

**UNICAMP**

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Tiago Emilio Siller

# **Bifurcações Locais de Codimensão 1 em Sistemas Planares de Filippov**

Campinas  
2020

Tiago Emilio Siller

## **Bifurcações Locais de Codimensão 1 em Sistemas Planares de Filippov**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Marco Antonio Teixeira**

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Tiago Emilio Siller e orientada pelo Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Campinas  
2020

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si35b Siller, Tiago Emilio, 1994-  
Bifurcações locais de codimensão 1 em sistemas planares de Filippov /  
Tiago Emilio Siller. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas de Filippov. 2. Campos vetoriais descontínuos. 3. Teoria da  
bifurcação. I. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.  
Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Codimension one local bifurcations in planar Filippov systems

**Palavras-chave em inglês:**

Filippov systems

Discontinuous vector fields

Bifurcation theory

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Marco Antonio Teixeira [Orientador]

Ricardo Miranda Martins

Ana Cristina de Oliveira Mereu

**Data de defesa:** 03-03-2020

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9758-4377>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7520957353125301>

**Dissertação de Mestrado defendida em 03 de março de 2020 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA**

**Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS**

**Prof(a). Dr(a). ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, à minha mãe Márcia, ao meu pai Emilio e ao meu irmão Ícaro, por tudo feito por mim e por todo o apoio emocional e financeiro.

Gostaria de agradecer também a todos os professores com quem tive aula e com quem tive boas conversas, tanto na UFES quanto na Unicamp, por todos os conhecimentos que eu adquiri durante a graduação e o mestrado.

Agradeço ao Marco pelo tema da minha pesquisa, pela paciência e pela orientação em geral e à banca, pelas sugestões e pelas contribuições.

Agradeço também ao Otávio pelas sugestões e correções que foram de grande importância para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

just as conventional poetry help us to see deep *within* ourselves, mathematical poetry help us to see far *beyond* ourselves.  
- Michael Guillen

# Resumo

Neste trabalho apresentamos uma classificação das bifurcações locais de codimensão 1 em sistemas de Filippov no plano. O objetivo principal é provar um resultado devido a Hogan *et al.* sobre a completude das colisões equilíbrio-fronteira. Introduzimos também conceitos básicos da teoria de Filippov sobre equações diferenciais descontínuas tais como regiões de deslize e costura, trajetórias, ciclos e estabilidade estrutural. Vale a pena ressaltar que formas normais são a principal ferramenta usada neste texto.

**Palavras-chave:** Sistemas de Filippov; Campos Vetoriais Descontínuos; Teoria da Bifurcação.

# Abstract

In this work we present a local classification of codimension one bifurcations of planar Filippov systems. The main goal is to prove a result due to Hogan *et al.* on the completeness of the boundary equilibrium collisions. We also introduce some basic concepts on the Filippov theory about discontinuous differential equations such as sliding and crossing regions, trajectories, cycles and structural stability. It is worth to say that normal forms are the main tool used along the text.

**Keywords** Filippov Systems; Discontinuous Vector Fields; Bifurcation Theory.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>SISTEMAS PLANARES DE FILIPPOV</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1	Convenção de Filippov, Órbitas e Singularidades . . . . .	13
1.2	Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos . . . . .	18
1.3	Estabilidade Estrutural e Bifurcações . . . . .	19
<b>2</b>	<b>BIFURCAÇÕES LOCAIS DE CODIMENSÃO 1</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1	<b>Colisões Equilíbrio-Fronteira</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1.1	Foco-Fronteira . . . . .	25
2.1.2	Nó-Fronteira . . . . .	27
2.1.3	Sela-Fronteira . . . . .	28
2.2	<b>Bifurcações Dobra-Dobra</b> . . . . .	<b>29</b>
2.2.1	Caso Visível-Visível . . . . .	31
2.2.2	Caso Visível-Invisível . . . . .	32
2.2.3	Caso Invisível-Invisível . . . . .	34
2.3	<b>Cúspide-Regular</b> . . . . .	<b>35</b>
2.4	<b>Pseudo-Sela-Nó</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>COMPLETUDE</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>43</b>

# Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos tem se mostrado uma poderosa ferramenta para a análise do comportamento de uma grande variedade de problemas. Existe hoje uma abordagem qualitativa bem desenvolvida para sistemas dinâmicos que depende do fato de que a evolução do sistema seja definida por uma função suave. No entanto, essa abordagem deixa de lado muitos sistemas importantes que surgem na prática, sistemas esses que contém termos que são funções não suaves. Problemas desse tipo surgem em todo lugar. Alguns exemplos são os circuitos elétricos que possuem interruptores, aparelhos mecânicos em que alguns componentes sofrem impactos, problemas que envolvem fricção e problemas em ciências sociais e de finanças onde mudanças que ocorrem de forma contínuas podem acarretar em ações discretas.

Um sistema dinâmico suave por partes (PSDS, do inglês *piecewise smooth dynamical system*) consiste de um conjunto finito de equações

$$\dot{x} = f^i(x), \quad x \in S_i \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

onde cada  $f^i$  é um campo vetorial suave definido em  $\mathbb{R}^n$  e os conjuntos  $S_i$  são abertos e disjuntos entre si. A interseção dos fechos de duas regiões  $S_i$  e  $S_j$  é denotada por  $\Sigma_{ij}$ , isto é,  $\Sigma_{ij} = \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$ . Cada  $\Sigma_{ij}$  ou é uma  $(n-1)$ -variedade, ou é o conjunto vazio. No primeiro caso, dizemos que  $\Sigma_{ij}$  é uma *fronteira de descontinuidade*.

Um PSDS é dito *contínuo* se  $f^i(p) = f^j(p)$  para todo  $p$  na fronteira  $\Sigma_{ij}$ . Por outro lado, em um PSDS descontínuo, cada ponto  $p$  de  $\Sigma_{ij}$  pode ser associado aos dois vetores  $f^i(p)$  e  $f^j(p)$ . Se estes dois vetores apontam para o mesmo lado, a trajetória cruza a fronteira e tem, neste ponto, uma descontinuidade no seu vetor tangente. Se estes dois vetores apontam para regiões diferentes, é comum definirmos a trajetória deslizando sobre a fronteira. Desta forma, para definir de que forma o campo realiza esse deslize, precisamos definir um campo sobre a fronteira  $\Sigma_{ij}$ . Existem diversas maneiras de definir tal campo, a mais comum delas é a *convenção de Filippov*, que será tratada neste trabalho. Um PSDS definido juntamente com a convenção de Filippov é chamado de *sistema de Filippov*. Uma definição mais simples de sistema de Filippov que será suficiente para este trabalho, e as definições da convenção de Filippov e de órbitas nesses sistemas serão dadas na seção 1.1.

Denotamos  $\mathfrak{X}^r$  como sendo o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^r$  definidos em um aberto  $U$  com fecho compacto no plano. Definimos a norma  $C^r$  em  $\mathfrak{X}^r$  da seguinte forma:

$$\|X\|_r = \max_{i=1,2} \sup_{u \in U} \{ \|X_i(u)\|, \|DX_i(u)\|, \dots, \|D^r X_i(u)\| \},$$

onde  $X = (X_1, X_2)$ .

O conjunto  $\mathfrak{X}^r$  com essa norma é um espaço de Banach. Essa norma induz uma métrica  $\rho$  em  $\mathfrak{X}^r$ .

Um sistema  $X \in \mathfrak{X}^r$  é dito *estruturalmente estável* se existir  $\delta > 0$  tal que, para todo sistema  $Y \in \mathfrak{X}^r$  com  $\rho(X, Y) < \delta$ , os sistemas  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes, isto é, existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow U$  que mapeia órbitas de  $X$  em órbitas de  $Y$ .

As definições de equivalência topológica e estabilidade estrutural em sistemas descontínuos serão dadas na seção 1.3.

Considere agora uma família de sistemas

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

que depende continuamente de um parâmetro  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ . Ao variar tal parâmetro, o sistema pode permanecer topologicamente equivalente ao original, ou a sua topologia pode mudar. A grosso modo, o surgimento de uma não equivalência topológica na variação do parâmetro em  $\alpha_0$  é chamada de um *ponto de bifurcação*.

Se denotarmos por  $\Sigma^r$  o conjunto dos campos em  $\mathfrak{X}^r$  que são estruturalmente estáveis, o conjunto de bifurcação é o conjunto  $\mathfrak{X}_1^r = \mathfrak{X}^r \setminus \Sigma^r$ . Se considerarmos  $(f_\mu)$  uma família de campos vetoriais com  $\mu$  variando em um intervalo aberto da reta, então as bifurcações nessa família acontecem na sua interseção com o conjunto  $\mathfrak{X}_1^r$ .

Uma noção um pouco mais fraca, porém útil, é o de conjunto residual. Um subconjunto  $\mathcal{G}$  de  $\mathfrak{X}^r$  é *residual* se ele contém uma interseção enumerável de abertos densos de  $\mathfrak{X}^r$ . Se uma propriedade for satisfeita em um conjunto residual dizemos que essa propriedade é *genérica*.

O estudo da estabilidade estrutural teve início em 1937 por A. Andronov e L. Pontryagin em [8] com o nome de *robustez* (no original, em francês: *grossièreté*). Neste mesmo artigo, são dadas condições necessárias e suficientes para que um sistema de classe  $C^1$  seja estruturalmente estável.

Em 1959, M. Peixoto publica um artigo fundamental na história da teoria dos sistemas dinâmicos com o nome "On Structural Stability"([7]). Neste trabalho, ele apresenta uma definição de estabilidade estrutural diferente daquela proposta por Andronov e Pontryagin, que será generalizada para sistemas em dimensão qualquer.

Em 1974, Sotomayor, em [9], estudou a estabilidade estrutural em sistemas suaves em variedades bidimensionais. Neste artigo, Sotomayor demonstra que o conjunto  $\mathfrak{X}_1^r$  é uma subvariedade imersa em  $\mathfrak{X}^r$  de codimensão 1.

Em 1977, Teixeira, em [13], estudou a estabilidade estrutural no caso de sistemas suaves em superfícies com fronteira. Este artigo é um dos principais pontos de partida para o estudo de sistemas dinâmicos suaves por partes.

Em 1984, Kozlova estendeu os resultados de Andronov e Pontryagin, dando condições necessárias e suficientes para que um sistema suave por partes seja estrutural-

mente estável (veja [6]). Essas condições são dadas pelo teorema 3.2, no capítulo 3.

Em 1988, Filippov publicou o livro "Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides"[3], um dos principais trabalhos sobre equações diferenciais descontínuas. Neste livro ele apresenta um estudo sobre equações diferenciais descontínuas, apresentando uma classificação das bifurcações que ocorrem em famílias de um parâmetro. Alguns desdobramentos destes casos foram descritos por Kuznetsov *et al.* em 2003 (ver [5]), Carvalho e Tonon em 2014 (ver [1]) e Hogan *et al.* em 2016 (ver [10]) e ampliada para famílias de dois parâmetros por Guardia *et al.* em 2011 (ver [12]).

Em 1996, Sotomayor e Teixeira, em [11], introduziram o conceito de regularização em sistemas descontínuos. A regularização consiste em aproximar um sistema descontínuo  $Z$  por uma família de sistemas suaves  $Z_\varepsilon$  que convergem para  $Z$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Em 2003, Kuznetsov *et al.*, em [5], publicou um trabalho que continha uma lista de bifurcações locais de codimensão 1 em sistemas de Filippov no plano. A lista apresentada no capítulo 2 é baseada neste trabalho.

Em 2016, Hogan *et al.* (ver [10]) listou duas bifurcações que não constavam na lista de Kuznetsov. Além das bifurcações listadas por Kuznetsov e Hogan, a lista do capítulo 2 apresenta mais uma bifurcação ( $VI_4$ ) não listada nesses artigos. No mesmo artigo, Hogan demonstra um resultado sobre a completude das bifurcações do tipo equilíbrio-fronteira. Este resultado é apresentado no capítulo 3.

No capítulo 1, iremos introduzir os conceitos básicos em sistemas de Filippov. Na primeira seção daremos uma definição de sistema de Filippov no plano. Definiremos também o que são as órbitas e as singularidades nesses sistemas. Na segunda seção, definiremos separatrizes e órbitas periódicas, que possuem um importante papel para o estudo de bifurcações. Na última seção deste capítulo, definiremos os conceitos de estabilidade estrutural e de bifurcações.

Iniciaremos o capítulo 2 com uma lista de bifurcações e o estudo de cada uma delas. O primeiro tipo estudado são as colisões entre um ponto de equilíbrio e a fronteira de descontinuidade. O segundo caso ocorre quando duas dobras colidem. Este caso é conhecido como dobra-dobra. O terceiro caso é a cúspide-regular. Uma perturbação deste caso apresenta dois pontos de tangência que colidem na bifurcação formando a cúspide. O último caso de bifurcação ocorre quando dois pseudo-equilíbrios colidem. Este último caso é um caso de sela-nó no campo definido na fronteira de descontinuidade e o chamamos de pseudo-sela-nó.

No último capítulo, demonstraremos um resultado devido à Hogan *et al.* sobre a completude das colisões equilíbrio-fronteira.

# 1 Sistemas Planares de Filippov

Como já é conhecido, uma solução de uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1)$$

onde  $f$  é uma função contínua é uma função  $x(t)$  diferenciável tal que a derivada de  $x$  satisfaz 1.1 em todo ponto de um intervalo dado. Porém, se considerarmos  $f$  descontínua, podemos não ter solução para alguns valores iniciais, como ilustrado no seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.** Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = 1 - 2\operatorname{sgn}(x)$$

onde  $\operatorname{sgn}$  é a função sinal definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Para  $x < 0$ , temos  $\dot{x} = 3$  e portanto a solução desta equação é  $x(t) = 3t + c_1$ . Para  $x > 0$ , temos  $\dot{x} = -1$  e portanto a solução é  $x(t) = -t + c_2$ . Quando o tempo  $t$  aumenta, a solução alcança o ponto  $x = 0$ . Quando  $x = 0$ , a direção do campo impede que a trajetória saia do ponto. Porém, a trajetória também não pode permanecer parada em  $x = 0$ , pois  $\dot{x}(0) = 1 - 2\operatorname{sgn}(0) = 1 \neq 0$ .

Para resolver isso, precisaremos de uma generalização do conceito de solução para equações diferenciais descontínuas. O objetivo deste capítulo é introduzir este e outros conceitos básicos sobre sistemas de Filippov no plano.

## 1.1 Convenção de Filippov, Órbitas e Singularidades

Considere uma região  $U$  aberta e conexa no plano e sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores definidos em  $U$ . Vamos supor, por simplicidade, que  $U$  contenha a origem. Considere também uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ , para  $k$  suficientemente grande, que tenha 0 como valor regular. Assim,  $\Sigma = f^{-1}(0)$  é uma curva que divide  $U$  nas duas regiões

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U; f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in U; f(x, y) < 0\}.$$

Um *sistema (planar) de Filippov* é o campo suave por partes definido como

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases}$$

juntamente com a convenção de Filippov que será definida mais adiante.

Denotaremos  $Z = (X, Y)$  de forma a deixar claro os campos que formam esse sistema. Também iremos assumir que os campos  $X$  e  $Y$  são de classe  $C^k$  em  $\bar{\Sigma}^+$  e  $\bar{\Sigma}^-$ ,  $k$  suficientemente grande, respectivamente (onde o traço acima do conjunto denota o fecho topológico).

Chamamos de  $\mathcal{Z}^r$  o espaço de campos vetoriais desse tipo. Com um pequeno abuso de notação, podemos dizer que  $\mathcal{Z}^r = \mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^r$  e usar a topologia produto em  $\mathcal{Z}^r$ .

Nosso primeiro passo é definir rigorosamente o fluxo que passa por um ponto  $p \in U$ . Primeiramente, precisamos definir a trajetória local de  $p$ . Para isso precisamos definir as três regiões seguintes

1. região de costura:  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$ .
2. região de deslize:  $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\}$ .
3. região de escape:  $\Sigma^e = \{p \in \Sigma; Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\}$ .

Aqui,  $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad } f(p)$  representa a derivada de Lie de  $f$  em relação ao campo  $X$  no ponto  $p$ .

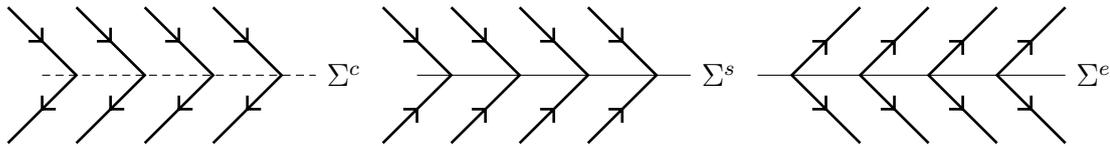


Figura 1.1 – Da esquerda para a direita: região de costura (um campo aponta na direção da fronteira e o outro aponta para fora da fronteira), região de deslize (ambos os campos apontam para a fronteira) e região de escape (ambos os campos apontam para fora da fronteira).

Essas três regiões são abertas em  $\Sigma$ . Note que essas definições não contemplam alguns pontos. São os pontos em que  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ , que são chamados de *pontos de tangência*. Mas note que, quando  $X(p) = 0$ , temos que  $Xf(p) = 0$  e portanto também estamos chamando as singularidades de  $X$  (ou de  $Y$ ) na fronteira de pontos de tangência. Se supormos  $Xf(p) = 0$  e  $X(p) \neq 0$  então as trajetórias do campo realmente serão tangentes à fronteira.

Existem casos de sistemas de codimensão infinita que possuem um *continuum* de pontos de tangência. Como neste trabalho iremos lidar apenas com casos de codimensão um, trataremos apenas de pontos de tangência isolados.

Nós vamos definir dois tipos de pontos de tangência.

**Definição 1.2.** Dizemos que um ponto  $p \in \Sigma$  é uma *dobra* ou uma *tangência quadrática* se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ .

Uma dobra é dita *visível* se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) > 0$  e *invisível* se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) < 0$ .

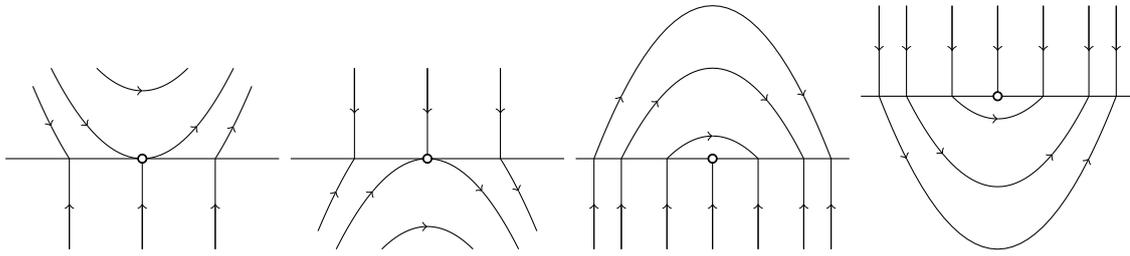


Figura 1.2 – Exemplos de dobra visível (as duas à esquerda) e invisível (as duas à direita).

**Definição 1.3.** Dizemos que um ponto  $p \in \Sigma$  é uma *cúspide* ou uma *tangência cúbica* se  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  e  $X^3f(p) \neq 0$ .

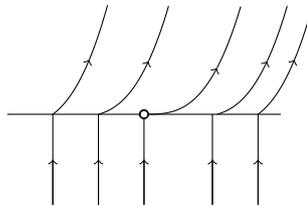


Figura 1.3 – Exemplo de cúspide.

Nos pontos de costura, onde os vetores de ambos campos apontam para o mesmo lado, a trajetória cruzará a fronteira e terá uma descontinuidade no seu vetor tangente nesse ponto. Porém, nos pontos de deslize ou de escape, os campos apontam em direções opostas forçando a trajetória a deslizar sobre a fronteira. Por conta disso, precisaremos definir o campo  $Z^s$  sobre as regiões de deslize e de escape. Tal campo é dado pela convenção de Filippov (ver [3]) e é definido por

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}.$$

O campo  $Z^s(p)$  é uma combinação linear convexa de  $X(p)$  e  $Y(p)$  e é tangente à  $\Sigma$ , como ilustra a figura 1.4 abaixo. Este campo é chamado de *campo vetorial de deslize*.

**Definição 1.4.** Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito um *pseudo-equilíbrio* de  $Z$  se  $Z^s(p) = 0$ . Dizemos que um pseudo-equilíbrio é *admissível* se pertencer a  $\Sigma^e \cup \Sigma^s$ , caso contrário dizemos que ele é *virtual*.

**Observação.** Podemos definir também equilíbrios admissíveis e virtuais da mesma maneira. Dizemos que um ponto  $p = (x, y) \in U$  é um *equilíbrio admissível* se  $X(p) = (0, 0)$  e  $f(p) > 0$ , ou  $Y(p) = (0, 0)$  e  $f(p) < 0$ . Da mesma forma, dizemos  $p$  é um *equilíbrio virtual* se  $X(p) = (0, 0)$  e  $f(p) < 0$ , ou  $Y(p) = (0, 0)$  e  $f(p) > 0$ .

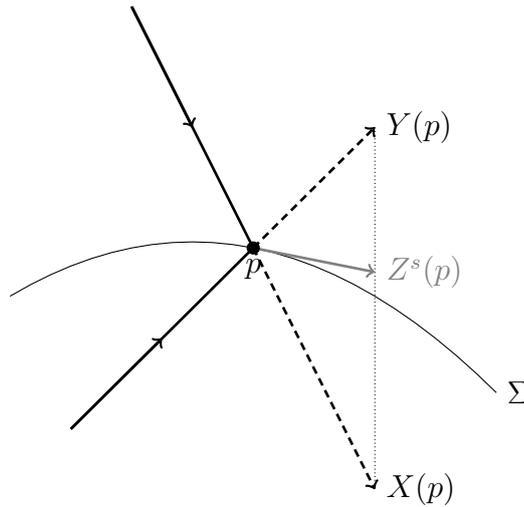


Figura 1.4 – O campo de deslizamento  $Z^s(p)$  sobre  $\Sigma$ .

O pseudo-equilíbrio é o equivalente aos pontos de equilíbrio em sistemas suaves. Podemos definir também os pontos equivalentes aos nós e às selas.

**Definição 1.5.** Um pseudo-equilíbrio  $p$  é dito um *pseudo-nó* se

- i.  $p \in \Sigma^s$  e  $p$  é um equilíbrio estável em relação ao campo  $Z^s$ . Neste caso,  $p$  é um *pseudo-nó estável*. Ou;
- ii.  $p \in \Sigma^e$  e  $p$  é um equilíbrio instável do campo  $Z^s$ . Neste caso,  $p$  é um *pseudo-nó instável*.

**Definição 1.6.** Um pseudo-equilíbrio  $p$  é dito uma *pseudo-sela* se

- i.  $p \in \Sigma^s$  e  $p$  é um equilíbrio instável em relação a  $Z^s$ . Ou;
- ii.  $p \in \Sigma^e$  e  $p$  é um equilíbrio estável em relação a  $Z^s$ .

Iremos definir agora o que é uma trajetória local a partir de um ponto  $p \in U$ .

Definimos a trajetória de um ponto  $p$  em um campo suave  $X$ , como uma curva diferenciável  $\varphi_X : I \rightarrow U$ , onde  $I$  é um intervalo que contém o 0, que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_X}{dt}(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), & \text{para todo } t \in I, \\ \varphi_X(0, p) = p. \end{cases}$$

**Definição 1.7.** Considerando o sistema  $Z = (X, Y)$ , definimos a trajetória local  $\varphi_Z$  de um ponto  $p$  em um campo não suave da seguinte maneira:

- Se  $p \in \Sigma^+$  ou  $p \in \Sigma^-$ , a trajetória local de  $p$  é a trajetória usual  $\varphi_X$  ou  $\varphi_Y$ , definida pelo campo  $X$  ou  $Y$ , respectivamente.

- Se  $p \in \Sigma^c$  com  $Xf(p) > 0$  e  $Yf(p) > 0$ , a trajetória é definida como  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ , para  $t \in I \cap \{t > 0\}$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ , para  $t \in I \cap \{t < 0\}$ . O caso em que  $Xf(p) < 0$  e  $Yf(p) < 0$  é análogo, basta apenas inverter o tempo.
- Se  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ , a trajetória é definida localmente pelo campo  $Z^s$  em  $\Sigma$ .
- Se  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , tal que as definições de trajetórias podem ser extendidas pelos dois lados de  $p$  e tais extensões coincidem. A trajetória por  $p$  é definida como sendo essa trajetória. Tais pontos  $p$  são chamados de *pontos de tangência regulares*.
- Para todos os outros pontos, definimos  $\varphi_Z(t, p) = p, \forall t$ . Esses pontos são chamados de *pontos de tangência singulares*.

**Definição 1.8.** A órbita local de um ponto  $p$  é definida por

$$\gamma(t) = \{\varphi_Z(t, p), t \in I\}.$$

Como estamos lidando com sistemas autônomos, os conceitos de órbita e trajetória são equivalentes e não há perigo de confusão.

**Definição 1.9.** As singularidades de um sistema de Filippov são

- os pontos  $p \in \Sigma^\pm$  que são pontos de equilíbrio de um dos campos  $X$  ou  $Y$ .
- os pontos  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  que são pontos de pseudo-equilíbrio.
- os pontos  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , isto é, os pontos de tangência.

Todos os outros pontos são chamados de *pontos regulares* do sistema.

Em sistemas dinâmicos suaves, a órbita de uma singularidade é o próprio ponto, isto é,  $\gamma(p) = \{p\}$ . Porém, quando lidamos com sistemas de Filippov, podemos ter casos de singularidades  $p$  que possuem órbitas que não são apenas o ponto em si. É o caso dos pontos de tangência regulares. Assim, classificamos as singularidades em sistemas de Filippov em duas classes:

- **Singularidades distinguidas:** são as singularidades  $p$  tais que  $\gamma(p) = \{p\}$ . Esse caso contempla os pontos de equilíbrio dos campos  $X$  e  $Y$ , os pontos de pseudo-equilíbrio e os pontos de tangência singulares.
- **Singularidades não-distinguidas:** são os pontos de tangência regulares, ou seja, singularidades nas quais  $\gamma(p) \neq \{p\}$ .

**Definição 1.10.** Dizemos que um ponto  $p \in \Sigma$  é um *ponto de partida* de uma trajetória  $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  se existe  $t_0 < 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p.$$

Analogamente, dizemos que  $p$  é um *ponto de chegada* da trajetória  $\varphi_Z(t, q)$  se existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p.$$

**Definição 1.11.** Uma *órbita regular (maximal)* de  $Z$  é uma curva suave por partes  $\gamma$  tal que:

- i.  $\gamma \cap \Sigma^+$  e  $\gamma \cap \Sigma^-$  são a união de órbitas dos campos suaves  $X$  e  $Y$ , respectivamente.
- ii.  $\gamma \cap \Sigma$  consiste apenas de pontos de costura e de pontos de tangência regulares.
- iii.  $\gamma$  é maximal em respeito às duas condições acima.

Observe que uma órbita regular não intersecta  $\Sigma^s$  nem  $\Sigma^e$ .

**Definição 1.12.** Uma *órbita de deslize (maximal)* é uma curva suave  $\gamma$  contida em  $\Sigma^s \cup \Sigma^e$  que é uma órbita maximal em relação ao campo  $Z^s$ .

## 1.2 Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos

Nessa seção generalizaremos os conceitos de separatrizes e órbitas periódicas para sistemas de Filippov.

**Definição 1.13.** Uma *separatriz instável* é:

- Uma órbita regular  $\Gamma$  que é a variedade instável de uma sela admissível  $p$  de um dos campos  $X$  ou  $Y$ . Denotamos essa órbita por  $W^u(p)$ . Ou;
- Uma órbita regular que tem uma singularidade distinguida  $p$  como ponto de partida. Denotamos este caso por  $W_{\pm}^u(p)$ , onde o índice  $\pm$  indica para qual região tal órbita sai.

Definimos separatriz estável de uma maneira análoga.

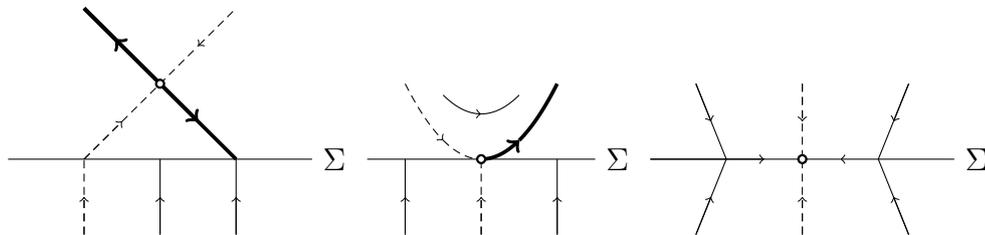


Figura 1.5 – Exemplos de separatrizes. Separatrizes estáveis são as linhas pontilhadas e instáveis as linhas grossas.

Quando uma separatriz é ao mesmo tempo estável e instável, dizemos que ela é uma *conexão de separatrizes*.

Observe que um pseudo-nó  $p \in \Sigma^s$  possui separatrizes partindo dele. Elas são as duas órbitas regulares em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  que tem  $p$  como um ponto de chegada.

Definimos os dois seguintes casos de órbitas periódicas em sistemas de Filippov:

- Uma *órbita periódica regular* é uma órbita regular  $\varphi_Z(t, p)$  na qual existe  $T > 0$  tal que  $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$  para todo  $t$ .
- Uma *órbita periódica de deslize* é uma órbita periódica  $\varphi_Z(t, p)$  que pertence à  $\Sigma$ . Este caso ocorre quando  $\Sigma$  é homeomorfo à  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e  $\Sigma = \Sigma^s$  ou  $\Sigma = \Sigma^e$  de modo que o campo de deslize não possua pontos críticos. Este caso não aparecerá neste texto pois aqui estamos lidando apenas com sistemas de forma local e portanto  $\Sigma$  será sempre homeomorfo a um intervalo aberto.

**Definição 1.14.** Um *ciclo periódico* é o fecho de uma quantidade finita de pedaços de órbitas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  onde  $\gamma_{2k}$  é um pedaço de órbita de deslize e  $\gamma_{2k+1}$  é uma órbita regular maximal e os pontos de partida e de chegada de  $\gamma_{2k+1}$  pertencem a  $\overline{\gamma_{2k}}$  e  $\overline{\gamma_{2k+2}}$ , respectivamente.

O período desse ciclo é a soma dos tempos de todos os pedaço de órbita  $\gamma_i$

### 1.3 Estabilidade Estrutural e Bifurcações

Nessa seção introduziremos os conceitos de equivalência topológica, estabilidade estrutural e bifurcações em sistemas de Filippov.

Apresentaremos aqui dois tipos de equivalência. A primeira delas é a equivalência topológica.

**Definição 1.15.** Dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  com fronteiras de descontinuidade  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$ , respectivamente, são *topologicamente equivalentes* se existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$  preservando orientação.

Note que não exigimos que  $h$  leve uma fronteira de descontinuidade na outra. Se adicionarmos tal condição, temos o segundo tipo de equivalência.

**Definição 1.16.** Sejam dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  com fronteiras de descontinuidade  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$ , respectivamente. Dizemos que  $Z$  e  $\tilde{Z}$  são  *$\Sigma$ -equivalentes* se existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$  preservando orientação e a fronteira  $\Sigma$  na fronteira  $\tilde{\Sigma}$ .

Claramente que se dois sistemas são  $\Sigma$ -equivalentes então eles são topologicamente equivalentes.

É fácil verificar que uma  $\Sigma$ -equivalência leva órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Além disso, uma

$\Sigma$ -equivalência também preserva as regiões  $\overline{\Sigma^c}$ ,  $\overline{\Sigma^s}$  e  $\overline{\Sigma^e}$ , logo leva órbitas de deslize em órbitas de deslize, preserva separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas e ciclos.

Assim como  $\Sigma$ -equivalências, as equivalências topológicas preservam as regiões  $\overline{\Sigma^s}$ ,  $\overline{\Sigma^e}$  e  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$  e portanto leva órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas de deslize em órbitas de deslize e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Além disso, também preservam separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas e ciclos.

A definição de estabilidade estrutural é semelhante à de sistemas suaves.

**Definição 1.17.** Dizemos que um sistema  $Z \in \mathcal{Z}^r$  é *estruturalmente estável* se todos os sistemas próximos dele são  $\Sigma$ -equivalentes a ele. Isto é, se existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $Z_0 \in \mathcal{Z}^r$  com  $\rho(Z, Z_0) < \delta$ , existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow U$  que leva órbitas de  $Z$  em órbitas de  $Z_0$  e preserva a fronteira de descontinuidade e a orientação das órbitas.

Seja  $\Omega = \mathcal{Z}^r$  o espaço de campos  $Z$  definidos em uma vizinhança da origem. Denotamos por  $\Sigma_0$  o conjunto de sistemas estruturalmente estáveis em  $\Omega$ . O conjunto  $\Omega_1 = \Omega \setminus \Sigma_0$  é chamado *conjunto de bifurcação*.

Considere  $\Sigma_1 \in \Omega_1$  o conjunto dos sistemas que são estruturalmente estáveis em relação à  $\Omega_1$ . O conjunto  $\Sigma_1$  é o conjunto de bifurcação de codimensão 1.

De maneira análoga, podemos definir conjuntos  $\Sigma_k$  e  $\Omega_k$ , onde  $\Sigma_k$  é o conjunto dos sistemas estruturalmente estáveis em relação à  $\Omega_k$ , e  $\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \Sigma_k$ , para todo  $k$ . Os conjuntos  $\Sigma_k$  são os conjuntos de bifurcação de codimensão  $k$ .

Um *desdobramento versal* de uma bifurcação  $Z_{\lambda_0}$  é um esquema simplificado que apresenta os retratos de fase de todos os sistemas  $Z_\lambda$  para  $\lambda - \lambda_0$  pequeno.

Podemos distinguir dois tipos de bifurcações. *Bifurcações locais* são aquelas que podem ser detectadas localmente. DiBernardo *et al.*, em [2], define bifurcações locais como aquelas que surgem quando há a perda de hiperbolicidade de algum conjunto invariante através da variação dos parâmetros. Uma bifurcação que não é local é dita *global*.

No próximo capítulo iremos estudar as bifurcações de codimensão 1 em sistemas de Filippov no plano.

## 2 Bifurcações Locais de Codimensão 1

Neste capítulo listaremos as bifurcações locais genéricas que ocorrem em famílias em um parâmetro  $\alpha$  de sistemas planares de Filippov (como estamos interessados em bifurcações locais, vamos supor que  $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno). Iremos supor a fronteira de descontinuidade como sendo o eixo  $y = 0$ , as regiões  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  serão as regiões do plano com  $y > 0$  e  $y < 0$ , respectivamente. Chamaremos de  $X$  o campo em  $\Sigma^+$  e  $Y$  o campo em  $\Sigma^-$ . Identificaremos  $\Sigma$  com um intervalo na reta e passaremos a denotar o campo  $Z^s$  como uma função definida nesse intervalo. Para simplificar a linguagem e a notação, vamos chamar ambas as regiões  $\Sigma^e$  e  $\Sigma^s$  de regiões de deslize e denotaremos ambas por  $\Sigma^s$ .

Para listar os casos, iremos considerar equivalentes além dos sistemas que são  $\Sigma$ -equivalentes, os sistemas que podem ser obtidos através da inversão do tempo  $t \rightarrow -t$ .

Serão apresentadas formas normais para cada caso. Para mais detalhes sobre estas formas locais, o leitor pode consultar [1] e [5].

A primeira seção abaixo lista os casos de colisões entre um ponto de equilíbrio e a fronteira de descontinuidade. Em seguida listaremos o caso de colisão entre duas dobras, o caso cúspide-regular e, por último, o caso da colisão entre pseudo-equilíbrios, mais precisamente entre um pseudo-nó e uma pseudo-sela.

### 2.1 Colisões Equilíbrio-Fronteira

Os casos mais simples de bifurcações em sistemas de Filippov são as colisões equilíbrio-fronteira. Uma bifurcação deste tipo ocorre quando um ponto de equilíbrio de um dos campos toca a fronteira de descontinuidade. Iremos supor, sem perda de generalidade, que esse equilíbrio seja do campo  $X$ . Como estamos preocupados apenas com casos genéricos, iremos considerar apenas pontos de equilíbrio hiperbólicos.

Considere então um sistema do tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $J$  é uma matriz real  $2 \times 2$ . Aplicando uma mudança de variáveis, que será descrita abaixo, podemos escrever o sistema como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

com

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

No primeiro caso,  $L$  possui os autovalores reais  $a \pm b$ , enquanto no segundo caso os autovalores de  $L$  são os complexos  $a \pm bi$ .

Podemos supor que  $u_2 > 0$  em 2.1. Caso  $u_2 < 0$ , basta inverter o tempo do sistema.

Para descrevermos a transformação do campo linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

para um sistema do tipo 2.2, considere a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

cuja inversa é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

A entrada 0 na matriz em 2.4 faz com que a fronteira  $\Sigma = \{(x, y); y = 0\}$  seja preservada e exigiremos que  $\gamma > 0$  para que os semiplanos superior e inferior sejam mapeados em si mesmos.

Escreva a matriz  $J$  como

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Após a mudança de variáveis e um simples cálculo, o sistema fica

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

onde

$$L = \frac{1}{\alpha\gamma} \begin{pmatrix} \gamma(\alpha A + \beta C) & \alpha\beta(D - A) + \alpha^2 B - \beta^2 C \\ \gamma^2 C & \gamma(\alpha D - \beta C) \end{pmatrix}.$$

Como queremos que a diagonal principal tenha entradas iguais, então

$$\gamma(\alpha A + \beta C) = \gamma(\alpha D - \beta C)$$

e portanto

$$\beta = \frac{\alpha(D - A)}{2C}.$$

As entradas da diagonal secundária possuem o mesmo módulo. No caso em que as entradas são iguais, temos que os autovalores são reais e portanto

$$\Delta = (A + D)^2 - 4(AD - BC) > 0.$$

Igualando as entradas da diagonal secundária, concluímos que

$$\alpha^2 = \frac{4\gamma^2 C^2}{\Delta}.$$

No caso em que as entradas da diagonal secundária tem sinais opostos, temos que  $\Delta < 0$  e

$$\alpha^2 = -\frac{4\gamma^2 C^2}{\Delta}.$$

Com essas escolhas, temos

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A + D) & \pm\gamma C/\alpha \\ \gamma C/\alpha & \frac{1}{2}(A + D) \end{pmatrix}.$$

Note que os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  ficam determinados a partir de  $\gamma$ , a menos pelo sinal de  $\alpha$ . Dessa forma escolhemos o sinal de  $\alpha$  de modo que  $\gamma C/\alpha$  seja positivo e assim podemos supor, sem perda de generalidade, que  $b > 0$  em 2.3.

O campo em  $\Sigma^-$  se torna

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 \\ \gamma u_2 \end{pmatrix}.$$

Para que a segunda coordenada seja igual a 1, devemos escolher  $\gamma = \frac{1}{u_2}$ . E por isso a necessidade de tomarmos  $u_2 > 0$  em 2.1.

A transformação acima foi feita por Glendinning em [4], porém os cálculos apresentavam erros.

Voltemos agora ao sistema 2.2. Iremos considerar a família de sistemas

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} L \begin{pmatrix} x \\ y - \alpha \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

com  $\alpha$  é um parâmetro e

$$L = \begin{pmatrix} a & \pm b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Iremos dividir o estudo do comportamento do sistema em dois casos.

### Caso 1. Entradas da diagonal secundária tem sinais opostos.

Neste caso, os autovalores de  $L$  são os complexos  $a \pm bi$  e portanto o equilíbrio é um foco. Se  $a < 0$  temos um foco estável e se  $a > 0$  temos um foco instável.

O campo  $X$  possui um ponto de equilíbrio em  $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ . Para calcular o campo  $Z^s$  em  $\Sigma$ , considere o ponto  $p = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ . O campo  $X$  em  $p$  é  $\begin{pmatrix} ax + b\alpha \\ bx - a\alpha \end{pmatrix}$  e o campo  $Y$  em  $p$  é  $\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ , assim o campo em  $\Sigma$  é dado por

$$Z^s(x) = \frac{(a - bc)x + (ac + b)\alpha}{1 + a\alpha - bx}$$

e o único pseudo-equilíbrio do sistema ocorre em

$$x_{PS} = \frac{ac + b}{bc - a}\alpha.$$

O ponto de tangência do sistema acontece quando  $bx - a\alpha = 0$ , daí

$$x_T = \frac{a}{b}\alpha$$

e a região de deslize acontece quando  $bx - a\alpha < 0$ , ou seja, para  $x < \frac{a}{b}\alpha$ .

Para  $\alpha > 0$ , o ponto de pseudo-equilíbrio será admissível quando

$$bc - a < 0.$$

No caso  $\alpha < 0$  a desigualdade se inverte. Isso significa que, quando  $\alpha$  diminui, a bifurcação em  $\alpha = 0$  fará um pseudo-equilíbrio aparecer ou desaparecer quando o sinal de  $bc - a$  for positivo ou negativo, respectivamente.

**Caso 2.** Entradas da diagonal secundária são iguais.

Neste caso, os autovalores de  $L$  são  $a \pm b$ . Se  $0 < b < a$  então os dois autovalores são positivos e portanto o equilíbrio é um nó instável. Se  $0 < |a| < b$ , temos um autovalor positivo e um autovalor negativo e teremos uma sela. Se  $a < 0$  e  $0 < b < |a|$ , os dois autovalores de  $L$  são negativos e portanto, neste caso, o equilíbrio será um nó estável.

Assim como no caso anterior, o ponto  $\binom{0}{\alpha}$  continua sendo ponto de equilíbrio de  $X$ . Mas dessa vez, o campo  $Z^s$  em  $\Sigma$  é dado por

$$Z^s(x) = \frac{(a - bc)x + (ac - b)\alpha}{1 + a\alpha - bx}$$

e o pseudo-equilíbrio do sistema passará a ser

$$x_{PS} = \frac{ac - b}{bc - a}\alpha.$$

O ponto de tangência continua sendo

$$x_T = \frac{a}{b}\alpha$$

e a região de deslize acontece novamente quando  $x < \frac{a}{b}\alpha$ .

Para  $\alpha > 0$ , o ponto de pseudo-equilíbrio será admissível quando

$$\frac{(a + b)(a - b)}{bc - a} < 0. \quad (2.5)$$

Note que o numerador de (2.5) é o produto dos autovetores de  $L$ . Assim, se o equilíbrio for um nó, o pseudo-equilíbrio é admissível quando  $bc - a < 0$  e se for uma sela, o pseudo-equilíbrio é admissível se  $bc - a > 0$ .

Quando  $\alpha < 0$  a desigualdade se inverte.

Nas próximas seções listaremos as colisões equilíbrio-fronteira.

### 2.1.1 Foco-Fronteira

A colisão foco-fronteira acontece quando o equilíbrio que toca a fronteira de descontinuidade é um foco. Isso acontece quando tomamos

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

com  $a \neq 0$  e  $b > 0$ .

Considerando  $\alpha > 0$ , o ponto de equilíbrio do campo  $X$  é admissível. Para  $a > 0$ , o foco é instável e dessa forma, a órbita do ponto de tangência em relação ao campo  $X$  intersecta  $\Sigma$  apenas para  $t \geq 0$ . Já para  $a < 0$  temos um foco estável. Neste caso, a órbita do ponto de tangência em relação ao campo  $X$  toca  $\Sigma$  apenas quando  $t \leq 0$ . Chame de  $x_F$  o ponto de interseção da órbita do ponto de tangência com a fronteira de descontinuidade com o menor tempo positivo, caso  $a > 0$ , ou com o maior tempo negativo, caso  $a < 0$ .

Caso o ponto  $x_F$  pertença à  $\Sigma^s$ , podemos dividir  $\Sigma$  em três regiões: a região de  $\Sigma^s$  à direita de  $x_F$ , a região de  $\Sigma^s$  à esquerda de  $x_F$  e a região  $\Sigma^c$ .

Caso o ponto  $x_F$  pertença à  $\Sigma^c$ , a região  $\Sigma$  se divide em  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^c$ .

Assim, as bifurcações foco-fronteira se distinguem pela posição de  $x_{PS}$  em relação às regiões acima. Temos então 5 casos (considerando  $\alpha > 0$ ):

1.  $x_F$  pertence à  $\Sigma^s$  e  $x_{PS}$  está à esquerda de  $x_F$ ;
2.  $x_F$  pertence à  $\Sigma^s$  e  $x_{PS}$  está entre  $x_F$  e  $x_T$ ;
3.  $x_F$  pertence à  $\Sigma^s$  e  $x_{PS}$  está em  $\Sigma^c$ ;
4.  $x_F$  pertence à  $\Sigma^c$  e o pseudo-equilíbrio é virtual;
5.  $x_F$  pertence à  $\Sigma^c$  e o pseudo-equilíbrio é admissível.

A figura 2.1 abaixo ilustra cada um dos casos.

Todos os casos possuem um ponto de tangência visível quando  $\alpha > 0$  e um ponto de tangência invisível quando  $\alpha < 0$ .

No primeiro caso, para  $\alpha > 0$ , existe um ciclo periódico passando pelo ponto de tangência. Quando  $\alpha \rightarrow 0$ , esse ciclo se contrai até que, em  $\alpha = 0$ , o ponto de equilíbrio, o pseudo-equilíbrio e o ponto de tangência colidem. Para  $\alpha < 0$ , não existem pontos de equilíbrio, pseudo-equilíbrio, nem ciclos. Essa bifurcação ocasiona o desaparecimento de um ciclo. Este caso é conhecido como  $BF_1$ .

No segundo caso, para  $\alpha > 0$ , o sistema apresenta um foco e um pseudo-equilíbrio. Em  $\alpha = 0$ , o ponto de equilíbrio, o pseudo-equilíbrio e o ponto de tangência colidem simultaneamente e, para  $\alpha < 0$  o sistema não possui mais pontos de equilíbrio, nem de pseudo-equilíbrio. Este caso é conhecido como  $BF_2$ .

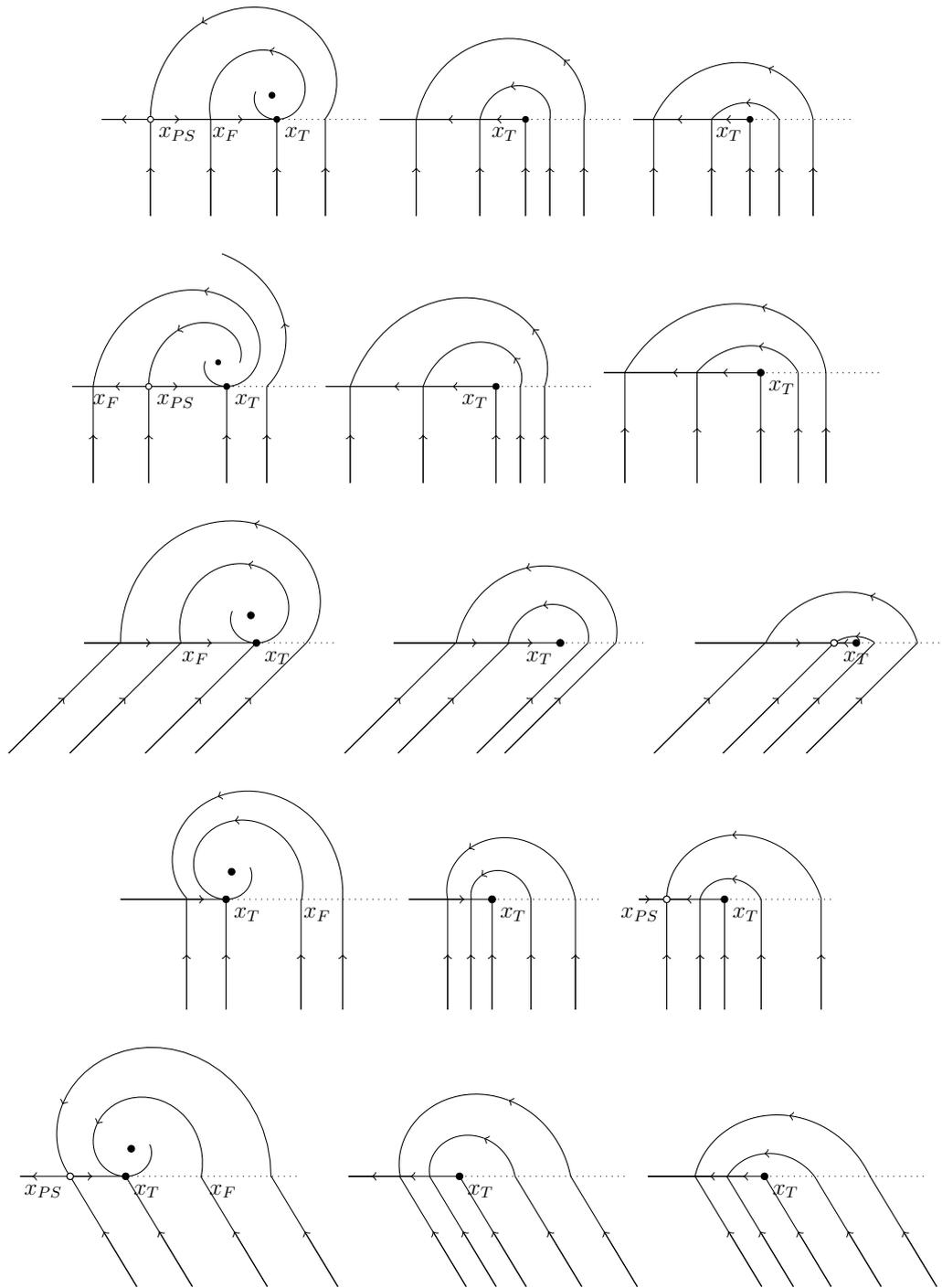


Figura 2.1 – Os 5 casos de colisão foco-fronteira. Em cada um dos casos, da esquerda para a direita:  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\alpha < 0$ .

No terceiro caso, temos um ciclo passando pelo ponto de tangência, mas dessa vez, ao contrário do segundo caso, não há um pseudo-equilíbrio. Quando  $\alpha \rightarrow 0$ , o ciclo se contrai e o foco colide com o ponto de tangência. Para  $\alpha < 0$ , não há ciclos, porém agora o sistema possui um pseudo-equilíbrio. Essa bifurcação ocasiona o desaparecimento de um ciclo e o surgimento de um pseudo-equilíbrio. Este caso é conhecido como  $BF_3$ .

No quarto caso, para  $\alpha > 0$ , temos um foco na qual todas as órbitas convergem

para ele. Para  $\alpha < 0$ , o equilíbrio desaparece após uma colisão com o ponto de tangência e um pseudo-equilíbrio surge em  $\Sigma$ . Todas as órbitas do sistema convergem agora para esse pseudo-equilíbrio. Este caso é conhecido como  $BF_4$ .

No último caso, o que vemos é uma colisão entre uma pseudo-sela, um ponto de tangência e um foco. Após a colisão resta apenas o ponto de tangência. Este caso é conhecido como  $BF_5$ .

### 2.1.2 Nó-Fronteira

Uma colisão nó-fronteira ocorre quando um nó colide com a fronteira de descontinuidade. Esse caso acontece quando

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

com  $0 < b < a$ , se o nó for instável, ou  $0 < b < -a$ , se o nó for estável.

Existem 4 casos de colisões nó-fronteira, que estão ilustrados na figura 2.2 abaixo.

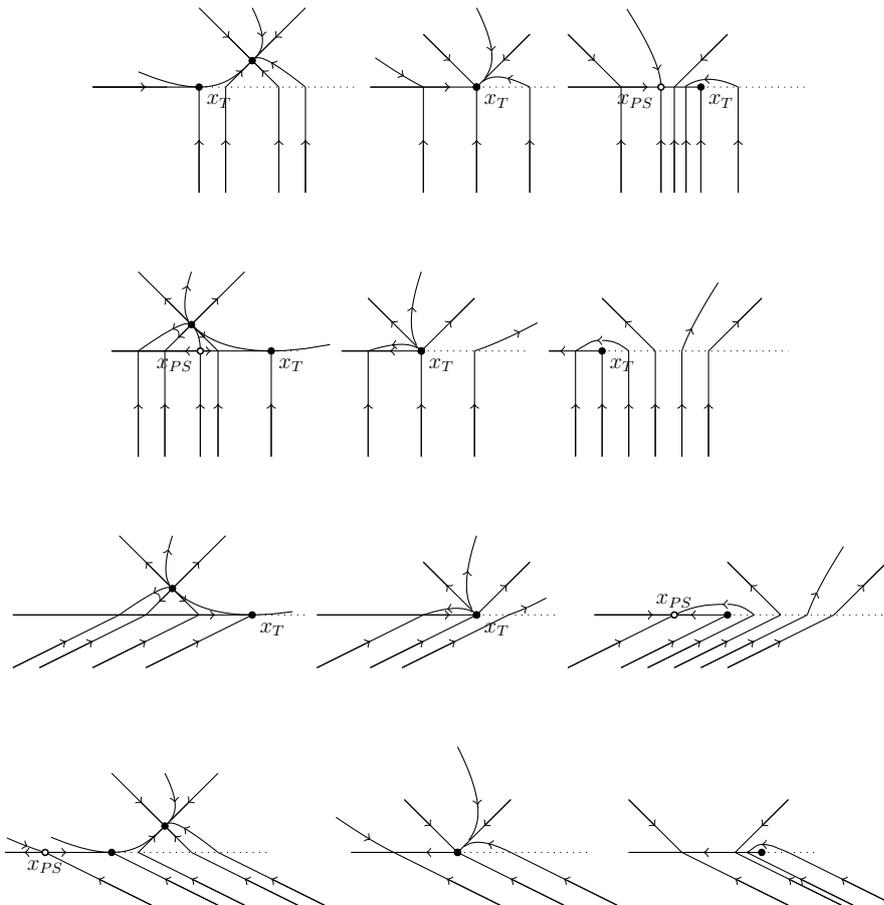


Figura 2.2 – Os 4 casos de colisão nó-fronteira. Da esquerda para a direita:  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\alpha < 0$ .

Todos os casos possuem um ponto de tangência visível para  $\alpha > 0$  e um ponto de tangência invisível para  $\alpha < 0$ .

No primeiro caso, existem um nó e um ponto de tangência para  $\alpha > 0$ . Eles colidem em  $\alpha = 0$  e, após a colisão, temos um pseudo-nó e um ponto de tangência. Este caso ilustra a transformação de um nó em um pseudo-nó. Este caso é chamado de  $BN_1$  em [5].

O mesmo acontece com o terceiro caso. A diferença entre este caso e o primeiro é que no primeiro, a estabilidade do nó é mantida após a colisão, enquanto neste, a estabilidade do nó é trocada após a colisão. Este caso é chamado de  $BN_3$ .

No segundo caso, temos uma colisão entre um nó, uma pseudo-sela e o ponto de tangência. Após a colisão, resta apenas o ponto de tangência. Temos então o desaparecimento de um nó. Este caso é chamado de  $BN_2$ .

O quarto caso é semelhante ao segundo. A diferença entre eles é que neste caso, a pseudo-sela e o nó são conectados por uma trajetória que passa pelo ponto de tangência, o que não ocorre no segundo caso. Este é o caso  $BN_4$ .

### 2.1.3 Sela-Fronteira

Uma colisão sela-fronteira acontece quando o equilíbrio que colide com a fronteira de descontinuidade é uma sela.

Esse caso acontece quando

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

com  $0 < |a| < b$ .

Considerando  $\alpha > 0$ , o ponto  $(0, \alpha)$  é um ponto de equilíbrio admissível de  $X$ . Os autovetores de  $L$  são  $(1, 1)$ , associado a  $a + b$ , e  $(-1, 1)$  associado a  $a - b$ . Assim, as separatrizes de  $X$  são as retas que passam por  $(0, \alpha)$  com inclinações 1 e  $-1$ . Essas retas intersectam a fronteira de descontinuidade nos pontos  $(-\alpha, 0)$  e  $(\alpha, 0)$ , respectivamente.

Como  $0 < |a| < b$ , segue que  $-1 < a/b < 1$  e portanto  $-\alpha < \frac{a}{b}\alpha < \alpha$ . Lembrando que  $\frac{a}{b}\alpha = x_{PS}$ , segue que o ponto de tangência do sistema fica entre  $-\alpha$  e  $\alpha$ . A fronteira é então dividida em três regiões: A região à esquerda de  $-\alpha$ , a região entre  $-\alpha$  e o ponto de tangência, e a região à direita do ponto de tangência (região de costura).

A classificação das bifurcações desse tipo se baseia na posição do pseudo-equilíbrio em relação a essas regiões. Em todos os casos, o ponto de tangência é invisível para  $\alpha > 0$  e visível para  $\alpha < 0$ .

O caso  $BS_1$  acontece quando, para  $\alpha > 0$ , o pseudo-equilíbrio está à esquerda de  $-\alpha$ . Isto ocorre quando  $bc - a > 0$  e  $x_{PS} < -\alpha$ , o que é equivalente a

$$\frac{a}{b} < c < 1.$$

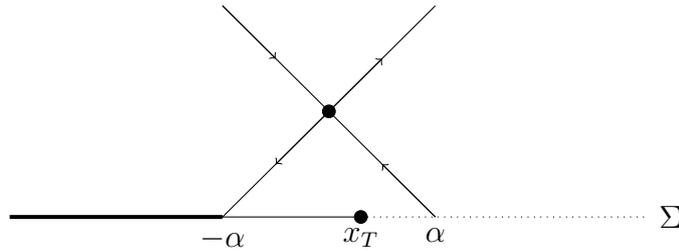


Figura 2.3 – Regiões de  $\Sigma$ : região à esquerda de  $-\alpha$  (linha mais grossa); região entre  $-\alpha$  e  $x_T$  (linha mais fina); e a região de costura (linha pontilhada).

Neste caso, para  $\alpha > 0$ , temos uma sela, um pseudo-nó e um ponto de tangência. Estes três pontos colidem quando  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , temos apenas um ponto de tangência.

O caso  $BS_2$  ocorre quando, para  $\alpha > 0$ , o pseudo-equilíbrio se encontra entre  $-\alpha$  e a tangência. Isto é, temos  $bc - a > 0$  e  $x_{PS} < -\alpha$  que é equivalente a

$$c > 1.$$

Neste caso temos novamente uma colisão entre um pseudo-nó, uma sela e o ponto de tangência, restando apenas o ponto de tangência visível após a colisão. A diferença entre o primeiro caso e este é que neste caso, a separatriz que parte do pseudo-equilíbrio cruza a região de costura, enquanto isso não ocorre no primeiro caso.

No caso  $BS_3$ , o pseudo-equilíbrio se encontra na região de costura, ou seja, o pseudo-equilíbrio é virtual. Isto ocorre quando  $bc - a < 0$ , ou seja

$$c < \frac{a}{b}.$$

Neste caso, para  $\alpha > 0$ , temos uma sela e um ponto de tangência, enquanto que, para  $\alpha < 0$ , temos uma pseudo-sela e um ponto de tangência. Esse caso ilustra a transformação de uma sela em uma pseudo-sela.

A figura 2.4 abaixo ilustra cada caso.

## 2.2 Bifurcações Dobra-Dobra

Uma bifurcação dobra-dobra acontece quando um ponto da fronteira é uma dobra de ambos os campos  $X$  e  $Y$ .

Os casos em que ambas as dobras são visíveis e o caso em que uma dobra é visível e outra invisível podem ser escritas sobre uma das formas normais (ver [1]):

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & y > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2(x-\alpha) \end{pmatrix} & y < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & y > 0, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_2(x-\alpha) \end{pmatrix} & y < 0 \end{cases} .$$

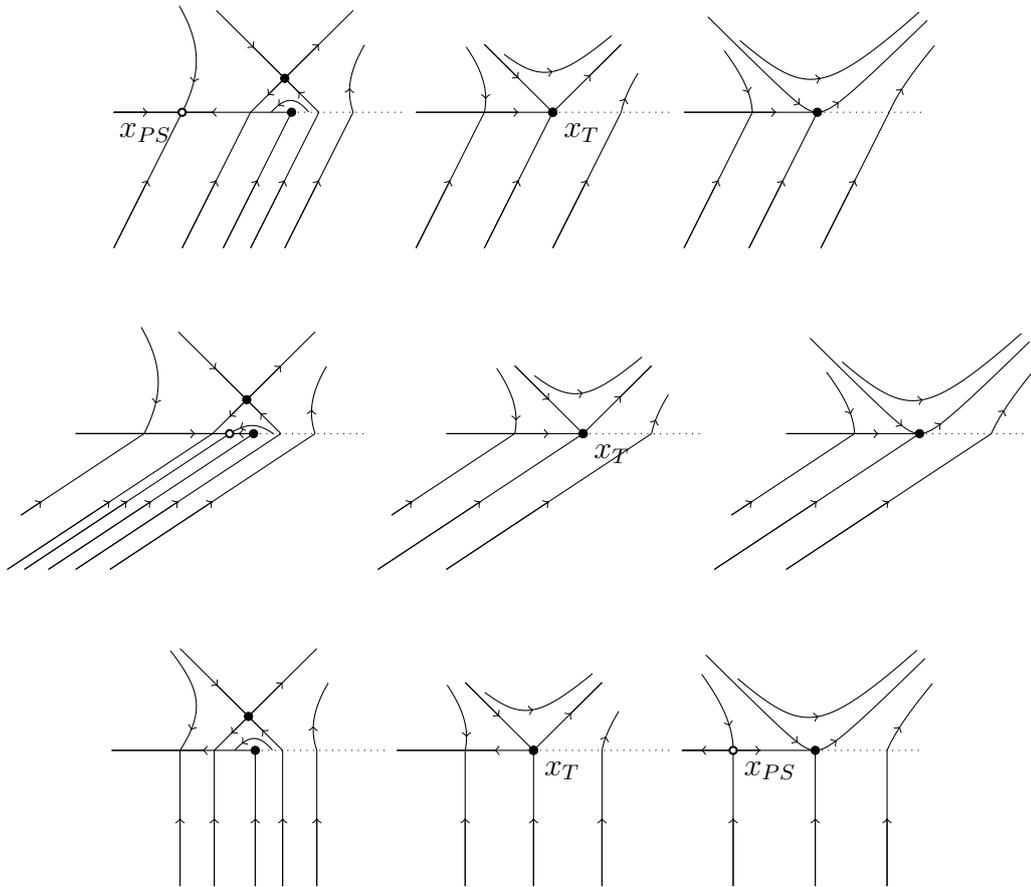


Figura 2.4 – Colisões sela-fronteira. Da esquerda para a direita:  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\alpha < 0$ .

No primeiro caso, as trajetórias do sistema apontam na mesma direção, neste caso, para a direita. No segundo caso, as trajetórias apontam para lados diferentes, neste caso, as trajetórias do campo de cima apontam para a direita e do campo de baixo apontam para a esquerda.

As trajetórias de tal sistema são parábolas que são determinadas pelos coeficientes do campo. Os índices  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  indicam a visibilidade e o quão abertas são essas trajetórias. Caso  $\lambda_1$  seja positivo (respect. negativo), as trajetórias do campo  $X$  são parábolas com concavidade para cima (respect. para baixo) e portanto o ponto de tangência do campo  $X$  é visível (respect. invisível). No caso de  $\lambda_2$  ser positivo (respect. negativo), as trajetórias de  $Y$  são parábolas com concavidade para cima (respect. para baixo) mas, neste caso, o ponto de tangência de  $Y$  é invisível (respect. visível).

Dessa forma, o campo  $X$  possui uma dobra no ponto  $(0, 0)$  e o campo  $Y$  possui uma dobra no ponto  $(\alpha, 0)$ , que colidem quando  $\alpha = 0$ .

No primeiro caso, em um ponto  $p \in \Sigma$ , o campo de deslize é dado por

$$Z^s(p) = 1, \quad \forall p \in \Sigma$$

e portanto não temos pseudo-equilíbrios.

Já no segundo caso, o campo de deslize no ponto  $p = (x, 0) \in \Sigma$  é dado por

$$Z^s(p) = 1 - \frac{2\lambda_1 x}{\lambda_1 x + \lambda_2(x - \alpha)}.$$

Aqui, temos o pseudo-equilíbrio

$$x_{PS} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \alpha.$$

A classificação dos casos é feita de acordo com a visibilidade das dobras.

### 2.2.1 Caso Visível-Visível

Os casos  $VV$  acontecem quando temos a colisão entre duas dobras visíveis. Temos dois casos possíveis.

O primeiro caso acontece quando os dois campos apontam na mesma direção. A forma normal deste caso é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & y > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2(x - \alpha) \end{pmatrix} & y < 0, \end{cases}$$

onde  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

A região de costura é  $\Sigma^c = (0, \alpha)$ , se  $\alpha > 0$  ou  $\Sigma^c = (\alpha, 0)$ , se  $\alpha < 0$ .

Para  $\alpha > 0$ , os pontos de tangência delimitam a região de costura, onde as órbitas cruzam essa região no sentido de  $\Sigma^-$  para  $\Sigma^+$ . Quando  $\alpha \rightarrow 0$ , a região de costura se contrai até desaparecer quando  $\alpha = 0$ . Quando  $\alpha < 0$ , temos novamente uma região de costura, mas dessa vez as órbitas cruzam essa região no sentido oposto.

Este caso é conhecido como  $VV_1$  e é ilustrado na figura 2.5 abaixo.

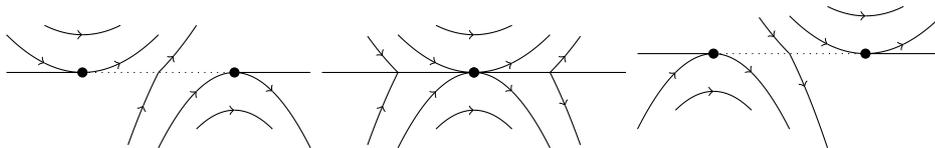


Figura 2.5 – Caso  $VV_1$ .

Já o caso  $VV_2$  ocorre quando os dois campos apontam em direções opostas. A sua a forma normal é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & y > 0, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_2(x - \alpha) \end{pmatrix} & y < 0, \end{cases},$$

com  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

A região de deslize nesse caso é  $\Sigma^s = (0, \alpha)$ , se  $\alpha > 0$  ou  $\Sigma^s = (\alpha, 0)$ , se  $\alpha < 0$ .

Como  $\lambda_2 < 0$ , segue que  $0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1$  e portanto  $x_{PS} \in \Sigma^s$ . Ou seja, neste caso, o pseudo-equilíbrio é sempre admissível.

Assim, para  $\alpha > 0$ , temos dois pontos de tangência que delimitam a região de deslize e um ponto de pseudo-sela. Estes três pontos colidem simultaneamente quando  $\alpha = 0$ , fazendo com que a região de deslize desapareça neste parâmetro. Para  $\alpha < 0$ , temos novamente dois pontos de tangência e uma pseudo-sela.

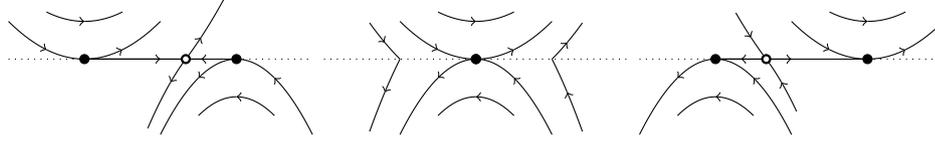


Figura 2.6 – Caso  $VV_2$ .

### 2.2.2 Caso Visível-Invisível

Os casos  $VI$  acontecem quando uma dobra visível colide com uma dobra invisível. Temos 4 casos possíveis.

O caso  $VI_1$  acontece quando os dois campos apontam na mesma direção. A forma normal deste caso é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2(x-\alpha) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

com  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ .

Para  $\alpha > 0$  temos uma região de deslize instável entre os pontos de tangência que se contrai até desaparecer em  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$  surge novamente uma região de deslize entre os pontos de tangência, mas dessa vez tal região é estável.

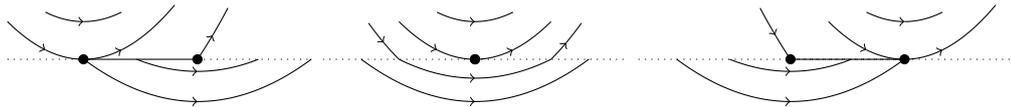


Figura 2.7 – Caso  $VI_1$ .

Os outros 3 casos acontecem quando os campos  $X$  e  $Y$  apontam para direções opostas. Para esses casos a forma normal é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_2(x-\alpha) \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  positivos.

Em todos os casos, temos uma região de costura delimitada pelos pontos de tangência.

O caso  $VI_2$  acontece quando, para  $\alpha > 0$ , o pseudo-equilíbrio se encontra na região de deslize à esquerda da região de costura. Para que isso ocorra, precisamos ter

$$1 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

em 2.6.

No caso  $VI_3$ , para  $\alpha > 0$ , o pseudo-equilíbrio se encontra na região de deslize à direita da região de costura e a separatriz cruza  $\Sigma$  na região de costura. Para que isso ocorra, precisamos ter

$$0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{1}{2}.$$

Já no caso  $VI_4$ , para  $\alpha > 0$ , o pseudo-equilíbrio novamente se encontra na região de deslize à direita da região de costura porém, desta vez, a separatriz toca  $\Sigma$  na região de deslize. Para isso, precisamos ter

$$\frac{1}{2} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1.$$

Em  $VI_2$ , para  $\alpha > 0$ , temos uma pseudo-sela e dois pontos de tangência. Esses três pontos colidem simultaneamente e a região de costura desaparece quando  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , a região de costura e a pseudo-sela reaparecem.

Nos casos  $VI_3$  e  $VI_4$ , para  $\alpha > 0$ , temos um pseudo-nó e dois pontos de tangência que delimitam a região de costura. Esses três pontos colidem e a região de costura se contrai até desaparecer quando  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , o pseudo-nó e a região de costura reaparecem.

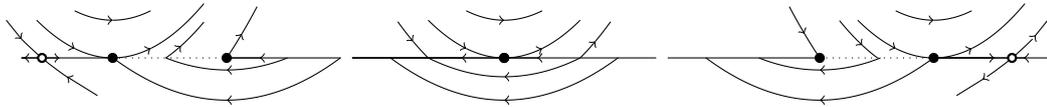


Figura 2.8 – Caso  $VI_2$ . Temos uma pseudo-sela admissível cuja separatriz cruza a região de deslize.

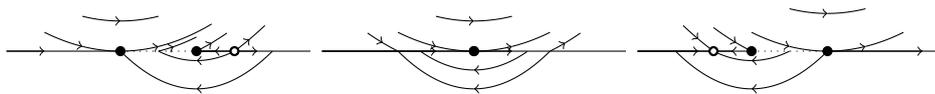


Figura 2.9 – Caso  $VI_3$ . Temos um pseudo-nó admissível cuja separatriz cruza a fronteira de descontinuidade na região de costura.

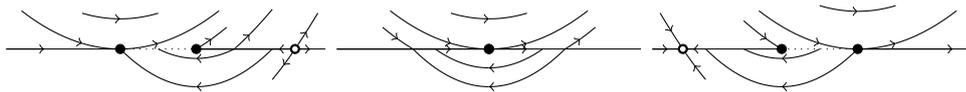


Figura 2.10 – Caso  $VI_4$ . Aqui, temos um pseudo-nó admissível cuja separatriz toca a fronteira de descontinuidade na região de deslize.

O caso  $VI_4$  acima não aparece nas listas de Kuznetsov *et al.* e Hogan *et al.*

### 2.2.3 Caso Invisível-Invisível

Os últimos casos de bifurcação dobra-dobra acontecem quando ambas as dobras são invisíveis.

O caso  $II_1$  acontece quando os campos  $X$  e  $Y$  apontam para a mesma direção. A forma normal deste caso é (ver [5]):

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+x \\ -x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ x-\alpha \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Dessa forma, o sistema possui dois pontos de tangência invisíveis em  $(0, 0)$  e  $(\alpha, 0)$ . Para  $\alpha > 0$ , esses pontos de tangência delimitam uma região de costura. Esses pontos se aproximam até colidirem quando  $\alpha = 0$  fazendo com que a região de costura se contraia até desaparecer. Para  $\alpha < 0$ , os dois pontos de tangência e a região de costura reaparecem, porém com as trajetórias cruzando esta região em sentido oposto em relação a quando  $\alpha > 0$ . Não há pontos de equilíbrio envolvidos neste caso.

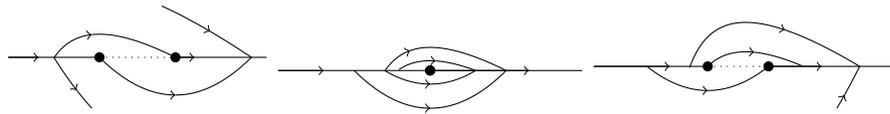


Figura 2.11 – Caso  $II_1$ .

Já o caso  $II_2$  acontece quando os campos  $X$  e  $Y$  apontam para lados opostos. Sua forma normal é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+x \\ -x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

O sistema possui dois pontos de tangência em  $(0, 0)$  e  $(\alpha, 0)$ .

Nessa bifurcação ocorre o surgimento de um ciclo regular. Para ver isso, considere  $\alpha = 0$ . Podemos associar ao campo  $X$  uma involução  $\phi_X$  definida de  $\Sigma$  em si mesmo que associa cada ponto  $x \in \Sigma$  no ponto de  $\Sigma$  que intersecta a órbita de  $x$ , como ilustrado na figura 2.12 abaixo.

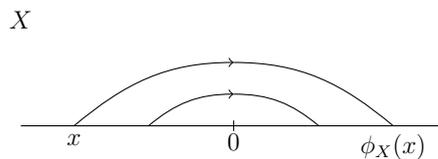


Figura 2.12 – A função  $\phi_X$ .

Como  $\phi_X \circ \phi_X = Id$ , ela possui a forma

$$\phi_X(x) = -x + ax^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Analogamente, para o campo  $Y$  definimos a involução  $\phi_Y$  que possui a forma

$$\phi_Y(x) = -x + bx^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Perturbando o sistema, a involução associada ao campo  $Y$  passa a ser

$$\phi_{Y,\alpha}(x) = -2\alpha - x + bx^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Para  $x \leq 0$ , definimos o mapa de primeiro retorno próximo da origem como sendo a composição  $P_\alpha = \phi_{Y,\alpha} \circ \phi_X$ . Esse mapa possui a seguinte forma

$$P_\alpha(x) = -2\alpha + x + (b-a)x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Assim, para termos uma bifurcação dobra-dobra genérica, devemos ter  $b-a \neq 0$ . Se  $b-a > 0$ , as órbitas próximas à origem convergem para a origem, enquanto que se  $b-a < 0$ , as órbitas se afastam da origem. Os casos com  $b-a > 0$  são equivalentes aos casos com  $b-a < 0$  pela inversão do tempo  $t \rightarrow -t$ .

Quando  $b-a < 0$ ,  $P_\alpha$  possui um ponto fixo próximo da origem quando  $\alpha < 0$  pequeno. Isso significa que uma perturbação do sistema com  $\alpha < 0$  apresenta um ciclo regular.

Em termos de conjuntos invariantes, um pseudo-nó estável é substituído por um pseudo-nó instável e um ciclo regular estável. Por este motivo, esta bifurcação é às vezes chamada de *bifurcação pseudo-Hopf supercrítica*.

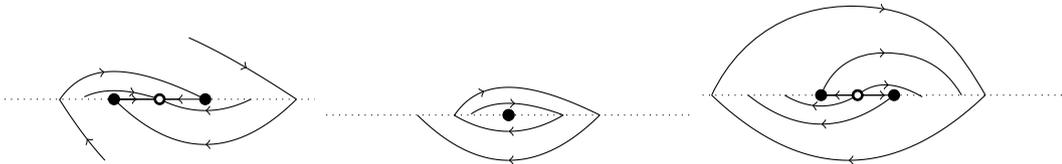


Figura 2.13 – Caso  $II_2$ . Para  $\alpha < 0$  (à direita) apresenta um ciclo regular em torno da origem.

### 2.3 Cúspide-Regular

Este caso acontece quando um dos campos possui uma cúspide sobre a fronteira e o outro campo é regular. Uma perturbação desse caso gera um campo com dois pontos de tangência.

Existem dois casos genéricos de bifurcações deste tipo (figura 2.14).

No caso  $DT_1^1$ , para  $\alpha > 0$ , os pontos de tangência delimitam uma região de deslize. Os pontos de tangência colidem formando uma cúspide quando  $\alpha = 0$  e a região de deslize desaparece. Para  $\alpha < 0$ , todas as órbitas cruzam a fronteira de descontinuidade.

<sup>1</sup> A sigla  $DT$  significa *double tangency*, nomenclatura utilizada por Kuznetsov, em [5]

A forma normal deste caso é (ver [5]):

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 - \alpha \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Já no caso  $DT_2$ , para  $\alpha > 0$ , existem duas regiões de deslize separados por uma região de costura. A região de costura se contrai quando  $\alpha \rightarrow 0$  até desaparecer em  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , a região de deslize passa a ser toda a fronteira de descontinuidade.

A forma normal deste caso é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - x^2 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

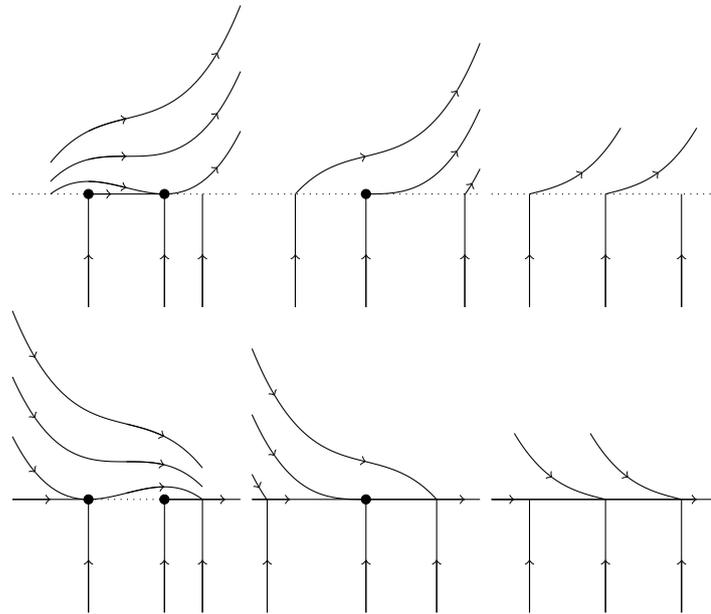


Figura 2.14 – Casos  $DT_1$  e  $DT_2$ .

## 2.4 Pseudo-Sela-Nó

O último caso de bifurcação acontece quando ocorre uma bifurcação sela-nó na fronteira de descontinuidade.

Aqui, para  $\alpha > 0$ , existem um pseudo-nó e uma pseudo-sela que colidem quando  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , toda a fronteira de descontinuidade é região de deslize.

A forma normal deste caso é

$$Z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^2 - \alpha \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Terminamos assim a lista de bifurcações locais genéricas de codimensão 1 conhecidas em sistema planares de Filippov.

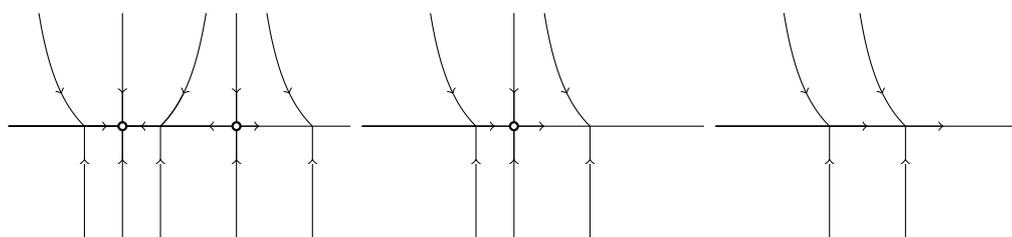


Figura 2.15 – Caso *PSN*: Colisão entre uma pseudo-sela e um pseudo-nó.

### 3 Completude

Uma pergunta que surge naturalmente neste ponto é sobre a completude da lista de bifurcações do capítulo anterior. A lista publicada por Kuznetsov *et al* (ver [5]) em 2003 continha um total de 20 bifurcações, porém nenhuma demonstração sobre a completude dessa lista foi dada. Em 2016, Hogan *et al* publicou um trabalho (ver [10]) em que ele apresenta mais duas bifurcações que não constavam na lista de Kuznetsov. Neste mesmo trabalho, ele demonstra um resultado que garante a completude das colisões equilíbrio-fronteira genéricas. A demonstração deste resultado é o objetivo principal desse capítulo. Ainda não existem resultados que garantem a completude geral de bifurcações de codimensão 1 em sistemas planares de Filippov.

O teorema principal deste trabalho é o seguinte:

**Teorema 3.1** (Hogan *et al.*, 2016). Existe um total de 12 desdobramentos de colisão equilíbrio-fronteira genéricas, que são exatamente os que estão listados na seção 2.1.

Suponha uma colisão equilíbrio fronteira genérica. Um dos campos possui uma singularidade em  $\Sigma$ . Iremos supor, sem perda de generalidade, que tal singularidade seja do campo  $X$  e que ela se localize na origem. Por generalidade, tal equilíbrio deve ser hiperbólico. Pelo teorema de Hartman-Grobman, o campo  $X$  é localmente topologicamente conjugado com o campo linear  $J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , onde  $J = DX(0, 0)$  é uma matriz  $2 \times 2$ . Novamente por generalidade, o campo  $Y$  não pode possuir um equilíbrio e nem um ponto de tangência na origem. Logo, pelo teorema do fluxo tubular, este sistema é localmente conjugado com um campo constante transversal à fronteira.

Dessa forma, uma colisão equilíbrio-fronteira genérica no plano é equivalente a uma da forma 2.1. Aplicando a transformação feita na seção 2.1, o sistema pode ser reescrito sob a forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{se } y > 0 \\ \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

com  $b > 0$ .

Dessa forma, iremos considerar apenas sistemas da forma 3.1 e perturbações de sistemas desse tipo a partir de agora.

Defina agora os seguintes valores:

- $\Delta = \det L$ . O determinante de  $L$  é igual ao produto dos autovalores de  $L$ .

- $\sigma = \text{tr } L$ . O traço de  $L$  é igual a soma dos autovalores de  $L$ . Aqui,  $\sigma = 2a$ . Como estamos interessados apenas no sinal de  $\sigma$ , consideraremos apenas o sinal de  $a$ .
- $\sigma^2 - 4\Delta$ . O sinal desse valor determina o sinal de  $b$  na matriz  $L$ , isto é, se  $\sigma^2 - 4\Delta > 0$  então

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e se  $\sigma^2 - 4\Delta < 0$ , então

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Os três itens acima determinam o tipo de equilíbrio (nó, sela ou foco) e a sua estabilidade.

- $bc - a$ . Este valor está associado à derivada do campo  $Z^s$  na origem e portanto indica a direção do campo de deslize próximo à origem. Se  $bc - a < 0$ , o campo de deslize aponta para a direita e se  $bc - a > 0$ , o campo de deslize aponta para a esquerda.

Como iremos considerar apenas sistemas genéricos, vamos exigir que

$$\Delta \neq 0, \quad a \neq 0, \quad \sigma^2 - 4\Delta \neq 0, \quad bc - a \neq 0. \quad (3.2)$$

em 3.1. Essas são algumas das condições de generalidade dadas por Filippov em [3, p.246].

Antes de demonstrarmos o teorema 3.1, precisaremos de algumas definições e alguns resultados prévios.

Dizemos que um domínio (ou uma linha) é *topologicamente homogêneo* se quaisquer dois pontos  $a, b$  nesse domínio possuem vizinhanças  $V_a$  e  $V_b$  de forma que exista um homeomorfismo que leva o ponto  $a$  no ponto  $b$  e preserva órbitas.

A fronteira de domínios topologicamente homogêneos consiste de pontos que não possuem unicidade de soluções e pontos estacionários. Uma linha topologicamente homogênea maximal é chamada de *linha de singularidades*.

Uma *politrajétoria* é uma linha que consiste de arcos de trajetórias e que não passa através pontos singulares e não possui arcos de linhas de singularidade.

O seguinte resultado foi demonstrado por Kozlova em [6] e é uma generalização do resultado de Andronov e Pontryagin para sistemas que são suaves por partes.

**Teorema 3.2** (Kozlova, 1984). Um sistema suave por partes (1) é estruturalmente estável em um domínio de fecho compacto  $D$  se, e somente se, *i*) possui uma quantidade finita singularidades, todas elas estruturalmente estáveis, *ii*) possui uma quantidade finita de politrajétorias fechadas, todas elas estruturalmente estáveis e *iii*) não possui conexão de separatrizes.

Considere  $Z^* = (X^*, Y^*)$  uma perturbação genérica de um sistema da forma 3.1 que satisfaz as condições 3.2. O campo  $X^*$  possui um ponto de equilíbrio, que se encontra fora de  $\Sigma$  pela generalidade da perturbação. O campo  $Y^*$  será regular. É fácil verificar que o sistema  $Z^*$  satisfaz as condições *i* e *ii* da proposição 3.2.

Temos portanto o seguinte resultado:

**Proposição 3.3.** Se  $Z^*$  é uma perturbação genérica de um sistema do tipo 3.1 satisfazendo as condições 3.2, então  $Z^*$  é estruturalmente estável se, e somente se, não há conexão de separatrizes.

E enfim, demonstraremos o Teorema 3.1.

*Demonstração do Teorema 3.1.* A demonstração desse teorema se reduz, basicamente, a analisar todas as combinações dos sinais dos valores em 3.2.

Considere um sistema do tipo 3.1 satisfazendo as condições 3.2 e seja  $Z^* = (X^*, Y^*)$  uma perturbação genérica desse sistema. O sistema  $X^*$  contém um ponto de equilíbrio admissível ou virtual. Uma colisão genérica acontece quando o equilíbrio de  $X^*$ , que era virtual, passa a ser admissível, ou vice-versa. Iremos dividir esta análise em três casos:

**Caso 1:**  $\sigma^2 - 4\Delta < 0$  (e portando  $\Delta > 0$ ). Temos aqui que o ponto de equilíbrio de  $X^*$  é um foco.

Suponha  $a > 0$  e  $bc - a < 0$ . Por um lado, se o equilíbrio de  $X^*$  for virtual, não temos nenhuma conexão de separatrizes possível. Por outro lado, se o equilíbrio de  $X^*$  for admissível, temos uma separatriz que parte do ponto de tangência e uma separatriz partindo do pseudo-equilíbrio. Logo a única conexão de separatrizes possível ocorre quando essas separatrizes coincidem. Isto acontece quando  $x_{PS} = x_F$ . Temos portanto dois casos possíveis de bifurcações aqui. Quando  $x_{PS} < x_F$ , temos o caso  $BF_1$  listado na seção 2.1.1 e quando  $x_{PS} > x_F$ , temos o caso  $BF_2$ .

Suponha agora  $a > 0$  e  $bc - a > 0$ . Se o equilíbrio de  $X^*$  for virtual, não temos nenhuma conexão de separatrizes. O mesmo ocorre quando o equilíbrio de  $X^*$  é admissível. Assim, temos apenas um caso de bifurcação, que é o caso  $BF_3$ .

Supondo  $a < 0$  e  $bc - a > 0$ ,  $X^*$  não possui nenhuma conexão de separatrizes possível. Temos portanto apenas um caso de bifurcação possível, este é o caso  $BF_4$ .

Supondo  $a < 0$  e  $bc - a < 0$ , temos novamente que  $X^*$  não tem conexão de separatrizes. Temos novamente um único caso de bifurcação deste tipo. Este é o caso  $BF_5$ .

**Caso 2:**  $\sigma^2 - 4\Delta > 0$  e  $\Delta > 0$ . Aqui, o ponto de equilíbrio de  $X^*$  é um nó.

Em todos os casos temos uma separatriz que parte do ponto de tangência e uma separatriz partindo do pseudo-equilíbrio, caso seja admissível. Porém essas duas

separatrizes nunca coincidem e portanto não existem conexões de separatrizes. Dessa forma, existem 4 casos de bifurcações desse tipo, que correspondem às combinações dos sinais de  $a$  e  $bc - a$ . Esses são os casos  $BN_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Caso 3:**  $\Delta < 0$  (e portanto  $\sigma^2 - 4\Delta > 0$ ). O ponto de equilíbrio de  $X^*$  é uma sela.

No caso  $bc - a < 0$ , quando o equilíbrio de  $X^*$  é virtual, existe apenas uma separatriz, que parte do ponto de tangência. Assim, não há conexões de separatrizes. Porém, se o equilíbrio de  $X^*$  é admissível, temos as separatrizes partindo da sela de  $X^*$  e uma separatriz que parte do pseudo-equilíbrio. A única conexão de separatrizes possível ocorre quando  $c = 1$ . Temos portanto dois casos de bifurcação possíveis. Quando  $c < 1$ , temos o caso  $BS_1$  e quando  $c > 1$ , temos o caso  $BS_2$ .

No caso  $bc - a > 0$ , quando o equilíbrio de  $X^*$  é virtual temos duas separatrizes, uma partindo do ponto de tangência e outra partindo do pseudo-equilíbrio. Porém essas duas separatrizes nunca formam uma conexão de separatrizes. Quando o equilíbrio é admissível, temos apenas uma separatriz partindo do ponto de tangência. Não temos conexão de separatrizes neste caso. Temos então apenas uma bifurcação possível, é o caso  $BS_3$ .

Totalizando assim os 12 desdobramentos possíveis para colisões equilíbrio-fronteira. □

A tabela 3.1 resume cada um dos casos e a figura 3.1 apresenta as relações entre os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  com cada caso de colisão.

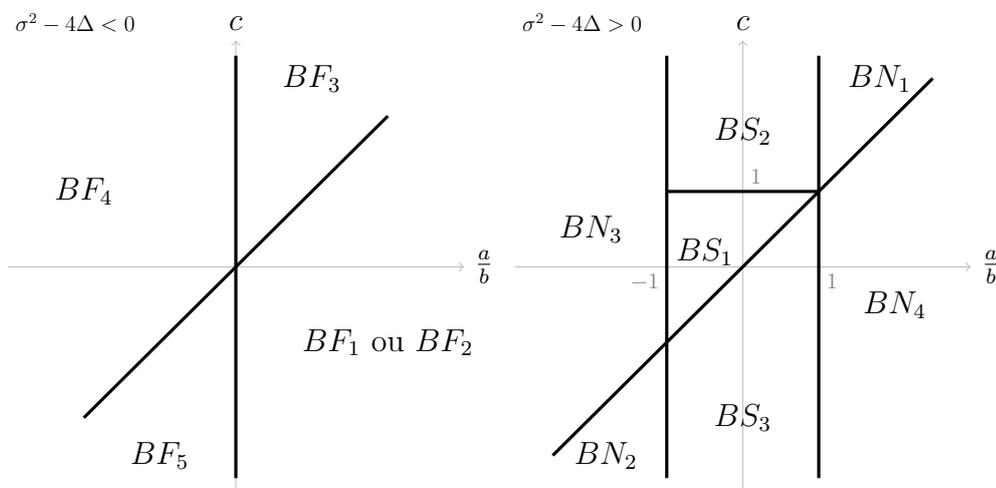


Figura 3.1 – Relações entre os valores de  $\frac{a}{b}$  e  $c$  para cada bifurcação. À esquerda, os casos em que  $\sigma^2 - 4\Delta < 0$  e à direita, os casos em que  $\sigma^2 - 4\Delta > 0$ .

caso	$\sigma^2 - 4\Delta$	$\Delta$	$a$	$bc - a$	outro	bifurcação
$BF_1$	-	+	+	-	$x_{PS} < x_F$	$f+ps+c \leftrightarrow \emptyset$
$BF_2$	-	+	+	-	$x_{PS} > x_F$	$f+ps \leftrightarrow \emptyset$
$BF_3$	-	+	+	+		$f+c \leftrightarrow pn$
$BF_4$	-	+	-	+		$f \leftrightarrow pn$
$BF_5$	-	+	-	-		$f+ps \leftrightarrow \emptyset$
$BN_1$	+	+	-	+		$n \leftrightarrow pn$
$BN_2$	+	+	+	-		$n+ps \leftrightarrow \emptyset$
$BN_3$	+	+	+	+		$n \leftrightarrow pn$
$BN_4$	+	+	-	-		$n+ps \leftrightarrow \emptyset$
$BS_1$	+	-		+	$c < 1$	$s+pn \leftrightarrow \emptyset$
$BS_2$	+	-		+	$c > 1$	$s+pn \leftrightarrow \emptyset$
$BS_3$	+	-		-		$s \leftrightarrow ps$

Tabela 3.1 – Resumo das condições necessárias para cada colisão genérica. Os sinais + e - significam se os valores são positivos ou negativos. A última coluna descreve o que ocorre na bifurcação ( $[\alpha > 0] \leftrightarrow [\alpha < 0]$ ), onde f=foco, n=nó, s=sela, p=pseudo, c=ciclo.

# Referências

- [1] T. de Carvalho; D.J. Tonon. Normal forms for codimension one planar piecewise smooth vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(7), 2014.
- [2] M. diBernardo; C.J. Budd; A.R. Champneys; P. Kowalczyk. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems, Theory and Applications*. Springer, 2008.
- [3] A.F. Filippov. *Differential Equations With Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1988.
- [4] P. Glendinning. Classification of boundary equilibrium bifurcations in planar filippov systems. *Chaos*, (26), 2016.
- [5] Y.A. Kuznetsov; S. Rinaldi; A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar filippov systems. *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(8):2157–2188, 2003.
- [6] V.S. Kozlova. Roughness of a discontinuous system. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 39(5):22–28, 1984.
- [7] M. Peixoto. On structural stability. *Annals of Mathematics*, pages 199–222, 1959.
- [8] A. Andronov; L. Pontryagin. Systèmes grossiers. *Comp. Rend. (Doklady), Acc. Sc. USSR*, vol.14, 1937.
- [9] J. Sotomayor. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. *Publ. Math. IHES*, 43:5–46, 1974.
- [10] S.J. Hogan; M.E. Homer; M.R. Jeffrey; R. Szalai. Piecewise smooth dynamical systems theory: The case of the missing boundary equilibrium bifurcations. *Journal of Nonlinear Science*, 26:1161–1173, Oct 2016.
- [11] J. Sotomayor; M.A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. In *International Conference on Differential Equations, Lisboa*, pages 207–223. World Scientific, 1996.
- [12] M. Guardia; T.M. Seara; M.A. Teixeira. Generic bifurcation of low codimensions of planar filippov systems. *Journal of Differential Equations*, pages 1967–2023, 2011.
- [13] M.A. Teixeira. Generic bifurcations in manifolds with boundary. *Journal of Differential Equations*, (25):65–89, 1977.