



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DANIEL FERREIRA MACHADO

**Soluções das equações de
Navier-Stokes-Coriolis para tempos grandes e
dados quase periódicos**

Campinas

2019

Daniel Ferreira Machado

Soluções das equações de Navier-Stokes-Coriolis para tempos grandes e dados quase periódicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucas Catao de Freitas Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Daniel Ferreira Machado e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catao de Freitas Ferreira.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M18s Machado, Daniel Ferreira, 1991-
Soluções das equações de Navier-Stokes-Coriolis para tempos grandes e dados quase periódicos / Daniel Ferreira Machado. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Lucas Catao de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes-Coriolis, Equações de. 2. Coriolis, Força de. 3. Soluções brandas (Equações diferenciais parciais). 4. Funções quase-periódicas. 5. Dados iniciais arbitrários. I. Ferreira, Lucas Catao de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Solutions of the Navier-Stokes-Coriolis equations for large times and almost periodic data

Palavras-chave em inglês:

Navier-Stokes-Coriolis equations

Coriolis force

Mild solutions (Partial differential equations)

Almost periodic functions

Arbitrary initial data

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catao de Freitas Ferreira [Orientador]

Christian Horacio Olivera

Marcelo Fernandes de Almeida

Data de defesa: 27-02-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9562-3328>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/2941574760037344>

**Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATAO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN HORACIO OLIVERA

Prof(a). Dr(a). MARCELO FERNANDES DE ALMEIDA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Ao meu pai Aureloino (em memória), pela sua presença “espiritual”, que significou segurança e certeza, de que não estava sozinho nessa caminhada. A minha mãe Anelina, pelo seu cuidado e atenção oferecidos e, em alguns momentos, a esperança para seguir em frente.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus Senhor de Tudo, a Ele toda honra e toda glória, que com seu amor e misericórdia me concedeu o dom da vida e que em todos os momentos da minha existência me segura pela mão e demonstra, de todas as maneiras possíveis, que me ama e está comigo. Obrigado por ter derramado em mim suas bênçãos para que eu pudesse concluir mais essa fase tão significativa da minha vida.

Minha eterna gratidão a minha “rainha”, minha mãe Anelina, pelo amor, educação, conselhos, apoio e por ter sido minha mãe. Ao exemplo de homem, meu pai Aureloino (em memória), que foi para mim exemplo de humildade e simplicidade, me mostrou o que realmente devemos valorizar nessa vida, até o dia em que fostes chamado para se fazer presente à direita de Deus. Obrigado pela sua presença espiritual pai, que esteve comigo em todos os momentos, e tornou este sonho uma realidade. E ao meu irmão Rafael, agradeço pelo apoio que me tornou cada vez mais perseverante. Agradeço de coração seu papel de irmão. Aos meus familiares mais próximos que sempre torceram por mim e que hoje celebram, junto comigo, essa vitória. Obrigado por terem me mostrado que o estudo e o conhecimento são os bens mais importantes que possuímos.

Agradeço a todos os professores e funcionários do IMECC, dos quais hoje são sinceros amigos, obrigado pelos ensinamentos transmitidos durante toda minha jornada nessa universidade e por me ajudarem a construir grande parte dos conhecimentos que hoje possuo. De modo especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira, por sua paciência e contribuição na elaboração desta dissertação de mestrado.

Quero agradecer aos meus diversos amigos que estiveram comigo nessa árdua caminhada. O meu obrigado à aqueles que hoje estão distantes mas que tiveram sua participação nessa vitória, à aqueles que estão perto e dividem comigo cada momento bom e ruim, e estão sempre prontos para dizer: calma, estou aqui. Obrigado a todos vocês meus amigos, que sempre me deram força para seguir em frente e me apoiaram nas minhas decisões.

E, por fim, agradeço aos meus ex-professores da UFVJM, em especial ao Campus do Mucuri, seu corpo docente, direção e administração que me incetivaram e oportunizaram chegar até aqui. Por fim, mas não menos importante, agradeço ao apoio financeiro do CNPq - Processo nº 133318/2017-6, que me concedeu a bolsa de estudo neste período de mestrado, e que possibilitou essa conquista.

Todos estes citados acima, me proporcionaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

“Eu sou o caminho, e a verdade e a vida; ninguém vem ao Pai, senão por mim.”

João 14:6.

Resumo

Nesta dissertação de mestrado, estudamos a existência de soluções brandas, para tempos grandes, para as equações de Navier-Stokes-Coriolis com dados iniciais espacialmente quase periódicos. A força de Coriolis aparece em vários modelos de meteorologia, oceanografia e geofísica, pois estes consideram fenômenos em larga escala e a influência do movimento de rotação da terra. Para mostrar a existência de soluções brandas para tempos grandes, usamos a norma ℓ^1 de amplitudes e consideramos o caso de velocidades de rotação grandes (i.e., força de Coriolis grande). A existência de soluções é provada por meio de técnicas de *limites oscilantes singulares rápidos* e usando um argumento de *bootstrapping*. Mais precisamente, primeiramente obtemos estimativas para o semigrupo associado à parte linear do sistema e para o termo bilinear em um espaço de funções quase periódicas. Posteriormente, de posse destas estimativas, aplicamos os métodos acima para obter os resultados desejados. Este trabalho é baseado no artigo [\[49\]](#) de T. Yoneda.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes-Coriolis. Força de Coriolis. Soluções brandas. Dados iniciais arbitrários. Funções quase periódicas.

Abstract

In this master dissertation, we study the long-time existence of mild solutions to the Navier–Stokes–Coriolis equations with spatially almost periodic initial data. The Coriolis force appears in several models of meteorology, oceanography and geophysics because they consider large-scale phenomena and the influence of the earth rotation movement. In order to prove the long-time existence of mild solutions, we use the ℓ^1 -norm of amplitudes and consider the case of large rotation velocity (i.e., large Coriolis force). The existence of solutions is obtained by means of fast singular oscillating limit techniques and a bootstrapping argument. More precisely, first we show estimates for the semigroup associated with the linear part of the system and for the bilinear term in a space of almost periodic functions. Later, with these estimates in hand, we apply the above methods to obtain the desired results. This work is based on the paper [49] by T. Yoneda.

Keywords: Navier-Stokes-Coriolis equations. Coriolis Force. Mild solutions. Arbitrary initial data. Almost Periodic Functions.

Lista de símbolos

$C_0(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ que anulam-se no infinito do espaço, p. 32
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções limitadas em $\mathbb{R}^n$, p. 32
$\mathcal{BUC}(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^n$, p. 61
$C_c(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, p. 32
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, p. 20
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Espaço das funções de Schwartz em $\mathbb{R}^n$, p. 19
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	Espaço das distribuições em $\mathbb{R}^n$, p. 20
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	Espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$, p. 20
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$	Espaço das distribuições temperadas módulo polinômios, p. 23
$\mathcal{R}_j$	j -ésima transformada de Riesz em $\mathbb{R}^n$, p. 24
$\mathbb{P}$	Operador de Helmholtz, p. 27
$\mathbb{P}_n$	Operador discreto de Helmholtz, p. 61
$\delta_{i,j}$	Delta de Kronecker, p. 27
$\nabla \cdot u$	Divergente de u , p. 14
Δu	Laplaciano de u , p. 14
∇u	Gradiente de u , p. 14
$e^{t\Delta}$	Semigrupo do calor, p. 46
$e^{-t\Omega\mathbb{S}}$	Propagador de Poincaré, p. 97
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	Transformada de Fourier e Transf. de Fourier inversa em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, p. 18
$\mathcal{M}$	Espaço das medidas finitas de Radon em $\mathbb{R}^n$, p. 35
$\mathcal{M}_0$	Espaço das medidas em $\mathcal{M}$, tais que, $\mu[\{0\}] = 0$, p. 42
$\mathcal{FM}$	Pré imagem de Fourier das medidas finitas de Radon, p. 43

$\mathcal{FM}_0$	Pré imagem de Fourier de $\mathcal{M}_0$, p. 44
$\mathcal{FM}_0^{-1}$	Espaço dos divergentes de campos vetoriais no espaço $\mathcal{FM}_0(\mathbb{R}^3)^3$, p. 14
Λ	Conjunto enumerável de frequências com soma fechada em $\mathbb{R}^3$, p. 60
$\bar{\Lambda}$	Conjunto de $n = (n_1, n_2, n_3) \in \Lambda$ tais que $n_3 = 0$, p. 60
$\Lambda(\gamma)$	Perturbação de Λ na componente vertical, p. 64
Λ_0	$\Lambda_0 = \{0\}$ com $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}$, p. 75
Λ_1	Conjunto complementar de Λ_0 , p. 75
$\mathcal{K}^\sigma$	Conjunto de frequências ressonantes, p. 75
$(\mathcal{K}^\sigma)^c$	Conjunto de frequências não ressonantes, p. 75
$H^s(\mathbb{R}^n)$	Espaço de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ com $s \in \mathbb{R}$, p. 14

Sumário

	Introdução	14
1	PRELIMINARES, MEDIDAS DE RADON E FUNÇÕES QUASE PERIÓDICAS	17
1.1	Espaços L^p , Convolução e Transformada de Fourier	17
1.2	Distribuições e Distribuições Temperadas	20
1.3	Transformadas de Riesz	24
1.4	Projeção de Helmholtz e Equações de Navier-Stokes-Coriolis	27
1.5	Medida de Radon	32
1.6	Funções Quase Periódicas	36
2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES LOCAIS	40
2.1	Espaços de funções baseados na transformada de Fourier	40
2.1.1	Medidas com valores em $\mathbb{C}^d$	40
2.1.2	Imagem de Fourier de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_0$	43
2.1.3	Operadores produto e do calor	46
2.2	Teorema do Ponto Fixo de Banach	50
2.3	Teorema de existência e unicidade local de soluções brandas	53
3	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA TEMPOS GRANDES E DADOS QUASE PERIÓDICOS	60
3.1	Classe de dados iniciais quase periódicos	60
3.2	Principais passos da demonstração do Teorema 3.2	65
4	DECOMPOSIÇÕES NÃO LINEARES	71
4.1	Bilinearidade dos termos B_n e b_{nkm}^δ	72
4.2	Demonstração do Lema 4.1	73
5	DEMONSTRAÇÃO DOS PRINCIPAIS RESULTADOS	85
5.1	Demonstração do Lema 3.1	85
5.2	Demonstração do Lema 3.2	92
5.3	Demonstração do resultado principal (Teorema 3.2)	99
6	CONCLUSÃO	101
	REFERÊNCIAS	102

	APÊNDICE A – ESPAÇOS DE BANACH	106
	APÊNDICE B – IGUALDADE (4.19) DA DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4.1	108
	APÊNDICE C – IGUALDADES (4.5) E (4.6) DO LEMA 4.1	117
C.1	Demonstração da igualdade (4.5)	117
C.2	Demonstração da igualdade (4.6)	118

Introdução

Nesta dissertação, consideramos o problema de valor inicial para as equações de Navier-Stokes com a força de Coriolis, o qual tem a seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \Omega e_3 \times u - \Delta u = -\nabla p & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \end{cases}, \quad (1)$$

onde $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ e $p = p(x, t)$ denotam as incógnitas o campo velocidade e a pressão escalar do fluido no ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ do espaço e tempo $t > 0$, respectivamente, enquanto $u_0 = u_0(x)$ denota o campo velocidade inicial, satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla \cdot u = 0$. Além disso, $\Omega \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de Coriolis que representa a velocidade angular de rotação do fluido em torno do vetor vertical unitário $e_3 = (0, 0, 1)$; o coeficiente de viscosidade cinemática é normalizado por 1. O símbolo $\times$ denota o produto exterior e, conseqüentemente, a força de Coriolis é representada por $e_3 \times v = \mathbb{J}v$, onde $\mathbb{J}$ é uma matriz 3×3 anti-simétrica, a saber

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O estudo das equações de Navier-Stokes-Coriolis tem atraído o interesse de um grande número de pesquisadores internacionais, devido ao fato que estas equações são centrais em muitos modelos físicos, estando ligados a importantes problemas em oceanografia, meteorologia e geofísica. Por exemplo, em oceanografia e meteorologia, devido a diferença de magnitude de escalas entre as variáveis, a força exercida pela rotação da terra torna-se importante na descrição das correntes de ar e água, veja mais em [13]. Para ter-se uma ideia, em média, a amplitude de velocidade no oceano é de poucos metros por segundo e o tamanho típico de um oceano é de 5 mil quilômetros. Portanto, leva 50 dias, aproximadamente, para uma partícula de fluido atravessar o oceano, conforme comentado por Chemin *et al.* [13]. Por outro lado, neste mesmo tempo, o planeta Terra já terá completado o mesmo número de dias, de rotações, isto é, 50 rotações em volta de seu eixo. Como consequência, sempre que quisermos estudar movimentos em oceanos em nível global, a influência da rotação da Terra, isto é, a força de Coriolis, não pode ser desprezada. Além disso, em 1868, Kelvin observou que uma esfera movendo-se, uniformemente, ao longo do eixo de rotação da água leva consigo uma coluna de líquido como se fosse uma massa rígida em torno de si, como pode se ver em [21]. Depois disso, Hough (1897), Taylor (1917) e Proudman (1916) fizeram importantes contribuições acerca desse assunto.

Assim, as equações de Navier-Stokes junto com a força de Coriolis, e com condições de contorno adequadas, nos permite analisar a circulação oceânica em larga escala. Evidentemente, a fim de obter um estudo mais preciso deste problema, se faz necessário o envolvimento de mais variáveis, como por exemplo: salinidade, temperatura da água, estratificação, dentre outros. No entanto, as equações de Navier-Stokes-Coriolis (1) podem ser vistas como um primeiro passo na análise teórica de modelos mais complexos, pois nesse caso, estamos considerando os efeitos da força de rotação sobre os fluidos de forma isolada. Além dessas aplicações, há muito interesse nas equações de Navier-Stokes (com ou sem força de Coriolis). De fato, o problema de existência de solução global ainda é um problema em aberto para estas equações em dimensão $n = 3$, sendo este um dos sete problemas do milênio proposto pelo Instituto de Matemática Clay, como pode ser visto em www.claymath.org/millennium-problems. Tal problema está resolvido no caso $n = 2$; por exemplo, veja Temam [46] para resultados de existência e regularidade de solução neste caso.

Baseando-nos em [49], o objetivo desta dissertação é mostrar a existência de soluções de (1) para tempos grandes em um espaço de funções quase periódicas (veja Definição 3.2), fazendo uso do resultado de existência local, em $\mathbb{R}^3$, obtido por Giga *et al.* [24] e do resultado de existência, em $\mathbb{R}^2$, devido a Giga *et al.* [28]. Para um dado inicial u_0 quase periódico e tempo de existência T , ambos arbitrários, obtemos soluções brandas contanto que o parâmetro de Coriolis Ω tenha módulo suficientemente grande. Para tal resultado de existência, utilizamos técnicas de *limites oscilantes singulares rápidos* e um argumento de *bootstrapping*. Como trabalhamos nesta dissertação com velocidades de rotação grandes, uma característica dos espaços que poderia ser útil nessa análise é uma norma que permita um bom controle dos efeitos de oscilações provocados pelo termo $\Omega e_3 \times u$. Nesta direção, espaços cujas normas tem uma expressão conveniente envolvendo a transformada de Fourier são de interesse especial. Em [49], o autor usou espaços com este perfil, a saber, a pré-imagem de Fourier do conjunto das medidas de Radon complexas, proposto por Giga *et al.* [24].

Posto isso, vale relembrar alguns dos resultados de existência e boa-colocação para (1) relacionados com o “tamanho” ou uniformidade em relação ao parâmetro Ω . Primeiramente, cabe mencionar que os efeitos da força de Coriolis em fluidos começaram a ser estudados matematicamente por Poincaré desde 1910 (veja [44]). Mais recentemente, Babin, Mahalov e Nicolaenko (BMN) [9] e [10] obtiveram resultados no caso periódico. Para velocidade de rotação Ω suficientemente grande, obtiveram existência global e regularidade das soluções com velocidade inicial periódica. Para contornar a falta de dispersão do caso periódico, BMN usaram argumentos de *limites oscilantes singulares rápidos*, explorando o fato de que o fluxo é semelhante ao fluxo bi-dimensional para uma força de Coriolis suficientemente grande. Eles mostraram que a solução da equação de Navier-Stokes pode ser decomposta em soluções globais de equações limites e em um adequado termo restante.

O termo restante é uniformemente estimado a partir do parâmetro de Coriolis. Eles consideraram o dado inicial v_0 em $H^{\frac{1}{2}}([0, h_1] \times [0, h_2] \times [0, h_3])$. Além disso, Babin *et al.* [11] obtiveram resultados de existência e regularidade para dados iniciais caracterizados por vorticidades uniformemente grandes. Por outro lado, Chemin *et al.* [13] obtiveram resultados em todo o espaço $\mathbb{R}^3$, para dados iniciais em espaços de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}$ e força de rotação suficientemente grande dependendo do dado inicial. Boa-colocação global em espaços de Sobolev homogêneos $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, com $1/2 \leq s < 3/4$ e Ω suficientemente grande, foram obtidos por Iwabuchi e Takada [33]. Em [3], Angulo-Castillo e Ferreira estenderam estes resultados para o contexto de espaços de Besov. No caso de boa-colocação global uniforme, Giga *et al.* [26] mostraram a existência e unicidade de solução global para (1), para dado inicial u_0 com norma suficientemente pequena em $\mathcal{FM}_0^{-1}(\mathbb{R}^3)^3$. Este espaço tem uma caracterização adequada em termos da transformada de Fourier. Por outro lado, Giga *et al.* [24] e [25] provaram a existência local e unicidade de soluções brandas para (1) considerando certas classes de dados iniciais que não decaem no infinito e que, em particular, contêm funções quase-periódicas. Resultados de boa-colocação uniforme para (1) com dados iniciais pequenos têm sido obtidos em outros espaços, tais como o espaço de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (veja [31]), o espaço de Fourier-Besov crítico $\dot{F}B_{p,\infty}^{2-\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$ com $1 < p \leq \infty$ (veja [38]), o Fourier-Besov crítico $\dot{F}B_{1,2}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ (veja [34]), bem como má-colocação em $\dot{F}B_{1,q}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ para $2 < q \leq \infty$, e o espaço de Fourier-Besov-Morrey crítico (veja [1]).

Finalizamos a introdução descrevendo sobre a organização desta dissertação, a qual está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo é dedicado às preliminares, conceitos básicos necessários para o bom entendimento do texto, à teoria das medidas de Radon complexas e às funções quase periódicas. Nas preliminares, primeiramente são apresentados resultados sobre o produto de convolução, transformada de Fourier e distribuições. Em seguida, uma seção é dedicada às transformadas de Riesz, juntamente com suas propriedades, principalmente aquelas relacionadas à transformada de Fourier. Ainda no Capítulo 1, descrevemos a projeção de Helmholtz e algumas de suas propriedades, e derivamos uma formulação equivalente de (1) sem a pressão. Finalizando o capítulo, revisamos a teoria sobre as medidas de Radon e sobre as funções quase periódicas. O Capítulo 2 é dedicado a existência e unicidade local de soluções brandas para o sistema (1). Neste capítulo, definimos os espaços em que trabalhamos, bem como certos operadores de multiplicação e do calor. E para finalizar o capítulo, relembramos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e fazemos uso deste para provar a existência e unicidade de solução local para (1). No Capítulo 3, discorremos sobre o principal resultado desta dissertação, bem como os principais passos e ideias para demonstrá-lo. Mais adiante, no Capítulo 4, mostramos certas decomposições de termos não lineares, bem como as estimativas da parte ressonante e da parte não ressonante da bilineridade da formulação integral associada a (1). Finalizando o texto, o Capítulo 5 contém as demonstrações dos principais resultados que são os Lemas 3.1, 3.2 e o Teorema 3.2.

1 Preliminares, Medidas de Radon e Funções Quase Periódicas

Neste capítulo, recordamos alguns conhecimentos que são essenciais nessa dissertação. Dentre estes, podemos destacar: a transformada de Fourier, a classe de funções de Schwartz e a classe de distribuições temperadas, bem como suas propriedades. Posteriormente, ainda nesse capítulo, abordaremos algumas ferramentas específicas, como por exemplo, as transformadas de Riesz, a projeção de Helmholtz, as medidas de Radon, a classe de funções quase periódicas e os principais resultados envolvendo essa teoria.

1.1 Espaços L^p , Convolução e Transformada de Fourier

Nesta seção discorremos sobre os espaços L^p , convoluções, transformada de Fourier e sobre a classe de funções de Schwartz bem como algumas de suas propriedades. Basicamente, o conteúdo desta seção pode ser encontrado, por exemplo, nos livros Folland [20] e Grafakos [29].

Começamos relembando a definição de espaços L^p .

Definição 1.1. *Seja $(X, \mathcal{H}, \mu)$ um espaço de medida. Para uma função mensurável f , considere a quantidade*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

No caso, $p = \infty$, consideramos

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : \mu(\mathcal{A}) = 0\} \quad \text{onde } \mathcal{A} = \{x \in X : |f(x)| > M\}.$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{H}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} : \|f\|_p < \infty\}.$$

Observação 1.1. *Por simplicidade, denotamos $L^p(X, \mathcal{H}, \mu)$ por L^p , $L^p(X)$ ou $L^p(\mu)$, quando não houver risco de confusão. Observamos que $L^p(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Quando μ é uma medida de contagem, $L^p(X)$ transforma-se no espaço de “sequências” ℓ^p . Como este caso tem um papel importante no presente estudo, a seguir fixemos sua definição.

Definição 1.2. (*Espaços ℓ^p*) Se A é um conjunto não vazio, definimos $\ell^p(A)$, para $1 \leq p < \infty$, como sendo $L^p(\mu)$ onde μ é a medida de contagem sobre $(A, \mathcal{P}(A))$ e $\mathcal{P}(A)$ as partes de A .

Observação 1.2. Além disso, se $A = \mathbb{N}$, então, $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ e

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\},$$

constitui o espaço vetorial das seqüências, neste caso, complexas, absolutamente p -somáveis dotado da norma natural

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty;$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \text{se } p = \infty.$$

A seguir, apenas com o objetivo de esclarecimento, consideremos a definição de convolução de funções, que posteriormente será estendida para distribuições.

Definição 1.3. (*Convolução*) Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução de f e g , denotada por $f * g$, por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x - y)dy. \quad (1.1)$$

O lado direito de (1.1) é definido quase sempre, uma vez que a integral dupla abaixo converge absolutamente:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x - y)dy \right) dx \right| \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Proposição 1.1. Considere, $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. As seguintes propriedades são válidas:

- (i) (*Associatividade*) $f * (g * h) = (f * g) * h$;
- (ii) (*Distributividade*) $f * (g + h) = f * g + f * h$ e $(f + g) * h = f * h + g * h$;
- (iii) (*Comutatividade*) $f * g = g * f$.

Como veremos adiante, estamos interessados em trabalhar em espaços cuja definição é conectada a transformada de Fourier. A seguir lembramos esta transformada no contexto de L^1 .

Definição 1.4. (*Transformada de Fourier*) Considere $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de f , denotada por $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}[f]$, por

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)dx,$$

onde $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ denota o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^n$.

Abaixo, relembremos a classe das funções de Schwartz, as quais são fundamentais na definição das distribuições temperadas que veremos mais a frente.

Definição 1.5. (*Função de Schwartz*) Uma função complexa C^∞ em $\mathbb{R}^n$ é chamada função de Schwartz, se para todo par de multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, existe uma constante positiva $C_{\alpha,\beta}$ tal que

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty, \quad (1.2)$$

onde $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $\partial^\beta = \prod_{i=1}^n (\partial_{x_i})^{\beta_i}$. Aqui, $\rho_{\alpha,\beta}$ são chamadas seminormas de Schwartz de f . O conjunto de todas as funções de Schwartz em $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.3. Vale ressaltar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, munido da família de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$ que sapara pontos. Além disso, através de resultados da topologia geral podemos afirmar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é metrizável e completo, caracterizando-o como uma espaço de Fréchet.

Proposição 1.2. (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão é contínua.

(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

Vejamos agora uma propriedade da transformada de Fourier no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e a transformada de Fourier aplica $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continuamente em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, vejamos alguns resultados que relacionam a transformada de Fourier de uma função e suas derivadas.

Proposição 1.4. Sejam $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice. As seguintes propriedades são válidas:

$$(i) \quad (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi);$$

$$(ii) \quad (\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f(x))^\wedge(\xi);$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Definição 1.6. (*Transformada de Fourier Inversa*) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a Transformada de Fourier inversa de f , denotada por $f^\vee$ ou $\mathcal{F}^{-1}[f]$, como

$$f^\vee(x) = \hat{f}(-x).$$

Observação 1.4. É fácil ver que a transformada inversa de Fourier compartilha das mesmas propriedades da transformada de Fourier.

O isomorfismo de $\mathcal{F}$ em L^2 é uma consequência imediata da densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 1.2) e da proposição abaixo.

Proposição 1.5. *Sejam $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então:*

- (i) *(Inversa de Fourier)* $(\hat{f})^\vee = f = (f^\vee)^\wedge$;
- (ii) *(Relação de Parseval)* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{h}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)}d\xi$;
- (iii) *(Identidade de Plancherel)* $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2}$.

Um resultado que segue diretamente das Proposições 1.3, 1.4 e 1.5, juntamente com a Observação 1.4 é o que segue.

Proposição 1.6. *A Transformada de Fourier é um homeomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo.*

1.2 Distribuições e Distribuições Temperadas

No próximo capítulo iremos trabalhar com o espaço de todas as medidas complexas (finitas) de Radon, denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, a ser definido detalhadamente mais adiante (Seção 1.5). Tal espaço, pode ser visto como um subespaço de distribuições temperadas onde pode-se definir uma noção apropriada de transformada de Fourier. Nesta seção recordamos as definições de distribuição e distribuição temperada, inclusive as definições da transformada de Fourier e sua transformada inversa neste ambiente mais geral. A teoria desta seção foi extraída essencialmente de Grafakos [29].

Definição 1.7. (*Distribuição*) *Uma distribuição T é um funcional linear contínuo definido no espaço das funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as distribuições, isto é,*

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = (C_c^\infty(\mathbb{R}^n))^*,$$

onde $*$ denota o espaço dual e $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é munido com sua topologia padrão localmente convexa, em relação a qual a convergência sequencial em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ corresponde à convergência uniforme da sequência de funções e suas derivadas em conjuntos compactos (veja [20, Seção 9.1, p. 282]).

Definição 1.8. (*Distribuição temperada*) *Uma distribuição temperada T é um funcional linear contínuo definido no espaço das funções $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as distribuições temperadas.*

Observação 1.5. *Não é difícil ver que*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, observe que a noção de convergência de sequências em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dada via a topologia do espaço dual, ou seja,

$$T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{S}' \text{ se, e somente se, } |\langle T_n - T, f \rangle| \leq C \rho_{\alpha, \beta}(f),$$

para toda $f \in \mathcal{S}$, onde $\rho_{\alpha, \beta}(f)$ é como em (1.2).

A próxima proposição mostra-nos uma condição necessária e suficiente para que um funcional linear $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ seja uma distribuição temperada. Aqui, $u(f) = \langle u, f \rangle$ denota a ação de uma distribuição ou distribuição temperada u sobre uma função $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

Proposição 1.7. *Um funcional linear u em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$|u(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq k} \rho_{\alpha, \beta}(f),$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, onde $\rho_{\alpha, \beta}(f)$ é como em (1.2).

Agora, considerando f e g funções de Schwartz, α um multi-índice e integrando por partes $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\partial^\alpha g)(x) dx. \quad (1.3)$$

Tendo em vista a igualdade (1.3), é natural definir a derivada de uma distribuição temperada como segue.

Definição 1.9. *Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice. Definimos*

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f \rangle,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.6. *As derivadas de u no sentido de distribuição são também denominadas derivadas distribucionais.*

Até aqui, definimos a transformada de Fourier em $\mathcal{S}$ e vimos que a mesma aplica homeomorficamente $\mathcal{S}$ em si mesmo, conforme Proposição 1.6. Usando esse fato, podemos definir a transformada de Fourier (e sua inversa) de uma distribuição temperada como segue.

Definição 1.10. *Considere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier $\hat{u}$ e a transformada de Fourier inversa $u^\vee$ da distribuição temperada u , como*

$$\langle \hat{u}, f \rangle = \langle u, \hat{f} \rangle \quad e \quad \langle u^\vee, f \rangle = \langle u, f^\vee \rangle,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, observe que, para $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h * g)(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (\tilde{h} * f)(x) dx, \quad (1.4)$$

onde $\tilde{h}(x) = h(-x)$.

Assim, motivados pela igualdade (1.4), definimos a convolução de uma distribuição temperada com uma função de Schwartz.

Definição 1.11. Considere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução $h * u$ por

$$\langle h * u, f \rangle = \langle u, \tilde{h} * f \rangle,$$

para toda $f \in \mathcal{S}$, onde $\tilde{h}$ é como em (1.4).

Na proposição seguinte, listamos algumas propriedades envolvendo transformada de Fourier e convolução de distribuições temperadas. Tais propriedades nos serão bastante úteis no decorrer da dissertação.

Proposição 1.8. Dados $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α multi-índice e $b \in \mathbb{C}$, temos que:

- (i) $(u + v)^\wedge = \hat{u} + \hat{v}$ e $\widehat{bu} = b\hat{u}$;
- (ii) $(\partial^\alpha u)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}$;
- (iii) $\partial^\alpha \hat{u} = ((-2\pi i x)^\alpha u)^\wedge$;
- (iv) $(\hat{u})^\vee = u$;
- (v) $(f * u)^\wedge = \hat{f} \hat{u}$;
- (vi) $(fu)^\wedge = \hat{f} * \hat{u}$.

Observação 1.7. O produto (fu) , no item (vi) da Proposição 1.8, está bem definido, conforme [29, Definição 2.3.15]

Proposição 1.9. Dado $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência de funções f_n em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \rightarrow u$ no sentido de distribuições temperadas. Em particular, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada em [29, Proposição 2.3.23]. $\square$

Agora, note que se uma função g possui suporte contido em K , então para toda $f \in \mathcal{C}_c^\infty(K^c)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx = 0. \quad (1.5)$$

Além disso, o suporte de g é a interseção de todos os conjuntos fechados com a propriedade (1.5) para toda $f \in \mathcal{C}_c^\infty(K^c)$. Tendo em vista essa observação, considere a definição seguinte.

Definição 1.12. (*Suporte de uma distribuição*) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. O suporte de u , denotado por $\text{supp } u$, é a interseção de todos os conjuntos fechados K com a seguinte propriedade:

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \varphi \subset K^c \quad \Rightarrow \quad \langle u, \varphi \rangle = 0. \quad (1.6)$$

Observação 1.8. Antes de prosseguirmos, vale ressaltar que a transformada de Fourier de polinômios são distribuições temperadas cujo suporte é a origem.

Nosso objetivo é remover esse tipo de distribuição, descrito na Observação 1.8, quando formos definir o operador de Helmholtz. Para isso, definimos o espaço das distribuições temperadas módulo polinômios.

Definição 1.13. Definimos $\mathcal{P}$ como sendo o conjunto de todos os polinômios de n variáveis reais,

$$\sum_{|\beta| \leq m} c_\beta x^\beta = \sum_{\substack{\beta_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ \beta_1 + \dots + \beta_n \leq m}} c_{\beta_1, \dots, \beta_n} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n},$$

com $c_\beta \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Definimos a relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathcal{P}. \quad (1.7)$$

Não é difícil ver que $\sim$ define, de fato, uma relação de equivalência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.14. (*Distribuições temperadas módulo polinômios*) O espaço formado por todas as classes de equivalência obtidas por (1.7) é denominado espaço das distribuições temperadas módulo polinômios e é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$.

Para evitar a notação pesada, dois elementos u, v da mesma classe de equivalência em $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ são identificados e, neste caso, escrevemos $u = v$ em $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$. Note que para $u, v \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ temos

$$u = v \text{ em } \mathcal{S}'/\mathcal{P} \Leftrightarrow \langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle \hat{v}, \phi \rangle, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ com } \text{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

A próxima proposição contém uma caracterização do espaço $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$. Para uma demonstração veja [29, p. 121].

Proposição 1.10. Seja $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções de Schwartz φ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x) dx = 0,$$

para todo multi-índice α . Então, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que herda naturalmente a mesma topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e cujo dual é $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, isto é,

$$(\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}.$$

Motivados por essa proposição, dizemos que $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ se, e somente se, u_j, u são elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e temos

$$\langle u_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle,$$

quando $j \rightarrow \infty$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Transformadas de Riesz

Esta seção é dedicada as transformadas de Riesz. Suas definições e propriedades serão importantes quando considerarmos o operador projeção de Helmholtz, ferramenta útil na análise do sistema (1). Para definirmos a transformada de Riesz, primeiro introduzimos a definição da distribuição temperada W_j em $\mathbb{R}^n$, para $1 \leq j \leq n$.

Definição 1.15. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq j \leq n$, definimos a distribuição temperada W_j em $\mathbb{R}^n$ por

$$\langle W_j, \varphi \rangle = \Phi_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy,$$

onde $\Phi_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$ e Γ é a função Gama.

Não é difícil ver que, de fato, $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Agora, definimos as transformadas de Riesz para as funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.16. Para $1 \leq j \leq n$, a j -ésima transformada de Riesz de f é dada pela convolução com a distribuição W_j , isto é,

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = (f * W_j)(x) = \Phi_n \text{ p.v. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy, \quad (1.8)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, onde p.v. é o valor principal integral, isto é,

$$\text{p.v. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy. \quad (1.9)$$

A seguir, enunciamos três proposições que nos fornecem propriedades sobre as transformadas de Riesz. A saber, as duas primeiras proposições são demonstradas e a demonstração da terceira pode ser encontrada em Grafakos [29, Corolário 4.2.8].

Proposição 1.11. Para $1 \leq j \leq n$, temos $\widehat{\mathcal{R}_j f}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|}$, ou seja, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $(\mathcal{R}_j f)^\wedge(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$.

Demonstração. Considere $g(x) = |x|^{1-n}$. Note que, calculando as derivadas distribucionais de g , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{1-n} = (1-n)p.v. \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right).$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_j(\xi) &= \Phi_n p.v. \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)^\wedge (\xi) = \Phi_n \left(\frac{1}{1-n} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} \right)^\wedge \\ &= \Phi_n \frac{2\pi i \xi_j}{1-n} (|x|^{-n+1})^\wedge (\xi) \\ &= \Phi_n \frac{2\pi i \xi_j}{1-n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} |\xi|^{-1}. \end{aligned}$$

Além disso, usando a definição de Φ_n conforme Definição 1.15 e sabendo que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_j(\xi) &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{2\pi i \xi_j}{1-n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} |\xi|^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{-2}{1-n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1} \pi \pi^{1/2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{2}{n-1} \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{2}{n-1} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \cdot \frac{n-1}{2}} \frac{-i \xi_j}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Consequentemente, tendo em vista que $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_j(\xi) &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \cdot \frac{n-1}{2}} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{-i \xi_j}{|\xi|} = -i \frac{\xi_j}{|\xi|}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq n$, como queríamos mostrar. □

Proposição 1.12. *As transformadas de Riesz satisfazem*

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{R}_j^2 = -\mathbb{I},$$

onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade.

Demonstração. Usando a Proposição 1.11 e a identidade $\sum_{j=1}^n \left(\frac{-i \xi_j}{|\xi|} \right)^2 = -1$, temos que

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{R}_j^2(f) = -f, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

□

As transformadas $\mathcal{R}_j$ podem ser estendidas para os espaços L^p , $1 < p \leq \infty$, via um argumento de densidade. De fato, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.13. *Seja $1 \leq j \leq n$. As transformadas de Riesz $\mathcal{R}_j$ são limitadas em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.*

Na próxima seção queremos definir o operador de Helmholtz em $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$. Posto isso, se faz necessário algumas definições sobre as transformadas de Riesz neste espaço. Dada uma $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ a forma mais natural de se definir $\mathcal{R}_j f$ seria considerando

$$\langle \mathcal{R}_j f, \phi \rangle = \langle f, \mathcal{R}_j \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Contudo, esta igualdade não está bem definida. De fato, dado $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nem sempre $\mathcal{R}_j \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, não é possível considerarmos essa definição.

Por outro lado, a Proposição 1.11 (veja p. 24) nos motiva a definir a j -ésima transformada de Riesz em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ via transformada de Fourier de forma análoga. Com isso, se faz necessário que o produto

$$(|\xi|^s \hat{u})^\vee \tag{1.10}$$

esteja bem definido, o que nem sempre é possível, pois a função $g(\xi) = |\xi|^s$, com $s \in \mathbb{R}$, não é necessariamente suave na origem. Para isso, primeiro considere a seguinte proposição (veja Grafakos [29, p. 124]).

Proposição 1.14. *Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp } u = \{x_0\}$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ e números complexos a_α tais que*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}. \tag{1.11}$$

Seguindo Grafakos [29], podemos contornar o problema descrito acima. De fato, dado $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, conforme Proposição 1.14, o valor de $\hat{u}$ na origem é irrelevante. Posto isso, se torna possível multiplicar $\hat{u}$ por uma função não-suave na origem e com crescimento polinomial no infinito. Sobre funções de crescimento polinomial no infinito veja [29, Definição 2.3.15].

Assim, fixemos uma função suave $h(\xi)$ em $\mathbb{R}^n$, tal que,

$$h(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| \geq 2; \\ 0 & \text{se } |\xi| \leq 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Agora, para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere

$$\langle |\xi|^s \hat{u}, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \hat{u}, h(\xi/\varepsilon) |\xi|^s \psi(\xi) \rangle, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Desde que o limite à direita em (1.13) exista, (1.13) pode ser usada para definir o produto $|\xi|^s \hat{u}$ como outro elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$. Note que (1.13) é independente da função h .

Com essas considerações e definições em mãos, podemos definir as transformadas de Riesz em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ via transformada de Fourier.

Definição 1.17. *Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e $1 \leq j \leq n$. Então, definimos a j -ésima transformada de Riesz de u como*

$$(\mathcal{R}_j u)^\wedge(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|} \hat{u}. \quad (1.14)$$

Observação 1.9. *Como $-i\xi_j$ tem crescimento polinomial no infinito e $|\xi|^{-1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, segue que $\mathcal{R}_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$.*

1.4 Projeção de Helmholtz e Equações de Navier-Stokes-Coriolis

Nesta seção, abordamos algumas definições e propriedades do operador projeção de Helmholtz $\mathbb{P}$ que é útil para trabalhar com um sistema equivalente a (1) mas sem a pressão ∇p . Nesta seção consideramos o caso $\mathbb{R}^3$, contudo a maioria das definições e propriedades aqui apresentadas podem ser estendidas para $\mathbb{R}^n$. A teoria desta seção pode ser encontrada parcialmente em Zuazo [50]. Além disso, cabe mencionar que a maior parte do conteúdo apresentado aqui foi retirado das dissertações de mestrado [2] e [7].

Inicialmete, considere $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ e $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})_{ij} = \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j$, para $1 \leq i, j \leq 3$, onde $\mathcal{R}_i$ é a i -ésima transformada de Riesz em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.18. (Operador de Helmholtz) *Considere $\mathbb{I}$ o operador identidade em $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^3$. Definimos o operador projeção de Helmholtz $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^3$ por*

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}.$$

Observação 1.10. *Inicialmente, afirmamos que $\mathbb{P}$ é um operador linear em $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^3$.*

De fato, sejam $f, g \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^3$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, e note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda f + g) &= (\lambda f + g) + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}(\lambda f + g) \\ &= \lambda f + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}(\lambda f) + g + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}(g) \\ &= \lambda(\mathbb{P}f) + \mathbb{P}g. \end{aligned}$$

De onde segue a afirmação.

Agora, vejamos três propriedades do operador $\mathbb{P}$ em forma de proposições, envolvendo seu divergente e sua transformada de Fourier.

Proposição 1.15. *Se $f \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P})^3$ então*

$$\widehat{\mathbb{P}(f)}(\xi) = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \hat{f},$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Demonstração. Inicialmente, da Proposição 1.11 (veja p. 24), obtemos

$$(\mathcal{R}_i \mathcal{R}_j f_k)^\wedge(\xi) = \left(-i \frac{\xi_i}{|\xi|}\right) \left(-i \frac{\xi_j}{|\xi|}\right) \widehat{f}_k, \quad (1.15)$$

para todo $1 \leq i, j, k \leq 3$. Como $\mathbb{P}f = f + (\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})f$, aplicando a transformada de Fourier e a igualdade (1.15), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}f} &= \widehat{f} + ((\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})f)^\wedge \\ &= \widehat{f} + \left(\left(-i \frac{\xi_i}{|\xi|}\right) \left(-i \frac{\xi_j}{|\xi|}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \widehat{f} \\ &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \widehat{f}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{\mathbb{P}f}(\xi) = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \widehat{f}.$$

□

Proposição 1.16. *Seja $f \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$ então $\operatorname{div}(\mathbb{P}f) = 0$ ou, equivalentemente,*

$$(\operatorname{div}(\mathbb{P}f))^\wedge = 0.$$

Demonstração. Como $\mathbb{P}f = f + (\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})f$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbb{P} &= \operatorname{div} I + \operatorname{div}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}) \\ &= (\partial_k)_k + (\mathcal{R}_k \operatorname{div} \mathcal{R})_k. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier, segue que

$$(\operatorname{div} \mathbb{P})^\wedge = (\widehat{\partial_k})_k + ((\mathcal{R}_k \operatorname{div} \mathcal{R})^\wedge)_k.$$

Logo, para cada $1 \leq j \leq 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_k} + (\mathcal{R}_k \operatorname{div} \mathcal{R})^\wedge &= (-i \xi_j) + \left(-i \frac{\xi_k}{|\xi|} (\operatorname{div} \mathcal{R})^\wedge\right) \\ &= (-i \xi_k) - \left(-i \frac{\xi_k}{|\xi|}\right) \left(\sum_{j=1}^3 -i \xi_j \widehat{\mathcal{R}_j}\right) \\ &= (-i \xi_k) - \left(-i \frac{\xi_k}{|\xi|}\right) \left(\sum_{j=1}^3 (-i \xi_j) \left(\frac{-i \xi_j}{|\xi|}\right)\right) \\ &= (-i \xi_k) + i \frac{\xi_k}{|\xi|^2} |\xi|^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(\operatorname{div}(\mathbb{P}f))^\wedge = 0$ e consequentemente, $\operatorname{div}(\mathbb{P}f) = 0$.

□

Antes de enunciarmos a próxima proposição, façamos uma observação que nos será útil na demonstração da mesma.

Observação 1.11. Se $f \in ((\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P})^3)$ satisfaz $\operatorname{div} f = 0$, então, aplicando a transformada de Fourier em $\operatorname{div} f = 0$, obtemos

$$\sum_{j=1}^3 -i\xi_j \hat{f}_j = 0.$$

Proposição 1.17. Seja $f \in ((\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P})^3)$ satisfazendo $\operatorname{div} f = 0$. Então, $\mathbb{P}f = f$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 1.15, vemos que

$$\widehat{\mathbb{P}f} = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right)_{1 \leq i,j \leq 3} \hat{f} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\right) \hat{f}_1 - \frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} \hat{f}_2 - \frac{\xi_1 \xi_3}{|\xi|^2} \hat{f}_3 \\ -\frac{\xi_2 \xi_1}{|\xi|^2} \hat{f}_1 + \left(1 - \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2}\right) \hat{f}_2 - \frac{\xi_2 \xi_3}{|\xi|^2} \hat{f}_3 \\ -\frac{\xi_3 \xi_1}{|\xi|^2} \hat{f}_1 - \frac{\xi_3 \xi_2}{|\xi|^2} \hat{f}_2 + \left(1 - \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}\right) \hat{f}_3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(\widehat{\mathbb{P}f})_k = \hat{f}_k - i \frac{\xi_k}{|\xi|^2} \left(\sum_{j=1}^3 -i\xi_j \hat{f}_j \right), \quad (1.16)$$

onde k indica a k -ésima componente do campo $\widehat{\mathbb{P}f}$. Tendo em vista a Observação 1.11 e a igualdade (1.16), obtemos $\widehat{\mathbb{P}f} = \hat{f}$ e, portanto, $\mathbb{P}f = f$.

□

Observação 1.12. Note que uma consequência imediata das Proposições 1.16 e 1.17 é que $\mathbb{P}^2 f = \mathbb{P}f$ para cada $f \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P})^3$. Assim, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ e, de fato, $\mathbb{P}$ é uma projeção.

Este operador será muito útil no estudo das equações de Navier–Stokes–Coriolis. As suas propriedades em relação a transformada de Fourier nos ajudarão a estabelecer algumas estimativas importantes.

Observação 1.13. O operador projeção (ou projetor) de Helmholtz $\mathbb{P}$ é conhecido como projetor livre de divergência, pois sua imagem está sempre na componente de um campo vetorial com divergente nulo.

Se u é um campo vetorial temos a decomposição $u = u_1 + u_2$, onde $\operatorname{div}(u_1) = 0$ e $u_2 = \nabla \varphi$, e então $\mathbb{P}(u) = u_1$. Tal decomposição é conhecida como decomposição de Leray–Helmholtz. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= \operatorname{div}(u_2) = \operatorname{div}(\nabla \varphi) \\ &= \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{div}(u) = \Delta\varphi$, ou seja, $\nabla \cdot u = \Delta\varphi$, logo $\varphi = (\Delta^{-1}) \nabla \cdot u$. Além disso,

$$\begin{aligned} u_1 &= u - u_2 = u - \nabla\varphi \\ &= u - \nabla (\Delta^{-1}) \nabla \cdot u. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(u) = u_1$, em geral, se u admite a decomposição de Helmholtz, a projeção $\mathbb{P}$ atua sobre o campo u da seguinte forma

$$\mathbb{P}(u) = u - \nabla (\Delta^{-1}) \nabla \cdot u.$$

Para mais detalhes sobre a decomposição Leray-Helmholtz veja Deriaz e Perrier [15] ou Kozomo *et al.* [19].

Agora, vejamos algumas observações a respeito do sistema (1) das equações de Navier-Stokes-Coriolis. Considere $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ uma função suficientemente suave na variável t , de modo que $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, para cada $t \geq 0$, satisfazendo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^3 \end{cases}, \quad (1.17)$$

onde a pressão $p(x, t)$ também é suficientemente suave.

Tendo em vista que nossa ideia é aplicar a projeção $\mathbb{P}$ no sistema (1.17), vejamos algumas propriedades sobre a aplicação desse operador nos termos de (1.17).

Observação 1.14. *Os itens abaixo são facilmente verificados:*

- (i) O operador $\mathbb{P}$ comuta com a derivada temporal, ou seja, $\mathbb{P}\partial_t = \partial_t\mathbb{P}$;
- (ii) O operador $\mathbb{P}$ comuta com o laplaciano, ou seja, $\mathbb{P}\Delta = \Delta\mathbb{P}$;
- (iii) O operador $\mathbb{P}$ se relaciona com o gradiente da seguinte forma: $(\mathbb{P}\nabla)^\wedge = 0$;
- (iv) Com a matriz $\mathbb{J}$, o operador $\mathbb{P}$ se relaciona da seguinte forma: $\mathbb{P}(\Omega e_3 \times u) = \Omega\mathbb{J}(\mathbb{P}u)$, onde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

é uma matriz anti-simétrica.

- (v) O operador $\mathbb{P}$ age como operador identidade sobre u , ou seja, $\mathbb{P}u = u$, pois $\operatorname{div} u = 0$.

Demonstração. (i) Usando transformada de Fourier é fácil ver que

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{P} \frac{\partial}{\partial t} \right)^\wedge &= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\wedge = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot (-it) \\ &= (-it) \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P} \right)^\wedge, \end{aligned}$$

de onde obtemos a conclusão do item (i).

(ii) De forma análoga, observe que:

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}\Delta)^\wedge &= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot \hat{\Delta} = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^3 (-i\xi_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 (-i\xi_j)^2 \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \\ &= (\Delta\mathbb{P})^\wedge, \end{aligned}$$

obtendo o item (ii).

(iii) Usando a transformada de Fourier do Gradiente ∇ , obtemos

$$(\mathbb{P}\nabla)^\wedge = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot \hat{\nabla} = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} -i\xi_1 \\ -i\xi_2 \\ -i\xi_3 \end{pmatrix},$$

então,

$$\begin{aligned} ((\mathbb{P}\nabla)^\wedge)_1 &= \left(1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} \right) \cdot (-i\xi_1) + \left(-\frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} \right) \cdot (-i\xi_2) + \left(-\frac{\xi_1 \xi_3}{|\xi|^2} \right) \cdot (-i\xi_3) \\ &= -i\xi_1 + \frac{i\xi_1^3}{|\xi|^2} + \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{|\xi|^2} + \frac{i\xi_1 \xi_3^2}{|\xi|^2} \\ &= -i\xi_1 + i\xi_1 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \right) \\ &= -i\xi_1 + i\xi_1 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

De forma similar se verifica $((\mathbb{P}\nabla)^\wedge)_2 = 0$ e $((\mathbb{P}\nabla)^\wedge)_3 = 0$, como queríamos mostrar.

(iv) Sabemos que $\Omega e_3 \times u = \Omega \mathbb{J}u$, onde $\mathbb{J}$ é como em (1.18). Com isso, observe que

$$\mathbb{P}(\Omega e_3 \times u) = \mathbb{P}(\Omega \mathbb{J}u) = \Omega \mathbb{J}(\mathbb{P}u),$$

de onde segue a igualdade do item (iv).

(v) O item (v) segue diretamente da Proposição 1.17.

□

Posto isso, aplicando a projeção $\mathbb{P}$ no sistema (1.17), obtemos que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\partial_t u) - \mathbb{P}(\Delta u) + \mathbb{P}(\Omega e_3 \times u) + \mathbb{P}((u \cdot \nabla)u) + \mathbb{P}(\nabla p) = 0 \\ \mathbb{P}(u(x, 0)) = \mathbb{P}(u_0(x)) = u_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Tendo em vista as propriedades contidas na Observação 1.14, o sistema (1.19) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + \mathbb{P}((u \cdot \nabla)u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.20)$$

Com isso, obtemos a formulação (1.20) onde desaparece o termo gradiente da pressão e ficamos com um sistema de equações apenas com a incógnita u , o campo velocidade. Posteriormente, vamos trabalhar apenas com esse último sistema com funções do tipo *quase periódicas*. Tal definição será dada ainda neste capítulo.

1.5 Medida de Radon

Nesta seção, relembremos algumas definições e fatos sobre as medidas de Radon. Para isso, ao longo deste trabalho, X denota um espaço de Hausdorff localmente compacto (HLC). Aqui, $\mathcal{B}_X$ é a σ -álgebra de Borel em X (a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos, denominada σ -álgebra dos borelianos). Uma medida de Borel é qualquer medida definida sobre a σ -álgebra dos borelianos. Basicamente, todo conteúdo desta seção foi extraído do livro do Folland [20].

Definição 1.19. *Seja $f \in C(X)$, isto é, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua. Então, definimos*

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

Além disso, dizemos que f anula-se no infinito se para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. Assim, definimos

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ anula-se no infinito}\}.$$

Uma importante relação entre os espaços $C_0(X)$ e $C_c(X)$ é a que segue.

Proposição 1.18. *Se X é um espaço HLC, então $C_0(X)$ é o fecho de $C_c(X)$ na métrica uniforme.*

Demonstração. Se $\{f_n\}$ é uma sequência em $C_0(X)$ que converge uniformemente para $f \in C(X)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Então, $|f(x)| < \varepsilon$ se $x \notin \text{supp}(f_n)$, assim $f \in C_0(X)$. Por outro lado, se $f \in C_0(X)$, para $n \in \mathbb{N}$, seja $K_n = \{x : |f(x)| \geq n^{-1}\}$. Então, K_n é compacto. Pelo Lema Urysohn, na versão localmente

compacto, existe $g_n \in C_c(X)$ com $0 \leq g_n \leq 1$ e $g_n = 1$ em K_n . Seja $f_n = g_n f$. Então, $f_n \in C_c(X)$ e $\|f_n - f\| \leq n^{-1}$, assim $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

□

Definição 1.20. *Seja $f \in \mathcal{B}(X)$, ou seja, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função limitada. Então, a norma uniforme de f é dada por*

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Vejamos agora algumas propriedades de funcionais lineares positivos sobre $C_c(X)$ para podermos definir uma medida de Radon.

Definição 1.21. *Um funcional linear $I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado positivo se $I(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$ com $f \in C_c(X)$.*

Tal definição não faz menção direta a qualquer noção de continuidade, porém ela implica uma noção de continuidade relativamente forte.

Proposição 1.19. *Se I é um funcional linear positivo definido em $C_c(X)$, para cada compacto $K \subset X$ existe uma constante C_K tal que*

$$|I(f)| \leq C_K \|f\|_u, \quad (1.21)$$

para toda $f \in C_c(X)$ tal que $\text{supp}(f) \subset K$.

Se μ é uma medida de Borel sobre X tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$, então é claro que $C_c(X) \subset L^1(\mu)$. Neste caso, temos que

$$f \mapsto \int_X f d\mu \quad (1.22)$$

define um funcional linear positivo atuando sobre $C_c(X)$. Ainda nessa seção veremos que todo funcional linear positivo definido em $C_c(X)$ tem esta forma. Ainda mais, impondo condições adicionais de regularidade sobre μ concluímos que μ é única. Vejamos tais condições.

Seja μ uma medida (positiva) de Borel sobre X e E um boreliano de X . Então,

(i) μ é chamada regular exterior em E se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ aberto}\}. \quad (1.23)$$

(ii) μ é chamada regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}. \quad (1.24)$$

Definição 1.22. (*Medida de Radon*) Uma medida (positiva) de Borel μ é uma medida de Radon se ela satisfaz as três seguintes propriedades:

- (i) μ é finita sobre todos os conjuntos compactos;
- (ii) μ é regular exterior sobre todos os borelianos;
- (iii) μ é regular interior sobre todos os abertos.

Considere a seguinte notação: dada $f \in C_c(X)$ e O um aberto de X , escrevemos

$$f < O \text{ se } \begin{cases} 0 \leq f \leq 1 \\ \text{supp}(f) \subset O \end{cases} . \quad (1.25)$$

Proposição 1.20. (*Teorema da representação de Riesz*) Seja I um funcional linear positivo em $C_c(X)$, então existe uma única medida de Radon μ em X tal que

$$I(f) = \int_X f d\mu, \quad (1.26)$$

para toda $f \in C_c(X)$. Além disso, μ satisfaz

- (i) $\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f < U\}$ para todo aberto $U \subset X$,
- (ii) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X) \text{ e } f \geq \chi_K\}$ para todo compacto $K \subset X$.

Aqui χ_K corresponde a função característica em K .

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada em Folland [20, Teorema 7.2].

□

Daqui em diante, exploramos com mais detalhes algumas propriedades das medidas de Radon, como regularidade e teoremas de aproximação.

Proposição 1.21. (*Regularidade interior*) Se μ é uma medida de Radon em X , então μ é regular interior em todos os conjuntos σ -finitos.

Corolário 1.1. Toda medida de Radon σ -finita é regular. Se X é σ -compacto, toda medida de Radon em X é regular.

Proposição 1.22. (*Condição suficiente para uma medida ser de Radon*) Seja X um espaço HLC no qual todo conjunto aberto é σ -compacto (em particular, por exemplo, se X for segundo contável). Então, toda medida de Borel em X , que é finita em conjuntos compactos, é regular, e consequentemente de Radon.

Proposição 1.23. (*Densidade de $C_c(X)$ em $L^p(X, \mu)$*) Se μ é uma medida de Radon em X , então $C_c(X)$ é um conjunto denso em $L^p(\mu)$, para todo $1 \leq p < \infty$.

A seguir, veremos que o conjunto de todas as medidas complexas de Radon pode ser visto como o espaço dual de $C_0(X)$, através do teorema da representação de Riesz. Começamos com uma definição.

Definição 1.23. Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ o espaço das medidas complexas μ de Radon em X . E para cada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ considere

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

onde $|\mu|$ denota a variação total da medida μ .

Proposição 1.24. Se μ é uma medida complexa de Borel, então μ é de Radon se, e somente se, $|\mu|$ é de Radon. Além disso, $\mathcal{M}(X)$ é um espaço vetorial e

$$\mu \mapsto \|\mu\|$$

define uma norma sobre ele.

Proposição 1.25. (*Teorema da representação de Riesz*) Seja X um espaço HLC, e para $\mu \in \mathcal{M}(X)$ e $f \in C_0(X)$ seja

$$I_\mu(f) = \int f d\mu. \quad (1.27)$$

Então, o mapa $\mu \rightarrow I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{M}(X)$ para $C_0(X)^*$.

Demonstração. Já vimos que cada $I \in C_0(X)^*$ é da forma I_μ , com $\mu \in \mathcal{M}(X)$. O que nos leva a concluir que o mapa descrito no enunciado é sobrejetor. Por outro lado, se $\mu \in \mathcal{M}(X)$, pela desigualdade triangular para integrais em medidas complexas, veja Folland [20, Proposição 3.13c], segue que

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|_u \|\mu\|. \quad (1.28)$$

Assim, $I_\mu \in C_0(X)^*$ e $\|I_\mu\| \leq \|\mu\|$. Ainda pela Proposição 3.13b, citada acima, vemos que se $h = d\mu/d|\mu|$, então $|h| = 1$ $|\mu|$ -quase sempre. Agora, pelo Teorema de Lusin, veja [20, Teorema 7.10], para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_c(X)$ tal que $\|\phi\|_u \leq 1$ e $\phi = \bar{h}$, exceto em um conjunto E com $|\mu|(E) < \epsilon/2$. Então, usando o fato de que $\bar{h} \in \mathbf{L}^1(\mu)$, pois

$\mu(X) < \infty$, pela regra da cadeia para o caso complexo, encontramos

$$\begin{aligned}
\|\mu\| &= \int |h|^2 d|\mu| = \int \bar{h} \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| = \int \bar{h} d\mu = \int (\phi + \bar{h} - \phi) d\mu \\
&\leq \left| \int \phi d\mu \right| + \left| \int (\bar{h} - \phi) d\mu \right| \\
&\leq \|I_u\| \|\phi\|_u + \int |\bar{h} - \phi| d|\mu| \\
&\leq \|I_u\| + 2|\mu|(E), & \text{pois } \|\phi\|_u \leq 1 \\
&\leq \|I_u\| + \epsilon, & \text{pois } |\mu|(E) < \epsilon/2.
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.2. *Se X é um espaço de Hausdorff compacto, então $C(X)^*$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{M}(X)$.*

1.6 Funções Quase Periódicas

Mostraremos nesta seção os teoremas fundamentais da teoria de funções quase periódicas. Aqui, escolhemos como definição para funções quase periódicas, funções com a seguinte propriedade: podem ser uniformemente aproximadas por polinômios trigonométricos. A partir desta definição, é mais fácil provar algumas propriedades dessas funções. Todo conteúdo desta seção é uma extensão para $\mathbb{R}^n$ da teoria encontrada em Corduneanu [14] e, também, algumas propriedades em [12], [40]. Algumas dessas extensões podem ser encontradas em Arguedas [4], [5]. Em alguns livros, como por exemplo, Bohr [12], a definição abordada neste trabalho é tida como corolário ou, até mesmo, como teorema.

Inicialmente considere a definição seguinte para polinômios trigonométricos complexos.

Definição 1.24. (*Polinômio trigonométrico*) Considere a função dado por

$$T(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.29)$$

onde $c_k \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda_k \in \mathbb{R}$, é chamado polinômio trigonométrico complexo.

Definição 1.25. (*Funções quase periódicas*) Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada quase periódica, se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um polinômio trigonométrico $T_\epsilon(x)$, tal que

$$|f(x) - T_\epsilon(x)| < \epsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.30)$$

Assim, funções quase periódicas são aquelas funções definidas em $\mathbb{R}^n$, que podem ser uniformemente aproximadas por polinômios trigonométricos. Partindo dessa definição, de funções quase periódicas, segue que qualquer polinômio trigonométrico é uma função quase periódica.

Observação 1.15. Além disso, segue do teorema da aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos, conhecido como Teorema de Weierstrass (veja [12, p. 26], [14, p. 05]), que qualquer função periódica é também uma função quase periódica. Por outro lado, existem funções quase periódicas que não são periódicas.

Proposição 1.26. Toda função quase periódica é limitada, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|f(x)| \leq C \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.27. Toda função quase periódica $f(x)$ é uniformemente contínua para $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, para um arbitrário $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_\varepsilon$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \text{sempre que } |x - y| \leq \delta.$$

Proposição 1.28. Seja $f(x)$ uma função quase periódica, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Então, as funções

$$\bar{f}(x), \quad cf(x) \quad \text{e} \quad f(x + a),$$

também são funções quase periódicas. Além disso, se $g(x)$ é outra função quase periódica, então as funções

$$f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad f(x) \cdot g(x),$$

são funções quase periódicas.

Corolário 1.3. Considere o polinômio $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ e as funções quase periódicas $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Então,

$$F(x) = P(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

é uma função quase periódica para $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.29. A função limite $f(x)$ de uma sequência de funções quase periódicas $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ uniformemente convergente em $x \in \mathbb{R}^n$, é quase periódica.

Observação 1.16. A Proposição 1.29 expressa um importante fato de que o conjunto de funções quase periódicas é fechado com respeito a convergência uniforme. Isso também pode ser visto da seguinte forma: qualquer função que possa ser aproximada, uniformemente, por funções quase periódicas é quase periódica.

Proposição 1.30. Considere $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uma função uniformemente contínua de $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{M}^n$, onde $\mathbb{M}^n \subset \mathbb{C}^n$. Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são funções quase periódicas tais que $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{M}^n$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então a função

$$F(x) = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_n) \tag{1.31}$$

é quase periódica.

Proposição 1.31. *Se $f(x)$ é uma função quase periódica e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$, então $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ é uma função quase periódica, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.*

Agora vejamos duas propriedades características das funções quase periódicas. Vamos supor, a seguir, que as funções envolvidas nas definições e teoremas são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e são de valores complexos.

Definição 1.26. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é chamado relativamente denso se existir $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, com $l > 0$, no sentido que $l_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe*

$$\prod_{i=1}^n [y_i, y_i + l_i] \subset \mathbb{R}^n,$$

com a propriedade de que

$$\prod_{i=1}^n [y_i, y_i + l_i] \cap K \neq \emptyset.$$

Definição 1.27. *Um número $\tau \in \mathbb{R}^n$ é chamado ε -quase periódico de $f(x)$ se*

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.32)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

As duas propriedades características das funções quase periódicas são:

Propriedade 1.1. *A partir de qualquer sequência da forma $\{f(x + h_n)\}$, onde $\{h_n\} \subset \mathbb{R}^n$, pode-se extrair uma subsequência uniformemente convergente em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.28. *Se uma função satisfaz a Propriedade 1.1 ela é chamada normal.*

Propriedade 1.2. *Para qualquer $\epsilon > 0$, existe um conjunto relativamente denso $\{\tau\}_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.32), para todo $\tau \in \{\tau\}_\epsilon$.*

Observação 1.17. *Cada número $\tau \in \{\tau\}_\epsilon$ é chamado número de translação correspondente ao parâmetro ϵ (ou o número de ϵ -translação) de $f(x)$.*

A Propriedade 1.2 é a usual definição de funções quase periódicas dada por Bohr [12] e, Zhicov e Levitan [40]. É basicamente a junção das Definições 1.26 e 1.27.

A fim de estabelecer uma equivalência entre as Propriedades 1.1 e 1.2 com a definição de funções quase periódicas, prosseguimos da seguinte forma: primeiro, mostramos que qualquer função quase periódica possui a Propriedade 1.1; então provamos que qualquer função com a Propriedade 1.1 também tem a Propriedade 1.2; finalmente, provamos que uma função com a Propriedade 1.2 é quase periódica, isto é, pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.32. (*Equivalência entre as Propriedades 1.1 e 1.2*)

- (i) Se $f(x)$ é uma função quase periódica, então ela satisfaz a Propriedade 1.1.
- (ii) Se $f(x)$ satisfaz a Propriedade 1.1, então também satisfaz a Propriedade 1.2.
- (iii) Se $f(x)$ satisfaz a Propriedade 1.2, então $f(x)$ é uma função quase periódica.

Demonstração. As demonstrações dessas equivalências podem ser encontradas em [14, Teoremas 1.9, 1.10, 1.11]. $\square$

Na seção acima, detalhamos apenas algumas propriedades das funções quase periódicas, bem como, alguns resultados a cerca destas. Contudo, vale ressaltar a importância da teoria sobre a série de Fourier associada às funções quase periódicas, que não abordamos aqui, mas que pode ser encontrada em Corduneanu [14, Capítulo 1].

2 Existência e Unicidade de Soluções Locais

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade local de soluções brandas para o sistema (1). Este resultado será utilizado na demonstração do nosso principal teorema. A teoria deste capítulo foi baseada no artigo do Giga *et al.* [24].

2.1 Espaços de funções baseados na transformada de Fourier

Nesta seção veremos classes de espaços vetoriais cuja definição é baseada na transformada de Fourier, onde o semigrupo gerado pelo operador de Riesz é uniformemente limitado. Além disso, estes espaços contêm funções quase periódicas que não são periódicas.

2.1.1 Medidas com valores em $\mathbb{C}^d$

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, como anteriormente, o espaço de todas as medidas de Radon, de valores complexos (*nesse caso, finitas*), em $\mathbb{R}^n$. Exemplos de tais medidas são: funções integráveis em relação à medida de Lebesgue, medidas finitas concentradas em pontos (Diracs), medidas finitas concentradas em curvas ou superfícies, entre outros tipos de medidas singulares em $\mathbb{R}^n$.

Além disso, como vimos no Capítulo 1, este espaço é um espaço de Banach (complexo) equipado com a norma da variação total. Além disso, pelo Teorema da Representação de Riesz 1.25, $\mathcal{M}$ pode ser identificado com o espaço dual de $C_0(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, para $\mu \in \mathcal{M}$

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup\{|\langle \mu, \psi \rangle| : \psi \in C_0(\mathbb{R}^n), \|\psi\|_{\infty} \leq 1\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico. Desde que o espaço $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz, conforme Definição 1.5, é denso em $C_0(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathcal{M}$ é considerada uma distribuição temperada, isto é, $\mu \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}'$. Além disso, uma medida não negativa de Radon é definida como

$$|\mu|(\mathcal{O}) = \sup\{|\langle \mu, \psi \rangle| : \psi \in C_c(\mathcal{O}), \|\psi\|_{\infty} \leq 1\}, \quad (2.1)$$

para um conjunto aberto $\mathcal{O}$, onde $C_c(\mathcal{O})$ é como na Definição 1.19 com suporte compacto em $\mathcal{O}$ e $|\mu|$ a total variação da medida μ .

Observação 2.1. Pela Proposição 1.18, $C_c(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto denso de $C_0(\mathbb{R}^n)$. Então, $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$|\mu|(\mathbb{R}^n) = \|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Para uma medida de Radon finita $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, com valores em $\mathbb{C}^d$, ainda denotaremos sua medida de variação total $|\mu|$ pela dualidade acima, entendendo que

$$\|\psi\|_\infty = \|\psi\|_\infty \quad \text{para} \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_d),$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^d$. A totalidade das medidas finitas de Radon em $\mathbb{R}^n$, com valores em $\mathbb{C}^d$, é denotado por $\mathcal{M}^d = (\mathcal{M}(\mathbb{R}^n))^d$ (*frequentemente vamos escrever $\mathcal{M}^d$ simplesmente por $\mathcal{M}$ a fim de não sobrecarregar a notação*). Existem várias maneiras de definir uma norma em $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n))^d$. A mais conveniente, para o nosso propósito, é

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d} = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Outra norma equivalente que usamos aqui é

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* = \left(\sum_{i=1}^d \|\mu_i\|_{\mathcal{M}}^2 \right)^{1/2}.$$

No caso em que μ_i é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue, ou seja,

$$d\mu_i = \rho_i d\xi, \quad \text{onde} \quad \rho_i(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_i(B(x, r))}{|B(x, r)|},$$

(veja [45]), então

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^d |\rho_i|^2 \right)^{1/2} d\xi \quad \text{e} \quad \|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* = \left(\sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho_i| d\xi \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Como veremos mais adiante, essas normas são equivalentes. Mas antes, considere a definição seguinte.

Definição 2.1. *Para uma função mensurável limitada de Borel ψ e $\mu \in \mathcal{M}$ associamos uma nova medida de Radon, denotada por $\mu[\psi \in \mathcal{M}$ e definida por*

$$(\mu[\psi])(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} \psi(\xi) \mu(d\xi). \quad (2.3)$$

Observação 2.2. (*Equivalência das normas em (2.2)*) *Vejamos que as duas normas em (2.2) são equivalentes. Mais precisamente, vamos mostrar que*

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}^d} \leq \sqrt{d} \|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^*, \quad \mu \in \mathcal{M}^d. \quad (2.4)$$

Demonstração. De fato, seja h_i a derivada de Radon-Nikodym de μ_i com respeito a $|\mu|$; isto é, $|\mu|$ está bem definida quase sempre, desde que μ_i é absolutamente contínua com respeito a $|\mu|$. Então, por (2.2)

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* = \left(\sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h_i| |\mu| d\xi \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais com $p = 2$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h_i| |\mu| d\xi \right)^2 \right)^{1/2} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^d |h_i|^2 \right)^{1/2} |\mu| d\xi.$$

Além disso, desde que $\sum_{i=1}^d |h_i|^2(\xi) = 1$, $|\mu|$ -quase sempre em ξ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^d |h_i|^2 \right)^{1/2} |\mu| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mu| d\xi = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Com isso,

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}^d}. \quad (2.5)$$

Por outro lado, é fácil ver que $\|\mu\|_{\mathcal{M}^d} \leq \sum_{i=1}^d \|\mu_i\|_{\mathcal{M}}$. Contudo,

$$\sum_{i=1}^d \|\mu_i\|_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^d \|\mu_i\|_{\mathcal{M}} \cdot 1 = |\langle \bar{\mu}, \vec{1} \rangle|,$$

com $\bar{\mu} = (\|\mu_1\|_{\mathcal{M}}, \dots, \|\mu_d\|_{\mathcal{M}})$ e $\vec{1} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{d \text{ vezes}}$. Assim, fazendo uso da desigualdade de Schwartz, chegamos a estimativa

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\mu}, \vec{1} \rangle| &\leq \|\bar{\mu}\| \|\vec{1}\| = \left(\sum_{i=1}^d \|\mu_i\|_{\mathcal{M}}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^* \cdot \sqrt{d}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}^d} \leq \sqrt{d} \|\mu\|_{\mathcal{M}^d}^*. \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6), segue (2.4). $\square$

Agora introduzimos um importante subespaço de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, denotado por $\mathcal{M}_0$ e definido por

$$\mathcal{M}_0 := \{\mu \in \mathcal{M} : \mu[\{0\}] = 0\}. \quad (2.7)$$

Em outras palavras, $\mu \in \mathcal{M}$ pertence a $\mathcal{M}_0$ se, e somente se, não existe ponto de massa na origem. A condição $\mu[\{0\}] = 0$ é equivalente a dizer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\mu|(B_r(0)) = 0, \quad (2.8)$$

onde $B_r(0)$ é a bola aberta de raio r centrada na origem.

Proposição 2.1. *O espaço $\mathcal{M}_0$ é um subespaço fechado de $\mathcal{M}$.*

Demonstração. De fato, se $\mu_m \rightarrow \mu$ em $\mathcal{M}$ e μ_m satisfaz (2.8), então

$$\begin{aligned} |\mu|(B_r(0)) &\leq |\mu_m - \mu|(B_r(0)) + |\mu_m|(B_r(0)) \\ &\leq \|\mu_m - \mu\|_{\mathcal{M}} + |\mu_m|(B_r(0)). \end{aligned}$$

Tomando $r \rightarrow 0$, temos que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} |\mu|(B_r(0)) \leq \|\mu_m - \mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Desde que $\mu_m \rightarrow \mu$ em $\mathcal{M}$, isso implica que μ satisfaz (2.8), ou seja, $\mu \in \mathcal{M}_0$. □

Lema 2.1. *Seja $\sigma \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ limitada em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assuma que $\mu \in \mathcal{M}_0$ e que $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência aproximada de σ , no sentido de que $\sigma_m \rightarrow \sigma$ pontualmente em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\|\sigma_m\|_\infty$ é uniformemente limitada. Então, $\{\mu[\sigma_m]\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ e a sequência $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$ convergem em $\mathcal{M}_0$. Além disso,*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu[\sigma_m] = (\mu[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})])[\sigma] \in \mathcal{M}_0, \quad (2.9)$$

independentemente da escolha da sequência aproximada $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$.

Observação 2.3. *Seja $\bar{\sigma}$ uma extensão de $\sigma \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ para a origem. Desde que $\mu \in \mathcal{M}_0$ de modo que $\mu = \mu[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})]$, vemos que $(\mu[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})])[\sigma] = \mu[\bar{\sigma}]$. Em particular, a medida $\mu[\bar{\sigma}]$ independe do caminho da extensão de σ .*

Aqui denotamos $(\mu[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})])[\sigma]$ simplesmente por $\mu[\sigma] \in \mathcal{M}_0$ para $\mu \in \mathcal{M}$. A medida $\mu[\bar{\sigma}]$ em geral depende do valor $\bar{\sigma}[0]$ quando $\mu \in \mathcal{M}$.

Demonstração do Lema 2.1. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\sigma_m - \sigma| \mu d\xi = 0. \quad (2.10)$$

Desde que $\mu \in \mathcal{M}_0$ de modo que $\mu[\sigma_m] = (\mu[\sigma_m])[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})]$, implica que

$$\mu[\sigma_m] \rightarrow (\mu[(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})])[\sigma] \in \mathcal{M}_0. \quad (2.11)$$

□

2.1.2 Imagem de Fourier de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_0$

Agora consideramos a pré-imagem de Fourier dos espaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_0$. Relembre que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ denotam a transformada de Fourier e sua inversa, respectivamente. Seja $\mathcal{FM}$ a imagem de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{F}$, e $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}$ a pré-imagem de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{F}^{-1}$. Desde que $\mathcal{F}^{-1}f(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$, o espaço $\mathcal{FM}$ é também a pré-imagem de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{F}$, isto é,

$$\mathcal{FM} = \{f \in \mathcal{S}' : \hat{f} \in \mathcal{M}\}. \quad (2.12)$$

Esse espaço é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{\mathcal{FM}} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{M}}. \quad (2.13)$$

Seja $\mathcal{FM}_0$ o seguinte subespaço fechado de $\mathcal{FM}$,

$$\mathcal{FM}_0 = \{f \in \mathcal{S}' : \hat{f} \in \mathcal{M}_0\}. \quad (2.14)$$

O espaço $\mathcal{FM}$ está incluído no espaço $\mathcal{BUC}$, espaço de todas as funções limitadas e uniformemente contínuas. O espaço $\mathcal{FM}_0$ não contém função constante diferente de zero. De fato, $\mathcal{FM}$ admite uma decomposição topológica em soma direta da forma

$$\mathcal{FM} = \mathcal{FM}_0 \oplus \mathbb{C}, \quad (2.15)$$

onde $\mathbb{C}$ denota o espaço de todas as funções (complexas) constantes. Além disso, uma curiosidade a cerca desse espaço, é que $\mathcal{FM}_0$ *está estritamente incluído no espaço de Besov* $\dot{B}_{\infty,1}^0$, para definição do espaço de Besov e prova da inclusão veja Giga *et al.* [24, Apêndice A]. No entanto, $\mathcal{FM}_0$ ainda inclui várias funções quase periódicas, não necessariamente periódicas, como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 2.1. *Observe que a função quase periódica*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{i2\pi\lambda_j \cdot x},$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \alpha_j \in \mathbb{C}, \text{ pertence a } \mathcal{FM}_0 \text{ se } \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty.$$

De fato, inicialmente, vamos determinar a transformada de Fourier de f . Usando a linearidade da transformada, obtemos

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (e^{i2\pi\lambda_j \cdot x})^\wedge = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta(\xi - \lambda_j).$$

Daí, temos que

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta(\xi - \lambda_j) \in \mathcal{M}_0,$$

onde δ é o delta de Dirac. Além disso,

$$\|f\|_{\mathcal{FM}} = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \quad \text{se } \lambda_j \neq \lambda_k \text{ para } j \neq k.$$

Agora, mostramos a limitação do operador de Riesz no espaço $\mathcal{FM}_0$.

Lema 2.2. *O operador de Riesz $\mathcal{R}_j$ é limitado em $\mathcal{FM}_0$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Além disso,*

$$(i) \|\mathcal{R}_j f\|_{\mathcal{FM}} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}}; \quad (ii) \|e^{t\mathcal{R}_j} f\|_{\mathcal{FM}} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}}, \quad t \geq 0$$

para toda $f \in \mathcal{FM}_0$.

Observação 2.4. Não é difícil mostrar as estimativas do Lema 2.2. Apenas com uma aplicação da transformada de Fourier podemos obter a limitação, em $\mathcal{FM}_0$, do operador de Riesz

$$(\mathcal{R}_j f) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f}[\sigma(\mathcal{R}_j)] \right); \quad \sigma(\mathcal{R}_j) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

embora o símbolo $\sigma(\mathcal{R}_j)$ não seja contínuo em $\xi = 0$.

Demonstração do Lema 2.2. De fato, podemos estimar $\|\mathcal{R}_j f\|_{\mathcal{FM}}$ com segue:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_j f\|_{\mathcal{FM}} &= \|(\mathcal{R}_j f)^\wedge\|_{\mathcal{M}} \\ &= \left\| (i\xi_j/|\xi|) \widehat{f} \right\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{FM}}, \end{aligned}$$

de onde concluímos (i). De forma similar,

$$\begin{aligned} \|e^{\mathcal{R}_j} f\|_{\mathcal{FM}} &= \|(e^{\mathcal{R}_j} f)^\wedge\|_{\mathcal{M}} \\ &= \left\| e^{it\xi_j/|\xi|} \widehat{f} \right\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{FM}}, \end{aligned}$$

obtendo (ii). □

A seguir, estendemos o resultado do Lema 2.2 para um operador cujo símbolo pode não ser contínuo na origem. Essencialmente, vamos provar que

$$(\Sigma f)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sigma(\xi) (\widehat{f}(\xi)) \right) (x) \quad (2.17)$$

é um operador bem definido para $f \in \mathcal{FM}_0$ se o símbolo $\sigma \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é limitado. Aproximamos σ por $\{\sigma_m\}_m \subset \mathcal{S}$ tal que $\|\sigma_m\|_\infty$ é limitada e $\sigma_m \rightarrow \sigma$ pontualmente em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. A quantidade $\mathcal{F}^{-1}(\sigma_m \widehat{f})$ é bem definida em $\mathcal{S}'$, se $f \in \mathcal{S}'$. Pelo Lema 2.1 $\mathcal{F}^{-1} \sigma_m \widehat{f}$ converge para $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}[\sigma])$ em $\mathcal{FM}_0$ se $f \in \mathcal{FM}_0$. Então, definimos Σf por

$$\Sigma f = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f}[\sigma] \right). \quad (2.18)$$

Lema 2.3. Assuma que $\sigma \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é limitada em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então Σ em (2.18) é um operador linear limitado em $\mathcal{FM}_0$ e

$$\|\Sigma f\|_{\mathcal{FM}} \leq \|\sigma\|_\infty \|f\|_{\mathcal{FM}}, \quad (2.19)$$

para $f \in \mathcal{FM}_0$. Se, além disso, σ é contínua na origem, então Σ é um operador linear limitado em $\mathcal{FM}$ e (2.19) permanece válida para toda $f \in \mathcal{FM}$.

Observação 2.5. Note que agora podemos ver o Lema 2.2 como um corolário do Lema 2.3. Além disso, na próxima seção apresentamos uma versão vetorial do Lema 2.3 e descrevemos os principais pontos de sua demonstração.

2.1.3 Operadores produto e do calor

O espaço $\mathcal{FM}$ é uma álgebra cujo elemento unitário é a função constante 1. O espaço $\mathcal{FM}_0$ não é uma álgebra, desde que a multiplicação de $e^{i\lambda \cdot x}$ e $e^{-i\lambda \cdot x}$ é igual a 1 $\notin \mathcal{FM}_0$ para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lema 2.4. *Se f e g estão em $\mathcal{FM}$, o mesmo acontece com fg . A norma de uma função constante 1 é igual a 1. Além disso,*

$$\|fg\|_{\mathcal{FM}} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}} \|g\|_{\mathcal{FM}}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.8(vi) temos que $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$, e usando a desigualdade de Young para medidas, segue por que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{FM}} &= \|\widehat{fg}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\widehat{f} * \widehat{g}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} \|\widehat{g}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{FM}} \|g\|_{\mathcal{FM}}, \end{aligned}$$

que nos fornece a estimativa desejada. □

A seguir, vamos relembrar alguns fatos sobre o semigrupo do calor $e^{t\Delta}$ em $\mathcal{FM}$ e $\mathcal{FM}_0$. Para $f \in \mathcal{FM}$, temos que

$$\begin{aligned} e^{t\Delta} f &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t|\xi|^2} (\widehat{f}) \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f} [e^{-t|\xi|^2}] \right), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Similarmente, temos também que

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} e^{t\Delta} f &= \mathcal{F}^{-1} \left(i\xi_j e^{-t|\xi|^2} (\widehat{f}) \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f} [i\xi_j e^{-t|\xi|^2}] \right), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Lema 2.5. (i) *A família $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo limitado em $\mathcal{FM}$ e $\mathcal{FM}_0$. Além disso,*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{FM}} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}} \quad \text{para } f \in \mathcal{FM}, \quad t \geq 0.$$

(ii) *O semigrupo $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico em $\mathcal{FM}$ e $\mathcal{FM}_0$. Além disso, $\partial_{x_i} e^{t\Delta} f \in \mathcal{FM}_0$ e*

$$\|\partial_{x_i} e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{FM}} \leq (2te)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{FM}},$$

para $f \in \mathcal{FM}$, $t > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. (i) Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}f\|_{\mathcal{FM}} &= \|(e^{t\Delta}f)^\wedge\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|e^{-t|\xi|^2}\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{FM}},\end{aligned}$$

como queríamos. Agora, para mostrarmos que $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{FM}$, vamos provar primeiro sua continuidade em $t = 0^+$ e, posteriormente, para $t > 0$ seguirá como consequência. Assim, dado $f \in \mathcal{FM}$, temos

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}f - f\|_{\mathcal{FM}} &= \|(e^{t\Delta}f - f)^\wedge\|_{\mathcal{M}} \\ &= \left\| \left(e^{-t|\xi|^2} - 1 \right) \widehat{f} \right\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-t|\xi|^2} - 1 \right| d|\widehat{f}|.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Além disso, $\left| e^{-t|\xi|^2} - 1 \right| \leq 2 \in L^1(d|\widehat{f}|)$. Posto isso, sabemos que

$$\left| e^{-t|\xi|^2} - 1 \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-t|\xi|^2} - 1 \right| d|\widehat{f}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot d|\widehat{f}| = 0.\tag{2.21}$$

Consequentemente, de (2.20) e (2.21), segue que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|e^{t\Delta}f - f\|_{\mathcal{FM}} \leq 0.$$

Assim, como a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{FM}}$ é não-negativa, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|e^{t\Delta}f - f\|_{\mathcal{FM}} = 0.$$

Por outro lado, considere $t_0 > 0$ tal que $t > t_0$. Logo,

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}f - e^{t_0\Delta}f\|_{\mathcal{FM}} &= \|e^{t_0\Delta}(e^{(t-t_0)\Delta}f - f)\|_{\mathcal{FM}} \\ &\leq \|(e^{(t-t_0)\Delta}f - f)\|_{\mathcal{FM}}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Assim, tomando $t \rightarrow t_0$ em (2.22), tem-se que $(t - t_0) \rightarrow 0$, daí, recaímos no caso anterior. De forma similar, se $t < t_0$, então

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}f - e^{t_0\Delta}f\|_{\mathcal{FM}} &= \|e^{t\Delta}(f - e^{(t_0-t)\Delta}f)\|_{\mathcal{FM}} \\ &\leq \|(f - e^{(t_0-t)\Delta}f)\|_{\mathcal{FM}} \\ &= \|(e^{(t_0-t)\Delta}f - f)\|_{\mathcal{FM}}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Tomando $t \rightarrow t_0$ em (2.23), o resultado segue do primeiro caso.

(ii) Por outro lado, veja que para $t > 0$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
 \|\partial_{x_i} e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{FM}} &= \|(\partial_{x_i} e^{t\Delta} f)^\wedge\|_{\mathcal{M}} \\
 &= \left\| \left(i\xi_j e^{-t|\xi|^2} \right) \widehat{f} \right\|_{\mathcal{M}} \\
 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi_j| e^{-t|\xi|^2} \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} \\
 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi| e^{-t|\xi|^2} \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} \\
 &= t^{-1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |t^{1/2} \xi| e^{-|t^{1/2} \xi|^2} \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}}.
 \end{aligned}$$

Considerando agora a mudança de variável $s = |t^{1/2} \xi|$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\partial_{x_i} e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{FM}} &\leq t^{-1/2} \left(\sup_{s \geq 0} (s e^{-s^2}) \right) \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} \\
 &= t^{-1/2} \left(\sup_{s \geq 0} (s e^{-s^2}) \right) \|f\|_{\mathcal{FM}}.
 \end{aligned}$$

Agora, seja $g(s) = s e^{-s^2}$, logo $g'(s) = e^{-s^2} (1 - 2s^2)$. Daí, vê-se que g possui um único ponto crítico, a saber, $s = 2^{-1/2}$. Avaliando g em $s = 2^{-1/2}$, chegamos a

$$g(2^{-1/2}) = (2e)^{-1/2},$$

de onde segue que $\sup_{s \geq 0} s e^{-s^2} = (2e)^{-1/2}$. Assim, obtemos a estimativa

$$\|\partial_{x_i} e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{FM}} \leq (2te)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{FM}},$$

para $f \in \mathcal{FM}$, $t > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $\partial_{x_i} e^{t\Delta} f \in \mathcal{FM}_0$.

□

No que segue, conforme Observação 2.5, estabelecemos uma versão vetorial do Lema 2.3. Para isso, considere $f = (f_1, f_2, \dots, f_d)$, $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots, \widehat{f}_d)$ e $\sigma = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$ uma função matricial de valores complexos de ordem $d \times d$.

Lema 2.6. *Assuma que $\sigma = (\sigma_{ij}) \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é limitado em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então,*

$$(\Sigma f)_j = \sum_{k=1}^d \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}_k [\sigma_{jk}]) \quad (2.24)$$

é um operador limitado em $\mathcal{FM}_0$ com a estimativa

$$\|\Sigma f\|_{\mathcal{FM}^d} \leq \|\sigma\|_\infty \|f\|_{\mathcal{FM}^d} \quad (2.25)$$

para $f \in \mathcal{FM}_0$. Suponha, além disso, que σ é contínua na origem, então σ é um operador limitado em $\mathcal{FM}$ satisfazendo (2.25) para toda $f \in \mathcal{FM}$.

Demonstração. Observe que é suficiente mostrarmos a estimativa no espaço de fase. Posto isso, note que

$$\sum_{k=1}^d \widehat{f}_k[\sigma_{jk}] = |\widehat{f}| \left[\sum_{k=1}^d h_k \sigma_{jk} \right],$$

onde h_k é a derivada Radon-Nikodym de $\widehat{f}_k$ com respeito a $|\widehat{f}|$. Desde que $|h|(\xi) = 1$, $|\widehat{f}|$ -quase sempre em ξ , por definição de σ , temos

$$\left| \sum_{k=1}^d h_k(\xi) \sigma_{jk}(\xi) \right| \leq |\sigma(\xi)| |h(\xi)| = |\sigma(\xi)|,$$

para $h = (h_1, \dots, h_d)$. Por fim, obtemos (2.25) usando a norma do supremo de $|\sigma|$.

□

O Lema 2.6 fornece uma consequência mais forte para $\mathbb{P}$ ou $e^{t\mathbb{S}}$ do que o que segue do Lema 2.2. Mais precisamente, temos o lema que segue.

Lema 2.7. (i) *Seja $\mathbb{P}$ como definido na Seção 1.4 (veja p. 27). Então, $\mathbb{P}$ é limitado de $\mathcal{FM}_0^d$ em $\mathcal{FM}_0^d$. Além disso,*

$$\|\mathbb{P}f\|_{\mathcal{FM}^d} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}^d} \quad \text{para toda } f \in \mathcal{FM}_0^d.$$

(ii) *Considere o operador $\mathbb{S} = \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$. Então, $\mathbb{S} : \mathcal{FM}_0^3 \rightarrow \mathcal{FM}_0^3$ é limitado. Além disso, $e^{t\mathbb{S}}$ também é limitado e vale a estimativa*

$$\|e^{t\mathbb{S}}f\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \|f\|_{\mathcal{FM}^3}, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{FM}_0^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{onde } e^{t\mathbb{S}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\mathbb{S})^k.$$

Demonstração. (i) Temos que

$$\sigma(\mathbb{P}) = \mathbb{I} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2},$$

é uma projeção ortogonal de $\mathbb{C}^d$ sobre si mesmo. Assim, a norma do operador é dada por $\|\sigma\|_{\infty} = 1$. A partir de (2.25) segue a estimativa em (i). A propriedade $\mathbb{P}f \in \mathcal{FM}_0^d$ para $f \in \mathcal{FM}_0^d$ segue diretamente da definição de $\mathcal{FM}_0^d$ e da expressão de $\sigma(\mathbb{P})$.

(ii) Desde que $\sigma(\mathbb{S}) = \sigma(\mathbb{P})\mathbb{J}\sigma(\mathbb{P})$ é anti-simétrico e

$$e^{\sigma(\mathbb{S})t} = \cos\left(\frac{\xi_3 t}{|\xi|}\right) \mathbb{I} + \sin\left(\frac{\xi_3 t}{|\xi|}\right) \mathcal{R}_{\xi}, \quad \text{onde } \mathcal{R}_{\xi} = \frac{1}{|\xi|} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$e^{\sigma(\mathbb{S})t}$ é uma matriz unitária, e então $|e^{\sigma(\mathbb{S})t}| = 1$ como uma matriz. Assim (2.25) produz a estimativa desejada para $e^{t\mathbb{S}}$. A limitação de $\mathbb{S}$ segue da limitação de seu símbolo em relação a ξ . Em vista da expressão de $\sigma(\mathbb{S})$, é claro que sua imagem está em $\mathcal{FM}_0^3$, quando $f \in \mathcal{FM}_0^3$.

□

2.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção, introduzimos conceitos básicos para compreensão do teorema do ponto fixo de Banach, o qual é também conhecido como teorema da contração. Ele estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de um ponto fixo, ponto este que é mapeado em si mesmo. O teorema também fornece um processo iterativo pelo qual podemos obter aproximações para o ponto fixo. O conteúdo desta seção pode ser encontrado, por exemplo, em Kreyszig [39, Capítulo 5], Khamsi e Kirk [36, Capítulo 3] ou, até mesmo, na dissertação do F. L. Azevedo [7].

Definição 2.2. (*Ponto fixo*) Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ com $X \neq \emptyset$, é um ponto $x \in X$ que é aplicado em si mesmo por T , isto é,

$$T(x) = x,$$

a imagem $T(x)$ coincide com x .

Definição 2.3. (*Aplicação Lipschitz*) Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é dita lipschitziana se existe um número real positivo $\alpha \geq 0$ tal que para todo $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y). \quad (2.26)$$

O número α em (2.26) é dito constante de Lipschitz de T .

Definição 2.4. (*Contração*) Uma aplicação lipschitziana $T : X \rightarrow X$ é chamada contração se $\alpha < 1$ em (2.26).

Observação 2.6. Geometricamente, isso significa que qualquer ponto x e y tem imagens que estão mais próximos do que os pontos x e y ; mais precisamente, é válida a proporção

$$\frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)} < 1.$$

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada em Kreyszig [39, Teorema 5.1-2]

Proposição 2.2. (*Teorema do ponto fixo de Banach*) Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico completo não-vazio e seja $T : X \rightarrow X$ uma contração em X . Então, T admite um único ponto fixo.

Demonstração. Para mostrarmos que a aplicação T admite ponto fixo, vamos construir uma sequência $(x_n)_n$ em X e mostrar que ela é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, $(x_n)_n$ será convergente. Agora, digamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, então provaremos que esse limite é um ponto fixo de T e que é único.

Inicialmente escolhemos um ponto $x_0 \in X$ e definimos uma sequência iterativa $(x_n)_n$ por

$$\begin{aligned} x_0 &\in X \\ x_1 &= Tx_0, \\ x_2 &= Tx_1 = T^2x_0, \\ &\vdots \\ x_n &= Tx_{n-1} = \cdots = T^n x_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.27}$$

Claramente, vemos que $(x_n)_n$ é uma sequência de imagens de x_0 sob repetidas aplicações de T . Mostremos que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Inicialmente, por (2.26) e (2.27), obtemos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0), \end{aligned} \tag{2.28}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, para $n > m$, aplicando a desigualdade triangular e a fórmula para a soma de uma progressão geométrica em (2.28), temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Desde que $0 < \alpha < 1$, então $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente, para $n > m$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \tag{2.29}$$

Além disso, note que se $d(x_0, x_1) = 0$ então x_0 é ponto fixo de T e temos a existência do ponto fixo. Vejamos o caso em que $d(x_0, x_1) \neq 0$. Como $0 < \alpha < 1$, então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon, \quad \text{para todo } m \geq m_0. \quad (2.30)$$

Por (2.29) e (2.30), para $n > m \geq m_0$, temos

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Portanto, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy e, como X é completo,

$$x_n \rightarrow x \quad \text{para algum } x \in X.$$

Posto isso, vejamos que x é ponto fixo da aplicação T . Fazendo uso da desigualdade triangular e (2.26), para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x). \end{aligned}$$

Como $x_m \rightarrow x$, dado $\delta > 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$d(x, x_m) + \alpha d(x_m, x) < \delta, \quad \text{para todo } m \geq m_1.$$

Logo, $d(x, Tx) < \delta$, para todo $\delta > 0$. Assim, $d(x, Tx) = 0$ e consequentemente $Tx = x$. Isto mostra que x é um ponto fixo de T .

Para mostrar a unicidade do ponto fixo, suponhamos que exista $\tilde{x} \in X$ tal que $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Com isso, obtemos por (2.26) que

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x}),$$

o que implica em $d(x, \tilde{x}) = 0$, desde que $\alpha < 1$. Então, $x = \tilde{x}$, e a prova da proposição está completa. □

Observação 2.7. Além da existência de um único ponto fixo $x = T(x)$, tem-se também que para cada $y \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y) = x.$$

Além disso,

$$d(T^n(y), x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(y, T(y)).$$

Os resultados da Observação 2.7 podem ser encontrados em Khamsi e Kirk [36, Teorema 3.1].

2.3 Teorema de existência e unicidade local de soluções brandas

Inicialmente, note que o sistema (1.20) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \partial_t u = (\Delta - \Omega \mathbb{S}) u - \mathbb{P}((u \cdot \nabla)u) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.31)$$

Com isso, conseguimos a definição que segue, via Pazy [43, p. 106].

Definição 2.5. (*Solução branda*) Seja $0 < T \leq \infty$. Considere $X \subset \mathcal{S}'$ um espaço de Banach. Dizemos que $u \in C([0, T] : X)$ é uma solução branda do problema de valor inicial (2.31), se u satisfaz a seguinte equação integral

$$u(t) = \mathcal{T}(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{T}(t-s)\mathbb{P}((u \cdot \nabla)u)(s)ds, \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{T}(t) = e^{t(\Delta - \Omega \mathbb{S})}$ é o semigrupo associado à parte linear do sistema (2.31), $\nabla \cdot u = 0$ e $0 \leq t < T$.

Observação 2.8. Ao longo desta dissertação estamos interessados em encontrar soluções brandas para o sistema (1). Quando $T = \infty$, consideramos $[0, \infty)$ em vez de $[0, \infty]$.

Teorema 2.1. Assuma que $u_0 \in \mathcal{FM}_0$ com $\operatorname{div} u_0 = 0$. Então, existe

$$T_0 \geq c/\|u_0\|_{\mathcal{FM}}^2 > 0$$

independente do parâmetro de Coriolis Ω , e uma única solução branda

$$u = u(t) \in C([0, T_0]; \mathcal{FM}_0)$$

de (1), onde $c > 0$ é uma dada constante.

Demonstração. Em vista da Definição 2.5, consideramos a equação integral

$$u(t) = e^{t\Delta} e^{-t\Omega \mathbb{S}} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega \mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot (u \otimes u))(s)ds, \quad (2.33)$$

onde $e^{t\Delta}$ é o semigrupo do calor, $\mathbb{S} = \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$, $t \geq 0$ e

$$\nabla \cdot (u \otimes u) = (u \cdot \nabla)u,$$

desde que sempre trabalhamos com campos vetoriais livres de divergência, isto é, $\nabla \cdot u = 0$. De fato, dados u e w campos vetoriais, tais que $\nabla \cdot u = 0 = \nabla \cdot w$, temos que

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (u \otimes w) &= (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \cdot \begin{bmatrix} u_1 w_1 & u_1 w_2 & u_1 w_3 \\ u_2 w_1 & u_2 w_2 & u_2 w_3 \\ u_3 w_1 & u_3 w_2 & u_3 w_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1}(u_1 w_1) + \partial_{x_2}(u_2 w_1) + \partial_{x_3}(u_3 w_1) \\ \partial_{x_1}(u_1 w_2) + \partial_{x_2}(u_2 w_2) + \partial_{x_3}(u_3 w_2) \\ \partial_{x_1}(u_1 w_3) + \partial_{x_2}(u_2 w_3) + \partial_{x_3}(u_3 w_3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1} u_1 w_1 + u_1 \partial_{x_1} w_1 + \partial_{x_2} u_2 w_1 + u_2 \partial_{x_2} w_1 + \partial_{x_3} u_3 w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1 \\ \partial_{x_1} u_1 w_2 + u_1 \partial_{x_1} w_2 + \partial_{x_2} u_2 w_2 + u_2 \partial_{x_2} w_2 + \partial_{x_3} u_3 w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2 \\ \partial_{x_1} u_1 w_3 + u_1 \partial_{x_1} w_3 + \partial_{x_2} u_2 w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + \partial_{x_3} u_3 w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3) w_1 + u_1 \partial_{x_1} w_1 + u_2 \partial_{x_2} w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1 \\ (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3) w_2 + u_1 \partial_{x_1} w_2 + u_2 \partial_{x_2} w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2 \\ (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3) w_3 + u_1 \partial_{x_1} w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como $\nabla \cdot u = 0$ temos que

$$(\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3) = 0,$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (u \otimes w) &= \begin{bmatrix} u_1 \partial_{x_1} w_1 + u_2 \partial_{x_2} w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1 \\ u_1 \partial_{x_1} w_2 + u_2 \partial_{x_2} w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2 \\ u_1 \partial_{x_1} w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + u_3 \partial_{x_3}) w_1 \\ (u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + u_3 \partial_{x_3}) w_2 \\ (u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + u_3 \partial_{x_3}) w_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (u \cdot \nabla) w_1 \\ (u \cdot \nabla) w_2 \\ (u \cdot \nabla) w_3 \end{bmatrix} = (u \cdot \nabla) w,
 \end{aligned}$$

como queríamos. Analogamente, se verifica que $\nabla \cdot (w \otimes u) = (w \cdot \nabla) u$.

Agora, com o objetivo de deixar as contas mais claras, denotamos o tensor $u \otimes u$ como sendo $\mathbf{U}$, com isso

$$u \otimes u = \mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = (u_i u_j)_{1 \leq i, j \leq 3}.$$

Com isso, $\nabla \cdot \mathbf{U} := \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \mathbf{U}_{ij}$. Devemos ressaltar aqui que existem duas estimativas principais: *estimativa do termo linear e do termo não-linear*.

(i) *Estimativa do termo linear*: Pelo Lema 2.5 (i) e 2.7 (ii), temos

$$\begin{aligned}
 \|e^{t\Delta} e^{-t\Omega\mathbb{S}} u_0\|_{\mathcal{FM}^3} &\leq \|e^{-t\Omega\mathbb{S}} u_0\|_{\mathcal{FM}^3} \\
 &\leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}.
 \end{aligned}$$

Com isso,

$$\|e^{t\Delta}e^{-t\Omega\mathbb{S}}u_0\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}. \quad (2.34)$$

(ii) *Estimativa do termo não-linear*: Desde que temos pelo Lema 2.5 (ii)

$$\nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U} \in \mathcal{FM}_0^3,$$

para qualquer $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{FM}^{3 \times 3}$, aplicando o Lema 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}e^{-t\Omega\mathbb{S}}\mathbb{P}\nabla \cdot \mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} &\leq \|e^{t\Omega\mathbb{S}}\mathbb{P}\nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= \|e^{t\Omega\mathbb{S}}\|_{\mathcal{FM}^3} \|\mathbb{P}\|_{\mathcal{FM}^3} \|\nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &\leq 1 \cdot 1 \cdot \|\nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= \|\nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e^{t\Delta}\mathbf{U} &= \left(\sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_{i1}, \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_{i2}, \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_{i3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta} (\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \mathbf{U}_{i3}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_i, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{U}_i = (\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \mathbf{U}_{i3})$ para todo $\mathbf{U} \in \mathcal{FM}^{3 \times 3}$. Com isso,

$$\|e^{t\Delta}e^{-t\Omega\mathbb{S}}\mathbb{P}\nabla \cdot \mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \left\| \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_i \right\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} e^{t\Delta}\mathbf{U}_i\|_{\mathcal{FM}^3}.$$

Mais uma vez, tendo em vista o Lema 2.5 (ii), obtemos

$$\|e^{t\Delta}e^{-t\Omega\mathbb{S}}\mathbb{P}\nabla \cdot \mathbf{U}\|_{\mathcal{FM}^3} \leq (2te)^{-1/2} \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{U}_i\|_{\mathcal{FM}^3}, \quad (2.35)$$

com $\mathbf{U}_i = (\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \mathbf{U}_{i3})$ para todo $\mathbf{U} \in \mathcal{FM}^{3 \times 3}$.

A priori, para $T > 0$, defina

$$\|u\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} := \sup_{0 < s < T} \|u(\cdot, s)\|_{\mathcal{FM}^3}. \quad (2.36)$$

Considere também

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{t\Delta}e^{-t\Omega\mathbb{S}}u_0 \\ N(u, w)(t) &= - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}}\mathbb{P}(\nabla \cdot (u \otimes w))(s)ds. \end{aligned}$$

Posto isso, vejamos então estimativas para $\|u_1(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}$ e, em particular, para $\|N(u, u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}$. Segue de (2.34) que

$$\|u_1(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}. \quad (2.37)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|N(u, u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} &= \sup_{0 < s < T} \|N(u, u)(t)\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= \sup_{0 < s < T} \left\| - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot \mathbf{U})(s) ds \right\|_{\mathcal{FM}^3}. \end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} \|N(u, u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} &\leq \sup_{0 < s < T} \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot \mathbf{U})(s)\|_{\mathcal{FM}^3} ds \\ &\leq (2e)^{-1/2} \sup_{0 < s < T} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{U}_i\|_{\mathcal{FM}^3}(s) ds \quad (i \geq 1). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora, vamos estimar o termo não linear

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{U}_i\|_{\mathcal{FM}^3} &= \sum_{i=1}^3 \|(\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \mathbf{U}_{i3})\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{U}_i\|_{\mathcal{FM}^3} = \sum_{i=1}^3 \|(u_i u_1, u_i u_2, u_i u_3)\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= \sum_{i=1}^3 \|u_i u\|_{\mathcal{FM}^3}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4 e a equivalência de normas em (2.4) (veja p. 41), observe que

$$\|u_i u\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \sqrt{3} \|u_i u\|_{\mathcal{FM}^3}^* \leq \sqrt{3} \|u_i u\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \sqrt{3} \|u_i\|_{\mathcal{FM}} \|u\|_{\mathcal{FM}^3}, \quad (2.39)$$

para $u \in \mathcal{FM}^3$ e $u_i \in \mathcal{FM}$. Por outro lado, lembrando que

$$\|u\|_{\mathcal{FM}^3} \leq \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{\mathcal{FM}} \leq \sqrt{3} \|u\|_{\mathcal{FM}^3}^*,$$

temos

$$\sqrt{3} \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{\mathcal{FM}} \leq 3 \|u\|_{\mathcal{FM}^3}^*. \quad (2.40)$$

Assim, usando novamente a equivalência de normas em (2.4) e as desigualdades em (2.39) e (2.40), vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \|u_i u\|_{\mathcal{FM}^3} &\leq \sqrt{3} \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{\mathcal{FM}} \|u\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &\leq 3 \|u\|_{\mathcal{FM}^3}^* \|u\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &\leq 3 \|u\|_{\mathcal{FM}^3} \|u\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &= 3 \|u\|_{\mathcal{FM}^3}^2. \end{aligned}$$

Inserindo esta estimativa em (2.38), chegamos a

$$\|N(u, u)(t)\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} \leq (2e)^{-1/2} \left(3 \sup_{0 < s < t} \|u(\cdot, s)\|_{\mathcal{FM}^3}^2 \right) \sup_{0 < s < T} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds. \quad (2.41)$$

Como,

$$\int_0^t (t-s)^{-1/2} ds = 2\sqrt{t},$$

podemos ver que

$$\sup_{0 < s < T} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds = 2T^{1/2}.$$

Substituindo esta igualdade em (2.41), obtemos

$$\begin{aligned} \|N(u, u)(t)\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} &\leq (2e)^{-1/2} \left(3 \sup_{0 < s < t} \|u\|_{\mathcal{FM}^3}^2 \right) T^{1/2} \\ &= 3(2/e)^{1/2} T^{1/2} \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)}^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Agora, considere o espaço X definido por

$$X := \{u \in C([0, T]; \mathcal{FM}_0) : \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} \leq 2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3} \text{ com } \operatorname{div} u = 0\},$$

com a métrica $\|u - v\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)}$. Além disso, seja $\Psi(u)(t) := u_1(t) + N(u, u)(t)$, isto é,

$$\Psi(u)(t) := e^{t\Delta} e^{-t\Omega\mathbb{S}} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot \mathbf{U})(s) ds.$$

Para aplicar um argumento de ponto fixo, vejamos que Ψ mapeia X em si mesmo, e que, além disso, é uma contração.

Então, para $u \in X$ temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)(t)\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} &= \sup_{0 < s < T} \left\| e^{t\Delta} e^{-t\Omega\mathbb{S}} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot \mathbf{U})(s) ds \right\|_{\mathcal{FM}^3} \\ &\leq \sup_{0 < s < T} \|u_1(t)\|_{\mathcal{FM}^3} + \sup_{0 < s < T} \|N(u, u)(t)\|_{\mathcal{FM}^3}. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades (2.37) e (2.42), segue que

$$\|\Psi(u)(t)\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3} + 3(2/e)^{1/2} T^{1/2} \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)}^2.$$

Além disso, $u \in X$, o que nos garante $\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} \leq 2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}$, com isso

$$\|\Psi(u)(t)\|_{C([0, T]; \mathcal{FM}_0)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3} + 3(2/e)^{1/2} T^{1/2} 2^2 \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}^2.$$

Todavia, a fim de que $\Psi(u)(t) \in X$, vejamos as condições em $T > 0$ para que isso ocorra.

De fato, precisamos que

$$3(2/e)^{1/2} T^{1/2} 2^2 \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}^2 \leq \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}. \quad (2.43)$$

Dividindo os dois lados de (2.43) por $3(2/e)^{1/2}2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}^2$, ficamos com

$$T^{1/2} \leq \frac{1}{3(2/e)^{1/2}2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}} = 1/(12(2/e)^{1/2}\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}).$$

Com isso, desde que $T \leq \bar{T}_0$, temos que $\Psi(u)(t) \in X$, para todo $u \in X$, onde

$$\bar{T}_0 := \frac{1}{(3(2/e)^{1/2}2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3})^2}.$$

Por outro lado, para $u, v \in X$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} &= \|N(u, u)(t) - N(v, v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \\ &= \|N(u, u)(t) - N(u, v) + N(u, v) - N(v, v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \\ &= \|N(u - v, u)(t) + N(v, u - v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \\ &\leq \|N(u - v, u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} + \|N(v, u - v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}. \end{aligned}$$

Considere $\|\bar{\Psi}(u, v)\| := \|\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}$, com isso, de (2.42) segue que

$$\begin{aligned} \|\bar{\Psi}(u, v)\| &\leq \|N(u - v, u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} + \|N(v, u - v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \\ &\leq 3(2/e)^{1/2}T^{1/2} \left[(\|u\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} + \|v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}) \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \right] \\ &\leq 3(2/e)^{1/2}T^{1/2} (2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}) \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}. \end{aligned}$$

Para que $\Psi(u)(t)$ seja uma contração, precisamos ter

$$3(2/e)^{1/2}T^{1/2} (2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}) < 1.$$

Ou seja, basta tomar $T < \bar{T}_0$. Então, escolhemos $T = \bar{T}_0 \cdot 1/4$ para obter

$$\begin{aligned} \|\bar{\Psi}(u, v)\| &\leq 3(2/e)^{1/2}T^{1/2} (2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}) \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \\ &= 3(2/e)^{1/2} (2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}) \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \cdot \left(\frac{1}{(3(2/e)^{1/2}2^2\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3})^2} \cdot \frac{1}{2^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}. \end{aligned}$$

Portanto, para $T \leq \bar{T}_0/4$, segue que

$$\|\Psi(u)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \leq \frac{3}{2} \|u_0\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}, \quad (2.44)$$

$$\|\Psi(u)(t) - \Psi(v)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{FM}_0)}. \quad (2.45)$$

Por (2.44) e (2.45), para $T \leq \bar{T}_0/4$, temos que a aplicação $\Psi : X \rightarrow X$ é uma contração. Posto isso, segue da Proposição 2.2 (veja p. 50) que existe um único $u \in X$ tal que $\Psi(u) = u$. Assim,

$$u(t) = e^{t\Delta} e^{-t\Omega\mathbb{S}} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} e^{-(t-s)\Omega\mathbb{S}} \mathbb{P}(\nabla \cdot \mathbf{U})(s) ds \in C([0, T]; \mathcal{FM}_0) \quad (2.46)$$

é a única solução de (1).

□

Observação 2.9. A partir da prova acima, o tempo de existência da solução u , denotado como T_0 no Teorema 2.1, é estimado por baixo como segue:

$$\begin{aligned}
 T_0 &\geq \frac{\bar{T}_0}{2^2} = \frac{1}{(2^2 \cdot 3(2/e)^{1/2} \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3})^2} \cdot \frac{1}{2^2} \\
 &= \frac{1}{2^6 \cdot 3^2 [(2/e)^{1/2}]^2 \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}^2} \\
 &= \frac{1}{2^6 \cdot 3^2 \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}} \frac{1}{2/e} \\
 &= \frac{e}{2^7 \cdot 3^2 \|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}} \\
 &= \frac{e}{2^7 \cdot 3^2} \frac{1}{\|u_0\|_{\mathcal{FM}^3}}.
 \end{aligned}$$

Assim, no Teorema 2.1 (veja p. 53) a constante c pode ser tomada como

$$c = \frac{e}{2^7 \cdot 3^2}.$$

3 Existência de soluções para tempos grandes e dados quase periódicos

Neste capítulo enunciamos os principais resultados estudados nesta dissertação, os quais tratam de existência de soluções para o sistema (1) com dados quase periódicos. Além disso, comentamos sobre as principais ideias e métodos para provar estes resultados.

3.1 Classe de dados iniciais quase periódicos

O método utilizado neste trabalho segue ideias de Babin, Mahalov e Nicolaenko (BMN) [9] e [10], no entanto, precisa-se introduzir uma classe de espaços funcionais que seja adequada para o contexto quase periódico. Uma aplicação direta da desigualdade de energia é difícil (se não impossível) no caso de dados e soluções quase periódicos. A fim de superar essa dificuldade, utiliza-se a norma ℓ^1 em um conjunto de frequências com soma fechada.

Definição 3.1. (*Conjunto de Frequências*) Dizemos que $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de frequências com soma fechada em $\mathbb{R}^3$ se Λ é um conjunto enumerável e satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ tem-se que $\alpha + \beta \in \Lambda$;
- (ii) Para todo $\alpha \in \Lambda$ tem-se que $-\alpha \in \Lambda$, isto é, $-\Lambda = \Lambda$.

A segunda condição é necessária, já que sempre lidamos com funções quase periódicas com valores reais. Além disso, definimos um subconjunto de Λ , denotado por $\bar{\Lambda}$, como segue:

$$\bar{\Lambda} := \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda : \lambda_3 = 0\} \quad \text{e} \quad -\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}.$$

Nesse caso, $\bar{\Lambda}$ pode ser visto como a “projeção” de Λ no plano.

Observação 3.1. Tanto Λ quanto $\bar{\Lambda}$ serão muito utilizados no decorrer dos próximos capítulos, bem como neste. Inclusive, a condição $-\Lambda = \Lambda$ é de suma importância para as demonstrações.

No que segue, podemos ver dois exemplos de conjuntos com a característica de soma fechada.

Exemplo 3.1.

$$\mathbf{A} = \{e_1 m_1 + \sqrt{2} e_2 m_2 + e_2 m_3 + e_3 m_4 : m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbf{B} = \{e_1 m_1 + (e_1 + e_2 \sqrt{2}) m_2 + (e_2 + e_3 \sqrt{3}) m_3 : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são conjuntos enumeráveis de frequência com soma fechada, onde $\{e_j\}_{j=1}^3$ denota a base canônica em $\mathbb{R}^3$.

Agora estamos prontos para definir a classe de dados iniciais que consideraremos para (1).

Definição 3.2. (*Uma classe de funções quase periódicas*) Seja $\mathcal{BUC}$ o espaço de todas as funções limitadas e uniformemente contínuas equipado com a norma L^∞ . Para o conjunto enumerável de frequências com soma fechada $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, considere o espaço

$$X^\Lambda(\mathbb{R}^3) := \left\{ u = \sum_{n \in \Lambda} c_n e^{in \cdot x} \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^3) : c_{-n} = c_n^* \text{ para } n \in \Lambda \text{ e } \|u\| := \sum_{n \in \Lambda} |c_n| < \infty \right\},$$

onde c_n^* é o conjugado do coeficiente c_n e $c := \{c_n\}_{n \in \Lambda}$.

Observação 3.2. A condição $c_{-n} = c_n^*$ garante que funções em X^Λ admitam valores reais.

Observação 3.3. Antes de prosseguirmos, vejamos algumas características do espaço X^Λ .

(i) Como mostrado no Apêndice A, $(X^\Lambda, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach;

(ii) Toda função $u \in C([0, T]; X^\Lambda)$ pode ser decomposta como

$$u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} c_n(t) e^{in \cdot x};$$

(iii) X^Λ é um subespaço fechado de $\mathcal{FM}$ (a pré-imagem de Fourier de $\mathcal{M}$), tendo em vista os resultados da Seção 2.1.2.

Agora, como $u \in X^\Lambda$, pela Observação 3.3(iii) tem-se que $u \in \mathcal{FM}$. Tendo em vista uma abordagem do sistema (1.20) em X^Λ , consideramos a projeção discreta de Helmholtz denotada aqui por $\mathbb{P}_n = \{\mathbb{P}_{n,ij}\}_{i,j=1,2,3}$ e definida da seguinte forma

$$\mathbb{P}_{n,ij} := \begin{cases} \delta_{ij} - \frac{n_i n_j}{|n|^2} & (1 \leq i, j \leq 3) \\ \delta_{ij} & (\text{caso contrário}) \end{cases},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, como colocado anteriormente. Assim, o sistema (1.20) (veja Seção 1.4, p. 32) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + \mathbb{P}_n((u \cdot \nabla)u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} c_n(t) e^{in \cdot x}$ e $\mathbb{P}_n$ é como descrito acima.

Devido a estrutura quase periódica de $u \in C([0, T]; X^\Lambda)$ e munidos do conjunto de frequência com soma fechada Λ , podemos reescrever o sistema (3.1) usando os coeficientes das funções quase periódicas, os quais são funções amplitude. Considerando

$$u(x, t) := \sum_{n \in \Lambda} a_n(t) e^{in \cdot x} \quad \text{e} \quad u_0(x) := \sum_{n \in \Lambda} a_{0,n} e^{in \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

temos que:

(i) Derivando a série formalmente em relação a t ,

$$\partial_t u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} \partial_t a_n(t) e^{in \cdot x} \quad \text{para} \quad t > 0. \quad (3.3)$$

(ii) Pela linearidade do produto vetorial, temos

$$\begin{aligned} \Omega e_3 \times u(x, t) &= \Omega e_3 \times \sum_{n \in \Lambda} a_n(t) e^{in \cdot x} \\ &= \Omega \sum_{n \in \Lambda} (e_3 \times a_n(t)) e^{in \cdot x} \\ &= \sum_{n \in \Lambda} \Omega (e_3 \times a_n(t)) e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Omega e_3 \times u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} \Omega (e_3 \times a_n(t)) e^{in \cdot x}. \quad (3.4)$$

(iii) Agora, dado que o operador laplaciano está definido para a variável espacial, isto é,

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial^2 / \partial x_j^2, \quad \text{temos}$$

$$-\Delta u(t) = -\Delta \sum_{n \in \Lambda} a_n(t) e^{in \cdot x} = -\sum_{n \in \Lambda} \Delta a_n(t) e^{in \cdot x} = -\sum_{n \in \Lambda} a_n(t) \Delta e^{in \cdot x}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta e^{in \cdot x} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 (e^{in \cdot x})}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (e^{in \cdot x})}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 (in_j) \frac{\partial (e^{in \cdot x})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 i^2 n_j^2 e^{in \cdot x} \\ &= -|n|^2 e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$-\Delta u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} |n|^2 a_n(t) e^{in \cdot x}. \quad (3.5)$$

(iv) Além disso, dado que $\nabla e^{im \cdot x} = im e^{im \cdot x}$ e que $[(u \cdot \nabla) u]_j(t) = (u \cdot \nabla u_j)(t)$, com $1 \leq j \leq 3$, temos que

$$\begin{aligned} u(t) \cdot \nabla u_j(t) &= \sum_{k \in \Lambda} a_k(t) e^{ik \cdot x} \cdot \left(\nabla \sum_{m \in \Lambda} a_m^j(t) e^{im \cdot x} \right) = \sum_{k \in \Lambda} a_k(t) e^{ik \cdot x} \cdot \sum_{m \in \Lambda} \nabla (a_m^j(t) e^{im \cdot x}) \\ &= \sum_{k \in \Lambda} a_k(t) e^{ik \cdot x} \cdot \sum_{m \in \Lambda} a_m^j(t) \nabla e^{im \cdot x} = \sum_{k \in \Lambda} a_k(t) e^{ik \cdot x} \cdot \sum_{m \in \Lambda} a_m^j(t) im e^{im \cdot x} \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} i(a_k(t) \cdot m) a_m^j(t) e^{i(k+m) \cdot x}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} (u(t) \cdot \nabla) u(t) &= \left(\sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} i(a_k \cdot m) a_m^1 e^{i(k+m) \cdot x}, \dots, \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} i(a_k \cdot m) a_m^3 e^{i(k+m) \cdot x} \right) \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} i((a_k \cdot m) a_m^1, (a_k \cdot m) a_m^2, (a_k \cdot m) a_m^3) e^{i(k+m) \cdot x}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $n = k + m$, chegamos a igualdade

$$(u(t) \cdot \nabla) u(t) = \sum_{n \in \Lambda} \sum_{n=k+m} i(a_k(t) \cdot m) a_m(t) e^{in \cdot x}. \quad (3.6)$$

Assim, usando as equações (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e a projeção $\mathbb{P}_n$, o sistema (1.20) pode ser escrito na seguinte forma

$$\sum_{n \in \Lambda} \partial_t a_n e^{in \cdot x} + \sum_{n \in \Lambda} \sum_{n=k+m} i \mathbb{P}_n ((a_k \cdot m) a_m) e^{in \cdot x} + \sum_{n \in \Lambda} \Omega(e_3 \times a_n) e^{in \cdot x} + \sum_{n \in \Lambda} |n|^2 a_n e^{in \cdot x} = 0. \quad (3.7)$$

Agora, agrupando os coeficientes de $e^{in \cdot x}$ e impondo a igualdade, obtemos

$$\partial_t a_n(t) + i \mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t) + \Omega e_3 \times a_n(t) + |n|^2 a_n(t) = 0. \quad (3.8)$$

Por outro lado, desde que $u(x, t) := \sum_{n \in \Lambda} a_n(t) e^{in \cdot x}$, a condição $\nabla \cdot u = 0$ nos fornece que $(n \cdot a_n(t)) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u(x, t) &= \nabla \cdot \sum_{n \in \Lambda} a_n(t) e^{in \cdot x} = \sum_{n \in \Lambda} (\nabla \cdot (a_n(t) e^{in \cdot x})) \\ &= \sum_{n \in \Lambda} (a_n^1(t) \partial_{x_1} e^{in \cdot x} + a_n^2(t) \partial_{x_2} e^{in \cdot x} + a_n^3(t) \partial_{x_3} e^{in \cdot x}) \\ &= \sum_{n \in \Lambda} (a_n^1(t) (in_1) e^{in \cdot x} + a_n^2(t) (in_2) e^{in \cdot x} + a_n^3(t) (in_3) e^{in \cdot x}) \\ &= \sum_{n \in \Lambda} (n_1 a_n^1(t) + n_2 a_n^2(t) + n_3 a_n^3(t)) i e^{in \cdot x} \\ &= \sum_{n \in \Lambda} (n \cdot a_n(t)) i e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Como $\nabla \cdot u = 0$ e $ie^{in \cdot x} \neq 0$, segue que $(n \cdot a_n(t)) = 0$. Assim, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \partial_t a_n(t) + |n|^2 a_n(t) + \Omega e_3 \times a_n(t) + i \mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t) = 0 \\ (n \cdot a_n(t)) = 0 \\ a_n(0) = a_{0,n} \end{cases}, \quad (3.9)$$

para $n, k, m \in \Lambda$. Note que a equação acima está bem definida, mesmo se $n = 0$.

Como visto no Capítulo 2, o Teorema 2.1 (veja p. 53), pode agora ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 3.1. *Assuma que $a(0) := \{a_n(0)\}_{n \in \Lambda} \in \ell^1(\Lambda)$ com $(a_n(0) \cdot n) = 0$ para $n \in \Lambda$ e $a_0(0) = 0$. Então, temos uma única solução*

$$a(t) := \{a_n(t)\}_{n \in \Lambda} \in C([0, T_L] : \ell^1(\Lambda)),$$

com $(a_n(t) \cdot n) = 0$ para $n \in \Lambda$ e $a_0(t) = 0$, satisfazendo

$$T_L \geq \frac{C}{\|a_0\|^2} \quad e \quad \sup_{0 < t < T_L} \|a(t)\| \leq 10\|a_0\|,$$

onde C é uma constante positiva independente de Ω .

Nosso propósito é fazer uso do Teorema 3.1 (*existência de soluções locais em dimensão 3*) para provar o principal resultado estudado nesta dissertação, o qual será detalhado mais a frente. No que segue, precisamos das duas condições básicas, onde a primeira é sobre o conjunto de frequências.

Observação 3.4. *Devemos ressaltar que esses tipos de restrições são técnicas, contudo, não sabemos se essas condições são removíveis. Isso significa que um resultado geral com funções quase periódicas ainda está em aberto.*

Condição A. Primeiro definimos o conjunto $\Lambda(\gamma)$, como sendo uma “perturbação” dos elementos de Λ na componente vertical. Seja,

$$\Lambda(\gamma) = \{(n_1, n_2, \gamma n_3) \in \mathbb{R}^3 : (n_1, n_2, n_3) \in \Lambda\} \quad (3.10)$$

para $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observação 3.5. *Para qualquer conjunto enumerável de frequências com soma fechada Λ , existe um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dependendo de Λ cujo complementar é um conjunto enumerável. No Capítulo 5, Seção 5.1, temos a definição completa do conjunto Γ . Assuma que $\gamma \in \Gamma$.*

Considere agora a seguinte definição, que pode ser encontrada em Giga et al. [25].

Definição 3.3. (*Média vertical*) Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dizemos que u admite média vertical se

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv \bar{u}(x_1, x_2)$$

existe quase sempre. O campo vetorial $\bar{u}(x_1, x_2)$ é chamado média vertical de $u(x_1, x_2, x_3)$.

Condição B. Assumimos a existência de soluções globais para as equações bi-dimensionais de Navier-Stokes. Isto é, o problema de valor inicial (1), em $\mathbb{R}^2$, admite globalmente uma única solução em $C([0, \infty) : (\ell^1(\bar{\Lambda}))^2)$ com média vertical do dado inicial em $(\ell^1(\bar{\Lambda}))^2$.

Note que a existência de soluções globais para a equação bi-dimensional de Navier-Stokes em $C([0, \infty) : (\ell^1(\bar{\Lambda}))^2)$ foi parcialmente resolvida por Giga *et al.* em [28], como podemos ver pela Proposição 3.1 abaixo.

Proposição 3.1. Seja $u_0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} a_m e^{im \cdot x} \in \mathcal{FM}_0(\mathbb{R}^2)$ com $a_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Então, a única solução branda global $u(x, t)$ para a equação (1), com dado inicial $u_0(x)$, pode ser expressa como

$$u(x, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_m(t) e^{im \cdot x}. \quad (3.11)$$

Além disso, a solução u está em $L_{loc}^\infty([0, \infty) : \mathcal{FM}_0(\mathbb{R}^2))$ se u_0 é real. Mais precisamente

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{\mathcal{FM}}(t) \leq C, \quad (3.12)$$

onde $C > 0$ depende apenas de $T > 0$ e $\|u_0\|_{\mathcal{FM}}$.

Agora enunciamos nosso principal resultado e, como colocado anteriormente, discorreremos um pouco sobre como vamos demonstrá-lo.

Teorema 3.2. Assuma as condições A e B. Sejam $a(0) = \{a_n(0)\}_{n \in \Lambda} \in \ell^1(\Lambda)$, com $(a_n(0) \cdot n) = 0$ para $n \in \Lambda$, e $a_0(0) = 0$. Então, para qualquer $T > 0$ existe $\Omega_0 > 0$ dependendo apenas de $a(0)$ e T tal que se $|\Omega| > \Omega_0$, existe uma solução branda $a(t)$ de (1) (isto é, de (3.9)), tal que

$$a(t) = \{a_n(t)\}_{n \in \Lambda} \in C([0, T] : \ell^1(\Lambda)),$$

com $a_0(t) = 0$ e $(a_n(t) \cdot n) = 0$ para todo $n \in \Lambda$.

3.2 Principais passos da demonstração do Teorema 3.2

Nesta seção descrevemos os argumentos que iremos utilizar para provar o Teorema 3.2. Primeiro, consideramos a versão linear de (1), que foi estudada originalmente por Poincaré. Relembre o operador $\mathbb{S} := \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$, onde $\mathbb{P}$ é a projeção de Helmholtz e $\mathbb{J}$ é matriz

3×3 anti-simétrica satisfazendo $e_3 \times u = \mathbb{J}u$ (veja (1.18)). Dizemos que o propagador de Poincaré $e^{-t\Omega\mathbb{S}}$ é definido como o grupo unitário associado com o problema linear

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \Omega e_3 \times \Phi = -\nabla P \\ \nabla \cdot \Phi = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi_0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_t \Phi + \Omega \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}\Phi = 0. \quad (3.14)$$

As soluções de (3.13) são da forma $\Phi(t) = e^{-t\Omega\mathbb{S}}\Phi(0)$ e são chamadas ondas de Poincaré. Como colocado, o sistema (3.13) dá origem a um grupo unitário de transformações $e^{-t\Omega\mathbb{S}}$ em um espaço de campos vetoriais livres de divergência com quadrados integráveis. Além disso, desde que o operador $\mathbb{S} := \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$ é limitado, as soluções para (3.14), com condição inicial $\Phi(0)$, podem ser expressadas como

$$\Phi(t) = e^{-t\Omega\mathbb{S}}\Phi(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-t\Omega\mathbb{S})^j}{j!} \Phi(0).$$

A equação (3.14), com a condição $\nabla \cdot \Phi = 0$, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \Omega \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}\Phi = 0 \\ \nabla \cdot \Phi = 0 \end{cases},$$

é considerado o problema de autovalor para as equações de Poincaré-Sobolev. O operador $\mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$ é anti simétrico com respeito ao produto interno em L^2 .

Se a função Φ é formalmente expressa como uma função quase periódica, isto é, $\Phi_0(x) = \sum_{n \in \Lambda} \phi_n e^{in \cdot x}$ com $\phi_0 = 0$, o propagador de Poincaré $e^{-t\Omega\mathbb{S}}$ pode ser escrito, no espaço de Fourier, como

$$e^{-t\Omega\mathbb{S}}\Phi(x) = \sum_{n \in \Lambda} e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \phi_n e^{in \cdot x},$$

$$e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \phi_n := \cos\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \phi_n - \text{sen}\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \mathcal{R}_n \phi_n,$$

onde

$$\mathcal{R}_n \phi_n = \frac{n}{|n|} \times \phi_n \quad \text{para } n \in \Lambda \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0 \phi_0 := 0.$$

Observação 3.6. Note que podemos caracterizar $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}}$ e $e_n^{t\Omega\mathbb{S}}$, como

$$e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} := \cos\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \mathbb{I} - \text{sen}\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \mathcal{R}_n \quad \text{e} \quad e_n^{t\Omega\mathbb{S}} := \cos\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \mathbb{I} + \text{sen}\left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|}\right) \mathcal{R}_n.$$

Observação 3.7. Seja $\phi(t) := \{\phi_n(t)\}_{n \in \Lambda}$. Temos a seguinte estimativa

$$(1/3)\|\phi(t)\| \leq \|\{e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \phi_n(t)\}_{n \in \Lambda}\| \leq 3\|\phi(t)\| \quad \text{para qualquer } t, \Omega \in \mathbb{R}.$$

Reescrevendo o Sistema (3.9)

Nossa ideia agora é “filtrar” soluções do sistema (3.9) usando o semigrupo auxiliar $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}}$ pelo método dos *limites oscilantes singulares rápidos*. Para tal, introduzimos a transformação, conhecida como transformação de Van Der Pol,

$$a_n(t) := e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t),$$

no sistema (3.9), para $n \in \Lambda$, onde $c_n(t)$ é a variável *slow enveloped* também conhecida como *variável de Poincaré*. Para mais detalhes sobre essa transformação e o método utilizado veja Mahalov *et al.* [41], inclusive para um melhor entendimento do método aqui utilizado.

Um cálculo direto nos diz que $\{c_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t c_n(t) + |n|^2 c_n(t) + B_n(c(t), c(t)) = 0 \\ (n \cdot c_n(t)) = 0 \\ c_n(0) = a_n(0) \end{cases}, \quad (3.15)$$

para $n \in \Lambda$, onde

$$B_n(c_1(t), c_2(t)) := e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k}(t) \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m}(t). \quad (3.16)$$

De fato, por definição temos

$$\begin{aligned} \partial_t a_n(t) &= \partial_t (e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t)) \\ &= \partial_t e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t) + e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \partial_t c_n(t). \end{aligned}$$

Então, $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \partial_t c_n(t) = \partial_t a_n(t) - \partial_t e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t)$. Além disso, $a_n(t)$ satisfaz (3.9) e $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}}$ satisfaz (3.14), logo

$$\begin{aligned} e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \partial_t c_n(t) &= -|n|^2 a_n(t) - \Omega e_3 \times a_n(t) - i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t) - (-\Omega \mathbb{S} e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t)) \\ &= -|n|^2 a_n(t) - i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t) + \Omega \mathbb{S} a_n(t) - \Omega e_3 \times a_n(t). \end{aligned}$$

Afirmção: $\Omega \mathbb{S} a_n(t) - \Omega e_3 \times a_n(t) = 0$.

De fato, desde que $\mathbb{S} := \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}$, segue

$$\Omega \mathbb{S} a_n(t) = \Omega \mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P} a_n(t). \quad (3.17)$$

Como $a_n(t)$ é um campo livre de divergência, temos $\mathbb{P}(a_n(t)) = a_n(t)$. Além disso, pela Observação 1.14(iv), sabemos que $\mathbb{P}\mathbb{J}(a_n(t)) = \mathbb{J}\mathbb{P}(a_n(t)) = \mathbb{J}(a_n(t))$, o que nos dá

$$\Omega \mathbb{S} a_n(t) = \Omega \mathbb{J} a_n(t) = \Omega e_3 \times a_n(t), \quad (3.18)$$

de onde segue a afirmação. Com isso

$$e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} \partial_t c_n(t) = -|n|^2 a_n(t) - i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t). \quad (3.19)$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação (3.19) por $e_n^{t\Omega\mathbb{S}}$, temos

$$\partial_t c_n(t) = -|n|^2 e_n^{t\Omega\mathbb{S}} a_n(t) - e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (a_k(t) \cdot m) a_m(t). \quad (3.20)$$

Todavia, substituindo os coeficientes $a_n(t)$ por $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}} c_n(t)$ e tendo em vista que

$$e_n^{t\Omega\mathbb{S}} a_n(t) = c_n(t),$$

concluimos que

$$\partial_t c_n(t) = -|n|^2 c_n(t) - e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_k(t) \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_m(t), \quad (3.21)$$

como queríamos.

De agora em diante, lidamos com os coeficientes $\{c_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ em vez dos coeficientes $\{a_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ das soluções quase periódicas das equações de Navier-Stokes-Coriolis (1), uma vez que, usando a Observação 3.7, a norma de um deles pode ser controlada pela norma do outro. O operador não-linear B_n em (3.15) pode ser decomposto em duas partes, a parte ressonante $B_n^0(\cdot, \cdot)$, que **não depende** de Ω , e a parte não-ressonante $B_n^{0+}(\Omega t, \cdot, \cdot)$, que **depende** de Ω . Com isso,

$$\begin{cases} \partial_t c_n(t) + |n|^2 c_n(t) + B_n^0(c(t), c(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) = 0 \\ (n \cdot c_n(t)) = 0 \\ c_n(0) = a_n(0) \end{cases}, \quad (3.22)$$

para $n \in \Lambda$. Esta decomposição foi feita em [9], todavia, dedicamos todo o Capítulo 4 para detalharmos a mesma. Além disso, precisamos de estimativas de ambas as partes, ressoante e não-ressonante na norma ℓ^1 , as quais são obtidas também no próximo capítulo. Agora, definimos a solução $b_n(t)$, para a equação abaixo, e o resto $r_n(t) := c_n(t) - b_n(t)$ como segue

$$\begin{cases} \partial_t b_n(t) + |n|^2 b_n(t) + B_n^0(b(t), b(t)) = 0 \\ (n \cdot b_n(t)) = 0 \\ b_n(0) = c_n(0) = a_n(0) \end{cases}, \quad (3.23)$$

para $n \in \Lambda$,

$$\begin{cases} \partial_t r_n(t) + |n|^2 r_n(t) + B_n^0(c(t), r(t)) + B_n^0(r(t), b(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) = 0 \\ (n \cdot r_n(t)) = 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

e $r_0(0) = 0$ para $n \in \Lambda$.

Para ver que tal decomposição é verdadeira, dado que $r_n(t) + b_n(t) = c_n(t)$, note que

$$\begin{aligned}\partial_t r_n(t) + \partial_t b_n(t) &= -[|n|^2 r_n + B_n^0(c, c - b) + B_n^0(c - b, b) + B_n^{0+}(\Omega t, c, c)] \\ &\quad - [|n|^2 b_n + B_n^0(b, b)] \\ &= -|n|^2 [r_n + b_n] - [B_n^0(c, c - b) + B_n^0(c - b, b) + B_n^0(b, b) + B_n^{0+}(\Omega t, c, c)] \\ &= -|n|^2 c_n - [B_n^0(c, c - b) + B_n^0(c - b, b) + B_n^0(b, b) + B_n^{0+}(\Omega t, c, c)]\end{aligned}$$

Contudo, pela bilinearidade do termo B_n , como mostraremos mais adiante, temos que

$$B_n^0(c, c - b) + B_n^0(c - b, b) = B_n^0(c, c) - B_n^0(c, b) + B_n^0(c, b) - B_n^0(b, b). \quad (3.25)$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\partial_t r_n(t) + \partial_t b_n(t) &= -|n|^2 c_n - [B_n^0(c(t), c(t)) - B_n^0(c(t), b(t)) + B_n^0(c(t), b(t)) - B_n^0(b(t), b(t)) \\ &\quad + B_n^0(b(t), b(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))] \\ &= -[|n|^2 c_n(t) + B_n^0(c(t), c(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))],\end{aligned}$$

ou seja, $\partial_t r_n(t) + \partial_t b_n(t) = \partial_t c_n(t)$, como queríamos. Além disso, considerando $(n \cdot r_n(t)) = 0$, verifica-se facilmente que

$$(n \cdot c_n(t)) = (n \cdot (r_n(t) + b_n(t))) = (n \cdot r_n(t)) + (n \cdot b_n(t)) = 0, \quad (3.26)$$

de onde concluímos o sistema (3.22).

A equação (3.23) é chamada de equação limite. O ponto chave é mostrar a existência de solução global para a equação limite (3.23) e controlar o termo restante (3.24) pelo parâmetro de Coriolis Ω na norma ℓ^1 . Mais precisamente, a priori, mostraremos os dois seguintes lemas:

Lema 3.1. *Assuma as condições A e B. Então, existe uma única solução global (no tempo) $b(t) := \{b_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ para a equação (3.23) tal que $b(t) \in C([0, \infty) : \ell^1(\Lambda))$ com $(b_n(t) \cdot n) = 0$ para $n \in \Lambda$ e $b_0(t) = 0$.*

Lema 3.2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\Omega_0 > 0$ tal que $\|\{r_n(t)\}_{n \in \Lambda}\| \leq \varepsilon$ para $0 < t < T_L$ e $|\Omega| > \Omega_0$, onde T_L é o tempo de existência local, conforme Teoremas 2.1 e 3.1.*

Para mostrar uma solução global para a equação limite (3.23), precisamos assumir a Condição A para que o operador ressonante B_n^0 seja decomposto em uma parte bi-dimensional, partes lineares e um termo bilinear cujas entradas dependem da componente vertical dos vetores frequências. Para um sistema periódico, a Condição A é removível. Babin, Mahalov e Nicolaenko [10] construíram uma convolução que baseia-se na decomposição diádica de Littlewood-Paley. Essa ideia funciona apenas para domínios periódicos,

uma vez que o método de energia não funciona mais para sistemas quase periódicos. Para controlar o resto $r_n(t)$, basta estimar o operador não-ressonante $B_n^{0+}(\Omega t, c_1(t), c_2(t))$ desde que aplicamos apenas o método usual: desigualdade de Gronwall ou um argumento similar. Usamos estimativas da integral oscilatória para controlar as soluções. Uma vez obtido os lemas chaves acima, seremos capazes de provar o principal teorema sem dificuldades.

Nos próximos capítulos 4 e 5, mostramos a bilinearidade do termo B_n , bem como a sua decomposição em partes ressonantes e não-ressonantes, provando o Lema 4.1. E no último capítulo, fazemos uso de todas essas ferramentas para provarmos os Lemas 3.1 e 3.2, e finalmente, para provarmos nosso principal resultado, o Teorema 3.2.

4 Decomposições não lineares

Este capítulo é dedicado à decomposição do termo (3.16). Considere

$$B_n(c_1(t), c_2(t)) := e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k}(t) \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m}(t). \quad (4.1)$$

Vamos mostrar como $B_n(c_1(t), c_2(t))$ pode ser decomposto em duas partes: a parte ressonante, que independe de Ω , e a parte não ressonante, que depende de Ω , bem como as estimativas de ambas as partes. Sendo mais preciso, vamos mostrar o lema que segue.

Lema 4.1. *Sejam $c_1(t) := \{c_{1,n}(t)\}_{n \in \Lambda}$, $c_2(t) := \{c_{2,n}(t)\}_{n \in \Lambda} \in \ell^1(\Lambda)$. O termo não linear*

$$B_n(c_1, c_2) := e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m} \quad (4.2)$$

pode ser decomposto em duas partes: $B_n^0(c_1, c_2)$ e $B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)$ para $n \in \Lambda$. Então, a parte ressonante $B_n^0(c_1, c_2)$ é definida como segue

$$B_n^0(c_1, c_2) = \sum_{\mu \in D} B_n^\mu(c_1, c_2) \quad \text{para } D = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Os operadores $B_n^\mu := \{B_n^\mu\}_{n \in \Lambda}$, com $\mu \in D$, são definidos como:

$$B_n^{(0,0,0)}(c_1, c_2) := \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\bar{\mathbb{P}}_n(\bar{c}_{1,k} \cdot m) \bar{c}_{2,m} \quad (4.3)$$

$$= \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\bar{\mathbb{P}}_n(\bar{c}_{1,k}^h \cdot m) \bar{c}_{2,m}^h + \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\bar{\mathbb{P}}_n(\bar{c}_{1,k}^h \cdot m) \bar{c}_{2,m}^3, \quad (4.4)$$

onde $\bar{\mathbb{P}}_n = \{\bar{\mathbb{P}}_{n,ij}\}_{1 \leq i,j \leq 2}$ é a projeção discreta bi-dimensional de Helmholtz,

$$\bar{c} = \{(c_n^1, c_n^2, c_n^3)\}_{n \in \bar{\Lambda}}, \quad \bar{c}^h = \{(c_n^1, c_n^2, 0)\}_{n \in \bar{\Lambda}} \quad e \quad \bar{c}^3 = \{(0, 0, c_n^3)\}_{n \in \bar{\Lambda}},$$

$$B_n^{(1,0,1)}(c_1, c_2) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |n|=|m| \neq 0, n_3=m_3 \neq 0}} \left(b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \right), \quad (4.5)$$

$$B_n^{(1,1,0)}(c_1, c_2) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |n|=|m| \neq 0, n_3=m_3 \neq 0}} \left(b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \right), \quad (4.6)$$

$$B_n^{(1,1,1)}(c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ \omega_{nkm}^\sigma = 0, n_3, k_3, m_3 \neq 0}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}), \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) &:= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n \left(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot im \right) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t), \\ \mathcal{R}_n^0 c_n &:= c_n, \quad \mathcal{R}_n^1 c_n := \mathcal{R}_n c_n = \frac{n}{|n|} \times c_n, \\ \alpha_{\delta, \sigma} &:= (-1)^{\delta_2 + \delta_3} \left(\frac{1}{8} \right) \prod_{j=1}^3 (-1)^{\delta_j \sigma_j} (-i)^{\delta_j}, \\ \omega_{nkm}^\sigma &:= (-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|n|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|k|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|m|}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a parte não ressonante $B^{0+}(\Omega t, \cdot, \cdot) := \{B_n^{0+}(\Omega t, \cdot, \cdot)\}_{n \in \Lambda}$ é definida como segue

$$B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ \omega_{nkm}^\sigma \neq 0}} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}).$$

Além disso, temos as seguintes estimativas

$$\| \{e^{-|n|^2 t} B_n^\mu(c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda} \| \leq \left(\frac{C}{t^{1/2}} \right) \|c_1\| \|c_2\|, \quad \text{para } \mu \in D, \quad (4.8)$$

e

$$\| \{e^{-|n|^2 t} B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda} \| \leq \left(\frac{C}{t^{1/2}} \right) \|c_1\| \|c_2\|, \quad (4.9)$$

onde C é uma constante positiva independente de Ω .

Antes de demonstrarmos o Lema 4.1, façamos algumas observações a respeito de alguns termos específicos.

4.1 Bilinearidade dos termos B_n e b_{nkm}^δ

Para verificarmos que o termo (4.1) é bilinear, considere $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ como descrito no Lema 4.1 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned} B_n(\alpha c_1 + c_2, c_3) &= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} (\alpha c_{1,k} + c_{2,k}) \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \\ &= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} ((\alpha e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} + e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,k}) \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \\ &= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} \alpha (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} + (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \\ &= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \left(\sum_{n=k+m} \alpha (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} + \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \right) \\ &= \alpha \left[e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \right] \\ &\quad + \left[e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \right], \end{aligned}$$

de onde concluímos $B_n(\alpha c_1 + c_2, c_3) = \alpha B_n(c_1, c_3) + B_n(c_2, c_3)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
B_n(c_1, \alpha c_2 + c_3) &= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} (\alpha c_{2,m} + c_{3,m}) \\
&= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) (\alpha e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m} + e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m}) \\
&= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) \alpha e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m} + (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \\
&= e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \left(\sum_{n=k+m} \alpha (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m} + \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \right) \\
&= \alpha \left[e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{2,m} \right] \\
&\quad + \left[e_n^{t\Omega\mathbb{S}} i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} (e_k^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{1,k} \cdot m) e_m^{-t\Omega\mathbb{S}} c_{3,m} \right],
\end{aligned}$$

de onde obtemos $B_n(c_1, \alpha c_2 + c_3) = \alpha B_n(c_1, c_2) + B_n(c_1, c_3)$. Consequentemente, segue a bilinearidade do termo (4.1). Por outro lado, é fácil ver que o termo b_{nkm}^δ é bilinear. Mas antes, observe que o operador $\mathcal{R}_n^{\delta_i}$ é linear, por definição. Assim, considerando $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ como acima, e usando as definições dadas no Lema 4.1, temos que

$$\begin{aligned}
b_{nkm}^\delta(\alpha c_{1,k} + c_{2,k}, c_{3,m}) &= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} (\alpha c_{1,k} + c_{2,k}) \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m} \\
&= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n ((\alpha \mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} + \mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{2,k}) \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m} \\
&= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\alpha \mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im + \mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{2,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m} \\
&= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n [\alpha (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m} + (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{2,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m}] \\
&= \alpha [\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m}] + [\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{2,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_{3,m}] \\
&= \alpha b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{3,m}) + b_{nkm}^\delta(c_{2,k}, c_{3,m}). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, \alpha c_{2,m} + c_{3,m}) &= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_3} (\alpha c_{2,m} + c_{3,m}) \\
&= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) (\alpha \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{2,m} + \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{3,m}) \\
&= \mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\alpha (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{2,m} + (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{3,m}) \\
&= \alpha [\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{2,m}] + [\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_{1,k} \cdot im) \mathcal{R}_m^{\delta_2} c_{3,m}] \\
&= \alpha b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}) + b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{3,m}). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

De (4.10) e (4.11) segue a bilinearidade do termo b_{nkm}^δ .

4.2 Demonstração do Lema 4.1

Para demonstrarmos o Lema 4.1, vamos dividir sua demonstração em quatro partes, para facilitar o seu entendimento.

Demonstração. Primeira parte - Expressões chaves

Inicialmente, tendo em vista a caracterização das exponenciais $e_n^{-t\Omega\mathbb{S}}$ e $e_n^{t\Omega\mathbb{S}}$, conforme Observação 3.6 (veja p. 66), vemos que

$$B_n(c(t), c(t)) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2 + \delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)), \quad (4.12)$$

onde

$$\theta_k^0(\Omega t) := \cos\left(\frac{k_3}{|k|}\Omega t\right) \quad \text{e} \quad \theta_k^1(\Omega t) := \sin\left(\frac{k_3}{|k|}\Omega t\right). \quad (4.13)$$

De fato, considerando $\eta = \frac{n_3\Omega t}{|n|}$, $\kappa = \frac{k_3\Omega t}{|k|}$ e $\mu = \frac{m_3\Omega t}{|m|}$, por (4.2) (p. 71), temos

$$\begin{aligned} B_n(c, c) &= \cos(\eta) (i\mathbb{P}_n) \sum_{n=k+m} [(\cos(\kappa)\mathbb{I} - \sin(\kappa)\mathcal{R}_k)(c_k \cdot m)] (\cos(\mu)\mathbb{I} - \sin(\mu)\mathcal{R}_m) c_m \\ &\quad + \sin(\eta)\mathcal{R}_n (i\mathbb{P}_n) \sum_{n=k+m} [(\cos(\kappa)\mathbb{I} - \sin(\kappa)\mathcal{R}_k)(c_k \cdot m)] (\cos(\mu)\mathbb{I} - \sin(\mu)\mathcal{R}_m) c_m. \end{aligned}$$

Além disso,

$$[(\cos(\kappa)\mathbb{I} - \sin(\kappa)\mathcal{R}_k)(c_k \cdot m)] = \cos(\kappa)c_k \cdot m - \sin(\kappa)\mathcal{R}_k c_k \cdot m, \quad (4.14)$$

$$(\cos(\mu)\mathbb{I} - \sin(\mu)\mathcal{R}_m) c_m = \cos(\mu)c_m - \sin(\mu)\mathcal{R}_m c_m. \quad (4.15)$$

Considere o produto de (4.14) e (4.15) dado por

$$\Pi_{k,m} = (\cos(\kappa)c_k \cdot m - \sin(\kappa)\mathcal{R}_k c_k \cdot m) (\cos(\mu)c_m - \sin(\mu)\mathcal{R}_m c_m). \quad (4.16)$$

Segue de (4.13) que

$$\Pi_{k,m} = (\theta_k^0 c_k \cdot m) \theta_m^0 c_m - \theta_k^0 (c_k \cdot m) \theta_m^1 \mathcal{R}_m c_m - (\theta_k^1 (\mathcal{R}_k c_k \cdot m) \theta_m^0 c_m + (\theta_k^1 \mathcal{R}_k c_k \cdot m) \theta_m^1 \mathcal{R}_m c_m).$$

Então, temos

$$B_n(c(t), c(t)) = i\mathbb{P}_n \sum_{n=k+m} \cos(\eta) I(\Pi_{k,m}) + \sin(\eta) \mathcal{R}_n(\Pi_{k,m}). \quad (4.17)$$

Todavia, relembando a definição de $\mathcal{R}_n^0$ e $\mathcal{R}_n^1$, chegamos a

$$\begin{aligned} \cos(\eta)\mathbb{I}(\Pi_{k,m}) &= \theta_n^0(\theta_k^0 c_k \cdot m) \theta_m^0 c_m - \theta_n^0 \theta_k^0 (c_k \cdot m) \theta_m^1 \mathcal{R}_m c_m - \theta_n^0 \theta_k^1 (\mathcal{R}_k c_k \cdot m) \theta_m^0 c_m \\ &\quad + \theta_n^0 (\theta_k^1 \mathcal{R}_k c_k \cdot m) \theta_m^1 \mathcal{R}_m c_m \\ &= \theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^0 \mathcal{R}_n^0 (\mathcal{R}_k^0 c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^0 c_m - \theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^1 \mathcal{R}_n^0 (\mathcal{R}_k^0 c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^1 c_m \\ &\quad - \theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^0 \mathcal{R}_n^0 (\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^0 c_m + \theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^1 \mathcal{R}_n^0 (\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^1 c_m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\eta)\mathcal{R}_n(\Pi_{k,m}) &= \theta_n^1\mathcal{R}_n(\theta_k^0c_k \cdot m)\theta_m^0c_m - \theta_n^1\mathcal{R}_n\theta_k^0(c_k \cdot m)\theta_m^1\mathcal{R}_mc_m \\
&\quad - \theta_n^1\mathcal{R}_n(\theta_k^1(\mathcal{R}_kc_k \cdot m)\theta_m^0c_m + \theta_n^1\mathcal{R}_n(\theta_k^1\mathcal{R}_kc_k \cdot m)(\theta_m^1\mathcal{R}_mc_m) \\
&= \theta_n^1\theta_k^0\theta_m^0\mathcal{R}_n^1(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m - \theta_n^1\theta_k^0\theta_m^1\mathcal{R}_n^1(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m \\
&\quad - \theta_n^1\theta_k^1\theta_m^0\mathcal{R}_n^1(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m + \theta_n^1\theta_k^1\theta_m^1\mathcal{R}_n^1(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m.
\end{aligned}$$

Sabendo que $\mathbb{P}_n$ é linear e comuta com o $\mathcal{R}_n$, podemos escrever (4.17) como

$$\begin{aligned}
B_n(c(t), c(t)) &= \sum_{\substack{n=k+m \\ \delta \in \{0,1\}^3}} \theta_n^0\theta_k^0\theta_m^0\mathcal{R}_n^0i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m - \theta_n^0\theta_k^0\theta_m^1\mathcal{R}_n^0i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m \\
&\quad - \theta_n^0\theta_k^1\theta_m^0\mathcal{R}_n^0i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m + \theta_n^0\theta_k^1\theta_m^1\mathcal{R}_n^0i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m \\
&\quad + \theta_n^1\theta_k^0\theta_m^0\mathcal{R}_n^1i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m - \theta_n^1\theta_k^0\theta_m^1\mathcal{R}_n^1i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^0c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m \\
&\quad - \theta_n^1\theta_k^1\theta_m^0\mathcal{R}_n^1i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^0c_m + \theta_n^1\theta_k^1\theta_m^1\mathcal{R}_n^1i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1c_k \cdot m)\mathcal{R}_m^1c_m \\
&= \sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} [\mathcal{R}_n^{\delta_1} i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m].
\end{aligned}$$

Pela definição do termo b_{nkm}^δ (veja p. 71), segue que

$$B_n(c(t), c(t)) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)), \quad (4.18)$$

como queríamos.

Por outro lado, por um cálculo direto, temos

$$\sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} (c_k, c_m) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m), \quad (4.19)$$

para mais detalhes, veja Apêndice B.

Segunda parte - $B_n^\mu(c_1, c_2) = 0$ para $\mu \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Definimos agora o conjunto de frequências ressonantes $\mathcal{K}^\sigma$, seu complementar $(\mathcal{K}^\sigma)^c$ que é o conjunto das frequências não ressonantes, e o conjunto $(\Lambda)_\mu^3$. Para $\mu, \sigma \in \{0, 1\}^3$, considere

$$\mathcal{K}^\sigma := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : \omega_{nkm}^\sigma = 0\} \quad (4.20)$$

e

$$(\Lambda)_\mu^3 := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_{\mu_1}, k_3 \in \Lambda_{\mu_2} \text{ e } m_3 \in \Lambda_{\mu_3}\}, \quad (4.21)$$

onde $\Lambda_0, \Lambda_1 \subset \mathbb{R}$ e são tais que $\Lambda_0 = \{0\}$ e $\Lambda_1 = (\Lambda_0)^c$; isto é, se $\lambda \in \Lambda_1$, então $\lambda \neq 0$. Observe que se $n \in \Lambda$ e $n_3 \in \Lambda_0$ então $n \in \bar{\Lambda}$; se $n \in \Lambda$ e $n_3 \in \Lambda_1$, então $n \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}$. Assim temos a seguinte decomposição (decomposição em partes não ressonantes e ressonantes)

$$(\Lambda)^3 = \bigcup_{\sigma \in \{0,1\}^3} \mathcal{K}^\sigma \cup (\mathcal{K}^\sigma)^c = \bigcup_{\sigma \in \{0,1\}^3} (\mathcal{K}^\sigma)^c \cup \bigcup_{\sigma, \mu \in \{0,1\}^3} (\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3). \quad (4.22)$$

Além disso, vemos que

$$(\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3) \cap (\mathcal{K}^{\sigma'} \cap (\Lambda)_{\mu'}^3) = \emptyset \text{ se } \sigma \neq \sigma' \text{ ou } \mu \neq \mu'. \quad (4.23)$$

Usando os conjuntos $\mathcal{K}^\sigma$ e $(\Lambda)_\mu^3$, podemos definir os operadores $\{B_n^\mu\}_{\mu \in \{0,1\}^3}$. Para $\mu \in \{0,1\}^3$, considere

$$B_n^\mu(c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}), \quad (4.24)$$

onde $\omega_{nkm}^\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \{0,1\}^3$ (parte ressonante), e

$$B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}), \quad (4.25)$$

onde $\omega_{nkm}^\sigma \neq 0$ para todo $\sigma \in \{0,1\}^3$ (parte não ressonante).

Pelas equações (4.12), (4.19) e pelas definições dos termos B_n^μ e B_n^{0+} em (4.24) e (4.25), um cálculo direto produz

$$\begin{aligned} B_n(c(t), c(t)) &= \sum_{n=k+m} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\delta} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) \\ &= \sum_{\mu \in \{0,1\}^3} B_n^\mu(c(t), c(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)). \end{aligned}$$

Lembrando que $D := \{(0,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$, para completar a prova de uma parte do Lema 4.1, é suficiente provar as quatro seguintes equações:

$$B_n^{(0,1,1)}(c, c) = 0, \quad B_n^{(1,0,0)}(c, c) = 0, \quad B_n^{(0,1,0)}(c, c) = 0 \text{ e } B_n^{(0,0,1)}(c, c) = 0,$$

para $c(t) = \{c_n(t)\}_{n \in \Lambda}$. Contudo, para concluirmos a prova dessa segunda parte, basta verificarmos as três últimas igualdades acima, as quais são facilmente obtidas. De fato, as três equações

$$B_n^{(1,0,0)}(c, c) = 0, \quad B_n^{(0,1,0)}(c, c) = 0 \text{ e } B_n^{(0,0,1)}(c, c) = 0 \quad (4.26)$$

são verdadeiras, pois $\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3 = \emptyset$, já que

$$(\Lambda)_\mu^3 = \emptyset \text{ para todo } \mu \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Com efeito, para $\mu = (1,0,0)$, temos que

$$\begin{aligned} (\Lambda)_{(1,0,0)}^3 &= \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_1, k_3 \in \Lambda_0 \text{ e } m_3 \in \Lambda_0\} \\ &= \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \neq 0, k_3 = 0 \text{ e } m_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Desde que $n = k + m$, temos $n_3 = k_3 + m_3$, contudo $n_3 \neq 0$ e $k_3 + m_3 = 0$, o que nos dá $(\Lambda)_{(1,0,0)}^3 = \emptyset$. De forma análoga se verifica que $(\Lambda)_{(0,1,0)}^3 = \emptyset$ e $(\Lambda)_{(0,0,1)}^3 = \emptyset$. De onde segue as igualdades em (4.26). Posto isso, nossa tarefa se resume a mostrar que $B_n^{(0,1,1)}(c, c) = 0$.

Terceira parte - O termo $B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = 0$

Afirmamos que $\theta_n^1 \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} = 0$ para $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(0,1,1)}^3$ e $\delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}$. De fato, pela equação (4.13)

$$\theta_n^1 \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} = \text{sen} \left(\frac{n_3 \Omega t}{|n|} \right) \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3}. \quad (4.27)$$

Contudo,

$$(\Lambda)_{(0,1,1)}^3 := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_0, k_3 \in \Lambda_1 \text{ e } m_3 \in \Lambda_1\}, \quad (4.28)$$

ou seja, $n_3 = 0$, logo $\text{sen}(n_3 \Omega t / |n|) = 0$, de onde segue a afirmação. Com isso, temos que

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3}} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}(t), c_{2,m}(t)) = 0 \quad (4.29)$$

para $\delta \in \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Assim, nos resta verificar a expressão $B_n^{(0,1,1)}$ apenas para $\delta \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Todavia, por um cálculo direto, vemos que

$$\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3 = \emptyset \quad \text{para} \quad \sigma \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}. \quad (4.30)$$

De fato, suponha que $\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3 \neq \emptyset$ e tome $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,1)} \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3$, por exemplo. Assim, $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,1)}$, ou seja,

$$\omega_{nkm}^{(0,0,1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} = 0. \quad (4.31)$$

Além disso, $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(0,1,1)}^3$, então $n_3 = 0$. Logo,

$$\omega_{nkm}^{(0,0,1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} = 0 \quad \Rightarrow \quad |m|k_3 = |k|m_3. \quad (4.32)$$

Agora, $n = k + m$, implica que $n_3 = k_3 + m_3$, ou seja, $k_3 = -m_3$, pois $n_3 = 0$, isto é, $-|m|m_3 = |k|m_3$, implicando em $-|m| = |k|$, o que é uma contradição. Então resta verificar que

$$\begin{aligned} B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = & \alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(0,1,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \\ & + \alpha_{(0,1,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(0,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \end{aligned}$$

para $\sigma_1 \in \{0, 1\}$ e $(\sigma_2, \sigma_3) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$ e $(n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3$ com $n = k + m$. Contudo, $\alpha_{(0,0,0),\sigma} = 1/8$ e $\alpha_{(0,1,1),\sigma} = -1/8$ para todo $\sigma \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, $\alpha_{(0,1,0),\sigma} = \alpha_{(0,0,1),\sigma} = i/8$ para $\sigma \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\alpha_{(0,1,0),\sigma} = \alpha_{(0,0,1),\sigma} = -i/8$ para $\sigma \in \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, como provado no Apêndice B (veja p. 108). Assim

$$\begin{aligned}
\alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) &= \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}), \\
\alpha_{(0,1,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = -\frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}), \\
\alpha_{(0,1,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) &= 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0, \\
\alpha_{(0,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) &= 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = \sum_{\substack{\sigma_1 \in \{0,1\} \\ (\sigma_2, \sigma_3) \in \{(0,0), (1,1)\}}} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(0,1,1)}^3}} \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}).$$

Assim, resta apenas checar que

$$B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} \left(b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \right), \quad (4.33)$$

onde $|k| = |m|$ vem do fato de que $k_3 = -m_3$ ao mesmo tempo que $\frac{k_3}{|k|} = -\frac{m_3}{|m|}$ para todo $\sigma \in \{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,1,1)\}$. Note que, por cálculos semelhantes, obtemos (4.5) e (4.6), veja Apêndice C, p. 117. Além disso, as expressões (4.3) e (4.7) seguem por substituição direta em (4.24).

Vejamos então que a equação (4.33) é, de fato, igual a zero, isto é,

$$B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = 0.$$

Lembrando das fórmulas do produto exterior

$$\begin{aligned}
\alpha \times (\beta \times \gamma) &= \beta(\alpha \cdot \gamma) - \gamma(\alpha \cdot \beta), \\
\alpha \times \beta &= -\beta \times \alpha, \\
\alpha \times (\alpha \times \beta) &= -|\alpha|^2 \beta \quad \text{se } (\alpha \cdot \beta) = 0,
\end{aligned}$$

e da definição dos b_{nkm}^δ , temos

$$\begin{aligned}
-b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k, c_m) &= -i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot m) \mathcal{R}_m^1 c_m \\
&= i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^1 c_k \times (m \times \mathcal{R}_m^1 c_m)) - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) \\
&= i\mathbb{P}_n \left[\left(\frac{1}{|k|} (k \times c_k) \right) \times \left(m \times (m \times c_m) \frac{1}{|m|} \right) \right] - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) \\
&= i\mathbb{P}_n \left[\left(\frac{1}{|k|} (k \times c_k) \right) \times (m \times (m \times c_m)) \frac{1}{|m|} \right] - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) \\
&= i\mathbb{P}_n \left[\left(\frac{1}{|k|} (k \times c_k) \right) \times (-|m|^2 c_m) \frac{1}{|m|} \right] - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)),
\end{aligned}$$

pois $(m \cdot c_m) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} -b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k, c_m) &= i\mathbb{P}_n \left(\frac{1}{|k|} (k \times c_k) \times (-|m|c_m) \right) - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) \\ &= i\mathbb{P}_n \left[\frac{1}{|m|} ((k \times c_k) \times c_m) (-|m|) \right] - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)), \end{aligned}$$

pois $|m| = |k| \neq 0$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} -b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k, c_m) &= -i\mathbb{P}_n((k \times c_k) \times c_m) - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) \\ &= i\mathbb{P}_n(c_m \times (k \times c_k)) - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)), \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por outro lado, similarmente temos que

$$b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_k, c_m) = i\mathbb{P}_n(m(c_k \cdot c_m)) - i\mathbb{P}_n(c_k \times (m \times c_m)). \quad (4.35)$$

Segue da equação (4.33), (4.34) e (4.35) que

$$\begin{aligned} B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(c_k \cdot c_m)) - i\mathbb{P}_n(c_k \times (m \times c_m)) \\ &\quad + i\mathbb{P}_n(c_m \times (k \times c_k)) - i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)). \end{aligned}$$

Além disso, podemos separar a equação acima da seguinte forma

$$B_n^{(0,1,1)}(c_1, c_2) = B_n^\zeta(c_1, c_2) + B_n^\eta(c_1, c_2) + B_n^\xi(c_1, c_2), \quad (4.36)$$

onde

$$B_n^\zeta(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(c_m \times (k \times c_k)) - i\mathbb{P}_n(c_k \times (m \times c_m)), \quad (4.37)$$

$$B_n^\eta(c_1, c_2) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)), \quad (4.38)$$

$$B_n^\xi(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(c_k \cdot c_m)). \quad (4.39)$$

Afirmção (1): $B_n^\zeta(c_1, c_2) = 0$.

De fato, vejamos que $\sum_{n=k+m} i(c_k \times (m \times c_m)) = \sum_{n=k+m} i(c_m \times (k \times c_k))$. Usando o mesmo argumento de funções amplitude, como na Seção 3.1 (Capítulo 3, p. 61), considere $u(x, t) = \sum_{n \in \Lambda} c_n(t) e^{in \cdot x}$. Posto isso, temos

$$\begin{aligned} u(x, t) \times (\nabla \times u(x, t)) &= \sum_{k \in \Lambda} c_k(t) e^{ik \cdot x} \times \left(\nabla \times \sum_{m \in \Lambda} c_m(t) e^{im \cdot x} \right) \\ &= \sum_{k \in \Lambda} c_k(t) e^{ik \cdot x} \times \sum_{m \in \Lambda} \nabla \times (c_m(t) e^{im \cdot x}) \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} (c_k(t) e^{ik \cdot x}) \times (\nabla \times c_m(t) e^{im \cdot x}). \end{aligned}$$

Agora, considere $c_m(t) = (c_m^1, c_m^2, c_m^3)$, então

$$(\nabla \times c_m(t)e^{im \cdot x}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ c_m^1(t)e^{im \cdot x} & c_m^2(t)e^{im \cdot x} & c_m^3(t)e^{im \cdot x} \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\nabla \times c_m(t)e^{im \cdot x}) &= (c_m^3 \partial_{x_2} - c_m^2 \partial_{x_3}, c_m^1 \partial_{x_3} - c_m^3 \partial_{x_1}, c_m^2 \partial_{x_1} - c_m^1 \partial_{x_2}) e^{im \cdot x} \\ &= (m_2 c_m^3 - m_3 c_m^2, m_3 c_m^1 - m_1 c_m^3, m_1 c_m^2 - m_2 c_m^1) i e^{im \cdot x} \\ &= (m \times c_m) i e^{im \cdot x}, \end{aligned}$$

onde, $m = (m_1, m_2, m_3)$, ou seja,

$$(\nabla \times c_m(t)e^{im \cdot x}) = (m \times c_m(t)) i e^{im \cdot x}. \quad (4.40)$$

Segue da equação (4.40) que

$$\begin{aligned} u(x, t) \times (\nabla \times u(x, t)) &= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} (c_k(t)e^{ik \cdot x}) \times (m \times c_m(t)) i e^{im \cdot x} \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} (c_k(t) \times (m \times c_m(t))) i e^{i(k+m) \cdot x}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $n = k + m$, temos

$$u \times (\nabla \times u) = \sum_{n \in \Lambda} \sum_{n=k+m} i (c_k \times (m \times c_m)) e^{in \cdot x}. \quad (4.41)$$

Tendo em vista que

$$\sum_{k \in \Lambda} c_k(t)e^{ik \cdot x} = u(x, t) = \sum_{m \in \Lambda} c_m(t)e^{im \cdot x},$$

segue que

$$\sum_{n=k+m} (c_k \times (m \times c_m)) \quad \text{e} \quad \sum_{n=k+m} (c_m \times (k \times c_k)) \quad (4.42)$$

definem o mesmo coeficiente para $u \times (\nabla \times u)$, onde o coeficiente da direita de (4.42) é obtido da mesma forma, apenas trocando a ordem das funções amplitude. Assim, obtemos a Afirmação (1).

Afirmação (2): $B_n^\eta(c_1, c_2) = B_n^\xi(c_1, c_2) = 0$

De fato, vejamos primeiro que $B_n^\eta(c_1, c_2) = 0$. Dada a equação (4.38), temos

$$\sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i \mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) = \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i \mathbb{P}_n((n-k)(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)).$$

Por outro lado, $\mathbb{P}_n(n) = 0$, vejamos.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(n) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{|n|^2} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{|n|^2} \begin{bmatrix} n_1^3 + n_1 n_2^2 + n_1 n_3^2 \\ n_2 n_1^2 + n_2^3 + n_2 n_3^2 \\ n_3 n_1^2 + n_3 n_2^2 + n_3^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} n_1^3 + n_1 n_2^2 + n_1 n_3^2 \\ n_2 n_1^2 + n_2^3 + n_2 n_3^2 \\ n_3 n_1^2 + n_3 n_2^2 + n_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) n_1 \\ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) n_2 \\ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |n|^2 n_1 \\ |n|^2 n_2 \\ |n|^2 n_3 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\mathbb{P}_n(n) = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{|n|^2} \begin{bmatrix} |n|^2 n_1 \\ |n|^2 n_2 \\ |n|^2 n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

como queríamos. Consequentemente,

$$\sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) = - \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(k(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)).$$

Desde que k e m são simétricos, temos

$$- \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(k(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) = - \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)).$$

Daí,

$$\sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)) = - \sum_{\substack{n=k+m \\ |k|=|m| \neq 0, k_3=-m_3 \neq 0}} i\mathbb{P}_n(m(\mathcal{R}_k^1 c_k \cdot \mathcal{R}_m^1 c_m)),$$

o que é uma contradição. Logo, $B_n^\eta(c_1, c_2) = 0$. De forma similar, se verifica que

$$B_n^\xi(c_1, c_2) = 0,$$

concluindo a demonstração da Afirmação (2). Consequentemente, concluímos a demonstração da terceira parte do lema.

Quarta parte - Estimativas da parte ressonante e não ressonante

Para concluirmos a demonstração do lema, provemos agora as estimativas (4.8) e (4.9). Inicialmente, estimamos o termo b_{nkm}^δ . Lembre-se que

$$b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) := \mathcal{R}_n^{\delta_1} i\mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot m) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t). \quad (4.43)$$

Desde que $(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot k) = 0$ para $k \in \Lambda$ e $\mathcal{R}_n^{\delta_1}$ e $\mathbb{P}_n$ são comutativos, temos que

$$b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) = i\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot n) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t). \quad (4.44)$$

De fato,

$$\begin{aligned} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) &= i\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot (n - k)) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t) \\ &= i\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot n) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t) - i\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot k) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t). \end{aligned}$$

Como $(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot k) = 0$ temos $i\mathcal{R}_n^{\delta_1} \mathbb{P}_n (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot k) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t) = 0$, de onde segue a equação (4.44). Além disso, tendo em vista os Lemas 2.2 e 2.7, concluímos que $|\mathbb{P}_n|, |\mathcal{R}_n^{\delta_1}| \leq 1$ para $n \in \Lambda$ e $\mathcal{R}_0 c_0 = 0$, com isso temos

$$\begin{aligned} |b_{nkm}^\delta(c_k, c_m)| &= |i\mathbb{P}_n \mathcal{R}_n^{\delta_1} (\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k \cdot n) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m| \\ &= |\mathbb{P}_n| |\mathcal{R}_n^{\delta_1}| |\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k \cdot n| |\mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m| \\ &\leq |\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k \cdot n| |\mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m|. \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Schwartz $|\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k \cdot n| \leq |\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k| |n|$, e então

$$|b_{nkm}^\delta(c_k, c_m)| \leq |\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k| |n| |\mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m|.$$

Agora, observe que $|\mathbb{R}_k^{\delta_i} c_k| = |c_k|$, sempre que $\delta_i = 0$. Caso contrário, $\delta_i = 1$, e temos que

$$|\mathbb{R}_k^{\delta_i} c_k| = \frac{1}{|k|} |k \times c_k| = \frac{1}{|k|} |\tilde{u}| |k| |c_k| |\sin(\theta_k)| \leq |c_k|,$$

onde $\tilde{u}$ é o vetor unitário perpendicular tanto a k quanto a c_k e θ_k é o ângulo entre k e c_k . Seja $\tilde{v}$ o vetor unitário perpendicular tanto a m quanto a c_m e θ_m o ângulo entre m e c_m . Logo,

$$|b_{nkm}^\delta(c_k, c_m)| \leq |n| |c_k| |c_m| \quad \text{para } \delta \in \{0, 1\}^3 \text{ e } n, k, m \in \Lambda. \quad (4.45)$$

Agora, note que $|\alpha_{\delta, \sigma}| \leq 1$ para todo $\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3$, por definição. Assim, por (4.45), facilmente temos a seguinte estimativa de cada amplitude:

$$\begin{aligned} |B_n^\mu(c_1, c_2)| &\leq \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} |\alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m})| \\ &= \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} |\alpha_{\delta, \sigma}| |b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m})| \\ &\leq \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} |n| |c_{1,k}| |c_{2,m}|, \\ &\leq \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\Lambda)_\mu^3}} |n| |c_{1,k}| |c_{2,m}| \end{aligned}$$

para $\mu, \sigma \in \{0, 1\}^3$, e

$$\begin{aligned}
|B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)| &\leq \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |\alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m})| \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |\alpha_{\delta, \sigma}| |e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma}| |b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m})| \\
&\leq \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |n| |c_{1,k}| |c_{2,m}| \\
&\leq \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |n| |c_{1,k}| |c_{2,m}|.
\end{aligned}$$

Com isso, para cada $n \in \Lambda$, temos

$$|B_n^\mu(c_1, c_2)| \leq |n| \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\Lambda)_\mu^3}} |c_{1,k}| |c_{2,m}| \quad \text{e} \quad |B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)| \leq |n| \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |c_{1,k}| |c_{2,m}|,$$

para $\mu, \sigma \in \{0, 1\}^3$. Por outro lado, tendo em vista que $e^{-|n|^2 t} = e^{-|nt^{1/2}|^2}$, temos que

$$\begin{aligned}
|e^{-|n|^2 t} n| &= |e^{-|nt^{1/2}|^2} n| \\
&= \sup_{n \in \Lambda} e^{-|nt^{1/2}|^2} |nt^{1/2}| t^{-1/2} \\
&= t^{-1/2} \sup_{n \in \Lambda} e^{-|nt^{1/2}|^2} |nt^{1/2}| \\
&\leq t^{-1/2} \sup_{s > 0} e^{-|s|^2} |s| \\
&\leq C t^{-1/2},
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Logo, para cada $n \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned}
|e^{-|n|^2 t} B_n^\mu(c_1, c_2)| &\leq t^{-1/2} C \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\Lambda)_\mu^3}} |c_{1,k}| |c_{2,m}| \\
&\leq t^{-1/2} C \sum_{n=k+m} |c_{1,k}| |c_{2,m}|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|e^{-|n|^2 t} B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)| &\leq t^{-1/2} C \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} |c_{1,k}| |c_{2,m}| \\
&\leq t^{-1/2} C \sum_{n=k+m} |c_{1,k}| |c_{2,m}|.
\end{aligned}$$

Todavia,

$$\begin{aligned}
\|\{e^{-|n|^2 t} B_n^\mu(c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda}\| &= \sum_{n \in \Lambda} |e^{-|n|^2 t} B_n^\mu(c_1, c_2)| \\
&\leq t^{-1/2} C \sum_{n \in \Lambda} \sum_{n=k+m} |c_{1,k}| |c_{2,m}| \\
&= t^{-1/2} C \sum_{k \in \Lambda} \sum_{m \in \Lambda} |c_{1,k}| |c_{2,m}| \\
&= t^{-1/2} C \sum_{k \in \Lambda} |c_{1,k}| \sum_{m \in \Lambda} |c_{2,m}| \\
&= t^{-1/2} C \|c_1\| \|c_2\|.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|\{e^{-|n|^2 t} B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda}\| \leq t^{-1/2} C \|c_1\| \|c_2\|.$$

Pelas desigualdades acima, tem-se (4.8) e (4.9).

□

5 Demonstração dos Principais Resultados

Este capítulo é dedicado à demonstração do principal resultado dessa dissertação, Teorema 3.2. Como explicado no Capítulo 3, primeiro vamos demonstrar dois lemas chaves, a saber Lemas 3.1 e 3.2.

5.1 Demonstração do Lema 3.1

Primeiro, lembramos que a equação limite é dada por

$$\partial_t b_n(t) + |n|^2 b_n(t) + B_n^0(b(t), b(t)) = 0, \quad (5.1)$$

onde $(n \cdot b_n(t)) = 0$ e $b_n(0) = c_n(0) = a_n(0)$ para $n \in \Lambda$. Assim, como anteriormente, considerando $\bar{b}(t) := \{(b_n^1(t), b_n^2(t), b_n^3(t))\}_{n \in \bar{\Lambda}}$, tal que $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$, e substituindo $\bar{b}(t)$ na equação (5.1), ficamos com

$$\partial_t \bar{b}_n(t) + |n|^2 \bar{b}_n(t) + B_n^0(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = 0. \quad (5.2)$$

Pelas definições das expressões dadas no Lema 4.1, segue que

$$B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = B_n^{(1,1,0)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = B_n^{(1,1,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = 0. \quad (5.3)$$

Para ver (5.3), lembramos que para $\mu \in D = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, temos que

$$B_n^\mu(c_1(t), c_2(t)) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}(t), c_{2,m}(t)), \quad (5.4)$$

conforme visto na demonstração do Lema 4.1, p. 71.

Observação 5.1. *Veja que cada “entrada” do termo bilinear $B_n^\mu(b(t), b(t))$, quando aplicado, depende de um índice, isto é, a primeira “entrada” depende de $k \in \Lambda$ e a segunda depende de $m \in \Lambda$, como podemos ver na equação (5.4). Além disso, lembramos que quando trabalhamos com o termo $b_n(t)$, sabemos que $n \in \Lambda$, agora quando é com o termo $\bar{b}_n(t)$, sabemos que $n \in \bar{\Lambda}$, isto é, $n \in \Lambda$ com $n_3 = 0$.*

Assim, em particular, veja que o termo $B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t))$ possui na primeira e na segunda “entrada” $\bar{b}(t)$, e pela observação acima o primeiro $\bar{b}(t)$ depende de $k \in \Lambda$ ao mesmo tempo que $k \in \bar{\Lambda}$, e o segundo $\bar{b}(t)$ depende de $m \in \Lambda$ ao mesmo tempo que $m \in \bar{\Lambda}$, ou seja, $k, m \in \Lambda$ com $k_3 = m_3 = 0$. Com isso, como $n = k + m$, temos $n_3 = 0$. Contudo, sabemos que

$$(\Lambda)_{(1,0,1)}^3 = \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_1, k_3 \in \Lambda_0 \text{ e } m_3 \in \Lambda_1\},$$

onde $\Lambda_0, \Lambda_1 \subset \mathbb{R}$ e $\Lambda_0 := \{0\}$ e $\Lambda_1 := (\Lambda_0)^c$. Assim, como $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(1,0,1)}^3$ temos que $n_3 = m_3 \neq 0$ e $k_3 = 0$, mas vimos também que $n_3 = k_3 = m_3 = 0$, então as condições impostas aos índices do somatório são contraditórias (ou seja, vazios), de onde segue que

$$B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = 0. \quad (5.5)$$

Similarmente, verifica-se as outras duas igualdades

$$B_n^{(1,1,0)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad B_n^{(1,1,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = 0.$$

Além disso, pelos mesmos argumentos acima, se verifica que $B_n^{(0,0,0)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t))$.

Segue portanto que

$$B_n^0(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = B_n^{(0,0,0)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t)) = B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t)) = \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k \cdot m) \bar{b}_m.$$

Ou seja,

$$\partial_t \bar{b}_n(t) + |n|^2 \bar{b}_n(t) + \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k \cdot m) \bar{b}_m = 0, \quad (5.6)$$

ou ainda,

$$\partial_t \bar{b}_n(t) + |n|^2 \bar{b}_n(t) + B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t)) = 0. \quad (5.7)$$

Agora, considerando $\bar{b}^h = \{(b_n^1, b_n^2, 0)\}_{n \in \bar{\Lambda}}$ e $\bar{b}^3 = \{(0, 0, b_n^3)\}_{n \in \bar{\Lambda}}$, veja que $\bar{b}_n := \bar{b}_n^h + \bar{b}_n^3$, o que nos leva a concluir que $\bar{b}(t)$ satisfaz a igualdade

$$\partial_t \bar{b}_n(t) + |n|^2 \bar{b}_n(t) + \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m = 0. \quad (5.8)$$

De fato, usando (5.6), temos que

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{b}_n(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k \cdot m) \bar{b}_m \\ &= -|n|^2 \bar{b}_n(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n((\bar{b}_k^h + \bar{b}_k^3) \cdot m) \bar{b}_m \\ &= -|n|^2 \bar{b}_n(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n((\bar{b}_k^h \cdot m) + (\bar{b}_k^3 \cdot m)) \bar{b}_m. \end{aligned}$$

Mas observe que $(\bar{b}_k^3 \cdot m) = 0$, pois $\bar{b}_k^3 = (0, 0, b_k^3)$ e $m = (m_1, m_2, 0)$, de onde segue a equação (5.8).

Por outro lado, a equação (5.8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{b}_n(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m \\ &= -|n|^2 (\bar{b}_n^h(t) + \bar{b}_n^3(t)) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) (\bar{b}_m^h + \bar{b}_m^3) \\ &= -|n|^2 \bar{b}_n^h(t) - |n|^2 \bar{b}_n^3(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^h - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i\mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^3. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\partial_t \bar{b}_n(t) = \underbrace{-|n|^2 \bar{b}_n^h - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^h}_{=\partial_t \bar{b}_n^h(t)} - \underbrace{|n|^2 \bar{b}_n^3 - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^3}_{=\partial_t \bar{b}_n^3(t)}.$$

Com isso, chegamos ao sistema

$$\partial_t \bar{b}_n^h(t) + |n|^2 \bar{b}_n^h(t) + \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^h = 0 \quad (5.9)$$

e

$$\partial_t \bar{b}_n^3(t) + |n|^2 \bar{b}_n^3(t) + \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^3 = 0, \quad (5.10)$$

tendo em vista que $\bar{b}_n := \bar{b}_n^h + \bar{b}_n^3$ e $\bar{\mathbb{P}}_n$ é a projeção discreta bi-dimensional. Agora, considere $b^{osc}(t) := b(t) - \bar{b}(t)$. Por definição, $\partial_t b^{osc}(t) = \partial_t b(t) - \partial_t \bar{b}(t)$. Assim,

$$\partial_t b_n^{osc}(t) = \partial_t b_n(t) - \partial_t \bar{b}_n(t) = -|n|^2 b_n(t) - B_n^0(b(t), b(t)) - \partial_t \bar{b}_n(t). \quad (5.11)$$

Pelas equações (5.1) e (5.7), podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_t b_n^{osc}(t) &= -|n|^2 b_n(t) - B_n^0(b(t), b(t)) - (-|n|^2 \bar{b}_n(t) - B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t))) \\ &= -|n|^2 (b_n(t) - \bar{b}_n(t)) - B_n^0(b(t), b(t)) + B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t)) \\ &= -|n|^2 b_n^{osc}(t) - B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t)) - B_n^{(1,0,1)}(b(t), b(t)) - B_n^{(1,1,0)}(b(t), b(t)) \\ &\quad - B_n^{(1,1,1)}(b(t), b(t)) + B_n^{(0,0,0)}(b(t), b(t)) \\ &= -|n|^2 b_n^{osc}(t) - B_n^{(1,0,1)}(b(t), b(t)) - B_n^{(1,1,0)}(b(t), b(t)) - B_n^{(1,1,1)}(b(t), b(t)). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\partial_t b_n^{osc}(t) + |n|^2 b_n^{osc}(t) + B_n^{(1,0,1)}(b(t), b(t)) + B_n^{(1,1,0)}(b(t), b(t)) + B_n^{(1,1,1)}(b(t), b(t)) = 0. \quad (5.12)$$

Agora, como $b^{osc}(t) = b(t) - \bar{b}(t)$, temos $b(t) = b^{osc}(t) + \bar{b}(t)$, e então

$$B_n^{(1,0,1)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,0,1)}(b^{osc}(t) + \bar{b}(t), b^{osc}(t) + \bar{b}(t)), \quad (5.13)$$

$$B_n^{(1,1,0)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,1,0)}(b^{osc}(t) + \bar{b}(t), b^{osc}(t) + \bar{b}(t)), \quad (5.14)$$

$$B_n^{(1,1,1)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,1,1)}(b^{osc}(t) + \bar{b}(t), b^{osc}(t) + \bar{b}(t)). \quad (5.15)$$

Usando a bilinearidade dos termos B_n^μ , observe que o lado direito da equação (5.13) pode ser expresso como

$$B_n^{(1,0,1)}(b^{osc} + \bar{b}, b^{osc} + \bar{b}) = B_n^{(1,0,1)}(b^{osc}, b^{osc}) + B_n^{(1,0,1)}(b^{osc}, \bar{b}) + B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}, b^{osc}) + B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}, \bar{b}).$$

Observação 5.2. *Um ponto importante que devemos ressaltar, antes de prosseguirmos, é que a definição do termo $b^{osc}(t)$ nos faz concluir que*

$$b^{osc}(t) := \{b_n(t)\}_{n \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}} = \{(b_{n,1}(t), b_{n,2}(t), b_{n,3}(t))\}_{n \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}},$$

onde temos uma pequena sutileza no conjunto de frequências no qual está definida, isto é, $n \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}$.

Agora, fazendo uso dos mesmos argumentos anteriores, podemos deduzir as igualdades

$$\underbrace{B_n^{(1,0,1)}(b^{osc}(t), b^{osc}(t))}_{(1)} = \underbrace{B_n^{(1,0,1)}(b^{osc}(t), \bar{b}(t))}_{(2)} = \underbrace{B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), \bar{b}(t))}_{(3)} = 0. \quad (5.16)$$

De fato, lembrando da definição do conjunto $(\Lambda)_{(1,0,1)}^3$, temos $n_3 = m_3 \neq 0$ e $k_3 = 0$. Pela Observação 5.1, também temos que

- (i) Em (1), $k_3, m_3 \neq 0$, o que implica em $n_3 \neq 0$, dado que $n = k + m$;
- (ii) Em (2), $k_3 \neq 0$ e $m_3 = 0$, o que implica em $n_3 = k_3 \neq 0$, dado que $n = k + m$;
- (iii) Em (3), $k_3 = m_3 = 0$, o que implica em $n_3 = 0$, dado que $n = k + m$;

Em todos os itens acima, (i), (ii) e (iii), as condições sobre os índices não são satisfeitas quando comparadas às condições impostas aos índices do conjunto $(\Lambda)_{(1,0,1)}^3$, daí obtemos (5.16). Logo, a equação (5.13) pode ser simplificada como

$$B_n^{(1,0,1)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), b^{osc}(t)), \quad (5.17)$$

dado que as condições dos índices são satisfeitas. De forma similar, vemos que a equação (5.14) pode ser simplificada como

$$B_n^{(1,1,0)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,1,0)}(b^{osc}(t), \bar{b}(t)), \quad (5.18)$$

e também que a equação (5.15) pode ser escrita como

$$B_n^{(1,1,1)}(b(t), b(t)) = B_n^{(1,1,1)}(b^{osc}(t), b^{osc}(t)). \quad (5.19)$$

Assim, pelas equações (5.17), (5.18) e (5.19), podemos escrever (5.12) como segue

$$\partial_t b_n^{osc}(t) = -|n|^2 b_n^{osc} - B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), b^{osc}(t)) - B_n^{(1,1,0)}(b^{osc}(t), \bar{b}(t)) - B_n^{(1,1,1)}(b^{osc}(t), b^{osc}(t)).$$

Com isso, a equação limite (3.23) pode ser “dissociada” nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{b}_n^h(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n^h(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^h, \\ \partial_t \bar{b}_n^3(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n^3(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \bar{\mathbb{P}}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^3, \\ \partial_t b_n^{osc}(t) &= -|n|^2 b_n^{osc} - B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), b^{osc}(t)) - B_n^{(1,1,0)}(b^{osc}(t), \bar{b}(t)) - B_n^{(1,1,1)}(b^{osc}(t), b^{osc}(t)). \end{aligned}$$

Além disso, o “pior” termo da equação (3.23) é o termo $B_n^{(1,1,1)}$, pois contém todos os termos b_{nkm}^δ para $\delta \in \{0,1\}^3$ e, além disso, torna a equação do $\partial_t b_n^{osc}(t)$ não-linear. Nossa intenção é eliminá-lo. Para isso, precisamos de um conjunto de elementos γ ’s específico, a saber, como o definido em (3.10).

Observação 5.3. *Esse tipo de “restrição”, ou “perturbação”, é extremamente técnico. No entanto, não sabemos se essas restrições são ou não removíveis. Isso significa que o caso geral quase periódico ainda está em aberto.*

Assim, seja $n, k, m \in \Lambda$ e $\tilde{n} = \gamma n_3$, $\tilde{k}_3 = \gamma k_3$, $\tilde{m}_3 = \gamma m_3$, $\tilde{n} = (n_1, n_2, \tilde{n}_3)$, $\tilde{k} = (k_1, k_2, \tilde{k}_3)$ e $\tilde{m} = (m_1, m_2, \tilde{m}_3)$, ou seja, $n, k, m \in \Lambda(\gamma)$. Defina

$$P_{nkm}(\gamma) := |\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : P_{nkm}(\gamma) \neq 0 \text{ para todo } n, k, m \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}\}.$$

Observação 5.4. *Para a existência de $\gamma \in \Gamma$, basta apenas o Axioma da escolha. Em outras palavras, “Cada conjunto inclui um conjunto enumerável”. Este parece ser um ponto crucial para considerar o cenário quase periódico. Uma vez que extraímos γ de Γ , então podemos ver que $\omega_{\tilde{n}, \tilde{k}, \tilde{m}}^\sigma \neq 0$ para qualquer $n, k, m \in \Lambda(\gamma) \setminus \{0\}$ com $n_3, k_3, m_3 \neq 0$.*

Como $\gamma \in \Gamma$, então $P_{nkm}(\gamma) \neq 0$. Por outro lado, $|\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8 \neq 0$, consequentemente, $\omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma \neq 0$ para todo $n, k, m \in \Lambda(\gamma) \setminus \{0\}$ com $n_3, k_3, m_3 \neq 0$. É fácil ver que $P_{nkm}(\gamma)$ é um polinômio de grau finito, sendo mais específico, de grau 24, para fixados $n, k, m \in \Lambda$ com $n_3, k_3, m_3 \neq 0$.

De fato, pelas definições das expressões dadas no Lema 4.1, temos que

$$\omega_{nkm}^\sigma := (-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|n|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|k|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|m|}.$$

Agora, com a nova configuração, $n, k, m \in \Lambda(\gamma)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma &:= (-1)^{\sigma_1} \frac{\gamma n_3}{|\tilde{n}|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{\gamma k_3}{|\tilde{k}|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{\gamma m_3}{|\tilde{m}|} \\ &= \left((-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|\tilde{n}|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|\tilde{k}|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|\tilde{m}|} \right) \gamma. \end{aligned}$$

Defina

$$\tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma := (-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|\tilde{n}|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|\tilde{k}|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|\tilde{m}|}.$$

Assim, $\omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma$. Logo, temos que

$$\omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,0,0)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,0,0)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,0,1)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,0,1)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,1,0)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,1,0)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,1,1)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(0,1,1)},$$

$$\omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,0,0)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,0,0)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,0,1)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,0,1)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,1,0)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,1,0)}, \quad \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,1,1)} = \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^{(1,1,1)}.$$

Contudo,

$$\prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma = \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \gamma \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma = \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} P_{nkm}(\gamma) &:= |\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8 \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \tilde{\omega}_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma \\ &= |\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8 \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \left((-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|\tilde{n}|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|\tilde{k}|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|\tilde{m}|} \right) \\ &= |\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8 \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \left(\frac{|\tilde{k}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_1} n_3 + |\tilde{n}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_2} k_3 + |\tilde{n}||\tilde{k}|(-1)^{\sigma_3} m_3}{|\tilde{n}||\tilde{k}||\tilde{m}|} \right) \\ &= \frac{|\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8}{|\tilde{n}|^8 |\tilde{k}|^8 |\tilde{m}|^8} \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \left(|\tilde{k}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_1} n_3 + |\tilde{n}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_2} k_3 + |\tilde{n}||\tilde{k}|(-1)^{\sigma_3} m_3 \right) \\ &= \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} \left(|\tilde{k}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_1} n_3 + |\tilde{n}||\tilde{m}|(-1)^{\sigma_2} k_3 + |\tilde{n}||\tilde{k}|(-1)^{\sigma_3} m_3 \right). \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = |\tilde{k}||\tilde{m}|n_3$, $\beta = |\tilde{n}||\tilde{m}|k_3$ e $\eta = |\tilde{n}||\tilde{k}|m_3$, temos

$$P_{nkm}(\gamma) = \gamma^8 \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} ((-1)^{\sigma_1} \alpha + (-1)^{\sigma_2} \beta + (-1)^{\sigma_3} \eta).$$

Contudo,

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} ((-1)^{\sigma_1} \alpha + (-1)^{\sigma_2} \beta + (-1)^{\sigma_3} \eta) &= (\alpha + \beta + \eta)(\alpha + \beta - \eta)(\alpha - \beta + \eta)(\alpha - \beta - \eta) \\ &\quad (-\alpha + \beta + \eta)(-\alpha + \beta - \eta)(-\alpha - \beta + \eta)(-\alpha - \beta - \eta) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 + 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 + 2\alpha\beta) \\ &= [(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 + 2\alpha\beta)]^2 [(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2 - 2\alpha\beta)]^2. \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos e a fim de reduzir a expressão acima, considere $\Sigma = \alpha^2 + \beta^2 - \eta^2$.

Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} ((-1)^{\sigma_1} \alpha + (-1)^{\sigma_2} \beta + (-1)^{\sigma_3} \eta) &= (\Sigma + 2\alpha\beta)^2 (\Sigma - 2\alpha\beta)^2 \\ &= [(\Sigma + 2\alpha\beta)(\Sigma - 2\alpha\beta)]^2 \\ &= (\Sigma^2 - 4\alpha^2\beta^2)^2 \\ &= [(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\prod_{\sigma \in \{0,1\}^3} ((-1)^{\sigma_1} \alpha + (-1)^{\sigma_2} \beta + (-1)^{\sigma_3} \eta) = [(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^2,$$

onde $\alpha = |\tilde{k}||\tilde{m}|n_3$, $\beta = |\tilde{n}||\tilde{m}|k_3$ e $\eta = |\tilde{n}||\tilde{k}|m_3$. Defina,

$$\overline{P}_{nkm}(\gamma) := \left[(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \right]^2.$$

Para facilitar a obtenção do grau do polinômio $P_{nkm}(\gamma)$, considere agora $\tilde{n}' = (n_1, n_2)$, $\tilde{k}' = (k_1, k_2)$ e $\tilde{m}' = (m_1, m_2)$. Assim,

$$|\tilde{n}|^2 = |\tilde{n}'|^2 + \gamma^2 n_3^2, \quad |\tilde{k}|^2 = |\tilde{k}'|^2 + \gamma^2 k_3^2 \quad \text{e} \quad |\tilde{m}|^2 = |\tilde{m}'|^2 + \gamma^2 m_3^2.$$

Segue daí que

$$\alpha^2 = |\tilde{k}|^2 |\tilde{m}|^2 n_3^2 = \left(|\tilde{k}'|^2 + \gamma^2 k_3^2 \right) \left(|\tilde{m}'|^2 + \gamma^2 m_3^2 \right) n_3^2.$$

De forma análoga,

$$\beta^2 = |\tilde{n}|^2 |\tilde{m}|^2 k_3^2 = \left(|\tilde{n}'|^2 + \gamma^2 n_3^2 \right) \left(|\tilde{m}'|^2 + \gamma^2 m_3^2 \right) k_3^2,$$

e

$$\eta^2 = |\tilde{n}|^2 |\tilde{k}|^2 m_3^2 = \left(|\tilde{n}'|^2 + \gamma^2 n_3^2 \right) \left(|\tilde{k}'|^2 + \gamma^2 k_3^2 \right) m_3^2.$$

Vemos então que $\overline{P}_{nkm}(\gamma) = \left[(\alpha^2 + \beta^2 - \eta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \right]^2$ é um polinômio de grau 16 em γ . Além disso,

$$P_{nkm}(\gamma) = \gamma^8 \overline{P}_{nkm}(\gamma), \quad (5.20)$$

ou seja, $P_{nkm}(\gamma)$ é um polinômio em γ de grau 24, dado que os termos de maior ordem nunca desaparecem, com queríamos. Ou seja, o conjunto complementar do conjunto Γ é enumerável. Se $\gamma \in \Gamma$, então podemos eliminar o pior termo não linear, pois nesse caso, $\omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma \neq 0$ para todo $n, k, m \in \Lambda(\gamma)$ com $n_3, k_3, m_3 \neq 0$. Mais precisamente,

$$B_{\tilde{n}}^{(1,1,1)}(c_1, c_2) = \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{\tilde{n} = \tilde{k} + \tilde{m} \\ \omega_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\sigma = 0, n_3, k_3, m_3 \neq 0}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{\tilde{n}\tilde{k}\tilde{m}}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0$$

para todo $n \in \Lambda(\gamma)$. Com isso, $B_{\tilde{n}}^{(1,1,1)}(b^{osc}(t), b^{osc}(t)) = 0$. Então, podemos dissociar a equação limite (3.23) em três partes: a usual equação bi-dimensional de Navier-Stokes, com dado inicial $\bar{b}^h(0) \in (\ell^1(\bar{\Lambda}))^2$ e outras duas equações lineares com dados iniciais $\bar{b}^3(0) \in \ell^1(\bar{\Lambda})$ e $b^{osc}(0) := b(0) - \bar{b}(0) \in (\ell^1(\Lambda(\gamma) \setminus \bar{\Lambda}))^3$, respectivamente. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{b}_n^h(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n^h(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^h, \\ \partial_t \bar{b}_n^3(t) &= -|n|^2 \bar{b}_n^3(t) - \sum_{\substack{n=k+m \\ n_3=k_3=m_3=0}} i \mathbb{P}_n(\bar{b}_k^h \cdot m) \bar{b}_m^3, \\ \partial_t b_n^{osc}(t) &= -|n|^2 b_n^{osc}(t) - B_n^{(1,0,1)}(\bar{b}(t), b^{osc}(t)) - B_n^{(1,1,0)}(b^{osc}(t), \bar{b}(t)). \end{aligned}$$

para $n, k, m \in \Lambda(\gamma)$. Com isso, segue que a usual equação bi-dimensional de Navier-Stokes, com dado inicial $\bar{b}^h(0) \in (\ell^1(\bar{\Lambda}))^2$, admite solução via Proposição 3.1. Além disso, as outras

duas equações lineares com dados iniciais $\bar{b}^3(0) \in \ell^1(\bar{\Lambda})$ e $b^{osc}(0) \in (\ell^1(\Lambda(\gamma) \setminus \bar{\Lambda}))^3$ admitem soluções globais, basta proceder como no teorema de existência local (veja Teorema 2.1, p 53) e usar as estimativas globais no tempo do Lema 4.1. Com isso, obtemos a existência global de solução para a equação limite (3.23). Isso conclui a demonstração do Lema 3.1.

5.2 Demonstração do Lema 3.2

Inicialmente, para simplificarmos a equação do resto $r(t) := \{r_n(t)\}_{n \in \Lambda}$, considere

$$R_n^0(r(t), c(t), b(t)) := B_n^0(c(t), r(t)) + B_n^0(r(t), b(t)).$$

Com isso, a equação (3.24) pode ser agora escrita como

$$\partial_t r_n(t) + |n|^2 r_n(t) + R_n^0(r(t), c(t), b(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) = 0. \quad (5.21)$$

A fim de controlarmos $r(t)$, o ponto chave é estimar $R_n^0(r(t), c(t), b(t))$ e $B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))$ na equação acima. Para isso, precisamos analisar a seguinte integral oscilatória da parte não ressonante

$$\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2). \quad (5.22)$$

Agora, note que

$$\partial_t \left(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) \right) = B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c_1, c_2) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, \partial_t c_2), \quad (5.23)$$

onde $c_i := c_i(t)$, para $i \in \{1, 2\}$. De fato, para deduzir (5.23), primeiramente note que

$$\partial_t \left(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1(t), c_2(t)) \right) = \partial_t \left(\sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right).$$

Pela regra da cadeia e usando a linearidade da derivada temporal, temos

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1(t), c_2(t)) \right) &= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right) \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} \left(\partial_t \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \right) b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right) \right) \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} \left(i\Omega \omega_{nkm}^\sigma e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right) \right) \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} i\Omega \omega_{nkm}^\sigma e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \\
&\quad + \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right) \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \\
&\quad + \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right).
\end{aligned}$$

Agora, relembre a definição do conjunto $\mathcal{K}^\sigma := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : \omega_{nkm}^\sigma = 0\}$. Como $(n, k, m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c$, segue, por definição, que $\omega_{nkm}^\sigma \neq 0$. Assim, usando a definição do Lema 4.1, temos

$$\partial_t \left(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) \right) = B_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2) + \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right). \quad (5.24)$$

Agora, considere

$$\Phi(b_{nkm}^\delta) = \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \partial_t b_{nkm}^\delta. \quad (5.25)$$

Assim, pelo fato do termo $b_{nkm}^\delta(\cdot, \cdot)$ ser bilinear, como vimos no Capítulo 4 (veja Seção 4.1, p. 73), sabemos que

$$\partial_t \left(b_{nkm}^\delta(c_1, c_2) \right) = b_{nkm}^\delta(\partial_t c_1, c_2) + b_{nkm}^\delta(c_1, \partial_t c_2).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\Phi(b_{nkm}^\delta) &= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} \left(b_{nkm}^\delta(\partial_t c_1, c_2) + b_{nkm}^\delta(c_1, \partial_t c_2) \right) \\
&= \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(\partial_t c_1, c_2) \\
&\quad + \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in (\mathcal{K}^\sigma)^c}} \frac{\alpha_{\delta, \sigma}}{i\Omega \omega_{nkm}^\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_1, \partial_t c_2).
\end{aligned}$$

Vemos então que

$$\Phi(b_{nkm}^\delta) = \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c_1(t), c_2(t)) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1(t), \partial_t c_2(t)). \quad (5.26)$$

Logo, substituído a equação (5.26) em (5.24) obtemos (5.23).

Usando $\tilde{B}_n^{0+}$, em vez de B_n^{0+} , na equação do termo restante, é possível controlar $r(t)$, desde que o parâmetro de Coriolis Ω esteja no denominador. No entanto, ω_{nkm}^σ também está no denominador e há a possibilidade de que uma subsequência de $\{|\omega_{nkm}^\sigma|\}$ convirja para 0. Isso significa que não podemos controlar $\|e^{-t|n|^2} \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda}$ diretamente.

Para superar essa dificuldade, dividimos a equação (5.21) em duas partes: “muitos termos finitos” e “termos restantes pequenos” (em $\ell^1(\Lambda)$), para mais detalhes sobre essa técnica, veja Ibrahim e Yoneda [32]. Com isso, estamos dividindo $b(t) = \{b_n(t)\}_{n \in \Lambda}$, $c(t) = \{c_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ e $r(t) = \{r_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ da mesma forma. Para $\{r_n(t)\}_{n \in \Lambda}$ e $\eta = 1, 2, \dots$, nós escolhemos $\{s_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ ($s_1 < s_2 < \dots$), nessa ordem, satisfazendo

$$\|(\mathbb{I} - \mathcal{P}_\eta) r\| \rightarrow 0, \quad (5.27)$$

quando $\eta \rightarrow \infty$, onde

$$\mathcal{P}_\eta r := \{r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_{s_\eta}} : n_1, \dots, n_{s_\eta} \in \Lambda : n_k \neq n_l \text{ se } k \neq l, |n_j| \leq \eta \ \forall j = 1, 2, \dots, s_\eta\}.$$

A escolha de $n_1, \dots, n_{s_\eta}$ não é determinada unicamente, contudo isso não é importante em nossos argumentos. Então, sendo um pouco mais explícito, os “muitos termos finitos” são $r_{n_1}, \dots, r_{n_{s_\eta}}$ e os “termos restantes pequenos” são $\{(\mathbb{I} - \mathcal{P}_\eta) r_n\}_{n \in \Lambda}$. Por (5.27), basta tomar $\eta \rightarrow \infty$ para controlarmos $\{(\mathbb{I} - \mathcal{P}_\eta) r_n\}_{n \in \Lambda}$. Posto isso, agora nos resta estimar os “muitos termos finitos” $\{\mathcal{P}_\eta r_n(t)\}_{n \in \Lambda}$.

Agora, pela desigualdade (4.9) do Lema 4.1 ou, como visto da demonstração do mesmo, pág. 82, temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)\| &\leq \sum_{n=k+m} \left\| \frac{1}{i\Omega\{\omega_{nkm}^\sigma\}} \right\| \|n\|_{c_{1,k}} \|c_{2,m}\| \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{n=k+m} \left\| \frac{1}{\{\omega_{nkm}^\sigma\}} \right\| \|n\|_{c_{1,k}} \|c_{2,m}\| \\ &\leq \frac{1}{\Omega} \sum_{n=k+m} \frac{1}{\inf\{|\omega_{nkm}^\sigma|\}} \|n\|_{c_{1,k}} \|c_{2,m}\|, \end{aligned}$$

para cada $n \in \Lambda$. Com isso, a estimativa dos “muitos termos finitos” de $\{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c_1, c_2)\}_{n \in \Lambda}$ é dada por

$$\|\mathcal{P}_\eta \{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c_1, \mathcal{P}_\eta c_2)\}_{n \in \Lambda}\| \leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)} (\|n_1\|_{c_{1,k_1}} \|c_{2,m_1}\| + \dots + \|n_{s_\eta}\|_{c_{1,k_{s_\eta}}} \|c_{2,m_{s_\eta}}\|),$$

para $0 < t < T_L$, aqui T_L é o tempo de existência local, conforme Teorema 3.1 (veja p. 64), onde

$$\beta(\eta) := \inf\{|\omega_{nkm}^\sigma| : k = k_1, \dots, k_{s_\eta}; n = n_1, \dots, n_{s_\eta}; m = n - k\} \quad (5.28)$$

é o ínfimo de $\{|\omega_{nkm}^\sigma|\}$ sobre todas as combinações de $\sigma \in \{0, 1\}^3$. Além disso, por definição do conjunto $\mathcal{P}_\eta$, $|n_j| \leq \eta$ para todo $j = 1, \dots, s_\eta$. Logo, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_\eta\{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c_1, \mathcal{P}_\eta c_2)\}_{n \in \Lambda}\| &\leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)} (\eta\|c_{1,k_1}\|\|c_{2,m_1}\| + \dots + \eta\|c_{1,k_{s_\eta}}\|\|c_{2,m_{s_\eta}}\|) \\
&= \frac{1}{\Omega\beta(\eta)} \eta \underbrace{(\|c_{1,k_1}\|\|c_{2,m_1}\| + \dots + \|c_{1,k_{s_\eta}}\|\|c_{2,m_{s_\eta}}\|)}_{=\|\mathcal{P}_\eta c_1\|\|\mathcal{P}_\eta c_2\|} \\
&= \frac{1}{\Omega\beta(\eta)} \eta \|\mathcal{P}_\eta c_1\| \|\mathcal{P}_\eta c_2\| \\
&\leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \|\mathcal{P}_\eta c_1\| \|\mathcal{P}_\eta c_2\|. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

De forma análoga, pela desigualdade (4.9) (veja p. 72), para cada $n \in \Lambda$, temos que

$$\begin{aligned}
\|R_n^0(r(t), c(t), b(t))\| &\leq \|B_n^0(c(t), r(t))\| + \|B_n^0(r(t), b(t))\| \\
&= \sum_{n=k+m} \|n\| \|c_k\| \|r_m\| + \sum_{n=k+m} \|n\| \|r_k\| \|b_m\| \\
&= \sum_{n=k+m} \|n\| (\|c_k\| \|r_m\| + \|r_k\| \|b_m\|).
\end{aligned}$$

Da mesma forma como anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_\eta\{R_n^0(\mathcal{P}_\eta r(t), c(t), b(t))\}_{n \in \Lambda}\| &\leq \|n_1\| (\|c_{k_1}\| \|r_{m_1}\| + \|r_{k_1}\| \|b_{m_1}\|) + \dots \\
&\quad + \|n_{s_\eta}\| (\|c_{k_{s_\eta}}\| \|r_{m_{s_\eta}}\| + \|r_{k_{s_\eta}}\| \|b_{m_{s_\eta}}\|) \\
&\leq \eta (\|c_{k_1}\| \|r_{m_1}\| + \|r_{k_1}\| \|b_{m_1}\|) + \dots \\
&\quad + \eta (\|c_{k_{s_\eta}}\| \|r_{m_{s_\eta}}\| + \|r_{k_{s_\eta}}\| \|b_{m_{s_\eta}}\|) \\
&= \eta (\|c_{k_1}\| \|r_{m_1}\| + \dots + \|c_{k_{s_\eta}}\| \|r_{m_{s_\eta}}\| \\
&\quad + \|r_{k_1}\| \|b_{m_1}\| + \dots + \|r_{k_{s_\eta}}\| \|b_{m_{s_\eta}}\|) \\
&\leq \eta (\|\mathcal{P}_\eta c\| \|\mathcal{P}_\eta r\| + \|\mathcal{P}_\eta r\| \|\mathcal{P}_\eta b\|) \\
&\leq (1 + \eta^2)^{1/2} \|\mathcal{P}_\eta r\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Além do mais, se $y \in \ell^1(\Lambda)$ então, desde que $\mathcal{P}_\eta y$ tem um número finito de termos, vemos que

$$\| |n|^2 \mathcal{P}_\eta y \| \leq (1 + \eta^2) \|\mathcal{P}_\eta y\|. \tag{5.31}$$

Note que $\beta(\eta)$ é sempre finito, uma vez que só tem combinações finitas para a escolha de n , k e m . Também temos o mesmo tipo de estimativa para $\|\mathcal{P}_\eta \partial_t c_n\|$ usando (3.22) (veja p. 68). De fato, usando $\tilde{B}_n^{0+}$ no lugar de B_n^{0+} , por (3.22), temos

$$\|\partial_t c_n(t)\| \leq \| |n|^2 c_n(t) \| + \|B_n^0(c(t), c(t))\| + \|\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))\|.$$

Com isso, omitindo a variável temporal, obtemos que

$$\|\mathcal{P}_\eta\{\partial_t c_n\}_{n \in \Lambda}\| \leq \|\mathcal{P}_\eta\{|n|^2 c_n\}_{n \in \Lambda}\| + \|\mathcal{P}_\eta\{B_n^0(\mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c)\}_{n \in \Lambda}\| + \|\mathcal{P}_\eta\{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c)\}_{n \in \Lambda}\|.$$

Daí, segue das desigualdades (5.29), (5.30) e (5.31) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_\eta\{\partial_t c_n\}_{n \in \Lambda}\| &\leq (1 + \eta^2)\|\mathcal{P}_\eta c\| + (1 + \eta^2)^{1/2}\|\mathcal{P}_\eta c\|^2 + \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{1/2}\|\mathcal{P}_\eta c\|^2 \\ &= (1 + \eta^2)\|\mathcal{P}_\eta c\| \left(1 + (1 + \eta^2)^{-1/2}\|\mathcal{P}_\eta c\| + \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{-1/2}\|\mathcal{P}_\eta c\| \right) \\ &= (1 + \eta^2)\|\mathcal{P}_\eta c\| \left(1 + \frac{1}{(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\| + \frac{1}{\Omega\beta(\eta)(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\| \right). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\|\mathcal{P}_\eta\{\partial_t c_n\}_{n \in \Lambda}\| \leq (1 + \eta^2)\|\mathcal{P}_\eta c\| \left(1 + \frac{1}{(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\| + \frac{1}{\Omega\beta(\eta)(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\| \right). \quad (5.32)$$

Por outro lado, a fim de conseguirmos uma estimativa para $r(t)$, é suficiente controlarmos o termo $\{B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))\}_{n \in \Lambda}$. Para isso, basta considerarmos

$$y_n(t) := r_n(t) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)).$$

Não é difícil controlar $y_n(t)$, desde que $\{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t))\}_n$ e $\{c_n(t)\}_n$ possuem apenas uma quantidade finita de termos. Com isso, tem-se que $\tilde{B}^{0+} := \{\tilde{B}_n^{0+}\}_n$ tende a zero, na norma ℓ^1 , quando $\Omega \rightarrow \infty$.

De fato, um cálculo direto nos mostra que as funções $\{y_n(t)\}_n$ satisfazem a seguinte equação:

$$\partial_t y_n(t) + |n|^2 y_n(t) + R_n^0(y(t), c(t), b(t)) = \sum_{j=1}^3 E_n^j, \quad (5.33)$$

onde

$$\begin{aligned} E_n^1 &:= |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)); \\ E_n^2 &:= R_n^0(\tilde{B}^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)), c(t), b(t)); \\ E_n^3 &:= \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c(t), c(t)) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), \partial_t c(t)). \end{aligned} \quad (5.34)$$

De fato, por (5.21) vemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \left(y_n(t) - \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \right) &= -|n|^2 \left(y_n(t) - \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \right) - B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \\ &\quad - R_n^0 \left(\left(y(t) - \tilde{B}^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \right), c(t), b(t) \right). \end{aligned}$$

Logo, por (5.23) temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t y_n(t) &= -|n|^2 y_n + |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) - B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) - R_n^0(y(t), c(t), b(t)) \\
&\quad + R_n^0(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)), c(t), b(t)) + \partial_t \left(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \right) \\
&= -|n|^2 y_n + |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) - B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) - R_n^0(y(t), c(t), b(t)) \\
&\quad + R_n^0(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)), c(t), b(t)) + B_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c(t), c(t)) \\
&\quad + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), \partial_t c(t)) \\
&= -|n|^2 y_n + |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) - R_n^0(y(t), c(t), b(t)) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c(t), c(t)) \\
&\quad + R_n^0(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)), c(t), b(t)) + \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), \partial_t c(t)).
\end{aligned}$$

De onde segue (5.33).

Note que podemos olhar (5.33) como uma equação linear do tipo calor com “força externa” $\sum_{j=1}^3 E_n^j$. Assim, o ponto é controlar essa “força externa”. Considerando que $y_n(t)$ é uma solução de (5.33), então podemos trabalhar com a seguinte equação integral

$$y_n(t) = e^{-t|n|^2} y_n(0) + \int_0^t e^{-(t-s)|n|^2} \left(\sum_{j=1}^3 E_n^j(s) - R_n^0(y(s), c(s), b(s)) \right) ds, \quad (5.35)$$

onde E_n^j é como em (5.34).

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^3 E_n^j \right\| &\leq \sum_{j=1}^3 \|E_n^j\| = \| |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)) \| + \| R_n^0(\tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), c(t)), c(t), b(t)) \| \\
&\quad + \| \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \partial_t c(t), c(t)) \| + \| \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, c(t), \partial_t c(t)) \|.
\end{aligned}$$

Considere $\Sigma_n := \sum_{j=1}^3 E_n^j$. Então,

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{P}_\eta \{ \Sigma_n \}_{n \in \Lambda} \| &\leq \| \mathcal{P}_\eta \{ |n|^2 \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c) \}_n \| + \| \mathcal{P}_\eta \{ \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta \partial_t c) \}_n \| \\
&\quad + \| \mathcal{P}_\eta \{ \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta \partial_t c, \mathcal{P}_\eta c) \}_n \| + \| \mathcal{P}_\eta \{ R_n^0(\mathcal{P}_\eta \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c), \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta b) \}_n \|.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades (5.29), (5.30) e (5.31), obtemos

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{P}_\eta \{ \Sigma_n \}_{n \in \Lambda} \| &\leq (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta \{ \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c) \}_{n \in \Lambda} \| + \frac{2}{\Omega \beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta c \| \| \mathcal{P}_\eta \partial_t c \| \\
&\quad + (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta \{ \tilde{B}_n^{0+}(\Omega t, \mathcal{P}_\eta c, \mathcal{P}_\eta c) \}_{n \in \Lambda} \| (\| \mathcal{P}_\eta c \| + \| \mathcal{P}_\eta b \|) \\
&\leq (1 + \eta^2)^{1/2} \frac{1}{\Omega \beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta c \|^2 + \frac{2}{\Omega \beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta c \| \| \mathcal{P}_\eta \partial_t c \| \\
&\quad + (1 + \eta^2)^{1/2} \frac{1}{\Omega \beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \| \mathcal{P}_\eta c \|^2 (\| \mathcal{P}_\eta c \| + \| \mathcal{P}_\eta b \|).
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (5.32) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_\eta\{\Sigma_n\}_{n \in \Lambda}\| &\leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)\|\mathcal{P}_\eta c\|^2 + (1 + \eta^2)\frac{1}{\Omega\beta(\eta)}\|\mathcal{P}_\eta c\|^2(\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) \\ &\quad + \frac{2}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{3/2}\|\mathcal{P}_\eta c\|^2 \left(1 + \frac{1}{(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\| + \frac{1}{\Omega\beta(\eta)(1 + \eta^2)^{1/2}}\|\mathcal{P}_\eta c\|\right). \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $\bar{\varepsilon} > 0$, existe η_0 e Ω_0 , dependendo de η_0 , tal que se $\Omega > \Omega_0$ e $\eta > \eta_0$, tem-se que

$$\|\{\Sigma_n\}_{n \in \Lambda}\| < \bar{\varepsilon}.$$

Posto isso, vejamos agora uma estimativa da equação integral (5.35). Assim, lembrando que $y(t) := \{y_n(t)\}_{n \in \Lambda}$, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_\eta y(t)\| &\leq \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| + \int_0^t \|e^{-(t-s)|n|^2}\| \left(\sum_{j=1}^3 \|\mathcal{P}_\eta\{E_n^j\}_{n \in \Lambda}\| + \|\mathcal{P}_\eta\{R_n^0(y, c, b)\}_{n \in \Lambda}\| \right) ds \\ &\leq \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| + \int_0^t \|e^{-(t-s)|n|^2}\| (\|\mathcal{P}_\eta\{R_n^0(y, c, b)\}_{n \in \Lambda}\| + \bar{\varepsilon}) ds \\ &\leq \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| + \int_0^t \left(\sup_{n \in \Lambda} \|e^{-(t-s)|n|^2} n\| \|\mathcal{P}_\eta y\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) + \bar{\varepsilon} \right) ds \\ &\leq \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| + \int_0^t \left(\frac{C}{(t-s)^{1/2}} \|\mathcal{P}_\eta y\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) + \bar{\varepsilon} \right) ds \\ &= \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| + \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1/2}} \|\mathcal{P}_\eta y\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) ds + \int_0^t \bar{\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Contudo, como $r(t) := c(t) - b(t)$ e $c_n(0) = b_n(0)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta y(0)\| &\leq \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta r(0)\| + \|e^{-t|n|^2}\mathcal{P}_\eta\{\tilde{B}_n^{0+}(\Omega \cdot 0, c(0), c(0))\}_{n \in \Lambda}\| \\ &\leq \|\mathcal{P}_\eta\{\tilde{B}_n^{0+}(0, c(0), c(0))\}_{n \in \Lambda}\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em vista (5.29) (veja p. 95), chegamos a estimativa

$$\|\mathcal{P}_\eta\{\tilde{B}_n^{0+}(0, c(0), c(0))\}_{n \in \Lambda}\| \leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{1/2}\|c(0)\|^2. \quad (5.36)$$

Assim, por (5.36), temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_\eta y(t)\| &\leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{1/2}\|c(0)\|^2 + t\bar{\varepsilon} + \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1/2}} \|\mathcal{P}_\eta y\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) ds \\ &\leq \frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{1/2}\|c(0)\|^2 + \bar{\varepsilon}T_L + \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1/2}} \|\mathcal{P}_\eta y\| (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) ds, \end{aligned}$$

para todo $0 < t < T_L$; lembre-se que T_L é o tempo de existência local, conforme Teorema 3.1 (veja p. 64). Como

$$\frac{1}{\Omega\beta(\eta)}(1 + \eta^2)^{1/2}\|c(0)\|^2 + \bar{\varepsilon}T_L$$

é independente de t , considere esse termo constante. Logo, pela desigualdade de Gronwall [18, —], obtemos a estimativa

$$\|\mathcal{P}_\eta y(t)\| \leq \left(\frac{1}{\Omega\beta(\eta)} (1 + \eta^2)^{1/2} \|c(0)\|^2 + \varepsilon T_L \right) e^{\int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1/2}} (\|\mathcal{P}_\eta c\| + \|\mathcal{P}_\eta b\|) ds}. \quad (5.37)$$

Tendo em vista a desigualdade (5.37), concluímos que para todo $\varepsilon > 0$, existe η_0 , independente de Ω_0 , e Ω_0 , dependendo de η_0 , tal que se $\eta > \eta_0$ e $\Omega > \Omega_0$, então $\|\mathcal{P}_\eta y\| < \varepsilon$ para $0 < t < T_L$, onde T_L é como anteriormente e, além disso, depende apenas da norma em ℓ^1 do dado inicial, independente de η_0 e Ω_0 . Como colocado anteriormente, a parte $(\mathbb{I} - \mathcal{P}_\eta)y$ é facilmente controlada quando tomamos η suficientemente grande, independente de Ω_0 . Com isso, conseguimos controlar $r(t)$ tomando η e Ω suficientemente grandes. Isso conclui a prova do Lema 3.2.

5.3 Demonstração do resultado principal (Teorema 3.2)

Usamos um argumento de bootstrapping. A técnica é inspirada no trabalho de Babin, Mahalov e Nicolaenko [9].

Tome $T > 0$ arbitrário. Este tempo T será um tempo grande de existência, para Ω suficientemente grande. Além disso, considere

$$M := M(\|c(0)\|, T) \quad \text{tal que} \quad \sup_{0 < t < T} \|b(t)\| = M/2.$$

Aqui, M depende apenas de $T > 0$ e da norma do dado inicial $\|c(0)\|$, como colocado na Proposição 3.1. Dado que $\|c(0)\| = \|b(0)\|$, então

$$\|c(0)\| \leq \sup_{0 < t < T} \|b(t)\| < M. \quad (5.38)$$

Com isso, pelo resultado de existência local, Teorema 3.1 (veja p. 64), existe $T_L > 0$, onde

$$T_L \geq \frac{C}{\|c(0)\|^2} \quad \text{tal que} \quad \sup_{0 < t < T_L} \|c(t)\| \leq 10\|c(0)\|,$$

onde T_L é o tempo de existência local do teorema. Com isso, por (5.38) tem-se

$$\sup_{0 < t < T_L} \|c(t)\| \leq 10M.$$

Podemos melhorar esse tempo tomando Ω grande, via o Lema 3.2. Vamos agora estimar $\|c(T_L)\|$. Pelo Lema 3.2, existe $\Omega'_0 > 0$, tal que

$$\|r(t)\| = \|c(t) - b(t)\| < M/2 \quad \text{para} \quad 0 < t < T_L \quad \text{e} \quad |\Omega| > \Omega'_0,$$

bastando tomar $\varepsilon < M/2$, pois o lema é válido para todo $\varepsilon > 0$.

Além disso, $\|c(t)\| \leq \|r(t)\| + \|b(t)\|$. Vejamos essa desigualdade em $t = T_L$. Observe que

$$\begin{aligned}\|c(T_L)\| &\leq \|r(T_L)\| + \|b(T_L)\| \\ &\leq M/2 + M/2 \\ &= M.\end{aligned}$$

Com isso, podemos estender o tempo de existência de $c(t)$ como segue:

$$\|c(t)\| \leq 10M \quad \text{para} \quad 0 < t < 2T_L.$$

Repetindo esse argumento, podemos ver que $\sup_{0 < t < T} \|c(t)\| \leq 10M$ para $|\Omega|$ suficientemente grande. Esta é a estimativa desejada. Com ela, as estimativas do Lema 4.1 e um argumento similar à aquele usado na demonstração do Teorema 2.1 verifica-se facilmente a existência de solução para o sistema (3.22).

Posto isso, pelos Lemas 3.1 e 3.2 e admitindo a existência de solução para o sistema (3.22), como mostrado acima, segue, trivialmente, a existência de solução para o sistema (3.9) e, conseqüentemente, para (1.20). Portanto, (1) admite solução global no tempo.

6 Conclusão

Este trabalho permitiu ao autor um forte contato e aprendizado com ferramentas da análise harmônica e funcional no estudo das equações de Navier-Stokes-Coriolis. Tais equações são utilizadas em vários modelos matemáticos ligados a diversos fenômenos físicos. Além disso, este trabalho permitiu o contato com novos espaços de funções como, podemos destacar, os espaços das funções quase periódicas e o espaço que é a pré-imagem de Fourier das medidas de Radon complexas. Estes são exemplos de espaços que normalmente não são abordados nos cursos básicos de pós-graduação em matemática.

Por outro lado, os métodos e argumentos aqui utilizados para obter as estimativas das partes linear e não linear, obtidas nos Capítulos 4 e 5, servem de motivação para estudarmos resultados de existência de soluções das equações de Navier-Stokes-Coriolis em outros espaços de funções, com adequadas adaptações. Para isso, se faz necessário investigar propriedades dos espaços de funções e, posteriormente, ver sua compatibilidade com as equações de Navier-Stokes-Coriolis. Isto motiva futuros estudos nesta linha de investigação de dinâmica dos fluidos.

Referências

- 1 ALMEIDA, M. F. de; FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. Uniform global well-posedness of the Navier-Stokes-Coriolis system in a new critical space. *Math. Z.* **287**(3–4) (2017), 735–750.
- 2 ALVAREZ, L. L. A. *Boa-colocação global e má-colocação das equações de Navier-Stokes com força de Coriolis em espaços de Fourier-Besov*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2016.
- 3 ANGULO-CASTILLO, V.; FERREIRA, L. C. F. Global well-posedness and asymptotic behavior for Navier-Stokes-Coriolis equations in homogeneous Besov spaces. to appear in *Asymptotic Analysis* (2019).
- 4 ARGUEDAS, V.; CASTRO, E. Some aspects in n-dimensional almost periodic functions III. *Revista de Mat. Teor. Apl.* **11**(2) (2004), 25–33.
- 5 ARGUEDAS, V.; CASTRO, E. Algunos aspectos teóricos de las funciones casi periódicas n-dimensionales. *Revista de Mat. Teor. Apl.* **7**(1–2) (2000), 165–174.
- 6 ARNOLD, V. I. *Ordinary Differential Equations*. Second printing of the 1992 edition. Translated from the Russian by Roger Cooke. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- 7 AZEVEDO, F. L. *Boa-colocação global para as equações de Navier-Stokes-Coriolis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2017.
- 8 BABIN, A.; MAHALOV, A.; NIKOLAENKO, B. Fast singular oscillating limits and global regularity for the 3D primitive equations of geophysics. Special issue for R. Temam 60th birthday. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **34**(2) (2000), 201–222.
- 9 BABIN, A.; MAHALOV, A.; NIKOLAENKO, B. Regularity and integrability of 3D Euler and Navier-Stokes equations for rotating fluids. *Asymptot. Anal.* **15**(2) (1997), 103–150.
- 10 BABIN, A.; MAHALOV, A.; NIKOLAENKO, B. Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains. *Indiana Univ. Math. J.* **48**(3) (1999), 1133–1176.
- 11 BABIN, A.; MAHALOV, A.; NIKOLAENKO, B. 3D Navier-Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity. Dedicated to Professors C. Foias and R. Temam (Bloomington, IN, 2000). *Indiana Univ. Math. J.* **50** (2001), (Special Issue, 1–35).
- 12 BOHR, H. *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company. New York, N.Y., 1947.
- 13 CHEMIN, J. Y.; DESJARDINS, B.; GALLAGHER, I.; GRENIER, E. *Mathematical geophysics: An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 32. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

- 14 CORDUNEANU, C. *Almost Periodic Functions*. Second edition. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 22. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1989.
- 15 DERIAZ, E.; PERRIER, V. Orthogonal Helmholtz decomposition in arbitrary dimension using divergence-free and curl-free wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **26**(2) (2009), 249–269.
- 16 DIEUDONNÉ, J. *Foundations of Modern Analysis*. Pure and Applied Mathematics, 10-i. Academic Press Inc., New York - London, 1969.
- 17 ESKIN, G. *Lectures on Linear Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 123. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- 18 EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- 19 FARWIG, R.; KOZOMO, H.; SOHR, H. The Helmholtz decomposition in arbitrary unbounded domains - A theory beyond L^2 . *Proceedings of Equadiff* **11**. International Conference on Differential Equations (2005), 77–85.
- 20 FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern techniques and their applications*. Second edition. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- 21 FUENTES, O. U. V. Kelvin’s discovery of Taylor columns. *Eur. J. Mech. B/Fluids*. **28** (2009), 469–472.
- 22 FUJITA, H.; KATO, T. On the Navier-Stokes initial value problem I. *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964), 269–315.
- 23 GALDI, G. P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*. Steady-state problems. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2011.
- 24 GIGA, Y.; INUI, K.; MAHALOV, A.; MATSUI, S. Uniform local solvability for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force. *Methods Appl. Anal.* **12**(4) (2005), 381–393.
- 25 GIGA, Y.; INUI, K.; MAHALOV, A.; MATSUI, S. Navier-Stokes equations in a rotating frame in $\mathbb{R}^3$ with initial data nondecreasing at infinity. *Hokkaido Math. J.* **35**(2) (2006), 321–364.
- 26 GIGA, Y.; INUI, K.; MAHALOV, A.; SAAL, J. Uniform global solvability of the rotating Navier-Stokes equations for nondecaying initial data. *Indiana Univ. Math. J.* **57**(6) (2008), 2775–2791.
- 27 GIGA, Y.; INUI, K.; MAHALOV, A.; SAAL, J. Global solvability of the Navier-Stokes equations in spaces based on sum-closed frequency sets. *Adv. Differential Equations*. **12**(7) (2007), 721–736.
- 28 GIGA, Y.; MAHALOV, A.; YONEDA, T. On a bounded for amplitudes of Navier-Stokes flow with almost periodic initial data. *J. Math. Fluid Mech.* **13**(3) (2011), 459–467.

-
- 29 GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2008.
- 30 GRAFAKOS, L. *Modern Fourier Analysis*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2009.
- 31 HIEBER, M.; SHIBATA, Y. The Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes equations in the rotational framework. *Math. Z.* **265**(2) (2010), 481–491.
- 32 IBRAHIM, S.; YONEDA, T. Long-time solvability of the Navier-Stokes-Boussinesq equations with almost periodic initial large data. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **20**(1) (2013), 1–25.
- 33 IWABUCHI, T.; TAKADA, R. Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework. *Math. Annal.* **357**(2) (2013), 727–741.
- 34 IWABUCHI, T.; TAKADA, R. Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type. *J. Funct. Anal.* **267**(5) (2014), 1321–1337.
- 35 KESAVAN, S. *Topics in functional analysis and applications*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1989.
- 36 KHAMSI, M. A.; KIRK, W. A. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2001.
- 37 KISHIMOTO, N.; YONEDA, T. Global solvability of the rotating Navier-Stokes equations with fractional Laplacian in a periodic domain. *Math. Ann.* **372**(1–2) (2018), 743–779.
- 38 KONIECZNY, P.; YONEDA, T. On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations.* **250**(10) (2011), 3859–3873.
- 39 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- 40 LEVITAN, B. M.; ZHICOV, V. V. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge University Press. Cambridge-New York, 1982.
- 41 MAHALOV, A.; NICOLAENKO, B.; BARDOS, C.; GOLSE, F. Regularity of Euler equations for a class of three-dimensional initial data. *Trends in partial differential equations of mathematical physics*, 161–185, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **61**, Birkhäuser, Basel, 2005.
- 42 NARICI, L.; BECKENSTEIN, E. *Topological Vector Spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 296. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- 43 PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.
- 44 POINCARÉ, H. Sur la précession des corps déformables. *Bulletin Astronomique.* **27** (1910), 321–356.
- 45 RUDIN, W. *Functional Analysis*. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

-
- 46 TEMAM, R. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 66. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995.
- 47 TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
- 48 VASY, A. *Partial Differential Equations: An accessible route through theory and applications*. Graduate Studies in Mathematics, 169. American Mathematical Society, 2015.
- 49 YONEDA, T. Long-time solvability of the Navier-Stokes equations in a rotating frame with spatially almost periodic large data. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **200**(1) (2011), 225–237.
- 50 ZUAZO, J. D. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

APÊNDICE A – Espaços de Banach

Aqui damos algumas definições sobre espaços de Banach e, principalmente, mostramos que o espaço $(X^\Lambda, \|\cdot\|)$, conforme Definição 3.2, é um espaço de Banach.

Sabemos que um espaço *normado* é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma norma. Além disso, lembremos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em um espaço métrico é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_0$. Daí, não é difícil concluir que toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, em geral, uma sequência de Cauchy não é convergente. Um espaço métrico é dito *completo* se toda sequência de Cauchy converge nele.

No contexto de espaços normados, isto motiva a definição.

Definição A.1. *Seja X um espaço vetorial normado. X é chamado espaço de Banach se toda sequência de Cauchy converge nele.*

Observação A.1. *Assim, um espaço normado é um espaço de Banach se é um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por sua norma.*

Lembre-se que

$$X^\Lambda(\mathbb{R}^3) := \left\{ u = \sum_{n \in \Lambda} c_n e^{in \cdot x} \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^3) : c_{-n} = c_n^* \text{ para } n \in \Lambda \text{ e } \|u\|_{X^\Lambda} := \sum_{n \in \Lambda} |c_n| < \infty \right\},$$

onde c_n^* é o conjugado do coeficiente c_n e $c := \{c_n\}_{n \in \Lambda}$. Além disso, aqui $\|\cdot\|_{X^\Lambda} := \|\cdot\|_{\ell^1}$.

Proposição A.1. *O espaço $(X^\Lambda, \|\cdot\|_{X^\Lambda})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Primeiro, vejamos que X^Λ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{X^\Lambda}$ define, de fato, uma norma. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in X^\Lambda$, então

$$\|\lambda u\|_{X^\Lambda} = \sum_{n \in \Lambda} |\lambda c_n| = |\lambda| \sum_{n \in \Lambda} |c_n| = |\lambda| \|u\|_{X^\Lambda}.$$

O que mostra que a operação de multiplicação por escalar está bem definida em X^Λ e que $\|\lambda u\|_{X^\Lambda} = |\lambda| \|u\|_{X^\Lambda}$. É trivial que a sequência nula pertença a X^Λ e que se $\|u\| = 0$, então $u \equiv 0$. Além disso, não é difícil ver que a soma em X^Λ é bem definida e que vale a desigualdade triangular. De fato, sejam $u, v \in X^\Lambda$, então para todo $n \in \Lambda$,

$$\|u + v\|_{X^\Lambda} = \sum_{n \in \Lambda} |c_n + b_n| \leq \sum_{n \in \Lambda} |c_n| + |b_n| = \sum_{n \in \Lambda} |c_n| + \sum_{n \in \Lambda} |b_n| < \infty,$$

onde $u = \sum_{n \in \Lambda} c_n e^{in \cdot x}$ e $v = \sum_{n \in \Lambda} b_n e^{in \cdot x}$. Com isso, concluímos que $u + v \in X^\Lambda$ e que $\|u + v\|_{X^\Lambda} \leq \|u\|_{X^\Lambda} + \|v\|_{X^\Lambda}$. Logo, X^Λ é um espaço vetorial e a aplicação

$$\alpha \mapsto \|\alpha\|_{X^\Lambda} := \|\alpha\|_{\ell^1}$$

define uma norma sobre ele. Ou seja, X^Λ é um espaço vetorial normado.

Considere agora a aplicação $\mathbf{T}$ definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad X^\Lambda &\longrightarrow \ell^1(\Lambda) \\ u = \sum_{n \in \Lambda} c_n e^{in \cdot x} &\longmapsto (c_n)_{n \in \Lambda} . \end{aligned}$$

Vejamos que $\mathbf{T}$ é um isomorfismo isométrico. De fato, dado $u \in X^\Lambda$ veja que

$$\|\mathbf{T}(u)\|_{\ell^1} = \|(c_n)_n\|_{\ell^1} = \sum_{n \in \Lambda} |c_n| = \|u\|_{X^\Lambda}.$$

Logo, $\|\mathbf{T}(u)\|_{\ell^1} = \|u\|_{X^\Lambda}$, de onde concluímos que $\mathbf{T}$ define uma isometria. A sobrejetividade de $\mathbf{T}$ é trivial, segue por definição da aplicação. Portanto, $\mathbf{T}$ é um isomorfismo isométrico. Posto isso, como ℓ^1 é um espaço de Banach, segue que X^Λ também o é, equipado com a norma $\|\cdot\|_{X^\Lambda} = \|\cdot\|_{\ell^1}$, como queríamos.

□

APÊNDICE B – Igualdade (4.19) da demonstração do Lema 4.1

Afirmamos que

$$\sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) := \mathcal{R}_n^{\delta_1} i \mathbb{P}_n(\mathcal{R}_k^{\delta_2} c_k(t) \cdot m) \mathcal{R}_m^{\delta_3} c_m(t),$$

$$\alpha_{\delta, \sigma} = (-1)^{\delta_2+\delta_3} \left(\frac{1}{8}\right) \prod_{j=1}^3 (-1)^{\delta_j \sigma_j} (-i)^{\delta_j},$$

e

$$\omega_{nkm}^\sigma = (-1)^{\sigma_1} \frac{n_3}{|n|} + (-1)^{\sigma_2} \frac{k_3}{|k|} + (-1)^{\sigma_3} \frac{m_3}{|m|} \quad \text{para } \sigma \in \{0,1\}^3.$$

Para verificarmos (B.1), primeiro note que

$$\sum_{n=k+m} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} \sum_{\sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m).$$

Assim, observe que para cada $\delta \in \{0,1\}^3$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} &= \alpha_{\delta, (0,0,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + \alpha_{\delta, (0,0,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} + \alpha_{\delta, (0,1,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} \\ &\quad + \alpha_{\delta, (0,1,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} + \alpha_{\delta, (1,0,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + \alpha_{\delta, (1,0,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} \\ &\quad + \alpha_{\delta, (1,1,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + \alpha_{\delta, (1,1,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}}. \end{aligned}$$

Agora, seja

$$\alpha = \frac{\Omega t n_3}{|n|}, \quad \beta = \frac{\Omega t k_3}{|k|} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{\Omega t m_3}{|m|}. \quad (\text{B.2})$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^0 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^0 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^0 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(\frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} \right)} \\ &= e^{i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\eta} \\ &= (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) (\cos(\eta) + i \operatorname{sen}(\eta)) \\ &= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)] \\ &\quad (\cos(\eta) + i \operatorname{sen}(\eta)) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) \\ &\quad - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [\cos(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) \\ &\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta)]. \end{aligned}$$

De forma análoga, temos os seguintes sete blocos de igualdades:

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^0 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^0 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^1 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(\frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{-i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{-i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)) (\cos(\eta) - i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) - i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) \\
&\quad - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [-\cos(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^0 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^1 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^0 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(\frac{n_3}{|n|} - \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{-i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{i\alpha} e^{-i\beta} e^{i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) - i\operatorname{sen}(\beta)) (\cos(\eta) + i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (-\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) + i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [\cos(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^0 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^1 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^1 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(\frac{n_3}{|n|} - \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{-i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{-i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{i\alpha} e^{-i\beta} e^{-i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) - i\operatorname{sen}(\beta)) (\cos(\eta) - i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (-\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) - i\operatorname{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [-\cos(\alpha) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\eta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\eta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^1 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^0 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^0 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(-\frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{-i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{-i\alpha} e^{i\beta} e^{i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) - i\text{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) + i\text{sen}(\beta)) (\cos(\eta) + i\text{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (\cos(\alpha) \text{sen}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta)) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) + i\text{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta) + \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) \\
&\quad + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [\cos(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^1 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^0 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^1 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(-\frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{-i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{-i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{-i\alpha} e^{i\beta} e^{-i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) - i\text{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) + i\text{sen}(\beta)) (\cos(\eta) - i\text{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) + i (\cos(\alpha) \text{sen}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta)) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) - i\text{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta) - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) \\
&\quad + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [-\cos(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^1 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^1 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^0 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(-\frac{n_3}{|n|} - \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
&= e^{-i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{-i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{-i\alpha} e^{-i\beta} e^{i\eta} \\
&= (\cos(\alpha) - i\text{sen}(\alpha)) (\cos(\beta) - i\text{sen}(\beta)) (\cos(\eta) + i\text{sen}(\eta)) \\
&= [\cos(\alpha) \cos(\beta) - i (\cos(\alpha) \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha) \cos(\beta)) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)] \\
&\quad (\cos(\eta) + i\text{sen}(\eta)) \\
&= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta) + \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) \\
&\quad - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) + i [\cos(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\eta) - \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\eta) \\
&\quad - \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\eta)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} &= e^{i\Omega t \left((-1)^1 \frac{n_3}{|n|} + (-1)^1 \frac{k_3}{|k|} + (-1)^1 \frac{m_3}{|m|} \right)} = e^{i\Omega t \left(-\frac{n_3}{|n|} - \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} \right)} \\
 &= e^{-i\Omega t \frac{n_3}{|n|}} e^{-i\Omega t \frac{k_3}{|k|}} e^{-i\Omega t \frac{m_3}{|m|}} = e^{-i\alpha} e^{-i\beta} e^{-i\eta} \\
 &= (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) (\cos(\beta) - i\sin(\beta)) (\cos(\eta) - i\sin(\eta)) \\
 &= [\cos(\alpha) \cos(\beta) - i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] \\
 &\quad (\cos(\eta) - i\sin(\eta)) \\
 &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\eta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\eta) \\
 &\quad - \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\eta) + i[-\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\eta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\eta) \\
 &\quad - \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\eta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\eta)].
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para $\delta = (0, 0, 0)$, temos $\alpha_{(0,0,0),\sigma} = 1/8$, $\forall \sigma \in \{0, 1\}^3$. Além disso, para $\delta = (0, 0, 1)$, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(0,0,1),(0,0,0)} &= i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(0,0,1)} = -i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(0,1,0)} = i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(0,1,1)} = -i/8, \\
 \alpha_{(0,0,1),(1,0,0)} &= i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(1,0,1)} = -i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(1,1,0)} = i/8, \quad \alpha_{(0,0,1),(1,1,1)} = -i/8.
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $\delta = (0, 1, 0)$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(0,1,0),(0,0,0)} &= i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(0,0,1)} = i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(0,1,0)} = -i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(0,1,1)} = -i/8, \\
 \alpha_{(0,1,0),(1,0,0)} &= i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(1,0,1)} = i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(1,1,0)} = -i/8, \quad \alpha_{(0,1,0),(1,1,1)} = -i/8.
 \end{aligned}$$

Para $\delta = (0, 1, 1)$, temos as igualdades

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(0,1,1),(0,0,0)} &= -1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(0,0,1)} = 1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(0,1,0)} = 1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(0,1,1)} = -1/8, \\
 \alpha_{(0,1,1),(1,0,0)} &= -1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(1,0,1)} = 1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(1,1,0)} = 1/8, \quad \alpha_{(0,1,1),(1,1,1)} = -1/8.
 \end{aligned}$$

Para $\delta = (1, 0, 0)$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(1,0,0),(0,0,0)} &= -i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(0,0,1)} = -i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(0,1,0)} = -i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(0,1,1)} = -i/8, \\
 \alpha_{(1,0,0),(1,0,0)} &= i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(1,0,1)} = i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(1,1,0)} = i/8, \quad \alpha_{(1,0,0),(1,1,1)} = i/8.
 \end{aligned}$$

Para $\delta = (1, 0, 1)$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(1,0,1),(0,0,0)} &= 1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(0,0,1)} = -1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(0,1,0)} = 1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(0,1,1)} = -1/8, \\
 \alpha_{(1,0,1),(1,0,0)} &= -1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(1,0,1)} = 1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(1,1,0)} = -1/8, \quad \alpha_{(1,0,1),(1,1,1)} = 1/8.
 \end{aligned}$$

Para $\delta = (1, 1, 0)$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(1,1,0),(0,0,0)} &= 1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(0,0,1)} = 1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(0,1,0)} = -1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(0,1,1)} = -1/8, \\
 \alpha_{(1,1,0),(1,0,0)} &= -1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(1,0,1)} = -1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(1,1,0)} = 1/8, \quad \alpha_{(1,1,0),(1,1,1)} = 1/8.
 \end{aligned}$$

Por fim, para $\delta = (1, 1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_{(1,1,1),(0,0,0)} &= i/8, & \alpha_{(1,1,1),(0,0,1)} &= -i/8, & \alpha_{(1,1,1),(0,1,0)} &= -i/8, & \alpha_{(1,1,1),(0,1,1)} &= i/8, \\ \alpha_{(1,1,1),(1,0,0)} &= -i/8, & \alpha_{(1,1,1),(1,0,1)} &= i/8, & \alpha_{(1,1,1),(1,1,0)} &= i/8, & \alpha_{(1,1,1),(1,1,1)} &= -i/8. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) &= \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} \left(\alpha_{\delta, (0,0,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + \alpha_{\delta, (0,0,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} \right. \\ &+ \alpha_{\delta, (0,1,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} + \alpha_{\delta, (0,1,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} + \alpha_{\delta, (1,0,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + \alpha_{\delta, (1,0,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} \\ &\left. + \alpha_{\delta, (1,1,0)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + \alpha_{\delta, (1,1,1)} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)). \end{aligned}$$

Vejamos as somas de cada parcela b_{nkm}^δ para cada $\delta \in \{0, 1\}^3$. Usando os valores encontrados de $\alpha_{\delta, \sigma}$ e considerando

$$\begin{aligned} A &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta), & B &= \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\eta), & C &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\eta), \\ D &= \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\eta) & E &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\eta), & F &= \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\eta), \\ G &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\eta), & H &= \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\eta), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

para $\delta = (0, 0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\delta=(0,0,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,0,0), \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)} &= \frac{1}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\ &\quad \left. + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(0,0,0)} \\ &= 1/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) + A + B + C - D + i(-E + F + G + H) \\ &\quad + A + B - C + D + i(E - F + G + H) + A - B + C + D + i(-E - F + G - H) \\ &\quad + A - B + C + D + i(E + F - G + H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\ &\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) + A - B - C - D + i(-E - F - G + H)] b_{nkm}^{(0,0,0)} \\ &= 1/8 \cdot (8A) b_{nkm}^{(0,0,0)} = A b_{nkm}^{(0,0,0)}. \end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $A = \cos\left(\frac{\Omega t n_3}{|n|}\right) \cos\left(\frac{\Omega t k_3}{|k|}\right) \cos\left(\frac{\Omega t m_3}{|m|}\right)$. Por outro lado,

$$\sum_{\delta=(0,0,0)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^0 b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_k(t), c_m(t)), \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\theta_k^0(\Omega t) := \cos\left(\frac{\Omega t k_3}{|k|}\right) \quad \text{e} \quad \theta_k^1(\Omega t) := \sin\left(\frac{\Omega t k_3}{|k|}\right). \quad (\text{B.5})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(0,0,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,0,0), \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^0 b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.6})$$

Analogamente, para $\delta = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\delta=(0,0,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,0,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)} &= \frac{i}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
&\quad \left. + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(0,0,1)} \\
&= i/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) - A - B - C + D + i(E - F - G - H) \\
&\quad + A + B - C + D + i(E - F + G + H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
&\quad + A - B + C + D + i(E + F - G + H) - A - B + C - D + i(E - F + G + H) \\
&\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) - A + B + C + D + i(E + F + G - H)] b_{nkm}^{(0,0,1)} \\
&= i/8 \cdot (8iE) b_{nkm}^{(0,0,1)} = -E b_{nkm}^{(0,0,1)}.
\end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $-E = -\cos\left(\frac{i\Omega n_3}{|n|}\right) \cos\left(\frac{i\Omega k_3}{|k|}\right) \sin\left(\frac{i\Omega m_3}{|m|}\right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(0,0,1)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^1 b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.7})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(0,0,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,0,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^0 \theta_k^0 \theta_m^1 b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.8})$$

Para $\delta = (0, 1, 0)$, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\delta=(0,1,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,1,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,1,0)} &= \frac{i}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
&\quad \left. + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(0,1,0)} \\
&= i/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) + A + B + C - D + i(-E + F + G + H) \\
&\quad - A - B + C - D + i(-E + F - G - H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
&\quad + A - B + C + D + i(E + F - G + H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\
&\quad - A - B - C + D + i(-E + F + G + H) - A + B + C + D + i(E + F + G - H)] b_{nkm}^{(0,1,0)} \\
&= i/8 \cdot (8iF) b_{nkm}^{(0,1,0)} = -F b_{nkm}^{(0,1,0)}.
\end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $-F = -\cos\left(\frac{i\Omega n_3}{|n|}\right) \sin\left(\frac{i\Omega k_3}{|k|}\right) \cos\left(\frac{i\Omega m_3}{|m|}\right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(0,1,0)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^0 b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.9})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(0,1,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,1,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^0 b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.10})$$

Para $\delta = (0, 1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\delta=(0,1,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,1,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,1,1)} &= \frac{1}{8} \left(-e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
 &\quad \left. - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(0,1,1)} \\
 &= 1/8 [-A + B + C + D + i(-E - F - G + H) + A + B + C - D + i(-E + F + G + H) \\
 &\quad + A + B - C + D + i(E - F + G + H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
 &\quad - A + B - C - D + i(-E - F + G - H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\
 &\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) - A + B + C + D + i(E + F + G - H)] b_{nkm}^{(0,1,1)} \\
 &= 1/8 \cdot (8B) b_{nkm}^{(0,1,1)} = B b_{nkm}^{(0,1,1)}.
 \end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $B = \cos\left(\frac{i\Omega n_3}{|n|}\right) \text{sen}\left(\frac{i\Omega k_3}{|k|}\right) \text{sen}\left(\frac{i\Omega m_3}{|m|}\right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(0,1,1)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^1 b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.11})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(0,1,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(0,1,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^0 \theta_k^1 \theta_m^1 b_{nkm}^{(0,1,1)}(c_k(t), c_m(t)) \quad (\text{B.12})$$

Para $\delta = (1, 0, 0)$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\delta=(1,0,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,0,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)} &= \frac{i}{8} \left(-e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
 &\quad \left. + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(1,0,0)} \\
 &= i/8 [-A + B + C + D + i(-E - F - G + H) - A - B - C + D + i(E - F - G - H) \\
 &\quad - A - B + C - D - i(-E + F - G - H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
 &\quad + A - B + C + D + i(E + F - G + H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\
 &\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) + A - B - C - D + i(-E - F - G + H)] b_{nkm}^{(1,0,0)} \\
 &= i/8 \cdot (8G) b_{nkm}^{(1,0,0)} = G b_{nkm}^{(1,0,0)}.
 \end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $G = \text{sen}\left(\frac{\Omega t n_3}{|n|}\right) \cos\left(\frac{\Omega t k_3}{|k|}\right) \cos\left(\frac{\Omega t m_3}{|m|}\right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(1,0,0)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^1 \theta_k^0 \theta_m^0 b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.13})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(1,0,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,0,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^1 \theta_k^0 \theta_m^0 b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.14})$$

Para $\delta = (1, 0, 1)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\delta=(1,0,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,0,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,0,1)} &= \frac{1}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
&\quad \left. - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(1,0,1)} \\
&= 1/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) - A - B - C + D + i(E - F - G - H) \\
&\quad + A + B - C + D + i(E - F + G + H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
&\quad - A + B - C - D + i(-E - F + G - H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\
&\quad - A - B - C + D + i(F - E + G + H) + A - B - C - D + i(H - E - F - G)] b_{nkm}^{(1,0,1)} \\
&= -1/8 \cdot (8C) = -C b_{nkm}^{(1,0,1)}.
\end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $-C = -\text{sen} \left(\frac{\Omega t n_3}{|n|} \right) \cos \left(\frac{\Omega t k_3}{|k|} \right) \text{sen} \left(\frac{\Omega t m_3}{|m|} \right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(1,0,1)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^1 \theta_k^0 \theta_m^1 b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.15})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(1,0,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,0,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^1 \theta_k^0 \theta_m^1 b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.16})$$

Para $\delta = (1, 1, 0)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\delta=(1,1,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,1,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,1,0)} &= \frac{1}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
&\quad \left. - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(1,1,0)} \\
&= 1/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) + A + B + C - D + i(-E + F + G + H) \\
&\quad - A - B + C - D + i(-E + F - G - H) - A + B - C - D + i(E + F - G + H) \\
&\quad - A + B - C - D + i(-E - F + G - H) - A - B + C - D + i(E - F + G + H) \\
&\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) + A - B - C - D + i(H - E - F - G)] b_{nkm}^{(1,1,0)} \\
&= 1/8 \cdot (-8D) b_{nkm}^{(1,1,0)} = -D b_{nkm}^{(1,1,0)}.
\end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $-D = -\text{sen} \left(\frac{\Omega t n_3}{|n|} \right) \text{sen} \left(\frac{\Omega t k_3}{|k|} \right) \cos \left(\frac{\Omega t m_3}{|m|} \right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(1,1,0)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^1 \theta_k^1 \theta_m^0 b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.17})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(1,1,0) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,1,0),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_k(t), c_m(t)) = -\theta_n^1 \theta_k^1 \theta_m^0 b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.18})$$

Por último, para $\delta = (1, 1, 1)$, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\delta=(1,1,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,1,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,1,1)} &= \frac{i}{8} \left(e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,0,1)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(0,1,1)}} \right. \\
 &\quad \left. - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,0)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,0,1)}} + e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,0)}} - e^{i\Omega t \omega_{nkm}^{(1,1,1)}} \right) b_{nkm}^{(1,1,1)} \\
 &= i/8 [A - B - C - D + i(E + F + G - H) - A - B - C + D + i(E - F - G - H) \\
 &\quad - A - B + C - D + i(-E + F - G - H) + A - B + C + D + i(-E - F + G - H) \\
 &\quad - A + B - C - D + i(-E - F + G - H) + A + B - C + D + i(-E + F - G - H) \\
 &\quad + A + B + C - D + i(E - F - G - H) - A + B + C + D + i(E + F + G - H)] b_{nkm}^{(1,1,1)} \\
 &= i/8 \cdot (-8iH) b_{nkm}^{(1,1,1)} = H b_{nkm}^{(1,1,1)}.
 \end{aligned}$$

Por (B.2) e (B.3), $H = \text{sen} \left(\frac{\Omega t n_3}{|n|} \right) \text{sen} \left(\frac{\Omega t k_3}{|k|} \right) \text{sen} \left(\frac{\Omega t m_3}{|m|} \right)$. Além disso,

$$\sum_{\delta=(1,1,1)} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^1 \theta_k^1 \theta_m^1 b_{nkm}^{(1,1,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.19})$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{\delta=(1,1,1) \\ \sigma \in \{0,1\}^3}} \alpha_{(1,1,1),\sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^{(1,1,1)}(c_k(t), c_m(t)) = \theta_n^1 \theta_k^1 \theta_m^1 b_{nkm}^{(1,1,1)}(c_k(t), c_m(t)). \quad (\text{B.20})$$

Finalmente somando as parcelas encontradas acima para cada $\delta \in \{0, 1\}^3$, (B.6), (B.8), (B.10), (B.12), (B.14), (B.16), (B.18) e (B.20), obtemos (B.1),

$$\sum_{n=k+m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{\delta_2+\delta_3} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m) = \sum_{n=k+m} \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \alpha_{\delta, \sigma} e^{i\Omega t \omega_{nkm}^\sigma} b_{nkm}^\delta(c_k, c_m).$$

APÊNDICE C – Igualdades (4.5) e (4.6) do Lema 4.1

C.1 Demonstração da igualdade (4.5)

Para recordar a equação (4.5) veja p. 71. Primeiro, lembramos que para $\mu \in \{0, 1\}^3$, temos

$$B_n^\mu(c_1, c_2) = \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_\mu^3}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}), \quad (\text{C.1})$$

onde $\omega_{nkm}^\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \{0, 1\}^3$, que configuram a parte ressonante. Ou seja,

$$B_n^{(1,0,1)}(c_1, c_2) := \sum_{\delta, \sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}). \quad (\text{C.2})$$

Com isso, afirmamos que $\theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} = 0$ para $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(1,0,1)}^3$ e $\delta_1, \delta_3 \in \{0, 1\}$. De fato, tendo em vista a definição de $\theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3}$ contida em (4.13), temos que

$$\theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} = \theta_n^{\delta_1} \text{sen} \left(\frac{k_3 \Omega t}{|k|} \right) \theta_m^{\delta_3}. \quad (\text{C.3})$$

Além disso,

$$(\Lambda)_{(1,0,1)}^3 := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_1, k_3 \in \Lambda_0 \text{ e } m_3 \in \Lambda_1\}, \quad (\text{C.4})$$

ou seja, $k_3 = 0$. Logo, $\text{sen}(k_3 \Omega t / |k|) = 0$ e então segue a afirmação.

Com isso temos,

$$\sum_{\sigma \in \{0, 1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3}} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}(t), c_{2,m}(t)) = 0, \quad (\text{C.5})$$

para $\delta \in \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$. Assim, nos resta verificar a expressão $B_n^{(1,0,1)}$ apenas para $\delta \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. Todavia, por um cálculo direto vemos que

$$\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3 = \emptyset \quad \text{para} \quad \sigma \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}. \quad (\text{C.6})$$

De fato, suponha $\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3 \neq \emptyset$ e tome $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,0)} \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3$, por exemplo. Assim, $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,0)}$, ou seja,

$$\omega_{nkm}^{(0,0,0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Além disso, $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(1,0,1)}^3$, então $k_3 = 0$, logo,

$$\omega_{nkm}^{(0,0,0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_3}{|n|} + \frac{m_3}{|m|} = 0 \quad \Rightarrow \quad |m|n_3 = -|n|m_3. \quad (\text{C.8})$$

Agora, $n = k + m$, implica que $n_3 = k_3 + m_3$, ou seja, $n_3 = m_3$, pois $k_3 = 0$. Isto é, $|m|n_3 = |n|n_3$, implicando em $-|m| = |n|$, o que é uma contradição. Então, resta verificar que

$$\begin{aligned} B_n^{(1,0,1)}(c_1, c_2) &= \alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(1,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \\ &\quad + \alpha_{(0,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(1,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \end{aligned}$$

para $\sigma_2 \in \{0, 1\}$ e $(\sigma_1, \sigma_3) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, e $(n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3$ com $n = k + m$. Contudo, $\alpha_{(0,0,0),\sigma} = 1/8$ e $\alpha_{(1,0,1),\sigma} = -1/8$ para todo $\sigma \in \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $\alpha_{(1,0,0),\sigma} = \alpha_{(0,0,1),\sigma} = i/8$ para $\sigma \in \{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ e $\alpha_{(1,0,0),\sigma} = \alpha_{(0,0,1),\sigma} = -i/8$ para $\sigma \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, como vimos no Apêndice B (veja p. 108). Assim,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}); \\ \text{(ii)} \quad & \alpha_{(1,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = -\frac{1}{2} b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}); \\ \text{(iii)} \quad & \alpha_{(0,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(2 \cdot \frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0; \\ \text{(iv)} \quad & \alpha_{(1,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(2 \cdot \frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$B_n^{(1,0,1)}(c_1, c_2) = \sum_{\substack{\sigma_2 \in \{0,1\} \\ (\sigma_1, \sigma_3) \in \{(1,0), (0,1)\}}} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,0,1)}^3}} \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - \frac{1}{2} b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}).$$

Segue que

$$B_n^{(1,0,1)}(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |n|=|m| \neq 0, n_3=m_3 \neq 0}} \left(b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - b_{nkm}^{(1,0,1)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \right). \quad (\text{C.9})$$

Aqui, $|n| = |m|$ vem do fato de que $n_3 = m_3 \neq 0$ ao mesmo tempo que $\frac{n_3}{|n|} = \frac{m_3}{|m|}$, para todo $\sigma \in \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, de onde obtemos a equação (4.5).

C.2 Demonstração da igualdade (4.6)

Para recordar a equação (4.6) veja p. 71. Lembre-se que

$$B_n^{(1,1,0)}(c_1, c_2) = \sum_{\delta, \sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3}} \alpha_{\delta, \sigma} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}, c_{2,m}). \quad (\text{C.10})$$

De forma análoga, afirmamos que $\theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^1 = 0$ para $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(1,1,0)}^3$ e $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$. De fato, pelas igualdades em (4.13)

$$\theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^1 = \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \sin\left(\frac{m_3 \Omega t}{|m|}\right). \quad (\text{C.11})$$

Lembremos também que

$$(\Lambda)_{(1,1,0)}^3 := \{(n, k, m) \in (\Lambda)^3 : n_3 \in \Lambda_1, k_3 \in \Lambda_1 \text{ e } m_3 \in \Lambda_0\}, \quad (\text{C.12})$$

ou seja, $m_3 = 0$, logo $\sin(m_3 \Omega t / |m|) = 0$, de onde segue a afirmação.

Com isso, temos que

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3}} \theta_n^{\delta_1} \theta_k^{\delta_2} \theta_m^{\delta_3} b_{nkm}^\delta(c_{1,k}(t), c_{2,m}(t)) = 0, \quad (\text{C.13})$$

para $\delta \in \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Assim, nos resta verificar a expressão $B_n^{(1,1,0)}$ apenas para $\delta \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$. Além disso, por um cálculo direto, podemos ver que

$$\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3 = \emptyset \quad \text{para} \quad \sigma \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}. \quad (\text{C.14})$$

De fato, suponha $\mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3 \neq \emptyset$ e tome $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,0)} \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3$, por exemplo. Assim, $(n, k, m) \in \mathcal{K}^{(0,0,0)}$, ou seja,

$$\omega_{nkm}^{(0,0,0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} = 0. \quad (\text{C.15})$$

Além disso, $(n, k, m) \in (\Lambda)_{(1,1,0)}^3$, então $m_3 = 0$, logo

$$\omega_{nkm}^{(0,0,0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_3}{|n|} + \frac{k_3}{|k|} = 0 \quad \Rightarrow \quad |k|n_3 = -|n|k_3. \quad (\text{C.16})$$

Agora, $n = k + m$, implica que $n_3 = k_3 + m_3$, ou seja, $n_3 = k_3$, pois $m_3 = 0$, isto é, $|k|n_3 = -|n|n_3$, implicando em $|k| = -|n|$, o que é uma contradição.

Então, resta ver que

$$\begin{aligned} B_n^{(1,1,0)}(c_1, c_2) &= \alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(1,1,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \\ &\quad + \alpha_{(0,1,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) + \alpha_{(1,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \end{aligned}$$

para $\sigma_3 \in \{0, 1\}$ e $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, e $(n, k, m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3$ com $n = k + m$. Contudo, $\alpha_{(0,0,0),\sigma} = 1/8$ e $\alpha_{(1,1,0),\sigma} = -1/8$ para todo $\sigma \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, $\alpha_{(0,1,0),\sigma} = \alpha_{(1,0,0),\sigma} = i/8$ para todo $\sigma \in \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\alpha_{(0,1,0),\sigma} = \alpha_{(1,0,0),\sigma} = -i/8$ para todo $\sigma \in \{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, como vimos no Apêndice B (veja p. 108). Assim, temos

as igualdades

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \alpha_{(0,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}); \\
 \text{(ii)} \quad & \alpha_{(1,0,1),\sigma} b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = -\frac{1}{2} b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}); \\
 \text{(iii)} \quad & \alpha_{(1,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(2 \cdot \frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0; \\
 \text{(iv)} \quad & \alpha_{(1,0,0),\sigma} b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = \left(2 \cdot \frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - 2 \left(\frac{i}{8}\right) b_{nkm}^{(1,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) = 0.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$B_n^{(1,1,0)}(c_1, c_2) = \sum_{\substack{\sigma_3 \in \{0,1\} \\ (\sigma_1, \sigma_2) \in \{(0,1), (1,0)\}}} \sum_{\substack{n=k+m \\ (n,k,m) \in \mathcal{K}^\sigma \cap (\Lambda)_{(1,1,0)}^3}} \frac{1}{2} b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - \frac{1}{2} b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}).$$

Assim, chegamos a igualdade

$$B_n^{(1,1,0)}(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=k+m \\ |n|=|k| \neq 0, n_3=k_3 \neq 0}} \left(b_{nkm}^{(0,0,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) - b_{nkm}^{(1,1,0)}(c_{1,k}, c_{2,m}) \right), \quad (\text{C.17})$$

onde $|n| = |k|$ vem do fato de que $n_3 = k_3 \neq 0$ ao mesmo tempo que $\frac{n_3}{|n|} = \frac{k_3}{|k|}$, para todo $\sigma \in \{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$, obtendo a equação (4.6), como queríamos.