UNICAMP

Alysson Tobias Ribeiro da Cunha

O problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ALYSSON TOBIAS RIBEIRO DA CUNHA

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DE BENJAMIN-ONO-ZAKHAROV-KUZNETSOV

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO ALYSSON TOBIAS RIBEIRO DA CUNHA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ADEMIR PASTOR FERREIRA.

Assinatura do Orientador

Ademir Pastor

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C914p Cunha, Alysson Tobias Ribeiro, 1976-
O problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov / Alysson Tobias Ribeiro da Cunha. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cauchy, Problemas de. 2. Equações diferenciais parciais não-lineares. 3. Sobolev, Espaço de. I. Ferreira, Ademir Pastor,1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Cauchy problem for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation
Palavras-chave em inglês:
Cauchy problems
Nonlinear partial differential equations
Sobolev spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Ademir Pastor Ferreira [Orientador]
Mahendra Prasad Panthee
Márcia Assumpção Guimarães Scialom
José Felipe Linares Ramires
Adán José Corcho Fernández
Data de defesa: 14-03-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de março de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE

Prof(a). Dr(a). MÁRCIA ASSUMPÇÃO GUIMARÃES SCIALOM

Prof(a). Dr(a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ

Prof(a). Dr(a). ADÁN JOSÉ CORCHO FERNÁNDEZ

Abstract

In the present work we discuss the local well posedness and unique continuation principles for the Initial Value Problem (IVP) associated to the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK) equation

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

In the first step, we use the *parabolic regularization* tecnics to show the local well posednes in usual Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$, where $s > 2$ and in the anisotropic Sobolev spaces $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, where $s_2 > 2$ and $s_1 \geq s_2$. We also study the local well posedness in the Sobolev spaces with integer weights $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1+x^2+y^2)^r dxdy)$, $s = 2r$, $r \in \mathbb{N}$. To do this we use the papers of Iorio [27] and Milanés [38]. In the following, we improved our previous results, through the ideas of Fonseca and Ponce [17], studying the local well posedness in Sobolev spaces with fractional weights, $s \geq 2r$, $r \in \mathbb{R}$.

We also prove some unique continuation principles, that, how in [17], demonstrate that our results of local well posedness are *sharp*. We obtain the local well posedness in Sobolev spaces with anisotropic weights $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1+x^{2r}+y^{2k})dxdy)$, where $s > 2\max\{1, r, k\}$ and $r = 0, 1, 2$. To do this we use [38].

Finally, following the work of Koch and Tzvetkov [34], we use Strichartz estimates and the Littlewood-Paley theory to get the local well posedness in $H^s(\mathbb{R}^2)$, where $s > 11/8$.

Keywords: Local well posedness, Unique continuation principles, Littlewood-Paley theory.

Resumo

No presente trabalho nós abordamos a boa colocação local e princípios de continuação única para o Problema de Valor Inicial (PVI) associado à equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como primeiro passo, usamos as técnicas de *regularização parabólica* para mostrar boa colocação local nos espaços de Sobolev usuais $H^s(\mathbb{R}^2)$, onde $s > 2$ e nos espaços de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, onde $s_2 > 2$ e $s_1 \geq s_2$. Estudamos também a boa colocação nos espaços de Sobolev com pesos inteiros $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1+x^2+y^2)^r dxdy)$, $s = 2r$, $r \in \mathbb{N}$. Para isto nos baseamos em [27] e [38]. Em seguida, melhoramos o resultado anterior, através das idéias contidas em [17], estudando a boa colocação local em espaços de Sobolev com pesos fracionários, $s \geq 2r$, $r \in \mathbb{R}$. Provamos também alguns princípios de continuação única, os quais, como em [17], garantem que nossos resultados de boa colocação local em espaços com peso são *sharp*. Obtemos a boa colocação nos espaços de Sobolev com pesos anisotrópicos $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^{2r} + y^{2k})dxdy)$, onde $s > 2\max\{1, r, k\}$ e $r = 0, 1, 2$. Para isto usamos [38].

Finalmente, seguindo o trabalho de Koch e Tzvetkov (veja [34]), usamos estimativas do tipo Strichartz e a teoria de Littlewood-Paley para obtermos a boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 11/8$.

Palavras-chave: Boa colocação local, Princípios de continuação única, Teoria de Littlewood-Paley.

Conteúdo

aos meus pais Luiza e Tobias,
e à memória de minha avó Domiciana.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Ademir Pastor Ferreira, pela escolha do tema, e por sua dedicação e paciência durante o trabalho de orientação.

Aos Professores, Mahendra Prasad Panthee, Márcia Assumpção Guimarães Scialom, José Felipe Linares Ramirez e Adán José Corchó Fernández por terem aceitado o convite de participarem da banca, além de suas valiosas sugestões.

Ao Prof. Eduardo Arbieto Alarcon, meu orientador de mestrado, pelo apoio e incentivo a continuar os estudos.

Aos colegas de república, Rafael, Maicon e Carlos (o autarquia), pelas conversas sobre Matemática e pela grande amizade.

Aos colegas de doutorado, Thiago Pinguelo, Débora, Thiago Alves, Ana Paula e Ailton, pelo agradável papo durante do café.

Aos colegas de doutorado, Lidiane, Wender, Adriana e Claúdia, companheiros na resolução dos exercícios de qualificação.

Aos meus irmãos, Jalles e Jefferson, que sempre estiveram do meu lado.

Ao Júnior, pela ajuda na formatação deste trabalho.

Aos funcionários da secretaria do IMECC, pela eficiência no atendimento.

À Universidade Federal de Goiás-Campus Jataí, pela licença para cursar o doutorado.

Peço desculpas se esqueci alguém.

Introdução

Equações diferenciais parciais modelam fenômenos provenientes de ciências como a física, química, biologia, economia, etc. Por isso, o estudo de suas soluções é importante na medida em que podemos compreender melhor a natureza de tais fenômenos.

É de grande importância neste cenário, as equações do tipo *dispersivas*, que estão sendo cada vez mais estudadas, ao longo dos anos. Destacaremos a seguir as mais importantes.

1) Equação de Korteweg-de-Vries (KdV)

$$u_t + \partial_x^3 u + u u_x = 0,\ t, x \in \mathbb{R},$$

esta equação modela a propagação de ondas em águas rasas, e foi deduzida em [35].

2) Equação de Schrödinger

$$iu_t + \Delta u + |u|^p u = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

que tem importância fundamental em mecânica quântica.

3) Equação de Benjamin-Ono (BO)

$$u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u u_x = 0, x, t \in \mathbb{R},$$

onde o símbolo $\mathcal{H}$ denota a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}u(t,x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y-x| \geq \epsilon} \frac{u(t,y)}{y-x} dy \text{ q.t.p.}$$

Esta equação descreve o comportamento de ondas unidimensionais internas em águas profundas. Sua dedução pode ser encontrada em [2] e [42]. Para ressaltar uma diferença entre essas equações, as duas primeiras podem ser resolvidas pelo Teorema do ponto fixo de Banach, no entanto o mesmo não vale para a última.

Em EDP's, o conceito de boa colocação é fundamental. A seguir, definimos este conceito. Sejam X e Y espaços de Banach, considere o PVI

$$\begin{cases} u_t = G(t, u(t)) \in X, \ t \in [0, \tilde{T}], \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde $G : [0, \tilde{T}] \times Y \to X$ é contínua. Diremos que (0.0.1) é localmente bem colocado se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) Existência de solução: Existe $T \in [0, \tilde{T}]$ e uma aplicação $u \in C([0; T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - G(t, u(t)) \right\|_X = 0;$$

2) Unicidade: Existe no máximo uma solução de (0.0.1) em $C([0; T]; Y)$;

3) Dependência contínua: A aplicação $\phi \in Y \mapsto u \in C([0; T]; Y)$ é contínua. Mais precisamente dados $\phi \in Y$, $u(0) = \phi$, $u \in C([0, T]; Y)$, $u_n(0) = \phi_n$, $u_n \in C([0, T_n]; Y)$, se $\phi_n \to \phi$, então as u_n podem ser extendidas ao intervalo $[0, T]$ para n suficientemente grande e

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0,T]} \| u_n(t) - u(t) \|_Y = 0.$$

Observe que nesta definição está implícita a propriedade de *persistência* da solução, isto é, se $\phi \in Y$, então $u(t) \in Y$, $\forall t \in [0, T]$. Diremos que (0.0.1) é globalmente bem colocado se 1)–3) forem satisfeitos para $T > 0$ arbitrário.

Também são abordadas questões como a continuação única. O primeiro autor a trabalhar com estas propriedades foi Carleman em [7], que provou um teorema de unicidade para uma classe de equações lineares, usando estimativas com peso (atualmente chamadas estimativas do tipo Carleman). Mais tarde, Saut e Scheurer, em [44], também abordaram este conceito. Mais precisamente, eles mostraram que se u é uma solução suficientemente suave da KdV tal que supp $u(t) \subset (a, b)$, $\forall t \in (\tau_1, \tau_2)$, então $u \equiv 0$. Para isto eles usaram estimativas do tipo Carleman.

A BO tem sido extensivamente estudada por diversos autores ao longo dos anos, onde são abordadas questões de boa colocação local e global em espaços de Sobolev H^s, bem como o decaimento da solução quando a variável espacial tende a infinito. Com relação à boa colocação em $H^s(\mathbb{R})$ podemos citar os trabalhos de Abdelouhad, Bona, Felland, Saut [1] e Iório [27] que obtiveram a boa colocação local para $s > 3/2$. Outros autores trabalharam no sentido de melhorar os resultados anteriores, entre eles podemos citar Ponce [43] ($s \geq 3/2$, global), Koch e Tzvetkov

[34] ($s > 5/4$, local), Kenig e Koenig [33] ($s > 9/8$, local), Tao [48] ($s \geq 1$, global), Burq e Planchon [5] ($s > 1/4$, local), Ionescu e Kenig [24] ($s \geq 0$, global), e finalmente, Molinet e Pilod [39].

Com relação ao decaimento da solução, podemos citar [26], no qual é provada a boa colocação no espaço $H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_\gamma(\mathbb{R})$, onde $\gamma \in [0,1]$ e $L^2_\gamma(\mathbb{R}) = L^2((1+x^2)^\gamma dx)$. Em [27] Iório também obteve um princípio de continuação única para a BO. Mais precisamente, se para todo $t \in [0,T]$ a solução $u(t)$ é suficientemente suave ($u(t) \in H^4(\mathbb{R})$) e decai suficientemente rápido quando $|x| \to \infty$ ($u(t) \in L^2_4(\mathbb{R})$), então $u \equiv 0$. Em [25] Iório melhorou consideravelmente este resultado, provando que se para três tempos distintos $t_j,\ j = 1,2,3,\ u(t_j) \in H^4(\mathbb{R}) \cap L^2_4(\mathbb{R})$, então $u \equiv 0$. A partir deste ponto é natural se perguntar: É possível obter um limite inferior para a suavidade e o decaimento, de modo que a solução ainda se anule? Recentemente Fonseca e Ponce em [17], responderam esta pergunta. Usando técnicas de Análise Harmônica, tais como a derivada de Stein, a transformada de Hilbert em espaços com peso e estimativas para o comutador de Calderón, eles obtiveram um resultado *sharp* para a continuação única, que pode ser assim enunciado: Se para três tempos distintos $t_j,\ j = 1,2,3,\ u(t_j) \in H^{7/2}(\mathbb{R}) \cap L^2_{7/2}(\mathbb{R})$, então $u \equiv 0$. Nos trabalhos de Iório, Fonseca e Ponce é fundamental o uso da descontinuidade do símbolo $\mathrm{sgn}(\xi)$ da transformada de Hilbert.

Em nosso texto, abordamos as questões de boa colocação local e decaimento para o problema de Cauchy associado à equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esta equação tem aplicações no fenômeno de eletromigração em nanocondutores finos em um susbstrato dielétrico e sua dedução pode ser vista em [36]. Não existem muitos trabalhos sobre esta equação até o momento. Os principais resultados já existentes na literatura são devidos a Esfahani e Pastor, os quais discutimos a seguir. O estudo de existência e estabilidade/instabilidade de ondas solitárias pode ser encontrado em [13] e [14]. Esfahani e Pastor em [12] obtiveram um princípio de continuação única para a BO-ZK, mais precisamente eles mostraram que se u é uma solução suficientemente suave tal que

$$\mathrm{supp}\ u(t) \subseteq [-B,B] \times [-B,B],\ B > 0, \forall t \in [-T,T],$$

então

$$u \equiv 0.$$

Em [11] Esfahani e Pastor mostraram que a aplicação dado-solução $\phi \mapsto u$ nos espaços de Sobolev anisotrópicos não é de classe C^2. Portanto a BO-ZK não pode ser resolvida utilizando o Teorema do ponto fixo de Banach.

Em nosso estudo da BO-ZK, em espaços de Sobolev usuais, utilizamos o método de *regularização parabólica* que basicamente consiste em considerar o PVI regularizado

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = \mu\Delta u, \ t \geq 0, \ \mu > 0, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

que pode ser resolvido pelo Teorema do ponto fixo de Banach. Em seguida, estudamos o limite da solução u_μ quando $\mu \downarrow 0$. Neste estudo, é fundamental estender a solução de (0.0.2) definida num intervalo $[0, T_\mu]$ para um intervalo $[0, T_s]$, onde T_s é independente de μ. Para fazer isto usamos a desigualdade para o comutador de Kato-Ponce, veja o Lema X1 de [31]. Também estudamos a solução em espaços de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, onde $s_1 > 2, s_1 \geq s_2$. Para este estudo, novamente usamos o método de *regularização parabólica* e o comutador de Kato-Ponce. Neste caso, para a estimativa do termo não-linear fixamos uma das variáveis x ou y e pensamos em u como função de uma variável espacial.

Em [38], Milanés estudou a seguinte versão bidimensional da equação de Benjamin-Ono

$$u_t - \mathcal{H}u_{xy} + u^p u_y = 0, \ p \in \mathbb{N},$$

obtendo boa colocação nos espaços de Sobolev com pesos anisotrópicos $\mathcal{F}_{1,k}^k = H^k(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1+x^2+y^{2k})dxdy), \ k \geq 3$, bem como nos espaços da forma $H^s(w^2) = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(w^2 dxdy), \ s > 2$, onde w é uma função com derivadas parciais de primeira até segunda ordem limitadas. Em nosso trabalho com a BO-ZK também exploramos as idéias de Milanés, exceto que neste caso a presença do termo de terceira ordem ∂_{xyy}^3 nos conduz a estimativas um pouco diferentes. Mais precisamente obtivemos boa colocação local nos espaços com pesos anisotrópicos $\mathcal{Z}_{r,k}^s = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^{2r} + y^{2k})dxdy)$, onde $s > 2\max\{1, r, k\}$, $r = 0, 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$. Também mostramos boa colocação local nos espaços da forma $H^s(w^2)$, onde w é uma função com as derivadas de primeira até terceira ordem limitadas e $s > 2$.

Através das idéias de Fonseca e Ponce [17] obtemos a boa colocação nos espaços com pesos fracionários $\mathcal{Z}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^{2r} + y^{2r})dxdy)$ onde $1 \leq r < 5/2$ e $s \geq 2r$, assim como nos espaços de funções com média zero $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r} = \{f \in \mathcal{Z}_{s,r} : \hat{f}(0, \eta) = 0, \forall \ \eta \in \mathbb{R}\}$, onde $5/2 \leq r < 7/2$ e $s \geq 2r$. Também, tendo em vista [17] mostramos que se para dois tempos distintos $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, $j = 1, 2$, então $\hat{u}(t, 0, \eta) = 0$, $\forall t \in [0, T]$, $\eta \in \mathbb{R}$. Mostramos ainda que se para três tempos distintos $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{7,7/2}$, $j = 1, 2, 3$ então $u \equiv 0$. As duas últimas propriedades garantem que os nossos resultados de boa colocação nos espaços com pesos fracionários são *sharp*.

O nosso trabalho está organizado da seguinte forma. Nas preliminares obordaremos as principais ferramentas utilizadas durante o texto, tais como alguns elementos de Análise Harmônica, comutador de Kato-Ponce, transformada de Hilbert, etc. No Capítulo 2, estudamos a equação em espaços de Sobolev usuais, obtendo boa colocação para $s > 2$, bem como nos espaços de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$. No Capítulo 3, estudamos o decaimento da solução quando $|(x,y)|\to \infty$, em espaços de Sobolev com pesos inteiros e fracionários. Ainda no Capítulo 3, estudamos a solução em espaços de Sobolev com pesos anisotrópicos. No Capítulo 4, obtemos os princípios de continuação única, primeiro seguindo os argumentos de Iório, e em seguida utilizando a abordagem de Fonseca e Ponce. Finalmente no Capítulo 5, seguindo as idéias de [34] melhoramos nosso resultado obtido no Capítulo 2, conseguindo boa colocação para $s > 11/8$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os principais resultados que serão usados no restante do texto. Usaremos c para denotar as várias constantes que aparecerão, e se necessário, usaremos um índice subscrito para indicar a dependência dos parâmetros. Por $\|\cdot\|_p$ denotaremos a norma usual em L^p. Por simplicidade a norma em L^2 será denotada por $\|\cdot\|$ e o produto escalar será representado por $(\cdot,\cdot)$. Em particular, note que se $f = f(x,y)$ então $\|f\| = \|\|f(\cdot,y)\|_{L^2_x}\|_{L^2_y}$, onde $\|\cdot\|_{L^2_z}$ significa a norma L^2_z com respeito à variável z. A transformada de Fourier de f será definida por

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi+y\eta)} f(x,y)dxdy.$$

Seja $z \in \mathbb{C}$, então definimos os operadores J_x^z, J_y^z e J^z via transformada de Fourier por

$$\widehat{J_x^z f}(\xi,\eta) = (1+\xi^2)^{z/2}\hat{f}(\xi,\eta),$$

$$\widehat{J_y^z f}(\xi,\eta) = (1+\eta^2)^{z/2}\hat{f}(\xi,\eta),$$

e

$$\widehat{J^z f}(\xi,\eta) = (1+\xi^2+\eta^2)^{z/2}\hat{f}(\xi,\eta).$$

A seguir, definimos os espaços nos quais trabalhamos.

Sejam $\langle x,y\rangle := (1+x^2+y^2)^{1/2}$ e considere o espaço $L^2_r := L^2(\langle x,y\rangle^{2r}dxdy)$ com norma

$$\|f\|_{L^2_r} = \|\langle x,y\rangle^r f\|.$$

Então o espaço de Sobolev com peso será denotado por

$$\mathcal{Z}_{s,r} := H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2_r.$$

A norma em $\mathcal{Z}_{s,r}$ é dada por $\|\cdot\|_{s,r}^2 = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}_{s,r}}^2 := \|\cdot\|_{H^s}^2 + \|\cdot\|_{L_r^2}^2$. Além disso, o subspaço $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$ é definido como

$$\dot{\mathcal{Z}}_{s,r} := \{f \in \mathcal{Z}_{s,r}(\mathbb{R}^2) \mid \hat{f}(0,\eta) = 0,\ \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha que $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$ e seja u uma solução local de (2.1.1) definida em $[0,T]$. Assumindo que u é suficientemente regular, podemos integrar a BO-ZK com respeito a x e obter

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dx, \quad y \in \mathbb{R} \tag{1.0.1}$$

para todo tempo t no qual a solução existe. Isto implica que

$$\hat{u}(t,0,\eta) = \hat{\phi}(0,\eta), \forall \eta \in \mathbb{R}, t \in [0,T]. \tag{1.0.2}$$

Em particular, se $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$, então $\hat{u}(t,0,\eta) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$.

A seguir, introduziremos alguns resultados preliminares que serão úteis nos próximos capítulos.

Definição 1.0.1. Dizemos que uma função não negativa $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ satisfaz a condição A_p com $1 < p < \infty$, se

$$\sup_{Q \text{ intervalo}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} = c(w) < \infty, \tag{1.0.3}$$

onde $1/p + 1/p' = 1$.

Como os nossos resultados são relacionados a espaços com peso, precisamos saber como a transformada de Hilbert se comporta nestes espaços. O próximo resultado será útil nesta direção.

Teorema 1.0.2. A condição (1.0.3) é necessária e suficiente para a limitação da transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ em $L^p(w(x)dx)$, i.e.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{H}f|^p w(x)dx\right)^{1/p} \leq c^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p w(x)dx\right)^{1/p}. \tag{1.0.4}$$

Demonstração. Veja [23]. □

Observação 1.0.3. Não é difícil verificar que $|x|^\alpha$ satisfaz a condição A_2 em (1.0.3) se, e só se, $\alpha \in (-1,1)$. De modo geral, $|x|^\alpha$ satisfaz a condição A_p se, e só se, $\alpha \in (-1, p-1)$ (veja [17]).

Os próximos três resultados serão amplamente usados na prova do Teorema 3.2.4.

Teorema 1.0.4. Para $p \in [2,\infty)$ a desigualdade (1.0.4) é verdadeira com $c^* \leq c(p)c(w)$, onde $c(p)$ depende apenas de p e $c(w)$ é como em (1.0.3). Além disso, para $p = 2$ esta estimativa é *sharp*.

Demonstração. Veja a prova em [29]. □

O próximo Teorema é uma generalização para a estimativa do comutador de Calderón, veja [6]. Sua prova pode ser encontrada em [9]. Além disso ele tem aplicações em diversos modelos dispersivos.

Teorema 1.0.5. Para todo $p \in (1, \infty)$ e $l, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $l + m \geq 1$, existe $c = c(p; l; m) > 0$ tal que

$$\|\partial_x^l [\mathcal{H}; a] \partial_x^m f\|_p \leq c \|\partial_x^{l+m} a\|_\infty \|f\|_p. \tag{1.0.5}$$

Defina $W_s^p := (1 - \Delta)^{-s/2} L^p(\mathbb{R}^n)$. Estes espaços podem ser caracterizados pelo seguinte resultado.

Teorema 1.0.6. Sejam $b \in (0, 1)$ e $2n/(n + 2b) < p < \infty$. Então $f \in W_b^p(\mathbb{R}^n)$, se e só se

a) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

b) $\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2b}} dy \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{b,p} \equiv \|(1 - \Delta)^{b/2} f\|_p = \|J^b f\|_p \simeq \|f\|_p + \|D^b f\|_p \simeq \|f\|_p + \|\mathcal{D}^b f\|_p, \tag{1.0.6}$$

onde, para $s \in \mathbb{R}$,

$$D^s = (-\Delta)^{s/2} \text{ com } D^s = (\mathcal{H} \partial_x)^s, \text{ se } n = 1.$$

Demonstração. Veja [47]. □

Observação 1.0.7. O operador $\mathcal{D}^b$ introduzido no Teorema 1.0.6 é as vezes chamado de derivada de Stein de ordem b. A última equivalência em (1.0.6) nos diz que podemos computar a norma em W_b^p usando D^b ou $\mathcal{D}^b$. A vantagem no uso do operador $\mathcal{D}^b$ está na obtenção de estimativas pontuais.

Usando $p = 2$, $b \in (0, 1)$ e o ítem b) do Teorema 1.0.6, podemos obter

$$\|\mathcal{D}^b (fg)\| \leq \|f \mathcal{D}^b g\| + \|g \mathcal{D}^b f\|. \tag{1.0.7}$$

Proposição 1.0.8. Para todo $b \in (0, 1)$ e $t > 0$ tem-se

$$\mathcal{D}^b (e^{-itx|x|}) \leq c(t^{b/2} + t^b |x|^b). \tag{1.0.8}$$

Demonstração. Veja [41]. □

Temos também a seguinte estimativa.

Lema 1.0.9. Para todo $b \in (0,1)$, $t > 0$ e $\eta \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2 x}) \leq c(b)\eta^{2b}t^b,$$

onde $c(b)$ depende apenas de b.

Demonstração. Primeiro note que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2 x})]^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\eta^2 x} - e^{it\eta^2 y}|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\eta^2 x} - e^{it\eta^2 (x-y)}|^2}{|y|^{1+2b}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{-it\eta^2 y}|^2}{|y|^{1+2b}} dy \\
&= (\eta^2 t)^{2b} \int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}} dy \\
&= (\eta^2 t)^{2b} \left(\int_{-1}^{1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}} dy + \int_{|y|>1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}} dy \right).
\end{aligned}$$

Da desigualdade $|1 - e^{iy}| \leq 2|y|, \forall y \in [-1,1]$, temos

$$\int_{-1}^{1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}} dy \leq 2 \int_{-1}^{1} \frac{dy}{|y|^{2b-1}} = 4 \int_0^1 \frac{dy}{y^{2b-1}} = \frac{2}{1-b}.$$

Além disso,

$$\int_{|y|>1} \frac{dy}{|y|^{1+2b}} = 2 \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{1+2b}} = \frac{2}{b}.$$

Portanto,

$$\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2 x}) \leq \left(\frac{2}{1-b} + \frac{2}{b} \right)^{1/2} (\eta^2 t)^b.$$

Isto completa a prova do lema. □

A próxima proposição será usada na prova dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2.

Proposição 1.0.10. Seja $p \in (1,\infty)$. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ é tal que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ para o qual $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ estão definidos e $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$, então para todo $\delta > 0$, $\mathcal{D}^{1/p} f \notin L^p_{loc}(B(x_0,\delta))$ e consequentemente $f \notin W^p_{1/p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Veja [50]. □

Antes de enunciarmos o próximo resultado vamos definir os pesos truncados $w_N(x,y)$. Sejam $N \in Z^+$ e

$$\beta_N(x) = \begin{cases} \langle x \rangle \text{ se } |x| \leq N, \\ 2N \text{ se } |x| \geq 3N, \end{cases} \tag{1.0.9}$$

onde $\langle x \rangle = (1+x^2)^{1/2}$. Além disso, assumimos que β_N é suave e não-decrescente em $|x|$ com $\beta_N'(x) \leq 1$, para qualquer $x \geq 0$, e existe uma constante c independente de N tal que

$$|\beta_N''(x)| \leq c\partial_x^2 \langle x \rangle.$$

Então colocamos

$$w_N(x,y) = \beta_N(r), \qquad \text{onde} \quad r = (x^2+y^2)^{1/2}. \tag{1.0.10}$$

O próximo lema corresponde a um resultado de interpolação entre o espaço de Sobolev $H^a(\mathbb{R}^2)$ e o espaço com peso $L_b^2(\mathbb{R}^2)$.

Lema 1.0.11. Sejam $a, b > 0$. Assuma que $J^a f = (1-\Delta)^{a/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\langle x,y \rangle^b f = (1+x^2+y^2)^{b/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Então, para todo $\alpha \in (0,1)$

$$\| J^{\alpha a}(\langle x,y \rangle^{(1-\alpha)b} f) \| \leq c \| \langle x,y \rangle^b f \|^{1-\alpha} \| J^a f \|^{\alpha}. \tag{1.0.11}$$

Além disso, a desigualdade (1.0.11) permanece válida com $w_N(x,y)$ no lugar de $\langle x,y \rangle$, onde a constante c é independente de N.

Demonstração. A demonstração é similar ao Lema 1 de [17]. $\square$

O próximo resultado será usado na prova dos Teoremas 3.2.4, 4.2.1, e 4.2.2.

Proposição 1.0.12. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\phi \in H^2(\mathbb{R})$, então

$$\| [D^{1/2}; \phi] f \| \leq c \| \phi \|_{H^2} \| f \|. \tag{1.0.12}$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} ([D^{1/2}; \phi] f)^\wedge(\xi) &= (D^{1/2}(\phi f) - \phi D^{1/2} f)^\wedge(\xi) \\ &= \int (|\xi|^{1/2} - |\eta|^{1/2}) \hat{\phi}(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Como

$$||\xi|^{1/2} - |\eta|^{1/2}| \leq |\xi - \eta|^{1/2},$$

temos

$$\begin{aligned} |([D^{1/2};\phi]f)^\wedge(\xi)| &\leq \int |\xi-\eta|^{1/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)||\hat{f}(\eta)|d\eta \\ &= c(|D^{1/2}\phi| * |\hat{f}|)(\xi), \end{aligned}$$

daí, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \|([D^{1/2};\phi]f)^\wedge\| &\leq c\||\widehat{D^{1/2}\phi}| * |\hat{f}|\| \\ &\leq c\|\widehat{D^{1/2}\phi}\|_{L^1}\|\hat{f}\| \\ &\leq c\|\phi\|_{H^2}\|f\|. \end{aligned}$$

Onde acima usamos que

$$\|\widehat{D^{1/2}\phi}\|_{L^1} \leq \|D^{1/2}\phi\|_{H^1} \leq \|\phi\|_{H^2}.$$

□

O próximo resultado é conhecido como estimativa do comutador de Kato-Ponce (veja [31]) e será usado no Capítulo 1.

Teorema 1.0.13. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ e $1 < p < \infty$ então

$$\|[J^s, g]f\|_p \leq c(\|\nabla g\|_\infty \|J^{s-1}f\|_p + \|J^s g\|_p \|f\|_\infty),$$

onde $[J^s, g]$ denota o comutador entre os operadores J^s e o operador de multiplicação por g. A constate c anterior depende apenas de n, p e s.

Lema 1.0.14. Assumindo as hipóteses do último teorema temos que $W_s^p \cap L^\infty$ é uma álgebra e

$$\|J^s(fg)\|_p \leq c(\|J^s f\|_p \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|J^s g\|_p).$$

Usaremos o próximo resultado na prova da depêndencia contínua em $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Lema 1.0.15. Sejam $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ou $H^s(\mathbb{C}^n)$, $s > 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > n/2$. Então

$$\|[D^s, g]f\| \leq c(s,\gamma)(\|g\|_{H^s}\|f\|_\gamma + \|g\|_{\gamma+1}\|f\|_{H^{s-1}}).$$

Demonstração. Veja o Lema 1.1 de [46]. □

Capítulo 2

A teoria local em espaços de Sobolev

2.1 Espaços de Sobolev Isotrópicos

Neste capítulo, faremos uso da técnica de *regularização parabólica* (veja por exemplo [27] e [38]) para estabelecer a boa colocação local em espaços de Sobolev para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetzov. O principal objetivo aqui é demonstrar o Teorema 2.1.15.

Considere o problema de valor inicial associado à BO-ZK

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde $\mathcal{H}$ denota a transformada de Hilbert em relação à variável x

$$\mathcal{H}u(t,x,y) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|z-x| \geq \epsilon} \frac{u(t,z,y)}{z-x} dz \ \text{ q.t.p.}$$

Baseado no método de regularização parabólica, a idéia para obter soluções de (2.1.1) é considerar o seguinte PVI regularizado:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = \mu \Delta u, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

onde $\mu \geq 0$. Primeiramente vamos estudar o problema linear associado a (2.1.2), ou seja,

$$\begin{cases} v_t + \mathcal{H}\partial_x^2 v + v_{xyy} = \mu \Delta v \\ v(0,x,y) = \phi(x,y). \end{cases} \tag{2.1.3}$$

A solução de (2.1.2) é dada pelo operador

$$E_\mu(t)\phi = (F_\mu(t,\cdot,\cdot)\hat{\phi})^\vee, t \geq 0, \tag{2.1.4}$$

onde

$$F_\mu(t,\xi,\eta) = \exp(t(i\xi|\xi| + i\xi\eta^2 - \mu(\xi^2+\eta^2))).$$

O próximo lema será usado nas provas da Proposição 2.1.2 e do Lema 3.2.1.

Lema 2.1.1. Sejam $\mu, t > 0, r \geq 0$, então temos

$$r^{2\lambda} e^{-2\mu t r^2} \leq c_{\lambda,\mu} t^{-\lambda}.$$

Demonstração. Veja o Lema 1.0.17 de [38]. □

A próxima proposição nos dá uma estimativa em H^s para as soluções do PVI (2.1.3) e será útil na prova do Teorema 2.1.3.

Proposição 2.1.2. Sejam $\lambda \in [0,\infty)$ e $\mu > 0$. Então

a) Para todo $t > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, $E_\mu(t)$ é um operador linear limitado de $H^s(\mathbb{R}^2)$ em $H^{s+\lambda}(\mathbb{R}^2)$. Além disso

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{H^{s+\lambda}} \leq C_\lambda[1 + (2\mu t)^{-\lambda}]^{1/2} \|\phi\|_{H^s}, \forall \phi \in H^s(\mathbb{R}^2),$$

e $t \in [0,\infty) \mapsto E_\mu(t)\phi \in H^{s+\lambda}(\mathbb{R}^2)$ é contínua.

b) Temos que E_μ é semigrupo de contrações em H^s e pode ser extendido, quando $\mu = 0$, a um grupo unitário fortemente contínuo.

c) Seja $\phi \in H^s$, $s \in \mathbb{R}$, então (2.1.3) possui única solução dada por $v(t) = E_\mu(t)\phi$. Além disso

$$v \in C((0,\infty); H^r), \ \forall r \in \mathbb{R}, \ \text{para} \ \ \mu > 0.$$

Demonstração. A demonstração é similar ao Lema 1.0.18 de [38]. □

No próximo teorema e no restante do texto $\chi_{[a,b]}$ denota a função característica do intervalo $[a,b]$.

Teorema 2.1.3. Sejam $\mu > 0$ e $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 1$. Então existe $T_\mu = T_\mu(\|\phi\|_{H^s}, \mu)$ e uma única $u_\mu \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, que satisfaz a equação integral

$$u_\mu(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(uu_x)(t')dt'. \tag{2.1.5}$$

Demonstração. Existência. Sejam $E(t) = E_\mu(t)$ e $\mu > 0$. Considere o espaço métrico completo

$$X_s(T) = \{f \in C([0,T]; H^s) \ : \ \|f(t) - E(t)\phi\|_{H^s} \leq \|\phi\|_{H^s}, \ \forall t \in [0,T]\},$$

com a métrica d induzida pela norma do supremo. Mostraremos que existe um $T_\mu = T_\mu(\|\phi\|_{H^s}, \mu)$, suficientemente pequeno tal que

$$(Af)(t) = E(t)\phi - \int_0^t E(t-t')(ff_x)dt',$$

é uma contração em $X_s(T_\mu)$. Se $f \in C([0,T]; H^s)$, então temos que $Af \in C([0,T]; H^s)$. De fato, seja $t \in [0,T]$, então fazendo a mudança $t' \mapsto t - t'$ temos que

$$Af(t) = E(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t E(t')\partial_x f^2(t-t')dt' := E(t)\phi - v(t).$$

Pelo item a) da Proposição 2.1.2 basta mostrarmos que v é contínua. Para isto tome uma sequência $t_n \in [0,T]$, tal que $t_n \to t$. Então

$$\|v(t) - v(t_n)\|_{H^s} \leq \int_0^T \|\chi_{[0,t]} E(t')\partial_x f^2(t-t') - \chi_{[0,t_n]} E(t')\partial_x f^2(t_n - t')\|_{H^s} dt'.$$

Portanto, como

$$\|\chi_{[0,\tau]} E(t')\partial_x f^2(\tau - t')\| \leq 4C_1[1 + (2\mu t')^{-1/2}]\|f(\tau - t')\|_s^2, \ \forall \tau \in [0,T],$$

$$\begin{aligned}\|E(t')\partial_x f^2(t-t') - E(t')\partial_x f^2(t_n - t')\|_{H^s} &\leq C_\mu \sup_{\tau \in [0,T]} \|f(\tau)\|_s \|f(t-t') - f(t_n - t')\|_{H^s} \\ &\to 0, \ t' \text{ q.t.p em } [0,T],\end{aligned}$$

e

$$\chi_{[0,t_n]} \to \chi_{[0,t]}, \ \text{ com } n \to \infty,$$

pelo Teorema da convergência dominada obtemos que v é contínua. Como $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 1$, é álgebra de Banach, pela Proposição 2.1.2, item a), obtemos

$$\begin{aligned}\|Af(t) - E(t)\phi\|_{H^s} &\leq \int_0^t \|E(t-t')(ff_x)\|_{H^{s-1+1}} dt' \\ &\leq C_1 \int_0^t [1 + (2\mu(t-t'))^{-1}]^{1/2} \|ff_x\|_{H^{s-1}} dt' \\ &\leq C_1[t + (2\mu)^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{-1/2} \|\partial_x f(t')^2\|_{H^{s-1}} dt'] \\ &\leq C_1[t + (2\mu)^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{-1/2} \|f(t')^2\|_{H^s} dt'] \\ &\leq C_1 \left[t + (2\mu)^{-1/2} \|\phi\|_{H^s} \int_0^t (t-t')^{-1/2} dt'\right] \|\phi\|_{H^s}, \qquad (2.1.6)\end{aligned}$$

onde acima usamos que $\sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_{H^s}\leq 2\|\phi\|_{H^s}$, $\forall\phi\in X_s(T)$. De forma análoga temos que para todo $t\in[0,T]$

$$\|Af(t)-Ag(t)\|_{H^s} \leq C_1\left[t+(2\mu)^{-1/2}\|\phi\|_{H^s}\int_0^t (t-t')^{-1/2}dt'\right]d(f,g), \tag{2.1.7}$$

onde $d(f,g)=\sup_{[0,T]}\|f(t)-g(t)\|_{H^s}$. De (2.1.6) e (2.1.7) existe $T_\mu>0$ tal que $A:X_s(T_\mu)\to X_s(T_\mu)$ é contração. Pelo Teorema do Ponto fixo de Banach existe $u=u_\mu\in C([0,T_\mu];H^s)$ que satisfaz (2.1.4).

Unicidade. Sejam $u,v\in C([0,T_\mu];H^s)$ soluções da equação integral (2.1.4), com $u(0)=\phi$ e $v(0)=\psi$. Seja $w(t)=u(t)-v(t)$, então

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{H^s} &\leq \|E(t)(\phi-\psi)\|_{H^s}+\int_0^t\|E(t-t')(\partial_x(u^2-v^2))\|_{H^{s-1+1}}dt'\\ &\leq \|\phi-\psi\|_{H^s}+\sup_{[0,T_\mu]}(\|u(t')\|_{H^s}+\|v(t')\|_{H^s})\int_0^t[1+(2\mu(t-t'))^{-1}]^{1/2}\|w(t')\|_{H^s}dt'.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall temos

$$\|w(t)\|_{H^s}\leq c(\mu,\sup_{[0,T_\mu]}(\|u(t')\|_{H^s}+\|v(t')\|_{H^s}))\|\phi-\psi\|_{H^s}.$$

Portanto fazendo $\phi=\psi$ obtemos o resultado. $\square$

Lema 2.1.4. Sejam X um espaço de Banach, $T(t)$ um semigrupo de contrações em X e $f:[0,T]\to X$, uma aplicação contínua. Então, se $t\in[0,T]$ temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-t')f(t')dt'=f(t).$$

Demonstração. Fixado $t\in(0,T)$, dado $\epsilon>0$, existe $\delta'>0$ tal que se $|t-t'|<\delta'$, então $\|f(t')-f(t)\|_X<\epsilon/2$ e se $|t+h-t'|<\delta'$, então $\|T(t+h-t')f(t)-f(t)\|_X<\epsilon/2$. Mas se $|h|<\delta'/2$ então, $|t-t'|<\delta'/2$ e $|t+h-t'|<\delta'$. Portanto tomando $0<\delta\leq\delta'/2$ tal que $t+h\in[0,T]$, temos que se $|h|<\delta$ então

$$\|T(t+h-t')f(t')-T(t+h-t')f(t)\|_X\leq\|f(t')-f(t)\|_X<\epsilon/2$$

e

$$\|T(t+h-t')f(t)-f(t)\|_X<\epsilon/2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-t')f(t')dt'-f(t)\right\|_X &\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_t^{t+h}\|T(t+h-t')f(t')dt'-f(t)\|_X dt'\right|\\ &< \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.\end{aligned}$$

Os casos $t = 0$ e $t = T$, são interpretados como limites laterais quando $h \to 0+$ e quando $h \to 0-$, respectivamente. $\square$

O próximo resultado relaciona soluções da equação integral (2.1.5) com o PVI (2.1.2). No próximo teorema $\partial_t^+ u$ e $\partial_t^- u$ representam respectivamente as derivadas parciais à direita e à esquerda com respeito a t.

Teorema 2.1.5. Sejam $\mu > 0$, $\phi \in H^s$ e $s > 1$. Se $u = u_\mu \in C([0, T_\mu]; H^s)$ satisfaz a equação integral (2.1.5) então u satisfaz o PVI (2.1.2). Além disso $\partial_t u \in C([0, T_\mu]; H^{s-3})$ e (2.1.2) possui única solução em $C([0, T_\mu]; H^s)$.

Demonstração. Seja $Q_\mu = \mathcal{H}\partial_x^2 + \partial_{xyy} - \mu\Delta$, então podemos escrever (2.1.2) como

$$\begin{cases} u_t + Q_\mu u + uu_x = 0 \\ u(0, x, y) = \phi(x, y). \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Suponha que u satisfaz (2.1.5) então pondo $v(t) = \int_0^t E(t - t')(uu_x)dt'$, temos que $u(t) = E(t)\phi - v(t)$. Se $0 \le t < T_\mu$ e $h > 0$, então

$$v(t + h) = E(h) \int_0^t E(t - t')(uu_x)dt' + \int_t^{t+h} E(t + h - t')(uu_x)dt'.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{v(t + h) - v(t)}{h} &= \frac{E(h) - 1}{h} v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} E(t + h - t')(uu_x)dt' \\ &\to -Q_\mu v(t) + uu_x(t), \text{ com } h \to 0, \end{aligned}$$

onde na última integral usamos o Lema 2.1.4 com $X = H^{s-3}$. Portanto

$$\partial_t^+ u = \partial_t E(t)\phi - \partial_t v = -Q_\mu E(t)\phi + Q_\mu v(t) - uu_x = -Q_\mu u(t) - uu_x.$$

Para obter (2.1.8), para todo $t \in (0, T_\mu)$, usamos o Lema de Dini (veja Lema 3.2 do apêndice de [20]). As derivadas $\partial_t^+ u|_{t=0}$ e $\partial_t^- u|_{t=T_\mu}$ são calculadas de maneira análoga à anterior. A unicidade foi provada no Teorema 2.1.3. $\square$

O próximo lema será usado na prova do Lema 2.1.7.

Lema 2.1.6. Seja u_μ a solução do PVI (2.1.2), onde $\mu > 0$, $\phi \in H^s$, $s > 1$. Então $u_\mu \in C((0, T_\mu]; H^r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Além disso $\partial_t u_\mu \in C((0, T]; H^r)$, $\forall\ r \ge s - 3$ e u_μ satisfaz (2.1.2) para $t \in (0, T_\mu]$.

Demonstração. Segue por um argumento do tipo *bootstrapping*, usando o item a) da proposição 2.1.2, com um $\lambda \in (0,1)$ fixo. □

Lema 2.1.7. Seja $u \in C([0,T_\mu]; H^s)$ solução de (2.1.2), para $\mu > 0$, onde $s > 2$. Então $u = u_\mu$ pode ser extendida a um intervalo $[0,T_s]$, onde $T_s = T(\|\phi\|_{H^s})$. Além disso existe $\rho \in C([0,T_s]; \mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t), \;\; \rho(0) = \|\phi\|_{H^s}^2, \;\; \forall t \in [0,T_s]. \tag{2.1.9}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.6 temos $u(t) \in H^\infty$, $\mu > 0$, $t \in (0,T_\mu]$. Logo, se u satisfaz (2.1.2) então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^s}^2 =& -\mu\|\nabla u\|_{H^s}^2 - (u_{xyy},u)_{H^s} - (\mathcal{H}\partial_x^2 u,u)_{H^s} - (uu_x,u)_{H^s}\\ \leq& c_s\|\nabla u\|_{H^{s-1}}\|u\|_{H^s}^2\\ \leq& c_s\|u\|_{H^s}^3, \;\; t \in [0,T_\mu],\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

onde em (2.1.10) usamos que os operadores ∂_{xyy}^3 e $\mathcal{H}\partial_x^2$ são anti-simétricos, além do Teorema 1.0.13 para estimar $(uu_x,u)_{H^s}$. Então pelo Corolário 4.4, pág. 29, de [21] temos que

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t), \;\; t \in [0,T_\mu],$$

onde $\rho(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho = c_s\rho^{3/2},\\ \rho(0) = \|\phi\|_{H^s}^2. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Resolvendo o último PVI obtemos

$$\rho(t) = \frac{4\|\phi\|_{H^s}^2}{(2 - c_s\|\phi\|_{H^s}t)^2}, \;\; \forall t \in [0,T_s], \tag{2.1.12}$$

onde T_s é arbitrário e satisfaz $0 < T_s < \tilde{T}_s$, onde

$$\tilde{T}_s = \frac{2}{c_s\|\phi\|_{H^s}}.$$

□

Os três lemas a seguir serão úteis na demonstração do Teorema 2.1.11.

Lema 2.1.8. Sejam $f_\mu \in C([0,T];H^s)$ e $\mu > 0$, se

$$\lim_{\mu,\nu\to 0} \sup_{[0,T]} \|f_\mu(t) - f_\nu(t)\| = 0.$$

Então existe $f_0 : [0,T_s] \to H^s$ tal que

$$f_\mu \rightharpoonup f_0,\ \text{com}\ \mu \to 0,\ \text{uniformemente em}\ [0,T].$$

Demonstração. Sejam $f = f_\mu$ e $g = g_\nu$. Como $C([0,T];L^2)$ é espaço de Banach existe $f_0 \in C([0,T];L^2)$ tal que $\lim_{\mu\to 0}\sup_{[0,T]}\|f_\mu(t) - f_0(t)\| = 0$. Dado $\psi \in H^s$ e $\epsilon > 0$ tome $\varphi \in H^\infty$, tal que $\|\psi - \varphi\|_{H^s} \leq \epsilon$. Então

$$\begin{aligned}
|(f-g,\psi)_{H^s}| &\leq |(f-g,\psi-\varphi)_{H^s}| + |(f-g,\varphi)_{H^s}| \\
&\leq \|f-g\|_{H^s}\|\psi-\varphi\|_{H^s} + |(f-g,J^{2s}\varphi)| \\
&\leq 2M\epsilon + \|f-g\|\|J^{2s}\varphi\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{[0,T_s]} |(f-g,\psi)_{H^s}| \leq 2M\epsilon + \sup_{[0,T_s]} \|f-g\|\|\varphi\|_{H^{2s}}.$$

Dai

$$\lim_{\mu,\nu\to 0} \sup_{[0,T]} |(f_\mu(t) - f_\nu(t),\psi)_{H^s}| = 0.$$

Logo $\{f_\mu\}_{\mu>0}$ é sequência de Cauchy fraca em H^s, uniforme em $[0,T]$. Como H^s é reflexivo temos que é fracamente completo. Logo existe $\tilde{f}_0 : [0,T] \to H^s$, tal que

$$f_\mu \rightharpoonup \tilde{f}_0,\ \text{com}\ \mu \to 0,\ \text{uniformemente em}\ [0,T].$$

Afirmamos que $f_0 = \tilde{f}_0$. De fato, se $t \in [0,T]$, e $\psi \in L^2$, então $\varphi = J^{-s}\psi \in H^s$ e

$$(f_0(t),\psi) = \lim_{\mu\to 0}(f_\mu(t),\psi) = \lim_{\mu\to 0}(f_\mu(t),\varphi)_{H^s} = (\tilde{f}_0(t),\varphi)_{H^s} = (\tilde{f}_0(t),\psi).$$

Portanto $f_0(t) = \tilde{f}_0(t)$. □

Lema 2.1.9. Sejam $f_\mu \in C([0,T];H^s)$ tais que

$$f_\mu \rightharpoonup f_0, \text{com}\ \mu \to 0, \text{uniformemente em}\ [0,T].$$

Então $f_0 : [0,T] \to H^s$ é fracamente contínua.

Demonstração. Sejam $\tau \in [0,T]$ e $\psi \in H^s$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$0 < \mu < \sigma \Longrightarrow |(f_\mu(t) - f_0(t), \psi)_{H^s}| < \epsilon/3, \forall \ \ t \in [0,T].$$

Tome $0 < \mu < \sigma$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$|t-\tau| < \delta \Longrightarrow \|f_\mu(t) - f_\mu(\tau)\|_{H^s} < \epsilon/3\|\psi\|_{H^s}.$$

Portanto se $|t-\tau| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |(f_0(t) - f_0(\tau), \psi)_{H^s}| &< |(f_0(t) - f_\mu(t), \psi)_{H^s}| + |(f_\mu(t) - f_\mu(\tau), \psi)_{H^s}| + |(f_\mu(\tau) - f_0(\tau), \psi)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.10. Seja $u_0 \in L^\infty([0,T_s]; H^s)$, uma solução do PVI (2.1.1). Se u_0 é contínua em $t = 0$, então

$$u_0 \in C([0,T]; H^s).$$

Demonstração. Sejam $u_0, v_0 \in L^\infty([0,T_s]; H^s)$ soluções do PVI (2.1.1), tais que $u_0(0) = v_0(0) = \phi$, se $w_0 = u_0 - v_0$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|w_0\|^2 &= -2(w_0, \partial_x(u_0^2 - v_0^2)) \\ &\leq |(\partial_x w_0^2, u_0 + v_0)| \\ &\leq |(w_0^2, \partial_x(u_0 + v_0))| \\ &\leq \|\partial_x(u_0 + v_0)\|_\infty \|w_0\|^2 \\ &\leq c_s K \|w_0\|^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall obtemos $u_0 = v_0$. Seja $\tau \in (0, T_s]$, $\tau \neq T_s$. Mostraremos a continuidade à direita em τ. Considere o PVI

$$\begin{cases} w_t + \mathcal{H}\partial_x^2 w + w_{xyy} + w w_x = 0 \\ w(0,x,y) = u_0(\tau). \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Seja $w \in L^\infty([0,T_s]; H^s)$ solução de (2.1.13), então como $u_0(\tau + t)$ também é solução, temos por unicidade que $w(t) = u_0(\tau + t)$, $\forall \ t \in [0, T_s - \tau]$. Portanto

$$\|w(t) - w(0)\|_{H^s} = \|u_0(\tau + t) - u_0(\tau)\|_{H^s} \to 0, \ \text{com } t \to 0.$$

A continuidade à esquerda pode ser vista da seguinte forma. Fixado $\tau \in (0, T_s]$, como equação é invariante pela mudança de variáveis $(t, x, y) \mapsto (\tau - t, -x, -y)$, se u_0 é solução, então $\omega(t, x, y) = u_0(\tau - t, -x, -y)$, $t \in [0, \tau]$, $x, y \in \mathbb{R}$, é solução com $\omega(0, x, y) = u_0(\tau, -x, -y)$, logo

$$\|\omega(t) - \omega(0)\|_{H^s} = \|u_0(\tau - t) - u_0(\tau)\|_{H^s} \to 0, \text{ com } t \to 0.$$

Portanto u_0 é contínua à esquerda em τ. Logo $u_0 \in C([0, T_s]; H^s)$. □

No próximo teorema $AC([0, T]; H^r)$ denota o espaço das aplicações absolutamente contínuas $f : [0, T] \to H^r$. Algumas definições e resultados de Teoria da Medida que também são necessários, tais como aplicação fortemente mensurável, integral de Bochner, entre outros, podem ser encontrados em [51](pág. 130–136) e [15](pág. 645–650).

Teorema 2.1.11. Seja $\phi \in H^s$, $s > 2$. Então existe $T_s = T_s(s, \|\phi\|_{H^s})$ e uma única $u_0 \in C([0, T_s]; H^s)$ que satisfaz o PVI (2.1.1).

Demonstração. Sejam $u = u_\mu$ e $v = u_\nu$ soluções do PVI (2.1.2) definidas no intervalo $[0, T_s]$, onde T_s é dado pelo Lema 2.1.7. Suponha ainda que $u(0) = v(0) = \phi$. Pondo $w = u - v$ temos

$$\partial_t w(t) + \mathcal{H}\partial_x^2 w + w_{xyy} + \frac{1}{2}\partial_x(u^2 - v^2) = (\mu - \nu)\Delta w,$$

Como

$$\begin{aligned} |(w, \partial_x[(u - v)(u + v)])| &= \frac{1}{2}|(w^2, \partial_x(u + v))| \\ &\leq \|\partial_x(u + v)\|_{L^\infty}\|w\|^2 \\ &\leq c_s(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|w\|^2, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 &= 2(\mu - \nu)\|\nabla w\|^2 - 2(w, \mathcal{H}\partial_x^2 w) - 2(w, w_{xyy}) - (w, \partial_x[(u - v)(u + v)]) \\ &\leq 2|\mu - \nu|\|w\|_{H^s}^2 + c_s(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|w\|^2 \\ &\leq 2|\mu - \nu|M^2 + c_s M\|w\|^2, \ \forall t \in [0, T_s], \end{aligned}$$

onde $M^2 = \sup_{[0,T_s]} \rho(t)$, que é finito tendo em vista (2.1.12).

Pelo Lema de Gronwall temos

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 2T_s M^2|\mu - \nu|e^{c_s M T_s}, \forall t \in [0, T_s]. \quad (2.1.14)$$

Da desigualdade acima e do Lema 2.1.8 existe $u_0 : [0, T_s] \to H^s$ tal que $u_\mu \rightharpoonup u_0$, em H^s, uniformemente em $[0, T_s]$. Pelo Lema 2.1.9 u_0 é fracamente contínua. Temos também que $\|u_0(t)\|^2_{H^s} \leq \rho(t), \forall t \in [0, T_s]$. De fato,

$$|(u_0(t)|\psi)_{H^s} = \lim_{\mu\to 0}|(u_\mu(t), \psi)_{H^s}| \leq \limsup_{\mu\to 0}\|u_\mu(t)\|_{H^s}\|\psi\|_{H^s} \leq \rho(t)^{1/2}\|\psi\|_{H^2} = \rho(t)^{1/2}.$$

Portanto, tomando o supremo em $\|\psi\|_{H^s} = 1$ temos que $\|u_0(t)\|_{H^s} \leq \rho(t)^{1/2}, \forall\ t \in [0, T_s]$.

Seja $F_\mu(u_\mu(t)) = \mu\Delta u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - u_{xyy} - uu_x$. Então mostraremos que

$$F_\mu(u_\mu) \rightharpoonup F_0(u_0)\text{em } H^{s-3} \text{ com } \mu \to 0, \text{ uniformemente em } [0, T_s].$$

De fato, seja $\psi \in H^{s-3}$, então quando $\mu \downarrow 0$, temos

$$\mu|(\Delta u, \psi)_{H^{s-3}}| \leq \mu M\|\psi\|_{H^{s-3}} \to 0, \text{ uniformemente em } [0, T_s], \tag{2.1.15}$$

$$(\mathcal{H}\partial_x^2(u - u_0), \psi)_{H^{s-3}} = (u - u_0, J^{-6}\mathcal{H}\partial_x^2\psi)_{H^s} \to 0, \text{ uniformemente em } [0, T_s], \tag{2.1.16}$$

$$(u_{xyy} - (u_0)_{xyy}, \psi)_{H^{s-3}} = (u - u_0, J^{-6}\partial_{xyy}\psi)_{H^s} \to 0, \text{ uniformemente em } [0, T_s]. \tag{2.1.17}$$

Dado $\epsilon > 0$ tome $\varphi \in H^\infty$ tal que $\|\psi - \varphi\|_{H^{s-3}} < \epsilon$, então

$$\begin{aligned}
|(\partial_x(u^2 - u_0^2), \psi)_{H^{s-3}}| &\leq |(\partial_x(u^2 - u_0^2), \psi - \varphi)_{H^{s-3}}| + |(\partial_x(u^2 - u_0^2), \varphi)_{H^{s-3}}| \\
&\leq \|\partial_x(u^2 - u_0^2)\|_{H^{s-3}}\|\psi - \varphi\|_{H^{s-3}} + |((u^2 - u_0^2), J^{2s-6}\partial_x\varphi)| \\
&\leq \|(u - u_0)(u + u_0)\|_{H^s}\epsilon + c_s\|u + u_0\|_\infty\|u - u_0\|\|J^{2s-6}\partial_x\varphi\| \\
&\leq 4M^2\epsilon + c_s M\|J^{2s-6}\partial_x\varphi\|\|u - u_0\|,
\end{aligned}$$

Logo

$$\partial_x u^2 \rightharpoonup \partial_x u_0^2, \text{ uniformemente em } [0, T_s]. \tag{2.1.18}$$

As últimas quatro convergências foram obtidas tendo em vista a desigualdade (2.1.14). Assim, de (2.1.15)–(2.1.18) concluímos a afirmação. Daí $F_0(u_0) : [0, T_s] \to H^{s-3}$ é fracamente contínua. Portanto, pelo Teorema de Pettis (veja [51], pág. 131 e [15] pág. 650) $F_0(u_0)$ é fortemente mensurável. Como $\|F_0(u_0)\|_{H^{s-3}} \leq c(s, M)$, segue que $t \in [0, T_s] \mapsto \|F_0(u_0)\|_{H^{s-3}}$ é integrável no sentido de Lebesgue. Portanto pelo Teorema de Bochner (veja [51], pág.133 e [15], pág. 650)

$F_0(u_0)$ é integrável no sentido de Bochner. De maneira análoga $F_\mu(u_\mu)$ é integrável no sentido de Bochner. Logo,

$$\begin{aligned}(u_0(t)-\phi,\psi)_{H^{s-3}} &= \lim_{\mu\to 0}(u(t)-\phi,\psi)_{H^{s-3}} \\ &= \lim_{\mu\to 0}(\int_0^t F_\mu(u_\mu(t'))dt',\psi)_{H^{s-3}} \\ &= \lim_{\mu\to 0}\int_0^t (F_\mu(u_\mu(t')),\psi)_{H^{s-3}}dt' \\ &= \int_0^t (F_0(u_0(t')),\psi)_{H^{s-3}}dt' \\ &= (\int_0^t F_0(u_0(t'))dt',\psi)_{H^{s-3}}.\end{aligned}$$

Portanto $u_0(t)-\phi=\int_0^t F_0(u_0(t'))dt'$. Logo $u_0\in AC([0,T_s];H^{s-3})\cap L^\infty([0,T_s];H^s)$ pois u_0 é integral indefinida e $\|u_0(t)\|_{H^s}^2\leq\rho(t)$. Portanto

$$\partial_t u_0 = F_0(u_0) = -\mathcal{H}\partial_x^2 u_0 - \partial_{xyy}u_0 - u_0\partial_x u_0,\ \text{q.t.p em } [0,T_s]. \tag{2.1.19}$$

Resta mostrar que $u_0\in C([0,T_s];H^s)$. Temos que u_0 é contínua em $t=0$. De fato,

$$\begin{aligned}\|u_0(t)-\phi\|_{H^s}^2 &= \|u_0(t)\|_{H^s}^2+\|\phi\|_{H^s}^2-(u_0(t),\phi)_{H^s}-(u_0(t),\phi)_{H^s} \\ &\leq \rho(t)+\|\phi\|_{H^s}^2-(u_0(t),\phi)_{H^s}-(u_0(t),\phi)_{H^s} \\ &\to \|\phi\|_{H^s}^2+\|\phi\|_{H^s}^2-\|\phi\|_{H^s}^2-\|\phi\|_{H^s}^2=0,\ \text{com } t\downarrow 0.\end{aligned}$$

Portanto pelo Lema 2.1.10 u_0 é contínua. Resta mostrar que (2.1.19) vale para todo $t\in[0,T_s]$. De fato, como u_0 é contínua, $F_0(u_0(\cdot)):[0,T_s]\to H^{s-3}$ é contínua, então dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que se $|h|<\delta$ e t' está entre t e $t+h$, então

$$\|F_0(u_0(t'))-F_0(u_0(t))\|_{H^{s-3}}<\epsilon.$$

Portanto, se $t\in[0,T_s]$ temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u_0(t+h)-u_0(t)}{h}-F_0(u_0(t))\right\|_{H^{s-3}} &= \frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h}(F_0(u_0(t'))-F_0(u_0(t)))dt'\right\|_{H^{s-3}} \\ &\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_t^{t+h}\|F_0(u_0(t'))-F_0(u_0(t))\|_{H^{s-3}}dt'\right| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

A seguir, usamos as aproximações de Bona-Smith para obter a dependência contínua do PVI (2.1.1).

Lema 2.1.12. Sejam $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, definindo

$$\varphi_\epsilon(x,y) = \exp(-\epsilon(1+x^2+y^2)^{s/2})$$

e

$$\phi_\epsilon = (\varphi_\epsilon(\cdot)\hat{\phi}(\cdot))^\vee,$$

temos

a) $\|\phi_\epsilon - \phi\|_{H^s} \to 0,$ com, $\epsilon \downarrow 0$.

b) $\|\phi_{\epsilon_1} - \phi_{\epsilon_2}\| \leq |\epsilon_1 - \epsilon_2| \|\phi\|_{H^s}, \ \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.

c) $\|\phi_\epsilon\|_{s+r} \leq (\frac{r}{s\epsilon})^{r/s} e^{-r/s} \|\phi\|_{H^s}, \ \forall r > 0$.

d) Se $\phi^n \to \phi$ em H^s, então $\|\phi^n_\epsilon - \phi^n\|_{H^s} \to 0$, quando $\epsilon \downarrow 0$, uniformemente em n.

Demonstração. Veja o Lema 1.0.30 de [38], além do Lema 5, pág. 508 de [3]. □

Considere $\phi^n \to \phi$ em $H^s(\mathbb{R}^2)$. Sejam $\mu > 0$, u_μ, u^n_μ, $u_{\mu,\epsilon} = (u_\mu)_\epsilon$ e $u^n_{\mu,\epsilon} = (u^n_\mu)_\epsilon$ soluções de (2.1.2) com dados iniciais ϕ, ϕ^n, ϕ_ϵ e $\phi^n_\epsilon = (\phi^n)_\epsilon$, definidas respectivamente em $[0, T_s]$, $[0, T_{s,n}]$, $[0, T_{s,\epsilon}]$ e $[0, T_{s,n,\epsilon}]$, onde $0 < T_s < \tilde{T}_s$, $0 < T_{s,n} < \tilde{T}_{s,n}$, $0 < T_{s,\epsilon} < \tilde{T}_{s,\epsilon}$ e $0 < T_{s,n,\epsilon} < \tilde{T}_{s,n,\epsilon}$, veja a notação no Lema 2.1.7.

Lema 2.1.13. Considerando a notação acima, dado $T \in (0, T_s)$ existem n_0, $\epsilon_0 > 0$ tais que se $n > n_0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ então u_μ, u^n_μ, $u_{\mu,\epsilon}$ e $u^n_{\mu,\epsilon}$ estão definidas em $[0, T]$. Além disso, para todo $t \in [0, T]$,

$$\|u^n_\mu(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}{2 - c_s T(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}, \forall n > n_0$$

$$\|u_{\mu,\epsilon}(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}{(2 - c_s T(\delta + \|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s}))}, \ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$$

e

$$\|u^n_{\mu,\epsilon}(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi\|_{H^s} + \delta_1)}{(2 - c_s T(\|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s} + \delta_1))}, \ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0), \ n > n_0,$$

onde δ e δ_1 dependem de T, $\|\phi\|_{H^s}$ e $\|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s}$.

Demonstração. Dado $T \in (0, T_s)$, como $\phi^n \to \phi$ em $H^s(\mathbb{R}^2)$, podemos tomar $0 < \delta < \frac{1}{c_s T} - \|\phi\|_{H^s}$. Portanto, existe $n' = n'(T, \|\phi\|_{H^s})$ tal que

$$n > n' \Rightarrow \|\phi^n\| < \|\phi\|_{H^s} + \delta < \frac{2}{c_s T}.$$

Logo

$$\tilde{T}_{s,n} = 2(c_s \|\phi^n\|_{H^s})^{-1} > T$$

e u_μ^n está definida em $[0, T]$, para todo $n \geq n'$ e $\mu > 0$. Além disso como $2 - c_s T \|\phi^n\|_{H^s} > 2 - c_s T(\|\phi\|_{H^s} + \delta) > 0$ temos que

$$\|u_\mu^n(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}{2 - c_s T(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}.$$

Agora, se $\epsilon > 0$ então

$$\tilde{T}_{s,\epsilon} = 2(c_s \|\phi_\epsilon\|_{H^s})^{-1} > 2(c_s \|\phi\|_{H^s})^{-1} = \tilde{T}_s > T_s > T$$

e $u_{\mu,\epsilon}$ está definida em $[0, T]$. Além disso como $\phi_\epsilon \to \phi$ em H^s com $\epsilon \downarrow 0$, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(T, \|\phi\|_{H^s})$ tal que se $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ então

$$\|\phi_\epsilon\|_{H^s} < \|\phi\|_{H^s} + \delta < \frac{2}{c_s T}.$$

Portanto, como $2 - c_s T \|\phi\|_{H^s} > 2 - c_s T(\|\phi\|_{H^s} + \delta) > 0$, segue que

$$\|u_{\mu,\epsilon}(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi\|_{H^s} + \delta)}{(2 - c_s T(\|\phi\|_{H^s} + \delta))}, \ \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0), \ t \in [0, T].$$

Temos ainda que se $n > n'$ então

$$\tilde{T}_{s,n,\epsilon} = 2(c_s \|(\phi_n)_\epsilon\|_{H^s})^{-1} \geq 2(c_s \|\phi_n\|_{H^s})^{-1} = \tilde{T}_{s,n} > \tilde{T}_s > T_s > T,$$

e $u_{\mu,\epsilon}^n$ está definida em $[0, T]$. Ainda mais, dado $0 < \delta_1 < \frac{1}{c_s T} - \|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s}$, como $\phi_{\epsilon_0}^n \to \phi_{\epsilon_0}$, existe $n_1 = n_1(\epsilon_0, T, \|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s})$ tal que $n > n_1 \Rightarrow \|\phi_{\epsilon_0}^n\|_{H^s} < \|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s} + \delta_1$, daí temos $2 - c_s T \|\phi_{\epsilon_0}^n\|_{H^s} > 2 - c_s T(\|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s} + \delta_1) > 0$. Desde que $\|\phi_{\epsilon_0}^n\|_{H^s} \leq \|\phi_\epsilon^n\|_{H^s}$, pondo $n_0 = \max\{n', n_1\}$ obtemos

$$\|u_{\mu,\epsilon}^n(t)\|_{H^s} \leq \frac{2(\|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s} + \delta_1)}{(2 - c_s T(\|\phi_{\epsilon_0}\|_{H^s} + \delta_1))}, \ \forall \ n > n_0, \ \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

$\square$

No próximo resultado obtemos a dependência contínua do PVI (2.1.1).

Teorema 2.1.14. Nas mesmas hipóteses do último lema, dado qualquer $T \in (0, T_s)$ existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ então $u_\mu^n \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, $\forall \mu \geq 0$. Além disso,

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u_\mu^n(t) - u_\mu(t)\|_{H^s} \to 0.$$

Demonstração. Sejam $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $n \geq n_0$, $\mu > 0$ e $t \in [0,T]$, então

$$\|u_\mu^n(t) - u_\mu(t)\|_{H^s} \leq \|u_\mu^n(t) - u_{\mu,\epsilon}^n(t)\|_{H^s} + \|u_{\mu,\epsilon}^n(t) - u_{\mu,\epsilon}(t)\|_{H^s} + \|u_{\mu,\epsilon}(t) - u_\mu(t)\|_{H^s}. \tag{2.1.20}$$

Como u_μ e $u_{\mu,\epsilon}$ satisfazem (2.1.2), pela antissimetria dos operadores $\mathcal{H}\partial_x^2$ e $\partial_x \partial_y^2$ e considerando u_μ e $u_{\mu,\epsilon}$ avaliados em t obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^2 &\leq |(u_\mu \partial_x u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\partial_x u_{\mu,\epsilon}, u_\mu - u_{\mu,\epsilon})_{H^s}| & (2.1.21)\\ &\leq |(u_\mu \partial_x (u_\mu - u_{\mu,\epsilon}) + (u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}, u_\mu - u_{\mu,\epsilon})_{H^s}|. & (2.1.22) \end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.0.13 e a imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} (u_\mu \partial_x (u_\mu - u_{\mu,\epsilon}), u_\mu - u_{\mu,\epsilon})_{H^s} =& ([J^s, u_\mu]\partial_x (u_\mu - u_{\mu,\epsilon}), J^s(u_\mu - u_{\mu,\epsilon}))\\ &+ (u_\mu J^s \partial_x (u_\mu - u_{\mu,\epsilon}), J^s(u_\mu - u_{\mu,\epsilon}))\\ \leq& c(\|\nabla u_\mu\|_{L^\infty}\|J^{s-1}\partial_x(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\| + \|J^s u_\mu\|\|u_\mu\|_{L^\infty})\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s} +\\ &+ \|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^2\\ \leq& c\|u_\mu\|_{H^s}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^2. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Temos ainda que

$$\|(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s} \leq \|(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}\| + \|D^s[(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}]\|, \tag{2.1.24}$$

$$\|(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}\| \leq \|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}\|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}, \tag{2.1.25}$$

e pelo Lema 1.0.15, com $\gamma \in (1, s-1)$, Proposição 3.1, item 4), pág. 46 de [37] temos

$$\begin{aligned}
\|D^s[(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\partial_x u_{\mu,\epsilon}]\| \leq & \|[D^s, \partial_x u_{\mu,\epsilon}](u_\mu - u_{\mu,\epsilon}) + \partial_x u_{\mu,\epsilon} D^s(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\| \\
\leq & c(s,\gamma)\|\partial_x u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^\gamma} + \|\partial_x u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{\gamma+1}}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s-1}} + \\
& + \|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}\|D^s(u_\mu - u_{\mu,\epsilon})\| \\
\leq & c(s,\gamma)(\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s-1}}\|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s+1}} + \|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^\gamma}\|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s+1}} \\
\leq & c(s,\gamma)(\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|^{1-\frac{s-1}{s}}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^{\frac{s-1}{s}}\|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s+1}} + \\
& + \|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|^{1-\frac{\gamma}{s}}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^{\frac{\gamma}{s}}\|u_{\mu,\epsilon}\|_{H^{s+1}}) \\
\leq & c(s,\gamma)(\|\phi - \phi_\epsilon\|^{\frac{1}{s}}\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^{\frac{s-1}{s}}\epsilon^{-\frac{1}{s}} + \|\phi - \phi_\epsilon\|^{1-\frac{\gamma}{s}}\epsilon^{-\frac{1}{s}}) \\
\leq & c(\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s} + \epsilon^{1-\frac{\gamma+1}{s}}),
\end{aligned}$$

onde acima usamos os Lemas 2.1.12 e 2.1.13 para obter

$$\|u_{\mu,\epsilon}\|_{s+1} \leq c\|\phi_\epsilon\|_{s+1} \leq c\epsilon^{-1/s}$$

e

$$\|\phi - \phi_\epsilon\|^{\frac{1}{s}} \leq \epsilon^{1/s}.$$

Assim, usando (2.1.21)–(2.1.26), o Lema de Gronwall e a desigualdade de Young obtemos

$$\|u_\mu - u_{\mu,\epsilon}\|_{H^s}^2 \leq c\|\phi - \phi_\epsilon\|_{H^s}^2 + \epsilon^\alpha, \tag{2.1.26}$$

onde $c = c(s, T, \gamma, \|\phi\|_s)$ e $\alpha = 2(1 - \frac{\gamma+1}{s})$. De modo análogo

$$\|u_\mu^n - u_{\mu,\epsilon}^n\|_{H^s}^2 \leq c\|\phi^n - \phi_\epsilon^n\|_{H^s}^2 + \epsilon^\alpha \tag{2.1.27}$$

e

$$\|u_{\mu,\epsilon} - u_{\mu,\epsilon}^n\|_{H^s}^2 \leq c\|\phi - \phi^n\|_{H^s}^2 + \epsilon^\alpha, \tag{2.1.28}$$

onde $c = c(s, T, \gamma, \|\phi\|_s)$.

Portanto, de (2.1.20), (2.1.26)–(2.1.28) obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_\mu^n(t) - u_\mu(t)\|_{H^s} \leq c(s, T, \gamma, \|\phi\|_{H^s})(\|\phi - \phi_\epsilon\|_{H^s} + \|\phi^n - \phi_\epsilon^n\|_{H^s}^2 + \|\phi - \phi^n\|_{H^s} + 3\epsilon^{\alpha/2}).$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ e $\epsilon \downarrow 0$, obtemos o resultado. O caso $\mu = 0$ poder ser feito da seguinte forma. Denotando por u a solução para $\mu = 0$, seja $t \in [0,T]$, então

$$\begin{aligned}
|(u(t) - u^n(t), \psi)_{H^s}| &= \lim_{\mu\to 0} |(u_\mu(t) - u_\mu^n(t), \psi)_{H^s}| \\
&\leq \sup_{[0,T]} (\|u_\mu(t) - u_\mu^n(t)\|_{H^s}) \|\psi\|_{H^s} \\
&\leq c(s,T,\gamma,\|\phi\|_{H^s})(\|\phi - \phi_\epsilon\|_{H^s} + \|\phi^n - \phi_\epsilon^n\|_{H^s}^2 + \|\phi - \phi^n\|_{H^s} + 3\epsilon^{\alpha/2})\|\psi\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Portanto tomando o supremo quando $\|\psi\|_{H^s} = 1$ obtemos

$$\|u(t) - u^n(t)\|_{H^s} \leq c(s,T,\gamma,\|\phi\|_{H^s})(\|\phi - \phi_\epsilon\|_{H^s} + \|\phi^n - \phi_\epsilon^n\|_{H^s}^2 + \|\phi - \phi^n\|_{H^s} + 3\epsilon^{\alpha/2}) \ \forall\ t \in [0,T].$$

Pela última desigualdade e o Lema 2.1.13, item d), concluímos a demonstração. □

Teorema 2.1.15. O PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$.

Demonstração. A demonstração segue dos Teoremas 2.1.11 e 2.1.14. □

2.2 Espaços de Sobolev Anisotrópicos

Nesta seção nosso objetivo será estabelecer o Teorema 2.2.8, que constitui uma generalização do Teorema 2.1.11. O espaço que definiremos a seguir tem diferentes regularidades nas direções x e y. O mesmo pode ser considerado uma generalização do espaço de Sobolev usual.

Definição 2.2.1. Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev anisotrópico $H^{s_1,s_2} = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto de todas as distribuições temperadas f tais que

$$\|f\|_{s_1,s_2}^2 = \|f\|^2 + \|J_x^{s_1} f\|^2 + \|J_y^{s_2} f\|^2 < \infty.$$

O produto escalar H^{s_1,s_2} será denotado por $(\cdot,\cdot)_{s_1,s_2}$.

A próxima proposição será usada na prova do Teorema 2.2.5.

Proposição 2.2.2. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,\infty)$ e $\mu > 0$. Então,

a) Para qualquer $t > 0$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $E_\mu(t)$ um operador linear limitado de H^{s_1,s_2} em $H^{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2}$. Além disso

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2} \leq C_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}(1 + t^{-\lambda_1/2} + t^{-\lambda_2/2})\|\phi\|_{s_1,s_2}, \quad \phi \in H^{s_1,s_2},$$

e a aplicação $t \in (0,\infty) \mapsto E_\mu(t)\phi \in H^{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2}$ é contínua.

b) $E_\mu(t)$ é um semigrupo de contrações em H^{s_1,s_2} e pode ser extendido, quando $\mu = 0$, a um grupo unitário.

Demonstração. Análoga à prova da Proposição 2.1.2. □

Para nossos propósitos precisamos que H^{s_1,s_2} seja uma álgebra de Banach. Para isto provaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.3. Seja $f \in H^{s_1,s_2}$ onde $s_1, s_2 > 1$, então

$$\|f\|_\infty \leq c_{s_1 s_2} \|f\|_{s_1,s_2}.$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade que $s_1 \geq s_2$, então

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leq \|\hat{f}\|_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})^{-1/2}(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})^{1/2}|\hat{f}(\xi,\eta)|d\xi d\eta \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})}\right]^{1/2} \|f\|_{s_1,s_2} \\
&= c_{s_1 s_2}\|f\|_{s_1,s_2},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{s_1 s_2} &= \int_{|\xi|,|\eta|\leq 1} \frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})} + \int_{|\xi|,|\eta|>1} \frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})} \\
&\leq c + c_{s_2} \int_{|\xi|,|\eta|>1} \frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^2+\eta^2)^{s_2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Assim obtemos o resultado. □

Proposição 2.2.4. Sejam $u, v \in H^{s_1,s_2}$, onde $s_1, s_2 > 1$, então

$$\|uv\|_{s_1,s_2} \leq c_{s_1 s_2} \|u\|_{s_1,s_2} \|v\|_{s_1,s_2}.$$

Demonstração. Fixando y no Lema 1.0.14, temos

$$\|J_x^{s_1}(uv)\|_{L_x^2} \leq c(\|\|u\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}).$$

Em seguida, tomando a norma L^2 com respeito a y, usando a desigualdade de Hölder e a Proposição 2.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\|J_x^{s_1}(uv)\| &= \|\|J_x^{s_1}(uv)\|_{L_x^2}\|_{L_y^2} \\
&\leq c(\|\|u\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}) \\
&\leq c(\|u\|_{L_{xy}^\infty}\|\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2}\|_{L_y^2} + \|v\|_{L_{xy}^\infty}\|\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}) \qquad (2.2.1) \\
&\leq c_{s_1,s_2}(\|u\|_{s_1,s_2}\|J_x^{s_1}v\| + \|v\|_{s_1,s_2}\|J_x^{s_1}u\|) \\
&\leq c_{s_1,s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|J_y^{s_2}(uv)\|\leq c_{s_1 s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}. \tag{2.2.2}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}\|uv\|\leq&\|u\|_{L^\infty_{xy}}\|v\|\\ \leq& c_{s_1 s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}.\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

O resultado segue então de (2.2.1)–(2.2.3). □

De posse dessas ferramentas, podemos provar a boa colocação para o PVI (2.1.2).

Teorema 2.2.5. Sejam $\mu > 0$, e $\phi \in H^{s_1,s_2}$, onde $s_1, s_2 > 1$ e $s_2 \leq s_1$. Então existe $T_\mu = T_\mu(\|\phi\|_{s_1,s_2}, \mu)$ e uma única $u_\mu \in C([0, T_\mu]; H^{s_1,s_2})$, que satisfaz a equação integral

$$u_\mu(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')\frac{1}{2}\partial_x(u_\mu^2)(t')dt'. \tag{2.2.4}$$

Demonstração. A prova é baseada novamente no princípio de contração. Consideramos o espaço métrico completo

$$\chi_{s_1,s_2}(T) = \Big\{f \in C([0,T]; H^{s_1,s_2}) \mid \|f(t) - E(t)\phi\|_{s_1,s_2}\leq \|\phi\|_{s_1,s_2}, \forall t \in [0,T]\Big\},$$

com a norma do supremo. Seja

$$Af(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(ff_x)(t')dt'.$$

A idéia é mostrar que A tem um único ponto fixo em $\chi_{s_1,s_2}(T)$ para algum $T > 0$ que será escolhido posteriormente. Para todo $f \in \chi_{s_1,s_2}(T)$, da Proposição 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}\|J_x^{s_1}E(t-t')\partial_x f^2\|&\leq c_\mu(1+(t-t')^{-1/2})\|J_x^{s_1-1}\partial_x f^2\|\\ &\leq c_{\mu,s_1,s_2}(1+(t-t')^{-1/2})\|\phi\|^2_{s_1 s_2}.\end{aligned}$$

Como $\frac{s_2}{s_1} \leq 1$, existe α satisfazendo $\frac{s_2}{s_1} \leq \alpha \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned}\|J_y^{s_2}E(t-t')\partial_x f^2\|\leq& c_{\alpha,\mu}(1+(t-t')^{-\alpha/2})(\|J_x^{s_1}f^2\|+\|J_y^{s_2}f^2\|)\\ \leq& c_{\alpha,\mu}(1+(t-t')^{-\alpha/2})\|f^2\|_{s_1,s_2}\\ \leq& c_{\alpha,\mu}(1+(t-t')^{-\alpha/2})\|\phi\|^2_{s_1,s_2},\end{aligned}$$

onde acima usamos o Teorema de Plancherel e a desigualdade de Young. Portanto, das desigualdades acima temos

$$\|Af(t)-E(t)\phi\|_{s_1,s_2}\leq \left[c\|\phi\|_{s_1,s_2}\int_0^t(1+(t-t')^{-1/2}+(t-t')^{-\alpha/2})dt'\right]\|\phi\|_{s_1,s_2}.$$

Como consequência, existe um $T'_\mu = T'_\mu(\mu,\|\phi\|_{s_1,s_2})$ tal que $A:\chi_{s_1,s_2}(T'_\mu)\to\chi_{s_1,s_2}(T'_\mu)$. Usando estimativas similares podemos mostrar que $A:\chi_{s_1,s_2}(T_\mu)\to\chi_{s_1,s_2}(T_\mu)$ é uma contração. Isto completa a prova do teorema. □

Observação 2.2.6. Usando a equação integral (2.2.4), a parte a) da Proposição 2.2.2, e um argumento *bootstrapping* podemos mostrar que $u_\mu\in H^{\infty,\infty}=\bigcap_{s_1,s_2\in\mathbb{R}} H^{s_1,s_2}$ para todo $t\in(0,T]$ e $\mu>0$.

A próxima proposição é análoga ao Lema 2.1.7 e será útil para extender a solução u_μ a um intervalo $[0,T_{s_1,s_2}]$ onde T_{s_1,s_2} é independente de μ.

Proposição 2.2.7. Sejam $s_2>2$ e $s_1\geq s_2$. Se $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ é real então

$$|(u,uu_x)_{s_1,s_2}|\leq c\|u\|^3_{s_1,s_2}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}(u,uu_x)_{s_1,s_2}&=(J_x^{s_1}u,J_x^{s_1}(uu_x))+(J_y^{s_2}u,J_y^{s_2}(uu_x))\\&=(J_x^{s_1}u,[J_x^{s_1},u]u_x)+(J_x^{s_1}u,uJ_x^{s_1}u_x)+(J_y^{s_2}u,[J_y^{s_2},u]u_x)\\&\quad+(J_y^{s_2}u,uJ_y^{s_2}u_x)+(u,uu_x).\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

Fixando y no Teorema 1.0.13, obtemos

$$\|[J_x^{s_1},u]u_x\|_{L^2_x}\leq c(\|u_x\|_{L^\infty_x}\|J_x^{s_1-1}u_x\|_{L^2_x}+\|J_x^{s_1}u\|_{L^2_x}\|u_x\|_{L^\infty_x}).$$

Calculando a norma L^2 em y, usando a desigualdade de Hölder e a Proposição 2.2.3, obtemos

$$\|[J_x^{s_1},u]u_x\|\leq c\|u\|^2_{s_1,s_2}.\tag{2.2.6}$$

Usando argumentos similares e a desigualdade de Young, deduzimos que

$$\|[J_y^{s_2},u]u_x\|\leq c\|u\|^2_{s_1,s_2}.\tag{2.2.7}$$

Antes de prosseguir, note que como u é real então $J_x^{s_1}u = \overline{J_x^{s_1}u}$. Então, integrando por partes

$$\begin{aligned}(J_x^{s_1}u, uJ_x^{s_1}u_x) &= (J_x^{s_1}u\partial_x(J_x^{s_1}u), u)\\ &= \frac{1}{2}(\partial_x(J_x^{s_1}u)^2, u)\\ &= -\frac{1}{2}((J_x^{s_1}u)^2, \partial_x u)\\ &\leq \|u_x\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}u\|^2\\ &\leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

De maneira similar,

$$(J_y^{s_2}u, uJ_y^{s_2}u_x) \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3. \tag{2.2.9}$$

Temos ainda usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a Proposição 2.2.3.

$$|(u, uu_x)| \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3. \tag{2.2.10}$$

De (2.2.5)–(2.2.10) e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos o resultado. □

Com o próximo teorema atingimos o objetivo principal nesta seção.

Teorema 2.2.8. Seja $\phi \in H^{s_1,s_2}$, onde $s_2 > 2$ e $s_1 \geq s_2$. Então existe $T = T(\|\phi\|_{s_1,s_2})$ e uma única solução $u \in C([0,T]; H^{s_1,s_2})$ do PVI (2.1.1). Além disso, a aplicação dado-solução $\phi \mapsto u \in C([0,T]; H^{s_1,s_2})$ é contínua e existe uma função $\rho \in C([0,T]; \mathbb{R})$ tal que

$$\|u(t)\|_{s_1,s_2}^2 \leq \rho(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{2.2.11}$$

Demonstração. Utilizando os resultados acima, a demonstração segue os mesmos passos da prova do Teorema 2.1.15. □

Capítulo 3

Teoria local em espaços de Sobolev com peso

Neste capítulo estudaremos o decaimento da solução do PVI (2.1.1), quando $|(x,y)| \to \infty$. Primeiro estudaremos o comportamento da solução quando consideramos espaços de Sobolev com pesos inteiros, e em seguida consideramos o caso de pesos fracionários. No primeiro caso, nos baseamos na abordagem contida em [27] e [38], enquanto que no segundo caso usamos as técnicas estabelecidas em [17].

3.1 Pesos inteiros

O lema a seguir será usado na prova do Teorema 3.1.2.

Lema 3.1.1. Seja $F_\mu(t,\xi,\eta) = \exp(t(i\xi^2 \mathrm{sgn}(\xi) + i\xi\eta^2 - \mu(\xi^2+\eta^2)))$. Então pondo $q = q_\mu(\xi,\eta) = 2\xi(\mathrm{sgn}(\xi) + i\mu) + \eta^2$ temos

$\partial_\xi F_\mu = itqF_\mu,$

$\partial_\xi^2 F_\mu = [2it(\mathrm{sgn}(\xi)+i\mu) - t^2q^2]F_\mu,$

$\partial_\xi^3 F_\mu = 4it\delta(\xi)e^{-\mu\eta^2 t} - [6t^2(\mathrm{sgn}(\xi)+i\mu)q - it^3q^3]F_\mu,$

$\partial_\xi^4 F_\mu = [4it\partial_\xi\delta(\xi) - 6t^2\eta^2\delta(\xi)]e^{-\mu\eta^2 t} - [6t^2(\mathrm{sgn}(\xi)+i\mu)^2 - 6it^3(\mathrm{sgn}(\xi)+i\mu)q^2 + t^4q^4]F_\mu,$

em geral temos

$$\partial_\xi^{2k} F_\mu = \sum_{j=0}^{2k-3} p_j^k(t,\mu,\eta^2)e^{-\mu\eta^2 t}\partial_\xi^j\delta(\xi) + \sum_{j=k}^{2k} t^j(\mathrm{sgn}(\xi)+i\mu)^{2k-j}q^{2(j-k)}F_\mu,\ k \geq 2,$$

onde os p_j^k são polinômios homogênios em t, μ, η^2 de grau $2k-3-j$ em η^2, e

$$\partial_\xi^{2k-1} F_\mu = \sum_{j=0}^{2k-4} a_j^k(t,\mu,\eta^2) e^{-\mu\eta^2 t} \partial_\xi^j \delta(\xi) + \sum_{j=k}^{2k-1} t^j (h+i\mu)^{2k-1-j} q^{2(j-k)} F_\mu, \ k \geq 3,$$

onde os a_j^k são polinômios homogênios em t, μ, η^2 de grau $2k-4-j$ em η^2. Além disso pondo $r = r(\xi,\mu) = 2i\xi - \mu$, temos que $\partial_\eta F_\mu = 2\eta t(i\xi - \mu) F_\mu$, $\partial_\eta^2 F_\mu = [tr + (t\eta r)^2] F_\mu$, em geral

$$\partial_\eta^{2k} F_\mu = \sum_{j=k}^{2k} b_j (tr)^j \eta^{2(j-k)} F_\mu, \ k \geq 2$$

$$\partial_\eta^{2k-1} F_\mu = \sum_{j=k}^{2k-1} c_j (tr)^j \eta^{2(j-k)+1} F_\mu, \ k \geq 1,$$

onde $b_j, c_j \in \mathbb{C}$.

Demonstração. A demonstração segue, derivando no sentido distribucional e notando que $\partial_\xi q = 2(\mathrm{sgn}(\xi) + i\mu)$ e $\partial_\xi (\mathrm{sgn}(\xi) + i\mu)^k = k(i\mu)^{k-1}\delta(\xi)$. □

Vamos obter uma condição necessária para a persistência de solução da BO-ZK, no espaço $L_1^2(\mathbb{R}^2)$. De fato, seja $\phi \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$ e suponha que $u(t) \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall t \in [0,T]$. Então

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{u} &= \partial_\xi e^{it(|\xi|\xi + \xi\eta^2)} \hat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \partial_\xi \hat{\phi} \\ &= it(2|\xi| + \eta^2) e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \hat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \partial_\xi \hat{\phi}, \end{aligned}$$

pelo membro direito da última igualdade devemos ter

$$\xi\hat{\phi} \in L^2 \text{ e } \eta^2 \hat{\phi} \in L^2. \tag{3.1.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_\eta \hat{u} &= \partial_\eta e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \hat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \partial_\eta \hat{\phi} \\ &= 2it\xi\eta e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \hat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)} \partial_\xi \hat{\phi}, \end{aligned}$$

portanto

$$\xi\eta\hat{\phi} \in L^2. \tag{3.1.2}$$

Então, o dado inicial ϕ deve pertencer ao espaço

$$\tilde{H}^2 = \{\psi \in L^2 : \partial_x \psi, \partial_y^2 \psi, \partial_x \partial_y \psi \in L^2\}.$$

Em particular se $\phi \in H^2(\mathbb{R}^2)$, então ϕ pertence a este espaço. Se $\phi \in L_2^2$, observe que

$$\partial_\xi^2 \hat{u} = \Big([2it\text{sgn}(\xi) - t^2(2|\xi|+\eta^2)^2]\hat{\phi} + it(2|\xi|+\eta^2)\partial_\xi \hat{\phi} + \partial_\xi \hat{\phi}\Big)e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}$$

e

$$\partial_\eta^2 \hat{u} = \Big([2it\xi + 2i(t\xi\eta)^2]\hat{\phi} + 2\eta ti\xi\partial_\eta \hat{\phi} + \partial_\eta \hat{\phi}\Big)e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}.$$

Para garantirmos a persistência da solução u em L^2_2, o dado inicial ϕ deve pertencer ao espaço

$$\tilde{H}^4 = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \partial_x\psi, \partial_x^2\psi, \partial_y^4\psi, \partial_x(x\psi), x\partial_y^2\psi, \partial_y^2\partial_y^2(y\psi) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Observe que $\tilde{H}^4 \supset H^4$. Isto nos leva a buscar soluções da BO-ZK nos espaços da forma $\mathcal{Z}_{s,r}$, onde $s \geq 2r$.

O próximo resultado será usado no estudo da boa colocação nos espaços $\mathcal{Z}_{s,r}$, onde r é um inteiro não negativo.

Teorema 3.1.2. a) Seja $s \geq 2r$, onde $r = 0, 1, 2$, então $E_\mu(t)$ definido por (2.1.4) é um semigrupo de classe C_0 em $\mathcal{Z}_{s,r}$ que satisfaz

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s,r} \leq p_r(t)\|\phi\|_{s,r}, \quad \forall\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}\ , \mu > 0, t \geq 0, \tag{3.1.3}$$

onde p_r é um polinômio com coeficientes não negativos que dependem de μ, de grau r em t.

b) Sejam $s \geq 2r$, $r \geq 3$, $\mu \geq 0$ e $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$, então $v_\mu(\cdot) = E_\mu\phi(\cdot) \in C([0,\infty); \mathcal{Z}_{s,r})$, se e somente se,

$$\partial_\xi^j \hat{\phi}(0,\eta) = 0, \forall j = 0, 1, ..., r-3,\ \eta \in \mathbb{R}. \tag{3.1.4}$$

No caso $\mu > 0$ vale uma estimativa da forma (3.1.3). Observe que (3.1.4) é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} x^j \phi(x,y)dx = 0, \forall y \in \mathbb{R}, j = 0, 1, ..., r-3. \tag{3.1.5}$$

Demonstração. a) O caso $r = 0$ é trivial pois $E_\mu(t)$ é um semigrupo de contrações em H^s.

Caso $r = 1$. Pelos Lemas 2.1.1 e 3.1.1 temos

$$|\partial_\xi F_\mu| \leq c_\mu(t|\xi|+1) \text{ e } |\partial_\eta F_\mu| \leq c_\mu(t|\eta|+1).$$

Portanto

$$\|xE_\mu(t)\phi\|^2 \leq c_\mu(t^2+1)\|\phi\|^2_{L^2_1} \text{ e } \|yE_\mu(t)\|^2 \leq c_\mu(t^2+1)\|\phi\|^2_{L^2_1}.$$

Então

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_1}\leq c_\mu(t+1)\|\phi\|_{L^2_1}.$$

Da última desigualdade e da Proposição 2.1.2 obtemos

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s,1}\leq c_\mu(t+1)\|\phi\|_{s,1}.$$

Caso $r=2$. Novamente pelo Lemas 2.1.1 e 3.1.1 temos que

$$|\partial_\xi^2 F_\mu|\leq c_\mu(\xi^2t^2+t+1) \text{ e } |\partial_\eta^2 F_\mu|\leq c_\mu(t^2+t|\xi|+1).$$

Portanto,

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_2}\leq d_2(t)\|\phi\|_{L^2_2},$$

onde d_2 é um polinômio de grau 2 em t, daí e da Proposição 2.1.2 segue que

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s,2}\leq p_2(t)\|\phi\|_{s,2}.$$

b) Suponha que $E_\mu(\cdot)\phi\in C([0,\infty);\mathcal{Z}_{s,3})$, logo $x^3E_\mu(\cdot)\phi\in C([0,\infty);L^2)$, mas

$$\widehat{x^3E_\mu(t)}\phi = 4ite^{-\mu\eta^2 t}\hat{\phi}(0,\eta)\delta(\xi)+G(t,\xi,\eta),$$

onde $G(\cdot,\cdot,\cdot)\in C([0,\infty);L^2)$, portanto devemos ter $\hat{\phi}(0,\eta)=0$.
Se $r=4$, temos em particular $\hat{\phi}(0,\eta)=0$, daí pelo argumento acima teremos

$$\partial_\xi\hat{\phi}(0,\eta)=0.$$

Assim o resultado segue por indução. □

O resultado a seguir representa um princípio de continuação única para o PVI (2.1.3).

Corolário 3.1.3. Sejam $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\phi(\cdot,y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\forall y\in\mathbb{R}$ e $v_\mu=E_\mu\phi(\cdot)$. Suponha que para $\mu\geq 0$ existem R, $t>0$ tais que

$$\text{supp } v_\mu(t,\cdot,y)\subset[-R,R],\forall y\in\mathbb{R}.$$

Então

$$v_\mu\equiv 0.$$

Demonstração. Temos $\partial_\xi^j \hat{v}_\mu(t) \in L^2$, para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato

$$\begin{aligned} \|x^j v_\mu(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x^{2j}|v_\mu(t)|^2 dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{-R}^{R} x^{2j}|v_\mu(t)|^2 dxdy \\ &\leq R^{2j}\|v_\mu(t)\|_{L^2}^2 \leq R^{2j}\|\phi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.1.2 temos

$$\int x^j \phi(x,y) dxdy = 0, \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Então $\frac{d^j}{d\xi^j}\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(0) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{F}^x$ denota a transformada de Fourier em relação à variável x. Logo, pela série de Taylor de $\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(\xi)$ numa vizinhança de $\xi = 0$, temos que $\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(\xi) = 0, \forall\, \xi \in (-r,r)$. Seja

$$\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izx}\phi(x,y)dx = \int_{-R(y)}^{R(y)} e^{-izx}\phi(x,y)dx.$$

Como $(-r,r) \subset (\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y))^{-1}(0)$ e $\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)$ é analítica, para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}$. Portanto $\mathcal{F}^x\phi(\cdot,y)(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, logo $\phi(x,y) = 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$, pois $\mathcal{F}^x$ é injetiva. $\square$

O resultado seguinte nos mostra uma versão para espaços com peso da Proposição 2.1.2.

Proposição 3.1.4. Seja $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, $\gamma \in [0,1]$ e $\mu > 0$. Então para todo $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$ e $t > 0$ temos que $E_\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{s,\gamma}; \mathcal{Z}_{s+\lambda,\gamma})$ e

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s+\lambda,\gamma} \leq K_\gamma(t,\mu,\lambda)\|\phi\|_{s,\gamma},$$

onde K_λ é contínua. Além disso a aplicação $t \in (0,\infty) \mapsto E_\mu(t)\phi \in \mathcal{Z}_{s+\lambda,\gamma}$ é contínua.

Demonstração. Observe que pela teoria em H^s, é suficiente mostrar que para toda $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_\gamma} \leq Q_\gamma(t,\mu,\lambda)\|\phi\|_{L^2_\gamma},$$

onde Q_γ é contínua. Temos que $\|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_0} \leq \|\phi\|_{L^2_0}$ e $\|E_\mu(t)\|_{L^2_1} \leq p_1(t,\mu)\|\phi\|_{L^2_1}$. Então pelo Teorema de interpolação de Stein-Weiss (veja [4], pág 115), temos que

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_\gamma} \leq p_1(t,\mu)^\gamma\|\phi\|_{L^2_\gamma},$$

para todo $\mu, t > 0$. $\square$

No próximo resultado exibiremos uma solução para o PVI regularizado (2.1.2), no espaço $\dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$.

Teorema 3.1.5. Seja $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$, onde $s \geq 6$, então para todo $\mu > 0$ existe uma única $u_\mu \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,3})$ que é solução do PVI (2.1.2).

Demonstração. Mostraremos que existe $T = T(\|\phi\|_{s,3},\mu)$ tal que

$$\Phi u(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(uu_x)(t')dt'$$

é uma contração no espaço métrico completo

$$X_T = \{f \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,3})| \ \ \|f(t) - E_\mu(t)\phi\|_{s,3} \leq \|\phi\|_{s,3}, \forall t \in [0,T]\}.$$

De fato, note que se $u \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,3})$, então pelo teorema da convergência dominada $\Phi u \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,3})$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\|E_\mu(t-t')(uu_x)(t')\|_{L^2_3} \leq & c(\|\partial_\xi^3(F_\mu(t-t',\xi,\eta)\xi\widehat{u^2})\| + \|\partial_\eta^3(F_\mu(t-t',\xi,\eta)\xi\widehat{u^2})\| \\ & + \|E_\mu(t-t')uu_x\|) \\ = & A + B + C.\end{aligned}$$

Além disso

$$A \leq c\|\partial_\xi^3 F_\mu \xi\widehat{u^2} + \partial_\xi^2 F_\mu\widehat{u^2} + \partial_\xi^2 F_\mu\xi\partial_\xi\widehat{u^2} + \partial_\xi F_\mu\xi\partial_\xi^2\widehat{u^2} + \partial_\xi F_\mu\partial_\xi\widehat{u^2} + F_\mu\partial_\xi^2\widehat{u^2} + F_\mu\xi\partial_\xi^3\widehat{u^2}\|.$$

Pelo Lema 2.1.1

$$|\xi\partial_\xi^3 F_\mu| \leq c[(t-t')^2 + (t-t') + 1], |\partial_\xi^2 F_\mu| \leq c[(t-t')+1], |\partial_\xi F_\mu| \leq c[(t-t')^{1/2}+1]$$

e

$$|\xi F_\mu| \leq c(t-t')^{-1/2}.$$

Como $\hat{\phi}(0,\eta) = 0, \forall \eta \in \mathbb{R}$, pelo item b) do Teorema 3.1.2

$$\|u(t')\|_{L^2_3} \leq \|u(t') - E_\mu(t')\phi\|_{L^2_3} + \|E_\mu(t')\phi\|_{L^2_3} \leq \|\phi\|_{s,3} + \|E_\mu(t')\phi\|_{s,3} \leq 2p_3(T)\|\phi\|_{s,3}.$$

Portanto das desigualdades anteriores

$$A^2 \leq c(T^2 + T + T^{1/2} + 1 + (t-t')^{-1/2})\|\phi\|^2_{s,3}.$$

De maneira análoga, usando os lemas 2.1.1, 3.1.1 e o Teorema 3.1.2

$$B^2 \leq c(T^2 + T + T^{1/2} + 1 + (t - t')^{-1/2})\|\phi\|_{s,3}^2,$$

e

$$C^2 \leq c(2 + p_3(T))^2\|\phi\|_{s,3}^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|\Phi u(t) - E_\mu(t)\phi\|_{L_3^2} &\leq \left[\int_0^T c(T^2 + T + T^{1/2} + 1 + (t - t')^{-1/2}) + (2 + p_3(T))^2)\|\phi\|_{s,3}dt'\right]\|\phi\|_{s,3} \\ &\leq \alpha(T)\|\phi\|_{s,3}. \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior vemos que existe $T_1 = T_1(\mu, \|\phi\|_{s,3})$ tal que $\alpha(T_1) < 1/2$. Usando a Proposição 2.1.2 podemos mostrar que existe $T_2 = T_2(\mu, \|\phi\|_{s,3})$ tal que

$$\|\Phi u(t) - E_\mu(t)\phi\|_{H^s} \leq \alpha(T_2)\|\phi\|_{s,3}, \forall t \in [0, T_2],$$

e $\alpha(T_2) < 1/2$. Assim tomando $T_3 > 0$ tal que $T_3 \leq \min\{T_1, T_2\}$ temos que $\Phi : \chi_{T_3} \to \chi_{T_3}$. Analogamente é possível escolher $T > 0$ tal que $\Phi : \chi_T \to \chi_T$ é uma contração. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, o PVI (2.1.2) possui uma solução u_μ. A solução é única pois temos unicidade em H^s. $\square$

O próximo resultado será usado na prova do Teorema 3.1.7.

Lema 3.1.6. Sejam $\mu > 0$, $t \in (0, T]$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, então para todo $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{3,3}(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\|x^3 D^\alpha E_\mu(t)\phi\| \leq c_{\mu,T,|\alpha|}\gamma_1(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{3,3} \tag{3.1.6}$$

e

$$\|y^3 D^\alpha E_\mu(t)\phi\| \leq c_{\mu,T,|\alpha|}\gamma_2(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{3,3}, \tag{3.1.7}$$

onde γ_i é contínua e $\gamma_i(t) \to 1$, com $t \to 0+$.

Demonstração. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, então

$$\begin{aligned} \|x^3 D^\alpha E_\mu(t)\phi\| &= \|\partial_\xi^3(\xi^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}F_\mu\hat{\phi})\| \\ &= \|\sum_{j=0}^m c_j\xi^{\alpha_1-j}\eta^{\alpha_2}\partial_\xi^{3-j}(F_\mu\hat{\phi})\| \\ &\leq \sum_{j=0}^m(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{|\alpha|-j}{2}}\|\partial_\xi^{3-j}(F_\mu\hat{\phi})\| = A \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

onde $m = \min\{3, \alpha_1\}$. Temos que

$$|\partial_\xi^i F_\mu| \leq c(T)t^i[1 + (\xi^2 + \eta^2)^i]e^{-\mu t(\xi^2+\eta^2)}, \ 0 \leq i \leq 3. \tag{3.1.9}$$

Levando (3.1.9) em (3.1.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\|x^3 D^\alpha E_\mu(t)\phi\| &\leq \sum_{j=0}^{m} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{|\alpha|-j}{2}} \sum_{i=0}^{3-j} |\partial_\xi^i F_\mu| \|\partial_\xi^{3-j-i}\hat{\phi}\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{3-j} c(i,j,T)t^i(\xi^2+\eta^2)^{\frac{|\alpha|-j}{2}}[1+(\xi^2+\eta^2)^i]e^{-\mu t(\xi^2+\eta^2)}\|x^{3-j-i}\phi\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{3-j} c(i,j,T,\alpha,\mu)[t^{\frac{-|\alpha|+j+4i}{4}} + t^{\frac{-|\alpha|+j+2i}{4}}]\|\phi\|_{3,3} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{j-3} c(i,j,T,\alpha,\mu)t^{-\frac{|\alpha|}{2}}[t^{\frac{|\alpha|+j+4i}{4}} + t^{\frac{|\alpha|+j+2i}{4}} + 1]\|\phi\|_{3,3} \\
&= c_{\mu,T,|\alpha|}\gamma(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{3,3}.
\end{aligned}$$

Procedemos de forma análoga para obter (3.1.7). □

Teorema 3.1.7. Sejam $s \geq 6$, $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$ e $u = u_\mu$, solução do PVI (2.1.2) para $\mu \geq 0$, então

$$|u(t)|_{L_3^2} \leq |\phi|_{L_3^2}^2 + \int_0^t k(t')G(t')dt', \tag{3.1.10}$$

onde $k(t) = c(\mu + \rho(t))$, $g(t) = |\phi|_{L_3^2} + \rho(t)$,

$$G(t) = g(t) + \int_0^t g(s)\exp[\int_0^s k(\tau)d\tau]k(s)ds,$$

$\|u(t)\|_{H^6}^2 \leq \rho(t)$, $\rho \in C([0,T];\mathbb{R}_+)$ e $|\cdot|_{L_3^2}^2 = \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|_{L^2(x^3)}^2 + \|\cdot\|_{L^2(y^3)}^2$. Além disso $u_0 \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,3})$.

Demonstração. Seja $u = u_\mu$, $\mu > 0$, então pelo Lema 3.1.6, utilizando a equação integral (2.1.5) e um argumento análogo ao que aparece em [38], obtemos $x^3D^\alpha u(t) \in L^2$ e $y^3D^\alpha u(t) \in L^2$, para $t \in (0,T]$, onde $|\alpha| = 0,1,2,3$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x^3u(t)\|^2 &= -2(x^3u, x^3(\mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + u\partial_x u - \mu\Delta u)) \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4,
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|y^3u(t)\|^2 &= -2(y^3u, y^3(\mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + u\partial_x u - \mu\Delta u)) \\
&= B_1 + B_2 + B_3 + B_4.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Integrando por partes temos

$$|A_4| \leq 40\mu \|u(t)\|^2_{L^2_3}, \tag{3.1.13}$$

e

$$|B_4| \leq 40\mu \|u(t)\|^2_{L^2_3}. \tag{3.1.14}$$

Também,

$$|A_3| \leq \|u_x\|_\infty \|u\|_\infty \|u\|^2_{L^2_3} \leq \rho(t)\|u(t)\|^2_{L^2_3}, \tag{3.1.15}$$

$$|B_3| \leq \|u_x\|_\infty \|u\|_\infty \|u\|^2_{L^2_3} \leq \rho(t)\|u(t)\|^2_{L^2_3}. \tag{3.1.16}$$

Para o restante dos termos podemos escrever $B_1 = -i(\partial^3_\eta \hat{u}, \xi^3 \partial^3_\eta \hat{u})$, então temos que Re $B_1 = 0$.

$$\begin{aligned} A_1 &= (x^3 u, x^3 \mathcal{H}\partial^2_x u) \\ &= -i(\partial^3_\xi \hat{u}, 2\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi \hat{u} + 2\xi \mathrm{sgn}(\xi)\partial^2_\xi \hat{u} + \xi^2 \mathrm{sgn}(\xi)\partial^3_\xi \hat{u} + 2\delta(\xi)\hat{u}(\xi,\eta)). \end{aligned}$$

Como $\hat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall \eta \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e pelo Lema 1.0.11, temos

$$|\mathrm{Re}\ A_1| \leq c\|u(t)\|^2_{6,3}. \tag{3.1.17}$$

Quanto a B_2, integrando por partes temos

$$B_2 = (y^3 u, y^3 u_{xyy}) = -\frac{15}{2}(y^3 u, y^2 u_x) - (y^3 u, y^2 \partial_x \partial_y u).$$

Usando o Lema 1.0.11 obtemos

$$|(y^3 u, y^3 u_{xyy})| \leq c\|u\|_{6,3}.$$

Quanto ao termo A_2, integrando por partes temos que

$$A_2 = (x^3 u_{xyy}, x^3 u) = -\frac{1}{2}(x^3 u, x^2 u_{yy}).$$

Para estimar o último termo observe que pelo Lema 1.0.11, com $a = 6$, $b = 3$ e $\alpha = 1/3$ temos

$$\|J^2(\langle x,y\rangle^2 u)\| \leq c\|\langle x,y\rangle^3 u\| + \|J^6 u\| \leq c\|u\|_{6,3}.$$

Logo,

$$|A_2| \leq \|u\|_{6,3}.$$

Observe que as normas $|\cdot|_{L^2_3}$ e $\|\cdot\|_{L^2_3}$ são equivalentes. Portanto, das estimativas anteriores temos

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_3} \leq c(\mu + \rho(t))\|u(t)\|^2_{6,3}. \tag{3.1.18}$$

Integrando de 0 a t e somando $\|u(t)\|^2_{H^6}$ aos dois lados da desigualdade obtida

$$\|u(t)\|^2_{6,3} \leq \|\phi\|_{L^2_3} + \rho(t) + \int_0^t k(\mu, t')\|u(t')\|_{6,3} dt',$$

onde $k(\mu, t) = c(\mu + \rho(t))$. Seja $g(t) = |\phi|_{L^2_3} + \rho(t)$, pelo Lema de Gronwall

$$\|u(t)\|^2_{6,3} \leq g(t) + \int_0^t g(t') \exp[\int_0^{t'} k(\tau)d\tau]k(t')dt'. \tag{3.1.19}$$

Levando (3.1.19) em (3.1.18) obtemos (3.1.10). A continuidade pode ser vista da seguinte forma. De forma análoga à teoria em H^s podemos mostrar que

$$\lim_{\mu\to 0} \sup_{[0,T]} \|u_\mu(t) - u_0(t)\|_{L^2_3} = 0, \tag{3.1.20}$$

disto e de $u_\mu \in C([0,T]; L^2_3)$, para $\mu > 0$, segue que $u_\mu \rightharpoonup u_0$, com $\mu \to 0$, uniformemente em $[0,T]$. Daí obtemos a desigualdade (3.1.10) para $\mu = 0$. De (3.1.20) temos que $u_0 : [0,T] \to L^2_3$ é fracamente contínua. Usando (3.1.10), temos que u_0 é contínua em $t = 0$. Portanto u_0 é contínua em $[0,T]$. $\square$

Teorema 3.1.8. O PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $\dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$, onde $s \geq 6$.

Demonstração. Seja u_0 a solução de (2.1.1) dada pelo Teorema 2.1.7. A solução é única pois temos unicidade em H^s.

A seguir provaremos a dependência contínua. Sejam $\phi, \psi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$ e $u = u_\mu, v = v_\mu$, $\mu > 0$, tais que $u(0) = \phi, v(0) = \psi$, então pondo $w = u - v$. Temos

$$(\langle x, y\rangle^6 w, \partial_x(u^2 - v^2)) = (\langle x, y\rangle^6 w, \partial_x w(u + v) + w\partial_x(u + v)).$$

Estimando estes termos temos

$$\begin{aligned} |(\langle x, y\rangle^6 w, \partial_x w(u + v))| &\leq c[|(x\langle x, y\rangle^4 w, w(u + v))| + |(\langle x, y\rangle^6 w, w\partial_x(u + v))|] && (3.1.21)\\ &\leq c(\|u\|_{H^6} + \|v\|_{H^6})\|w\|^2_{L^2_3} && (3.1.22) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |(\langle x, y\rangle^6 w, w\partial_x(u + v))| &\leq \|\partial_x(u + v)\|_\infty \|w\|^2_{L^2_3} && (3.1.23)\\ &\leq c(\|u\|_{H^6} + \|v\|_{H^6})\|w\|^2_{L^2_3}. && (3.1.24) \end{aligned}$$

Portanto de

$$w_t + \mathcal{H}\partial_x^2 w + w_{xyy} + ww_x = \mu\Delta w, t \in [0,T],$$

e da demonstração do último teorema,

$$\partial_t \|w\|^2_{L^2_3} \leq [\mu + 1 + c(\rho^u(t)^{\frac{1}{2}} + \rho^v(t)^{\frac{1}{2}})]\|w\|^2_{6,3},$$

onde ρ^u e ρ^v satisfazem

$$\|u(t)\|^2_s \leq \rho^u(t), \rho^u(0) = \|\phi\|^2_s \ e \ \|v(t)\|^2_s \leq \rho^v(t), \rho^v(0) = \|\psi\|^2_s, \ \forall\ t \in [0,T].$$

Seja $K(t,\mu) = \mu + 1 + \rho^u(t)^{\frac{1}{2}} + \rho^v(t)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\|w(t)\|_{L^2_3} \leq \|w(0)\|_{L^2_3} + \int_0^t \|w(t')\|_{H^s} K(t',\mu)dt' + \int_0^t K(t',\mu)\|w(t')\|^2_{L^2_3} dt'.$$

Assim, pelo lema de Gronwall temos

$$\|w(t)\|_{L^2_3} \leq g(t) + \int_0^t g(t') \exp[\int_0^{t'} K(s,\mu)ds] K(t',\mu)dt', \tag{3.1.25}$$

onde $g(t) = \|w(0)\|_{L^2_3} + \int_0^t \|w(t')\|_{H^s} K(t',\mu)dt'$. Portanto, para $\mu > 0$ concluímos que

$$\sup_{[0,T]} \|w(t)\|_{L^2_3} \to 0,$$

com $\phi \to \psi$ em $\dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$. Para o caso $\mu = 0$, pondo $w_0 = u_0 - v_0$, temos

$$|(w_0,\phi)| = \lim_{\mu\to 0} |(w,\phi)| \leq \|\phi\|_{L^2_3} \lim_{\mu\to 0} G(t,\mu) = \|\phi\|_{L^2_3} G(t,0), \ \text{uniformemente em} \ [0,T],$$

onde $G(t,\mu)$ é o membro direito de (3.1.25). Tomando o supremo sobre $\|\phi\|_{L^2_3} = 1$, na desigualdade anterior temos que

$$\|w_0(t)\|_{L^2_3} \leq G(t,0) \leq G(T,0) \to 0, \ \text{com} \ \phi \to \psi.$$

Isto conclui a demonstração do Teorema. □

Observação 3.1.9. Usando argumentos dos dois últimos teoremas podemos mostrar a boa colocação local nos espaços $\mathcal{Z}_{s,2}$, para $s \geq 4$ e $\mathcal{Z}_{s,1}$, onde $s > 2$.

3.2 Pesos fracionários

Nesta seção estudaremos o comportamento da solução nos espaços de Sobolev com pesos fracionários, isto é, nos espaços $\mathcal{Z}_{s,r}$ onde $r \in \mathbb{R}$.

Dado $s \in \mathbb{R}$ e $w : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, definimos o espaço de Sobolev com peso w por

$$H^s(w^2) = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(w^2 dxdy).$$

Usaremos o lema a seguir na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.2.1. Seja w um peso com as derivadas parciais de primeira até terceira ordem limitadas. Definindo

$$w_\lambda(x, y) = w(x, y)e^{-\lambda(x^2+y^2)}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, 1),$$

existe uma constante c, independente de λ, tal que

$$\|D^\alpha w_\lambda\|_\infty \leq c,$$

para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^2$, com $|\alpha| = 1, 2, 3$.

Demonstração. Seja $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Da desigualdade do valor médio temos,

$$|w(x, y) - w(0, 0)| \leq r\|\nabla w\|_\infty. \tag{3.2.1}$$

Então $|w(x, y)| \leq r\|\nabla w\|_\infty + |w(0, 0)|$. Uma vez que $\partial_x w_\lambda = (w_x - 2\lambda x w)e^{-\lambda r^2}$, obtemos

$$|\partial_x w_\lambda| \leq c(\|w_x\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty + |w(0, 0)|),$$

onde usamos a desigualdade $r^a e^{-\lambda r^2} \leq c_a \lambda^{-a/2}$, para todo $\lambda, a > 0$, que é dada pelo Lema 2.1.1. Além disso, como

$$\partial_x^2 w_\lambda = (w_{xx} - 4\lambda x w_x - 2\lambda w + 4\lambda^2 x^2 w)e^{-\lambda r^2},$$

deduzimos que

$$|\partial_x^2 w_\lambda| \leq c(\|w_{xx}\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty + |w(0, 0)|).$$

Os cálculos para as derivadas mistas de segunda ordem são similares. Finalmente, temos

$$\partial_x^3 w_\lambda = (w_{xxx} - 6\lambda x w_{xx} - 6\lambda w_x + 12\lambda^2 x^2 w_x + 12\lambda^2 x w - 8\lambda^3 x^3 w)e^{-\lambda r^2}.$$

Como acima existe c_3, independente de λ, tal que $\|\partial_x^3 w_\lambda\|_\infty \leq c_3$. Para as derivadas mistas de terceira ordem o argumento é análogo. $\square$

Seja w nas hipóteses do Lema 3.2.1. Para todo $\lambda \in (0,1)$, a desigualdade (3.2.1) implica que existe $c_\lambda > 0$, dependendo de λ, tal que

$$|w(x,y)| \leq c_\lambda e^{\lambda(x^2+y^2)}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.2.2. Seja w um peso com as derivadas parciais de primeira até terceira ordem limitadas. Então, o PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $H^s(w^2)$, onde $s > 2$.

Demonstração. Existência e unicidade: Seja $\phi \in H^s(w^2)$, $s > 2$. Pelo Teorema 2.1.11 e Lema 2.1.7 existe um $T > 0$, tal que, para todo $\mu \geq 0$, as únicas soluções (em H^s) de (2.1.1) e (2.1.2) são definidas no mesmos intervalo $[0,T]$ e satisfazem

$$\|u_\mu(t)\|^2_{H^s} \leq \rho(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3.2.2}$$

Aqui, estamos denotando por $u_0 := u$ e $u_\mu, \mu > 0$, as soluções de (2.1.1) e (2.1.2), respectivamente. Definimos $M := \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t)\|_{H^s}$. De (3.2.2), podemos ver que M não depende de $\mu \geq 0$.

Persistência: Para simplificar a notação, no que segue escreveremos para $\mu > 0$, $u_\mu = v$. Seja w_λ como no Lema 3.2.1. Usando a Observação 2.2.6, multiplicando a equação (2.1.2) por $w_\lambda^2 v$ e integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\lambda v\|^2 = (w_\lambda v, -w_\lambda \mathcal{H}\partial_x^2 v - w_\lambda v_{xyy} - w_\lambda v v_x + \mu w_\lambda \Delta v). \tag{3.2.3}$$

Estimaremos o membro direito de (3.2.3). Como o operador $\mathcal{H}\partial_x^2$ é antissimétrico, podemos escrever

$$(w_\lambda v, w_\lambda \mathcal{H}\partial_x^2 v) = (w_\lambda v, [w_\lambda, \mathcal{H}]\partial_x^2 v) + (w_\lambda v, \mathcal{H}[w_\lambda, \partial_x^2]v). \tag{3.2.4}$$

Usando o Teorema 1.0.5, a desigualdade de Hölder e o Lema 3.2.1, obtemos

$$\|[w_\lambda, \mathcal{H}]\partial_x^2 v\| \leq c\|\partial_x^2 w_\lambda\|_\infty \|v\| \leq cM.$$

Além disso, como $\mathcal{H}$ é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^2)$, o Lema 3.2.1 implica que

$$\|\mathcal{H}[w_\lambda, \partial_x^2]v\| = \|[w_\lambda, \partial_x^2]v\| = \|\partial_x^2 w_\lambda v + 2\partial_x w_\lambda \partial_x v\| \leq cM.$$

Então, de (3.2.4), temos

$$|(w_\lambda v, w_\lambda \mathcal{H}\partial_x^2 v)| \leq cM\|w_\lambda v\|. \tag{3.2.5}$$

A seguir, notamos que

$$\begin{aligned}|(w_\lambda v, w_\lambda v_{xyy})| &= |(w_\lambda v, [w_\lambda, \partial^3_{xyy}]v) + (w_\lambda v, \partial^3_{xyy}(w_\lambda v))| \\ &\leq cM\|w_\lambda v\|,\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

onde usamos a antissimetria do operador ∂^3_{xyy} e o Lema 3.2.1 para obter

$$\|[w_\lambda, \partial^3_{xyy}]v\| = \|\partial^3_{xyy} w_\lambda v + 2\partial^2_{xy} w_\lambda \partial_y v + \partial_x w_\lambda \partial^2_y v + \partial^2_y w_\lambda \partial_x v + 2\partial_y w_\lambda \partial^2_{yx} v\| \leq cM.$$

Integrando por partes, vemos que

$$\begin{aligned}(w_\lambda v, w_\lambda \Delta v) &= (w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v) + (w_\lambda v, \Delta(w_\lambda v)) \\ &= (w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v) - \|\nabla(w_\lambda v)\|^2 \\ &\leq |(w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v)| \\ &\leq cM\|w_\lambda v\|,\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

onde usamos o Lema 3.2.1 para obter

$$\|[w_\lambda, \Delta]v\| = \|(\Delta w_\lambda)v - 2\nabla w_\lambda \cdot \nabla v\| \leq \|\Delta w_\lambda\|_\infty \|v\| + 2\|\nabla w_\lambda\|_\infty \|\nabla v\| \leq cM.$$

Finalmente, temos

$$|(w_\lambda v, w_\lambda v v_x)| \leq \|v_x\|_\infty \|w_\lambda v\|^2 \leq M\|w_\lambda v\|^2. \tag{3.2.8}$$

Portanto, reunindo (3.2.4)–(3.2.8), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w_\lambda v(t)\|^2 \leq 2c^2M^2 + c^2M^2\mu^2 + (2+M)\|w_\lambda v(t)\|^2.$$

Pelo Lema de Gronwall (veja por exemplo [22, pág. 369]), podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\|w_\lambda v(t)\|^2 &\leq \|w_\lambda \phi\|^2 + t^2c^2M^2(2+\mu^2) + \int_0^t g_\lambda(s)ds \\ &= \|w_\lambda \phi\|^2 + G(t,\mu,\lambda), \quad t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

onde $g_\lambda(s) = (\|w_\lambda \phi\|^2 + s^2c^2M^2(2+\mu^2))(2+M)\exp[(2+M)s]$. Notemos que a constante c em (3.2.9) é independente de λ e G é uma uma função contínua. Portanto, de (3.2.9) obtemos a persistência da solução u_μ, para todo $\mu > 0$.

Fixado $\lambda \in (0,1)$, usando a desigualdade (3.2.2), a equação (2.1.2), e o Lema de Gronwall não é difícil provar que $\{u_\mu\}_{\mu>0}$ é uma rede de Cauchy em $L^2_{w_\lambda} = L^2(w^2_\lambda dxdy)$ e $u_\mu \to u$ em $L^2_{w_\lambda}$, com $\mu \downarrow 0$. Portanto, se $\varphi \in L^2_{w_\lambda}$, de (3.2.9), temos

$$|(u,\varphi)_{L^2_{w_\lambda}}| = \lim_{\mu\to 0}|(u_\mu,\varphi)_{L^2_{w_\lambda}}| \leq \|\varphi\|_{L^2_{w_\lambda}} \lim_{\mu\to 0}(\|w_\lambda \phi\| + G(t,\mu,\lambda)).$$

Então, tomando o supremo sobre as funções φ tais que $\|\varphi\|_{L^2_{w_\lambda}}= 1$, na desigualdade acima, encontramos que

$$\|w_\lambda u(t)\|\leq \|w_\lambda \phi\|+G(t,0,\lambda), \quad t\in[0,T], \tag{3.2.10}$$

A seguir, tomando o limite na última desigualdade, com $\lambda\downarrow 0$, e usando o Teorema da convergência monótona, obtemos

$$\|wu(t)\|\leq \|w\phi\|+G(t,0,0),\ \forall t\in[0,T], \tag{3.2.11}$$

onde $G(t,0,0)\to 0$, com $t\to 0$. A desigualdade (3.2.11) então nos dá a persistência da solução u em $L^2_w = L^2(w^2dxdy)$.

<u>Continuidade:</u> Primeiro mostraremos que $u:[0,T]\to L^2_w$ é fracamente contínua. De fato, para qualquer $\varphi\in L^2_w$, definimos $\varphi_\lambda=\varphi e^{-\lambda(x^2+y^2)}$. Pelo Teorema da convergência monótona temos $\varphi_\lambda\to\varphi$ em L^2_w, com $\lambda\downarrow 0$. Dado $\epsilon>0$ escolhemos $\lambda_0>0$ tal que

$$\|\varphi-\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w}< \frac{\epsilon}{4(\|\phi\|_{L^2_w}+G(T,0,0))}.$$

Fixado $t\in[0,T]$, seja $\delta>0$ tal que

$$|t-s|<\delta \Rightarrow \|u(t)-u(s)\|< \frac{\epsilon}{2\|\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2(w^4)}}.$$

Isto é possível em virtude da teoria em H^s e da desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\lambda_0}\|^2_{L^2(w^4)}= &\int_{\mathbb{R}^2} w^4|\varphi(x,y)|^2e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)}dxdy\\
&\leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{w^2e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)}\}\int_{\mathbb{R}^2} w^2|\varphi(x,y)|^2dxdy\\
&\leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{((x^2+y^2)\|\nabla u\|^2_\infty+|w(0,0)|^2)e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)}\}\int_{\mathbb{R}^2} w^2|\varphi(x,y)|^2dxdy\\
&\leq c(w,\lambda_0)\|\varphi\|_{L^2_w}<\infty.
\end{aligned}$$

Então, se $|t-s|<\delta$ de (3.2.11), temos que

$$\begin{aligned}
|(\varphi,u(t)-u(s))_{L^2_w}|&\leq |(\varphi-\varphi_{\lambda_0},u(t)-u(s))_{L^2_w}|+|(\varphi_{\lambda_0},u(t)-u(s))_{L^2_w}|\\
&\leq \|\varphi-\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w}(\|u(t)\|_{L^2_w}+\|u(s)\|_{L^2_w})\\
&\quad + |(w^2\varphi_{\lambda_0},u(t)-u(s))|\\
&\leq 2\|\varphi-\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w}(\|\phi\|_{L^2_w}+G(T,0,0))+\|\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2(w^4)}\|u(t)-u(s)\|\\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}$$

Isto prova nossa afirmação.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\|u(t)-\phi\|^2_{L^2_w} &= \|u(t)\|^2_{L^2_w}+\|\phi\|^2_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}\\ &\leq G(t,0,0)+\|\phi\|^2_{L^2_w}+\|\phi\|^2_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}.\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

A continuidade fraca de u em L^2_w e o fato de que $G(t,0,0)\to 0$, com $t\to 0$, nos permite concluir a continuidade à direita de u em $t=0$. Para finalizar o argumento, fixamos $\tau\in(0,T)$ e usamos a invariância da solução pela translação

$$(t,x,y)\in[0,T-\tau]\times\mathbb{R}^2\mapsto(t+\tau,x,y),$$

para obter que u é contínua à direita em $[0,T)$. A continuidade à esquerda em $t=T$ é obtida através da mudança de variáveis

$$(t,x,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2\mapsto(T-t,x,y).$$

Finalmente, usando a transformação

$$(t,x,y)\mapsto(\tau-t,-x,-y),\ \tau\in(0,T].$$

concluímos a continuidade à esquerda. Portanto, u é contínua no intervalo $[0,T]$.

Dependência contínua: Sejam u e v soluções do PVI (2.1.1) definidas no mesmo intervalo $[0,T]$ tais que $u(0,x,y)=\phi(x,y)$ e $v(0,x,y)=\psi(x,y)$, onde $\phi,\psi\in H^s(w^2)$, $s>2$. Sejam $\mu>0$, u_μ e v_μ soluções do PVI (2.1.2) com $u_\mu(0,x,y)=\phi(x,y)$, $v_\mu(0,x,y)=\psi(x,y)$. Denotando $z=u-v$, vemos que

$$z_t+\mathcal{H}\partial_x^2 z+z_{xyy}+zu_x+vz_x=\mu\Delta z.$$

Multiplicando a equação acima por $w_\lambda^2 z$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\lambda z\|^2+(w_\lambda z,w_\lambda\mathcal{H}\partial_x^2 z+w_\lambda z_{xyy}+w_\lambda z u_x+w_\lambda v z_x-w_\lambda\mu\Delta z)=0. \tag{3.2.13}$$

Seja $\tilde{M}=\sup_{[0,T]}\{\|u_\mu(t)\|_{H^s(w^2)}+\|v_\mu(t)\|_{H^s(w^2)}\}$. Por (3.2.2) e (3.2.11), $\tilde{M}$ é limitado por uma constante que é independente de μ. Além disso $\tilde{M}=O(\|\phi\|_{H^s(w^2)})$, com $\phi\to\psi$, em $H^s(w^2)$.

Portanto, por cálculos similares aos anteriores, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w_\lambda z\|^2\leq k_1\|w_\lambda z\|^2+k_2\|z\|^2_{L^\infty_T H^s},\qquad 0\leq t\leq T,$$

onde k_1 e k_2 são constantes que dependem apenas de $\tilde{M}$. Pelo Lema de Gronwall temos

$$\|w_\lambda z\|^2 \leq (\|w_\lambda(\phi-\psi)\|^2 + k_2 T \|z\|^2_{L^\infty_T H^s}) e^{k_1 T}. \tag{3.2.14}$$

Tomando o limite em (3.2.14), com $\mu \downarrow 0$, obtemos

$$\|w_\lambda(u-v)\|^2 \leq (\|w_\lambda(\phi-\psi)\|^2 + k_2 T \|u-v\|^2_{L^\infty_T H^s}) e^{k_1 T}. \tag{3.2.15}$$

Finalmente, fazendo $\lambda \downarrow 0$, (3.2.15) implica

$$\|w(u-v)\|^2 \leq (\|w(\phi-\psi)\|^2 + k_2 T \|u-v\|^2_{L^\infty_T H^s}) e^{k_1 T}. \tag{3.2.16}$$

De (3.2.16) e da dependência contínua em $H^s(\mathbb{R}^2)$, vemos que $u \to v$ em $H^s(w^2)$ com $\phi \to \psi$ em $H^s(w^2)$. Completamos assim, a prova do Teorema 3.2.2. $\square$

Observação 3.2.3. Um cálculo elementar nos revela que o peso $w(x,y) = \langle x,y\rangle^\gamma$, $\gamma \in [0,1]$, satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.2.

No próximo teorema conseguimos melhorar nosso resultado obtido no Teorema 3.1.8, exibindo soluções do PVI (2.1.1) em espaços com pesos fracionários.

Teorema 3.2.4. As afirmações seguintes são verdadeiras.

i) Se $s > 2$ e $r \in [0,1]$ então o PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $\mathcal{Z}_{s,r}$. Além disso, se $r \in (1, 5/2)$ e $s \geq 2r$ então (2.1.1) é localmente bem colocado em $\mathcal{Z}_{s,r}$.

ii) Se $r \in [5/2, 7/2)$ e $s \geq 2r$, então o PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$. Primeiramente notemos que a existência da solução $u : [0,T] \to H^s$, foi obtida do Teorema (2.1.11). Então, precisamos apenas estudar a solução no espaço L^2_r. Além disso, uma vez obtida a propriedade de persistência em L^2_r, a continuidade de $u : [0,T] \to L^2_r$ e a dependência contínua seguem como no Teorema 3.2.2.

Parte i). A primeira parte, isto é, o caso $s > 2$ e $r \in [0,1]$ já foi provado no Teorema 3.2.2 (veja também a Observação 3.2.3). Portanto, resta considerar o caso $r \in (1, 5/2)$. Dividiremos esta parte em dois outros casos.

Caso a): $r \in (1,2]$ e $s \geq 2r$. Seja $r = 1+\theta$, com $\theta \in (0,1]$. Definimos

$$M_1 := \sup_{[0,T]} (\|u\|_{H^s} + \|\langle x,y\rangle^\theta u\|).$$

Como $\theta \in (0,1]$, note que M_1 é finito pela primeira parte do teorema.

Seja w_N como em (1.0.10). Multiplicando a equação diferencial (2.1.1) por $w_N^{2+2\theta}u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{1+\theta}u\|^2+(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u + w_N^{1+\theta}u_{xyy} + w_N^{1+\theta}uu_x) = 0. \tag{3.2.17}$$

Seguindo as idéias contidas em [17], podemos escrever

$$\begin{aligned} w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u &= [w_N^{1+\theta};\mathcal{H}]\partial_x^2 u + \mathcal{H}(w_N^{1+\theta}\partial_x^2 u)\\ &= A_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(w_N^{1+\theta}u) - 2\mathcal{H}(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x u) - \mathcal{H}\partial_x^2 w_N^{1+\theta}u\\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.0.5, temos

$$\begin{aligned} \|A_1\| &= \|\|[w_N^{1+\theta};\mathcal{H}]\partial_x^2 u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\\ &\leq c\|\|\partial_x^2 w_N^{1+\theta}\|_{L_x^\infty}\|u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\leq\ c\|\partial_x^2 w_N^{1+\theta}\|_{L_{xy}^\infty}\|u\|\leq\ cM_1. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Uma aplicação do Lema 1.0.11, com $a = 1+2\theta,\ \alpha = \frac{1}{1+2\theta}$ e $b = 1/2+\theta$ nos fornece

$$\|A_3\|\leq 2(1+\theta)\Big(\|\partial_x(w_N^\theta u)\|+\|u\|\Big) \leq c(\|J(w_N^\theta u)\|+\|u\|) \leq c(\|w_N^{1+\theta}u\|+M_1), \tag{3.2.19}$$

e de forma similar

$$\|A_4\|\leq cM_1. \tag{3.2.20}$$

Além disso, inserindo A_2 em (3.2.17) vemos que sua contribuição é nula. A constante c que aparece acima e no restante da prova do teorema será sempre independente de N. Do Lema 1.0.11, com $a = 2+2\theta,\ \alpha = \frac{1}{2+2\theta}$, e $b = 1+\theta$, obtemos

$$\|J^1(w_N^{1/2+\theta}u)\|\leq c(\|w_N^{1+\theta}u\|+\|J^{2+2\theta}u\|). \tag{3.2.21}$$

Outra aplicação do Lema 1.0.11, com $a = 2+2\theta,\ \alpha = \frac{1}{1+\theta}$, e $b = 1+\theta$ implica que

$$\|J^2(w_N^\theta u)\|\leq c(\|w_N^{1+\theta}u\|+\|J^{2+2\theta}u\|). \tag{3.2.22}$$

Usando integração por partes, a desigualdade $|\partial_x w_N^{2+2\theta}|\leq cw_N^{1+2\theta}$, (3.2.21) e (3.2.22), obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y^2 u\right| &= \left|\frac{1}{2}\int(-2\partial_y w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y u + \partial_x w_N^{2+2\theta}(\partial_y u)^2)\right|\\ &\leq \|w_N^{1+\theta}u\|\|w_N^\theta\partial_x\partial_y u\|+\|w_N^{1/2+\theta}\partial_y u\|^2\\ &\leq c(\|J^2(w_N^\theta u)\|^2+\|J(w_N^{1/2+\theta}u)\|^2+\|w_N^{1+\theta}u\|^2+M_1^2)\\ &\leq c(\|w_N^{1+\theta}u\|^2+M_1^2). \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Finalmente, como $s > 2$, pela imersão de Sobolev obtemos

$$|(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}uu_x)|\leq M_1\|w_N^{1+\theta}u\|^2. \tag{3.2.24}$$

De (3.2.17), desigualdade de Hölder e das desigualdades acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w_N^{1+\theta}u\|^2\leq c(1+\|w_N^{1+\theta}u\|^2).$$

Então, pelo Lema de Gronwall

$$\|w_N^{1+\theta}u\|^2\leq \|w_N^{1+\theta}\phi\|^2+tc+c\int_0^t e^{ct'}(\|w_N^{1+\theta}\phi\|^2+t'c)dt'.$$

O Teorema da convergência monótona nos fornece

$$\|\langle x,y\rangle^{1+\theta}u\|^2\leq \|\langle x,y\rangle^{1+\theta}\phi\|^2+g(t), \tag{3.2.25}$$

onde $g(t)\to 0$, com $t\downarrow 0$. Isto prova a propriedade de persistência em L^2_r. Como observado anteriormente, a continuidade segue como no Teorema 3.2.2.

Caso b): Sejam $r\in(2,5/2)$ e $s\geq 2r$. Tome $r=2+\theta$, com $\theta\in(0,1/2)$. Definimos

$$M_2=\sup_{[0,T]}\{\|\langle x,y\rangle^2u\|+\|u\|_{H^s}\}.$$

Multiplicando a equação diferencial (2.1.1) por $x^2w_N^{2+2\theta}u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xw_N^{1+\theta}u\|^2\\ &\quad\leq |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2u)+(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}u_{xyy})+(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}uu_x)|.\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Primeiro estimaremos o primeiro termo no segundo membro de (3.2.26). Como

$$\partial_x^2(xu)=2\partial_xu+x\partial_x^2u \text{ e } \mathcal{H}(x\partial_xu)=x\mathcal{H}(\partial_xu),$$

podemos escrever

$$x\mathcal{H}\partial_x^2u=\mathcal{H}\partial_x^2(xu)-2\mathcal{H}\partial_xu=B_1+B_2.$$

Pela definição de w_N, obtemos a desigualdade

$$w_N^{1+\theta}\langle x,y\rangle\leq\langle x,y\rangle^{1+\theta}\leq(1+|x|+|y|)\langle x,y\rangle^{\theta}. \tag{3.2.27}$$

Usando (3.2.27), os Teoremas 1.0.2 e 1.0.4, Observação 1.0.3, e a igualdade $\widehat{\partial_x u}(0,\eta,t)=0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_N^{1+\theta}B_2\| &\leq c\|w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| \\
&\leq c(\|w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|xw_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|yw_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|) \\
&\leq c(\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|x\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|y\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|) \\
&\leq c(\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\|+\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u)\|) \\
&\leq c(\|\mathcal{H}\partial_x u\|+\||x|^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\||y|^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|+\|\mathcal{H}(x\partial_x u)\|+\||x|^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\| \\
&\quad +\||y|^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\|+\|\mathcal{H}(y\partial_x u)\|+\||x|^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u)\|+\||y|^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u)\|) \\
&\leq c(\|\partial_x u\|+c^*\||x|^{\theta}\partial_x u\|+\||y|^{\theta}\partial_x u\|+\|x\partial_x u\|+c^*\||x|^{\theta}x\partial_x u\| \\
&\quad +\||y|^{\theta}x\partial_x u\|+\|y\partial_x u\|+c^*\||x|^{\theta}y\partial_x u\|+\||y|^{\theta}y\partial_x u\|) \\
&\leq c\|\langle x,y\rangle^{1+\theta}\partial_x u\| \\
&= C.
\end{aligned}$$

Do Lema 1.0.11, segue que

$$C \leq c(\|J(\langle x,y\rangle^{1+\theta}u)\|+M_2) \leq c(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\|+\|J^{3+2\theta}u\|+M_2) \leq cM_2.$$

Para estimar o termo com B_1, note que

$$\begin{aligned}
w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2(xu) &= [w_N^{1+\theta},\mathcal{H}]\partial_x^2(xu)+\mathcal{H}(w_N^{1+\theta}\partial_x^2(xu)) \\
&= D_1+\mathcal{H}(\partial_x^2(w_N^{1+\theta}xu))-2\mathcal{H}(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x(xu))-\mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^{1+\theta}xu) \\
&= D_1+D_2+D_3+D_4.
\end{aligned}$$

Inserindo D_2 em (3.2.26) vemos que sua contribuição é nula. Além disso, usando argumentos como os anteriores obtemos

$$\|D_1\|\leq cM_2, \qquad \|D_4\|\leq cM_2.$$

Para controlar D_3, usamos que $|\partial_x w_N|\leq 1$, para obter

$$\|D_3\|=2\|\mathcal{H}(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x(xu))\|\leq c(\|w_N^{\theta}u\|+\|xw_N^{\theta}\partial_x u\|)\leq cM_2.$$

A seguir, estimaremos o termo do meio no segundo membro de (3.2.26). As estimativas $|x\partial_x w_N|\leq 3w_N$ e $|x\partial_y^2 w_N|\leq 1$ nos dão as desigualdades

$$|\partial_x(x^2w_N^{2+2\theta})|\leq c|xw_N^{2+2\theta}|, \qquad |\partial_y^2(x^2w_N^{2+2\theta})|\leq c|xw_N^{2+2\theta}|. \tag{3.2.28}$$

Além disso, o Lema 1.0.11 nos permite concluir que

$$\|J^2(w_N^{1+\theta}u)\|\leq c(\|w_N^{2+\theta}u\|+\|J^{4+2\theta}u\|). \tag{3.2.29}$$

Usando integração por partes, (3.2.28) e (3.2.29) (para estimar o termo com derivada de segunda ordem), obtemos

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^2} x^2 w_N^{2+2\theta} u\partial_x\partial_y^2 u\Big| =& \Big| -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_y^2(x^2w_N^{2+2\theta})u\partial_x u + \partial_x(x^2w_N^{2+2\theta})\partial_y^2 uu \\ &+ 2\partial_y(x^2w_N^{2+2\theta})\partial_x\partial_y uu)\Big| \\ \leq& \|w_N^{1+\theta}\partial_x u\|\|xw_N^{1+\theta}u\|+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|w_N^{1+\theta}\partial_y^2 u\|\|xw_N^{1+\theta}u\|+ \\ &+ \|w_N^{1+\theta}\partial_x\partial_y u\|\|xw_N^{1+\theta}u\| \\ \leq& c(M_2^2+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|w_N^{1+\theta}\partial_y^2 u\|^2+\|w_N^{1+\theta}\partial_x\partial_y u\|^2) \\ \leq& c(M_2^2+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|w_N^{2+\theta}u\|^2+\|J^{4+2\theta}u\|^2) \\ \leq& c(M_2^2+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|yw_N^{1+\theta}u\|^2).\end{aligned}$$

Finalmente, o último termo no segundo membro de (3.2.26) pode ser estimado como

$$|(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}uu_x)|\leq M_2\|xw_N^{1+\theta}u\|^2.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em (3.2.26), juntamente com as estimativas acima obtemos

$$\frac{d}{dt}\|xw_N^{1+\theta}u\|^2\leq c(M_2^2+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|yw_N^{1+\theta}u\|^2). \tag{3.2.30}$$

Um cálculo similar com y no lugar de x nos dá

$$\frac{d}{dt}\|yw_N^{1+\theta}u\|^2\leq c(M_2^2+\|xw_N^{1+\theta}u\|^2+\|yw_N^{1+\theta}u\|^2). \tag{3.2.31}$$

A desigualdade de Gronwall, (3.2.30), (3.2.31) e o teorema da convergência monótona nos permite estabelecer a propriedade de persistência. Isto prova o Caso b).

Parte ii). Decomporemos este caso em dois outros.
Caso a): Sejam $r\in[5/2,3)$ e $s\geq 2r$. Tome $r=2+\theta$, com $\theta\in[1/2,1)$, $s\geq 2r$. Seja

$$M_3=\sup_{[0,T]}\{\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\|+\|u\|_{H^s}\}.$$

Multiplicando a equação diferencial (2.1.1) por $x^4w_N^{2\theta}u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^2w_N^{\theta}u\|^2+(x^2w_N^{\theta}u, x^2w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2u+x^2w_N^{\theta}u_{xyy}+x^2w_N^{\theta}uu_x)=0. \tag{3.2.32}$$

Da identidade

$$x^2\mathcal{H}\partial_x^2u=\mathcal{H}\partial_x^2(x^2u)-4\mathcal{H}\partial_x(xu)+2\mathcal{H}u,$$

temos

$$\begin{aligned} w_N^\theta x^2 \mathcal{H}\partial_x^2 u &= w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x^2(x^2u) + 4w_N^\theta \partial_x(xu) - 2w_N^\theta \mathcal{H}u \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

Como $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$, deduzimos que $\hat{\phi}(0,\eta) = \hat{u}(t,0,\eta) = 0$, para todo $t \in [0,T]$, (veja (1.0.2)), isto implica que $\mathcal{H}(xu) = x\mathcal{H}u$. Portanto, a limitação de $\mathcal{H}$ em L^2, nos dá

$$\begin{aligned} \|Q_3\| &= 2\|w_N^\theta \mathcal{H}u\| \\ &\leq c(\|\mathcal{H}u\| + \|x\mathcal{H}u\| + \|y\mathcal{H}u\|) \\ &= c(\|u\| + \|\mathcal{H}(xu)\| + \|\mathcal{H}(yu)\|) \\ &\leq cM_3. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Q_2 &= w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x(xu) \\ &= [w_N^\theta; \mathcal{H}]\partial_x(xu) + \mathcal{H}(w_N^\theta \partial_x(xu)) \\ &= Q_2^1 + Q_2^2. \end{aligned}$$

Uma análise simples revela que

$$\|Q_2^1\| \leq \|\partial_x w_N^\theta\|_\infty \|xu\| \leq cM_3.$$

Além disso, o Lema 1.0.11 nos fornece

$$\begin{aligned} \|Q_2^2\| &\leq \|w_N^\theta u\| + \|x w_N^\theta \partial_x u\| \\ &\leq \|\langle x,y\rangle^\theta u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta+1}\partial_x u\| \\ &\leq c(\|\langle x,y\rangle u\| + \|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta} u\| + \|J^{3+2\theta}\|) \\ &\leq cM_3. \end{aligned}$$

Para Q_1 podemos escrever

$$\begin{aligned} Q_1 &= w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x^2(x^2u) \\ &= [w_N^\theta; \mathcal{H}]\partial_x^2(x^2u) + \mathcal{H}(w_N^\theta \partial_x^2(x^2u)) \\ &= V_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(x^2 w_N^\theta u) - 2\mathcal{H}(\partial_x w_N^\theta \partial_x(x^2u)) - \mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^\theta x^2 u) \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4. \end{aligned}$$

Inserindo V_2 em (3.2.32) vemos que sua contribuição é is nula. Pelo Teorema 1.0.5

$$\|V_1\| \leq cM_3 \text{ e } \|V_4\| \leq cM_3.$$

Pelo Lema 1.0.11, temos

$$\begin{aligned}\|V_3\| &\leq c(\|x^2\partial_x w_N^\theta \partial_x u\| + 2\|x\partial_x w_N^\theta u\|)\\ &\leq c(\|xw_N^\theta \partial_x u\| + \|w_N^\theta u\|)\\ &\leq cM_3.\end{aligned}$$

Além disso,

$$|(x^4 w_N^{2\theta} u, uu_x)| \leq \|u_x\|_\infty \|x^2 w_N^\theta u\|^2. \tag{3.2.33}$$

Cálculos análogos aos realizados anteriormente nos conduzem às desigualdades

$$|\partial_x(x^4 w_N^{2\theta})| \leq c|x^3 w_N^{2\theta}|, |\partial_y(x^4 w_N^{2\theta})| \leq c|x^3 w_N^{2\theta}| \text{ e } |\partial_y^2(x^4 w_N^{2\theta})| \leq c|x^3 w_N^{2\theta}|. \tag{3.2.34}$$

Portanto, integrando por partes, usando (3.2.34) e o Lema 1.0.11, obtemos

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^2} x^4 w_N^{2\theta} u\partial_x\partial_y^2 u\Big| &= \Big| -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\frac{1}{2}\partial_y^2(x^4 w_N^{2\theta})u\partial_x u - \partial_x(x^4 w_N^{2\theta})\partial_y^2 uu\\ &\quad - 2\partial_y(x^4 w_N^{2\theta})\partial_x\partial_y uu)\Big|\\ &\leq \int |\partial_y^2(x^4 w_N^{2\theta})u\partial_x u| + \int |x^3 w_N^{2\theta}\partial_y^2 uu| + \int |x^3 w_N^{2\theta}\partial_x\partial_y uu|\\ &\leq \|x^2 w_N^\theta u\|\|xw_N^\theta \partial_x u\| + \|xw_N^\theta \partial_y^2 u\|\|x^2 w_N^\theta u\|\\ &\quad + \|xw_N^\theta \partial_x\partial_y u\|\|x^2 w_N^\theta u\|\\ &\leq c\Big(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|xw_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 + \|xw_N^\theta \partial_x\partial_y u\|^2\Big)\\ &= c\Big(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + F_1 + F_2\Big).\end{aligned}$$

Reunindo as estimativas acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|x^2 w_N^\theta u\|^2 \leq c(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|xw_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 + \|xw_N^\theta \partial_x\partial_y u\|^2). \tag{3.2.35}$$

Notemos que, pela presença dos termos F_1 e F_2, (3.2.35) não é suficientemente bom para nossos propósitos. Dessa forma, no que segue, estimaremos F_1 e F_2. A idéia é obter uma estimativa do tipo

$$\frac{d}{dt}G \leq cG, \tag{3.2.36}$$

onde G é uma soma de termos que incluem F_1 e F_2.

Tomando a derivada segunda com respeito a y em (2.1.1) e multiplicando por $x^2 w_N^{2\theta}\partial_y^2 u$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xw_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 &+ (xw_N^\theta \partial_y^2 u, xw_N^\theta \mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u))\\ &+ (x^2 w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_x\partial_y^2\partial_y^2 u) + (x^2 w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_y^2(uu_x)) = 0.\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Da identidade

$$x\mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u) = \mathcal{H}(\partial_x^2(x\partial_y^2 u)) - 2\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u,$$

deduzimos que

$$w_N^\theta x\mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u) = w_N^\theta\mathcal{H}(\partial_x^2(x\partial_y^2 u)) - 2w_N^\theta\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u = E_1 + E_2.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} E_2 =& -2w_N^\theta\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u \\ &= [w_N^\theta;\mathcal{H}]\partial_x\partial_y^2 u + \mathcal{H}(w_N^\theta\partial_x\partial_y^2 u) \\ &= E_2^1 + E_2^2. \end{aligned}$$

O Teorema 1.0.5 implica

$$\|E_2^1\| \leq \|\partial_x w_N^\theta\|_\infty \|\partial_y^2 u\| \leq cM_3.$$

Pelo Lema 1.0.11, com $a = 3 + 2\theta$, $\alpha = \frac{3}{3+2\theta}$ e $b = 3/2 + \theta$ temos

$$\|E_2^2\| \leq \|w_N^\theta\partial_x\partial_y^2 u\| \leq \|\langle x,y\rangle^\theta\partial_x\partial_y^2 u\| \leq M_3 + 2(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|J^{3+2\theta}u\|) \leq cM_3.$$

A seguir, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_1 &= [w_N^\theta;\mathcal{H}]\partial_x^2(x\partial_y^2 u) + \mathcal{H}(w_N^\theta\partial_x^2(x\partial_y^2 u)) \\ &= k_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(xw_N^\theta\partial_y^2 u) - 2\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta\partial_x(x\partial_y^2 u) + \mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^\theta x\partial_y^2 u) \\ &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4. \end{aligned}$$

É fácil ver que

$$\|k_1\| \leq \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_\infty \|x\partial_y^2 u\| \leq M_3,$$

e

$$\|k_4\| \leq \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_\infty \|x\partial_y^2 u\| \leq M_3.$$

Inserindo k_2 em (3.2.37) vemos que sua contribuição é nula. Além disso,

$$\begin{aligned} k_3 &\leq \|\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta\partial_y^2 u\| + \|\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta x\partial_x\partial_y^2 u\| \\ &\leq \|w_N^{\theta-1}\partial_y^2 u\| + \|w_N^\theta\partial_x\partial_y^2 u\| \\ &\leq cM_3. \end{aligned}$$

Uma aplicação do Lema 1.0.11, com $a = 4 + 2\theta$, $\alpha = \frac{2}{2+\theta}$ e $b = 2 + \theta$, nos fornece

$$\|w_N^\theta\partial_y^2\partial_y^2 u\| \leq M_3 + \|w_N^{2+\theta}u\| + \|J^{4+2\theta}u\| \leq M_3 + \|x^2 w_N^\theta u\| + \|y^2 w_N^\theta u\|. \tag{3.2.38}$$

De forma similar,

$$\|w_N^\theta \partial_x \partial_y \partial_y^2 u\| \leq M_3 + \|x^2 w_N^\theta u\| + \|y^2 w_N^\theta u\|. \tag{3.2.39}$$

Calculando explicitamente as derivadas é fácil ver que

$$|\partial_x (x^2 w_N^{2\theta})| \leq c|x w_N^{2\theta}|, |\partial_y (x^2 w_N^{2\theta})| \leq c|x w_N^{2\theta}| \text{ e } |\partial_y^2 (x^2 w_N^{2\theta})| \leq c|x w_N^{2\theta}|. \tag{3.2.40}$$

Usando (3.2.38), (3.2.39) e (3.2.40), obtemos

$$\begin{aligned} \Big|\int x^2 w_N^{2\theta} \partial_y^2 u \partial_x \partial_y^2 \partial_y^2 u\Big| =& \Big| -\frac{1}{2}\int (\partial_y^2 (x^2 w_N^{2\theta}) \partial_y^2 u \partial_x \partial_y^2 u - \partial_x (x^2 w_N^{2\theta}) \partial_y^2 \partial_y^2 u \partial_y^2 u \\ &- 2\partial_y (x^2 w_N^{2\theta}) \partial_x \partial_y \partial_y^2 u \partial_y^2 u) dxdy\Big| \\ \leq& c\Big(M_3^2 + \|w_N^\theta \partial_y^2 \partial_y^2 u\| \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\| + \|w_N^\theta \partial_x \partial_y \partial_y^2 u\| \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|\Big) \\ \leq& c\Big(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|y^2 w_N^\theta u\|^2 + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2\Big). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |(x^2 w_N^{2\theta} \partial_y^2 u, \partial_y^2 (u u_x))| =& |(x^2 w_N^{2\theta} \partial_y^2 u, \partial_y^2 u u_x + 2u_y u_{xy} + u u_{xyy})| \\ \leq& \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 \|u_x\|_\infty + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\| (\|x w_N^\theta \partial_y u\| \|u_{xy}\|_\infty \\ &+ \|x w_N^\theta u\| \|u_{xyy}\|_\infty) \\ \leq& (M_3 + 1)\|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 + M_3. \end{aligned}$$

Coletando todas as estimativas acima, obtemos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 \leq c(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|y^2 w_N^\theta u\|^2 + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2). \tag{3.2.41}$$

Analogamente podemos obter uma desigualdade envolvendo F_2.

Multiplicando a equação (2.1.1) por $y^4 w_N^{2\theta} u$, podemos obter uma estimativa similar a (3.2.35), onde outros dois termos análogos a F_1 e F_2 aparecerão (mas agora com um fator y multiplicando no lugar de x), a partir daí, podemos proceder como acima.

Então, definindo

$$g_1 = \|x^2 w_N^\theta u\|, \quad g_2 = \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\| = F_1, \quad g_3 = \|x w_N^\theta \partial_x \partial_y u\| = F_2$$

e

$$g_4 = \|y^2 w_N^\theta u\|, \quad g_5 = \|y w_N^\theta \partial_y^2 u\|, \quad g_6 = \|y w_N^\theta \partial_x \partial_y u\|,$$

podemos deduzir o seguinte sistema de desigualdades

$$\frac{d}{dt} g_j^2 \leq c\sum_{i=1}^{6} g_i^2, \ j = 1, \ldots, 6.$$

Definindo $G = \sum_{i=1}^{6} g_i^2$, podemos obter a estimativa (3.2.36). O restante da prova segue como no caso a).

Caso b). Sejam $r \in [3, 7/2)$ e $s \geq 2r$. Escrevemos $r = 2 + \theta$, onde $\theta \in [1, 3/2)$. Definimos

$$M_4 = \sup_{[0,T]}\{\|\langle x, y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|u\|_{H^s}\}.$$

Aqui, as estimativas são similares às do caso a), exceto pelos termos

$$\tilde{Q}_3 = \; 2w_N^{\theta}\mathcal{H}u,$$

$$\tilde{Q}_2 = \; w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x(xu),$$

e

$$\tilde{E}_2 = \; -2w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u,$$

que podem ser estimados usando os Teoremas 1.0.2 e 1.0.4 e a Observação 1.0.3. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{Q}_3\| &\leq 2\|\langle x, y\rangle^{\theta}\mathcal{H}u\| \\
&\leq c(\|\langle x, y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \|x\langle x, y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \|y\langle x, y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}u\|) \\
&\leq c(\|\mathcal{H}u\| + \|x\mathcal{H}u\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \\
&\quad + \|x|y|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \|y\mathcal{H}u\| + \|y|x|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \|y|y|^{\theta-1}\mathcal{H}u\|) \\
&= c(\|\mathcal{H}u\| + \|\mathcal{H}(xu)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}u\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(xu)\| + \\
&\quad + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(xu)\| + \|\mathcal{H}(yu)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(yu)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(yu)\|) \\
&\leq c(\|u\| + \|xu\| + c^*\||x|^{\theta-1}u\| + \|\mathcal{H}(|y|^{\theta-1}u)\| + c^*\||x|^{\theta-1}xu\| + \\
&\quad + \|\mathcal{H}(|y|^{\theta-1}xu)\| + \|yu\| + c^*\||x|^{\theta-1}yu\| + \|\mathcal{H}(|y|^{\theta-1}yu)\|) \\
&\leq c\|\langle x, y\rangle^{\theta}u\| \\
&\leq cM_4,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{Q}_2\| &= 4\|w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x(xu)\| \\
&\leq c(\|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\|) \\
&\leq c(\|\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \|\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| \\
&\quad + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \|\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\| \\
&\quad + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\|) \\
&\leq c(\|\partial_x(xu)\| + c^*\||x|^{\theta-1}\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}\partial_x(xu)\| + \|x\partial_x(xu)\| \\
&\quad + c^*\||x|^{\theta-1}x\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}x\partial_x(xu)\| + \|y\partial_x(xu)\| + c^*\||x|^{\theta-1}y\partial_x(xu)\| \\
&\quad + \||y|^{\theta-1}y\partial_x(xu)\|) \\
&\leq c(M_4 + \|\langle x,y\rangle^\theta u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta+1}\partial_x u\|) \\
&\leq c(M_4 + \|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta} u\| + \|J^{3+2\theta}u\|) \\
&\leq cM_4,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{E}_2\| &\leq \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}x\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}y\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| \\
&\leq \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\leq c(\|\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\|) \\
&\leq c\|\langle x,y\rangle^\theta \partial_x\partial_y^2 u\| \\
&\leq M_4 + 2(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta} u\| + \|J^{3+2\theta}u\|) \\
&\leq cM_4.
\end{aligned}
$$

A partir desse ponto, podemos proceder como no caso a) e concluir a prova do caso b).
Concluímos assim a prova do Teorema 3.2.4. □

3.3 Boa colocação em espaços de Sobolev com pesos anisotrópicos inteiros

Estudaremos a seguir o decaimento da solução quando temos pesos diferentes em cada uma das direções x e y. Para isto necessitamos da seguinte.

Definição 3.3.1. Sejam $s, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = 1 + x^{2r_1} + y^{2r_2}$ e $L^2_{r_1,r_2} = L^2(\rho(x,y)dxdy)$, então definimos os espaços de Sobolev anisotrópicos por

$$\mathcal{Z}^s_{r_1,r_2} = H^s \cap L^2_{r_1,r_2},$$

onde a norma é dada por

$$\|\cdot\|^2_{\mathcal{Z}^s_{r_1,r_2}} = \|\cdot\|^2_{H^s} + \|\cdot\|^2_{L^2_{r_1,r_2}}.$$

Usaremos o próximo lema na prova do Teorema 3.3.3.

Lema 3.3.2. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $\mu > 0$, $t > 0$, $\phi \in \mathcal{Z}^0_{0,k}$, então

$$\|D^\alpha E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{0,k}} \leq c(\mu, |\alpha|)\gamma(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{0,k}}, \tag{3.3.1}$$

onde $\gamma(t) \to c > 0$, com $t \downarrow 0$ e

$$\|D^\alpha E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{2,0}} \leq c(\mu, |\alpha|)\delta(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{2,0}}, \tag{3.3.2}$$

onde $\delta(t) \to c > 0$, com $t \downarrow 0$.

Demonstração. Pondo $m = \min\{2k, \alpha_2\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|y^{2k}D^\alpha E_\mu(t)\phi\| &= \|\partial^{2k}_\eta(\xi^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}F_\mu\hat{\phi})\| \\
&\leq c\|\sum_{j=0}^{m}\eta^{\alpha_2-j}\xi^{\alpha_1}\partial^{2k-j}_\eta(F_\mu\hat{\phi})\| \\
&\leq c\sum_{j=0}^{2m}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{|\alpha|-j}{2}}\|\partial^{2k-j}_\eta(F_\mu\hat{\phi})\| \\
&= \sum_{j=0}^{m}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{|\alpha|-2j}{2}}\|\partial^{2k-2j}_\eta(F_\mu\hat{\phi})\| + \sum_{j=1}^{m}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{|\alpha|-(2j-1)}{2}}\|\partial^{2k-(2j-1)}_\eta(F_\mu\hat{\phi})\| \\
&= A + B.
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Por outro lado,

$$\partial^{2k-2j}_\eta(F_\mu\hat{\phi}) = \sum_{i=0}^{k-j}c_{2i}\partial^{2i}_\eta F_\mu\partial^{2k-2j-2i}_\eta\hat{\phi} + \sum_{i=1}^{k-j}c_{2i-1}\partial^{2i-1}_\eta F_\mu\partial^{2k-2j-(2i-1)}_\eta\hat{\phi}, \tag{3.3.4}$$

$$|\partial^{2i}_\eta F_\mu| \leq \sum_{l=i}^{2i}c_{\mu,l}t^l(\xi^2+\eta^2)^{\frac{l+2(l-i)}{2}}e^{-\mu t(\xi^2+\eta^2)} \tag{3.3.5}$$

e

$$|\partial_\eta^{2i-1}F_\mu|\leq \sum_{l=i}^{2i-1} c_{\mu,l}t^l(\xi^2+\eta^2)^{\frac{l+2(l-i)+1}{2}}e^{-\mu t(\xi^2+\eta^2)}. \tag{3.3.6}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\xi^2+\eta^2)^{\frac{|\alpha|-2j}{2}}\sum_{i=0}^{k-j}c_{2i}|\partial_\eta^{2i}F_\mu| &\leq \sum_{i=0}^{k-j}\sum_{l=i}^{2i}c_{\mu,l,i}t^l(\xi^2+\eta^2)^{\frac{l+2(l-i)+|\alpha|-2j}{2}}e^{-\mu t(\xi^2+\eta^2)} && (3.3.7)\\
&\leq \sum_{i=0}^{k-j}\sum_{l=i}^{2i}c_{\mu,l,i,\alpha,j}t^{\frac{-l+2i-|\alpha|+2j}{2}} && (3.3.8)\\
&\leq c_{\mu,\alpha,j}t^{-|\alpha|/2}\left(\frac{t^{1/2}}{|t^{1/2}-1||1-t|}|t^j-t^{k+1}|+|k-j|t^j\right)\\
&= c_{\mu,\alpha,j}t^{-|\alpha|/2}a_j(t,k). && (3.3.9)
\end{aligned}$$

Notemos que $\gamma_1(t)=\sum_{j=0}^m a_j(t,k)\leq\sum_{j=0}^{2k}a_j(t,k)$ e como $\|\partial_\eta^{2k-2j-2i}\hat{\phi}\|=\|y^{2k-2j-2i}\phi\|\leq\|\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{0,2k}}$, temos, levando (3.3.4) em (3.3.3), que

$$A\leq c(\mu,|\alpha|)\gamma_1(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{0,2k}}.$$

De maneira análoga obtemos $B\leq c(\mu,|\alpha|)\gamma_2(t)t^{-|\alpha|/2}\|\phi\|_{\mathcal{Z}^0_{0,2k}}$. Pondo $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, obtemos o resultado para o caso de um peso da forma $2k$. Para pesos da forma $2k+1$ o raciocínio é análogo. □

O próximo resultado nos diz que, limitando um pouco o decaimento na direção x podemos obter boa colocação no espaços com pesos anisotrópicos.

Teorema 3.3.3. O PVI (2.1.1) é localmente bem colocado em $\mathcal{Z}^s_{r,k}$, onde $s>2\max\{1,r,k\}$, $k\in\mathbb{N}$, e $r=0,1,2$.

Demonstração. Seja $u:=u_\mu$, $\mu\geq 0$, solução (em H^s) de (2.1.2) definida em $[0,T]$. Note que pelo Teorema 3.2.2, já temos a continuidade das aplicações $t\in[0,T]\mapsto u(t)\in\mathcal{Z}^s_{r,k}$ para $r=0,1$, $k=0,1$. Assim, basta provarmos que $t\in[0,T]\mapsto u(t)\in\mathcal{Z}^s_{r,k}$ para $r=2$ e $k\geq 2$, são contínuas.

Para isto, usando o último lema além do fato de que $\mathcal{Z}^s_{0,k}$ é uma algebra de banach para $s>2$, podemos mostrar como no Teorema 3.1.5 que existe uma solução local no espaço métrico completo

$$X_k(T^*)=\{f\in C([0,T^*];\mathcal{Z}^s_{0,k}):\sup_{t\in[0,T^*]}\|f(t)-E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{Z}^s_{0,k}}\leq\|\phi\|_{\mathcal{Z}^s_{0,k}}\},$$

para algum $T^*>0$. Pelo último lema temos que $y^kD^\alpha u\in L^2$, $\forall\ |\alpha|=1,2,3$, $\mu>0$, $t\in(0,T^*]$. Então, multiplicando (2.1.2) por $y^{2k}u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^ku\|^2+(y^k\mathcal{H}\partial_x^2u,y^ku)+(y^ku_{xyy},y^ku)+(y^kuu_x,y^ku)=\mu(y^{2k}u,\Delta u). \tag{3.3.10}$$

No que segue, estimaremos os termos em (3.3.10). Integrando por partes e usando o Lema 1.0.11 obtemos

$$\begin{aligned}(y^{2k}u,\Delta u) &= -(y^k u_x, y^k u_x) - 2k(y^{2k-1}u_y, u_y) - (y^{2k}u_y, u_y)\\ &\le c\rho(t) + \|y^k u\|^2. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Como $y^k\mathcal{H}\partial_x^2 u = \mathcal{H}\partial_x^2(y^k u)$, pela antissimetria do operador $\mathcal{H}\partial_x^2$ obtemos

$$(y^k\mathcal{H}\partial_x^2 u, y^k u) = 0 \tag{3.3.12}$$

e

$$\|y^k u u_x\| \le \|u_x\|_\infty \|y^k u\| \le c_s\|u\|_s\|y^k u\| \le \|u\|^2_{\mathcal{Z}^s_{0,k}}. \tag{3.3.13}$$

Integrando por partes vemos que

$$|(y^k u_{xyy}, y^k u)| = |-2k(y^{k-1}u_{xy}, y^k u)| \le 2k\|y^{k-1}u_{xy}\|\|y^k u\| = 2kA\|y^k u\|, \tag{3.3.14}$$

onde $A := \|y^{k-1}u_{xy}\|$. Para estimar o termo A, fixando a variável x em $u = u(t,x,y)$, no Lema (1.0.11) obtemos

$$\|J_y^{a\alpha}(\langle y\rangle^{(1-\alpha)b}u)\| \le c_\alpha(\|\langle y\rangle^b u\| + \|J_y^s u\|). \tag{3.3.15}$$

Como

$$\partial_{xy}(\langle y\rangle^{k-1}u) = (k-1)y\langle y\rangle^{k-3}u_x + \langle y\rangle^{k-1}u_{xy},$$

e $s > 2\max\{1,r,k\}$, tomando $a = 2k$ e $b = k$ na desigualdade (3.3.15) temos

$$\begin{aligned} A = \|y^{k-1}u_{xy}\| \le \|\langle y\rangle^{k-1}u_{xy}\| &\le \|\langle y\rangle^{k-2}u_x\| + \|\partial_{xy}(\langle y\rangle^{k-1}u)\|\\ &\le \|u_x\| + \|y^{k-1}u_x\| + \|J^2(\langle y\rangle^{k-1}u)\|\\ &\le c\rho(t) + \|y^{k-1}u_x\| + \|\langle y\rangle^k u\| + \|J_y^{2k}u\|\\ &\le c\rho(t) + \|y^{k-1}u_x\| + \|y^k u\|. \end{aligned}$$

Tomando agora $a = 2k-1$ e $b = k - 1/2$ obtemos

$$\|y^{k-1}u_x\| \le \|\langle y\rangle^{k-1}u_x\| \le \|\langle y\rangle^{k-1/2}\| + \|J_y^{2k-1}u\| \le \rho(t) + \|y^k u\|.$$

Logo

$$A \le \rho(t) + \|y^k u\|,$$

e

$$|(y^k u_{xyy}, y^k u)| \le \rho(t)^2 + \|y^k u\|^2. \tag{3.3.16}$$

Portanto, de (3.3.11)–(3.3.16) ,

$$\frac{d}{dt}\|y^k u\|^2 \leq \rho(t)^2 + \|y^k u\|^2.$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\|y^k u\|^2 \leq \|y^k \phi\|^2 + g(t), \ \forall t \in [0, T^*], \tag{3.3.17}$$

onde g é independente de μ e $g(t) \to 0$ com $t \to 0$. De (3.3.17) podemos extender a solução $u : [0, T^*] \to \mathcal{Z}^s_{0,k}$ para o intervalo $[0, T]$, de modo que (3.3.17) vale com T no lugar de T^*. Assim, da última desigualdade, para cada $t \in [0, T]$, existe $v(t) \in L^2((1 + y^{2k})dxdy)$ tal que $u_\mu(t) \rightharpoonup v(t)$ em $L^2((1 + y^{2k})dxdy)$, com $\mu \downarrow 0$. Como $u_\mu \to u_0$ em $C([0, T]; L^2)$, temos que $v = u_0$. Assim, procedendo de forma análoga ao Teorema 3.2.2, obtemos a persistência em $L^2((1 + y^{2k})dxdy)$, e também

$$u_0 \in C([0, T]; L^2((1 + y^{2k})dxdy)). \tag{3.3.18}$$

Usando o último lema, podemos mostrar que $x^2 D^\alpha u \in L^2$, para $|\alpha| = 1, 2, 3,\ \mu > 0,\ t \in (0, T]$. Pela Observação 3.1.9 temos que $x^2 u \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Então, multiplicando a equação (2.1.2) por $x^4 u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^2 u\|^2 + (x^2 \mathcal{H}\partial_x^2 u, x^2 u) + (x^2 u_{xyy}, x^2 u) + (x^2 u u_x, x^2 u) = \mu(x^4 u, \Delta u). \tag{3.3.19}$$

Vamos estimar os termos na igualdade anterior. Da identidade

$$x^2 \mathcal{H}\partial_x^2 u = \mathcal{H}\partial_x^2(x^2 u) - 4\mathcal{H}\partial_x(xu) + 2\mathcal{H}u$$

e da anti-simetria do operador $\mathcal{H}\partial_x^2$ obtemos

$$\begin{aligned} |(x^2 \mathcal{H}\partial_x^2 u, x^2 u)| &= |-4(\mathcal{H}\partial_x(xu), x^2 u) + (2\mathcal{H}u, x^2 u)| \\ &\leq (\|u\| + \|x\partial_x u\|)\|x^2 u\| + \|u\|\|x^2 u\| \\ &\leq \rho(t)^2 + \|x^2 u\|^2, \end{aligned}$$

onde acima usamos a estimativa

$$\|x\partial_x u\| \leq \|u\| + \|J_x(\langle x\rangle u)\| \leq \|u\| + \|\langle x\rangle^{3/2} u\| + \|J_x^3 u\| \leq \|x^2 u\| + \rho(t).$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} (x^2 u_{xyy}, x^2 u) &= -(x^2 u_{yy}, x^2 u_x) - 2(x^2 u_{yy}, xu) \\ &= (x^2 u_y, x^2 u_{xy}) - 2(x u_{yy}, x^2 u) \\ &= -(x^2 u_{xyy}, x^2 u) - 2(x u_{yy}, x^2 u). \end{aligned}$$

Logo

$$(x^2u_{xyy}, x^2u) = (xu_{yy}, x^2u).$$

Usando o Lema 1.0.11 e a desigualdade (3.3.17) obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}\|xu_{yy}\| &\leq \|\langle x,y\rangle u_{yy}\| \leq c(\|J^2(\langle x,y\rangle u)\| + \|u\|_{H^s})\\ &\leq c(\|\langle x,y\rangle^2 u\| + \|J^4u\| + \|u\|_{H^s})\\ &\leq c(\|x^2u\| + \|y^2u\| + \|u\|_{H^s})\\ &\leq c(\|x^2u\| + \|y^2\phi\| + g(t) + \|u\|_{H^s}).\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

De (3.3.20) obtemos

$$|(x^2u_{xyy}, x^2u)| \leq (\rho(t) + \|x^2u\|)\|x^2u\| \leq \rho(t)^2 + \|x^2u\|^2. \tag{3.3.21}$$

Além disso, é fácil ver que

$$|(x^2uu_x, x^2u)| \leq \|u_x\|_\infty \|x^2u\|^2 \leq \rho(t)\|x^2u\|^2. \tag{3.3.22}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}(x^4u, \Delta u) &= -(4x^3u + x^4\partial_x u, \partial_x u, \partial_x u) - (x^4\partial_y u, \partial_y u)\\ &\leq -2(x^3, \partial_x u^2) = -6(x^2, u^2) \leq 0.\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Portanto de (3.3.19)–(3.3.23), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^2u\|^2 \leq \rho(t)\|x^2u\|^2 + c(\rho(t)^2 + g(t) + \|y^2\phi\|^2 + \rho(t) + \|x^2u\|^2).$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\|x^2u(t)\|^2 \leq \|x^2\phi\|^2 + f(t),\ \forall t \in [0,T],$$

onde f independe de μ e $f(t) \to 0$, com $t \to 0$. Finalmente, como antes,

$$u_0 \in C([0,T]; L^2((1+x^4)dxdy)). \tag{3.3.24}$$

Portanto de (3.3.24) e (3.3.18) obtemos $u_0 \in C([0,T]; \mathcal{Z}^s_{2,k})$, para $k \in \mathbb{N}$, e $s > 2\max\{1, r, k\}$. A dependência contínua segue de forma similar ao Teorema 3.2.2. $\square$

Capítulo 4

Princípios de continuação única

Neste capítulo estudaremos as propriedades de continuação única para a BO-ZK. Além disso, obteremos hipóteses sobre o dado inicial para termos assegurada a propriedade de persistência.

Ressaltamos ainda que os teoremas dos Capítulos 3 e 4 se complementam, mostrando que nossos resultados de boa colocação nos espaços com peso são *sharp*.

4.1 Pesos inteiros

Os resultados desta seção foram baseados nas idéias de [27] e [26].

Teorema 4.1.1. Sejam $\mu \geq 0, s \geq 6$ e suponha que $u \in C([0,T], \mathcal{Z}_{s,3})$ é solução do PVI (2.1.2) então

$$\hat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall t \in [0,T], \eta \in \mathbb{R},$$

ou, de forma equivalente,

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x,y)dx = 0, \forall t \in [0,T], y \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.1.2) por x^3, obtemos

$$\partial_t(x^3 u) + x^3 \mathcal{H}\partial_x^2 u + x^3 u_{xyy} + x^3 u u_x = \mu x^3 \Delta u.$$

Observe que

a) $\widehat{ix^3 u_{xyy}} = \partial_\xi^3(\xi\eta^2\hat{u}) = 3\eta^2\partial_\xi^2\hat{u} + \xi\eta^2\partial_\xi^3\hat{u},$

b) $\widehat{x^3\mathcal{H}\partial_x^2 u} = 2\hat{u}\delta(\xi) + 6\text{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{u} + 6|\xi|\partial_\xi^2\hat{u} + \xi|\xi|\partial_\xi^3\hat{u},$

c) $\|\widehat{x^3uu_x}\|_0 \leq \|u_x\|_\infty \|x^3u\|_0 \leq \rho_s(t)\|u(t)\|_{s,3}$,

d) $i\widehat{x^3\Delta u} = -4\partial_\xi \hat{u} - 4\xi\partial_\xi^2\hat{u} - \xi^2\partial_\xi^3\hat{u} - \eta^2\partial_\xi^3\hat{u}$,

para todo $t \in [0,T]$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Como $\hat{u} \in C([0,T], \mathcal{Z}_{3,s})$ todos os termos de a)– d)(exceto o que contém a delta de Dirac) pertecem a $L^2_{-3}(\mathbb{R}^2)$, então tomando a transformada de Fourier na equação anterior e integrando de 0 a t obtemos

$$\partial_\xi^3\hat{u} = \partial_\xi^3\hat{u}(0,\xi,\eta) + G(t,\xi,\eta) + \delta(\xi)\int_0^t \hat{u}(t',0,\eta)dt',$$

onde $G(t,\cdot,\cdot) \in L^2_{-3}(\mathbb{R}^2)$. Da igualdade anterior, e como $L^2_{-3}(\mathbb{R}^2) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ devemos ter

$$\int_0^t \hat{u}(t',0,\eta)dt' = 0.$$

Então, derivando a última integral em relação a t obtemos o resultado. $\square$

Teorema 4.1.2. Sejam $\mu \geq 0$, $s \geq 8$ e suponha que $u \in C([0,T]; \mathcal{Z}_{s,4})$, seja solução do PVI (2.1.2), então

$$u(t) = 0, \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.1.2) por x^4 obtemos

$$\partial_t(x^4u) + x^4\mathcal{H}\partial_x^2 u + x^4u_{xyy} + x^4uu_x = \mu x^4\Delta u.$$

Então

a) $\widehat{x^4u_{xyy}} = \partial_\xi^4(\xi\eta^2\hat{u}) = \eta^2\partial_\xi^3\hat{u} + \xi\eta^2\partial_\xi^4\hat{u}$,

b) $\widehat{x^4\mathcal{H}\partial_x^2} = c[(\partial_\xi\hat{u}(t,0,\eta) + \hat{u}(t,0,\eta))\delta(\xi) + h(\xi)(\partial_\xi^2\hat{u} + \xi\partial_\xi^3\hat{u} + \xi^2\partial_\xi^4\hat{u})]$,

c) $\|x^4uu_x\|_0 \leq \|u_x\|_\infty\|x^4u\|_0 \leq \rho_4(t)\|u(t)\|_{4,4}$,

d) $\widehat{x^4\Delta u} = c[\partial_\xi^2\hat{u} + \xi\partial_\xi^3\hat{u} + \xi^2\partial_\xi^4\hat{u} + \eta^2\partial_\xi^4\hat{u}]$.

Pelo último teorema temos $\hat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall t \in [0,T], \eta \in \mathbb{R}$. Os termos de a) – d) pertecem a L^2_{-3}, para todo $t \in [0,T]$. Então, tomando a transformada de Fourier e integrando de 0 a t onde $t \in [0,T]$, temos

$$\partial_\xi^4\hat{u}(t,\xi,\eta) = \partial_\xi^4\phi(\xi,\eta) + H(t,\xi,\eta) + \delta(\xi)\int_0^t \partial_\xi\hat{u}(t',0,\eta)dt',$$

onde $H(t,\cdot,\cdot) \in L^2_{-3}(\mathbb{R}^2)$. Da igualdade anterior devemos ter

$$\int_0^t \partial_\xi \hat{u}(t',0,\eta)dt' = 0.$$

Portanto $\partial_\xi \hat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall t \in [0,t], \eta \in \mathbb{R}$. Como $\frac{d}{dt}\partial_\xi \hat{u}(t,0,0) = \|u(t)\|^2_{L^2}$, temos

$$0 = \partial_\xi^4 \hat{u}(t,0,0) = \partial_\xi^4 \hat{\phi} + \int_0^t \|u(t')\|^2_{L^2} dt'.$$

Derivando, temos que $u(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$. □

Os dois resultados seguintes mostram que as hipóteses dos teoremas anteriores podem ser reduzidas.

Teorema 4.1.3. Seja $\mu \geq 0$, $s \geq 6$ e $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{s,2})$ solução de (2.1.2). Se existirem $t_0, t_1 \in [0,T]$ tais que $u(t_0), u(t_1) \in \mathcal{Z}_{s,3}$, então

$$\hat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall t \in [0,T], \eta \in \mathbb{R},$$

ou, de forma equivalente,

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x,y)dx = 0, \forall t \in [0,T], y \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade que $t_0 = 0$. Multiplicando a equação integral (2.1.5) por x^3 obtemos

$$x^3 u(t) = x^3 E_\mu(t)\phi - \int_0^t x^3 E_\mu(t-t')(uu_x)dt', \ \forall\ t \in [0,T].$$

De $\phi \in \mathcal{Z}_{s,3}$ e do Lema (3.1.1) temos que

$$\begin{aligned} i(x^3 E_\mu(t)\phi)^\wedge &= \partial_\xi^3(F_\mu(t,\xi,\eta)\hat{\phi}) \\ &= \partial_\xi^3 F_\mu \hat{\phi} + 3\partial_\xi^2 F_\mu \partial_\xi \hat{\phi} + 3\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^2 \hat{\phi} + F_\mu \partial_\xi^3 \hat{\phi} \\ &= 4it\delta(\xi)\hat{\phi}(0,\eta)e^{-\mu\eta^2 t} + \widehat{R_1}(t), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

onde $\widehat{R_1} \in C([0,T];L^2_{-6})$. Quanto ao termo não-linear, pondo $w = uu_x$ temos que $\widehat{w} = \frac{i}{2}\xi\widehat{u^2}$, logo $\delta(\xi)\widehat{w} = 0$, portanto, como

$$i(x^3 E_\mu(t-t')uu_x)^\wedge = \partial_\xi^3 F_\mu \widehat{w} + 3\partial_\xi^2 F_\mu \partial_\xi \widehat{w} + 3\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^2 \widehat{w} + F_\mu \partial_\xi^3 \widehat{w} = \widehat{R_2}(t-t'),$$

temos que

$$\partial_\xi^3 F_\mu \widehat{w} \in L^2_{-6}, \partial_\xi F_\mu \partial_\xi^2 \widehat{w} \in L^2_{-4}, \tag{4.1.2}$$

$$\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^2 \widehat{w} = 2i\partial_\xi F_\mu \partial_\xi \widehat{u^2} + \xi \partial_\xi F_\mu \partial_\xi^2 \widehat{u^2} \in L^2_{-3}. \tag{4.1.3}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\partial_\xi^3 \widehat{u^2} = \partial_\xi \widehat{u} * \partial_\xi^2 \widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ \forall\ t \in [0,T].$$

Assim,

$$F_\mu \partial_\xi^3 \widehat{w} = 3iF_\mu \partial_\xi^2 \widehat{u^2} + iF_\mu \xi \partial_\xi^3 \widehat{u^2} \in L^2_{-3}(\mathbb{R}^2). \tag{4.1.4}$$

Portanto de (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.4) temos que $\widehat{R_2}(t-t') \in C([0,T];L^2_{-6})$. Logo,

$$i\partial_\xi^3 \hat{u}(t) = 4it\hat{\phi}(0,\eta)\delta(\xi)e^{-\mu\eta^2 t} + \widehat{R_3}(t),\ \text{onde}\ \widehat{R_3} \in C([0,T];L^2_{-6}).$$

Fazendo $t = t_1$ na igualdade anterior, como $u(t_1) \in \mathcal{Z}_{s,3}$, devemos ter

$$\hat{\phi}(0,\eta) = 0,\ \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Tomando a transformada de Fourier na equação integral (2.1.4) e em seguida fazendo $\xi = 0$ obtemos

$$\widehat{u}(t,0,\eta) = 0, \forall [0,T],\ \eta \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 4.1.4. Sejam $\mu \geq 0$, $s \geq 8$ e $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{s,2})$ solução de (2.1.2). Se existirem $t_0, t_1, t_2 \in [0,T]$ tais que $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{s,4}$, $j = 1,2,3$ então

$$u \equiv 0.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade que $t_0 = 0$. Multiplicando a equação integral (2.1.4) por x^4 obtemos

$$x^4 u(t) = x^4 E_\mu(t)\phi - \int_0^t x^4 E_\mu(t-t')(uu_x)dt',\ \forall\ t \in [0,T].$$

De $\phi \in \mathcal{Z}_{s,4}$ e do Lema (3.1.1) temos que

$$\begin{aligned}
i(x^4 E_\mu(t)\phi)^\wedge &= \partial_\xi^4 (F_\mu(t,\xi,\eta)\hat{\phi}) \\
&= \partial_\xi^4 F_\mu \hat{\phi} + 4\partial_\xi^3 F_\mu \partial_\xi \hat{\phi} + 6\partial_\xi^2 F_\mu \partial_\xi^2 \hat{\phi} + 4\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^3 \hat{\phi} + F_\mu \partial_\xi^4 \hat{\phi} \\
&= 4it\partial_\xi \delta(\xi)\hat{\phi} + (6t^2\delta(\xi)\hat{\phi} + 4it\delta(\xi)\partial_\xi \hat{\phi})e^{-\mu\eta^2 t} + \widehat{R_1} \\
&= 4it(1 + e^{-\mu\eta^2 t})\partial_\xi \widehat{\phi}(0,\eta)\delta(\xi) + \widehat{R_1}(t).
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Quanto ao termo não linear, pondo $w = uu_x$ temos que

$$\begin{aligned} i(x^4 E_\mu(t-t')w)^\wedge &= \partial_\xi^4(F_\mu(t,\xi,\eta)\hat{w}) \\ &= \partial_\xi^4 F_\mu \hat{w} + 4\partial_\xi^3 F_\mu \partial_\xi \hat{w} + 6\partial_\xi^2 F_\mu \partial_\xi^2 \hat{w} + 4\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^3 \hat{w} + F_\mu \partial_\xi^4 \hat{w} \\ &= 4i(t-t')(1+e^{-\mu\eta^2(t-t')})\partial_\xi \widehat{w}(0,\eta)\delta(\xi) + \widehat{R_2}(t). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Como $\mathcal{Z}_{1,1}$ é álgebra de Banach e do Lema 1.0.11 temos que $uu_x \in \mathcal{Z}_{1,1}$, assim $\widehat{w} \in \mathcal{Z}_{1,1}$. Os termos de $\partial_\xi^4 F_\mu \hat{w}$ que não contém derivadas de $\delta(\xi)$ pertencem a $L^2_{-8}(\mathbb{R}^2)$, enquanto os termos de $\partial_\xi^3 F_\mu \partial_\xi \hat{w}$ sem derivadas de $\delta(\xi)$ pertencem a $L^2_{-6}(\mathbb{R}^2)$. Além disso,

$$\partial_\xi^2 \partial_\xi^2 \widehat{w} = 2i\partial_\xi \widehat{u^2} + \xi \partial_\xi^2 \widehat{u^2} \in L^2_{-5}(\mathbb{R}^2), \tag{4.1.7}$$

$$\partial_\xi F_\mu \partial_\xi^3 \widehat{w} = \partial_\xi F_\mu (3i\partial_\xi^2 \widehat{u^2} + \xi \partial_\xi^3 \widehat{u^2}) \in L^2_{-3}, \tag{4.1.8}$$

pois

$$\partial_\xi^3 \widehat{u^2} = \partial_\xi \hat{u} * \partial_\xi^2 \hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^2),$$

pela desigualdade de Young. Temos também,

$$F_\mu \partial_\xi^4 \widehat{w} = F_\mu (4i\partial_\xi^3 \widehat{u^2} + \xi \partial_\xi^4 \widehat{u^2}) \in L^2_{-8}, \tag{4.1.9}$$

pois

$$\partial_\xi^4 \widehat{u^2} = \partial_\xi^2 \hat{u} * \partial_\xi^2 \hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^2),$$

novamente pela desigualdade de Young.
Fazendo $\eta = 0$ em (4.1.5) e (4.1.6) obtemos

$$(x^4 u(t))^\wedge(\xi) = 4it\partial_\xi \hat{\phi}(0,0)\delta(\xi) + 4i\int_0^t (t-t')\partial_\xi \widehat{w}(t',0,0)\delta(\xi)dt' + \widehat{R}(t),$$

onde $\widehat{R}(t) \in L^2_{-8}(\mathbb{R}^2),\ \forall t \in [0,T]$. Portanto,

$$\partial_\xi \hat{\phi}(0,0) = \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} x\phi(x,y)dxdy, \tag{4.1.10}$$

como $i\partial_\xi \widehat{w} = 1/2(\widehat{u^2} + \xi \partial_\xi \widehat{u^2})$, temos que

$$i\partial_\xi \widehat{w}(t,0,0) = 1/2\widehat{u^2}(t,0,0) = \frac{\|u(t)\|^2}{2} \tag{4.1.11}$$

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} xu(t,x,y)dxdy = \frac{\|u(t)\|^2}{2}. \tag{4.1.12}$$

De (4.1.10), (4.1.11) e (4.1.12) temos que, pondo $dxdy = dA$, temos

$$
\begin{aligned}
(x^4u(t))^\wedge(\xi) &= \frac{2t}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} x\phi(x,y)dA\delta(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^t (t-t')\partial_{t'}\int_{\mathbb{R}^2} xu(t',x,y)\delta(\xi)dt'dA + \widehat{R}(t) \\
&= \left\{\frac{2t}{\pi}\int x\phi dA + \frac{2}{\pi}(\Big[(t-t')\int xudA\Big]_{t'=0}^{t'=t} - \int_0^t \partial_{t'}(t-t')\int udAdt')\right\}\delta(\xi) + \widehat{R}(t) \\
&= -\frac{2}{\pi}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} xu(t',x,y)dAdt'\right)\delta(\xi) + \widehat{R}(t) \\
&= F(t)\delta(\xi) + \widehat{R}(t)
\end{aligned}
$$

Fazendo $t = t_1$ na igualdade anterior temos $F(t_1) = 0$.

Pelo lema de Rolle existe $\tau_1 \in [0, t_1]$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} xu(\tau_1, x, y)dxdy = 0. \tag{4.1.13}$$

De maneira análoga, como $u(t_3) \in \mathcal{Z}_{s,4}$, podemos mostrar que existe $\tau_2 \in [t_2, t_3]$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} xu(\tau_2, x, y)dxdy = 0. \tag{4.1.14}$$

De (4.1.13) e (4.1.14) obtemos $u(t) = 0, \forall t \in [0, T]$, pois

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} xu(t, x, y)dxdy = \frac{\|u(t)\|^2}{2}.$$

□

4.2 Pesos fracionários

Nesta seção, o nosso objetivo será demonstrar os Teoremas 4.2.1 e 4.2.2, os quais estendem os resultados da seção anterior ao caso de pesos fracionários. Seguiremos os argumentos contidos em [17]. A idéia central é explorar o "mal" comportamento da BO-ZK na direção x, que, em algum sentido, é similar ao apresentado pela equação de Benjamin-Ono. Ressaltamos também que uma abordagem similar foi obtida com sucesso para a equação de Benjamin, veja [50].

O próximo teorema nos dá uma condição sobre a solução para garantirmos a propriedade de persistência em $\mathcal{Z}_{s,r}$, para $s \geq 5$, $r \geq 5/2$.

Teorema 4.2.1. Seja $u \in C([0, T]; \mathcal{Z}_{4,2})$ uma solução do PVI (2.1.1). Se existirem dois tempos distintos $t_1, t_2 \in [0, T]$ tais que $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, $j = 1, 2$ então,

$$\hat{u}(t, 0, \eta) = 0, \quad \text{para todo } \eta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Começamos notando que a solução de (2.1.1) pode ser representada pela fórmula de Duhamel

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-t')u(t')\partial_x u(t')dt', \tag{4.2.1}$$

onde $U(t)\phi$ é a solução do PVI associado à parte linear da BO-ZK. É fácil checar, via transformada de Fourier que

$$\widehat{U(t)\phi}(\xi,\eta) = e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}(\xi,\eta).$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_1 = 0$. Como $\phi \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, segue do Teorema 3.2.4 que

$$u \in C([0,T]; H^5 \cap L_r^2), \qquad 0 < r < 5/2. \tag{4.2.2}$$

Multiplicando (4.2.1) por $|x|^{5/2}$ e tomando a transformada de Fourier obtemos

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(\widehat{u(t)}) = D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{z})dt', \tag{4.2.3}$$

onde $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$. Fixado $t \in [0,T]$, observe que se $\langle x,y\rangle^{5/2}U(t)\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ então $|x|^{5/2}U(t)\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, que, pela identidade de Plancherel, implica que

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Mostraremos então que isto é possível apenas se $\hat{\phi}(0,\eta) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$. A idéia é a seguinte: como

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) = e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big(&(-2it\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2 + 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4)\hat{\phi} + (2it\eta^2 \\ &- 4it|\xi|)\partial_\xi\hat{\phi} + \partial_\xi^2\hat{\phi}\Big),\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

mostraremos que todos os termos em (4.2.3), exceto aquele envolvendo $\mathrm{sgn}(\xi)$, que aparece da parte linear, possuem um decaimento apropriado. Com isso obteremos nosso objetivo.

Na direção x a BO-ZK tem um comportamento similar ao da BO, então, necessitamos de localização na direção ξ. Por outro lado, necessitamos de algum decaimento na direção η, mas, sem localização nesta direção. Para fazer isto, definimos $\chi(\xi,\eta) = \tilde{\chi}(\xi)e^{-\eta^2}$, onde $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tal que *supp* $\tilde{\chi} \subset (-\epsilon,\epsilon)$ e $\tilde{\chi} = 1$ em $(-\epsilon/2, \epsilon/2)$.

Através da função χ, escrevemos a parte linear da fórmula de Duhamel como segue

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) &= [\chi; D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^2\Big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) + D_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi})\Big) \\ &:= A + B.\end{aligned}$$

A seguir, a constante c dependerá de T e das normas de χ. Usando a Proposição 1.0.12, o Lema 1.0.11, a identidade de Plancherel e (4.2.4) segue que

$$\begin{aligned}\|A\| &= \|\|[\chi; D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\ &\leq c\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\ &\leq c(\|\hat{\phi}\|+\|\xi^2\hat{\phi}\|+\|\eta^2\xi\hat{\phi}\|+\|\eta^4\hat{\phi}\|+\|\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\xi\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|)\\ &= c(\|\phi\|+\|\partial_x^2\phi\|+\|\partial_y^2\partial_x\phi\|+\|\partial_y^4\phi\|+\|\partial_y^2(x\phi)\|+\|\partial_x(x\phi)\|+\|x^2\phi\|).\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Todos os termos no membro direito de (4.2.5) são finitos pois $\phi \in \mathcal{Z}_{4,2}$.

Escrevemos a seguir

$$\begin{aligned}B &= D_\xi^{1/2}\Big((-2it\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2 + 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4)\hat{\phi} + (2it\eta^2\\ &\quad - 4it|\xi|)\partial_\xi\hat{\phi} + \partial_\xi^2\hat{\phi}\Big)\\ &:= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7.\end{aligned}$$

Primeiramente vamos estimar a norma L^2 de B_7. O Teorema 1.0.6, a Proposição 1.0.8, e o Lema 1.0.9 implicam que

$$\begin{aligned}\|B_7\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi})\|\\ &= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\ &\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta})\\ &\leq c(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{\phi})\|)\\ &\leq c(\|x^2\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^2\hat{\phi})\|)\\ &\leq c(\|x^2\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}\|\\ &\quad + \|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^2\hat{\phi})\|)\\ &\leq c(\|x^2\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\partial_\xi^2\hat{\phi}\|\\ &\quad + \|\chi\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\partial_\xi^2\hat{\phi})\|)\\ &\leq c(\|x^2\phi\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\|+\|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{\phi}\|)\\ &\leq c\|\langle x,y\rangle^{2+1/2}\phi\|.\end{aligned}$$

Para estimar B_2, B_3, B_4, B_5 and B_6 em $L^2(\mathbb{R}^2)$ procedemos de maneira similar, omitiremos assim os detalhes (Veja Apêndice 1). Note que não estimamos B_1. Contudo, se mostrarmos que a parte integral na fórmula de Duhamel pertence a $L^2(|x|^5dxdy)$ então concluiremos que $B_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ (para qualquer $t \in [0,T]$, fixado).

Para fazer isto, localizamos novamente com o auxílio da função χ. Assim, usando um comutador, a parte integral em (4.2.3) nos conduz a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t [\chi; D_\xi^{1/2}]\Big(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\big(-2i(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z} - 4(t-t')^2\xi^2\hat{z} + 4(t-t')^2\eta^2|\xi|\hat{z} \\
&\qquad - (t-t')^2\eta^4\hat{z} - 4(t-t')|\xi|\partial_\xi\hat{z} + 2i(t-t')\eta^2\partial_\xi\hat{z} + \partial_\xi^2\hat{z})\Big) \\
&\qquad + D_\xi^{1/2}\Big(\chi(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(-2i(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z} - 4(t-t')^2\xi^2\hat{z} + 4(t-t')^2\eta^2|\xi|\hat{z} \\
&\qquad - (t-t')^2\eta^4\hat{z} - 4i(t-t')|\xi|\partial_\xi\hat{z} + 2i(t-t')\eta^2\partial_\xi\hat{z} + \partial_\xi^2\hat{z}))\Big)dt' \\
&:= C_1 + ... + C_7 + D_1 + ... + D_7.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Observamos que os termos envolvendo a mais alta regularidade e o decaimento são C_4 e D_7, respectivamente. A seguir, mostraremos em detalhes suas estimativas na norma L^2. Da Proposição 1.0.12, obtemos

$$\begin{aligned}
\|C_4\| &\leq t^2 \|\|\|\chi\|_{H_\xi^1} \|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^4\hat{z}\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2}\|_{L_T^1} \\
&\leq c\|\|\partial_y^4 z\|\|_{L_T^1} \\
&\leq c\|\|\partial_y^4\partial_x u^2\|\|_{L_T^1} \\
&\leq c\|u\|_{L_T^\infty H^5}^2.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

O membro direito de (4.2.7) é finito em vista de (4.2.2).

Com respeito a norma L^2 de D_7, primeiro observamos que, usando o Lema 1.0.11, obtemos

$$xu \in H^2(\mathbb{R}^2) \text{ and } \||x|^{3/2}\partial_x u\| \leq c(\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}} + \|\langle x, y\rangle^{1/2} u\|). \tag{4.2.8}$$

Seja $\bar{D}_7 = D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)})\partial_\xi^2\hat{z}$. Usando o Teorema 1.0.6, a Proposição 1.0.8, o Lema 1.0.9 e

(4.2.8) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_7\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|x^2z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\partial_\xi^2\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|x^2z\|+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^2\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^2\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|x^2z\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\|+\|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{z}\|) \\
&\leq c(\|x^2z\|+\|D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{z}\|) \\
&= c(\|x^2z\|+\||x|^{2+1/2}z\|) \\
&\leq c(\|x^2uu_x\|+\||x|^{2+1/2}uu_x\|) \\
&\leq c(\|u_x\|_\infty\|x^2u\|+\||x|^{3/2}\partial_xu\|\|xu\|_{L^\infty}) \\
&\leq c(\|u_x\|_\infty\|x^2u\|+\|xu\|_\infty\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}}+\|\langle x,y\rangle^{1/2}u\|).
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$\|D_7\|\leq c\|\|\bar{D}_7\|\|_{L^1_t}<\infty.$$

Como $\hat{z}(0)=0$, podemos estimar D_1 como segue. Primeiro, notamos que

$$
\begin{aligned}
\|D_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\| &= \|\widehat{|x|^{1/2}\mathcal{H}}z\| \\
&\leq \|(1+|x|)^{1/2}\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|(1+|x|)\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|z\|+\|x\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|z\|+\|\mathcal{H}(xz)\| \\
&= \|z\|+\|xz\| \\
&\leq c\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}}.
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

Seja

$$\bar{D}_1 = D_\xi^{1/2}\Big(\chi(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}((t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}))\Big).$$

Usando o Teorema 1.0.6, a Proposição 1.0.8, o Lema 1.0.9 e (4.2.9) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_1\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|z\|+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|z\|+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|z\|+\|D_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|) \\
&\leq c\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\|D_1\| \leq \|\bar{D}_1\|_{L^1_t} < \infty.$$

Os outros termos que aparecem em (4.2.6) são estimados de maneira similar. Aqui, também omitiremos os detalhes (Veja Apêndice 1). Portanto, as estimativas acima na parte linear e integral de (4.2.3), juntamente com o fato de que $u(t_2) \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, nos permitem concluir que

$$B_1 = -2it_2 D_\xi^{1/2}(\chi e^{it_2\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Pelo Teorema de Fubini obtemos que $B_1 \in L^2_\xi(\mathbb{R})$, q.t.p. $\eta \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 1.0.6, deduzimos que

$$\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it_2\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}) \in L^2_\xi(\mathbb{R}), \quad \text{q.t.p. } \eta \in \mathbb{R}. \tag{4.2.10}$$

Uma aplicação da Proposição 1.0.10 nos dá

$$\hat{\phi}(0,\eta) = 0, \text{ q.t.p. } \eta \in \mathbb{R}.$$

Como $\hat{\phi}$ é contínua obtemos $\hat{\phi}(0,\eta) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$. A conclusão do teorema segue, usando (1.0.2). □

A seguir, melhoramos o Teorema 4.1.4, obtendo o resultado para pesos fracionários.

Teorema 4.2.2. Seja $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{4,2})$ solução do PVI (2.1.1). Se existirem três tempos distintos $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ tais que $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{7,7/2}$, $j = 1,2,3$, então

$$u(x,y,t) = 0, \quad \text{for all } \; x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T].$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_1 = 0 < t_2 < t_3$. Como no último teorema seguiremos os argumentos de [17]. Multiplicando (4.2.1) por $|x|^{7/2}$ e tomando a transformada de Fourier, obtemos

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3 \widehat{u(t)} = D_\xi^{1/2} F(t,\xi,\eta,\hat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^{1/2} F(t-t',\xi,\eta,\hat{z}(t'))dt', \tag{4.2.11}$$

onde $F(t,\xi,\eta,\hat{\phi}) = \partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi})$. Então, pelo Teorema de Plancherel se assumirmos que o segundo membro de (4.2.11) pertence a $L^2(\mathbb{R}^2)$, para os tempos $t_1 = 0 < t_2 < t_3$, então obteremos uma contradição. Como antes, estamos denotando $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$.

Primeiramente, nossas hipóteses juntamente com os Teoremas 3.2.4 e 4.2.1 implicam que

$$u \in C([0,T];\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}), \qquad \frac{5}{2} \leq r < \frac{7}{2}.$$

Além disso, um cálculo direto nos revela que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) = \Big(&(-4it\delta_\xi - it^3\eta^6 - 24t^2\xi + 6t^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8it^3|\xi|^3 \\ &+ 6it^3\eta^4|\xi| - 12it^3\eta^2\xi^2)\hat{\phi} + (-6it\mathrm{sgn}(\xi) - 12t^2\xi^2 + 12t^2\eta^2|\xi| \\ &- 3t^2\eta^4)\partial_\xi\hat{\phi} + 3it(\eta^2 - 2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{\phi} + \partial_\xi^3\hat{\phi}\Big)e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}.\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Onde $\delta(\xi)$ denota a função delta de Dirac com respeito a ξ, isto é, $\langle\delta(\xi),\varphi\rangle = \varphi(0,\eta)$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Como no último teorema denotamos $\chi(\xi,\eta) = \tilde{\chi}(\xi)e^{-\eta^2}$, onde $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, *supp* $\tilde{\chi} \subset (-\epsilon,\epsilon)$ e $\tilde{\chi} = 1$ em $(-\epsilon/2,\epsilon/2)$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) &= [\chi; D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}) + D_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi})) \\ &:= \tilde{A} + \tilde{B}.\end{aligned}$$

Para estimar a norma L^2 de $\tilde{A}$, procedemos de forma similar ao seu termo homólogo A no Teorema 4.2.1. Omitiremos então, os detalhes.

Em seguida, observe que

$$\begin{aligned}\tilde{B} =&D_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{\phi}))\\ =& \chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big((-4it\delta_\xi - it^3\eta^6 - 24t^2\xi + 6t^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8it^3|\xi|^3\\ &+ 6it^3\eta^4|\xi| - 12it^3\eta^2\xi^2)\hat{\phi} + (-6it\mathrm{sgn}(\xi) - 12t^2\xi^2 + 12t^2\eta^2|\xi|\\ &- 3t^2\eta^4)\partial_\xi\hat{\phi} + 3it(\eta^2 - 2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{\phi} + \partial_\xi^3\hat{\phi}\Big)\\ :=&\tilde{B}_2 + ... + \tilde{B}_{14}.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Pelas nossas hipóteses, o Teorema 4.2.1 implica que o dado inicial ϕ pertence a $\dot{\mathcal{Z}}_{5,5/2}$. Então, o primeiro termo envolvendo a função delta de Dirac em (4.2.13) precisa ser nulo, isto é, o termo $\tilde{B}_1$ não aparece em (4.2.13). Para estimar $\tilde{B}_4$ usamos que $\hat{\phi}(0) = 0$. Aqui, estimaremos em detalhes apenas os termos mais difíceis, isto é, $\tilde{B}_2$ e $\tilde{B}_{14}$ que são os termos que envolvem maior regularidade e decaimento do dado inicial. Os outros termos, exceto $\tilde{B}_8$, podem ser estimados de maneira similar (veja o Apêndice 2).

Novamente, usando o Teorema 1.0.6, (1.0.7), a Proposição 1.0.8, o Lema 1.0.9, e a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}_2\| \leq& c(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^6\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^6\hat{\phi}\| + \|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^6\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\hat{\phi}\| + \|\chi\eta^6\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|)\\ \leq& c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \|\chi\eta^6\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|)\\ \leq& c(\|\phi\| + \|D_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|)\\ =& c(\|\phi\| + \||x|^{1/2}\phi\|).\end{aligned}$$

De maneira similar,

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}_{14}\| \leq& c(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^3\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^3\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^3\hat{\phi}\| + \|e^{i\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^3\hat{\phi})\|)\\ \leq& c(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^3\hat{\phi}\| + \|\chi\|_\infty\|D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3\hat{\phi}\|)\\ \leq& c\|\langle x, y\rangle^{3+1/2}\phi\|.\end{aligned}$$

A seguir, considerando a parte integral, localizamos novamente perto da origem no espaço de

Fourier e usamos um commutador para obter

$$
\begin{aligned}
\int_0^t [\chi; D_\xi^{1/2}]\Big(\Big\{ & e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big[(-4i(t-t')\delta_\xi - i(t-t')^3\eta^6 - 24(t-t')^2\xi \\
& + 6(t-t')^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8i(t-t')^3|\xi|^3 + 6i(t-t')^3\eta^4|\xi| \\
& - 12i(t-t')^3\eta^2\xi^2)\hat{z} + (-6i(t-t')\mathrm{sgn}(\xi) - 12(t-t')^2\xi^2 + 12(t-t')^2\eta^2|\xi| \\
& - 3(t-t')^2\eta^4)\partial_\xi\hat{z} + 3i(t-t')(\eta^2 - 2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{z} + \partial_\xi^3\hat{z}\Big]\Big\} \\
& + D_\xi^{1/2}\Big\{\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big[(-4i(t-t')\delta_\xi - i(t-t')^3\eta^6 - 24(t-t')^2\xi \\
& + 6(t-t')^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8i(t-t')^3|\xi|^3 + 6i(t-t')^3\eta^4|\xi| \\
& - 12i(t-t')^3\eta^2\xi^2)\hat{z} + (-6i(t-t')\mathrm{sgn}(\xi) - 12(t-t')^2\xi^2 + 12(t-t')^2\eta^2|\xi| \\
& - 3(t-t')^2\eta^4)\partial_\xi\hat{z} + 3i(t-t')(\eta^2 - 2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{z} + \partial_\xi^3\hat{z}\Big]\Big\}\Big)dt' \\
:= \tilde{C}_1 + \ldots \tilde{C}_{14} + \tilde{D}_1 + \ldots + \tilde{D}_{13} + \tilde{E},
\end{aligned}
\tag{4.2.14}
$$

onde

$$\tilde{E} := -6i\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{z})dt'.$$

De $\hat{z}(0,\eta,t') = 0$ deduzimos que $\tilde{C}_1 = 0$ e $\tilde{D}_1 = 0$. Para estimar o termo $\tilde{C}_2$ podemos usar a Proposição 1.0.12 para obter

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_2\| & \leq t^3\|\|\|\chi\|_{H_\xi^1}\|e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^6\hat{z}\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2}\|_{L_T^1} \\
& \leq c\|\|\partial_y^6 z\|\|_{L_T^1} \\
& \leq c\|\|\partial_y^6\partial_x u^2\|\|_{L_T^1} \\
& \leq c\|u\|^2_{L_T^\infty H^7}.
\end{aligned}
$$

O restante dos termos $\tilde{C}_i$, $2 \leq i \leq 14$ e $\tilde{D}_i$, $2 \leq i \leq 13$, serão estimados no Apêndice 2. Seja

$t = t_2$, como $\phi, u(t_2) \in Z_{7,7/2}$, de (4.2.14) e das estimativas acima concluímos que

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \tilde{B}_8 - \tilde{E} \\
&= 6i\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi(\frac{i\xi}{2}\hat{u}*\hat{u}))dt' \\
&\quad - 6iD_\xi^{1/2}(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}) \\
&= 6i\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)(\partial_\xi\hat{z}(\xi,\eta,t')-\partial_\xi\hat{z}(0,\eta,t')))dt' \\
&\quad - 6iD_\xi^{1/2}(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\mathrm{sgn}(\xi)(\partial_\xi\hat{\phi}(\xi,\eta)-\partial_\xi\hat{\phi}(0,\eta))) \\
&\quad - 6iD_\xi^{1/2}(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}(0,\eta)) \\
&\quad + 6i\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{z}(0,\eta,t'))dt' \\
&= R_1(t)+R_2(t)+R_3(t)+R_4(t) \in L^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}
$$

Podemos mostrar que $R_1(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, para todo $t' \in [0,t]$. De fato, seja

$$f(\xi,\eta,t') = e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)g(\xi,\eta,t'),$$

onde $g(\xi,\eta,t') = \partial_\xi\hat{z}(\xi,\eta,t') - \partial_\xi\hat{z}(0,\eta,t')$. Um cálculo simples nos fornece

$$g = \frac{i}{2}(\widehat{u^2} + \xi\partial_\xi\widehat{u^2} - \widehat{u^2}(0,\eta,t')), \partial_\xi g = i\partial_\xi\widehat{u^2} + \frac{i}{2}\xi\partial_\xi^2\widehat{u^2}$$

e

$$\partial_\eta g = \frac{i}{2}(\partial_\eta\widehat{u^2} + \xi\partial_\eta\partial_\xi\widehat{u^2} - \partial_\eta\widehat{u^2}(0,\eta,t')).$$

Como $u^2 \in C([0,T]; Z_{7,\frac{7}{2}-\epsilon})$, para todo $0 < \epsilon < 1/2$, segue que $\widehat{u^2} \in C([0,T]; Z_{\frac{7}{2}-\epsilon,7})$. Então, de $g\delta_\xi = 0$ e da imersão de Sobolev obtemos

$$\|f\| \leq c(\|\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty + \|\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty) < \infty,$$

$$
\begin{aligned}
\|\partial_\xi f\| \leq c(&\|(\eta^2+2|\xi|)\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty + \|(\eta^2+2|\xi|)\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\partial_\xi\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty + \\
&+\|\xi\partial_\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\xi\chi\|\|\partial_\xi^2\widehat{u^2}\|_\infty) < \infty,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|\partial_\eta f\| \leq c(&\|\xi\eta\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty + \|\xi^2\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\partial_\eta\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty + \\
&+\|\xi\partial_\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\xi\partial_\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty + \|\chi\|\|\partial_\eta\widehat{u^2}\|_\infty + \|\xi\chi\|\|\partial_\eta\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty) < \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto $f(\cdot,\cdot,t') \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $t' \in [0,t]$. Além disso, é fácil mostrar que $D_\xi^{1/2}f \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$. Uma obordagem similar mostra que $R_2(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Portanto $R_3+R_4 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Por outro lado

$$\partial_\xi(\frac{i\xi}{2}\hat{u}*\hat{u})(0,\eta,t') = \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\eta y}u^2(x,y,t')dxdy.$$

Além disso, de (2.1.1), obtemos

$$\frac{d}{dt'}\int_{\mathbb{R}^2} xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\eta y}u^2(x,y,t')dxdy, \forall \eta\in\mathbb{R}, \tag{4.2.15}$$

o que implica

$$\partial_\xi(\frac{i\xi}{2}\hat{u}*\hat{u})(0,\eta,t') = i\frac{d}{dt'}\int_{\mathbb{R}^2} xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy. \tag{4.2.16}$$

Substituindo (4.2.16) em R_4 e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
R_4(t) =& 6i\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi))(i\frac{d}{dt'}\int_{\mathbb{R}^2} xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy)dt'\\
=& -6D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi))\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')|_{t'=0}^{t'=t}+\\
&+6\int_0^t D_\xi^{1/2}((i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-t')\mathrm{sgn}(\xi))\int xe^{-i\eta y}udxdydt'\\
&-6\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\mathrm{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy)dt'\\
=& 6D_\xi^{1/2}(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\mathrm{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}\phi(x,y)dxdy)\\
&+6\int_0^t D_\xi^{1/2}((i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\mathrm{sgn}(\xi))\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdydt'\\
&-6\int_0^t D_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\mathrm{sgn}(\xi))\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdydt'\\
=& -R_3+R_5+R_6,
\end{aligned}$$

onde acima usamos a identidade

$$\partial_\xi\hat{\phi}(0,\eta) = -i\int xe^{-i\eta y}\phi(x,y)dxdy.$$

Portanto

$$R = R_1+R_2+R_5+R_6.$$

De forma similar a $R_1(t)$ podemos mostrar que $R_5\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
R_6(t) &= 6\int_0^t D_\xi^{1/2}\Big(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\mathrm{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy\Big)dt'\\
&= 6D_\xi^{1/2}\int_0^t\Big(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\mathrm{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy\Big)dt'\in L^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini temos $R_6(t)\in L^2_\xi(\mathbb{R})$, q.t.p $\eta\in\mathbb{R}$. O Teorema 1.0.6 então nos fornece

$$\mathcal{D}_\xi^{1/2}\Big(\chi\mathrm{sgn}(\xi)\int_0^t(e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\int xe^{-i\eta y}u(x,y,t')dxdy)dt'\Big)\in L^2_\xi(\mathbb{R}), \text{q.t.p } \eta\in\mathbb{R},$$

que pela Proposição 1.0.10 implica em

$$0 = \int_0^{t_2} \left(\int x e^{-i\eta y} u(x,y,t') dx dy \right) dt' = g(\eta) \text{ q.t.p } \eta \in \mathbb{R}.$$

Como g é uma função contínua, obtemos

$$g(0) = \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^2} x u(x,y,t') dx dy dt' = 0.$$

Pelo Lema de Rolle, existe $\tau_1 \in (0, t_2)$ tal que

$$\int x u(x,y,\tau_1) dx dy = 0. \tag{4.2.17}$$

Analogamente, usando que $u(t_2), u(t_3) \in Z_{7,7/2}$ podemos mostrar que existe $\tau_2 \in (t_2, t_3)$ tal que

$$\int x u(x,y,\tau_2) dx dy = 0. \tag{4.2.18}$$

Finalmente, de (4.2.17), (4.2.18), (4.2.15) (com $\eta = 0$), e o fato de que a norma L^2 de u é conservada, concluímos que $\|\phi\| = 0$. Pela unicidade obtemos a demonstração do Teorema.

$\square$

Capítulo 5

Teoria em espaços de Sobolev com baixa regularidade

Neste capítulo, estamos interessados em melhorar os resultados obtidos no Teorema 2.1.11. Nossa estratégia é explorar as idéias de Koch e Tzvetkov para a equação de Benjamin-Ono (veja [34]), no qual é usado estimativas do tipo Strichartz e um *argumento de compacidade* para mostrar a existência de solução.

Para fazer isto vamos considerar novamente o PVI associado à BO-ZK

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \ x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.0.1}$$

O nosso objetivo será provar o seguinte resultado.

Teorema 5.0.3. Seja $s > 11/8$. Então para cada $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existe $T \geq c\|\phi\|_{H^s}^{-8}$ e uma única solução de (5.0.1) definida no intervalo $[0,T]$ tal que

$$u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)), \ u_x \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Além disso, para cada $R > 0$, existe $T \geq cR^{-8}$ tal que a aplicação

$$\phi \in B(0,R) \mapsto u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$$

é contínua, onde $B(0,R)$ denota a bola de raio R centrada na origem em $H^s(\mathbb{R}^2)$.

5.1 Resultados iniciais

Vamos começar com a seguinte.

Definição 5.1.1. Um par $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ é chamado admissível se

$$\frac{1}{q}+\frac{4}{3p}=\frac{1}{2},\ \text{onde } p>8/3.$$

O próximo lema será usado na demonstração do Lema 5.1.3 e sua demonstração pode ser encontrada em [14].

Lema 5.1.2. Se (p,q) é um par admissível então

$$\|U(t)f\|_{L_t^pL^q}\leq c\|f\|, \tag{5.1.1}$$

onde $U(t)f=(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\hat{f})^{\vee}$.

Aqui e no que segue, a norma $\|g\|_{L_t^pL^q}$ é dada por $\|\|g(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Se $I\subset\mathbb{R}$ é um intervalo, $\|g\|_{L_I^pL^q}$ representará $\|\|g(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|_{L^p(I)}$. No caso particular em que $I=[0,T]$ usaremos $\|g\|_{L_T^pL^q}$ no lugar de $\|g\|_{L^p_{([0,T])}L^q}$.

Para demonstrar o Teorema 5.0.3 precisaremos dos próximos resultados.

Lema 5.1.3. Sejam $\lambda\geq 1$, $T>0$ e $\sigma>1$. Considere $u:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, solução da equação

$$u_t+\mathcal{H}u_{xx}+u_{xyy}+Vu_x=F,$$

onde V e F são funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Suponha ainda que

$$\operatorname{supp}\,\widehat{u}(t,\cdot,\cdot)\subset\mathcal{B}(0,2\lambda),\forall t\in[0,T], \tag{5.1.2}$$

onde $\mathcal{B}(0,2\lambda)$ denota a bola aberta de centro na origem e raio 2λ em $\mathbb{R}^2$. Então, para cada par admissível (p,q) temos

$$\|u\|_{L_I^pL^q}\leq c(1+\|J^\sigma V\|_{L_T^\infty L^2})(\|u\|_{L_I^\infty L^2}+\|F\|_{L_I^1L^2}), \tag{5.1.3}$$

onde $I\subset[0,T]$ é um intervalo satisfazendo $|I|\leq c\lambda^{-1}$. Além disso,

$$\|u\|_{L_T^pL^q}\leq c(1+T)^{1/p}\lambda^{1/p}(1+\|J^\sigma V\|_{L_T^\infty L^2})(\|u\|_{L_T^\infty L^2}+\|F\|_{L_T^1L^2}) \tag{5.1.4}$$

Demonstração. Se $f:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, então a solução da equação

$$u_t+\mathcal{H}u_{xx}+u_{xyy}=f,$$

é dada por

$$u(t)=U(\tau-t)u(\tau)+\int_\tau^t U(t'-t)f(t')dt', \tag{5.1.5}$$

onde $t, \tau \in I \subset [0,T]$. Seja $f(t') = -Vu_x(t') + F(t')$, então pelo Lema 5.1.2

$$\begin{aligned}
\|U(\tau - t)u(\tau)\|_{L_I^pL^q} &= \|U(-t)U(\tau)u(\tau)\|_{L_I^pL^q} \\
&\leq \|U(-t)U(\tau)u(\tau)\|_{L_t^pL^q} \\
&\leq c\|U(-t)u(\tau)\| \\
&\leq c\|u(\tau)\| \\
&\leq c\|u\|_{L_I^\infty L^2}. \qquad (5.1.6)
\end{aligned}$$

Usando a imersão de Sobolev e o Lema 5.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\int_\tau^t U(t'-t)f(t')dt'\|_{L_I^pL^q} &\leq \int_\tau^t \|U(t'-t)f(t')\|_{L_I^pL^q}dt' \\
&\leq c\int_\tau^t \|U(t')f(t')\|_{L^2}dt' \\
&\leq c\|Vu_x\|_{L_I^1L^2} + \|F\|_{L_I^1L^2} \\
&\leq c\|V\|_{L_I^\infty L^\infty}\|u_x\|_{L_I^1L^2} + \|F\|_{L_I^1L^2} \\
&\leq c\|J^\sigma V\|_{L_I^\infty L^2}\|u_x\|_{L_I^1L^2} + \|F\|_{L_I^1L^2}. \qquad (5.1.7)
\end{aligned}$$

Além disso, a identidade de Plancherel, (5.1.2) e a condição sobre $|I|$ implicam

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_{L_I^1L^2} &\leq |I|\|u_x\|_{L_I^\infty L^2} \\
&= |I|\sup_{t\in I}\|\xi\hat{u}(t,\xi,\eta)\| \\
&\leq 2|I|\lambda\|\hat{u}\|_{L_I^1L^2} \\
&\leq 2c\|u\|_{L_I^\infty L^2}. \qquad (5.1.8)
\end{aligned}$$

De (5.1.5)-(5.1.8) obtemos (5.1.3). Como $\lambda \geq 1$, podemos escolher uma partição $[0,T] = \bigcup_{k=1}^n I_k$, onde os intervalos I_k satisfazem $|I_k| \leq \lambda^{-1}$ com

$$n \leq (1+T)\lambda. \qquad (5.1.9)$$

Portanto, por (5.1.3),

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_{I_k}^pL^q} &\leq c(1+\|J^\sigma V\|_{L_T^\infty L^2})(\|u\|_{L_{I_k}^\infty L^2} + \|F\|_{L_{I_k}^1L^2}) \\
&\leq c(1+\|J^\sigma V\|_{L_T^\infty L^2})(\|u\|_{L_T^\infty L^2} + \|F\|_{L_T^1L^2})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_T^pL^q}^p &= \sum_{k=1}^n \|u\|_{L_{I_k}^pL^q}^p \\
&\leq c\sum_{k=1}^n \{(1+\|J^\sigma V\|_{L_T^\infty L^2})(\|u\|_{L_T^\infty L^2} + \|F\|_{L_T^1L^2})\}^p. \qquad (5.1.10)
\end{aligned}$$

De (5.1.9) e (5.1.10) obtemos (5.1.4). □

Vamos agora introduzir os multiplicadores de Littlewood-Paley (para maiores informações veja [49]). Sejam $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi = 1$ em $\mathcal{B}(0,1/2)$, $\chi = 0$ em $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}(0,1)$ e

$$\varphi(\xi,\eta) = \chi\left(\frac{\xi}{2},\frac{\eta}{2}\right) - \chi(\xi,\eta).$$

Portanto supp $\varphi \subset \mathcal{B}(0,2)\backslash\mathcal{B}(0,1/2)$ e

$$1 = \chi(\xi,\eta) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{2^k},\frac{\eta}{2^k}\right).$$

Definimos

$$\widehat{\Delta_\lambda f}(t,\xi,\eta) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{\xi}{\lambda},\frac{\eta}{\lambda}\right)\hat{f}(t,\xi,\eta), \lambda = 2^k, k \geq 1 \\ \chi(\xi,\eta)\hat{f}(t,\xi,\eta),\ \lambda = 1. \end{cases} \tag{5.1.11}$$

Seja $f_\lambda := \Delta_\lambda f$, então

$$f = \sum_\lambda f_\lambda,\ \text{no sentido de } L^2.$$

No que segue entenderemos como inteiro diádico a um número da forma $\lambda = 2^k,\ k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Seja λ um inteiro diádico, definimos então

$$\tilde{\Delta}_\lambda = \begin{cases} \Delta_{\lambda/2} + \Delta_\lambda + \Delta_{2\lambda},\ \lambda > 1, \\ \Delta_1 + \Delta_2,\ \lambda = 1. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

O resultado a seguir será usado na demonstração do Lema 5.1.5.

Lema 5.1.4. Existe uma constante c tal que para quaisquer $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e v satisfazendo $\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, tem-se

$$\|[\Delta_\lambda, v\partial_x]w\| \leq c\|\nabla v\|_{L^\infty}\|w\|.$$

Demonstração. Supondo $w \in \mathcal{S}$ note que

$$\begin{aligned} [\Delta_\lambda, v\partial_x]w &= \Delta_\lambda(v\partial_x w) - v\partial_x\Delta_\lambda w \\ &= \Delta_\lambda(\partial_x(vw) - w\partial_x v) - v\partial_x\Delta_\lambda w \\ &= \Delta_\lambda\partial_x(vw) - \Delta_\lambda(w\partial_x v) - v\partial_x\Delta_\lambda w \\ &:= A - B - C \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Por um lado, usando que Δ_λ é limitado em L^2, é fácil ver que

$$\|B\|= \|\Delta_\lambda(wv_x)\|\leq \|w\|\|v_x\|_{L^\infty}\leq c\|w\|\|\nabla v\|_{L^\infty}. \tag{5.1.14}$$

Por outro lado, para $\lambda \geq 1$, pondo $\phi = \chi$ ou $\phi = \varphi$ temos que

$$\Delta_\lambda f(x,y) = \lambda^2(\check{\phi}(\lambda\cdot) * f)(x,y).$$

Seja $\theta_1 = (x,y)$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2\check{\phi}(\lambda\cdot) * \partial_x(vw) \\ &= \lambda^3\partial_x\check{\phi}(\lambda\cdot) * (vw) \\ &= \lambda^3\int_{\mathbb{R}^2} v(\theta_2)w(\theta_2)\partial_x\check{\phi}(\lambda(\theta_1-\theta_2))d\theta_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= v(\theta_1)\lambda^2\check{\phi}(\lambda\cdot) * \partial_x w \\ &= \lambda^3 v(\theta_1)\partial_x\check{\phi}(\lambda\cdot) * w \\ &= \lambda^3 v(\theta_1)\int_{\mathbb{R}^2} w(\theta_2)\partial_x\check{\phi}(\lambda(\theta_1-\theta_2))d\theta_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A - C &= \int_{\mathbb{R}^2} w(\theta_2)\{\lambda^3(\partial_x\check{\phi}(\lambda(\theta_1-\theta_2))(v(\theta_2)-v(\theta_1)))\}d\theta_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} w(\theta_2)K(\theta_1,\theta_2)d\theta_2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade do valor médio

$$|v(\theta_1)-v(\theta_2)|\leq \|\nabla v\|_{L^\infty}|\theta_1-\theta_2|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2}|K(\theta_1,\theta_2)|d\theta_1 &\leq \lambda^3\int_{\mathbb{R}^2}|v(\theta_1)-v(\theta_2)||\partial_x\check{\phi}(\lambda(\theta_1-\theta_2))|d\theta_2 \\ &\leq \lambda^3\|\nabla v\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}|\theta_1-\theta_2||\partial_x\check{\phi}(\lambda(\theta_1-\theta_2))|d\theta_1 \\ &\leq \lambda^3\|\nabla v\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|z|}{\lambda}|\partial_x\check{\phi}(z)|\frac{dz}{\lambda^2} \\ &\leq c\|\nabla v\|_{L^\infty},\ \forall\theta_2\in\mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

e

$$\sup_{\theta_2}\int_{\mathbb{R}^2}|K(\theta_1,\theta_2)|d\theta_1 \leq c\|\nabla v\|_{L^\infty}.$$

De modo análogo,

$$\sup_{\theta_1}\int_{\mathbb{R}^2}|K(\theta_1,\theta_2)|d\theta_2 \leq c\|\nabla v\|_{L^\infty}.$$

Portanto pelo Lema de Schur (veja [48]) temos

$$\|A-C\|\leq c\|\nabla v\|_{L^\infty}\|w\|. \tag{5.1.15}$$

De (5.1.13)–(5.1.15) concluimos o lema. □

O próximo lema será usado na prova da Proposição 5.1.8.

Lema 5.1.5. Sejam $\sigma>1$ e $T>0$, então para todo par admissível (p,q) temos

$$\left\{\sum_\lambda \lambda^{2\sigma}\|u_\lambda\|^2_{L^p_TL^q}\right\}^{1/2} \leq c(1+T)^{1/p}(1+\|J^\sigma u\|_{L^\infty_TL^2})(1+\|\nabla u\|_{L^1_TL^\infty})\left\{\sum_\lambda \lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}\right\}^{1/2},$$

onde u é uma solução suficientemente regular da equação (5.0.1).

Demonstração. É fácil ver que u_λ satisfaz a seguinte equação

$$\partial_t u_\lambda + \mathcal{H}\partial_x^2 u_\lambda + \partial_x\partial_y^2 u_\lambda + u\partial_x u_\lambda = -[\Delta_\lambda, u\partial_x]u \tag{5.1.16}$$

e

$$\operatorname{supp}\,\widehat{u}_\lambda(t,\cdot,\cdot)\subset\mathcal{B}(0,2\lambda),\ \forall t\in[0,T].$$

Pelo Lema 5.1.3 com $V=u$ e $F=-[\Delta_\lambda,u\partial_x]u$,

$$\|u_\lambda\|^2_{L^p_TL^q}\leq c(1+T)^{2/p}\lambda^{2/p}(1+\|J^\sigma u\|_{L^\infty_TL^2})^2(\|u_\lambda\|_{L^\infty_TL^2}+\|[\Delta_\lambda,u\partial_x]u\|^2_{L^1_TL^2}). \tag{5.1.17}$$

Como $\Delta_\lambda\tilde{\Delta}_\lambda=\Delta_\lambda$, temos

$$[\Delta_\lambda,u\partial_x]=[\Delta_\lambda,u\partial_x]\tilde{\Delta}_\lambda+\Delta_\lambda(u\partial_x(1-\tilde{\Delta}_\lambda)). \tag{5.1.18}$$

Pelo último lema,

$$\|[\Delta_\lambda,u\partial_x]\tilde{\Delta}_\lambda u\|_{L^1_TL^2}\leq c\|\nabla u\|_{L^1_TL^\infty}\|\tilde{\Delta}_\lambda u\|_{L^\infty_TL^2}. \tag{5.1.19}$$

Note ainda que, usando a definição de $\tilde{\Delta}_\lambda$

$$\begin{aligned}\sum_\lambda \lambda^{2\sigma+2/p}\|\tilde{\Delta}_\lambda u\|^2_{L^\infty_TL^2}\leq&\sum_\lambda\left(\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_{\lambda/2}\|^2_{L^\infty_TL^2}+\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}+\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_{2\lambda}\|^2_{L^\infty_TL^2}\right)\\ \leq&\sum_\lambda(2^{2\sigma+2/p}(\lambda/2)^{2\sigma+2/p}\|u_{\lambda/2}\|^2_{L^\infty_TL^2}+\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}+\\ &+\frac{1}{2^{2\sigma+2/p}}(2\lambda)^{2\sigma+2/p}\|u_{2\lambda}\|^2_{L^\infty_TL^2})\\ \leq& c_{\sigma,p}\sum_\lambda\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}.\end{aligned}$$

Resta estimar o termo contendo,

$$\|\Delta_\lambda(u\partial_x(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u)\|_{L^1_TL^2}.$$

Para isto note que as frequências de ordem $\leq \lambda/16$ na decomposição de Littlewood-Paley de u têm contribuição nula, então como $1-\tilde{\Delta}_\lambda$ é limitado em L^∞ temos

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\lambda(u\partial_x(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u)\|_{L^1_TL^2} &\leq c\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u_x\|_{L^1_TL^\infty}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}\\
&\leq c\|u_x\|_{L^1_TL^\infty}\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}.
\end{aligned}$$

Logo, reduzimos a prova a mostrar que

$$\sum_\lambda \lambda^{2\sigma+2/p}\Big(\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}\Big)^2 \leq c\sum_\lambda\lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}. \tag{5.1.20}$$

Para isto, sejam $s:=\sigma+1/p$ e $A=\{2^j : j\in\mathbb{N}\}$, então por dualidade

$$\begin{aligned}
\left[\sum_\lambda\lambda^{2s}\Big(\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}\Big)^2\right]^{1/2} &= \sup_{\|d_\lambda\|_{l^2(A)}=1}\Big(\lambda^s\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2},d_\lambda\Big)_{l^2(A)}\\
&= \sup_{\|d_\lambda\|_{l^2(A)}=1}\sum_\lambda\lambda^s\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\lambda\|_{L^\infty_TL^2}d_\lambda,
\end{aligned}$$

onde (d_λ) é uma sequência diádica de números reais.

Portanto é suficiente mostrar que

$$\sum_\lambda\lambda^s\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}d_\lambda \leq c\left\{\sum_\lambda\lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_\lambda d_\lambda^2\right\}^{1/2}.$$

De fato, sejam $\mu=2^j\lambda$, $j\in\mathbb{Z}$, $j\geq -3$, então

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda\lambda^s\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu\|_{L^\infty_TL^2}d_\lambda &= \sum_{j\geq-3}2^{-sj}\sum_{\lambda\geq 8}(2^j\lambda)^s\|u_{2^j\lambda}\|_{L^\infty_TL^2}d_\lambda\\
&\leq \sum_{j\geq-3}2^{-sj}\left[\sum_{\lambda\geq8}(2^j\lambda)^{2s}\|u_{2^j\lambda}\|^2_{L^\infty_TL^2}\right]^{1/2}\left[\sum_{\lambda\geq8}d_\lambda^2\right]^{1/2}\\
&= \sum_{j\geq-3}2^{-sj}\left[\sum_{\gamma\geq2^{3+j}}\gamma^{2s}\|u_\gamma\|^2_{L^\infty_TL^2}\right]^{1/2}\left[\sum_{\lambda\geq8}d_\lambda^2\right]^{1/2}\\
&\leq c\left\{\sum_\lambda\lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_TL^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_\lambda d_\lambda^2\right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Assim obtemos (5.1.20).

Então de (5.1.16)–(5.1.20) concluímos o lema. $\square$

Lema 5.1.6. Para cada $\sigma > 1$, $p > 8/3$ e $T > 0$ temos

$$\left\{\sum_{\lambda} \lambda^{2\sigma+2/p}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2}\right\}^{1/2} \leq c(1 + \|\nabla u\|_{L^1_T L^\infty})\|J^{\sigma+1/p}u\|_{L^\infty_T L^2},$$

onde u é uma solução suficientemente regular da BO-ZK.

Demonstração. Considere novamente $s := \sigma + \frac{1}{p}$, multiplicando a equação (5.1.16) por u_λ, usando a identidade de Plancherel e integração por partes obtemos

$$\|u_\lambda(t)\|^2 = \|u_\lambda(0)\|^2 + \mathrm{Re}\int_0^t \int u_x u_\lambda^2 dxdyd\tau - 2\mathrm{Re}\int_0^t \int [\Delta_\lambda, u\partial_x]u(\tau)u_\lambda(\tau)dxdyd\tau. \tag{5.1.22}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2} \leq & \sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda(0)\|^2 + \sum_\lambda \lambda^{2s}\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty}\|u_\lambda(t)\|^2 dt + \\ & + \sum_\lambda \lambda^{2s}\int_0^T \|u_\lambda(t)\|\|([\Delta_\lambda, u\partial_x]u)(t)\|dt \\ & := J_0 + J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Estimaremos a seguir os termos acima,

$$J_0 \leq c_s\|u(0)\|^2_{H^s} = c_s\|J^s u(0)\|^2 \leq \|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}, \tag{5.1.23}$$

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_0^T \Big(\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_x(t)\|_{L^\infty}\|u_\lambda(t)\|^2\Big)dt \\ &\leq \int_0^T \Big(\|u_x(t)\|_{L^\infty}\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda(t)\|^2\Big)dt \\ &\leq c_s\int_0^T \Big(\|u_x(t)\|_{L^\infty}\|J^s u(t)\|^2\Big)dt \\ &\leq c_s\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}\|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}. \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

Para estimar J_2 usando a identidade (5.1.18) temos

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \sum_\lambda \lambda^{2s}\int_0^T \|u_\lambda(t)\|\|([\Delta_\lambda, u\partial_x]\tilde{\Delta}_\lambda u)(t)\|dt + \sum_\lambda \lambda^{2s}\int_0^T \|u_\lambda(t)\|\|\Delta_\lambda(u\partial_x(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u)(t)\|dt \\ &= J_{21} + J_{22}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $\|[\Delta_\lambda, u\partial_x]\tilde{\Delta}_\lambda u\| \leq c\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\tilde{\Delta}_\lambda u\|$, obtemos

$$\begin{aligned} J_{21} &\leq \int_0^T \Big(\|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda(t)\|\|\tilde{\Delta}_\lambda u(t)\|\Big)dt \\ &\leq \int_0^T \Big(\|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\sum_\lambda \lambda^{2s}(\|u_\lambda(t)\|^2+\|\tilde{\Delta}_\lambda u(t)\|^2)\Big)dt \\ &\leq \int_0^T (c_s\|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|^2_{H^s})dt \\ &\leq c_s\|\nabla u\|_{L^1_T L^\infty}\|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}. \end{aligned} \tag{5.1.25}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J_{22} &\leq \sum_\lambda \lambda^{2s}\int_0^T \|u_\lambda(t)\|\Big(\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u_x\|_{L^\infty}\|u_\mu\|\Big)dt \\ &\leq \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty}\Big(\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda(t)\|\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu(t)\|\Big)dt, \end{aligned}$$

e pondo $d_\lambda = \lambda^s\|u_\lambda(t)\|$ na desigualdade (5.1.21) temos

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda(t)\|\sum_{\mu\geq\lambda/8}\|u_\mu(t)\| &\leq c\left\{\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2\right\}^{1/2} \\ &= c\sum_\lambda \lambda^{2s}\|u_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2} \\ &\leq c_s\|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_{22} \leq c\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}\|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}. \tag{5.1.26}$$

De (5.1.25) e (5.1.26) obtemos

$$J_2 \leq c\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}\|J^s u\|^2_{L^\infty_T L^2}. \tag{5.1.27}$$

Combinando (5.1.22)–(5.1.24) e (5.1.27) concluímos o lema. □

O próximo lema será usado na demonstração da Proposição 5.1.8.

Lema 5.1.7. Sejam $\sigma > 1$ e (p, q) um par admissível, então

$$\|J^\sigma f\|_{L^p_T L^q} \leq c\left\{\sum_\lambda \|J^\sigma f_\lambda\|^2_{L^p_T L^q}\right\}^{1/2} \leq c\left\{\sum_\lambda \lambda^{2\sigma}\|f_\lambda\|^2_{L^p_T L^q}\right\}^{1/2}. \tag{5.1.28}$$

Demonstração. Como (p,q) é par admissível, temos $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{4}{3p}$, $p>8/3$, logo $p,q\geq 2$. Pelo Teorema de Littlewood-Paley (veja a Proposição 1.4 de [49]) e trocando a ordem de integração entre L^q e l^2,

$$\begin{aligned}
\|J^\sigma f\|_{L^q} &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2}(\sum_\lambda |J^\sigma f_\lambda(t,x,y)|^2 dxdy)^{q/2}\right]^{1/q}\\
&= \|\|J^\sigma f_\lambda\|_{l^2}\|_{L^q}\\
&\leq \|\|J^\sigma f_\lambda\|_{L^q}\|_{l^2}\\
&= \left[\sum_\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^2}|J^\sigma f_\lambda(t,x,y)|^q dxdy\right)^{2/q}\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Tomando a norma $\|\cdot\|_{L^p_T}$ e trocando a ordem de integração entre L^p_T e l^2,

$$\begin{aligned}
\|J^\sigma f\|_{L^p_T L^q} &\leq \left(\int_0^T\left|\sum_\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^2}|J^\sigma f_\lambda(t,x,y)|^q dxdy\right)^{2/q}\right|^{p/2} dt\right)^{1/p}\\
&= \|\|\|J^\sigma f_\lambda\|_{L^q}\|_{l^2}\|_{L^p_T}\\
&\leq \|\|\|J^\sigma f_\lambda\|_{L^q}\|_{L^p_T}\|_{l^2}\\
&= \left\{\sum_\lambda\left(\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|J^\sigma f_\lambda(t,x,y)|^q dxdy\right)^{p/q} dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}\\
&= \left\{\sum_\lambda \|J^\sigma f_\lambda\|^2_{L^p_T L^q}\right\}^{1/2}.
\end{aligned}\tag{5.1.29}$$

Pelo Lema 6.2.1, pág. 140, de [4], obtemos

$$\|J^\sigma f_\lambda\|_{L^q}\leq c\lambda^\sigma\|f_\lambda\|_{L^q}.$$

Portanto,

$$\|J^\sigma f_\lambda\|_{L^p_T L^q}\leq c\lambda^\sigma\|f_\lambda\|_{L^p_T L^q}$$

e

$$\left\{\sum_\lambda\|J^\sigma f_\lambda\|^2_{L^p_T L^q}\right\}^{1/2}\leq c\left\{\sum_\lambda\lambda^{2\sigma}\|f_\lambda\|^2_{L^p_T L^q}\right\}^{1/2}. \tag{5.1.30}$$

De (5.1.29) e (5.1.30) obtemos o resultado.

$\square$

Proposição 5.1.8. Fixados $T>0$ e $\sigma>1$, seja u uma solução suficientemente regular da BO-ZK. Então para todo par admissível (p,q)

$$\|J^\sigma u\|_{L^p_T L^q}\leq c(1+T)^{1/p}(1+\|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2})(1+\|\nabla u\|^2_{L^1_T L^\infty})\|J^{\sigma+1/p}u\|_{L^\infty_T L^2}. \tag{5.1.31}$$

Demonstração. Pelos Lemas 5.1.5 e 5.1.6, concluímos a demonstração da proposição. □

Os próximos dois lemas importantes quando tratarmos da dependência contínua.

Lema 5.1.9. Sejam u_λ como anteriormente, $1 < \delta < \kappa$ e suponha que a sequência diádica (ω_λ) de números positivos satisfaz

$$\delta\omega_\lambda \leq \omega_{2\lambda} \leq \kappa\omega_\lambda,$$

para todos os inteiros diádicos λ. Então para todo $0 \leq \tau, t, \leq T$

$$\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|^2 \leq \exp(c\|u_x\|_{L^1_I L^\infty}) \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\tau)\|^2,$$

onde I denota o intervalo $[\tau, t]$ ou $[t, \tau]$.

Demonstração. De (5.1.22), (5.1.18)–(5.1.20) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|^2 \leq & \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\tau)\|^2 + \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \|u_\lambda(\sigma)\|^2 d\sigma \\
& + \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \int_\tau^t \|u_\lambda(\sigma)\| \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \|\tilde{\Delta}_\lambda u(\sigma)\| d\sigma \\
& + \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \int_\tau^t \|u_\lambda(\sigma)\| \|\Delta_\lambda(u\partial_x(1-\tilde{\Delta}_\lambda)u)(\sigma)\| d\sigma \\
\leq & \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\tau)\|^2 + \int_\tau^t \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \|u_\lambda(\sigma)\|^2 d\sigma \\
& + \int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (\|u_\lambda(\sigma)\|^2 + \|\tilde{\Delta}_\lambda u(\sigma)\|^2) d\sigma \\
& + \int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} (\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\| \sum_{\mu \geq \lambda/8} \|u_\mu(\sigma)\|) d\sigma.
\end{aligned}$$

Como $\delta\omega_\lambda \leq \omega_{2\lambda} \leq \kappa\omega_\lambda$,

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda^2 \|\tilde{\Delta}_\lambda u(\sigma)\|^2 & \leq \omega_\lambda^2 \|\Delta_{\lambda/2} u(\sigma)\|^2 + \omega_\lambda^2 \|\Delta_\lambda u(\sigma)\|^2 + \omega_\lambda^2 \|\Delta_{2\lambda} u(\sigma)\|^2 \\
& \leq \kappa^2 \omega_{\lambda/2}^2 \|\Delta_{\lambda/2} u(\sigma)\|^2 + \omega_\lambda^2 \|\Delta_\lambda u(\sigma)\|^2 + \frac{\omega_{2\lambda}^2}{\delta^2} \|\Delta_{2\lambda} u(\sigma)\|^2,
\end{aligned}$$

temos

$$\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|\tilde{\Delta}_\lambda u(\sigma)\|^2 \leq c(\kappa, \delta) \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2.$$

Assim, da última desigualdade,

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|^2 \leq & \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\tau)\|^2 + c\int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2 d\sigma \\
& + c\int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \left(\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\| \sum_{\mu \geq \lambda/8} \|u_\mu(\sigma)\| \right) d\sigma.
\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

Seja $\mu \geq \lambda/8$, então podemos escrever $\mu = 2^j\lambda$, $j \geq -3$. Como $\omega_{2\lambda} \leq \kappa\omega_\lambda$, obtemos

$$\omega_\mu^{-1}\omega_\lambda \leq \kappa^{-j},\ -3 \leq j \leq 0, \tag{5.1.33}$$

e de $\delta\omega_\lambda \leq \omega_{2\lambda}$ temos

$$\omega_\mu^{-1}\omega_\lambda \leq \delta^{-j},\ j \geq 1. \tag{5.1.34}$$

Pondo $d_\lambda = \omega_\lambda \|u_\lambda(\sigma)\|$, $\mu = 2^j\lambda$, $j \geq -3$ e usando as desigualdades (5.1.33) e (5.1.34) temos

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \sum_{\mu \geq \lambda/8} \omega_\lambda \|u_\mu(\sigma)\| d_\lambda &= \sum_{\mu \geq \lambda/8} \sum_\lambda \omega_\mu^{-1}\omega_\lambda \omega_{2^j\lambda} \|u_{2^j\lambda}(\sigma)\| d_\lambda \\
&\leq \sum_{j \geq -3} \left\{ \sum_\lambda \omega_\mu^{-2}\omega_\lambda^2 \omega_{2^j\lambda}^2 \|u_{2^j\lambda}(\sigma)\|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_\lambda d_\lambda^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \sum_{-3 \leq j \leq 0} \left\{ \kappa^{-2j} \sum_\lambda \omega_{2^j\lambda}^2 \|u_{2^j\lambda}(\sigma)\|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_\lambda d_\lambda^2 \right\}^{1/2} + \\
&\quad + \sum_{j \geq 1} \left\{ \delta^{-2j} \sum_\lambda \omega_{2^j\lambda}^2 \|u_{2^j\lambda}(\sigma)\|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_\lambda d_\lambda^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \sum_{-3 \leq j \leq 0} \kappa^{-j} \left\{ \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_\lambda d_\lambda^2 \right\}^{1/2} + \\
&\quad + \sum_{j \geq 1} \delta^{-j} \left\{ \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_\lambda d_\lambda^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq c(\kappa, \delta) \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.1.35}$$

De (5.1.32) e (5.1.35) obtemos

$$\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|^2 \leq \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\tau)\|^2 + c\int_\tau^t \|u_x(\sigma)\|_{L^\infty} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

uma aplicação do Lema de Gronwall nos dá o resultado. □

Lema 5.1.10. Suponha que $v^n \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^2)$. Então existe uma sequência (ω_λ) de números positivos satisfazendo

$$2^s\omega_\lambda \leq \omega_{2\lambda} \leq 2^{s+1}\omega_\lambda,$$

e

$$\frac{\omega_\lambda}{\lambda^s} \to \infty,$$

tal que

$$\sup_n \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|v_\lambda^n\|^2 < \infty,$$

onde $v_\lambda^n := \Delta_\lambda v^n$.

Demonstração. Sejam $\lambda = 2^i$, $a_i^n := \lambda^{2s}\|v_{2^i}^n\|^2$, $a_i := \lambda^{2s}\|v_{2^i}\|^2$, então $(a_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \to (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, em $l^1(\mathbb{N})$, com $n \to \infty$. De fato, pela equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^s}$ e $\|\lambda^s\|\Delta_\lambda(\cdot)\|\|_{l^2}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda |\lambda^{2s}\|v_\lambda^n\|^2 - \lambda^{2s}\|v_\lambda\|^2| &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\|2^{is}v_{2^i}^n\| + \|2^{is}v_{2^i}\|)|(\|2^{is}v_{2^i}^n\| - \|2^{is}v_{2^i}\|)| \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\|2^{is}v_{2^i}^n\| + \|2^{is}v_{2^i}\|)\|2^{is}(v_{2^i}^n - v_{2^i})\| \\
&\leq \left[\sum_\lambda (\|\lambda^s v_\lambda^n\| + \|\lambda^s v_\lambda\|)^2\right]^{1/2} \left[\sum_\lambda \lambda^{2s}\|v_\lambda^n - v_\lambda\|^2\right]^{1/2} \\
&\leq c\left[\sum_\lambda (\lambda^{2s}\|v_\lambda^n\|^2 + \lambda^{2s}\|v_\lambda\|^2)\right]^{1/2} \|v^n - v\|_{H^s} \\
&\leq c(\|v^n\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|v^n - v\|_{H^s} \to 0, \text{ com } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Suponha que exista uma sequência (μ_i) tal que

$$0 < \mu_i \leq \mu_{i+1} \leq 2\mu_i, \ \mu_i \to \infty \tag{5.1.36}$$

e

$$\sup_n \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i a_i^n < \infty. \tag{5.1.37}$$

Pondo

$$\omega_\lambda^2 = \mu_i \lambda^{2s}, \text{ onde } \lambda = 2^i,$$

obtemos

$$\frac{\omega_\lambda}{\lambda^s} = \sqrt{\mu_i} \to \infty, \text{ com } \lambda \to \infty$$

e

$$2^s\omega_\lambda = \sqrt{\mu_i}(2\lambda)^s = \sqrt{\mu_i}2^s\lambda^s \leq \sqrt{\mu_{i+1}}(2\lambda)^s = \omega_{2\lambda},$$

$$2^{s+1}\omega_\lambda = 2\sqrt{\mu_i}2^s\lambda^s \geq \sqrt{\mu_{i+1}}2^s\lambda^s = \omega_{2\lambda},$$

uma vez que

$$\mu_{i+1} \leq 2\mu_i \Rightarrow \mu_{i+1} \leq 4\mu_i \Rightarrow \sqrt{\mu_{i+1}} \leq 2\sqrt{\mu_i}.$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\sup_n \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|v_\lambda^n\|^2 &= \sup_n \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i \lambda^{2s}\|v_{2^i}^n\|^2 \\
&= \sup_n \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i a_i^n < \infty.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a prova se reduz a obter (5.1.36) e (5.1.37). Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um N_k satisfazendo

$$\sup_n \sum_{i=N_k}^{\infty} a_i^n < \frac{1}{2^k}.$$

De fato, temos que

$$a_i^n \leq |a_i^n - a_i| + a_i. \tag{5.1.38}$$

Como $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i^n - a_i| \to 0$, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $N_1(k)$ tal que

$$n > N_1(k) \Rightarrow \sum_{i=N_1(k)}^{\infty} |a_i^n - a_i| < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{5.1.39}$$

Também existe $N_2(k)$ tal que

$$\sum_{i=N_2(k)}^{\infty} a_i < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{5.1.40}$$

De (5.1.38)–(5.1.40), tomando $N_k' = \max\{N_1(k), N_2(k)\}$,

$$n > N_k' \Rightarrow \sum_{i=N_k'}^{\infty} a_i^n \leq \sum_{i=N_k'}^{\infty} |a_i^n - a_i| + \sum_{i=N_k'}^{\infty} a_i < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}. \tag{5.1.41}$$

Seja $m_k \in \{1, 2, ..., N_k'\}$, então $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i^{m_k} - a_i| < \infty$, logo existe $N_k''(m_k)$ tal que

$$\sum_{i \geq N_k''(m_k)} |a_i^{m_k} - a_i| < \frac{1}{2^{k+1}},$$

seja $N_k''' = \max_{m_k \in \{1,...,N_k'\}} \{N_k''(m_k), N_2(k)\}$. Então

$$\sum_{i=N_k'''}^{\infty} a_i^{m_k} \leq \sum_{i=N_k'''}^{\infty} |a_i^{m_k} - a_i| + \sum_{i=N_k'''}^{\infty} a_i < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}, \tag{5.1.42}$$

para todo $m_k \in \{1, 2, ..., N_k'\}$. Seja $N_k = \max\{N_k''', N_k''\}$, então de (5.1.41)

$$n > N_k \Rightarrow \sum_{i=N_k}^{\infty} a_i^n \leq \sum_{i=N_k'}^{\infty} a_i^n < \frac{1}{2^k}. \tag{5.1.43}$$

De (5.1.42) segue que

$$\sum_{i=N_k}^{\infty} a_i^{m_k} \leq \sum_{i=N_k'''} a_i^{m_k} < \frac{1}{2^k}, \ \forall m_k \in \{1, ..., N_k\}. \tag{5.1.44}$$

De (5.1.43) e (5.1.44) temos

$$\sum_{i \geq N_k} a_i^n < \frac{1}{2^k}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.1.45}$$

Note que podemos tomar N_k estritamente monótona. Assim fixado $i \in \mathbb{N}$ existe um único $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tal que $N_{k-1} \leq i < N_k$. Seja $\mu_i := 2^{k/2}$, então

$$0 < \mu_i \leq \mu_{i+1} \leq 2\mu_i, \ \mu_i \to \infty, \ \text{com}, i \to \infty.$$

De fato, dado $i \in \mathbb{N}$, com $N_{k-1} \leq i < N_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos

a) $N_{k-1} \leq i+1 < N_k \Rightarrow \mu_{i+1} = 2^{k/2} = \mu_i < 2^{1+k/2} = 2\mu_i$

b) $N_k \leq i+1 < N_{k+1} \Rightarrow \mu_{i+1} = 2^{(k+1)/2} = 2\mu_i \geq \mu_i \Rightarrow \mu_i = 2^{k/2} < 2^{(k+1)/2} = \mu_{i+1} < 2^{1+k/2} = 2\mu_i$.

Logo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i a_i^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} a_i^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \sum_{i=N_k}^{N_{k+1}} a_i^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} < \infty. \tag{5.1.46}$$

□

De posse dos resultados desta seção, podemos provar o Teorema 5.0.3. Isto será feito nas duas próximas seções.

5.2 Existência e unicidade

Nosso objetivo nesta seção será provar a existência e unicidade de soluções.

Unicidade:

Sejam u e v duas soluções do PVI (5.0.1). Pondo $w := u - v$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + (\mathcal{H}\partial_x^2 w, w) + (w_{xyy}, w) + (wu_x, w) + (vw_x, w) = 0.$$

Integrando por partes o último termo e usando a antissimetria dos operadores $\mathcal{H}\partial_x^2$ e ∂_{xyy} obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leq (\|u_x\|_{L_T^1 L^\infty} + \|v_x\|_{L_T^1 L^\infty})\|w(t)\|^2,$$

daí pelo Lema de Gronwall encontramos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\| \exp[c(\|u_x\|_{L_T^1 L^\infty} + \|v_x\|_{L_T^1 L^\infty})]. \tag{5.2.1}$$

A unicidade segue então da última desigualdade.

Existência:

A demonstração será dividida em vários lemas, lembrando que estamos sob as hipóteses do Teorema 5.0.3.

Primeiro mostraremos que o problema de existência de solução em um intervalo $[0,T]$ pode ser reduzido a mostrar a existência em $[0,1]$ com dado inicial suficientemente pequeno na norma de $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Lema 5.2.1. Suponha que exista um γ para o qual podemos encontrar uma solução de (5.0.1) definida em $[0,1]$ com dado inicial satisfazendo $\|\phi\|_{H^s}\leq \gamma$. Então, para todo $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, podemos encontrar uma solução de (5.0.1) definida em um intervalo $[0,T]$, com $T \geq c\|\phi\|_{H^s}^{-8}$.

Demonstração. Dado $\phi \in H^s$, tome $0<\lambda<1$ tal que $\lambda^{1/4}\|\phi\|_{H^s}<\gamma$. Seja $\tilde{u}_0(x,y)=\lambda\phi(\lambda x,\lambda^{1/2}y)$, então

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_0\|_{H^s}^2 &= \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|\hat{\phi}(\frac{\xi}{\lambda},\frac{\eta}{\lambda^{1/2}})|^2 d\xi d\eta\\
&= \lambda^{1/2}\int_{\mathbb{R}^2}(1+\lambda^2\xi^2+\lambda\eta^2)^s|\hat{\phi}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta\\
&\leq \lambda^{1/2}\int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|\hat{\phi}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta\\
&= \lambda^{1/2}\|\phi\|_{H^s}^2<\gamma^2,
\end{aligned}$$

assim, podemos aplicar nossa hipótese para $\tilde{u}_0$. Seja $\tilde{u}(t,x,y)$ solução de (5.0.1) com dado inicial $\tilde{u}_0$, onde $\tilde{u}:[0,1]\to H^s$. Seja $u(t,x,y):=\lambda^{-1}\tilde{u}(\lambda^{-2}t,\lambda^{-1}x,\lambda^{-1/2}y)$, então u satisfaz (5.0.1) para $0\leq t\leq \lambda^2<\frac{\gamma^8}{\|\phi\|_{H^s}^8}$. Logo $u:[0,T]\to H^s$ é solução da BO-ZK, com $T\geq c\|\phi\|_{H^s}^{-8}$. □

Lema 5.2.2. Seja u uma solução suficientemente regular de (5.0.1). Então

$$\|J^s u\|_{L_T^\infty L^2}\leq \|u(0)\|_{H^s}\exp\left(c\int_0^T\|u_x(t)\|_{L^\infty}dt\right). \tag{5.2.2}$$

Demonstração. Usando (5.0.1) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^s}^2+(uu_x,u)_{H^s}=0. \tag{5.2.3}$$

Usando o Teorema 1.0.13 obtemos

$$\begin{aligned}
\|[J^s,u]u_x\| &\leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|J^{s-1}u_x\|+\|J^s u\|\|u_x\|_{L^\infty}\\
&\leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

e

$$
\begin{aligned}
(uJ^s u_x, J^s u) &= (u(J^s u)_x, J^s u) \\
&= \frac{1}{2}(u, \partial_x (J^s u)^2) \\
&= -\frac{1}{2}(u_x, (J^s u)^2) \\
&\leq \|u_x\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}^2. \qquad (5.2.5)
\end{aligned}
$$

Como

$$(uu_x, u)_{H^s} = ([J^s, u]u_x, J^s u) + (uJ^s u_x, J^s u),$$

de (5.2.4) e (5.2.5) obtemos

$$|(uu_x, u)_{H^s}| \leq \|u_x\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}^2. \qquad (5.2.6)$$

De (5.2.3) e (5.2.6)

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^s}^2 \leq c\|u_x(t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|_{H^s}^2.$$

Uma aplicação do Lema de Gronwall nos dá o resultado. □

Lema 5.2.3. Sejam $\sigma = s - 3/8$ e $F(T) := \|\nabla u\|_{L_T^1 L^\infty} + \|J^\sigma u\|_{L_T^\infty L^2}$, $T \in [0,1]$, então existe uma constante $C > 1$ tal que

$$F(T) \leq C\|u(0)\|_{H^s}(1 + F(T))^3 \exp(cF(T)),$$

onde u é uma solução suficientemente regular de (5.0.1).

Demonstração. Seja (p,q) par admissível. Como $p > 8/3$,

$$\sigma + \frac{1}{p} < \sigma + \frac{3}{8} = s.$$

Daí, usando (5.1.31) e (5.2.2),

$$
\begin{aligned}
\|J^\sigma u\|_{L_T^p L^q} &\leq c(1+T)^{1/p}(1 + \|J^\sigma u\|_{L_T^\infty L^2})(1 + \|\nabla u\|_{L_T^1 L^\infty}^2)\|J^{\sigma+1/p} u\|_{L_T^\infty L^2} \\
&\leq d(T,u)\|J^s u\|_{L_T^\infty L^2} \\
&\leq d(T,u)\|u(0)\|_{H^s}\exp(c\|u_x\|_{L_T^1 L^\infty}), \qquad (5.2.7)
\end{aligned}
$$

onde

$$d(T,u) := (1+T)^{1/p}(1 + \|J^\sigma u\|_{L_T^\infty L^2})(1 + \|\nabla u\|_{L_T^1 L^\infty}^2).$$

Como $\sigma > 1$, podemos tomar (p, q) um par admissível tal que

$$\sigma > 1 + \frac{2}{q}.$$

Usando a imersão de Sobolev $H^{\sigma,q}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$, onde $H^{\sigma,q}(\mathbb{R}^2) := J^{-\sigma}L^q(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^\infty} &\leq c\|J^{\sigma-1}u_x\|_{L^q} \\ &\leq c\|J^\sigma u\|_{L^q}. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Para obter a última desigualdade, basta escrevermos

$$J^{\sigma-1}u_x = J^{-1}\partial_x J^\sigma u = (\rho(\xi,\eta)\widehat{J^\sigma u})^\vee,$$

com $\rho(\xi,\eta) = \frac{i\xi}{(1+\xi^2+\eta^2)^{1/2}}$ e usarmos o Teorema de Milhin (veja pág. 135 de [4]). Logo,

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^1_T L^\infty} &\leq \int_0^T \|J^\sigma u\|_{L^q} dt \\ &\leq \left(\int_0^T dt\right)^{1/p'} \left(\int_0^T \|J^\sigma u\|_{L^q}^p dt\right)^{1/p} \\ &= T^{1/p'}\|J^\sigma u\|_{L^p_T L^q} \\ &= T^{1-\frac{1}{p}}\|J^\sigma u\|_{L^p_T L^q}. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

De modo análogo

$$\|u_y\|_{L^1_T L^\infty} \leq T^{1-\frac{1}{p}}\|J^\sigma u\|_{L^p_T L^q}. \tag{5.2.10}$$

Como $\sigma < s$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2} &\leq \|u(0)\|_{H^s} \exp\left(c\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty} dt\right) \\ &\leq \|u(0)\|_{H^s} \exp\left(c\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}\right) \\ &\leq \|u(0)\|_{H^s}(1 + F(T))^3 \exp(cF(T)). \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Assim, de (5.2.7)–(5.2.11),

$$\begin{aligned} F(T) \leq\, & 2T^{1-\frac{1}{p}}\|J^\sigma u\|_{L^p_T L^q} + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2} \\ \leq\, & 2T^{1-\frac{1}{p}}(1+T)^{1/p}(1 + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2})(1 + \|\nabla u\|^2_{L^1_T L^\infty})\|u(0)\|_{H^s} \exp(c\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}) + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2} \\ \leq\, & c_T(1 + \|\nabla u\|_{L^1_T L^\infty} + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2})(1 + \|\nabla u\|_{L^1_T L^\infty} + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2})^2 \|u(0)\|_{H^s} \exp(c\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}) \\ & + \|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2} \\ \leq\, & C\|u(0)\|_{H^s}(1 + F(T))^3 \exp(cF(T)), \end{aligned}$$

onde $C > 1$, uma vez que $c_T = 2T^{1-\frac{1}{p}}(1+T)^{1/p} \leq 2^{1+\frac{1}{p}} = C$. $\square$

Lema 5.2.4. Seja u uma solução suficientemente regular de (5.0.1). Então existe γ tal que se $\|u(0)\|_{H^s}\leq \gamma$, tem-se

$$\|J^s u\|_{L^\infty([0,1];L^2(\mathbb{R}))}\leq c\|u(0)\|_{H^s}. \tag{5.2.12}$$

Demonstração. Como no Lema 5.2.3 seja $F(T) := \|\nabla u\|_{L^1_T L^\infty}+\|J^\sigma u\|_{L^\infty_T L^2},\ T \in [0,1]$. Tome C dado no Lema 5.2.3 e considere

$$\Phi(y,\eta) = y - C\eta(1+y)^3 \exp(cy),\ \Lambda = \|u(0)\|_{H^s},$$

então $\Phi(0,0) = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,0) = 1$. Pelo Teorema da função implícita existe $\delta > 0$ e uma função C^∞ $A(\eta)$, tal que $A(0) = 0$ e $\Phi(A(\eta),\eta) = 0$, $\forall \eta \in [-\delta,\delta]$. Devemos ter $A(\eta) > 0$ para todo $\eta \in (0,\delta]$, pois se existisse $\eta \in (0,\delta]$, com $A(\eta) \leq 0$, teríamos

$$\Phi(A(\eta),\eta) = A(\eta) - C\eta(1 + A(\eta))^3 \exp(cA(\eta)) < 0,$$

o que é uma contradição. Além disso, como $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,0) = 1$, $\Phi(\cdot,\eta)$ é crescente perto de $A(\eta)$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Tome $0 < \gamma \leq \delta$ e sejam $\Lambda \leq \gamma$ e $\bar{C} = A(\Lambda)$. Notemos que

$$F(0) = \|\nabla u\|_{L^1_0 L^\infty}+\|J^\sigma u\|_{L^\infty_0 L^2}\leq \|J^\sigma u\|_{L^\infty_0 L^2}\leq \|u(0)\|_{H^s}\leq \gamma.$$

Suponha que

$$F(T) > \bar{C},\ \text{para algum } T \in (0,1).$$

Se $B := \{T \in (0,1) : F(T) > \bar{C}\}$ e $T_0 = \inf B$, então $T_0 > 0$ e $F(T_0) = \bar{C}$. De fato, se $F(T_0) > \bar{C}$, pela continuidade de F existiria $0 < T' < T_0$, com $F(T') > \bar{C}$, o que contradiz a definição de T_0. Além disso, existe uma sequência decrescente $T_n \in B$ tal que $T_n \to T_0$ e $F(T_n) > \bar{C}$. Pelo Lema 5.2.3

$$\Phi(F(T),\Lambda) = F(T) - C\Lambda(1 + F(T))^3 \exp(cF(T)) \leq 0,\ \forall\ T \in [0,1]. \tag{5.2.13}$$

Por outro lado, $\Phi(\cdot,\eta)$ é crescente próximo de $\bar{C}$, logo

$$\Phi(F(T_n),\Lambda) > \Phi(F(T_0),\Lambda) = \Phi(A(\Lambda),\Lambda) = 0, \tag{5.2.14}$$

para n suficientemente grande e $T_n \in [0,1]$. De (5.2.13) e (5.2.14) temos que

$$F(T) \leq \bar{C},\ \text{para todo } T \in (0,1),$$

o que é uma contradição. Pela continuidade de F obtemos $F(1) \leq \bar{C}$, ou seja,

$$\int_0^1 \|u_x(t)\|_{L^\infty} dt \leq \bar{C}. \tag{5.2.15}$$

Logo, (5.2.15) e (5.2.2) nos permite obter o resultado. □

Lema 5.2.5. Seja $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 11/8$, tal que $\|\phi\|_{H^s} \leq \gamma$, onde γ é como no último lema. Então existe uma solução $u \in C([0,1]; H^s(\mathbb{R}^2))$ de (5.0.1).

Demonstração. Note que (5.2.12) nos permite usar um argumento de compacidade. De fato, seja

$$\rho_n(x,y) = \frac{e^{\frac{-(x^2+y^2)}{4r_n}}}{4\pi r_n}, \tag{5.2.16}$$

onde $r_n \to 0$ com $n \to \infty$, então $u_{0,n} = \rho_n * \phi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$. Além disso $u_{0,n} \to \phi$ em $H^s(\mathbb{R}^2)$. Seja u_n solução da BO-ZK definida em $[0, T_n]$, onde $T_n = T_n(\|u_{0,n}\|_{H^3})$, e $u_n(0) = u_{0,n}$. Podemos extender u_n a um intervalo $[0, \tilde{T}]$, onde $\tilde{T}$ é independente de n. De fato, seja $\rho(t)$ a solução maximal do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho(t) = \rho(t)^{3/2} \\ \rho(0) = \|\phi\|_{H^s}^2, \end{cases} \tag{5.2.17}$$

definida no intervalo $[0, \tilde{T}]$. Como u_n satisfaz a BO-ZK, usando o Teorema 1.0.13 com $p = 2$ para estimar o termo $(u_n, u_n\partial_x u_n)$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{H^s}^2 &\leq \|u_{0,n}\|_{H^s}^2 + \int_0^t (\|u_n(t')\|_{H^s}^2)^{3/2} dt' \\ &\leq \|\phi\|_{H^s}^2 + \int_0^t (\|u_n(t')\|_{H^s}^2)^{3/2} dt', \ \forall t \in [0, T_n], \end{aligned}$$

pois $\|u_{0,n}\|_{H^s} \leq \|\phi\|_{H^s}$. Então, pelo Corolário 4.4, pág. 29, de [21] obtemos

$$\|u_n(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t), \ \forall t \in [0, T_n]. \tag{5.2.18}$$

De (5.2.18) podemos extender as u_n ao intervalo $[0, \tilde{T}]$, de modo que

$$\|u_n(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t), \ \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

Por mudança de variáveis podemos tomar $\tilde{T} = 1$. Observe que como as u_n são suficientemente regulares, as desigualdades (5.2.15),(5.2.1) e (5.2.12), valem com u_n no lugar de u e 1 no lugar de T. Assim, usando (5.2.12), para cada $t \in [0,1]$ existe $u(t) \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ em } H^s(\mathbb{R}^2).$$

Seja $t \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^s}^2 &= \lim_{n\to\infty} (u_n(t), u(t))_{H^s} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|u_n(t)\|_{H^s} \|u(t)\|_{H^s} \\ &\leq \rho(t)^{1/2} \|u(t)\|_{H^s}, \end{aligned}$$

logo

$$u \in L^\infty([0,1]; H^s(\mathbb{R}^2)).$$

Como $\|u_{0,n}\|_{H^s} \leq \|\phi\|_{H^s} \leq \gamma$, temos que $\|\partial_x u_n\|_{L^1_T L^\infty} < C$, logo por (5.2.1) obtemos

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0,n} - u_{0,m}\| e^{2C}, \ \forall\, t \in [0,1],$$

daí (u_n) é de Cauchy em $L^\infty([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$, então $\partial_x u_n^2$ converge para $\partial_x u^2$ no sentido distribucional. Logo u satisfaz a BO-ZK no sentido distribucional. De maneira análoga à teoria em $H^s, \ s > 2,$ podemos mostrar que u é solução forte, e além disso $u \in C([0,1]; H^s(\mathbb{R}^2))$. □

Dos Lemas 5.2.1 e 5.2.5 obtemos a existência.

5.3 Dependência contínua

Nesta seção finalizaremos o Teorema 5.0.3 provando a dependência contínua. Seja $u^n \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ tal que $u^n(0) \to u(0)$ em $H^s(\mathbb{R}^2)$, onde u^n e u são soluções de (5.0.1), com $u^n(0) = \phi^n$ e $u(0) = \phi$. Existe K tal que $\|u^n(0)\|_{H^s} \leq K$ e $\|u(0)\|_{H^s} \leq K$ assim pelos argumentos anteriores existe K_1 tal que

$$\|u_x^n\|_{L^1_T L^\infty} \leq K_1 \text{ e } \|u_x\|_{L^1_T L^\infty} \leq K_1.$$

Portanto, como em (5.2.1),

$$\begin{aligned}
\|u^n(t) - u(t)\| &\leq \|u^n(0) - u(0)\| \exp(c(\|u_x^n\|_{L^1_T L^\infty} + \|u_x\|_{L^1_T L^\infty})) \\
&\leq \|u^n(0) - u(0)\| e^{2cK_1} \to 0, \text{ com } n \to \infty, \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Logo,

$$u^n \to u \text{ em } C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

Pelo Lema 5.1.9 (com $\tau = 0$) e pelo Lema 5.1.10,

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(t)\| &\leq c \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 \\
&\leq c \sup_n \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 < \infty, \ \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_n \sup_{[0,T]} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(t)\|^2 < \infty. \tag{5.3.1}$$

Pelo Lema 5.1.10,

$$\sup_n \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 < \infty.$$

Daí, usando o Lema de Fatou,

$$\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(0)\|^2 = \sum_\lambda \liminf_{n\to\infty} \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 < \sup_n \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(0)\|^2 < \infty. \quad (5.3.2)$$

Pelo Lema (5.1.9) (com $\tau = 0$),

$$\sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|^2 \leq e^C \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(0)\|^2 < \infty, \ \forall t \in [0,T]. \quad (5.3.3)$$

De (5.3.1) e (5.3.3),

$$\sup_n \sup_{[0,T]} \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (\|u_\lambda^n(t)\|^2 + \|u_\lambda(t)\|^2) < \infty. \quad (5.3.4)$$

Seja $u_\Lambda := \sum_{\lambda \leq \Lambda} u_\lambda$, então

$$\|u^n - u\|_{L_T^\infty H^s} \leq \|u^n - u_\Lambda^n\|_{L_T^\infty H^s} + \|u_\Lambda^n - u_\Lambda\|_{L_T^\infty H^s} + \|u_\Lambda - u\|_{L_T^\infty H^s}. \quad (5.3.5)$$

Como supp $\widehat{u_\lambda} \subset \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda}{2} \leq |(\xi,\eta)| \leq 2\lambda\}$, temos que se $\lambda = 2^l$ e $\mu = 2^k$ são tais que, $l, k \geq 0$, $|l-k| \geq 2$, então $(u_\lambda(t), u_\mu(t))_{H^s} = 0$, logo

$$\begin{aligned} \|u_\Lambda(t) - u(t)\|_{H^s}^2 &= \|\sum_{\lambda > \Lambda} u_\lambda(t)\|_{H^s}^2 \\ &\leq 3 \sum_{\lambda > \Lambda} \|u_\lambda(t)\|_{H^s}^2 \\ &\leq 3 \sup_{[0,T]} \sum_{\lambda > \Lambda} \omega_\lambda^2 \|u_\lambda(t)\|_{H^s}^2 \to 0, \ \text{com } \Lambda \to \infty. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\Lambda_1 > 0$ tal que

$$\Lambda \geq \Lambda_1 \Rightarrow \|u_{\Lambda_1}(t) - u(t)\|_{H^s} < \frac{\epsilon}{4}, \ \forall t \in [0,T]. \quad (5.3.7)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sup_n \sup_{[0,T]} \|u_\Lambda^n(t) - u^n(t)\|_{H^s}^2 &= \sup_n \sup_{[0,T]} \|\sum_{\lambda > \Lambda} u_\lambda^n(t)\|_{H^s}^2 \\ &\leq \sup_n \sup_{[0,T]} \sum_{\lambda > \Lambda} \|u_\lambda^n(t)\|_{H^s}^2 \\ &< \sup_n \sup_{[0,T]} \sum_{\lambda > \Lambda} \omega_\lambda^2 \|u_\lambda^n(t)\|_{H^s}^2 \to 0, \ \text{com } \Lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Logo, existe $\Lambda_2 > 0$ tal que

$$\Lambda \geq \Lambda_2 \Rightarrow \sup_n \|u_\Lambda^n(t) - u^n(t)\|_{H^s} < \frac{\epsilon}{4}, \ \forall t \in [0,T]. \quad (5.3.8)$$

Seja $\Lambda_3 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ e observe que $\text{supp}((u^n_{\Lambda_3} - u_{\Lambda_3})(t))^\wedge \subset B(0, 2\Lambda_3)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u^n_{\Lambda_3}(t) - u_{\Lambda_3}(t)\|^2_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|(u^n_{\Lambda_3}(t) - u_{\Lambda_3}(t))^\wedge|^2 d\xi d\eta \\
&\leq (2\Lambda_3)^s\|u^n_{\Lambda_3}(t) - u_{\Lambda_3}(t)\|^2 \\
&\leq (2\Lambda_3)^s\|\sum_{\lambda\leq\Lambda_3}\varphi(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\eta}{\lambda})(\widehat{u^n}(t) - \widehat{u}(t))\|^2 \\
&\leq (2\Lambda_3)^s\|u^n - u\|^2_{L^\infty_T L^2} \to 0, \text{ com } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Assim, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|u^n - u\|^2_{L^\infty_T L^2} < \frac{\epsilon^2}{4(2\Lambda_3)^s}. \tag{5.3.9}$$

Logo, de (5.3.7)–(5.3.9), se $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|u^n - u\|_{L^\infty_T H^s} &< \|u^n - u^n_{\Lambda_3}\|_{L^\infty_T H^s} + \|u^n_{\Lambda_3} - u_{\Lambda_3}\|_{L^\infty_T H^s} + \|u_{\Lambda_3} - u\|_{L^\infty_T H^s} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Disso, segue a continuidade da aplicação

$$\phi \in B(0, K) \subset H^s(\mathbb{R}^2) \mapsto u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^2)).$$

Concluimos assim a demonstração do Teorema 5.0.3.

5.4 Boa colocação em espaços com peso (revisado)

Com os resultados deste capítulo, o Teorema 3.2.4 pode ser melhorado, no sentido que podemos ter $s < 2$. De fato, isto será estabelecido no próximo resultado.

Teorema 5.4.1. As afirmações seguintes são verdadeiras.

i) Se $s > 11/8$ e $r \in [0, 11/16]$ então o PVI (5.0.1) é localmente bem colocado em $\mathcal{Z}_{s,r}$.

ii) Se $r \in (11/16, 1]$ e $s \geq 2r$, então o PVI (5.0.1) é localmente bem colocado em $\mathcal{Z}_{s,r}$.

Demonstração. Parte i). Seja $r = \theta \in [0, 11/16]$, $s > 11/8$. Sejam $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$ e $u \in C([0, T]; H^s)$ solução de (5.0.1) com dado inicial ϕ, tome $\phi_n = \rho_n * \phi$, onde ρ_n é dado por (5.2.16). Seja $v := u_n$ a solução de (5.0.1) com dado inicial ϕ_n. Por (5.2.12) podemos escrever

$$\sup_{[0,T]}\|v\|_{H^s} \leq M_1',$$

onde M_1' independe de n. Seja w_N como em (1.0.10). Multiplicando a equação diferencial (5.0.1) por $w_N^{2\theta}v$ e integrando em $\mathbb{R}^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^\theta v\|^2+(w_N^\theta v, w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x^2 v + w_N^\theta v_{xyy} + w_N^\theta v v_x) = 0. \tag{5.4.1}$$

Como na demonstração do Teorema 3.2.4, podemos escrever

$$\begin{aligned} w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x^2 v &= [w_N^\theta; \mathcal{H}]\partial_x^2 v + \mathcal{H}(w_N^\theta \partial_x^2 v) \\ &= A_1' + \mathcal{H}\partial_x^2(w_N^\theta v) - 2\mathcal{H}(\partial_x w_N^\theta \partial_x v) - \mathcal{H}\partial_x^2 w_N^\theta v \\ &= A_1' + A_2' + A_3' + A_4'. \end{aligned}$$

Em vista do Teorema 1.0.5, temos

$$\begin{aligned} \|A_1'\| &= \|\|[w_N^\theta; \mathcal{H}]\partial_x^2 v\|_{L_x^2}\|_{L_y^2} \\ &\leq c\|\|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L_x^\infty}\|v\|_{L_x^2}\|_{L_y^2} \leq \ c\|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L_{xy}^\infty}\|v\| \leq \ cM_1'. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

$$\|A_3'\| = 2\|\partial_x w_N^\theta \partial_x v\| \leq c\|v\|_{H^1} \leq M_1', \tag{5.4.3}$$

e

$$\|A_4'\| \leq cM_1'. \tag{5.4.4}$$

Além disso, inserindo A_2' em (5.4.1) vemos que sua contribuição é nula. A constante c que aparece aqui e no restante da prova da teorema será sempre independente de N. A seguir dividimos a prova em dois casos.

Caso 1). $\theta \in [1/2, 11/16]$. Usando o Lema 1.0.11, com $a = 2\theta$, $\alpha = \frac{1}{2\theta}$, e $b = \theta$, obtemos

$$\|J(w_N^{\theta-1/2}v)\| \leq c(\|w_N^\theta v\| + \|J^{2\theta}v\| + M_1'). \tag{5.4.5}$$

Usando integração por partes, as desigualdades $|\partial_x w_N^{2\theta}| \leq cw_N^{2\theta-1}$, $|\partial_y w_N^{2\theta}| \leq cw_N^{2\theta-1}$, $|\partial_y^2 w_N^{2\theta}| \leq cw_N^{2\theta-1}$ e (5.4.5) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int w_N^{2\theta} v\partial_x\partial_y^2 v &= \frac{1}{2}\int(-2\partial_y w_N^{2\theta} v\partial_x\partial_y v + \partial_x w_N^{2\theta}(\partial_y v)^2) \\ &= \int \partial_y^2 w_N^{2\theta} v\partial_x v + \int \partial_y w_N^{2\theta}\partial_y v\partial_x v + \int \partial_x w_N^{2\theta}(\partial_y v)^2 \\ &\leq \|w_N^{\theta-1/2}v\|\|w_N^{\theta-1/2}\partial_x v\| + \|w_N^{\theta-1/2}\partial_y v\|\|w_N^{\theta-1/2}\partial_x v\| + \|w_N^{\theta-1/2}\partial_y\|^2 \\ &\leq c(\|w_N^\theta v\|^2 + \|J^{2\theta}v\|^2 + (M_1')^2) \\ &\leq c(\|w_N^\theta v\|^2 + (M_1')^2). \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Caso 2). $\theta \in [0, 1/2]$. Pelas estimativas acima, observe que

$$\int w_N^{2\theta} v \partial_x \partial_y^2 v \leq c(M_1')^2. \tag{5.4.7}$$

Finalmente, obtemos

$$|(w_N^\theta v, w_N^\theta v v_x)| \leq \|v_x\|_{L^\infty_{xy}} \|w_N^\theta v\|^2. \tag{5.4.8}$$

Portanto de (5.4.1), desigualdade de Hölder e das desigualdades acima, encontramos para todo $\theta \in [0, 11/16]$

$$\frac{d}{dt}\|w_N^\theta v\|^2 \leq c((M_1')^2 + (1 + \|v_x\|_{L^\infty_{xy}})\|w_N^\theta v\|^2).$$

Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|w_N^\theta v\|^2 \leq \|w_N^\theta \phi_n\|^2 + tcM_1^2 + c\int_0^t \exp\left\{\int_0^{t'} (1 + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty_{xy}}) d\tau\right\} (\|w_N^\theta \phi_n\|^2 + tc(M_1')^2) dt'.$$

De (5.2.15),

$$\|w_N^\theta v\|^2 \leq \|w_N^\theta \phi_n\|^2 + tcM_1^2 + c\int_0^t e^{Ct'} (\|w_N^\theta \phi_n\|^2 + t'c(M_1')^2) dt'.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior obtemos, pela dependência contínua em L^2,

$$\|w_N^\theta u\|^2 \leq \|w_N^\theta \phi\|^2 + tcM_1^2 + c\int_0^t e^{Ct'} (\|w_N^\theta \phi\|^2 + t'c(M_1')^2) dt'.$$

O Teorema da convergência monótona então nos dá

$$\|\langle x, y\rangle^\theta u\|^2 \leq \|\langle x, y\rangle^\theta \phi\|^2 + h(t), \tag{5.4.9}$$

onde $h(t) \to 0$, com $t \downarrow 0$. O restante da prova segue como no Teorema 3.2.4.

A parte ii) é análoga ao caso anterior. Isso completa a demonstração do teorema. $\square$

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

6.0.1 Conclusões

Podemos ver que o método de *regularização parabólica* desenvolvido por Kato, se torna eficaz para o estudo da BO-ZK nos espaços de Sobolev H^s, onde $s > 2$, uma vez que neste caso se pode usar o Teorema de imersão de Sobolev. Pelo mesmo motivo, o presente método e a estimativa para o comutador de Kato-Ponce (veja Lema 1.0.13) constituem ferramentas apropriadas para o estudo da boa colocação nos espaços de Sobolev anisotrópicos H^{s_1,s_2}, $s_2 > 2$, $s_1 \geq s_2$.

Em relação à boa colocação nos espaços de Sobolev $\mathcal{Z}_{s,r}$, onde $s > 2$, $s \geq 2r$, $r = 0, 1, 2$, bem como em $\dot{\mathcal{Z}}_{s,3}$, $s \geq 6$, a abordagem utilizada por Iório [27] e Milanés [38] é apropriada uma vez que podemos utilizar o Teorema de Plancherel e o Lema 3.1.1.

Para a obtenção dos princípios de continuação única, nos espaços de Sobolev com pesos inteiros as técnicas de Iório (veja [27] e [25]), tais como a descontinuidade do símbolo da transformada de Hilbert e o Teorema de Plancherel, se mostraram mais apropriadas.

Com respeito à boa colocação e princípios de continuação única nos espaços de Sobolev com pesos fracionários, as técnicas de Análise Harmônica, utilizadas por Fonseca e Ponce (veja [17]), tais como a derivada de Stein, a estimativa para o comutador de Calderón e o Teorema 1.0.2 são as ferramentas mais adequadas. Consideramos que neste caso, a teoria esta completa, uma vez que os resultados obtidos, tanto os princípios de continuação única, quanto a boa colocação são *sharp*.

Quanto a teoria em espaços de Sobolev de baixa regularidade, as estimativas do tipo Strichartz e a teoria de Littlewood-Paley (utilizadas por Koch e Tzvetkov em [34]) se mostraram convenientes.

6.0.2 Trabalhos futuros

Ao longo do nosso trabalho, diversos questionamentos podem ser levantados. Estes podem nos conduzir a trabalhos futuros, entre os quais podemos citar:

1) Melhorar o Teorema 5.0.3, obtendo menor regularidade sobre o dado inicial. Para isto podemos usar as técnicas aplicadas por Kenig e Koenig em [33].

2) Estudar a boa colocação e princípios de continuação única nos espaços da forma

$$Z^{s_1,s_2}_{r_1,r_2} = H^{s_1,s_2} \cap L^2_{r_1,r_2},$$

onde $L^2_{r_1,r_2} = L^2((1 + x^{2r_1} + y^{2r_2})dxdy)$.

3) Estudar se é possível mostrar, como fazem Fonseca, Linares e Ponce no Teorema 2 de [18], que a condição envolvendo três tempos distintos no Teorema 4.2.2 não pode ser reduzida a apenas dois. Verificar a possibilidade da obtenção de um princípio de continuação única envolvendo apenas dois tempos distintos como fazem Fonseca, Linares e Ponce no Teorema 3 de [18], bem como Urrea em [50].

4) Obter um resultado de boa colocação global nos espaços de Sobolev usuais, bem como nos espaços com peso. Para isto é necessário o estudo das leis de conservação da equação.

5) Tendo como base o trabalho de Fonseca, Linares e Ponce em [19] para a BO, estudar o problema de valor inicial associado à seguinte equação

$$u_t + D^{1+a}\partial_x u + u_{xyy} + uu_x = 0,\ \ t \in \mathbb{R}, 0 < a < 1,$$

onde $D^s = (-\Delta)^{s/2}$.

Capítulo 7

Apêndice 1

A seguir faremos em detalhes as estimativas dos termos $B_2, ..., B_6$ e $C_1, ..., C_3, C_5, ..., C_7, D_2, ..., D_6$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|B_2\| &= 4t^2 \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{\phi})\| \\
&= 4t^2 \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{\phi}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\xi^2\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\xi^2\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|(t^{1/4} + t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\xi^2\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\xi^2\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|(t^{1/4} + t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\xi^2\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\xi^2\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\xi^2\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \|\chi\xi^2\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\phi\| + \|\langle x, y\rangle^{1/2}\phi\|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|B_3\| &= 4t^2\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{\phi})\| \\
&\le c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2|\xi|\hat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2|\xi|\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^2|\xi|\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^2|\xi|\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^2|\xi|\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^2|\xi|\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|)\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^2|\xi|\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|)\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|\chi\eta^2|\xi|\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\langle x,y\rangle^{1/2}\phi\|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|B_4\| &= t^2\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{\phi})\| \\
&\le c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^4\hat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^4\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^4\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^4\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4\hat{\phi})\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^4\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^4\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4)\hat{\phi}\| \\
&\quad + \|\chi\eta^4\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^4\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4)\|_\infty\|\hat{\phi}\|+\|\chi\eta^4\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\le c(\|\phi\|+\|\langle x,y\rangle^{1/2}\phi\|),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|B_5\| &= 2it\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi})\| \\
&\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\| \\
&\quad+\|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\eta^2\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^2\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\partial_\xi\hat{\phi}\| \\
&\quad+\|\chi\eta^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\eta^2\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\chi\eta^2\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\langle x,y\rangle^{1+1/2}\phi\|)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|B_6\| &= 4it\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi})\| \\
&\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}|\xi|\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi|\xi|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi|\xi|\partial_\xi\hat{\phi}\| \\
&\quad+\|e^{-it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi|\xi|\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi|\xi|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|)\partial_\xi\hat{\phi}\| \\
&\quad+\|\chi|\xi|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi|\xi|\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|)\|_\infty\|\partial_\xi\hat{\phi}\|+\|\chi|\xi|\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|x\phi\|+\|\langle x,y\rangle^{1+1/2}\phi\|).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $z=\frac{1}{2}\partial_x u^2$ temos

$$
\begin{aligned}
\|C_1\| &\leq t\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|z\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_x u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^1},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\|C_2\|&\leq 4t^2\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_x^2 z\|\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_x^3 u^2\|\|_{L^1_T}\\&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|C_3\|&\leq 4t^2\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_x\partial_y^2 z\|\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_x^2\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T}\\&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|C_5\|&\leq 4t\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_x\partial_y^2 z\|\|_{L^1_T}\\&\leq c(\|u^2\|\|_{L^1_T H^1}+\|x(\partial_x u)^2+xu\partial_x^2 u)\|_{L^1_T L^2})\\&\leq c(\|u^2\|_{L^1_T H^1}+\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty}\|x\partial_x u\|_{L^1_T L^2}+\|\partial_x^2 u\|_{L^1_T L^\infty}\|xu\|_{L^1_T L^2})\\&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T \mathcal{Z}_{3,3/2}},\end{aligned}$$

onde acima usamos que

$$\|x\partial_x u\|\leq \|J(\langle x,y\rangle u)\|+\|u\|\leq \|u\|_{H^3}+\|\langle x,y\rangle^{3/2}u\|.$$

$$\begin{aligned}\|C_6\|&\leq 2t\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\&\leq c\|\|\partial_y^2(xz)\|\|_{L^1_T}\\&\leq c(\|x\partial_y u\partial_y^2 u\|_{L^1_T L^2}+\|x\partial_y u\partial_x\partial_y u\|_{L^1_T L^2}+\|xu\partial_x\partial_y^2 u\|_{L^1_T L^2})\\&\leq c(\|x\partial_y u\|_{L^1_T L^2}\|\partial_y^2 u\|_{L^1_T L^\infty}+\|x\partial_y u\|_{L^1_T L^2}\|\partial_x\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty}+\|xu\|_{L^1_T L^2}\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{L^1_T L^\infty})\\&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T \mathcal{Z}_{5,3/2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|C_7\| &\le \|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\ &\le c\|\|x^2z\|\|_{L^1_T}\\ &\le c\|x^2u\partial_xu\|_{L^1_TL^2}\\ &\le c\|x^2u\|_{L^1_TL^2}\|\partial_xu\|_{L^1_TL^\infty}\\ &\le c\|u\|^2_{L^\infty_T\mathcal{Z}_{5,2}}.\end{aligned}$$

Seja $\bar{D}_2 = 4(t-t')^2D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)})\xi^2\hat{z}$, então

$$\begin{aligned}\|\bar{D}_2\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z})\|\\ &= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\ &\le \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\ &\le c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\hat{z})\|)\\ &\le c(\|\partial_x^2z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\xi^2\hat{z}\|\\ &\quad+\|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\xi^2\hat{z})\|)\\ &\le c(\|\partial_x^2z\|+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\|_\infty\|\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\xi^2\hat{z}\|\\ &\quad+\|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2\hat{z})\|)\\ &\le c(\|\partial_x^2z\|+\|(\eta^2t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^3)\|_\infty\|\widehat{u^2}\|+\|\chi\xi^3\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|)\\ &\le c(\|u\|^2_{H^3}+\|D_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|)\\ &= c(\|u\|^2_{H^3}+\||x|^{1/2}u^2\|)\\ &\le c\|u\|^2_{3,1/2}.\end{aligned}$$

Como consequência,

$$\|D_2\|\le c\|\|\bar{D}_2\|\|_{L^1_t}<\infty.$$

Seja $\bar{D}_3 = 4(t-t')^2D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)})\eta^2|\xi|\hat{z}$, então

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_3\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2|\xi|\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x\partial_y^2 z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^2|\xi|\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^2|\xi|\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x^2\partial_x^2 u^2\|+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\eta^2\xi\|_\infty\|\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\eta^2|\xi|\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|u\|_{H^4}^2+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\eta^2\xi\|_\infty\|\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|\xi)\|_\infty\|\widehat{u^2}\|+\|\chi\eta^2\xi^2\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|) \\
&\leq c(\|u\|_{H^4}^2+\|D_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|) \\
&= c(\|u\|_{H^3}^2+\||x|^{1/2}u^2\|) \\
&\leq c\|u\|_{4,1/2}^2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|D_3\|\leq c\|\|\bar{D}_3\|\|_{L^1_t}< \infty.$$

Seja $\bar{D}_4 = (t-t')^2 D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)})\eta^4\hat{z}$, então

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_4\| &\leq t^2\ \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^4\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|\partial_x\partial_y^4 u^2\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^4\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^4\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|u\|_{H^5}^2+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\eta^4\|_\infty\|\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\eta^4\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|u\|_{H^5}^2+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\eta^4\xi\|_\infty\|\widehat{u^2}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4\xi)\|_\infty\|\widehat{u^2}\|+\|\chi\eta^4\xi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|) \\
&\leq c(\|u\|_{H^5}^2+\|D_\xi^{1/2}\widehat{u^2}\|) \\
&\leq c\|u\|_{5,1/2}^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\|D_4\| \leq c\| \|\bar{D}_4\| \|_{L^1_t} < \infty.$$

Pondo $\bar{D}_5 = 4(t-t')^2 D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)})|\xi|\partial_\xi \hat{z}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\bar{D}_5\| &\leq t\ \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z})\| \\
&= \| \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \| \|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}|\xi|\partial_\xi \hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\partial_x u\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}|\xi|\partial_\xi \hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}|\xi|\partial_\xi \hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5} + \|\chi(T^{1/4} + T^{1/2}|\xi|^{1/2})\xi\|_\infty \|\partial_\xi \hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi|\xi|\partial_\xi \hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|\partial_\xi \hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5} + \|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\xi\|_\infty \|\partial_\xi \hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|)\|_\infty \|\partial_\xi \hat{z}\| + \|\chi\xi\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi \hat{z}\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5} + \|u_x\|_{L^\infty}\| |x|^{3/2}u\|) \\
&\leq c\|u\|^2_{5,3/2}
\end{aligned}$$

Então,

$$\|D_5\| \leq c\| \|\bar{D}_5\| \|_{L^1_t} < \infty.$$

Pondo $\bar{D}_6 = 2i(t-t')\eta^2\partial_\xi \hat{z}$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_6\| &\leq 2t\ \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c(\|\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\partial_x u\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-t')\xi|\xi|})\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{-i(t-t')\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-t')\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5}+\|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\eta^2\|_\infty\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-t')\xi\eta^2})\chi\eta^2\partial_\xi\hat{z}\| \\
&\quad + \|e^{i(t-t')\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\partial_\xi\hat{z})\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5}+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\eta^2\|_\infty\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\|_\infty\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\chi\eta^2\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{z}\|) \\
&\leq c(\|xu\|\|u\|_{H^5}+\|u_x\|_{L^\infty}\||x|^{3/2}u\|) \\
&\leq c\|u\|^2_{5,3/2}.
\end{aligned}
$$

Como consequência,

$$\|D_6\|\leq c\|\|\bar{D}_6\|\|_{L^1_t}< \infty.$$

Capítulo 8

Apêndice 2

A seguir faremos em detalhes as estimativas dos termos $\tilde{B}_3, ..., \tilde{B}_7,\ \tilde{B}_9, ..., \tilde{B}_{13}$, e $\tilde{C}_i, 3 \leq i \leq 14$ e $\tilde{D}_i,\ 2 \leq i \leq 13$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{B}_3\| &\leq 24t^2\ c(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\xi\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\xi\hat{\phi}\| + \|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi\hat{\phi})\|) \\
&\leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi)\hat{\phi}\| + \|\chi\xi\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi)\|_\infty\|\hat{\phi}\| + \|\chi\xi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&\leq c(\|\phi\| + \|D_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
&= c(\|\phi\| + \||x|^{1/2}\phi\|) < \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{B}_4\| \leq & 6t^2\ c(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|\chi\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}\| + \|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}\| + \|\chi\eta^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|\chi\xi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|D_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \||x|^{1/2}\mathcal{H}\phi\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|(1+|x|)\mathcal{H}\phi\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|\mathcal{H}(x\phi)\|) \\
& \leq c(\|\phi\| + \|x\phi\|) < \infty.
\end{aligned}
$$

A estimativa para $\tilde{B}_5$ é análoga a de $\tilde{B}_2$, uma vez que $\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|^3) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. $\tilde{B}_6$ é análogo à $\tilde{B}_2$ uma vez que $\mathcal{D}^{1/2}(\chi\eta^4|\xi|) \in L^\infty$. Temos ainda

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{B}_9\| \leq & c(\|\chi\xi^2\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x\phi\| + \|\chi\xi^2 e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2 e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\xi^2\partial_\xi\hat{\phi})\| + \|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2\partial_\xi\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
& \leq c(\|x\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\|_{L^\infty}\|\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\chi\xi^2\|_{L^\infty}\|\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
& \leq c\|x\phi\| < \infty.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4), \mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|) \in L^\infty$, para estimar $\tilde{B}_{10}$ e $\tilde{B}_{11}$ procedemos de modo análogo a $\tilde{B}_9$.

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{B}_9\| \leq & c(\|\chi\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x^2\phi\| + \|\chi\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})e^{it\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x^2\phi\| + \|\chi\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi})\| + \|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\partial_\xi^2\hat{\phi})\|) \\
& \leq c(\|x^2\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\partial_\xi\hat{\phi}\| + \|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{\phi}\|) \\
& \leq c(\|x^2\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2)\|_{L^\infty}\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\| + \|\chi\eta^2\|_{L^\infty}\|D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{\phi}\|) \\
& \leq c\|x^2\phi\| + \||x|^{5/2}\phi\| < \infty.
\end{aligned}
$$

A estimativa para $\tilde{B}_{13}$ é análoga a $\tilde{B}_{12}$ visto que $\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|) \in L^\infty$.

Temos ainda

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_3\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_x z\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_4\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_y^2\partial_x u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_5\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^3|\xi|^3\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_x^3\partial_x u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_6\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^3\eta^4|\xi|\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_y^4\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_7\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^3\eta^2\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|\partial_y^2\partial_x^3 u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^\infty_T H^5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{C}_8\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|x\partial_x u^2\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|\|u_x\|_{L^\infty}\|xu\|\|_{L^1_T} \\
&\leq c\|u\|_{L^\infty_T \mathcal{Z}_{2,1}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_9\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_x^2(x\partial_x u^2)\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|2\partial_x^2 u^2 + x\partial_x^3 u^2\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|u\|^2_{H^2}+\|xu_xu_{xx}\|+\|xuu_{xxx}\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|^2_{H^2}+\|xu_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^2}+\|xu\|\|u\|_{H^3}\|_{L^\infty_T})\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

acima usamos que $xu_x \in H^1$, pois $xu_x \in L^2, \partial_x(xu_x) \in L^2, \partial_y(xu_x) \in L^2$. Podemos ver isto por meio do Lema 1.0.11.

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_{10}\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^2|\xi|\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_y^2\partial_x(xz)\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|2\partial_y^2\partial_x u^2 + x\partial_x^2\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|u\|^2_{H^2}+\|xu_xu_{xx}\|+\|xuu_{xxx}\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\partial_y^2\partial_x u^2 + xu_{yyx}u_x + xu_{xy}^2 xu_{yy}u_{xx} + xu_yu_{xxy} + uu_{xxyy}\|\|_{L^\infty_T})\\
&\leq c(\|\|u\|^2_{H^3}+\|u_{yyx}\|_{L^\infty}\|xu_x\|+\|xu_{xy}\|\|u_{xy}\|_{L^\infty}+\|xu_y\|\|u_{xxy}\|_{L^\infty}\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|^2_{H^3}+\|u\|_{H^3}\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}\|_{L^\infty_T})\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_{11}\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^4\partial_\xi\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_y^4(xz)\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_y^2\partial_x u^2 + x\partial_x^2\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|x\partial_y^4\partial_x^2 u^2\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|x(\partial_y^4 u_x + u_{yyy}u_{xy} + u_{yy}u_{yyx} + u_yu_{yyyx} + uu_{yyyy}u_x)\|\|_{L^\infty_T})\\
&\leq c(\|\|xu_x\|\|u_{yyyy}\|_{L^\infty}+\|xu_{xy}\|u_{yyy}\|_{L^\infty}\|+\|xu_{yy}\|\|u_{yyx}\|_{L^\infty}+\|xu_y\|\|u_{yyx}\|_{L^\infty}+\|xu\|\|u_{yyyyx}\|_{L^\infty}\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}\|u\|_{H^3}\|_{L^\infty_T})\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

acima usamos o Lema 1.0.11 para estimar $\|xu_{xy}\|$ e $\|xu_{yy}\|$.

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_{12}\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')^2\eta^2\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_y^2(x^2z)\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|x^2\partial_y^2 z\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|x^2\partial_y^2\partial_x u^2\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|x^2(\partial_y^2 uu_x+u_yu_{xy}+uu_{xyy})\|\|_{L^\infty_T})\\
&\leq c(\|\|x^2u_x\|\|u_{yy}\|_{L^\infty}+\|x^2u_y\|\|u_{xy}\|_{L^\infty}\|+\|x^2u\|\|u_{yyx}\|_{L^\infty}\|_{L^\infty}\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}\|u\|_{H^3}\|_{L^\infty_T})\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_{13}\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-t')|\xi|\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|\partial_x(x^2z)\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|xuu_x+x^2u_x^2+x^2uu_{xx}\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|xu\|\|u_x\|_{L^\infty}+\|x^2u_x\|\|u_x\|_{L^\infty}+\|x^2u\|\|u_{xx}\|_{L^\infty}\|_{L^1_T})\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_{14}\| &\leq c\|\|\|\chi\|_{H^1_\xi}\|e^{i(t-t')\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\hat{z}\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|x^3z\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c\|\|x^3uu_x\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|x^3u\|\|u_x\|_{L^\infty}\|_{L^1_T}).\\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Quanto aos termos $\tilde{D}_i$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{D}_2\| &\leq c(\|\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^6\hat{z}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\eta^6\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^6\hat{z}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\hat{z}\|+\|\chi\eta^6\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\|_\infty\|\hat{z}\|+\|\chi\eta^6\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{z}\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\|x|^{1/2}\partial_x u^2\|\|\|_{L^\infty_T}) < \infty.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi), \mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi|\xi|^3), \mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4|\xi|), \mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\xi^2) \in L^\infty_{\xi\eta}$ as estimativas para $\tilde{B}_3$, $\tilde{B}_5$, $\tilde{B}_6$ e $\tilde{B}_7$ são análogas a anterior.

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{D}_4\| &\leq c(\|\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\hat{z}\|+\|\chi\eta^6\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{\phi}\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|z\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\|_\infty\|\hat{z}\|+\|\chi\eta^6\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\hat{z}\|\|\|_{L^1_T})\\
&= c(\|\|\|z\|+\|\|x|^{1/2}\partial_x u^2\|\|\|_{L^\infty_T}) < \infty.
\end{aligned}
$$

acima usamos a estimativa

$$
\|D_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\| = \|D^{1/2}(|\xi|\widehat{u^2})\| = \||x|^{1/2}\partial_x u^2\| < \infty.
$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{D}_8\| &\leq c(\|\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\xi^2\partial_\xi\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z})\|\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\partial_\xi\hat{z}\|+\|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{z}\|\|\|_{L^1_T})\\
&= c(\|\|\|\partial_x u^2\|+\|\|x|^{1/2}\partial_x u^2\|\|\|_{L^\infty_T}) < \infty.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^2|\xi|), \mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^4) \in L^\infty$ as estimativas para $\tilde{D}_9$ e $\tilde{D}_{10}$ são similares à anterior.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{D}_{11}\| &\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi^2\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^2\partial_\xi^2\hat{z})\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z})\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2\partial_\xi\hat{z})\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|\partial_\xi\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\xi^2)\partial_\xi\hat{z}\|+\|\chi\xi^2\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi\hat{z}\|\|_{L^1_T})\\
&= c(\|\|\partial_x u^2\|+\||x|^{1/2}\partial_x u^2\|\|_{L^\infty_T}) < \infty,
\end{aligned}$$

a estimativa para $\tilde{B}_{12}$ é similar à anterior.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{D}_{13}\| &\leq c(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\hat{z})\|\|_{L^1_T}\\
&\leq c(\|\|\partial_\xi^3\hat{z}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^3\hat{z}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2}\chi\partial_\xi^3\hat{z})\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|x^3u\|\|u_x\|_{L^\infty}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^3\hat{z}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^3\hat{z})\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}+\|\partial_\xi^3\hat{z}\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}+\|+\||x|^{1/2}x^3z\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}+\||x|^{1/2}x^3uu_x\|\|_{L^1_T})\\
&\leq c(\|u\|_{\mathcal{Z}_{3,3}}+\|xu\|_{L^\infty}\||x|^{5/2}u_x\|\|_{L^\infty_T})\\
&<\infty,
\end{aligned}$$

onde acima usamos o Lema 1.0.11 para obter

$$xu \in H^2(\mathbb{R}^2), \text{ portanto } xu \in L^\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\||x|^{5/2}u_x\| &\leq c(\|\langle x,y\rangle^{3/2}u\|+\|J(\langle x,y\rangle^{5/2}u)\|)\\
&\leq c(\|\langle x,y\rangle^{3/2}u\|+\|\langle x,y\rangle^{3}u\|+\|J^6u\|)\\
&<\infty.
\end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Abdelouhab, L., Bona, J. L., Felland, M., Saut, J. C., *Nonlocal models for nonlinear dispersive waves*, Physica D. 40, (1989), 360–392.

[2] Benjamin, T. B., *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. 29, (1967), 559–592.

[3] Bona, J. L., Smith, R., *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 278, (1975), 555–604.

[4] Berg, J., Lofstrom, J., *Interpolation Spaces, An Introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[5] Burq, N., Planchon, F., *On well-posedness for the Benjamin-Ono equation*, Math. Ann. 340, (2008), 497–542.

[6] Calderón, A. P., *Commutators of singular integral operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 53, (1965), 1092–1099.

[7] Carleman, T., *'Sur les systèmes aux dérivèes partielles du premier ordre à deux variables'*, C. R. Acad. Sci. Paris 97, (1939), 471–474.

[8] Cazenave, T., Lions, P.L., *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. 85, (1982), 549–561.

[9] Dawson, L., McGahagan, H. and Ponce G., *On the decay properties of solutions to a class of Schrödinger equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 136, (2008), 2081–2090.

[10] Esfahani, A., Pastor, A., *Instability of solitary wave solutions for the generalized BO-ZK equation*, J. Differential Equations 247, (2009), 3181–3201.

[11] Esfahani, A., Pastor, A., *Ill-posedness results for the (generalized) Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 139, (2011), 943–956.

[12] Esfahani, A., Pastor, A., *On the unique continuation property for Kadomtsev-Petviashvili-I and Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equations*, Bull. London Math. Soc. 43, (2011), 1130–1140.

[13] Esfahani, A., Pastor, A., *Stability and decay properties of solitary wave solutions for the generalized BO-ZK equation*, Preprint, arXiv:0909.2020v1.

[14] Esfahani, A., Pastor, A., *Instability of solitary wave solutions for the generalized BO-ZK equation*, J. Differential Equations 247, (2009), 3181–3201.

[15] Evans, Lawrence. C., *Partial Differential Equations*, AMS, Vol. 19, (1998).

[16] Folland, G.B., *Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1984.

[17] Fonseca, G., Ponce, G., *The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. 260, (2011), 436–459.

[18] Fonseca, G., Linares, F., Ponce, G., *The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces II*, J. Funct. Anal. 262, (2012), 2031–2049.

[19] Fonseca, G., Linares, F., Ponce, G., *The IVP for the dispersion generalized Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 30, (2013), 763–790.

[20] Gomes, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática, UFRJ, (2005).

[21] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1964.

[22] Hille, E., *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., (1972).

[23] Hunt, R., Muckenhoupt, B., Wheeden, R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. 176, (1973), 227–251.

[24] Ionescu, A. D., Kenig, C. E., *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low-regularity spaces*, J. Amer. Math. Soc. 20, (2007), 753–798.

[25] Iório, R., *Unique continuation principle for the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Equations 16, (2003), 1281–1291.

[26] Iório, R., *The Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*, J. Math. Anal. Appl. 157, (1990), 577–590.

[27] Iório, R., *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. Partial Differential Equations 11, (1986), 1031–1084.

[28] Jorge. M. C., Pacheco C. G., Romero, L.M.T., Smyth, N. F., *Evolution of two-dimensional lump nanosolitons for the Zakharov-Kuznetsov and electromigration equations*, Chaos 15, (2005), 037104.

[29] Kaikina, E., Kato, K., Naumkin, P.I., Ogawa, T., *Well-posedness and analytic smoothing effect for the Benjamin-Ono equation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 38, (2002), 651–691.

[30] Kato, T., *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lect. Note in Math. 448, (1975), 25–70.

[31] Kato, T., Ponce, G., *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLI, (1988), 891–907.

[32] Kato, T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Suplementary Studies, vol. 8, Academic press, (1983), 93–128.

[33] Kenig, C. E., Koenig, K. D., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Math. Res. Lett. 10, (2003), 879–895.

[34] Koch, H.,Tzvetkov, N., *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^s(\mathbb{R})$, Int. Math. Res. Not. IMRN. (2003), 1449–1464.

[35] Korteweg, D. J., de Vries, G., *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. 39, (1895), 422–443.

[36] Latorre, J. C., Minzoni, A. A., Smyth, N. F., Vargas, C.A., *Evolution of Benjamin-Ono solitons in the presence of weak Zakharov-Kutznetsov lateral dispersion*, Chaos. 16, (2006), 043103.

[37] Linares, F., Ponce, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer-Verlag, 2009.

[38] Milanés, A., *On some bidimensional versions of the generalized Benjamin-Ono equation*, Tese de Doutorado, IMPA, (2002).

[39] Molinet, L., Pilod, D., *The Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation in L^2 revisited*, Anal. PDE. 5, (2012), 365–395.

[40] Molinet, L., Saut, J.C., Tzvetkov, N., *Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*, SIAM J. Math. Anal. 33, (2001), 982–988.

[41] Nahas, J., Ponce, G., *On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations. 34, (2009), 1–20.

[42] Ono, H., *Algebraic solitary waves on stratified fluids*, J. Phy. Soc. Japan 39, (1975), 1082–1091.

[43] Ponce, G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Equations 4, (1991), 527–542.

[44] Saut, J.C., Scheurer, B., *Unique Continuation for Some Evolution Equations*, J. Differential Equations 66, (1987), 118–139.

[45] Saut, J.C., Tzvetkov, N., *On a model system for the oblique interaction of internal gravity waves*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 34, (2000), 501–523.

[46] Saut, J.C., Teman, R., *Remarks on the Korteweg-de Vries equation*, Israel J. Math. 24, (1976), 78–87.

[47] Stein, E., *The characterization of functions arising as potentials*, Bull. Amer. Math. Soc. 67, (1961), 102–104.

[48] Tao, T., *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation on H^1*, J. Hyperbolic Differ. Equ. 1, (2004), 27–49.

[49] Tao, T., Lecture notes 2 for 254 A, http://www.math.ucla.edu/ tao/254a.1.01w/notes2.ps.

[50] Urrea, J. J., *The Cauchy problem associated to the Benjamin equation in weighted Sobolev spaces*, J. Differential Equations 254, (2013), 1863-1892.

[51] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, (1980).