolation: Elsevier.
- Wapenaar, C. P. A., H. L. H. Cox e A. J. Berkhout, 1992, Elastic redatuming of multicomponent seismic data: *Geophysical Prospecting*, **40**, 465–482.
- Wapenaar, C. P. A. e J. L. T. Grimbergen, 1996, Reciprocity theorems for one-way wavefields: *Geophysical Journal International*, **127**, 169–177.
- Wapenaar, K. e J. Fokkema, 2006, Green’s function representations for seismic interferometry: *Geophysics*, **71**, SI33–SI46.
- Wapenaar, K., J. Thorbecke, J. van der Neut, F. Brogini, E. Slob e R. Snieder, 2014, Green’s function retrieval from reflection data, in absence of receiver at the virtual source position: *The Journal of the Acoustical Society of America*, **135**, 2847–2861.
- Yilmaz, O., 2001, *Seismic data analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data*: Society of Exploration Geophysicists.

## APÊNDICES

### A Redatumação por correlação

Nessa apêndice vamos demonstrar como obter a equação que governa a técnica de redatumação interferométrica por correlação. A dedução a seguir será realizada de maneira similar a Barrera (2017). Para iniciar, vamos considerar dois estados, A e B, em um volume  $V \in \mathbb{R}^3$ , delimitados por uma superfície  $S$ . Vamos assumir que existe uma fonte pontual atuando dentro desse volume, posicionadas em  $\mathbf{x}^B$ . Usando o complexo conjugado da função de Green  $\hat{G}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^A)$ , podemos escrever as equações de Helmholtz para os dois estados como

$$\mathcal{L}^A \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^B), \quad (\text{A.1})$$

e

$$\mathcal{L}^B \hat{G}^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^B), \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathcal{L}^A$  e  $\mathcal{L}^B$  são os operadores de Helmholtz definidos como

$$\mathcal{L}^A = \rho_A(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \nabla \right) + \frac{\omega^2}{c_A^2(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.3})$$

e

$$\mathcal{L}^B = \rho_B(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_B(\mathbf{x})} \nabla \right) + \frac{\omega^2}{c_B^2(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.4})$$

onde os estados  $A$  e  $B$  são descritos pelo esquema da Figura 5. Nosso objetivo após a conclusão do processo de redatumação é ter registrado apenas o campo espalhado abaixo do datum. Sendo que o campo registrado no estado  $B$  é constituído por um campo produzido no estado de referência  $A$ , e o campo que sofreu espalhamento abaixo do datum, denotado por  $\hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ , podemos relacionar os dois estados A e B como

$$\hat{G}^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = \hat{G}^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) + \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \quad (\text{A.5})$$

Definindo o potencial de espalhamento como

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}^B - \mathcal{L}^A, \quad (\text{A.6})$$

podemos usar a equação (A.5) para reescrever a equação (A.2) como

$$(\mathcal{L}^A + \mathcal{V}) \left( \hat{G}^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) + \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^B). \quad (\text{A.7})$$

Usando a equação (A.1) podemos dizer que

$$\mathcal{L}^A \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = -\mathcal{V} \left( \hat{G}^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) + \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right). \quad (\text{A.8})$$

Se consideramos agora que a função de Green  $\hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')$  foi obtida através de uma fonte pontual posicionada imediatamente acima do datum, podemos reescrever a equação de Helmholtz, e multiplica-la por  $\hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B)$ . Fazendo isso obtemos

$$\begin{aligned} \rho_A(\mathbf{x}) \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) + \frac{\omega^2}{c_A^2(\mathbf{x})} \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') = \\ -\hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Multiplicando a equação (A.8) por  $\hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_A(\mathbf{x}) \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right) + \frac{\omega^2}{c_A^2(\mathbf{x})} \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) = \\ -\hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \mathcal{V} \left( \hat{G}^A(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) + \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Subtraindo a equação (A.9) da equação (A.10) e reescrevendo os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \right] \\ \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \mathcal{V} \hat{G}^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Integrando sobre um volume  $V \in \mathbb{R}^3$ , aplicando o Teorema de Gauss (ver seção 2.3) e

usando a propriedade de filtragem da distribuição  $\delta(\mathbf{x})$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)}{\rho_A(\mathbf{x}')} &= \iiint_V \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \mathcal{V} \hat{G}^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) dV - \\ \oiint_S \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} &\left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n dS. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Usando que os meios entre a superfície e o datum, dos estados  $A$  e  $B$ , são iguais, como mostrado na Figura 5, o potencial de espalhamento vai a zero dentro do volume  $V$ . Com isso, a integral de volume da equação (A.12) também vai a zero, de maneira a obtermos

$$\frac{\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)}{\rho_A(\mathbf{x}')} = - \oiint_S \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n dS. \quad (\text{A.13})$$

Para fazer uso da equação (A.13), vamos decompor a superfície  $S$  em três superfícies, usando a mesma configuração da Figura 4, de tal forma que

$$\begin{aligned} -\frac{\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)}{\rho_A(\mathbf{x}')} &= \iint_{S_0} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n_0 dS \\ &\quad \iint_{S_1} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n_1 dS \\ &\quad \iint_{S_2} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n_2 dS \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A integral na superfície  $S_2$  não satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld. Wapeenaar e Fokkema (2006) argumentam que caso exista espalhamento suficientemente grande no volume de integração, a informação do integrando na equação em  $S_2$  se perde, podendo ser negligenciada. Essa condição é conhecida como condição de anti-radiação (Schuster, 2009) e caso não seja obedecida, pode gerar eventos não físicos no dado recuperado.

Para simplificar equação (A.14) e torná-la usual no processo de redatuação por correlação, reescrevemos como

$$-\frac{\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B)}{\rho_A(\mathbf{x}')} = \hat{I}_0 + \hat{I}_1, \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\hat{I}_0 = \iint_{S_0} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n_0 dS, \quad (\text{A.16})$$

e

$$\hat{I}_1 = \iint_{S_1} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \nabla \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) - \hat{G}^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla \hat{G}^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') \right) \cdot n_1 dS. \quad (\text{A.17})$$

Iniciaremos a simplificação da equação (A.15) pela análise da integral  $\hat{I}_0$ , que é avaliada sobre a superfície  $S_0$ . Para isso vamos decompor os campos de onda em ascendentes e descendentes, como realizado na seção 2.6, de maneira a obter

$$I_0 \approx \iint_{S_0} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \left[ (\hat{G}_+^{A*} + \hat{G}_-^{A*})(\nabla \hat{G}_+^S + \nabla \hat{G}_-^S) - (\hat{G}_+^S + \hat{G}_-^S)(\nabla \hat{G}_+^{A*} + \nabla \hat{G}_-^{A*}) \right] \cdot n_0 dS. \quad (\text{A.18})$$

De maneira similar ao obtido na seção 2.7, podemos aproximar os gradientes das funções de Green na equação (A.18) através de uma aproximação assintótica em alta frequência na forma

$$\nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \approx -i\omega \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B). \quad (\text{A.19})$$

Para o complexo conjugado da função de Green, podemos aproximar seu gradiente por

$$\nabla \hat{G}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \approx i\omega \hat{G}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B). \quad (\text{A.20})$$

Substituindo as aproximações (A.19) e (A.20) na aproximação (A.18) e computando os produtos obtemos

$$\begin{aligned} I_0 \approx \iint_{S_0} \frac{-i\omega}{\rho_A(\mathbf{x})} & \left[ \hat{G}_+^{A*} \hat{G}_+^S \nabla T_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \hat{G}_+^{A*} \hat{G}_-^S \nabla T_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \right. \\ & \hat{G}_-^{A*} \hat{G}_+^S \nabla T_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \hat{G}_-^{A*} \hat{G}_-^S \nabla T_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \hat{G}_+^S \hat{G}_+^{A*} \nabla T_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B) + \\ & \left. \hat{G}_+^S \hat{G}_-^{A*} \nabla T_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B) + \hat{G}_-^S \hat{G}_+^{A*} \nabla T_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B) + \hat{G}_-^S \hat{G}_-^{A*} \nabla T_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B) \right] \cdot n_0 dS. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Podemos aproximar  $\nabla T_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^B) \cdot n_1$  como sendo dado por  $\pm \frac{|\cos \theta^B|}{c(\mathbf{x})}$  e  $\nabla T_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot n_1$  por  $\pm \frac{|\cos \theta^B|}{c(\mathbf{x})}$ . Aqui,  $\theta^B$  e  $\theta'$  representam os ângulos entre a direção dos raios e o vetor normal a superfície. Considerando que as fontes estejam muito distantes dos receptores podemos

supor que  $\theta^B \approx \theta' \approx 0$ . Com isso, podemos reescrever a aproximação (A.21) como

$$I_0 \approx \iint_{S_0} \frac{-2}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \nabla \hat{G}_+^{A*} \hat{G}_+^S + \nabla \hat{G}_-^{A*} \hat{G}_-^S \right) \cdot n_0 dS. \quad (\text{A.22})$$

Se considerarmos os campos da aproximação (A.22) como mostrado na Figura 5 podemos dizer que a parcela  $\nabla \hat{G}_+^{A*} \hat{G}_+^S = 0$ , uma vez que nenhum campo descendente é registrado na superfície  $S_0$ . Considerando que a superfície  $S_0$  é plana, com vetor normal  $n_0 = (0, 0, -1)$ , podemos escrever a equação (A.24) como

$$I_0 \approx \iint_{S_0} \frac{2}{\rho_A(\mathbf{x})} \hat{G}_-^S \partial_z \hat{G}_-^{A*} dS. \quad (\text{A.23})$$

De maneira análoga a simplificação feita para a integral sobre superfície  $S_0$ , podemos simplificar a equação (A.17), que é avaliada sobre a superfície  $S_1$ . Considerando novamente o esquema da Figura 5 podemos dizer que o termo  $\hat{G}_-^{A*} \hat{G}_-^S = 0$ , pois abaixo da superfície  $S_2$  no estado  $A$  temos um meio livre de reflexões, de maneira que nenhum campo retorna a  $S_1$ , isto é,  $\hat{G}_-^{A*} = 0$ . Além disso, o campo  $\hat{G}_+^S = 0$  na superfície  $S_1$ , pois  $\hat{G}_+^S$  representa o campo espalhado apenas abaixo de  $S_1$  (Bleistein et al., 2001). Com isso, temos que

$$I_1 \approx \iint_{S_1} \frac{-2}{\rho_A(\mathbf{x})} \left( \nabla \hat{G}_+^{A*} \hat{G}_+^S + \nabla \hat{G}_-^{A*} \hat{G}_-^S \right) \cdot n_1 dS = 0. \quad (\text{A.24})$$

Com isso, podemos reescrever a aproximação (A.15) como

$$\hat{G}^S(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}^B) \approx 2\rho_A(\mathbf{x}) \iint_{S_0} \frac{1}{\rho_A(\mathbf{x})} \hat{G}_-^S(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^B) \partial_z \hat{G}_-^{A*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') dS. \quad (\text{A.25})$$

Essa aproximação mostra que o campo espalhado no datum originado por uma fonte pontual em  $\mathbf{x}^B$  pode ser obtido pela correlação entre  $\hat{G}_-^S$ , e a derivada normal da função de Green reversa no tempo modelada no meio entre a superfície de aquisição e o datum. Essa equação representa a equação base para implementação do processo de redatumação por correlação discutida nesse trabalho.

## B Solução numérica da equação da onda 2D

Uma das aproximações que melhor representa a solução da equação da onda é o método das diferenças finitas. A aproximação se torna cada vez melhor quanto mais detalhada for a malha espacial e temporal. Neste trabalho, a aproximação dada por diferenças finitas em um meio 2D foi usada para retropropagar os dados medidos em superfície para um novo nível de referência. Vale ressaltar que a implementação do esquema de diferenças finitas não foi uma etapa desse trabalho.

Inicialmente, considera-se o meio parametrizado espacialmente pelas coordenadas cartesianas  $(x, z)$ . Para escrever uma aproximação numérica para a equação (1) precisamos discretizar o domínio. Considerando uma discretização regular, ou seja,  $\Delta x = \Delta z = \Delta h$ , o domínio pode ser discretizado como

$$\begin{cases} x_j = x_0 + j\Delta h, j = 0, \dots, J; \\ z_k = z_0 + k\Delta h, k = 0, \dots, K; \\ t^n = n\Delta t, n = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Sendo assim, o campo de onda  $P(x, z, t)$ , o termo fonte  $F(x, z, t)$  e a velocidade de propagação  $c(x, z)$ , definidos em todos os pontos  $(x, z)$  do  $\mathbb{R}^2$ , quando amostrados sobre a malha discreta, são representados por  $P_{j,k}^n = P(x_j, z_k, t_n)$ ,  $F_{j,k}^n = F(x_j, z_k, t_n)$  e  $c_{j,k} = c(x_j, z_k)$ , definidos nos pontos  $(x_j, z_k)$  do plano discretizado. Com isso, pode-se obter aproximações de Taylor de segunda ordem em torno do ponto  $(x, z, t)$  para as derivadas parciais da equação da onda acústica. Para aplicação do método, a derivada segunda temporal foi aproximada por um esquema centrado de segunda ordem. Para as derivadas espaciais foi aplicado um esquema centrado de 2M-ésima ordem, na forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{j,k}^n = \frac{P_{j,k}^{n+1} - 2P_{j,k}^n + P_{j,k}^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{j,k}^n = \frac{1}{\Delta h^2} \left[ a_0 P_{j,k}^n + \sum_{m=1}^M a_m (P_{j-m,k}^n + P_{j+m,k}^n) \right], \quad (\text{A.28})$$

$$\partial_{zz}^2 P_{j,k}^n = \frac{1}{\Delta h^2} \left[ a_0 P_{j,k}^n + \sum_{m=1}^M a_m (P_{j,k-m}^n + P_{j,k+m}^n) \right], \quad (\text{A.29})$$

onde  $a_m$  para  $m = 0, 1, \dots, M$  são coeficientes espaciais do esquema dados por

$$a_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \prod_{n=1}^M \left| \frac{n^2}{n^2 - m^2} \right|, \quad a_0 = -2 \sum_{m=1}^M a_m. \quad (\text{A.30})$$

Usando as aproximações acima, a versão discretizada da equação da onda 2D pode ser escrita como

$$P_{j,k}^{n+1} = \left( \frac{c_{j,k} \Delta t^2}{\Delta h} \right) \left[ 2a_0 P_{j,k}^n + \sum_{m=1}^M a_m (P_{j-m,k}^n + P_{j+m,k}^n + P_{j,k-m}^n + P_{j,k+m}^n) \right] + c_{j,k}^2 \Delta t^2 F_{j,k}^n + 2P_{j,k}^n - P_{j,k}^{n-1}. \quad (\text{A.31})$$

### B.1 Condições iniciais e de fronteira

Como a equação (A.31) é uma fórmula de recursão, ela depende de valores iniciais para gerar os campos de onda. Por isso, foi atribuído as seguintes condições iniciais

$$P_{j,k}^0 = P_{j,k}^1 = 0, \quad (\text{A.32})$$

para todo  $j = 0, 1, \dots, J$  e  $k = 0, 1, \dots, K$ .

Além disso, a equação (A.31) descreve fenômenos ondulatórios em um domínio espacial ilimitado, o que na prática não ocorre. Devido a esse fato, reflexões indesejadas oriundas das bordas do modelo podem vir a acontecer. Para evitar ou diminuir o máximo possível essas reflexões, o esquema de diferenças pode ser implementado utilizando bordas absorventes. Com essa condição, a malha numérica é estendida de acordo com o tempo máximo de observação para que essas reflexões não retornem a região de interesse. Diferentes abordagens para aplicação de bordas absorventes do tipo *Perfectly Matched Layer* (PML) podem ser encontradas em Berenger (1994) ou Roden e Gedney (2000).

## B.2 Análise de estabilidade e dispersão

Uma vez que o domínio foi discretizado para que a equação da onda possa ser resolvida numericamente, o método das diferenças finitas pode produzir erros numéricos, como dispersão e problemas de estabilidade (Camargo, 2014). Devido a isso, no processo de extrapolação dos campos de onda é necessário avaliar se erros numéricos estão dentro de uma faixa tolerável.

A fim de evitarmos problemas de estabilidade numérica e problemas de dispersão deve-se impor alguma condição sobre  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . De maneira geral um método vai ser estável caso os erros não sejam amplificados a cada passo de tempo, o que ocasionaria a explosão da solução numérica da equação. Já os problemas de dispersão podem ocorrer quando existem diferentes velocidades de fases, o que provoca oscilações na solução aproximada. Essas oscilações podem crescer em magnitude e prejudicar a interpretação dos resultados.

Definindo  $c_{\max} = \max\{c_{jk} | j = 1, J; k = 1, \dots, K\}$  e  $c_{\min} = \min\{c_{jk} | j = 1, J; k = 1, \dots, K\}$ , e sendo  $f_{\max}$  a maior frequência aceitável do pulso, as seguintes condições podem ser usadas (Bulcão, 2004)

$$\frac{\Delta x f_{\max}}{c_{\min}} < \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\Delta t c_{\max}}{\Delta x} < \frac{1}{\beta}, \quad (\text{A.34})$$

onde  $\beta$  e  $\alpha$  são valores obtidos de forma empírica. Bulcão (2004) cita que valores de  $\alpha = 5$  e  $\beta = 4$  são suficientes para garantir a estabilidade e evitar dispersão na aproximação. A relação mostrada na equação (A.34) é conhecida como critério de Courant-Friedrich-Levy.