



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GISELLE RIBEIRO DE AZEREDO SILVA STREY

**Códigos Perfeitos e Ladrilhamentos em
Diversos Reticulados Ambientés**

Campinas

2020

Giselle Ribeiro de Azeredo Silva Strey

Códigos Perfeitos e Ladrilhamentos em Diversos Reticulados Ambientes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: João Eloir Strapasson

Coorientadora: Sueli Irene Rodrigues Costa

Este exemplar corresponde à versão
final da Tese defendida pela aluna Gi-
selle Ribeiro de Azeredo Silva Strey e
orientada pelo Prof. Dr. João Eloir
Strapasson.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

St83c Strey, Giselle Ribeiro de Azeredo Silva, 1991-
Códigos perfeitos e ladrilhamentos em diversos reticulados ambientes /
Giselle Ribeiro de Azeredo Silva Strey. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: João Eloir Strapasson.
Coorientador: Sueli Irene Rodrigues Costa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos reticulados. 2. Ladrilhamento (Matemática). I. Strapasson,
João Eloir, 1979-. II. Costa, Sueli Irene Rodrigues. III. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Perfect codes and tilings in several ambient lattices

Palavras-chave em inglês:

Lattices theory

Tiling (Mathematics)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

João Eloir Strapasson [Orientador]

Grasiele Cristiane Jorge

Giuliano Gadioli La Guardia

Emerson Luiz do Monte Carmelo

Cristiano Torezzan

Data de defesa: 26-06-2020

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-6963-3365>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1839989402903090>

**Tese de Doutorado defendida em 26 de junho de 2020 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JOÃO ELOIR STRAPASSON

Prof(a). Dr(a). GRASIELE CRISTIANE JORGE

Prof(a). Dr(a). GIULIANO GADIOLI LA GUARDIA

Prof(a). Dr(a). EMERSON LUIZ DO MONTE CARMELO

Prof(a). Dr(a). CRISTIANO TOREZZAN

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Aos meus pais, José Francisco e Joelma, ao meu irmão Luiz Otavio
e ao meu marido Eleonesio, dedico.*

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por toda a força, saúde, perseverança, foco e fé nesta caminhada. Obrigada por nunca me abandonar e por me levantar todas as vezes que eu caí;
- Agradeço a minha família por todo o apoio, torcida e compreensão. Obrigada por entenderem as minhas ausências e por me darem todo suporte e amor necessários;
- Em especial, agradeço ao meu marido Eleonesio por estar ao meu lado em todos os momentos desse doutorado. Obrigada pela força, incentivo, carinho, amor e por sempre me lembrar que eu era capaz, mesmo quando eu não acreditava nisso;
- Ao meu orientador Prof. João Eloir Strapasson por toda a paciência, incentivo, ideias, confiança e, principalmente, por aceitar me orientar faltando pouco tempo para o término desse doutorado;
- A minha coorientadora Prof. Sueli Irene Rodrigues Costa por toda a ajuda, suporte e compreensão durante todos esses anos;
- Aos professores do IMECC/Unicamp por todo o conhecimento adquirido que foram fundamentais para a conclusão desse curso;
- Aos meus amigos, os que estavam perto, os que estavam longe. Obrigada por todos os risos, abraços, conselhos, carinho, apoio, torcida e amor. Obrigada por serem minha segunda família.
- Aos meus amigos do LMDC por todo o companheirismo, risadas, congressos, almoços, confraternizações, apoio e carinho. Vocês foram muito importantes nessa caminhada.
- Aos meus companheiros de Campinas, Maiara, Samuel, Roberto, Akemi e Tatiana, por compartilharem comigo suas jornadas, conquistas, medos e realizações. Obrigada por estarem ao meu lado sempre, estando vocês em São José dos Campos, em Campinas, nos EUA ou no céu.
- Aos professores, Dra. Grasielle Jorge, Dr. Cristiano Torezzan, Dr. Giuliano La Guardia e Dr. Emerson Carmelo, por aceitarem participar da minha banca de defesa e por todas as dicas e observações, que contribuíram muito para melhorar esse trabalho.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e também do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, processo nº 141343/2019-2.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência de códigos perfeitos em reticulados ambientes gerais considerando-se a métrica euclidiana. Discutimos a relação entre um ladrilhamento discreto de um reticulado e o ladrilhamento associado no espaço n -dimensional, bem como algumas caracterizações equivalentes de ladrilhamentos. Generalizamos limitantes para o raio de códigos perfeitos em reticulados ambientes genéricos, o que antes era conhecido para o reticulado \mathbb{Z}^n . Os novos limitantes são baseados nas densidades de empacotamento e cobertura e no raio de cobertura do reticulado ambiente. Considerando duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais e as famílias que obtemos mergulhando-as em dimensões maiores, estudamos os formatos de ladrilhos e a quantidade de códigos perfeitos encontrados. É apresentado um algoritmo para a busca de códigos perfeitos, que é utilizado para encontrar todos os códigos perfeitos para uma coleção de reticulados ambientes nas dimensões dois e três. Em contraste com o reticulado \mathbb{Z}^n , esses estudos de caso mostram que, alterando-se o reticulado ambiente, é possível encontrar conjuntos de códigos perfeitos.

Palavras-chave: Códigos perfeitos em reticulados, ladrilhamento, reticulados.

Abstract

In this work, we investigate the existence of perfect codes in general ambient lattices under the Euclidean metric. We discuss the relationship between a discrete tiling of a lattice and the associated continuous tiling of the n -dimensional lattice, as well as some equivalent characterizations of tilings. We generalize bounds on the radius of perfect codes in a generic lattice, what was previously known for the lattice \mathbb{Z}^n . The new bounds are based on the packing and the covering densities and on the covering radius of the ambient lattice. Considering two families of two-dimensional algebraic lattices and the families we can obtain by embedding them in larger dimensions, we have studied the tile formats and the number of perfect codes found. It is presented an algorithm for the search of perfect codes which is used to find all perfect codes for a collection of ambient lattices in dimensions two and three. In contrast to the lattice \mathbb{Z}^n , these case studies show that, by changing the ambient lattice, one can find sets of perfect codes.

Keywords: Perfect lattice codes, tiling, lattices.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Reticulado Λ gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (2, 0)$ e $\mathbf{v} = (1, 3)$	17
Figura 2 – $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, -1)\}$ são bases de \mathbb{Z}^2	18
Figura 3 – Reticulados $2\mathbb{Z}^2$, em vermelho, e \mathbb{Z}^2 , em preto e vermelho.	23
Figura 4 – Reticulado integral Λ	23
Figura 5 – Reticulado ortogonal Λ gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (2, 2)$ e $\mathbf{v} = (3, -3)$	24
Figura 6 – Ladrilhamentos de Λ	26
Figura 7 – Regiões de Voronoi dos reticulados Λ_1 e Λ_2 , respectivamente.	27
Figura 8 – Vetores de norma mínima do reticulado Λ	28
Figura 9 – Empacotamento reticulado de Λ	29
Figura 10 – Cobertura de \mathbb{R}^2	32
Figura 11 – Ilustração da série teta do reticulado \mathbb{Z}^2	39
Figura 12 – \mathcal{T} deslocado pelos vetores $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(4, 0)$	45
Figura 13 – Ladrilhamento de \mathbb{R}^2 por \mathcal{V}_{Λ_a}	45
Figura 14 – $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$	47
Figura 15 – Poliomino associado a \tilde{B}_3	48
Figura 16 – Região $\mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$	48
Figura 17 – Região $\mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$	49
Figura 18 – Região de Voronoi do reticulado hexagonal.	52
Figura 19 – Região \mathcal{R} para $n = 2$	55
Figura 20 – Região \mathcal{R}	58
Figura 21 – Λ não é um código perfeito em Λ_a	63
Figura 22 – No Exemplo 3.0.9 Λ é um código perfeito em Λ_a	64
Figura 23 – Ilustração da ação do homomorfismo Φ_1 nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$	72
Figura 24 – Ilustração da ação do homomorfismo Φ nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$	73
Figura 25 – União de 4 poliominos $T^2(\sqrt{2})$ e $T^2(\sqrt{18})$, respectivamente.	75
Figura 26 – Ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3 em vermelho, da união de 12 dessas regiões em laranja e da união de 6 regiões de Voronoi de D_3 em amarelo.	75
Figura 27 – Ilustração do polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{2}}$	76
Figura 28 – Ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3^* em vermelho, da união de 8 dessas regiões em laranja, 6 em amarelo e 12 em azul.	77
Figura 29 – Ilustração do polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{3}}$	77
Figura 30 – União de 4 poliominos $T^2(\sqrt{6})$ e $T^2(\sqrt{72})$, respectivamente.	78
Figura 31 – União de 4 poliominos $T^2(\sqrt{4})$ e $T^2(\sqrt{8})$, respectivamente.	79
Figura 32 – União de 4 poliominos $T^2(\sqrt{8})$ e $T^2(\sqrt{18})$, respectivamente.	80

Figura 33 – Poli-hexágono do Tipo 1 construído para $l = 43$	86
Figura 34 – Poli-hexágonos do Tipo 2 construídos para $l = 43$	91
Figura 35 – Poli-hexágono do Tipo 2 para $l = 67$	94
Figura 36 – Poli-hexágonos do Tipo 2 construídos para $l = 15$	94
Figura 37 – Poli-hexágono gerado pelas bolas do Tipo 2 em que o raio é dado pelos vetores $(1, 1)M_{l,1}$ e $(1, 0)M_{l,1}$, para $l = 3$	96
Figura 38 – Poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 95$	97
Figura 39 – Poli-hexágono do Tipo 3 construído para $l = 39$	98
Figura 40 – União de 4 poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 39$	98
Figura 41 – União de 4 poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 47$	101
Figura 42 – Poli-retângulo do Tipo 1 construído para $l = 18$	102
Figura 43 – Poli-retângulo do Tipo 2 construídos para $l = 10$	104
Figura 44 – Poli-retângulo do Tipo 2 para $l = 38$	107
Figura 45 – Poli-retângulos do Tipo 2 construídos para $l = 2$	107
Figura 46 – Poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 30$	109
Figura 47 – Poli-retângulo construído para $l = 2$	110
Figura 48 – União de 4 poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 2$	110
Figura 49 – Poli-retângulo construído para $l = 6$	110
Figura 50 – União de 4 poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 6$	111
Figura 51 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 27$	115
Figura 52 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 27$ com o plano xy	116
Figura 53 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 23$	118
Figura 54 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 23$ com o plano xy	118
Figura 55 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 47$	120
Figura 56 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 47$ com o plano xy	120
Figura 57 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$	121
Figura 58 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$ com o plano xy	121
Figura 59 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 14$	122
Figura 60 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 14$ com o plano xy	123
Figura 61 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$	124
Figura 62 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$ com o plano xy	124

Lista de tabelas

Tabela 1 – Empacotamentos reticulados mais densos.	38
Tabela 2 – Reticulados com menor densidade de cobertura.	38
Tabela 3 – Valores dos cossenos em (2.9).	53
Tabela 4 – Comparativo entre os termos dos limitantes superiores (3.9), (3.11) e (3.15).	69
Tabela 5 – Todos os códigos perfeitos em A_2 , seus respectivos raios de empacotamento r_i , $N_{A_2}(r_i)$ e as matrizes associadas A	74
Tabela 6 – Todos os códigos perfeitos em D_3 , seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	75
Tabela 7 – Todos os códigos perfeitos em D_3^* , seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	76
Tabela 8 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,7,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	79
Tabela 9 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,11,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	80
Tabela 10 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,15,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	81
Tabela 11 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,2,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	81
Tabela 12 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,6,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	82
Tabela 13 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,10,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	83
Tabela 14 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,14,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A	84

Sumário

	Introdução	14
1	RETICULADOS	17
1.1	Preliminares	17
1.2	Reticulado Dual	24
1.3	Região Fundamental	25
1.4	Número de Vizinhos	28
1.5	Empacotamento Esférico	29
1.6	Cobertura Esférica	31
1.7	Reticulados Importantes	32
1.8	Série Teta	38
1.9	Reticulados via Corpos Quadráticos	39
2	CARACTERIZAÇÕES EQUIVALENTES DE LADRILHAMENTOS .	44
2.1	Estudos de casos	51
2.1.1	Região de Voronoi do reticulado hexagonal	51
2.1.2	Releitura do resultado do Exemplo 2.0.8	53
2.1.3	Releitura de um resultado de S. W. Golomb e L. R. Welch	55
2.1.4	Possibilidades de Λ -ladrilhos para o reticulado hexagonal	57
3	CÓDIGOS PERFEITOS NA MÉTRICA EUCLIDIANA	61
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	70
4.1	Algoritmo	70
4.2	Resultados	73
4.2.1	Códigos perfeitos em A_2	74
4.2.2	Códigos perfeitos em D_3	74
4.2.3	Códigos perfeitos em D_3^*	76
4.2.4	Códigos perfeitos em reticulados algébricos bidimensionais	77
5	CÓDIGOS PERFEITOS EM RETICULADOS ALGÉBRICOS BIDI- MENSIONAIS	85
5.1	$-l \equiv 1 \pmod{4}$	85
5.1.1	Tipo 1: poli-hexágono de um nível	86
5.1.2	Tipo 2: poli-hexágono de três níveis	91
5.1.3	Tipo 3: poli-hexágono de cinco níveis	97

5.2	$l \equiv 2 \pmod{4}$	101
5.2.1	Tipo 1: poli-retângulo de um nível	102
5.2.2	Tipo 2: poli-retângulo de três níveis	104
5.2.3	Tipo 3: poli-retângulo de cinco níveis	109
6	CÓDIGOS PERFEITOS EM RETICULADOS n-DIMENSIONAIS	112
6.1	Dimensão 3	112
6.1.1	$-l \equiv 1 \pmod{4}$	115
6.1.2	$l \equiv 2 \pmod{4}$	120
6.2	Dimensão n	125
6.2.1	$-l \equiv 1 \pmod{4}$	127
6.2.2	$l \equiv 2 \pmod{4}$	130
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	133
	REFERÊNCIAS	135

Introdução

Um reticulado Λ_a é um subgrupo aditivo e discreto do \mathbb{R}^n . Equivalentemente, $\Lambda_a \subset \mathbb{R}^n$ é um reticulado se, e somente se, existem vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ tais que Λ_a é um conjunto definido por todas as combinações lineares inteiras de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Sejam $\Lambda \subset \Lambda_a$ um reticulado e $\mathcal{T} \subset \Lambda_a$ um conjunto finito. Uma coleção de translações disjuntas de \mathcal{T} por vetores de Λ é chamada de *ladrilhamento* de Λ_a se a união de seus elementos for igual a Λ_a . Neste caso, o conjunto \mathcal{T} é dito um Λ -ladrilho para Λ_a e o sub-reticulado Λ é chamado de *código perfeito* em Λ_a .

A existência de códigos perfeitos no reticulado \mathbb{Z}^n foi primeiramente investigada por S. W. Golomb e L. R. Welch em [1], no qual foi conjecturado que códigos perfeitos na métrica l_1 existem apenas para um conjunto muito restrito de dimensões e raios. A conjectura voltou a ter um forte apoio nos últimos anos, com o estabelecimento de novas técnicas para sua prova [2, 3]. Como os códigos perfeitos em \mathbb{Z}^n são escassos, é natural a consideração de generalizações menos exigentes. Para esse propósito, vários autores propuseram noções de códigos que capturam um certo grau de “imperfeição”, tais como os códigos corretores de erros “densos” [4], diâmetro-perfeitos [5], conjuntos de distância perfeitamente dominante [6], conjuntos perfeitamente dominantes [7, 8], códigos perfeitos totais tipo-reticulados [9], e os códigos quase-perfeitos [10]. Outra forma de generalização é permitir distâncias diferentes, como a métrica l_p [11].

Este trabalho considera um tipo de generalização diferente das consideradas anteriormente, permitindo que o reticulado que queremos ladrilhar, denominado *reticulado ambiente*, possa ser genérico e não apenas \mathbb{Z}^n . Consideramos aqui a métrica euclidiana, embora outras métricas possam ser potencialmente estudadas em trabalhos futuros.

Para um melhor entendimento do comportamento de códigos perfeitos em tais espaços, fornecemos resultados que generalizam limitantes conhecidos para o reticulado \mathbb{Z}^n e mostramos que, apesar de estarmos trabalhando num reticulado ambiente genérico Λ_a , códigos perfeitos podem ser raros. Os limitantes fornecidos estão relacionados com a densidade de empacotamento e a densidade de cobertura de um reticulado. Por outro lado, trabalhando em um reticulado ambiente Λ_a apropriado, podemos encontrar códigos perfeitos que, de outra forma, não existiriam para \mathbb{Z}^n , o que é exemplificado nesse trabalho por meio dos reticulados A_2 , D_3 , D_3^* , de alguns reticulados bidimensionais pertencentes a duas famílias de reticulados algébricos construídos via homomorfismo de Minkowski sobre os corpos quadráticos $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{-l})$, em que $l > 0$ e l é um inteiro livre de quadrados, e de reticulados n -dimensionais obtidos mergulhando os reticulados algébricos estudados anteriormente em dimensões maiores. Vale ressaltar que tanto para as famílias de

reticulados algébricos bidimensionais quanto para as famílias de reticulados n -dimensionais obtidas a partir dos algébricos, mostramos que sempre existem códigos perfeitos.

Apresentamos também uma caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier que é usada tanto para provar quanto para excluir possibilidades de sub-reticulados serem códigos perfeitos em um dado reticulado ambiente. Essa abordagem foi explorada por J. C. Lagarias e Y. Wang em [12, 13] para sub-reticulados de \mathbb{Z}^n , e provada por M. Kolountzakis em [14] para sub-reticulados de reticulados ambientes quaisquer. Utilizando essa abordagem, apresentamos uma releitura de um resultado apresentado por Golomb e Welch em [1].

Códigos perfeitos em diferentes reticulados ambientes, em particular na família de reticulados A_n , têm aplicações potenciais para configurações de comunicação, como nos canais de apagamento e repetição [15, 16]. Como outro ponto de interesse, vale ressaltar que, da mesma forma que ocorre com os códigos perfeitos em \mathbb{Z}^n , códigos perfeitos em um reticulado ambiente geral Λ_a podem induzir códigos perfeitos em ambientes finitos, considerando-se o toro Λ_a/Λ [17].

Resultados preliminares deste trabalho foram apresentados no International Symposium on Information Theory - ISIT (trabalho intitulado “Perfect Codes in Euclidean Lattices: Bounds and Case Studies”) [18] e no Latin American Week on Coding and Information - LAWCI (pôster intitulado “Perfect Codes and Tilings in General Ambient Spaces”). O artigo “Perfect Codes in Euclidean Lattices” (recém submetido) reúne vários dos resultados aqui apresentados.

Organização do Trabalho

No Capítulo 1 apresentamos definições, conceitos e propriedades de reticulados que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2 introduzimos os conceitos de ladrilhamento nas versões contínua, que é a mais conhecida, e discreta. Apresentamos também um resultado que relaciona essas duas definições de ladrilhamento. Além disso, fornecemos diferentes caracterizações de ladrilhamento, que usam isomorfismo de grupo e a transformada de Fourier. Ao final desse capítulo, exibimos quatro estudos de caso que usam a caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier, mostrando como essa caracterização pode ser útil tanto na demonstração de que um conjunto discreto é um Λ -ladrilho para um reticulado ambiente Λ_a , quanto para excluir possibilidades de Λ -ladrilhos para o reticulado ambiente.

No Capítulo 3 trabalhamos com os códigos perfeitos, dando ênfase aos resultados sobre não-existência desse tipo de código. Alguns resultados apresentados aqui são generalizações, para a métrica l_2 , de teoremas demonstrados em [10] e [11]. Fornecemos

também alguns limitantes importantes para o raio de empacotamento de um código perfeito em reticulados ambientes gerais.

No Capítulo 4, usando uma das caracterizações de ladrilhamento dadas no Capítulo 2 e os limitantes fornecidos no Capítulo 3, enumeramos todos os códigos perfeitos nos reticulados ambientes A_2 , D_3 , D_3^* , e de alguns reticulados bidimensionais pertencentes a duas famílias de reticulados algébricos construídos via homomorfismo de Minkowski.

No Capítulo 5, usando duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais construídas via homomorfismo de Minkowski, estudamos alguns tipos de ladrilhos encontrados e, observando suas formas e características, concluímos que, para essas famílias específicas, sempre encontraremos códigos perfeitos.

No Capítulo 6, utilizando novamente as duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais construídas e estudadas anteriormente, mergulhamos essas famílias em dimensões maiores, e assim provamos que para essas famílias de reticulados n -dimensionais, sempre teremos códigos perfeitos.

No último capítulo apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

1 Reticulados

A teoria de reticulados tem várias aplicações nas áreas de telecomunicações, criptografia pós-quântica, entre outras. Neste capítulo apresentamos conceitos introdutórios sobre reticulados, bem como resultados necessários para o desenvolvimento desta tese. As principais referências utilizadas na redação deste texto são [19, 20, 21, 22, 23, 24].

1.1 Preliminares

Definição 1.1.1. *Seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n . O conjunto*

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, m\} \right\} \quad (1.1)$$

*é denominado **reticulado** e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ é dita uma **base** do reticulado. Neste caso, dizemos que o reticulado Λ é gerado pela base.*

Exemplo 1.1.2. *Considere o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{(2, 0), (1, 3)\}$. Uma ilustração de Λ pode ser vista na Figura 1.*

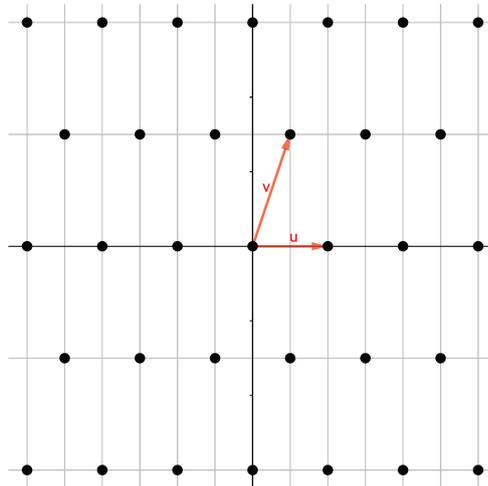


Figura 1 – Reticulado Λ gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (2, 0)$ e $\mathbf{v} = (1, 3)$.

Em [25] encontramos um resultado que fornece uma definição alternativa de reticulado:

Teorema 1.1.3. [25] *O conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é um reticulado se, e somente se, Λ é um subgrupo aditivo discreto de \mathbb{R}^n .*

Em [20] podemos encontrar uma demonstração para o Teorema 1.1.3.

Observação 1.1.4. Um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, em que $\Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$, não possui uma única base. Por exemplo, é fácil verificar que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, -1)\}$ são bases do reticulado \mathbb{Z}^2 , isto é, que todo elemento de \mathbb{Z}^2 pode ser escrito como combinação linear inteira dos elementos dessas bases. Na Figura 2 temos uma ilustração de \mathbb{Z}^2 e dos vetores das bases $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, -1)\}$ em vermelho e azul, respectivamente.

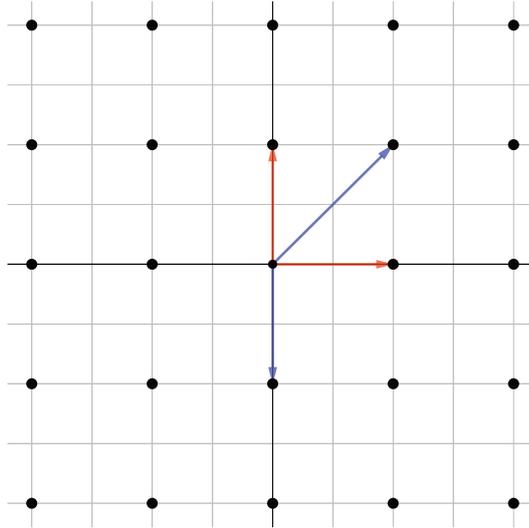


Figura 2 – $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, -1)\}$ são bases de \mathbb{Z}^2 .

Definição 1.1.5. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ uma base de Λ , em que $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ para $i \in \{1, \dots, m\}$. Chamamos de **matriz geradora** de Λ a matriz M cujas linhas são formadas pelos vetores de uma base do reticulado, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz geradora de Λ .

Um reticulado não possui uma única matriz geradora, uma vez que o mesmo não é gerado por uma única base, conforme vimos na Observação 1.1.4.

Exemplo 1.1.6. Considere o reticulado \mathbb{Z}^2 , ilustrado na Figura 2. Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, -1)\}$ são bases de \mathbb{Z}^2 , as matrizes $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ são matrizes geradoras do reticulado.

Definição 1.1.7. O espaço gerado por todas as combinações lineares reais dos vetores v_1, \dots, v_n é denotado por $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Se M é uma matriz geradora para um reticulado

Λ , representamos por $\text{span}(M)$ ou $\text{span}(\Lambda)$ o espaço vetorial real gerado pelas linhas da matriz M .

Observação 1.1.8. Note que $\text{span}(\Lambda)$ é o subespaço de \mathbb{R}^n de menor dimensão que contém o reticulado Λ .

Teorema 1.1.9. Duas bases de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ possuem o mesmo número de vetores, isto é, se $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ e $\beta = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ são bases de Λ , então $m = k$.

Demonstração. Se $\Lambda = \{\mathbf{0}\}$, não temos o que mostrar. Considere $\Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\mathbf{x} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Então existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i. \quad (1.2)$$

Como $\mathbf{v}_i \in \Lambda$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, e β é uma base para Λ , segue que existem $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$, tais que

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \mathbf{w}_j. \quad (1.3)$$

Assim, de (1.2) e (1.3), temos que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_i b_{ij} \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k a_i b_{ij} \right) \mathbf{w}_j. \quad (1.4)$$

Isso mostra que $\mathbf{x} \in \text{span}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$. Logo, $k \leq m$. De forma análoga, podemos mostrar que $m \leq k$. Portanto, $m = k$. \square

Pelo Teorema 1.1.9, duas bases de um reticulado possuem o mesmo número de vetores. Isso nos permite definir posto ou dimensão de um reticulado da seguinte forma:

Definição 1.1.10. O número de vetores de uma base de um reticulado Λ é chamado de **posto** ou **dimensão** de Λ . Se o posto de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é igual a n , dizemos que Λ é um reticulado de **posto completo**.

Definição 1.1.11. Uma matriz $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ é dita **unimodular** se $\det(U) = \pm 1$.

Observação 1.1.12. O produto de duas matrizes unimodulares é uma matriz unimodular. A inversa de uma matriz unimodular também é uma matriz unimodular. A matriz identidade é unimodular. Logo, o conjunto de todas as matrizes unimodulares é um grupo multiplicativo. Este grupo é usualmente denotado por $Gl_n(\mathbb{Z})$.

Teorema 1.1.13. Duas matrizes M_1 e M_2 são geradoras de um mesmo reticulado Λ se, e somente se, existe uma matriz unimodular U tal que $M_1 = UM_2$.

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ e $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ as linhas de M_1 e M_2 , respectivamente. Como M_1 e M_2 geram o mesmo reticulado Λ , temos que para $i, j \in \{1, \dots, m\}$, existem $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbb{Z}^m$ tais que $\mathbf{a}_i = \mathbf{u}_i M_2$ e $\mathbf{b}_j = \mathbf{v}_j M_1$. Então, $M_1 = U M_2$ e $M_2 = V M_1$, em que $U, V \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ tais que U é a matriz cuja i -ésima linha é o vetor \mathbf{u}_i , e V é a matriz cuja j -ésima linha é o vetor \mathbf{v}_j . Relacionando as duas igualdades, temos que $M_2 = V U M_2$. Multiplicando a direita ambos os lados da igualdade por $M_2^T (M_2 M_2^T)^{-1}$, temos que $I_m = V U$. Logo, $\det(V) \det(U) = 1$ e assim U e V são unimodulares. Portanto, existe uma matriz unimodular U tal que $M_1 = U M_2$.

(\Leftarrow) Como existe uma matriz unimodular U tal que $M_1 = U M_2$, temos que $\mathbf{a}_i = \mathbf{u}_i M_2, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, em que \mathbf{u}_i é a i -ésima linha de U . Por outro lado, temos também, que $M_2 = V M_1$, em que $V = U^{-1}$, que também é uma matriz unimodular. Então, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, temos que $\mathbf{b}_j = \mathbf{v}_j M_1$. Logo, M_1 e M_2 geram o mesmo reticulado. \square

Exemplo 1.1.14. Considere o reticulado gerado pela base $\{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$. Este reticulado é conhecido como **reticulado hexagonal**. Uma matriz geradora para esse reticulado é $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Observe que a matriz $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 5/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ também é uma matriz geradora para o reticulado hexagonal, uma vez que

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 5/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = U M_1$$

e $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz unimodular, pois possui coordenadas inteiras e $\det(U) = 1$.

Definição 1.1.15. A matriz $G = M M^T$ é denominada **matriz de Gram** do reticulado gerado por M .

Exemplo 1.1.16. As matrizes $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 5/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ são geradoras do reticulado hexagonal, como vimos no Exemplo 1.1.14. Note que

$$G_1 = M_1 M_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$G_2 = M_2 M_2^T = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 5/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ \sqrt{3} & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 19/2 \\ 19/2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\det(G_1) = \det(G_2) = 3/4$. Então vemos que neste exemplo os determinantes coincidiram tomando as bases formadas pelas linhas das matrizes geradoras M_1 e M_2 .

O que observamos no Exemplo 1.1.16 não é um caso isolado para o reticulado hexagonal, muito menos para essas duas bases específicas. Os determinantes das matrizes de Gram de um reticulado são sempre iguais, como estabelece o Teorema 1.1.17.

Teorema 1.1.17. *Se G_1 e G_2 são matrizes de Gram de um reticulado Λ , então $\det(G_1) = \det(G_2)$.*

Demonstração. Sejam M_1 e M_2 matrizes geradoras de um reticulado Λ , e G_1 e G_2 as matrizes de Gram associadas a M_1 e M_2 , respectivamente. Pelo Teorema 1.1.13, existe uma matriz unimodular U tal que $M_1 = UM_2$. Então $G_1 = M_1M_1^T = (UM_2)(UM_2)^T = UM_2M_2^T U^T$. E logo

$$\det(G_1) = \det(U)^2 \det(G_2) = \det(G_2). \quad (1.5)$$

Portanto, o determinante da matriz de Gram de um reticulado não depende da matriz geradora escolhida. \square

Definição 1.1.18. *O **determinante** do reticulado Λ , denotado por $\det(\Lambda)$, é definido como o determinante da matriz de Gram, isto é, $\det(\Lambda) = \det(G)$.*

Exemplo 1.1.19. *Considere o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{(2, 0), (1, 3)\}$. Assim, uma matriz geradora para Λ é $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e a matriz de Gram de Λ associada a esta matriz é dada por $G = MM^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Logo, pela Definição 1.1.15, segue que $\det(\Lambda) = \det(G) = 36$.*

Definição 1.1.20. *Dois reticulados Λ_1 e Λ_2 em \mathbb{R}^n são ditos **equivalentes** se podemos obter Λ_1 por meio de Λ_2 por uma composição de rotações, reflexões e mudança de escala, isto é, se existirem uma matriz unimodular U , uma matriz ortogonal Q e um número real positivo c tais que $M_1 = cUM_2Q$, em que M_1 e M_2 são matrizes geradoras de Λ_1 e Λ_2 , respectivamente. Dizemos que c é a **razão de semelhança** de Λ_1 para Λ_2 .*

Teorema 1.1.21. *Se Λ_1 e Λ_2 são reticulados equivalentes em \mathbb{R}^n , então existem $c \in \mathbb{R}_+$ e $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ unimodular tais que $G_1 = c^2UG_2U^T$, em que G_1 é matriz de Gram de Λ_1 , G_2 é a matriz de Gram de Λ_2 .*

Demonstração. Se Λ_1 e Λ_2 são reticulados equivalentes, então existem $c \in \mathbb{R}_+$, U unimodular e Q ortogonal tais que $M_1 = cUM_2Q$, em que M_1 e M_2 são geradoras de Λ_1 e Λ_2 , respectivamente. Logo,

$$G_1 = M_1M_1^T = (cUM_2Q)(cUM_2Q)^T = c^2UM_2QQ^TM_2^TU^T = c^2UG_2U^T. \quad (1.6)$$

\square

Corolário 1.1.22. *Se Λ_1 e Λ_2 são reticulados equivalentes em \mathbb{R}^n de posto completo, com razão de semelhança de Λ_1 para Λ_2 igual a c , então $\det(\Lambda_1) = c^{2n} \det(\Lambda_2)$.*

Demonstração. Da Equação (1.6) segue que

$$\det(\Lambda_1) = \det(G_1) = c^{2n} \det(UG_2U^T) = c^{2n} \det(\Lambda_2).$$

Logo, temos o que queremos mostrar. \square

Teorema 1.1.23. [21] *Dois reticulados Λ_1 e Λ_2 são equivalentes em \mathbb{R}^n com razão de semelhança $c \in \mathbb{R}_+$ se, e somente se, existem matrizes de Gram G_1 e G_2 de Λ_1 e Λ_2 , respectivamente, tais que $G_2 = c^2 G_1$.*

Exemplo 1.1.24. *Considere o reticulado hexagonal imerso no \mathbb{R}^3 gerado pela base $\{(1, 0, 0), (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)\}$, e o reticulado A_2 com base $\{(-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$. Sejam G_1 e G_2 matrizes de Gram do reticulado hexagonal e do reticulado A_2 , respectivamente. Observe que*

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $G_1 = (\sqrt{2})^2 G_2$, pelo Teorema 1.1.23, o reticulado hexagonal e o reticulado A_2 são equivalentes, com razão de semelhança $\sqrt{2}$.

Definição 1.1.25. *Dizemos que $\Lambda_1 \subset \Lambda$ é um **sub-reticulado** de Λ se Λ_1 também for um reticulado.*

Exemplo 1.1.26. $2\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ é um sub-reticulado de \mathbb{Z}^2 , em que $\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ e $2\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in 2\mathbb{Z}\}$. Na Figura 3 temos uma ilustração de $2\mathbb{Z}^2$, em vermelho, e de \mathbb{Z}^2 , em preto e vermelho.

Definição 1.1.27. *Um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é dito **integral** se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$, em que “ \cdot ” denota o produto interno usual em \mathbb{R}^n .*

Exemplo 1.1.28. *Considere o reticulado Λ gerado pela base $\{(3, 0), (1, 1)\}$. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathbf{x} = \alpha_1(3, 0) + \beta_1(1, 1)$ e $\mathbf{y} = \alpha_2(3, 0) + \beta_2(1, 1)$. Note que*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (3\alpha_1 + \beta_1, \beta_1) \cdot (3\alpha_2 + \beta_2, \beta_2) = 9\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\beta_1\beta_2 \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pela Definição 1.1.27, Λ é um reticulado integral. A Figura 4 ilustra o reticulado Λ .

Observação 1.1.29. *Todo sub-reticulado Λ de \mathbb{Z}^n é um reticulado integral, mas nem todo reticulado integral é um sub-reticulado de \mathbb{Z}^n . Por exemplo, o reticulado Λ gerado pela base $\{(5\sqrt{2}, 0), (0, 3\sqrt{2})\}$ é integral, mas não é um sub-reticulado de \mathbb{Z}^n .*

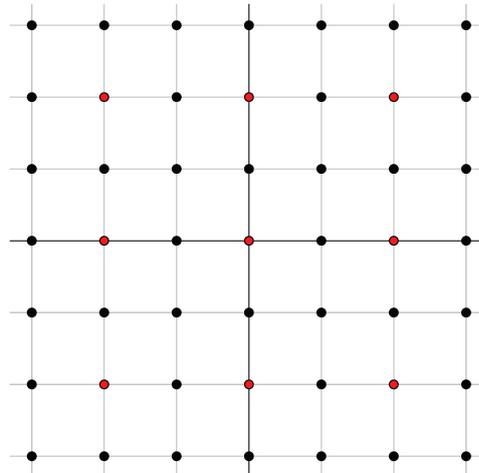


Figura 3 – Reticulados $2\mathbb{Z}^2$, em vermelho, e \mathbb{Z}^2 , em preto e vermelho.

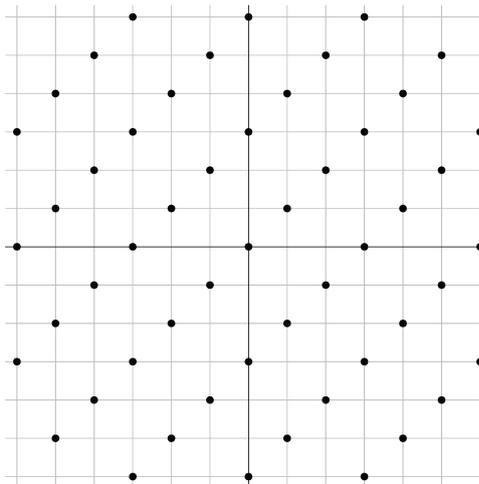


Figura 4 – Reticulado integral Λ .

Definição 1.1.30. Um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é dito **par** se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \in 2\mathbb{Z}$, para todo $\mathbf{x} \in \Lambda$.

Exemplo 1.1.31. O reticulado Λ gerado por $\{(\sqrt{2}, 0), (0, 3\sqrt{2})\}$ é um reticulado par, uma vez que $\Lambda = \{(\alpha\sqrt{2}, 3\beta\sqrt{2}) : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$, e

$$(\alpha_1\sqrt{2}, 3\beta_1\sqrt{2}) \cdot (\alpha_2\sqrt{2}, 3\beta_2\sqrt{2}) = 2(\alpha_1\alpha_2 + 9\beta_1\beta_2) \in 2\mathbb{Z}, \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}.$$

Definição 1.1.32. Um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é dito **ortogonal** se Λ possui uma base de vetores ortogonais.

Exemplo 1.1.33. Considere o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, em que $\mathbf{u} = (2, 2)$ e $\mathbf{v} = (3, -3)$. Como $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, segue que Λ é ortogonal. Na Figura 5 temos uma

ilustração de Λ .

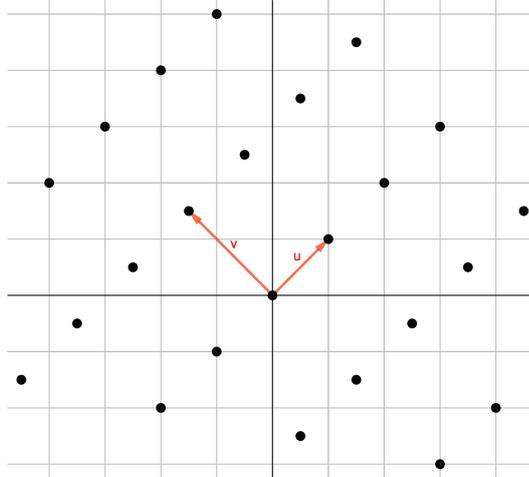


Figura 5 – Reticulado ortogonal Λ gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (2, 2)$ e $\mathbf{v} = (3, -3)$.

Observação 1.1.34. *Nem toda base de um reticulado ortogonal é ortogonal. Por exemplo, $\{(2, 2), (-1, 5)\}$ é uma base do reticulado do Exemplo 1.1.33, mas os vetores $(2, 2)$ e $(-1, 5)$ não são ortogonais.*

1.2 Reticulado Dual

Definição 1.2.1. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\beta = \{b_1, \dots, b_m\}$ uma base para Λ . O reticulado dual de Λ é definido como*

$$\Lambda^* = \{\mathbf{x} \in \text{span}(\beta) : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{y} \in \Lambda\}. \quad (1.7)$$

Observação 1.2.2. *Se $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ for um reticulado de posto completo, o reticulado dual de Λ pode ser reescrito como*

$$\Lambda^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{y} \in \Lambda\}. \quad (1.8)$$

Teorema 1.2.3. *Se $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz geradora para um reticulado Λ , então $(MM^T)^{-1}M$, isto é, a pseudoinversa de M^T , é uma matriz geradora para o reticulado dual Λ^* .*

Demonstração. Sejam Λ e Λ_1 os reticulados gerados por $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $(MM^T)^{-1}M$, respectivamente. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$, temos que

$$(\mathbf{x}M)(\mathbf{y}(MM^T)^{-1}M)^T = \mathbf{x}MM^T(MM^T)^{-1}\mathbf{y}^T = \mathbf{x}(MM^T)(MM^T)^{-1}\mathbf{y}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{Z}.$$

Então, $\mathbf{y}(MM^T)^{-1}M \in \Lambda^*$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ e, logo, $\Lambda_1 \subset \Lambda^*$. Agora, seja $\mathbf{v} \in \Lambda^*$. Como $\text{span}(M) = \text{span}((MM^T)^{-1}M)$, segue que $\mathbf{v} \in \text{span}((MM^T)^{-1}M)$, isto é, existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{v} = \mathbf{u}(MM^T)^{-1}M$. Por outro lado, $\mathbf{v} \in \Lambda^*$, isto é, $\mathbf{v}M^T \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(MM^T)^{-1}M)M^T \in \mathbb{Z}$. Assim, $\mathbf{v} \in \Lambda_1$, e portanto, $\Lambda_1 \supset \Lambda^*$. Isso mostra que o dual de Λ é gerado por $(MM^T)^{-1}M$. \square

Corolário 1.2.4. *Se M é uma matriz geradora para um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ de posto completo, então $(M^T)^{-1}$ é uma matriz geradora para o reticulado dual Λ^* .*

Demonstração. Sejam Λ um reticulado de posto completo e M uma matriz geradora para Λ . Pelo Teorema 1.2.3, temos que uma matriz geradora para Λ^* é $(MM^T)^{-1}M$. Como Λ possui posto completo, segue que M possui inversa. Então, $(MM^T)^{-1}M = (M^T)^{-1}M^{-1}M = (M^T)^{-1}$. Logo, o dual de Λ é gerado por $(M^T)^{-1}$. \square

Exemplo 1.2.5. *Considere o reticulado Λ do Exemplo 1.1.19. Pelo Corolário 1.2.4, uma matriz geradora para Λ^* é $(M^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.*

Teorema 1.2.6. *Sejam Λ um reticulado e Λ^* seu reticulado dual. Então, temos que $\det(\Lambda^*) = 1/\det(\Lambda)$.*

Demonstração. Sejam M uma matriz geradora de Λ e $G = MM^{-T}$ a matriz de Gram de Λ associada a M . Pelo Teorema 1.2.3, temos que $(MM^T)^{-1}M$ é uma matriz geradora para Λ^* , e $G^* = (MM^T)^{-1}M((MM^T)^{-1}M)^T$ é a matriz de Gram de Λ^* associada a $(MM^T)^{-1}M$. Observe que

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^*) &= \det(G^*) = \det((MM^T)^{-1}M((MM^T)^{-1}M)^T) \\ &= \det((MM^T)^{-1}) = \frac{1}{\det(MM^T)} = \frac{1}{\det(\Lambda)}. \end{aligned}$$

\square

1.3 Região Fundamental

Definição 1.3.1. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado, M uma matriz geradora para Λ e $V = \text{span}(M)$. Uma **região fundamental** F de um reticulado Λ é um subconjunto de V que ladrilha V por translações de vetores de Λ , isto é, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda$ distintos, temos que $(F + \mathbf{u}) \cap (F + \mathbf{v})$ tem medida nula e $\bigcup_{\mathbf{v} \in \Lambda} (\mathbf{v} + F) = V$.*

Exemplo 1.3.2. *Considere o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ com base $\{(1, 1), (-1, 2)\}$. A Figura 6 ilustra dois ladrilhamentos do \mathbb{R}^2 obtidos por translações de vetores de Λ . O primeiro ladrilhamento foi obtido pela região fundamental F_1 de Λ , em que $F_1 = \{a(1, 1) + b(-1, 2) :$*

$0 \leq a, b < 1$ e o segundo pela região fundamental F_2 de Λ , a saber, $F_2 = \{a(0, 3) + b(1, 1) : 0 \leq a, b < 1\}$.

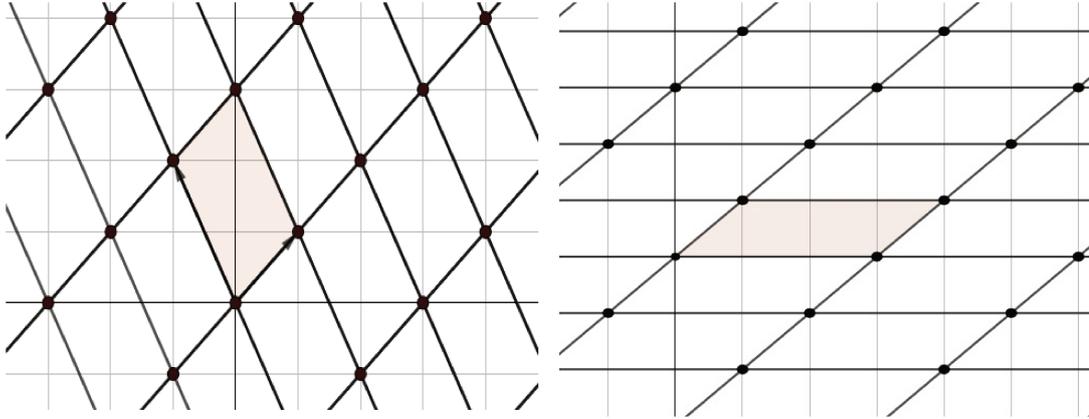


Figura 6 – Ladrilhamentos de Λ .

Importantes regiões fundamentais de reticulados são os paralelotosos fundamentais e as regiões de Voronoi, definidas em 1.3.3 e 1.3.5, respectivamente.

Definição 1.3.3. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\beta = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ uma base para Λ . Chamamos o conjunto*

$$P_\beta = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i : 0 \leq a_i < 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

de **paralelotopo fundamental** de Λ associado a base β .

Exemplo 1.3.4. *Considere novamente o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ com base $\{(1, 1), (-1, 2)\}$. Os conjuntos F_1 e F_2 , ilustrados na Figura 6, são paralelotosos fundamentais de Λ associados, respectivamente, com as bases $\{(1, 1), (-1, 2)\}$ e $\{(0, 3), (1, 1)\}$ de Λ .*

Definição 1.3.5. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\beta = \{b_1, \dots, b_m\}$, com $m \leq n$, uma base para Λ . Dado um elemento \mathbf{v} de Λ , a **região de Voronoi** de \mathbf{v} é definida como*

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \text{span}(\beta) : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in \Lambda\}. \quad (1.9)$$

Em outras palavras, a região de Voronoi de \mathbf{v} é formada por todos os pontos do $\text{span}(\beta)$ que estão mais próximos ou a mesma distância de \mathbf{v} do que de qualquer outro ponto de Λ .

Observação 1.3.6. *Se $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ for um reticulado de posto completo, a região de Voronoi de um ponto $\mathbf{v} \in \Lambda$ pode ser reescrita como*

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in \Lambda\}. \quad (1.10)$$

Teorema 1.3.7. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\mathbf{v} \in \Lambda$. Temos que $\mathcal{V}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathcal{V}(\mathbf{0})$.*

Demonstração. Para todo $\mathbf{v} \in \Lambda$, podemos observar que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{v}) &\iff \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in \Lambda \\
 &\iff \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in \Lambda \\
 &\iff \|(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - \mathbf{0}\| \leq \|(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - \mathbf{w}\|, \forall \mathbf{w} \in \Lambda \\
 &\iff \mathbf{x} - \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{0}) \\
 &\iff \mathbf{x} \in \mathbf{v} + \mathcal{V}(\mathbf{0}).
 \end{aligned}$$

Logo, temos o que queríamos demonstrar. \square

Observação 1.3.8. A região $\mathcal{V}(\mathbf{0})$ é chamada de **região de Voronoi de Λ** e é denotada por \mathcal{V}_Λ .

Exemplo 1.3.9. Sejam Λ_1 e Λ_2 reticulados gerados pelas bases $\{(1, 1), (-1, 2)\}$ e $\{(1, 1), ((1 + \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2)\}$, respectivamente. Uma ilustração da região de Voronoi dos reticulados Λ_1 e Λ_2 pode ser vista na Figura 7.

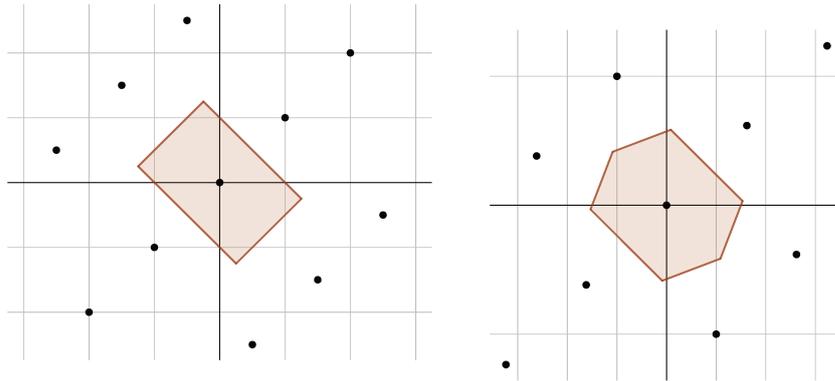


Figura 7 – Regiões de Voronoi dos reticulados Λ_1 e Λ_2 , respectivamente.

Teorema 1.3.10. [26] O volume de qualquer região fundamental de um reticulado é o mesmo.

Definição 1.3.11. O **volume** de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\text{vol}(\Lambda)$, é definido como o volume de uma região fundamental F de Λ .

Teorema 1.3.12. [21] O volume de um paralelepípedo fundamental de $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é dado por $\sqrt{\det(\Lambda)}$. Logo, $\text{vol}(\Lambda) = \sqrt{\det(\Lambda)}$.

Uma demonstração para o Teorema 1.3.12 pode ser encontrado em [20].

Observação 1.3.13. Sejam Λ e Λ_1 reticulados em \mathbb{R}^n tais que $\Lambda_1 \subset \Lambda$. Um sub-reticulado Λ_1 de Λ é um subgrupo de Λ , e podemos assim considerar o grupo quociente Λ/Λ_1 . Se

$\text{posto}(\Lambda) = \text{posto}(\Lambda_1)$, a cardinalidade do grupo quociente é finita e dada por [22]:

$$|\Lambda/\Lambda_1| = \frac{\text{vol}(\Lambda_1)}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{(\det(\Lambda_1))^{1/2}}{(\det(\Lambda))^{1/2}}. \quad (1.11)$$

Definição 1.3.14. A cardinalidade do grupo quociente Λ/Λ_1 , denotada por $|\Lambda/\Lambda_1|$, é chamada de **índice** do sub-reticulado Λ .

1.4 Número de Vizinhos

Um problema muito estudado e conhecido na Teoria de Reticulados é o problema do número de vizinhos, ou *kissing number*.

Definição 1.4.1. Dado um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ chamamos de **vetor de norma mínima** os vetores $\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ tais que $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{y} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, e chamamos de **norma mínima** de Λ ou **distância mínima** de Λ o valor $d = \|\mathbf{x}\|$, ou seja, a norma de um vetor de norma mínima.

Definição 1.4.2. Dado um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, chamamos de **número de vizinhos** (ou *kissing number*), denotado por τ_Λ , o número de vetores de norma mínima de Λ .

Exemplo 1.4.3. Considere o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{(1, 0), (2, 2)\}$. Os vetores de norma mínima de Λ são os vetores $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0)$, sendo a norma mínima $d = 1$. Logo, segue que o número de vizinhos $\tau_\Lambda = 2$, como podemos observar na Figura 8.

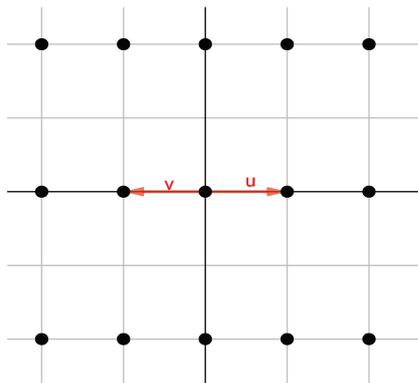


Figura 8 – Vetores de norma mínima do reticulado Λ .

1.5 Empacotamento Esférico

Definição 1.5.1. *Seja V um espaço vetorial normado. A **bola fechada (real)** centrada em $\mathbf{z} \in V$ com raio $r > 0$, denotada por $B(\mathbf{z}, r)$, é definida como $B(\mathbf{z}, r) = \{\mathbf{x} \in V : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq r\}$. Quando $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, por simplicidade, denotaremos a bola como B_r ao invés de $B(\mathbf{0}, r)$.*

Definição 1.5.2. *Seja V um espaço vetorial normado. Um **empacotamento esférico**, ou simplesmente um empacotamento em V , é uma distribuição de bolas/esferas, todas do mesmo raio, de forma que duas bolas/esferas quaisquer não se interceptam ou se interceptam apenas nos bordos. Um **empacotamento reticulado** é um empacotamento esférico em que o conjunto dos centros das bolas/esferas forma um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ em $V = \text{span}(\Lambda)$.*

Exemplo 1.5.3. *Considere novamente o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{(1, 0), (2, 2)\}$. A Figura 9 mostra um empacotamento reticulado de Λ . Observe que as bolas possuem o maior raio possível tal que duas bolas não se interceptam ou se interceptam apenas nos bordos.*

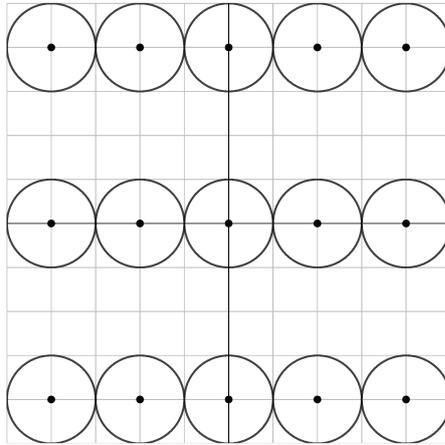


Figura 9 – Empacotamento reticulado de Λ .

Definição 1.5.4. *O **raio de empacotamento** de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, denotado por ρ , é o maior raio para o qual é possível distribuir bolas/esferas centradas nos elementos de Λ e obter um empacotamento reticulado, isto é,*

$$\rho = \max\{r \in \mathbb{R} : \Lambda + B_r \text{ é um empacotamento reticulado}\}. \quad (1.12)$$

Teorema 1.5.5. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e \mathbf{x} um vetor de norma mínima. Temos que o raio de empacotamento de Λ é dado por $\rho = \|\mathbf{x}\|/2$, isto é, a metade da norma mínima de Λ .*

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in \Lambda$ um vetor de norma mínima de Λ . Então, temos que $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{y} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$. Considere $\rho = \|\mathbf{x}\|/2$. Vamos mostrar que $\Lambda + B_\rho$ é um empacotamento reticulado. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda$ tais que $(\mathbf{u} + B_\rho) \cap (\mathbf{v} + B_\rho)$ não tem medida nula. Considere também $\mathbf{w}, \mathbf{t} \in B_\rho$, tais que $\mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{t} + \mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{w}$. Note que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{t} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{t}\| + \|\mathbf{w}\| \leq \rho + \rho = 2\rho = \|\mathbf{x}\|. \quad (1.13)$$

Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda$, temos que $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \Lambda$ e consequentemente $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{x}\|$, uma vez que \mathbf{x} é um vetor de norma mínima de Λ . Assim, de (1.13), segue que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{t} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{x}\|$. Então,

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{t} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{t}\| + \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{t}\| + \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Como $\|\mathbf{t}\| \leq \rho$ e $\|\mathbf{w}\| \leq \rho$, segue que $\|\mathbf{t}\| = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{x}\|/2 = \rho$. Logo, temos que $\mathbf{u} + B_\rho$ e $\mathbf{v} + B_\rho$ se interceptam apenas nos bordos, o que mostra que $\Lambda + B_\rho$ é um empacotamento reticulado. Agora, observe que $\rho = \|\mathbf{x}\|/2$ é o maior raio para o qual é possível obter um empacotamento reticulado, pois se tomarmos um raio $r > \rho$, $\Lambda + B_r$ não seria empacotamento reticulado, uma vez que $\mathbf{x}/2 \in B(\mathbf{x}, r) \cap B_r$ e $\mathbf{x} \in \Lambda$. Logo, temos o que queríamos mostrar. \square

Exemplo 1.5.6. *Vamos considerar mais uma vez o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado por $\{(1, 0), (2, 2)\}$. No Exemplo 1.4.3, vimos que a norma mínima de Λ é igual a 1. Assim, pelo Teorema 1.5.5, segue que o raio de empacotamento de Λ é $\rho = \|\mathbf{x}\|/2 = 1/2$.*

Denotamos por V_m o volume da bola unitária em \mathbb{R}^m .

Definição 1.5.7. *Dado um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ de posto m , definimos a **densidade de empacotamento esférico** de Λ como*

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda) &= \frac{\text{volume euclidiano } m\text{-dimensional de uma esfera de raio } \rho}{\text{volume euclidiano } m\text{-dimensional de uma região fundamental de } \Lambda} \\ &= \frac{\text{vol}_m(B_\rho)}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{\text{vol}_m(B_1)\rho^m}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{V_m\rho^m}{\det(\Lambda)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

O volume V_m da bola unitária em \mathbb{R}^m é dado por [19]:

$$V_m = \begin{cases} \frac{\pi^{m/2}}{(m/2)!}, & \text{se } m \text{ é par,} \\ \frac{2^m \pi^{(m-1)/2} ((m-1)/2)!}{m!}, & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observação 1.5.8. *Dado um empacotamento no \mathbb{R}^n , a densidade de empacotamento $\Delta(\Lambda)$ é a proporção do \mathbb{R}^n coberta pela união das bolas/esferas de raio ρ centradas nos pontos de Λ .*

Definição 1.5.9. A *densidade de centro* de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ de posto n e de raio de empacotamento ρ é dada por

$$\delta(\Lambda) = \frac{\rho^n}{\text{vol}(\Lambda)}. \quad (1.15)$$

Exemplo 1.5.10. Considere mais uma vez $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ gerado pela base $\{(1, 0), (2, 2)\}$. O vetor $\mathbf{u} = (1, 0)$ é um vetor de norma mínima de Λ e, conseqüentemente, o raio de empacotamento de Λ é igual a $\rho = \|\mathbf{u}\|/2 = 1/2$. Note também que $V_2 = \pi$ e que $\text{vol}(\Lambda) = 2$. Assim, a densidade de empacotamento de Λ é

$$\Delta(\Lambda) = \frac{V_2 \rho^2}{\det(\Lambda)^{1/2}} = \frac{\pi(1/2)^2}{2} = \frac{\pi}{8},$$

e a densidade de centro de Λ é $\delta(\Lambda) = 1/8$.

Observação 1.5.11. Um problema clássico na Teoria de Reticulados é a busca dos empacotamentos reticulados mais densos em cada dimensão. Até o presente momento, foi mostrado os empacotamentos mais densos nas dimensões de 1 a 8 [19] e na dimensão 24 [27].

1.6 Cobertura Esférica

Definição 1.6.1. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $V = \text{span}(\Lambda)$. Dizemos que o conjunto $\Lambda + B_r$ é uma **cobertura** de V se $V \subset (\Lambda + B_r)$.

Definição 1.6.2. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $V = \text{span}(\Lambda)$. O número

$$R_\Lambda = \min\{r : \Lambda + B_r \text{ é uma cobertura de } V\} \quad (1.16)$$

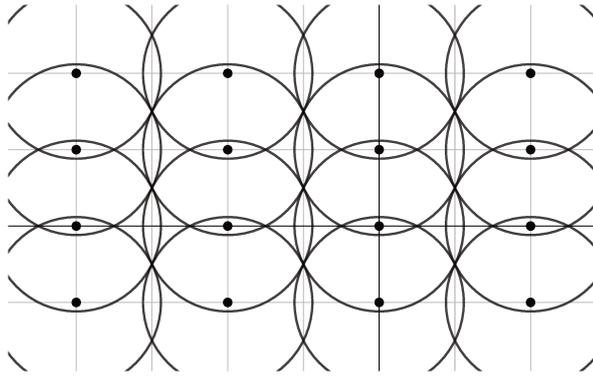
é chamado de **raio de cobertura** de Λ . Em outras palavras, o raio de cobertura de um reticulado Λ é o menor $r > 0$ tal que $\bigcup_{\mathbf{z} \in \Lambda} B(\mathbf{z}, r) \supset V$.

Exemplo 1.6.3. Considere o reticulado Λ gerado pela base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, em que $\mathbf{u} = (2, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1)$. A Figura 10 mostra uma cobertura de \mathbb{R}^2 . As bolas dessa cobertura estão centradas em pontos de Λ e possuem raio R_Λ .

Definição 1.6.4. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado de posto m e $V = \text{span}(\Lambda)$. A densidade de cobertura em V de Λ é dada por

$$\Theta(\Lambda) = \frac{V_m(R_\Lambda)^m}{\text{vol}(\Lambda)}, \quad (1.17)$$

em que V_m é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^m .

Figura 10 – Cobertura de \mathbb{R}^2 .

Observação 1.6.5. Um outro problema na Teoria de Reticulados é o problema da cobertura, que consiste em encontrar os reticulados com menor densidade de cobertura em cada dimensão. Na maioria das dimensões, o reticulado com menor densidade de cobertura conhecido é o A_n^* . Porém, na dimensão 24, o reticulado com menor densidade de cobertura conhecido é o reticulado de Leech Λ_{24} . Apenas para as dimensões de 1 a 5 [19] e 24 [28] o resultado foi provado. Os reticulados aqui citados serão apresentados na Seção 1.7.

1.7 Reticulados Importantes

Alguns reticulados clássicos estão listados abaixo.

- Reticulado \mathbb{Z}^n

O reticulado cúbico \mathbb{Z}^n é definido como

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Qualquer matriz unimodular $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ gera o reticulado \mathbb{Z}^n . Em particular, a matriz identidade I_n é uma matriz geradora de \mathbb{Z}^n . Temos que $\det(\mathbb{Z}^n) = 1$, sua norma mínima é igual a 1, o número de vizinhos é igual a $2n$, o raio de empacotamento $\rho = 1/2$ e a sua densidade de centro é $\delta(\mathbb{Z}^n) = 2^{-n}$.

- Reticulados A_n e A_n^*

O reticulado A_n é definido como

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + \dots + x_n = 0\}.$$

Uma matriz geradora para o reticulado A_n é dada por

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(A_n) = n + 1$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $\sqrt{2}$, o número de vizinhos é igual a $n(n + 1)$, o raio de empacotamento $\rho = 1/\sqrt{2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(A_n) = 2^{-n/2}(n + 1)^{-1/2}$.

Quando $n = 2$, vimos no Exemplo 1.1.24 que o reticulado A_2 é equivalente ao reticulado hexagonal, que possui matriz geradora $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

O reticulado A_n^* é construído por todas as combinações lineares inteiras das linhas da seguinte matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(A_n^*) = 1/(n + 1)$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $n/(n + 1)$, o número de vizinhos é igual a 2 (se $n = 2$) ou $2n + 2$ (para $n \geq 3$), o raio de empacotamento $\rho = 1/2(n/(n + 1))^{1/2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(A_n^*) = n^{n/2}/2^n(n + 1)^{(n-1)/2}$.

- Reticulados D_n e D_n^*

Para $n \geq 3$, o reticulado D_n é definido como

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \cdots + x_n \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Uma matriz geradora para D_n é dada por

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(D_n) = 4$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $\sqrt{2}$, o número de vizinhos é igual a $2n(n-1)$, o raio de empacotamento $\rho = 1/\sqrt{2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(D_n) = 2^{-(n+2)/2}$.

Para $n \geq 3$, o reticulado D_n^* é gerado por todas as combinações lineares inteiras das linhas da seguinte matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(D_n^*) = 1/4$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $3/4$ (se $n = 3$) ou 1 (se $n \geq 4$), o número de vizinhos é igual a 8 (se $n = 3$), 24 (se $n = 4$) ou $2n$ (se $n \geq 5$), o raio de empacotamento ρ é igual a $\sqrt{3}/4$ (se $n = 3$) ou $1/2$ (se $n \geq 4$) e a sua densidade de centro $\delta(D_n^*)$ é igual a $3^{1.5}2^{-5}$ (se $n = 3$) ou $2^{-(n-1)}$ (se $n \geq 4$).

- Reticulado E_8

O reticulado E_8 é definido por

$$E_8 = \left\{ (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 : \mathbf{x}_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } \mathbf{x}_i \in \mathbb{Z} + 1/2, \forall i \text{ e } \sum_{i=1}^8 \mathbf{x}_i \text{ é par} \right\}.$$

Uma matriz geradora para o reticulado E_8 é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(E_8) = 1$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $\sqrt{2}$, o número de vizinhos é igual a 240 , o raio de empacotamento $\rho = 1/\sqrt{2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(E_8) = 1/16$.

- Reticulado E_7

O reticulado E_7 é constituído pelos pontos de E_8 que são perpendiculares ao vetor $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$, isto é,

$$E_7 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + \dots + x_8 = 0\}.$$

Uma matriz geradora para o reticulado E_7 é dada por

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(E_7) = 2$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $\sqrt{2}$, o número de vizinhos é igual a 126, o raio de empacotamento $\rho = 1/\sqrt{2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(E_7) = 1/16$.

- Reticulado E_6

O reticulado E_6 é constituído pelos pontos de E_8 que pertencem ao complemento ortogonal do subespaço vetorial gerado por $(1, 0, \dots, 0, 1)$ e $(0, 1, \dots, 1, 0)$, isto é,

$$E_6 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + x_8 = x_2 + \dots + x_7\}.$$

Uma matriz geradora para o reticulado E_6 é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(E_6) = 3$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a $\sqrt{2}$, o número de vizinhos é igual a 72, o raio de empacotamento $\rho = 1/\sqrt{2}$ e a sua densidade de centro é $\delta(E_6) = 1/8\sqrt{3}$.

- Reticulado Barnes-Wall Λ_{16}

O reticulado Barnes-Wall Λ_{16} é gerado por todas as combinações lineares inteiras das linhas da seguinte matriz:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(\Lambda_{16}) = 256$. Pode-se mostrar que sua norma mínima é igual a 2, o número de vizinhos é igual a 4320, o raio de empacotamento $\rho = 1$ e a sua densidade de centro é $\delta(\Lambda_{16}) = 1/16$.

- Reticulado de Leech Λ_{24}

O reticulado de Leech Λ_{24} é gerado por todas as combinações lineares inteiras

Dimensão	1	2	3	4	5	6	7	8	24
Reticulado	\mathbb{Z}	A_2	D_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	Λ_{24}

Tabela 1 – Empacotamentos reticulados mais densos.

Dimensão	1	2	3	4	5	24
Reticulado	A_1^*	A_2^*	A_3^*	A_4^*	A_5^*	Λ_{24}

Tabela 2 – Reticulados com menor densidade de cobertura.

1.8 Série Teta

Definição 1.8.1. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Definimos a **série teta** de Λ como*

$$\Theta_\Lambda(q) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} q^{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.18)$$

em que $q = e^{\pi iz}$, $z \in \mathbb{C}$ e $Im(z) > 0$.

Na literatura é comum encontrarmos a série teta escrita em função de z , isto é, $\Theta_\Lambda(z)$. Podemos escrever a série teta de um reticulado Λ da seguinte forma:

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{N(m) > 0} N(m)q^m, \quad (1.19)$$

em que $N(m) = \#\{\mathbf{x} \in \Lambda : \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = m\}$, isto é, o número de vetores de Λ que possuem norma \sqrt{m} . As potências de q nessa soma são todas as normas ao quadrado atingíveis pelos pontos do reticulado. Podemos observar então que a série teta de um reticulado é uma série que possui apenas coeficientes positivos em sua expansão.

Exemplo 1.8.2. *A série teta do reticulado \mathbb{Z}^2 é*

$$\Theta_{\mathbb{Z}^2}(z) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} q^{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + 4q^8 + 4q^9 + \dots \quad (1.20)$$

Observe na Figura 11 que, escrevendo a série teta de \mathbb{Z}^2 como $\Theta_{\mathbb{Z}^2}(z) = \sum_{N(m) > 0} N(m)q^m$, podemos observar os $N(m)$ pontos do reticulado que interceptam a circunferência de raio \sqrt{m} .

Observação 1.8.3. [19] *A série teta de um reticulado Λ nos fornece o raio de empacotamento ρ e o número de vizinhos τ de Λ , uma vez que*

$$\Theta_\Lambda(z) = 1 + \tau q^{4\rho^2} + \dots \quad (1.21)$$

Teorema 1.8.4. [29] *(Fórmula da Soma de Poisson para Reticulados). Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Então,*

$$\Theta_{\Lambda^*}(z) = \det(\Lambda)^{1/2} (i/z)^{n/2} \Theta_\Lambda(-1/z). \quad (1.22)$$

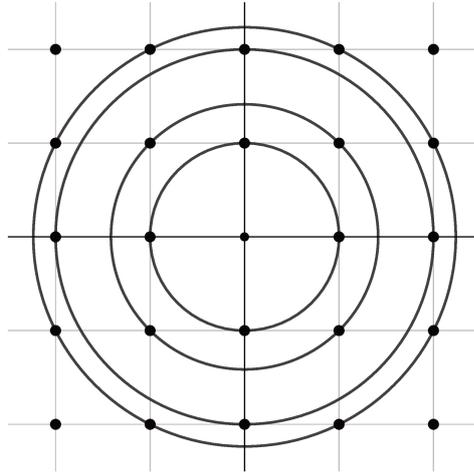


Figura 11 – Ilustração da série teta do reticulado \mathbb{Z}^2 .

1.9 Reticulados via Corpos Quadráticos

Nesta Seção apresentamos uma forma de construir reticulados via extensão de corpos. Para tal propósito, optamos por revisar alguns conceitos sobre o tópico.

Definição 1.9.1. *Sejam \mathbb{K} e \mathbb{L} corpos. Dizemos que \mathbb{L} é uma **extensão** de \mathbb{K} se $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ e denota-se tal extensão por $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ ou $\mathbb{L}|\mathbb{K}$.*

Teorema 1.9.2. [30] *Se $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ é uma extensão de corpos, então \mathbb{L} é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .*

Definição 1.9.3. *Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ uma extensão de corpos. A dimensão do \mathbb{K} -espaço vetorial \mathbb{L} é chamada **grau** da extensão e denotada por $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. No caso em que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ é finito, dizemos que \mathbb{L} é uma **extensão finita** de \mathbb{K} .*

Definição 1.9.4. *Sejam \mathbb{K} e \mathbb{L} corpos tais que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Um elemento $\alpha \in \mathbb{L}$ é chamado de **algébrico** sobre \mathbb{K} se existe um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ tal que $f(\alpha) = 0$. O polinômio mônico de menor grau $f(x)$ tal que $f(\alpha) = 0$ é chamado de **polinômio minimal** de α sobre \mathbb{K} e é denotado por $\min_{\mathbb{K}} \alpha$.*

Definição 1.9.5. *Um **corpo de números** \mathbb{K} é uma extensão finita do corpo \mathbb{Q} dos números racionais. Se $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} = n$, dizemos que \mathbb{K} é um corpo de números de grau n . Denotamos por $\mathbb{Q}(\theta)$ o menor corpo contendo o corpo \mathbb{Q} e o elemento θ .*

Teorema 1.9.6. [25] *Se \mathbb{K} é um corpo de números, então existe $\theta \in \mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$ e $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \text{grau} \left(\min_{\mathbb{K}} \theta \right)$.*

Definição 1.9.7. *Seja \mathbb{K} um corpo de números. Dizemos que um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ é um **inteiro algébrico** sobre \mathbb{Z} se α é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em \mathbb{Z} .*

Exemplo 1.9.8. Considere a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{5})|\mathbb{Q}$. Temos que $\sqrt{5}$ é um inteiro algébrico, pois é raiz de $f(x) = x^2 - 5$.

Teorema 1.9.9. [25] Seja \mathbb{K} um corpo de números. O conjunto

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \{x \in \mathbb{K} : x \text{ é inteiro algébrico sobre } \mathbb{Z}\}$$

é um anel, chamado de **anel de inteiros** de $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$.

Definição 1.9.10. Sejam \mathbb{K} um corpo de números de grau n e $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ o anel de inteiros de $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$. Chamamos de **base integral** de \mathbb{K} ou de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ uma \mathbb{Z} -base para o grupo aditivo $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Observação 1.9.11. Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ é uma base integral de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ então todo elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ pode ser escrito de forma única como $\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, em que $b_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Teorema 1.9.12. [31] Se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ é uma extensão de \mathbb{Q} de grau n , então existem exatamente n homomorfismos distintos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de \mathbb{K} em \mathbb{C} que fixam \mathbb{Q} . Tais homomorfismos são dados por $\sigma_i(\theta) = \theta_i$, em que $\theta_1, \dots, \theta_n$ são as raízes de $\min_{\mathbb{K}} \theta$ em \mathbb{C} .

Definição 1.9.13. Um corpo quadrático \mathbb{K} é uma extensão de \mathbb{Q} de grau 2.

Teorema 1.9.14. [32] Todo corpo quadrático \mathbb{K} é da forma $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, em que d é um inteiro livre de quadrados (isto é, não existe um primo p tal que p^2 divide d).

Definição 1.9.15. Define-se $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.9.16. [33] Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ um corpo quadrático, com $d \in \mathbb{Z}$ livre de quadrados e $d \not\equiv 0 \pmod{4}$.

1. Se $d \equiv 1 \pmod{4}$, então o anel dos inteiros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} sobre \mathbb{Z} é $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right]$

e uma \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é $\left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right\}$;

2. Se $d \equiv 2$ ou $d \equiv 3 \pmod{4}$, então o anel dos inteiros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} sobre \mathbb{Z} é $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

e uma \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é $\{1, \sqrt{d}\}$.

Teorema 1.9.17. Seja d um inteiro livre de quadrados. Os homomorfismos de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ em \mathbb{C} são σ_1 e σ_2 , em que $\sigma_1(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$ e $\sigma_2(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$.

Demonstração. Segue do Teorema 1.9.12. □

Exemplo 1.9.18. O corpo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ é um corpo quadrático, $\theta = \sqrt{13}$ é raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 13$. Temos pelo Teorema 1.9.16 que o anel de inteiros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} sobre \mathbb{Z} é $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$ e uma \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é $\left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$, pois $13 \equiv 1 \pmod{4}$. Pelo Teorema 1.9.17, os homomorfismos de \mathbb{K} são dados por σ_1, σ_2 , em que $\sigma_1(\sqrt{13}) = \sqrt{13}$ e $\sigma_2(\sqrt{13}) = -\sqrt{13}$.

- Homomorfismo de Minkowski

Seja \mathbb{K} um corpo de números de grau n . Pelo Teorema 1.9.12 existem exatamente n homomorfismos distintos $\sigma_j : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ para $j = 1, \dots, n$, que fixam \mathbb{Q} . Se $\sigma_j(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}$ diz-se que σ_j é **real**. Caso contrário, σ_j é dito **imaginário**. Quando todos os homomorfismos são reais diz-se que \mathbb{K} é um corpo **totalmente real**. Quando os homomorfismos são todos imaginários, diz-se que \mathbb{K} é um corpo **totalmente imaginário**.

Se $\bar{\sigma} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a conjugação complexa, então para todo $j = 1, \dots, n$, temos que $\bar{\sigma} \circ \sigma_j = \sigma_k$ para algum $1 \leq k \leq n$ e que $\bar{\sigma} \circ \sigma_j = \sigma_j$ se, e somente se, $\sigma_j(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}$. Desta forma, temos que os homomorfismos imaginários aparecem aos pares, isto é, se σ_j é imaginário, então existe k tal que $\bar{\sigma} \circ \sigma_j = \sigma_k$.

Usando r_1 para denotar o número de homomorfismos reais e r_2 o número de pares de homomorfismos imaginários, podemos reordenar os homomorfismos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de modo que $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ sejam os homomorfismos reais e que $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+2r_2}$ sejam os homomorfismos imaginários com $\sigma_{r_1+r_2+i} = \bar{\sigma} \circ \sigma_{r_1+i}$ para $i = 1, \dots, r_2$.

Definição 1.9.19. *Seja \mathbb{K} um corpo de números de grau n . Considere o homomorfismo injetivo de anéis*

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{r_1}(x), \mathcal{R}(\sigma_{r_1+1}(x)), \mathcal{I}(\sigma_{r_1+1}(x)), \dots, \mathcal{R}(\sigma_{r_1+r_2}(x)), \mathcal{I}(\sigma_{r_1+r_2}(x))), \end{aligned}$$

em que \mathcal{R} representa a parte real e \mathcal{I} representa a parte imaginária do número complexo. Tal homomorfismo é denominado homomorfismo canônico ou **homomorfismo de Minkowski** de \mathbb{K} em \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.9.20. *Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ um corpo de números, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ o anel de inteiros de $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ e σ_1, σ_2 os homomorfismos de \mathbb{K} em \mathbb{C} , em que σ_1 é a identidade e $\sigma_2(a + \sqrt{11}b) = a - \sqrt{11}b$. Neste caso, temos $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$, ou seja, \mathbb{K} é um corpo totalmente real. Para $x = a + \sqrt{11}b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, temos*

$$\sigma_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}) = (\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x})) = (a + \sqrt{11}b, a - \sqrt{11}b).$$

Teorema 1.9.21. [31] *Sejam \mathbb{K} um corpo de números de grau n e $\sigma_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o homomorfismo de Minkowski. Então $\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ é um reticulado de posto n em \mathbb{R}^n .*

Exemplo 1.9.22. *Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ um corpo de números e seja $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[i]$ seu anel de inteiros, com \mathbb{Z} -base $\{1, i\}$. Neste caso, temos que $r_1 = 0$ e $r_2 = 1$. Logo, dado $x = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$ a imagem do homomorfismo de Minkowski em $\mathbb{Z}[i]$ é dada por*

$$\sigma_{\mathbb{K}}(x) = (\mathcal{R}(a + bi), \mathcal{I}(a + bi)) = (a, b).$$

Portanto, temos que o reticulado gerado por $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é um reticulado bidimensional gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$. Ou seja, o reticulado gerado é o reticulado \mathbb{Z}^2 .

Vamos agora apresentar dois exemplos de famílias de reticulados bidimensionais construídas via o Homomorfismo de Minkowski. Essas famílias terão papel fundamental nos Capítulos 5 e 6.

Exemplo 1.9.23. Considere $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-l})$ um corpo quadrático, em que $l > 0$ e l é um inteiro livre de quadrados e $-l \equiv 1 \pmod{4}$. Pelo Teorema 1.9.16, se $-l \equiv 1 \pmod{4}$, então o anel de inteiros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} sobre \mathbb{Z} é igual a $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-l}}{2} \right]$ e uma \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é $\left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{-l}}{2} \right\}$. Seja $\bar{\sigma} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a conjugação complexa. Temos que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}) &= (\mathcal{R}(\sigma_1(\mathbf{x})), \mathcal{I}(\sigma_1(\mathbf{x}))) \\ &= \left(\mathcal{R} \left(a_0 + a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{-l}}{2} \right) \right), \mathcal{I} \left(a_0 + a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{-l}}{2} \right) \right) \right) \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1}{2}, \frac{\sqrt{l}a_1}{2} \right) \\ &= a_0(1, 0) + a_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{l}}{2} \right). \end{aligned}$$

Assim, $\sigma_{\mathbb{K}}(\mathbf{x})$ é gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{l}}{2} \right)$. Tomando $\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})(\mathbf{x}) = \Lambda_b$, o reticulado Λ_b gerado pela base acima possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente,

$$M'_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } G'_l = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & (1+l)/4 \end{pmatrix}.$$

Vamos trabalhar com $\Lambda_a = \sqrt{2}\Lambda_b$, um reticulado integral. Sua matriz geradora e de Gram são, respectivamente:

$$M_l = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } G_l = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & (1+l)/2 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(\Lambda_a) = l$ e a distância mínima d é igual $\sqrt{2}$.

Diferente do que ocorre para a maioria dos reticulados, para essa família a série teta pode ser calculada facilmente. A série teta de Λ_a é dada por

$$\Theta_{\Lambda_a}(y) = \theta_3(2y)\theta_3(2ly) + \theta_2(2y)\theta_2(2ly).$$

Exemplo 1.9.24. Considerando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ um corpo quadrático, em que $l > 0$ e l é um inteiro livre de quadrados e $l \equiv 2 \pmod{4}$, temos que o anel de inteiros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} sobre \mathbb{Z} é igual a $\mathbb{Z}[\sqrt{l}]$ e uma \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é $\{1, \sqrt{l}\}$. Usando os Teoremas 1.9.17 e 1.9.21, segue que o reticulado Λ gerado por essa base possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix} \text{ e } G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Observe que $\det(\Lambda) = 4l$ e a distância mínima d é igual 2.

Da mesma forma que analisamos para a família de reticulados construída no Exemplo 1.9.23, a série teta desta família também é facilmente calculada. A série teta de Λ é dada por

$$\Theta_{\Lambda}(y) = \theta_3(2y)\theta_3(2ly).$$

2 Caracterizações Equivalentes de Ladrilhamentos

Neste capítulo estabelecemos a notação básica e apresentamos definições e diferentes caracterizações de ladrilhamento. As principais referências utilizadas nesse capítulo são [5, 19, 14].

Definição 2.0.1. *Sejam Λ e Λ_a reticulados em \mathbb{R}^n tais que $\Lambda \subset \Lambda_a$. Dizemos que Λ_a é o **reticulado ambiente** para o reticulado Λ . Um conjunto finito $\mathcal{T} \subset \Lambda_a$ é dito um **Λ -ladrilho (discreto)** para Λ_a se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$(i) \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}_1) \cap (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}_2) = \emptyset, \text{ para quaisquer } \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \in \Lambda, \text{ com } \boldsymbol{\lambda}_1 \neq \boldsymbol{\lambda}_2;$$

$$(ii) \quad \bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) = \Lambda_a.$$

Observação 2.0.2. *A Condição (i) da definição anterior é equivalente a $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$, para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

Exemplo 2.0.3. *Sejam $\Lambda_a = \mathbb{Z}^2$, $\Lambda = 2\mathbb{Z}^2$ e $\mathcal{T} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (-1, 1)\}$. O conjunto \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a .*

De fato, para cada $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ não-nulo, existem $k, p \in \mathbb{Z}$ tais que $\boldsymbol{\lambda} = (2k, 2p)$ e

$$\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda} = \{(2k, 2p), (1 + 2k, 2p), (2(1 + k), 1 + 2p), (-1 + 2k, 1 + 2p)\}.$$

Como $\boldsymbol{\lambda} = (2k, 2p)$ é não-nulo, segue que $k \neq 0$ ou $p \neq 0$ e logo $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$.

Para concluirmos a justificativa de que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a resta mostrar que

$$\bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in 2\mathbb{Z}^2} (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) \supset \mathbb{Z}^2, \text{ uma vez que a inclusão } \bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in 2\mathbb{Z}^2} (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \mathbb{Z}^2 \text{ é trivial.}$$

Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, então x_1 e x_2 podem ser pares, ímpares, x_1 par e x_2 ímpar ou x_1 ímpar e x_2 par. Observamos que essas quatro condições correspondem exatamente aos quatro tipos de vetores que compõe $\bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in 2\mathbb{Z}^2} (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda})$.

Logo, \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a . Na Figura 12 representamos em vermelho os pontos de \mathcal{T} e, usando as cores amarelo, preto, azul e verde, representamos o deslocamento de \mathcal{T} pelos vetores $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$ e $(4, 0)$, respectivamente.

Na Definição 2.0.1 apresentamos a versão discreta de ladrilhamento. A versão contínua, que é a mais conhecida, será apresentada a seguir:

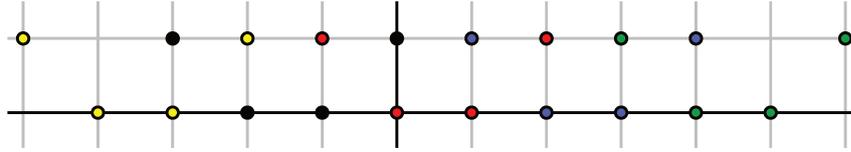


Figura 12 – \mathcal{T} deslocado pelos vetores $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(4, 0)$.

Definição 2.0.4. *Sejam Λ_a e Λ reticulados em \mathbb{R}^n tais que $\Lambda \subset \Lambda_a$, $V = \text{span}(\Lambda_a)$ e $\mathcal{R} \subset V$ uma região. Dizemos que \mathcal{R} é um Λ -ladrilho (contínuo) para V se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i) $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \lambda)$ possui medida nula em V , para todo $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$;
- (ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{R} + \lambda) = V$.

Ou, equivalentemente, \mathcal{R} é uma região fundamental de Λ_a .

Observação 2.0.5. *Se $\Lambda_a \subset \mathbb{R}^n$ for um reticulado de posto completo, então $\text{span}(\Lambda_a) = \mathbb{R}^n$. Logo, podemos reescrever o Item (ii) na Definição 2.0.4 como $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{R} + \lambda) = \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.0.6. *Sejam $\Lambda_a \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado hexagonal (ver Exemplo 1.1.14) e \mathcal{V}_{Λ_a} sua região de Voronoi. Como vimos no Capítulo 1, \mathcal{V}_{Λ_a} é um Λ_a -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Na Figura 13 temos uma ilustração de \mathcal{V}_{Λ_a} ladrilhando o \mathbb{R}^2 .*

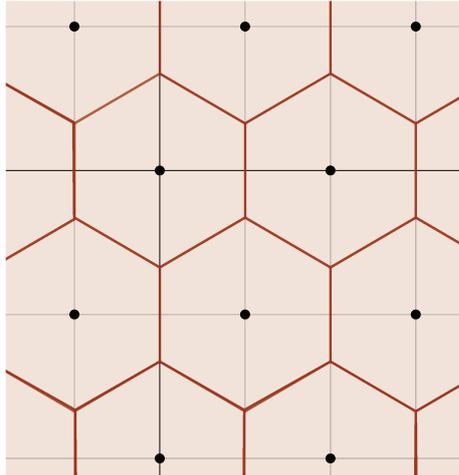


Figura 13 – Ladrilhamento de \mathbb{R}^2 por \mathcal{V}_{Λ_a} .

O seguinte Lema nos fornece uma relação entre as versões discreta e contínua de ladrilhamento.

Lema 2.0.7. *Um conjunto \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a se, e somente se, $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ é um Λ -ladrilho para $V = \text{span}(\Lambda_a)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que, para todo $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$:

1. $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) = \emptyset \iff (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)$ possui medida nula;
2. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \lambda) = \Lambda_a \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) = V$.

1. (\implies) Podemos observar que

$$(\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) \subset \bigcup_{t_1, t_2 \in \mathcal{T}} [(t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (t_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)].$$

Como $t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ é a região de Voronoi de t_1 , $t_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda$ é a região de Voronoi de $t_2 + \lambda$ e $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) = \emptyset$, segue que $t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ e $t_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda$ se interceptam apenas em seus bordos. Logo, $\bigcup_{t_1, t_2 \in \mathcal{T}} (t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (t_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)$ tem medida nula, uma vez que é uma união finita de conjuntos de medida nula, já que \mathcal{T} é finito. Portanto, $(\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)$ tem medida nula, pois é um subconjunto de um conjunto de medida nula.

(\impliedby) Suponha que $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) \neq \emptyset$. Então, existem $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ tais que $t_1 = t_2 + \lambda$. Logo, $t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} = t_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda$. Assim, segue que $(\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) \neq \emptyset$. E, temos que $(t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \subset (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)$. Como $\text{int}(t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a})$ é não-vazio, concluímos que $(t_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a})$ não possui medida nula. Portanto, $(\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \cap (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda)$ não possui medida nula, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) = \emptyset$.

2. (\implies) Note que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} (t + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) \right) = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ t \in \mathcal{T}}} (t + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda).$$

Como $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \lambda) = \Lambda_a$, segue que

$$\bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ t \in \mathcal{T}}} (t + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \lambda) = \bigcup_{\bar{\lambda} \in \Lambda_a} (\bar{\lambda} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) = V,$$

pois \mathcal{V}_{Λ_a} é um Λ_a -ladrilho para $\text{span}(\Lambda_a) = V$.

(\impliedby) Temos que \mathcal{V}_{Λ_a} é um Λ_a -ladrilho para V . Então,

$$\bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_a} (\lambda_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) = V.$$

Logo, pela hipótese, segue que

$$\bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_a} (\lambda_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \lambda + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) \implies \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_a} (\lambda_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}) = \bigcup_{\lambda_2 \in (\Lambda + \mathcal{T})} (\lambda_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}).$$

Portanto $\Lambda_a = \Lambda + \mathcal{T}$, uma vez que \mathcal{V}_{Λ_a} é um Λ_a -ladrilho para V e $\Lambda + \mathcal{T} \subset \Lambda_a$. Isso mostra que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T} + \lambda) = \Lambda_a$.

□

Exemplo 2.0.8. Utilizando os mesmos dados do Exemplo 2.0.3, pelo Lema 2.0.7 segue que $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$, representado na Figura 14, é um Λ -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

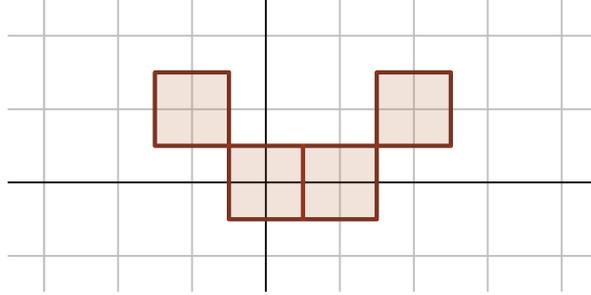


Figura 14 – $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$.

Definição 2.0.9. Dado um reticulado Λ_a , a **bola discreta**, denotada por $\tilde{B}(\mathbf{z}, r)$, centrada em $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \Lambda_a$ e com raio r , é definida como $\tilde{B}(\mathbf{z}, r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_a : (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 \leq r^2\}$. Quando $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, por simplicidade escreveremos \tilde{B}_r ao invés de $\tilde{B}(\mathbf{0}, r)$.

Definição 2.0.10. Sejam $\Lambda_a \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e \mathcal{V}_{Λ_a} sua região de Voronoi. Denominamos de **poliomino** associado a \tilde{B}_r a união das regiões \mathcal{V}_{Λ_a} centradas nos pontos de \tilde{B}_r . Um ladrilhamento de Λ_a por translações de \tilde{B}_r é um ladrilhamento de $\text{span}(\Lambda_a)$ pelo poliomino correspondente. Usaremos a notação

$$T^n(r) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}), \quad (2.1)$$

para o poliomino associado a \tilde{B}_r .

Exemplo 2.0.11. Considere o reticulado \mathbb{Z}^2 . Na Figura 15 temos uma ilustração do poliomino associado a \tilde{B}_3 .

Para uma região \mathcal{R} ser um Λ -ladrilho para $V = \text{span}(\Lambda_a)$ não é necessário que ela seja conexa, conforme podemos observar no Exemplo 2.0.12.

Exemplo 2.0.12. Sejam $\Lambda_a = \mathbb{Z}^2$, $\Lambda = 2\mathbb{Z}^2$, $\mathcal{T} = \{(-4, 1), (-1, 0), (0, 0), (1, 1)\}$ e $\mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$. Vamos mostrar que \mathcal{R} é um Λ -ladrilho para $V = \text{span}(\Lambda_a) = \mathbb{R}^2$. Para isso, vamos provar que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho (discreto) para Λ_a e aplicar o Lema 2.0.7.

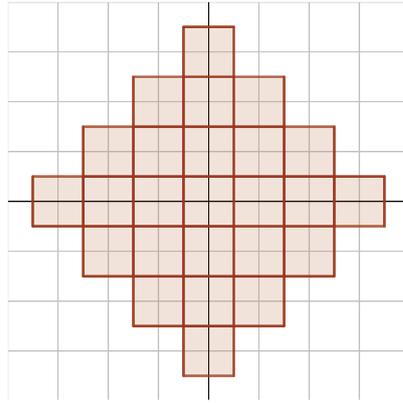


Figura 15 – Poliomino associado a \tilde{B}_3 .

Para cada $\lambda \in \Lambda$ não-nulo, existem $k, p \in \mathbb{Z}$ tais que $\lambda = (2k, 2p)$ e

$$\mathcal{T} + \Lambda = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^2} (\mathcal{T} + \lambda) = \bigcup_{k, p \in \mathbb{Z}} \{(2(-2 + k), 1 + 2p), (-1 + 2k, 2p), (2k, 2p), (1 + 2k, 1 + 2p)\}.$$

Como $\lambda = (2k, 2p)$ é não-nulo, segue que $k \neq 0$ ou $p \neq 0$ e logo $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) = \emptyset$. Para concluirmos a justificativa de que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a resta mostrar que $\mathcal{T} + \Lambda \supset \mathbb{Z}^2$, uma vez que a inclusão $\mathcal{T} + \Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ é trivial.

Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, então x_1 e x_2 podem ser pares, ímpares, x_1 par e x_2 ímpar ou x_1 ímpar e x_2 par. Observamos que essas quatro condições correspondem exatamente aos quatro tipos de vetores que compõe $\mathcal{T} + \Lambda$.

Logo, segue que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho (discreto) para Λ_a e portanto, pelo Lema 2.0.7, temos que \mathcal{R} é um Λ -ladrilho (contínuo) para \mathbb{R}^2 . Uma ilustração da região \mathcal{R} pode ser vista na Figura 16.

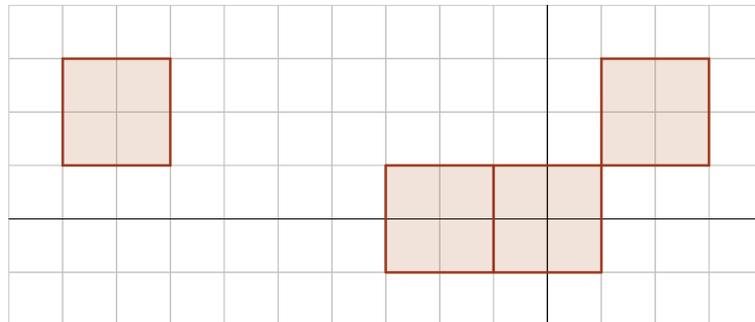
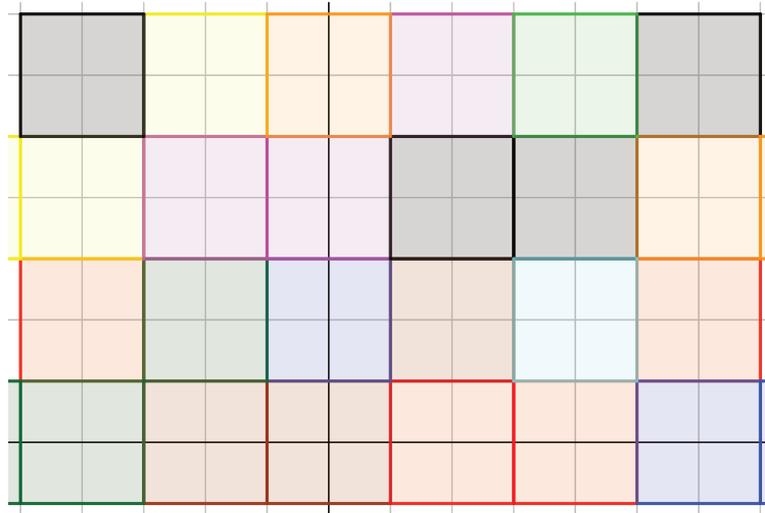


Figura 16 – Região $\mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$.

Uma ilustração da região \mathcal{R} ladrilhando o \mathbb{R}^2 pode ser vista na Figura 17.


 Figura 17 – Região $\mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$.

Definição 2.0.13. A **função indicadora** de um conjunto R , denotada por $\mathbb{1}_R$, é dada por

$$\mathbb{1}_R(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \in R, \\ 0, & \text{se } \xi \notin R. \end{cases} \quad (2.2)$$

Definição 2.0.14. Para uma função $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, em que $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\int_V |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$, definimos a **transformada de Fourier** de f como sendo a função $\hat{f} : V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_V e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \xi} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Definição 2.0.15. O **conjunto zero** de uma função $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ é definido como

$$\mathcal{Z}_f = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.4)$$

No Teorema 2.0.16 apresentamos três caracterizações distintas de ladrilhamento. Em [5] é demonstrada a equivalência das duas primeiras condições para sub-reticulados de \mathbb{Z}^n . Aqui, estendemos esse resultados para sub-reticulados de um reticulado ambiente geral Λ_a . Em [14] é provada a equivalência entre a primeira e a terceira condição.

Teorema 2.0.16. *Sejam Λ_a e Λ reticulados tais que $\Lambda \subset \Lambda_a$, e $\mathcal{T} \subset \Lambda_a$ um conjunto finito. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a ;
- (ii) O conjunto \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ , e existem um grupo abeliano \mathcal{G} e um homomorfismo sobrejetor $\phi : \Lambda_a \rightarrow \mathcal{G}$ tal que o núcleo de ϕ , denotado por $N(\phi)$, é igual a Λ e $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{T}$;

(iii) O dual de Λ satisfaz

$$\Lambda^* \setminus \{0\} \subset \mathcal{Z}_{\hat{f}}, \quad (2.5)$$

em que $f = \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a + \mathcal{T}}}$ e \hat{f} é a transformada de Fourier de f .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii): Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_a/\Lambda$. Primeiramente, vamos mostrar que \mathcal{T} é de fato um sistema completo de resíduos módulo Λ .

Como $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \lambda) = \emptyset$, para todo $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, segue que para quaisquer $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ e $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2 + \lambda$. Então, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda \setminus \{0\}$, o que implica que $\mathbf{t}_1 + \Lambda \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda$, para todo $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Assim, temos que elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas de Λ_a/Λ . Considere agora $\lambda_a \in \Lambda_a$. Como \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a , existem $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ e $\lambda \in \Lambda$ tais que $\lambda_a = \mathbf{t} + \lambda$. Então, $\lambda_a \equiv \mathbf{t} \pmod{\Lambda}$. Logo, todo elemento de Λ_a é congruente (módulo Λ) a um elemento de \mathcal{T} . Portanto, \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ .

Seja ϕ o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \Lambda_a &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \mathbf{x} = \mathbf{t} + \lambda &\longmapsto \mathbf{t} + \Lambda, \text{ em que } \mathbf{t} \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Note que ϕ está bem definido pois todo $\mathbf{x} \in \Lambda_a$ pode ser escrito de forma única como $\mathbf{x} = \mathbf{t} + \lambda$, em que $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ e $\lambda \in \Lambda$, uma vez que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a . Além disso, temos que

- ϕ é sobrejetora.

Temos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{T} + \Lambda$, pois para cada $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, existe $\mathbf{x} \in \Lambda_a$ tal que $\mathbf{g} = \mathbf{x} + \Lambda$. Por outro lado, existem $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ e $\lambda \in \Lambda$ tais que $\mathbf{x} = \mathbf{t} + \lambda$, pois \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a . Assim, temos que $\mathbf{g} \in \mathcal{T} + \Lambda$. A outra inclusão é trivial. Logo, $\mathcal{G} = \mathcal{T} + \Lambda$.

- $N(\phi) = \{\mathbf{x} \in \Lambda_a : \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \Lambda$.

Para $\mathbf{x} \in \Lambda_a$, digamos $\mathbf{x} = \mathbf{t} + \lambda$, com $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ e $\lambda \in \Lambda$, temos:

$$\mathbf{x} \in N(\phi) \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{t} + \Lambda = \mathbf{0} + \Lambda \Rightarrow \mathbf{t} - \mathbf{0} \in \Lambda \Rightarrow \mathbf{t} \in \Lambda.$$

Como $\lambda, \mathbf{t} \in \Lambda$ e $\mathbf{x} = \mathbf{t} + \lambda$ segue que $\mathbf{x} \in \Lambda$, uma vez que Λ é um reticulado. Logo, $N(\phi) = \Lambda$.

- $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{T}$.

Seja φ a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathcal{T} &\longrightarrow \phi(\mathcal{T}) \\ \mathbf{t} &\longmapsto \mathbf{t} + \Lambda. \end{aligned}$$

É fácil ver que φ é sobrejetora. Vamos mostrar que φ é injetora. Temos que

$$\varphi(\mathbf{t}_1) = \varphi(\mathbf{t}_2) \Rightarrow \mathbf{t}_1 + \Lambda = \mathbf{t}_2 + \Lambda \Rightarrow \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \in \Lambda.$$

Assim, $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = \boldsymbol{\lambda}$, para algum $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$. Isto é, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\lambda}$. Logo, $\mathcal{T} \cap (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$. Como \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a , segue que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ e portanto, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$. Logo, φ é bijetora e, portanto, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{T}$.

(ii) \Rightarrow (i):

Queremos mostrar que as Condições (i) e (ii) da Definição 2.0.1 são satisfeitas. A condição (i) é verdadeira, pois caso contrário existiriam $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, tais que

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \phi(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \phi(\mathbf{t}_1) = \phi(\mathbf{t}_2).$$

Se $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$, então $\#\phi(\mathcal{T}) \neq \#\mathcal{T}$, o que contraria a hipótese. Se $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$, então $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Absurdo, pois $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$.

A Condição (ii) é satisfeita, pois como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ segue que para todo $\boldsymbol{\lambda}_a \in \Lambda_a$, existe $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ tal que

$$\boldsymbol{\lambda}_a \equiv \mathbf{t} \pmod{\Lambda} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_a \in \mathbf{t} + \Lambda \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_a \in \bigcup_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}} (\mathbf{t} + \Lambda).$$

Logo, $\bigcup_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}} (\mathbf{t} + \Lambda) = \Lambda_a$, uma vez que $\bigcup_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}} (\mathbf{t} + \Lambda) \subset \Lambda_a$ é trivial. Então, $\bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} (\mathcal{T} + \boldsymbol{\lambda}) = \Lambda_a$ e portanto, \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a .

(i) \Leftrightarrow (iii): Segue diretamente do Teorema 2 de [14]. \square

2.1 Estudos de casos

Nesta seção apresentamos quatro estudos de casos utilizando a caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier dada no Teorema 2.0.16. Nos três primeiros casos apresentados nas Subseções 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 usamos a caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier para mostrar que um conjunto discreto \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para um reticulado ambiente Λ_a . Já no caso apresentado na Subseção 2.1.4 mostramos como essa caracterização pode ser útil também na exclusão de possibilidades de ladrilhos para um reticulado ambiente.

2.1.1 Região de Voronoi do reticulado hexagonal

Considere Λ_a como sendo o reticulado hexagonal, \mathcal{V}_{Λ_a} sua região de Voronoi e $\mathcal{T} = \{(0, 0)\}$. É fácil ver que $\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T} = \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ é um Λ_a -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Nosso objetivo é demonstrar esse resultado utilizando o Teorema 2.0.16 para exemplificar seu uso. Na Figura 18 temos uma ilustração da região de Voronoi do reticulado hexagonal.

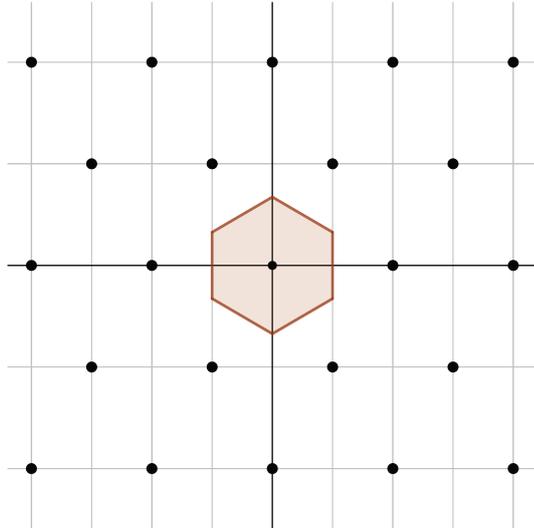


Figura 18 – Região de Voronoi do reticulado hexagonal.

Temos que uma matriz geradora para Λ_a é $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Então, uma matriz geradora para Λ_a^* é $M^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$.

Seja $\mathbf{x} \in \Lambda^*$. Temos que $\mathbf{x} = \mathbf{u}M^{-T}$, com $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$, isto é, $\mathbf{x} = (u_1, (\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)$, em que $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$. Para $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{1}}_{\Lambda_a}(\mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \mathbb{1}_{\Lambda_a}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \left[\int_{-1/2}^0 \int_0^{(\sqrt{3}/3)x_1 + \sqrt{3}/3} e^{2\pi i x_1 y_1} e^{2\pi i x_2 y_2} dx_2 dx_1 \right] \\
 &+ \left[\int_0^{1/2} \int_0^{(-\sqrt{3}/3)x_1 + \sqrt{3}/3} e^{2\pi i x_1 y_1} e^{2\pi i x_2 y_2} dx_2 dx_1 \right] \\
 &+ \left[\int_{-1/2}^0 \int_{(-\sqrt{3}/3)x_1 - \sqrt{3}/3}^0 e^{2\pi i x_1 y_1} e^{2\pi i x_2 y_2} dx_2 dx_1 \right] \\
 &+ \left[\int_0^{1/2} \int_{(\sqrt{3}/3)x_1 - \sqrt{3}/3}^0 e^{2\pi i x_1 y_1} e^{2\pi i x_2 y_2} dx_2 dx_1 \right].
 \end{aligned}$$

Logo

$$\hat{\mathbb{1}}_{\Lambda_a}(\mathbf{y}) = -\frac{3\text{sen}(\pi y_1)\text{sen}\left(\frac{\pi y_2}{\sqrt{3}}\right) y_1 - \sqrt{3}\left(\cos(\pi y_1)\cos\left(\frac{\pi y_2}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y_2}{\sqrt{3}}\right)\right) y_2}{\pi^2(-3y_1^2 y_2 + y_2^3)}.$$

Para $\mathbf{x} = (u_1, (\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)$, com $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}}(\mathbf{x}) = \left[- \left(\frac{3\text{sen}(\pi u_1)\text{sen}(\pi((\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)/\sqrt{3})u_1}{\pi^2(-3u_1^2(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3 + (\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)^3} \right. \right. \quad (2.6)$$

$$+ \frac{-\sqrt{3}\cos(\pi u_1)\cos(\pi(u_1 + 2u_2)/3)(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3}{\pi^2(-3u_1^2(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3 + (\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)^3} \quad (2.7)$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}\cos(2\pi((u_1 + 2u_2)/3))(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3}{\pi^2(-3u_1^2(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3 + (\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)^3} \right) \Big]. \quad (2.8)$$

Vamos analisar as três parcelas de $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}}(\mathbf{x})$. De (2.6), podemos observar que

$$3\text{sen}(\pi u_1)\text{sen}(\pi((\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3)/\sqrt{3})u_1 = 0,$$

uma vez que $\text{sen}(\pi u_1) = 0, \forall u_1 \in \mathbb{Z}$. Vamos agora analisar os numeradores de (2.7) e (2.8). Somando-os, temos

$$-\sqrt{3}(\cos(\pi u_1)\cos(\pi(u_1 + 2u_2)/3) + \cos(2\pi(u_1 + 2u_2)/3))(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3. \quad (2.9)$$

Dividindo $u_1 + 2u_2$ por 6 e estudando os valores dos cossenos em (2.9) para todos os casos, obtemos a Tabela 3.

Resto	$-\cos(\pi u_1)$	$\cos(\pi(u_1 + 2u_2)/3)$	$\cos(2\pi(u_1 + 2u_2)/3)$
0	-1	1/2	1/2
1	1	1/2	-1/2
2	-1	-1/2	-1/2
3	1	-1/2	1/2
4	-1	-1/2	-1/2
5	1	1/2	-1/2

Tabela 3 – Valores dos cossenos em (2.9).

Logo, como podemos observar na Tabela 3, em todos os casos temos que

$$-\sqrt{3}(\cos(\pi u_1)\cos(\pi(u_1 + 2u_2)/3) + \cos(2\pi(u_1 + 2u_2)/3))(\sqrt{3}u_1 + 2\sqrt{3}u_2)/3 = 0.$$

Assim, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Lambda_a^*$. Portanto, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ_a -ladrilho para Λ_a e, pelo Lema 2.0.7, \mathcal{V}_{Λ_a} é um Λ_a -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

2.1.2 Releitura do resultado do Exemplo 2.0.8

Considere novamente os reticulados $\Lambda_a = \mathbb{Z}^2$ e $\Lambda = 2\mathbb{Z}^2$, e o conjunto $\mathcal{T} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (-1, 1)\}$. No Exemplo 2.0.8 mostramos que $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ é um Λ -ladrilho para \mathbb{R}^2 provando que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho (discreto) para Λ_a e usando o Lema 2.0.7. Vamos agora mostrar esse mesmo resultado usando o Teorema 2.0.16.

Observe que $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz geradora para Λ . Então, uma matriz geradora para Λ^* é $M^{-T} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Seja $\mathbf{x} \in \Lambda^*$. Então $\mathbf{x} = \mathbf{u}M^{-T}$, em que $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$. Ou seja, $\mathbf{x} = (u_1/2, u_2/2)$, com $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$. Primeiramente note que, para $\mathbf{x} \in V = \text{span}(\Lambda_a)$,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) &= \int_V e^{2\pi i \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}} e^{2\pi i \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{y} \\
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}} \int_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}} e^{2\pi i (\mathbf{v} + t) \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\Lambda_a} \\
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}} \int_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}} e^{2\pi i \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} e^{2\pi i t \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\Lambda_a} \\
 &= \int_V e^{2\pi i \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \sum_{t \in \mathcal{T}} e^{2\pi i t \cdot \mathbf{x}} \\
 &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a}}(\mathbf{x}) \sum_{t \in \mathcal{T}} e^{2\pi i t \cdot \mathbf{x}}. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^2}}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^2}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i y_1 x_1} dy_1 \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i y_2 x_2} dy_2 \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi x_1)}{\pi x_1} \frac{\text{sen}(\pi x_2)}{\pi x_2}, \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

segue que

$$\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) = \frac{\text{sen}(\pi x_1)}{\pi x_1} \frac{\text{sen}(\pi x_2)}{\pi x_2} (1 + e^{-8\pi i x_1 + 2\pi i x_2} + e^{-2\pi i x_1} + e^{2\pi i x_1 + 2\pi i x_2}).$$

Para $\mathbf{x} = (u_1/2, u_2/2)$, temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) &= \frac{\text{sen}(\pi u_1/2)}{\pi u_1/2} \frac{\text{sen}(\pi u_2/2)}{\pi u_2/2} \times \\
 &\quad [1 + \cos(-4\pi u_1 + \pi u_2) + i \text{sen}(-4\pi u_1 + \pi u_2) + \cos(\pi u_1) + i \text{sen}(\pi u_1) \\
 &\quad + \cos(\pi u_1 + \pi u_2) + i \text{sen}(\pi u_1 + \pi u_2)] \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi u_1/2)}{\pi u_1/2} \frac{\text{sen}(\pi u_2/2)}{\pi u_2/2} \times \\
 &\quad [1 + \cos(\pi(-4u_1 + u_2)) + \cos(\pi u_1) + \cos(\pi(u_1 + u_2))].
 \end{aligned}$$

Vamos analisar a paridade de u_1 e u_2 . Para $u_1 = 2k$ e $u_2 = 2q$, temos que $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) = 0$, uma vez que $\text{sen}(k\pi) = \text{sen}(q\pi) = 0$. Para $u_1 = 2k$ e $u_2 = 2q + 1$, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) = 0$, pois

$\text{sen}(k\pi) = 0$. Para $u_1 = 2k + 1$ e $u_2 = 2q$, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) = 0$, já que $\text{sen}(q\pi) = 0$. Para $u_1 = 2k + 1$ e $u_2 = 2q + 1$, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{\Lambda_a} + \mathcal{T}}(\mathbf{x}) = 0$, uma vez que

$$\begin{aligned}
 & 1 + \cos(\pi(-4(2k + 1) + (2q + 1))) + \cos(\pi(2k + 1)) + \cos(\pi((2k + 1) + (2q + 1))) = \\
 & 1 - 1 - 1 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para Λ_a e, pelo Lema 2.0.7, $\mathcal{T} + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ é um Λ -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

2.1.3 Releitura de um resultado de S. W. Golomb e L. R. Welch

Em [1] S. W. Golomb e L. R. Welch associaram a existência de códigos de Lee perfeitos em \mathbb{Z}^n com um ladrilhamento de \mathbb{R}^n pelos poliomínos formados por cubos centrados no pontos da bola de Lee de raio 1 ($\{\mathbf{w}; d_{Lee}(\mathbf{0}, \mathbf{w}) \leq 1\}$, em que $d_{Lee}(\mathbf{0}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n |w_i|$). A seguir, exibimos uma releitura desse resultado.

Seja $\mathcal{C} = [-1/2, 1/2]^n = \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}$. Considere $\mathcal{R} = \mathcal{C} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm e_k\}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ e e_k são os vetores canônicos. Na Figura 19 temos uma ilustração de \mathcal{R} para $n = 2$.

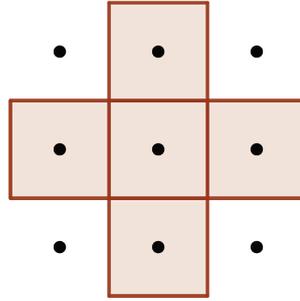


Figura 19 – Região \mathcal{R} para $n = 2$.

Note que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{b} \in \{\mathbf{0}, \pm e_k\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\mathbf{b} + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n}(\mathbf{x}).$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{C} + \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_k\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{b} \in \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_k\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}} \\
 &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{\mathbf{b} \in \{\pm \mathbf{e}_k\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}} \right) \\
 &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{2\pi i x_k} + \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i x_k} \right) \\
 &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi x_k) \right) \\
 &= \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi x_k) \right) \prod_{k=1}^n \frac{\text{sen}(\pi x_k)}{\pi x_k}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ o reticulado gerado pela seguinte matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

em que $m_{k1} \in \{2, \dots, n\}, \forall k \in \{2, \dots, n\}$ e $m_{i1} \neq m_{j1}, \forall i \neq j$. Então uma matriz geradora para Λ^* é

$$M^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n+1} & -\frac{m_{21}}{2n+1} & \cdots & -\frac{m_{n1}}{2n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Considerando as matrizes descritas acima, temos o seguinte resultado

Proposição 2.1.1. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ um reticulado gerado pela matriz M e considere $\mathcal{T} = \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_k\}$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Então, \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para \mathbb{Z}^n .*

Demonstração. Considere $\mathbf{x} = \mathbf{u}M^{-T}$ um elemento de Λ^* . Então, observe que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{2n+1} & -\frac{m_{21}}{2n+1} & \cdots & -\frac{m_{n1}}{2n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (u_1/(2n+1), -u_1 m_{21}/(2n+1) + u_2, \dots, -u_1 m_{n1}/(2n+1) + u_n),
 \end{aligned}$$

Da Equação (2.12), temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) &= \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi u_1}{2n+1} \right) + 2 \sum_{k=2}^n \cos \left(2\pi \left(-\frac{u_1 m_{k1}}{2n+1} + u_k \right) \right) \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi u_1}{2n+1} \right)}{\left(\frac{\pi u_1}{2n+1} \right)} \prod_{k=1}^n \text{sen} \left(\pi \left(-\frac{u_1 m_{k1}}{2n+1} + u_k \right) \right) / \left(-\frac{\pi u_1 m_{k1}}{2n+1} + \pi u_k \right) \right]. \\ \Rightarrow \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) &= \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi u_1}{2n+1} \right) + 2 \sum_{k=2}^n \cos \left(\frac{2\pi u_1 m_{k1}}{2n+1} \right) \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi u_1}{2n+1} \right)}{\left(\frac{\pi u_1}{2n+1} \right)} \prod_{k=2}^n -\text{sen} \left(\frac{\pi u_1 m_{k1}}{2n+1} \right) / \left(-\frac{\pi u_1 m_{k1}}{2n+1} + \pi u_k \right) \right]. \end{aligned}$$

Vamos considerar aqui dois casos: o caso em que u_1 é múltiplo de $2n+1$ e o caso contrário. Para $u_1 = (2n+1)k, k \in \mathbb{Z}$ segue que $\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = 0$, uma vez que $\text{sen}(p\pi) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$.

Para $u_1 \neq (2n+1)k, k \in \mathbb{Z}$, vamos analisar uma parte do numerador de $\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x})$. Como $m_{k1} \in \{2, \dots, n\}, \forall k \in \{2, \dots, n\}$ e $m_{i1} \neq m_{j1}, \forall i \neq j$, temos que

$$1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi u_1}{2n+1} \right) + 2 \sum_{k=2}^n \cos \left(\frac{2\pi u_1 m_{k1}}{2n+1} \right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \left(m_{k1} \left(\frac{2\pi u_1}{2n+1} \right) \right).$$

Pela identidade trigonométrica de Lagrange, segue que

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \left(m_{k1} \left(\frac{2\pi u_1}{2n+1} \right) \right) &= 1 + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\text{sen} (2\pi u_1 (n+1/2)/(2n+1))}{2\text{sen}(\pi u_1/(2n+1))} \right) \\ &= \frac{2\text{sen}(2\pi u_1 n/(2n+1) + \pi u_1/(2n+1))}{2\text{sen}(\pi u_1/(2n+1))} \\ &= \frac{2\text{sen}(\pi u_1)}{\pi u_1/(2n+1)} = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = 0$ e pelo ítem (iii) do Teorema 2.0.16, segue que \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para \mathbb{Z}^n . \square

Observamos que \mathcal{T} é a bola de Lee de raio 1 de \mathbb{Z}^n . Pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R} = \mathcal{C} + \mathcal{T}$ é um Λ -ladrilho de \mathbb{R}^n . Vale ressaltar que todas as matrizes M que satisfazem as condições pré-estabelecidas geram reticulados congruentes. Então basicamente temos apenas uma solução para nosso problema.

2.1.4 Possibilidades de Λ -ladrilhos para o reticulado hexagonal

A abordagem de Fourier usada no Teorema 2.0.16, além de ajudar a mostrar que um conjunto discreto (ou uma região, usando o Lema 2.0.7) é um Λ -ladrilho para o

reticulado ambiente Λ_a (ou para o $\text{span}(\Lambda_a)$, usando o Lema 2.0.7), pode ser usada para excluir possibilidades de Λ -ladrilhos para Λ_a .

Sejam \mathcal{V}_{A_2} a região de Voronoi de A_2^* e a região $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{A_2} + \mathcal{T}$, em que \mathcal{T} é a bola unitária \tilde{B}_1 , isto é, $\mathcal{T} = \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{v}, \pm \mathbf{w}\}$, $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\mathbf{w} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Uma ilustração dessa região pode ser vista na Figura 20.

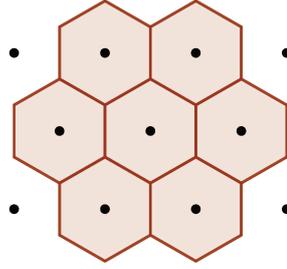


Figura 20 – Região \mathcal{R} .

Temos que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{b} \in \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{v}, \pm \mathbf{w}\}} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{A_2}}(\mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{A_2} + \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{v}, \pm \mathbf{w}\}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{V}_{A_2}}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{b} \in \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{v}, \pm \mathbf{w}\}} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}} \\ &= \left[\frac{3 \operatorname{sen}(\pi x_1) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_2}{\sqrt{3}}\right) x_1 + \sqrt{3} \left(-\cos(\pi x_1) \cos\left(\frac{\pi x_2}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{\sqrt{3}}\right) \right) x_2}{\pi^2 (-3x_1^2 x_2 + x_2^3)} \right] \\ &\times \left(1 + 2 \cos(2\pi x_1) + 2 \cos(\pi(x_1 + \sqrt{3}x_2)) + 2 \cos(\pi(x_1 - \sqrt{3}x_2)) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Seja $\Lambda \subset A_2$ um reticulado. Os candidatos a Λ -ladrilho para A_2 devem ter, a menos de congruência, matriz geradora M da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - m/2 & \sqrt{3}m/2 \\ -7/2 & 7\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

em que $m = 0, 1, 2$ ou 3 . Logo, uma matriz geradora de Λ^* é

$$M^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/3 \\ -m/7 & (-\sqrt{3}m + 2\sqrt{3})/21 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

* Pelo Exemplo 1.1.24 vimos que o reticulado hexagonal é equivalente ao reticulado A_2 . Neste exemplo, por abuso de notação, iremos nos referir ao reticulado hexagonal como A_2 .

Nosso objetivo é encontrar um inteiro m tal que \mathcal{R} é um Λ -ladrilho para \mathbb{R}^2 , isto é, um inteiro m tal que $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Lambda^*$.

Seja $\mathbf{x} \in \Lambda^*$. Então $\mathbf{x} = \mathbf{u}M^{-T}$, em que $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$, i.e.,

$$\mathbf{x} = \left(u_1 - \frac{mu_2}{7}, \frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m + 2\sqrt{3})u_2}{21} \right).$$

Da Equação (2.15) temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = & \left(1 + 2 \cos \left(2\pi \left(u_1 - \frac{mu_2}{7} \right) \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} (7u_1 + (1-m)u_2) \right) + \right. \\ & \left. 2 \cos \left(\frac{2\pi u_2}{7} \right) \right) \times \\ & \left[\left(-\frac{3 \operatorname{sen}(\pi(u_1 - \frac{mu_2}{7})) \operatorname{sen}(\frac{1}{21}\pi(7u_1 + (2-m)u_2))(u_1 - \frac{mu_2}{7})}{\pi^2(-3(u_1 - \frac{mu_2}{7})^2(\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21}) + (\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21})^3)} \right) + \right. \\ & \left(-\frac{\sqrt{3}(-\cos(\pi u_1 - \frac{mu_2}{7})) \cos(\frac{1}{21}\pi(7u_1 + (2-m)u_2))(\frac{\sqrt{3}}{21}(7u_1 - (m-2)u_2))}{\pi^2(-3(u_1 - \frac{mu_2}{7})^2(\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21}) + (\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21})^3)} \right) + \\ & \left. \left(-\frac{\sqrt{3}(\cos(\frac{2}{21}\pi(7u_1 + (2-m)u_2)))(\frac{\sqrt{3}}{21}(7u_1 - (m-2)u_2))}{\pi^2(-3(u_1 - \frac{mu_2}{7})^2(\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21}) + (\frac{\sqrt{3}u_1}{3} + \frac{(-\sqrt{3}m+2\sqrt{3})u_2}{21})^3)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Considere $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Lambda^*$ tal que $\mathbf{x} = (-3/7, -\sqrt{3}/21)$, $\mathbf{y} = (4/7, 2\sqrt{3}/7)$ e $\mathbf{z} = (25/7, 55\sqrt{3}/21)$. Note que para $m = 0$ temos que $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) \approx 4.58265 \neq \mathbf{0}$. Então, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} não é um Λ -ladrilho para A_2 . Analogamente, para $m = 1$ temos que $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{y}) \approx 0.27521 \neq \mathbf{0}$, e para $m = 2$, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{z}) \approx 0.00805144 \neq \mathbf{0}$. Assim, \mathcal{T} não é um Λ -ladrilho para A_2 . Para $m = 3$, $\hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{R}}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Logo, para $m = 3$ temos que \mathcal{T} pode ser um Λ -ladrilho para A_2 .

Com isso, concluímos que para $m = 0, 1$ e 2 , o conjunto \mathcal{T} não é um Λ -ladrilho para A_2 . Para $m = 3$ mostramos no Capítulo 4 por meio de um algoritmo que, de fato, \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para A_2 .

Neste capítulo estabelecemos as principais notações, definições e resultados sobre ladrilhamento. Apresentamos no Lema 2.0.7 uma relação entre formas de ladrilhamento contínua e discreta e no Teorema 2.0.16 fornecemos caracterizações distintas de ladrilhamento. Nos estudos de casos apresentados nas Subseções 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 usamos a caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier para mostrar que um conjunto discreto \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para um reticulado ambiente Λ_a . No estudo de caso apresentado na Subseção 2.1.4 mostramos como essa caracterização pode ser útil também na exclusão de possibilidades de ladrilhos para um reticulado ambiente. A caracterização de ladrilhamento via isomorfismo de grupo vai ser muito útil nos capítulos 5, 6 e

principalmente no Capítulo 4, em que, utilizando-se essa caracterização, implementamos um algoritmo para buscar códigos perfeitos em espaços ambientes específicos.

3 Códigos Perfeitos na Métrica Euclidiana

Neste capítulo, apresentamos algumas definições iniciais e teoremas sobre códigos perfeitos em reticulados ambientes gerais, discutindo a existência desse tipo de código e fornecendo limites superiores para seus raios. Alguns dos resultados apresentados aqui são generalizações, para a métrica l_2 , de teoremas demonstrados em [11]. Outros, são inspirados, para a métrica l_2 , em um resultado apresentado em [10]. Para a leitura ficar mais natural, assumimos aqui reticulados de posto completo.

Seja \mathcal{D} o conjunto de todas as distâncias atingíveis em Λ_a , isto é,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Lambda_a) = \{\|\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \Lambda_a\}. \quad (3.1)$$

Definição 3.0.1. *Considere $\Lambda \subset \Lambda_a$ um reticulado. O raio de empacotamento (discreto), denotado por $r(\Lambda)$, é o maior r tal que*

$$(i) \ ((\tilde{B}_r + \boldsymbol{\lambda}) \cap \tilde{B}_r) \cap \Lambda_a = \emptyset, \text{ em que } \mathbf{0} \neq \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda;$$

$$(ii) \ r \in \mathcal{D}(\Lambda_a).$$

Se, além das duas propriedades acima, Λ cumprir a seguinte propriedade

$$(iii) \ \tilde{B}_r + \Lambda = \Lambda_a$$

dizemos que Λ é um **código r -perfeito** em Λ_a .

Vale ressaltar que neste capítulo estaremos denotando um sub-reticulado $\Lambda \subset \Lambda_a$ por código.

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathcal{D} \\ x &\longmapsto \max\{y \in \mathcal{D} : y < x\}. \end{aligned}$$

No Capítulo 1, definimos o raio de cobertura de um código (reticulado) $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, que é o menor número real r tal que $\bigcup_{z \in \Lambda} B(z, r) \supset \mathbb{R}^n$. Agora, vamos definir o raio de cobertura discreto de um código.

Definição 3.0.2. *O raio de cobertura (discreto) de um código Λ , denotado por \tilde{R}_Λ , é o menor $r \in \mathcal{D}$ tal que $\bigcup_{z \in \Lambda} \tilde{B}(z, r) = \Lambda_a$.*

Definição 3.0.3. *Sejam V um espaço vetorial normado e f uma função de V em \mathbb{R} . Definimos o $\operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in V} f(\mathbf{x})$ como o conjunto de todos os pontos de V que minimizam f , isto é, $\operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in V} f(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in V\}$.*

Em espaços ambientes gerais, o raio de empacotamento não é unicamente determinado pela distância mínima, como podemos observar no Exemplo 3.0.4.

Exemplo 3.0.4. *Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ e $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Considere o reticulado \mathbb{Z}^2 e seus sub-reticulados Λ_1, Λ_2 e Λ_3 , em que Λ_1 é gerado pela matriz M_1 , Λ_2 é gerado por M_2 e o reticulado Λ_3 é gerado pela matriz M_3 . Na Tabela 2 de [10] temos os raios de empacotamento discreto e contínuo de Λ_1, Λ_2 e Λ_3 .*

O raio de empacotamento discreto de um reticulado $\Lambda \subset \Lambda_a$ não é igual a metade da distância mínima, pois para o reticulado $\Lambda_1 \subset \mathbb{Z}^2$ temos que $d(\Lambda_1)/2 = 0.5$ e $r(\Lambda_1) = 0$. Também não podemos dizer que o raio de empacotamento é igual ao menor número inteiro maior ou igual a metade da distância mínima, pois para o reticulado $\Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^2$, $d(\Lambda_2)/2 = 0.7071$ e $r(\Lambda_1) = 0$. O raio de empacotamento discreto também não é igual ao maior número inteiro menor ou igual a metade da distância mínima, uma vez que para o reticulado $\Lambda_3 \subset \mathbb{Z}^2$, $d(\Lambda_3)/2 = 1.8028$ e $r(\Lambda_3) = 2$.

A partir das observações feitas pelo Exemplo 3.0.4, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 3.0.5. *A distância mínima $d(\Lambda)$ e o raio de empacotamento $r(\Lambda)$ de um reticulado $\Lambda \subset \Lambda_a$ satisfazem*

$$\Phi\left(\frac{d(\Lambda)}{2}\right) \leq r(\Lambda) \leq \frac{d(\Lambda)}{2} + M \leq \frac{d(\Lambda)}{2} + R_{\Lambda_a}, \quad (3.2)$$

em que $M = \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{z} \in \Lambda_a} \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{z}\|$, e \mathbf{x} é um vetor de norma mínima em Λ .

Demonstração. Limitante inferior: segue diretamente da definição da aplicação Φ .

Limitante superior: Sejam $r_{\mathbf{u}} = d(\Lambda)/2 + \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\|$ e $\mathbf{x} \in \Lambda$ um vetor de norma mínima em Λ , isto é, $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d(\Lambda)$. Vamos mostrar que $\tilde{B}(\mathbf{0}, r_{\mathbf{u}}) \cap \tilde{B}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{u}}) \neq \emptyset$. Note que $d(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{x}/2 + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}/2\| + \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\| = r_{\mathbf{u}}$. Então, $\mathbf{u} \in \tilde{B}(\mathbf{0}, r_{\mathbf{u}})$. Por outro lado, observe que $d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{x}/2 + \mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}/2\| + \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\| = r_{\mathbf{u}}$. Assim, $\mathbf{u} \in \tilde{B}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{u}})$ e portanto $r(\Lambda) \leq r_{\mathbf{u}}$. Uma vez que $\|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\| \leq R_{\Lambda_a}$, segue que $r(\Lambda) \leq d(\Lambda)/2 + R_{\Lambda_a}$. \square

Sejam $N_{\Lambda}(r) = \#(\tilde{B}_r \cap \Lambda)$, isto é, o número de pontos do reticulado Λ que pertencem a \tilde{B}_r , e $V_n = \operatorname{vol}(B_1)$, isto é, o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n .

Teorema 3.0.6. *Para $\Lambda \subset \Lambda_a$ ser um código r -perfeito uma condição necessária é que $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = vol(\Lambda)$.*

Demonstração. Observe que $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = N_{\Lambda_a}(r)vol(\mathcal{V}_{\Lambda_a})$, uma vez que \mathcal{V}_{Λ_a} é uma região fundamental de Λ_a . Podemos notar que $N_{\Lambda_a}(r)vol(\mathcal{V}_{\Lambda_a})$ é o volume do poliomino utilizado para ladrilhar Λ_a por translações de pontos de Λ , isto é, $N_{\Lambda_a}(r)vol(\mathcal{V}_{\Lambda_a}) = vol(T^n(r))$. Como $\Lambda \subset \Lambda_a$ é um código perfeito, segue que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T^n(r) + \lambda) = span(\Lambda_a) = span(\Lambda)$. Então, $T^n(r)$ é uma região fundamental de Λ e logo, $vol(\Lambda) = vol(T^n(r)) = N_{\Lambda_a}(r)vol(\mathcal{V}_{\Lambda_a}) = N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a)$. \square

Observação 3.0.7. *No Teorema 3.0.6 vimos que se $\Lambda \subset \Lambda_a$ é um código perfeito, então $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = vol(\Lambda)$. Um questionamento natural é se a volta desse teorema é verdadeira. A resposta é não, como podemos conferir no Exemplo 3.0.8.*

Exemplo 3.0.8. *Sejam $\Lambda_a = \mathbb{Z}^2$ e $\Lambda \subset \Lambda_a$ o reticulado gerado por $\{(1, 0), (0, 25)\}$. Para $r = 3$, podemos observar que $N_{\mathbb{Z}^2}(3) = 25$ e $vol(\mathbb{Z}^2) = 1$. Logo, $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = 25$. E $vol(\Lambda) = \sqrt{\det(\Lambda)} = 25$. Então, temos que $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = vol(\Lambda)$. Mas, neste caso Λ não é um código perfeito em Λ_a , uma vez que para $\lambda = (1, 0)$ pertencente a Λ , temos que $((\tilde{B}_r + \lambda) \cap \tilde{B}_r) \cap \Lambda_a \neq \emptyset$, como podemos observar na Figura 21.*

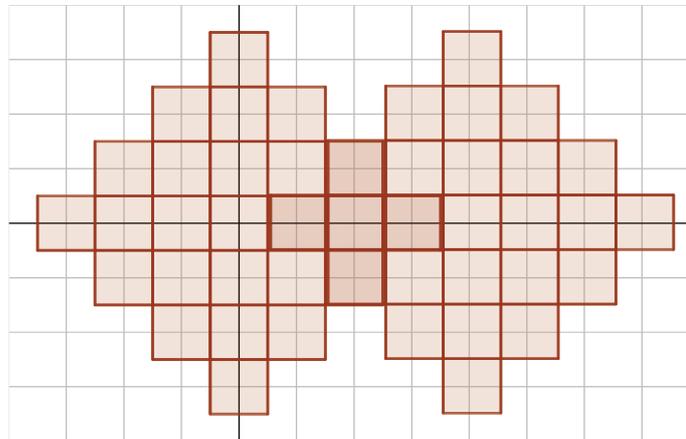


Figura 21 – Λ não é um código perfeito em Λ_a .

No Exemplo 3.0.8 vimos que, para $r = 3$, o reticulado $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ gerado por $\{(1, 0), (0, 25)\}$ não é um código perfeito em \mathbb{Z}^2 , mesmo satisfazendo a condição $N_{\mathbb{Z}^2}(r)vol(\mathbb{Z}^2) = vol(\Lambda)$. Mas isso não significa que o poliomino associado a \tilde{B}_3 não ladrilhe o \mathbb{Z}^2 por outro reticulado, como podemos conferir no Exemplo 3.0.9.

Exemplo 3.0.9. *Sejam $\Lambda_a = \mathbb{Z}^2$ e $\Lambda \subset \Lambda_a$ o reticulado gerado por $\{(4, 3), (3, -4)\}$. Observe que $vol(\Lambda) = \sqrt{\det(\Lambda)} = 25$. Então, $N_{\Lambda_a}(r)vol(\Lambda_a) = vol(\Lambda)$. E, neste caso, pode*

ser provado que Λ é um código perfeito em Λ_a . Na Figura 22 temos uma ilustração de tal código.

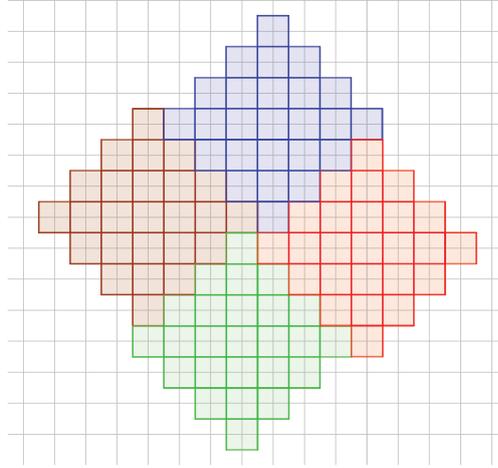


Figura 22 – No Exemplo 3.0.9 Λ é um código perfeito em Λ_a .

Lema 3.0.10.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_n r^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} = 1. \quad (3.3)$$

Demonstração. Sejam P uma região fundamental de Λ_a e $l_0 = \sup_{\mathbf{x} \in P} \|\mathbf{x}\|$. Para $r > l_0$, vamos mostrar que

$$\tilde{B}_{r-l_0} \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda_a \cap \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + P) \subset \tilde{B}_{r+l_0}. \quad (3.4)$$

Primeira inclusão: Seja $\mathbf{y} \in \tilde{B}_{r-l_0}$. Temos que \mathbf{y} pode ser escrito como $\mathbf{x} + \mathbf{p}$, com $\mathbf{x} \in \Lambda_a$ e $\mathbf{p} \in P$, pois P é uma região fundamental de Λ_a . Note que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{p} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{p}\| \leq r - l_0 + l_0 = r \Rightarrow \mathbf{x} \in \tilde{B}_r.$$

Logo, $\mathbf{x} \in (\tilde{B}_r \cap \Lambda_a)$ e então $\mathbf{y} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda_a \cap \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + P)$.

Segunda inclusão: Seja $\mathbf{y} \in \bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda_a \cap \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + P)$. Então, existem $\mathbf{x} \in (\tilde{B}_r \cap \Lambda_a)$ e $\mathbf{p} \in P$ tais que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{p}$. Logo,

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{p}\| \leq r + l_0.$$

Portanto, $\mathbf{y} \in \tilde{B}_{r+l_0}$.

De (3.4) temos

$$\tilde{B}_{r-l_0} \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda_a \cap \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + P) \subset \tilde{B}_{r+l_0} \Rightarrow (r-l_0)^n V_n \leq \text{vol} \left(\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda_a \cap \tilde{B}_r} (\mathbf{x} + P) \right) \leq (r+l_0)^n V_n.$$

$$\Rightarrow (r - l_0)^n V_n \leq N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a) \leq (r + l_0)^n V_n \Rightarrow \frac{r^n}{(r + l_0)^n} \leq \frac{V_n r^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} \leq \frac{r^n}{(r - l_0)^n}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_n r^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} = 1. \quad \square$$

Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado com distância mínima $d = d(\Lambda)$. Um Λ -empacotamento é a união de translações da bola $B_{d/2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (d/2)^2\}$ por pontos de Λ . A partir desse empacotamento, associamos a densidade de empacotamento

$$\Delta^n(\Lambda) = \frac{V_n(d/2)^n}{\text{vol}(\Lambda)}. \quad (3.5)$$

Podemos observar que, para $n \geq 2$, $\Delta^n(\Lambda) < 1$. Seja $\Delta^n = \sup_{\Lambda} \Delta^n(\Lambda)$ o supremo das densidades sobre todos os reticulados n -dimensionais. Temos então que $\Delta^n \leq \alpha < 1$ [1].

O resultado a seguir estende o caso $p = 2$ do Teorema 5.4 de [11] para sub-reticulados de reticulados ambientes gerais.

Teorema 3.0.11. *Seja Λ_a um espaço ambiente. Existe um raio \bar{r} tal que não existem códigos perfeitos Λ_r em Λ_a com raio $r \geq \bar{r}$.*

Demonstração. Um código perfeito Λ_r com raio $r = r(\Lambda_r)$ e distância mínima $d = d(\Lambda_r)$ deve ter um Λ_r -empacotamento com densidade

$$\Delta^n(\Lambda_r) = \frac{V_n(d/2)^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}.$$

Pelo Teorema 3.0.5, para $\mathbf{u} \in \text{argmin}_{\mathbf{z} \in \Lambda_a} \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{z}\|$ e $M = \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\|$, segue que $d/2 \geq r - M$. Então

$$\frac{V_n(d/2)^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} \geq \frac{V_n(r - M)^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}. \quad (3.6)$$

De forma análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 3.0.10, obtemos que $\lim_{r \rightarrow \infty} V_n(r - M)^n / (N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)) = 1$. Então, $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta^n(\Lambda) \geq 1$, o que é uma contradição uma vez que $\Delta^n(\Lambda) \leq \pi/\sqrt{12}$, para $n \geq 2$. Logo, para \bar{r} tal que $r \geq \bar{r}$, não existem códigos perfeitos Λ_r em Λ_a . \square

Corolário 3.0.12. *Em um espaço ambiente Λ_a , o raio de empacotamento de um código perfeito Λ satisfaz*

$$r \leq M \frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})}, \quad (3.7)$$

em que Δ^n é a densidade máxima de um reticulado de posto completo, $M = \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \in \text{argmin}_{\mathbf{z} \in \Lambda_a} \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{z}\|$, e \mathbf{x} é um vetor de norma mínima em Λ .

Demonstração. Um código perfeito Λ deve ter um Λ -empacotamento com densidade

$$\Delta^n(\Lambda) = \frac{V_n(d/2)^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}.$$

Pela demonstração do Lema 3.0.10 temos que

$$N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a) \leq (r + M)^n V_n \Rightarrow \frac{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}{V_n} \leq (r + M)^n. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.6) em (3.8) temos

$$\Delta^n(\Lambda) \geq \left(\frac{r - M}{r + M} \right)^n$$

Então

$$\begin{aligned} \left(\frac{r - M}{r + M} \right)^n &\leq \Delta^n(\Lambda) \Rightarrow \frac{r - M}{r + M} \leq (\Delta^n(\Lambda))^{1/n} \\ \Rightarrow r &\leq (\Delta^n(\Lambda))^{1/n} r + (\Delta^n(\Lambda))^{1/n} M + M \\ \Rightarrow r(1 - (\Delta^n(\Lambda))^{1/n}) &\leq M(1 + \Delta^n(\Lambda)) \\ \Rightarrow r &\leq M \frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})}. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.0.13. *Em um espaço ambiente Λ_a , o raio de empacotamento de um código perfeito Λ satisfaz*

$$r \leq R_{\Lambda_a} \frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})}, \quad (3.9)$$

em que Δ^n é a densidade máxima de um reticulado de posto completo e R_{Λ_a} é o raio de cobertura de Λ_a .

Demonstração. Segue diretamente do fato de $M < R_{\Lambda_a}$ e do Corolário 3.0.12. □

Observação 3.0.14. *Como vimos no Capítulo 1, a maior densidade possível de empacotamento para um reticulado em \mathbb{R}^n só é conhecida nas dimensões 1 a 8 e na dimensão 24. Dessa forma, a Equação (3.9) só poderá ser usada para essas poucas dimensões. Nas demais dimensões, podemos usar a seguinte cota superior para Δ^n [19]:*

$$U_n = V_n \left(2^{\frac{5.25}{n+2.5} + \frac{3 \log_2(n)}{2} + \frac{1}{2} n \log_2\left(\frac{n}{4e\pi}\right) - \log_2\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}\right)} \right), \quad (3.10)$$

a partir da qual temos o seguinte limitante “mais fraco” para o raio de empacotamento de um código perfeito Λ em um espaço ambiente Λ_a :

$$r \leq R_{\Lambda_a} \frac{(1 + (U_n)^{1/n})}{(1 - (U_n)^{1/n})}. \quad (3.11)$$

Como vimos no Capítulo 1, a densidade de cobertura em \mathbb{R}^n de um reticulado Λ é dada por

$$\Theta(\Lambda) = \frac{V_n(R_\Lambda)^n}{\text{vol}(\Lambda)}. \quad (3.12)$$

Seja Θ^n o ínfimo das densidades de cobertura sobre todos os reticulados n -dimensionais. O Teorema 3.0.15 fornece uma relação entre os raios de empacotamento e cobertura de um código perfeito, e sua densidade de cobertura em \mathbb{R}^n .

Teorema 3.0.15. *Em um espaço ambiente Λ_a , o raio de cobertura \tilde{R}_Λ e o raio de empacotamento r de um código perfeito Λ n -dimensional, com $n \geq 2$, satisfazem*

$$\Theta^n \leq \frac{V_n(\tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a})^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}. \quad (3.13)$$

Demonstração. Vamos mostrar que $R_\Lambda \leq \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}$. Para provar essa desigualdade vamos inicialmente mostrar que

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} B(\mathbf{x}, \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}) = \mathbb{R}^n.$$

$\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} B(\mathbf{x}, \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}) \subset \mathbb{R}^n$ é trivial, uma vez que temos uma união de bolas pertencentes a \mathbb{R}^n . Iremos provar então que $\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} B(\mathbf{x}, \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}) \supset \mathbb{R}^n$. Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \in \Lambda_a &\Rightarrow \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \tilde{R}_\Lambda), \text{ para algum } \mathbf{x} \in \Lambda \\ &\Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \tilde{R}_\Lambda. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n &\Rightarrow \mathbf{w} \in B(\mathbf{z}, R_{\Lambda_a}), \text{ para algum } \mathbf{z} \in \Lambda_a \\ &\Rightarrow d(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \leq R_{\Lambda_a}. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade triangular e por (3.14), segue que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \leq \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a},$$

para algum $\mathbf{x} \in \Lambda$. Portanto, temos o que queremos mostrar.

Como R_Λ é o raio de cobertura real de Λ , temos que R_Λ é a menor distância atingível de \mathcal{D} tal que $\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} B(\mathbf{x}, R_\Lambda) = \mathbb{R}^n$. Logo, como $\bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} B(\mathbf{x}, \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}) = \mathbb{R}^n$, segue que $R_\Lambda \leq \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}$.

Agora, note que

$$\Theta^n \leq \frac{V_n(R_\Lambda)^n}{\text{vol}(\Lambda)}.$$

Como $R_\Lambda \leq \tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a}$, temos que

$$\Theta^n \leq \frac{V_n(\tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a})^n}{\text{vol}(\Lambda)}.$$

Portanto, como Λ é um código perfeito em Λ_a

$$\Theta^n \leq \frac{V_n(\tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a})^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)}.$$

□

Corolário 3.0.16. *Em um espaço ambiente Λ_a , o raio de empacotamento r de um código perfeito Λ_r satisfaz*

$$r \leq R_{\Lambda_a} \frac{((\Theta^n)^{1/n} + 1)}{((\Theta^n)^{1/n} - 1)}, \quad (3.15)$$

em que Θ^n é o ínfimo das densidades de cobertura sobre todos os reticulados n -dimensionais de posto completo e R_{Λ_a} é o raio de cobertura de Λ_a .

Demonstração. Pelo Teorema 3.0.5 e pela demonstração do Lema 3.0.10, temos que $(r - R_{\Lambda_a})^n V_n \leq N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)$. Então,

$$\frac{V_n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} \leq \frac{1}{(r - R_{\Lambda_a})^n}.$$

Como Λ_r é um código perfeito, pela equação (3.13) segue que

$$\Theta^n \leq \frac{V_n(\tilde{R}_\Lambda + R_{\Lambda_a})^n}{N_{\Lambda_a}(r) \text{vol}(\Lambda_a)} \leq \frac{(\tilde{R}_{\Lambda_r} + R_{\Lambda_a})^n}{(r - R_{\Lambda_a})^n} = \frac{(r + R_{\Lambda_a})^n}{(r - R_{\Lambda_a})^n}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \Theta^n &\leq \frac{(r + R_{\Lambda_a})^n}{(r - R_{\Lambda_a})^n} \implies (\Theta^n)^{1/n} (r - R_{\Lambda_a}) \leq r + R_{\Lambda_a} \\ \implies r((\Theta^n)^{1/n} - 1) &\leq R_{\Lambda_a}((\Theta^n)^{1/n} + 1) \\ \implies r &\leq R_{\Lambda_a} \frac{((\Theta^n)^{1/n} + 1)}{((\Theta^n)^{1/n} - 1)}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.0.17. *Podemos observar que o raio r de um código perfeito é limitado pelos limitantes encontrados nos corolários 3.0.13 e 3.0.16, a saber, as equações (3.9) e (3.15). O primeiro limitante depende da densidade de empacotamento máxima sobre todos os reticulados n -dimensionais de posto completo. Já o segundo limitante depende do ínfimo das densidades de cobertura sobre os mesmos reticulados. É natural nos questionarmos sobre qual desses limitantes é o melhor. Para compará-los, basta comparar os fatores*

$$\frac{1 + (\Delta^n)^{1/n}}{1 - (\Delta^n)^{1/n}} \quad e \quad \frac{(\Theta^n)^{1/n} + 1}{(\Theta^n)^{1/n} - 1}.$$

Na Tabela 4 temos um comparativo entre esses termos nas dimensões 2 a 24 (colunas 2 e 4). Como a densidade de empacotamento máxima é determinada apenas nas dimensões de 1 a 8 e 24 e o ínfimo das densidades de coberturas é comprovada apenas para dimensões de 1 a 5 e na 24, nas colunas 2 e 4, os valores com “*” são “conjeturados” para as dimensões 9 a 23, usando as densidades máximas e mínimas conhecidas nessas dimensões. Na coluna 3 exibimos o parâmetro referente ao limitante “mais fraco” (3.11), que é de fato um limitante, uma vez que a função $f(x) = (1 + x^{1/n})/(1 - x^{1/n})$ é decrescente.

n	$\frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})}$	$\frac{(1 + (U^n)^{1/n})}{(1 - (U^n)^{1/n})}$	$\frac{((\Theta^n)^{1/n} + 1)}{((\Theta^n)^{1/n} - 1)}$
2	40.9401		21.073
3	19.9863		15.7762
4	16.5788		14.0974
5	13.0947		13.2975
6	12.1939		12.8393*
7	11.5067		12.5458*
8	11.6927		12.3438*
9	9.38276*	11.1139	12.1971*
10	8.70996*	10.6209	12.0863*
11	8.1458*	10.2179	12.0001*
12	8.02364*	9.88246	11.9313*
13	7.59846*	9.59878	11.8751*
14	7.34841*	9.35564	11.8288*
15	7.39319*	9.14483	11.7895*
16	7.62823*	8.96018	11.7562*
17	7.23183*	8.79703	11.7274*
18	7.06761*	8.65173	11.7025*
19	6.96769*	8.52146	11.6806*
20	7.02062*	8.40393	11.6613*
21	7.04158*	8.29731	11.644*
22	7.19803*	8.20011	11.6287*
23	7.38973*	8.1111	11.6148*
24	7.72307		23.233

Tabela 4 – Comparativo entre os termos dos limitantes superiores (3.9), (3.11) e (3.15).

Nas dimensões 2 a 4, podemos observar que o limitante (3.15) é melhor que os demais, enquanto nas dimensões 5 a 24 o limitante (3.9) é melhor. Além disso, para n suficientemente grande, como $2^{-1} \lesssim \Delta^{1/n} \lesssim 2^{-0.5990}$ ([19], Seção 1.5), temos que esse limitante está entre 3 e 4.88601.

Neste capítulo estudamos os códigos perfeitos em reticulados ambientes gerais, fornecendo principalmente limitantes superiores para seus raios de empacotamento. Os limitantes apresentados aqui são generalizações e/ou foram inspirados, para $p = 2$, por outros fornecidos em [10] e [11], em que foram provados resultados para o reticulado ambiente \mathbb{Z}^n na métrica l_p . Ainda neste contexto, no Capítulo 4 por meio dos limitantes dados nas Equações (3.9) e (3.15), apresentaremos um algoritmo e, a partir dele, buscaremos todos os códigos perfeitos em alguns reticulados ambientes conhecidos.

4 Resultados Computacionais

Neste capítulo apresentamos o pseudo-código do algoritmo que lista todos os códigos perfeitos num dado reticulado ambiente Λ_a até um determinado raio de empacotamento r satisfazendo os limitantes apresentados nos Corolários 3.0.13 e 3.0.16. Utilizando-se tal algoritmo, buscamos para quais raios são obtidos códigos perfeitos em alguns reticulados ambientes conhecidos. Vale ressaltar que o algoritmo usado é uma adaptação dos algoritmos apresentados e utilizados em [10] e [11].

4.1 Algoritmo

O primeiro passo antes de iniciarmos o algoritmo é escolher qual o reticulado ambiente Λ_a que será utilizado. Além disso, por meio dos limitantes dados nas Equações (3.9) e (3.15) devemos determinar o maior raio r para o qual pode-se encontrar códigos perfeitos em Λ_a . Após escolhermos esses parâmetros, utilizamos o Algoritmo SVP para encontrar todos os pontos de Λ_a que possuem norma menor ou igual a r .

O **problema do vetor mais curto** (*shortest vector problem*) - SVP, consiste em encontrar o vetor não nulo mais curto em um reticulado Λ , isto é, encontrar um vetor $\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ que possui norma mínima.

Para cada $r_i \in \mathcal{D}(\Lambda_a)$ (raio atingível em Λ_a (3.1)), em que $0 \neq r_i \leq r$, o algoritmo usado verifica a existência de um sub-reticulado Λ de Λ_a tal que $vol(\Lambda) = vol(\Lambda_a)N_{\Lambda_a}(r_i)$.

No Algoritmo 1 segue o pseudo-código do algoritmo utilizado.

Algoritmo 1 – Teste dos Códigos Perfeitos

inputs : Λ_a é o reticulado ambiente; $0 \neq r_i \leq r$;

outputs: Lista de todos os códigos r_i -perfeitos em Λ_a ;

início

inicialização;

$\tilde{B} \leftarrow \tilde{B}^n(r_i)$;

$Lattices \leftarrow \{\Lambda \subset \Lambda_a : \text{vol}(\Lambda) = \text{vol}(\Lambda_a)N_{\Lambda_a}(r_i)\}$;

$C \leftarrow \#Lattices$;

enquanto $C > 0$ **faça**

se “Teste de Injetividade” no C -ésimo elemento de $Lattices$ é negativo

então

 delete o C -ésimo elemento de $Lattices$;

fim

$C \leftarrow C - 1$;

fim

$C \leftarrow \#Lattices$;

enquanto $C > 0$ **faça**

se “Teste de Empacotamento” no C -ésimo elemento de $Lattices$ é negativo

então

 delete o C -ésimo elemento de $Lattices$

fim

$C \leftarrow C - 1$;

fim

fim

Observação 4.1.1. O “Teste de Injetividade” é o mesmo apresentado em [11, 10] e é baseado na equivalência (i) \iff (ii) do Teorema 2.0.16. Essencialmente, cada $\Lambda \subset \Lambda_a$ do conjunto “Lattices” é associado a uma matriz A , tal que AM é uma matriz geradora de Λ , em que M é uma matriz geradora do reticulado ambiente Λ_a . Cada matriz A vai caracterizar o núcleo de um homomorfismo Φ . Então se verifica a ação de Φ nos elementos da bola $\tilde{B}(r_i)$. Se esta ação não for injetora, Λ não é um código perfeito em Λ_a e então excluimos esse elemento do conjunto “Lattices”. Caso contrário, temos que Λ pode ser um código perfeito em Λ_a e então devemos aplicar o “Teste de Empacotamento”.

Observação 4.1.2. O “Teste de Empacotamento” consiste em verificar se as bolas de raio r_i centradas em pontos de $\Lambda \subset \Lambda_a$ são disjuntas.

Exemplo 4.1.3. Sejam Λ_a o reticulado que possui matriz de Gram $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ e $r_i = \sqrt{22}$. Usando o algoritmo proposto por Fincke e Pohst em [34], encontramos a bola

$\tilde{B}_{\sqrt{22}}$. Temos que $\tilde{B}_{\sqrt{22}} = \{(0, 0)M, \pm(1, 0)M, \pm(0, 1)M, \pm(1, 1)M, \pm(2, 0)M, \pm(-1, 1)M, \pm(2, 1)M, \pm(3, 0)M, \pm(-2, 1)M, \pm(3, 1)M, \pm(1, 2)M\}$, em que M é uma matriz geradora para Λ_a . Então $\#\tilde{B}_{\sqrt{22}} = 21$. Agora vamos encontrar um sub-reticulado Λ de Λ_a tal que $\text{vol}(\Lambda) = 21\text{vol}(\Lambda_a)$. Para isso, queremos encontrar uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\det(A) = 21$ e AM gere Λ . Utilizando a Fórmula Normal de Hermite, temos que A pode assumir as seguintes formas: $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$, em que $x \in \{0, 1, \dots, 20\}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, em que $x \in \{0, 1, \dots, 6\}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & x \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, em que $x \in \{0, 1, 2\}$ e $A = \begin{pmatrix} 21 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que $x \in \{0\}$.

Agora vamos colocar todos os candidatos a sub-reticulados na lista “Lattices” e aplicar o “Teste de Injetividade”. Considere a matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$, pertencente ao conjunto “Lattices”. A matriz A_1 vai caracterizar o núcleo de um homomorfismo Φ_1 e vamos observar se a ação de Φ_1 nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$ é injetora. Essencialmente, vamos aplicar a função nos elementos da bola de modo que cada elemento seja levado ao representante da sua classe dentro de um paralelogramo fundamental, e então verificamos se mais de um elemento é levado num mesmo representante. Na Figura 23 temos uma ilustração dessa ação do homomorfismo Φ_1 nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$. Como podemos

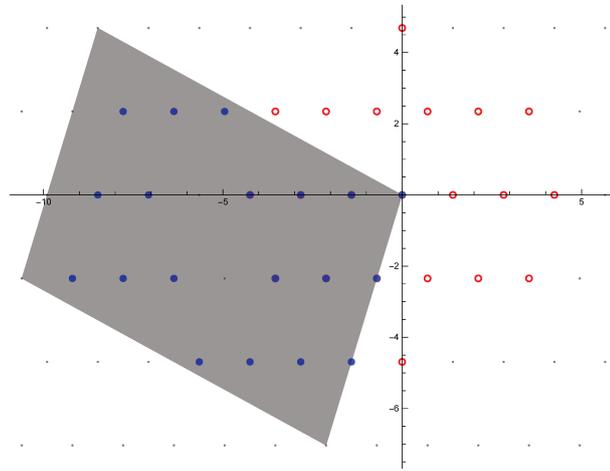


Figura 23 – Ilustração da ação do homomorfismo Φ_1 nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$.

observar na Figura 23, os elementos $(-1, -2)M$ e $(2, 1)M$, que pertencem a $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$, são associados ao elemento $(-6, 0)M$. Logo, a aplicação Φ_1 não é injetora e portanto, A_1 será excluído do conjunto “Lattices”. Ou seja, o reticulado Λ_1 gerado pela matriz A_1M não é um código perfeito em Λ_a .

Vamos considerar agora $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$. A matriz A vai caracterizar o núcleo de um homomorfismo Φ e, neste caso, a ação de Φ nos elementos de $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$ é injetora,

como podemos conferir na Figura 24. A matriz A foi a única que passou no “Teste

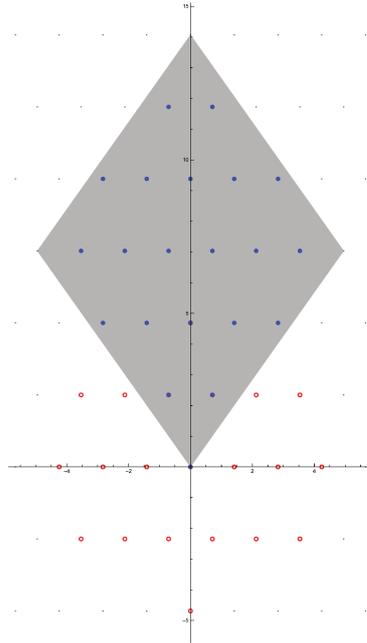


Figura 24 – Ilustração da ação do homomorfismo Φ nos elementos da bola $\tilde{B}_{\sqrt{22}}$.

de injetividade”. Agora vamos fazer o “Teste de Empacotamento”. Ao final dos testes, concluímos então que para $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$ o sub-reticulado gerado por AM é um código perfeito em Λ_a .

Observação 4.1.4. Vale ressaltar que o algoritmo pode nos fornecer sub-reticulados perfeitos equivalentes, e neste caso temos que descartá-los. Então, para cada reticulado ambiente Λ_a , é interessante tentar caracterizar os sub-reticulados congruentes (caracterizando as simetrias entre eles) para que o algoritmo possa percorrer um conjunto menor de candidatos e assim fornecer os resultados mais rápido.

4.2 Resultados

Utilizando-se o algoritmo apresentado na Seção 4.1 buscamos, em espaços ambientes previamente definidos nas dimensões 2 e 3, raios para os quais temos códigos perfeitos. Para o espaço ambiente Λ_a o algoritmo encontra, para cada r_i , uma matriz inteira A tal que, multiplicada pela matriz M geradora de Λ_a , resulta em uma matriz \overline{M} , que gera o sub-reticulado $\Lambda \subset \Lambda_a$, isto é, Λ é gerado por $\overline{M} = AM$. A menos de congruência, esses são os únicos códigos perfeitos (sub-reticulados) em Λ_a .

Trabalharemos com os espaços ambientes A_2 , D_3 , D_3^* e com alguns representantes das duas famílias de reticulados algébricos construídas via homomorfismo de Minkowski nos exemplos 1.9.23 e 1.9.24.

4.2.1 Códigos perfeitos em A_2

Para o reticulado ambiente A_2 , considere a matriz geradora M tal que $G = MM^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontramos 10 raios para os quais existem códigos perfeitos em A_2 , como podemos observar na Tabela 5.

r^2	$N_{A_2}(r)$	A
2	7	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
6	13	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
8	19	$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$
14	31	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 31 \end{pmatrix}$
18	37	$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 37 \end{pmatrix}$
24	43	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 43 \end{pmatrix}$
32	61	$\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 61 \end{pmatrix}$
38	73	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 73 \end{pmatrix}$
50	91	$\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 91 \end{pmatrix}$
72	127	$\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 127 \end{pmatrix}$

Tabela 5 – Todos os códigos perfeitos em A_2 , seus respectivos raios de empacotamento r_i , $N_{A_2}(r_i)$ e as matrizes associadas A .

Na Figura 25 temos a união de 4 políominos associados com as bolas de raio r_i , em que $r_i^2 = 2$ e $r_i^2 = 18$, isto é, políominos associados as bolas $\tilde{B}_{\sqrt{2}}$ e $\tilde{B}_{\sqrt{18}}$.

4.2.2 Códigos perfeitos em D_3

Para o caso do reticulado ambiente D_3 , vamos considerar a matriz geradora M tal que $G = MM^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontramos 2 raios para os quais existem códigos perfeitos em D_3 , como podemos observar na Tabela 6.

Na Figura 26 temos, em vermelho, uma ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3 ; em laranja, a união de 12 regiões de Voronoi de D_3 deslocadas por vetores de D_3 , e, em amarelo, a união de 6 dessas regiões deslocadas também por vetores do reticulado.

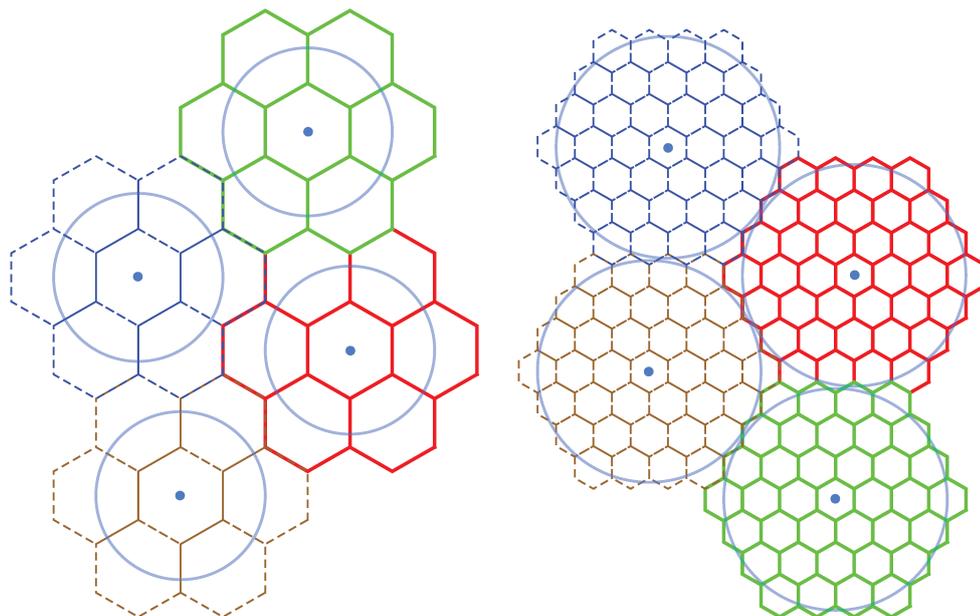


Figura 25 – União de 4 poliomínos $T^2(\sqrt{2})$ e $T^2(\sqrt{18})$, respectivamente.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$
4	

Tabela 6 – Todos os códigos perfeitos em D_3 , seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

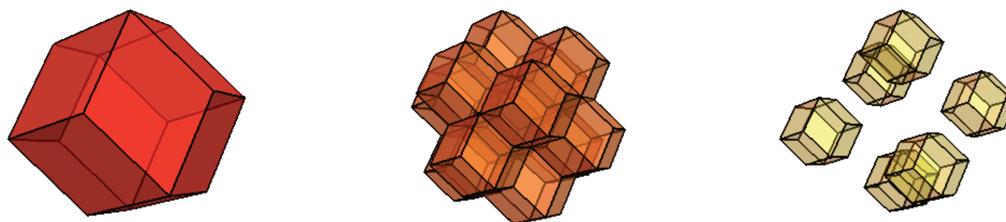


Figura 26 – Ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3 em vermelho, da união de 12 dessas regiões em laranja e da união de 6 regiões de Voronoi de D_3 em amarelo.

Temos que a união das duas primeiras regiões da Figura 26, ou seja, a união da região de Voronoi do reticulado D_3 com as 12 regiões de Voronoi deslocadas por vetores

de D_3 , gera o poliomino, que aqui chamaremos de polivoronoi, associado com a bola $\tilde{B}_{\sqrt{2}}$. Uma ilustração desse polivoronoi pode ser vista na Figura 27. A união das três regiões apresentadas na Figura 26 gera o polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{4}}$.

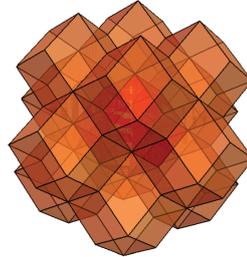


Figura 27 – Ilustração do polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{2}}$.

4.2.3 Códigos perfeitos em D_3^*

Para o reticulado ambiente D_3^* , com fator de escala 4, considere a matriz geradora M tal que $G = MM^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Encontramos 3 raios para os quais existem códigos perfeitos em D_3^* , como podemos observar na Tabela 7.

r^2	A
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Tabela 7 – Todos os códigos perfeitos em D_3^* , seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

Na Figura 28 temos, em vermelho, uma ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3^* ; em laranja, a união de 8 regiões de Voronoi de D_3^* deslocadas por vetores de D_3^* ; em amarelo, a união de 6 dessas regiões deslocadas também por vetores do reticulado, e, em azul, a união de 12 dessas regiões deslocadas por vetores de D_3^* .

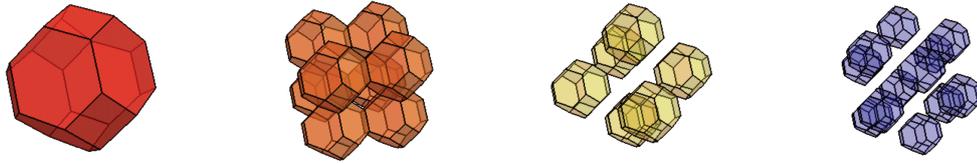


Figura 28 – Ilustração da região de Voronoi do reticulado D_3^* em vermelho, da união de 8 dessas regiões em laranja, 6 em amarelo e 12 em azul.

A união das duas primeiras regiões da Figura 28, ou seja, a união da região de Voronoi do reticulado D_3^* com as 8 regiões de Voronoi deslocadas por vetores de D_3^* , gera o polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{3}}$. Uma ilustração desse polivoronoi pode ser vista na Figura 29. A união das três primeiras regiões da Figura 28 gera o polivoronoi associado a $\tilde{B}_{\sqrt{4}}$ e a união das quatro regiões da figura gera o polivoronoi associado a $\tilde{B}_{\sqrt{8}}$

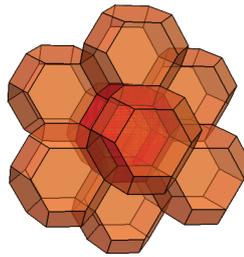


Figura 29 – Ilustração do polivoronoi associado a bola $\tilde{B}_{\sqrt{3}}$.

4.2.4 Códigos perfeitos em reticulados algébricos bidimensionais

Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-l})$ corpos quadráticos, em que $l > 0$ e l é um inteiro livre de quadrados. Estudaremos duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais, $\Lambda_{a,l,1}$ e $\Lambda_{a,l,2}$, obtidas via homomorfismo de Minkowski nos casos em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$ e $l \equiv 2 \pmod{4}$, respectivamente. A construção detalhada dessas famílias pode ser vista nos Exemplos 1.9.23 e 1.9.24.

1º caso: $-l \equiv 1 \pmod{4}$.

Como vimos no Exemplo 1.9.23, o reticulado $\Lambda_{a,l,1}$ possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente, dadas por

$$M_{l,1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & (1+l)/2 \end{pmatrix}.$$

Para essa família de reticulados vamos analisar os casos em que $l = 3, 7, 11$ e 15 .

(i) $l = 3$:

Para $l = 3$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Essa também é uma matriz de Gram para o reticulado A_2 . Logo, os resultados obtidos aqui são os mesmos da Tabela 5.

Na Figura 30 temos a união de 4 poliomínos associados com as bolas $\tilde{B}_{\sqrt{6}}$ e $\tilde{B}_{\sqrt{72}}$.

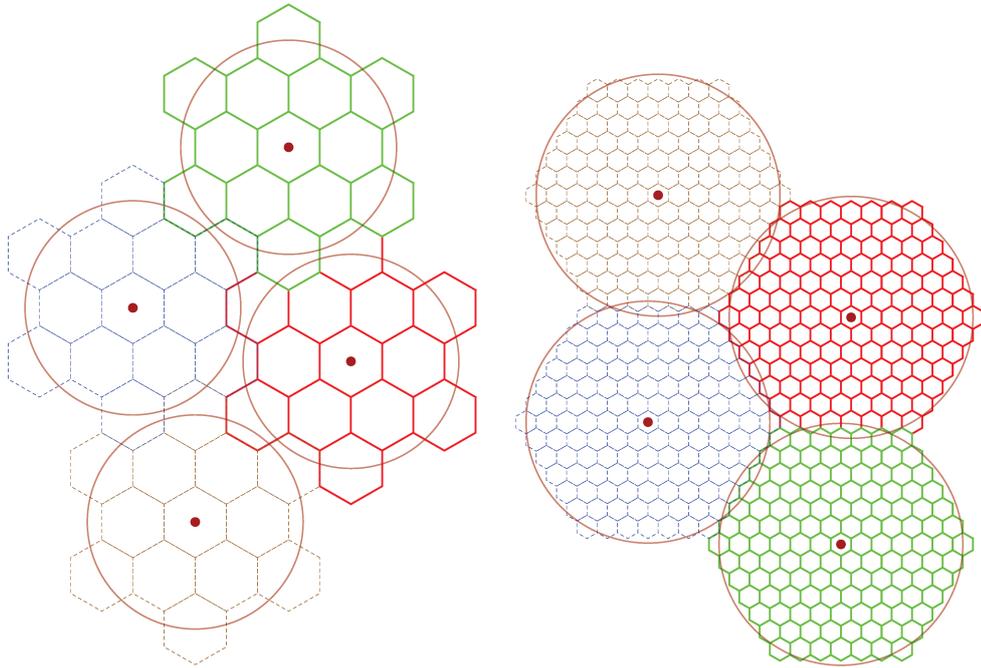


Figura 30 – União de 4 poliomínos $T^2(\sqrt{6})$ e $T^2(\sqrt{72})$, respectivamente.

(ii) $l = 7$:

Para $l = 7$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{7,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 5 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,7,1}$, como podemos observar na Tabela 8.

Na Figura 31 temos a união de 4 poliomínos associados com as bolas $\tilde{B}_{\sqrt{4}}$ e $\tilde{B}_{\sqrt{8}}$, respectivamente.

(iii) $l = 11$:

Para $l = 11$, o reticulado possui matriz de Gram $G_{11,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 7 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,11,1}$, como podemos observar na Tabela 9.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 29 \end{pmatrix}$

Tabela 8 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,7,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

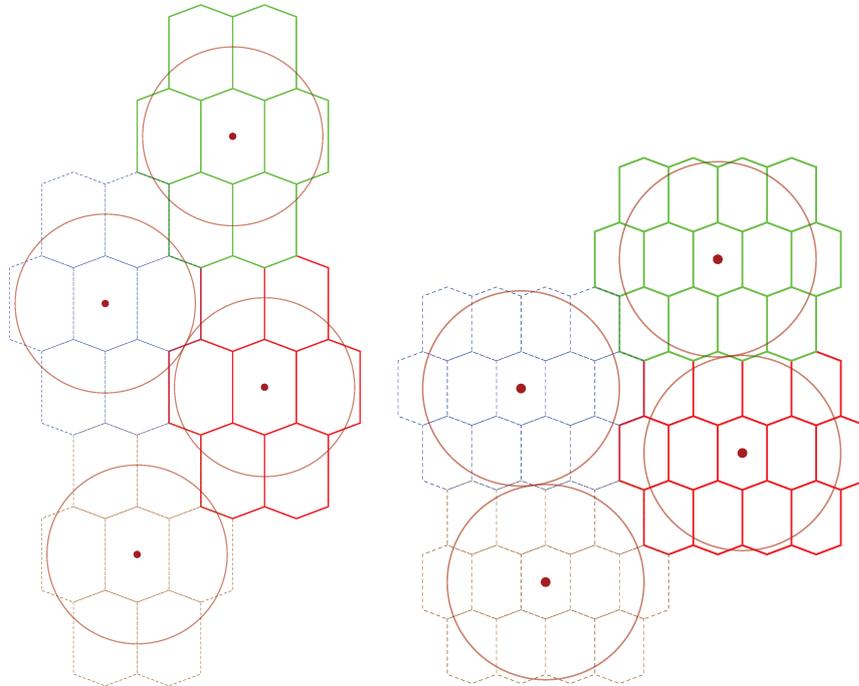


Figura 31 – União de 4 políominos $T^2(\sqrt{4})$ e $T^2(\sqrt{8})$, respectivamente.

Na Figura 32 temos uma ilustração da união de 4 políominos associados a $\tilde{B}_{\sqrt{8}}$ e $\tilde{B}_{\sqrt{18}}$.

(iv) $l = 15$:

Para $l = 15$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{15,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 8 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,15,1}$, como podemos observar na Tabela 10.

2º caso: $l \equiv 2$ ou $3 \pmod{4}$.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$
40	$\begin{pmatrix} 1 & 22 \\ 0 & 39 \end{pmatrix}$

Tabela 9 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,11,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

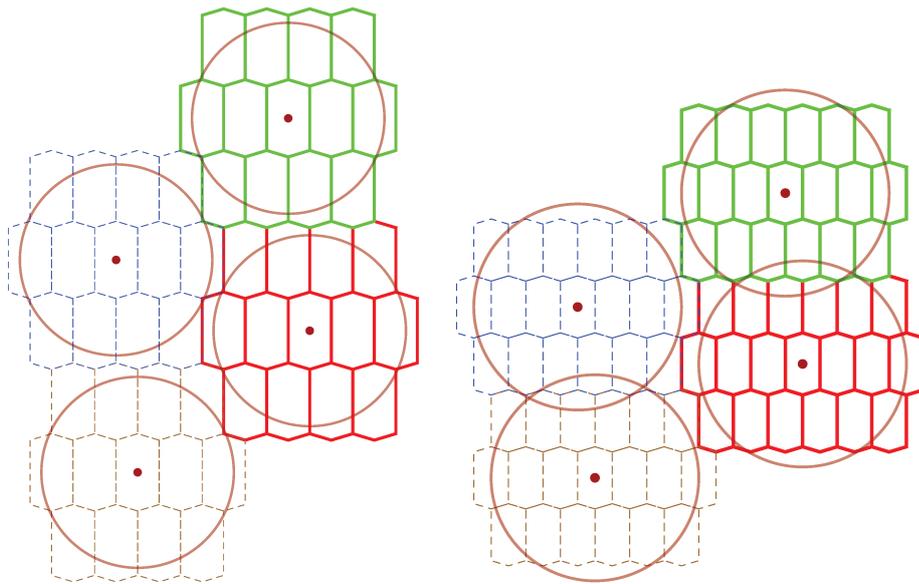


Figura 32 – União de 4 políominos $T^2(\sqrt{8})$ e $T^2(\sqrt{18})$, respectivamente.

Como vimos no Exemplo 1.9.24, o reticulado $\Lambda_{a,l,2}$ possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente,

$$M_{l,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Para essa família de reticulados vamos analisar os casos em que $l = 2, 6, 10$ e 14 . Para os casos em que $l \equiv 3 \pmod{4}$ os resultados são análogos.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 31 \end{pmatrix}$
62	$\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$

Tabela 10 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,15,1}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

(i) $l = 2$:

Para $l = 2$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Encontramos aqui 7 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,2,2}$, como podemos observar na Tabela 11.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}$

Tabela 11 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,2,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

(ii) $l = 6$:

Para $l = 6$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{6,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 11 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,6,2}$, como podemos observar na Tabela 12.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$
44	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
80	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 53 \end{pmatrix}$
98	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 63 \end{pmatrix}$

Tabela 12 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,6,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

(iii) $l = 10$:

Para $l = 10$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{10,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 13 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,10,2}$, como podemos observar na Tabela 13.

(iv) $l = 14$:

Para $l = 14$, temos o reticulado que possui matriz de Gram $G_{14,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$. Encontramos aqui 16 raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,14,2}$, como podemos observar na Tabela 14.

Neste capítulo, usando uma das caracterizações de ladrilhamento dadas no Capítulo 2 e os limitantes dos corolários 3.0.13 e 3.0.16 encontrados no Capítulo 3,

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$
38	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$
50	$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$
52	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 29 \end{pmatrix}$
70	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
72	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 35 \end{pmatrix}$
178	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 83 \end{pmatrix}$

Tabela 13 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,10,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

enumeramos todos os códigos perfeitos nos reticulados ambientes A_2, D_3, D_3^* e de alguns reticulados algébricos bidimensionais pertencentes às famílias $\Lambda_{a,l,1}$ e $\Lambda_{a,l,2}$, construídas via homomorfismo de Minkowski.

r^2	A
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$
36	$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$
46	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$
50	$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$
60	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 29 \end{pmatrix}$
72	$\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 31 \end{pmatrix}$
78	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 35 \end{pmatrix}$
98	$\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 37 \end{pmatrix}$
100	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 41 \end{pmatrix}$
120	$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 51 \end{pmatrix}$
126	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

Tabela 14 – Todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,14,2}$, seus respectivos raios de empacotamento r_i e as matrizes associadas A .

5 Códigos Perfeitos em Reticulados Algébricos Bidimensionais

Neste capítulo analisamos duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais construídas no Capítulo 1, estudando os formatos e as respectivas quantidades de códigos perfeitos em cada uma delas.

Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-l})$ corpos quadráticos, em que $l > 0$ e l é um inteiro livre de quadrados. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$ e $l \equiv 2 \pmod{4}$, usando os Teoremas 1.9.16, 1.9.17 e 1.9.21, construímos nos Exemplos 1.9.23 e 1.9.24 duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais, que denotaremos aqui por $\Lambda_{a,l,1}$ e $\Lambda_{a,l,2}$. Vamos estudar o formato e a quantidade de raios para os quais existem códigos perfeitos em cada uma dessas famílias.

5.1 $-l \equiv 1 \pmod{4}$

Como vimos no Exemplo 1.9.23, o reticulado $\Lambda_{a,l,1}$ possui matriz geradora e de Gram, respectivamente:

$$M''_{l,1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } G''_{l,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & (1+l)/2 \end{pmatrix}.$$

Para facilitar as contas, vamos trabalhar com a base de $\Lambda_{a,l,1}$ que possui matriz geradora e de Gram, respectivamente:

$$M_{l,1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & (1+l)/2 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(\Lambda_{a,l,1}) = l$ e a distância mínima d é igual $\sqrt{2}$. Então,

$$\Delta(\Lambda_{a,l,1}) = \frac{\pi(\sqrt{2}/2)^2}{\sqrt{l}} = \frac{\pi}{2\sqrt{l}} \implies \Delta(\Lambda_{a,l,1}) \longrightarrow 0, \text{ quando } l \longrightarrow +\infty.$$

Observe também que o raio de cobertura $R_{\Lambda_{a,l,1}}$ é igual a $((l+1)^2/8l)^{1/2}$. Então,

$$r \leq R_{\Lambda_{a,l,1}} \frac{(1 + (\Delta^2)^{1/2})}{(1 - (\Delta^2)^{1/2})} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 (1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{8l (1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}}.$$

Logo, como $\sqrt{\frac{(l+1)^2 (1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{8l (1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}} \longrightarrow +\infty$ quando $l \longrightarrow +\infty$, quanto maior o valor de l , mais chances teremos de encontrar raios grandes para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito.

Para essa família de reticulados, para cada valor de l , considerando os raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito, observamos que os políominos construídos, que chamaremos aqui de poli-hexágonos devido ao formato da região de Voronoi desses reticulados, possuem alguns formatos específicos. Vamos estudar três desses formatos, que denotaremos por “Tipo 1”, “Tipo 2” e “Tipo 3”. A seguir, vamos descrever esses formatos e fornecer alguns resultados sobre cada um deles.

5.1.1 Tipo 1: poli-hexágono de um nível

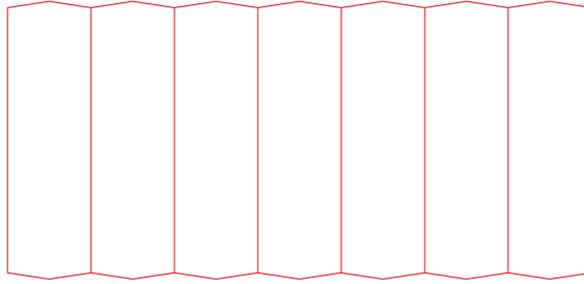


Figura 33 – Poli-hexágono do Tipo 1 construído para $l = 43$.

Neste formato de ladrilho os poli-hexágonos construídos possuem apenas uma camada.

A bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a, 0)M_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : (a, 0)G_{l,1}(a, 0)^T \leq r^2 < (l + 1)/2 \text{ e } (a, 0) \in \mathbb{Z}^2\}$, em que $G_{l,1}$ é a matriz de Gram associada a $M_{l,1}$ que gera $\Lambda_{a,l,1}$.

A restrição $(a, 0)G_{l,1}(a, 0)^T < (l + 1)/2$, isto é, que a norma ao quadrado dos vetores seja estritamente menor do que $(1, 1)G_{l,1}(1, 1)^T = (l + 1)/2$ garante que os poli-hexágonos construídos tenham apenas uma camada.

Note que se $(a, b)M_{l,1} \in \tilde{B}_r$, então b necessariamente é igual a zero, pois caso contrário teríamos que

$$\begin{aligned} (a, b)G_{l,1}(a, b)^T &= 2a^2 - 2ab + \left(\frac{1+l}{2}\right)b^2 \\ &= 2\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}b^2 \\ &\geq \frac{l}{2}b^2. \end{aligned}$$

Se b é par, então

$$(a, b)G_{l,1}(a, b)^T \geq \frac{l}{2}(2k)^2 = 2k^2l \geq 2l \geq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil.$$

Se b é ímpar, então

$$(a, b)G_{l,1}(a, b)^T \geq \frac{l}{2}(2k + 1)^2 = 2k^2l + 2kl + \frac{l}{2} \geq 2l + \frac{l}{2} \geq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil.$$

Como $-l \equiv 1 \pmod{4}$, segue que $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor = \frac{l+1}{2}$. Logo, para $b \neq 0$, temos que $(a, b)G_{l,1}(a, b)^T \geq \frac{l+1}{2}$, e portanto, $(a, b)M_{l,1} \notin \tilde{B}_r$.

A partir dessa observação temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1. *Os poli-hexágonos do Tipo 1 ladrilham o \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Seja $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ o reticulado gerado pela matriz $N_{l,1}$, tal que

$$N_{l,1} = \begin{pmatrix} (2p+1)\sqrt{2} & 0 \\ ((2c-1)\sqrt{2})/2 & \sqrt{2l}/2 \end{pmatrix},$$

em que $p = \{1, 2, \dots, t\}$, $t = \max\{a \in \mathbb{Z}_+ : (a, 0)M_{l,1} \in \tilde{B}_r\}$, e $1 \leq c \leq p$. Considere $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$, em que $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$. Vamos mostrar que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

(i) $(\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}))$ possui medida nula, para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Vamos mostrar que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}} [(\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}) \cap (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) &\implies \mathbf{x} \in \mathcal{R} \text{ e } \mathbf{x} \in (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \\ &\implies \mathbf{x} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}, \text{ para algum } \alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\} \\ &\quad \text{e} \\ &\quad \mathbf{x} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}, \text{ para algum } \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\} \\ &\implies \exists \alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\} \text{ tais que} \\ &\quad \mathbf{x} \in (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}) \cap (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}) \\ &\implies \mathbf{x} \in \bigcup_{\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}} [(\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}) \cap (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda})]. \end{aligned}$$

Agora, vamos provar que, para todo $\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}$ e para $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, temos que $(\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}) \cap (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula.

Observe que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}$ é a região de Voronoi de $\alpha \mathbf{u}$, que pertence a $\Lambda_{a,l,1}$. E $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$, que também é um elemento de $\Lambda_{a,l,1}$. Então, temos que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u}$ e $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$ são iguais ou a interseção entre elas tem medida nula (essas regiões são disjuntas ou se interceptam nos bordos). Se as regiões forem iguais, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha \mathbf{u} &= \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda} \iff \alpha \mathbf{u} = \beta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda} \\ \iff \boldsymbol{\lambda} &= (\alpha - \beta) \mathbf{u} \implies \|\boldsymbol{\lambda}\| = |\alpha - \beta| \|\mathbf{u}\| = |\alpha - \beta| \sqrt{2} \leq 2p\sqrt{2}, \end{aligned}$$

pois $\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}$. Mas isso é um absurdo, pois a distância mínima de $\Lambda_{l,1}$ é igual a $(2p+1)\sqrt{2}$. Dessa forma, $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha\mathbf{u}$ e $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$ não podem ser iguais, e então segue que a interseção entre elas tem medida nula e, conseqüentemente, que

$\bigcup_{\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}} [(\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \alpha\mathbf{u}) \cap (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \beta\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda})]$ tem medida nula, uma vez que é a união finita de conjuntos de medida nula.

Como $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda})$ é um subconjunto de um conjunto de medida nula, segue que $(\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}))$ possui medida nula.

$$(ii) \quad \bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1}} (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{R}^2.$$

Como $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}}$ é um $\Lambda_{a,l,1}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 , temos que

$$\bigcup_{\mathbf{w} \in \Lambda_{a,l,1}} (\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \mathbf{w}) = \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

Vamos mostrar que para cada $\mathbf{w} \in \Lambda_{a,l,1}$, existem $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1}$ e $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}$ tais que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$.

Note que, para cada $\mathbf{w} \in \Lambda_{a,l,1}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\mathbf{w} = m(\sqrt{2}, 0) + n(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2l}/2).$$

Isto é,

$$\bar{\mathbf{w}} = \left(\sqrt{2} \left(m - \frac{n}{2} \right), \frac{n\sqrt{2l}}{2} \right).$$

Devemos mostrar que existem inteiros k e j e $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm k\}$ tais que

$$\mathbf{w} = \alpha(\sqrt{2}, 0) + k((2p+1)\sqrt{2}, 0) + j \left(\frac{(2c-1)\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2l}}{2} \right),$$

ou seja,

$$\mathbf{w} = \left(\sqrt{2} \left(\alpha + (2p+1)k + cj - \frac{j}{2} \right), \frac{j\sqrt{2l}}{2} \right).$$

Aplicando o algoritmo da divisão, obtemos $q, \bar{q}, R, \bar{R} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} cn &= q(2p+1) + R \text{ e } 0 \leq R < 2p+1; \\ m &= \bar{q}(2p+1) + \bar{R} \text{ e } 0 \leq \bar{R} < 2p+1. \end{aligned}$$

Observe que $|R - \bar{R}| \leq 2p$. Vamos dividir em três casos: o caso em que $|R - \bar{R}| \leq p$, o caso em que $p < R - \bar{R} \leq 2p$ e o caso em que $p < \bar{R} - R \leq 2p$.

1° caso: $|R - \bar{R}| \leq p$.

Tomando $j = n$, $k = \bar{q} - q$ e $\alpha = \bar{R} - R$, temos que $k, j, \alpha \in \mathbb{Z}$, $-p \leq \alpha \leq p$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \left(\alpha + (2p+1)k + cj - \frac{j}{2} \right) &= \sqrt{2} \left(\bar{R} - R + (2p+1)(\bar{q} - q) + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\bar{R} - R + (2p+1)\bar{q} - (2p+1)q + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-cn + m + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(m - \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{j\sqrt{2l}}{2} = \frac{n\sqrt{2l}}{2}.$$

Logo, temos o que queríamos mostrar.

2º caso: $p < R - \bar{R} \leq 2p$.

Tomando $j = n$, $k = \bar{q} - q - 1$ e $\alpha = \bar{R} - R + 2p + 1$, temos que $j, k, \alpha \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $-p \leq \alpha \leq p$. Note que

$$\alpha = (\bar{R} - R) + (2p+1) < -p + (2p+1) = p+1. \text{ Logo, } \alpha \leq p.$$

$$\alpha = (\bar{R} - R) + (2p+1) \geq -2p + (2p+1) = 1. \text{ Logo, } \alpha \geq 1.$$

Portanto, $1 \leq \alpha \leq p$. E, podemos observar também que

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \left(\alpha + (2p+1)k + cj - \frac{j}{2} \right) &= \sqrt{2} \left((\bar{R} - R + 2p+1) + (2p+1)(\bar{q} - q - 1) + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left((2p+1)\bar{q} + \bar{R} - ((2p+1)q + R) + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(m - cn + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(m - \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{j\sqrt{2l}}{2} = \frac{n\sqrt{2l}}{2}.$$

Logo, para este caso também temos o que queríamos mostrar.

3º caso: $p < \bar{R} - R \leq 2p$.

Neste caso, tome $j = n$, $k = \bar{q} - q + 1$ e $\alpha = \bar{R} - R - (2p+1)$ e observe que $j, k, \alpha \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $-p \leq \alpha \leq p$. Note que

$$\alpha = (\bar{R} - R) - (2p+1) > p - (2p+1) = -p-1. \text{ Logo, } \alpha \geq -p.$$

$$\alpha = (\bar{R} - R) - (2p+1) \leq 2p - (2p+1) = -1. \text{ Logo, } \alpha \leq -1.$$

Portanto, $-p \leq \alpha \leq -1$. E, podemos observar também que

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \left(\alpha + (2p+1)k + cj - \frac{j}{2} \right) &= \sqrt{2} \left(\bar{R} - R - 2p - 1 + (2p+1)(\bar{q} - q + 1) + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left((2p+1)\bar{q} + \bar{R} - ((2p+1)q + R) + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(m - cn + cn - \frac{n}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(m - \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{j\sqrt{2l}}{2} = \frac{n\sqrt{2l}}{2}.$$

Logo, temos o que queríamos mostrar e, portanto, para cada $\mathbf{w} \in \Lambda_{a,l,1}$, existem $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1}$ e $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm k\}$ tais que $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}$. Assim, pela Equação (5.1), segue que $\bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1}} (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{R}^2$, e portanto, \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

Teorema 5.1.2. *Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1}$ é igual a $\lfloor \sqrt{l-3}/2 \rfloor$.*

Demonstração. A bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a, 0)M_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : (a, 0)G_{l,1}(a, 0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \text{ e } (a, 0) \in \mathbb{Z}^2\}$. Assim, note que

$$2a^2 \leq r^2 < \frac{l+1}{2} \implies a^2 \leq \frac{l+1}{4} - 1 \implies a^2 \leq \frac{l-3}{4} \implies |a| \leq \frac{\sqrt{l-3}}{2}. \quad (5.2)$$

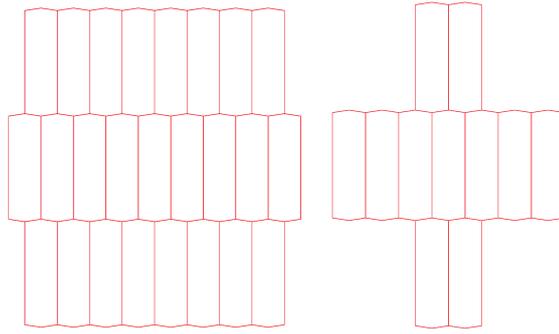
Logo, a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a \leq (\sqrt{l-3})/2$, que é igual a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a < \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$, fornece o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1, que é igual a $\lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - 0 - 1 = \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$. Portanto, temos que para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$ existem $\lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$ raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito do Tipo 1. \square

A partir do Teorema 5.1.2, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 5.1.3. *Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$, isto é, quanto maior o valor de l , mais raios teremos para os quais $\Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.2, temos que $m = \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Com isso, podemos concluir que para todo $l > 3$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sempre encontraremos raios para os quais $\Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito do Tipo 1, e quanto maior o valor de l , mais códigos perfeitos desse tipo teremos.


 Figura 34 – Poli-hexágonos do Tipo 2 construídos para $l = 43$.

5.1.2 Tipo 2: poli-hexágono de três níveis

Nesse formato de ladrilho os poli-hexágonos possuem três camadas, sendo a camada central sempre maior que as camadas laterais.

A bola \tilde{B}_r do Tipo 2 é composta por todos os vetores $(a, 1)M_{l,1}, (-a, 1)M_{l,1}, (b, 0)M_{l,1}, (-b, 0)M_{l,1} \in \mathbb{R}^2$ tais que $(b, 0)G_{l,1}(b, 0)^T \leq r^2 < 2l$, $(-b, 0)G_{l,1}(-b, 0)^T \leq r^2 < 2l$, $(a, 1)G_{l,1}(a, 1)^T \leq r^2 < 2l$ e $(-a, 1)G_{l,1}(-a, 1)^T \leq r^2 < 2l$, em que $G_{l,1}$ é a matriz de Gram de $\Lambda_{a,l,1}$. Definimos então a bola do Tipo 2 como $\tilde{B}_r = \{\mathbf{u}M_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : (l+1)/2 \leq \mathbf{u}G_{l,1}\mathbf{u}^T \leq r^2 < 2l \text{ e } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_+^2, \text{ em que } \mathbf{u} = (a, 1), (-a, 1), (b, 0) \text{ ou } (-b, 0)\}$. Por simetria da bola, vamos considerar apenas os casos em que $a, b > 0$, isto é, trabalharemos com os vetores da bola do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ ou $(b, 0)M_{l,1}$.

A restrição $(l+1)/2 \leq r^2$ garante a existência de vetores do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ em \tilde{B}_r , excluindo a possibilidade do poli-hexágono ser do Tipo 1. Já a restrição $r^2 < 2l$, isto é, que a norma ao quadrado dos vetores seja estritamente menor do que $(1, 2)G_{l,1}(1, 2)^T$, garante que os poli-hexágonos gerados tenham no máximo três camadas. Essas duas restrições fornecem todos os poli-hexágonos com exatamente três camadas.

Após definirmos os poli-hexágonos do Tipo 2 é natural nos questionarmos se de fato eles ladrilham o \mathbb{R}^2 . Para provarmos esse resultado, vamos primeiramente mostrar um teorema auxiliar, em que vamos provar que reticulados bidimensionais não ortogonais mais gerais que os pertencentes a família que estamos trabalhando sempre possuem um sub-reticulado perfeito. Com isso, o resultado esperado sairá como corolário.

Sejam Λ_1 e Λ_2 reticulados, tais que $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$. Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & k \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1/2 & k \\ 2\beta & -2k \end{pmatrix}$ matrizes geradoras para Λ_1 e Λ_2 , respectivamente, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \beta \leq \alpha$ e $k \geq \sqrt{3}/2$. Considere também $\mathcal{R}_1 = \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm\mathbf{u}, \dots, \pm\alpha\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (-1/2, k)$.

A partir desses dados, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.4. \mathcal{R}_1 é um Λ_2 -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Note que

$$\mathcal{R}_1 \cap (\mathcal{R}_1 + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Observe que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então, segue que as duas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda}$, então $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$, isto é, $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \in \Lambda_2$. Para $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ pertencer a Λ_2 , devem existir $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (w_1(\alpha + \beta + 1/2) + 2\beta w_2, kw_1 - 2kw_2)$. Observe que,

- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = b\mathbf{u}$, em que $a, b \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, temos que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (b - a, 0)$. Então para $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2$ e $w_2 = (b - a)/(2\alpha + 4\beta + 1)$. Como $a, b \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, $b - a \leq 2\alpha < 2\alpha + 4\beta + 1$. Logo, $w_2 \notin \mathbb{Z}$ e portanto, $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_2$.
- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = b\mathbf{v} + d\mathbf{u}$, em que $a \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, $b \in \{-1, 1\}$ e $d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$, temos que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (d - a - b/2, bk)$. Neste caso, para $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2 + b$ e $w_2 = (d - a - (\alpha + \beta + 1)b)/(2\alpha + 4\beta + 1)$. Para $b = 1$, temos que $d - a - (\alpha + \beta + 1)b \leq \beta + \alpha - (\alpha + \beta + 1) = -1 < 2\alpha + 4\beta + 1$. E para $b = -1$, temos que $d - a - (\alpha + \beta + 1)b \leq 2\beta + 2\alpha + 1 < 2\alpha + 4\beta + 1$. Logo, $w_2 \notin \mathbb{Z}$ e portanto, $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_2$.
- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{v} + b\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = c\mathbf{v} + d\mathbf{u}$, em que $a, c \in \{-1, 1\}$, $b, d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$, temos que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (d - b - c/2 + a/2, (c - a)k)$. Para $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2 + c - a$ e $w_2 = ((\alpha + \beta + 1)(a - c) + d - b)/(2\alpha + 4\beta + 1)$. Note que $b, d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$, então $d - b \leq 2\beta$. Observe também que $a, c \in \{-1, 1\}$, então $a - c \leq 2$. Assim, $(\alpha + \beta + 1)(a - c) + d - b \leq (\alpha + \beta + 1)2 + 2\beta = 2 + 2\alpha + 4\beta$, que não é múltiplo de $2\alpha + 4\beta + 1$. Logo, $w_2 \notin \mathbb{Z}$ e concluímos que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_2$.

Portanto, em todos os casos $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_2$, e sendo assim, não existe $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_2$ tal que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Assim, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda}$ não são iguais, o que nos leva a concluir que essas regiões se interceptam apenas em seus bordos. Logo, $\mathcal{R}_1 \cap (\mathcal{R}_1 + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, uma vez que é um subconjunto de uma união finita de conjuntos de medida nula. Com isso, mostramos que as regiões são disjuntas. Agora vamos mostrar que elas cobrem o \mathbb{R}^2 .

Observe que $\#\mathcal{T} = 1 + 2\alpha + 4\beta$. Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_1/\Lambda_2$. Note que $\#\mathcal{G} = \det(\Lambda_2)^{1/2}/\det(\Lambda_1)^{1/2} = k(1 + 2\alpha + 4\beta)/k = 1 + 2\alpha + 4\beta$. Ou seja, existem $1 + 2\alpha + 4\beta$ pontos de Λ_1 em uma região fundamental de Λ_2 . Então $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$.

Como verificamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_2, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_2 \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_2$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas de $\mathcal{G} = \Lambda_1/\Lambda_2$. E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_2 . Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda_1 &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \lambda_1 &\longmapsto \overline{\lambda_1}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_2$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_2 segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ_2 -ladrilho para Λ_1 e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \mathcal{T}$ é um Λ_2 -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

Observação 5.1.5. No Teorema 5.1.4 consideramos o reticulado ambiente Λ_1 gerado pela matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & k \end{pmatrix}$, em que $k \geq \sqrt{3}/2$. Queremos que a norma mínima de Λ_1 seja igual a 1 e um vetor de norma mínima do reticulado seja o vetor $(1, 0)$. Então, a norma do vetor $(-1/2, k)$ deve ser maior ou igual a 1. Mas, observe que primeira entrada da segunda linha da matriz geradora de Λ_1 não precisa necessariamente ser igual a $-1/2$. Na verdade, podemos escolher qualquer valor p tal que $-1/2 \leq p \leq 1/2$ que o resultado ainda seria válido. O que devemos fazer são ajustes no valor de k dependendo de qual p vamos tomar, uma vez que $\|(p, k)\| \geq 1$, isto é, $k^2 \geq 1 - p^2$, em que $-1/2 \leq p \leq 1/2$.

A partir do Teorema 5.1.4, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.1.6. Os poli-hexágonos do Tipo 2 ladrilham o \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Sejam $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ um reticulado e $N_{l,1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\alpha + \beta + 1/2) & \sqrt{2}l/2 \\ 2\sqrt{2}\beta & -\sqrt{2}l \end{pmatrix}$ uma matriz geradora para $\Lambda_{l,1}$, em que $1 \leq \beta \leq \alpha$. Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta \mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}l/2)$. Pelo Teorema 5.1.4, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

Como vimos no Teorema 5.1.4 e no Corolário 5.1.6, na construção dos poli-hexágonos do Tipo 2 encontramos inteiros positivos α, β , em que $1 \leq \beta \leq \alpha$. A relação entre α, β e o poli-hexágono do Tipo 2 é vista no poli-hexágono em si: a camada central do poli-hexágono possui $2\alpha + 1$ hexágonos não-regulares, enquanto as camadas laterais possuem 2β hexágonos não-regulares. Uma ilustração pode ser vista no Exemplo 5.1.7.

Exemplo 5.1.7. Sejam $\sqrt{2}\Lambda_1$ e $\sqrt{2}\Lambda_2$ reticulados, em que Λ_1 e Λ_2 são gerados pelas matrizes M_1 e M_2 definidas anteriormente. Considere $k = \sqrt{67}/2$. Na Figura 35 temos um poli-hexágono gerado pela região \mathcal{R}_1 .

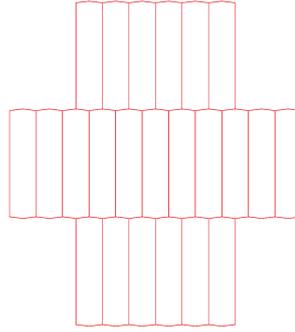


Figura 35 – Poli-hexágono do Tipo 2 para $l = 67$.

Observe que aqui $\alpha = 5$ e $\beta = 3$.

Observação 5.1.8. Pelo Teorema 5.1.4 temos que para todo par (α, β) que satisfaz $1 \leq \beta \leq \alpha$, obtemos a região \mathcal{R} que ladrilha o \mathbb{R}^2 , mas nem todo par (α, β) que satisfaz a condição estabelecida gera um poli-hexágono do Tipo 2.

Exemplo 5.1.9. Para $l = 15$, os pares (α, β) que são poli-hexágonos do Tipo 2 são $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$ e $(3, 3)$, como podemos conferir na Figura 36.

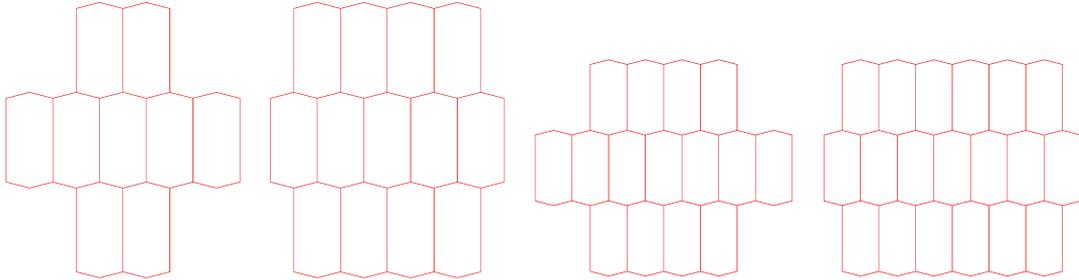


Figura 36 – Poli-hexágonos do Tipo 2 construídos para $l = 15$.

Teorema 5.1.10. Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$ temos que o número de raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ é igual a $\lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1$, caso contrário.

Demonstração. Como $(a, 1)G_{l,1}(a, 1)^T < 2l$, temos que

$$(a, 1)G_{l,1}(a, 1)^T < 2l \implies 2a^2 - 2a + \frac{l+1}{2} < 2l \implies 4a^2 - 4a + 1 - 3l < 0.$$

Então, segue que $a \in ((1 - \sqrt{3l})/2, (1 + \sqrt{3l})/2)$. Como $a \in \mathbb{Z}_+$, $a \in (0, (1 + \sqrt{3l})/2)$. Assim, para encontrar o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$, basta encontrar a quantidade de números inteiros no intervalo $(0, (1 + \sqrt{3l})/2)$. Vamos analisar aqui dois casos: o caso em que $3l$ é um quadrado perfeito e o caso contrário.

Se $3l$ é um quadrado perfeito, então $(0, (1 + \sqrt{3l})/2) = (0, (1 + p)/2)$, em que p é um número ímpar, pois $3l$ é ímpar, uma vez que $-l \equiv 1 \pmod{4}$. Então, nosso intervalo possui bordos inteiros, o que nos leva a concluir que a quantidade de números inteiros em $(0, (1 + \sqrt{3l})/2)$ é igual a $(1 + \sqrt{3l})/2 - 0 - 1 = (1 + \sqrt{3l})/2 - 1$. Logo, o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ quando $3l$ é um quadrado perfeito é igual a $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1$.

Se $3l$ não é um quadrado perfeito, a quantidade de números inteiros em $(0, (1 + \sqrt{3l})/2)$ é igual a quantidade de números inteiros em $(0, [(1 + \sqrt{3l})/2])$, que é $[(1 + \sqrt{3l})/2] - 0 - 1 = [(1 + \sqrt{3l})/2] - 1 = [(1 + \sqrt{3l})/2]$, sendo esse também o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ quando $3l$ não é um quadrado perfeito. \square

Corolário 5.1.11. *Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.10, temos que $m = [(1 + \sqrt{3l})/2]$, se $\sqrt{3l}$ não é um quadrado perfeito, e $m = (1 + \sqrt{3l})/2 - 1$ caso contrário. Logo, em ambos os casos, se $l \rightarrow \infty$, segue diretamente que $m \rightarrow \infty$. \square

Teorema 5.1.12. *Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$ temos que o número de raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$ é igual a $\lceil \sqrt{l} \rceil - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$.*

Demonstração. Temos que $b > (\sqrt{l-3})/2$, pois caso contrário, $(b, 0)M_{l,1}$ geraria um poli-hexágono do Tipo 1. Por outro lado, $(b, 0)G_{l,1}(b, 0)^T < 2l$, pois caso contrário $(b, 0)M_{l,1}$ não geraria um poli-hexágono do Tipo 2. Então,

$$(b, 0)G_{l,1}(b, 0)^T < 2l \implies 2b^2 < 2l \implies |b| < \sqrt{l}.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{l-3}}{2} < b < \sqrt{l} \implies b \in \left(\frac{\sqrt{l-3}}{2}, \sqrt{l} \right).$$

Assim, temos que a quantidade de números inteiros no intervalo $((\sqrt{l-3})/2, \sqrt{l})$ nos dá a quantidade de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$. E contar quantos inteiros existem no intervalo $((\sqrt{l-3})/2, \sqrt{l})$ é a mesma coisa que contar os inteiros no intervalo $([(\sqrt{l-3})/2], \lceil \sqrt{l} \rceil)$, que é igual a $\lceil \sqrt{l} \rceil - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - 1 = \lceil \sqrt{l} \rceil - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$. Logo, o número de inteiros no intervalo $((\sqrt{l-3})/2, \sqrt{l})$, que é o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$ é igual a $\lceil \sqrt{l} \rceil - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$. \square

Corolário 5.1.13. *Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.12, temos que $m = \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l} - 3)/2 \rfloor$. Logo, se $l \rightarrow \infty$, segue diretamente que $m \rightarrow \infty$. \square

Observação 5.1.14. *Em alguns casos, temos que uma bola do Tipo 2 em que o raio é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ pode gerar o mesmo poli-hexágono de uma bola do Tipo 2 em que o raio é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$. Isso acontece quando $(a, 1)G_{l,1}(a, 1)^T = (b, 0)G_{l,1}(b, 0)^T$, isto é, quando $|b| = (\sqrt{4a^2 - 4a + l + 1})/2$.*

Exemplo 5.1.15. *Para $l = 3$, a bola do Tipo 2 em que o raio é dado pelo vetor $(1, 1)M_{l,1}$ gera o mesmo poli-hexágono do que a bola do Tipo 2 em que o raio é dado pelo vetor $(1, 0)M_{l,1}$. Na Figura 37 temos uma ilustração do poli-hexágono gerado por essas bolas.*

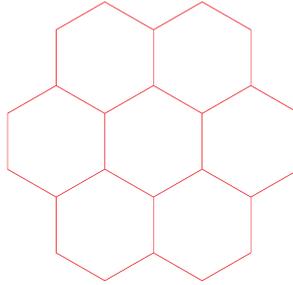


Figura 37 – Poli-hexágono gerado pelas bolas do Tipo 2 em que o raio é dado pelos vetores $(1, 1)M_{l,1}$ e $(1, 0)M_{l,1}$, para $l = 3$.

A condição para haver bolas do Tipo 2 em que o raio é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ e por um do tipo $(b, 0)M_{l,1}$ dada na Observação 5.1.14 sempre é satisfeita para $a, b \in \mathbb{N}$. Mas, como temos restrições para a e b de modo que $(a, 1)M_{l,1}$ e $(b, 0)M_{l,1}$ forneçam raios que gerem poli-hexágonos do Tipo 2, segue que nem sempre a interseção estará dentro do nosso conjunto, como podemos conferir no Exemplo 5.1.16.

Exemplo 5.1.16. *Para $l = 19$, temos que*

$$|b| = \frac{\sqrt{4a^2 - 4a + l + 1}}{2} \implies |b| = \frac{\sqrt{4a^2 - 4a + 20}}{2}. \quad (5.3)$$

A única solução inteira positiva da equação (5.3) é $a = b = 5$. Logo, temos que o poli-hexágono do Tipo 2 em que o raio é dado pelo vetor $(5, 1)M_{l,1}$ é o mesmo poli-hexágono do Tipo 2 em que o raio é dado pelo vetor $(5, 0)M_{l,1}$. Mas, para $l = 19$, $0 < a < \lfloor (1 + \sqrt{57})/2 \rfloor$, isto é, $0 < a < 4$. Então, o vetor $(5, 1)M_{l,1} \notin \tilde{B}_r$, e portanto, não temos interseção nesse caso.

A partir do Corolário 5.1.13, chegamos ao seguinte resultado:

Corolário 5.1.17. *Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$, ou seja, quanto maior o valor de l , mais códigos perfeitos do Tipo 2 teremos.*

Demonstração. Note que o número m de códigos perfeitos do Tipo 2 é maior do que a quantidade de códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,1}$. Logo, é imediato ver que $m \rightarrow \infty$, quando $l \rightarrow \infty$. \square

Podemos concluir que para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sempre encontraremos raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito do Tipo 2. Além disso, a quantidade de perfeitos aumenta proporcionalmente a l . Com isso, levando em conta também a quantidade de códigos perfeitos do Tipo 1 que podemos encontrar para cada l e considerando γ o número de códigos perfeitos construídos a partir de poli-hexágonos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,1}$ e $(b, 0)M_{l,1}$, concluimos que a quantidade de raios para os quais $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ é um código perfeito é, pelo menos, igual a $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $\lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$ caso contrário.

5.1.3 Tipo 3: poli-hexágono de cinco níveis

Nesse formato de ladrilho encontramos apenas os ladrilhos com cinco camadas, sendo a camada central sempre maior que as demais.

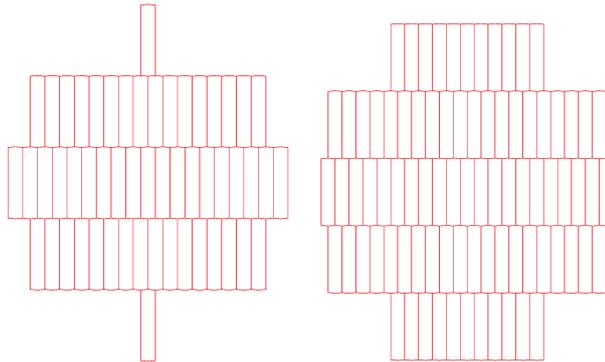


Figura 38 – Poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 95$.

A bola \tilde{B}_r do Tipo 3 é composta por todos os vetores $(a, 2)M_{l,1}$, $(-a, 2)M_{l,1}$, $(b, 1)M_{l,1}$, $(-b, 1)M_{l,1}$, $(c, 0)M_{l,1}$ e $(-c, 0)M_{l,1}$ pertencentes a \mathbb{R}^2 tais que $r^2 < (1 + 9l)/2$, em que $(a, 2)G_{l,1}(a, 2)^T \leq r^2$, $(-a, 2)G_{l,1}(-a, 2)^T \leq r^2$, $(b, 1)G_{l,1}(b, 1)^T \leq r^2$, $(-b, 1)G_{l,1}(-b, 1)^T \leq r^2$, $(c, 0)G_{l,1}(c, 0)^T \leq r^2$ e $(-c, 0)G_{l,1}(-c, 0)^T \leq r^2$, e $G_{l,1}$ é a matriz de Gram de $\Lambda_{a,l,1}$. Podemos escrever a bola do Tipo 3 como $\tilde{B}_r = \{\mathbf{u}M_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : 2l \leq \mathbf{u}G_{l,1}\mathbf{u}^T \leq r^2 < (1 + 9l)/2 \text{ e } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2, \text{ em que } \mathbf{u} = (a, 2), (-a, 2), (b, 1), (-b, 1), (c, 0) \text{ ou } (-c, 0)\}$.

A restrição $2l \leq r^2$ exclui a possibilidade do poli-hexágono ter menos do que cinco camadas. Já a restrição $r^2 < (1 + 9l)/2$ garante que os poli-hexágonos construídos tenham até cinco camadas. Essas duas restrições fornecem todos os poli-hexágonos com exatamente cinco camadas.

Diferente do que ocorre nos poli-hexágonos dos tipos 1 e 2, um poli-hexágono do Tipo 3 nem sempre ladrilha o \mathbb{R}^2 , isto é, existem poli-hexágonos do Tipo 3 tais que \tilde{B}_r não ladrilha o \mathbb{R}^2 para todo raio r . Podemos dizer que para esse tipo de ladrilho a análise é mais individual, em que o formato de cada poli-hexágono do Tipo 3, principalmente a quantidade de hexágonos não-regulares encontrados nas camadas das laterais do poli-hexágono, interfere no resultado.

Exemplo 5.1.18. Para $l = 39$, seja o poli-hexágono do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(1, 2)M_{l,1}$. Uma ilustração pode ser vista na Figura 39.

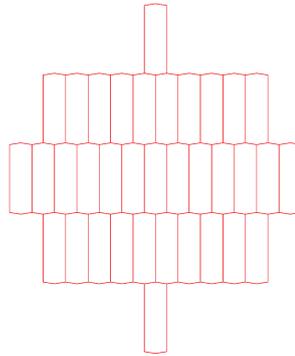


Figura 39 – Poli-hexágono do Tipo 3 construído para $l = 39$.

Esse poli-hexágono não ladrilha o \mathbb{R}^2 . Na Figura 40 podemos observar três tentativas de ladrilhamento para o \mathbb{R}^2 usando quatro desses poli-hexágonos.

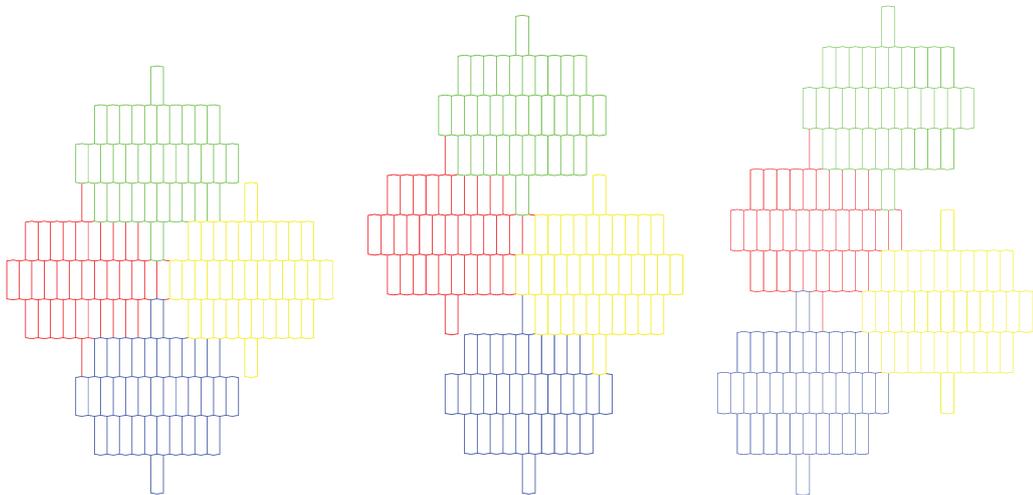


Figura 40 – União de 4 poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 39$.

Geometricamente, podemos ver que esse poli-hexágono não ladrilha o \mathbb{R}^2 . Observe que a camada central possui três hexágonos a mais que as camadas do meio (camadas diferentes da central e das laterais). Assim, o espaço deixado para “encaixar” os outros poli-hexágonos nas laterais é de um hexágono não-regular e meio. Para que esse poli-hexágono ladrilhasse perfeitamente o \mathbb{R}^2 , as camadas das laterais deveriam ter três hexágonos não-regulares, e não apenas um, como é o caso.

Como vimos no Exemplo 5.1.18, para alguns valores de l , o poli-hexágono do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(1, 2)M_{l,1}$ não ladrilha o \mathbb{R}^2 . Mas para outros valores de l , esse mesmo poli-hexágono ladrilha o espaço, como podemos conferir no Exemplo 5.1.19.

Exemplo 5.1.19. Para $l = 47$, seja $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$ o reticulado gerado pela matriz $N_{l,1} = \begin{pmatrix} 13\sqrt{2} & 0 \\ 13\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}\sqrt{47}/2 \end{pmatrix}$. Sejam o conjunto $\mathcal{T} = \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{u}, \dots, \pm 6\mathbf{u}, \pm(\mathbf{v} - 5\mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + 6\mathbf{u}), \pm(2\mathbf{v} + \mathbf{u})\}$ e a região $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \mathcal{T}$. Note que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Observamos que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então, as duas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \boldsymbol{\lambda}$, então $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$, isto é, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \in \Lambda_{l,1}$. Para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, devem existir $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (13\sqrt{2}a + 13b\sqrt{2}/2, 3b\sqrt{2}\sqrt{47}/2)$.

- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = \beta\mathbf{u}$, em que $\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (\sqrt{2}(\alpha - \beta), 0)$. Então para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = 0$ e $a = (\alpha - \beta)/13$. Como $a, b \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}$, $a - b \leq 12 < 13$. Logo, $b \neq \mathbb{Z}$ e portanto, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.
- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{u}$, em que $\alpha, \gamma \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}, \beta \in \{-1, 1\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (\sqrt{2}(\alpha - \gamma + \beta/2), \sqrt{2}\sqrt{47}\beta/2)$. Neste caso, para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = \beta/3$. Como $\beta \in \{-1, 1\}$, $b \neq \mathbb{Z}$ e portanto, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.
- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = \gamma(2\mathbf{v} + \mathbf{u})$, em que $\gamma \in \{-1, 1\}$ e $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (\sqrt{2}\alpha, -\sqrt{2}\sqrt{47}\gamma)$. Para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = -2\gamma/3$ e, como $\gamma \in \{-1, 1\}$, $b \neq \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.
- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = \gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{u}$, em que $\alpha, \gamma \in \{-1, 1\}$ e $\beta, \delta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (\sqrt{2}((\alpha - \gamma)/2 + \beta - \delta), (\alpha - \gamma)\sqrt{2}\sqrt{47})$. Para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = (\alpha - \gamma)/3$ e, como $\alpha - \gamma \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, $b \neq \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.

- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = \gamma(2\mathbf{v} + \mathbf{u})$, em que $\alpha, \gamma \in \{-1, 1\}$ e $\beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 6\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (\sqrt{2}(-\alpha/2 + \beta), \sqrt{2}\sqrt{47}(\alpha/2 - \gamma))$. Para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = (\alpha - 2\gamma)/3$ e $a = (-8\alpha/3 + 13\gamma/3 + \beta)/13$. Nestas condições, para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha = -1, \gamma = 1$ e $\beta = 6$ ou $\alpha = 1, \gamma = -1$ e $\beta = -6$. Para $\alpha = -1, \gamma = 1$ e $\beta = 6$, teríamos que $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{v} + 6\mathbf{u}$, que não pertence a \mathcal{T} , e para $\alpha = 1, \gamma = -1$ e $\beta = -6$, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{v} - 6\mathbf{u}$, que também não pertence a \mathcal{T} . Logo, a e b não podem ser inteiros, e portanto, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.
- Para $\mathbf{t}_1 = \alpha(2\mathbf{v} + \mathbf{u})$ e $\mathbf{t}_2 = \beta(2\mathbf{v} + \mathbf{u})$, em que $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$, com $\alpha \neq \beta$, pois caso contrário, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (0, (\alpha - \beta)\sqrt{2}\sqrt{47})$. Para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a $\Lambda_{l,1}$, $b = (2\alpha - 2\beta)/3$ e, como $2\alpha - 2\beta \in \{-4, 4\}$, $b \notin \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}$.

Portanto, em todos os casos $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_{l,1}$, e sendo assim, não existe $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{l,1}$ tal que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Assim, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \boldsymbol{\lambda}$ se interceptam apenas em seus bordos. Então, $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, uma vez que é um subconjunto de uma união finita de conjuntos de medida nula.

Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_{a,l,1}/\Lambda_{l,1}$. Note que $\#\mathcal{G} = \#\mathcal{T} = 39$. Como verificamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,1}, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_{l,1} \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_{l,1}$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas de $\mathcal{G} = \Lambda_{l,1}/\Lambda_{a,l,1}$. E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo $\Lambda_{l,1}$. Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda_{a,l,1} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_{a,l,1} &\longmapsto \overline{\boldsymbol{\lambda}_{a,l,1}}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_{l,1}$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo $\Lambda_{l,1}$ segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um $\Lambda_{l,1}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,1}$ e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1}} + \mathcal{T}$ é um $\Lambda_{l,1}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

Pelos Exemplos 5.1.18 e 5.1.19, observamos que os poli-hexágonos do Tipo 3 em que o raio da bola é igual a $2l$ podem ou não ladrilhar o \mathbb{R}^2 . Dentre os que ladrilham, notamos que eles possuem um formato característico: a camada central possui um hexágono não-regular a mais que as camadas do meio, fazendo com que ela possua meio hexágono não regular de cada lado a mais que as camadas do meio. Assim, geometricamente conseguimos facilmente enxergar um ladrilhamento perfeito do \mathbb{R}^2 , como vimos na Figura 41. Em meio aos nossos testes computacionais, observamos que os valores de l para os quais os poli-hexágonos do Tipo 3 em que o raio da bola é igual a $2l$ ladrilham o \mathbb{R}^2 , isto é, que possuem esse formato característico, são todos os congruentes a $-1 \pmod{4}$ até o 35, os

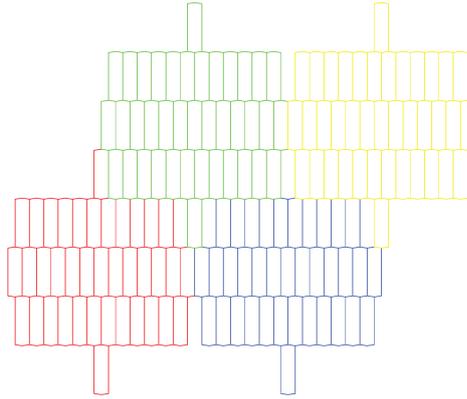


Figura 41 – União de 4 poli-hexágonos do Tipo 3 construídos para $l = 47$.

do tipo $43 + 16k$, $k \in \{0, 1, 2\}$, $47 + 16p$, $p \in \{0, 1, 2\}$ e o 99. Com isso, observamos o quão individuais são as análises dos poli-hexágonos do Tipo 3.

Diferentemente do que obtivemos nos demais tipos, para esse formato específico de poli-hexágono não é possível afirmar que para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$ sempre encontraremos raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,l,1}$, mas podemos observar que para alguns valores de l encontramos códigos perfeitos. Com o aumento das camadas, ou seja, estudando outros tipos de poli-hexágonos, acreditamos que encontraremos um número cada vez maior de poli-hexágonos que não irão ladrilhar o espaço. Além disso, quanto maior o número de camadas, mais difícil será para provarmos algebricamente que de fato os poli-hexágonos ladrilham o \mathbb{R}^2 . Na Seção 4.2.4 do Capítulo 4, usando um algoritmo, listamos todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,l,1}$ e seus raios de empacotamento para $l = 3, 7, 11$ e 15 . A partir dos raios listados, observamos que existem poli-hexágonos com mais do que 5 camadas que ladrilham o espaço.

5.2 $l \equiv 2 \pmod{4}$

Como vimos no Exemplo 1.9.24, o reticulado $\Lambda_{a,l,2}$ possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente,

$$M_{l,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(\Lambda_{a,l,2}) = 4l$ e a distância mínima d é igual 2. Então, temos que

$$\Delta(\Lambda_{a,l,2}) = \frac{\pi(2/2)^2}{2\sqrt{l}} = \frac{\pi}{2\sqrt{l}} \implies \Delta(\Lambda_{a,l,2}) \longrightarrow 0, \text{ quando } l \longrightarrow +\infty.$$

Observe também que o raio de cobertura $R_{\Lambda_{a,l,2}}$ é igual a $\sqrt{2l+1}/2$. Então,

$$r \leq R_{\Lambda_{a,l,2}} \frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})} = \frac{\sqrt{2l+1}}{2} \frac{(1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{(1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}.$$

Logo, como $\frac{\sqrt{2l+1}}{2} \frac{(1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{(1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})} \rightarrow +\infty$ quando $l \rightarrow +\infty$, quanto maior o valor de l , mais chances teremos de encontrar raios grandes para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,l,2}$.

Para essa família de reticulados, para cada valor de l , considerando os raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito, também observamos que os poliomínos construídos, que chamaremos aqui de poli-retângulos devido ao formato da região de Voronoi desses reticulados, possuem alguns formatos específicos, e estudaremos três desses formatos, que denotaremos por “Tipo 1”, “Tipo 2” e “Tipo 3”. A seguir, vamos descrever esses formatos e fornecer alguns resultados sobre cada um deles.

5.2.1 Tipo 1: poli-retângulo de um nível

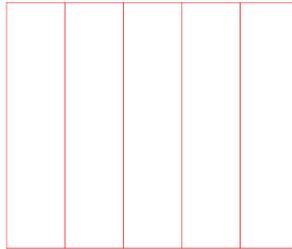


Figura 42 – Poli-retângulo do Tipo 1 construído para $l = 18$.

Neste formato de ladrilho os poli-retângulos construídos possuem apenas uma camada.

A bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a, 0)M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : (a, 0)G_{l,2}(a, 0)^T \leq r^2 < 2l \text{ e } (a, 0) \in \mathbb{Z}^2\}$, em que $G_{l,2}$ é a matriz de Gram de $\Lambda_{a,l,2}$ associada a $M_{l,2}$.

A restrição $(a, 0)G_{l,2}(a, 0)^T < 2l$, isto é, que a norma ao quadrado dos vetores seja estritamente maior do que $(0, 1)G_{l,2}(0, 1)^T = 2l$, garante que não apareça mais do que uma camada no nosso poli-retângulo.

Se $(a, b)M_{l,2} \in \tilde{B}_r$, então $b = 0$, pois caso contrário teríamos que $(a, b)G_{l,2}(a, b)^T = 2a^2 + 2lb^2 > 2l$, isto é, $(a, b)M_{l,2} \notin \tilde{B}_r$.

Teorema 5.2.1. *Os poli-retângulos do Tipo 1 ladrilham o \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Seja $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ o reticulado gerado pela matriz $N_{l,2} = \begin{pmatrix} k & k \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix}$, em que $k = 2p + 1$ e $p \in \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{l} \rfloor\}$. Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}}$

é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,2}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (1, 1)$. Vamos mostrar que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Observe que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Note que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 , e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então essas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \boldsymbol{\lambda}$, segue que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \in \Lambda_{l,2}$, isto é, para $\mathbf{t}_1 = \alpha(1, 1)$ e $\mathbf{t}_2 = \beta(1, 1)$, com $\alpha, \beta \in \{0, \pm 1, \dots, \pm p\}$ distintos, temos que $(\alpha - \beta)(1, 1) \in \Lambda_{l,2}$. Então, devem existir $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a(k, k) + b(\sqrt{l}, -\sqrt{l}) = (\alpha - \beta)(1, 1)$. Mas a igualdade só é válida para $b = 0$ e $a = (\alpha - \beta)/k$. Como $\alpha - \beta \leq 2p < k$, segue que $a \notin \mathbb{Z}$ e então $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,2}$. Logo, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \boldsymbol{\lambda}$ se interceptam apenas em seus bordos e portanto $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, por ser um subconjunto de uma união finita de conjuntos de medida nula.

Observe que $\#\mathcal{T} = 2p + 1 = k$. Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_{a,l,2}/\Lambda_{l,2}$. Note que $\#\mathcal{G} = \det(\Lambda_{l,2})^{1/2} / \det(\Lambda_{a,l,2})^{1/2} = (4lk^2/4l)^{1/2} = k$. Então $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$.

Como provamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l,2}, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_{l,2} \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_{l,2}$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas do grupo \mathcal{G} . E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo $\Lambda_{l,2}$. Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda_{a,l,2} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_{a,l,2} &\longmapsto \overline{\boldsymbol{\lambda}_{a,l,2}}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_{l,2}$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo $\Lambda_{l,2}$ segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,2}$ e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \mathcal{T}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

Teorema 5.2.2. *Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$, o número de raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 1 é igual a $\lfloor \sqrt{l} \rfloor$.*

Demonstração. Temos que a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a, 0)M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : (a, 0)G_{l,2}(a, 0)^T \leq r^2 < 2l \text{ e } (a, 0) \in \mathbb{Z}^2\}$. Então

$$(a, 0)G_{l,2}(a, 0)^T < 2l \implies 2a^2 < 2l \implies |a| < \sqrt{l}.$$

Logo, a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a < \sqrt{l}$ fornece o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,2}$. Então, temos que para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$ existem $\lfloor \sqrt{l} \rfloor$ raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 1. \square

Corolário 5.2.3. *Seja m o número de raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 1. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.2, $m = \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Podemos então concluir que para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$ sempre encontraremos raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 1 e, quanto maior o valor de l , mais códigos perfeitos desse tipo teremos.

5.2.2 Tipo 2: poli-retângulo de três níveis

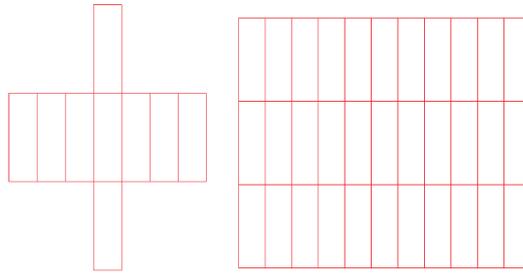


Figura 43 – Poli-retângulo do Tipo 2 construídos para $l = 10$.

Neste formato de ladrilho os poli-retângulos possuem três camadas, sendo a camada central maior ou igual do que as camadas laterais.

A bola \tilde{B}_r do Tipo 2 é composta por todos os vetores $(a, 1)M_{l,2}, (-a, 1)M_{l,2}, (b, 0)M_{l,2}, (-b, 0)M_{l,2} \in \mathbb{R}^2$ tais que $(a, 1)G_{l,2}(a, 1)^T \leq r^2 < 2l$, $(-a, 1)G_{l,2}(-a, 1)^T \leq r^2 < 2l$, $(b, 0)G_{l,2}(b, 0)^T \leq r^2 < 2l$ e $(-b, 0)G_{l,2}(-b, 0)^T \leq r^2 < 2l$. Definimos então a bola do Tipo 2 como $\tilde{B}_r = \{\mathbf{u}M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : 2l \leq \mathbf{u}G_{l,2}\mathbf{u}^T \leq r^2 < 8l \text{ e } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2, \text{ em que } \mathbf{u} = (a, 1), (-a, 1), (b, 0) \text{ ou } (-b, 0)\}$. Por simetria da bola, vamos considerar apenas os casos em que $a, b > 0$, isto é, trabalharemos com os vetores da bola do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ ou $(b, 0)M_{l,2}$.

A restrição $2l \leq r^2$ garante a existência de vetores do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ em \tilde{B}_r , excluindo a possibilidade do poli-retângulo ser do Tipo 1. A restrição $r^2 < 8l$, isto é, que a norma ao quadrado dos vetores seja estritamente menor do que $(0, 2)G_{l,2}(0, 2)^T$, garante que os poli-retângulos encontrados tenham no máximo três camadas. Com essas duas restrições, obtemos todos os poli-retângulos com exatamente três camadas.

Da mesma forma que fizemos para os poli-hexágonos do Tipo 2 no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, vamos provar um resultado mais geral sobre ladrilhamentos de poli-retângulos de três camadas e assim concluir que os poli-retângulos do tipo 2 ladrilham o \mathbb{R}^2 .

Sejam Λ_1 e Λ_2 reticulados, tais que $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$. Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 - k & \alpha + \beta + 1 + k \\ 2\beta + 1 + 2k & 2\beta + 1 - 2k \end{pmatrix}$ matrizes geradoras para Λ_1 e Λ_2 , respectivamente, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ e $k \geq 1$. Considere também $\mathcal{R}_1 = \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (k, -k)$.

A partir desses dados, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.4. \mathcal{R}_1 é um Λ_2 -ladrilho para \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Temos que

$$\mathcal{R}_1 \cap (\mathcal{R}_1 + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Observamos que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então, temos que as duas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \boldsymbol{\lambda}$, então $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$, isto é, $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \in \Lambda_2$. Para $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ pertencer a Λ_2 , devem existir $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (w_1(\alpha + \beta + 1 - k) + w_2(2\beta + 1 + 2k), w_1(\alpha + \beta + 1 + k) + w_2(2\beta + 1 - 2k))$. Temos que,

- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = b\mathbf{u}$, em que $a, b \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (a - b, a - b)$. Então para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2$ e $w_2 = (a - b)/(2\alpha + 4\beta + 3)$. Como $a, b \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, $a - b \leq 2\alpha < 2\alpha + 4\beta + 3$. Logo, $w_2 \neq \mathbb{Z}$ e portanto, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_2$.
- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = b\mathbf{v} + d\mathbf{u}$, em que $a \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \alpha\}$, $b \in \{-1, 1\}$ e $d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$ temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (a - bk - d, a + bk - d)$. Então para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2 + b$ e $w_2 = (a - d - b(\alpha + \beta + 1))/(2\alpha + 4\beta + 3)$. Se $b = 1$, segue que $a - d - b(\alpha + \beta + 1) = a - d - (\alpha + \beta + 1) \leq \alpha + \beta - (\alpha + \beta + 1) \leq -1 < 2\alpha + 4\beta + 3$. Se $b = -1$, temos que $a - d - b(\alpha + \beta + 1) = a - d + (\alpha + \beta + 1) \leq \alpha + \beta + (\alpha + \beta + 1) \leq 2\alpha + 2\beta + 1 < 2\alpha + 4\beta + 3$. Logo, $w_2 \neq \mathbb{Z}$ e então, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_2$.
- Para $\mathbf{t}_1 = a\mathbf{v} + b\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}_2 = c\mathbf{v} + d\mathbf{u}$, em que $a, c \in \{-1, 1\}$ e $b, d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$ temos que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = (k(a - c) + b - d, -k(a - c) + b - d)$. Então para $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ pertencer a Λ_2 , $w_1 = 2w_2 + c - a$ e $w_2 = (b - d + (a - c)(\alpha + \beta + 1))/(2\alpha + 4\beta + 3)$. Como $a, c \in \{-1, 1\}$ e $b, d \in \{0, \pm 1, \dots, \pm \beta\}$, segue que $b - d + (a - c)(\alpha + \beta + 1) \leq 2\beta + 2(\alpha + \beta + 1) = 2\alpha + 4\beta + 2 < 2\alpha + 4\beta + 3$. Logo, $w_2 \neq \mathbb{Z}$ e então, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_2$.

Portanto, em todos os casos $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \notin \Lambda_2$, e sendo assim, não existe $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_2$ tal que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_a}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_a} + \boldsymbol{\lambda}$ se interceptam apenas em seus bordos.

Logo, $\mathcal{R}_1 \cap (\mathcal{R}_1 + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, uma vez que é um subconjunto de uma união finita de conjuntos de medida nula.

Observe agora que $\#\mathcal{T} = 2\alpha + 4\beta + 3$. Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_1/\Lambda_2$. Note que $\#\mathcal{G} = \det(\Lambda_2)^{1/2}/\det(\Lambda_1)^{1/2} = 2k(2\alpha + 4\beta + 3)/2k = 2\alpha + 4\beta + 3$. Então $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$.

Como verificamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_2, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_2 \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_2$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas de $\mathcal{G} = \Lambda_1/\Lambda_2$. E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_2 . Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda_1 &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_1 &\longmapsto \overline{\boldsymbol{\lambda}_1}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_2$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_2 segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ_2 -ladrilho para Λ_1 e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{V}_{\Lambda_1} + \mathcal{T}$ é um Λ_2 -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

A partir do Teorema 5.2.4, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.2.5. *Os poli-retângulos do Tipo 2 ladrilham o \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Sejam $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{\alpha,l,2}$ o reticulado gerado pela matriz

$$N_{l,2} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 - \sqrt{l} & \alpha + \beta + 1 + \sqrt{l} \\ 2\beta + 1 + 2\sqrt{l} & 2\beta + 1 - 2\sqrt{l} \end{pmatrix},$$

com $0 \leq \beta \leq \alpha$, e a região $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{\alpha,l,2}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{l}, -\sqrt{l})$. Pelo Teorema 5.2.4, \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . \square

Uma pergunta natural é: qual é a relação entre α , β e o poli-retângulo do Tipo 2? A resposta está no próprio poli-retângulo. A camada central possui $2\alpha + 1$ retângulos, e as camadas laterais possuem $2\beta + 1$. Uma ilustração pode ser vista no Exemplo 5.2.6.

Exemplo 5.2.6. *Sejam Λ_1 e Λ_2 reticulados, em que Λ_1 e Λ_2 são gerados pelas matrizes M_1 e M_2 definidas anteriormente. Considere $k = \sqrt{38}$. Na Figura 44 temos um poli-retângulo gerado pela região \mathcal{R}_1 .*

Observe que aqui $\alpha = 6$ e $\beta = 1$.

Observação 5.2.7. *Da mesma forma que ocorre nos poli-hexágonos do Tipo 2 no caso onde $-l \equiv 1 \pmod{4}$, considerando os inteiros positivos α e β presentes na matriz geradora*

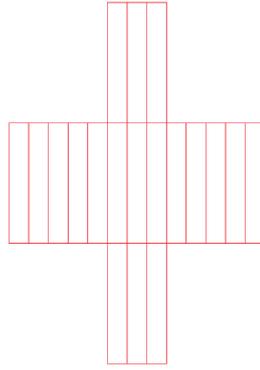


Figura 44 – Poli-retângulo do Tipo 2 para $l = 38$.

de $\Lambda_{l,2}$, pelo Teorema 5.2.4 temos que para todo par (α, β) que satisfaz $0 \leq \beta \leq \alpha$, obtemos a região \mathcal{R} que ladrilha o \mathbb{R}^2 , mas nem todo par (α, β) que satisfaz a condição estabelecida gera um poli-retângulo do Tipo 2.

Exemplo 5.2.8. Para $l = 2$, os pares (α, β) que são poli-retângulos do Tipo 2 são $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$, como podemos conferir na Figura 45.

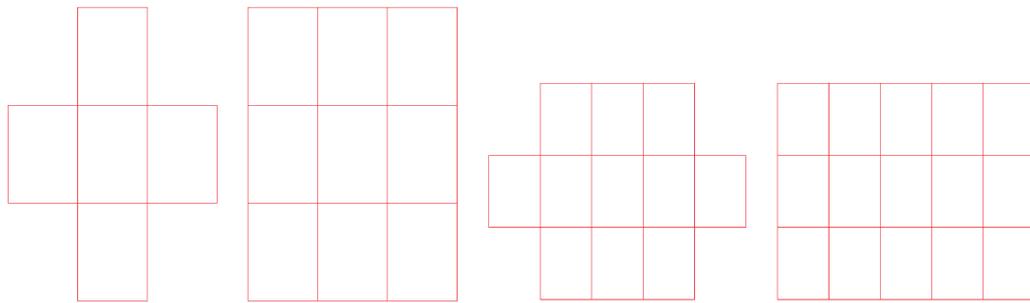


Figura 45 – Poli-retângulos do Tipo 2 construídos para $l = 2$.

Teorema 5.2.9. Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$, o número de raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ é igual a $\lceil \sqrt{3l} \rceil$.

Demonstração. Como $2l \leq (a, 1)G_{l,2}(a, 1)^T < 8l$, temos que

$$2l \leq (a, 1)G_{l,2}(a, 1)^T < 8l \implies 2l \leq 2a^2 + 2l < 8l \implies |a| < \sqrt{3l}.$$

Assim, encontrar o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ é igual a encontrar o número de inteiros no intervalo $[0, \sqrt{3l})$. Essa quantidade é igual a dos inteiros no intervalo fechado $[0, \lceil \sqrt{3l} \rceil]$ que é igual a $\lceil \sqrt{3l} \rceil - 0 + 1 = \lceil \sqrt{3l} \rceil$. \square

Corolário 5.2.10. Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,2}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.9, $m = \lceil \sqrt{3l} \rceil$. Logo, se $l \rightarrow \infty$, segue diretamente que $m \rightarrow \infty$. \square

Teorema 5.2.11. *Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$, o número de raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,2}$ é igual a $\lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lceil \sqrt{l} \rceil$.*

Demonstração. Como $2l \leq (b, 0)G_{l,2}(b, 0)^T < 8l$, temos que

$$2l \leq (b, 0)G_{l,2}(b, 0)^T < 8l \implies 2l \leq 2b^2 < 8l \implies \sqrt{l} \leq |b| < 2\sqrt{l}.$$

Assim, encontrar o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,2}$ é igual a encontrar o número de inteiros no intervalo $[\sqrt{l}, 2\sqrt{l})$. Essa quantidade é igual a dos inteiros no intervalo fechado $[\lceil \sqrt{l} \rceil, \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor]$ que é igual a $\lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lceil \sqrt{l} \rceil + 1 = \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lceil \sqrt{l} \rceil$. \square

Corolário 5.2.12. *Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,2}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.11, $m = \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lceil \sqrt{l} \rceil$. Logo, se $l \rightarrow \infty$, segue diretamente que $m \rightarrow \infty$. \square

Observação 5.2.13. *Para que uma bola do Tipo 2 em que o raio é dado por um vetor do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ gere o mesmo poli-retângulo do que uma bola em que o raio é dado por um vetor do tipo $(b, 0)M_{l,2}$ devem existir $a, b \in \mathbb{N}$ que satisfaçam a seguinte equação: $(a, 1)G_{l,2}(a, 1)^T = (b, 0)G_{l,2}(b, 0)^T$, isto é, $l = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$. Se $b + a$ é par, então a e b tem a mesma paridade. Assim, $b - a$ é par, e logo l vai ser múltiplo de 4, o que contradiz a hipótese de que $l \equiv 2 \pmod{4}$. Se $b + a$ é ímpar, então a e b tem paridades diferentes. Assim, $b - a$ é ímpar, e logo l vai ser ímpar, o que também contradiz a hipótese de que $l \equiv 2 \pmod{4}$. Logo, não existem $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 = a^2 + l$, e portanto, não teremos poli-retângulos gerados por bolas do Tipo 2 em que o raio é dado por vetores do tipo $(a, 1)M_{l,2}$ e $(b, 0)M_{l,2}$.*

A partir da Observação 5.2.13 e dos corolários 5.2.10 e 5.2.12, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.2.14. *Seja m o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Temos que $m = \lceil \sqrt{3l} \rceil + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lceil \sqrt{l} \rceil$. Logo, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Podemos concluir que para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \equiv 2 \pmod{4}$, sempre encontraremos raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito do Tipo 2. Além disso, a quantidade de códigos perfeitos encontrados aumenta proporcionalmente a l . Levando em conta também o número de códigos perfeitos do Tipo 1 que podemos obter, segue que a quantidade de raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito é, pelo menos, igual a $[\sqrt{l}] + [\sqrt{3l}] + [2\sqrt{l}] - [\sqrt{l}]$.

5.2.3 Tipo 3: poli-retângulo de cinco níveis

Nesse formato de ladrilho encontramos poli-retângulos com cinco camadas, sendo a camada central sempre maior ou igual do que as demais camadas.

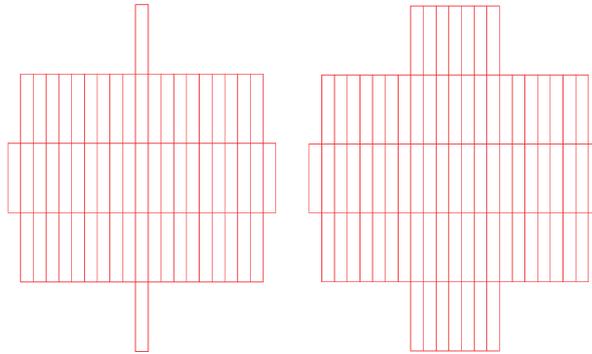


Figura 46 – Poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 30$.

A bola \tilde{B}_r do Tipo 3 é composta por todos os vetores $(a, 2)M_{l,2}, (-a, 2)M_{l,2}, (b, 1)M_{l,2}, (-b, 1)M_{l,2}, (c, 0)M_{l,2}$ e $(-c, 0)M_{l,2}$ pertencentes a \mathbb{R}^2 tais que $r^2 < 18l$, em que $(a, 2)G_{l,2}(a, 2)^T \leq r^2, (-a, 2)G_{l,2}(-a, 2)^T \leq r^2, (b, 1)G_{l,2}(b, 1)^T \leq r^2, (-b, 1)G_{l,2}(-b, 1)^T \leq r^2, (c, 0)G_{l,2}(c, 0)^T \leq r^2$ ou $(-c, 0)G_{l,2}(-c, 0)^T \leq r^2$, e $G_{l,2}$ é a matriz de Gram de $\Lambda_{a,l,2}$ associada a $M_{l,2}$. Podemos então escrever a bola do Tipo 3 como $\tilde{B}_r = \{\mathbf{u}M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : 8l \leq \mathbf{u}G_{l,1}\mathbf{u}^T \leq r^2 < 18l \text{ e } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2, \text{ em que } \mathbf{u} = (a, 2), (-a, 2), (b, 1), (-b, 1), (c, 0) \text{ ou } (-c, 0)\}$.

A restrição $8l \leq r^2$ exclui a possibilidade de aparecerem poli-retângulos com menos de cinco camadas em \tilde{B}_r . Já a restrição $r^2 < 18l$ garante que os poli-retângulos construídos tenham no máximo cinco camadas. Essas duas restrições fornecem todos os poli-retângulos com exatamente cinco camadas.

Da mesma forma que ocorreu com os poli-hexágonos no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, um poli-retângulo do Tipo 3 nem sempre ladrilha o \mathbb{R}^2 , como podemos observar no Exemplo 5.2.15.

Exemplo 5.2.15. *Considere o poli-retângulo do Tipo 3 construído para $l = 2$ dado na Figura 47.*

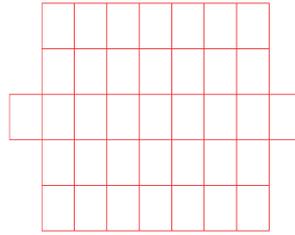


Figura 47 – Poli-retângulo construído para $l = 2$.

Esse poli-retângulo não ladrilha o \mathbb{R}^2 . Na Figura 48 podemos observar três tentativas de ladrilhamento para o \mathbb{R}^2 usando quatro desses poli-retângulos.

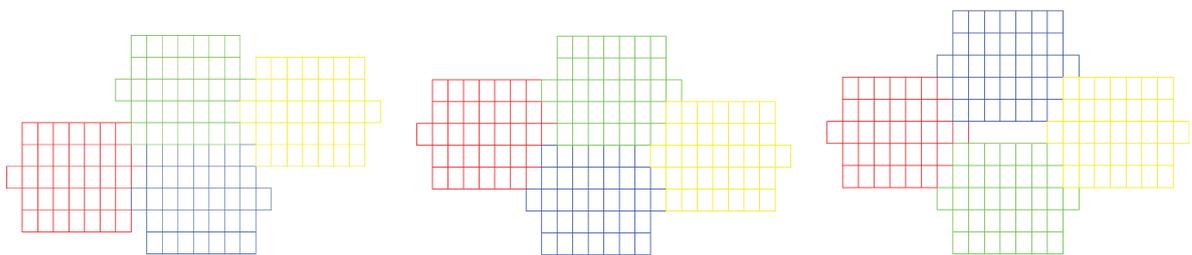


Figura 48 – União de 4 poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 2$.

Observando o formato desse poli-retângulo (9 retângulos na camada central e 7 nas demais camadas) é intuitivo concluir que ele não ladrilha o \mathbb{R}^2 . Além disso, no Capítulo 4, na Tabela 11, podemos observar que para $l = 2$, o raio 34, que é o raio da bola que gera esse poli-retângulo, não é um raio para o qual $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito.

Em alguns casos um poli-retângulo do Tipo 3 ladrilha o \mathbb{R}^2 , como podemos conferir no Exemplo 5.2.16.

Exemplo 5.2.16. Considere o poli-retângulo do Tipo 3 construído para $l = 6$ dado na Figura 49.

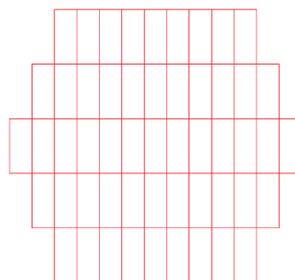


Figura 49 – Poli-retângulo construído para $l = 6$.

O raio da bola que gera esse poli-retângulo, que é dado pelo vetor $(4, 2)M_{l,2}$, é igual a 80. Na Tabela 11 no Capítulo 4 observamos que esse é um raio para o qual

$\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito. Na Figura 50 temos uma ilustração do poli-retângulo ladrilhando o \mathbb{R}^2 . A demonstração formal de que esse poli-retângulo ladrilha o \mathbb{R}^2 é análoga as demais demonstrações apresentadas neste capítulo.

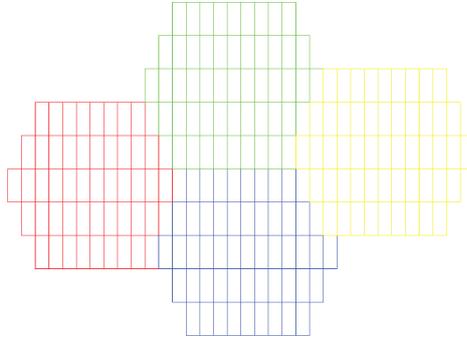


Figura 50 – União de 4 poli-retângulos do Tipo 3 construídos para $l = 6$.

Com isso, como também observamos no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, as análises dos poli-retângulos do Tipo 3 são bem individuais. Diferente do que fizemos para os demais tipos, aqui não é possível afirmar que sempre encontraremos raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito, mas podemos observar que existem alguns casos em que isso acontece. Se considerarmos aqui os poli-retângulos dos Tipo n , ou seja, os poli-hexágonos com $2n - 1$ camadas, acreditamos que quanto maior o valor de n , menor é a chance de encontrarmos um número grande de poli-retângulos que irão ladrilhar o espaço. Além disso, como também ocorreu no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, quanto maior o número de camadas, mais difícil será para provarmos algebricamente que de fato os poli-retângulos ladrilham o \mathbb{R}^2 . Na Seção 4.2.4 do Capítulo 4, usando um algoritmo, listamos todos os códigos perfeitos em $\Lambda_{a,l,2}$ e seus raios de empacotamento para $l = 2, 6, 10$ e 14 . A partir dos raios listados, observamos que existem poli-retângulos com mais do que 5 camadas que ladrilham o espaço.

6 Códigos Perfeitos em Reticulados n -dimensionais

No Capítulo 5 analisamos alguns formatos e as respectivas quantidades de raios para os quais temos códigos perfeitos para duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais, $\Lambda_{a,l,1}$ e $\Lambda_{a,l,2}$, em que $\Lambda_{a,l,1}$ é a família construída no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, e $\Lambda_{a,l,2}$ é a construída no caso em que $l \equiv 2 \pmod{4}$. Uma construção detalhada dessas famílias pode ser encontrada nos Exemplos 1.9.23 e 1.9.24 no Capítulo 1. Neste capítulo, estudamos os códigos perfeitos que podemos obter quando olhamos essas famílias mergulhadas em dimensões maiores.

Os reticulados bidimensionais $\Lambda_{a,l,1}$ e $\Lambda_{a,l,2}$, que aqui serão denotados por $\Lambda_{a,l,1,2}$ e $\Lambda_{a,l,2,2}$, em que o índice 2 representa a dimensão do reticulado, possuem matrizes geradoras $M_{l,1,2}$ e $M_{l,2,2}$, respectivamente, tais que

$$M_{l,1,2} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{l}/2 \end{pmatrix} \text{ e } M_{l,2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Gram associadas a $M_{l,1,2}$ e $M_{l,2,2}$ são, respectivamente $G_{l,1,2}$ e $G_{l,2,2}$, em que

$$G_{l,1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & (1+l)/2 \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Para essas famílias de reticulados, que denotaremos aqui de modo geral como $\Lambda_{a,l,2}$, considerando os raios para os quais $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$ é um código perfeito, para cada valor de l , estudamos alguns formatos dos políominos construídos, que foram chamados de poli-hexágonos para a primeira família, e poli-retângulos para a segunda. Os formatos estudados foram separados em três tipos: Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3, e para cada tipo de ladrilho, fornecemos alguns resultados.

Nossa estratégia aqui é mergulhar os ladrilhos estudados anteriormente em dimensões maiores e analisar os códigos perfeitos encontrados nessas dimensões. Os ladrilhos que vamos trabalhar, que chamaremos de poliprismas, serão os do Tipo 1.

6.1 Dimensão 3

Seja $\Lambda_{a,l,3}$ o reticulado em \mathbb{R}^3 em que suas lâminas horizontais são o reticulado $\Lambda_{a,l,2}$. Em outras palavras, $\Lambda_{a,l,3}$ essencialmente é o reticulado $\Lambda_{a,l,2}$ mergulhado em \mathbb{R}^3 da

seguinte forma: para todo $(a, b) \in \Lambda_{a,l_2}$, $(a, b) \mapsto (a, b, 0)$. Escolhemos aqui aumentar a dimensão de forma ortogonal por simplicidade e para ficar mais compreensível, mas vale ressaltar que isso não é necessário.

Temos que Λ_{a,l_3} possui matrizes geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l_3} = \begin{pmatrix} M_{l_2} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } G_{l_3} = \begin{pmatrix} G_{l_2} & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

em que M_{l_2} é uma matriz geradora para Λ_{a,l_2} , G_{l_2} é a matriz de Gram associada a M_{l_2} e $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|(0, 0, \alpha)\|$ é maior ou igual ao segundo mínimo sucessivo de Λ_{a,l_2} , isto é, $\|(0, 0, \alpha)\|$ é maior ou igual a segunda menor norma em Λ_{a,l_2} .

Observação 6.1.1. *Além de ser maior ou igual ao segundo mínimo em Λ_{a,l_2} , temos que α deve ser suficientemente grande para que G_{l_3} esteja ordenada por norma.*

A bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores $(a_1, a_2, 0)M_{l_3}$ pertencentes a \mathbb{R}^3 que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que α^2 . Assim, definimos a bola do Tipo 1 como $\tilde{B}_r = \{(a_1, a_2, 0)M_{l_3} \in \mathbb{R}^3 : (a_1, a_2, 0)G_{l_3}(a_1, a_2, 0)^T \leq r^2 < \alpha^2 \text{ e } (a_1, a_2, 0) \in \mathbb{Z}^3\}$.

Os elementos da bola do Tipo 1 possuem a terceira coordenada nula. Essa condição é necessária para um vetor pertencer a bola, uma vez que, se tomarmos $\mathbf{x} = (A, c)M_{l_3}$, em que $A \in \mathbb{Z}^2$ e $c \neq 0$, podemos observar que $(A, c)G_{l_3}(A, c)^T = AG_{l_2}A^T + c^2\alpha^2 \geq c^2\alpha^2 > \alpha^2$. Logo, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

Lema 6.1.2. *Os poliprismas do Tipo 1 ladrilham o \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Seja $\Lambda_{l_3} \subset \Lambda_{a,l_3}$ o reticulado gerado pela matriz $N_{l_3} = \begin{pmatrix} N_{l_2} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, em que N_{l_2} é uma matriz geradora do sub-reticulado Λ_{l_2} de Λ_{a,l_2} . Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}}$ é a região de Voronoi de Λ_{a,l_3} e $\mathcal{T} = (\hat{\mathcal{T}}, 0)$, sendo $\hat{\mathcal{T}}$ um conjunto discreto tal que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_2}} + \hat{\mathcal{T}}$ é um Λ_{l_2} -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Os vetores de \mathcal{T} são do tipo $(\hat{\mathbf{t}}, 0)$, em que $\hat{\mathbf{t}} \in \hat{\mathcal{T}}$. Vamos mostrar que \mathcal{R} é um Λ_{l_3} -ladrilho para \mathbb{R}^3 . Observe que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Note que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 , e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então essas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \boldsymbol{\lambda}$, segue que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \in \Lambda_{l_3}$, isto é, para $\mathbf{t}_1 = a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0)$ e $\mathbf{t}_2 = b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0)$, com $\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2 \in \hat{\mathcal{T}}$, a e b inteiros distintos, satisfazendo as mesmas condições estabelecidas para o caso bidimensional, temos que $a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0) - b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0) \in \Lambda_{l_3}$. Então, devem

existir $B \in \mathbb{Z}^2$ e $\beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0) - b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0) &= (B, \beta) \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (BN_2, \beta\alpha). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{cases} a\hat{\mathbf{t}}_1 - b\hat{\mathbf{t}}_2 = BN_2 \\ 0 = \beta\alpha. \end{cases} \quad (6.1)$$

$$(6.2)$$

De (6.2), temos que $\beta = 0$. Como já provamos no caso bidimensional, a equação (6.1) não tem solução inteira. Logo, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \boldsymbol{\lambda}$ se interceptam apenas em seus bordos e portanto $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, por estar contida em uma união finita de conjuntos de medida nula.

Temos que $\#\mathcal{T} = \#\hat{\mathcal{T}}$. Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_{a,l_3}/\Lambda_{l_3}$. Note que

$$\#\mathcal{G} = \frac{\det(\Lambda_{l_3})^{1/2}}{\det(\Lambda_{a,l_3})^{1/2}} = \frac{\alpha \det(G_{l_2})^{1/2}}{\alpha \det(G_{a,l_2})^{1/2}} = \frac{\det(G_{l_2})^{1/2}}{\det(G_{a,l_2})^{1/2}} = \#\hat{\mathcal{G}},$$

em que $\#\hat{\mathcal{G}} = \Lambda_{a,l_2}/\Lambda_{l_2}$. Então, $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$.

Como provamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l_3}, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_{l_3} \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_{l_3}$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas do grupo \mathcal{G} . E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_{l_3} . Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda_{a,l_3} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_{a,l_3} &\longmapsto \overline{\boldsymbol{\lambda}_{a,l_3}}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_{l_3}$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_{l_3} segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ_{l_3} -ladrilho para Λ_{a,l_3} e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_3}} + \mathcal{T}$ é um Λ_{l_3} -ladrilho para \mathbb{R}^3 . \square

Como podemos perceber na definição da bola, os poliprimas do Tipo 1 não são apenas os construídos a partir de um poli-hexágono ou poli-retângulo do Tipo 1. Eles são obtidos a partir de poli-hexágonos ou poli-retângulos dos tipos 1, 2, 3 e de outros que não foram explorados neste trabalho. A única coisa que pedimos é que os poliprimas sejam construídos a partir de um código perfeito Λ_{l_2} de Λ_{a,l_2} .

6.1.1 $-l \equiv 1 \pmod{4}$

Exemplo 6.1.3. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja o reticulado $\Lambda_{a,l,1,3}$, que é $\Lambda_{a,l,1,2}$ imerso no \mathbb{R}^3 . O reticulado $\Lambda_{a,l,1,3}$ possui matriz geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l,1,3} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}l/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1,3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & (l+1)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (l+1)/2 \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo $M_{l,1,3}$ e $G_{l,1,3}$ em blocos, temos que

$$M_{l,1,3} = \begin{pmatrix} M_{l,1,2} & 0 \\ 0 & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1,3} = \begin{pmatrix} G_{l,1,2} & 0 \\ 0 & (l+1)/2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a bola \tilde{B}_r do Tipo 1 é composta por todos os vetores $(a_1, 0, 0)M_{l,1,3}$ em \mathbb{R}^3 que possuem a norma ao quadrado estritamente menor do que $(l+1)/2$. Assim, a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, 0, 0)M_{l,1,3} \in \mathbb{R}^3 : (a_1, 0, 0)G_{l,1,3}(a_1, 0, 0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \text{ e } (a_1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3\}$.

Na Figura 51 temos uma ilustração do poliprisma construído para $l = 27$.

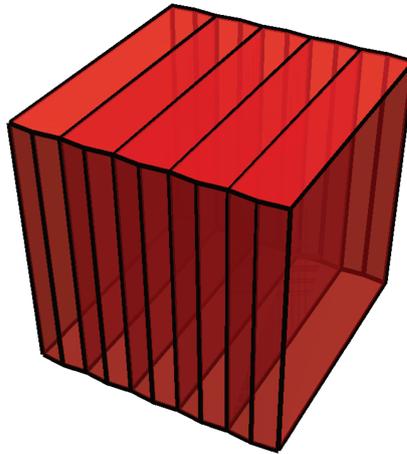


Figura 51 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 27$.

A interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta em um polihédrano do Tipo 1. Na Figura 52 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 27$ dado na Figura 51 com o plano xy .

Os elementos da bola do Tipo 1 possuem apenas a primeira coordenada não-nula, uma vez que para $\mathbf{x} = (a_1, a_2, 0)M_{l,1,3}$, em que $a_2 \neq 0$, temos que $(a_1, a_2, 0)G_{l,1,3}(a_1, a_2, 0)^T \geq a_2^2 l/2 \geq (l+1)/2$. Então, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

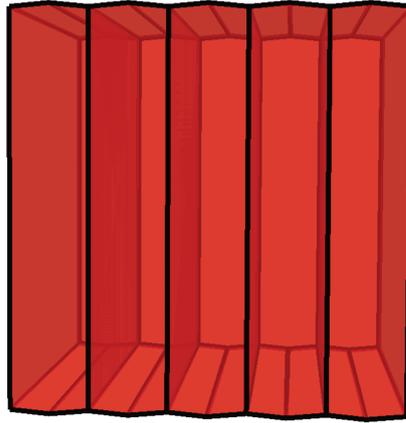


Figura 52 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 27$ com o plano xy .

Teorema 6.1.4. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja $\Lambda_{a,l,13}$ o reticulado descrito no Exemplo 6.1.3, $\Lambda_{l,13} \subset \Lambda_{a,l,13}$ gerado pela matriz $N_{l,13} = \begin{pmatrix} (2p+1)\sqrt{2} & 0 & 0 \\ (2c-1)\sqrt{2}/2 & \sqrt{2l}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix}$, em que $p \in \{1, 2, \dots, t\}$, $t = \max\{a_1 \in \mathbb{Z}_+ : (a_1, 0, 0)M_{l,13} \in \tilde{B}_r\}$ e $1 \leq c \leq p$. Reescrevendo $N_{l,13}$ em blocos, temos que

$$N_{l,13} = \begin{pmatrix} N_{l,12} & 0 \\ 0 & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix}.$$

Consideramos também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,13}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,13}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,13}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm\mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,13}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.1 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,12}$ gerado por $N_{l,12}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,12}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm\mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,12}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.1.2, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,13}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 . \square

Pelo Teorema 6.1.4, observamos que mergulhando os códigos perfeitos do Tipo 1 de $\Lambda_{a,l,12}$ em \mathbb{R}^3 , também obtemos códigos perfeitos do Tipo 1 na dimensão 3. Então segue que o número de códigos perfeitos do Tipo 1 em três dimensões é maior ou igual ao número de perfeitos do Tipo 1 na dimensão 2, como podemos conferir no próximo resultado.

Corolário 6.1.5. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,13}$ construídos via perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,12}$. Temos que $m \geq \lfloor \sqrt{l-3}/2 \rfloor$.

Demonstração. Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, temos que a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, 0, 0)M_{l,13} \in \mathbb{Z}^3 : (a_1, 0, 0)G_{l,13}(a_1, 0, 0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \text{ e } (a_1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3\}$. Então

$$(a_1, 0, 0)G_{l,13}(a_1, 0, 0)^T < (l+1)/2 \implies a_1^2 \leq \frac{l+1}{4} - 1 \implies |a_1| \leq \frac{\sqrt{l-3}}{2}.$$

Logo, a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a_1 \leq (\sqrt{l-3})/2$, que é igual a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a_1 < [(\sqrt{l-3})/2]$, fornece o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$. Portanto, temos que existem $[(\sqrt{l-3})/2]$ raios para os quais temos códigos perfeitos $\Lambda_{l,13} \subset \Lambda_{a,l,13}$ construídos via códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,12}$ e, portanto, $m \geq [(\sqrt{l-3})/2]$. \square

No Corolário 6.1.5 obtemos uma cota para a quantidade de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 na dimensão 3 em $\Lambda_{a,l,13}$ usando a quantidade raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,2}$ construídos para o caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$. Mas, como ressaltamos anteriormente, os códigos perfeitos do Tipo 1 na dimensão 3 não só apenas os construídos via perfeitos do Tipo 1 da dimensão 2. Assim, essa cota pode ser melhorada se considerarmos também os códigos perfeitos obtidos a partir de códigos perfeitos do Tipo 2 em $\Lambda_{a,l,2}$.

Exemplo 6.1.6. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja $\Lambda_{a,l,13}$ o reticulado que possui matrizes geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l,13} = \begin{pmatrix} M_{l,12} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,13} = \begin{pmatrix} G_{l,12} & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix},$$

em que $M_{l,12}$ é uma matriz geradora para $\Lambda_{a,l,13}$ e $G_{l,12}$ é a matriz de Gram associada a $M_{l,12}$. Neste caso, a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, a_2, 0)M_{l,13} \in \mathbb{R}^3 : (a_1, a_2, 0)G_{l,13}(a_1, a_2, 0)^T \leq r^2 < 2l \text{ e } (a_1, a_2, 0) \in \mathbb{Z}^3\}$. Diferente do que aconteceu no caso do Exemplo 6.1.3, aqui os elementos da bola podem possuir a segunda coordenada diferente de zero.

Na Figura 53 temos uma ilustração do poliprisma construído para $l = 23$.

A interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta em um polihédrano do Tipo 2. Na Figura 54 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 23$ dado na Figura 53 com o plano xy .

Teorema 6.1.7. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam $\Lambda_{a,l,13}$ o reticulado descrito no Exemplo

6.1.6, $\Lambda_{l,13} \subset \Lambda_{a,l,13}$ e $N_{l,13} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\alpha + \beta + 1/2) & \sqrt{2l}/2 & 0 \\ 2\sqrt{2}\beta & -\sqrt{2l} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix}$ uma matriz geradora para $\Lambda_{l,13}$, em que $1 \leq \beta \leq \alpha$. Reescrevendo $N_{l,13}$ em blocos, temos que

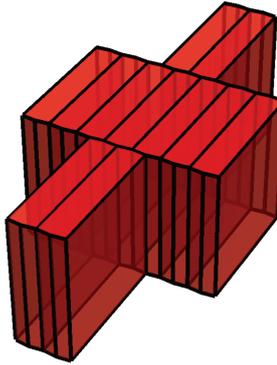


Figura 53 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 23$.

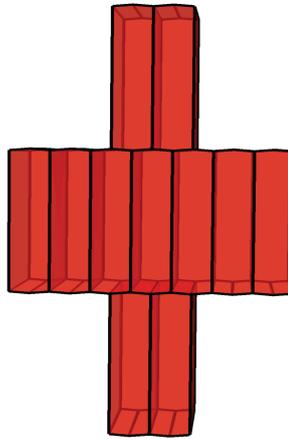


Figura 54 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 23$ com o plano xy .

$$N_{l,13} = \begin{pmatrix} N_{l,12} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix}.$$

Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,13}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta \mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2l}/2, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,13}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Pelo Corolário 5.1.6, para o reticulado $\Lambda_{l,12}$ gerado por $N_{l,12}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,12}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta \mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2l}/2)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,12}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.1.2, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,13}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 . \square

Como vimos no Teorema 6.1.7, os poliprismas construídos via poli-hexágonos do Tipo 2 mergulhados em \mathbb{R}^3 também ladrilham o \mathbb{R}^3 e estão contidos na bola do

Tipo 1. Então, podemos melhorar a cota do Corolário 6.1.5 adicionando a quantidade de poli-hexágonos existentes do Tipo 2 que encontramos no Capítulo 5.

Corolário 6.1.8. *Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em Λ_{a,l_3} e γ é o número de poliprismas construídos a partir de poli-hexágonos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1, 0)M_{l_3}$ e $(b, 0, 0)M_{l_3}$. Temos que $m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$ caso contrário.*

Demonstração. Pelos teoremas 5.1.10 e 5.1.12, e pela Observação 5.1.14, temos que o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em Λ_{a,l_2} é $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $\lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma$ caso contrário. Pelos teoremas 6.1.4 e 6.1.7, todos os códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em Λ_{a,l_2} são códigos perfeitos do Tipo 1 em Λ_{a,l_3} . Logo,

$$m \geq \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor + (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma \implies m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma,$$

se $3l$ não é um quadrado perfeito, e

$$m \geq \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor + \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma \implies m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma,$$

caso contrário. \square

Corolário 6.1.9. *Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos em Λ_{a,l_3} e γ o número de poliprismas construídos a partir de poli-hexágonos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1, 0)M_{l_3}$ e $(b, 0, 0)M_{l_3}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$, isto é, quanto maior o valor de l , mais raios teremos para os quais existem códigos perfeitos em Λ_{a,l_3} .*

Demonstração. Pelo Corolário 6.1.8, $m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, caso contrário. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Observação 6.1.10. *Como observamos anteriormente, os poliprismas do Tipo 1 também podem ser obtidos via poli-hexágonos do Tipo 3. No Exemplo 5.1.19 no Capítulo 5 mostramos que para $l = 47$ o poli-hexágono do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(1, 2)M_{l_2}$ ladrilha o \mathbb{R}^2 . Então, pelo Lema 6.1.2, temos que o poliprisma obtido por esse poli-hexágono ladrilha o \mathbb{R}^3 . Na Figura 55 temos uma ilustração deste poliprisma construído para $l = 47$.*

A interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta no poli-hexágono do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(1, 2)M_{l_2}$. Na Figura 56 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 47$ dado na Figura 55 com o plano xy .

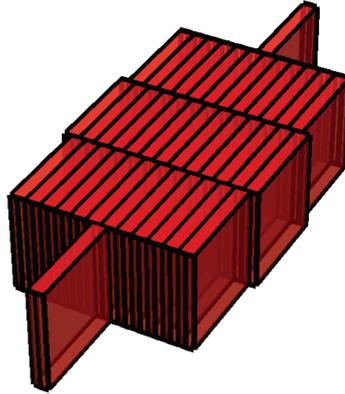


Figura 55 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 47$.

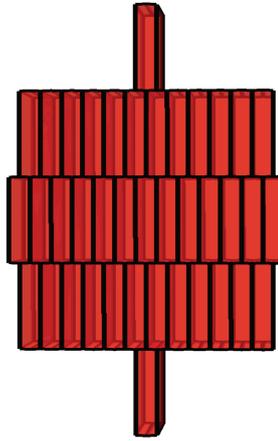


Figura 56 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 47$ com o plano xy .

6.1.2 $l \equiv 2 \pmod{4}$

Exemplo 6.1.11. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, seja o reticulado $\Lambda_{a,l,2,3}$, que é essencialmente $\Lambda_{a,l,2,2}$ mergulhado no \mathbb{R}^3 . O reticulado $\Lambda_{a,l,2,3}$ possui matriz geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 \\ 0 & 0 & 2l \end{pmatrix},$$

Reescrevendo $M_{l,2,3}$ e $G_{l,2,3}$ em blocos, temos que

$$M_{l,2,3} = \begin{pmatrix} M_{l,2,2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2,3} = \begin{pmatrix} G_{l,2,2} & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores $(a_1, 0, 0)M_{l,2,3}$ em \mathbb{R}^3 que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $2l$. Assim, a bola do Tipo 1 é

definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, 0, 0)M_{l,2_3} \in \mathbb{R}^3 : (a_1, 0, 0)G_{l,2_3}(a_1, 0, 0)^T \leq r^2 < 2l \text{ e } (a_1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3\}$.

Na Figura 57 temos uma ilustração do poliprisma construído para $l = 6$.

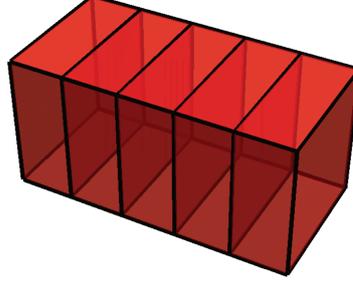


Figura 57 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$.

A interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta em um poli-retângulo do Tipo 1. Na Figura 58 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 6$ dado na Figura 57 com o plano xy .

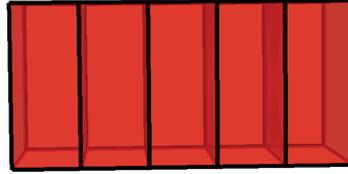


Figura 58 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$ com o plano xy .

Os elementos da bola do Tipo 1 possuem apenas a primeira coordenada não-nula, uma vez que para $\mathbf{x} = (a_1, a_2, 0)M_{l,2_3}$, em que $a_2 \neq 0$, temos que $(a_1, a_2, 0)G_{l,2_3}(a_1, a_2, 0)^T \geq 2la_2^2 \geq 2l$. Então, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

Teorema 6.1.12. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2_3}$ descrito no Exemplo

6.1.11, $\Lambda_{l,2_3} \subset \Lambda_{a,l,2_3}$ gerado pela matriz $N_{l,2_3} = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix}$, em que $k = 2p + 1$

e $p \in \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{l} \rfloor\}$. Reescrevendo $N_{l,2_3}$ em blocos, temos que

$$N_{l,2_3} = \begin{pmatrix} N_{l,2_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix}.$$

Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_3}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_3}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,2_3}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2_3}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.1 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,2_2}$ gerado por $N_{l,2_2}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_2}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,2_2}$ -ladrilho para

$\Lambda_{a,l,2}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.1.2, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2_3}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 . \square

Exemplo 6.1.13. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2_3}$ que possui matriz geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l,2_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 \\ 0 & 0 & 8l \end{pmatrix},$$

Reescrevendo $M_{l,2_3}$ e $G_{l,2_3}$ em blocos, temos que

$$M_{l,2_3} = \begin{pmatrix} M_{l,2_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2_3} = \begin{pmatrix} G_{l,2_2} & 0 \\ 0 & 8l \end{pmatrix},$$

em que $M_{l,2_2}$ é uma matriz geradora para $\Lambda_{a,l,2_2}$ e $G_{l,2_2}$ é a matriz de Gram associada a $M_{l,2_2}$. Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta de todos os vetores $(a_1, a_2, 0)M_{l,2_3}$ em \mathbb{R}^3 que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $8l$. Assim, a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, a_2, 0)M_{l,2_3} \in \mathbb{R}^3 : (a_1, a_2, 0)G_{l,2_3}(a_1, a_2, 0)^T \leq r^2 < 8l \text{ e } (a_1, a_2, 0) \in \mathbb{Z}_+^3\}$.

Na Figura 59 temos uma ilustração do poliprisma construído para $l = 14$.

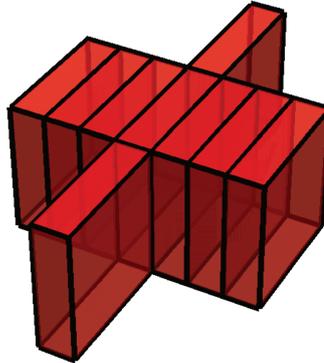


Figura 59 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 14$.

Neste caso, a interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta em um poli-retângulo do Tipo 2. Na Figura 60 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 14$ dado na Figura 59 com o plano xy .

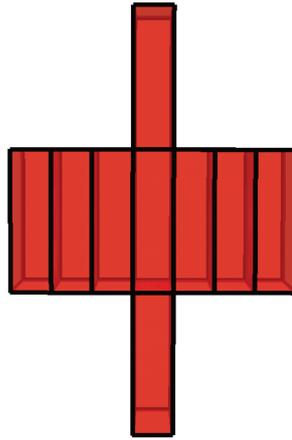


Figura 60 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 14$ com o plano xy .

Teorema 6.1.14. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2_3}$ descrito no Exemplo 6.1.13 e $\Lambda_{l,2_3} \subset \Lambda_{a,l,2_3}$ gerado pela seguinte matriz:

$$N_{l,2_3} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 - \sqrt{l} & \alpha + \beta + 1 + \sqrt{l} & 0 \\ 2\beta + 1 + 2\sqrt{l} & 2\beta + 1 - 2\sqrt{l} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix},$$

em que $0 \leq \beta \leq \alpha$. Reescrevendo $N_{l,2_3}$ em blocos, temos que

$$N_{l,2_3} = \begin{pmatrix} N_{l,2_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix}.$$

Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_3}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_3}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,2_3}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{l}, -\sqrt{l}, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2_3}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.5 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,2_2}$ gerado por $N_{l,2_2}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2_2}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{l}, -\sqrt{l})$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,2_2}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,2_2}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,2_2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.1.2, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2_3}$ -ladrilho para \mathbb{R}^3 . \square

Corolário 6.1.15. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,3}$. Temos que $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$.

Demonstração. Pelos teoremas 5.2.2, 5.2.9 e 5.2.11, o número de raios para os quais temos códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em $\Lambda_{a,l,1_2}$ é $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. Pelos teoremas 6.1.12 e 6.1.14, todos os códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em $\Lambda_{a,l,1_2}$ são códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1_3}$. Logo, $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. \square

Corolário 6.1.16. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em Λ_{a,l_3} . Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pelo Teorema 6.1.15, $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Observação 6.1.17. Os poliprismas do Tipo 1 também podem ser obtidos via poli-retângulos do Tipo 3. No Exemplo 5.2.16 no Capítulo 5 mostramos que para $l = 6$ o poli-hexágono do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(4, 2)M_{l,2_2}$ ladrilha o \mathbb{R}^2 . Então, pelo Lema 6.1.2, temos que o poliprisma obtido por esse poli-retângulo ladrilha o \mathbb{R}^3 . Na Figura 61 temos uma ilustração deste poliprisma construído para $l = 6$.

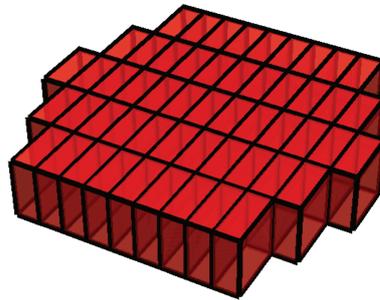


Figura 61 – Poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$.

A interseção do poliprisma do Tipo 1 com o plano xy resulta no poli-retângulo do Tipo 3 em que o raio da bola é dado pelo vetor $(4, 2)M_{l,2_2}$. Na Figura 62 temos a ilustração da interseção do poliprisma construído para $l = 6$ dado na Figura 61 com o plano xy .

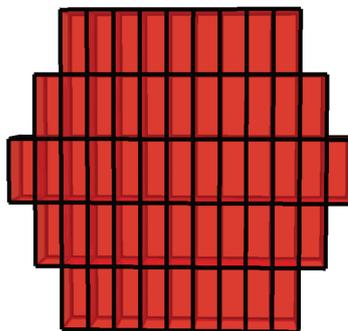


Figura 62 – Interseção do poliprisma do Tipo 1 construído para $l = 6$ com o plano xy .

Podemos observar que, tanto para $-l \equiv 1 \pmod{4}$ quanto para $l \equiv 2 \pmod{4}$, Λ_{a,l_3} sempre possui códigos perfeitos e, quanto maior o valor de l , mais códigos perfeitos encontraremos.

6.2 Dimensão n

Sejam $\Lambda_{a,l_{n-1}}$ e $\Lambda_{l_{n-1}}$ reticulados, tais que $\Lambda_{l_{n-1}} \subset \Lambda_{a,l_{n-1}}$ e $\Lambda_{l_{n-1}}$ é um código perfeito em $\Lambda_{a,l_{n-1}}$. Considere o reticulado Λ_{a,l_n} que possui matrizes geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l_n} = \begin{pmatrix} M_{l_{n-1}} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } G_{l_n} = \begin{pmatrix} G_{l_{n-1}} & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

em que $M_{l_{n-1}}$ é uma matriz geradora para $\Lambda_{a,l_{n-1}}$, $G_{l_{n-1}}$ é a matriz de Gram de $\Lambda_{a,l_{n-1}}$ associada a $M_{l_{n-1}}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que α é maior ou igual ao $(n-1)$ -ésimo mínimo sucessivo de $M_{l_{n-1}}$. Além disso, α deve ser suficientemente grande para que G_{l_n} esteja ordenada por norma.

A bola \tilde{B}_r do Tipo 1 é composta por todos os vetores do tipo $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l_n}$ pertencentes a \mathbb{R}^n que possuem a norma ao quadrado estritamente menor do que α^2 . Assim, a bola do Tipo 1 é definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r = & \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l_n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)G_{l_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^T \leq r^2 < \alpha^2 \\ & \text{e } (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Os elementos da bola do Tipo 1 possuem a última coordenada nula. Essa condição é necessária para um vetor pertencer a bola, uma vez que, se tomarmos $\mathbf{x} = (A, a_n)M_{l_n}$, em que $A \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e $a_n \neq 0$, podemos observar que $(A, a_n)G_{l_n}(A, a_n)^T = AG_{l_{n-1}}A^T + a_n^2\alpha^2 \geq a_n^2\alpha^2 > \alpha^2$. Logo, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

Lema 6.2.1. *Os poliprismas do Tipo 1 ladrilham o \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Seja $\Lambda_{l_n} \subset \Lambda_{a,l_n}$ o reticulado gerado pela matriz $N_{l_n} = \begin{pmatrix} N_{l_{n-1}} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, em que $N_{l_{n-1}}$ é uma matriz geradora do sub-reticulado $\Lambda_{l_{n-1}}$ de $\Lambda_{a,l_{n-1}}$. Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}}$ é a região de Voronoi de Λ_{a,l_n} e $\mathcal{T} = (\hat{\mathcal{T}}, 0)$, sendo $\hat{\mathcal{T}}$ um conjunto discreto tal que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_{n-1}}} + \hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l_{n-1}}$ -ladrilho para \mathbb{R}^{n-1} . Os vetores de \mathcal{T} são do tipo $(\hat{\mathbf{t}}, 0)$, em que $\hat{\mathbf{t}} \in \hat{\mathcal{T}}$. Vamos mostrar que \mathcal{R} é um Λ_{l_n} -ladrilho para \mathbb{R}^n . Observe que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda}) \subset \bigcup_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}} [(\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}}) \cap (\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}} + \boldsymbol{\lambda})].$$

Note que $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}}$ é a região de Voronoi de \mathbf{t}_1 , e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}} + \boldsymbol{\lambda}$ é a região de Voronoi de $\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\lambda}$. Então essas regiões são iguais ou se interceptam apenas em seus bordos.

Se $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}} = \mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l_n}} + \boldsymbol{\lambda}$, segue que $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \in \Lambda_{l_n}$, isto é, para $\mathbf{t}_1 = a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0)$ e $\mathbf{t}_2 = b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0)$, com $\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2 \in \hat{\mathcal{T}}$, a e b inteiros distintos, satisfazendo as mesmas condições

estabelecidas para o caso $n - 1$ -dimensional, temos que $a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0) - b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0) \in \Lambda_{l_n}$. Então, devem existir $B \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e $\beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{t}}_1, 0) - b(\hat{\mathbf{t}}_2, 0) &= (B, \beta) \begin{pmatrix} N_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (BN_{n-1}, \beta\alpha). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{cases} a\hat{\mathbf{t}}_1 - b\hat{\mathbf{t}}_2 = BN_{n-1} \\ 0 = \beta\alpha. \end{cases} \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

De (6.4), temos que $\beta = 0$. Como $\Lambda_{l_{n-1}}$ é um código perfeito em $\Lambda_{a, l_{n-1}}$, segue que a equação (6.3) não tem solução inteira. Logo, $\mathbf{t}_1 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a, l_n}}$ e $\mathbf{t}_2 + \mathcal{V}_{\Lambda_{a, l_n}} + \boldsymbol{\lambda}$ se interceptam apenas em seus bordos e portanto $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \boldsymbol{\lambda})$ tem medida nula, por ser um subconjunto de uma união finita de conjuntos de medida nula.

Observe que $\#\mathcal{T} = \#\hat{\mathcal{T}}$. Consideramos o grupo abeliano $\mathcal{G} = \Lambda_{a, l_n} / \Lambda_{l_n}$. Note que

$$\#\mathcal{G} = \frac{\det(\Lambda_{l_n})^{1/2}}{\det(\Lambda_{a, l_n})^{1/2}} = \frac{\alpha \det(G_{l_{n-1}})^{1/2}}{\alpha \det(G_{a, l_{n-1}})^{1/2}} = \frac{\det(G_{l_{n-1}})^{1/2}}{\det(G_{a, l_{n-1}})^{1/2}} = \#\hat{\mathcal{G}},$$

em que $\#\hat{\mathcal{G}} = \Lambda_{a, l_{n-1}} / \Lambda_{l_{n-1}}$. Então, $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$.

Como provamos anteriormente, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \notin \Lambda_{l_n}, \forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$, em que $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$. Então $\mathbf{t}_1 + \Lambda_{l_n} \neq \mathbf{t}_2 + \Lambda_{l_n}$, para $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}$ distintos. Assim, elementos distintos de \mathcal{T} representam classes distintas do grupo \mathcal{G} . E, como $\#\mathcal{T} = \#\mathcal{G}$, segue que \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_{l_n} . Seja ϕ o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda_{a, l_n} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_{a, l_n} &\longmapsto \overline{\boldsymbol{\lambda}_{a, l_n}}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ϕ é sobrejetor e que $N(\phi) = \Lambda_{l_n}$. Como \mathcal{T} é um sistema completo de resíduos módulo Λ_{l_n} segue que $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Então, $\#\phi(\mathcal{T}) = \#\mathcal{G} = \#\mathcal{T}$. Logo, pelo Teorema 2.0.16, \mathcal{T} é um Λ_{l_n} -ladrilho para Λ_{a, l_n} e, pelo Lema 2.0.7, temos que $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a, l_n}} + \mathcal{T}$ é um Λ_{l_n} -ladrilho para \mathbb{R}^n . \square

Pela definição da bola, os poliprimas do Tipo 1 são os obtidos a partir de poli-hexágonos ou poli-retângulos dos tipos 1, 2, 3 e de outros que não foram explorados neste trabalho. A única restrição é que os poliprimas sejam construídos a partir de um código perfeito $\Lambda_{l_{n-1}}$ de $\Lambda_{a, l_{n-1}}$.

6.2.1 $-l \equiv 1 \pmod{4}$

Exemplo 6.2.2. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,1_n}$ que possui matrizes geradora $M_{l,1_n}$ e de Gram $G_{l,1_n}$ tais que

$$M_{l,1_n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2l}/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(l+1)/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix}$$

e

$$G_{l,1_n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & (l+1)/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (l+1)/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (l+1)/2 \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo $M_{l,1_n}$ e $G_{l,1_n}$ em blocos, temos que

$$M_{l,1_n} = \begin{pmatrix} M_{l,1_{n-1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1_n} = \begin{pmatrix} G_{l,1_{n-1}} & 0 \\ 0 & (l+1)/2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores do tipo $(a_1, 0, \dots, 0)M_{l,1_n}$ em \mathbb{R}^n que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $(l+1)/2$. Então, a bola do Tipo 1 é definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r &= \{(a_1, 0, \dots, 0)M_{l,1_n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, 0, \dots, 0)G_{l,1_n}(a_1, 0, \dots, 0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \\ &\text{ e } (a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Observe que os elementos da bola do Tipo 1 possuem apenas a primeira coordenada não-nula, uma vez que para $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,1_n}$, em que $a_k \neq 0, \forall k \in \{2, \dots, n-1\}$, temos que $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)G_{l,1_n}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)^T \geq a_k^2 l/2 \geq (l+1)/2, \forall k \in \{2, \dots, n-1\}$. Então, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

Teorema 6.2.3. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,1_n}$ descrito no Exemplo 6.2.2 e $\Lambda_{l,1_n} \subset \Lambda_{a,l,1_n}$ gerado pela seguinte matriz:

$$N_{l,1_n} = \begin{pmatrix} (2p+1)\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (2c-1)\sqrt{2}/2 & \sqrt{2l}/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(l+1)/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{(l+1)/2} \end{pmatrix},$$

em que $p \in \{1, 2, \dots, t\}$, $t = \max\{a_1 \in \mathbb{Z}_+ : (a_1, 0, \dots, 0)M_{l,1n} \in \tilde{B}_r\}$ e $1 \leq c \leq p$. Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1n}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1n}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,1n}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n .

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.1 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,1_2}$ gerado por $N_{l,1_2}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1_2}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,1_2}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,1_2}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,1_2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.2.1, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n . \square

Corolário 6.2.4. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1n}$ construídos via códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1_2}$. Temos que $m \geq \lfloor \sqrt{l-3}/2 \rfloor$.

Demonstração. Para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $-l \equiv 1 \pmod{4}$, temos que a bola do Tipo 1 é definida como $\tilde{B}_r = \{(a_1, 0, \dots, 0)M_{l,1n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, 0, \dots, 0)G_{l,1n}(a_1, 0, \dots, 0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \text{ e } (a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n\}$. Então

$$(a_1, 0, \dots, 0)G_{l,1n}(a_1, 0, \dots, 0)^T < (l+1)/2 \implies a_1^2 \leq \frac{l+1}{4} - 1 \implies |a_1| \leq \frac{\sqrt{l-3}}{2}.$$

Logo, a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a_1 \leq (\sqrt{l-3})/2$, que é igual a quantidade de inteiros no intervalo $0 < a_1 < \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$, fornece o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 no caso em que $-l \equiv 1 \pmod{4}$. Portanto, temos que existem $\lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$ raios para os quais temos códigos perfeitos $\Lambda_{l,1n} \subset \Lambda_{a,l,1n}$ construídos via códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1_2}$ e, portanto, $m \geq \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor$. \square

Exemplo 6.2.5. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,1n}$ que possui matrizes geradora $M_{l,1n}$ e de Gram $G_{l,1n}$, tais que

$$M_{l,1n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}l/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{2}l \end{pmatrix}$$

e

$$G_{l,1n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & (l+1)/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2l \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo $M_{l,1n}$ e $G_{l,1n}$ em blocos, temos que

$$M_{l,1n} = \begin{pmatrix} M_{l,1n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,1n} = \begin{pmatrix} G_{l,1n-1} & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix},$$

em que $M_{l,1n-1}$ é uma matriz geradora para $\Lambda_{a,l,1n-1}$ e $G_{l,1n-1}$ é a matriz de Gram associada a $M_{l,1n-1}$. Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores do tipo $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,1n}$ em \mathbb{R}^n que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $2l$. Assim, a bola do Tipo 1 é definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r &= \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,1n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)G_{l,1n}(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^T \leq r^2 < 2l \\ &\text{ e } (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Teorema 6.2.6. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam $\Lambda_{a,l,1n}$ o reticulado descrito no Exemplo

$$6.2.5, \Lambda_{l,1n} \subset \Lambda_{a,l,1n} \text{ e } N_{l,1n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\alpha + \beta + 1/2) & \sqrt{2l}/2 & 0 & \dots & 0 \\ 2\sqrt{2}\beta & -\sqrt{2l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ uma matriz}$$

geradora para $\Lambda_{l,1n}$, em que $1 \leq \beta \leq \alpha$. Reescrevendo $N_{l,1n}$ em blocos, temos que

$$N_{l,1n} = \begin{pmatrix} N_{l,1n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix}.$$

Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,1n}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta \mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2l}/2, 0, \dots, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n .

Demonstração. Pelo Corolário 5.1.6, para o reticulado $\Lambda_{l,12}$ gerado por $N_{l,12}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,12}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} + \beta \mathbf{u}), \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} - (\beta - 1)\mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 0)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2l}/2)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,12}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,12}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.2.1, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,1n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n . \square

Corolário 6.2.7. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,n}$ e γ é o número de poliprismas construídos a partir de poli-hexágonos do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1, 0, \dots, 0)M_{l,1n}$ e $(b, 0, 0, \dots, 0)M_{l,1n}$. Temos que $m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$ caso contrário.

Demonstração. Pelo Corolário 6.2.4, a quantidade de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 construídos via códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,12}$ é igual a $\lfloor (\sqrt{l} - 3)/2 \rfloor$. Pelos teoremas 5.1.10 e 5.1.12, e pela Observação 5.1.14, temos que o número

de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 2 em $\Lambda_{a,l,1,2}$ é $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $\lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma$ caso contrário. Pelos teoremas 6.2.3 e 6.2.6, todos os códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em $\Lambda_{a,l,1,2}$ são códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,1,n}$. Logo,

$$m \geq \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor + (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma \implies m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma,$$

se $3l$ não é um quadrado perfeito, e

$$m \geq \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor + \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \lfloor (\sqrt{l-3})/2 \rfloor - \gamma \implies m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma,$$

caso contrário. \square

Corolário 6.2.8. Para $-l \equiv 1 \pmod{4}$, sejam m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos em $\Lambda_{a,l,n}$ e γ o número de poliprismas construídos a partir de polihéxagons do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo $(a, 1, 0, \dots, 0)M_{l,1,n}$ e $(b, 0, 0, \dots, 0)M_{l,1,n}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pelo Corolário 6.2.7, $m \geq (1 + \sqrt{3l})/2 - 1 + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, se $3l$ não é um quadrado perfeito, e $m \geq \lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor + \lfloor \sqrt{l} \rfloor - \gamma$, caso contrário. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

6.2.2 $l \equiv 2 \pmod{4}$

Exemplo 6.2.9. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2,n}$ que possui matrizes geradora e de Gram, respectivamente,

$$M_{l,2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2l \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo $M_{l,2n}$ e $G_{l,2n}$ em blocos, temos que

$$M_{l,2n} = \begin{pmatrix} M_{l,2n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2n} = \begin{pmatrix} G_{l,2n-1} & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores do tipo $(a_1, 0, \dots, 0)M_{l,2n}$ em \mathbb{R}^n que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $2l$. Então, a bola do Tipo 1 é definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r &= \{(a_1, 0, \dots, 0)M_{l,2n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, 0, \dots, 0)G_{l,2n}(a_1, 0, \dots, 0)^T \leq r^2 < 2l \\ &\text{ e } (a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Os elementos da bola do Tipo 1 possuem apenas a primeira coordenada não-nula, uma vez que para $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,2n}$, em que $a_k \neq 0, \forall k \in \{2, \dots, n-1\}$, temos que $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)G_{l,2n}(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^T \geq 2la_k^2 \geq 2l, \forall k \in \{2, \dots, n-1\}$. Então, $\mathbf{x} \notin \tilde{B}_r$.

Teorema 6.2.10. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2n}$ descrito no Exemplo

$$6.2.9, \Lambda_{l,2n} \subset \Lambda_{a,l,2n} \text{ gerado pela matriz } N_{l,2n} = \begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2l} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{2l} \end{pmatrix}, \text{ em que}$$

$k = 2p + 1$ e $p \in \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{l} \rfloor\}$. Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2n}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2n}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,2n}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (1, 1, 0, \dots, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n .

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.1 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,2}$ gerado por $N_{l,2}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm p\mathbf{u}\}$ e $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,2}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.2.1, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n . \square

Exemplo 6.2.11. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2n}$, que possui matrizes geradora $M_{l,2n}$ e de Gram $G_{l,2n}$, tais que

$$M_{l,2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8l} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{8l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8l & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 8l \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo $M_{l,2n}$ e $G_{l,2n}$ em blocos, temos que

$$M_{l,2n} = \begin{pmatrix} M_{l,2n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix} \text{ e } G_{l,2n} = \begin{pmatrix} G_{l,2n-1} & 0 \\ 0 & 8l \end{pmatrix},$$

em que $M_{l,2n-1}$ é uma matriz geradora para $\Lambda_{a,l,2n-1}$ e $G_{l,2n-1}$ é a matriz de Gram associada a $M_{l,2n-1}$. Neste caso, a bola do Tipo 1 é composta por todos os vetores do tipo $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,2n}$ em \mathbb{R}^n que possuem norma ao quadrado estritamente menor do que $8l$. Assim, a bola do Tipo 1 é definida como:

$$\tilde{B}_r = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)M_{l,2n} \in \mathbb{R}^n : (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)G_{l,2n}(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^T \leq r^2 < 8l \\ \text{ e } (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Teorema 6.2.12. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, considere o reticulado $\Lambda_{a,l,2n}$ descrito no Exemplo 6.2.11 e $\Lambda_{l,2n} \subset \Lambda_{a,l,2n}$ gerado pela seguinte matriz:

$$N_{l,2n} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 - \sqrt{l} & \alpha + \beta + 1 + \sqrt{l} & 0 & \dots & 0 \\ 2\beta + 1 + 2\sqrt{l} & 2\beta + 1 - 2\sqrt{l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{8l} \end{pmatrix},$$

em que $0 \leq \beta \leq \alpha$. Reescrevendo $N_{l,2n}$ em blocos, temos que

$$N_{l,2n} = \begin{pmatrix} N_{l,2n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{8l} \end{pmatrix}.$$

Considere também $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2n}} + \mathcal{T}$, em que $\mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2n}}$ é a região de Voronoi de $\Lambda_{a,l,2n}$, $\mathcal{T} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1, 0, \dots, 0)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{l}, -\sqrt{l}, 0, \dots, 0)$. Temos que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n .

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.5 temos que para o reticulado $\Lambda_{l,2}$ gerado por $N_{l,2}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\Lambda_{a,l,2}} + \hat{\mathcal{T}}$, em que $\hat{\mathcal{T}} = \{0, \pm \mathbf{u}, \dots, \pm \alpha \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}), \dots, \pm(\mathbf{v} \pm \beta \mathbf{u})\}$, $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{l}, -\sqrt{l})$, $\hat{\mathcal{T}}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para $\Lambda_{a,l,2}$ e, conseqüentemente, $\hat{\mathcal{R}}$ é um $\Lambda_{l,2}$ -ladrilho para \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Lema 6.2.1, segue que \mathcal{R} é um $\Lambda_{l,2n}$ -ladrilho para \mathbb{R}^n . \square

Corolário 6.2.13. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,n}$. Temos que $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$.

Demonstração. Pelos Teoremas 5.2.2, 5.2.9 e 5.2.11, o número de raios para os quais temos códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em $\Lambda_{a,l,1}$ é $\lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. Pelos Teoremas 6.2.10 e 6.2.12, todos os códigos perfeitos dos tipos 1 e 2 em $\Lambda_{a,l,1}$ são códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,n}$. Logo, $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. \square

Corolário 6.2.14. Para $l \equiv 2 \pmod{4}$, seja m o número de raios para os quais existem códigos perfeitos do Tipo 1 em $\Lambda_{a,l,n}$. Se $l \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pelo Corolário 6.2.13, $m \geq \lfloor \sqrt{l} \rfloor + \lfloor \sqrt{3l} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{l} \rfloor - \lfloor \sqrt{l} \rfloor$. Então, se $l \rightarrow \infty$, segue que $m \rightarrow \infty$. \square

Podemos observar que, tanto para $-l \equiv 1 \pmod{4}$ quanto para $l \equiv 2 \pmod{4}$, $\Lambda_{a,l,n}$ sempre possui códigos perfeitos e, quanto maior o valor de l , mais códigos perfeitos encontraremos. Com isso, construímos duas famílias de reticulados n -dimensionais com uma quantidade significativa de códigos perfeitos.

7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser divididos em três tópicos: ladrilhamentos em espaços ambientes gerais, códigos perfeitos em diversos reticulados ambientes e o estudo de alguns formatos de ladrilhos de duas famílias de reticulados algébricos em diversas dimensões.

No primeiro tópico estudamos os conceitos básicos de ladrilhamento nas versões contínua e discreta. Fornecemos um resultado que relaciona essas duas versões e apresentamos diferentes caracterizações de ladrilhamento, que utilizam isomorfismo de grupo e a transformada de Fourier. Por fim, apresentamos estudos de caso que usam a caracterização de ladrilhamento via transformada de Fourier, mostrando como essa caracterização pode ser útil tanto na demonstração de que um conjunto discreto \mathcal{T} é um Λ -ladrilho para um reticulado ambiente Λ_a quanto para excluir possibilidades de Λ -ladrilhos para um reticulado ambiente fixado. Enfatizamos que um dos exemplos apresentados é uma releitura de um resultado conhecido e apresentado por Golomb e Welch em [1].

No segundo tópico do nosso trabalho, estudamos códigos perfeitos. Tomando como base alguns limitantes apresentados em [10] e [11] para a existência de códigos perfeitos no reticulado ambiente \mathbb{Z}^n na métrica l_p , estendemos esses limitantes para reticulados ambientes gerais, considerando a métrica euclidiana, e apresentamos novos limitantes que se comportam de forma mais acurada quando comparado aos anteriormente conhecidos. Ainda nesse tópico, usando uma das caracterizações de ladrilhamento aqui estudadas, enumeramos todos os códigos perfeitos nos reticulados ambientes A_2 , D_3 , D_3^* , e de alguns representantes de duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais construídos no Capítulo 1 via homomorfismo de Minkowski.

No terceiro tópico, usando como base as duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais estudadas, analisamos alguns tipos de ladrilhos encontrados e, observando suas formas e características, concluímos que, para essas famílias específicas, sempre encontraremos códigos perfeitos. E por fim, mergulhamos essas famílias em dimensões maiores, e provamos que para essas famílias de reticulados n -dimensionais, sempre teremos códigos perfeitos.

Como perspectivas para trabalhos futuros destacamos:

- estudar como se comportam os poliprismas do Tipo 2 em dimensões maiores;
- generalizar para a métrica l_p resultados e limitantes encontrados para a existência de códigos perfeitos em reticulados ambientes gerais;

- explorar a conexão entre códigos perfeitos em um reticulado ambiente geral Λ_a e códigos perfeitos em ambientes finitos, considerando o toro Λ_a/Λ ;
- mergulhar as famílias de reticulados algébricos estudadas em dimensões maiores de forma não-ortogonal (reticulados laminados).

Referências

- [1] S. W. Golomb and L. R. Welch, “Perfect codes in the Lee metric and the packing of polyominoes,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 18, p. 302–317, 1970.
- [2] C. Qureshi, A. Campello, and S. I. R. Costa, “Non-existence of linear perfect Lee codes with radius 2 for infinitely many dimensions,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, pp. 3042–3047, 2018.
- [3] D. Kim, “Nonexistence of perfect 2-error-correcting Lee codes in certain dimensions,” *European Journal of Combinatorics*, vol. 63, pp. 1–5, 2017.
- [4] T. Etzion, A. Vardy, and E. Yaakobi, “Dense error-correcting codes in the Lee metric,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, p. 302–317, 2010.
- [5] P. Horak and B. F. AlBdaiwi, “Diameter perfect Lee codes,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, p. 5490–5499, 2012.
- [6] C. Araujo, I. Dejter, and P. Horak, “A generalization of Lee codes,” *Designs, Codes and Cryptography*, vol. 70, pp. 77–90, 2014.
- [7] M. Livingston and Q. F. Stout, “Perfect dominating sets,” *Congr. Numer.* 79, pp. 187–203, 1990.
- [8] I. Dejter, L. Fuentes, and C. Araujo, “There is but one pds in \mathbb{Z}^3 inducing just square components,” *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, vol. 82, pp. 2–13, 2018.
- [9] C. Araujo and I. Dejter, “Lattice-like total perfect codes,” *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, vol. 34, pp. 57–74, 2014.
- [10] J. E. Strapasson, G. C. Jorge, A. Campello, and S. I. R. Costa, “Quasi-perfect codes in the l_p metric,” *Computational and Applied Mathematics*, vol. 37, pp. 852–866, 2018.
- [11] A. Campello, G. C. Jorge, J. E. Strapasson, and S. I. R. Costa, “Perfect codes in the l_p metric,” *European Journal of Combinatorics*, vol. 53, pp. 72–85, 2016.
- [12] J. C. Lagarias and Y. Wang, “Integral self-affine tiles in \mathbb{R}^n i. standard and nonstandard digit sets,” *London Math. Soc.*, vol. 54, pp. 161–179, 1996.
- [13] J. C. Lagarias and Y. Wang, “Integral self-affine tiles in \mathbb{R}^n part ii. lattice tilings,” *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 3, pp. 83–102, 1997.

-
- [14] M. Kolountzakis, “Lattice tilings by cubes: Whole, notched and extended’,” *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 5, no. R14, 1998.
- [15] L. Sok, J. Belfiore, P. Solé, and A. Tchamkerten, “Lattice codes for deletion and repetition channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, pp. 1595–1603, 2018.
- [16] M. Kovacevic, “Codes in A_n lattices: Geometry of B_h sets and difference sets,” 2019.
- [17] S. I. R. Costa, M. Muniz, E. Agustini, and R. Palazzo, “Graphs, tessellations, and perfect codes on flat tori,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, pp. 2363–2377, 2004.
- [18] G. Strey, A. Campello, J. E. Strapasson, and S. I. R. Costa, “Perfect codes in Euclidean lattices: Bounds and case studies,” *2019 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pp. 1607–1611, 2019.
- [19] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York: Springer Verlag, 3 ed., 1998.
- [20] E. Strey, *Construções de reticulados a partir de códigos q -ários*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2017.
- [21] C. Lavor, M. Alves, R. Siqueira, and S. Costa, *Uma introdução à teoria de códigos*. SBMAC, 2006.
- [22] G. C. Jorge, *Reticulados q -ários e algébricos*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2012.
- [23] S. I. R. Costa, F. Oggier, A. Campello, J. Belfiore, and E. Viterbo, *Lattices Applied to Coding for Reliable and Secure Communications*. Springer, 2017.
- [24] A. Campello, *Reticulados, projeções e aplicações à teoria da informação*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2014.
- [25] P. Samuel, *Algebraic Theory of Numbers*. Paris: Hermann, 1970.
- [26] C. A. Rogers, *Packing and Covering*. Cambridge University Press, 1964.
- [27] H. Cohn and A. Kumar, “Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices,” *Annals of Mathematics*, vol. 170, pp. 1003–1050, 2009.
- [28] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska, “The sphere packing problem in dimension 24,” *Annals of Mathematics*, vol. 185, pp. 1017–1033, 2017.

-
- [29] G. R. A. S. Strey, “A série teta e a função de sigilo de um reticulado,” dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2016.
- [30] A. Gonçalves, *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 5 ed., 2008.
- [31] I. N. Stewart and D. O. Tall, *Algebraic Number Theory*. London: Chapman and Hall, 1987.
- [32] G. C. Jorge, “Reticulados ideais via corpos abelianos,” dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2008.
- [33] C. W. O. Benedito, “Famílias de reticulados algébricos e reticulados ideais,” dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2010.
- [34] U. Fincke and M. Pohst, “Improved methods for calculating vectors of shorts length in a lattices, including a complexity analysis,” *Mathematics of Computations*, vol. 44, pp. 463–471, 1985.