



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

JUNIOR CESAR ALVES SOARES

# **CÁLCULO FRACIONÁRIO E AS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO**

Campinas

2016

Junior Cesar Alves Soares

# **CÁLCULO FRACIONÁRIO E AS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Junior Cesar Alves Soares e orientada pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Campinas

2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CNPq, 140557/2013-0; CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

So11c Soares, Junior Cesar Alves, 1986-  
Cálculo fracionário e as equações de evolução / Junior Cesar Alves Soares. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Simetrias de. 2. Burgers, Equação de. 3. Caputo, Derivadas fracionárias de. 4. Cálculo fracionário. 5. Mittag-Leffler, Funções de. 6. Laplace, Transformadas de. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Fractional calculus and evolutions equations

**Palavras-chave em inglês:**

Lie symmetries

Burgers equation

Caputo fractional derivatives

Fractional calculus

Mittag-Leffler functions

Laplace transform

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

Marcio José Menon

Igor Leite Freire

Eliana Contharteze Grigoletto

Rubens de Figueiredo Camargo

**Data de defesa:** 29-09-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 29 de setembro de 2016 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA**

**Prof(a). Dr(a). MARCIO JOSÉ MENON**

**Prof(a). Dr(a). IGOR LEITE FREIRE**

**Prof(a). Dr(a). ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO**

**Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Aos meus pais, Vicente de Paula Soares e Maria Luzenil Alves Soares e a minha irmã  
Rafaela Alves Soares.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado força, paz de espírito e bons amigos para que os anos da pós-graduação fossem mais agradáveis.

À minha família pelo carinho, compreensão, amor e por sempre acreditar que eu poderia alçar voos maiores.

Agradeço em especial ao meu orientador, Edmundo Capelas de Oliveira, pelo apoio, paciência, exemplo de excelência profissional e, principalmente, pela amizade nesses anos.

À Felix Costa e José Marão pela parceria em trabalhos publicados e submetidos.

Agradeço aos meus amigos que foram formidáveis nesse tempo de pós-graduação: Daniela Oliveira, Graziane Teodoro, Luverci Ferreira, Adrian Plata, Lilian Berti e Marta Macufa companheiros nessa jornada de aprendizagem.

À Luiz Fernando e Michael Diniz, amigos que foram meus companheiros de moradia, estudos e trilhas. Abel Bustos e Carlos Frank companheiros de sala de estudo do prédio anexo do Imecc.

À Eliana Grigoletto pelo contínuo apoio e incentivo ao longo desses anos de estudo.

À Karine Oliveira, Sumaya Guedes e Samuel Barreto pelo apoio e incentivo.

À Marilene Silva pelo carinho e apoio para a conquista desse sonho.

À Raiana Lira pelo incentivo na etapa final da tese, apoio e carinho.

Agradeço todos os professores que tive na pós-graduação, em especial, João Meyer, Aurélio Oliveira, Márcia Ruggiero, Maicon Correa e Adolfo Maia.

Não poderia deixar de agradecer toda a equipe da secretaria de pós-graduação, em especial, Tânia, Lívia, Ednaldo e Eliana, estes pela prestatividade.

Agradeço a prestatividade, disponibilidade e ótimas sugestões da banca.

Agradeço à Capes e ao CNPq pelas bolsas nesse período de doutorado.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

A derivada fracionária tem se mostrado uma ótima ferramenta para modelar problemas advindos da física, engenharia e matemática, por exemplo, nos modelos para reologia, teorias de biologia quantitativa, eletroquímica, espalhamento, difusão, transporte, probabilidade, potencial e elasticidade. Apesar do cálculo de ordem não inteira ter surgido na mesma época do cálculo de ordem inteira, apenas nos últimos cinquenta anos a aplicação desta área tem sido largamente investigada. O cálculo fracionário nasceu de um questionamento de L'Hospital a Leibniz a respeito da possibilidade de calcular a derivada de ordem meio de uma função e, desde aquele momento, já se acreditava que tais estudos trariam consequências úteis. Neste trabalho apresentamos uma aplicação do cálculo fracionário às equações de evolução, dentre elas, as equações fracionárias de Burgers, Korteweg-de Vries e Harry Dym. Apresentamos, também, a equação diferencial fracionária não linear onda-difusão. Além disso, introduzimos o estudo de simetrias de Lie aplicado às equações diferenciais parciais fracionárias.

**Palavras-chave:** Riemann-Liouville, Caputo, Riesz-Feller, simetria de Lie, equação de Burgers, equação de Harry Dym

# Abstract

The fractional derivative has shown to be a great tool for modeling problems arising from physics, engineering and mathematics, for example, on models for rheology, theories of the quantitative biology, electrochemistry, scattering, diffusion, transport, probability, potential and elasticity. Despite the non-integer order calculation has been appeared at the same time of the entire order of calculation, only in the last fifty years the application of this area has been widely investigated. The fractional calculus was born in a L'Hospital question to Leibniz about the possibility to calculate the fractional derivative of a function and, since that moment, they knowed that these studies would bring useful consequences. In this study we present an application of fractional calculus to evolution equations among them, the fractional equations of Burgers, Korteweg-de Vries and Harry Dym. We present the fractional nonlinear space-time diffusion-wave equation. In addition, we introduce the Lie symmetries study applied to fractional partial differential equations.

**Keywords:** Riemann-Liouville, Caputo, Riesz-Feller, Lie point symmetry, Burgers equation, Harry Dym equation

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Os parâmetros $\alpha$ e $\beta$ foram escolhidos e considerado $m = 10$ . . . . .	53
Figura 2 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com $\alpha = 1$ , $\beta = 3$ e $m = 5$ . . . . .	53
Figura 3 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com $\alpha = 1$ , $\beta = 2$ e $m = 5$ . . . . .	54
Figura 4 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0.5$ e $m = 5$ . . . . .	54
Figura 5 – Gráfico da solução da equação de difusão fracionária $0 < \beta \leq 1$ e $(x = 1)$ . . . . .	63
Figura 6 – Gráfico da solução da equação de difusão fracionária com tempo fixado $(t = 1)$ e $0 < \beta \leq 1$ . . . . .	64
Figura 7 – Solução da equação de difusão fracionária com $\alpha = \beta = 0.5$ e $m =$ $10, 20, 30, 40$ , respectivamente. . . . .	64
Figura 8 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com $(x = 1)$ . . . . .	68
Figura 9 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com o tempo fixado $(t = 1)$ . . . . .	68
Figura 10 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com $\alpha = 0.5, \beta =$ $1.5$ e $m = 10, 20, 30, 40$ respectivamente. . . . .	69
Figura 11 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária não linear com $(x = 1)$ . . . . .	71
Figura 12 – Soluções particulares da equação da onda fracionária não linear. . . . .	72
Figura 13 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária no tempo com $(x = 1)$ . . . . .	73
Figura 14 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária no tempo $(t = 1)$ . . . . .	73
Figura 15 – Soluções particulares da equação da onda fracionária no tempo com $(x = 1)$ . . . . .	74
Figura 16 – Soluções particulares da equação da onda fracionária no tempo $(t = 1)$ . . . . .	74
Figura 17 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 1/3$ , $c = 1$ e $x_0 = 3/2$ . . . . .	82
Figura 18 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 1/2$ , $c = 1$ , e $x_0 = 3/2$ . . . . .	83
Figura 19 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 1$ , $c = 1$ e $x_0 = 3/2$ . . . . .	83
Figura 20 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 3/2$ , $c = 1$ e $x_0 = 3/2$ . . . . .	84
Figura 21 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 1/4$ , $c = 1$ e $x_0 = 8/3$ . . . . .	84
Figura 22 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 2/3$ , $c = 1$ e $x_0 = 8/3$ . . . . .	85
Figura 23 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 1$ , $c = 1$ e $x_0 = 8/3$ . . . . .	85
Figura 24 – $u = u(x, t)$ para $p = 3$ , $\alpha = 3/2$ , $c = 1$ e $x_0 = 8/3$ . . . . .	86
Figura 25 – Gráfico da função gama de Euler. . . . .	96

# Lista de abreviaturas e siglas

EDP	Equação diferencial parcial
EDO	Equação diferencial ordinária
EDPF	Equação diferencial parcial fracionária
PVI	Problema de valor inicial
HD	Harry Dym
KdV	Korteweg-de Vries
GTPL	Grupo de transformações de pontos de Lie

# Lista de símbolos

$\mathcal{F}(\cdot)$	Transformada de Fourier
$\mathcal{L}(\cdot)$	Transformada de Laplace
$D_{a+}^{\alpha}$	Derivada de Riemann-Liouville à direita
$D_{b-}^{\alpha}$	Derivada de Riemann-Liouville à esquerda
$J_{a+}^{\alpha}$	Integral de Riemann-Liouville à direita
$J_{b-}^{\alpha}$	Integral de Riemann-Liouville à esquerda
${}^{RL}D_x^{\alpha}$	Derivada de Riemann-Liouville
$*D_x^{\alpha}$	Derivada fracionária de Caputo
${}_x D_{\theta}^{\alpha}$	Derivada fracionária de Riesz
$X^{(k)}$	$k$ -ésimo gerador infinitesimal estendido
$B(p, q)$	Função beta
$\Gamma(\cdot)$	Função gama de Euler
$\eta_x^k$	Infinitesimal estendido de ordem $k$ e variável $x$
$E_{\alpha}(\cdot)$	Função de Mittag-Leffler de um parâmetro
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1 Preliminares</b> . . . . .	<b>19</b>
1.1 Espaços $L^p$ . . . . .	19
1.2 Transformada de Fourier . . . . .	20
1.3 Transformada de Laplace . . . . .	22
1.4 Integral e derivada de Riemann-Liouville . . . . .	24
1.5 Derivada de Caputo . . . . .	29
1.6 Derivada de Riesz-Feller . . . . .	30
1.7 Derivada de Riesz . . . . .	31
1.7.1 Regra de Leibniz com derivada fracionária . . . . .	31
1.7.2 Regra de Leibniz para derivada segundo Riemann-Liouville . . . . .	32
1.8 Regra da Cadeia ou Fórmula de Faà di Bruno . . . . .	35
<b>2 Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais fracionárias</b> . . . . .	<b>37</b>
2.1 Simetrias de Lie de EDP de ordem inteira . . . . .	37
2.2 Transformações infinitesimais . . . . .	38
2.2.1 Transformações estendidas: uma variável dependente e $n$ variáveis independentes . . . . .	40
2.3 Invariância de uma equação diferencial parcial . . . . .	41
2.4 Simetrias de Lie de EDP fracionária . . . . .	43
<b>3 Equações diferenciais fracionárias não lineares</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1 Equação de Burgers-Korteweg-de Vries fracionária . . . . .	50
<b>4 Equação diferencial fracionária não linear onda-difusão</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1 Equação de difusão fracionária . . . . .	56
4.2 Solução analítica e gráficos . . . . .	61
4.3 Equação da onda fracionária: $1 < \beta \leq 2$ . . . . .	65
4.4 Solução com $A$ e $r$ constantes . . . . .	67
4.5 Solução dos casos particulares . . . . .	69
4.5.1 Equação de difusão: caso $\alpha \rightarrow 1$ , $\beta \rightarrow 1$ e $m > 2$ . . . . .	69
4.5.2 Equação da onda: caso $\alpha \rightarrow 1$ , $\beta \rightarrow 2$ e $m > 2$ . . . . .	71
4.5.3 Equação fracionária de difusão (tempo): caso $\alpha \rightarrow 1$ , $0 < \beta \leq 1$ , $m > 2$ . . . . .	72
4.5.4 Equação fracionária da onda (tempo): caso $\alpha \rightarrow 1$ , $1 < \beta \leq 2$ e $m > 2$ . . . . .	73
<b>5 Equação diferencial parcial fracionária de Harry Dym</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1 Equação de Harry Dym fracionária . . . . .	75
5.1.1 Solução de onda viajante . . . . .	76
5.1.2 Soluções analíticas . . . . .	77

5.1.3	Propriedade de translação . . . . .	79
5.1.4	Casos particulares . . . . .	80
5.1.4.1	Equação de Harry Dym fracionária . . . . .	80
5.1.4.2	Equação de Harry Dym clássica . . . . .	80
5.1.5	Problema de valor inicial . . . . .	81
5.2	Gráficos . . . . .	81
<b>Considerações finais . . . . .</b>		<b>87</b>
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>89</b>
<b>APÊNDICE . . . . .</b>		<b>94</b>
<b>APÊNDICE A Funções Gama e Beta . . . . .</b>		<b>95</b>
A.1	Função Gama . . . . .	95
A.2	Função beta . . . . .	96

# Introdução

O cálculo de ordem não inteira, popularmente conhecido por cálculo fracionário, nomeclatura esta que vamos adotar, continua em franco crescimento. Apesar de datar da mesma época do cálculo de ordem inteira, este proposto, independentemente, por Newton e Leibniz, só teve seu desenvolvimento de forma objetiva a partir do primeiro congresso internacional realizado na Universidade de New Haven, em 1974. Outros congressos se sucederam e, em vários países, o cálculo fracionário ganhou e continua ganhando mais adeptos. Hoje, podemos afirmar que é uma área perfeitamente consolidada, pois, em todo o mundo, encontramos os mais diversos grupos de pesquisas, congressos, revistas específicas e, também, abertura de espaço para publicações em importantes anais dos resultados advindos do cálculo fracionário.

A gênese do cálculo fracionário é uma questão levantada por L'Hospital a Leibniz, em 1695, a respeito da possibilidade de se calcular a derivada de ordem meio de uma função. Diante desse questionamento Leibniz responde: “Este é um aparente paradoxo do qual, um dia, consequências úteis serão obtidas”.

Apesar de boa parte da teoria ter sido desenvolvida antes do século *XX*, foram nos últimos cinquenta anos que esta deu um salto significativo em seu uso nas aplicações em física, engenharia e matemática ([MACHADO; GALHANO; TRUJILLO, 2014](#)). O cálculo fracionário tem se mostrado importante e, em muitos casos, imprescindível, na discussão de problemas oriundos de várias áreas do conhecimento como proposto na obra de [Mainardi \(2010\)](#), onde uma introdução aos modelos matemáticos é apresentada.

No Brasil podemos destacar os estudos realizados pelo grupo de pesquisa coordenado pelo professor Dr. Edmundo Capelas de Oliveira no Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas (Imecc/Unicamp). As pesquisas realizadas no Imecc têm contribuído para contínua construção dos conceitos do cálculo fracionário e sua crescente aplicação.

Dentre os trabalhos elaborados no grupo podemos ressaltar a tese de [Camargo \(2009\)](#) considerado o primeiro trabalho no Brasil a abordar o cálculo fracionário e suas importantes aplicações; a dissertação de [Oliveira \(2010\)](#), que faz uma breve introdução ao cálculo de ordem não inteira; a tese de [Costa \(2011\)](#), que faz o estudo das funções  $H$  de Fox e as aplicações das mesmas no cálculo fracionário; a tese de [Grigoletto \(2014\)](#), que apresenta as equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler que emergem naturalmente das soluções daquelas e, além disso, trabalha com o teorema fundamental do cálculo fracionário. Já a dissertação de [Oliveira \(2014\)](#) trata das derivadas fracionárias e algumas particularidades, como a regra de Leibniz para a derivada fracionária; a dissertação

de [Teodoro \(2014\)](#), que investiga a clássica função de Mittag-Leffler e algumas de suas várias generalizações, bem como resolve a equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico fracionário; a tese de [Rodrigues \(2015\)](#) obtém soluções de um caso da equação hipergeométrica confluyente, a equação de Bessel de ordem  $p$ , utilizando a teoria do cálculo fracionário e, mais recentemente, a tese de [Plata \(2016\)](#) que aborda o estudo de equações diferenciais parciais fracionárias lineares e não lineares. Destacamos, também, o primeiro livro em língua portuguesa que trata do assunto, cujos autores são [Camargo e Oliveira \(2015\)](#).

Assim como no cálculo de ordem inteira, ao qual o cálculo fracionário deve se reduzir, em um conveniente limite, aqui, também, nos deparamos com vários problemas onde o estudo de uma equação diferencial<sup>1</sup> desempenha papel crucial, isto é, as equações diferenciais fracionárias estão para o cálculo fracionário assim como as equações diferenciais estão para o cálculo de ordem inteira. O estudo de uma equação diferencial fracionária e sua solução deve recuperar a respectiva equação diferencial, obtida para um conveniente limite, ou seja, podemos entender que uma equação diferencial fracionária generaliza a respectiva equação diferencial de ordem inteira, assim como a sua solução que, no mesmo limite, deve recuperar a solução do caso de ordem inteira. O cálculo de ordem inteira tem a ele associado uma classe de funções especiais, em particular, as funções hipergeométricas e seus casos específicos ([OLIVEIRA, 2012](#)), enquanto o cálculo fracionário tem a ele associado as funções de Fox, em particular, as funções de Mittag-Leffler ([COSTA, 2011](#)).

Visto que uma equação diferencial parcial pode, em um certo sentido, ser vista como uma generalização de uma equação diferencial ordinária, podemos dizer que uma equação diferencial não linear é entendida como uma generalização de uma equação diferencial linear. Em particular, a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au^b \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = u(x, t)$$

com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \geq 0$ , é não linear para  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  enquanto nos casos  $a = 0$  e para todo  $b$  ou  $a \neq 0$  e  $b = 0$  é uma linear. Neste sentido, podemos afirmar que uma equação diferencial não linear generaliza a equação diferencial linear de modo que esta, a linear, é recuperada em um conveniente limite e sua solução pode ser interpretada como sendo um possível refinamento da solução da equação linear. Em completa analogia, podemos afirmar que uma equação diferencial fracionária pode ser interpretada como uma possível generalização da respectiva equação diferencial, isto é, em um conveniente limite envolvendo o parâmetro associado à ordem da equação, recuperamos a equação diferencial de ordem inteira cuja solução é entendida como um possível refinamento da solução da equação diferencial.

Podemos dividir em duas grandes classes as maneiras de se abordar uma

<sup>1</sup> Além das equações diferenciais ordinárias e parciais, temos as equações integrodiferenciais, as equações de diferença, dentre outras.

equação diferencial: a primeira, através de métodos analíticos, e a segunda, utilizando métodos computacionais. A solução de uma equação diferencial pode ser estudada através de métodos numéricos e métodos analíticos. Dentre os métodos analíticos, o objetivo desta tese é concentrar-se nas simetrias associadas às equações diferenciais não lineares. Estas têm a derivada temporal que vem expressa em termos de derivadas espaciais, caracterizando assim equações de evolução. Dessas, as mais notáveis são as equações de Burgers, Korteweg-de Vries e Seno-Gordon dentre outras. É conveniente ressaltar que existem várias maneiras de se abordar uma equação diferencial não linear, por exemplo, via espalhamento inverso, transformação de Hopf-Cole, Métodos de Hirota, Transformação de Bäcklund dentre outros (TORRIANI, 1986).

No presente trabalho é apresentado o cálculo fracionário como uma ferramenta útil para a resolução de equações diferenciais parciais. Utilizaremos o conceito de similaridade de equações diferenciais, ou seja, algumas simetrias de Lie. Vale ressaltar que a técnica desenvolvida por Sophus Lie no século XIX tem sido aplicada desde 2007 em equações diferenciais parciais fracionárias (EDPF) com o uso dos geradores infinitesimais.

Em trabalhos recentes houve grandes avanços nos cálculos de soluções exatas de EDPF, como podemos constatar nos seguintes trabalhos:

No artigo de Buckwar e Luchko (1998) os autores trabalham com as simetrias de uma equação de difusão e onda em que são encontradas soluções invariantes. O cálculo dessas simetrias segue passos que podem ser entendidos como algoritmos. O principal desafio no cálculo dessas simetrias foi encontrar os geradores infinitesimais fracionários. Após essa descoberta vários artigos foram publicados explorando esse resultado.

No trabalho de Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2009) foi feito o uso das simetrias de Lie de uma equação de difusão utilizando as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Além disso, classificam as álgebras de Lie encontradas. Foi estudado por Wu (2010) a equação fracionária de difusão anômala com parâmetro  $\alpha$  entre 0 e 1. Nas pesquisas de Sahadevan e Bakkyaraj (2012) foram consideradas as equações diferenciais fracionárias não lineares de segunda e terceira ordens, as quais têm como casos particulares a equação fracionária de Burgers e a equação KdV fracionária. No artigo de Wang, Liu e Zhang (2013) foi estudada a equação KdV fracionária de quinta ordem com parâmetro entre 0 e 1, utilizando derivada de Riemann-Liouville. No artigo de Leo, Sicuro e Tempesta (2014) foi demonstrada a existência das simetrias de Lie de equações diferenciais fracionárias. Na publicação de Huang e Zhdanov (2014) foi investigada a equação de Harry Dym fracionária e foi encontrada suas simetrias de Lie. Também em 2014 Ouhadan e Kinani (2014) fazem o estudo da equação de Kolmogorov fracionária via simetrias de Lie.

Para uma melhor apresentação dos conceitos propostos, este trabalho está organizado da seguinte maneira.

No [Capítulo 1](#), é apresentada a teoria básica do cálculo fracionário utilizando as principais definições de derivadas fracionárias, ou seja, segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo. Historicamente a definição de Riemann-Liouville precede a de Caputo e esta última foi proposta para que as condições iniciais de problemas de valor inicial pudessem ser fisicamente interpretáveis. É mostrada também a conexão entre a derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo. Além disso, é apresentada a definição das derivadas fracionárias de Riesz e Riesz-Feller que são utilizadas em capítulos seguintes para a resolução de equações diferenciais parciais.

No [Capítulo 2](#), o conceito de simetrias de Lie de equações diferenciais parciais é aplicado às equações diferenciais parciais fracionárias. A abordagem de simetrias de Lie para equações diferenciais fracionárias vem sendo estudada nos últimos anos e tem produzido informações novas a respeito das soluções das equações diferenciais fracionárias. Neste Capítulo é apresentado, de maneira algorítmica, o método para se encontrar as simetrias de Lie de equações fracionárias. O que há de novo em relação à abordagem para equações de ordem inteira é o fato de emergir dos cálculos o gerador infinitesimal fracionário estendido.

As equações diferenciais parciais não-lineares fracionárias são apresentadas no [Capítulo 3](#), bem como generaliza-se a equação Burgers-KdV fracionária para obter uma nova solução do ponto de vista do cálculo fracionário. Para a solução da equação diferencial são utilizadas algumas simetrias de Lie já conhecidas para a equação de ordem inteira e com a aplicação das mesmas na equação fracionária é possível encontrar novas soluções.

Estudamos a equação de onda difusão no [Capítulo 4](#) utilizando o conceito da derivada de Riesz-Feller. Isso pelo fato de a solução da equação estudada apresentar algumas peculiaridades como por exemplo a não simetria de suas soluções. Com isso a utilização da definição de Riesz-Feller é muito útil. São apresentados os casos gerais e os casos particulares, ou seja, quando as derivadas são de ordem inteira.

Já no [Capítulo 5](#), a equação não linear fracionária de Harry Dym é discutida a partir de uma fracionalização da derivada na variável temporal e considerando o expoente  $p$  na variável  $u$  maior que 3. Com isso é discutida a obtenção das soluções do tipo onda viajante e a recuperação da solução da equação de Harry Dym clássica encontrada na literatura. Além disso, é possível generalizar a solução da equação de Harry Dym.

Os resultados obtidos nos [Capítulo 4](#) e [Capítulo 5](#) são oriundos dos estudos feitos nesse trabalho de doutorado.

Nas considerações finais desta tese, fizemos uma discussão dos resultados obtidos, dentre os quais, a resolução da EDPF não linear onda-difusão apresentando sua solução analítica e seus casos particulares e ainda discutimos os resultados encontrados na resolução da EDPF de Harry Dym.

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentamos definições úteis para o decorrer do trabalho. Começamos com as transformadas integrais, em particular, as transformadas de Fourier e Laplace, apresentando algumas de suas propriedades e a respectiva fórmula de inversão. Introduzimos as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo a partir da integral de Riemann-Liouville, bem como propriedades que serão utilizadas no decorrer do texto. Apresentam-se as definições das derivadas de Riesz e Riesz-Feller e conclui-se o capítulo apresentando as regras de Leibniz e da cadeia para integrais fracionárias.

## 1.1 Espaços $L^p$

**Definição 1.1.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}$  um conjunto mensurável com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $L^p(\Omega)$  é o espaço das (classes de equivalência de) funções reais  $p$ -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço  $L^\infty(\Omega)$  como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{\Omega} |f| < \infty \right\}.$$
<sup>1</sup>

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

---

<sup>1</sup> O símbolo  $\sup_{\Omega}$  denota o supremo da função  $f$  no intervalo  $\Omega$ .

## 1.2 Transformada de Fourier

Apresentaremos nesta seção a definição da transformada de Fourier de uma função  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Além disso, mostraremos algumas propriedades importantes. Apesar da definição usada ser válida para números complexos, aqui consideramos apenas o caso real.

**Definição 1.2.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A transformada de  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , denotada por  $\mathcal{F}[f](\cdot)$ , é dada pela integral

$$\mathcal{F}[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt \quad (1.1)$$

para  $x \in \mathbb{R}$  para o qual a integral exista.

**Teorema 1.2.2 (Inversão).** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos que

- (1)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dt$  seja convergente;
- (2) e em qualquer intervalo limitado,  $f, f'$  são contínuas por partes com no máximo uma quantidade finita de máximo, mínimo ou descontinuidades. Seja  $F = \mathcal{F}[f]$ . Então se  $f$  é contínua em  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx. \quad (1.2)$$

Além do mais, se  $f$  é descontínua em  $t \in \mathbb{R}$  com  $f(t_+)$  e  $f(t_-)$  denotando limites à direita e à esquerda de  $f$  em  $t$ , então

$$\frac{1}{2}[f(t_+) + f(t_-)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx.$$

Um comentário deste teorema pode ser consultado em [Sneddon \(1995, pág. 19\)](#).

**Teorema 1.2.3.** Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas,  $f'$  e  $g'$  contínuas por partes. Se

$$\mathcal{F}[f](x) = \mathcal{F}[g](x), \text{ para todo } x$$

então  $f(t) = g(t)$  para todo  $t$ .

*Demonstração.* Temos da definição de inversa que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](x)e^{ixt} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[g](x)e^{ixt} dx \\ &= g(t). \end{aligned}$$

□

As transformadas (1.1) e (1.2) são inversa uma da outra, ou seja,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f, \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = f.$$

Outras duas propriedades bem conhecidas da transformada de Fourier são:

$$\mathcal{F}[D^n f(x)](\kappa) = (-i\kappa)^n \mathcal{F}[f](\kappa),$$

$$D^n(\mathcal{F}[f](\kappa)) = (i\kappa)^n \mathcal{F}[f](\kappa),$$

com  $n \in \mathbb{N}$  onde  $D^n$  denota o operador diferencial de ordem  $n$ .

A convolução de duas funções  $f$  e  $g \in L^1(\mathbb{R})$  é definida pela integral

$$f * g := (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

A convolução de duas funções é comutativa, ou seja,

$$f * g = g * f.$$

Além disso, a transformada de Fourier da convolução é dada por

$$\mathcal{F}[(f * g)](x) = \mathcal{F}[f](x)\mathcal{F}[g](x). \quad (1.4)$$

Temos ainda a transformada de Fourier  $n$ -dimensional, a qual está definida para uma função em  $\mathbb{R}^n$  e escrita como

$$(\mathcal{F}[f])(x) = \mathcal{F}([f](\mathbf{t}))(x) = F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot t} f(t) d^n t, \quad (1.5)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

E a sua inversa é dada pela integral

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[g](\mathbf{t}) &= \mathcal{F}^{-1}[g(x)](t) = \frac{1}{(2\pi)^n} G(-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it \cdot x} g(x) dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

As integrais (1.5) e (1.6) têm as mesmas propriedades das integrais 1-dimensional (1.1) e (1.2). Elas convergem absolutamente, por exemplo, para funções  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  e na norma do espaço  $L^2(\mathbb{R})$  para  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ .

Seja Delta o operador Laplaciano  $n$ -dimensional, isto é,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Então,

$$\mathcal{F}[\Delta f](x) = -|x|^2(\mathcal{F}[f](x)),$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Analogamente, à equação (1.3), à convolução de duas funções  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  é dada por

$$f * g = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt,$$

a qual a transformada de Fourier é dada pela fórmula (1.4), mas com  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mais detalhes em [Baleanu et al. \(2012\)](#)

### 1.3 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um método para transformar um problema com valores iniciais (PVI), cuja equação diferencial ordinária (EDO) tenha coeficientes constantes, em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste (PVI) de uma forma indireta, sem o cálculo de integrais e derivadas para obter a solução geral da equação diferencial.

**Definição 1.3.1.** Seja  $f(t)$  uma função real ou complexa, definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$  e  $z$  um número complexo da forma  $z = s + iv$ , com  $s, v \in \mathbb{R}$  de tal forma que para cada  $s > 0$  ocorra a convergência da integral imprópria

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_0^b f(t)e^{-zt} dt \right] \quad (1.7)$$

então a função  $F = F(z)$ , definida pela integral acima, recebe o nome de transformada de Laplace da função  $f = f(t)$ . Se o parâmetro  $z$  é um número real, isto é, a parte imaginária  $v = 0$ , usamos  $z = s > 0$  e a definição fica simplesmente na forma

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (1.8)$$

Para representar a transformada de Laplace da função  $f$ , é comum usar a notação

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s). \quad (1.9)$$

A definição e o teorema seguintes encontram-se em [Butkov \(1968\)](#).

**Definição 1.3.2** (Ordem exponencial). Uma função  $f(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , é de ordem exponencial  $\alpha$  se existem constantes reais  $M > 0$ , e  $t_0 > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tais que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \text{ para todo } t > t_0, \quad (1.10)$$

ou, equivalentemente,  $e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M$  se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-\alpha t}| = 0$ . Uma função  $f$  é limitada se existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| \leq M$ , para todo  $t$  no domínio de  $f$ . Assim, se  $f$  é limitada, dado  $a > 0$ , temos

$$e^{-at} |f(t)| \leq M, \text{ para todo } t \geq 0,$$

pois  $|e^{-at}| \leq 1$ . Logo, toda função limitada é de ordem exponencial.

**Teorema 1.3.3** (Existência da transformada de Laplace). Se uma função  $f(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , é contínua por partes em todo intervalo fechado  $0 \leq t \leq c$ , com  $c > 0$  e de ordem exponencial, então existe  $a \in \mathbb{R}$  de modo que  $\mathcal{L}[f](s)$  existe para  $Re(s) = \sigma > a$ .

**Definição 1.3.4.** Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções integráveis e de ordem exponencial  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, e com transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$  no intervalo  $[0, \infty)$ . Definimos a convolução de  $f(t)$  e  $g(t)$ , denotada por  $(f * g)(t)$  como sendo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Calculando a transformada de Laplace de um produto de convolução, isto é,

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variável  $t - \tau = \tau'$  podemos escrever

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_{-\tau}^\infty d\tau' \int_0^t e^{-s(\tau+\tau')} f(\tau)g(\tau') d\tau'.$$

Definimos a função causal  $g(t) = 0$  para  $t < 0$ , o limite superior em vez de  $t$  pode ser tomado  $\infty$ , logo

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^\infty g(\tau')e^{-s\tau'} d\tau' \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = F(s)G(s),$$

isto é, a transformada de Laplace do produto de convolução é o produto das transformadas (BUTKOV, 1968).

## 1.4 Integral e derivada de Riemann-Liouville

A integral de Riemann-Liouville tem esse nome em homenagem a Bernard Riemann e a Joseph Liouville que consideraram a possibilidade do cálculo fracionário em 1832. Além disso, essa é uma maneira de generalizar a integral a qual é fornecida pela fórmula de Cauchy.

**Definição 1.4.1.** Consideremos uma função bem comportada  $f(t)$  com  $t \in \mathbb{R}^+$ , denotamos em  $(0, t)$  o operador integral de ordem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J^n$  como a  $n$ -ésima integral, como segue

$$J^n f(t) := \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1},$$

temos

$$J^n f(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{(n-1)} d\tau, \quad (1.12)$$

a conhecida fórmula de Cauchy.

Percebeu-se que o lado direito de (1.12) poderia ter sentido sempre que  $n$  fosse um número real. Assim, seria natural definirmos a integração fracionária como segue

**Definição 1.4.2.** Sejam  $f(x) \in L^1((a, b))$  e  $-\infty < a < b < \infty$ , então

$$J_{a^+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } x > a \quad (1.13)$$

e

$$J_{b^-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } x < b. \quad (1.14)$$

em que  $Re(\alpha) > 0$ . Se  $\alpha = 0$ , admitimos  $J_{a^+}^0 \equiv J_{b^-}^0 := \mathbb{J}$ , onde  $\mathbb{J}$  é o operador identidade.

A conexão entre a integral de Riemann-Liouville e a derivada pode, como percebida por Riemann, ser obtida pela resolução da integral de Abel <sup>2</sup> para qualquer  $\alpha \in (0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > 0. \quad (1.15)$$

Podemos resolver (1.15) pela mudança de variável  $x$  para  $t$  e variável  $t$  para  $s$ , respectivamente, depois multiplicando ambos os lados da equação por  $(x-t)^{-\alpha}$  e integrando obtemos

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\phi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (1.16)$$

<sup>2</sup> Abel encontrou essa equação no denominado problema da tautócrona, veja mais em [Gorenflo e Vessella \(1991\)](#).

Usando o teorema de Fubini, obtemos

$$\int_a^x \phi(s) ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}. \quad (1.17)$$

Façamos uma nova mudança de variável nesse caso  $t = s + \tau(x-s)$  e usando a função beta<sup>3</sup>

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} d\tau = B(\alpha, \alpha-1) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha). \quad (1.18)$$

Portanto, obtemos

$$\int_a^x \phi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (1.19)$$

Após a diferenciação podemos escrever

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (1.20)$$

Assim, se a equação (1.15) tem uma solução, ela necessariamente é dada por (1.20) para qualquer  $\alpha \in (0, 1)$ . Podemos observar que (1.15) é a integral de ordem  $\alpha$  e a inversa (1.20) é a derivada de ordem  $\alpha$  a qual será vista nas seções seguintes. Denotaremos daqui em diante  $J_0^\alpha = J^\alpha$ . Existe uma propriedade muito importante da integral fracionária chamada propriedade de semigrupo (PODLUBNY, 1998).

**Propriedades 1.4.3.** Sejam  $\alpha > 0, \beta > 0$  e  $f(x) \in C([a, b])$ . A integral fracionária de Riemann-Liouville satisfaz as relações

$$(J_{a^+}^\alpha J_{a^+}^\beta f)(x) = (J_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad \text{e} \quad (J_{b^-}^\alpha J_{b^-}^\beta f)(x) = (J_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (1.21)$$

As relações em (1.21) são válidas também para funções  $f(x)$  integráveis no sentido de Lebesgue.

*Demonstração.* A prova é bastante direta, temos por definição:

$$(J_{a^+}^\alpha J_{a^+}^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\beta}} du,$$

e uma vez que  $f(x) \in C([a, b])$  podemos, pelo teorema de Fubini, mudar a ordem de integração e tomar  $t = u + s(x-u)$  assim obtemos

<sup>3</sup> Veja mais na seção A.2.

$$(J_{a^+}^\alpha J_{a^+}^\beta f)(x) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha-\beta}} du = J_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x).$$

□

Assim, as equações (1.21) são satisfeitas em qualquer ponto para  $f(x) \in C([a, b])$  e, além disso, em quase todo ponto para  $f(x) \in L^1(a, b)$ . Elas são verdadeiras para todo ponto sempre que  $f(x) \in L^1(a, b)$  se  $\alpha + \beta \geq 1$ .

**Exemplo 1.4.4.** De acordo com a definição, é possível calcular a integral fracionária de ordem  $\alpha$ , por exemplo, no caso  $x^\mu$ , com  $\mu > -1$ .

De fato, fazendo a mudança de variável  $u = \frac{s}{x}$ , obtemos

$$\begin{aligned} J^\alpha x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^\mu ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} (xu)^\mu x du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\alpha (1-u)^{\alpha-1} x^\mu u^\mu du, \\ &= \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\mu du. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Usando a função beta na integral (1.22),

$$J^\alpha x^\mu = \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1, \alpha), \tag{1.23}$$

$$= \frac{x^{\alpha+\mu} \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}. \tag{1.24}$$

Para a derivada fracionária, é natural introduzirmos como uma operação inversa a integração fracionária. Primeiramente, introduzimos os operadores de Riemann-Liouville no caso  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e, em seguida, consideremos a seguinte notação

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}, \tag{1.25}$$

onde  $[\alpha]$  denota a parte inteira de  $\alpha$  e  $\{\alpha\}$  denota a parte não inteira.

A seguir introduziremos a chamada função *Gel'fand-Shilov*, (CAMARGO, 2009),

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

com  $Re(\lambda) > 0$ . Podemos escrever (1.13) e (1.14) como a convolução da função (1.26) com uma função  $y(t)$  definida no mesmo domínio da seguinte forma

$$J_{a^+}^\alpha y(t) := \int_a^t f_\lambda(t - \tau)y(\tau) d\tau$$

e

$$J_{b^-}^\alpha y(t) := \int_t^b f_\lambda(t - \tau)y(\tau) d\tau.$$

**Definição 1.4.5.** Seja  $\alpha > 0$  um número real. Definimos as derivadas fracionárias à direita e à esquerda pelas expressões, respectivamente,

$$D_{a^+}^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_{a^+}^{\{\alpha\}} f = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{1-\{\alpha\}} f,$$

e

$$D_{b^-}^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_{b^-}^{\{\alpha\}} f = -\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{b^-}^{1-\{\alpha\}} f.$$

ou ainda na seguinte forma

$$D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}},$$

e

$$D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t - x)^{\alpha - n + 1}},$$

para toda  $f \in C^n([a, b])$  com  $n = [\alpha] + 1$ . Podemos usar ainda as notações

$$D_{a^+}^\alpha f = J_{a^+}^{-\alpha} f \quad \text{e} \quad D_{b^-}^\alpha f = J_{b^-}^{-\alpha} f. \quad (1.27)$$

A integral de ordem inteira tem inversa à esquerda, mas em geral não possui inversa à direita. Isso ocorre também no caso fracionário, como vimos acima.

A seguir serão apresentadas as definições das abordagens de derivadas utilizadas. Ainda hoje não existe uma unificação de todas as definições de derivada fracionária, ou seja, para cada tipo de problema se tem uma melhor abordagem a ser utilizada (OLIVEIRA; MACHADO, 2014), porém existe condições para que uma derivada seja considerada fracionária (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015). Começamos com a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

**Definição 1.4.6.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $n$  o menor inteiro maior que  $\alpha$ . Assim a derivada de Riemann-Liouville da função  $f$  é

$$D^\alpha f(x) = D^n (J^{n-\alpha} f)(t), \quad n - 1 < \alpha \leq n.$$

Para  $\alpha = n$  temos  $D^n (J^0 f(t))$ , isto é, temos a derivada de ordem inteira.

**Exemplo 1.4.7.** Utilizando a definição 1.4.6 podemos calcular a derivada de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$ , por exemplo, de  $f(x) = x^\mu$  com  $\mu > -1$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^n (J^{n-\alpha}) f(x) &= D^n \left[ \frac{x^{n-\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)} \right], \\ &= \frac{x^{-\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Em (1.28) considerando  $\mu = 0$  temos que  $D^\alpha x^0 = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ , ou seja, a derivada de Riemann-Liouville de  $f(x) = 1$  não é zero. Podemos afirmar, mais geralmente, que dada uma constante  $C \in \mathbb{R}$  temos que  $D^\alpha C = \frac{Cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ .

O próximo teorema nos mostra que a derivada de ordem  $\alpha$  é inversa à esquerda, mas não necessariamente inversa à direita de uma integral de ordem  $\alpha$ .

**Teorema 1.4.8.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $f(x) \in L^p(a, b)$  com  $(1 \leq p \leq \infty)$ , então as seguintes igualdades

$$D^\alpha J^\alpha f = f, \quad (1.29)$$

$$J^\alpha D^\alpha f = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} x^{\alpha-k} D^{n-k+1} J^{n-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} \quad (1.30)$$

são válidas em todo  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Para a primeira igualdade basta escrevermos

$$D^\alpha J^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} J^\alpha f(x) = D^m J^m f(x) = f(x).$$

Na segunda expressão, note que

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = D J^{\alpha+1} D^\alpha f(x) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-s)^\alpha D^\alpha f(s) ds \right]. \quad (1.31)$$

Utilizando integração por partes sucessivas vezes em (1.31) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-s)^\alpha D^\alpha f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-s)^\alpha D^m J^{m-\alpha} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left( (x-s)^\alpha D^{m-1} J^{m-\alpha} f(s) \Big|_0^x - \alpha \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} D^{m-1} J^{m-\alpha} f(s) ds \right) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha D^{m-1} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} D^{m-1} J^{m-\alpha} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha D^{m-1} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( (x-s)^{\alpha-1} D^{m-2} J^{m-\alpha} f(s) \Big|_0^x - (\alpha-1) \int_0^x (x-s)^{\alpha-2} D^{m-2} J^{m-\alpha} f(s) ds \right) \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha D^{m-1} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} D^{m-2} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-2} D^{m-2} J^{m-\alpha} f(s) ds \\
&\vdots \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha D^{m-1} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} D^{m-2} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} \cdots \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-(m-1))} x^{\alpha-m+1} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-m+1)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-m} J^{m-\alpha} f(s) ds \\
&= - \left( \sum_{\kappa=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha+2-\kappa)} x^{\alpha-\kappa+1} D^{m-\kappa} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - J^{\alpha-m+1} J^{m-\alpha} f(x) \right) \\
&= - \left( \sum_{\kappa=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha+2-\kappa)} x^{\alpha-\kappa+1} D^{m-\kappa} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} - J f(x) \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J^\alpha D^\alpha f(x) &= \frac{d}{dt} \left( - \sum_{\kappa=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha+2-\kappa)} x^{\alpha-\kappa+1} D^{m-\kappa} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0} + J f(x) \right) \\
&= f(x) - \sum_{\kappa=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha-\kappa+1)} x^{\alpha-\kappa+1} D^{m-\kappa} J^{m-\alpha} f(x) \Big|_{x=0}
\end{aligned}$$

□

## 1.5 Derivada de Caputo

A definição 1.4.6 da derivada de Reimann-Liouville teve um papel importante no desenvolvimento da teoria da integral e derivada fracionárias para diversas aplicações em matemática pura (solução de equações diferenciais, definição de novas classes de funções entre outros), no entanto novas aplicações levaram a um refinamento das definições e, assim, surgiram novas abordagens para atender as recentes aplicações como: Riesz, Weyl, Grünwald-Letnikov e Riesz-Feller (OLIVEIRA; MACHADO, 2014). Uma dessas abordagens é atribuída a Caputo que definiu da seguinte forma a derivada fracionária.

**Definição 1.5.1.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  o menor inteiro maior que  $\alpha$ . A derivada de Caputo da função  $f$  é

$$*_x D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n), \quad (1.32)$$

onde  $f^{(n)}(\xi) = \frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n}$ .

A conexão entre as derivadas de Caputo<sup>4</sup> e Riemann-Liouville é dada pelas relações seguintes

$${}_*D_{a+}^\alpha f(x) = \left( {}^{RL}D_{a+}^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (1.33)$$

e

$${}_*D_{b-}^\alpha f(x) = \left( {}^{RL}D_{b-}^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (1.34)$$

em que  ${}^{RL}D_{a+}$  e  ${}^{RL}D_{b-}$  denotam a derivada de Riemann-Liouville.

Em particular, quando  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , as relações (1.33) e (1.34) podem ser escritas como

$${}_*D_{a+}^\alpha f(x) = ({}^{RL}D_{a+}^\alpha [f(t) - f(a)])(x), \quad (1.35)$$

e

$${}_*D_{b-}^\alpha f(x) = ({}^{RL}D_{b-}^\alpha [f(b) - f(t)])(x). \quad (1.36)$$

Caso  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  e a derivada clássica  $f^n(x)$  exista, então  ${}_*D_{a+}^\alpha f(x)$  coincide com  $f^n(x)$ , enquanto  ${}_*D_{b-}^\alpha f(x)$  coincide com  $f^n(x)$ , porém multiplicada por um fator constante  $(-1)^n$  (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006, pág. 92–93).

## 1.6 Derivada de Riesz-Feller

Dada uma função  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , denominamos a derivada de Riesz-Feller de ordem  $\alpha$  e a anti-simetria  $\theta$  por  ${}_x D_\theta^\alpha f(x)$ , a qual é definida pela transformada de Fourier (FELLER, 1952)

$$\mathcal{F}[{}_x D_\theta^\alpha f(x)] = -\Psi_\alpha^\theta(p) \hat{f}(p) \quad (1.37)$$

com  $x, p \in \mathbb{R}$  e onde  $\hat{f}(p)$  é a transformada de Fourier de  $f(x)$ . Nesta expressão,  $0 < \alpha \leq 2$ , e a anti-simetria  $|\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}$  e

$$\Psi_\alpha^\theta(p) = |p|^\alpha e^{i(\operatorname{sign} p)\theta\pi/2}.$$

Para  $\alpha \rightarrow 2$ , recuperamos a transformada de Fourier de uma derivada de segunda ordem. Este operador, como definido pela equação (1.37), foi obtido como a integral fracionária inversa, o conhecido potencial de Riesz, para  $\theta = 0$  e  $\alpha \neq 1$  como em Gorenflo e Mainardi (1998).

<sup>4</sup> Para a derivada fracionária segundo Caputo temos que  ${}_*D_x^\alpha C = 0$  para qualquer  $C \in \mathbb{R}$ .

## 1.7 Derivada de Riesz

**Definição 1.7.1.** Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . A derivada de Riesz é dada pela soma

$${}_x D_1^\alpha f(x) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} (J_+^{-\alpha} f(x) + J_-^{-\alpha} f(x)), \quad (1.38)$$

para  $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$ , com  $J_\pm^{-\alpha} = (\pm 1)^l D_\pm^\alpha$  e  $l - 1 < \alpha < l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Os operadores  $J_+^{-\alpha}$  e  $J_-^{-\alpha}$  são as derivadas de Riemann-Liouville à direita e à esquerda, respectivamente.

A propriedade mais importante dessa derivada está associada à transformada de Fourier. Considerando  $1 < \alpha \leq 2$ ,

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha f(x), p] = -|p|^\alpha \mathcal{F}[f(x), p], \quad (1.39)$$

onde  $p$  é o parâmetro da transformada de Fourier. Podemos ver que a derivada de Riesz é um caso particular da derivada de Riesz-Feller.

### 1.7.1 Regra de Leibniz com derivada fracionária

No cálculo de uma variável a derivada do produto ou regra de Leibniz é usada para calcular a derivada do produto de duas funções. Dadas  $f(t)$  e  $g(t)$  diferenciáveis temos que

$$D[f(t)g(t)] = f(t)g'(t) + f'(t)g(t).$$

É possível estender esta regra para uma derivada  $n$ -ésima com  $n \in \mathbb{N}$  por indução (OLIVEIRA, 2014) para quaisquer funções de classe <sup>5</sup>  $C^n[a, b]$ .

$$D_t^n [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D_t^k f(t)] [D_t^{n-k} g(t)], \text{ onde } D_t^0 f(t) = f(t) \text{ e } D_t^0 g(t) = g(t). \quad (1.40)$$

Para o caso em que temos  $\alpha \in \mathbb{R}$  e fazendo uso da derivada no sentido de Riemann-Liouville não obtemos a mesma propriedade que no caso inteiro, pois, no caso inteiro tanto faz a ordem das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , contudo no caso fracionário isso faz toda a diferença. No caso fracionário a regra de Leibniz no sentido clássico não é válida sempre, ou seja,

$$D_t^\alpha (f(t)g(t)) \neq D_t^\alpha (f(t))g(t) + f(t)D_t^\alpha (g(t)).$$

Um estudo detalhado a respeito dessa característica é feito em Tarasov (2013).

<sup>5</sup> Funções com  $n$  derivadas contínuas.

### 1.7.2 Regra de Leibniz para derivada segundo Riemann-Liouville

Em Podlubny (1998) e em Miller e Ross (1993) é apresentada a regra de Leibniz para o caso  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A seguir vamos apresentar a regra de Leibniz para o caso fracionário. Utilizamos como referência Miller e Ross (1993), Camargo (2009), Diethelm (2010) e também Samko, Kilbas e Marichev (1993). Para apresentar a regra de Leibniz com  $\alpha \in \mathbb{R}$  apresentaremos antes o seguinte Lema:

**Lema 1.7.2.** Seja  $f(t)$  uma função de classe  $C$  no intervalo no intervalo  $(a, b)$ , então

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} [D^n f(t)] \quad (1.41)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $t \in (a, b)$  com  $\alpha$  é denotado como (1.25).

*Demonstração.* A fim de demonstrar (1.41) consideramos dois casos, a saber:

1. (Caso  $\alpha < 0$ ) Neste caso a derivada fracionária de Riemann-Liouville torna-se

$$D_t^\alpha = J^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx. \quad (1.42)$$

Como  $f$  é de classe  $C$  em  $(a, b)$  então ela é analítica em  $(a, b)$  e pode ser representada pela série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D_t^n f(t)]}{n!} (t-x)^n. \quad (1.43)$$

Substituindo a equação (1.43) na equação (1.42), obtemos

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n!} (t-x)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} dx. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Introduzindo a mudança de variável,  $u = t - x$  na equação (1.44), obtemos<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_{t-a}^0 u^{n-\alpha-1} (-du) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_0^{t-a} u^{n-\alpha-1} (du) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \left[ \frac{u^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_0^{t-a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

<sup>6</sup> Como  $f$  é de classe  $C$  podemos comutar o somatório com a integral.

Multiplicando e dividindo (1.45) por  $\Gamma(n - \alpha)$  e utilizando  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ , obtemos

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n - \alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t - a)^{n - \alpha}}{n - \alpha \Gamma(n - \alpha)} [D^n f(t)] \quad (1.46)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n - \alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t - a)^{n - \alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} [D^n f(t)] \quad (1.47)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(t - a)^{n - \alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} [D^n f(t)]. \quad (1.48)$$

Utilizamos na última passagem a relação  $\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n - \alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)}$ .

2. (Caso  $\alpha > 0$ ) Seja  $f$  de classe  $C$  em  $(a, b)$ , então ela é analítica em  $(a, b)$  e pode ser representada por (1.43), então

$$D_t^\alpha f(t) = D^{[\alpha]+1} J^{\{\alpha\}-1} f(t). \quad (1.49)$$

Usando (1.49), temos

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= D_t^{[\alpha]+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\} - 1}{n} \frac{(t - a)^{n - \{\alpha\} + 1}}{\Gamma(n - \{\alpha\} + 2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\} - 1}{n} D_t^{[\alpha]+1} \frac{(t - a)^{n - \{\alpha\} + 1}}{\Gamma(n - \{\alpha\} + 2)}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Leibniz para a derivada de ordem inteira (1.40), no caso em que  $f := D_t^n [f(t)]$  e  $g(t) := (t - a)^{n - \{\alpha\} + 1}$ , obtemos

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\} - 1}{n} \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \binom{[\alpha] + 1}{k} \frac{(t - a)^{n - \alpha + k} D_t^{n+k} f(t)}{\Gamma(n - \alpha + k + 1)}.$$

Podemos tomar o limite superior do segundo somatório como infinito, pois  $\binom{n}{k} = 0$  se  $n < k$ , então segue

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\} - 1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{[\alpha] + 1}{k} \frac{(t - a)^{n - \alpha + k} D_t^{n+k} f(t)}{\Gamma(n - \alpha + k + 1)}.$$

Introduzindo a mudança de variável  $j = n + k$ , obtemos

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^j \binom{\{\alpha\} - 1}{n} \binom{[\alpha] + 1}{j - n} \right] \frac{(t - a)^{j - \alpha} [D_t^j f(t)]}{\Gamma(j - \alpha + 1)}. \quad (1.50)$$

Utilizando a propriedade binomial, podemos escrever

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{(t-a)^{j-\alpha} [D_t^j f(t)]}{\Gamma(j-\alpha+1)}. \quad (1.51)$$

□

Com a demonstração do Lema (1.7.2) vamos, finalmente, demonstrar a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville [Camargo \(2009\)](#), [Diethelm \(2010\)](#), [Oliveira \(2014\)](#).

**Teorema 1.7.3** (Regra de Leibniz para derivada segundo Reimann-Liouville). Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  funções analíticas em  $[a, b]$ . Então,

$$D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D_t^k g(t)] [D_t^{\alpha-k} f(t)], \quad (1.52)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$

*Demonstração.* Pelo Lema (1.7.2), temos

$$D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} D_t^\alpha [f(t)g(t)].$$

Utilizando a regra de Leibniz (caso inteiro) (1.40) obtemos

$$D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D_t^{n-k} f(t)] [D_t^k g(t)].$$

Comutando os somatórios e utilizando o fato de que  $\binom{n}{k} = 0$  com  $n < k$ , segue-se

$$D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{k} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} [D_t^{n-k} f(t)] [D_t^k g(t)].$$

Introduzindo a mudança de variável  $n+k := n$ , obtemos

$$\begin{aligned} D_t^\alpha [f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [D_t^k g(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} [D_t^n f(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D_t^k g(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} [D_t^n f(t)]. \end{aligned}$$

Pelo Lema (1.7.2) podemos escrever

$$D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D_t^k g(t)] [D_t^{\alpha-k} f(t)].$$

□

## 1.8 Regra da Cadeia ou Fórmula de Faà di Bruno

A regra da cadeia é utilizada para calcular a derivada de funções compostas, o que comumente utiliza-se é a fórmula

$$D_x [g(f(x))] = D_u [g(u)] D_x [f(x)] = g^{(1)} f^{(1)} \quad (1.53)$$

para o caso de derivada primeira, onde  $g(u)$  é diferenciável com respeito a  $u$  e  $u$  é diferenciável com respeito a  $x$ . Existe uma generalização natural para  $n$ -ésima derivada da função composta conhecida como fórmula de Faà Di Bruno. Na literatura existem diversas demonstrações para esse resultado, por exemplo, em [Roman \(1980\)](#) é utilizado um funcional linear e equações polinomiais para provar a fórmula, já em [Johnson \(2002\)](#) é feito um apanhado histórico da fórmula e é apontado como outros matemáticos deram suas contribuições para a demonstração dessa fórmula e de resultados ligados a ela.

Nosso objetivo aqui não é demonstrar a fórmula, mas fazer um breve comentário utilizando como referência os estudos de [Oldham e Spanier \(1974\)](#). Utilizaremos a notação  $g^{(m)} = D_u^m [g(u)]$  e  $f^{(n)} = D_x^n [f(x)]$  onde  $u = f(x)$  é diferenciável e  $m, n \in \mathbb{N}$ . Para o caso de  $n = 2$  utilizamos (1.53) e a regra de Leibniz para o caso inteiro (1.40), assim

$$\begin{aligned} D_x^2 [g(f(x))] &= D_x [D_x g f(x)] \\ &= D_x [D_u [g(u)] D_x [f(x)]] \\ &= [D_x D_u g(u)] [D_x f(x)] + [D_u g(u)] [D_x^2 f(x)] \\ &= g^{(1)} f^{(2)} + g^{(2)} [f^{(1)}]^2. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter uma expressão para derivadas de ordens 3, 4 e 5 como segue

$$\begin{aligned} D_x^3 [g(f(x))] &= g^{(1)} f^{(3)} + 3g^{(2)} f^{(1)} f^{(2)} + g^{(3)} [f^{(1)}]^3, \\ D_x^4 [g(f(x))] &= g^{(1)} f^{(4)} + 4g^{(2)} f^{(1)} f^{(3)} + 6g^{(2)} [f^{(2)}]^2 + 6g^{(3)} [f^{(1)}]^2 f^{(2)} + g^{(4)} [f^{(1)}]^4, \\ D_x^5 [g(f(x))] &= g^{(1)} f^{(5)} + 5g^{(2)} f^{(1)} f^{(4)} + 10g^{(3)} [f^{(1)}]^2 f^{(3)} + 30g^{(3)} f^{(1)} [f^{(2)}]^2 \\ &\quad + 10g^{(4)} [f^{(1)}]^3 f^{(2)} + g^{(5)} [f^{(1)}]^5. \end{aligned}$$

A generalização para o caso de ordem  $n$  é dado no seguinte teorema.

**Teorema 1.8.1** (Fórmula de Faà di Bruno). Sejam  $f, g \in C^n [a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$D_x^n [g(f(x))] = n! \sum_{m=1}^n g^{(m)} \sum_{k=1}^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{P_k!} \left[ \frac{f^{(k)}}{k!} \right]^{P_k}$$

onde  $\sum$  é a soma sobre todas as combinações de inteiros não negativos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tal que

$$\sum_{k=1}^n kP_k = n \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n P_k = m.$$

No livro [Oldham e Spanier \(1974\)](#) são apresentadas as seguintes fórmulas para derivação inteira da função composta

$$D_t^m f(y(t)) = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{1}{k!} [-y(t)]^r D_t^m [(y(t))^{k-r}] D_y^k f(y)$$

e

$$D_t^m f(t, (y(t))) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{1}{k!} [-y(t)]^r D_t^m [(y(t))^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} f(t, y)}{\partial t^{n-m} \partial y^k}. \quad (1.54)$$

No artigo de [Osler \(1970\)](#) é encontrada a fórmula para a derivada fracionária da função composta. Na dissertação de [Oliveira \(2014\)](#) é feito um estudo detalhado dessa fórmula para as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

# Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais fracionárias

O método de simetrias de Lie é uma ferramenta poderosa e uma boa abordagem para construção de soluções exatas de equações diferenciais. Nas últimas décadas, pesquisas extensivas têm sido feitas sobre a teoria das simetrias de Lie e suas ricas aplicações em equações diferenciais (BLUMAN; KUMEI, 1989; OLVER, 1993; IBRAGIMOV, 1994).

Entre os anos de 2007 a 2009, Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2009) propuseram abordar o estudo das equações diferenciais fracionárias via simetrias de Lie. Desde então muitos outros trabalhos, como em, Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2011), Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2012), Wang, Liu e Zhang (2013) vêm apresentando essa abordagem para encontrar soluções exatas. A teoria de simetrias de Lie para EDP de ordem inteira é bem sólida e tem diversos trabalhos que utilizam desta técnica. No trabalho de Soares (2011) é feita uma abordagem da simetria de Lie da equação de Burgers generalizada. Neste capítulo faremos uma apresentação das simetrias de Lie para equação diferencial parcial fracionária com base nos artigos Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2007) e Sahadevan e Bakkyaraj (2012).

## 2.1 Simetrias de Lie de EDP de ordem inteira

A seguir apresentaremos algumas definições e teoremas os quais podem ser encontrados juntamente com as suas respectivas demonstrações em (BLUMAN; ANCO, 1989). Nas definições e teoremas é utilizada a convenção de Einstein, ou seja, índices repetidos são somados.

**Definição 2.1.1.** Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto, não-vazio e conexo. O conjunto de transformações  $x^* = X(x; \epsilon)$  definido para cada  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in D$ , dependendo de um parâmetro  $\epsilon \in S \subset \mathbb{R}$  e munido de uma lei de composição de parâmetros

$$\phi : S \times S \rightarrow S$$

forma um grupo de transformações em  $D$  se:

1. Para cada parâmetro  $\epsilon$  em  $S$  as transformações são injetivas em  $D$ , em particular  $x^*$  pertence a  $D$ ;
2.  $S$ , com a lei de composição  $\phi$ , forma um grupo  $G$ ;
3. Se  $e$  denota o elemento neutro de  $G$  então para todo  $x \in D$  temos  $x^* = X(x; e) = x$ ;
4. Se  $x^* = X(x; \epsilon)$  e  $x^{**} = X(x^*; \delta)$  então  $x^{**} = X(x; \phi(\epsilon, \delta))$ .

**Definição 2.1.2.** Um grupo de transformações define um grupo de transformações de pontos de Lie GTPL a um parâmetro se adicionarmos, às propriedades anteriores, as seguintes:

1.  $\epsilon$  é um parâmetro contínuo, i.e.,  $S$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade  $\epsilon = 0$  corresponde ao elemento identidade;
2.  $X$  é infinitamente diferenciável com respeito a  $x \in D$  e é uma função analítica de  $\epsilon \in S$ ;
3.  $\phi(\epsilon, \delta)$  é uma função analítica de  $\epsilon$  e  $\delta$ , para todo  $\epsilon, \delta \in S$ .

## 2.2 Transformações infinitesimais

Considere um grupo de Lie a um parâmetro

$$x^* = X(x; \epsilon) \tag{2.1}$$

com identidade  $\epsilon = 0$  e lei de composição  $\phi$ . Fazendo a expansão em série de Taylor (2.1) em torno de  $\epsilon = 0$ , temos

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \left( \frac{\partial X(x; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= x + \epsilon \xi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\xi(x) = \left( \frac{\partial X(x; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0}.$$

A transformação

$$x \mapsto x + \epsilon \xi(x)$$

é chamada de transformação infinitesimal do GTPL (2.1), sendo  $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^n(x))$  chamado de infinitésimo.

Em seguida enunciaremos o primeiro teorema fundamental de Lie o qual nos mostra que as transformações infinitesimais contêm as informações essenciais para a determinação de um GTPL a um parâmetro.

**Teorema 2.2.1.** (Primeiro Teorema Fundamental de Lie). Existe uma parametrização  $\tau(\epsilon)$  tal que a transformação do grupo de Lie (2.1) é equivalente à solução de um problema de valor inicial (PVI) para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{d\tau} &= \xi(x^*), \\ x^* \Big|_{\tau=0} &= x. \end{cases} \quad (2.3)$$

Em particular, temos

$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon',$$

onde

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial \phi(a, b)}{\partial b} \Big|_{(a,b)=(\epsilon^{-1}, \epsilon)}$$

e  $\Gamma(0) = 1$ .

**Definição 2.2.2.** O operador diferencial

$$X = X(x) = \xi(x) \cdot \nabla = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente,

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

é chamado de gerador infinitesimal do GTPL (2.1).

Para toda função diferenciável  $F(x) = F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,

$$XF(x) = \xi(x) \cdot \nabla F(x) = \xi^i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}.$$

**Teorema 2.2.3.** O GTPL a 1-parâmetro pode ser escrito da seguinte maneira

$$x^* = e^{\epsilon X} x = x + \epsilon Xx + \frac{\epsilon^2}{2} X^2 x + \dots = [1 + \epsilon X + \frac{\epsilon^2}{2} X^2 + \dots] x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k x \quad (2.4)$$

onde o operador  $X$ , é definido por (2.2.2) e o operador  $X^k = XX^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sendo  $X^0 F(x) = F(x)$  para qualquer função diferenciável  $F(x)$ .

**Teorema 2.2.4.** Uma função  $F(x)$  é invariante sob um GTPL (2.1) se, e somente se,

$$XF(x) \equiv 0.$$

### 2.2.1 Transformações estendidas: uma variável dependente e $n$ variáveis independentes

No estudo da invariância de equações diferenciais parciais de ordem  $k$  com  $n$  variáveis independentes  $x = (x^1, \dots, x^n)$  e uma variável dependente  $u = u(x)$ , somos levados ao problema de encontrar as extensões das transformações do espaço  $(x, u)$  no espaço  $(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$ .

Mostraremos a extensão do gerador  $X$  dado na definição 2.2.2 até uma determinada ordem  $k$  bem como determinaremos seus coeficientes infinitesimais.

Considere o conjunto de transformações de pontos,

$$x^{i*} = X^i(x, u; \epsilon) = x^i + \epsilon \xi^i(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.5)$$

$$u^* = U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.6)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , agindo sobre o espaço  $(x, u)$ , com gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

A  $k$ -ésima extensão de (2.5) e (2.6) é dada por,

$$\begin{aligned} x^{i*} &= X^i(x, u; \epsilon) = x^i + \epsilon \xi^i(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ u_i^* &= U_i(x, u, \partial u; \epsilon) = u_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &\vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_k}^* &= U_{i_1 i_2 \dots i_k}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u; \epsilon) \\ &= u_{i_1 i_2 \dots i_k} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}(x, u, \dots, \partial^k u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $i_l = 1, 2, \dots, n$ , para  $l = 1, 2, \dots, k$  com  $k \geq 1$ . Seus  $k$ -ésimos infinitesimais estendidos são:

$$\left( \xi(x, u), \eta(x, u), \eta^{(1)}(x, u, \partial u), \dots, \eta^{(k)}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) \right),$$

com o  $k$ -ésimo gerador infinitesimal estendido correspondendo a:

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}}, \quad k \geq 1. \quad (2.8)$$

A fórmula explícita para o infinitesimal estendido  $\eta^{(k)}$  resulta do seguinte teorema:

**Teorema 2.2.5.** Os coeficientes  $\eta_i^{(1)}, \dots, \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$ , em (2.8), satisfazem

$$\begin{aligned}\eta_i^{(1)} &= D_i \eta - (D_i \xi^j) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} &= D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k} \xi^j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j},\end{aligned}$$

$i_l = 1, 2, \dots, n$  para  $l = 1, 2, \dots, k$  com  $k \geq 2$ .

Usando o teorema (2.2.5) podemos encontrar  $\eta_x^{(1)}, \eta_t^{(1)}, \eta_{xx}^{(2)}$  conforme foi calculado em (SOARES, 2011) assim, obtemos

$$\begin{aligned}\eta_x^{(1)} &= \eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u (u_x)^2 - \tau_u u_x u_t; \\ \eta_t^{(1)} &= \eta_t + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_t u_x - \tau_u (u_t)^2 - \xi_u u_x u_t; \\ \eta_{xx}^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xx} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) (u_x)^2 \\ &\quad - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} (u_x)^3 - \tau_{uu} (u_x)^2 u_t - 3\xi_{uu} u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned}$$

## 2.3 Invariância de uma equação diferencial parcial

Sejam  $x = (x^1, \dots, x^n) \in D$  e  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Uma equação diferencial parcial de ordem  $k$  é uma relação  $F$  que associa as variáveis independentes  $x \in D$ , dependentes  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  e derivadas de  $u$  até ordem  $k$ , de modo que

$$F(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0. \quad (2.9)$$

Em termos de suas variáveis  $x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u$ , em geral a equação diferencial parcial do tipo (2.9) constitui-se, usualmente, de uma equação algébrica. Para qualquer solução  $u = \theta(x)$  de (2.9) a igualdade,

$$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = (x, \theta(x), \partial \theta(x), \partial^2 \theta(x), \dots, \partial^k \theta(x)) \quad (2.10)$$

define uma solução que está na superfície

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0.$$

**Definição 2.3.1.** O GTPL a um parâmetro

$$\begin{aligned}x^* &= X(x, u; \epsilon), \\ u^* &= U(x, u; \epsilon),\end{aligned} \quad (2.11)$$

deixa a equação diferencial parcial (2.9) invariante se, e somente se, suas  $k$ -ésimas extensões, definidas em (2.7) deixam invariantes (2.9).

**Definição 2.3.2.** Seja

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.12)$$

o gerador infinitesimal de (2.11). O operador  $X$  é admitido pela equação diferencial parcial (2.9) se seu  $k$ -ésimo gerador infinitesimal estendido

$$\begin{aligned} X^{(k)} = & \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots \\ & + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

satisfaz a equação

$$X^{(k)} F(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \text{quando} \quad F(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0.$$

**Teorema 2.3.3** (Critério para invariância de uma equação diferencial parcial). Sejam  $X$  e  $X^{(k)}$  dados, respectivamente, em (2.12) e (2.13). Então (2.11) é admitido pela equação diferencial parcial se, e somente se,

$$X^k F(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad \text{quando} \quad F(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0. \quad (2.14)$$

Para simplificar a demonstração com respeito a quantidades de índices, faremos as seguintes convenções:

1.  $\xi \frac{\partial}{\partial x}$  denotará  $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ;
2.  $\eta^{(l)} \frac{\partial}{\partial u_l}$  denotará  $\eta^{i_1 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}}$ ,  $1 \leq l \leq k$ ;
3.  $u_l$  denotará  $u_{i_1 i_2 \dots i_l}$ ,  $1 \leq l \leq k$ ; valendo a mesma convenção para  $\eta$ ;
4.  $F^*$  denotará  $F$  nos pontos (2.11).

*Demonstração.* Suponha que  $F$  seja invariante sob (2.11). Então,

$$\begin{aligned} F^* &= F(x + \epsilon \xi + \mathcal{O}(\epsilon^2), u + \epsilon \eta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \dots, u_k + \epsilon \eta^{(k)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= F + \epsilon \left( \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial u} + \dots + \eta^{(k)} \frac{\partial F}{\partial u_k} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ &= F + \epsilon X^{(k)} F + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

de onde vemos que (2.3.3) é verdadeira se, e somente se, é invariante, encerrando, assim, a demonstração.  $\square$

A fim de exemplificar o teorema (2.3.3), consideremos a equação de Burgers,

$$u_t = u_{xx} - uu_x, \quad \text{com } u = u(x, t). \quad (2.15)$$

Um gerador de simetria associado a (2.15) é

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.16)$$

Mostraremos que (2.16) é gerador de simetria de (2.15). Podemos escrever a equação de Burgers da seguinte forma

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = u_t - u_{xx} + uu_x.$$

Sabendo que a equação de Burgers é não-linear de segunda ordem devemos utilizar a extensão de segunda ordem de (2.16)

$$X^{(2)} = X + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{ut}^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_{xx}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Consideremos  $\xi = x, \tau = 2t, \eta = -u$ . Temos,  $\eta_x^{(1)} = -2u_x, \eta_t^{(1)} = -3u_t, \eta_{xx}^{(2)} = -3u_{xx}$ . Dessa forma, aplicando  $X^{(2)}$  em  $F$  temos

$$X^{(2)}F = XF + \eta_x^{(1)} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \eta_t^{(1)} \frac{\partial F}{\partial u_t} + \eta_{xx}^{(2)} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}.$$

Sabendo que  $XF = uu_x, \frac{\partial F}{\partial u_x} = -u, \frac{\partial F}{\partial u_t} = 1$  e  $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = -1$ , obtemos

$$X^{(2)}F = uu_x - \eta_x^{(1)}u + \eta_t^{(1)} - \eta_{xx}^{(2)}.$$

Assim, podemos escrever

$$X^{(2)}F = -3(u_t - u_{xx} + uu_x) = -3F.$$

Logo,  $X^{(2)}F = 0$  quando  $F = 0$ .

## 2.4 Simetrias de Lie de EDP fracionária

Em analogia ao caso das EDPs de ordem inteira, explicitado pela equação de Burgers, vamos discutir as simetrias de Lie de equações diferenciais parciais fracionárias (EDPF).

Considere uma EDPF da forma

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots), \quad (2.17)$$

em que  $0 < \alpha \leq 1$  e a derivada considerada é no sentido de Riemann-Liouville. Admitamos que a EDPF é invariante sob um GTPL. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \bar{t} &= t + \epsilon\tau(x, t, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\
 \bar{x} &= x + \epsilon\xi(x, t, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 \bar{u} &= u + \epsilon\eta(x, t, u) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial \bar{t}^\alpha} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \epsilon\eta_\alpha^0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\eta_x^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon\eta_{xx}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $\tau$ ,  $\xi$  e  $\eta$  são infinitesimais e  $\eta_x^{(1)}$ ,  $\eta_{xx}^{(1)}$  e  $\eta_\alpha^0$  são infinitesimais estendidos de ordem 1, 2 e  $\alpha$  respectivamente com gerador infinitesimal

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Uma vez que o limite inferior da integral na definição<sup>1</sup> de  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$  é fixo e, portanto, deve ser invariante com respeito às transformações (2.18) temos a condição de invariância

$$\tau(t, x, u) \Big|_{t=0} = 0.$$

Como a equação (2.17) é fracionária temos que o gerador infinitesimal estendido será

$$X^\alpha = X + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xx}^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_\alpha^{(0)} \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha}, \tag{2.19}$$

onde

$$\eta_\alpha^{(0)} = D_t^\alpha(\eta) + \underbrace{\xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x)}_{(1)} + \underbrace{D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u)}_{(2)}. \tag{2.20}$$

Utilizando a regra de Leibniz (1.52) na equação (2.20) temos:

1. Para a expressão em (1) temos

$$\begin{aligned}
 \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) &= \xi D_t^\alpha(u_x) - \left[ \sum_{n=0}^{\infty} D_t^{\alpha-n}(u_x) D_t^n(\xi) \right] \\
 &= \xi D_t^\alpha(u_x) - \left[ \xi D_t^\alpha(u_x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_t^{\alpha-n}(u_x) D_t^n(\xi) \right] \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u_x) D_t^n(\xi).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

<sup>1</sup> Integral que aparece na derivada de Riemann-Liouville.

2. Para a expressão em (2) temos

$$\begin{aligned}
 & D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^n(D_t(\tau)) - \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^{\alpha+1-n}(u) D_t^n(\tau) \right] + \tau D_t^{\alpha+1}(u) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^n(D_t(\tau)) - \left[ \tau D_t^{\alpha+1}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^{\alpha+1-n}(u) D_t^n(\tau) \right] + \tau D_t^{\alpha+1}(u) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau) - \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^{\alpha+1-n}(u) D_t^n(\tau) \right]. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Na expressão (2.22) entre colchetes, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau) - \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n+1} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha+1}{n+1} \right] D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau).
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação de Stifel  $\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha}{n+1} + \binom{\alpha+1}{n+1}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau) \\
 &= \alpha D_t(\tau) D_t^\alpha(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau). \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.21) e (2.23) na equação (2.20), obtemos

$$\eta_\alpha^{(0)} = D_t^\alpha(\eta) - \alpha D_t(\tau) D_t^\alpha(u) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(u_x) D_t^n(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{\alpha-n}(u) D_t^{n+1}(\tau). \tag{2.24}$$

Precisamos calcular o termo  $D_t^\alpha(\eta)$  de (2.24) lembrando que  $\eta = \eta(t, x, u)$  e  $u = u(t, x)$ , para tanto, utilizaremos a regra de Leibniz (1.52) e, em seguida, a regra da cadeia (1.54).

a) Podemos escrever  $D_t^\alpha(\eta) = D_t^\alpha(1 \cdot \eta)$  e utilizando a regra de Leibniz obtemos

$$D_t^\alpha [1 \cdot \eta(t, x, u(t, x))] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(1) D_t^n [\eta(t, x, u(t, x))].$$

b) Aplicando a regra da cadeia em  $D_t^n [\eta(t, x, u(t, x))]$  temos

$$D_t^n [\eta] = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{1}{k!} [-u(t, x)]^r D_t^m [(u(t, x))^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} \eta(t, x, u)}{\partial t^{n-m} \partial u^k}.$$

Assim obtemos

$$D_t^n [\eta(t, x, u(t, x))] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{\alpha}{n} \binom{m}{n} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \times \\ \times [-u(t, x)]^r D_t^m [(u(t, x))^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} \eta(t, x, u)}{\partial t^{n-m} \partial u^k}. \quad (2.25)$$

A equação (2.25) pode ser escrita selecionando os termos que possuem derivadas em  $u$  e são lineares em  $u$  (veja Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2011), Gazizov, Kasatkin e Lukashchuk (2007) e (SAHADEVAN; BAKKYARAJ, 2012)). Precisamente, estes termos são obtidos quando  $k = 0$  e  $k = 1$ , desta forma a expressão pode ser reescrita como

$$D_t^\alpha(\eta) = \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + \eta_u \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n(\eta_u)}{\partial t^n} D_t^{\alpha-n}(u) + \mu, \quad (2.26)$$

com

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{r=0}^k \binom{\alpha}{n} \binom{m}{n} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \times \\ \times [-u(t, x)]^r D_t^m [(u(t, x))^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} \eta(t, x, u)}{\partial t^{n-m} \partial u^k}. \quad (2.27)$$

Lembrando que a expressão  $\mu$  é igual a zero quando  $\eta$  é linear em  $u$  ou, equivalentemente,  $\mu_{uu} = 0$ .

Dessa forma substituindo a equação (2.26) na equação (2.24) encontramos o  $\alpha$ -ésimo infinitesimal estendido

$$\eta_\alpha^{(0)} = \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) \right] \times \\ \times D_t^{\alpha-n}(u) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x). \quad (2.28)$$

Voltando ao operador (2.19) temos que

$$X^\alpha F = 0 \quad \text{quando} \quad F = 0.$$

A seguir vamos aplicar a teoria apresentada aqui na chamada equação de Burgers fracionária.

**Exemplo 2.4.1.** Considere a equação de Burgers fracionária em que  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $p > 1$  e a derivada segundo Riemann-Liouville como segue

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = u_{xx} + u^p u_x, \quad u = u(x, t)$$

podemos escrevê-la como

$$F(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - u^p u_x$$

e pelo critério de invariância temos:

$$X^\alpha F = XF + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} F + \eta_{xx}^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} F + \eta_\alpha^{(0)} F = 0,$$

quando  $F = 0$ .

Assim, obtemos

$$-p\eta u^{p-1} u_x - \eta_x^{(1)} u^p - \eta_{xx}^{(1)} + \eta_\alpha^{(0)} = 0.$$

Esta equação depende das variáveis  $u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_t, \dots$  e  $D_t^{\alpha-n} u, D_t^{\alpha-n} u_x$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  as quais são independentes. Substituindo as expressões de  $\eta_x^{(1)}, \eta_{xx}^{(1)}, \eta_\alpha^{(0)}$  e separando as expressões em potências de  $u$  obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_u = \xi_t = \tau_u = \tau_x = \eta_{uu} = 0, \\ \binom{\alpha}{n} \partial_t(\eta_u) - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \xi''(x) - u^p \alpha \tau'(t) - 2\eta_{xu} + u^p \xi'(x) - p\eta u^{p-1} = 0, \\ 2\xi'(x) - \alpha \tau'(t) = 0, \\ \partial_t^\alpha(\eta) - u \partial_t^\alpha - \eta_{xx} - u^p \eta_x = 0. \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema anterior encontramos

$$\xi = c_1 x + c_2, \quad \tau = \frac{2c_1 t}{\alpha}, \quad \eta = -\frac{c_1 u}{p},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. O gerador infinitesimal é:

$$X = (c_1 x + c_2) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2c_1 t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c_1 u}{p} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Assim, temos que a álgebra de Lie associada é de dimensão dois, sendo os elementos da base dados por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u}{p} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Podemos utilizar o gerador infinitesimal  $X_2$ , por exemplo, para encontrar a transformação de variável com o objetivo de reduzir a equação de Burgers fracionária a uma equação diferencial ordinária fracionária (SAHADEVAN; BAKKYARAJ, 2012).

O método de simetrias de Lie é uma ferramenta muito útil para encontrarmos soluções exatas de equações diferenciais parciais, pois tem a propriedade de reduzir a ordem de uma EDPF ou mesmo reduzi-la a uma equação diferencial ordinária fracionária. Encontrar as simetrias de Lie de uma EDPF pode ajudar a entender melhor as soluções e até mesmo ser o ponto de partida de outros métodos de resolução de EDPF.

# Equações diferenciais fracionárias não lineares

---

No capítulo anterior apresentamos a base conceitual que utilizaremos daqui por diante. As equações diferenciais parciais de ordem inteira têm um estudo bem consolidado e são alvo de muita pesquisa. O cálculo fracionário, além de trazer novas abordagens para as EDPs, deu a possibilidade de expandir a teoria de equações diferenciais. Neste capítulo trataremos de algumas equações parciais fracionárias.

No artigo de [Djordjevic e Atanackovic \(2008\)](#) foi estudada a equação

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ [k + mT^n] \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0, \quad (3.1)$$

onde  $k, m \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Essa é a equação de condução de calor fracionária onde  $T(x, t)$  é a temperatura no ponto  $x$  e tempo  $t$  e, além disso,  $[k + mT^n]$  é um termo difusivo.

No artigo de [Mainardi, Pagnini e Luchko \(2007\)](#) foi estudada a equação

$${}_*\!D_t^\beta u(x, t) = {}_x\!D_\theta^\alpha u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

onde  $\alpha, \theta, \beta$  são parâmetros reais sempre restritos como segue

$$0 < \alpha \leq 2, \quad |\theta| \leq \min \{ \alpha, 2 - \alpha \}, \quad 0 < \beta \leq 2.$$

No artigo de [Costa et al. \(2015\)](#) foi estudada a equação

$$\Omega_* D_t^\beta u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)] {}_x\!D_{\theta_1}^\alpha u(x, t) + u^m(x, t) {}_x\!D_{\theta_2}^\gamma u(x, t), \quad (3.3)$$

onde  $\Omega = \frac{1}{K}$  é o coeficiente de difusão inverso (velocidade de propagação), com

$$m \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < \gamma \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 < \beta \leq 2,$$

onde

$${}_x\!D_\theta^\alpha, \quad |\theta| \leq \min \{ \alpha, 2 - \alpha \}$$

é a derivada de Riesz-Feller ([PODLUBNY, 2002](#)). Para preservar a propriedade de simetria foi utilizado  $\theta_1 \rightarrow 1$  e  $\theta_2 \rightarrow 0$ .

### 3.1 Equação de Burgers-Korteweg-de Vries fracionária

Dentre as equações não lineares mais estudadas estão as seguintes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (\text{Burgers}) \quad (3.4)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}, \quad (\text{Korteweg-de Vries}) \quad (3.5)$$

onde  $\nu$  é uma constante real e  $\phi(x, t)$ . A equação (3.4) é uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem. Por sua grande importância em aplicações como, por exemplo, mecânica dos fluidos, acústica não linear e dinâmica dos gases é salutar estudá-la também do ponto de vista do cálculo fracionário. A mesma foi estudada por Johannes Martinus Burgers. Já a equação (3.5) foi usada inicialmente para modelar propagação de ondas longas em águas rasas e pode ser resolvida pelo método do espalhamento inverso ([WHITHAM, 1974](#)).

No artigo de [Djordjevic e Atanackovic \(2008\)](#) foi apresentada a solução para a equação de Burgers-Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = \mu \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \quad (3.6)$$

com  $2 \leq \beta \leq 3$ , e foram obtidas todas as equações compreendidas entre a equação de Burgers e Korteweg-de Vries. O estudo feito nesse artigo utilizou uma das simetrias de Lie da equação<sup>1</sup>.

Uma possível generalização para a equação (3.6) que apresentamos aqui é a seguinte

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^m \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} = \mu \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta}, \quad (3.7)$$

onde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $2 \leq \beta \leq 3$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mu > 0$  com  $\phi \equiv \phi(x, t)$ . A fim de encontrar uma solução para (3.7) utilizamos as seguintes transformações de variáveis

$$t = \lambda \tilde{t}, \quad x = \lambda^p \tilde{x}, \quad \phi = \lambda^q \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (3.8)$$

assim temos que

<sup>1</sup> Para outras informações a respeito de simetrias de Lie da equação de Burgers veja ([SOARES, 2011](#)).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial(\lambda^q \tilde{\phi})}{\partial(\lambda \tilde{t})} = \lambda^{q-1} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.9)$$

$$\phi^m \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} = (\lambda^q \tilde{\phi})^m \frac{\partial^\alpha (\lambda^q \tilde{\phi})}{\partial (\lambda^p \tilde{x})^\alpha} = \lambda^{q(m+1)-p\alpha} \tilde{\phi}^m \frac{\partial^\alpha \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^\alpha}, \quad (3.10)$$

$$\mu \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta} = \mu \frac{\partial^\beta (\lambda^q \tilde{\phi})}{\partial (\lambda^p \tilde{x})^\beta} = \mu \lambda^{q-p\beta} \frac{\partial^\beta \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^\beta}. \quad (3.11)$$

Assim, das equações (3.1), (3.10) e da equação (3.11) temos

$$\lambda^{q-1} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} + \lambda^{q(m+1)-p\alpha} \tilde{\phi}^m \frac{\partial^\alpha \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \mu \lambda^{q-p\beta} \frac{\partial^\beta \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^\beta}.$$

Utilizando o princípio da invariância podemos escrever

$$q - 1 = q(m + 1) - p\alpha = q - p\beta,$$

de onde segue  $p = \frac{1}{\beta}$  e  $q = \frac{\alpha - \beta}{m\beta}$ . Eliminando  $\lambda$  da transformação (3.8) obtemos

$$\frac{x}{t^p} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}^p} \quad \text{e} \quad \frac{\phi}{\tilde{\phi}} = \left( \frac{t}{\tilde{t}} \right)^q.$$

Isto prova a existência da solução de similaridade <sup>2</sup> para a equação (3.7) da forma

$$\phi = t^a U(\xi) \quad \text{e} \quad \xi = t^b x \quad (3.12)$$

onde  $a = \frac{\alpha - \beta}{m\beta}$  e  $b = -\frac{1}{\beta}$ . Vale ressaltar que essa transformação de variável é oriunda das simetrias de Lie da equação, como visto no [Capítulo 2](#).

A partir da equação (3.12), calculando as derivadas temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial(t^a U(\xi))}{\partial t} \\ &= at^{a-1}U(\xi) + t^a b t^{b-1} x \frac{dU(\xi)}{d\xi} \\ &= at^{a-1}U(\xi) + t^{a-1} \xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \\ &= t^{a-1} \left( aU(\xi) + b\xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right), \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} \phi^m \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} &= t^{am} U^m t^{a+b\alpha} \frac{d^\alpha U(\xi)}{d\xi^\alpha} \\ &= t^{a(m+1)+b\alpha} U^m(\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^\alpha}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Solução de similaridade são soluções que tornam uma EDP invariante sob um grupo de simetria.

$$\mu \frac{\partial^\beta \phi}{\partial x^\beta} = \mu t^{a+b\beta} \frac{d^3}{d\xi^3} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^{-\beta+2}}.$$

Assim, podemos escrever

$$t^{a-1} \left( aU(\xi) + b\xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right) + t^{a(m+1)+b\alpha} U^m(\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^\alpha} = \mu t^{a+b\beta} \frac{d^3}{d\xi^3} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^{-\beta+2}}.$$

Para preservarmos a invariância devemos impor

$$a - 1 = a(m + 1) + b\alpha = a + b\beta,$$

de onde segue

$$a = \frac{1 + \frac{\alpha}{\beta}}{m} \quad \text{e} \quad b = -\frac{1}{\beta}.$$

Enfim, podemos escrever

$$\left( aU(\xi) + b\xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right) + U^m(\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^\alpha} = \mu \frac{d^3}{d\xi^3} \int_0^\xi \frac{U(\eta) d\eta}{(\xi - \eta)^{-\beta+2}}.$$

Consideremos  $U(\xi) = A\xi^\kappa$ , com  $A \in \mathbb{R}$  e  $\kappa$  a ser determinado. Logo, obtemos

$$aA\xi^\kappa + bA\xi^\kappa + \kappa A^{m+1} \xi^{\kappa(m+1)-1} B(-\alpha + 2, -\alpha + 1) = \mu A\xi^\kappa B(-\beta + 4, -\beta + 3),$$

onde  $B(x, y)$  é a função beta. Pela invariância obtemos  $\kappa = \frac{1}{m}$ .

Concluimos assim que

$$A = \left( \frac{-(a + b) + \mu B(-\beta + 4, -\beta + 3)}{\frac{1}{m} B(-\alpha + 2, -\alpha + 1)} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Dessa maneira temos que a solução para a equação (3.7) é dada por

$$\phi(x, t) = At^a (t^b x)^{\frac{1}{m}}. \quad (3.13)$$

Nas figuras a seguir temos representações gráficas da solução (3.13) para valores particulares dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $m$ .

Na figura (1) temos representadas as soluções para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com parâmetro  $m$  fixo.

Na figura (2) temos a representação de uma solução particular em  $3D$  com os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e  $m = 5$ .

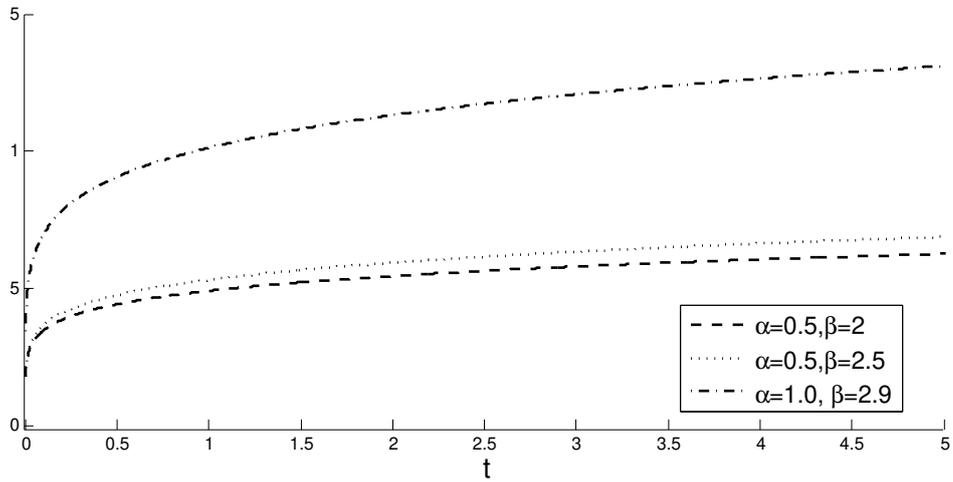


Figura 1 – Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram escolhidos e considerado  $m = 10$ .

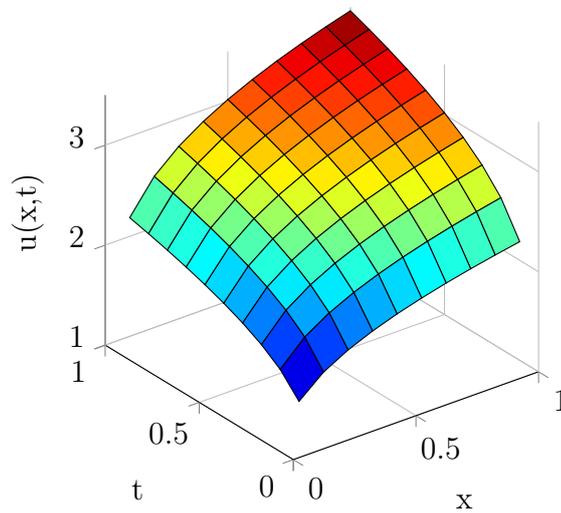


Figura 2 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  e  $m = 5$ .

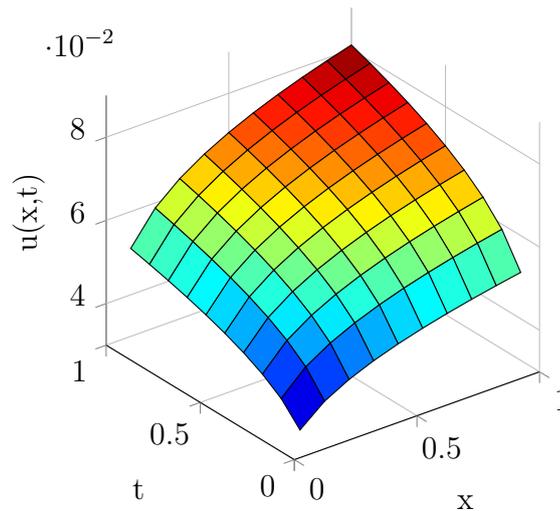


Figura 3 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $m = 5$ .

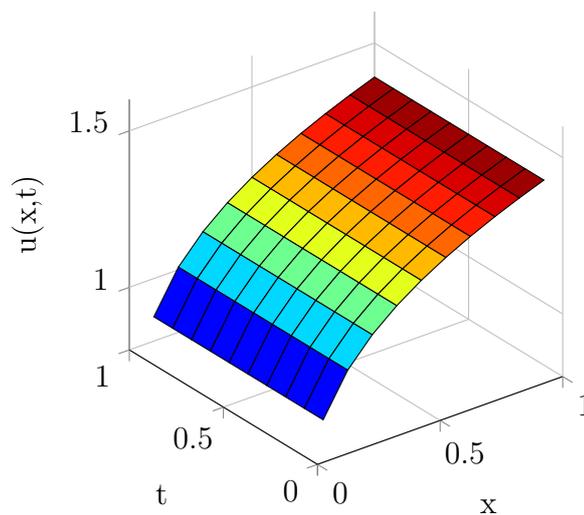


Figura 4 – Solução da equação de Burgers-KdV fracionária (3.7) com  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  e  $m = 5$ .

Na figura (3) temos a representação de uma solução particular em  $3D$  com os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $m = 5$ . Na figura (4) temos a representação de uma solução particular em  $3D$  com os parâmetros  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  e  $m = 5$ .

Neste Capítulo trabalhamos com a derivada fracionária na variável espacial. Vale ressaltar que na literatura, em geral, essa equação é estudada considerando derivada fracionária na variável temporal.

Nos capítulos seguintes utilizamos da mesma ferramenta utilizada aqui para encontrar soluções analíticas para as equações, ou seja, partindo de uma simetria de Lie para determinar soluções invariantes.

# Equação diferencial fracionária não linear onda-difusão

---

Neste Capítulo investigamos dois problemas: a difusão com um coeficiente de difusão que não é constante conhecido como EDPF não linear de difusão e o problema da onda com uma velocidade de propagação não constante conhecido como EDPF não linear da onda. Em ambos os problemas, usaremos a derivada de Caputo na variável temporal e a derivada de Riesz-Feller e Riesz na variável espacial. Os dois problemas serão resolvidos com o objetivo de encontrarmos soluções analíticas. Utilizamos ainda o método de simetrias, o qual é um caso particular do grupo de simetrias de Lie (translação), pelo fato de considerarmos a simetria da equação<sup>1</sup>.

A equação que consideramos aqui é uma equação diferencial fracionária não linear como segue

$$\Omega_* D_t^\beta u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)]_x D_{\theta_1}^\alpha u(x, t) + u^m(x, t)_x D_{\theta_2}^\gamma u(x, t), \quad (4.1)$$

em que  $\Omega = \frac{1}{K}$  é o coeficiente de difusão inverso (velocidade de propagação),  $*D_t^\beta$  é a derivada de Caputo e  $_x D_\theta^\alpha$ , com  $|\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}$ , é a derivada de Riesz-Feller como definida na seção (1.6). Vamos considerar dois casos a partir daqui. Primeiramente, o caso em que  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  e  $1 < \gamma \leq 2$  que representa a equação de difusão fracionária e, em seguida, o caso  $1 < \alpha \leq 2$  e  $1 < \beta, \gamma \leq 2$  para equação da onda fracionária. Em ambos os casos  $m \in \mathbb{N}$ . Para preservar a propriedade de simetria consideramos  $\theta_1 \rightarrow 1$  e  $\theta_2 \rightarrow 0$ . Dessa forma, considerando a simetria, podemos reescrever a equação da seguinte maneira

$$*D_t^\beta u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)]_x D_1^\alpha u(x, t) + u^m(x, t)_x D_0^\gamma u(x, t), \quad (4.2)$$

Note que  $_x D_0^\gamma \equiv D_x^\gamma$  é a derivada de Riesz. E, sem perda de generalidade, consideramos  $\Omega = 1$ .

---

<sup>1</sup> Veja mais nos artigos de [Buckwar e Luchko \(1998\)](#) e [Djordjevic e Atanackovic \(2008\)](#).

Em geral, não podemos usar a regra da cadeia em derivadas fracionárias para redução de uma equação diferencial fracionária para soluções invariantes. Apesar disso, podemos transformar a equação diferencial parcial fracionária em uma equação diferencial ordinária fracionária com uma nova variável dependente, a qual chamaremos de  $\eta$ .

Assim a nova equação diferencial é uma equação diferencial ordinária, cuja derivada é tomada no sentido da derivada de Erdélyi-Kober, associada com o operador de Erdélyi-Kober (ERDÉLYI, 1940).

## 4.1 Equação de difusão fracionária

Neste caso, buscaremos por soluções auto-similares<sup>2</sup> da equação (4.1) procurando soluções para  $u(x, t)$ , no caso  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  e  $1 < \gamma \leq 2$ , com a seguinte forma:

$$u(x, t) = t^a U(\eta), \quad \eta = xt^{-b}, \quad (4.3)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Começaremos com o lado esquerdo da equação (4.1) e admitiremos como condição inicial  $u(x, 0) = 0$ . Neste caso, a derivada de Caputo coincide com a derivada de Riemann-Liouville, isto é,  ${}_t^* D_t^\mu u(x, t) = {}^{RL} D_t^\mu u(x, t)$ , assim podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_t^* D_t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^a U(xs^{-b}) ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Introduzindo a seguinte mudança de variável  $\tau = \frac{s}{t}$  podemos escrever a equação (4.4) como

$${}_t^* D_t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{a-\beta+1} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a U(\eta\tau^{-b}) d\tau \right).$$

A fim de simplificar a notação denotamos

$$F_\beta^{a,b} U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a U(\eta\tau^{-b}) d\tau,$$

conhecido por operador de Erdélyi-Kober. Então, segue

<sup>2</sup> São soluções invariantes sob as propriedades de translação de variáveis independentes.

$$\frac{\partial}{\partial t} [t^{a-\beta+1} F_{\beta}^{a,b} U(\eta)] \quad (4.5)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (t^{a-\beta+1}) F_{\beta}^{a,b} U(\eta) + t^{a-\beta+1} \frac{\partial}{\partial t} (F_{\beta}^{a,b} U(\eta)) \quad (4.6)$$

$$= (1 - \beta + a) t^{a-\beta} F_{\beta}^{a,b} U(\eta) + t^{a-\beta+1} (-b\eta t^{-1}) \frac{d}{d\eta} F_{\beta}^{a,b} U(\eta) \quad (4.7)$$

$$= t^{a-\beta} \left[ (1 - \beta + a) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_{\beta}^{a,b} U(\eta). \quad (4.8)$$

Do lado direito da equação (4.1), usamos a definição da derivada de Riesz-Feller<sup>3</sup> a qual podemos escrever como

$$\begin{aligned} {}_x D_{\theta}^{\alpha} f(x) &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \left[ (\alpha + \theta) \frac{\pi}{2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi + \operatorname{sen} \left[ (\alpha - \theta) \frac{\pi}{2} \right] \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

No caso  $\theta \rightarrow 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_x D_1^{\alpha} f(x) &= \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \left[ (\alpha + 1) \frac{\pi}{2} \right] \int_0^{\infty} \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi + \operatorname{sen} \left[ (\alpha - 1) \frac{\pi}{2} \right] \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right\} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \left\{ \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \int_0^{\infty} \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi - \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right\} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Calculamos assim  ${}_x D_1^{\alpha} u(x, t)$ , usando a expressão (4.9)

$$\begin{aligned} {}_x D_1^{\alpha} u(x, t) &= {}_x D_1^{\alpha} [t^a U(\eta)] = t^a {}_x D_1^{\alpha} U(xt^{-b}) = \\ &= t^a \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{U[(x+\xi)t^{-b}]}{\xi^{1+\alpha}} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{U[(x-\xi)t^{-b}]}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right\}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis,  $x + \xi = z$  e  $x - \xi = v$ , temos

$${}_x D_1^{\alpha} u(x, t) = t^a \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \left\{ \int_x^{\infty} \frac{U(zt^{-b})}{(z-x)^{1+\alpha}} dz - \int_{-\infty}^x \frac{U(vt^{-b})}{(x-v)^{1+\alpha}} dv \right\}.$$

<sup>3</sup> No trabalho Mainardi, Pagnini e Luchko (2007) os autores estudaram a solução fundamental da equação de difusão fracionária. Os autores lançaram mãos da derivada de Riesz-Feller e derivada de Riesz para o caso em que  $0 < \alpha < 2$  e  $|\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}$ .

Realizando uma nova mudança de variável  $z = sx$  e  $v = sx$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 {}_x D_1^\alpha u(x, t) &= t^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left\{ \int_x^\infty \frac{U(sxt^{-b})}{(sx-x)^{1+\alpha}} x ds - \int_{-\infty}^x \frac{U(sxt^{-b})}{(x-sx)^{1+\alpha}} x ds \right\} \\
 &= t^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left\{ x^{-\alpha} \int_x^\infty \frac{U(\eta s)}{(s-1)^{1+\alpha}} ds - x^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \frac{U(\eta s)}{(1-s)^{1+\alpha}} ds \right\} \\
 &= t^\alpha x^{-\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left\{ \int_1^\infty \frac{U(\eta s)}{(s-1)^{1+\alpha}} ds - \int_{-\infty}^1 \frac{U(\eta s)}{(1-s)^{1+\alpha}} ds \right\} \\
 &= t^\alpha (\eta t^b)^{-\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left\{ \int_1^\infty (s-1)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds - \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds \right\} \\
 &= t^{a-b\alpha} \eta^{-\alpha} \frac{-1}{2\Gamma(-\alpha)\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ \int_1^\infty (s-1)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds - \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds \right\} \\
 &= \frac{t^{a-b\alpha} \eta^{-\alpha}}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_1^\infty (s-1)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-(1+\alpha)} U(\eta s) ds \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Com isso introduzimos os operadores

$$\begin{aligned}
 G_\alpha U(\eta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^{+\infty} (s-1)^{-\alpha} U(\eta s) ds, \\
 R_\alpha U(\eta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-\alpha} U(\eta s) ds.
 \end{aligned}$$

Usando estes operadores na equação (4.11) temos

$$\begin{aligned}
 {}_x D_1^\alpha u(x, t) &= \frac{t^{a-b\alpha} \eta^{-\alpha}}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} [-G_{1+\alpha} U(\eta) + R_{1+\alpha} U(\eta)] \\
 &= \frac{t^{a-b\alpha}}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha} U(\eta) - G_{1+\alpha} U(\eta)],
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

este resultado corresponde à derivada de Riesz-Feller.

Para calcular  ${}_x D_0^\gamma = D_x^\gamma u(x, t)$ , neste caso, a derivada de Riesz-Feller é igual à derivada de Riesz, de onde segue

$$\begin{aligned}
 D_+^\gamma u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \frac{d^2}{dx^2} \left( \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi, t) d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \int_{-\infty}^1 (x-\xi)^{1-\gamma} t^a U(\xi t^{-b}) d\xi \right] \\
 &= t^a \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \int_{-\infty}^1 (x-\xi)^{1-\gamma} t^a U(sxt^{-b}) x ds \right] \\
 &= t^a \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{x^{2-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{1-\gamma} t^a U(\eta s) ds \right].
 \end{aligned}$$

Introduzimos o operador  $L_\gamma$  de modo que

$$L_\gamma U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{1-\gamma} t^\alpha U(\eta s) ds, \quad (4.13)$$

podemos escrever  $D_+^\gamma u(x, t)$  na forma

$$D_+^\gamma u(x, t) = t^\alpha \frac{d^2}{dx^2} [x^{2-\gamma} L_\gamma U(\eta)]$$

que, a partir da regra da cadeia, fornece

$$D_+^\gamma u(x, t) = t^\alpha t^{-2b} \frac{d^2}{dx^2} [(\eta t^b)^{2-\gamma} L_\gamma U(\eta)] = t^{\alpha-b\gamma} \frac{d^2}{dx^2} [\eta^{2-\gamma} L_\gamma U(\eta)]. \quad (4.14)$$

Analogamente, podemos escrever

$$\begin{aligned} D_-^\gamma u(x, t) &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_x^{+\infty} (\xi-x)^{1-\gamma} t^\alpha U(\xi t^{-b}) d\xi \right) \\ &= t^\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_x^{+\infty} (\xi-x)^{1-\gamma} U(\xi t^{-b}) d\xi \right) \\ &= t^\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_1^{+\infty} (xs-x)^{1-\gamma} U(xst^{-b}) x ds \right) \\ &= t^\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{x^{2-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_1^{+\infty} (s-1)^{1-\gamma} U(\eta s) ds \right]. \end{aligned}$$

Enfim, introduzindo o operador  $N_\gamma$  tal que

$$N_\gamma U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_1^{+\infty} (s-1)^{1-\gamma} U(\eta s) ds, \quad (4.15)$$

podemos escrever

$$D_-^\gamma u(x, t) = t^\alpha \frac{d^2}{dx^2} [x^{2-\gamma} N_\gamma U(\eta)], \quad (4.16)$$

que, usando a regra da cadeia, fornece

$$D_-^\gamma u(x, t) = t^\alpha t^{-2b} \frac{d^2}{d\eta^2} [(\eta)^{2-\gamma} t^{b(2-\gamma)} N_\gamma U(\eta)] = t^{\alpha-b\gamma} \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-b\gamma} N_\gamma U(\eta)]. \quad (4.17)$$

Portanto, para a derivada de Riesz, obtemos

$$D_x^\gamma u(x, t) = -\frac{t^{\alpha-b\gamma}}{2 \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)} \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-\gamma} (L_\gamma U(\eta) + N_\gamma U(\eta))]. \quad (4.18)$$

Substituindo as equações (4.5), (4.14) e (4.17) na equação (4.2) obtemos uma equação diferencial ordinária na variável independente  $\eta$  como segue:

$$\begin{aligned}
 t^{a-\beta} \left[ (1 - \beta + a) - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_{\beta}^{a,b} U(\eta) &= \\
 &= \frac{t^{a(1+m)-b(1+\alpha)}}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] + \\
 &- \frac{t^{a(1+m)-b\gamma}}{2\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)} U^m(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-\gamma}(L_{\gamma} + N_{\gamma}U(\eta))].
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Impondo invariância na variável  $t$  devemos ter

$$\begin{aligned}
 \alpha - \beta &= a(1 + m) - b(1 + \alpha) = a(1 + m) - b\gamma, \\
 \beta - b(1 + \alpha) + am &= 0, \\
 1 + \alpha &= \gamma.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Diante dessa imposição, obtemos um equação integro-diferencial

$$\begin{aligned}
 \left[ 1 - \beta + a - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_{\beta}^{a,b} U(\eta) &= \\
 &= \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] \right\} + \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \times \\
 &\times \left\{ U^m(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-\gamma}(L_{\gamma}U(\eta) + N_{\gamma}U(\eta))] \right\} \\
 &= \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] + U^m(\eta) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-\gamma}(L_{\gamma}U(\eta) + N_{\gamma}U(\eta))] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

que, após simplificações, fornece

$$\begin{aligned}
 \left[ 1 - \beta + a - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_{\beta}^{a,b} U(\eta) &= \\
 &= \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] + U^m(\eta) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{1-\alpha}(R_{\alpha}U(\eta) + G_{\alpha}U(\eta))] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Vamos, na próxima seção, discutir a solução analítica para a equação (4.22) bem como construir alguns gráficos que descrevem uma particular situação, dependendo dos parâmetros envolvidos.

## 4.2 Solução analítica e gráficos

Começamos por encontrar solução para a equação (4.22) de tal forma que a mantém invariante para isso, suponhamos

$$U(\eta) = A\eta^r,$$

em que  $A$  e  $r$  são constantes. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} F_{\beta}^{a,b}(\eta^r) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a \eta^r \tau^{-br} d\tau \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{-\beta} \tau^a \tau^{-br} d\tau = \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\beta)} B(1+a-br, 1-\beta) = \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(1+a-br)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2+a-br-\beta)} = \\ &= \frac{1+a-br}{2+a-br-\beta} \eta^r. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Analogamente, calculemos  $G_{\alpha}(\eta^r)$  e  $R_{\alpha}(\eta^r)$ . Segue que

$$\begin{aligned} G_{\alpha}(\eta^r) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^{\infty} (s-1)^{-\alpha} \eta^r s^r ds = \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^{\infty} (s-1)^{-\alpha} s^r ds \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, -1+\alpha-r) \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-1+\alpha-r)}{\Gamma(-r)} \\ &= \frac{\Gamma(-1+\alpha-r)}{\Gamma(-r)} \eta^r \end{aligned} \tag{4.24}$$

e

$$\begin{aligned} R_{\alpha}(\eta^r) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-\alpha} \eta^r s^r ds \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^1 (1-s)^{-\alpha} s^r ds \\ &= \frac{\eta^r}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(-r-1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(-r)} (-1)^{1-\alpha} \\ &= (-1)^{1-\alpha} \frac{\Gamma(-r-1+\alpha)}{\Gamma(-r)} \eta^r. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Temos assim, a partir das equações (4.23), (4.24) e (4.25), que a equação (4.22) pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 & \left[ 1 - \beta + a - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] \frac{\Gamma(1 + a - br)}{\Gamma(2 + a - br - \beta)} A\eta^r = \\
 & = \frac{1}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \left\{ \eta^{-\alpha} \left[ (-1)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} A\eta^r - \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} A\eta^r \right] \frac{d}{d\eta} [A^m \eta^{rm}] + \right. \\
 & \left. + A^m \eta^{rm} \frac{d^2}{d\eta^2} \left[ \eta^{1-\alpha} \left( (-1)^{1-\alpha} \frac{\Gamma(-r - 1 + \alpha)}{\Gamma(-r)} A\eta^r + \frac{\Gamma(-1 + \alpha - r)}{\Gamma(-r)} A\eta^r \right) \right] \right\} \\
 & = \frac{A^{1+m}}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \left\{ \eta^{-\alpha+r} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} [(-1)^{-\alpha} - 1] \frac{d}{d\eta} [\eta^{rm}] + \eta^{rm} \frac{\Gamma(-r - 1 + \alpha)}{\Gamma(-r)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times [(-1)^{1-\alpha} + 1] \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{1-\alpha+r}] \right\}
 \end{aligned}$$

Calculando as derivadas, temos

$$\begin{aligned}
 & \left[ 1 - \beta + a - b\eta \frac{d}{d\eta} \right] \frac{\Gamma(1 + a - br)}{\Gamma(2 + a - br - \beta)} A\eta^r = \\
 & = \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \left\{ \eta^{-\alpha+r} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} [(-1)^{-\alpha} - 1] rm \eta^{rm-1} + \right. \\
 & \left. + \eta^{rm} [(-1)^{1-\alpha} + 1] \frac{\Gamma(-r - 1 + \alpha)}{\Gamma(-r)} (1 - \alpha + r)(-\alpha + r) \eta^{\alpha+r-1} \right\} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} \eta^{-1-\alpha+r(1+m)} \left\{ -rm[1 - (-1)^{-\alpha}] + (\alpha - r)[1 - (-1)^{-\alpha}] \right\} \\
 & = \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} \eta^{-1-\alpha+r(1+m)} (-rm + \alpha - r)[1 - (-1)^{-\alpha}]. \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Para garantir a invariância em  $\eta$ , com o objetivo de preservar a simetria da equação, impomos

$$rm = 1 + \alpha \rightarrow r = \frac{1 + \alpha}{m} \quad (4.28)$$

de onde segue

$$\begin{aligned}
 & (1 - \beta + a - br) \frac{\Gamma(1 + a - br)}{\Gamma(2 + a - br - \beta)} = \\
 & = \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} (-(1 + \alpha) + \alpha - r)[1 - (-1)^{-\alpha}] \\
 & = \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} (-1 - r)[1 - (-1)^{-\alpha}].
 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação algébrica, obtemos

$$A^m = \frac{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})\Gamma(-1 - r)\Gamma(1 + a - br)}{[1 - (-1)^{-\alpha}]\Gamma(\alpha - r)\Gamma(1 + a - \beta - br)}. \quad (4.29)$$

Usando as condições da equação (4.20),

$$\beta - b(1 + a) + am = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{m} - b\frac{(1 + \alpha)}{m} + a = 0 \Rightarrow a - br = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow 1 + a - br = 1 - \frac{\beta}{m}$$

e

$$1 + a - br = 1 - \frac{\beta}{m} \Rightarrow 1 + a - br - \beta = 1 - \beta - \frac{\beta}{m} = \frac{-\beta + (1 - \beta)m}{m}.$$

Obtemos, enfim, a expressão

$$A^m = \frac{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})\Gamma(-1 - r)\Gamma(1 - \frac{\beta}{m})}{[1 - (-1)^{-\alpha}]\Gamma(\alpha - r)\Gamma(1 - \beta - \frac{\beta}{m})}. \quad (4.30)$$

Voltando nas variáveis  $x$  e  $t$  podemos escrever a solução

$$u(x, t) = \left\{ \frac{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})\Gamma(-1 - r)\Gamma(1 - \frac{\beta}{m})}{[1 - (-1)^{-\alpha}]\Gamma(\alpha - r)\Gamma(1 - \beta - \frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \right)^{\frac{1+\alpha}{m}}.$$

Podemos simplificar a solução acima e assim escrever

$$u(x, t) = \left\{ \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(-1 - r)\Gamma(1 - \frac{\beta}{m})}{i\Gamma(\alpha - r)\Gamma(1 - \beta - \frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \right)^{\frac{1+\alpha}{m}}. \quad (4.31)$$

A seguir apresentaremos alguns gráficos que representam a solução acima considerando a parte real.

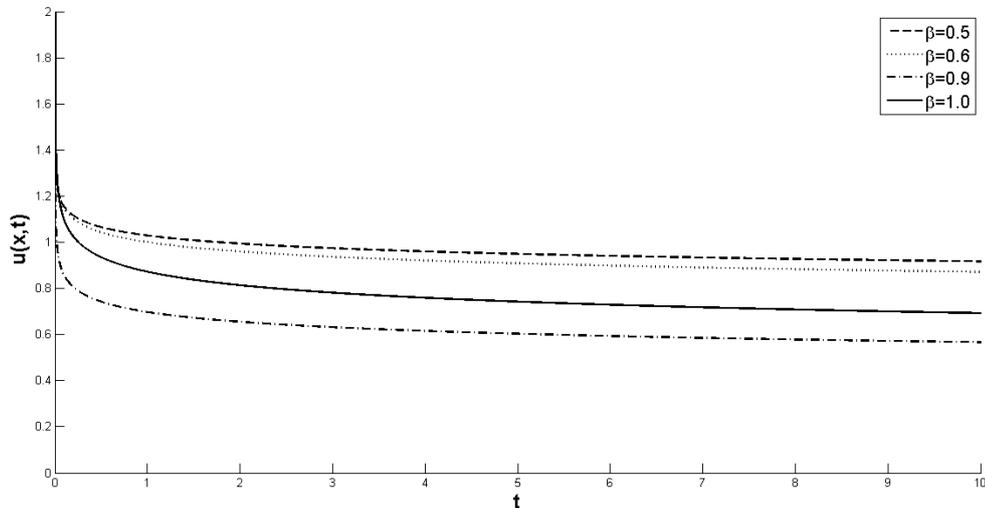


Figura 5 – Gráfico da solução da equação de difusão fracionária  $0 < \beta \leq 1$  e  $(x = 1)$ .

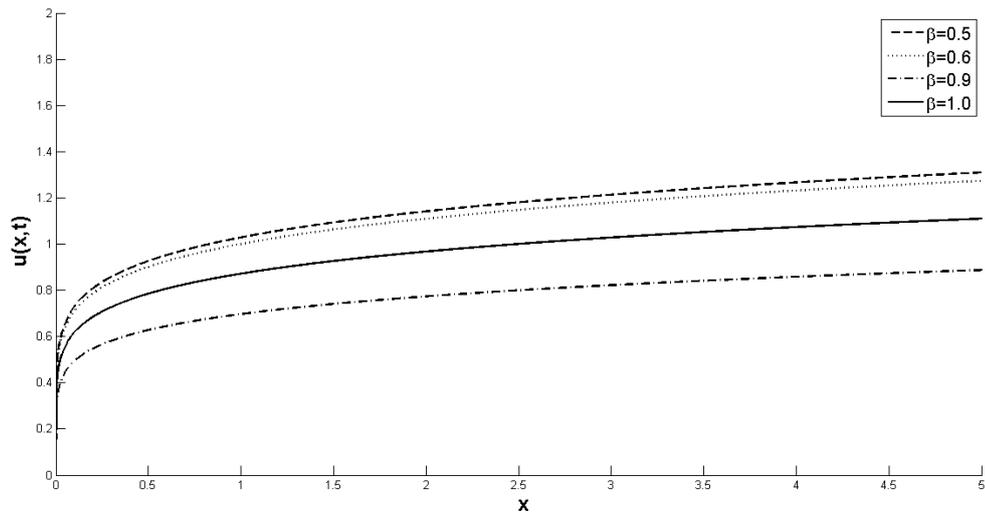


Figura 6 – Gráfico da solução da equação de difusão fracionária com tempo fixado ( $t = 1$ ) e  $0 < \beta \leq 1$ .

Apresentamos acima dois gráficos nos quais fixamos o parâmetro  $\gamma = 1,5$ . Um deles está associado com a equação de difusão fracionária na figura<sup>4</sup> (5) o outro gráfico na figura (6) está associado com a mesma equação, porém com o tempo fixo essas soluções representam a equação (4.31). Em ambos os casos utilizamos  $0 < \beta \leq 1$  e  $r = \frac{\alpha + 1}{m}$ . Abaixo apresentamos o gráfico da solução

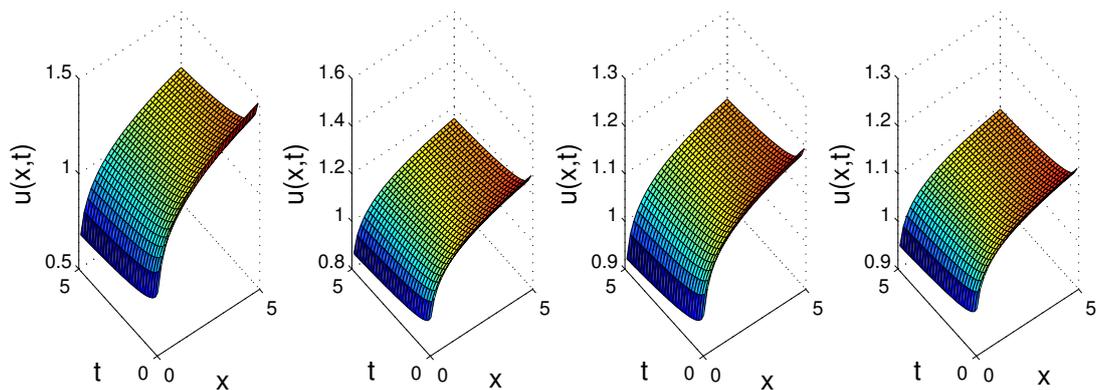


Figura 7 – Solução da equação de difusão fracionária com  $\alpha = \beta = 0.5$  e  $m = 10, 20, 30, 40$ , respectivamente.

Na figura (7) temos o gráfico 3D da função (4.31) para alguns valores particulares de  $m$  e com  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Podemos observar que a medida que os valores de  $m$  aumentam o valor de  $u(x,t)$  diminui.

<sup>4</sup> Aqui  $u(x,t) \times t$  a variável espacial  $x$  é fixa.

### 4.3 Equação da onda fracionária: $1 < \beta \leq 2$

Em analogia ao caso anterior, discutimos a equação da onda fracionária, ou seja, neste caso teremos os parâmetros  $0 < \alpha \leq 1$  e  $1 < \beta, \gamma \leq 2$  considerados na equação (4.2). Neste caso, consideramos condições iniciais homogêneas, i.e.,  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . A derivada de Caputo pode ser calculada através da derivada de Riemann-Liouville, ou seja,  ${}_t D_t^\beta = D_t^\beta$ , devido as condições iniciais. Assim,

$$\begin{aligned} {}_t D_t^\beta u(x, t) &= D_t^\beta u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{1-\beta} u(x, s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{1-\beta} s^\alpha U(xs^{-b}) ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $s = \tau t$  temos  $s \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow 0$  e  $s \rightarrow t \Rightarrow \tau \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 (t-t\tau)^{1-\beta} (t\tau)^\alpha U(xt^{-b}\tau^{-b}) t d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ t^{2+a-\beta} \int_0^1 (1-\tau)^{1-\beta} \tau^\alpha U(\eta\tau^{-b}) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Introduzindo o operador  $Q_\beta^{a,b}$  tal que

$$Q_\beta^{a,b} U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{1-\beta} \tau^\alpha U(\eta\tau^{-b}) d\tau. \quad (4.32)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ t^{2+a-\beta} Q_\beta^{a,b} U(\eta) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{2+a-\beta} Q_\beta^{a,b} U(\eta) \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (t^{2+a-\beta}) Q_\beta^{a,b} U(\eta) + t^{2+a-\beta} \frac{\partial}{\partial t} Q_\beta^{a,b} U(\eta) \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t^{2+a-\beta}) Q_\beta^{a,b} U(\eta) + 2 \frac{\partial}{\partial t} (t^{2+a-\beta}) \frac{\partial}{\partial t} Q_\beta^{a,b} U(\eta) + t^{2+a-\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_\beta^{a,b} U(\eta) \\ &= (2+a-\beta)(1+a-\beta)t^{a-\beta} Q_\beta^{a,b} U(\eta) + 2(2+a-\beta)t^{1+a-\beta} \frac{\partial}{\partial t} Q_\beta^{a,b} U(\eta) + \\ &+ t^{2+a-\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_\beta^{a,b} U(\eta). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( -bt^{-1} \eta \frac{d}{d\eta} \right) = -b \frac{d}{dt} \left( t^{-1} \eta \frac{d}{d\eta} \right) \\ &= -b \left[ -t^{-2} \eta \frac{d}{d\eta} + t^{-1} \frac{d}{dt} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \right) \right] \\ &= -b \left[ -t^{-2} \eta \frac{d}{d\eta} + t^{-1} \left( -bt^{-1} \eta \frac{d}{d\eta} \right) \left( \eta \frac{d}{d\eta} \right) \right] \\ &= bt^{-2} \eta \frac{d}{d\eta} \left( 1 + b\eta \frac{d}{d\eta} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo a equação (4.34) na equação (4.33), temos:

$$\begin{aligned}
&= (2 + a - \beta)(1 + a - \beta)t^{a-\beta} Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) + 2(2 + a - \beta)t^{1+a-\beta} \frac{\partial}{\partial t} Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) + \\
&+ t^{2+a-\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) \\
&= (2 + a - \beta)(1 + a - \beta)t^{a-\beta} Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) + 2(2 + a - \beta)t^{1+a-\beta} \left( -bt^{-1}\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) + \\
&+ t^{2+a-\beta} bt^{-2}\eta \frac{d}{d\eta} \left( 1 + b\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) \\
&= (2 + a - \beta)(1 + a - \beta)t^{a-\beta} Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) - 2b(2 + a - \beta)t^{1+a-\beta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) + \\
&+ bt^{a-\beta} \eta \frac{d}{d\eta} \left( 1 + b\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) \\
&= t^{a-\beta} \left[ (2 + a - \beta)(1 + a - \beta) - 2b(2 + a - \beta)\eta \frac{d}{d\eta} + b\eta \frac{d}{d\eta} \left( 1 + b\eta \frac{d}{d\eta} \right) \right] Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) \\
&= t^{a-\beta} \left( 1 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) \left( 2 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta). \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Igualando este resultado com o obtido anteriormente para o segundo membro, obtemos

$$\begin{aligned}
&t^{a-\beta} \left( 1 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) \left( 2 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) = \\
&= \frac{t^{a(1+m)-b(1+\alpha)}}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] \eta^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] + \\
&- \frac{t^{a(1+m)-b\gamma}}{2\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)} U^m(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} [\eta^{2-\gamma} (L_{\gamma}U(\eta) + N_{\gamma}U(\eta))]. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Supondo a equação invariante em  $t$  para preservar a simetria da equação, devemos ter  $a - \beta = a(1 + m) - b(1 + \alpha) = a(1 + m) - b\gamma$ , daí podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\beta - b(1 + \alpha) + am = 0, \\
&1 + \alpha = \gamma. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Enfim, a equação integro-diferencial fracionária é dada por

$$\begin{aligned}
&\left( 1 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) \left( 2 + a - \beta - b\eta \frac{d}{d\eta} \right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) = \\
&= \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left\{ n^{-\alpha} [R_{1+\alpha}U(\eta) - G_{1+\alpha}U(\eta)] \frac{d}{d\eta} [U^m(\eta)] + \right. \\
&\left. + U^m(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} [n^{1-\alpha} (R_{\alpha}U(\eta) + G_{\alpha}U(\eta))] \right\}. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

## 4.4 Solução com $A$ e $r$ constantes

Em analogia ao caso anterior, vamos supor  $U(\eta) = A\eta^r$ , onde  $A$  e  $r$  são constantes, temos:

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) &= Q_{\beta}^{a,b}(A\eta^r) = \frac{A}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{1-\beta} \tau^a \eta^r \tau^{-br} d\tau \\
 &= \frac{A}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^1 \eta^r (1-\tau)^{1-\beta} \tau^{a-br} d\tau = \\
 &= \frac{A\eta^r}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{1-\beta} \tau^{a-br} d\tau = \\
 &= \frac{A\eta^r}{\Gamma(2-\beta)} B(1+a-br, 2-\beta) = \\
 &= \frac{\Gamma(1+a-br)}{\Gamma(3+a-br-\beta)} A\eta^r.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

E ainda, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 &\left(1+a-\beta-b\eta\frac{d}{d\eta}\right) \left(2+a-\beta-b\eta\frac{d}{d\eta}\right) Q_{\beta}^{a,b}U(\eta) = \\
 &= \left(1+a-\beta-b\eta\frac{d}{d\eta}\right) \left(2+a-\beta-b\eta\frac{d}{d\eta}\right) \frac{\Gamma(1+a-b\gamma)}{\Gamma(3+a-b\gamma-\beta)} A\eta^r = \\
 &= (1+a-\beta-br)(2+a-\beta-br) \frac{\Gamma(1+a-br)}{\Gamma(3+a-br-\beta)} A\eta^r \\
 &= \frac{\Gamma(1+a-br)}{\Gamma(1-\beta+a-br)} A\eta^r.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Substituindo este resultado em conjunto com os resultados já obtidos anteriormente, na equação (4.38), temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Gamma(1+a-br)}{\Gamma(1-\beta+a-br)} A\eta^r = \\
 &= \frac{A^m}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(-r)} \eta^{-1-\alpha+r(1+m)} (-rm+\alpha-r) [1-(-1)^{-\alpha}].
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Supondo invariância em  $\eta$  para preservar a simetria da equação, obtemos

$$r = -1 - \alpha + r(1+m) \Rightarrow -1 - \alpha + rm = 0 \Rightarrow rm = 1 + \alpha \Rightarrow r = \frac{1+\alpha}{m}, \tag{4.42}$$

que nos fornece

$$\frac{\Gamma(1+a-br)}{\Gamma(1-\beta+a-br)} A = A^m + \frac{\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(-1-r)} \frac{[1-(-1)^{-\alpha}]}{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

Como esta equação é a mesma obtida anteriormente, então a solução é dada por

$$A = \left\{ \frac{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})\Gamma(-1-r)\Gamma(1-\frac{\beta}{m})}{[1-(-1)^{-\alpha}]\Gamma(\alpha-r)\Gamma(1-\beta-\frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{4.43}$$

e assim, temos

$$u(x, t) = \left\{ \frac{2\text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})\Gamma(-1-r)\Gamma(1-\frac{\beta}{m})}{[1-(-1)^{-\alpha}]\Gamma(\alpha-r)\Gamma(1-\beta-\frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \right)^{\frac{1+\alpha}{m}}.$$

Podemos simplificar a solução acima e assim escrever

$$u(x, t) = \left\{ \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(-1-r)\Gamma(1-\frac{\beta}{m})}{i\Gamma(\alpha-r)\Gamma(1-\beta-\frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \right)^{\frac{1+\alpha}{m}}. \quad (4.44)$$

Em seguida, apresentamos dois gráficos dessa solução.

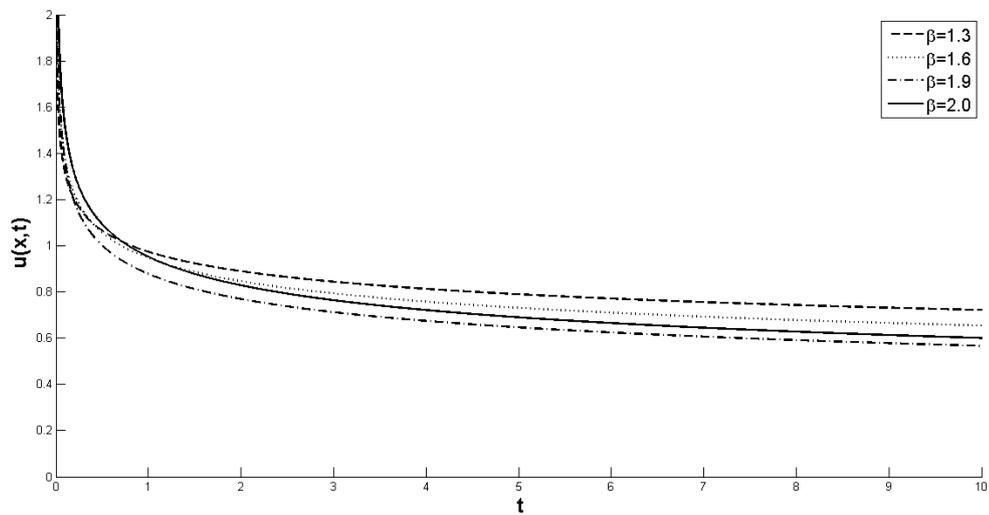


Figura 8 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com  $(x = 1)$ .

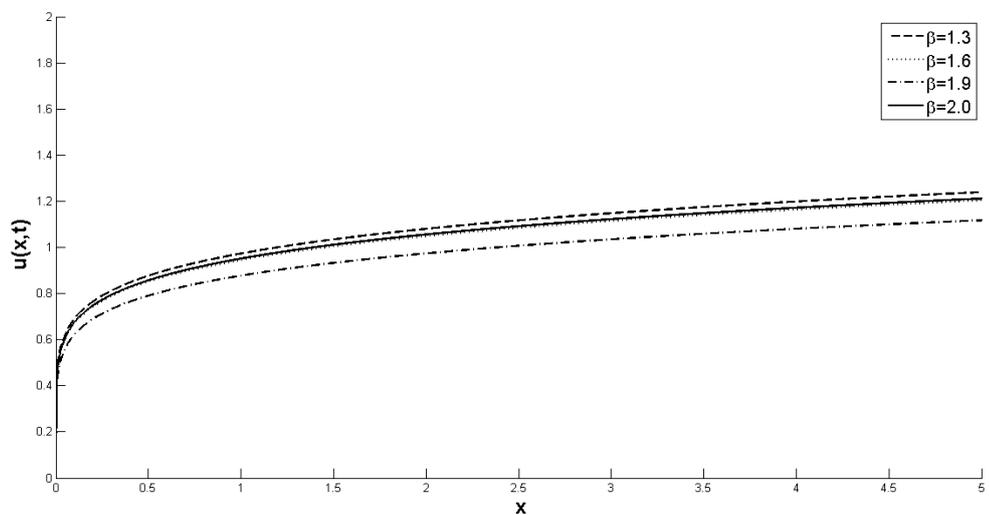


Figura 9 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com o tempo fixado  $(t = 1)$ .

Acima apresentamos os gráficos com o parâmetro  $\gamma = 1,5$ , o gráfico na figura (8) representa a solução da equação fracionária da onda e na figura (9) representa a solução da mesma equação, contudo com o tempo fixo. Ambas são a representação gráfica da solução dada na equação (4.44). Nos dois casos temos  $1 < \beta \leq 2$  e  $r = \frac{(\alpha + 1)}{m}$ .

Abaixo apresentamos o gráfico da solução

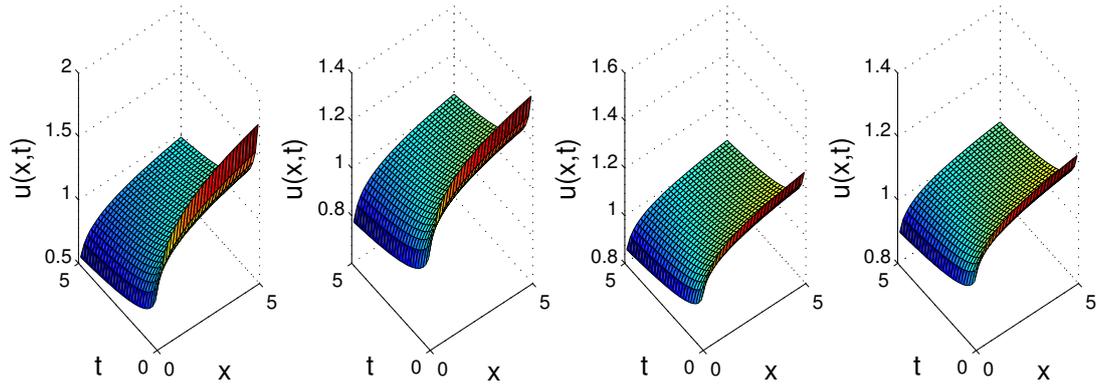


Figura 10 – Soluções particulares da equação da onda fracionária com  $\alpha = 0,5, \beta = 1,5$  e  $m = 10, 20, 30, 40$  respectivamente.

Na figura (10) temos o gráfico 3D da função (4.44) para alguns valores particulares de  $m$  e com  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,5$ .

### 4.5 Solução dos casos particulares

Nesta seção vamos discutir alguns casos, incluindo o caso em que os parâmetros são inteiros, isto é, a derivada é de ordem inteira.

No caso  $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1$  e  $\beta \rightarrow 2$ , devemos considerar  $m > 2$ , porque  $m = 1$ , ou  $m = 2, r = (1 + \alpha)/m$  é um número inteiro e, neste caso,  $\Gamma(-1 - r) \rightarrow \infty$ .

#### 4.5.1 Equação de difusão: caso $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1$ e $m > 2$

No caso  $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1$  e  $m > 2$  a equação é dada por:

$$*_t D_t^1 u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)]_x D_x^1 u(x, t) + u^m(x, t) D_x^2 u(x, t) \tag{4.45}$$

com solução dada por

$$u(x, t) = \left\{ \frac{\Gamma(-1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - \frac{1}{m})}{\Gamma(1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - 1 - \frac{1}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{1/2}} \right)^{\frac{2}{m}}. \tag{4.46}$$

Segue que

$$u(x, t) = \left\{ -\frac{m}{2(m + 2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x^2/m}{t^{1/m}} \right). \tag{4.47}$$

Vamos verificar que a função dada pela equação (4.47) é a solução da equação diferencial (4.45). De fato,

$${}_t D_t^1 u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\frac{1}{m} \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{1}{m}+1}} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ A^m \frac{x^2}{t} \right] = A^m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2}{t} \right] = 2A^m \frac{x}{t} = 2 \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\} \frac{x}{t} \\ &= \frac{-m}{m+2} \frac{x}{t}, \end{aligned}$$

$${}_x D_1^1 u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{1}{m}}} \right] \right\} = \frac{2A}{m t^{\frac{1}{m}}} x^{\frac{2}{m}-1} = \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{2}{m} \frac{x^{\frac{2}{m}-1}}{t^{\frac{1}{m}}}$$

$$\begin{aligned} D_x^2 u(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{1}{m}}} \right] = A \left( \frac{2}{m} \right) \left( \frac{2}{m} - 1 \right) \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{1}{m}}} = \frac{2A(2-m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{1}{m}}} \\ &= \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{2(2-m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{1}{m}}} \end{aligned}$$

Somando os resultados do segundo membro, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)] {}_x D_1^1 u(x, t) + u^m(x, t) D_x^2 u(x, t) &= \\ &= \frac{-m}{m+2} \frac{x}{t} \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{2}{m} \frac{x^{\frac{2}{m}-1}}{t^{\frac{1}{m}}} + \\ &- \frac{m}{2(m+2)} \frac{x^2}{t} \left\{ \frac{-m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{2(2-m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{1}{m}}} = \\ &= -\frac{(2m-m+2)}{m(m+2)} \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{1}{m}+1}} = \\ &= -\frac{1}{m} \left\{ -\frac{m}{2(m+2)} \right\}^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{1}{m}+1}}, \end{aligned}$$

que corresponde a equação (4.48). A seguir apresentaremos alguns gráficos que representam a solução acima.

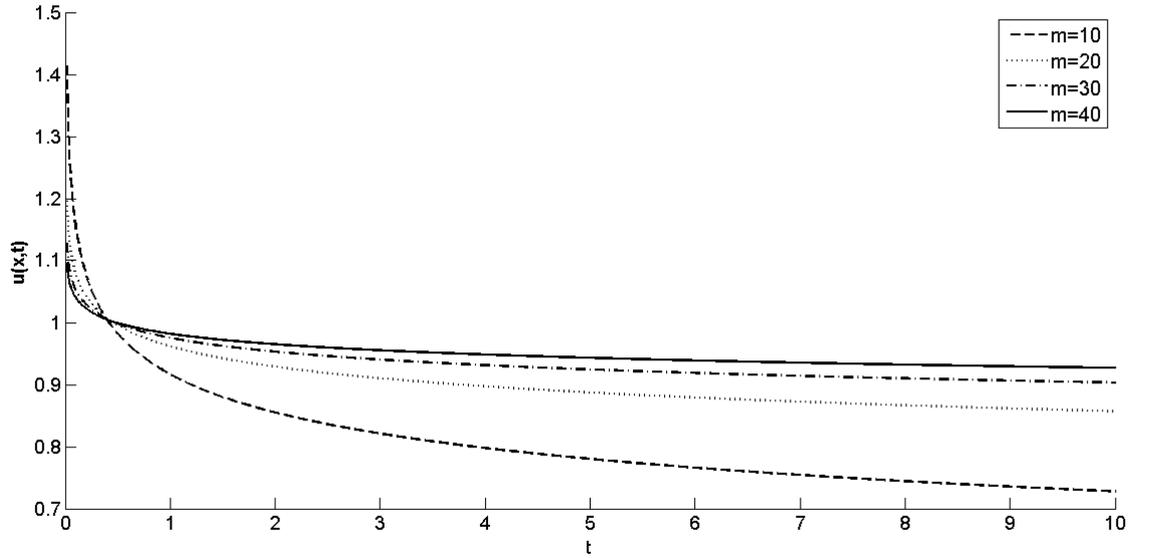


Figura 11 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária não linear com  $(x = 1)$ .

Na figura (11) em que consideramos  $\gamma = 1,5$  temos a representação gráfica da solução em (4.47) com valores particulares para  $m$ .

#### 4.5.2 Equação da onda: caso $\alpha \rightarrow 1$ , $\beta \rightarrow 2$ e $m > 2$

No caso  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow 2$  e  $m > 2$  a equação é dada por:

$$*_D_t^2 u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)]_x D_1^1 u(x, t) + u^m(x, t) D_x^2 u(x, t) \quad (4.49)$$

e sua solução é

$$u(x, t) = \left\{ \frac{\Gamma(-1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - \frac{2}{m})}{\Gamma(1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - 2 - \frac{2}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{1/2}} \right)^{\frac{2}{m}}. \quad (4.50)$$

Simplificando, segue

$$u(x, t) = \left( \frac{x^{2/m}}{t^{2/m}} \right). \quad (4.51)$$

Verificamos que a equação (4.51) é solução da equação (4.49). De fato o é, pois,

$$*_D_t^2 u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{2}{m} \left( 1 + \frac{2}{m} \right) \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}+2}} = \frac{2(m+2)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}+2}} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [u^m(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ A^m \frac{x^2}{t^2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2}{t^2} \right] = 2 \frac{x}{t^2} = 2 \frac{x}{t^2}$$

$${}_x D_1^1 u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}}} \right\} = \frac{2}{m} \frac{x^{\frac{2}{m}-1}}{t^{\frac{2}{m}}}$$

$$D_x^2 u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}}} \right] = \left( \frac{2}{m} \right) \left( \frac{2}{m} - 1 \right) \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{2}{m}}} = \frac{2(2-m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{2}{m}}}$$

Somando os resultados do segundo membro, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[u^m(x, t)]_x D_1^1 u(x, t) + u^m(x, t) D_x^2 u(x, t) &= \\ &= 2 \frac{x}{t^2} \frac{2}{m} \frac{x^{\frac{2}{m}-1}}{t^{\frac{2}{m}}} + \frac{x^2}{t^2} \frac{2(2-m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}-2}}{t^{\frac{2}{m}}} = \frac{(4m+4-2m)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}+2}} = \frac{2(m+2)}{m^2} \frac{x^{\frac{2}{m}}}{t^{\frac{2}{m}+2}} \end{aligned}$$

a qual é a equação (4.52). A seguir apresentaremos alguns gráficos que representam a solução acima.

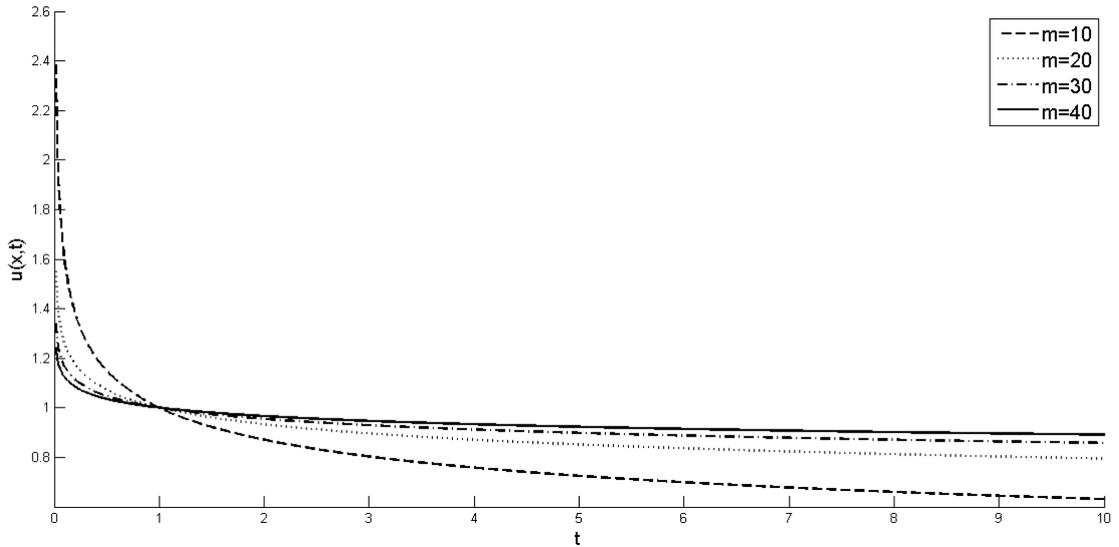


Figura 12 – Soluções particulares da equação da onda fracionária não linear.

Na figura (12) em que consideramos  $\gamma = 1,5$  temos a representação gráfica da solução em (4.51) com valores particulares para  $m$ .

### 4.5.3 Equação fracionária de difusão (tempo): caso $\alpha \rightarrow 1, 0 < \beta \leq 1, m > 2$

Neste caso  $\alpha \rightarrow 1, 0 < \beta \leq 1$  e  $m > 2$  a equação é dada por

$$\begin{aligned} {}_t^* D_t^\beta u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x}[u^m(x, t)]_x D_1^1 u(x, t) + u^m(x, t) D_x^2 u(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[u^m(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + u^m(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^m(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right] \end{aligned} \tag{4.53}$$

e sua solução é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left\{ \frac{\Gamma(-1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - \frac{\beta}{m})}{\Gamma(1 - \frac{2}{m}) \Gamma(1 - \beta - \frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\beta/2}} \right)^{\frac{2}{m}} \\ &= \left\{ \frac{m^2 \Gamma(1 - \frac{\beta}{m})}{2(m+2) \Gamma(1 - \beta - \frac{\beta}{m})} \right\}^{\frac{1}{m}} \left( \frac{x}{t^{\beta/2}} \right)^{\frac{2}{m}} \end{aligned} \tag{4.54}$$

A seguir apresentaremos alguns gráficos que representam a solução acima.

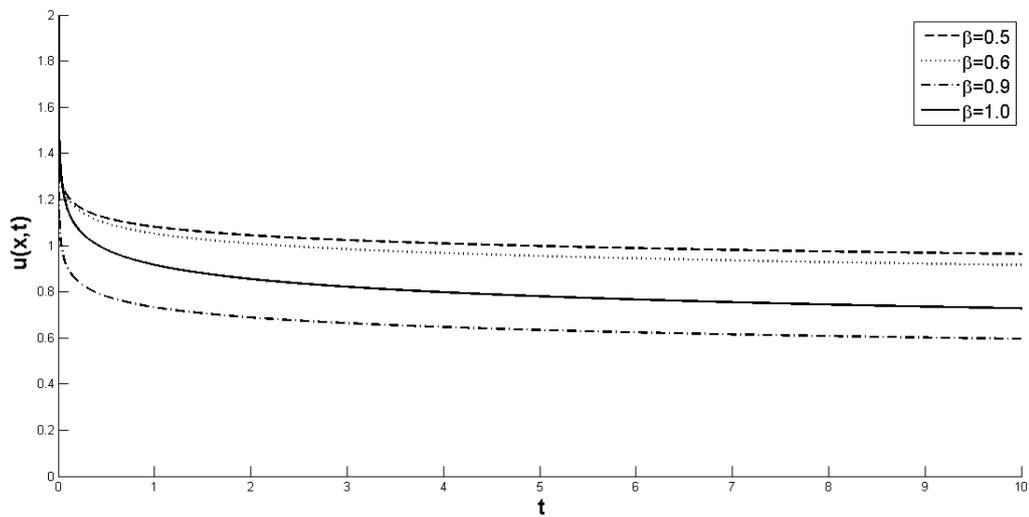


Figura 13 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária no tempo com  $(x = 1)$ .

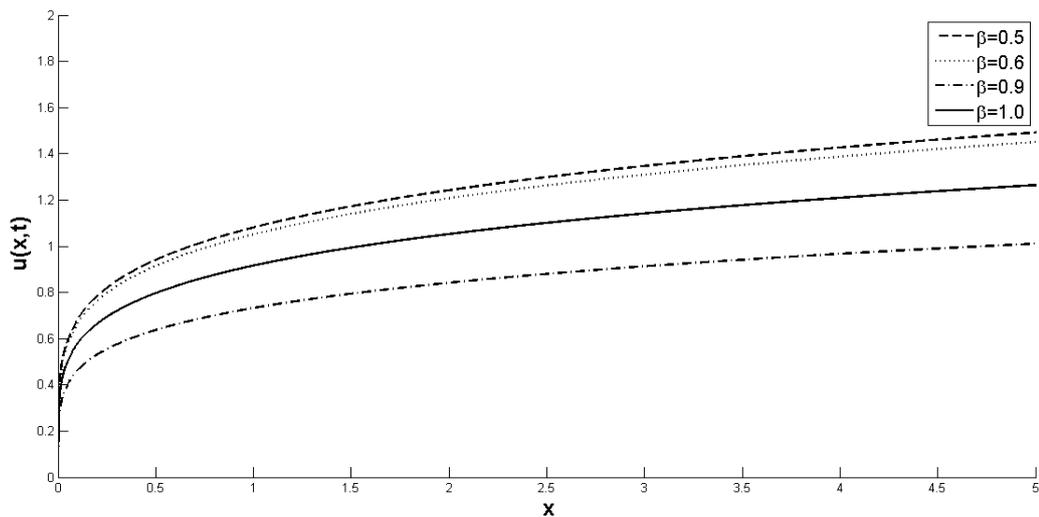


Figura 14 – Soluções particulares da equação de difusão fracionária no tempo  $(t = 1)$ .

Acima, para os casos particulares, temos dois gráficos com  $\gamma = 1, 5$ . O primeiro gráfico associado com a equação de difusão fracionária, a qual está representada na figura (13) e o segundo gráfico na figura (14) é a mesma solução, porém com o tempo fixo, ambas as figuras são representações da solução em (4.54).

#### 4.5.4 Equação fracionária da onda (tempo): caso $\alpha \rightarrow 1$ , $1 < \beta \leq 2$ e $m > 2$

No caso da equação da onda com os parâmetros  $\alpha \rightarrow 1$  e  $1 < \beta \leq 2$  obtemos o mesmo resultado expresso na equação (4.54). De maneira semelhante a feita com a equação

de difusão apresentamos dois gráficos para a equação da onda como segue:

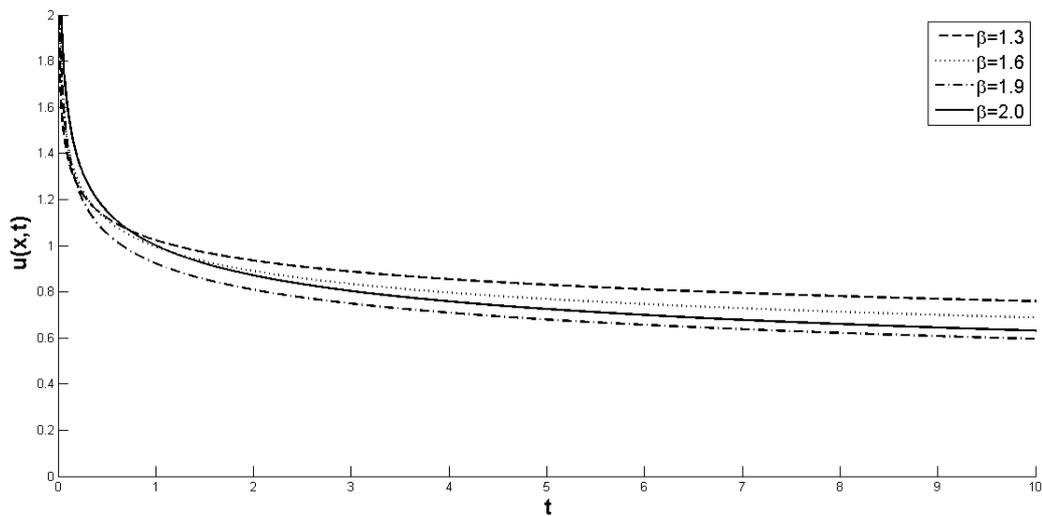


Figura 15 – Soluções particulares da equação da onda fracionária no tempo com  $(x = 1)$ .

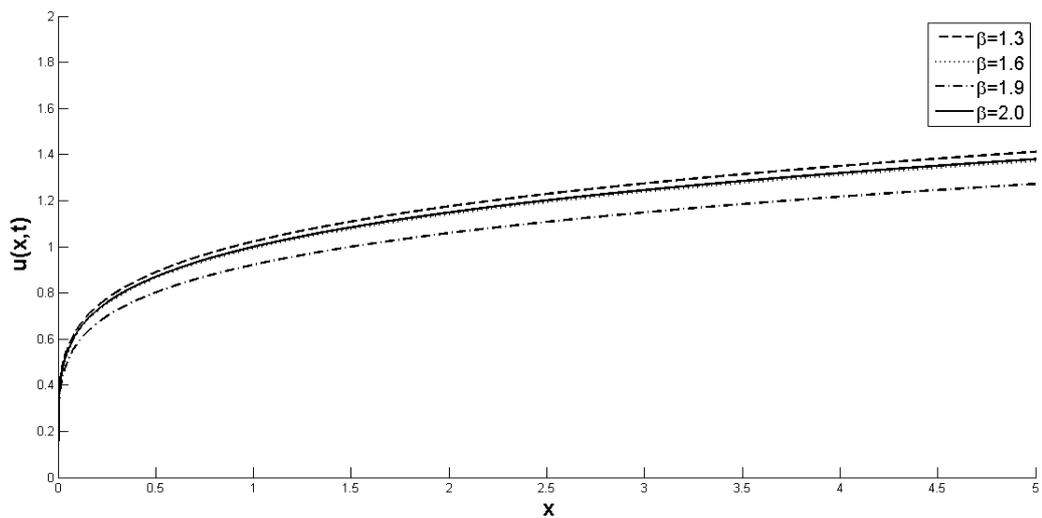


Figura 16 – Soluções particulares da equação da onda fracionária no tempo  $(t = 1)$ .

Nos gráficos apresentados utilizamos o parâmetro  $\gamma = 1,5$ . O primeiro gráfico na figura (15) está associado a equação fracionária da onda e o segundo gráfico na figura (16) corresponde a mesma solução, porém com tempo fixado. Ambos os gráficos são representações da solução (4.54) com  $\alpha \rightarrow 1$  e  $1 < \beta \leq 2$  e  $m > 2$ .

Ressaltamos que para construir os gráficos das soluções dadas pelas equações (4.31) e (4.44) consideramos apenas a parte real uma vez que quando  $\frac{\alpha}{2m}$  é um número par temos múltiplos de  $2\pi$ . Além disso, como estamos considerando valores de  $m > 2$  basta tomarmos o módulo e com isso resta apenas a parte real de  $u(x, t)$ , pois  $\left| \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}{i} \right| = 1$ .

---

# Equação diferencial parcial fracionária de Harry Dym

---

Neste Capítulo estudamos uma generalização da equação de Harry Dym (HD), a equação fracionária de HD. A equação de Harry Dym apareceu pela primeira vez em (KRUSKAL; MOSER, 1975) e é atribuída ao matemático com o mesmo nome, porém ela não foi publicada pelo seu descobridor. Ela modela um sistema em que a dispersão e a não linearidade estão acopladas, além disso é classificada como equação de evolução não linear completamente integrável. Existe uma forte conexão entre a equação de HD e a equação de KdV o que permite a mesma ser usada para aplicações em problemas de hidrodinâmica (HEREMAN; BANERJEE; CHATTERJEE, 1989).

Existem diferentes métodos que discutem soluções de EDPF. Recentemente, nos artigos de Mokhtari (2011) e Al-Khaled e Alquran (2014) foram discutidas as soluções de onda viajantes exatas da equação de HD usando o método de decomposição Adomian (ADOMIAN, 1988; ADOMIAN, 1994), o qual faz uso da iteração variacional (HE, 1997), integração direta e série de potências. No artigo de Kumar, Singh e Kılıçman (2013) foi proposta uma abordagem diferente baseada no método de perturbação homotópica usando a transformada sumudu (WATUGALA, 1993), chamada também de perturbação homotópica da transformada sumudu, a qual resolveu a equação de HD fracionária (LIAO, 2004). No trabalho de Iyiola e Gaba (2016) foi usada uma aplicação da q-HAM (*q-Homotopy Analysis Method*) para obter soluções analíticas da equação HD fracionária. Aqui, faremos uso da derivada de Caputo para discutir a equação HD fracionária e encontrar soluções analíticas. Vale ressaltar que em pesquisas recentes a equação foi estudada utilizando a derivada de Riemann-Liouville (HUANG; ZHDANOV, 2014).

## 5.1 Equação de Harry Dym fracionária

Nesta seção estudaremos a equação de Harry Dym fracionária com duas variáveis independentes. Vamos utilizar a definição de derivada fracionária de Caputo. O objetivo é

encontrar soluções analíticas da seguinte equação

$${}_t^*D_t^\alpha u(x, t) = u^p(x, t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} [u(x, t)], \quad \text{com } p > 0 \quad (5.1)$$

em que  ${}_t^*D_t^\alpha$  é a derivada Caputo e o parâmetro  $\alpha$  está entre  $m - 1 < \alpha \leq m$  com  $m \in \mathbb{N}$ . É fácil ver que a equação de Harry Dym clássica é um caso particular da equação (5.1).

### 5.1.1 Solução de onda viajante

Vamos considerar soluções do tipo onda viajante<sup>1</sup> e, assim, admitimos soluções da forma  $u(x, t) = g(x \pm ct)$ . Além disso, consideramos que as soluções têm a propriedade de dilatação, ou seja,  $g(x \pm ct) = x^b g(1 \pm ct/x)$ .

A princípio vamos considerar a solução na forma

$$u(x, t) = x^a U(\eta), \quad \eta = 1 \pm \frac{ct}{x} \quad (5.2)$$

onde  $a$  é uma constante associada com o grau de homogeneidade e  $c$  é a constante associada à velocidade.

Utilizando a derivada de Caputo, obtemos

$$\begin{aligned} {}_t^*D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-1-\alpha} \frac{\partial^m}{\partial s^m} u(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-1-\alpha} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left[ x^a U \left( 1 \pm \frac{cs}{x} \right) \right] ds \\ &= \frac{x^a}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-1-\alpha} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left[ U \left( 1 \pm \frac{cs}{x} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Introduzindo a variável  $\tau = 1 \pm \frac{cs}{x}$  temos:  $\tau \rightarrow \eta$ , quando  $s \rightarrow t$  e  $\tau \rightarrow 1$ , quando  $s \rightarrow 0$ . Adicionando as relações obtemos

$$\begin{aligned} \eta - \tau &= 1 \pm \frac{ct}{x} - \left( 1 \pm \frac{cs}{x} \right) = \\ &= \pm \frac{c}{x} (t - s). \end{aligned}$$

Considerando  $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial s} \frac{d}{d\tau}$  temos  $\frac{\partial^m}{\partial s^m} = \left( \pm \frac{c}{x} \right)^m \frac{d^m}{d\tau^m}$ . Portanto, substituindo esses

<sup>1</sup> Onda viajante (móvel) é uma solução  $u = u(x, t)$  de uma equação de ondas que depende de  $x$  (variável espacial) e de  $t$  (tempo) somente através de uma relação do tipo  $\eta = x - vt$  em que  $v$  é uma constante fixa.

resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
 {}_*D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{x^a}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta \left(\pm \frac{c}{x}\right)^{-m+1+\alpha} (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} \left(\pm \frac{c}{x}\right)^m \frac{d^m}{d\tau^m} [U(\tau)] \left(\pm \frac{c}{x}\right)^{-1} d\tau \\
 &= \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha x^{a-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} \frac{d^m}{d\tau^m} [U(\tau)] d\tau \\
 &= \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha x^{a-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} U^{(m)}(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Agora, calculamos a derivada da variável espacial. Assim, antes usamos a transformação

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{d}{d\eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1 - \eta}{x} \frac{d}{d\eta}. \tag{5.4}$$

A derivada de terceira ordem na variável espacial pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} [x^a U(\eta)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x^a U(\eta)) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( ax^{a-1} U(\eta) + x^a \frac{\partial}{\partial x} U(\eta) \right) \right] \\
 &= x^{a-3} \left[ (a-2) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a-1) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] U(\eta).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Substituindo a equação (5.3) e a equação (5.5) na equação (5.1), temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha x^{a-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} U^{(m)}(\tau) d\tau = \\
 &= x^{a(1+p)-3} U^p(\eta) \left[ (a-2) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a-1) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] U(\eta).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Impondo a condição de invariância na variável  $x$ , temos

$$a - \alpha = a(1+p) - 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3 - \alpha}{p} \tag{5.7}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} U^{(m)}(\tau) d\tau = \\
 &= U^p(\eta) \left[ (a-2) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a-1) + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] U(\eta),
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

com  $m-1 < \alpha \leq m$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Na próxima seção discutiremos as soluções analíticas para a equação (5.8).

### 5.1.2 Soluções analíticas

Para resolver a equação (5.8), primeiro consideramos  $U(\eta)$  na seguinte forma

$$U(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \geq 0, \\ A\eta^\kappa, & \eta < 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

com  $\kappa > m$ . Esta solução é chamada na literatura como solução de frente de ondas *wavefront*, onde ela é monotônica e com propagação finita <sup>2</sup>. No nosso caso, consideramos frente de ondas ilimitadas. A escolha para (5.9) é pelo fato de buscarmos soluções do tipo onda viajante.

Aplicando a equação (5.9) no lado esquerdo da equação (5.8) obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} U^{(m)}(\tau) d\tau = \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} (A\tau^\kappa)^{(m)} d\tau \\
 & = \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} (A\tau^\kappa)^{(m)} d\tau \\
 & = \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \dots (\kappa - (m - 1)) A}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^\eta (\eta - \tau)^{m-1-\alpha} \tau^{\kappa-m} d\tau \\
 & = \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \dots (\kappa - (m - 1)) \Gamma(\kappa - m + 1) \Gamma(m - \alpha) A}{\Gamma(m - \alpha) \Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \eta^{\kappa-\alpha} \\
 & = \frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha \Gamma(1 + \kappa)}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} A \eta^{\kappa-\alpha}. \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (5.9) no lado direito da equação (5.6) obtemos

$$\begin{aligned}
 & U^p(\eta) \left[ (a - 2) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a - 1) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] U(\eta) = \\
 & = A^{p+1} \eta^{p\kappa} \left[ (a - 2) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a - 1) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \eta^\kappa = \\
 & = A^{p+1} \eta^{p\kappa} \{ (a - \kappa)(a - \kappa - 1)(a - \kappa - 2) \eta^\kappa + \\
 & + 3\kappa(a - \kappa)(a - \kappa - 1) \eta^{\kappa-1} + \\
 & + 3\kappa(a - \kappa)(\kappa - 1) \eta^{\kappa-2} + \\
 & + \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \eta^{\kappa-3} \}. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Para satisfazer a igualdade, impomos a relação

$$a - \kappa = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \kappa = \frac{3 - \alpha}{p}. \tag{5.12}$$

Assim, a equação (5.11) pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned}
 & U^p(\eta) \left[ (a - 2) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (a - 1) + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ a + (1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] U(\eta) = \\
 & = A^{p+1} \eta^{p\kappa} \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \eta^{\kappa-3} = A^{p+1} \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \eta^{\kappa(1+p)-3}. \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo a equação (5.10) e a equação (5.13) na equação (5.6) temos

$$\frac{(\pm 1)^\alpha c^\alpha \Gamma(1 + \kappa)}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} A \eta^{\kappa-\alpha} = A^{p+1} \eta^{p\kappa} \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2) \eta^{\kappa-3}$$

<sup>2</sup> Mais detalhes sobre *wavefronts* sobre processo difusivos podem ser encontrados em [Gilding e Kersner \(2004\)](#).

e, usando a equação (5.12), podemos escrever

$$A = \left[ \frac{(\pm 1)^\alpha \Gamma(\kappa - 2) c^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{1/p}. \quad (5.14)$$

Retornando a equação (5.9), temos

$$U(\eta) = \begin{cases} A \eta^{\frac{3-\alpha}{p}}, & \eta < 0, \\ 0, & \eta \geq 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

ou, na seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x^\alpha A \eta^\kappa = A x^{\frac{3-\alpha}{p}} \left( 1 \pm \frac{ct}{x} \right)^{\frac{3-\alpha}{p}} = A (x \pm ct)^{\frac{3-\alpha}{p}}, \quad 1 \pm \frac{ct}{x} < 0 \\ &= \left[ \frac{(\pm 1)^\alpha \Gamma(\kappa - 2) c^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{1/p} (x \pm ct)^{\frac{3-\alpha}{p}} \\ &= (\pm 1)^{\alpha/p} \left[ \left( \frac{\Gamma(\kappa - 2) c^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right)^{\frac{1}{3-\alpha}} (x \pm ct) \right]^{\frac{3-\alpha}{p}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A expressão em (5.16) é a solução da equação (5.1) e ressaltamos que consideramos as soluções reais.

### 5.1.3 Propriedade de translação

Nesta seção vamos provar a propriedade de translação em relação ao eixo  $x$ .

**Proposição 5.1.1.** A solução da equação (5.16) preserva a translação no eixo  $x$ , isso significa que  $u(\bar{x}, t)$  também é uma solução, com  $\bar{x} = x + x_0$ .

*Demonstração.* Vamos considerar a equação diferencial fracionária

$$*_D_t^\alpha u(\bar{x}, t) = u^p(\bar{x}, t) \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} u(\bar{x}, t), \quad \text{com } \bar{x} = x + x_0. \quad (5.17)$$

Usando a equação (5.16) obtemos a solução dada por

$$u(\bar{x}, t) = (\pm 1)^{\alpha/p} \left[ \left( \frac{\Gamma(\kappa - 2) c^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right)^{\frac{1}{3-\alpha}} (\bar{x} \pm ct) \right]^{\frac{3-\alpha}{p}}. \quad (5.18)$$

Então, podemos reescrever a solução como segue

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, t) &= \left\{ \left[ \frac{\Gamma(\kappa - 2) (\pm c)^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} (x_0 + x \pm ct) \right\}^{\frac{3-\alpha}{p}} \\ &= \left\{ \left[ \frac{\Gamma(\kappa - 2) (\pm c)^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} x_0 + \left[ \frac{\Gamma(\kappa - 2) (\pm c)^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} (x \pm ct) \right\}^{\frac{3-\alpha}{p}} \\ &= [a_0 + b_0 (x \pm ct)]^{\frac{3-\alpha}{p}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

com,

$$a_0 = \left[ \frac{\Gamma(\kappa - 2)(\pm c)^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} x_0 \quad (5.20)$$

$$b_0 = \left[ \frac{\Gamma(\kappa - 2)(\pm c)^\alpha}{\Gamma(1 + \kappa - \alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} \quad (5.21)$$

□

Note que a variável  $m$  não aparece explicitamente na equação (5.19), mas ela é muito importante, pois está relacionada com o tipo do expoente, isto é, a expressão  $a_0 + b_0(x \pm ct)$  está elevada a valores positivos ou negativos, dependendo do valor de  $m - 1 < \alpha \leq m$ . Para  $0 < \alpha \leq 1$  e  $1 < \alpha \leq 2$  as soluções têm expoente positivo, e para  $\alpha > 3$  as soluções têm expoente negativo. Podemos concluir que essas soluções para equação de difusão e equação da onda têm expoentes positivos, em particular, a equação de Harry Dym fracionária. Um caso especial aparece para  $\alpha = 3$ , onde as soluções são constantes.

A principal relevância associada a mudança do sinal dos expoentes, em que o expoente é dado por  $(3 - \alpha)/p$ , especificamente: para um expoente positivo, temos um decréscimo rápido em um pequeno intervalo de tempo, quase instantâneo. Portanto, em nosso caso particular, a equação de Harry Dym é classificada no primeiro caso, porque seu expoente é positivo, enquanto outras soluções têm expoentes negativos, ou seja,  $\alpha > 3$ .

## 5.1.4 Casos particulares

Nesta seção vamos discutir os casos particulares, em especial, as equações de Harry Dym clássicas e fracionárias. Para esta finalidade vamos considerar casos particulares dos parâmetros envolvendo a derivada fracionária.

### 5.1.4.1 Equação de Harry Dym fracionária

Primeiramente, vamos considerar o caso  $0 < \alpha \leq 2$  e  $p = 3$ . Então, podemos escrever

$$u(x, t) = [a_0 + b_0(x \pm ct)]^{\frac{3-\alpha}{3}} \quad (5.22)$$

com  $\kappa = (3 - \alpha)/3$  na equação (5.20) e na equação (5.21).

### 5.1.4.2 Equação de Harry Dym clássica

Outro caso que podemos considerar é a equação clássica. Tomando  $\alpha = 1$  e  $p = 3$  temos a solução dada pela equação (5.16)

$$u(x, t) = \pm \left[ a_1 \pm \frac{3\sqrt{c}}{2}(x \pm ct) \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (5.23)$$

com  $a_1$  uma constante. Esta solução é a mesma obtida em [Mokhtari \(2011\)](#). Em particular, admitindo a solução  $u(x, t) = g(x + ct)$ , temos:

$$u(x, t) = \left[ a_1 \pm \frac{3\sqrt{c}}{2} (x + ct) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (5.24)$$

### 5.1.5 Problema de valor inicial

Nesta seção vamos discutir um problema de valor inicial. Baseado na solução explícita dada pela equação (5.19), a condição inicial associada com a equação de Harry Dym fracionária (5.1), é dada na forma

$$u(x, 0) = (r + nx)^{\frac{3-\alpha}{p}}, \quad \text{onde } r, n \text{ são constantes.} \quad (5.25)$$

Portanto, o caso mostrado na Seção 5.1.4.2, a condição inicial pode ser descrita como

$$u(x, 0) = (r + nx)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.26)$$

O grau é igual a  $2/3$ , o mesmo grau da solução. Por exemplo, a condição inicial usada em [Mokhtari \(2011\)](#) é dada por

$$u(x, 0) = \left( d - \frac{3\sqrt{c}}{2} x \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (5.27)$$

cujos grau é igual ao grau da solução (5.24).

Portanto, no caso fracionário apresentado na Seção 5.1.4.1, a condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = (r + nx)^{\frac{3-\alpha}{3}}. \quad (5.28)$$

Com esta condição inicial, no artigo [Kumar, Singh e Kılıçman \(2013\)](#), usando a transformada sumudu, é discutida a equação de Harry Dym fracionária.

A seguir mostraremos alguns gráficos, que são associados com os resultados encontrados, os quais podemos comparar com os resultados encontrados em [Mokhtari \(2011\)](#) e [Kumar, Singh e Kılıçman \(2013\)](#).

## 5.2 Gráficos

Os gráficos foram feitos usando o *software Mathematica*. Usando a equação (5.22) estudamos os gráficos no caso do sinal positivo apenas. Os casos com sinais negativos fornecem raízes complexas, por isso não foram considerados. Temos várias possibilidades para estudar a equação de Harry Dym para diferentes conjuntos de valores  $\alpha$ ,  $p$ ,  $c$  e  $x_0$ .

Os valores escolhidos para parâmetros  $\alpha$  e  $x_0$  nos levou a estudar a solução crescente da equação de Harry Dym clássica nos gráficos das figuras 17, 18, 19 e 20, enquanto nos gráficos das figuras 21, 22, 23 e 24 correspondem a solução decrescente da equação de Harry Dym. Outros valores de  $p$  podem ser considerados, mas nosso propósito aqui é recuperar a equação de Harry Dym clássica como uma caso particular das equações (5.19), (5.20) e (5.21). Nos gráficos figuras 17, 18, 19 e 20 notamos que a medida que aumentamos os valores de  $\alpha$  o comportamento da solução na origem vai mudando devido ao fato de termos o valores do expoente da expressão (5.22) cada vez menores e dessa forma com comportamento crescente. Nos gráficos figuras 21, 22, 23 e 24 notamos que os valores de  $\alpha$  menores faz com que a solução tenha um comportamento de decrescimento isso devido ao valor do expoente da expressão (5.22) ficar maior.

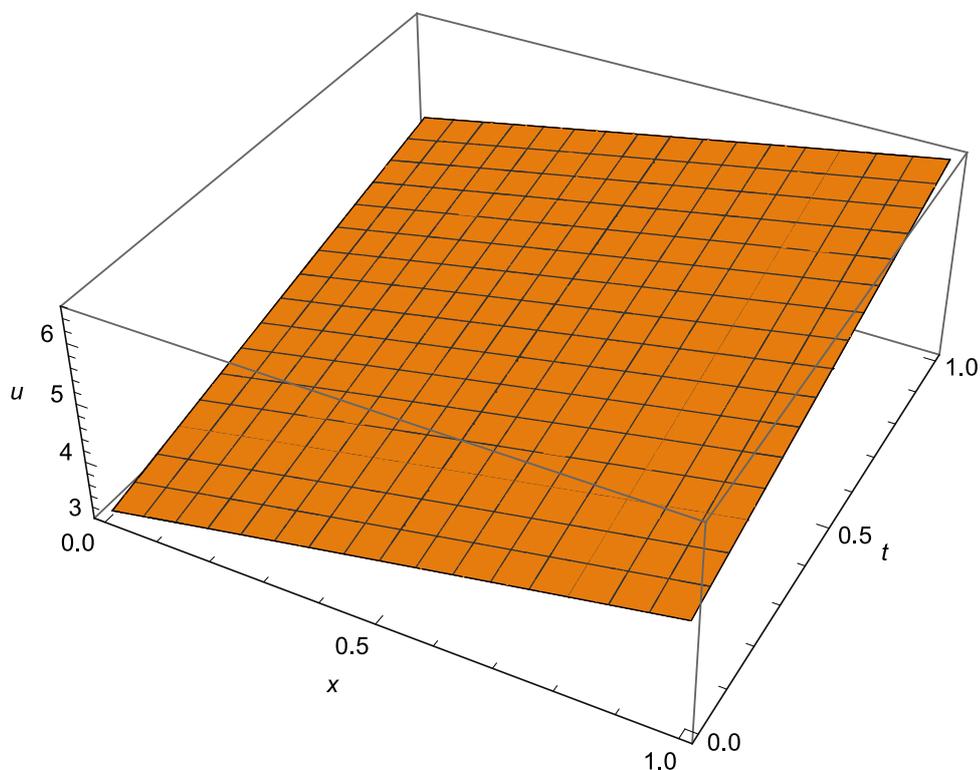


Figura 17 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 3/2$ .

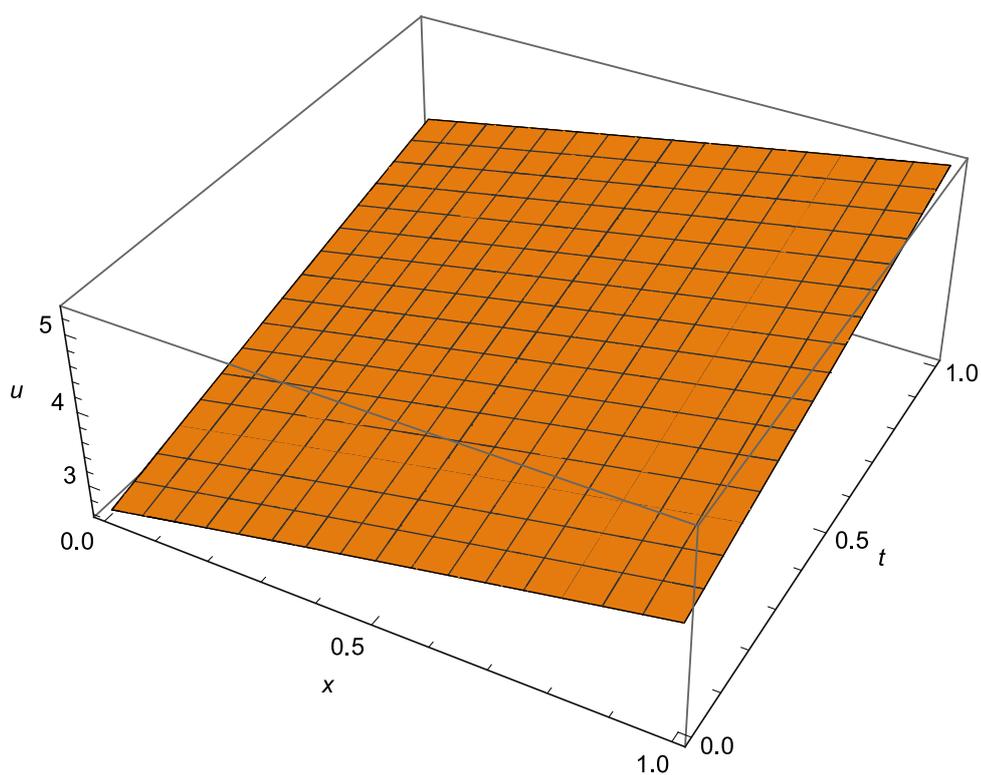


Figura 18 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $c = 1$ , e  $x_0 = 3/2$ .

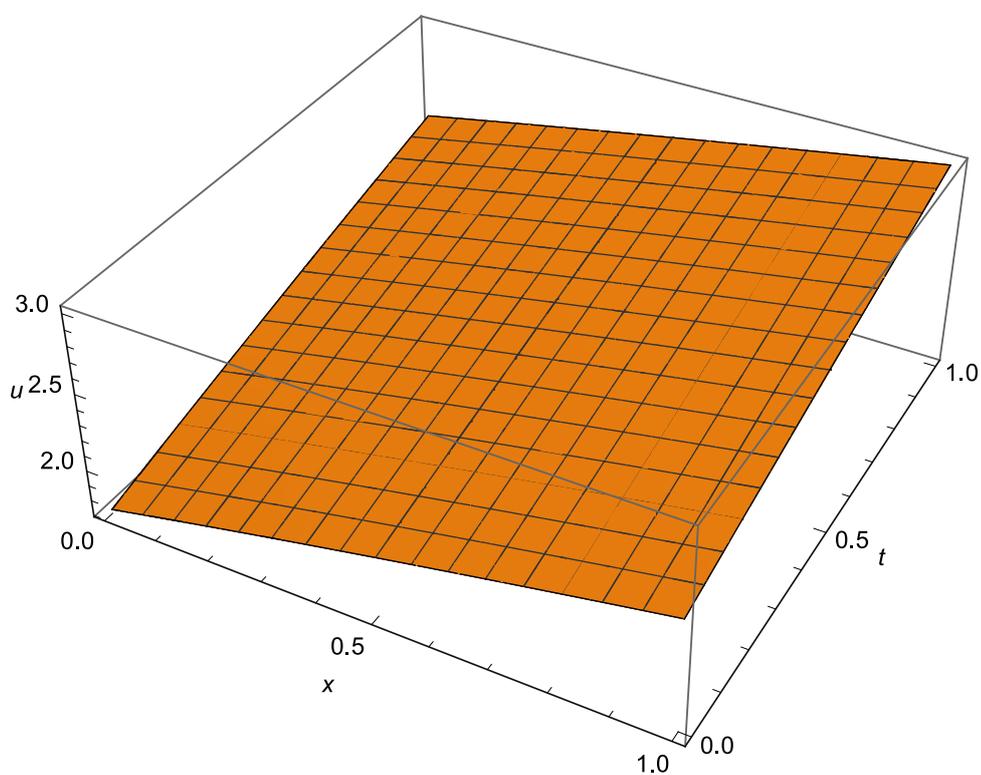


Figura 19 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 3/2$ .

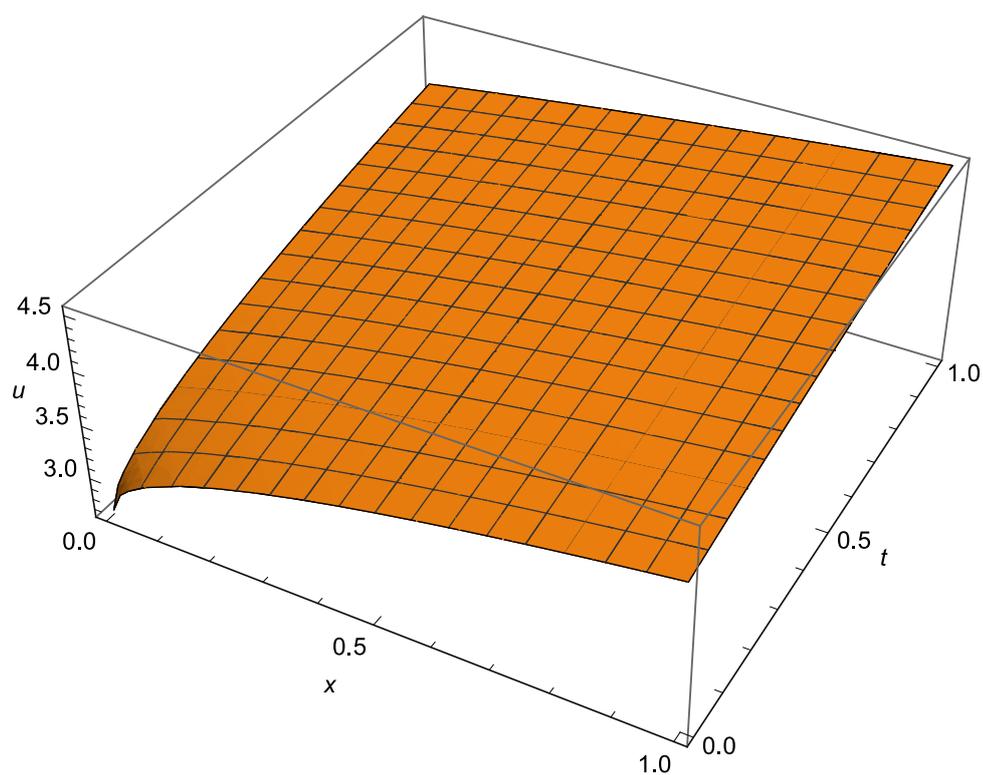


Figura 20 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 3/2$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 3/2$ .

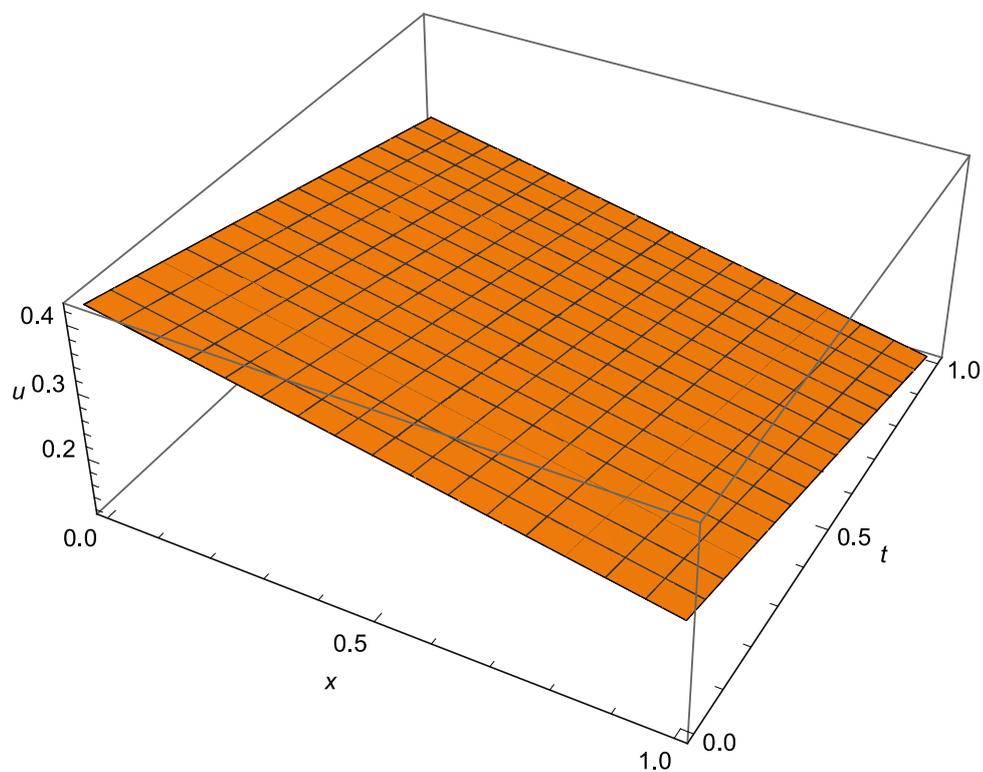


Figura 21 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 1/4$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 8/3$ .

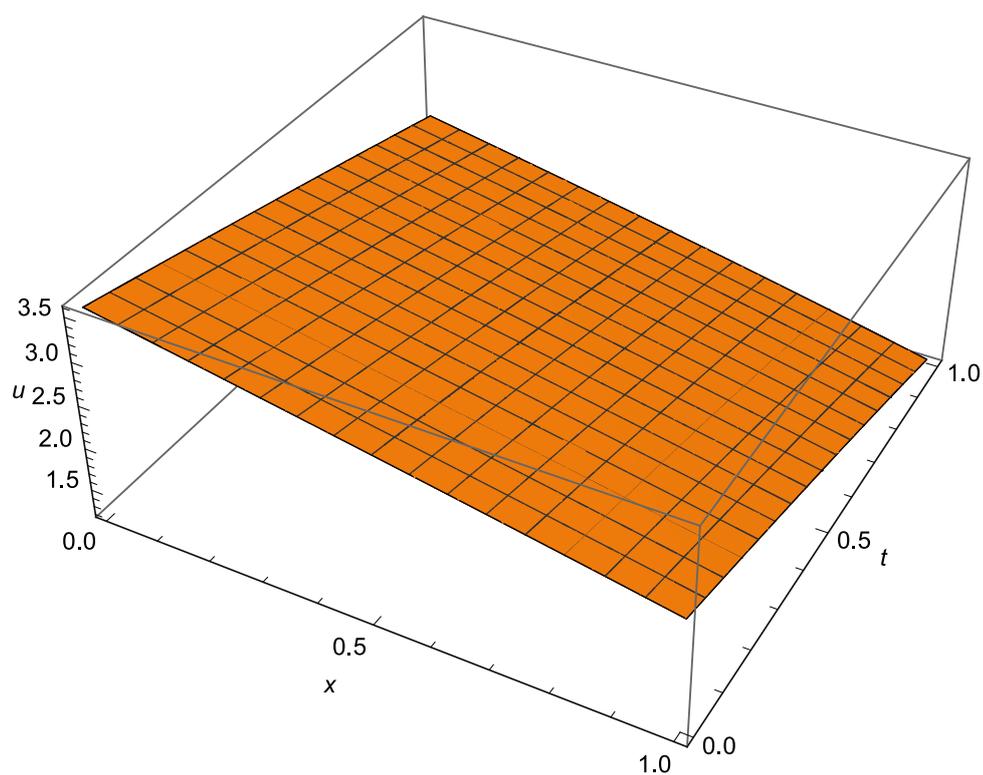


Figura 22 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 2/3$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 8/3$ .

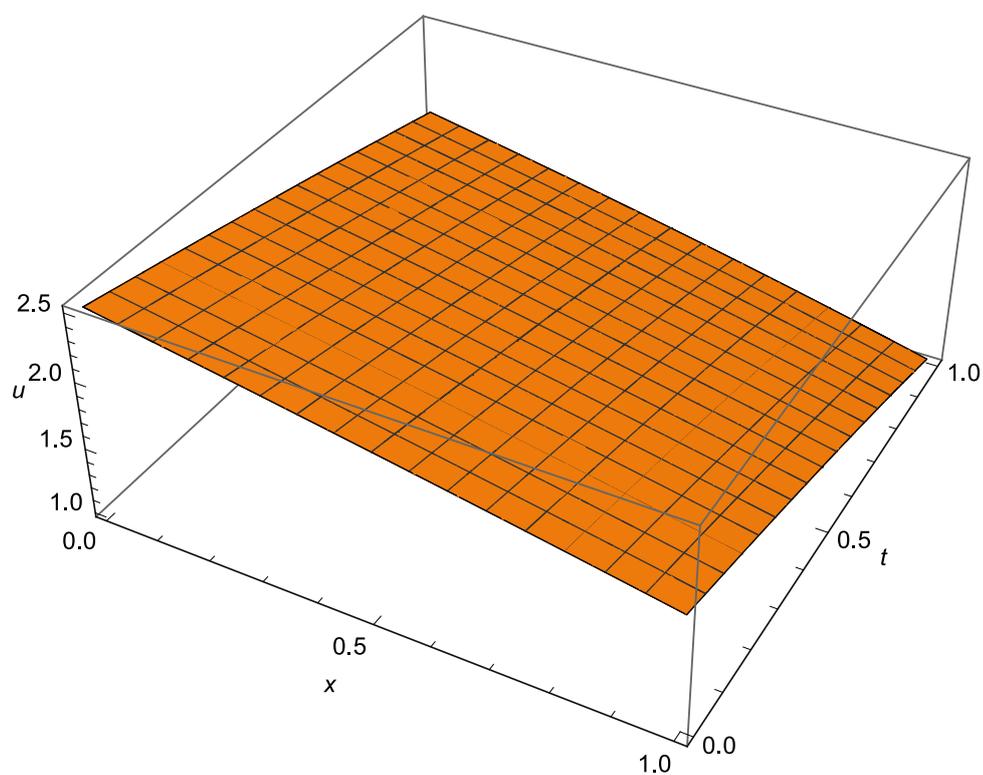


Figura 23 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 8/3$ .

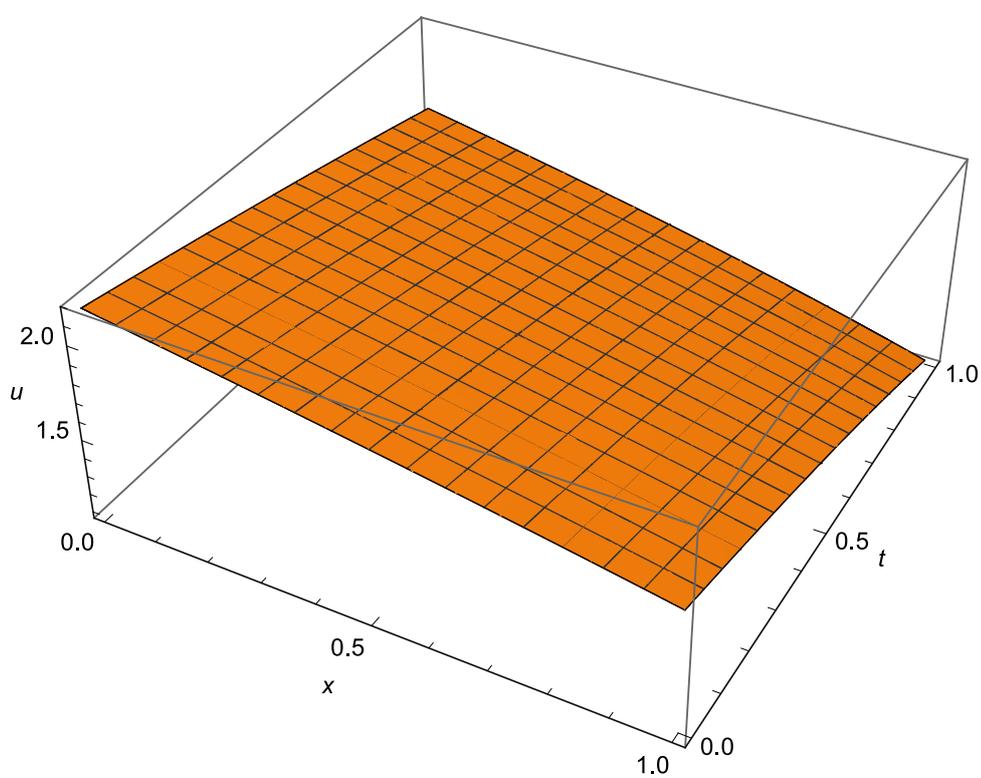


Figura 24 –  $u = u(x, t)$  para  $p = 3$ ,  $\alpha = 3/2$ ,  $c = 1$  e  $x_0 = 8/3$ .

## Considerações finais

A classe de equações de evolução é muito ampla e rica em aplicações e, por isso, é salutar continuar pesquisas que envolvam essa classe de equações. Investigá-las, com certeza, trará novos resultados e generalizações do ponto de vista do cálculo fracionário. Destacamos dentre tantas equações de evolução importantes a de Korteweg-de Vries, Burgers e Harry Dym.

Ao longo desta tese trabalhamos com equações diferenciais parciais fracionárias as quais a abordagem foi através de métodos analíticos que forneceram soluções que, em limites convenientes, recuperaram as soluções clássicas. Vale ressaltar que lançamos mão das simetrias das equações quando foi possível para encontrar novas soluções, em particular, as simetrias de Lie. Na construção dessa tese percebemos que ainda há muitas lacunas no que diz respeito às simetrias de Lie e às equações diferenciais fracionárias. Até a apresentação deste trabalho ainda não havia uma apresentação das simetrias de Lie para EDPF quando essas são descritas segundo as derivadas de Caputo, além disso, em alguns estudos recentes tentam descrever as leis de conservação de EDPF e sua intrínseca ligação com as leis de conservação das equações diferenciais com derivadas de ordem inteira (LUKASHCHUK, 2015) e (YASAR; YILDIRIM; KHALIQUE, 2016). O que podemos constatar é que, apesar dos recentes estudos, é possível obter muitos resultados da junção dessas duas teorias (Cálculo Fracionário e Simetrias de Lie).

Destacamos nesse trabalho o estudo feito no [Capítulo 4](#) em que investigamos a equação diferencial fracionária não linear onda-difusão, a qual consideramos na variável temporal a derivada de Caputo e na variável espacial a derivada de Riesz-Feller e Riesz. O método de simetrias foi usado para discussão dos casos particulares. Para tais casos, a equação diferencial fracionária não linear de difusão e a equação diferencial fracionária não linear da onda, foram resolvidas e apresentadas soluções analíticas. Recuperamos casos particulares e foram apresentados gráficos dos mesmos. Como fruto desse estudo foi publicado o trabalho [Costa et al. \(2015\)](#).

Além disso, no [Capítulo 5](#) consideramos a equação de HD que tem sua importância não só pelas várias aplicações físicas e a relação com a equação de Korteweg-de Vries, mas também pela razão de representar um sistema no qual a dispersão e a não linearidade estão juntamente acopladas. Desta forma foram consideradas as ferramentas do cálculo fracionário e suas ricas propriedades para obter mais informações das soluções da equação, para tanto foi utilizado a derivada de Caputo. A equação de HD fracionária como foi visto é uma generalização, a qual considera efeitos não locais. A partir da equação de HD fracionária foi recuperada a solução da equação de HD clássica, bem como seus casos

particulares. O método utilizado para solucionar a equação de HD fracionária foi muito eficiente e permitiu descrever com precisão a solução analítica com condição inicial. Os resultados mostraram que a condição inicial para a equação fracionária está diretamente associada com a ordem da derivada fracionária, aspecto que não foi levado em consideração por outros pesquisadores que estudaram a referida equação. Este estudo por sua vez produziu o trabalho (COSTA et al., 2016) já submetido.

Para trabalhos futuros vimos que como uma continuação natural do estudo feito no Capítulo 4 é considerar  $U(0) = 1$  e, portanto, o resultado do trabalho de Plociniczak e Okrasinska (2013) será generalizado e neste caso utilizaremos a derivada de Caputo. Além disso, se considerarmos uma força externa, é interessante, primeiro usar o caso no qual o segundo membro da EDPF é um produto de funções delta de Dirac.

Na equação de HD fracionária ainda podemos estudá-la quando a mesma está associada às funções de Green usando neste caso o método de simetrias em conjunto com as leis de conservação.

## Referências

- ADOMIAN, G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 135, n. 2, p. 501–544, 1988.
- \_\_\_\_\_. The decomposition method. *Solving Frontier Problems of Physics*. Kluwer, Boston, MA, 1994.
- AL-KHALED, K.; ALQURAN, M. An approximate solution for a fractional model of generalized Harry Dym equation. *Mathematical Sciences*, v. 8, n. 4, p. 125–130, 2014.
- BALEANU, D.; DIETHELM, K.; SCALAS, E.; TRUJILLO, J. J. *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*. Londres: World Scientific, 2012. v. 3.
- BLUMAN, G.; ANCO, S. C. *Symmetry and integration methods for differential equations*. New York: Springer, 1989. v. 154.
- BLUMAN, G.; KUMEI, S. *Symmetries and differential equations*. New York: Springer Science & Business Media, 1989. v. 154.
- BUCKWAR, E.; LUCHKO, Y. Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 81–97, 1998.
- BUTKOV, E. *Mathematical physics*. MA: Addison–Wesley: Reading, 1968.
- CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Campinas-SP: Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2009.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. Capelas de. *CÁLCULO FRACIONÁRIO*. 1. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2015. v. 1.
- COSTA, F.; SOARES, J. C. A.; OLIVEIRA, E. Capelas de; PLATA, A. R. G. On the fractional Harry Dym equation. *Submetido à publicação*, 2016.
- COSTA, F. S. *Cálculo Fracionário e a Função de Fox*. Campinas-SP: Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2011.
- COSTA, F. S.; MARÃO, J.; SOARES, J. A.; OLIVEIRA, E. Capelas de. Similarity solution to fractional nonlinear space-time diffusion-wave equation. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 56, n. 3, p. 033507, 2015.
- DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2010.
- DJORDJEVIC, V. D.; ATANACKOVIC, T. M. Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg–deVries fractional equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 222, n. 2, p. 701–714, 2008.
- ERDÉLYI, A. On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford University Press, n. 1, p. 293–303, 1940.

- FELLER, W. On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them. *Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium (Comm. Sémin. Mathém. Université de Lund)*, p. 73–81, 1952.
- GAZIZOV, R.; KASATKIN, A.; LUKASHCHUK, S. Group invariant solutions of fractional differential equations. Springer, p. 51–59, 2011.
- GAZIZOV, R.; KASATKIN, A.; LUKASHCHUK, S. Y. Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik, USATU (em inglês)*, v. 9, p. 125–135, 2007.
- \_\_\_\_\_. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2009, n. T136, p. 014016, 2009.
- GAZIZOV, R. K.; KASATKIN, A. A.; LUKASHCHUK, S. Y. Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries. *Ufa Mathematical Journal*, v. 4, n. 4, p. 54–67, 2012.
- GILDING, B.; KERSNER, R. *Travelling Waves in Nonlinear Reaction Convection Diffusion*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2004. v. 3.
- GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Random walk models for space-fractional diffusion processes. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 1, n. 2, p. 167–191, 1998.
- GORENFLO, R.; VESSELLA, S. *Abel Integral Equations*. Berlin: Springer Verlag, 1991. v. 1461.
- GRIGOLETTO, E. C. *Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler*. Campinas-SP: Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2014.
- HE, J. Variational iteration method for delay differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 235–236, 1997.
- HEREMAN, W.; BANERJEE, P. P.; CHATTERJEE, M. R. Derivation and implicit solution of the Harry Dym equation and its connections with the Korteweg-de Vries equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, n. 3, p. 241–255, 1989.
- HUANG, Q.; ZHDANOV, R. Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry Dym equation with Riemann–Liouville derivative. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 409, p. 110–118, 2014.
- IBRAGIMOV, N. H. *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations: symmetries, exact solutions, and conservation laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994. v. 1.
- IYIOLA, O. S.; GABA, Y. U. An analytical approach to time-fractional Harry Dym equation. *Applied Mathematics & Information Sciences*, v. 10, n. 2, p. 409–412, 2016.
- JOHNSON, W. P. The curious history of Faà di Bruno's formula. *American Mathematical Monthly*, JSTOR, p. 217–234, 2002.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- KRUSKAL, M. D.; MOSER, J. Dynamical systems, theory and applications. *Lecture Notes Physics*, Springer, v. 38, p. 310–354, 1975.

- KUMAR, D.; SINGH, J.; KILIÇMAN, A. An efficient approach for fractional Harry Dym equation by using sumudu transform. *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, p. 1–8, 2013.
- LEO, R. A.; SICURO, G.; TEMPESTA, P. A theorem on the existence of symmetries of fractional pdes. *Comptes Rendus Mathematique*, Elsevier, v. 352, n. 3, p. 219–222, 2014.
- LIAO, S. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 147, n. 2, p. 499–513, 2004.
- LUKASHCHUK, S. Y. Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations. *Nonlinear Dynamics*, v. 80, n. 1, p. 791–802, 2015.
- MACHADO, J. T.; GALHANO, A. M.; TRUJILLO, J. J. On development of fractional calculus during the last fifty years. *Scientometrics*, Springer, v. 98, n. 1, p. 577–582, 2014.
- MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. Londres: Imperial College-Press, 2010.
- MAINARDI, F.; PAGNINI, G.; LUCHKO, Y. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 4, p. 153–192, 2007.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- MOKHTARI, R. Exact solutions of the Harry Dym equation. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 55, n. 2, p. 204, 2011.
- OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. The fractional calculus: integrations and differentiations of arbitrary order. *Mathematics in Science and Engineering*, Dover Publications, New York, 1974.
- OLIVEIRA, D. dos Santos de. *Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler*. Campinas-SP: Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2014.
- OLIVEIRA, E. Capelas de. *Funções especiais com aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- OLIVEIRA, E. Capelas de; MACHADO, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, p. 6 páginas, 2014.
- OLIVEIRA, H. S. Introdução ao cálculo de ordem arbitrária. Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, Campinas-SP, 2010.
- OLVER, P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*. Mineápolis: Springer Science & Business Media, 1993. v. 107.
- ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 293, p. 4–13, 2015.
- OSLER, T. J. The fractional derivative of a composite function. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 1, n. 2, p. 288–293, 1970.

- OUHADAN, A.; KINANI, E. E. Exact solutions of time fractional Kolmogorov equation by using Lie symmetry analysis. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, v. 5, n. 1, p. 97–104, 2014.
- PLATA, A. R. G. *Ecuaciones diferenciales fraccionales no lineales*. Campinas-SP: Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2016.
- PLOCINICZAK, L.; OKRASINSKA, H. Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative. *Physica D*, Elsevier, n. 261, p. 85–91, 2013.
- PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. São Diego: Academic Press, 1998. v. 198.
- \_\_\_\_\_. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 5, n. 4, p. 367–386, 2002.
- RODRIGUES, F. G. *Sobre Cálculo Fracionário e as Funções de Bessel*. Campinas-SP: Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2015.
- ROMAN, S. The formula of Faà di Bruno. *American Mathematical Monthly*, JSTOR, p. 805–809, 1980.
- SAHADEVAN, R.; BAKKYARAJ, T. Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 393, n. 2, p. 341–347, 2012.
- SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- SNEDDON, I. N. *Fourier transforms*. Nova York: Courier Corporation, 1995.
- SOARES, J. C. A. *Simetrias de Lie da equação de Burgers generalizada*. Campinas-SP: Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2011.
- TARASOV, V. E. No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 18, n. 11, p. 2945–2948, 2013.
- TEODORO, G. S. *Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler*. Campinas-SP: Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2014.
- TORRIANI, H. Espalhamento inverso e métodos de Hirota: alguns aspectos clássicos. *Verão de análise e matemática aplicada*, IME-USP, 1986.
- WANG, G.-W.; LIU, X.-Q.; ZHANG, Y.-Y. Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 18, n. 9, p. 2321–2326, 2013.
- WATUGALA, G. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 24, n. 1, p. 35–43, 1993.

- WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1974. v. 42.
- WU, G.-C. A fractional Lie group method for anomalous diffusion equations. *Communications in Fractional Calculus*, v. 1, p. 27–31, 2010.
- YASAR, E.; YILDIRIM, Y.; KHALIQUE, C. M. Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada–Kotera–Ito equation. *Results in Physics*, v. 6, n. 1, p. 322 – 328, 2016.

# APÊNDICE

# Funções Gama e Beta

---

## A.1 Função Gama

A função gama desempenha um papel muito importante na definição de derivada e integral fracionárias. A função gama é dada pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\text{A.1})$$

com  $\text{Re}(z) > 0$ . A exponencial garante que a convergência da integral em  $\infty$ , a convergência em zero ocorre para número complexo  $z$ , para  $\text{Re}(z) > 0$ , ou seja, o lado direito do plano complexo. Para o lado esquerdo do plano complexo pode ser obtida a seguinte generalização (PODLUBNY, 2002). Em (A.1) substituindo  $e^{-t}$  pelo limite

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad (\text{A.2})$$

e usando  $n$  integrações por partes, obtemos a seguinte definição da função gama com limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Mesmo quando utilizamos a definição para  $\text{Re}(z) > 0$  é possível calcular valores com parte real negativa, exceto para números inteiros negativos, ou seja,  $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ . Denominamos de polos da função gama os números inteiros negativos. Para um melhor entendimento da função gama abaixo está o gráfico para valores reais no intervalo  $[-4, 4]$

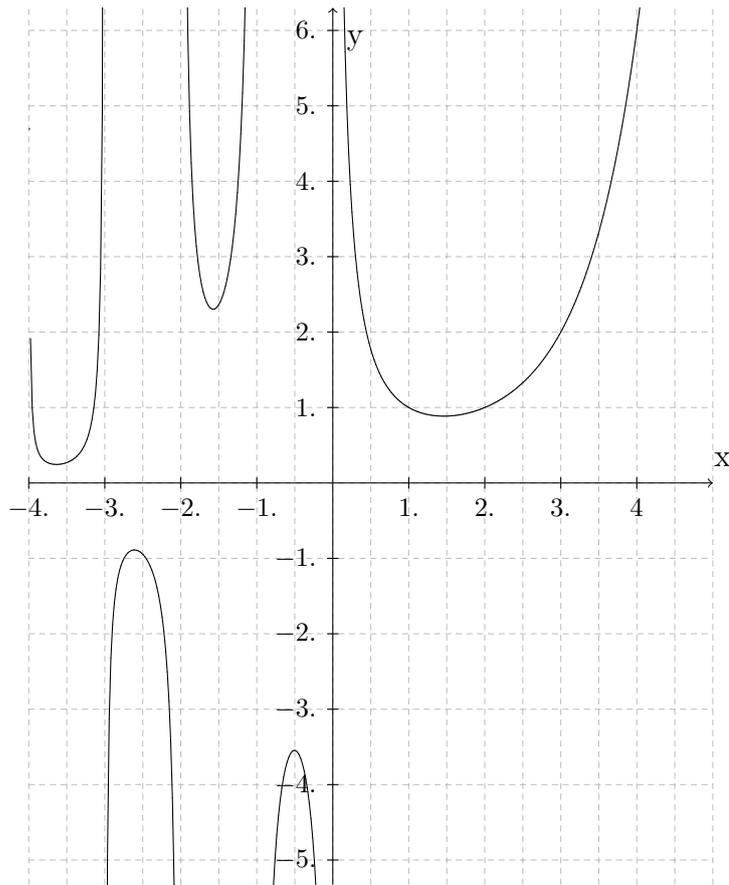


Figura 25 – Gráfico da função gama de Euler.

## A.2 Função beta

A função beta é muito utilizada para calcular derivadas fracionárias de potências de funções. Ela é também chamada de integral de Euler de primeiro tipo (PODLUBNY, 2002). A função beta está estreitamente relacionada com a função gama como segue:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \text{ onde } p > 0, q > 0. \quad (\text{A.3})$$

A função beta é simétrica, ou seja,  $B(p, q) = B(q, p)$ , de fato,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

Introduzindo a mudança  $x = 1 - t$ , obtemos

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \\ &= \int_1^0 (1-x)^{p-1}(1-(1-x))^{q-1} (-dx) \\ &= \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1} dx = B(q, p). \end{aligned}$$

Pode-se também representar a função beta na forma trigonométrica, onde a função é definida por

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^{2p-1} (\text{cos}\theta)^{2q-1} d\theta.$$

De fato, introduzindo  $t = \text{cos}^2 \theta$  em (A.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\text{cos}^2 \theta)^{p-1} (1 - \text{cos}^2 \theta)^{q-1} (-2 \text{cos}\theta \text{sen}\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{cos}^2 \theta)^{p-1} (\text{sen}^2 \theta)^{q-1} (\text{cos}\theta \text{sen}\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\text{sen}\theta)^{2q-2} (\text{sen}\theta)] [(\text{cos}\theta)^{2p-2} (\text{cos}\theta)] d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^{2q-1} (\text{cos}\theta)^{2p-1} d\theta. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Existe uma relação entre a função gama e a função beta, uma propriedade de grande valia e é dada por

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

De fato, a partir do produto

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy$$

e usando mudanças de variáveis  $x = u^2$  e  $y = v^2$ , temos

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \left[ 2 \int_0^\infty e^{-u^2} (u^2)^{p-1} u du \right] \left[ 2 \int_0^\infty e^{-v^2} (v^2)^{q-1} v dv \right] \\ &= \left[ 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-2} u du \right] \left[ 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-2} v dv \right] \\ &= \left[ 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du \right] \left[ 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1} dv \right] \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares  $u = r \text{cos}\theta$  e  $v = r \text{sen}\theta$  com  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 < r < \infty$ , segue

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \operatorname{sen} \theta)^{2q-1} r d\theta dr \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p-1} r^{2q-1} \cdot r dr \cdot \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\operatorname{sen} \theta)^{2q-1} d\theta \right) \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{(2p-1+2q-1+1)} dr \cdot \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\operatorname{sen} \theta)^{2q-1} d\theta \right) \\
 &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{(2p+2q-1)} dr \cdot \underbrace{\left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\operatorname{sen} \theta)^{2q-1} d\theta \right)}_{B(p,q)}.
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = 2 B(p, q) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{(2p+2q-1)} dr.$$

Fazendo a mudança de variável  $r^2 = \xi$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= B(p, q) 2 \int_0^\infty e^{-\xi} (\sqrt{\xi})^{2p} (\sqrt{\xi})^{2q} r^{-1} \frac{d\xi}{2r} \\
 &= B(p, q) 2 \int_0^\infty e^{-\xi} \cdot \xi^p \cdot \xi^q \cdot r^{-1} \frac{d\xi}{2r} \\
 &= B(p, q) \int_0^\infty e^{-\xi} \cdot \xi^p \cdot \xi^q \cdot \xi^{-1} d\xi \\
 &= B(p, q) \underbrace{\int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{p+q-1} d\xi}_{\Gamma(p+q)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$