

# A equação de d'Alembert generalizada

Gisele Cristina Ducati

Orientador Prof.Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

DMA – IMECC – UNICAMP

# A equação de d'Alembert generalizada

Este exemplar corresponde à redação final  
da tese devidamente corrigida e defendida pela  
Srta. Gisele Cristina Ducati e aprovada  
pela Comissão Julgadora.

Campinas, 15 de março de 1996.



Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP,  
como requisito parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Matemática Aplicada.

UNIDADE	BC
N.º CHEQUE:	UNICAMP
	D855e
V.	
	27.617
PIS	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PISCO	R\$ 11,00
CAMA	03/05/96
N.º CPD	

CM-00087558-7

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Ducati, Gisele Cristina

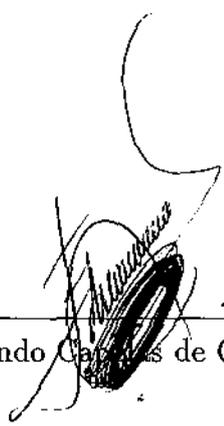
D855e A equação de d'Alembert generalizada / Gisele Cristina Ducati -  
- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Grupos de rotação. 2. Espaço e tempo. 3. Equações  
diferenciais hiperbolicas. I. Oliveira, Edmundo Capelas de- II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Dissertação de mestrado defendida por Gisele Cristina Ducati e aprovada em 15 de março de 1996 pela banca examinadora composta pelos professores doutores



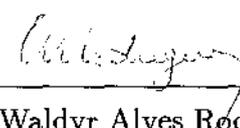
---

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira



---

Prof. Dr. Marcio José Menon



---

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,  
Névio e Dina, pelo apoio, compreensão  
e carinho de todos estes anos.*

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof.Dr. Edmundo Capelas de Oliveira pelo trabalho impecável na orientação deste trabalho e pelo exemplo de profissionalismo.

Agradeço a todas as pessoas envolvidas, direta ou indiretamente, na realização deste trabalho, em particular o Prof.Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr. e o Prof.Dr. Quintino Augusto Souza.

Agradeço a CAPES pela bolsa de mestrado, sem a qual este trabalho não seria realizado.

Finalmente agradeço a Sra. Carlota Plotegher Ducati, Cristiane Graziela Ducati e Rodrigo Marco Ducati, pelo apoio e incentivo durante estes anos.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar os grupos de rotação com dez parâmetros, dando ênfase ao grupo de Fantappié-de Sitter, associado à equação de d'Alembert generalizada, que está relacionada ao cone de luz com abertura variável. O cronotopo associado ao grupo de Fantappié-de Sitter é o chamado cronotopo de Castelnuovo, obtido através da representação projetiva do universo de de Sitter.

O grupo de Fantappié-de Sitter aperfeiçoa os grupos de Galileu e Poincaré, ambos com dez parâmetros, bem como o cone de luz com abertura fixa associado ao cronotopo de Minkowski.

É importante ressaltar que a equação de d'Alembert clássica é sempre do tipo hiperbólico, enquanto que a equação de d'Alembert generalizada é uma equação de Tricomi de segunda espécie do tipo misto.

# Abstract

The aim of this thesis is to study the rotation groups with ten parameters, principally the Fantappié-de Sitter group, associated to the generalized d'Alembert wave equation, related to light cone with variable overture. The associated spacetime with the Fantappié-de Sitter group is the Castelnuovo spacetime, obtained from the projective representation of the de Sitter universe.

The Fantappié-de Sitter group generalizes the Galileu and Poincaré groups, both with ten parameters, and the light cone with fixed overture associated with the Minkowski spacetime.

We note that the classical d'Alembert wave equation is always a hyperbolic equation (hyperbolic type) and the generalized d'Alembert wave equation is a Tricomi equation of second kind (mixed type).

# Conteúdo

Introdução	i
<b>1 Matrizes e teoria de grupos</b>	<b>1</b>
1.1 Matrizes . . . . .	1
1.1.1 Funções de matriz . . . . .	1
1.1.2 Sistemas de referência . . . . .	3
1.2 Teoria de grupos . . . . .	4
1.2.1 Ferramentas básicas da teoria de grupos . . . . .	4
1.2.2 Subgrupos de um grupo . . . . .	7
1.2.3 Grupo de transformações . . . . .	10
1.2.4 Transformações infinitesimais . . . . .	15
1.2.5 Os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter . . . . .	19
<b>2 Transformações finitas</b>	<b>23</b>
2.1 Grupos ortogonais . . . . .	23
2.1.1 Grupo de rotação de $E_2$ . . . . .	24
2.1.2 Grupo de rotação de $E_3$ . . . . .	25
2.1.3 Grupo de rotação de $E_4$ . . . . .	26
2.1.4 Grupo de Rotação de $E_5$ . . . . .	27
2.2 O método de Arcidiacono . . . . .	28
2.2.1 Grupo de rotação do espaço a duas dimensões . . . . .	31
2.2.2 Grupo de rotação do espaço a três dimensões . . . . .	32
2.2.3 Grupo de rotação do espaço a quatro dimensões . . . . .	33
2.2.4 Grupo de rotação do espaço a cinco dimensões . . . . .	36
<b>3 Aplicação</b>	<b>40</b>
3.1 Cronotopo de Newton . . . . .	41

3.2	Cronotopo de Minkowski . . . . .	42
3.3	Cronotopo de Castelnuovo . . . . .	46
<b>4</b>	<b>A equação de d'Alembert</b>	<b>53</b>
4.1	Equação de d'Alembert clássica . . . . .	53
4.2	Equação de d'Alembert generalizada . . . . .	54
4.3	Equação de Tricomi de segunda espécie . . . . .	56
4.4	Geradores do grupo de Fantappiè-de Sitter . . . . .	57
4.5	Casos particulares . . . . .	59
4.5.1	Ponto na origem: $P(0, 0)$ . . . . .	60
4.5.2	Deslocamento sobre o eixo $t$ : $P(0, b)$ . . . . .	61
4.5.3	Deslocamento sobre o eixo $x$ : $P(a, 0)$ . . . . .	62
4.5.4	Deslocamento sobre o cone de luz: $P(a, \pm a)$ . . . . .	63
4.5.5	Ponto fixo qualquer: $P(a, b)$ . . . . .	65
	<b>Conclusão</b>	<b>70</b>
	<b>A Cálculo de <math>\theta</math></b>	<b>73</b>
	<b>Referências</b>	<b>76</b>

# Introdução

O primeiro desenvolvimento do conceito de grupo surgiu devido a inúmeras dificuldades de se resolver uma equação algébrica e a real importância do conceito de grupo para a teoria das equações algébricas foi estabelecida por Galois em 1830.

O conceito de grupo estendeu-se em duas direções: passando-se dos grupos que contêm um número finito de operações (grupos finitos) aos grupos com operações infinitas porém discretas (grupos infinitos) e, por outro lado, a partir da passagem do discreto ao contínuo, estendendo-se a grupos de operações (transformações) que dependem de parâmetros que podem variar de maneira contínua. Este segundo modo é devido a obra de Lie. Sophus Lie estendeu o conceito de grupo a outros domínios da matemática. Ao invés de permutações, os elementos do grupo adquiriram um significado mais geral como transformações ou operações de simetria.

Neste trabalho vamos estudar os grupos de rotações com dez parâmetros devido a sua ampla aplicação em problemas advindos da física como por exemplo a Teoria dos Universos Físicos proposta por Fantappiè em 1952[1]. Tal teoria nos indica de maneira mais geral qual caminho seguir para aperfeiçoar a física e adaptá-la às novas exigências teóricas e experimentais.

Em relação aos grupos com dez parâmetros temos em física clássica o grupo de Galileu, formado pelas rotações espaciais [ $\cong R(3)$ ], pelos deslocamentos inerciais [ $\cong V(3)$ ], pelas translações espaciais [ $\cong T(3)$ ], todos a três parâmetros e pela translação temporal [ $\cong T_0(1)$ ] a um parâmetro. Depois, em física relativista temos o grupo de Poincaré, da relatividade especial e o grupo de Fantappiè-de Sitter, da relatividade especial projetiva. Na passagem do grupo de Galileu para o grupo de Poincaré emerge uma constante  $c$ , chamada velocidade da luz. Ocorre também a fusão das rotações espaciais e deslocamentos inerciais nas rotações do espaço-tempo de Minkowski [ $\cong R(6)$ ] com seis parâmetros e as translações espaciais e a translação temporal se fundem nas translações do espaço-tempo [ $\cong T(4)$ ] com quatro parâmetros, descrevendo assim o chamado cronotopo de Minkowski.

Quando passamos ao grupo de Fantappiè-de Sitter da relatividade espe-

cial projetiva, as rotações e translações do cronotopo se fundem nas rotações [ $\equiv R(10)$ ] (ou roto-translações) do espaço a cinco dimensões. Novamente, emerge uma outra constante  $r$ , chamado o raio do universo de de Sitter. O cronotopo associado ao grupo de Fantappié-de Sitter é o chamado cronotopo de Castelnuovo.

Como uma aplicação efetiva dos grupos mencionados acima, discutimos a equação de propagação das ondas ou a também chamada equação de d'Alembert[2]. A equação de d'Alembert clássica está associada ao cronotopo de Minkowski relacionado a um cone de luz com abertura fixa, já a equação de d'Alembert generalizada associada ao cronotopo de Castelnuovo, está relacionada a um cone de luz com abertura variável e no caso limite  $r \rightarrow \infty$ , obtemos o cone de luz da relatividade especial, ou seja, o cone de luz com abertura fixa.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, dividido em duas seções temos: na primeira seção, apresentamos as funções de matrizes, sistemas de referência e enunciamos o teorema de Cayley-Hamilton, na segunda seção, introduzimos o conceito de grupo e as definições mais importantes para o nosso trabalho. Finalizando este capítulo, introduzimos o conceito de grupo de Galileu, grupo de Poincaré e grupo de Fantappié-de Sitter. No capítulo 2, destacamos o método proposto por Arcidiacono[3] a partir de estudos realizados por Fantappié. Explicitamos as matrizes de transformações finitas e os invariantes de Casimir. No capítulo 3, associamos os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter aos seus respectivos cronotopos de Newton, Minkowski e Castelnuovo. No capítulo 4, discutimos a equação de d'Alembert associada ao grupo de Fantappié-de Sitter bem como seus casos-limite e mostramos que enquanto a equação de d'Alembert clássica é sempre hiperbólica, a equação de d'Alembert generalizada é uma equação do tipo misto. Finalmente apresentamos nossas conclusões.

# Capítulo 1

## Matrizes e teoria de grupos

### 1.1 Matrizes

Vamos nesta primeira parte apresentar as funções de matrizes, enunciar o importante teorema de Cayley-Hamilton e comentar sobre como passamos de um sistema de referência a outro. Vale lembrar que consideramos conhecidas todas as propriedades básicas de matrizes e as possíveis operações a elas relacionadas.

#### 1.1.1 Funções de matriz

Vamos considerar um polinômio de grau  $n$  na variável  $x$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

A este polinômio podemos associar uma função de matriz da seguinte maneira:

$$f(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Quando  $f(x) = 0$  temos a chamada equação característica associada à matriz  $A$ , de onde segue o teorema de Cayley-Hamilton:

*Uma matriz  $A$  satisfaz a sua equação característica, isto é,  $f(A) = 0$ .*

Chamamos *equação mínima* de  $A$ , onde  $A$  é uma matriz quadrada, a equação algébrica de menor grau satisfeita por  $A$ . Demonstra-se[4] então que se  $g(A) = 0$  é a equação mínima e a matriz  $A$  satisfaz a equação algébrica  $f(A) = 0$  então  $f(x)$  é divisível por  $g(x)$ . Se uma função de  $x$  pode ser desenvolvida por uma série, a essa função corresponde uma função de matriz apropriada. Alguns exemplos de função de matriz são:

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \dots$$

$$\operatorname{sen}(A) = A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - \dots$$

Em alguns casos podemos exprimir algumas potências de  $A$  em função de outras potências de grau mais baixo. Do teorema de Cayley-Hamilton temos que  $f(A) = 0$  ou  $A$  satisfaz a equação mínima,  $g(A) = 0$ . Se  $g(A)$  tem grau  $k$ ,  $k \leq n$  onde  $n$  é o grau do polinômio característico então podemos expressar as potências de  $A$  cujo grau é maior que  $k$  em função das potências menores que  $k$ .

Por exemplo, considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A equação característica associada a essa matriz é dada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton a matriz  $A$  satisfaz a equação

$$f(A) = A^2 - 3A - 4 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A + 4I \\ A^3 &= 3A^2 + 4A = 3(3A + 4I) + 4A = 13A + 12I \\ A^4 &= 3A^3 + 4A^2 = 51A + 52I \\ A^5 &= 3A^4 + 4A^3 = 205A + 204I \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, a função de matriz  $f(A)$  pode ser escrita como uma combinação linear de  $I$  e  $A$ , onde os coeficientes são calculados a partir do desenvolvimento em série de  $f(x)$ .

Então, podemos concluir que as funções podem ter infinitos termos do desenvolvimento em série mas no caso das funções de matrizes, elas têm sempre  $k$  termos se a matriz  $A$  é de ordem  $n$  e  $k$  é o grau da equação mínima.

### 1.1.2 Sistemas de referência

Consideremos um espaço euclidiano  $n$ -dimensional, que vamos denotar por  $E_n$ , ao qual associamos um referencial cartesiano (sistema ortogonal de eixos cartesianos)  $x_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Às vezes torna-se necessário ou até mesmo conveniente mudar o sistema de referência. Quando isso acontecer procedemos da seguinte maneira: para mudarmos o sistema de referência, isto é, passarmos a um outro sistema de referência cartesiano ortogonal, com a mesma origem, consideramos uma transformação linear e homogênea

$$x'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k$$

( $x'_i$  indica esse novo sistema) que deixa invariante a forma quadrática

$$\mathbf{OP}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

que nos dá a distância do ponto  $P$  à origem  $O$ . Então devemos ter

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_{rs} \alpha_{ir} \alpha_{is} x_r x_s$$

e essa expressão iguala-se a  $\sum_i x_i^2$  somente se

$$\sum_i \alpha_{ir} \alpha_{is} = \delta_{rs}$$

onde  $\delta_{rs}$  é o *delta de Kronecker*, ou seja, tal expressão assume o valor zero se  $r \neq s$  e um se  $r = s$ .

Então, vamos introduzir a matriz  $\mathcal{H} = [\alpha_{ik}]$  cuja transposta é dada por  $\mathcal{H}^t = [\alpha_{ki}]$  e assim, se

$$\mathcal{H}\mathcal{H}^t = I \rightarrow \mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^t$$

dizemos que  $\mathcal{H}$  é uma matriz *ortogonal*.

Sabemos que  $\det\mathcal{H} = \det\mathcal{H}^t$ , logo

$$\det(\mathcal{H}) \det(\mathcal{H}^t) = (\det\mathcal{H})^2 = 1 \rightarrow \det\mathcal{H} = \pm 1.$$

Nessas condições,  $x'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k$  nos dá a mudança de um sistema de referência cartesiano ortogonal a um segundo sistema do mesmo tipo.

Finalmente, é importante saber que uma *grandeza* é um *escalar* quando é representada por um número (em uma dada unidade) e o seu valor não depende do sistema de referência.

## 1.2 Teoria de grupos

Vamos, inicialmente, definir grupo. Depois, vamos trabalhar com subgrupos que, por sua vez, formam grupos de grande importância, como o grupo normal, dentre outros. Introduzimos os grupos das transformações e as transformações infinitesimais de um grupo e por fim, apresentamos os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter.

### 1.2.1 Ferramentas básicas da teoria de grupos

Entende-se por grupo um conjunto  $G$  com uma estrutura algébrica, cuja lei de composição satisfaz um certo número de axiomas. Estes axiomas são escolhidos de maneira que casos especiais de permutação e operações geométricas sobre figuras sejam satisfeitas. Eles são:

i) O produto de dois elementos quaisquer de  $G$  está em  $G$ , ou seja,

$$a \in G, b \in G \Rightarrow ab \in G.$$

ii) Vale a lei associativa:  $(ab)c = a(bc)$ , com  $a, b, c \in G$ . Isto significa que o produto de três elementos quaisquer de  $G$  é determinado de maneira única se a ordem dos elementos é preservada.

iii) O grupo contém um elemento identidade. Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a e = e a = a$ , para qualquer  $a \in G$ . O elemento  $e$  é chamado elemento identidade ou elemento unitário, ou simplesmente, identidade.

iv) O inverso de qualquer elemento do grupo também está contido no grupo:  $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$  tal que  $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ .

Assim, um *grupo* é um conjunto com uma estrutura algébrica cuja lei de composição satisfaz os axiomas (i), (ii), (iii) e (iv). Note que esses axiomas não contêm a lei comutativa. Um grupo cuja lei comutativa é satisfeita é chamado grupo *abeliano*. Aqui, vale salientar que multiplicação significa uma regra de composição e não necessariamente a multiplicação no sentido da operação algébrica.

O número de elementos de um grupo é chamado *ordem* do grupo. Um grupo de ordem finita é chamado *grupo finito* e caso contrário, dizemos *grupo infinito*.

Um grupo finito é totalmente caracterizado por sua tabela de multiplicação. Como exemplos, temos:

Considere o conjunto  $\{1, -1, i, -i\}$  cuja lei de composição é dada pela multiplicação. Sua tabela é:

	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Note que este grupo é abeliano (a tabela é simétrica com relação a diagonal principal).

Como um segundo exemplo considere um grupo de inteiros módulo 4 (mod 4) cuja lei de composição é a operação de adição. Os elementos são 0,1,2 e 3. Neste caso, o elemento zero é a identidade. A tabela de multiplicação deste grupo é:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Observe que este grupo também é abeliano.

Agora, como exemplo de grupos infinitos temos o grupo das possíveis rotações de um círculo em torno do eixo perpendicular ao plano deste mesmo

círculo e que passa pelo seu centro. Este círculo pode ser rotacionado de qualquer ângulo  $\phi$ . Estas rotações são as operações que formam a lei de composição do grupo. Outros exemplos de grupos infinitos e sua lei de formação são, respectivamente, o conjunto dos números inteiros  $Z$ , com relação a adição, o conjunto dos números racionais  $Q$ , o conjunto dos números reais  $R$ , o conjunto dos números complexos  $C$ , todos estes com relação a multiplicação. Nestes três últimos conjuntos devemos excluir o zero, já que ele não tem elemento inverso.

Vamos agora definir grupos homomorfos, isomorfos e como caso particular grupos automorfos. Antes, vamos introduzir algumas definições. Uma função  $f: A \rightarrow B$  chama-se *injetora* quando dados  $\forall x, y \in A$ ,  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ , ou ainda,  $x \neq y$  em  $A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$  em  $B$ . Uma função  $f: A \rightarrow B$  chama-se *sobrejetora* quando  $\forall y \in B$  existe pelo menos um  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Temos ainda que  $f: A \rightarrow B$  chama-se *bijetora* (ou correspondência biunívoca) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Uma função entre dois grupos que preserva a estrutura de grupo é chamada *homomorfismo*. Ainda, sejam  $G$  e  $G'$  grupos, dizemos que  $G$  é homomorfo a  $G'$ , e escrevemos  $G \simeq G'$ , quando a todo elemento  $g \in G$  corresponde um elemento  $g' \in G'$  tal que a operação produto é conservada, isto é, o produto  $ab = c$ , onde  $a, b \in G$ , tem por correspondente em  $G'$  o produto  $a'b' = c'$ , com  $a', b' \in G'$ .

Se o homomorfismo é uma bijeção dizemos que  $G$  e  $G'$  são *isomorfos* e escrevemos  $G \cong G'$ . Portanto, um isomorfismo define uma correspondência um a um entre todos os elementos de um grupo e todos os elementos de um segundo grupo. Finalmente um isomorfismo entre um grupo e ele mesmo é chamado *automorfismo*.

Um exemplo de dois grupos isomorfos foi dado quando falamos de grupo finito. O grupo  $\{1, -1, i, -i\}$  é isomorfo ao grupo  $\{0, 1, 2, 3\}$ . O isomorfismo é estabelecido pela seguinte relação

$$\begin{array}{cccccc} G & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ G' & 1 & i & -1 & -i \end{array}$$

Esta função é um a um e preserva a multiplicação. Por exemplo,

$$\begin{array}{cc} G & G' \\ 1+2=3 & i(-1)=-i \\ 1+3=0 & i(-i)=1 \end{array}$$

Um tipo muito importante de automorfismo leva o nome de conjugação, que definiremos a seguir. Arbitrariamente escolhemos, do grupo  $G$ , um elemento  $s$  fixo e consideramos a função

$$f(g) = s^{-1}gs, \quad s \in G, \forall g \in G.$$

Essa função é um homomorfismo, pois

$$f(gg') = s^{-1}gg's = (s^{-1}gs)(s^{-1}g's) = f(g)f(g').$$

Mais ainda,

$$f(g) = f(g') \Rightarrow s^{-1}gs = s^{-1}g's \quad \text{e portanto} \quad g = g'.$$

Portanto, a conjugação é um automorfismo para grupos em geral. Se o grupo é abeliano, então a conjugação é a própria identidade.

### 1.2.2 Subgrupos de um grupo

Seja  $G$  um grupo e  $H$  um grupo contido em  $G$ . Dizemos que  $H$  é *subgrupo* de  $G$ . Qualquer grupo possui dois subgrupos que são o elemento identidade e o próprio grupo. O subgrupo composto pela identidade e por ele mesmo é chamado *subgrupo impróprio* (ou *trivial*). Caso contrário o subgrupo é chamado *próprio*. Por exemplo, no grupo  $\{1, -1, i, -i\}$  os elementos 1 e  $-1$  formam um subgrupo. No grupo  $\{0, 1, 2, 3\}$ , o subconjunto  $\{0, 2\}$  também é um subgrupo.

Seja  $S$  um subconjunto arbitrário de um grupo  $G$ . Vamos tomar os elementos  $a \in G$  tal que  $a$  comuta com todos os elementos  $s \in S$ . A notação para tal conjunto, que chamaremos  $C(S)$  é:

$$C(S) = \{a \in G \mid as = sa, \forall s \in S\}.$$

Os elementos de  $C(S)$  são chamados *elementos centrais* de  $G$  e  $C(S)$  é um grupo chamado *subgrupo central*.  $C(S)$  é de fato um grupo, pois,  $e \in C(S)$  já que  $es = se, \forall s \in S$ ,  $e$  é a identidade. Suponhamos que  $a, a' \in C(S)$ , então precisamos demonstrar que  $a^{-1}a' \in C(S)$ , isto é, que  $a^{-1}a's = sa^{-1}a', \forall s \in S$ . Para mostrar isso escrevemos  $sa = as$ , então  $s = asa^{-1}$ . Mas,  $sa' = asa^{-1}a' = a's$ , assim,  $a^{-1}a's = sa^{-1}a'$  que implica que  $a^{-1}a' \in C(S)$ . Este subgrupo é abeliano e coincide com  $G$  se esse é abeliano.

Para a definição de grupos invariantes, vamos introduzir mais alguns conceitos. Seja  $H$  um subgrupo de  $G$  e consideremos para todo  $a \in G$  o subconjunto  $aH$  formado pelos elementos de  $ah$ , com  $h \in H$ ,  $a \notin H$ , ou seja,  $aH = \{ah \mid h \in H \text{ e } a \notin H\}$ . Esse conjunto é chamado *classe lateral a esquerda de  $H$  no grupo  $G$* . Analogamente, definimos  $Ha = \{ha \mid h \in H \text{ e } a \notin H\}$  como *classe lateral a direita de  $H$  no grupo  $G$* . As duas classes  $aH$  e  $Ha$  em geral não são iguais, embora elas nunca sejam disjuntas pois sua interseção contém pelo menos o elemento  $a$  (pois  $ae = ea = a$ ). Se  $aH = Ha$  então  $H = a^{-1}Ha$  e temos uma *classe bilateral de  $H$  em  $G$* . O subgrupo  $H$  será chamado *normal* ou *invariante*. Em particular se um grupo é abeliano, todo subgrupo seu será normal e o mesmo acontece para o subgrupo central de  $G$ .

Todo grupo admite como subgrupos normais ele mesmo e a identidade. Se o grupo admite somente esses dois subgrupos normais ele é chamado *grupo simples* e caso contrário, *grupo composto* (podemos fazer uma analogia aos números inteiros que podem ser primos ou compostos).

Um exemplo de grupo normal é um grupo abeliano. Se o grupo é abeliano temos para  $h \in H$ ,  $s^{-1}hs = hs^{-1}s = h$ ,  $\forall s \in G$ . O *centro*  $C(G)$  de um grupo  $G$  é a coleção de elementos de  $G$  que comutam com todo elemento do grupo. Já mostramos que  $C(G)$  é um grupo. É óbvio que  $C(G)$  é abeliano, então,  $C(G)$  é normal.

Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , o conjunto das classes bilaterais  $aN$ , com  $a \in G$  formam um novo grupo dito *grupo fatorial* ou *quociente* de  $G$  com relação a  $N$ , denotado por  $G/N$ .  $G/N$  é de fato um grupo, pois,

$$\text{i) } aN, bN \in G/N \Rightarrow (aN)(bN) = a(bN)N = abN \in G$$

$$\text{ii) } (aN bN) cN = (abN) cN = ab(cN)N = abcN$$

$$aN (bN cN) = aN (bcN) = abcN \text{ logo}$$

$$(aN bN) cN = aN (bN cN) = abcN$$

$$\text{iii) } (aN)N = (aN)(eN) = (ae)N = aN$$

$$N(aN) = (eN)(aN) = (ea)N = aN$$

$$\text{iv) } (a^{-1}N)(aN) = a^{-1}(aN)N = (a^{-1}a)N = N$$

$$(aN)(a^{-1}N) = a(a^{-1}N)N = (aa^{-1})N = N.$$

Vimos que o centro de um grupo é um subgrupo normal de onde podemos falar do grupo fatorial correspondente. Tal grupo leva o nome de *adjunto* do grupo dado.

No caso de um grupo abeliano, seu centro é o próprio grupo e portanto o adjunto de um grupo abeliano é o próprio grupo.

Um grupo  $G$  é chamado *produto* de dois de seus subgrupos  $H$  e  $K$ , denotado por  $G = HK$ , se cada elemento  $g \in G$  pode ser escrito como  $g = hk$ , com  $h \in H$  e  $k \in K$ .

Observe que nem sempre vale que o produto de dois subgrupos  $H, K$  quaisquer de um grupo  $G$  resulta num grupo. Com efeito, se  $h_1k_1, h_2k_2$  são elementos de  $HK$  então  $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$  que não é da forma  $hk$ ,  $h \in H, k \in K$ . Mas, se o grupo é abeliano, então,  $h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}k_1k_2^{-1} \in HK$ , ou seja, o produto de dois subgrupos de um grupo abeliano é sempre um subgrupo de  $G$ . Assim, para um grupo arbitrário  $G$  temos o seguinte resultado: Se  $H$  e  $K$  são subgrupos de  $G$ , então o produto  $HK$  também é subgrupo de  $G$ , se e somente se,  $H$  e  $K$  comutam:  $HK = KH$ . Observe que se  $H$  ou  $K$  é um subgrupo normal de  $G$  então  $HK = KH$  e portanto  $HK$  é subgrupo de  $G$ . Se um grupo  $G$  contém dois subgrupos normais  $H$  e  $K$ ,  $G = HK$  e além disso  $H \cap K = \{e\}$  dizemos que  $G$  é o *produto direto* de  $H$  por  $K$  e denotamos  $G = H \otimes K$ .

Podemos ainda, dados dois grupos  $H$  e  $K$ , construir um novo grupo  $G$  que seja produto direto destes dois grupos. Para isso tomamos como elementos de  $G$  o par  $(h, k)$  com  $h \in H, k \in K$  e definimos o produto de dois pares da seguinte maneira:

$$(h, k)(h', k') = (hh', kk').$$

Observe que dados  $(h, k)$  e  $(h', k')$  temos que  $(hh', kk') \in G$ , pois sendo  $H$  um grupo  $hh' \in H$ , e pelo mesmo motivo  $kk' \in K$ . É fácil ver que esse produto é associativo. O elemento identidade de  $G$  é dado por  $(e, e')$ , onde  $e, e'$  são os elementos identidade de  $H$  e  $K$ , respectivamente. Assim,

$$(h, k)(e, e') = (he, ke') = (h, k)$$

$$(e, e')(h, k) = (eh, e'k) = (h, k)$$

e, finalmente, como inverso de um elemento de  $G$  tomamos  $(h^{-1}, k^{-1})$  onde  $h^{-1}$  e  $k^{-1}$  são elementos inversos de  $H$  e  $K$ , respectivamente, portanto

$$(h, k)(h^{-1}, k^{-1}) = (hh^{-1}, kk^{-1}) = (e, e')$$

$$(h^{-1}, k^{-1})(h, k) = (h^{-1}h, k^{-1}k) = (e, e').$$

Então podemos dizer que o conjunto  $G$  dos pares  $(h, k)$  com a operação definida acima forma um grupo.

O grupo  $G$  contém como subgrupos os grupos  $H'$  e  $K'$  formados, respectivamente, pelos pares  $(h, e')$  com  $h \in H$ ,  $e' \in K$  e  $(e, k)$ , com  $e \in H$  e  $k \in K$ . Esses subgrupos são isomorfos aos grupos  $H$  e  $K$  e o único par em comum é o par  $(e, e')$ .

Podemos dizer que estes dois subgrupos  $H'$  e  $K'$  são normais em  $G$  pois considerando um elemento qualquer de  $G$ , por exemplo,  $(h, k)$  e um elemento qualquer de  $H'$ ,  $(h, e')$ , temos:

$$\begin{aligned}(h, k)^{-1}(h, e')(h, k) &= (h^{-1}, k^{-1})(h, e')(h, k) = \\(h^{-1}h, k^{-1}e')(h, k) &= (e, k^{-1})(h, k) = (eh, k^{-1}k) = (h, e')\end{aligned}$$

que é elemento de  $H'$ . Logo,  $H'$  é normal em  $G$ . Analogamente,  $K'$  é normal em  $G$ .

Concluimos que partindo de dois grupos quaisquer  $H$ ,  $K$  e procedendo da maneira indicada construímos o grupo  $G = H' \otimes K'$  que é produto direto de  $H'$  e  $K'$ , já que eles são normais em  $G$  e  $H' \cap K' = (e, e')$ .

Podemos definir o produto direto de dois ou mais grupos, por exemplo,  $G = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$  tomando como elemento do grupo  $G$  a  $n$ -upla  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , onde  $h_i \in H_i$ .

Definamos agora, produto semi-direto. Sejam  $H$  e  $K$  dois grupos, e seja  $aut(H)$  o grupo de automorfismos de  $H$ . Seja  $\Psi : K \rightarrow aut(H)$  um homomorfismo tal que para cada  $k \in K$  temos  $\Psi(k) \in aut(H)$  que leva  $h \in H$  em  $\Psi(k)h \in H$ . O *produto semi-direto* de  $H$  por  $K$  é o conjunto dos pares  $(h, k) \in H \times K$  munido da seguinte lei de multiplicação

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\Psi(k_1)h_2, k_1k_2)$$

Pode-se verificar imediatamente que o produto semi-direto de  $H$  por  $K$  é um grupo e que a identidade do grupo é  $(e_1, e_2)$  onde  $e_1$  é a identidade de  $H$  e  $e_2$  é a identidade de  $K$ . O elemento inverso de  $(h, k)$  é  $(h, k)^{-1} = (\Psi(k)^{-1}h^{-1}, k^{-1})$ . Denotamos o produto semi-direto de  $H$  por  $K$  por  $H \overline{\times} K$ .

### 1.2.3 Grupo de transformações

Alguns grupos de transformações são de particular importância no estudo da física. Vamos estudar alguns deles. Inicialmente, vamos definir o

grupo das translações, denotado por  $T_n$ . Dado um espaço euclidiano real de dimensão  $n$ ,  $E_n$ , referente a um sistema de eixos cartesianos ortogonais, o conjunto das translações

$$T(x_i) = x'_i = x_i + a_i$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$  cujos elementos dependem dos  $n$  parâmetros  $a_i$ , forma um grupo abeliano se definimos o *produto* de duas translações  $T_a$  e  $T_b$  por

$$T_a T_b = T_{a+b} = T_b T_a.$$

Tal operação é associativa, existe o elemento identidade,  $T_0$  (translação nula) e existe o elemento inverso dado por  $T_{-a}$  que é a translação que traz os pontos de volta a posição inicial.

As translações feitas ao longo de um eixo são subgrupos de  $T_n$  (a um parâmetro) e estes subgrupos são normais pois  $T_n$  é abeliano. Temos ainda que esses grupos têm em comum só o elemento identidade e todo elemento de  $T_n$  resulta do produto das  $n$  translações ao longo dos vários eixos. Portanto, o grupo das translações de  $E_n$  é o *produto direto* dos  $n$  grupos das translações ao longo dos eixos cartesianos.

Toda translação de  $T_n$  é rotulada pelos  $n$  parâmetros  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e por isso pode ser representada por um ponto  $P$  de um espaço euclidiano  $E_n$ ,  $n$ -dimensional. Assim, o grupo  $T_n$  pode ser representado geometricamente por tal espaço. Então, podemos dizer que temos um grupo topológico pois os elementos do grupo formam um conjunto no qual é definida uma estrutura algébrica de grupo e, também, uma estrutura topológica[5].

Dentre os grupos de transformação temos ainda, entre outros, o grupo ortogonal  $O_n$ , o grupo ortogonal especial  $SO_n$ , o grupo linear especial  $SL_n$  e o grupo linear homogêneo  $L_n$ . Vamos, agora, descrever os grupos  $O_n$  e o  $SO_n$ .

Em um espaço euclidiano real  $E_n$  a  $n$  dimensões, tendo como referência um sistema cartesiano ortogonal de origem  $O$ , as transformações lineares

$$x'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

que deixam invariante a forma quadrática

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

tomam o nome de transformações ortogonais e formam um grupo chamado *grupo ortogonal*, denotado por  $O_n$ .

Como já vimos a matriz  $[\alpha_{ik}] = H$  é ortogonal pois  $H^{-1} = H^t$ . Temos ainda que o determinante de  $H$  vale  $\pm 1$ , e por isso é fácil mostrar que as transformações acima formam um grupo, pois, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal, suas inversas e a matriz identidade são ortogonais e vale a propriedade associativa.

Um importante subgrupo do grupo  $O_n$  é aquele cuja matriz  $H$  tem determinante  $+1$ . Este subgrupo é chamado *grupo ortogonal especial* e é denotado por  $SO_n$ . Tal grupo corresponde ao grupo das rotações,  $R_n$ , de um espaço  $n$ -dimensional.

Observe que as transformações cujas matrizes têm determinante  $-1$  (reflexões) não formam um grupo, visto que o produto de duas destas transformações tem determinante  $+1$ .

Podemos encontrar o número de parâmetros do grupo ortogonal quando observamos que os  $n^2$  parâmetros  $\alpha_{ik}$  estão relacionados através das relações de ortogonalidade

$$\sum_s \alpha_{is} \alpha_{sk} = \delta_{ik}.$$

Assim temos as  $n$  condições  $\sum_s \alpha_{is}^2 = 1$  e as  $N = \binom{n}{2}$  condições, isto é,  $\sum_s \alpha_{is} \alpha_{sk} = 0$  com  $i \neq k$ . Os parâmetros independentes são:

$$n^2 - n - N = n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = N$$

e o grupo das rotações[6] também terá o mesmo número de parâmetros. É possível mostrar que o grupo ortogonal é um grupo topológico [7]. Note que para encontrar a variedade que o representa observamos que uma matriz real quadrada de ordem  $n$  pode ser representada por um ponto  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nn})$  de um espaço euclidiano  $n^2$  dimensional. Neste espaço, os pontos imagens das matrizes ortogonais do grupo  $O_n$  têm as coordenadas satisfazendo

$$\sum_s \alpha_{is} \alpha_{sk} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_s \alpha_{is}^2 = 1.$$

Observe que,  $\sum_s \alpha_{is}^2 = 1 \Rightarrow |\alpha_{is}| \leq 1$ , portanto, esses pontos estão situados dentro de um cubo com centro na origem e semi-lado um e estão contidos

na intersecção dos  $n$  cilindros  $\sum_s \alpha_{is}^2 = 1$ . Somando-se membro a membro estas  $n$  equações temos

$$\sum_{i,s} \alpha_{is}^2 = n$$

que é a equação da hipersfera  $S_{n^2}$  com centro na origem e raio  $\sqrt{n}$ .

Vamos examinar algumas das propriedades dos grupos ortogonais. O grupo  $O_n$  do espaço  $n$ -dimensional admite como subgrupo o grupo  $O_{n-1}$  do espaço a  $(n-1)$  dimensões. Se entre as matrizes ortogonais  $O_n = [\alpha_{ik}]$  consideramos aquela do tipo

$$O_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que  $O_{n-1}$  também deve ser ortogonal. Por outro lado, o produto de duas matrizes deste tipo ainda é uma matriz do mesmo tipo e o mesmo acontece com a matriz inversa (que é igual a matriz transposta). Visto que o conjunto contém a matriz identidade podemos afirmar que  $O_{n-1}$  é um grupo.

Entre as reflexões, as mais simples são as simetrias com relação a um hiperplano  $E_{n-1}$ . Assumimos o eixo dos  $x_1$  perpendicular ao hiperplano. Uma simetria é dada por

$$x'_1 = -x_1 \quad x'_i = x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

com determinante  $-1$ , a qual deixa invariante os pontos do hiperplano.

Em resumo, valem os seguintes teoremas devidos a Cartan[8]:

*O produto de um número par de simetrias é uma rotação enquanto que o produto de um número ímpar de simetrias é uma reflexão.*

De fato, o determinante da transformação será  $\pm 1$  conforme o número de simetrias.

*Toda rotação é produto de um número par ( $\leq n$ ) de simetrias enquanto que toda reflexão é produto de um número ímpar ( $\leq n$ ) de simetrias.*

Entre as rotações existem aquelas que são simples, as quais, num oportuno sistema de referência, num espaço  $n$ -dimensional deixam fixas as coordenadas de um ponto, exceto duas  $(x_i, x_k)$  que se transformam da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos\varphi - x_k \operatorname{sen}\varphi \\ x'_k &= x_i \operatorname{sen}\varphi + x_k \cos\varphi. \end{aligned}$$

O determinante desta transformação vale +1 e as outras  $(n-2)$  dimensões não variam.

*Toda rotação pode ser decomposta em um certo número ( $\leq n/2$ ) de rotações simples cujos planos são perpendiculares dois a dois, enquanto que toda reflexão pode ser decomposta em um certo número ( $\leq (n-1)/2$ ) de rotações simples mais uma simetria em relação ao hiperplano que contenha todos os planos de tais rotações simples.*

É interessante observar que as rotações do plano  $(x_i, x_k)$  em torno de um eixo formam um grupo a um parâmetro ( $\varphi$ ). Tal grupo é um grupo topológico cuja variedade que o representa é uma circunferência de raio um.

Vamos passar agora a um outro grupo. Considere um espaço euclidiano,  $E_n$ , real. O *Grupo Linear Especial*,  $SL_n$ , é o grupo formado pelas transformações lineares

$$x'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

cujas matrizes têm determinante +1. Observe que o produto de duas transformações deste tipo resulta numa transformação do mesmo tipo (com determinante +1); existe a transformação identidade,  $x'_i = x_i$  e para qualquer transformação garantimos a existência de uma transformação inversa, pois o determinante é diferente de zero. Podemos concluir então que temos um grupo. Observe que as transformações conservam os volumes dos domínios transformados pois o jacobiano vale +1. Portanto, o grupo  $SL_n$  têm  $n^2 - 1$  parâmetros e os  $n^2$  coeficientes estão relacionados pela condição  $\det \alpha_{ik} = 1$ .

De modo mais geral, as transformações lineares com o determinante da matriz dos coeficientes diferente de zero ainda formam um grupo. Note que o produto de duas dessas transformações mantém fixos a origem e o hiperplano impróprio[9] e por isso ainda é do mesmo tipo. Neste caso, também existe a identidade  $x'_i = x_i$  e novamente como o determinante é diferente de zero existe a transformação inversa.

Chamamos o grupo descrito acima de *grupo linear homogêneo* e o denotamos por  $GL_n$ . Este grupo tem  $n^2$  parâmetros e contém como subgrupo o grupo linear especial,  $SL_n$ .

Ambos os grupos  $GL_n$  e  $SL_n$  são grupos topológicos. Podemos encontrar a variedade que os representa. Observe que as matrizes  $[\alpha_{ik}]$  podem ser representadas por pontos de um espaço euclidiano a  $n^2$  dimensões. As matrizes com determinante nulo são representadas pela hipersuperfície de equação

$|\alpha_{ik}| = 0$ , ou seja, um cone de  $(n^2 - 1)$  dimensões com vértice na origem. Se retirarmos do espaço  $n^2$ -dimensional este cone, o que resta é o grupo linear homogêneo  $GL_n$ .

O grupo  $SL_n$  é representado no espaço a  $n^2$  dimensões pela variedade a  $(n^2 - 1)$  dimensões cuja equação é

$$\det \alpha_{ik} = 1.$$

Veja que nos limitamos a grupos em espaços euclidianos reais. Se passarmos aos espaços euclidianos complexos teremos grupos mais gerais, como por exemplo o grupo linear geral complexo,  $LC_n$ , o grupo linear especial complexo,  $LSC_n$ , o grupo unitário  $U_n$ . Um outro grupo importante é o grupo simplético  $S_{m_n}$  [10].

### 1.2.4 Transformações infinitesimais

O matemático Sophus Lie[11] foi o primeiro a fazer um estudo sistemático da construção de grupos de transformações a partir de seus elementos infinitesimais, isto é, aqueles elementos que se encontram na imediata vizinhança do elemento identidade. Temos então que as propriedades destes elementos infinitesimais caracterizam as propriedades do grupo.

Primeiramente vamos considerar um grupo de transformações a um parâmetro  $t$  que atua num espaço  $n$ -dimensional

$$x'_i = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n | t)$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se introduzimos o operador infinitesimal  $X$  do grupo, mostra-se[12] que as transformações acima podem ser desenvolvidas em série (funções analíticas) da seguinte maneira:

$$x'_i = x_i + tXx_i + \frac{(tX)^2}{2!}x_i + \dots = e^{tX}x_i.$$

Quando  $t$  é considerado infinitamente pequeno, podemos desprezar as potências de ordem superior a um e da expressão acima obtemos

$$x'_i = x_i + tXx_i$$

que são as transformações infinitesimais de onde, para  $t=0$  temos a transformação identidade  $x'_i = x_i$ . Vamos ver alguns exemplos. O operador infinitesimal do grupo das translações na reta é

$$X = \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Substituindo  $X$  na expressão anterior temos

$$x'_1 = x_1 + t.$$

Para o caso das rotações no plano, o operador infinitesimal é

$$X = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1$$

e, então, as transformações infinitesimais são

$$x'_1 = x_1 - tx_2 \quad x'_2 = x_2 + tx_1.$$

No caso de um grupo de transformações a  $r$  parâmetros

$$x'_i = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_r)$$

que atua em um espaço  $n$ -dimensional, devemos introduzir  $r$  operadores infinitesimais  $X_1, X_2, \dots, X_r$  e com esses operadores construir o operador

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_r X_r$$

onde os  $\lambda_i$  são parâmetros.

Podemos escrever as transformações da seguinte maneira

$$x'_i = e^{tX} x_i$$

onde  $t$  é um parâmetro e fazendo os  $\lambda_i$  variarem de todas as maneiras possíveis obtemos as  $\infty^r$  transformações do grupo com  $r$  parâmetros

$$t_i = \lambda_i t, \text{ com } i = 1, 2, \dots, r$$

Quando  $t$  é infinitamente pequeno obtemos as transformações infinitesimais do grupo

$$x'_i = x_i + (t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_r X_r) x_i.$$

Por exemplo, os operadores infinitesimais do grupo das translações  $E_n$  a  $n$  parâmetros são os seguintes:

$$X_i = \partial_i$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$  onde as transformações infinitesimais são

$$x'_i = x_i + t_i.$$

Os operadores infinitesimais do grupo  $SO_n$  são os seguintes:

$$X_{ik} = x_i \partial_k - x_k \partial_i$$

com  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , e são no total  $n(n-1)/2$  operadores, isto é, quantos são os parâmetros do grupo.

Dado um grupo contínuo[13] a  $r$  parâmetros é possível calcular seus operadores infinitesimais e suas transformações infinitesimais em torno da identidade. Reciprocamente, dados  $r$  operadores infinitesimais  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , independentes entre si, podemos perguntar sob que condições temos um grupo a  $r$  parâmetros. Para tal vamos introduzir os parênteses de Poisson

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$$

os quais satisfazem a identidade de Jacobi

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0.$$

Agora podemos enunciar o seguinte teorema:

*As condições necessárias e suficientes para que  $r$  transformações independentes entre si possam gerar um grupo a  $r$  parâmetros é que se tenha*

$$[X_i, X_k] = \sum_s c_{iks} X_s \quad (*)$$

onde  $c_{iks}$  são as chamadas constantes de estrutura do grupo. Tais constantes devem satisfazer as seguintes relações

$$c_{iks} + c_{kis} = 0,$$

$$\sum_s (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) = 0.$$

Note que essas relações são facilmente verificadas através da identidade de Jacobi e da relação (\*).

Então, é possível demonstrar[14] que dois grupos com as mesmas constantes de estrutura são isomorfos em torno da identidade. É fácil ver que condições devem satisfazer as constantes de estrutura para que um grupo a  $r$  parâmetros admita um subgrupo a  $r' (< r)$  parâmetros. Se ordenarmos as transformações infinitesimais do grupo de modo que os primeiros  $r'$  parâmetros sejam aqueles do subgrupo

$$X_1, X_2, \dots, X_{r'}, X_{r'+1}, \dots, X_r$$

ocorre que os  $X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r'$  satisfazem a condição (\*) para  $i, k, s = 1, 2, \dots, r'$ , de onde segue que as constantes de estrutura devem satisfazer as condições  $c_{iks} = 0$ , para  $iks > r'$ .

Já vimos que um grupo é chamado *simples* se ele não admite subgrupos invariantes além dos triviais. Então, aplicando o teorema sobre grupos, que enunciamos, Cartan deu uma completa classificação dos grupos simples e encontrou as quatro categorias de grupos isolados[5]:

1. Os grupos  $A_n$  – um modelo de tais grupos é dado pelos grupos de matrizes unitárias  $U_{n+1}$  nos espaços a  $(n+1)$  dimensões.
2. Os grupos  $B_n$  – um modelo destes grupos é dado pelos grupos ortogonais especiais  $SO_{2n+1}$  num espaço de dimensão ímpar.
3. Os grupos  $C_n$  – os grupos simpléticos  $S_{m_n}$  nos espaços a  $n$  dimensões nos fornecem um modelo para tais grupos.
4. Os grupos  $D_n$  – os grupos ortogonais especiais  $SO_{2n}$  nos espaços de dimensão par nos dá um modelo de tais grupos

Existem ainda outros cinco grupos simples possíveis com 14, 52, 78, 133 e 248 parâmetros. Demonstra-se[5] que os grupos do tipo  $A_1, B_2$  e  $C_1$  são localmente isomorfos e o mesmo acontece para os grupos dos tipos  $B_2$  e  $C_2$  enquanto que  $A_3$  é isomorfo a  $D_3$ .

### 1.2.5 Os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter

Nesta subseção faremos uma breve introdução dos grupos com dez parâmetros relacionados à física que vamos estudar. Estes grupos são os grupos de Galileu, relacionado à física clássica, o grupo de Poincaré, relacionado à relatividade especial e o grupo de Fantappié-de Sitter, relacionado a relatividade especial projetiva<sup>1</sup>.

#### O grupo de Galileu (Física Clássica)

Na mecânica clássica vale o chamado princípio de relatividade de Galileu que afirma: Os fenômenos mecânicos acontecem do mesmo modo em todo o sistema inercial.

Assim, podemos afirmar que as leis da mecânica resultam as mesmas considerando que as experiências sejam invariantes por rotações e translações espaciais, ou seja, as experiências podem ser feitas aqui ou em outro lugar, ainda, elas devem ser invariantes por translação temporal, tanto faz realizarmos as experiências agora ou depois e, finalmente, elas devem ser invariantes por deslocamentos inerciais (ou arrastamentos), isto é, as leis da mecânica se mantêm as mesmas se realizarmos as experiências nos movendo sobre uma plataforma dotada de movimento retilíneo e uniforme.

Para a física clássica o espaço é euclideano a três dimensões e o tempo é infinito. Podemos afirmar que as transformações do grupo de Galileu para as quais as leis da mecânica clássica permanecem invariantes são formadas pelas seguintes transformações:

- (a) rotações espaciais (a três parâmetros)
- (b) deslocamentos inerciais com velocidade  $V_\mu$  (a três parâmetros)
- (c) translações espaciais (a três parâmetros)
- (d) translações temporais (a um parâmetro)

Então, podemos dizer que o grupo de Galileu é um grupo com dez parâmetros visto que toda transformação para estar bem caracterizada precisa de dez números arbitrários.

---

<sup>1</sup>Ver referência [15].

## O grupo de Poincaré (Relatividade Restrita)

Vimos que o grupo de Galileu da física clássica, onde vale o princípio da relatividade de Galileu tem dez parâmetros e toda transformação nele realizada é produto das transformações: rotações espaciais (três parâmetros), deslocamentos inerciais (três parâmetros), translações espaciais (três parâmetros) e translações temporais (um parâmetro).

Einstein propôs o aperfeiçoamento da física clássica e a construção de uma nova física baseada no princípio da relatividade de Einstein que diz:

*Em todos os sistemas dotados de movimento retilíneo e uniforme, em relação a um sistema inercial:*

- (a) a velocidade da luz no vácuo é a mesma
- (b) todas as leis da natureza são as mesmas.

Neste ponto, ocorre algumas mudanças relacionadas às transformações. Nesta passagem à física relativista, onde emerge a constante  $c$ , velocidade da luz, ocorre a fusão das rotações espaciais e deslocamentos inerciais, ambos a três parâmetros, numa única operação, isto é, nas rotações espaço-temporais a seis parâmetros

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k \quad i, k = 1, 2, 3$$

com determinante  $+1$ . Estas transformações, juntamente com as transformações de Lorentz, formam o chamado grupo de Lorentz próprio. Quando adicionamos as reflexões obtemos o grupo de Lorentz. Ainda nesta passagem ocorre a fusão das translações espaciais, a três parâmetros, e temporal, a um parâmetro, nas translações espaço-temporais, a quatro parâmetros

$$x'_i = x_i + \alpha_i$$

com  $i = 1, 2, 3, 4$ . O conjunto das transformações de Lorentz próprias e ortócronas, isto é, que preservam a direção temporal, mais as translações espaço-temporais formam o grupo de Poincaré, a dez parâmetros

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k + \alpha_i$$

que tem a estrutura de produto semi-direto.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Na literatura denota-se o grupo de Poincaré por  $P = \mathcal{L}_+^\uparrow \bar{\times} T(4)$  onde  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é o grupo de Lorentz próprio e ortócrono.

Concluimos então que qualquer transformação do grupo de Poincaré pode ser decomposta em uma rotação seguida de uma translação de  $E_4$  e tais operações são entre elas permutáveis. Tal grupo aperfeiçoa o grupo de Galileu da física clássica.

Como a velocidade da luz é finita, a medida de espaço e de tempo não são independentes e o modelo de Newton pode ser aperfeiçoado pelo modelo de Minkowski (cronotopo de Minkowski).

### O grupo de Fantappiè-de Sitter (Relatividade Projetiva)

Vimos que o grupo de Poincaré aperfeiçoa o grupo de Galileu. Sendo assim, podemos perguntar se existe algum grupo, ainda com dez parâmetros que se comporta do mesmo modo em relação ao grupo de Poincaré. Este grupo é o grupo de Fantappiè-de Sitter. Vimos que na passagem da física clássica para a relatividade restrita emerge uma constante  $c$ , velocidade da luz. Aqui isto também acontece. Na passagem da relatividade restrita à relatividade projetiva emerge uma outra constante, que denotamos por  $r$ , que é o raio do universo de de Sitter. Ocorre ainda a fusão das rotações e translações espaço-temporais nas chamadas roto-translações.

O grupo de movimentos em si mesmo do universo de de Sitter é dado pelas rotações do espaço pentadimensional com dez parâmetros. Assim, podemos afirmar que o grupo de Fantappiè-de Sitter é isomorfo ao grupo de rotações no espaço pentadimensional.

Quanto ao modelo de universo estudado neste grupo, temos o universo de Castelnuovo, que aperfeiçoa o modelo de Minkowski.

Então obtemos a relatividade especial projetiva que aperfeiçoa a relatividade especial de maneira única e pode ser estudada usando as técnicas de teoria de grupos.

Vimos que o grupo de Galileu pode ser aperfeiçoado pelo grupo de Poincaré e este pode ser aperfeiçoado pelo grupo de Fantappiè-de Sitter. Já este último não pode ser aperfeiçoado por nenhum outro grupo com dez parâmetros, pois o grupo de Fantappiè-de Sitter é um grupo simples, isto é, não contém subgrupos invariantes[1].

Mais a frente vamos ver que o grupo de Fantappiè-de Sitter pode ser aperfeiçoado pelo grupo conforme, mas este com quinze parâmetros e não mais, dez. Fazendo uma analogia à relatividade associada a cada um desses grupos, observa-se que a relatividade especial projetiva também pode

ser aperfeiçoada, e o que nos permite tal aperfeiçoamento é a relatividade conforme.

Física Clássica	Relatividade Restrita	Relatividade Projetiva
Grupo de Galileu	Grupo de Poincaré	Grupo de Fantappiè-de Sitter
Cronotopo de Newton	Cronotopo de Minkowski	Cronotopo de Castelnuovo
rotações espaciais	rotações  espaço-temporais  translações  espaço-temporais	roto-   -translações
deslocamentos inerciais		
translações espaciais		
translação temporal		

Fig.1. Resumo dos grupos com dez parâmetros.

## Capítulo 2

# Transformações finitas

Neste capítulo, apresentamos um método para encontrar as transformações finitas de um grupo ortogonal através de uma matriz anti-simétrica. Tal método mostrar-se-á inconveniente conforme aumentamos a dimensão do espaço em que trabalhamos. Sendo assim, introduziremos o método de Arcidiacono e, através de exemplos, evidenciamos as vantagens de seu uso.

### 2.1 Grupos ortogonais

Primeiramente, observamos que a matriz que nos dá a transformação finita é uma matriz infinitésima. A seguir, exemplificamos o cálculo de tais matrizes para alguns grupos ortogonais: os grupos de rotação de  $E_n$ .

Sabemos que as matrizes que representam as transformações de um grupo ortogonal são aquelas tais que

$$\mathcal{H}^t = \mathcal{H}^{-1}.$$

Então podemos dizer que as transformações de um grupo ortogonal podem ser escritas da seguinte maneira:

$$x' = \mathcal{H}x = e^{tX}x$$

onde  $X$  é a matriz infinitésima,  $x$  é o vetor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $t$  é um parâmetro. Vemos que  $\mathcal{H}$  é dada por  $e^{tX}$ , ou seja,

$$\mathcal{H} = e^{tX} = \sum_s t^s \frac{X^s}{s!}$$





de onde

$$e^X = I + \left(1 - \frac{r^2}{3!} + \frac{r^4}{5!} - \dots\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{r^2}{4!} + \frac{r^4}{6!} - \dots\right) X^2 \quad (2.11)$$

portanto, temos que

$$e^X = I + \frac{\text{sen}r}{r}X + \frac{1 - \text{cos}r}{r^2}X^2. \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Grupo de rotação de $E_4$

O grupo ortogonal  $O_4$  é um grupo com seis parâmetros e vamos denotá-los por  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . A matriz infinitésima é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

A equação característica associada a este grupo é

$$\omega^4 + b_2\omega^2 + b_4 = 0 \quad (2.14)$$

onde<sup>3</sup>  $b_2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2$  e  $b_4 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2$ . Procedendo como anteriormente obtemos:

$$\omega^4 + b_2\omega^2 + b_4 = 0 \quad (2.15)$$

e, portanto,

$$X^4 + b_2X^2 + b_4 = 0 \quad (2.16)$$

logo,

$$\begin{aligned} X^4 &= -b_2X^2 - b_4I \\ X^5 &= -b_2X^3 - b_4X \\ X^6 &= (b_2^2 - b_4)X^2 + b_2b_4I \\ X^7 &= (b_2^2 - b_4)X^3 + b_2b_4X \\ X^8 &= (-b_2^3 + 2b_2b_4)X^2 + (-b_4b_2^2 + b_4^2)I \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

---

<sup>3</sup>Denotamos o produto escalar por  $\cdot$  e o produto vetorial por  $\wedge$ .

e assim temos

$$e^X = I + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad (2.18)$$

onde  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são coeficientes.

### 2.1.4 Grupo de Rotação de $E_5$

No presente caso, os dez parâmetros do grupo são dados por três vetores  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ , todos com três componentes e  $t_0$  um escalar. A matriz  $X$  é dada por:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 & -t_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 & -t_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 & -t_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & -t_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

A equação característica associada é:

$$\omega^5 + b_2\omega^3 + b_4\omega = 0 \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{cases} b_2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{t}^2 + t_0^2 \\ b_4 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})^2 + (t_0\mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2. \end{cases} \quad (2.21)$$

Novamente temos que

$$X^5 + b_2X^3 + b_4X = 0 \quad (2.22)$$

de onde

$$\begin{aligned} X^5 &= -b_2X^3 - b_4X \\ X^6 &= -b_2X^4 - b_4X^2 \\ X^7 &= (b_2^2 - b_4)X^3 + b_2b_4X \\ X^8 &= (b_2^2 - b_4)X^4 + b_2b_4X^2 \\ X^9 &= (b_2^3 + 2b_2b_4)X^3 + (-b_2^2b_4 + b_4^2)X \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.23)$$

e, analogamente aos casos precedentes, podemos escrever

$$e^X = I + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \quad (2.24)$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são os coeficientes relacionados aos parâmetros.

## 2.2 O método de Arcidiacono

Note que conforme vai aumentando a dimensão do espaço mais difícil torna-se o cálculo das matrizes  $X^n$  e dos seus respectivos coeficientes. Sendo assim, antes de utilizar o método proposto por Arcidiacono[3], vamos salienttar alguns pontos. Vimos que as transformações do grupo das rotações do espaço  $E_n$  são dadas por

$$\mathbf{x}' = e^X \mathbf{x} \quad (2.25)$$

onde  $X$  é uma matriz infinitésima antissimétrica de ordem  $n$ , a qual contém  $n(n-1)/2$  elementos distintos. Estes elementos são chamados parâmetros canônicos ortogonais da transformação e formam um tensor anti-simétrico  $x_{ik}$  do espaço  $E_n$  sobre o qual o grupo opera. Tais parâmetros são chamados canônicos porque a transformação inversa é dada pela matriz  $-X$ , isto é, basta inverter o sinal da matriz e podemos dizer que eles são ortogonais porque na equação característica da matriz  $X = [x_{ik}]$ ,

$$D(\omega) = |X - \omega I| = \sum_{s=0}^n b_s (-\omega)^{n-s} = 0 \quad (2.26)$$

com  $b_0 = 1$ , o coeficiente  $b_2$  é dado pela soma dos menores principais de segunda ordem da matriz  $X$  e como  $X$  é antisimétrica temos que

$$b_2 = x_{12}^2 + x_{13}^2 + \dots + x_{n-1,n}^2. \quad (2.27)$$

Seja  $X$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . A função  $g(X)$  pode ser escrita na forma<sup>4</sup>

$$g(X) = g_0 I + g_1 X + g_2 X^2 + \dots + g_{n-1} X^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j X^j \quad (2.28)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

Como já dissemos, este método não é conveniente para nós. O método proposto por Arcidiacono sugere que se escreva a matriz  $g(X)$  como combinação das matrizes  $\Gamma_s$  construídas a partir dos complementos algébricos da matriz  $X - \omega I$ , ou seja,

$$g(X) = h_0 \Gamma_0 + h_1 \Gamma_1 + h_2 \Gamma_2 + \dots + h_{n-1} \Gamma_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Gamma_i \quad (2.29)$$

---

<sup>4</sup>Ver capítulo 1.

onde as matrizes  $\Gamma_i$  são mais simples que as potências de  $X$  e os coeficientes  $h_i$  mais simples que os coeficientes  $g_j$ . Agora, vamos construir explicitamente as matrizes  $\Gamma_i$  a partir das matrizes  $X$ .

Fantappiè demonstrou[12] a seguinte fórmula que nos permite calcular as matrizes  $g(X)$

$$g(X) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(\omega)}{D(\omega)} g(\omega) d\omega \quad (2.30)$$

onde  $\Gamma(\omega)$  é a transposta da adjunta da matriz  $X - \omega I$  e  $D(\omega)$  é o polinômio característico. A curva  $C$  é uma curva fechada, chamada separatriz, da esfera complexa que deixa no interior todos os pontos onde os elementos da matriz  $\frac{\Gamma(\omega)}{D(\omega)}$  são não singulares e deixa para fora todos os pontos singulares de  $g(\omega)$ .

Agora, se desenvolvemos a matriz  $\Gamma(\omega)$  em sucessivas potências de  $\omega$ , obtemos

$$\Gamma(\omega) = \sum_{s=0}^{n-1} (\omega)^{n-s-1} \Gamma_s \quad (2.31)$$

onde introduzimos  $n$  matrizes  $\Gamma_s$  cujos elementos são polinômios de grau  $s$  ( $s = 0, 1, \dots, n-1$ ) nos parâmetros canônicos ortogonais  $x_{rs}$ .

A expressão para  $g(X)$  toma a seguinte forma

$$g(X) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C (-\omega)^{n-s-1} \Gamma_s \frac{g(\omega)}{D(\omega)} d\omega = \sum_{s=0}^{n-1} h_s \Gamma_s \quad (2.32)$$

e assim,

$$h_s = -\frac{1}{2\pi i} \int_C (-\omega)^{n-s-1} \frac{g(\omega)}{D(\omega)} d\omega. \quad (2.33)$$

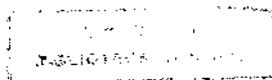
Mas, se a equação característica da matriz  $X$  tem raízes características  $\omega_i$ , cada uma com multiplicidade  $k$  temos:

$$\frac{1}{D(\omega)} = \sum_{i,k} \frac{c_{ik}}{(\omega - \omega_i)^{k+1}} \quad (2.34)$$

Substituindo este valor na expressão (2.32) e utilizando o teorema dos resíduos, temos

$$h_s = \sum_{i,k} \frac{c_{ik}}{k!} \{(-\omega)^{n-s-1} g(\omega)\}_{\omega=\omega_i}^k \quad (2.35)$$

onde o expoente  $X$  indica a  $k$ -ésima derivação.



Para encontrarmos a relação entre as matrizes  $\Gamma_i$  e as matrizes  $X$  basta observar que o produto de uma matriz pela transposta de sua adjunta resulta na matriz  $D(\omega)$ , isto é,

$$(X - \omega I)\Gamma(\omega) = D(\omega)I. \quad (2.36)$$

Levando-se em conta a equação característica e a expressão para  $\Gamma(\omega)$  obtemos

$$(X - \omega I) \sum_{s=0}^{n-1} (-\omega)^{n-s-1} \Gamma_s = b_0(-\omega)^n I + \sum_{s=0}^{n-1} b_{s+1}(-\omega)^{n-s-1} I. \quad (2.37)$$

Igualando os coeficientes das potências em  $(-\omega)^{n-s-1}$  obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma_{s+1} = b_{s+1}I - X\Gamma_s \quad (2.38)$$

enquanto que igualando os coeficientes de  $(-\omega)^n$  temos

$$\Gamma_0 = I \quad (2.39)$$

e com estas duas relações obtemos qualquer matriz  $\Gamma_s$  a partir de  $X$ .

Quando estudamos os grupos de rotação, vimos que as matrizes  $X$  são anti-simétricas<sup>5</sup> e isto simplifica muito nossos cálculos pois os coeficientes  $b_s$  de ordem ímpar da equação característica são nulos, isto é,  $b_{2s+1} = 0$ .

É fácil verificar este fato pois os coeficientes  $b_s$  são as somas dos menores principais de ordem  $s$  extraídos da matriz  $X$  e o determinante de uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar é nulo.

Sabendo que

$$\Gamma_{s+1} = b_{s+1}I - X\Gamma_s \quad \text{e} \quad \Gamma_0 = I \quad (2.40)$$

e que  $X$  é anti-simétrica temos

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= I \\ \Gamma_1 &= b_1 I - X\Gamma_0 = 0I - XI = -X \\ \Gamma_2 &= b_2 I - X\Gamma_1 = b_2 I + X^2 \\ \Gamma_3 &= b_3 I - X\Gamma_2 = -b_2 X - X^3 \\ \Gamma_4 &= b_4 I - X\Gamma_3 = b_4 I + b_2 X^2 + X^4 \\ &\vdots \\ \Gamma_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

---

<sup>5</sup>Ver capítulo 1.

Podemos afirmar que  $\Gamma_n = 0$  pois o teorema de Cayley-Hamilton nos diz que  $X$  satisfaz sua equação característica.

Já vimos como construir as matrizes  $\Gamma_s$ . Vamos agora calcular explicitamente tais matrizes para  $s = 2, 3, 4$  e  $5$ .

### 2.2.1 Grupo de rotação do espaço a duas dimensões

Temos que a matriz  $X$  é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ -r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

e as raízes da equação característica são  $x = \pm ir_1$  e utilizando a expressão (2.34) temos

$$\frac{1}{x^2 + r_1^2} = \frac{c_1}{x - ir_1} + \frac{c_2}{x + ir_1} = \frac{(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)ir_1}{x^2 + r_1^2}. \quad (2.43)$$

Desta equação obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ (c_1 - c_2)ir_1 &= 1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

portanto,

$$c_1 = -c_2 = -\frac{i}{2r_1}. \quad (2.45)$$

Sabemos ainda que

$$\begin{aligned} g(\omega_1) &= g(ir_1) = e^{ir_1} \\ g(\omega_2) &= g(-ir_1) = e^{-ir_1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

e, como as raízes da equação característica são simples obtemos

$$h_s = -\sum_{i=1}^n (-\omega_i)^{n-s-1} g(\omega_i) c_i \quad (2.47)$$

onde  $n = 2$ . Assim,

$$\begin{aligned} h_0 &= \left[ (-ir_1)e^{ir_1} \left( \frac{i}{2r_1} \right) - (ir_1)e^{-ir_1} \left( \frac{i}{2r_1} \right) \right] = \cos r_1, \\ h_1 &= -\left[ e^{ir_1} \left( \frac{-i}{2r_1} + e^{-ir_1} \frac{i}{2r_1} \right) \right] = -\frac{\text{sen } r_1}{r_1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Finalmente, sabendo-se que  $\Gamma_0 = I$  e  $\Gamma_1 = -X$  temos que

$$e^X = \cos r_1 I - \frac{\text{sen } r_1}{r_1}(-X) = \cos r_1 I + \frac{\text{sen } r_1}{r_1} X \quad (2.49)$$

que é exatamente a equação (2.6).

## 2.2.2 Grupo de rotação do espaço a três dimensões

A matriz infinitésima deste grupo é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

cuja equação característica associada a tal grupo é

$$D(\omega) = -\omega^3 - r^2\omega = 0. \quad (2.51)$$

onde  $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ . As raízes da equação acima são

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = ir \quad \omega_3 = -ir. \quad (2.52)$$

Tendo estas raízes, sabemos que  $g(\omega_1) = g(0) = 1$ ,  $g(\omega_2) = e^{ir}$  e  $g(\omega_3) = e^{-ir}$ . agora, para obtermos os  $h_s$  basta calcular  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Novamente, usando a expressão (2.34) temos

$$c_1 = -\frac{1}{r^2} \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2r^2}, \quad (2.53)$$

logo,

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2}(e^{ir} + e^{-ir}) = \cos r, \\ h_1 &= \frac{i}{2r}(e^{ir} - e^{-ir}) = -\frac{\text{sen } r}{r}, \\ h_2 &= \frac{1 - \cos r}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalmente, vamos obter as matrizes  $\Gamma_s$ . Para tal, lembramos que  $\Gamma_0 = I$ ,  $\Gamma_1 = -X$ .  $\Gamma_2 = b_2 + X^2$ , então, basta calcular  $X^2$ :

$$\begin{aligned}
X^2 &= \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -r_3^2 - r_2^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & -r_3^2 - r_1^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & -r_2^2 - r_1^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Logo, como  $\Gamma_2 = b_2 I + X^2$ , com  $b_2 = r^2$ , temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= \begin{pmatrix} r^2 - r_3^2 - r_2^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & r^2 - r_3^2 - r_1^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & r^2 - r_2^2 - r_1^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & r_3^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Assim, obtemos a expansão de  $e^X$  em função das matrizes  $\Gamma_s$ , isto é,

$$\begin{aligned}
e^X &= \cos r I - \frac{\operatorname{sen} r}{r} (-X) + \frac{1 - \cos r}{r^2} (r^2 I + X^2) = \\
&= I + \frac{\operatorname{sen} r}{r} X + \frac{1 - \cos r}{r^2} X^2
\end{aligned} \tag{2.57}$$

que é exatamente a equação (2.12).

### 2.2.3 Grupo de rotação do espaço a quatro dimensões

A matriz infinitésima associada a este grupo é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

onde  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  são os seis parâmetros canônicos ortogonais do grupo. Temos que a equação característica associada a esta matriz é dada por

$$D(\omega) = \omega^4 + b_2\omega^2 + b_4 \quad (2.59)$$

onde  $b_2 = (\mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2)$  e  $b_4 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2$ . Calculando as raízes dessa equação obtemos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left[ \frac{-b_2 + (b_2^2 - 4b_4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = i\rho, \\ \omega_2 &= \left[ \frac{-b_2 - (b_2^2 - 4b_4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = i\eta, \\ \omega_3 &= -\omega_1 = -i\rho, \\ \omega_4 &= -\omega_2 = -i\eta. \end{aligned} \quad (2.60)$$

A partir dos valores de  $\omega_i$  podemos escrever

$$\begin{aligned} g(\omega_1) &= e^{i\rho}, \\ g(\omega_2) &= e^{i\eta}, \\ g(\omega_3) &= e^{-i\rho}, \\ g(\omega_4) &= e^{-i\eta}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Agora, substituindo as raízes da equação característica na equação (2.33) onde  $k = 0$ , pois cada autovalor tem multiplicidade um, temos

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} = -\frac{1}{2i\rho(\rho^2 - \eta^2)}, \\ c_2 &= \frac{1}{2\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} = \frac{1}{2i\eta(\rho^2 - \eta^2)}, \\ c_3 &= -c_1, \\ c_4 &= -c_2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Agora vamos calcular os  $h_s$  para  $s = 0, 1, 2, 3$ . Utilizando as relações

$$\begin{aligned} \cosh(i\rho) &= \frac{e^{i\rho} + e^{-i\rho}}{2} = \cos \rho \\ \sinh(i\rho) &= \frac{e^{i\rho} - e^{-i\rho}}{2} = i \sin \rho \end{aligned} \quad (2.63)$$

e a equação (2.47) podemos escrever

$$\begin{aligned}
h_0 &= \frac{\rho^2 \cos \rho - \eta^2 \cos \eta}{\Delta} \\
h_1 &= \frac{\eta \sin \eta - \rho \sin \rho}{\Delta} \\
h_2 &= \frac{\cos \eta - \cos \rho}{\Delta} \\
h_3 &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\sin \rho}{\rho} - \frac{\sin \eta}{\eta} \right)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde<sup>6</sup>  $\Delta = \rho^2 - \eta^2$ . Passemos ao cálculo de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ . Como sabemos,  $\Gamma_0 = I$  e  $\Gamma_1 = -X$ , bem como, que  $b_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ , portanto,  $\Gamma_2 = X^2 + b_2 I$  de onde obtemos para  $\Gamma_2$  a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix}
r_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & r_1 r_2 - v_1 v_2 & r_1 r_3 - v_1 v_3 & r_2 v_3 - r_3 v_2 \\
r_1 r_2 - v_1 v_2 & r_2^2 + v_1^2 + v_3^2 & r_3 r_2 - v_2 v_3 & r_1 v_3 - r_3 v_1 \\
r_1 r_3 - v_1 v_3 & r_2 r_3 - v_2 v_3 & r_3^2 + v_1^2 + v_2^2 & r_2 v_1 - r_1 v_2 \\
r_2 v_3 - r_3 v_2 & r_1 v_3 - r_3 v_1 & r_2 v_1 - r_1 v_2 & r_1^2 + r_2^2 + r_3^2
\end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Podemos escrever  $\Gamma_2$  de maneira mais simples. Observe que

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (r_2 v_3 - v_2 r_3) \mathbf{i} + (r_3 v_1 - r_1 v_3) \mathbf{j} + (r_1 v_2 - v_1 r_2) \mathbf{k}, \tag{2.66}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_1 &= r_3 v_2 - r_2 v_3, \\
-(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_2 &= r_1 v_3 - r_3 v_1, \\
-(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_3 &= r_2 v_1 - r_1 v_2.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{v}^2 + r_1^2 - v_1^2 & r_1 r_2 - v_1 v_2 & r_1 r_3 - v_1 v_3 & -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_1 \\
r_1 r_2 - v_1 v_2 & \mathbf{v}^2 + r_2^2 - v_2^2 & r_3 r_2 - v_2 v_3 & -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_2 \\
r_1 r_3 - v_1 v_3 & r_2 r_3 - v_2 v_3 & \mathbf{v}^2 + r_3^2 - v_3^2 & -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_3 \\
-(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_1 & -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_2 & -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_3 & \mathbf{r}^2
\end{pmatrix} \tag{2.68}$$

---

<sup>6</sup>Observe que se fizermos  $\eta \rightarrow 0$  obtemos os coeficientes  $h_0, h_1$  e  $h_2$  do grupo  $E_3$ .

e para o cálculo de  $\Gamma_3$  temos

$$\Gamma_3 = b_3 I - X\Gamma_2 = -X\Gamma_2 \quad (2.69)$$

pois, vimos que como  $X$  é anti-simétrica os coeficientes de ordem ímpar da equação característica são nulos, logo  $b_3 = 0$ , então:

$$\Gamma_3 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 & -r_1 \\ v_3 & 0 & -v_1 & -r_2 \\ -v_2 & v_1 & 0 & -r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Finalmente, esses cálculos nos fornecem a expansão da matriz  $e^X$  em função dos coeficientes  $h_s$  e das matrizes  $\Gamma_s$ , com  $s = 0, 1, 2, 3$ <sup>7</sup>. Então temos

$$e^X = h_0 \Gamma_0 + h_1 \Gamma_1 + h_2 \Gamma_2 + h_3 \Gamma_3 \quad (2.71)$$

e quando substituímos os correspondentes valores de  $h_i$  e  $\Gamma_i$ , com  $i = 0, 1, 2, 3$  obtemos exatamente a equação (2.18).

## 2.2.4 Grupo de rotação do espaço a cinco dimensões

A matriz infinitésima associada a este grupo é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 & -t_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 & -t_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 & -t_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & -t_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Vamos lembrar que equação característica é

$$\omega^5 + b_2 \omega^3 + b_4 \omega = 0 \quad (2.73)$$

onde

$$\begin{cases} b_2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{t}^2 + t_0^2 \\ b_4 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})^2 + (t_0 \mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 \end{cases} \quad (2.74)$$

<sup>7</sup>Observe que se fizermos  $\mathbf{v} \rightarrow 0$ , nas matrizes  $\Gamma_s$  e também nos coeficientes  $b_2$  e  $b_4$  obtemos todos os resultados do grupo das rotações do espaço com três dimensões.

e  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$  e  $t_0$  são os dez parâmetros do grupo. Calculando-se as raízes da equação (2.70) temos

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= i\rho, \\ \omega_3 &= i\eta, \\ \omega_4 &= -i\rho, \\ \omega_5 &= -i\eta,\end{aligned}\tag{2.75}$$

e usando (2.33) obtemos

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{1}{\rho^2\eta^2}, \\ c_2 &= -\frac{1}{2\rho^2(\rho^2 - \eta^2)}, \\ c_3 &= \frac{1}{2\eta^2(\rho^2 - \eta^2)}, \\ c_4 &= c_2, \\ c_5 &= c_3.\end{aligned}\tag{2.76}$$

Mais uma vez, utilizando as relações (2.46) podemos escrever

$$\begin{aligned}h_0 &= \frac{\rho^2 \cos \rho - \eta^2 \cos \eta}{\Delta}, \\ h_1 &= \frac{\eta \sin \eta - \rho \sin \rho}{\Delta}, \\ h_2 &= \frac{\cos \eta - \cos \rho}{\Delta}, \\ h_3 &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\sin \rho}{\rho} - \frac{\sin \eta}{\eta} \right), \\ h_4 &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1 - \cos \eta}{\eta^2} - \frac{1 - \cos \rho}{\rho^2} \right),\end{aligned}\tag{2.77}$$

onde  $\Delta = \rho^2 - \eta^2$ . Finalmente, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= I \\ \Gamma_1 &= -X \\ &\vdots \\ \Gamma_2 &= b_2 I + X^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & b_1 & a_1 \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & b_2 & a_2 \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & b_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & r^2 + t^2 & t \cdot v \\ a_1 & a_2 & a_3 & t \cdot v & r^2 + v^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (t^2 + v^2 + t_0^2)\delta_{ij} - v_i v_j - t_i t_j + r_i r_j \\ b &= -(t_0 t + r \wedge v) \\ a &= -(t_0 v + t \wedge r) \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\Gamma_3 = b_3 I - X\Gamma_2 = -X\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 & -c_1 & d_1 \\ e_3 & 0 & -e_1 & -c_2 & d_2 \\ -e_2 & e_1 & 0 & -c_3 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & y \cdot r \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -y \cdot r & 0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

onde

$$\begin{aligned} c &= -ry_4 + y \wedge t \\ d &= -ry_0 - y \wedge v \\ e &= t_0 y - y_0 t - y_4 v \end{aligned} \quad (2.81)$$

com

$$\begin{aligned} y_0 &= -(r \cdot t) \\ y_4 &= -(r \cdot v) \\ y &= t_0 r + t \wedge v \end{aligned} \quad (2.82)$$

e, finalmente

$$\Gamma_4 = b_4 I - X\Gamma_3 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 & y_0 y_1 & y_4 y_1 \\ y_1 y_2 & y_2^2 & y_2 y_3 & y_0 y_2 & y_4 y_2 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 & y_0 y_3 & y_4 y_3 \\ y_0 y_1 & y_0 y_2 & y_0 y_3 & y_0^2 & y_4 y_0 \\ y_4 y_1 & y_4 y_2 & y_4 y_3 & y_4 y_0 & y_4^2 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

onde  $y_0$ ,  $y_4$  e  $y$  são dados acima. Novamente, aqui neste caso, se tomamos  $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$  obtemos os resultados do grupo de rotação  $R_4$ , bem como a partir desta matriz resultante se consideramos  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  vamos obter os resultados do grupo de rotação de  $R_3$ .

## Capítulo 3

### Aplicação

Vamos, neste capítulo, associar os grupos estudados a uma de suas aplicações a física. Voltamos a enfatizar que os grupos de rotação a dez parâmetros apresentados no capítulo 1, isto é, os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter desempenham papel muito importante no estudo da física. Os espaços-tempo, que chamamos cronotopos, associados a esses grupos são o cronotopo de Newton, o cronotopo de Minkowski e o cronotopo de Castelnuovo, respectivamente.

Acreditava-se que o grupo base da física que rege nosso universo era o grupo de Galileu. Com a descoberta da relatividade especial, mostrou-se que o grupo de Galileu é um caso limite (quando a velocidade da luz tende ao infinito) de um outro grupo, o chamado grupo de Poincaré e este passou a ser o grupo base do universo.

Neste ponto, era natural questionar a existência de um outro grupo, mais geral, que contivesse o grupo de Poincaré, e naturalmente, o grupo de Galileu, como casos limite. Pensando nisso, Fantappié[1] mostrou que existe um grupo, chamado grupo final<sup>1</sup>, também com dez parâmetros, que contém os outros dois como casos limite. O grupo de Fantappié-de Sitter depende de um parâmetro  $r$ , raio do universo, e quando este raio tende ao infinito obtém-se o grupo de Poincaré.

A cada um destes dois últimos grupos está associado um cone de luz. Ao grupo de Poincaré está associado o cone de luz com abertura fixa ( $= \frac{\pi}{2}$ ) da relatividade especial e ao grupo de Fantappié-de Sitter está associado um

---

<sup>1</sup>Hoje, na literatura especializada, é chamado grupo de Fantappié-de Sitter.

cone de luz com abertura variável da relatividade especial projetiva.

### 3.1 Cronotopo de Newton

Como vimos<sup>2</sup> para a física clássica o espaço é euclidiano tridimensional e o tempo é infinito. Se estendemos um espaço quadridimensional formado por infinitos espaços euclidianos tridimensionais que representam o universo num dado tempo  $t$ , obtemos o modelo de universo de Newton (ou o cronotopo de Newton). Os movimentos em si mesmo deste cronotopo formam o grupo de Galileu com dez parâmetros.

Vimos no capítulo 2 que as transformações do grupo de Galileu, para que permaneçam invariantes as leis da mecânica clássica são dadas por:

a) rotações espaciais (a três parâmetros)

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \quad t' = t$$

onde  $\alpha_{\mu\nu}$  é uma matriz ortogonal com determinante +1.

b) deslocamentos inerciais com velocidade  $V_\mu$  (a três parâmetros)

$$x'_\mu = x_\mu + V_\mu t \quad t' = t$$

c) translações espaciais (a três parâmetros)

$$x'_\mu = x_\mu + \alpha_\mu \quad t' = t$$

d) translações temporais (a um parâmetro)

$$x'_\mu = x_\mu \quad t' = t + \alpha_0$$

Na física clássica, vale o teorema da adição de velocidades que diz o seguinte: suponha que você tem um corpo C, movimentando-se sobre uma plataforma, com velocidade  $\mathbf{v}$  em relação a plataforma e essa plataforma movimenta-se a uma velocidade  $\mathbf{w}$  em relação a um referencial R. Então, podemos dizer que o corpo C movimenta-se com velocidade  $\mathbf{W} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$  em relação ao

---

<sup>2</sup>Ver capítulo 1.

referencial R. O cronotopo associado a este grupo é o cronotopo de Newton (Fig.2) com espaço e tempo independentes.

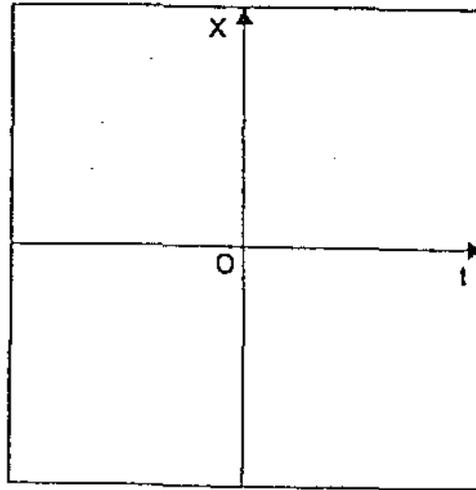


Fig.2. Cronotopo de Newton

### 3.2 Cronotopo de Minkowski

Assim como podemos aperfeiçoar o grupo de Galileu pelo grupo de Poincaré, o cronotopo de Newton também pode ser aperfeiçoado pelo chamado cronotopo de Minkowski. Para ver como isto acontece vamos considerar rotações simples mantendo duas coordenadas fixas.

Quando passamos do grupo de Galileu para um grupo mais geral, o grupo de Poincaré, emerge uma constante  $c$  que é a chamada velocidade da luz. Apesar da velocidade da luz  $c$  ser finita, ela se comporta como se fosse infinita pois se *somarmos* a  $c$  uma velocidade  $v$ , obtemos ainda  $c$ , isto é devido ao fato de que a soma de duas velocidades colineares é dada pela fórmula[16]

$$W = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Então da expressão anterior, para  $u = v = c$  temos, ainda,  $W = c$ .

Sendo a velocidade da luz finita, podemos dizer que a medida de espaço e de tempo não são independentes. Assim, podemos aperfeiçoar o modelo de universo de Newton pelo modelo de Minkowski. O espaço de Minkowski é quadridimensional com três coordenadas espaciais e uma temporal. A métrica deste espaço é pseudo-euclídeana e dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (3.1)$$

Dizemos que essa métrica é pseudo-euclídeana pois se introduzimos a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= x_2 \\ z &= x_3 \\ ict &= x_4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

obtemos

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (3.3)$$

que é uma métrica euclídeana.

As transformações que mantêm invariante a forma quadrática

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (3.4)$$

são as transformações do grupo ortogonal<sup>3</sup>  $O_{3,1}$  do espaço a quatro dimensões. Para determinar tais rotações explicitamente vamos nos limitar ao caso de uma rotação simples que mantém fixas duas coordenadas. Vamos rotacionar  $(x_1, x_4)$  de um ângulo  $\phi$ . Portanto,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \phi - x_4 \sin \phi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= x_1 \sin \phi + x_4 \cos \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Examinando o movimento da origem ( $x_1 = 0$ ) temos

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_4 \sin \phi \\ x'_4 &= x_4 \cos \phi \end{aligned} \quad (3.6)$$

---

<sup>3</sup>Onde o três está associado a positividade da métrica e o um a negatividade.

e dividindo membro a membro obtemos

$$x'_1 = -x'_4 \tan \phi \quad (3.7)$$

assim, já nas variáveis iniciais temos

$$x' = -ict'(\tan \phi) \quad (3.8)$$

que é a equação do movimento uniforme com velocidade  $V$  dada por

$$V = (-ic) \tan \phi \quad (3.9)$$

Chamando  $\beta = \frac{V}{c}$  obtemos

$$\tan \phi = i\beta \quad (3.10)$$

de onde podemos escrever

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \text{sen} \phi &= \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo esses valores nas equações (3.5) temos

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \frac{i\beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

e novamente, nas variáveis iniciais temos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t + \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

que são as transformações do chamado grupo de Lorentz, consequência da invariância de  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ . Este é o grupo de Lorentz homogêneo. Este grupo contém as rotações usuais e também as transformações de Lorentz.

Se nas expressões acima consideramos  $V$  muito pequeno comparado à velocidade de luz (ou equivalentemente  $c \rightarrow \infty$ ) obtemos

$$\begin{aligned} x' &= x + Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.14}$$

que são as transformações de Galileu. Enfim, o grupo que contém as translações e reflexões não só espaciais, mas também temporais, além das transformações do grupo de Lorentz homogêneo é o chamado grupo de Poincaré, com dez parâmetros. Então, podemos dizer que o grupo de Poincaré (relatividade restrita) aperfeiçoa o grupo de Galileu.

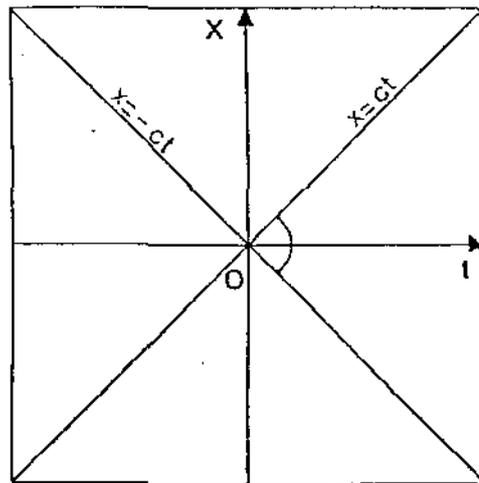


Fig.3. Cronotopo de Minkowski e o cone de luz com abertura fixa

O cone de luz associado ao cronotopo de Minkowski é dado pela equação

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (3.15)$$

o qual divide o cronotopo em três regiões. No caso bidimensional, o cronotopo de Minkowski é representado por um plano (Fig.3).

Observe que quando  $c \rightarrow \infty$  as retas  $x = \pm ct$  aproximam-se do eixo  $x$  e obtemos o cronotopo de Newton. Mostraremos no final deste capítulo que o ângulo formado entre essas retas é igual a  $\frac{\pi}{2}$ .

### 3.3 Cronotopo de Castelnuovo

Sabemos que o grupo de Poincaré pode ser aperfeiçoado pelo grupo de Fantappiè-de Sitter. Sendo assim, é de se esperar que exista um cronotopo e um correspondente cone de luz que aperfeiçoa o cronotopo de Minkowski e o cone de luz a ele associado.

Os cronotopos de Newton e de Minkowski são ambos quadridimensionais e seus movimentos em si mesmo são ambos caracterizados por dez parâmetros. Fantappiè[1] demonstrou que eles podem ser aperfeiçoados de maneira única por um modelo hipersférico de universo quadridimensional e raio  $r$ . Obtemos assim o chamado universo de de Sitter e seus movimentos em si mesmo são dados pelo grupo de rotações de  $R_5$ , também a dez parâmetros. Assim obtemos a relatividade especial projetiva, que estende a relatividade especial e pode ser estudada usando-se teoria de grupos.

Vimos que quando passamos da física clássica para a relatividade especial emerge uma constante  $c$ , que é a velocidade da luz. Aqui, na passagem da relatividade especial à relatividade especial projetiva, novamente surge uma constante  $r$ , que é o raio do cronotopo.

Como o universo de de Sitter definido acima é *inimaginável* vamos discutir algumas de suas propriedades. Observe que para um observador  $O$  o espaço é visto como um espaço chato (curvatura nula) pois  $O$  vê a luz que vem de uma galáxia distante na direção tangente ao universo no ponto  $O$ . Segue que na relatividade especial projetiva devemos distinguir entre o universo onde os eventos físicos ocorrem, chamado universo absoluto com curvatura constante,

e os infinitos universos relativos (espaço chato) no qual os fenômenos são vistos localmente pelo observador(Fig.4).

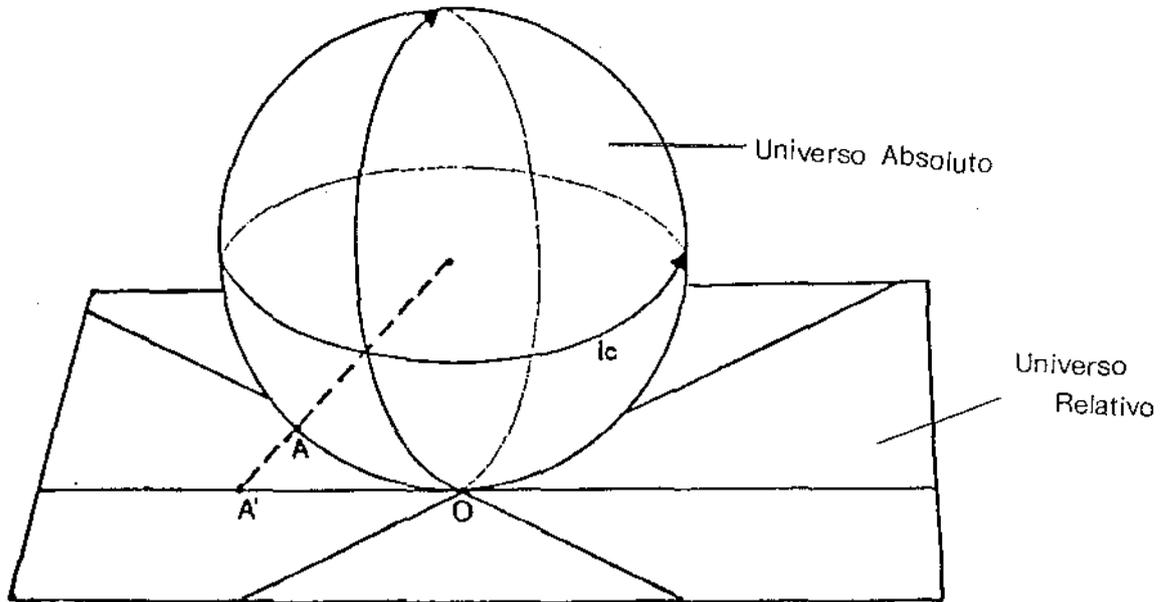


Fig.4. Universo absoluto e universo relativo

Utilizamos, assim, a representação plana do universo de de Sitter. A representação mais simples é a representação geodética de Beltrami[16] na qual as geodéticas do espaço hipersférico correspondem a retas do espaço tangente plano do observador O.

Se denotamos por  $\xi_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$  as coordenadas do universo de de Sitter, podemos parametrizá-lo da seguinte maneira:

$$\sum_{\nu=0}^4 \xi_\nu \xi_\nu = -\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = r^2 \quad (3.16)$$

onde  $r$  é o raio do universo de de Sitter. Denominamos a representação projetiva do universo de de Sitter de cronotopo de Castelnuovo[16] (Fig.5) cujas coordenadas<sup>4</sup> são dadas por

$$x_\mu = r \frac{\xi_\mu}{\xi_4} \quad (3.17)$$

com  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

<sup>4</sup>Essas coordenadas são chamadas coordenadas de Beltrami.

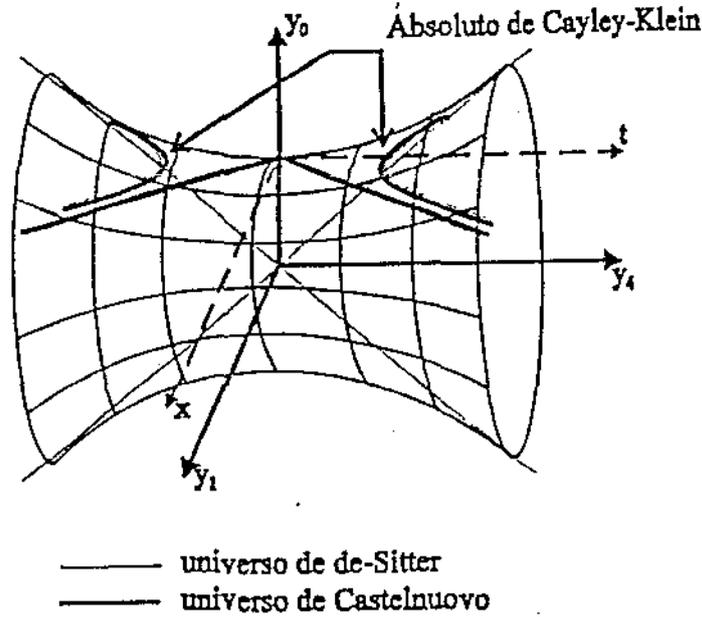


Fig.5. O universo hiperesférico de de Sitter.

Substituindo (3.17) na equação (3.16) obtemos

$$\xi_4 = \frac{r}{A} \quad (3.18)$$

onde  $A^2 = 1 + \frac{x_\mu x_\mu}{r^2}$ . Utilizando as equações (3.17) e (3.18) obtemos a relação entre as coordenadas do universo de de Sitter,  $\xi_\nu$ , e as do universo de Castelnovo,  $x_\mu$ , dadas por

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= \frac{x_\mu}{A}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ \xi_4 &= \frac{r}{A} \end{aligned} \quad (3.19)$$

e considerando  $\varphi(\xi_\nu)$  uma função homogênea de grau  $N$ , temos

$$\varphi(\xi_\nu) = \frac{1}{A^N} \varphi(x_\mu, r) = \left( \frac{\xi_4}{r} \right)^N \varphi(x_\mu, r) \quad (3.20)$$

Vamos chamar  $\varphi(\xi_\nu) = \varphi$  e  $\varphi(x_\mu, r) = \varphi_0$ . Calculando<sup>5</sup>  $\partial_\mu$  e  $\partial_4$  e multipli-

<sup>5</sup>Denotamos  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}$ .

cando  $\partial_4$  por  $r$  obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu &= A^{1-N} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ r\partial_4 &= A^{-N} \frac{r}{\xi_4} \left( N - x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)\end{aligned}\quad (3.21)$$

Note que  $\frac{r}{\xi_4} = A$ , portanto

$$r\partial_4 = A^{1-N} \left( N - x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \quad (3.22)$$

Finalmente, substituindo

$$\varphi_0 = A^N \varphi \quad (3.23)$$

e

$$\partial_\mu A = \frac{x_\mu}{Ar^2} \quad (3.24)$$

em (3.21) temos os operadores diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} &= A \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{N}{Ar^2} x_\mu \\ \frac{\partial}{\partial \xi_4} &= \frac{1}{r} \left( \frac{N}{A} - Ax_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)\end{aligned}\quad (3.25)$$

Isto nos mostra como ocorre a projeção do universo de de Sitter, pentadimensional, num espaço chato, o chamado cronotopo de Castelnuovo, isto é, como passamos da formulação pentadimensional da relatividade projetiva para a formulação quadridimensional em termos das coordenadas espaço-temporais.

Fantappié observou que um modelo de espaço com curvatura constante pode ser visto como um espaço projetivo quadridimensional (cronotopo de Castelnuovo) formado pelos pontos de um espaço projetivo externo ao chamado absoluto de Cayley-Klein cuja equação é dada por

$$r^2 A^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 + r^2 = 0 \quad (3.26)$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= ict\end{aligned}\quad (3.27)$$

obtemos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + r^2 = 0 \quad (3.28)$$

onde os  $x_i$  são as coordenadas não homogêneas. Introduzindo as coordenadas  $\xi_\nu$ ,  $A = 0, 1, 2, 3, 4$  da seguinte maneira

$$x_\mu = r \frac{\xi_\mu}{\xi_4} \quad (3.29)$$

temos que a equação que descreve o absoluto é

$$\xi_\nu \xi_\nu = 0 \quad (3.30)$$

Segue que as transformações que mudam em si a forma quadrática  $\xi_\nu \xi_\nu = 0$  são substituições ortogonais das cinco variáveis  $\xi_\nu$  com determinante um, isto é, o grupo das rotações de  $R_5$  com dez parâmetros, estudado no capítulo 2.

Se nos limitamos a duas dimensões  $(x, t)$  o absoluto de Cayley-Klein é dado pela hipérbole

$$r^2 A^2 = x^2 - c^2 t^2 + r^2 = 0 \quad (3.31)$$

que intercepta o eixo  $t$  nos pontos

$$t = \pm t_0 \quad \text{com} \quad t_0 = \frac{r}{c} \quad (3.32)$$

Esses dois pontos,  $-t_0$  e  $+t_0$  podem ser interpretados como instantes, ou singularidades, inicial e final do universo. Temos ainda que as singularidades inicial e final no cronotopo de Castelnuovo (Fig.6) são representadas pelos dois ramos da hipérbole.

O cone de luz associado ao cronotopo de Castelnuovo é um cone de luz com abertura variável cujo ângulo é dado por

$$\theta = \arctan \frac{2A}{\frac{x^2}{r^2} + \frac{(ct)^2}{r^2}}. \quad (3.33)$$

Vamos mostrar como obter  $\theta$  a partir de considerações geométricas.<sup>6</sup> Da

---

<sup>6</sup>No apêndice, mostraremos que  $\theta$  pode ser obtido através da equação de Clairaut.

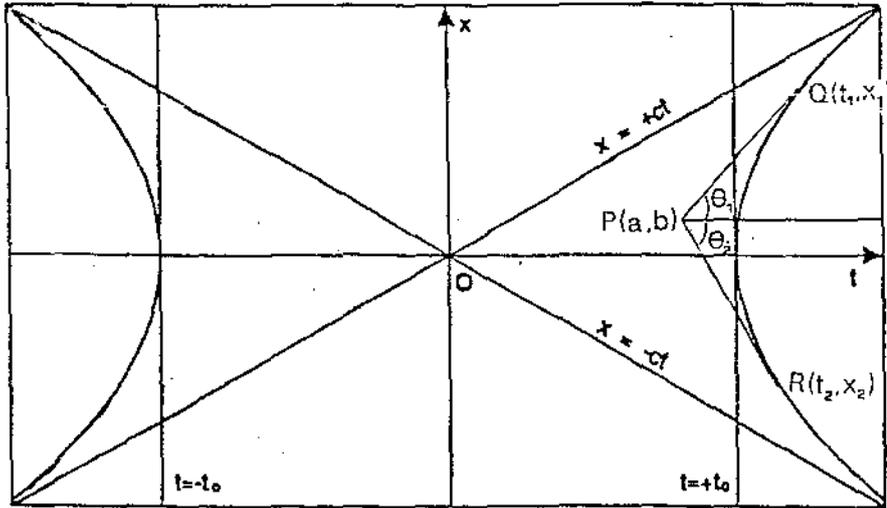


Fig.6. Cone de luz com abertura variável

figura acima, considerando  $r = 1$  e  $c = 1$ , sabemos que

$$x_1 = \frac{b + aA}{a^2 - b^2} \quad (3.34)$$

$$t_1 = \frac{a + bA}{a^2 - b^2}$$

portanto

$$\tan(\theta_1) = -\frac{x_1 - b}{t_1 - a} = \frac{a + bA}{b + aA} \quad (3.35)$$

e, analogamente, temos

$$x_2 = \frac{b - aA}{a^2 - b^2} \quad (3.36)$$

$$t_2 = \frac{a - bA}{a^2 - b^2}$$

logo

$$\tan(\theta_2) = -\frac{x_2 - b}{t_2 - a} = \frac{a - bA}{aA - b} \quad (3.37)$$

portanto, sabendo que

$$\tan(\theta) = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad (3.38)$$

temos

$$\tan(\theta) = \frac{2A}{a^2 + b^2} \quad (3.39)$$

para quaisquer  $a$  e  $b$  fixos.

Em resumo, mostramos então que cada um dos grupos com dez parâmetros está associado ao seu respectivo cronotopo.

Temos ainda que a cada um desses cronotopos está associada uma equação do tipo de d'Alembert em diferentes formas. Discutiremos isso no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# A equação de d'Alembert

Neste capítulo, vamos discutir a equação de d'Alembert generalizada, ou seja, a equação de d'Alembert estendida ao universo de de-Sitter cuja solução é uma equação do tipo misto, e vamos mostrar que a solução da equação de d'Alembert clássica, sempre hiperbólica, é um caso particular da solução a ser discutida.

Como já mencionamos, a equação de d'Alembert está associada a um dado cronotopo. No caso da equação de d'Alembert clássica, o cone de luz a ela associado é o cone de luz com abertura fixa, da relatividade especial<sup>1</sup>, caso particular ( $r \rightarrow \infty$ ) do cone de luz com abertura variável associado a relatividade especial projetiva.

Ainda, vamos mostrar que escrevendo o operador de Casimir de segunda ordem,  $b_2$ , em termos dos geradores do grupo de Fantappiè-de Sitter em coordenadas esféricas, e tomando um conveniente limite, vamos obter o operador de d'Alembert.

Finalmente, vamos estudar alguns casos particulares da equação de d'Alembert generalizada.

### 4.1 Equação de d'Alembert clássica

Vamos, por simplicidade, discutir a equação de d'Alembert clássica bi-dimensional. A equação de d'Alembert clássica, em duas dimensões, uma

---

<sup>1</sup>Ver capítulo 3.

espaçial e outra temporal, é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

onde  $c$  é uma constante e  $u = u(x, t)$ . Introduzindo-se as seguintes mudanças de variáveis :

$$x = \frac{\xi + \eta}{2} \quad \text{e} \quad ct = \frac{\xi - \eta}{2} \quad (4.2)$$

obtemos a equação na sua segunda forma canônica dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (4.3)$$

cuja solução é dada por

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (4.4)$$

onde  $f, g \in C^2$  e  $f$  e  $g$  são arbitrárias, e, voltando às variáveis  $x$  e  $t$  obtemos a solução da equação (4.1)

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (4.5)$$

A função  $f(x - ct)$  representa uma onda que se movimenta no sentido positivo do eixo  $x$  e  $g(x + ct)$  representa uma onda que se move no sentido negativo do mesmo. A solução geral da equação de d'Alembert clássica é uma superposição dos dois tipos de onda.

## 4.2 Equação de d'Alembert generalizada

A fim de desenvolver a relatividade especial projetiva e explicar seu significado é necessário especificar a relação entre sua formulação nas coordenadas projetivas homogêneas  $\xi_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ) e a formulação quadridimensional nas coordenadas espaço-temporais. Utilizando as equações (3.17) e (3.18) temos que a relação entre as coordenadas do universo de de Sitter e as do universo de Castelnuovo é dada por

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= \frac{x_\mu}{A}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ \xi_4 &= \frac{r}{A} \end{aligned} \quad (4.6)$$

com  $A^2 = 1 + \frac{x_\mu x_\mu}{r^2}$ , bem como, para as derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_4} &= \frac{1}{r} \left( \frac{N}{A} - Ax_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} &= A \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{N}{Ar^2} x_\mu.\end{aligned}\tag{4.7}$$

A equação de d'Alembert generalizada é dada por

$$\square \varphi = \partial_\nu \partial_\nu \varphi = 0 \tag{4.8}$$

onde  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  sendo  $\Delta$  o laplaciano. Agora, vamos escrever a equação de d'Alembert na sua forma canônica para o caso bidimensional. Considerando uma dimensão espacial,  $x$ , e uma temporal,  $t$ , a equação de d'Alembert generalizada, equação (4.8), em coordenadas cartesianas é dada por

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2xt}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial (ct)^2} - \\ - 2(N-1) \left( \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{ct}{r^2} \frac{\partial u}{\partial (ct)} \right) + \frac{N(N-1)}{r^2} u = 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

sendo  $u = u(x, t)$  onde  $N$  é o grau de homogeneidade da função,  $r$  é o raio do universo de de Sitter e  $A$  é o absoluto de Cayley-Klein dado pela equação (3.26). Observe que quando  $r \rightarrow \infty$  obtemos a clássica equação de d'Alembert, equação (4.1), que é sempre uma equação hiperbólica enquanto que a equação (4.9) é uma equação de Tricomi de segunda espécie do tipo misto<sup>2</sup>. Vamos escrever a equação diferencial acima na sua forma canônica. Para isso, considere a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \tan \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right) \\ \frac{ct}{r} &= \operatorname{sen} \left( \frac{\xi - \eta}{2} \right) \cos^{-1} \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

---

<sup>2</sup>Ver seção 4.3.

com jacobiano não nulo e portanto a transformação inversa é dada por

$$\begin{aligned}\xi &= \arctan X + \operatorname{arcsen} \frac{T}{\sqrt{1+X^2}} \\ \eta &= \arctan X - \operatorname{arcsen} \frac{T}{\sqrt{1+X^2}}\end{aligned}\tag{4.11}$$

onde  $X = x/r$  e  $T = ct/r$ . Introduzindo a equação (4.11) na equação (4.9) obtemos[2]

$$\cos^2 \left( \frac{\xi - \eta}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} N(N+1)u = 0\tag{4.12}$$

que é a forma canônica da equação de d'Alembert generalizada, cuja solução, quando  $N = 0$  ou  $N = -1$ , já nas variáveis iniciais, é dada por

$$\begin{aligned}u(x, t) &= f \left( \arctan X + \operatorname{arcsen} \frac{T}{\sqrt{1+X^2}} \right) + \\ &+ g \left( \arctan X - \operatorname{arcsen} \frac{T}{\sqrt{1+X^2}} \right).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Observe que nestes casos,  $N = 0$  ou  $N = -1$  a equação (4.12) é reduzida à equação (4.3) e se tomarmos  $r \rightarrow \infty$  em (4.13) obtemos a solução clássica (4.5).

### 4.3 Equação de Tricomi de segunda espécie

Como já dissemos, a equação clássica de d'Alembert é obtida da equação de d'Alembert generalizada quando  $r \rightarrow \infty$  e ainda, tal equação é uma equação de Tricomi de segunda espécie[17] como mostraremos a seguir. Introduzindo a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}\xi &= X \\ \eta &= \frac{T}{\sqrt{1+X^2}} - 1\end{aligned}\tag{4.14}$$

na equação (4.9), com  $N = 0$ , para simplificar os cálculos, vamos obter a seguinte equação:

$$(1 + \xi^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \eta(\eta + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\xi(1 + \xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\eta + 1) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (4.15)$$

com  $u = u(\xi, \eta)$ . Agora, vamos reduzir à unidade o coeficiente da derivada segunda em  $\eta$ . Assim, tomamos

$$\eta(\eta + 2) \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^2 = 1 \quad (4.16)$$

e obtemos

$$(1 + \xi^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\xi(1 + \xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (4.17)$$

Note que a equação (4.16) está bem definida pois se tivéssemos  $\eta = 0$  ou  $\eta = -2$ , teríamos  $A = 0$ . Consideremos agora a seguinte transformação:

$$(1 + \xi^2)^2 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 = x^2 \quad (4.18)$$

e que após introduzida na equação (4.17) fornece a seguinte equação

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

com  $u = u(x, y)$  que é uma equação de Tricomi de segunda espécie. Conjectura-se que a equação de Tricomi de segunda espécie esteja associada a uma *Aerodinâmica Luminosa* em analogia a uma equação de Tricomi de primeira espécie, a qual está associada a Aerodinâmica Transônica[18].

## 4.4 Geradores do grupo de Fantappiè-de Sitter

A partir dos geradores do grupo de Fantappiè-de Sitter vamos mostrar que o coeficiente<sup>3</sup>  $b_2$ , também chamado invariante de Casimir, fornece a equação de d'Alembert generalizada.

---

<sup>3</sup>Ver capítulo 3

Os geradores do grupo de Fantappiè-de Sitter[19] satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned}
-i[J_{k\lambda}, J_{\mu\nu}] &= \delta_{k\nu}J_{\lambda\mu} - \delta_{k\mu}J_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\mu}J_{k\nu} - \delta_{\lambda\nu}J_{k\mu}, \\
-i[\Pi_\lambda, J_{\mu,\nu}] &= \delta_{\lambda\mu}\Pi_\nu - \delta_{\lambda\nu}\Pi_\mu, \\
-i[\Pi_\mu, \Pi_\nu] &= -\frac{1}{r^2}J_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $\Pi_\mu = \frac{1}{r}J_{0\mu}$ . Note que quando  $r \rightarrow \infty$  temos

$$\Pi_\mu \rightarrow p_\mu, \tag{4.21}$$

onde  $p_\mu$  denota o operador momento-energia no espaço chato. Note ainda que o grupo de Fantappiè-de Sitter une o momento linear e o momento angular no momento angular  $J_{AB}$  no espaço pentadimensional, que é dado por

$$J_{AB} = -i\hbar \left( \xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_B} - \xi_B \frac{\partial}{\partial \xi_A} \right) \equiv L_{AB}, \tag{4.22}$$

onde  $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Em termos das coordenadas de Beltrami<sup>4</sup> temos

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \\
\Pi_\lambda &\equiv \frac{1}{r}L_{0\lambda} = A^2 p_\lambda + \frac{1}{r^2}x_\mu L_{\lambda\mu}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde  $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$ .

Introduzindo-se a seguinte notação obtemos

$$\begin{aligned}
L_{40} &\equiv \frac{i}{c}rT_0 = -i\hbar \left( \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_0} - \xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right) \\
L_{\mu 4} &\equiv rT_\mu = -i\hbar \left( \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right) \\
L_{0\mu} &\equiv icV_\mu = -i\hbar \left( \xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right) \\
L_{\mu\nu} &\equiv L_\lambda = -i\hbar \left( \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

---

<sup>4</sup>Ver capítulo 3.

e escrevendo o invariante de Casimir de segunda ordem  $b_2$ , onde

$$b_2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + T_0 T_0 \quad (4.25)$$

em função de  $T_0, T_\mu, V_\mu$  e  $L_\lambda$ , com  $\lambda, \mu = 1, 2, 3$  obtemos

$$b_2 = \left( T^2 - \frac{1}{c^2} T_0^2 \right) + \frac{1}{r^2} \left( L^2 - c^2 V^2 \right). \quad (4.26)$$

Em coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$ ,  $b_2$  na sua forma explícita é dado por

$$\begin{aligned} b_2 = & -\hbar^2 A^2 \left\{ \left( 1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2\rho t}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial t} - \left( 1 - \frac{t^2 c^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \right\} - \\ & - \hbar^2 A^2 \left\{ \frac{2}{r} \left( 1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2t}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2} \mathcal{L}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde  $t \rightarrow ict$  e  $\mathcal{L}^2$  é o operador

$$\mathcal{L}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (4.28)$$

No limite para  $r \rightarrow \infty$  obtemos a clássica equação de d'Alembert[2,19]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b_2 = \hbar^2 \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \equiv \hbar^2 \square. \quad (4.29)$$

Este é o operador dalembertiano, razão pela qual chamamos  $b_2$  de operador de d'Alembert generalizado.

## 4.5 Casos particulares

Nesta seção, vamos estudar alguns casos particulares onde consideramos diferentes pontos do cronotopo. Vamos encontrar a equação de d'Alembert relacionada a estes pontos e estudar alguns casos de interesse matemático.

Considere a equação de d'Alembert bidimensional com  $N = 0$ ,  $r = 1$  e  $c = 1$ , para simplificar. Então a partir da equação (4.9) temos

$$(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (1 - t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 2t \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.30)$$

onde  $u = u(x, t)$ . Esta equação está associada ao cronotopo de Castelnuovo e, ao tomarmos um ponto fixo, por exemplo,  $(a, b)$  neste cronotopo, tal equação torna-se uma equação com coeficientes constantes se fizermos a seguinte aproximação: vamos considerar uma vizinhança do ponto  $(a, b)$  de raio  $\varepsilon$ , com  $\varepsilon \ll 1$ , e ainda vamos tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Então obtemos

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (1 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial t}) = 0 \quad (4.31)$$

com  $u = u(x, t)$ , que é uma equação do tipo telégrafo, a qual nos fornece a propagação das ondas com fonte naquele ponto.

#### 4.5.1 Ponto na origem: $P(0, 0)$

Note que temos  $a = 0$  e  $b = 0$ . Substituindo esses valores na equação (4.31) obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.32)$$

onde  $u = u(x, t)$ . Vemos que tal equação é hiperbólica. Usando o método das características[20] obtemos

$$dt - dx = 0 \quad \text{e} \quad dt + dx = 0 \quad (4.33)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \xi &= x + t \\ \eta &= x - t. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo a equação (4.34) na equação (4.32) obtemos<sup>5</sup>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (4.35)$$

---

<sup>5</sup>Observe que esta equação é a equação de d'Alembert clássica, equação 4.1.

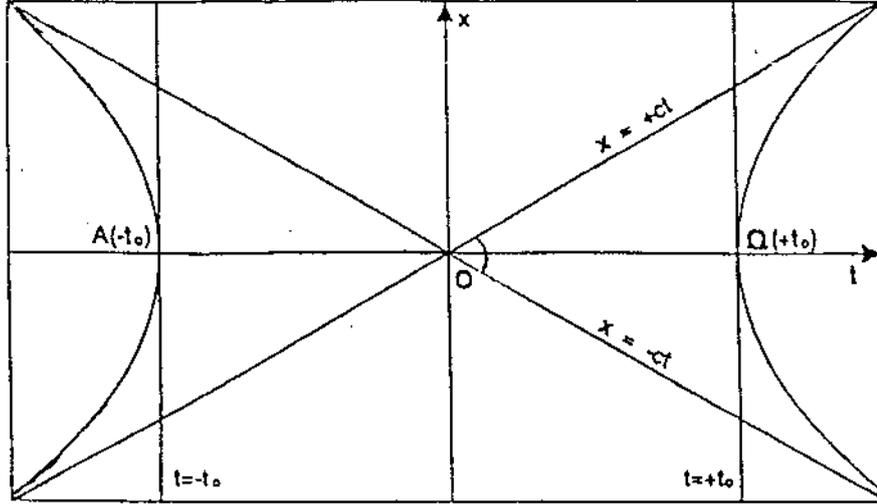


Fig.7. Ponto na origem

#### 4.5.2 Deslocamento sobre o eixo $t$ : $P(0, b)$

Se o ponto está sobre o eixo  $t$  temos que  $x = 0$ . Vamos tomar um ponto fixo sobre este eixo. Considere o ponto  $(0, b)$ . Então temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (4.36)$$

onde  $u = u(x, t)$ . Veja que esta equação é hiperbólica se  $b \in (-1, 1)$ , parabólica se  $b = \pm 1$  e elíptica se  $b \notin [-1, 1]$ . Novamente pelo método das características temos

$$\begin{aligned} \xi &= t - \sqrt{1 - b^2} x, \\ \eta &= t + \sqrt{1 - b^2} x. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo  $\xi$  e  $\eta$  na equação (4.36) obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{b}{2(1 - b^2)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (4.38)$$

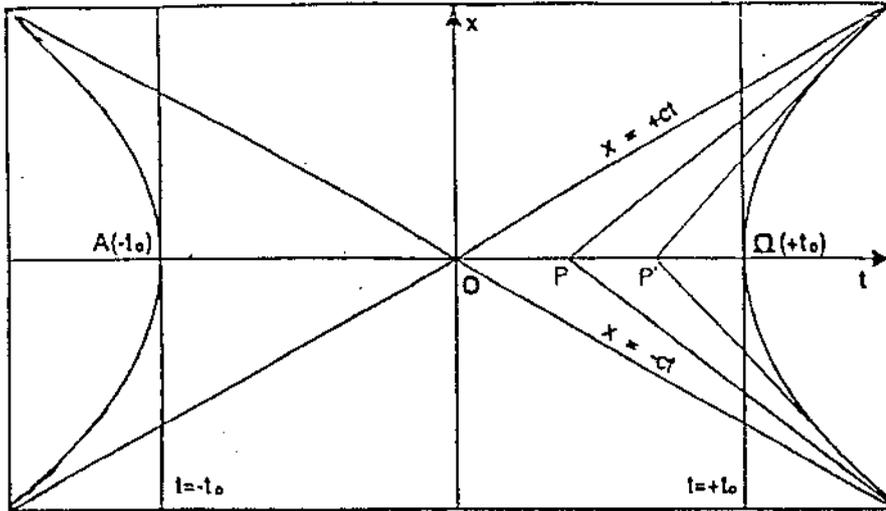


Fig.8. Deslocamento sobre o eixo  $t$

### 4.5.3 Deslocamento sobre o eixo $x$ : $P(a, 0)$

Se o ponto está sobre o eixo  $x$  temos que  $t = 0$ . Assim, vamos tomar um ponto fixo,  $(a, 0)$ , sobre este eixo. Então a equação de d'Alembert é dada por

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.39)$$

com  $u = u(x, t)$ .

Utilizando o método das características temos

$$\begin{aligned} \xi &= t + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}x, \\ \eta &= t - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}x. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39) obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{a}{2(1+a^2)} \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (4.41)$$

onde  $u = u(\xi, \eta)$ .

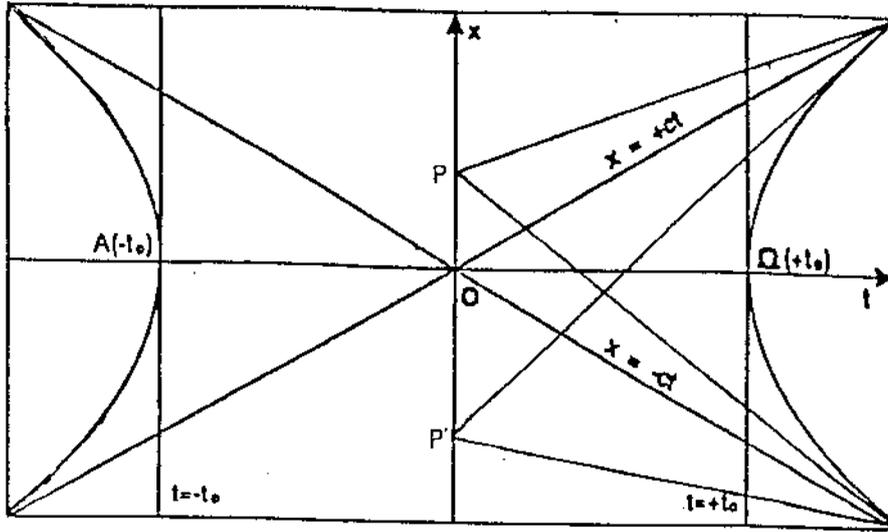


Fig.9. Deslocamento sobre o eixo  $x$

#### 4.5.4 Deslocamento sobre o cone de luz: $P(a, \pm a)$

Considere um ponto sobre o cone de luz (sobre as assíntotas do absoluto de Cayley-Klein) temos que  $x = \pm t$ . Os possíveis pontos a serem analisados aqui são  $(a, a)$ ,  $(a, -a)$ ,  $(-a, a)$  e  $(-a, -a)$ . Note que tendo discutido o caso  $(a, \pm a)$ , para obtermos o outro caso basta fazermos  $a \rightarrow -a$ . Vamos estudar somente o caso  $(a, \pm a)$ .

A equação de d'Alembert é dada por

$$(1+a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (1-a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} \pm 2a\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.42)$$

com  $u = u(x, t)$ . Esta equação é hiperbólica. Novamente utilizando o método das características obtemos

- quadrantes ímpares:  $(a, a)$

$$\begin{aligned}\xi &= t - \frac{1-a^2}{1+a^2}x \\ \eta &= t+x\end{aligned}\tag{4.43}$$

cuja equação, após substituir (4.43) em (4.42), é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0\tag{4.44}$$

com  $u = u(\xi, \eta)$ .

- quadrantes pares:  $(a, -a)$

$$\begin{aligned}\xi &= t - \frac{a^2-1}{a^2+1}x \\ \eta &= t-x\end{aligned}\tag{4.45}$$

cuja equação, após introduzir (4.46) em (4.42), é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0\tag{4.46}$$

onde  $u = u(\xi, \eta)$ .

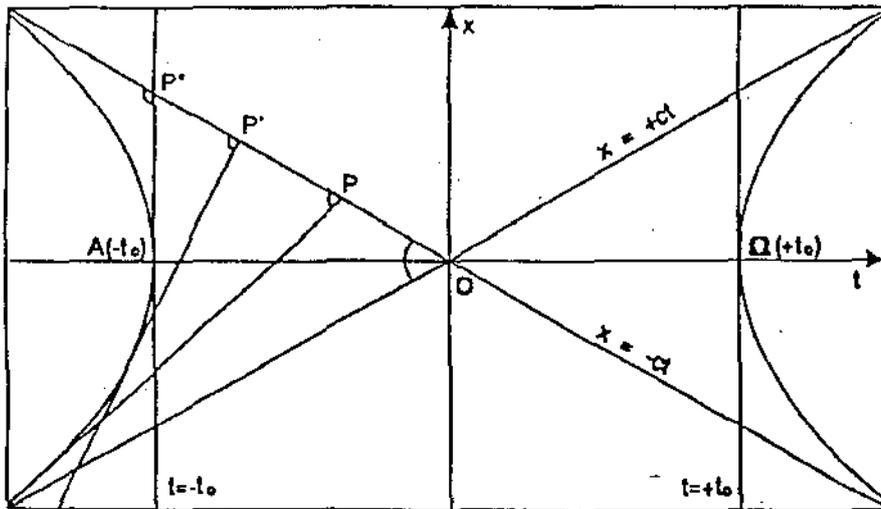


Fig.10. Deslocamento sobre o cone de luz

### 4.5.5 Ponto fixo qualquer: $P(a, b)$

Vamos agora analisar o caso mais geral, ou seja, vamos tomar um ponto fixo  $(a, b)$  (Fig.11) qualquer e utilizando o método de Riemann[21] vamos exibir a sua solução. Para obter a solução nos casos anteriores basta tomar os valores para  $a$  e ou  $b$ . A equação de d'Alembert generalizada com uma dimensão temporal e uma espacial para um ponto fixo qualquer  $(a, b)$  é dada por

$$(1 + a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} - (1 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + 2b \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (4.47)$$

com  $u = u(\bar{x}, \bar{t})$ . Admitamos as seguintes condições iniciais,

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, 0) &= f(\bar{x}) \\ u_{\bar{t}}(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $f(\bar{x})$  e  $g(\bar{x})$  são funções bem comportadas, isto é, temos um problema de Cauchy.

Agora, introduzindo na equação (4.47), a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1} t, \\ \bar{t} &= \frac{2t}{c_1 - c_2}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde  $c_1 = \frac{ab + A}{1 - b^2}$ ,  $c_2 = \frac{ab - A}{1 - b^2}$  e  $A^2 = 1 + a^2 - b^2$  e cuja transformação inversa<sup>6</sup> é dada por

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \frac{ab}{1 - b^2} \bar{t}, \\ t &= \frac{A}{1 - b^2} \bar{t}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

---

<sup>6</sup>Note que o jacobiano é diferente de zero.

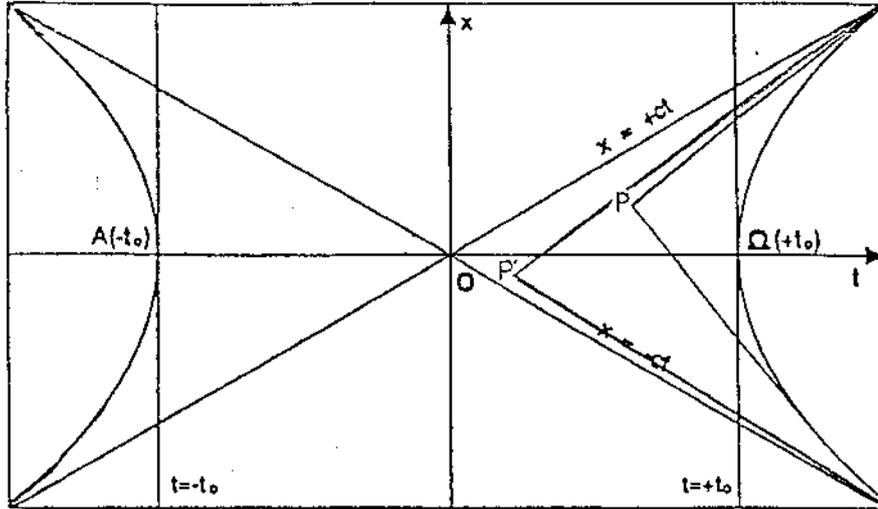


Fig.11. Ponto fixo qualquer

obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a}{A^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2b}{A} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.51)$$

com  $u = u(x, t)$ . As condições iniciais são transformadas nas seguintes expressões

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4.52)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{1 - b^2}{A} \left[ g(x) - \frac{ab}{1 - b^2} f'(x) \right]$$

onde ' denota derivada em relação a  $x$ .

Introduzindo-se uma mudança de variável dependente do tipo

$$\Phi(x, t) = u(x, t) e^{\lambda x + \mu t} \quad (4.53)$$

onde  $\lambda = a/A^2$  e  $\mu = -b/A$  na equação (4.51) obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \alpha^2 \Phi = 0, \quad (4.54)$$

onde  $\Phi = \Phi(x, t)$  e  $\alpha^2 = -\left(\frac{a^2}{A^4} - \frac{b^2}{A^2}\right)$ .

As condições iniciais assumem, agora, os seguintes valores

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= f(x)e^{(a/A^2)x} \equiv f_1(x), \\ \Phi_t(x, 0) &= e^{(a/A^2)x} \left[ \Psi(x) - \frac{b}{A}f(x) \right] \equiv g_1(x),\end{aligned}\tag{4.55}$$

onde a função  $\Psi(x)$  é dada por

$$\Psi(x) = \frac{1-b^2}{A}g(x) - \frac{ab}{A}f'(x).\tag{4.56}$$

Definamos agora a função de Riemann  $v(x, t; \xi, \eta)$ . A função  $v$  deve satisfazer (Fig.12)

$$\begin{aligned}v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \alpha^2 v &= 0 \\ v &= 1 \text{ em MP} \\ v &= 1 \text{ em MQ.}\end{aligned}\tag{4.57}$$

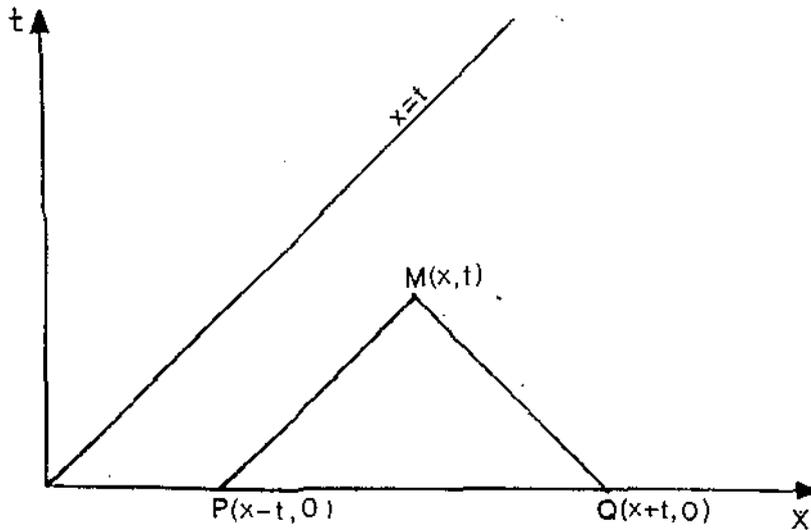


Fig.12. O método das características

Agora, vamos tomar  $v = v(s)$  onde  $s = \sqrt{(x-\xi)^2 - (t-\eta)^2}$  e substi-

tuindo em (4.51) obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial s} + \alpha^2 v = 0 \quad (4.58)$$

cuja solução regular na origem é dada pela função de Bessel de ordem zero

$$v = J_0(\alpha s). \quad (4.59)$$

Logo, escrevendo  $v$  em termos de  $x, t, \xi$  e  $\eta$  obtemos

$$v(x, t; \xi, \eta) = J_0 \left[ \alpha \sqrt{(x - \xi)^2 - (t - \eta)^2} \right]. \quad (4.60)$$

A solução da equação (4.54) é dada por

$$\Phi(M) = \frac{1}{2} [\Phi(P) + \Phi(Q)] + \frac{1}{2} \int_P^Q (v \Phi_\eta - \Phi v_\eta) d\xi. \quad (4.61)$$

Calculando a integral no segmento  $PQ$ , onde  $\eta = 0$  temos

$$\int_P^Q (v \Phi_\eta - \Phi v_\eta) d\xi = \int_{x-t}^{x+t} J_0(\alpha \Omega) g_1(\xi) d\xi - \int_{x-t}^{x+t} \frac{\alpha t J_0'(\alpha \Omega)}{\Omega} f_1(\xi) d\xi \quad (4.62)$$

onde  $\Omega = \sqrt{(x - \xi)^2 - t^2}$ . Assim, utilizando as condições iniciais (4.55) obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{1}{2} [f_1(x - t) + f_1(x + t)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} J_0(\alpha \Omega) g_1(\xi) d\xi + \frac{\alpha t}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_1(\alpha \Omega)}{\Omega} f_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Enfim, considerando a equação (4.53) e as condições (4.50), a solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{1}{2} e^{(b/A)\bar{t}} [f(\bar{x} - \bar{t}) + f(\bar{x} + \bar{t})] - \\ &- \frac{1}{2} e^{(b/A)\bar{t}} \int_{\bar{x}-\bar{t}}^{\bar{x}+\bar{t}} \left[ \frac{b}{A} f(\xi) - \Psi(\xi) \right] J_0(\alpha \sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 - \bar{t}^2}) e^{[-a(\bar{x}-\xi)]/A^2} d\xi \\ &+ \frac{\alpha \bar{t}}{2} e^{(b/A)\bar{t}} \int_{\bar{x}-\bar{t}}^{\bar{x}+\bar{t}} \frac{J_1(\alpha \sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 - \bar{t}^2})}{\sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 - \bar{t}^2}} e^{[-a(\bar{x}-\xi)]/A^2} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Esta é a solução da equação de d'Alembert generalizada, no caso bidimensional, para um ponto qualquer dado no plano  $\bar{x}\bar{t}$ . Observe que podemos obter todas as outras soluções a partir desta, pois este é o caso mais geral.

Note que se tomamos  $a = b = 0$ , isto é, o ponto na origem,  $\alpha = 0$  então a equação (4.47) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} = 0 \quad (4.65)$$

cuja solução é dada por

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2}[f(\bar{x} - \bar{t}) + f(\bar{x} + \bar{t})] + \frac{1}{2} \int_{\bar{x}-\bar{t}}^{\bar{x}+\bar{t}} \Psi(\xi) d\xi \quad (4.66)$$

que são, respectivamente, a clássica equação de d'Alembert e sua solução.

Procedendo da mesma maneira obtemos as soluções para todos os outros casos particulares acima discutidos[22].

# Conclusão

Neste trabalho, discutiu-se os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter, os quais estão associados, respectivamente, aos cronotopos de Newton, de Minkowski e de Castelnuovo bem como algumas aplicações.

No capítulo um, estudou-se funções de matrizes e o teorema de Cayley-Hamilton a fim de discutirmos no capítulo seguinte, as matrizes associadas a uma transformação finita. Efetuou-se, também, um apanhado geral de definições envolvendo teoria de grupos dando maior ênfase aos grupos ortogonais. Vimos ainda que o grupo de Galileu (física clássica) é isomorfo a um espaço euclideano tridimensional e que o tempo é infinito, já o grupo de Poincaré (relatividade restrita) é isomorfo a um espaço euclideano quadridimensional. Na passagem do grupo de Galileu para o grupo de Poincaré emerge uma constante  $c$ , velocidade da luz. Quando fizemos  $c$  tendendo ao infinito, obtivemos o grupo de Galileu, notando assim que o grupo de Galileu é um caso particular do grupo de Poincaré. Estudamos ainda um terceiro grupo, o grupo de Fantappié-de Sitter (relatividade especial projetiva) isomorfo a um espaço pentadimensional. Na passagem do grupo de Poincaré para o grupo de Fantappié-de Sitter emerge uma outra constante  $r$ , que chamamos raio do universo de de Sitter. Novamente, fizemos  $r$  tender ao infinito e obtivemos o grupo de Poincaré.

Verificamos que todos estes grupos são grupos com dez parâmetros. Observamos que o grupo de Fantappié-de Sitter não pode ser aperfeiçoado por um outro grupo, ainda com dez parâmetros, pois este grupo é um grupo simples e, portanto, não contém subgrupos invariantes.

No capítulo dois, discutiu-se as transformações finitas aplicadas aos grupos ortogonais, especificamente, com duas, três, quatro e cinco dimensões. Observamos que conforme a dimensão do espaço aumentava, mais difícil se tornava para se encontrar as matrizes que nos davam a transformação. Sendo assim, introduzimos o método proposto por Arcidiacono e aplicamos este método para as mesmas matrizes, de maneira a explicitar cada uma delas. Verificamos ainda a existência do invariante  $b_2$ , chamado operador de Casimir. Para finalizar este segundo capítulo, observamos que todas as matrizes

associadas a espaços de dimensão inferior a cinco, poderiam ser obtidas da matriz de maior ordem (associada ao espaço de maior dimensão) a partir de um conveniente limite.

No capítulo três, sabendo que todo grupo estaria associado a seu respectivo modelo de universo, apresentamos tais modelos. Primeiramente, estudamos o cronotopo de Newton, associado ao grupo de Galileu. Como já mencionamos, emerge na passagem para o grupo de Poincaré a constante  $c$ , velocidade da luz, que é finita. Sendo assim, dizemos que as medidas de espaço e tempo não são mais independentes e então verificamos que o modelo de Newton poderia ser aperfeiçoado pelo modelo de Minkowski. Este modelo, que chamamos de cronotopo de Minkowski é representado por um plano. Constatamos que este cronotopo está associado ao cone de luz com abertura fixa.

Vimos também que o grupo de Fantappiè-de Sitter aperfeiçoa os grupos de Galileu e Poincaré. Então, verificamos que também existe um cronotopo associado ao grupo de Fantappiè-de Sitter que aperfeiçoa os dois cronotopos estudados anteriormente. Este cronotopo é um modelo hiperesférico quadridimensional do universo com raio  $r$ , chamado universo de de Sitter. Devido à dificuldade de visualizar tal universo utilizamos sua representação projetiva plana, obtendo assim o cronotopo de Castelnuovo. Vimos que o cone de luz associado a este cronotopo é um cone de luz com abertura variável e cuja abertura, calculamos geometricamente e também através da equação de Clairaut.

No capítulo quatro, estudamos a equação de d'Alembert. Vimos que a equação de d'Alembert está associada ao cone de luz com abertura fixa, caso particular para um conveniente limite do cone de luz com abertura variável, cuja equação de onda associada é a equação de d'Alembert generalizada.

Estudando a equação de d'Alembert generalizada verificamos que para um conveniente limite, ou seja, para o observador se aproximando da origem do cronotopo, obtemos a clássica equação de d'Alembert e o mesmo ocorre com as respectivas soluções. Outro fato importante observado foi que a clássica equação de d'Alembert é sempre hiperbólica enquanto que a equação generalizada é uma equação de Tricomi de segunda espécie do tipo misto. Depois verificamos que o invariante obtido no capítulo dois, chamado operador de Casimir de segunda ordem<sup>7</sup>, quando escrito em coordenadas

---

<sup>7</sup>O outro operador de Casimir é discutido em [19].

esféricas resulta numa expressão que quando aplicado o limite de  $r$  tendendo ao infinito resulta no operador d'Alembertiano.

Enfim, analisamos casos particulares para um ponto movendo-se sobre o cone de luz e resolvemos a equação de d'Alembert para um ponto fixo qualquer. A solução encontrada é o caso mais geral das outras soluções.

Uma continuação natural deste trabalho é o estudo do grupo conforme, com quinze parâmetros e que contém como caso limite o grupo de Fantappiè-de Sitter. O grupo conforme também está associado a um cone de luz, ou melhor ainda, é o mais amplo grupo que contém uma estrutura de cone de luz[23]. É também de se notar que o grupo conforme carrega consigo o movimento acelerado de onde podemos estudar problemas envolvendo tal movimento, como por exemplo aqueles advindos da relatividade geral. Estudos nesta direção começam a ser iniciados.

Finalmente é de se ressaltar que a solução dada pela equação (4.64), para uma conveniente escolha das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  pode estar relacionada com as chamadas ondas  $X$ , recentemente descobertas[24].

# Apêndice A

## Cálculo de $\theta$

Passemos a mostrar que o ângulo  $\theta$  formado pelas duas assíntotas ao cone de luz com abertura variável é dado pela equação

$$\tan\theta = \frac{2A}{\frac{x^2}{r^2} + \frac{(ct)^2}{r^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Consideramos, por simplicidade,  $N = 0$ ,  $r = 1$  e  $c = 1$  e vamos utilizar o método das características[20]. As características da equação de d'Alembert projetiva, equação (4.9), são dadas por

$$(1 + x^2) - 2xt \frac{dx}{dt} - (1 - t^2) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = 0. \quad (\text{A.2})$$

Resolvendo a equação acima temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-xt \pm A}{1 - t^2} \quad (\text{A.3})$$

onde  $A^2 = 1 + x^2 - t^2$ . Introduzindo-se a notação  $\frac{dx}{dt} = \beta$  temos que

$$(1 + x^2) - 2xt\beta - (1 - t^2)\beta^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Observando que a equação (A.4) pode ser escrita como

$$B^2 \equiv 1 - \beta^2 + (x - \beta t)^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

e tomando  $x = \alpha$ ,  $t = \gamma$  e  $\beta = \frac{d\alpha}{d\gamma} \equiv \alpha'$  obtemos

$$\alpha = \gamma\alpha' \pm [(\alpha')^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

que é uma equação diferencial tipo de Clairaut[25]. Como sabemos, podemos obter a solução da equação de Clairaut substituindo  $\alpha'$  por uma constante  $k$ , logo

$$k = k\gamma \pm [k^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

e, voltando às variáveis  $x$  e  $t$  temos

$$x = kt \pm \sqrt{k^2 - 1} \quad (\text{A.8})$$

com  $0 \leq |k| \leq 1$ . Para obtermos a solução singular de (A.6) devemos encontrar o envoltório de famílias de retas (A.8), isto é, eliminar o parâmetro  $k$  entre (A.8) e sua derivada parcial com respeito ao parâmetro  $k$ . Assim,

$$\frac{dx}{dk} = t \pm \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Concluimos, da equação (A.9) que

$$t = \pm \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.10) em (A.8) temos que

$$A^2 \equiv 1 + x^2 - t^2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

pois  $k = t/x$ . Agora, substituindo (A.7) em (A.8) obtemos

$$\frac{dx}{dt} = k = \frac{-xk \pm A}{1 - t^2}. \quad (\text{A.12})$$

Mas o ângulo  $\theta$  é dado por

$$\tan\theta = \frac{k' - k''}{1 + k'k''} = \frac{2A}{x^2 + t^2}. \quad (\text{A.13})$$

É importante lembrar que até aqui trabalhamos com  $r = 1$  e  $c = 1$ . Incorporando  $r$  e  $c$  ao valor de  $\theta$  temos

$$\tan\theta = \frac{2 \left[ 1 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{(ct)^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{x^2}{r^2} + \frac{(ct)^2}{r^2}} \quad (\text{A.14})$$

que é exatamente a equação (A.1). Alguns casos particulares são:

(i) Observador percorrendo o eixo espacial

$$t = 0 \rightarrow \theta = \arctan \left[ \frac{2 \left( 1 + \frac{x^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{x^2}{r^2}} \right].$$

(ii) Observador percorrendo o eixo temporal

$$x = 0 \rightarrow \theta = \arctan \left[ \frac{2 \left( 1 - \frac{(ct)^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{(ct)^2}{r^2}} \right].$$

(iii) Observador sobre o cone de luz

$$x = \pm ct \rightarrow \theta = \arctan \frac{1}{x^2}.$$

(iv) Observador na origem

$$\begin{aligned} x = 0 \\ t = 0 \end{aligned} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Note que o ângulo entre as retas é variável e quando o observador se aproxima da origem, o ângulo se aproxima de  $\pi/2$ , isto é, o cone de luz com abertura variável aproxima-se do cone de luz com abertura fixa.

# Referências

1. L.Fantappiè – *Su una nuova teoria di relatività finale* – Rend. Sc. Lincei, série 8, XVII, fasc.5, nov 1954.  
Neste trabalho, Fantappiè mostra que grupo de Poincaré é caso limite de um outro grupo, chamado inicialmente de grupo final (grupo de Fantappiè-de Sitter) e o desenvolvimento da teoria da relatividade final. Mostra também que o grupo de Fantappiè-de Sitter é um grupo simples e por isso não admite a existência de um outro grupo mais geral, também com dez parâmetros do qual ele seja um caso limite.
2. G.C.Ducati and E.Capelas de Oliveira, – *The d'Alembert wave equation: revisited* – Int. Jour. Math. Educ. Sci. Technol., **26**,755 (1995).  
Os autores mostram que a solução geral da equação de d'Alembert generalizada com duas variáveis dependentes de um parâmetro é dada em termos de duas funções arbitrárias para uma escolha conveniente do parâmetro. Por um conveniente processo de limite obtêm a clássica solução de d'Alembert para a equação de onda homogênea.
3. G.Arcidiacono – *Sui gruppi ortogonali a tre, quattro e cinque dimensioni* – Portugaliae Mathematica, **14**, fasc.2 (1955).  
Neste trabalho, Arcidiacono expõe seu método para o cálculo das matrizes de transformação finita e esboça este cálculo para as matrizes do grupo de rotação de dimensão três, quatro e cinco.
4. C.G.Cullen – *Matrices and linear transformations* – Capítulo 5, 2<sup>nd</sup> ed., Dover, NY (1972).  
O resultado mais importante deste capítulo é o teorema de Cayley-Hamilton. Aqui o autor define polinômio mínimo, enumera e demonstra vários resultados importantes.
5. L.S.Pontryagin – *Topological Groups* – Capítulo 11, 2<sup>nd</sup> ed., Gordon and Breach (1966).  
Neste livro, o autor faz um estudo bastante detalhado sobre grupos

topológicos. No capítulo onze, depois de introduzir grupos e álgebras de Lie o autor explicita toda a estrutura dos grupos de Lie compactos.

6. E.P.Wigner -- *Group theory and its applications to the quantum mechanics of atomic spectra*, Capítulo 14, Academic Press, Inc., NY (1959). Neste capítulo, o autor faz um estudo das rotações (próprias e impróprias) e analisa, também, os grupos de rotação e suas representações.
7. M.A.Armstrong -- *Basic topology* – Capítulo 4, Springer-Verlag (1983). Este texto fala especificamente sobre espaço quociente. Inicialmente, o autor mostra como se constrói a faixa de Möbius, introduz a topologia de identificação e enuncia vários teoremas importantes e finalmente, considera espaços que além desta estrutura topológica têm também uma estrutura de grupo, formando assim os grupos topológicos e demonstra vários teoremas.
8. E.Cartan – *The theory of spinors* – Capítulos 1 e 2, Dover, NY (1981). Neste texto o autor faz um estudo detalhado do espaço euclideano  $n$  dimensional, das rotações e reflexões deste espaço. No capítulo dois, Cartan introduz tensores, representação linear de grupo e matrizes.
9. H.Buseman and P.Kelly – *Projective geometry and projective metrics* – capítulo VI, Academic, Press, NY (1953). Neste capítulo, os autores fazem uma abordagem geral sobre geometria espacial, dando várias definições e analisando teoremas importantes.
10. J.Dieudonné – *Sur les groupes classiques* – Hermann, Paris (1967). Nesta obra, Dieudonné faz um estudo sistemático sobre grupos chamados clássicos, que são os grupos e subgrupos que deixam invariante uma forma quadrática (grupo ortogonal), uma forma hermitiana (grupos unitários) e uma forma antisimétrica (grupos simpléticos).
11. Sophus Lie – *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* – G.Scheffers, Leipzig (1893). (Obra Original)
12. L.Fantappiè – *Sulle funzione di una matrice* – An.Acad.Bras.Ciências (1954).

Neste artigo, o autor mostra, de maneira construtiva, qual é a transformação finita para os grupos, particularmente do  $S_5$ , em função das matrizes  $K$ .

13. M.Hammermesh – *Group theory and its applications to physical problems* – Capítulo 8, Dover, NY (1989).  
Neste capítulo, o autor faz um estudo detalhado dos grupos contínuos, ressaltando, principalmente, os grupos de Lie.
14. R.Gilmore – *Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications* – Capítulo 4, Wiley Interscience Publication (1974).  
Neste capítulo, Gilmore mostra a importância da equivalência existente entre as álgebras de Lie e os grupos de Lie. O autor também demonstra e comenta os três teoremas de Lie e suas recíprocas, obtendo assim a conexão entre as álgebras e grupos de Lie.
15. A.Augusto Lopes – *A teoria de grupos e o conceito de massa* – Dissertação de mestrado, IMECC - UNICAMP (1983).  
Nesta dissertação, o autor revê os principais conceitos da teoria de grupos e discute o grupo de Galileu associado à mecânica clássica bem como à mecânica quântica. Discute também o grupo de Poincaré bem como o chamado grupo de Aghassi-Roman-Santilli associado às partículas elementares.
16. G.Arcidiacono – *Relatività e Cosmologia* – Veschi, Roma (1987).
  - vol I - Neste volume o autor introduz brevemente o cálculo tensorial e teoria de grupos. Depois, o assunto estudado é relatividade restrita e toda sua estrutura de grupo. A relatividade restrita é construída a partir do grupo de Poincaré que nos dá os movimentos em si mesmo do cronotopo de Minkowski. A seguir, é desenvolvido um estudo sistemático de hidrodinâmica, termodinâmica, eletromagnetismo e magnetoidrodinâmica. A relatividade geral é desenvolvida através do cálculo tensorial nos espaços riemannianos e é dada uma aplicação no campo astronômico e ao estudo do buraco negro. Finalmente, temos a cosmologia relativista, a cosmologia dedutiva, o estudo das relações entre as constantes universais e o princípio antrópico.

- vol II - Este volume é dedicado à teoria dos universos hipersféricos  $S_n$ , baseada nos grupos de rotação  $R_{n+1}$ . Para  $n = 4$  temos a relatividade especial projetiva que estende a relatividade restrita. Depois temos a relatividade geral projetiva, que resume de uma única maneira as várias teorias unitárias e do campo gravitacional. Enfim, para  $n = 5$  tem-se a relatividade conforme, com a qual se pode unificar, por meio de teoria de grupos, o campo magnetoidrodinâmico e o campo gravitacional de Newton.
17. M.Cibrario - *Sulla riduzione a forma canonica delle equazione lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto* - Rend.Ist.Lombardo, **65**, 889 (1932).  
Neste trabalho a autora estuda o problema geral de reduzir para a forma canônica, com oportunas mudanças de variáveis, uma equação linear à derivadas parciais de segunda ordem do tipo misto. São discutidos os diversos tipos aos quais se pode reduzir tal equação. Encontram-se alguns diferentes resultados daqueles obtidos anos antes por Tricomi.<sup>1</sup>
  18. F.Tricomi e G.Ferrari - *Aerodinamica Transonica* - Cremonese, Roma (1962).
  19. E.Capelas de Oliveira and E.A.Notte Cuello - *A new construction of the Casimir operators for the Fantappié-de Sitter group* - Hadronic Journal, **18**, 181-193 (1995)  
Neste trabalho, os autores obtêm os operadores de Casimir associados ao grupo de Fantappié-de Sitter (isomorfo ao grupo das pseudo-rotações pentadimensionais) que é o grupo de movimentos admitidos pelo espaço-tempo cosmológico de de-Sitter, usando os operadores de derivadas generalizadas.
  20. T.Myint-U - *Partial differential equations of mathematical physics* - Capítulo 3, Elsevier, NY (1976).  
Neste terceiro capítulo, o autor classifica as equações diferenciais de segunda ordem, com coeficientes constantes ou não, e estuda a forma canônica destas equações.

---

<sup>1</sup>F.Tricomi - *Equazione alle derivate parziali di tipo misto* - Memorie Accad. Lincei. **14**, 133 (1924).

21. L.Prado Jr e E.Capelas de Oliveira – *Sobre a equação do telégrafo e o método de Riemann* – Relatório Técnico 16/91, IMECC–UNICAMP.  
Neste trabalho, os autores apresentam o método de Riemann aplicado à equação do telégrafo e vários casos particulares são discutidos do ponto de vista físico.
22. G.C.Ducati – *O cone de luz com abertura variável* – Comunicação interna (1994).  
Este trabalho estuda a equação de d'Alembert generalizada e o cone de luz de abertura variável a ela associado. São estudados casos particulares para o observador em diferentes posições e analisada a equação de d'Alembert generalizada para todos os casos particulares referentes à movimentação do observador.
23. A.O.Barut – *External (kinematical) and internal (dynamical) conformal symmetry and discrete mass spectrum in Group Theory in non-linear problems* – D.Reidel Publishing Company, 249-259 (1970).  
Um estudo é apresentado no qual as transformações conformes do espaço-tempo e transformações conformes da dinâmica nas coordenadas internas do problema relativístico de dois corpos ocorrem. O espectro da massa é discutido.
24. W.A.Rodrigues Jr. and J.Y.Lu – *On the existence of undistorted progressive waves (UPWs) of arbitrary speeds  $0 \leq |v| \leq \infty$  in nature* – Relatório de Pesquisa, 12/96, IMECC–UNICAMP, submetido à publicação.  
Neste trabalho, os autores apresentam uma teoria e consequências físicas fundamentais concernentes à existência de famílias de ondas progressivas, que não se distorcem, com velocidade arbitrária  $0 \leq |v| \leq \infty$ , que são soluções da equação de onda de Maxwell e equações de Dirac e Weyl.
25. J.Matheus and R.L.Walker – *Mathematical methods of physics* – Capítulo um, 2<sup>nd</sup> ed, W.A.Benjamin, Inc. (1970).  
Neste texto, os autores fazem uma pequena revisão de alguns métodos para se obter a solução de uma equação diferencial parcial ordinária, como por exemplo, fator integrante, equação de Bernoulli, equação de Clairaut, séries de potência, e o método WKB.