



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Classificação dos Digrafos Semicompletos Hamiltonianos

Marcelo Dantas de Carvalho

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

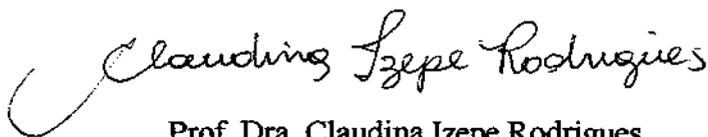


2000.12.8.000

Classificação dos Digrafos Semicompletos Hamiltonianos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marcelo Dantas de Carvalho, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 13 de março de 2000



Prof. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
Orientadora

Banca Examinadora:

1. Prof. Dra. Claudina Izepe Rodrigues
2. Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl
3. Prof. Dr. Irwen Valle Guadalupe

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Carvalho, Marcelo Dantas de

C253c Classificação dos digrafos semicompletos hamiltonianos / Marcelo
Dantas de Carvalho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Claudina Izepe Rodrigues

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Teoria dos grafos hamiltonianos. I. Rodrigues, Claudina Izepe.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de março de 2000 e aprovada

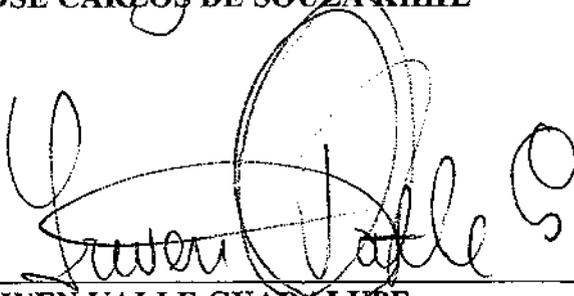
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES



Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL



Prof (a). Dr (a). IRWEN VALLE GUADALUPE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma classificação para os digrafos semicompletos hamiltonianos, extendendo os resultados obtidos para os torneios. Para isso utilizamos da teoria da homotopia regular de grafos de Davide C. Demaria, apresentando resultados sobre torneios simplesmente desconexos, a caracterização de torneios por 3-ciclos e o conceito de ciclo conado e não-conado para digrafos, introduzido por Kiihl e Tironi. Com a noção de ciclo minimal e característico para digrafo uma classificação para os digrafos semicompletos hamiltonianos surge então naturalmente. Esses resultados, quando encontrados para torneios, proporcionaram a obtenção de uma classe de torneios reconstrutíveis (torneios normais) e pesquisa nesse sentido deve ser efetuada para digrafos. Apresentamos em apêndice a matriz de um digrafo, os torneios de moon, normais e, brevemente, o problema da reconstrução de grafos.

The main target in this work is to present a classification for the hamiltonian semi-complete digraphs, extending the results previously obtained for the tournaments. In this way we apply the regular homotopy of finite directed graphs theory developed by Davide C. Demaria, presenting results on simply disconnected tournaments, on the characterization of tournaments by 3-cycles and the concept of coned and non-coned cycle for digraphs, introduced by Kiihl and Tironi. With the notion of minimal and characteristic cycle we naturally get a classification of the semicomplete hamiltonian digraphs. These results, when used for tournaments led to a new class of reconstructible ones (named normal) and future research on the extension of these results for digraphs in general seems to be interesting. We present in appendixes the array of a digraph, the tournaments of Moon, Normal and, briefly, the reconstruction problem for graphs.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Ao povo brasileiro que permaneceu em sofrimento durante estes dois anos enquanto alguns de seus filhos buscavam o conhecimento acadêmico.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Agradecimentos

À minha mãe que dedicou sua própria vida a seus filhos.

Ao meu irmão Matheus, que ajudou a segurar as pontas em Brasília.

À toda minha Família, particularmente as famílias de Abelcina, Cirami, Maria Dantas pela receptividade quando juntos e incentivo quando longe.

À minha orientadora, Professora Claudina, pela convivência, solução de problemas e rumos a traçar.

À Cristiane, Breno (os dois), Maria Helena, Rodrigo e toda sua família que sempre me acolheram de braços abertos.

Aos meus amigos Augusto, Débora, Gediel, Gil, Jones, Krishna, Leduíno, Luiz Carlos, Marcela, Marcelo Camargo, Michel, Nielsen, Priscila, Valdomiro que me apoiaram, cada qual de sua forma.

Aos professores Kiihl, Irwen e Caio pela paciência ao se dedicarem a esse texto.

Aos funcionários que fazem com que nos dediquemos sem preocupações ao nosso trabalho.

À Unicamp e em especial ao IMECC, pelas experiências vividas, formação proporcionada, condições estruturais oferecidas.

À FAPESP pelo apoio financeiro e estrutural, fundamental numa alçada deste porte.

Ao Flamengo pelas necessárias emoções.

Aos companheiros de luta por uma universidade pública, gratuita e de qualidade para todos.

Aos paulistas, que custearam esses estudos.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Índice

Introdução	3
1 Noções Preliminares	5
1.1 Resumo	5
1.2 Grafos, Árvores, Digrafos e Torneios	5
1.3 Subdigrafo, Digrafo quociente, Homeomorfismo entre digrafos	8
1.4 Apêndice	13
2 Homotopia Regular de Grafos e os Torneios Simplesmente Desconexos	15
2.1 Resumo	15
2.2 Introdução a teoria de homotopia regular de grafos	15
2.3 Torneios simplesmente desconexos	20
3 Ciclos conados e não-conados de digrafos e a classificação de torneios por 3-ciclos não-conados	29
3.1 Resumo	29
3.2 Ciclos conados e não-conados em torneios	29
3.3 Classificação dos torneios por 3-ciclos não-conados	30
3.3.1 Torneios com um quociente altamente regular	32
3.4 Ciclos conados e não-conados em digrafos	35
3.4.1 Diferença cíclica em um digrafo semicompleto	36
3.4.2 Partição dos digrafos semicompletos hamiltonianos	37
3.5 Apêndice	40
4 Exemplos e aplicações	42
4.1 Ciclos característicos e minimais em digrafos	42
4.2 Variações do torneio transitivo	43

5	Classificação dos Digrafos Semicompletos Hamiltonianos	45
5.1	Resumo	45
5.2	O teorema de classificação	45
5.3	Digrafos normais com diferença cíclica máxima	47
5.4	Apêndice	49
5.4.1	Torneios Normais e sua Decomposição	50
5.4.2	Torneios normais de característica cíclica 3	51
5.4.3	Caracterização estrutural dos torneios normais	51
A	O Problema da reconstrução - a falsidade da conjectura de Frank Harary para os torneios	53
	Bibliografia	55

Introdução

Talvez o problema mais antigo na teoria de grafos seja o das sete pontes de Königsberg sobre a existência de um caminho fechado passando por todas elas apenas uma vez. Mas nenhum outro foi tão famoso quanto o problema de coloração de um mapa por até 4 cores. Proposto por um estudante britânico, Francis Guthrie, em 1852, despertou a atenção de vários matemáticos como De Morgan e Cayley. Em 1879, A. B. Kempe apresentou uma suposta prova que foi questionada por P. J. Heawood em 1890. Este último, por sua vez, resolveu o problema para 5 cores. Apenas em 1976, K. Appel e W. Hankem apresentaram uma demonstração utilizando para isso dos recursos computacionais ora existentes. Passando por nomes como Kuratowski, Pólya, Frucht, Turán, Ringel e Youngs, entre outros, a teoria dos grafos desmembrou-se no estudo da enumeração de grafos, grupos de automorfismos, determinação do número cromático de uma variedade, grafos infinitos, para citar algumas áreas. As aplicações em computação, análise de algoritmos, otimização e teoria de jogos demonstram a importância dessa teoria de grafos.

Entre os temas hoje em estudo está o problema da reconstrução de um grafo. Dizemos que um grafo G_n é hipomorfo a H_n se, e somente se, existe $f : G_n \rightarrow H_n$ bijeção tal que $\forall v \in G_n, G_n - v$ é isomorfo $H_n - f(v)$. S. H. Ulam e P. J. Kelly propuseram a conjectura sobre a reconstrução de grafos: Dois grafos H_n e G_n ($n \geq 3$) são isomorfos se são hipomorfos. Alguns resultados foram obtidos (todas as árvores e os grafos desconexos são reconstrutíveis) mas a validade da conjectura ainda não foi verificada. Já para digrafos contra-exemplos foram apresentados sendo a conjectura falsa nessa classe. Frank Harary propôs o problema de reconstrução para torneios e demonstrou juntamente com Palmer (1967) que todo torneio T_n ($n \geq 5$) redutível é reconstrutível. Entretanto em 1970 Beieneke e Parker encontraram torneios não reconstrutíveis de ordem 5 e 6. Foi Stockmeyer que, em 1977, construiu torneios não reconstrutíveis de ordem $2^n + 1$ e $2^n + 2$ para todo $n \geq 1$, demonstrando definitivamente a falsidade da conjectura de reconstrução para torneios.

Passou-se então à busca de classes de torneios que seriam reconstrutíveis (além

dos transitivos, altamente regulares e bineutrais, já conhecidos) que contou com contribuições de D. C. Demaria na introdução da teoria de homotopia regular para grafos no início dos anos 70. Nesse sentido Demaria e M. Burzio caracterizaram os torneios com menor número de 3-ciclos e introduziram o conceito de ciclo minimal não-conado ([4],[5]), que pode ser estendido para digrafos semicompletos hamiltonianos, conforme J. C. S. Kiihl e G. Tironi ([19]). As contribuições de Moon, Douglas, Gianella, Guido, Kiihl, Vitolo (este último usando a classe dos torneios simplesmente desconexos) possibilitaram a exibição de grandes classes de torneios reconstrutíveis sem que, no entanto, se saiba se existem outras classes que englobem outros torneios, ou classe maior que englobe essas já determinadas.

O continuado esforço para levar adiante o estudo desta nova Teoria de Homotopia Regular para Grafos tem-se mostrado muito eficaz, com os pesquisadores produzindo inúmeros resultados relevantes para a Teoria de Grafos. Muitos dos invariantes homotópicos verificados são importantes particularmente para o estudo de digrafos. E é nesse contexto que as classificações obtidas para torneios e digrafos atuam. Com uma visão estrutural definida dos objetos a serem estudados a busca pela solução de problemas mais avançados segue um caminho mais claro.

No trabalho que se segue parte deste caminho foi trilhado. Num texto praticamente autocontido apresentamos as definições e resultados necessários para a obtenção de uma classificação para os digrafos semicompletos hamiltonianos. Acompanham exemplos e apêndices que objetivam ilustrar a teoria apresentada e expandir o alcance do assunto tratado por áreas próximas as que estão sendo trabalhadas. A divisão do conteúdo foi feita em 5 capítulos e um apêndice final. No primeiro capítulo as noções e resultados preliminares para entendimento do restante do texto. Já no segundo apresentamos um breve resumo de pontos da teoria da homotopia regular de grafos e a caracterização dos digrafos simplesmente desconexos por meio do quociente simples altamente regular. Em seguida, no próximo capítulo, o conceito de ciclo conado para torneios, sua caracterização por 3-ciclos não-conados e a extensão desse conceito para digrafos vêm motivados pelos resultados do capítulo anterior. O quarto capítulo é dedicado exclusivamente a exemplos e aplicações, uma vez que a teoria dos grafos é conhecida por seu desenvolvimento à base da “mão na massa” nos exemplos. Finalmente no último capítulo o teorema de classificação para digrafos e os digrafos com diferença cíclica máxima enceram esta tese. Permeando os capítulos e o apêndice final estão os torneios de Moon, torneios normais, matrizes de um torneio e a falsidade da conjectura de reconstrução para torneios.

Campinas, janeiro de 2000.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Resumo

Neste capítulo apresentaremos as definições e proposições básicas que utilizaremos durante todo o trabalho. A noção de grafo (e diversos de seus tipos), decomposição de torneios e digrafos e algumas propriedades da decomposição são os pontos chave. Estaremos considerando para todos os efeitos apenas grafos finitos. No apêndice deste primeiro capítulo a matriz associada a um digrafo é rapidamente exposta.

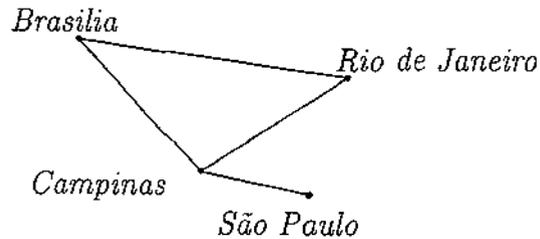
1.2 Grafos, Árvores, Digrafos e Torneios

Definição 1.2.1 *Seja V um conjunto de elementos finito e não vazio e \mathcal{A} um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V . O par $G = \{V, \mathcal{A}\}$ é o **Grafo** com vértices dados pelos elementos de V e arestas dadas pelos elementos de \mathcal{A} . A cardinalidade de V é a **ordem** de G , denotada $|G|$.*

Denotaremos os elementos de V por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e por (v_i, v_j) , $i, j = 1, \dots, n$ a aresta obtida quando v_i e v_j formarem um par em \mathcal{A} . Nesse caso v_i e v_j são os extremos da aresta. Representamos graficamente os vértices de G como pontos e as arestas como linhas unindo os vértices que constituem o par ordenado.

Exemplo 1.2.2 *Considere o conjunto V formado pelas cidades Campinas, São Paulo, Salvador, Rio de Janeiro e Brasília e os trechos Campinas/Brasília, Brasília/Rio, São Paulo/Campinas e Campinas/Rio como os elementos de \mathcal{A} . Então podemos representar o grafo G assim obtido do seguinte modo (observe que o vértice relacionado à cidade de Salvador não faz parte de nenhuma aresta):*

Salvador



Dado um grafo G , um vértice v em G , dizemos que existe um caminho fechado, ou ciclo, passando por v se existe uma sucessão finita e distinta de arestas em G tendo v como extremo da primeira, cada aresta tendo como extremo um vértice que é extremo da anterior e com a última aresta tendo v como extremo.

Definição 1.2.3 Um grafo G é uma **árvore** se não existe caminho fechado passando por nenhum de seus vértices.

Apesar de não serem objetivo deste trabalho, o estudo das árvores forneceu resultados muito úteis para a teoria de grafos. Por exemplo, toda árvore é reconstrutível (no sentido da introdução). É imediato que em uma árvore a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é constante igual a 1 e isso é usado para demonstrar a fórmula de Euler para grafos, por exemplo.

Definição 1.2.4 Suponha que as arestas de G sejam pares ordenados de seus vértices. Nesse caso o par $D = \{V, \mathcal{A}\}$ é um **grafo dirigido** ou **digrafo**. Além disso, denotaremos $v_i \rightarrow v_j$ no lugar de (v_i, v_j) como o arco entre v_i e v_j e chamaremos v_i de predecessor de v_j , v_j de sucessor de v_i .

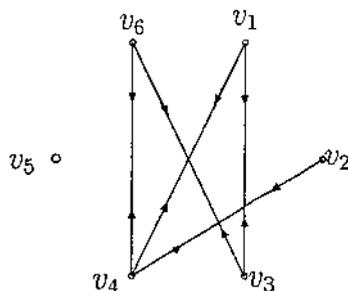
Dados dois vértices v_i, v_j de D , existem então, a priori quatro possibilidades:

1. não existe o arco entre v_i e v_j . Nesse caso denotaremos a arco nulo por $v_i|v_j$;
2. existe a arco (v_i, v_j) mas não existe o arco (v_j, v_i) . Então o arco é chamado de simples e denotado por $v_i \rightarrow v_j$;
3. Simetricamente posso ter o arco $v_j \rightarrow v_i$;
4. existem os arcos (v_i, v_j) e (v_j, v_i) . Então o arco é chamado de duplo e denotado por $v_i \leftrightarrow v_j$; Um arco duplo também é chamado de par simétrico ou 2-ciclo.

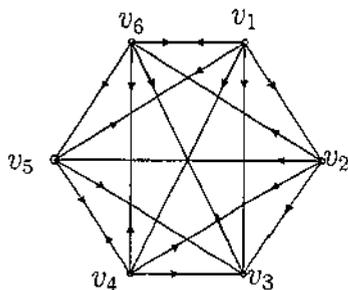
Um digrafo D é dito *orientado* se entre dois vértices distintos de D existe no máximo um arco orientado, ou seja, se os arcos em D são todos simples ou nulos. O digrafo é *não-orientado* se entre quaisquer dois vértices distintos de D existe um arco duplo ou nulo. O digrafo é *semicompleto* se entre dois vértice distintos existe ao menos um arco orientado (simples ou duplo).

Exemplo 1.2.5 *O primeiro digrafo é orientado e o segundo semicompleto.*

- *Digrafo não-orientado (apenas arcos nulos ou duplos)*



- *Digrafo semicompleto (não possui arcos nulos)*



Os digrafos hamiltonianos formam uma grande classe entre os digrafos, com propriedades muito especiais:

Definição 1.2.6 *Um digrafo D é hamiltoniano se contém um ciclo passante (que passa por todos os seus vértices).*

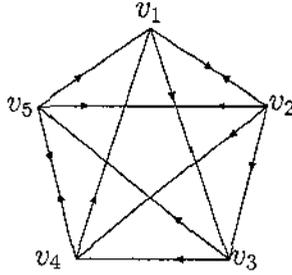
Exemplo 1.2.7 *Neste trabalho, como o título mostra, concentraremos nossas atenções aos digrafos semicompletos hamiltonianos. As figuras a seguir ilustram alguns exemplos desses digrafos.*

- *No digrafo abaixo todos os arcos são simples ou duplos. São ciclos passantes:*

$$C_1 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1,$$

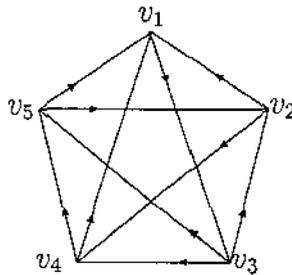
$$C_2 : v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1,$$

$$C_3 : v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1$$



- Neste digrafo todos os arcos são simples. Temos o ciclo passante:

$$C_1 : v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1$$



No exemplo anterior o segundo digrafo é semicompleto e não contém nenhum arco duplo. Ele faz parte de uma classe muito importante de digrafos, os *torneios*.

Definição 1.2.8 Um digrafo T_n (de ordem n) é dito um **torneio** se entre dois vértices distintos de T_n existe um e apenas um arco orientado (simples).

Observação 1.2.9 Um torneio T é dito transitivo se cada vez que $u \rightarrow v, v \rightarrow w$ então $u \rightarrow w$ para $u, v, w \in T$. O torneio Tr_m é o torneio transitivo de ordem m formado por v_1, v_2, \dots, v_m tal que $v_i \rightarrow v_j$, se $i < j$.

1.3 Subdigrafo, Digrafo quociente, Homeomorfismo entre digrafos

Seja D um digrafo e $A, B \subset V$ não vazios. Denotaremos $A \rightarrow B$ se todo vértice de A é um predecessor de um vértice de B . Se nenhum vértice de B é predecessor de um vértice de A e $A \rightarrow B$, então denotaremos $A \Rightarrow B$. Se entre os vértices de A e B tivermos apenas arcos duplos usaremos a notação $A \leftrightarrow B$. Denotaremos $A|B$ se $u|v$ para todo $u \in A, v \in B$.

Definição 1.3.1 *Seja D um digrafo e $S \subseteq D$. O subdigrafo $\langle S \rangle$ é o grafo induzido pelos vértices de S em D (preservando-se as relações entre os vértices que estão em S). Se $S = \{v\}, v \in D$, usaremos a notação $D - v$ para o subdigrafo gerado por todos os vértices de D com exceção de v .*

Considere então D um digrafo e $X \subset D$ não vazio. Diremos que X é um conjunto de vértices equivalentes de D ou que X é uma e -componente de D se para todo vértice $v \in D - X$ os arcos orientados entre v e $u, u \in X$ são do mesmo tipo. O tipo de arco entre os vértices de $D - X$ e X pode mudar dependendo do vértice de $D - X$.

Estamos então em condições de apresentar um conceito fundamental para todo o restante do trabalho. Os conjuntos equivalentes de um digrafo podem ser agrupados de modo que o digrafo obtido a partir desse agrupamento seja, em geral, mais simples de ser estudado que o original. Mais ainda, algumas das propriedades são preservadas (por exemplo o fato de ser hamiltoniano).

Seja D_n um digrafo de ordem n . Podemos particioná-lo em m subdigrafos disjuntos $S^{(1)}, \dots, S^{(m)}$ de subconjuntos de vértices equivalentes de D . Denotemos por Q_m o subdigrafo com m vértices com as relações $w_i \rightarrow w_j$ se, e somente se, $S^{(i)} \rightarrow S^{(j)}$ (uma vez que os arcos entre os vértices de $S^{(i)}$ e $S^{(j)}$ são do mesmo tipo).

Definição 1.3.2 *Nas condições descritas acima podemos escrever*

$$D_n = Q_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$$

e dizemos que D_n é a composição dos m digrafos $S^{(1)}, \dots, S^{(m)}$. Cada $S^{(i)}$ é uma componente de D_n e o digrafo Q_m é o quociente do digrafo D_n (ou quociente relacionado ao digrafo D).

Observação 1.3.3 *Um digrafo D , em geral, não possui um único quociente. Particularmente se considerarmos cada vértice de D como um conjunto equivalente de vértices o digrafo quociente obtido com essa composição é um quociente de D (e como veremos a seguir, evidentemente isomorfo a D).*

Um digrafo é dito *simples* se a composição $D_n = Q_m(S^{(1)}, \dots, S^{(m)})$ implica que $m = 1$ ou $m = n$. Nesse caso ou Q_m é o digrafo trivial ou estamos na condição da observação anterior.

Definição 1.3.4 *Sejam D e D' digrafos e V e V' seus conjuntos de vértices. Uma função $f : V \rightarrow V'$ é um **homeomorfismo** entre D e D' se, para todo $u, v \in V$, $u \rightarrow v \iff f(u) \rightarrow f(v)$ ou $f(u) = f(v)$.*

Se o homeomorfismo f for também uma bijeção então diremos que é um *isomorfismo* e usaremos a notação $D \sim D'$.

Após essa sequência de definições podemos apresentar então os primeiros resultados:

Proposição 1.3.5 *Seja Q_m um digrafo quociente de um digrafo D_n . Então existe um subdigrafo de D_n que é isomorfo a Q_m .*

Dem. :

Bastar tomar o subdigrafo induzido por vértices v_1, \dots, v_m , com $v_i \in S^{(i)}$.

Proposição 1.3.6 *Sejam X e Y conjuntos equivalentes de vértices de um digrafo D . Se $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X \cup Y \neq D$, então $X \cup Y$ é um subconjunto equivalente de vértices de D .*

Dem. :

Seja $u \in X \cap Y$ e $v \in D - (X \cup Y)$. Para todo vértice $w \in X \cup Y$ tenho que $w \rightarrow v \iff u \rightarrow v$ e $v \rightarrow w \iff v \rightarrow u$. Dessa forma as relações entre v e qualquer vértice de $X \cup Y$ são as mesmas e o mesmo ocorre então com os arcos orientados.

Teorema 1.3.7 *Todo digrafo (não-trivial) tem um único quociente simples.*

Dem. :

Suponha por absurdo que existem duas partições diferentes de D em quocientes que são simples:

$$D = P_h(S^{(1)}, \dots, S^{(h)}) = Q_k(T^{(1)}, \dots, T^{(k)})$$

Primeiramente suponha que $h \geq 3$. Uma vez que as partições são diferentes existem duas componentes S e T diferentes entre si tais que $S \cap T \neq \emptyset$ e $S \not\subseteq T$. Considere as outras componentes em Q_k que interceptam S . Ao menos uma destas não está contida em S . Caso contrário poderíamos substituir essas componentes por S e obter uma partição para Q_k , o que seria uma contradição com sua simplicidade.

Dessa forma tenho componentes S e T de maneira que $S \cap T \neq \emptyset$, $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$ e os numeramos como $S^{(1)}$ e $T^{(1)}$. Reenumeramos também as componentes de P_h de modo que $S^{(1)}, \dots, S^{(r)}$ interceptam $T^{(1)}$ e $S^{(r+1)}, \dots, S^{(h)}$ não interceptam $T^{(1)}$.

Temos dois casos possíveis:

1. $1 < r < h$

Como as componentes $S^{(1)}, \dots, S^{(r)}$ interceptam $T^{(1)}$, a união $U = S^{(1)} \cup \dots \cup S^{(r)}$ é um conjunto de vértices equivalentes e posso então obter a partição de $D_n = [U, S^{(r+1)}, \dots, S^{(h)}]$ que induz uma partição de P_h , contradizendo sua simplicidade.

2. $r = h$

Os arcos orientados entre um vértice $u \in S^{(1)} - T^{(1)}$ e qualquer vértice em $U = S^{(2)} \cup \dots \cup S^{(h)}$ são todos do mesmo tipo, uma vez que toda componente $S^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, h$ intercepta $T^{(1)}$. Por outro lado, como $u \in S^{(1)}$, os arcos orientados entre qualquer vértice de $S^{(1)}$ e qualquer vértice de U são do mesmo tipo. Mas então $[S^{(1)}, U]$ é uma partição não trivial de P_h o que mais uma vez contradiz sua simplicidade.

Finalmente, se $h = 2$ e $k > 2$ repetimos o argumento anterior invertendo as composições. Logo, posso supor $k = 2$. Mas P_2 e Q_2 devem ser isomorfos pela conexidade do quociente aplicada a D (veja [18]).

Observação 1.3.8 *Observando-se a demonstração do teorema, se $h > 2$ além da unicidade do quociente simples temos uma única partição em componentes. Já para $h = 2$ podemos ter mais partições. Como exemplo, seja $D = [u, v, w; u \longleftrightarrow v, u \longleftrightarrow w, v \longleftrightarrow w]$. Temos as seguintes partições de D em T_2 :*

$$P = [[u, v], w], Q = [[u, w], v] \text{ e } R = [[v, w], u]$$

Proposição 1.3.9 *Um digrafo semicompleto é hamiltoniano se, e somente se, T_2 (com arco simples) não é um de seus quocientes (equivalentemente T_2 não é seu quociente simples)*

Dem. :

(\implies) Suponha por absurdo que T_2 com arco simples é quociente do digrafo hamiltoniano D_n . Então posso escrever $D_n = T_2(A, B)$, com $A \Rightarrow B$ (todos os arcos entre os vértices são do mesmo tipo) e $A, B \neq \emptyset$. Como D_n é hamiltoniano admite um ciclo passante C e então enumerando como v_1 um vértice qualquer de B e seguindo-se pelo ciclo C em algum momento deve haver v_i, v_j com $v_i \in B$ e $v_j \in A$ tal que $v_i \longrightarrow v_j$. Mas isso é uma contradição com $A \Rightarrow B$. Logo, se D_n é hamiltoniano T_2 com arco simples não é um de seus quocientes.

(\impliedby) Seja $w \in D_n$ e considere os conjuntos $U = \{v \in D_n | v \longrightarrow w\}$ e $U' = \{v \in D_n | w \longrightarrow v\}$ (se existe um arco duplo entre v e w então v está nos dois conjuntos). Obviamente os dois conjuntos não podem ser ambos vazios. Além disso, se U ou U' for vazio então D_n será T_2 (com arco simples) de uma componente formada por w e outra formada pelo conjunto não-vazio. Logo, $U, U' \neq \emptyset$. Se $U \Rightarrow U'$ então $(U \cup \{w\}) \Rightarrow U'$ e então D_n é T_2 com arco simples, uma contradição. Do mesmo modo não tenho $U' \Rightarrow U$. Logo, tenho $u \in U$ e $u' \in U'$ tal que $u' \longrightarrow u$ ou $u' = u$. No primeiro caso tenho um 3-ciclo $\langle u \longrightarrow w \longrightarrow u' \longrightarrow u \rangle$ e no segundo caso tenho um 2-ciclo $u \leftrightarrow w$.

Seja agora C um k -ciclo de comprimento máximo (que existe pelo argumento apresentado até agora). Para todo vértice $v \in D_n - C$ tenho que $v \Rightarrow C$ ou $C \Rightarrow v$, caso contrário pelo argumento da implicação inversa posso estender C a um $(k+1)$ -ciclo, o que será uma contradição à maximalidade de seu comprimento. Tenho então os conjuntos $V = \{v \in D_n - C | v \Rightarrow C\}$ e $V' = \{v \in D_n - C | C \Rightarrow v\}$.

Se apenas um dos dois conjuntos V ou V' for vazio, $D_n = T_2(V, C)$ ou $D_n = T_2(C, V')$ com arco simples, o que seria uma contradição. Suponha agora que tanto V como V' são não-vazios. Se $V \Rightarrow V'$ teríamos $D_n = T_2((V \cup C), V')$ (absurdo). Logo, existem $v \in V$ e $v' \in V'$ tais que $v' \rightarrow v$ ou $v' = v$. Em ambos os casos posso estender o ciclo C usando das relações que $v \rightarrow C$ e $C \rightarrow v'$, o que é uma contradição com a maximalidade do comprimento de C em D_n . Logo, $V = V' = \emptyset$ e dessa forma C abrange todos os vértices de D_n . Portanto, D_n é hamiltoniano.

Corolário 1.3.10 *Um digrafo semicompleto é hamiltoniano se, e somente se, todos os seus quocientes (não triviais) são hamiltonianos.*

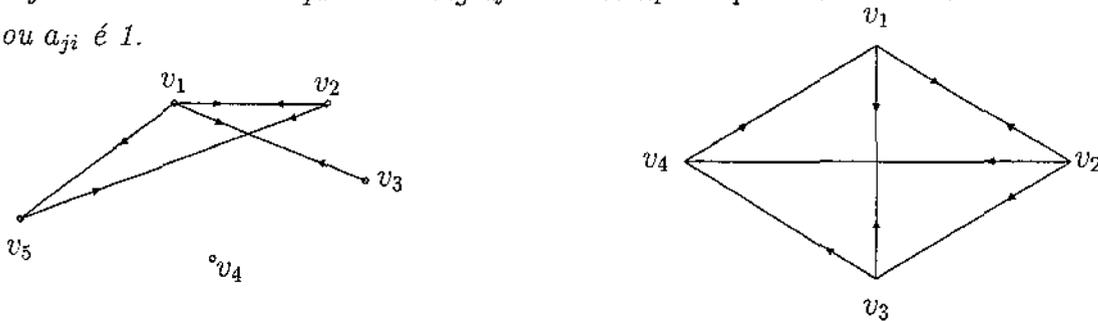
Dem. :

Tanto o digrafo inicial quanto qualquer de seus quocientes tem o mesmo quociente simples relacionado. Então aplique o resultado da proposição anterior ao digrafo original e seus quocientes.

1.4 Apêndice

Apresentaremos brevemente nesse apêndice o conceito de matriz associada a um digrafo. Primeiramente temos a matriz de adjacência, formada da forma seguinte: seja então D_n um digrafo de ordem n . Associamos a D uma matriz $A(D)$ de ordem $n \times n$ cujas entradas são dadas da seguinte forma: se v_1, v_2, \dots, v_n são os vértices de D e a_{ij} é a entrada referente a i -ésima linha e j -ésima coluna de $A(D)$, defino $a_{ij} = 1$, se $v_i \rightarrow v_j$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Se o arco entre v_i e v_j for duplo, então $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

Exemplo 1.4.1 Para os digrafos D_1 e D_2 abaixo, $A(D_1)$ e $A(D_2)$ são suas matrizes de adjacência. Observe que num digrafo semicompleto pelo menos uma das entradas a_{ij} ou a_{ji} é 1.



$$A(D_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad A(D_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

As somas das entradas das colunas e das linhas da matriz nos fornece os números de adjacência dos vértices (os números que aparecem dos lados das matrizes dos exemplos são as somas de cada linha). Já a entrada $a_{ij}^{(p)}$ referentes as potências A^p da matriz de adjacência referem-se ao número de caminhos de comprimento p entre os vértices v_i e v_j .

Podemos representar as propriedades do digrafo por outros tipos de matrizes. Na matriz de alcance $R(D)$, a entrada r_{ij} é 1 se existe um caminho partindo de v_i e chegando em v_j (respeitando-se as orientações dos arcos, é claro) e $r_{ij} = 0$ caso contrário. Na matriz de distância a entrada i, j nos mostra a distância entre os vértices v_i e v_j (menor caminho entre eles). Caso não haja caminho partindo de um vértice e chegando no outro, a entrada d_{ij} referente na matriz é representada por ∞ . O seguinte resultado vale:

Proposição 1.4.2 As entradas da matriz de alcance e matriz de distância podem ser obtidas das potências da matriz de adjacência da seguinte maneira:

1. $\forall i, r_{ii} = 1$ e $d_{ii} = 0$;
2. $r_{ij} = 1$ se, e somente se, para algum $p, a_{ij}^{(p)} > 0$;
3. $d(v_i, v_j)$ é o menor p (se existir) tal que $a_{ij}^{(p)} > 0$ e é ∞ caso esse p não exista.

Exemplo 1.4.3 Veja as matrizes de alcance e distância referentes a D_1 e D_2 do exemplo anterior:

$$R(D_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(D_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d(D_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 2 & 1 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}, d(D_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

No estudo da conexidade de um digrafo a matriz de adjacência também é útil (veja [18]):

Proposição 1.4.4 *Seja v_i um vértice do digrafo D . A componente forte de D contendo v_i é a determinada pelas entradas com valor 1 na i -ésima linha (ou coluna) da matriz $R \times R^T$.*

A matriz associada tem uma aplicação direta como mecanismo para implementação computacional do estudo dos digrafos. Com a análise das propriedades do digrafo transportadas para sua matriz pode-se classificar os digrafos de determinada ordem completamente quanto a sua conexidade, classes isomorfas, normalidade, característica cíclica (conceitos que serão definidos a posteriori). Em sua dissertação de mestrado André Oliveira Dias classificou todos os torneios de ordem 7 utilizando para isso a matriz associada, por exemplo. O software computacional "digraph" elaborado por Demaria nos fornece essas características dadas as entradas da matriz de adjacência do torneio e é bastante útil para o estudo de novos resultados.

Capítulo 2

Homotopia Regular de Grafos e os Torneios Simplesmente Desconexos

2.1 Resumo

A motivação para a obtenção dos resultados de classificação dos torneios hamiltonianos e sua extensão para os digrafos semicompletos hamiltonianos tem origem na Teoria da Homotopia Regular para Grafos de Davide C. Demaria. Demaria e Burzio utilizaram os resultados dessa teoria e conseguiram resultados importante sobre a caracterização dos torneios simplesmente desconexos. Esses são os dois pontos que serão tratados nesse capítulo.

2.2 Introdução a teoria de homotopia regular de grafos

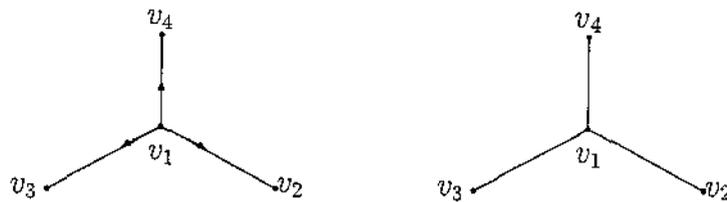
Considere D um digrafo. Nosso objetivo é caracterizar os grupos de homotopia de um digrafo a partir de objetos cujos grupos de homotopia já foram de algum modo estudados. Iniciamos então associando ao digrafo um complexo simplicial.

Definição 2.2.1 *Sejam D um digrafo e $X \subset D$ um subconjunto não-vazio. Dizemos que um vértice v de X é uma **testa** (resp. **cauda**) de X se v é um predecessor (sucessor) de todos os outros vértices de X . O subconjunto X é dito **testado** (caudado) se X possui pelo menos uma testa (cauda). Se cada subconjunto não-vazio de X é testado (caudado), então X é dito **totalmente testado** (caudado).*

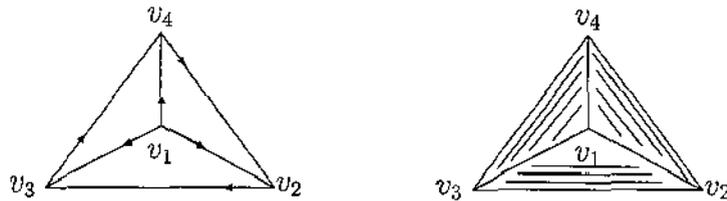
Observação 2.2.2 Se X é composto por apenas um elemento (um único vértice de D) então dizemos que X é totalmente testado e totalmente caudado. Se X é um par é fácil ver que X é testado $\Leftrightarrow X$ é totalmente testado $\Leftrightarrow X$ é totalmente caudado $\Leftrightarrow X$ é caudado. De maneira geral, um subconjunto X de D é totalmente testado se, e somente se, é totalmente caudado.

Definição 2.2.3 Seja D um digrafo. O complexo simplicial associado a D , (K_D) , é o complexo tendo como vértices os vértices de D e como simplexes os simplexes gerados pelos subconjuntos totalmente testados de D . O poliedro $|K_D|$ de K_D é o poliedro do digrafo D .

Exemplo 2.2.4 1. Um digrafo com apenas 0 e 1-simplexes (o poliedro $|K_D|$ é a figura da direita)



2. No caso a seguir o poliedro compreende todos 0, 1 e 2-simplexes possíveis:



Utilizaremos os grupos de homotopia de um complexo simplicial para obter os grupos de homotopia regular de um digrafo (veja [1]). No caso acima os grupos de homotopia do complexo K_D serão denotados por $\pi_n(|K_D|)$.

Seja A um conjunto e F um filtro sobre A . Denote o conjunto das partes de A por $exp(A)$ e seja $\beta \in exp(A)$. Denotaremos por $\widehat{\beta}$ o filtro gerado por β . Ainda, se $F = \{\widehat{B}\}$ para algum subconjunto $B \in A$, diremos que o filtro é principal.

Definição 2.2.5 *Sejam dados, um conjunto não-vazio I e para cada elemento $x \in I$ um filtro F_x sobre I tal que $F_x \subseteq \widehat{\{x\}}$. Então o filtro F_x é chamado de filtro de vizinhanças do ponto x . Denominamos de pré-topologia sobre I à família dos filtros $\mathcal{P} = \{F_x\}$ ($x \in I$), e chamamos de pré-espaco topológico ou pré-espaco de suporte I e pré-topologia \mathcal{P} ao par $P = \{I, \mathcal{P}\}$.*

Se os filtros da família \mathcal{P} são principais dizemos que \mathcal{P} é um pré-espaco a filtros principais ou um pf-pré-espaco.

Dois pf-pré-espacos $P = \{I, \mathcal{P}\}$ e $P' = \{I, \mathcal{P}'\}$, possuindo o mesmo suporte I e pré-topologias $\mathcal{P} = \{\widehat{A_x}\}$ ($x \in I$) e $\mathcal{P}' = \{\widehat{A'_x}\}$ ($x \in I$) são ditos simétricos se para cada $x \in I$ e cada $y \in I$ temos que: $x \in A'_y \iff y \in A_x$.

Observa-se que os pré-espacos coincidem com os espacos fecho de Čech.

Definição 2.2.6 *Seja $D = \{V, \mathcal{A}\}$ digrafo. Definimos os pré-espacos associados a D como sendo os dois pf-pré-espacos $P(D) = \{V, \mathcal{P}\}$ e $P^*(D) = \{V, \mathcal{P}^*\}$ de suporte $I = V$ com as seguintes pré-topologias:*

Para cada vértice $x \in I$ consideramos dois subconjuntos

$$A(x) = \{x\} \cup \{y \in D \mid x \longrightarrow y\} \text{ e } A^* = \{x\} \cup \{y \in D \mid y \longrightarrow x\}$$

pondo

$$\mathcal{P} = \{\widehat{A_x}\} \text{ (} x \in I \text{) e } \mathcal{P}^* = \{\widehat{A^*_x}\} \text{ (} x \in I \text{)}$$

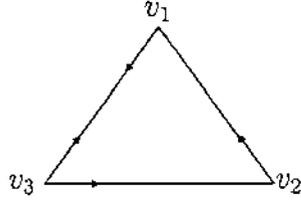
Dessa forma os filtros de vizinhanças de $x \in I$ em $P(D)$ ($P^(D)$) têm como base os conjuntos formados por x e seus sucessores (resp. predecessores).*

Exemplo 2.2.7 *Considere os digrafos e seus filtros de vizinhança e pré-topologia:*

$$v_1 \longrightarrow v_2$$

1. $V = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{A} = \{(v_1, v_2)\}$.

$$\begin{array}{ll} A(v_1) = \{\{v_1, v_2\}\} & A^*(v_1) = \{\{v_1\}\} \\ A(v_2) = \{\{v_2\}\} & A^*(v_2) = \{\{v_1, v_2\}\} \\ \widehat{A(v_1)} = \{\{v_1, v_2\}\} & \widehat{A(v_2)} = \{\{v_2\}, \{v_1, v_2\}\} \\ \widehat{A^*(v_1)} = \{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\} & \widehat{A^*(v_2)} = \{\{v_1, v_2\}\} \\ P(D) = \{V, \{\widehat{A(v_1)}, \widehat{A(v_2)}\}\} & P^*(D) = \{V, \{\widehat{A^*(v_1)}, \widehat{A^*(v_2)}\}\} \end{array}$$



2. $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{A} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$.

$$\begin{array}{ll}
A(v_1) = \{\{v_1, v_3\}\} & A^*(v_1) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\} \\
A(v_2) = \{\{v_2, v_1\}\} & A^*(v_2) = \{\{v_2, v_3\}\} \\
A(v_3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\} & A^*(v_3) = \{\{v_3, v_1\}\} \\
\overline{A(v_1)} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}\} & \overline{A^*(v_1)} = \{\{v_1, v_2, v_3\}\} \\
\overline{A(v_2)} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}\} & \overline{A^*(v_2)} = \{\{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\} \\
\overline{A(v_3)} = \{\{v_1, v_2, v_3\}\} & \overline{A^*(v_3)} = \{\{v_3, v_1\}, \{v_1, v_2, v_3\}\} \\
P(D) = \{V, \overline{A(v_1)}, \overline{A(v_2)}, \overline{A(v_3)}\} & P^*(D) = \{V, \overline{A^*(v_1)}, \overline{A^*(v_2)}, \overline{A^*(v_3)}\}
\end{array}$$

De posse de uma pré-topologia podemos definir funções pré-contínuas. Quando falamos da pré-topologia associada a um grafo essas são as funções o -regulares e o^* -regulares (a pré-topologia dependendo do tipo de incidência entre os vértices).

Definição 2.2.8 *Sejam $P = \{I, \mathcal{P}\}$ e $P' = \{I, \mathcal{P}'\}$ dois pré-espacos. Uma função $f : I \rightarrow I'$ é dita pré-contínua se para cada $x \in I$ temos:*

$$\overline{f(F_x)} \leq F_{f(x)} \equiv (\forall U \in F_{f(x)} \exists V \in F_x \text{ tal que } f(V) \subseteq U)$$

Equivalentemente se considerarmos dois pré-espacos P e P' como espaço de Čech a função $f : I \rightarrow I'$ é pré-contínua se para cada $A' \subseteq I'$ e para cada $B' \subseteq I'$ vale a implicação:

$$A' \cap \overline{B'} = \emptyset \implies f^{-1}(A') \cap \overline{f^{-1}(B')} = \emptyset$$

Definição 2.2.9 *Dados um pré-espaco P e um dígrafo D , uma função $f : P \rightarrow D$ é dita o -regular (o^* -regular) se f é uma função pré-contínua entre os pré-espacos P e $P(D)$ (entre os pré-espacos P e $P^*(D)$).*

Podemos então introduzir o -homotopia e o^* -homotopia que definindo relações de equivalência entre as funções o -regulares e o^* -regulares levam aos grupos de homotopia regular de grafos $Q_n(D)$ e $Q_n^*(D)$ (o espaço pré-topológico base é o cubo unitário). Essas definições não serão explicitadas aqui uma vez que são feitas em paralelo com a definição de homotopia e dos grupos de homotopia nos espacos topológicos em geral.

Observe que os grupos de σ -homotopia e σ^* -homotopia foram apresentados sem levar em consideração o ponto base. Isso pode ocorrer quando o digrafo é fracamente conexo, que é o caso dos digrafos semicompletos.

A união da teoria dos grupos de homotopia $\pi_n(|K_D|)$ e $Q_n(D)$ e $Q_n^*(D)$ é feita através dos teoremas de isomorfismo para esses grupos:

Teorema 2.2.10 (Teoremas de Isomorfismo) *Seja D um digrafo. Então:*

1. *Os grupos de homotopia regular $Q_n(D)$ e $Q_n^*(D)$ são isomorfos.*
2. *O grupo de homotopia regular $Q_n(D)$ é isomorfo ao grupo de homotopia $\pi_n(|K_D|)$, onde K_D é o complexo simplicial associado ao grafo G . ($|K_D|$ é o espaço subjacente de K_D).*

O primeiro decorre diretamente do segundo observando-se as propriedades das duas possibilidades de incidência de vértices que definem os pré-espacos e pré-topologias associadas a G .

Dem. :

(1) Pela última linha da observação 2.2.2 os digrafos D e D^* possuem o mesmo complexo simplicial associado, ou seja, $K_D = K_{D^*}$. Logo, podemos indentificar $P^*(D)$ com $P(D^*)$. Temos então as seguintes igualdades e isomorfismos, utilizando-se o segundo teorema de isomorfismo:

$$Q_n^*(D) = \pi_n(P^*(D)) = \pi_n(P(D^*)) = Q_n(D^*) \sim \pi_n(|K_{D^*}|) \sim \pi_n(|K_D|) \sim Q_n(D)$$

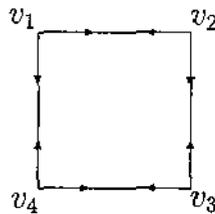
(2) A demonstração em [2] utiliza os três teoremas de normalização (em especial o terceiro, que decorre dos outros dois). Os teoremas de normalização também valem no caso dual:

1. Sejam S um espaço topológico normal, D um digrafo e $f : S \rightarrow D$ uma função σ -regular entre S e D . Então, existe uma função completamente σ -regular σ -homotópica a f . Se o espaço produto $S \times I$ (onde $I=[0,1]$) é normal, duas funções completamente σ -regulares $f, g : S \rightarrow D$ σ -homotópicas são também completamente σ -homotópicas.
2. Seja S um espaço métrico compacto, D um digrafo e $f : S \rightarrow D$ uma função completamente σ -regular. Então existe r real, tal que para cada partição $\mathcal{P} = \{X_j\}$ ($j \in J$) de S em subconjuntos de diâmetro menor que r , existe uma função $g : S \rightarrow D$ fracamente quase constante com respeito a \mathcal{P} , completamente σ -regular e completamente σ -homotópica a f .

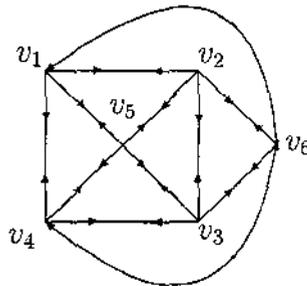
3. Sejam S um espaço triangularizável e compacto, D um digrafo e $f : S \rightarrow D$ uma função completamente σ -regular. Então existe uma função $g : S \rightarrow D$ que é pré-simplicial com respeito a uma triangulação adequada de S e completamente σ -homotópica a f . Além disso, dadas duas funções pré-simpliciais e completamente σ -homotópicas $f, g : S \rightarrow D$, existe entre elas uma homotopia, que é também pré-simplicial com respeito a uma triangulação adequada de $S \times I$.

O primeiro exemplo a seguir é de um digrafo simplesmente desconexo. Os demais tem grupo fundamental trivial:

Exemplo 2.2.11 1. Para o digrafo D a seguir, $|K_D|$ é homeomorfo ao círculo S^1 e então $Q_1(D) \sim \pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}$ e para $n > 1$ $Q_n(D) \sim \pi_n(S^1)$ que é trivial.



2. Para o digrafo D a seguir $|K_D|$ é homeomorfo a esfera S^2 e então $Q_n(D) \sim \pi_n(S^2)$



Dessa forma temos uma maneira rápida de calcular os grupos de homotopia regular de um grafo G . Estudaremos agora o caso onde este grupo de homotopia não é trivial.

2.3 Torneios simplesmente desconexos

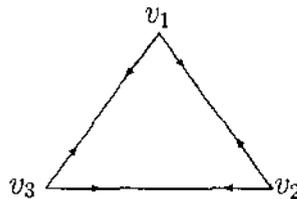
Marco Burzio e Davide Demaria caracterizaram em [8] os torneios simplesmente desconexos através dos quocientes altamente regulares não-triviais. Essa caracterização utiliza fortemente os resultados da seção anterior da teoria de homotopia regular de grafos.

Nesta seção trataremos especificamente dos torneios, apesar dos resultados serem válidos para digrafos semicompletos em geral. A extensão, nesses casos, será natural. Ao nos referirmos ao grupo fundamental de um torneio T , pelo segundo teorema do isomorfismo, utilizaremos o complexo associado K_T e o grupo $\pi_1(|K_T|)$, isomorfo a

$Q_1(T)$ e $Q_1^*(T)$. Na construção do complexo simplicial associado a T a condição dos simplexes serem formados pelos subconjuntos totalmente testados de T é equivalente à condição que o simplexo (v_1, v_2, \dots, v_n) de K_T ocorre se, e somente se, o subtorneio $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ é transitivo.

Diremos que um torneio T é simplesmente conexo se seu grupo fundamental é trivial e que T é simplesmente desconexo caso contrário.

Exemplo 2.3.1 Para o digrafo D a seguir, $|K_D|$ é homeomorfo ao disco D^1 e então $Q_n(D) \sim \pi_n(D^1)$ que é trivial.



Observação 2.3.2 O grupo fundamental de T ($\pi_1(|K_T|)$) pode ser calculado utilizando-se apenas os simplexes de dimensão menor ou igual a dois, através dos laços de arestas (vide [1]). Lembremos que um laço de arestas é um sequência de vértices de K_T fechada $(vv^1v^2 \dots v^nv)$ em que cada $v^i v^{i+1}$ formam um 1-simplexo de K_T .

Observação 2.3.3 Dois laços de arestas são homotópicos se podemos obter um a partir do outro por meio da repetição finita de operações do tipo:

1. Se três vértices consecutivos uvw geram um simplexo de K_T , então podemos trocá-lo por uw e vice-versa.
2. Um vértice repetido uu pode ser substituído por um vértice único u e vice-versa.

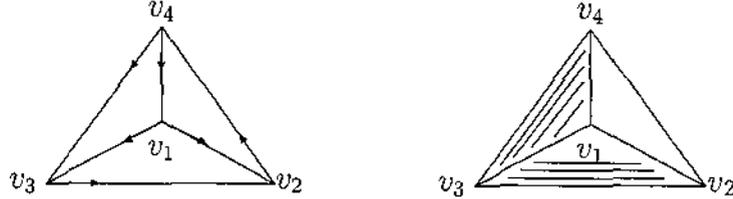
As classes de equivalência dos laços de arestas formam um grupo (chamado de grupo de arestas e denotado por $E(K_T)$, no caso conexo) por meio da multiplicação: $\{vv^1v^2 \dots v^rv\} \{vw^1w^2 \dots w^sv\} = \{vv^1v^2 \dots v^rvv^1w^1w^2 \dots w^sv\}$ e $E(K_T)$ é isomorfo a $\pi_1(|K_T|)$.

Exemplo 2.3.4 Nos exemplos a seguir temos o digrafo, seu poliedro e o seu grupo fundamental.

1. O transitivo de ordem 3 gera o 2-simplexo e portanto seu grupo fundamental é isomorfo ao do disco, que é trivial.



2. Digrafo com grupo fundamental isomorfo a \mathbb{Z} :



Proposição 2.3.5 *Um torneio T_n é simplesmente conexo se, e somente se, todos de seus quociente não-triviais R_m são simplesmente conexos.*

Dem. :

Seja $T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$ decomposição de T_n em quociente não-trivial ($m > 1$). A proposição será demonstrada ao obtermos que os grupos fundamentais de T_n e R_m são isomorfos (este resultado também é muito forte).

1. Primeiramente, pela primeira propriedade para homotopia dos laços de arestas, se u, v e w são tais que $u, w \in S^{(i)}$ e $v \in S^{(j)}$, com $i \neq j$, então posso trocar o simplexo gerado por uvw por uw . Então, se $\gamma = v \dots ba'd'b' \dots v$ é laço de arestas de K_T tal que $a, a' \in S^{(i)}$ e $b, b' \in S^{(j)}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, γ é homotópico a $\gamma' = v \dots bb' \dots v$. De fato,

- Se $i \neq j$, então $\gamma, v \dots ba'd'b' \dots v, \gamma'$ são laços de aresta homotópicos (pela observação imediatamente anterior)
- Se $i = j$, então tomo $c \notin S^{(i)}$ e tenho que $\gamma, v \dots bca'a'b' \dots v, v \dots bca'b' \dots v, v \dots bcb' \dots v, \gamma'$ são laços de aresta homotópicos (pelo mesmo motivo).

2. Tome $v'_i \in S^{(i)}$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Pela demonstração da proposição 1.3.5 R_m é isomorfo ao subtorneio $T'_m = \langle v'_1, \dots, v'_m \rangle$. Se $Q_1(T'_m) \sim Q_1(T_n)$ então teremos que $Q_1(R_m) \sim Q_1(T_n)$.

Seja $p : T_n \rightarrow T'_m$ a projeção canônica $p(v_i) = v'_i, \forall v_i \in S^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$. Então p induz um homeomorfismo $p^* : Q_1(T_n) \rightarrow Q_1(T'_m)$ dado por

$$p^*({v'v^1v^2 \dots v^kv'}) = {v'p(v^1) \dots p(v^k)v'},$$

onde posso tomar $v' \in T'_m$ como ponto base (que não importa no cálculo do grupo fundamental).

Seja agora $j : T'_m \rightarrow T_m$ a inclusão e $j^* : Q_1(T'_m) \rightarrow Q_1(T_m)$ homeomorfismo induzido. Por definição, $p^* \circ j^*$ é a identidade em $Q_1(T'_m)$.

Para $\gamma = v'v^1 \dots v^k v'$ laço de arestas tenho que $\gamma' = (j^* \circ p^*)(\gamma) = v'p(v^1) \dots p(v^k)v'$ (lembre-se que j é a inclusão). Dessa forma $\gamma(\gamma')^{-1} = v'v^1v^2 \dots v^k v'v'p(v^k) \dots p(v^1)v'$. Por 1), $\gamma(\gamma')^{-1} \cong v'$ (laço trivial). Logo, γ e γ' são homotópicos $\implies j^* \circ p^*$ é a identidade. Logo, p^* é um isomorfismo entre $Q_1(T_n)$ e $Q_1(T'_m)$ e a demonstração está completa.

Corolário 2.3.6 *Se T é simplesmente desconexo, então T é hamiltoniano.*

Dem. :

Como T é simplesmente desconexo seu quociente simples único também o é pelo teorema. Logo esse quociente não é T_2 (uma vez que $\pi_1(|K_{T_2}|)$ é trivial). Mas então pelo teorema 1.3.9, T é hamiltoniano.

Definição 2.3.7 *Um torneio T é dito altamente regular se existe uma ordenação cíclica $v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}, v_1$ dos vértices de T tal que $v_i \rightarrow v_j$ se, e somente se, v_j é um dos primeiros m sucessores de v_i na ordenação cíclica. Equivalentemente se $v_i \rightarrow v_j \forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$ e $j \equiv i+1, i+2, \dots, i+m \pmod{2m+1}$.*

Teorema 2.3.8 *Todo torneio altamente regular (não-trivial) é simplesmente desconexo.*

Dem. :

Vamos precisar de dois lemas topológicos cujas demonstrações encontram-se em bibliografias do tema:

Lema 2.3.9 *Seja S um espaço topológico e sejam X e Y dois subspaços fechados de S tais que $X \cup Y = S$. Se Z é um retrato de deformação de Y tal que $X \cap Y \subseteq Z$, então $X \cup Z$ é um retrato de deformação de S .*

Lema 2.3.10 *Se X é um retrato de deformação de um espaço topológico S e Z é um retrato de deformação de X , então Z é um retrato de deformação de S .*

Dem. :

(teorema 2.3.8) Seja T_{2n+1} , ($n > 1$), um torneio altamente regular com vértices numerados por $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$. Denotamos por T_{2n} e T_{2n-1} aos torneios $T_{2n+1} - v_{n+1}$ e $T_{2n} - v_{2n+1}$, respectivamente. Vejamos que:

1. o poliedro $|K_{T_{2n}}|$ é um retrato de deformação do poliedro $|K_{T_{2n+1}}|$;
2. o poliedro $|K_{T_{2n-1}}|$ é um retrato de deformação do poliedro $|K_{T_{2n}}|$.

Dem. de 1. Como T_{2n+1} é altamente regular, o poliedro do complexo associado a ele pode ser representado da seguinte maneira:

$$|K_{T_{2n+1}}| = \overline{|(v_1 v_2 \dots v_{n+1})|} \cup \overline{|(v_2 v_3 \dots v_{n+2})|} \cup \dots \cup \overline{|(v_{2n+1} v_1 v_2 \dots v_n)|}.$$

Denotando por $st(v_{n+1})$ a estrela aberta de v_{n+1} (vide [1]), temos que $|K_{T_{2n+1}}| = \overline{Y} \cup \overline{X}$, onde $\overline{Y} = \overline{|(v_1 v_2 \dots v_{n+1})|} \cup \overline{|(v_2 v_3 \dots v_{n+2})|} \cup \dots \cup \overline{|(v_{n+1} v_{n+2} \dots v_{2n+1})|} = st(v_{n+1})$ e $\overline{X} = \overline{|(v_{n+2} v_{n+3} \dots v_1)|} \cup \overline{|(v_{n+3} v_{n+4} \dots v_2)|} \cup \dots \cup \overline{|(v_{2n+1} v_1 \dots v_n)|}$.

Seja agora \overline{Z} a união dos fechos dos simplexos obtidos dos simplexos de \overline{Y} pela eliminação de v_{n+1} :

$$\overline{Z} = \overline{|(v_1 v_2 \dots v_n)|} \cup \overline{|(v_2 v_3 \dots v_n v_{n+2})|} \cup \dots \cup \overline{|(v_{n+2} v_{n+3} \dots v_{2n+1})|}.$$

Comparando \overline{Y} e \overline{Z} vemos que \overline{Y} é o cone $|v_{n+1} \overline{Z}|$ com pico v_{n+1} .

Vamos demonstrar agora que \overline{Z} é homeomorfo ao cubo unitário I^{n-1} . De fato, se procedermos por indução no número m dos termos da união temos, para $m = 1$, que o resultado é claramente satisfeito. Supondo que $\overline{|(v_1 v_2 \dots v_n)|} \cup \overline{|(v_2 v_3 \dots v_n v_{n+2})|} \cup \dots \cup \overline{|(v_m v_{m+1} \dots v_n v_{n+2} \dots v_{n+m})|}$ é homeomorfo ao cubo unitário I^{n-1} , ao adicionarmos o termo $m + 1$ da sequência da união $\overline{|(v_{m+1} v_{m+2} \dots v_n v_{n+2} \dots v_{n+m+1})|}$ ainda temos um espaço homeomorfo a I^{n-1} , uma vez que o vértice v_{n+m+1} não está presente em nenhum dos simplexos anteriores.

Logo, podemos definir um homeomorfismo f entre $\overline{Y} = \overline{|v_{n+1} \overline{Z}|}$ e I^n , tal que f/Z leva \overline{Z} sobre I^{n-1} . Dessa forma temos que \overline{Z} é um retrato de deformação de \overline{Y} . Logo, pelo lema 2.3.9, $\overline{Z} \cup \overline{X}$ é um retrato de deformação de $\overline{Y} \cup \overline{X}$. Mas, por construção $\overline{Z} \cup \overline{X} = |K_{T_{2n}}|$.

Dem. de 2. Seja \overline{W} a união dos fechos dos simplexos obtidos a partir dos simplexos de \overline{X} pela retirada de v_{2n+1} :

$$\overline{W} = \overline{|(v_{n+2} v_{n+3} \dots v_{2n} v_1)|} \cup \overline{|(v_{n+3} v_{n+4} \dots v_{2n} v_1 v_2)|} \cup \dots \cup \overline{|(v_1 v_2 \dots v_n)|}.$$

Comparando \overline{X} e \overline{W} vemos que \overline{X} é o cone $|v_{2n+1} \overline{W}|$ com pico v_{2n+1} .

Repetindo o procedimento anterior podemos demonstrar que \overline{W} é homeomorfo ao cubo unitário I^{n-1} e que \overline{W} é um retrato de deformação de \overline{X} . Logo, pelo lema 2.3.9, $\overline{Z} \cup \overline{W} = |K_{T_{2n-1}}|$ é um retrato de deformação de $\overline{Z} \cup \overline{X} = |K_{T_{2n}}|$.

Mas, pelo lema 2.3.10, 1. e 2., então $|K_{T_{2n-1}}|$ é um retrato de deformação de $|K_{T_{2n+1}}|$. Logo, os grupos fundamentais $Q_1(T_{2n+1})$ e $Q_1(T_{2n-1})$ são isomorfos.

Vamos usar então indução na ordem n do torneio T_{2n+1} para demonstrar o teorema: para $n = 1$, T_3 é o 3-ciclo e $Q_1(T_3) \sim \mathbb{Z}$. Suponha agora que para $n - 1$ vale o teorema e seja $T_{2n-1} = T_{2n+1} - \{v_{n+1}, v_{2n+1}\}$. Considere o torneio altamente regular (para o qual vale o teorema) de ordem $2n - 1$, T'_{2n-1} , com vértices $w_1, w_2, \dots, w_{2n-1}$. A função $g : T'_{2n-1} \rightarrow T_{2n-1}$, tal que $g(w_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$, e $g(w_i) = v_{i+1}$, $n + 1 \leq i \leq 2n - 1$, é um isomorfismo entre T'_{2n-1} e T_{2n-1} . Dessa forma, por hipótese de indução, $Q_1(T_{2n-1}) \sim \mathbb{Z}$. Além disso, como havíamos visto que $Q_1(T_{2n+1})$ e $Q_1(T_{2n-1})$ são isomorfos, temos o teorema.

Corolário 2.3.11 *O grupo fundamental de um torneio altamente regular (não-trivial) T_{2n+1} é isomorfo a \mathbb{Z} .*

Dem. :

Considere T_{2n+1} e os seguintes subtorneios induzidos:

$$\begin{aligned} T_{2n-1} &= \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+2}, \dots, v_{2n} \rangle \\ T_{2n-3} &= \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n-1} \rangle \\ &\dots\dots\dots \\ T_3 &= \langle v_1, v_2, v_{n+2} \rangle \end{aligned}$$

Pela repetição sucessiva do argumento da demonstração do teorema 2.3.8, cada poliedro do complexo simplicial associado a T_{2n-1} (respectivamente T_{2n-3}, \dots, T_3) é um retrato de deformação do torneio imediatamente anterior. Logo, $Q_1(T_{2n+1}) \sim Q_1(T_3) \sim \mathbb{Z}$.

Corolário 2.3.12 *Seja T um torneio. Se o quociente simples relacionado a T é altamente regular, então T é simplesmente desconexo.*

Dem. :

Imediata a partir da proposição 2.3.5 e do teorema 2.3.8.

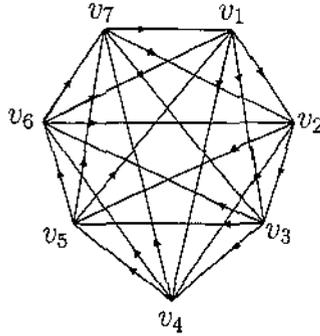
As seguintes proposições decorrem dos resultados até agora apresentados e serão necessárias para demonstração do teorema de caracterização geral. Suas demonstrações encontram-se em [8].

Proposição 2.3.13 *Seja T_{2n+1} um torneio altamente regular (não-trivial) e seja $\gamma = v_i v_j v_k v_i$ um 3-laço em K_T . Então a classe $\{\gamma\}$ é um gerador de $Q_1(T_{2n+1}) \sim \mathbb{Z}$. Logo, $\{\gamma\} \neq \{v_i\}$, isto é γ não é homotopicamente trivial em $|K_T|$*

Proposição 2.3.14 *Se $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$ é a composição de quaisquer torneios $S^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 2m + 1$, com um torneio altamente regular (não-trivial)*

R_{2m+1} , então o grupo fundamental $Q_1(T_n)$ é isomorfo a \mathbb{Z} . Além disso, seja $\gamma = v_i v_j v_k v_i$ um 3-laço em K_{T_n} , cujos vértices não estão contidos na mesma componente. Então a classe $\{\gamma\}$ é um gerador de $Q_1(T)$ e, então, $\{\gamma\}$ não é homotopicamente trivial em $|K_{T_n}|$.

Exemplo 2.3.15 O torneio T_7 , altamente regular:



Teorema 2.3.16 (Caracterização) Um torneio T é simplesmente desconexo se, e somente se, o quociente simples relacionado a T é altamente regular.

Dem. :

(\Leftarrow) Decorre imediatamente do corolário 2.3.12.

(\Rightarrow) Por indução. Para $n = 3$, se T_3 for simplesmente desconexo, então T_3 é o 3-ciclo e também é altamente regular. Logo, T_3 é seu próprio quociente simples relacionado. Assuma então por hipótese de indução que para cada torneio simplesmente desconexo T_n , o quociente simples T^* relacionado a T_n é altamente regular.

Seja então um torneio simplesmente desconexo T_{n+1} e um laço de arestas $\gamma = v_1 v_2 \dots v_s v_1$ que não é homotopicamente nulo em $|K_{T_{n+1}}|$. Aplicando as operações que preservam classe de homotopia podemos escrever:

$$\begin{aligned} \{v_1 v_2 \dots v_s v_1\} &= \{v_1 v_2 v_3 v_1 v_1 v_3 v_4 v_1 v_1 v_4 v_5 v_1 \dots v_1 v_{s-1} v_s v_1\} \\ &= \{v_1 v_2 v_3 v_1\} \{v_1 v_3 v_4 v_1\} \dots \{v_1 v_{s-1} v_s v_1\} \end{aligned}$$

Como γ não é trivial, ao menos um dos laços de aresta $\{v_1 v_{i-1} v_i v_1\}$ também é não-trivial. Seja então um vértice $w \notin \langle v_1, v_{i-1}, v_i \rangle$, e considere o torneio $T_n = T_{n+1} - w$. O laço de arestas $v_1 v_{i-1} v_i v_1$ será não-trivial em $|K_{T_n}|$ também, uma vez que T_n é um subtorneio de T_{n+1} . Logo, por hipótese de indução o quociente simples R_{2m+1} relacionado a $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)})$ é altamente regular.

Temos então a seguinte condição para a orientação dos arcos entre w e qualquer vértice v_i de T_n :

(*) Se os vértices de um 3-ciclo γ de T_n não estão contidos na mesma componente, então nem $\gamma \rightarrow w$ nem $w \rightarrow \gamma$.

De fato, caso contrário o laço de arestas positivo γ^+ , gerado por γ , será homotopicamente nulo em $|K_{T_{n+1}}|$. Mas isso é uma contradição uma vez que o laço v_1, v_i, v_{i+1}, v_1 que não é trivial em $|K_{T_{n+1}}|$ é, pela proposição 2.3.14 homotópico a $v_1\gamma^+v_1$ em $|K_{T_n}|$ e em $|K_{T_{n+1}}|$, de modo que γ^+ não é trivial.

Seja agora, para cada $i = 1, 2, \dots, 2m+1$, os conjuntos (complementares) $S^{\rightarrow(i)} = \{v \in S^{(i)} | v \rightarrow w\}$ e $S^{\leftarrow(i)} = \{v \in S^{(i)} | w \rightarrow v\}$. Provemos que existe no máximo um índice para o qual a partição $\{S^{\rightarrow(i)}, S^{\leftarrow(i)}\}$ de $S^{(i)}$ é não-trivial. Caso contrário, existem p e q , $p \neq q$ tal que $S^{\rightarrow(p)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(p)}$ e $S^{\rightarrow(q)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(q)}$. Suponha que $S^{(p)} \rightarrow S^{(q)}$. Como R_{2m+1} é a.r. e não-trivial, $\exists r = 1, 2, \dots, 2m+1$ tal que $S^{(r)} \rightarrow S^{(p)} \rightarrow S^{(q)} \rightarrow S^{(r)}$ (pela ordenação cíclica). Seja $v_r \in S^{(r)}$ e suponha que $w \rightarrow v_r$. Tomo v_p (resp. v_q) em $S^{(p)}$ ($S^{(q)}$) tal que $w \rightarrow \langle v_p, v_q, v_r \rangle = \gamma$ (quando $v_r \rightarrow w$, faço o mesmo por hipótese de não-trivialidade das duas partições). Logo $w \rightarrow \gamma$ (ou $\gamma \rightarrow w$) e isso é uma contradição com (*). Temos então duas possibilidades:

1. $\forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$, ou $S^{\rightarrow(i)} = \emptyset$ ou $S^{\leftarrow(i)} = \emptyset$;
2. $\exists!$ i tal que $S^{\rightarrow(i)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(i)}$

1) Não posso ter $w \rightarrow S^{(i)}$ nem $S^{(i)} \rightarrow w$ para todo i , caso contrário todo r-laço em $K_{T_{n+1}}$ é homotopicamente nulo. Mudando os índices se necessário, suponho que $w \rightarrow S^{(m+1)}$ e que $S^{(m+2)} \rightarrow w$. Temos duas possibilidades: $w \rightarrow S^{(1)}$ ou $S^{(1)} \rightarrow w$. Suponha que $S^{(1)} \rightarrow w$. Seja, por exemplo, $v_1 \in S^{(1)}$, $v_2 \in S^{(2)}$ e $v_{m+2} \in S^{(m+2)}$. Então $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_{m+2} \rightarrow v_1$ e $v_{m+2} \rightarrow w$. Mas então $w \rightarrow v_2$ ($w \rightarrow S^{(2)}$), pois senão o 3-ciclo $\langle v_1, v_2, v_{m+2} \rangle$ seria tal que $\langle v_1, v_2, v_{m+2} \rangle \rightarrow w$, o que é absurdo (por (*)). Faço isso para $i = 2, 3, \dots, m$ e aplico então argumento análogo para $i = m+3, m+4, \dots, 2m+1$, obtendo que $w \rightarrow S^{(i)}$, $i = 2, 3, \dots, m+1$ e $S^{(i)} \rightarrow w$, $i = m+2, m+3, \dots, 2m+1$. Caso $w \rightarrow S^{(1)}$, começo por $i = 2m+1$ e, utilizando $S^{(m+1)}$ obtenho os mesmos resultados. Logo $T_{n+1} = R_{2m+1}(S^{(1)} \cup \{w\}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$, R_{2m+1} altamente regular e não-trivial, por T_n e as relações obtidas para w .

2) Faço, se necessário, uma rotação nos índices de R_{2m+1} , de modo que $S^{\rightarrow(1)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(1)}$. Se $w \rightarrow S^{(m+1)}$, posso proceder como antes (posso tomar $v_1 \in S^{\rightarrow(1)}$ t.q. $v_1 \rightarrow w$ e $v'_1 \in S^{\leftarrow(1)}$ t.q. $w \rightarrow v'_1$ e obter que $T_{n+1} = R_{2m+1}(S^{(1)} \cup \{w\}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$, R_{2m+1} altamente regular e não-trivial. Se $S^{(m+1)} \rightarrow w$, então obtenho que $w \rightarrow S^{(i)}$, $i = m+2, \dots, 2m+1$ e que $S^{(i)} \rightarrow w$, $i = 2, 3, \dots, m$. As incidências de w não são mais as mesmas para que o quociente da forma do item anterior seja altamente regular.

Além disso, $S^{\leftarrow(1)} \longrightarrow S^{\rightarrow(1)}$. Senão seja $v_1 \in S^{\rightarrow(1)}$ e $v'_1 \in S^{\leftarrow(1)}$ tal que $v_1 \longrightarrow v'_1$. Seja $v_{2m+1} \in S^{(2m+1)}$ e um 3-ciclo $\gamma = \langle v_1, v_{m+1}, v_{m+2}, v_{2m+1} \rangle$, com $v_{m+1} \in S^{m+1}$ e $v_{m+2} \in S^{m+2}$. Então $\{v_1, v_{m+1}, v_{m+2}, v_{2m+1}\} = \{v_1\}$ o que é uma contradição com o argumento utilizado na obtenção de (*). Logo, valem as incidências de modo que

$$T_{n+1} = R_{2m+3}(S^{\rightarrow(1)}, \dots, S^{(m+1)}, \{w\}, S^{(m+2)}, \dots, S^{\leftarrow(1)}),$$

onde $R_{(2m+3)}$ é altamente regular e não-trivial.

O teorema de caracterização é estendido para digrafos semicompletos através do

Teorema 2.3.17 *Um digrafo semicompleto D é simplesmente desconexo se, e somente se, o quociente simples relacionado a D é um torneio altamente regular.*

Capítulo 3

Ciclos conados e não-conados de digrafos e a classificação de torneios por 3-ciclos não-conados

3.1 Resumo

A classificação dos torneios por 3-ciclos não-conados obtida por Burzio e Demaria ([4]) e a posterior classificação dos torneios hamiltonianos ([7]) foram fundamentais no estudo dos torneios normais e sua posterior aplicação no problema de reconstrução destes torneios. São resultados citados em grande parte dos trabalhos que se sucederam (ex. [10], [16]). Neste capítulo apresentamos a classificação de torneios por 3-ciclos não-conados que tem uma ligação direta com os resultados do capítulo anterior. Apresentamos também a extensão dos conceitos de ciclos conados (ou projetados) e não-conados para digrafos, ciclo característico, minimal, característica e diferença cíclica. No apêndice apresentamos os torneios de Moon que tem uma caracterização que decorre imediatamente dos resultados da primeira seção e que são reconstrutíveis com apenas duas exceções.

3.2 Ciclos conados e não-conados em torneios

Definição 3.2.1 *T' subtorneio de T é conado por v (v é pico de T) se $\exists v \in T - T'$ t.q. $v \rightarrow T'$ ou $T' \rightarrow v$. T' é não conado se $\forall v \in T - T'$ a propriedade não é satisfeita.*

Esta é uma definição combinatória, mas com motivações topológicas fortes. Há bem da verdade obteremos ao término da seção seguinte o resultado:

Corolário 3.2.2 *Um torneio é simplesmente desconexo se, e somente se,*

1. \exists um 3-ciclo não conado
2. todos os 3-ciclos conados são contraíveis

Este resultado vem como união do teorema 2.3.16 do capítulo anterior com o teorema 3.3.9 e vale com adaptações para digrafos em geral. É utilizado (na forma do teorema 3.3.11) para a classificação dos torneios de Moon, por exemplo (veja apêndice).

3.3 Classificação dos torneios por 3-ciclos não-conados

Lembremos que um torneio T é altamente regular se existe uma ordenação cíclica $v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}, v_1$ dos vértices de T tal que $v_i \rightarrow v_j$ se, e somente se, v_j é um dos primeiros m sucessores de v_i na ordenação cíclica. Equivalentemente se $v_i \rightarrow v_j \forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$ e $j \equiv i + 1, i + 2, \dots, i + m \pmod{2m + 1}$.

Se T é hamiltoniano e R_m é o quociente simples relacionado a T , as componentes também são unicamente determinadas e são os conjuntos maximais equivalentes de vértices de T , ie, se T é hamiltoniano existem 2 conjuntos maximais equivalentes em T , em geral não disjuntos.

Definição 3.3.1 *T' subdigrafo de T é contraível se \exists um subconjunto próprio de vértices de T equivalente que inclui os vértices de T' . Se não existe tal subconjunto, T' é não-contraível.*

Observação 3.3.2 *Todo conjunto equivalente está contido em um equivalente maximal $\implies T'$ é contraível se, e somente se, está contido numa componente maximal de T .*

As seguintes observações são imediatas e decorrem diretamente das definições:

- Todo subtorneio contraível é conado.
- Temos as seguintes possibilidades para os 3-ciclos: não conados, contraíveis(conados) e conados, mas não contraíveis.

Proposição 3.3.3 *Seja R quociente não trivial de T e p a aplicação projeção canônica de T em R . Um 3-ciclo γ é não-conado em T se, e somente se, sua projeção $p(\gamma)$ é não-conada em R .*

Dem. :

Se γ é não-conado em T , então não é contraível. Logo, sua projeção é não-conada. A recíproca é semelhante.

A próxima proposição é de verificação bastante simples e de fato caracteriza os torneios transitivos de maneira bastante útil:

Proposição 3.3.4 *T é transitivo se, e somente se, não tem 3-ciclos.*

Dem. :

Claramente transitividade e existência de 3-ciclos não são compatíveis.

Proposição 3.3.5 *T é hamiltoniano se, e somente se, \exists um 3-ciclo não-contraível em T .*

Dem. :

T hamiltoniano não é transitivo e portanto admite um 3-ciclo. Se todo 3-ciclo é contraível, o quociente com componentes maximais não possui 3-ciclos (ficaram dentro das componentes). Mas então esse quociente é transitivo pela proposição anterior, o que é uma contradição com o fato do torneio original ser hamiltoniano (lembrando que se um torneio for hamiltoniano então cada quociente também o será). Reciprocamente, se T não é hamiltoniano, todo 3-ciclo está contido em uma única componente. Mas como T possui um 3-ciclo não-contraível isso não pode ocorrer.

Proposição 3.3.6 *Cada 3-ciclo de um torneio simples é não contraível.*

Dem. :

A demonstração é imediata.

Proposição 3.3.7 *Cada 3-ciclo de um torneio altamente regular é não-conado.*

Dem. :

Seja T_{2m+1} o torneio e $\gamma = \langle x, y, z \rangle$ um 3-ciclo em T . Ordene T_{2m+1} na ordem standard e seja então $v_1 = x$, $v_h = y$, $v_k = z$, com $h < k \leq 2m + 1$. Das incidências em um torneio altamente regular, temos:

$$h \leq m + 1 \Rightarrow v_1 \longrightarrow v_i \longrightarrow v_h \quad \forall 1 < i < h$$

$$k - h \leq m \Rightarrow v_h \longrightarrow v_i \longrightarrow v_k \quad \forall h < i < k$$

$$k \geq m + 2 \Rightarrow v_k \longrightarrow v_i \longrightarrow v_1 \quad \forall k < i < 2m + 1$$

Dessa forma, nenhum vértice de T cona γ .

3.3.1 Torneios com um quociente altamente regular

Lema 3.3.8 *Seja T um torneio cujos 3-ciclos conados são todos contraíveis e $w \in T$. Então um 3-ciclo não-conado de $T' = T - w$ é também um 3-ciclo não-conado de T .*

Dem. :

Seja R_h o quociente simples relacionado a T com componentes $S^{(1)}, \dots, S^{(h)}$ e \tilde{R}_k o quociente simples relacionado a T' com componentes $\tilde{S}^{(1)}, \dots, \tilde{S}^{(k)}$. Suponha por absurdo que existe um 3-ciclo não-conado γ de T' que seja conado por w (essa é a única possibilidade de ser conado em T). Então γ é contraível por hipótese e está numa componente de R_h , por exemplo $S^{(1)}$. Pela proposição 3.3.5 T' é hamiltoniano e portanto a partição $\{S^{(1)} - w, S^{(2)} - w, \dots, S^{(h)} - w\}$ é uma cobertura de T' mais fina que $\tilde{S}^{(1)}, \dots, \tilde{S}^{(k)}$ formada pelos conjuntos equivalentes maximais. Mas $\gamma \subseteq S^{(1)} - w$ e $S^{(1)} - w \subseteq \tilde{S}^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$. Por outro lado, como γ não é conado em T' , os vértices estão em diferentes componentes $\tilde{S}^{(p)}, \tilde{S}^{(q)}, \tilde{S}^{(r)}$. Contradição. Logo γ é não-conado em T .

Nas condições do lema anterior e pela proposição 3.3.5, T' hamiltoniano $\Rightarrow T$ hamiltoniano.

Podemos então a partir destes resultados caracterizar os torneios cujo quociente simples é altamente regular, utilizando para isso dos 3-ciclos conados e não-conados.

Teorema 3.3.9 *O quociente simples relacionado a T é altamente regular se, e somente se,*

1. \exists um 3-ciclo não conado
2. todos os 3-ciclos conados são contraíveis

Dem. :

(\Rightarrow)

Suponha que o quociente simples relacionado a T é altamente regular (a.r.). Então T é da forma $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)})$, com R_{2m+1} altamente regular não-trivial. Se γ é não contraível seus vértices estão em componentes diferentes. Como R_{2m+1} é a.r., γ é não conado (pelo mesmo argumento da proposição 3.3.7). Além disso, como R_{2m+1} é hamiltoniano, por 3.3.5 possui 3-ciclo não contraível \Rightarrow possui 3-ciclo não-conado e por 3.3.3 existe um 3-ciclo não-conado em T .

(\Leftarrow)

Por indução. Para $n=3$, T_n é 3-ciclo e então altamente regular. Suponha então que $n \geq 4$. Suponha que $\forall T_k$ de ordem k , que satisfaz 1) e 2) o quociente simples relacionado a T_k é altamente regular. Seja T_{k+1} que satisfaça 1) e 2). Por 1) existe um 3-ciclo não-conado γ em T_{k+1} . Seja $w \in T_{k+1} - \gamma$ e $T_k = T_{k+1} - w$. γ é não-conado em T_k (pois não

é em T_{k+1}). Por outro lado, cada 3-ciclo conado σ de T_k é conado em T_{k+1} e portanto contraível em T_{k+1} por 2). Logo, σ está contido em um subconjunto próprio equivalente A de T_{k+1} . Mas então σ está em $A - w$ e é contraível em T_k . Dessa maneira 1) e 2) valem para T_k e, por hipótese de indução, T_k é da forma $T_k = R_{2m+1}(S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)})$, onde R_{2m+1} é a.r. não-trivial.

Considere, $\forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$ os conjuntos (complementares) $S^{\rightarrow(i)} = \{v \in S^{(i)} | v \rightarrow w\}$ e $S^{\leftarrow(i)} = \{v \in S^{(i)} | w \rightarrow v\}$. Provemos que existe no máximo um índice para o qual a partição $\{S^{\rightarrow(i)}, S^{\leftarrow(i)}\}$ de $S^{(i)}$ é não-trivial. Caso contrário, existem p e q , $p \neq q$ tal que $S^{\rightarrow(p)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(p)}$ e $S^{\rightarrow(q)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(q)}$. Suponha que $S^{(p)} \rightarrow S^{(q)}$. Como R_{2m+1} é a.r. e não-trivial, $\exists r = 1, 2, \dots, 2m+1$ tal que $S^{(r)} \rightarrow S^{(p)} \rightarrow S^{(q)} \rightarrow S^{(r)}$ (pela ordenação cíclica). Seja $v_r \in S^{(r)}$ e suponha que $w \rightarrow v_r$. Tomo v_p (resp. v_q) em $S^{(p)}(S^{(q)})$ tal que $w \rightarrow \langle v_p, v_q, v_r \rangle$ (quando $v_r \rightarrow w$, faço o mesmo por hipótese de não-trivialidade das duas partições). Logo w cona o 3-ciclo em T_{k+1} e, pelo lema 3.3.8 o 3-ciclo é conado em T_k . Mas isso é uma contradição, uma vez que seria contraível (por 2) e, pela forma como foi construído, isso contradizeria o fato de R_{2m+1} ser altamente regular.

Temos então duas possibilidades:

1. $\forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$, ou $S^{\rightarrow(i)} = \emptyset$ ou $S^{\leftarrow(i)} = \emptyset$;
2. $\exists!$ i tal que $S^{\rightarrow(i)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(i)}$

1) Como existe 3-ciclo não-conado em T_{k+1} , por 3.3.5 T_{k+1} é hamiltoniano e então w não-cona T_k . Mudando os índices se necessário, suponha que $w \rightarrow S^{(m+1)}$ e que $S^{(m+2)} \rightarrow w$ (como w não cona T_k , existem índices tais que isso ocorre). Temos duas possibilidades: $w \rightarrow S^{(1)}$ ou $S^{(1)} \rightarrow w$. Suponha que $S^{(1)} \rightarrow w$. Seja, por exemplo, $v_1 \in S^{(1)}$, $v_2 \in S^{(2)}$ e $v_{m+2} \in S^{(m+2)}$. Então $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_{m+2} \rightarrow v_1$ e $w \rightarrow v_{m+2}$. Mas então $w \rightarrow v_2$ ($w \rightarrow S^{(2)}$), pois senão o 3-ciclo $\langle v_1, v_2, v_{m+2} \rangle$ seria conado por w , o que é absurdo (pelo lema 3.3.8). Faço isso para $i = 2, 3, \dots, m$ e aplico então argumento análogo para $i = m+3, m+4, \dots, 2m+1$, obtendo que $w \rightarrow S^{(i)}$, $i = 2, 3, \dots, m+1$ e $S^{(i)} \rightarrow w$, $i = m+2, m+3, \dots, 2m+1$. Caso $w \rightarrow S^{(1)}$, começo por $i=m+3$ e, utilizando $S^{(m+1)}$ obtenho os mesmos resultados. Logo $T_{k+1} = R_{2m+1}(S^{(1)} \cup \{w\}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$, R_{2m+1} altamente regular e não-trivial, por T_k e as relações obtidas para w .

2) Faço, se necessário, uma rotação nos índices de R_{2m+1} , de modo que $S^{\rightarrow(1)} \neq \emptyset \neq S^{\leftarrow(1)}$. Se $w \rightarrow S^{(m+1)}$, posso proceder como antes (posso tomar $v_1 \in S^{\rightarrow(1)}$ t.q. $v_1 \rightarrow w$ e $v'_1 \in S^{\leftarrow(1)}$ t.q. $w \rightarrow v'_1$ e obter que $T_{k+1} = R_{2m+1}(S^{(1)} \cup \{w\}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$,

R_{2m+1} . Se $S^{(m+1)} \rightarrow w$, então obtenho que $w \rightarrow S^{(i)}, i = m + 2, \dots, 2m + 1$ e que $S^{(i)} \rightarrow w, i = 2, 3, \dots, m$. As incidências de w não são mais as mesmas.

Além disso, $S^{\leftarrow(1)} \rightarrow S^{\rightarrow(1)}$. Senão seja $v_1 \in S^{\rightarrow(1)}$ e $v'_1 \in S^{\leftarrow(1)}$ tal que $v_1 \rightarrow v'_1$. Seja $v_{2m+1} \in S^{(2m+1)}$. Então $\delta = \langle v_1, w, v_{2m+1} \rangle$ é conado por v'_1 e então contraível em T_{k+1} . Seja $\tilde{T}^{(t)}$ o quociente simples relacionado a T_{k+1} e as componentes $\tilde{S}^{(1)}, \dots, \tilde{S}^{(t)}$. Então v_1 e v_{2m+1} estão na mesma componente (ex. $\tilde{S}^{(1)}$). Pela demonstração do lema 3.3.8, a partição $\{\tilde{S}^{(1)} - w, \dots, \tilde{S}^{(t)} - w\}$ é mais fina que $\{S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)}\}$ de T_k . Mas v_1 e $v_{2m+1} \in \tilde{S}^{(1)}$, enquanto $v_1 \in S^{(1)}$ e $v_{2m+1} \in S^{(2m+1)}$, uma contradição. Logo, valem as incidências de modo que

$$T_{k+1} = R_{2m+3}(S^{\rightarrow(1)}, \dots, S^{(m+1)}, \{w\}, S^{(m+2)}, \dots, S^{\leftarrow(1)})$$

com $R_{(2m+3)}$ altamente regular e não-trivial.

Observamos que os torneios cujos 3-ciclos conados são todos contraíveis são também os torneios redutíveis daqueles com um quociente altamente regular não-trivial.

Esse teorema pode ser generalizado para digrafos semicompletos, de maneira natural:

Teorema 3.3.10 *O quociente simples relacionado a D é altamente regular se, e somente se,*

1. \exists um 3-ciclo não conado em D
2. todos os 2 e 3-ciclos conados de D são contraíveis

Teorema 3.3.11 (caracterização) *As seguintes condições são equivalentes para qualquer torneio T_n :*

1. todo subtorneio de T_n ou é hamiltoniano ou transitivo;
2. todo subtorneio de T_n de ordem 4 ou é hamiltoniano ou transitivo;
3. todo 3-ciclo de T_n é não-conado;
4. $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)})$ é a composição de $2m+1$ componentes transitivas $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(2m+1)}$ com um quociente altamente regular R_{2m+1} .

Dem. :

1) \implies 2) óbvio. 2) \implies 3) Se $\gamma = \langle x, y, z \rangle$ é 3-ciclo conado por v , então $\langle x, y, z, v \rangle$ é subtorneio não-transitivo, redutível, T_4 de T .

3) \implies 4) Se T_n não possui 3-ciclo, então é transitivo $\implies T_n = R_1(T_n)$, onde R_1 é o torneio trivial altamente regular. Suponha agora que existe um 3-ciclo γ em T_n . Por hipótese γ é não-conado. Pelo teorema 3.3.9 $T_n = R_{2m+1}(S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)})$, onde R_{2m+1} é altamente regular e não-trivial. Ainda, $\forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$, $S^{(i)}$ é transitivo uma vez que nenhum 3-ciclo está contido em $S^{(i)}$ (pois seria conado). Logo, vale 4).

4) \implies 1) Se $R_{2m+1} = R_1$, T_n é transitivo e 1) vale. Se R_{2m+1} não é trivial, seja $w \in T_n$ e $T_{n-1} = T - w$. w está incluso em, por exemplo $S^{(2m+1)}$. Temos dois casos:

1. $S^{(2m+1)} - w \neq \emptyset$. Então $T_{n-1} = R_{2m+1}(S^{(1)}, \dots, S^{(2m+1)} - w)$. Logo, T_{n-1} é hamiltoniano e a componente $S^{(2m+1)}$ é transitiva.
2. $S^{(2m+1)} - w = \emptyset$.
 - Se $m = 1$, $T_{n-1} = R_2(S^{(1)}, S^{(2)})$ e essa decomposição é transitiva, pois $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são transitivas e $S^{(1)} \rightarrow S^{(2)}$.
 - Se $m > 1$, $T_{n-1} = R_{2m-1}(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m-1)}, S^{(m)} \cup S^{(m+1)}, S^{(m+2)}, \dots, S^{(2m-1)})$ onde R_{2m-1} é altamente regular e $S^{(m)} \cup S^{(m+1)}$ é transitiva, uma vez que $S^{(m)}$ e $S^{(m+1)}$ são transitivas e $S^{(m)} \rightarrow S^{(m+1)}$. Logo, todo torneio de ordem $(n-1)$ é hamiltoniano ou transitivo e satisfaz 4). Extendendo aos subtorneios de ordem $n-2, n-3, \dots$ tenho o resultado.

3.4 Ciclos conados e não-conados em digrafos

Podemos estender o conceito de ciclo conado naturalmente de torneios para digrafos:

Definição 3.4.1 D' subdigrafo de D é **conado** por v (v é pico de D) se $\exists v \in D - D'$ t.q. $v \Rightarrow D'$ ou $D' \Rightarrow v$. D' é não conado se $\forall v \in D - D'$ a propriedade não é satisfeita.

Lembremos que:

Observação 3.4.2 A notação $A \Rightarrow B$ é utilizada quando $\forall v \in A, u \in B$ tenho que $v \rightarrow u$ e para nenhum vértice de A ou B a relação em direção contrária ocorre.

Observação 3.4.3 Se $Q_m(S^{(1)}, \dots, S^{(m)})$ é quociente de D_n então Q_m é isomorfo a um subdigrafo de D_n .

Observação 3.4.4 $\forall D_n$ existe um único quociente simples relacionado.

Observação 3.4.5 D_n não é hamiltoniano se, e somente se, T_2 não é seu quociente (com arco simples).

3.4.1 Diferença cíclica em um digrafo semicompleto

Para o restante deste trabalho, a menos de menção em contrário explícita, estaremos denotando D_n como um digrafo semicompleto hamiltoniano de ordem n .

Definição 3.4.6 *Um vértice v de D_n é um vértice neutral de D_n se $D_n - v$ é hamiltoniano. O número de vértices neutrais de D_n é denotado por $\nu(D_n)$.*

Observação 3.4.7 $\nu(D_n)$ é o número de subdigrafos hamiltonianos de ordem $n-1$. Em D_n ($n \geq 4$) existem pelo menos 2 e no máximo n subdigrafos de ordem $n-1$. Então $2 \leq \nu(D_n) \leq n$ para $n \geq 4$. Esta observação vale para torneios e pode ser estendida naturalmente para digrafos hamiltonianos em geral (a existência de arcos duplos aumenta o número possível de vértices neutrais).

Proposição 3.4.8 D_n ($n \geq 5$) é hamiltoniano se, e somente se, existe um m -ciclo não-conado C , onde $2 \leq m \leq n - 2$.

Dem. :

(\implies) Seja D_n digrafo semicompleto hamiltoniano e v um vértice neutral de D_n . Como $D_n - v$ tem ordem maior ou igual a 4, possui pelo menos dois vértices neutrais w_1 e w_2 (pela observação anterior). Dessa forma os subdigrafos $D_n - v$, $D_n - \{v, w_1\}$ e $D_n - \{v, w_2\}$ são hamiltonianos. Suponha por absurdo que os dois subdigrafos $D_n - \{v, w_1\}$ e $D_n - \{v, w_2\}$ são conados. Então w_1 não pode conar $D_n - \{v, w_1\}$, pois senão $D_n - \{v, w_2\}$ é não-hamiltoniano. Analogamente, w_2 não pode conar $D_n - \{v, w_2\}$. Mas então tenho que v cona tanto $D_n - \{v, w_1\}$ quanto $D_n - \{v, w_2\}$ e portanto v cona $D_n - v$. Contradição pois teria $D_n = T_2(D_n - v, \{v\})$. Logo, pelo menos um desses dois $n - 2$ -ciclos de D_n é não-conado e portanto existe um m -ciclo não-conado C , onde $2 \leq m \leq n - 2$.

(\impliedby) Suponha por absurdo que D_n não é hamiltoniano. Então seu quociente simples é T_2 (com arco simples). Logo, cada ciclo de D_n está em uma das duas componentes de T_2 e portanto é conado. Contradição com a existência de um m -ciclo não-conado.

Observação 3.4.9 *Ao observarmos os torneios D_3 e D_4 , observamos que eles contém m -ciclos não conados, mas a condição $m \leq n - 2$ não é satisfeita.*

Definição 3.4.10 *Se C é um ciclo não-conado de D_n , $P_C = V(D_n) - V(C)$ consiste de vértices neutrais de D_n , que são chamados pólos de C .*

Definição 3.4.11 *Um ciclo não-conado C de D_n é minimal se cada ciclo C' tal que $V(C') \subset V(C)$, é conado por pelo menos um vértice de D_n .*

Definição 3.4.12 Um ciclo minimal é dito **característico** se possui o menor comprimento entre os ciclos minimais. O comprimento de um ciclo característico é chamado de característica cíclica de D_n e é denotado por $cc(D_n)$. A diferença $n - cc(D_n)$ é a diferença cíclica de D_n e denotada por $cd(D_n)$.

Observação 3.4.13 Se C é um ciclo característico de D_n , então $cd(D_n) = |P_C|$.

3.4.2 Partição dos digrafos semicompletos hamiltonianos

Proposição 3.4.14 Um vértice v de D_n é neutral se, e somente se, existe um ciclo minimal C de D_n tal que $v \in P_C$.

Dem. :

Se v é neutral, então $D_n - v$ é hamiltoniano e, em particular, não-conado. Seja então C ciclo minimal de D_n em $D_n - v$ (que existe, nem que seja o próprio $D_n - v$). Então $v \in P_C$. Se $v \in P_C$, para algum C ciclo minimal, então por definição v é neutral.

Observação 3.4.15 Se v é um vértice neutral de D_n , em geral não existe ciclo característico C tal que $v \in P_C$.

Corolário 3.4.16 O conjunto de vértices neutrais de D_n é a união dos conjuntos de pólos dos ciclos minimais de D_n . Então $cd(D_n) \leq \nu(D_n)$.

Proposição 3.4.17 $cd(D_n) = \nu(D_n)$ se, e somente se, existe um único ciclo minimal em D_n (o ciclo característico).

Dem. :

Se $cd(D_n) = \nu(D_n)$, suponha que existem C e C' ciclos minimais, e seja C o característico. Então $|P_C| = cd(D_n) = \nu(D_n)$. Em particular os pólos de C são os vértices neutrais de D_n . Mas C' é outro ciclo minimal e então existe $u \in P_{C'}$ tal que $u \notin P_C$. Como u é neutral fora de P_C temos uma contradição. Reciprocamente se existe um único ciclo minimal o resultado é satisfeito observando-se a proposição 3.4.14.

Proposição 3.4.18 Se $D_n = D'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$ de m digrafos $S^{(i)}$ com quociente D'_m , então $cc(D_n) = cc(D'_m)$.

Dem. :

Seja C um r -ciclo não-conado de D_n . Como C é não conado, os r vértices de C são elementos de componentes diferentes $S^{(i)}$ em D'_m . Reciprocamente, como todo quociente

de um digrafo T é isomorfo a um subdigrafo de T , seja D''_m um subdigrafo de D_n isomorfo a D'_m . Então a imagem em D''_m de um m -ciclo não-conado de D'_m é um m -ciclo não-conado de D_n . Dessa forma os ciclos não conados de D_n e D'_m estão em correspondência 1-1 e portanto $cc(D_n) = cc(D'_m)$.

Proposição 3.4.19 *Se $D_n = D'_m(S^{(1)}, \dots, S^{(m)})$, então v é um vértice neutral de D_n se, e somente se, v está em uma componente não-singleton (formada por apenas um vértice) ou $p(v)$ é um vértice neutral de D'_m , onde p é a projeção canônica.*

Dem. :

Seja v vértice neutral de D_n e suponha que v está numa componente singleton de D'_m . Então $p(v)$ é vértice de D'_m . Como v é neutral, existe C ciclo minimal de D_n tal que $v \in P_C$. Mas então $p(v) \in P_{p(C)}$ e $p(v)$ é vértice neutral de D'_m . Reciprocamente, se $p(v)$ é um vértice neutral de D'_m certamente será de D_n . Se v está numa componente não-singleton de D'_m então $D_n - v$ tem a mesma decomposição D'_m , hamiltoniana. Logo, $D_n - v$ será hamiltoniano e portanto v é vértice neutral de D_n .

Proposição 3.4.20 *Seja D'_m um subdigrafo semicompleto hamiltoniano de D_n . Então $cd(D'_m) \leq cd(D_n)$*

Dem. :

Sendo $cd(D_n) = n - cc(D_n)$, é equivalente mostrar a desigualdade $cc(D'_m) \geq cc(D_n) - n + m$.

1. Suponha primeiro que $m = n - 1$ e então mostremos que $cc(D'_{n-1}) \geq cc(D_n) - 1$.

Seja $h = cc(D'_{n-1})$ e C_h um ciclo característico em $D'_{n-1} = D_n - v$. Se v não cona C_h então C_h também é um ciclo não-conado em D_n . Logo, $cc(D'_{n-1}) \geq cc(D_n) > cc(D_n) - 1$. Se v cona C_h , como D_n é hamiltoniano, existe $w \in V(D'_{n-1}) - V(C_h)$ tal que v não cona $\langle V(C_h) \cup \{w\} \rangle$. Além disso como w não cona C_h , podemos construir um ciclo de ordem $h + 1$ passando por C_h e w , que não é conado em D_n . Logo, $cc(D'_{n-1}) \geq cc(D_n) - 1$.

2. Suponha então que $2 \leq m \leq n - 1$. Temos duas possibilidades:

Temos uma cadeia tal que $V(D'_m) \subset V(D'_{m+1}) \subset \dots \subset V(D_n)$ de subdigrafos hamiltonianos de D_n , e então posso aplicar o procedimento anterior repetidamente e obter $cc(D'_m) \geq cc(D_n) - n + m$. Senão, existe D'_s digrafo hamiltoniano com $V(D'_m) \subset V(D'_{m+1}) \subset \dots \subset V(D'_s) \subset V(D_{s+1}) \subset \dots \subset V(D_n)$ com D'_m, \dots, D'_s subdigrafos hamiltonianos e D'_{s+1} não hamiltoniano. Dessa forma D'_s

é conado por todos os vértices $\{x_1, \dots, x_{n-s}\}$ e posso fazer a composição $D_n = D'_{n-s+1}(x_1, \dots, x_{n-s}, D'_s)$. Mas então $cc(D_n) = cc(D'_{n-s+1})$, pela proposição 3.4.18 e por sua vez $cc(D'_{n-s+1}) < n - s$ pela proposição 3.4.8. Logo, $cc(D_n) - n + m < -s + m < cc(D'_s) - s + m \leq cc(D'_m)$, com a última desigualdade vindo do caso 1) anterior.

Observação 3.4.21 *Se definirmos um ciclo característico como um ciclo minimal com comprimento máximo, uma proposição similar a 3.4.18 vale, mas não com uma propriedade como em 3.4.20.*

Corolário 3.4.22 *Se C é um ciclo característico de D_n e $v \in P_C$ é um pólo de C , então $cd(D_n) \geq cd(D_n - v) \geq cd(D_n) - 1$.*

Dem. :

Pela proposição 3.4.20 temos que $cd(D_n) \geq cd(D_n - v)$. Vejamos a outra desigualdade: Como $v \in P_C$, C é não-conado em $D_n - v$ (caso contrário, seria conado em D_n). Mas então $cc(D_n - v) \leq cc(D_n) = |C|$. Logo, $n - 1 - cc(D_n - v) \geq n - 1 - cc(D_n)$. Como $n - 1 - cc(D_n - v) = cd(D_n - v)$ e $n - cc(D_n) = cd(D_n)$, temos que $cd(D_n - v) \geq cd(D_n) - 1$.

Proposição 3.4.23 *Seja D'_m um subdigrafo semicompleto hamiltoniano de D_n . Então $\nu(D'_m) \leq \nu(D_n)$*

Dem. :

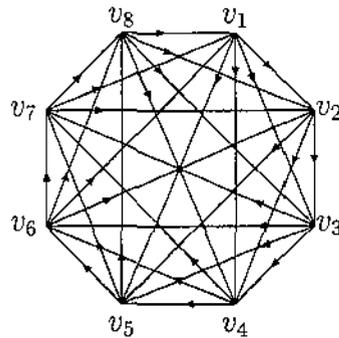
Primeiramente suponha que $m = n - 1$ e que u é vértice neutral de $D_{n-1} = D_n - v$, mas não é de D_n . Então $D_n - u$ não é hamiltoniano e portanto é da forma $T_2(S^{(1)}, S^{(2)})$. Uma dessas componentes deve ser $\{v\}$, senão $D_n - \{u, v\}$ não é hamiltoniano, contrariando o fato de u ser seu vértice neutral de $D_n - v$. Temos então duas possibilidades: $u \rightarrow v \rightarrow D_n - \{u, v\}$ ou $D_n - \{u, v\} \rightarrow v \rightarrow u$, levando em consideração que v não cona $D_n - v$. Seja u' vértice neutral de $D_n - v$ diferente de u . Pelas possibilidades acima, v não pode conar $D_n - \{u', v\}$ e então u' é vértice neutral de D_n (posso estender o ciclo passante em $D_n - \{u', v\}$ por v e fazer $D_n - u'$ hamiltoniano). Logo, existe no máximo um vértice neutral de D_{n-1} que não é neutral de D_n . Como v é vértice neutral de D_n que não é de $D_n - v$, $\nu(D'_{n-1}) \leq \nu(D_n)$.

No caso geral, se temos uma cadeia tal que $D'_m \subset D'_{m+1} \subset \dots \subset D_n$ de subdigrafos hamiltonianos, posso aplicar o procedimento anterior repetidamente e obter $\nu(D'_m) \leq \nu(D_n)$. Senão, como na demonstração da proposição 3.4.20, existe D'_s digrafo hamiltoniano com $D'_m \subset D'_{m+1} \subset \dots \subset D'_s \subset T_{s+1} \subset \dots \subset D_n$ e tal que $D_n = D'_{n-s+1}(x_1, \dots, x_{n-s}, D'_s)$. Mas então $\nu(D'_m) \leq \nu(D'_s) \leq \nu(D_n)$, pela proposição 3.4.19, uma vez que D'_s é uma componente de D_n .

3.5 Apêndice

Seja T_n torneio de ordem n . Os torneios de Moon são aqueles em que todos os subtorneios são transitivos ou hamiltonianos. Claramente um subtorneio de um torneio de Moon é de Moon (ou de tipo Moon). Foi demonstrado que é possível verificar se um torneio é ou não de tipo Moon analisando-se seus 5-subtorneios hamiltonianos. Se todos forem de Moon, então o torneio original também é. Mais ainda, observando-se o teorema 3.3.11 é possível verificar se o torneio é de Moon através de seus 4-subtorneios.

Exemplo 3.5.1 O torneio T_8 abaixo é um exemplo de torneio de Moon.



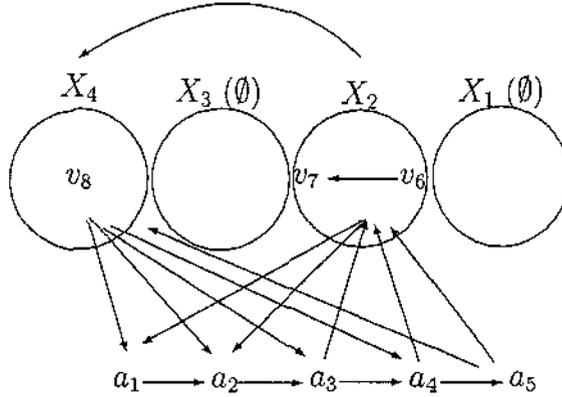
- Seus 4 subtorneios são todos de Moon. Por exemplo:
 - $\langle v_1, v_2, v_6, v_8 \rangle$ é hamiltoniano e seus subtorneios são $\langle v_1, v_2, v_6 \rangle$ (hamiltoniano), $\langle v_1, v_2, v_8 \rangle$ (transitivo), $\langle v_1, v_6, v_8 \rangle$ (transitivo), $\langle v_2, v_6, v_8 \rangle$ (hamiltoniano)
 - $\langle v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle$ é transitivo e seus subtorneios são $\langle v_5, v_6, v_7 \rangle$ (transitivo), $\langle v_5, v_6, v_8 \rangle$ (transitivo), $\langle v_5, v_7, v_8 \rangle$ (transitivo) e $\langle v_6, v_7, v_8 \rangle$ (transitivo).
- Seus 5 subtorneios hamiltonianos são de Moon. Por exemplo:
 - $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_8 \rangle$ é hamiltoniano e seus 4-subtorneios são $\langle v_1, v_3, v_5, v_6 \rangle$ (hamiltoniano), $\langle v_1, v_3, v_5, v_8 \rangle$ (hamiltoniano), $\langle v_1, v_3, v_6, v_8 \rangle$ (hamiltoniano), $\langle v_1, v_5, v_6, v_8 \rangle$ (hamiltoniano) e $\langle v_3, v_5, v_6, v_8 \rangle$ (hamiltoniano).

Já em [15] os torneios de Moon foram caracterizados como uma composição de dois torneios transitivos. Se T_n é um torneio de Moon, então $T_n = \{Tr_p, Tr_q\}$, onde Tr_p é o maior subtorneio transitivo de T_n e $Tr_q = Tr_{p-1}(X_1, X_2, \dots, X_{p-1})$ é um torneio transitivo de ordem q formado por componentes transitivas X_1, X_2, \dots, X_{p-1} (que podem ser vazias) de vértices de $T_n - Tr_p$ e tal que os vértices a_1, a_2, \dots, a_p de Tr_p se relacionam com vértices de X_i da seguinte maneira:

$$a_i \longrightarrow v \forall v \in X_j \text{ e } \forall j = 1, 2, \dots, i - 1$$

$$v \longrightarrow a_i \quad \forall v \in X_j \text{ e } \forall j = i, i + 1, \dots, p - 1$$

O diagrama a seguir representa essas relações no torneio de Moon T_8 do exemplo anterior:



Além disso, valem as seguintes desigualdades sobre a ordem das componentes X_i :

$$|X_1| + |X_2| + \dots + |X_i| \leq i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p - 1;$$

$$|X_{p-1}| + |X_{p-2}| + \dots + |X_i| \leq p - i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p - 1;$$

É possível demonstrar que um torneio de Moon de ordem n está completamente determinado sabendo-se o número de vértices nas componentes X_i . O torneio T_n é descrito então com a notação $T_n = [n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_1]$, onde $n_i = |X_i|$ é uma letra de T_n e a expressão $[n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_1]$ é a palavra relacionada a T_n .

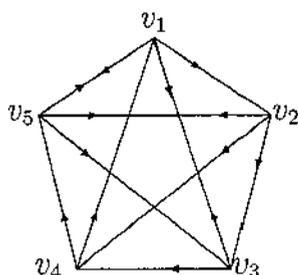
Uma das propriedades mais valiosas dos torneios de Moon vem do fato dos mesmos (com duas exceções) serem reconstrutíveis. Considerando-se a descrição obtida na proposição 3.3.11 e os resultados do capítulo anterior obtemos que os torneios de Moon são simplesmente desconexos e que portanto temos um grande número de torneios simplesmente desconexos reconstrutíveis, nos dando a dimensão do papel que representam no decorrer do estudo do problema da reconstrução. Mais do que isso, Paolo Vito-lo demonstrou que os torneios simplesmente desconexos (com algumas exceções para ordem menor ou igual a 7) são reconstrutíveis.

Capítulo 4

Exemplos e aplicações

4.1 Ciclos característicos e minimais em digrafos

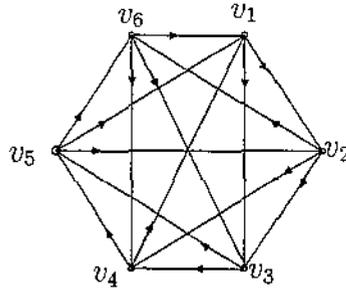
a) Seja D_5 o digrafo semicompleto hamiltoniano:



- O digrafo não é um torneio, pois possui arcos duplos.
- O ciclo $C : \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ é ciclo passante.
- Todos os vértices são neutrais.
- O 3-ciclo $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ NÃO é conado, pois $v_5 \rightarrow v_1, v_5 \rightarrow v_2, v_5 \rightarrow v_3$, mas não tenho $v_5 \Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, uma vez que $v_2 \rightarrow v_5$ e $v_1 \rightarrow v_5$.
- Os 3-ciclos $\langle v_3, v_4, v_5 \rangle$ e $\langle v_2, v_4, v_5 \rangle$ são ciclos minimais. Em $\langle v_2, v_4, v_5 \rangle$, temos que $\langle v_2, v_5 \rangle \Rightarrow v_3$.
- $v_1 \leftrightarrow v_3$ não é conado, pois apesar de $v_5 \rightarrow v_1 \leftrightarrow v_3, v_1 \rightarrow v_5$. Logo, $v_1 \leftrightarrow v_3$ é o ciclo característico.

- Para este exemplo $cc(D_5) = 2$, $cd(D_n) = 3$ e $\nu(D_5) = 5$.
- Quando um digrafo D_n tem apenas um único ciclo minimal ele é chamado de *normal*. Davide Demaria e Cosimo Guido demonstraram em 1990 ([11]) que os TORNEIOS normais são reconstrutíveis (veja apêndice). Nesse caso, $cd(D_n) = \nu(D_n)$.

b) Considere o torneio hamiltoniano H_6 :



- O ciclo $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_1$ é um ciclo passante.
- Todos os vértices são neutrais.
- H_6 não possui 4,5-ciclos minimais.
- Os 3-ciclos conados são $\langle v_1, v_2, v_6 \rangle$ e $\langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ e os 3-ciclos não-conados são $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle$, $\langle v_1, v_3, v_5 \rangle$, $\langle v_2, v_4, v_5 \rangle$, $\langle v_2, v_3, v_5 \rangle$ e $\langle v_4, v_5, v_6 \rangle$. Os 3-ciclos não-conados são os ciclos característicos.
- Pela observação anterior, $cc(H_6) = cd(H_6) = 3$.

4.2 Variações do torneio transitivo

Definição 4.2.1 *Seja o torneio obtido a partir de Tr_m pela inversão do arco entre v_1 e v_m e manutenção dos demais. Denominamos por torneio quase-transitivo e usamos a notação ATr_m ao torneio assim obtido.*

Esse torneio ATr_m será então hamiltoniano. Além disso, $\forall 2 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$ tenho:

$$v_j \rightarrow v_m$$

$$v_1 \rightarrow v_j$$

e portanto os 3-ciclos $\langle v_1, v_i, v_m \rangle$ são não-conados. Dessa forma, $cc(ATr_m) = 3$ para todo n .



Diagrama do torneio transitivo Tr_m

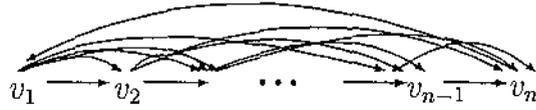


Diagrama do torneio quase-transitivo AT_r_m

Observação 4.2.2 $\forall n \geq 4$, se algum dos arcos de Tr_m $v_i \rightarrow v_j$ for trocado por $v_j \rightarrow v_i$, $i \neq 1$, o torneio resultante não é hamiltoniano, ao contrário do que ocorre com AT_r_m .

Definição 4.2.3 Denotaremos por DTr_m ao digrafo obtido pela substituição do arco $v_1 \rightarrow v_m$ por $v_1 \leftrightarrow v_m$ de Tr_m e manutenção dos demais. Para todo $2 \leq i \leq n-1$, $v_1 \rightarrow v_i \rightarrow v_m \implies$ o 2-ciclo $v_1 \leftrightarrow v_m$ é não-conado e então $cc(DTr_m) = 2$, para todo m .

O digrafo DTr_m :



Do mesmo modo que para AT_r_m essa substituição dos arcos em um vértice qualquer leva a resultados diferentes:

Observação 4.2.4 $\forall n \geq 4$, se algum dos arcos de Tr_m for substituído de $v_i \rightarrow v_j$, $i \neq 1, j \neq m$, por $v_i \leftrightarrow v_j$ o digrafo resultante não será hamiltoniano.

Se trocarmos um dos arcos $v_i \rightarrow v_j$, com $1 < j - i < n - 1$, por $v_j \rightarrow v_i$ o digrafo resultante ainda não será hamiltoniano.

Agora, se substituirmos todos os arcos $v_i \rightarrow v_{i+1}$, $1 < j - i < n - 1$, por $v_i \leftrightarrow v_{i+1}$, o digrafo resultante é hamiltoniano, com $cc(D_n) = 2$.

Capítulo 5

Classificação dos Digrafos Semicompletos Hamiltonianos

5.1 Resumo

Apresentaremos o teorema de classificação que é o objetivo maior deste trabalho. Trataremos ainda de algumas aplicações e do estudo dos digrafos com diferença cíclica máxima. No apêndice apresentaremos os torneios normais que tem uma classificação obtida como aplicação dos resultados ora apresentados. A extensão para digrafos semicompletos dos resultados obtidos para estes torneios normais é objeto de interesse de pesquisa posterior.

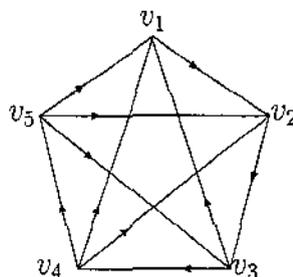
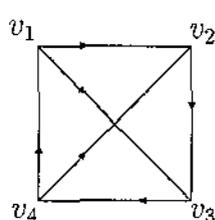
5.2 O teorema de classificação

O torneio bineutral surge na decomposição dos digrafos semicompletos e dos torneios normais de modo a desempenhar um papel ímpar na classificação destes objetos:

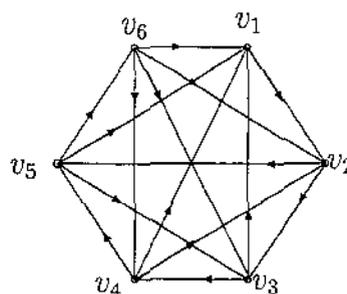
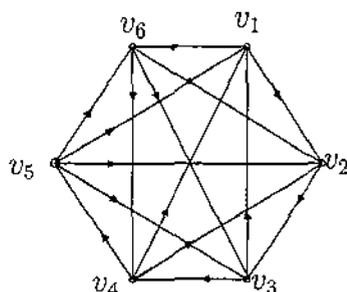
Definição 5.2.1 *O torneio A_n ($n \geq 4$) com conjunto de vértices $V(A_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ e conjunto de arestas $E(A_n) = \{(x_i, x_j) | j < i - 1 \text{ ou } j = i + 1\}$ contém os dois únicos vértices neutrais x_1, x_n e é chamado torneio **bineutral** de ordem n .*

Exemplo 5.2.2 *Os 3 primeiros torneios abaixo são bineutrais de ordem 4, 5, 6. No último exemplo temos o torneio H'_6 obtido a partir do bineutral pela inversão de orientação entre os vértices x_2 e x_5 .*

a) A_4 e A_5



b) A_6 e H'_6



Em 1975, Las Vergnas mostrou que o torneio bineutral A_n é o único torneio com dois vértices neutrais para cada $n \geq 7$.

Proposição 5.2.3 *Para cada $n \geq 5$, o torneio bineutral A_n tem diferença cíclica 2 e contém o único ciclo minimal $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_2$.*

Dem. :

Por indução. Para $n = 5$, basta observar em A_5 que x_2, x_3, x_4, x_2 é o único ciclo minimal. Então, $cd(A_5) = 2$. Suponha o resultado válido para $n - 1$ e seja A_n obtido de A_{n-1} pela inclusão do vértice x_n sucedendo x_{n-1} e precedendo $x_i, \forall i = 1, \dots, n - 2$. Em A_n , todos os $(n - 3)$ ciclos são conados. De fato, temos apenas 2: x_2, \dots, x_{n-2}, x_2 , conado por x_n , e o único que contém $x_n, x_4, x_5, \dots, x_n, x_4$, que é conado por x_1 . Além disso, o $(n - 2)$ -ciclo $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_2$ é o único $(n - 2)$ -ciclo não conado. Logo, $cd(A_n) = 2$.

Estamos preparados então para apresentar o teorema da classificação que decorre rapidamente dos resultados anteriores.

Teorema 5.2.4 (Classificação dos Digrafos Semicompletos Hamiltonianos) *Seja D_n ($n \geq 5$) um digrafo semicompleto hamiltoniano de ordem n . Então $2 \leq cd(D_n) \leq n - 2$ ($2 \leq cc(D_n) \leq n - 2$), onde $cd(D_n)$ é a diferença cíclica e $cc(D_n)$ é a característica cíclica de D_n . Além disso, para cada $n \geq 5$ e para cada h tal que $2 \leq h \leq n - 2$, existem digrafos semicompletos hamiltonianos D_n com $cd(D_n) = h$.*

Dem. :

A primeira parte decorre da proposição 3.4.8. Em contrapartida, para $n \geq 5$ e $h = 2$, A_n satisfaz $cd(A_n) = 2$, por 5.2.3. Para cada $2 < h \leq n - 3$ seja então $V(A_{n-h+2}) = \{x_1, \dots, x_{n-h+2}\}$, onde A_{n-h+2} é bineutral e $D_n = A_{n-h+2}(T_{h-1}, x_2, \dots, x_{n-h+2})$, onde substituo x_1 por T_{h-1} transitivo qualquer. Então $cc(A_{n-h+2}) = n - h = cc(D_n)$, pela proposição 3.4.18. Dessa forma, $cd(D_n) = h$ e D_n é o digrafo procurado.

Se $h = n - 2$, seja D_n o digrafo $DT r_n$, com $cc(DT r_n) = 2$ e $cd(DT r_n) = n - 2$.

Observação 5.2.5 *Podemos obter um torneio hamiltoniano simples H_n com $cd(H_n) = h$ a partir de A_n , revertendo o arco (x_i, x_{i+h-1}) para cada $i \geq 3$ e $h \geq 3$ tal que $i + h \leq n - 1$. Logo, para cada h existem torneios simples H_n com $cd(H_n) = h \geq 4$. É possível construir torneios simples com $cd(H_n) = 3$*

Lembrando que um torneio é simplesmente desconexo se, e somente se, todo 3-ciclo é não-conado, então os torneios simplesmente desconexos têm característica cíclica 3. Como corolário temos a classificação de todos os digrafos semicompletos hamiltonianos, para todo n .

Corolário 5.2.6 *A coleção $\mathcal{D}_{n,h} = \{D_n: \text{digrafos com } cd(D_n) = h\}$, para cada $n \geq 5$ e para cada h tal que $2 \leq h \leq n - 2$ é uma partição do conjuntos dos digrafos semicompletos hamiltonianos com $n \geq 5$. Basta adicionar os casos $n=2, 3$ e 4 para obter uma partição dos digrafos semicompletos hamiltonianos.*

5.3 Digrafos normais com diferença cíclica máxima

Um digrafo D de ordem n tem diferença cíclica máxima se $cd(D_n) = n - 2$. Equivalentemente $cc(D_n) = 2$. Estudemos um pouco esses digrafos e seja então D_n com diferença cíclica máxima. Então D_n possui (pelo menos) um 2-ciclo. Suponha ainda que esse digrafo seja normal (com apenas um ciclo minimal, o característico) e denotemos por $C : a_1 \leftrightarrow a_2$ o ciclo característico de D_n .

Podemos escrever o digrafo como $D_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, a_1, a_2 \rangle$, onde o conjunto P dos pólos de D_n é $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\} = P_C$, com $|P_C| = \nu(D_n) = n - 2$. Já os vértices a_1 e a_2 são os únicos vértices não-neutrais de D_n .

Enumeremos P de maneira que $P : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-2}$. Como cada x_i é um pólo C , x_i não cona o ciclo $a_1 \leftrightarrow a_2$. Além disso, se $a_1 \rightarrow x_i$ não posso ter $x_i \leftrightarrow a_2$, pois senão o ciclo $x_i \leftrightarrow a_2$ será um novo ciclo característico. Do mesmo modo não posso

ter $a_1 \leftarrow x_i \leftrightarrow a_2$, $a_1 \leftrightarrow x_i \rightarrow a_2$, $a_1 \leftrightarrow x_i \leftarrow a_2$ e $a_1 \leftrightarrow x_i \leftrightarrow a_2$. Dessa forma as adjacências entre x_i e a_1 e a_2 só podem ser do tipo:

$$a_1 \rightarrow x_i \rightarrow a_2 \text{ ou } a_2 \rightarrow x_i \rightarrow a_1$$

Suponha agora que (a menos de uma inversão na numeração de a_1 e a_2) temos $a_1 \rightarrow x_1 \rightarrow a_2$. Se $a_2 \rightarrow x_{n-2} \rightarrow a_1$, o $(n-1)$ -ciclo $a_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-2} \rightarrow a_1$ contradiz o fato de a_2 não ser vértice neutral. Dessa forma tenho que ter a relação $a_1 \rightarrow x_{n-2} \rightarrow a_2$. Posso repetir esse procedimento utilizando essa nova relação para x_2 e x_{n-3} e assim por diante, obtendo que $\forall i = 1, 2, \dots, n-2$ vale a relação $a_1 \rightarrow x_i \rightarrow a_2$.

Para a obtenção da decomposição do conjunto dos pólos de um digrafo normal utilizamos a condensação de um digrafo que é trivial caso ele seja hamiltoniano:

Definição 5.3.1 *Seja D_n ($n \geq 2$) um digrafo. A condensação de D_n é o quociente transitivo Tr_j^* ($j \geq 2$), com as componentes $S^{(i)}$ fortes (hamiltonianas) tais que $D_n = Tr_j^*(S^{(1)}, \dots, S^{(j)})$.*

Observação 5.3.2 *Qualquer outra componente transitiva de D_n é obtida pela união de algumas componentes fortes consecutivas, logo a condensação de D_n é o maior quociente transitivo de D_n .*

Observação 5.3.3 *A condensação para os digrafos e suas relações foram estudadas por Harary em [18].*

Consideremos então o conjunto dos pólos P como a condensação (com componentes hamiltonianas maximais)

$$Tr_h(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(h)})$$

de modo que $a_1 \rightarrow P \rightarrow a_2$ pelas observações acima.

Para a obtenção da condensação, se P for hamiltoniano então $h = 1$ e temos o ciclo $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-2} \rightarrow x_1$. Se P não for hamiltoniano então $h \geq 2$ e

$$a_1 \rightarrow S^{(j)} \rightarrow a_2 \quad \forall j = 1, 2, \dots, h.$$

Esses resultados podem ser sistematizados numa caracterização dos digrafos semi-completos hamiltonianos normais com diferença cíclica máxima:

Teorema 5.3.4 *Seja D_n um digrafo semicompleto hamiltoniano com $cd(D_n) = n-2$ ($cc(D_n) = 2$). Então D_n é normal se, e somente se, D_n tem um único ciclo característico $a_1 \leftrightarrow a_2$ satisfazendo as seguintes condições:*

a) os vértices a_1 e a_2 são os únicos vértices não-neutrais;

b) o subdígrafo P gerado pelos pólos de C é tal que

$$P = Tr_h(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(h)})$$

onde Tr_h é a condensação de P em D_n ;

c) os vértices a_1 e a_2 tem as seguintes adjacências em relação aos outros vértices:

$$a_1 \longrightarrow S^{(j)} \longrightarrow a_2 \quad \forall j = 1, 2, \dots, h.$$

Caso cada componente maximal $S^{(j)}$ seja formada por apenas um vértice então (adicionando-se as relações de a_1 e a_2) D_n é o dígrafo semicompleto DTr_n obtido do torneio transitivo Tr_n pela adição de um arco extra entre o transmissor e o receptor. Neste caso a_1 é identificado com o transmissor e a_2 com o receptor.

5.4 Apêndice

Os torneios normais são aqueles que possuem um único ciclo minimal, que será o ciclo característico. Equivalentemente, H_n é normal se, e somente se, $cd(H_n) = \nu(H_n)$. Observamos ainda que num torneio normal o conjunto dos vértices neutros do ciclo minimal é também o conjunto dos pólos associados ao ciclo característico.

Em [10] Demaria e Gianella mostraram que é possível obter uma caracterização estrutural dos torneios normais com $cc(H_n) = 3$ e $cc(H_n) \geq 4$. Em particular vale o teorema:

Teorema 5.4.1 H_n é normal se, e somente se,

1. H_n possui A_k ($k \geq 4$) ou $H_3 = A_3$ (3-ciclo) como torneio minimal;
2. As adjacências entre os vértices de A_k e os pólos em $H_n - A_k$ satisfazem certa propriedade;
3. O subtorneio P_{n-k} dos pólos é não-hamiltoniano e permite uma composição transitiva.

Com a composição canônica de P_{n-k} (transitiva) é demonstrado que dois torneios normais são isomorfos se, e somente se, tem a mesma composição e característica cíclica.

Além disso, é demonstrado em outros trabalhos que a classe dos torneios normais contém:

1. Os torneios β_n , que contém o menor número $(n - 2)$ de 3-ciclos e são diferentes da composição de 2 singletons e um torneio transitivo como 3-ciclo;
2. Os quocientes simples Q_m dos torneios hamiltonianos D_n (torneios de Douglas) que admitem exatamente um ciclo hamiltoniano.

5.4.1 Torneios Normais e sua Decomposição

Temos as definições de ciclo característico, minimal e pólos também para subtorneios (e mais geralmente para digrafos) hamiltonianos H_m de H_n usando os ciclos geradores de H_m .

Os resultados a seguir estão em [11] e suas demonstrações serão omitidas aqui. Em particular os torneios bineutrais estão intrinsecamente ligados aos torneios normais em geral.

Proposição 5.4.2 *Seja H_n um torneio normal de ordem n , $cd(H_n) = h$, $cc(H_n) = k$. O subtorneio característico H'_k de H_n ou é A_k ($k \geq 4$) ou o 3-ciclo, $k = 3$.*

Teorema 5.4.3 *Seja H_n torneio hamiltoniano, $cc(H_n) \geq 5$ e tendo o bineutral A_m ($m \geq 5$) como subtorneio minimal. Então a_1 e a_m de A_m não são neutrais de H_n se, somente se,*

1. P_{n-m} dos pólos de A_m não é hamiltoniano; Então se $P_{n-m} = Tr_j^*(S^{(1)}, \dots, S^{(j)})$, ($j \geq 2$), $S^{(i)}$ hamiltoniano vale que: $(A_m - a_1) \longrightarrow S^{(1)} \longrightarrow a_1; a_m \longrightarrow S^{(j)} \longrightarrow (A_m - a_m)$.

Decorre do teorema 5.4.3 a observação (que será melhor entendida na próxima subseção) de que as componentes $T^{(0)}$ e $T^{(k)}$ do subtorneio P_{n-k} dos pólos são não-vazias.

Teorema 5.4.4 (Caracterização Gráfica) *Seja H_n um torneio hamiltoniano de ordem n e com $cc(H_n) \geq 4$. H_n é normal se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

1. H_n tem um bineutral A_k como subtorneio minimal;
2. Seja $P_{n-k} = H_n - A_k$ e a composição $Tr_j^*(P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(j)})$ dada, onde $P^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) são as componentes fortes de P_{n-k} . Então:
 $(A_k - a_1) \longrightarrow P^{(1)} \longrightarrow a_1; a_k \longrightarrow P^{(j)} \longrightarrow (A_k - a_k)$
3. Não existe nenhum caminho $C : a_r \longrightarrow x^{(1)} \longrightarrow x^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow x^{(q)} \longrightarrow a_s$, tal que $a_r, a_s \in A_k$, $r + 1 < s$, $x^{(i)} \in P_{n-k}$, ($i = 1, 2, \dots, q$), $1 \leq q \leq n - k$.

5.4.2 Torneios normais de característica cíclica 3

Teorema 5.4.5 *Um torneio hamiltoniano H_n com $cc(H_n) = 3$ é normal se, e somente se, H_n tem um ciclo característico $C : a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$, satisfazendo as seguintes condições (rotacionando os índices, se necessário):*

1. os pólos associados a C são dos tipos x, x', y, y' , definidos da seguinte maneira:

$$(a_2, a_3) \rightarrow x \rightarrow a_1; \quad a_3 \rightarrow x' \rightarrow (a_1, a_2);$$

$$(a_1, a_3) \rightarrow y \rightarrow a_2; \quad a_2 \rightarrow y' \rightarrow (a_1, a_3);$$

2. O subtorneio P_{n-3} dos pólos associados a C não é hamiltoniano;

3. P_{n-3} possui a seguinte composição $P_{n-3} = Tr_4^*(T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)})$, onde:

$T^{(0)}$ é formado por pólos do tipo x ;

$T^{(1)}$ é formado por pólos do tipo x, x', y ;

$T^{(2)}$ é formado por pólos do tipo x, x', y' ;

$T^{(3)}$ é formado por pólos do tipo x' .

e as componentes $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ podem ser vazias.

5.4.3 Caracterização estrutural dos torneios normais

Lema 5.4.6 *Seja H_{k+3} um torneio normal com diferença cíclica 3, A_k seu subtorneio característico e $Tr_3^*(x, z, x')$ o subtorneio dos pólos. Então o subtorneio $\langle A_k \cup \{x, x'\} \rangle$ é isomorfo a A_{k+2} . Além disso, temos as seguintes $2k-2$ possibilidades de adjacência entre z e A_k :*

$$1. (a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_i) \quad i = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$2. (a_i, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Definição 5.4.7 *O pólo z é de tipo i e classe 1 ou classe 2 e denotado por x_i ou y_i , se as adjacências são dadas pelas condições 1) e 2) do lema anterior. Podemos ver isso em detalhes.*

Proposição 5.4.8 (Regras de adjacência entre os pólos) *Sob as condições da definição 5.4.7, sejam x_i e x'_j dois pólos de classe 1 e tipo i e j respectivamente e sejam y_i e y'_j dois pólos de classe 2 e tipos i e j respectivamente.*

Então as seguintes condições valem:

- i) Se $x_i \rightarrow x'_j$, então $j = 1, 2, \dots, i + 2$, i.e. $j \leq i + 2$;
- ii) Se $y_i \rightarrow y'_j$, então $j = 1, 2, \dots, i$, i.e. $j \leq i$;
- iii) Se $x_i \rightarrow y'_j$, então $j = 1, 2, \dots, i + 1$, i.e. $j \leq i + 1$;
- iv) Se $y_i \rightarrow x'_j$, então $j = 1, 2, \dots, i + 1$, i.e. $j \leq i + 1$.

O próximo resultado decorre dos anteriores apresentados e fornece então uma caracterização dos torneios normais descrevendo as possibilidades de adjacência para os vértice de P_{n-k} .

Teorema 5.4.9 (Caracterização estrutural) *Um torneio H_n é normal se, e somente se, as seguintes condições são verdadeiras para H_n :*

1. H_n possui um bineutral A_k ($k \geq 4$) ou o 3-ciclo ($H_3 = A_3$) como subtorneio minimal;
2. Os pólos associados a A_k são de $(k-1)$ tipos de classe 1 (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) e de $(k-1)$ tipos de classe 2 (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}), considerados na definição 5.4.7;
3. O subtorneio P_{n-k} dos pólos têm a seguinte composição $P_{n-k} = Tr_{k+1}^*(T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(k)})$, onde :
 - $T^{(0)}$ é formado por pólos do tipo x_1 ;
 - $T^{(1)}$ é formado por pólos do tipo x_1, x_2, y_1 ;
 - $T^{(2)}$ é formado por pólos do tipo x_1, x_2, x_3, y_2 ;
 -
 - $T^{(i)}$ é formado por pólos do tipo $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_i$;
 -
 - $T^{(k-2)}$ é formado por pólos do tipo $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, y_{k-2}$;
 - $T^{(k-1)}$ é formado por pólos do tipo $x_{k-2}, x_{k-1}, y_{k-1}$;
 - $T^{(k)}$ é formado por pólos do tipo x_{k-1} ;
 e cada componente diferente de $T^{(0)}$ e $T^{(k)}$ pode ser vazia ou não.

Apêndice A

O Problema da reconstrução - a falsidade da conjectura de Frank Harary para os torneios

Como foi mencionado na introdução o problema da reconstrução de um grafo foi motivador, e ainda é, para a obtenção de inúmeros resultados nessa teoria. Relembremos que dois grafos G_n e H_n são hipomorfos se, e somente se, existe $f : G_n \rightarrow H_n$ bijeção tal que $\forall v \in G_n, G_n - v$ é isomorfo a $H_n - f(v)$. Um grafo G_n é dito reconstrutível se para todo H_n que for hipomorfo a G_n tenho que $G_n \sim H_n$. Uma carta de um grafo é um subgrafo gerado por todos os vértices do grafo com exceção de um. Usualmente se refere a um grafo reconstrutível como reconstrutível a partir de suas cartas.

A ocorrência de contra-exemplos para o problema da reconstrução em torneios era esporádica até que Stockmeyer apresentou em [22] duas classes de torneios não reconstrutíveis. Primeiramente ele construiu o torneio A_n (de ordem $p = 2^n$) definido pela seguinte relação entre seus vértices:

$$v_i \rightarrow v_j \iff \text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}, \text{ para } i \neq j$$

onde $\text{odd}(m)$ é o quociente $\frac{m}{2^k}$, sendo k o maior inteiro tal que 2^k divide m . Em seguida contruiu o torneio B_n (de ordem $2^n + 1$) obtido a partir de A_n pela adição de um vértice v_0 tal que $v_0 \rightarrow v_2, v_0 \rightarrow v_4, \dots, v_0 \rightarrow v_p$ e $v_1 \rightarrow v_0, v_3 \rightarrow v_0, \dots, v_{p-1} \rightarrow v_0$ e o torneio C_n (de ordem $2^n + 1$) obtido a partir de A_n pela adição de um vértice v_0 tal que $v_0 \rightarrow v_1, v_0 \rightarrow v_3, \dots, v_0 \rightarrow v_{p-1}$ e $v_2 \rightarrow v_0, v_4 \rightarrow v_0, \dots, v_p \rightarrow v_0$. Magistralmente Stockmeyer demonstrou que esses dois torneios são hipomorfos e que não são isomorfos para todo $n \geq 1$. Essa era o primeiro grupo bem determinado de contra-exemplos da conjectura de reconstrução para torneios (veja tabela A.1).

0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1									0								
0									1								
1									0								
0				A_3				1				A_3					
1									0								
0									1								
1									0								
0									1								

Tabela A.1: As matrizes de B_3 e C_3 em relação a A_3

Prosseguindo por um caminho semelhante Stockmeyer construiu contra-exemplos de ordem $2^n + 2$. O problema passou a ser então quais seriam os torneios reconstrutíveis?

A busca por esses torneios prosseguiu com o estudo dos torneios de Moon hamiltonianos, Normais, Douglas, com menor número de 3-ciclos, redutíveis, simplesmente desconexos, com quociente simples normal. Todas essas classes, com algumas exceções em seu meio, podem ser consideradas de torneios reconstrutíveis. É objeto de interesse para pesquisa a extensão destes resultados obtidos para torneios aos digrafos semicompletos, sempre no caminho para a solução do problema geral para grafos.

Bibliografia

- [1] Armstrong M. A., *Basic Topology*, Springer Verlag, New York, (1983).
- [2] Barros T. E., *Homotopia Regular de Grafos*, Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, Dezembro de 1990.
- [3] Beineke. W. e Reid K. B., *Selected Topics in Graph Theory*, Edited by L. W. Beineke and R. J. Wilson, Academic Press, New York (1978).
- [4] Burzio M. e Demaria D. C., *Characterization of tournaments by coned 3-cycles*, Acta Univ. Carol. Math. Phys., Prague, Vol. 28, n. 2 (1987), 25-30.
- [5] Burzio M. e Demaria D. C., *Hamiltonian tournaments with the least number of 3-cycles*, J. Graph Theory, Vol 14, n. 6 (1990), 663-672.
- [6] Burzio M. e Demaria D. C., *Homotopy of polyhedra and regular homotopy of finite directed graphs*, Atti II° Conv. Topologia, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), no. 12 (1986), 189-204.
- [7] Burzio M. e Demaria D. C., *On a classification of Hamiltonian tournaments*, Acta Univ. Carol. Math. Phys., Prague, Vol. 29, n. 2 (1988), 3-14.
- [8] Burzio M. e Demaria D. C., *On simply disconnected tournaments*, Proc. Catania Confer. Ars Combinatoria, 24-A (1988), 149-161.
- [9] Demaria D. C. e Garbaccio Bogin R., *Homotopy and Homology in pretopological spaces*, Proc. 11th Winter School, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), n.3 (1984), 119-126.
- [10] Demaria D. C. e Gianella G. M., *On normal tournaments*, Conf. Semin. Matem. Univ. Bari, Vol 232 (1989), 1-29.
- [11] Demaria D. C. e Guido C., *On the reconstruction of normal tournaments*, J. Comb. Inf. and Sys, Sci., Vol 15 (1990), 301-323.

- [12] Demaria D. C. e Kiihl J. C. S., *On the simple quotients of tournaments that admit exactly one hamiltonian cycle*, Atti Accad Sci. Torino, Vol 124 (1990), 94-108.
- [13] Demaria D. C. e Kiihl J. C. S., *On the complet digraphs which are simply disconnected*, Publications Mathematiques, Vol. 35 (1991), 517-525.
- [14] Douglas R. J., *Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 716-730.
- [15] Guido C., *Structure and Reconstruction of Moon Tournaments*, University of Lecce, Italy.
- [16] Guido C., *A larger class of reconstructible tournaments*, Discrete Mathematics, Vol. 152 (1996), 171-184.
- [17] Harary F., *On the History of the Theory of Graphs*, 3rd Ann Arbor Conf. Graph Theory, (1971).
- [18] Harary F., Norman R. Z. e Cartwright D., *Structural Models, An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, Wiley, New York (1965).
- [19] Kiihl J. C. S. e Tironi G., *A classification for the Hamiltonian Semicomplete digraphs*, Univ. Degli Studi di Trieste, Dipartimento di Scienze Matematiche, Quaderni Matematici, II serie, n. 396 (1996).
- [20] Moon J. W., *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1968).
- [21] Souza M. L. V., *Reconstrução de Torneios Normais*, Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, Agosto de 1999.
- [22] Sotckmeyer P.K., *The Falsity of the Reconstruction Conjecture for Tournaments*, J. Graph Theory, Vol. 1 (1977), 19-25.
- [23] Tetali P., *A Characterization of Unique Tournaments*, J. Combinatorial Theory Ser. B 72 (1998), 157-159.
- [24] Woodball D. R., Wilson R. J., *The Appel-Haken Proof of the Four-Color Theorem*, Selected Topics in Graph Theory, Edited by L. W. Beineke and R. J. Wilson, Academic Press, New York (1978).