

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

---

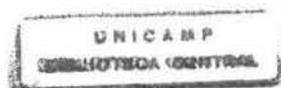
# O Papel Algébrico dos Operadores Diferenciais no Formalismo Variacional

por

Alexandre Luis Trovon de Carvalho

**Orientador:** Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

CAMPINAS  
MAIO DE 2000



2000-7-02

# O Papel Algébrico dos Operadores Diferenciais no Formalismo Variacional

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Alexandre Luis Trovon de Carvalho e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 03 de maio de 2000.



Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

## **Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.  
Prof. Dr. Márcio Antônio de Faria Rosa  
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin  
Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves  
Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

UNIDADE BC  
N.º CHAMADA:  
Unicamp  
C253p  
V. LA  
TCMBO 30/ 41187  
PROC 278/00  
C  D   
PREÇO 2411,00  
DATA 28-06-00  
N.º CPD

CM-00142391-4

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

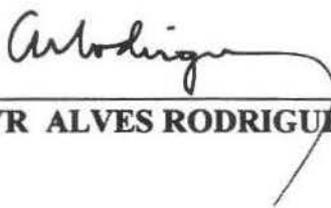
Carvalho, Alexandre Luis Trovon de  
C253p O papel algébrico dos operadores diferenciais no formalismo variacional /  
Alexandre Luis Trovon de Carvalho – Campinas, [S.P. s.n.], 2000.

Orientador : Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores diferenciais. 2. Lagrange, Equações de. 3. Clifford,  
Álgebra de. 4. Hamilton-Jacobi, Equações. I. Rodrigues Jr., Waldyr Alves. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

**Tese de Doutorado defendida em 03 de maio de 2000 e aprovada  
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof (a). Dr (a). WALDYR ALVES RODRIGUES JÚNIOR**



---

**Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTONIO DE FARIA ROSA**



---

**Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN**



---

**Prof (a). Dr (a). DACIBERG LIMA GONÇALVES**



---

**Prof (a). Dr (a). ORLANDO STANLEY JURIAANS**

Enquanto a álgebra e a geometria estiveram separadas, seu progresso foi lento, e seu uso limitado; mas, quando essas duas ciências se uniram, elas emprestaram forças mutuamente, e marcharam juntas rumo à perfeição.

*Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)*

Progresso fundamental tem a ver com reinterpretação de idéias básicas.

*Alfred North Whitehead (1861 - 1947)*

Não se encontrará figuras neste trabalho. Os métodos que exponho não requerem nem construções, nem raciocínios geométricos, nem mecânicos, mas somente operações algébricas, sujeitas a uma regra regular e uniforme. – Prefácio à *Mécanique Analytique*.

*Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)*

## Sumário

O propósito desta tese é estudar, sob o ponto de vista algébrico, o papel desempenhado pelos operadores diferenciais nos formalismos variacionais Lagrangeano e Hamiltoniano. Apresentamos uma aplicação simples das idéias e resultados básicos da teoria dos operadores diferenciais às álgebras de Clifford, obtendo uma relação entre os operadores diferenciais e o operador de Dirac. Introduzimos um formalismo Hamiltoniano, com base nos módulos de símbolos dos operadores diferenciais, generalizando os resultados para anéis comutativos. Nesse formalismo, encontramos importantes propriedades algébricas para a Hamiltoniana, e destacamos o colchete de Poisson como uma estrutura mais básica que a forma simplética canônica. Introduzimos o conceito de adjunta de um operador diferencial  $e$ , por meio dela, caracterizamos as formas integrais em termos das formas de Berezin. Obtemos uma seqüência espectral relacionando a cohomologia das formas integrais com a cohomologia de De Rham, tanto para variedades quanto para supervariedades. Introduzimos o conceito de Lagrangeana, e analisamos sua relação com as formas de Berezin. Nesse contexto, estudamos as leis de conservação, e obtemos um equivalente algébrico para o Teorema de Noether. Finalmente, essas construções nos encaminham rumo a uma versão algébrica para o teorema do índice.

## **Abstract**

The purpose of this thesis is to study, from the algebraic viewpoint, the role played by the differential operators in Lagrangian and Hamiltonian variational formalisms. We present a simple application of the basic ideas and results from the theory of differential operators to the Clifford algebras, from where we obtain a relationship between differential operators and the Dirac operator. We introduce a Hamiltonian formalism based on the symbol modules, generalizing some results to commutative rings. In this formalism we find important algebraic properties for the Hamiltonian and notice that the Poisson bracket is a more fundamental structure than the canonical symplectic form. We introduce the concept of adjoint of a differential operator and by means of it we are able to characterize the integral forms in terms of Berezin forms. We obtain a spectral sequence relating the cohomology of integral forms to the De Rham cohomology, for both manifolds and supermanifolds. In this context, we study the conservation laws and obtain an algebraic equivalent to the Noether theorem. Finally, these constructions direct us towards an algebraic version to the index theorem.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao Professor Waldyr, pela constante compreensão, estímulo, amizade e, sobretudo, pelo seu exemplo de persistência no trabalho e humildade de caráter - duas características difíceis de se encontrar hoje em dia.

Agradeço à minha família e à minha esposa pela compreensão que tiveram durante o processo de “gestação” que deu à luz esta tese.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática do IMECC, a quem devo boa parte de minha formação.

Agradeço aos colegas do Departamento de Matemática da UFPR pelas discussões e constante estímulo.

Agradeço a todo o pessoal do Grupo de Física-Matemática pelo bom ambiente de trabalho e companheirismo.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

## **Dedicatória**

Dedico esta tese a minha esposa Sílvia.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Operadores Diferenciais</b>	<b>6</b>
1.1 Caracterização Algébrica da Topologia . . . . .	6
1.1.1 O Spectrum Primo . . . . .	7
1.1.2 Espaços Topológicos e Funções Contínuas . . . . .	8
1.1.3 Módulos Projetivos e Localização . . . . .	10
1.2 A Equivalência entre Fibrados Vetoriais e Módulos Projetivos . . . . .	14
1.2.1 Corte e Costura com Fibrados Vetoriais . . . . .	20
1.3 Operadores Diferenciais . . . . .	21
1.3.1 Cálculo Diferencial sobre Anéis Comutativos . . . . .	21
1.3.2 Representação de Operadores Diferenciais e Derivações . . . . .	22
1.3.3 Símbolos e a Primeira Identidade Fundamental . . . . .	28
1.3.4 Módulos Geométricos . . . . .	32
<b>2 Aplicações às Álgebras de Clifford</b>	<b>35</b>
2.1 A Estrutura das Álgebras de Clifford . . . . .	35
2.2 Álgebras de Azumaya, Cohomologias de Hochschild, Derivações e Quantizações . . . . .	38
2.3 Operadores Diferenciais sobre as Álgebras de Clifford . . . . .	40
<b>3 Formalismo Hamiltoniano na Linguagem dos Operadores Diferenciais</b>	<b>43</b>
3.1 Espaços de Fase e Anéis Comutativos . . . . .	44
3.2 Colchetes de Poisson e Hamiltonianas . . . . .	44
3.3 Transformações Canônicas . . . . .	48
3.4 Transformações Canônicas Infinitesimais . . . . .	49
3.5 Variedades Lagrangeanas e a Equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	50
3.6 Formalismo Hamiltoniano a Valores em Módulos . . . . .	52
3.7 O Formalismo Hamiltoniano em Anéis Hamiltonianos . . . . .	54
3.8 Em Direção a uma Teoria de Schemas Afins Hamiltonianos . . . . .	55

<b>4</b>	<b>Formas de Berezin e Lagrangeanas Algébricas</b>	<b>59</b>
4.1	A Adjunta de um Operador . . . . .	60
4.2	Formas de Berezin e Integração Algébrica . . . . .	61
4.3	Seqüências Espectrais e a Dualidade de Poincaré . . . . .	64
4.3.1	Complexos de Kozul e as Teorias Supersimétricas . . . . .	65
4.4	A Fórmula de Green . . . . .	71
4.5	Lagrangeanas, o Operador de Euler e o Teorema de Noether . . . . .	73
4.5.1	O Formalismo Lagrangeano em Variedades . . . . .	75
4.5.2	Leis de Conservação . . . . .	76
4.5.3	O Teorema de Noether . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Considerações Finais: Em Direção a uma Versão Algébrica para o Teorema do Índice</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Limites Algébricos</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Seqüências Espectrais</b>	<b>95</b>

# Introdução

Tanto a matemática quanto a física moderna têm lançado mão das álgebras de Clifford como um aparato para a resolução de diversos problemas. Como exemplos disso, citamos a teoria  $K$  e os espinores de Dirac.

Ao tentarmos dar uma interpretação matemática coerente para as lagrangeanas multivetoriais, deparamo-nos com operadores diferenciais sobre as álgebras de Clifford. Essa tentativa aponta diretamente para dois problemas:

1. Como caracterizar operadores diferenciais e o formalismo variacional no contexto do fibrado de Clifford?
2. Como generalizar essa situação, substituindo a álgebra de Clifford por um fibrado vetorial arbitrário?

Motivada pelo Teorema de Swan [61], uma análise mais criteriosa mostra que podemos abordar essas questões de uma maneira puramente algébrica, substituindo a variedade por um anel, e o fibrado vetorial por um módulo sobre esse anel. Isso nos leva, então, a uma questão ainda mais ampla e profunda:

Como introduzir um formalismo variacional de uma maneira puramente algébrica?

Em 1972, A. M. Vinogradov propôs uma solução para isso, utilizando a teoria de operadores diferenciais “à la Grothendieck” [67]. Trabalhos como [35, 68, 69, 70] surgiram, dando impulso a esse estudo e obtendo resultados satisfatórios.

Abordaremos essa questão, motivados pela equivalência dada pelo Teorema de Swan [61]. Isso possibilita uma abordagem puramente algébrica dos fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta, bem como a construção algébrica dos operadores diferenciais [35, 67].

No Capítulo 1, trataremos de desenvolver uma teoria algébrica para os operadores diferenciais, no sentido de [20, 24]. Na verdade, dado um fibrado vetorial, associaremos a ele um anel e um módulo. A partir daí, buscaremos caracterizar as estruturas topológica (por meio da topologia de Zariski) e diferencial (por meio do cálculo sobre anéis comutativos).

Tendo por base o Capítulo 1, estudamos no Capítulo 2 algumas propriedades dos operadores diferenciais sobre as álgebras de Clifford, utilizando idéias das álgebras

Azumaya [5, 7] e da cohomologia de Hochschild [30, 54]. Nesse contexto, é possível mostrar que a álgebra de Clifford é rígida [22], e tirar conclusões a respeito das quantizações por deformação [34, 55]. Além disso, obtemos uma classificação parcial dos operadores diferenciais sobre a álgebra de Clifford, mostrando sua relação com o operador de Dirac.

Curiosamente, o formalismo Hamiltoniano clássico tem reaparecido como um componente essencial a algumas teorias matemáticas que, aparentemente, nada têm a ver com a mecânica. Nessas teorias, tem-se interesse em que o formalismo Hamiltoniano desempenhe diferentes regras funcionais. Isto sugere que tal formalismo seja parte de um sistema matemático mais amplo. Para o caso linear, acreditamos que este sistema seja a teoria de operadores diferenciais lineares, como a desenvolvemos no Capítulo 1. Esta idéia é reforçada por [67] e pelos avanços no entendimento da geometria diferencial por meio do complexo de Euler [38, 51]. Talvez isso explique, em parte, a multiaplicação do formalismo Hamiltoniano e nos permita um entendimento mais profundo das possibilidades do método Hamiltoniano.

Assim, o objetivo do Capítulo 3 é traduzir os conceitos básicos do formalismo Hamiltoniano em uma linguagem algébrica natural, por meio do cálculo sobre anéis comutativos. Motivada por [44], esta tradução naturalmente permite uma generalização para uma teoria de schemas afins Hamiltonianos, e aponta para uma versão algébrica do teorema do índice [48].

Por meio da Geometria não-Comutativa, vislumbra-se a possibilidade de reformular as noções clássicas de geometria diferencial em termos puramente algébricos. Nesse contexto, o cálculo diferencial torna-se uma extensão da linguagem da álgebra comutativa [2]. Por outro lado, existem vários casos, bastante importantes, onde é possível ir além disso [44]. Eles deram ímpeto a novas pesquisas, cujo objetivo é transplantar as ferramentas da análise e geometria em termos não-comutativos. Um exemplo vem do estudo de uma teoria não-comutativa de integração, leis de conservação e formalismo Lagrangeano [40, 47]. Entretanto, surge o problema da descrição do processo de integração. A primeira questão é a seguinte: dada uma álgebra comutativa, como definir o módulo das formas de volume? Uma resposta a essa questão, em particular, dá a possibilidade de definir as formas de Berezin sobre uma supervariedade da maneira usual, i.e., usando convenientemente a regra de sinais [53]. Tendo em vista as peculiaridades bem conhecidas da integração de Berezin, o caráter do problema torna-se evidente, pois resulta na perda de um claro cenário algébrico para o processo de integração e de construções relacionadas a este processo.

Se entendermos por Lagrangeana multivetorial, a natural generalização algébrica da Lagrangeana usual, as dificuldades de entendimento tornam-se apenas dificuldades de linguagem e de interpretação das propriedades do módulo das formas de Berezin. De fato, a inesperada relação entre lagrangeanas e formas de Berezin, nos dá uma idéia mais clara dos problemas variacionais em supervariedades.

Assim, nosso objetivo no Capítulo 4 será buscar um cenário algébrico adequado para a construção do formalismo Lagrangeano. Trabalharemos sobre um anel comutativo arbitrário, a fim de mostrar que as noções de formas de Berezin, adjuntas de

operadores, operador de Euler, fórmula de Green, etc., podem ser estendidas a este anel de uma maneira bastante natural.

Finalmente, no Capítulo 5, comparamos diversas abordagens que apontam para uma versão algébrica do teorema do índice. É dada uma definição algébrica para operadores elípticos e são feitas algumas propostas na direção desse resultado.

# Capítulo 1

## Operadores Diferenciais

Na categoria dos fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta e homomorfismos, existe um teorema bem conhecido, inicialmente demonstrado por Swan [61], que provê uma equivalência entre esta categoria e a categoria dos módulos projetivos sobre o anel das funções da variedade. Isto possibilita fazer uma abordagem puramente algébrica dos fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta, bem como construir algebricamente operadores diferenciais [35]. Esta abordagem torna-se naturalmente mais geral, pois pode-se tratar módulos projetivos quaisquer sobre anéis e estudar diversas propriedades, motivados pela situação oriunda da geometria. Desta maneira, perguntas naturais surgem: é possível ter um formalismo Lagrangeano ou Hamiltoniano nesse contexto? Que propriedades possuem as álgebras e os fibrados de Clifford nesse formalismo? É possível ter uma versão algébrica do teorema do índice?

Neste capítulo trataremos de desenvolver uma teoria algébrica para os operadores diferenciais. Na verdade, dado um fibrado vetorial, associaremos a ele um anel e um módulo. A partir daí buscaremos caracterizar as estruturas topológica e diferencial.

Um primeiro passo nessa direção será caracterizar a topologia por meio dos *spectra* primo e maximal. Alguns resultados algébricos serão essenciais mas, na medida do possível, procuraremos fazer com que nossa abordagem seja autosuficiente.

### 1.1 Caracterização Algébrica da Topologia

Dado um espaço topológico  $X$ , construímos o anel  $C(X)$  das funções contínuas sobre  $X$  a valores reais. Uma pergunta que surge é se este anel se relaciona com  $X$  de alguma forma não trivial, i.e., que propriedades topológicas de  $X$  podemos obter por meio de propriedades algébricas de  $C(X)$ ?

Dado um ponto  $x \in X$ , qual estrutura algébrica em  $C(X)$  representa-o topologicamente? Uma primeira tentativa é olhar a caracterização topológica de  $x$ . Temos

$$\{x\} = \bigcap \{F : x \in F, F \text{ fechado em } X\}$$

desde que  $X$  seja de Hausdorff. Por outro lado, se  $X$  é localmente compacto e  $y \notin$

$F$ , onde  $F \subset X$  é fechado, existe uma função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(F) = 0$  e  $f(y) = 1$ . Isto garante a caracterização dos fechados de  $X$  por meio de funções contínuas. Assim, se denotamos por  $C_x(X) = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ , temos:

$$\{x\} = \bigcap \{y : f \in C_x(X), f(y) = 0\}.$$

Isto mostra a necessidade de considerarmos espaços topológicos de Hausdorff, localmente compactos.

Então faz sentido olhar o conjunto de funções  $m_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ , já que este caracteriza o ponto  $x \in X$ . Veremos que a associação  $x \mapsto m_x$  provê uma aplicação entre pontos de  $X$  e ideais maximais de  $C(X)$ . Entretanto, do ponto de vista algébrico, ideais maximais não desempenham um bom papel no que diz respeito a propriedades functoriais, e portanto prefere-se ideais primos (A imagem inversa de ideais maximais, por homomorfismos, nem sempre é maximal, ao passo que a imagem inversa de um ideal primo, por homomorfismos, é sempre primo).

Procuraremos, tanto quanto possível, descobrir quais estruturas topológicas podemos obter a partir de  $C(X)$ , e quais as estruturas algébricas deste último que caracterizam tais estruturas topológicas.

### 1.1.1 O Spectrum Primo

Seja  $R$  um anel comutativo com identidade, e  $X$  o conjunto de todos os ideais primos de  $R$ . Dado  $E \subset R$ , definimos por

$$V(E) = \{p : p \text{ primo}, E \subset p\},$$

o conjunto de todos os ideais primos de  $R$  que contém  $E$ .

Se  $\mathfrak{a} = \langle E \rangle$  é o ideal gerado por  $E$ , é claro que temos  $V(E) = V(\mathfrak{a})$ . Na verdade, um ideal contém  $E$  se e somente se contém  $\mathfrak{a}$ . Por simplicidade, denotaremos por  $V(f)$  ao conjunto  $V(\{f\})$ .

Caracterizemos agora algumas propriedades dos conjuntos  $V(E)$ .

**Proposição 1.1.** *Os conjuntos da forma  $V(E)$  satisfazem as seguintes propriedades:*

1.  $V(\phi) = X$  e  $V(1) = \phi$ ;
2.  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha\right)$ ;
3.  $V(E) \cup V(F) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ , onde  $\mathfrak{a} = \langle E \rangle$  e  $\mathfrak{b} = \langle F \rangle$  são os ideais gerados por  $E$  e  $F$  respectivamente.

*Demonstração.* A parte (1) é evidente, uma vez que todo ideal primo contém  $\phi$  e não contém 1.

Quanto à parte (2), veja que  $E_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ . Daí, segue que  $V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha) \subset V(E_\alpha)$ , e desta forma,  $V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha)$ . Por outro lado, se  $\mathfrak{p} \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha)$ , então  $E_\alpha \subset \mathfrak{p}$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ , mostrando que  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \subset \mathfrak{p}$ . Assim,  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha) \subset V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha)$ .

A fim de demonstrar a parte (3), coloquemos  $\mathfrak{a} = \langle E \rangle$  e  $\mathfrak{b} = \langle F \rangle$ . Como  $V(\mathfrak{a}) = V(E)$  e  $V(\mathfrak{b}) = V(F)$ , devemos mostrar que

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Uma vez que  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$ , temos  $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$  e  $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ . Desta forma,  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ . Também, como  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ , temos  $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ . Dessas considerações resulta a seguinte seqüência de inclusões:

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Dado agora um ideal primo  $\mathfrak{p}$ , com  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ , temos  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  ou  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ . Disso se conclui que  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ , e portanto  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ . ■

A proposição acima assegura que  $\phi$  e  $X$  estão dentre os conjuntos da forma  $V(E)$ , e que tais conjuntos são fechados com respeito a interseções arbitrárias e uniões finitas. Desta forma, eles definem uma coleção de conjuntos *fechados*, e portanto uma *topologia* em  $X$ . Tal topologia é chamada *topologia de Zariski*, e o conjunto  $X$  *spectrum primo* do anel  $R$ . Usualmente se escreve  $\text{Spec}(R)$  ao invés de  $X$ .

Dado um elemento  $f \in R$ , definimos  $X_f = (V(f))^c$ . Isto mostra que os conjuntos  $X_f$  são abertos, e vale a propriedade abaixo.

**Proposição 1.2.** *A coleção  $\{X_f : f \in R\}$  é uma base para a topologia de Zariski sobre  $\text{Spec}(R)$ .*

*Demonstração.* Dado um aberto  $U \subset \text{Spec}(R)$ , devemos mostrar que existem  $f_i \in R$ ,  $i \in I$ , tais que  $U = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$ . Com efeito, uma vez que  $U$  é aberto, existe  $E \subset R$  tal que  $U = V(E)^c$ . Assim,

$$U = (V(E))^c = \left( V \left( \bigcup_{f \in E} \{f\} \right) \right)^c = \left( \bigcap_{f \in E} V(f) \right)^c = \bigcup_{f \in E} (V(f))^c = \bigcup_{f \in E} X_f.$$

Isto conclui a demonstração. ■

## 1.1.2 Espaços Topológicos e Funções Contínuas

No que segue, assumiremos que todos os espaços topológicos são de Hausdorff; caso contrário, faremos menção explícita.

Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto. Denotemos por  $C(X)$  o conjunto de todas as funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{R}$ . Não é muito difícil de se ver que este conjunto é de fato uma anel comutativo com identidade, quando munido das operações usuais de soma e multiplicação de funções.

Pela discussão da subseção anterior, somos levados a considerar a topologia de Zariski sobre o espaço  $\text{Spec}(C(X))$ . Neste ponto, surge naturalmente uma questão: qual é a relação entre  $X$  e  $\text{Spec}(C(X))$ ?

Antes de responder, vamos olhar mais de perto a estrutura de  $\text{Spec}(C(X))$ . Dado  $x \in X$ , definimos

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}.$$

Uma vez que  $\mathfrak{m}_x$  é o núcleo do homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

e  $\mathbb{R}$  é um corpo, temos  $\mathbb{R} \simeq C(X)/\mathfrak{m}_x$ , mostrando que  $\mathfrak{m}_x$  é um ideal maximal de  $C(X)$ .

Definindo-se a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \xi : X & \longrightarrow & \text{Spec}(C(X)) \\ x & \longmapsto & \mathfrak{m}_x, \end{array}$$

podemos responder a questão acima.  $\xi$  é uma aplicação contínua e injetiva. Na verdade, é um homeomorfismo sobre sua imagem, quando a última é considerada como subespaço de  $\text{Spec}(C(X))$ . Se  $X$  é compacto, ele é homeomorfo ao subespaço  $\text{Max}(C(X))$ , formado por todos os ideais maximais de  $C(X)$ .

Até agora, fizemos algumas afirmações a fim de responder à questão formulada anteriormente. O próximo passo será demonstrar estas afirmações na forma de proposições.

**Proposição 1.3.**  $\xi$  é uma aplicação contínua.

*Demonstração.* É suficiente mostrar que, para cada  $f \in C(X)$ , o conjunto  $\xi^{-1}(V(f))$  é fechado. Note que  $\xi^{-1}(V(f)) = \{x \in X : \mathfrak{m}_x \in V(f)\}$ . Mas  $\mathfrak{m}_x \in V(f)$  se e somente se  $f(x) = 0$ . Assim,

$$\xi^{-1}(V(f)) = \{x \in X : f(x) = 0\},$$

que é fechado, visto que  $f$  é contínua. ■

**Proposição 1.4.**  $\xi$  é injetora.

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in X$ , com  $x \neq y$ . Sendo  $X$  localmente compacto, o lema de Urysohn afirma que existe uma função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1$ . Desta forma,  $f \in \mathfrak{m}_x$  e  $f \notin \mathfrak{m}_y$ . Segue que  $\xi(x) = \mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y = \xi(y)$ . ■

**Proposição 1.5.**  $\xi$  é um mergulho, i.e.,  $\xi$  é um homeomorfismo entre  $X$  e  $\xi(X)$ .

*Demonstração.* Seja  $\tilde{X} = \xi(X)$ . Dada  $f \in C(X)$ , sejam

$$U_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

$$\tilde{U}_f = \{\mathfrak{m} \in \tilde{X} : f \notin \mathfrak{m}\}.$$

Então  $\xi(U_f) = \{\mathfrak{m}_x \in \tilde{X} : f(x) \neq 0\}$ . Mas  $f(x) \neq 0$  se e somente se  $f \notin \mathfrak{m}_x$ . Assim,  $\xi(U_f) = \{\mathfrak{m} \in \tilde{X} : f \notin \mathfrak{m}\} = \tilde{U}_f$ .

Note agora que  $\tilde{U}_f = \tilde{X} \cap V(f)^c = \tilde{X} \cap X_f$  e, desta forma, os conjuntos  $\tilde{U}_f$  formam uma base de abertos para  $\xi(X)$ , uma vez que os conjuntos  $X_f$  formam uma base de abertos para  $\text{Spec}(C(X))$ . Além disso, o lema de Urysohn garante que os conjuntos da forma  $U_f$  também formam uma base de abertos para  $X$ . Segue disso que  $\xi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem. ■

**Proposição 1.6.** Se  $X$  é um espaço compacto, então  $\xi(X) = \text{Max}(C(X))$ , onde  $\text{Max}(C(X))$  é o subespaço formado por todos os ideais maximais de  $C(X)$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar que, para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $C(X)$ , existe  $x \in X$ , tal que  $\mathfrak{m} = \{f \in C(X) : f(x) = 0\} = \mathfrak{m}_x$ .

Para esse fim, seja  $N = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{m}\}$ . Vamos mostrar que  $N \neq \emptyset$ . Suponha o contrário,  $N = \emptyset$ . Então para cada  $x \in X$  existe  $f_x \in C(X)$  tal que  $f_x(x) \neq 0$ . Pela continuidade de  $f_x$ , existe um aberto  $U_x \subset X$  sobre o qual  $f_x$  não se anula. Desta forma, construímos uma cobertura aberta sobre  $X$ , por meio dos abertos  $U_x$ . Sendo  $X$  compacto, existe uma subcobertura finita. Designemo-los por  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ . Então a função

$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$$

é contínua, e não nula, para todo ponto  $x \in X$ . Isto mostra que  $f$  é uma unidade em  $C(X)$ , contradizendo o fato de  $f \in \mathfrak{m}$ . Segue disso que  $N \neq \emptyset$ . Dado então  $x \in N$ , tem-se  $\mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{m}$ . Por maximalidade segue que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ . ■

Na demonstração da proposição acima, o lema de Urysohn nos diz que, para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(C(X))$ , existe um único  $x \in X$ , tal que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ , e vice-versa. Assim, podemos imaginar os pontos de  $X$  como sendo os ideais maximais de  $C(X)$ .

### 1.1.3 Módulos Projetivos e Localização

Se  $R$  é um anél e  $P$  é um  $R$ -módulo, quando não houver perigo de confusão, diremos simplesmente que  $P$  é um módulo.

**Definição 1.7.** Seja  $P$  um módulo. Dizemos que  $P$  é *projetivo* se ele satisfaz a *propriedade de levantamento projetivo*, i.e., para todo epimorfismo  $s : M \rightarrow N$  e todo homomorfismo  $g : P \rightarrow N$ , existe um homomorfismo  $f : P \rightarrow M$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow f & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{s} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo.

**Proposição 1.8.** *Seja  $P$  um  $R$ -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $P$  é projetivo.
2. Existe um módulo  $Q$  tal que  $P \oplus Q$  é livre.

*Demonstração.* Suponha  $P$  projetivo. Formamos o  $R$ -módulo  $F$ , constituído das famílias  $(a_x)_{x \in P}$  de elementos de  $R$ , indexados por  $P$ , tais que  $a_x = 0$  salvo para um número finito de índices  $x \in P$ .  $F$  é um módulo livre, e a aplicação  $\pi : F \rightarrow P$  dada por

$$\pi\left((a_x)_{x \in P}\right) = \sum_{x \in P} a_x x,$$

está bem definida (somente um número finito de  $a_x$ 's não se anula) e é de fato um epimorfismo de módulos. Como  $P$  é projetivo, a propriedade de levantamento cinde  $\pi$ , de modo que  $F \simeq P \oplus \text{Ker}(\pi)$ .

Reciprocamente, note de início que módulos livres satisfazem a propriedade de levantamento; neste caso  $f$  é determinada levantando-se a imagem de uma base. Para ver que os módulos projetivos satisfazem a propriedade de levantamento, estenda  $g$  a uma aplicação de um módulo livre  $P \oplus Q$  em  $N$ , e faça o levantamento como descrito antes. ■

Recordemos que um  $R$ -módulo  $P$  é *finitamente gerado* se existe um subconjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset P$ , tal que, para todo  $x \in P$ , existem  $a_1, \dots, a_n \in R$  com

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é minimal com respeito à propriedade de gerar  $P$ , dizemos que o *posto* de  $M$  é  $n$ .

Veja que, se  $P$  é um  $R$ -módulo finitamente gerado, e  $R$  é um corpo, então  $P$  é projetivo, e na verdade livre.

Retornemos à questão de se estudar o anel  $C(X)$ , onde  $X$  é um espaço topológico localmente compacto. Não faz sentido falar em corpo de frações de  $C(X)$ , visto que este não é um domínio de integridade. Nesse ponto, percebemos a necessidade de uma noção mais geral que a de corpo de frações, abarcando este tipo de situação. Para tal, é

no mínimo instrutivo recordar a construção do corpo de frações do anel  $\mathbb{Z}$ , e extrairmos dela algumas idéias.

Para se construir os racionais a partir dos inteiros, tomamos pares ordenados  $(a, s)$ , onde  $a, s \in \mathbb{Z}$  e  $s \neq 0$ , e definimos a relação de equivalência:

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ se e somente se } at - bs = 0.$$

Isto funciona bem em  $\mathbb{Z}$ , pois podemos cancelar termos não-nulos. Para um anel geral, precisaremos ajustar convenientemente esta idéia.

**Definição 1.9.** Seja  $R$  um anel comutativo com identidade. Um subconjunto  $S \subset R$  é dito ser uma *parte multiplicativa* de  $R$  se:

1.  $1 \in S$ ;
2.  $0 \notin S$ ;
3.  $S$  é estável por multiplicações, i.e., se  $s, t \in S$  então  $st \in S$ .

Definimos uma relação  $\sim$  em  $R \times S$  como segue:

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ se e somente se } (at - bs)u = 0 \text{ para algum } u \in S.$$

É fácil ver que esta relação é simétrica e reflexiva. Para a transitividade, suponhamos que  $(a, s) \sim (b, t)$  e  $(b, t) \sim (c, u)$ . Então existem  $v, w \in S$  tais que  $(at - bs)v = 0$ , e  $(bu - ct)w = 0$ . Multiplicando a primeira destas igualdades por  $uw$ , a segunda por  $sv$  e somando, temos  $(au - cs)tvw = 0$ . Sendo  $S$  fechado com respeito à multiplicação,  $tvw \in S$ , e daí  $(a, s) \sim (c, u)$ . Segue disso que  $\sim$  é uma relação de equivalência.

Notemos que, se  $R = \mathbb{Z}$ , e  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ , temos  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times S / \sim$ . Desta forma, é natural denotar por  $\frac{a}{s}$  a classe de equivalência do par  $(a, s)$ , e pensá-la como uma "fração". Na verdade, os elementos de  $S$  funcionam como os denominadores e, por esse motivo, denotamos por  $S^{-1}R$  o conjunto quociente  $R \times S / \sim$ .

Colocamos em  $S^{-1}R$  uma estrutura de anel, definindo a adição e multiplicação das frações  $\frac{a}{s}$  como em  $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a \cdot b}{s \cdot t}.$$

É um exercício elementar em álgebra mostrar que estas operações estão bem definidas e fazem de  $S^{-1}R$  um anel comutativo com identidade. Tal anel é chamado *anel de frações de  $R$  com respeito a  $S$* .

Como  $1 \in S$ ,  $R \subset S^{-1}R$ . Se  $S = \{1\}$ , ou se é formado pelos elementos inversíveis de  $R$ , temos  $S^{-1}R = R$ .

Um caso de especial interesse é quando  $\mathfrak{p}$  é um ideal primo de  $R$ , pois aí  $S = R - \mathfrak{p}$  é uma parte multiplicativa de  $R$ . Com efeito, se  $s, t \in S$ , então  $st \notin \mathfrak{p}$ , uma vez

que  $\mathfrak{p}$  é primo. Escrevemos simplifcadamente  $R_{\mathfrak{p}}$  para  $S^{-1}R$  neste caso. Também é de interesse quando temos  $S = \{f^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ , onde  $f \in R$  não é nilpotente. Nesse caso, denotamos  $S^{-1}R$  simplesmente por  $R_f$ , como no caso de um ideal primo  $\mathfrak{p}$ , descrito anteriormente.

Os elementos  $\frac{a}{s}$  com  $a \in \mathfrak{p}$  formam um ideal  $\mathfrak{m}$  em  $R_{\mathfrak{p}}$ . Se  $\frac{b}{t} \notin \mathfrak{m}$ , então  $b \notin \mathfrak{p}$ . Desta forma  $b \in S$  e, portanto,  $\frac{b}{t}$  é uma unidade em  $R_{\mathfrak{p}}$ . Logo, se  $\mathfrak{a}$  é um ideal em  $R_{\mathfrak{p}}$  e  $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ , então  $\mathfrak{a}$  contém uma unidade e é, portanto, todo o anel  $R$ . Assim,  $\mathfrak{m}$  é o único ideal maximal em  $R_{\mathfrak{p}}$ .

**Definição 1.10.** Um anel  $R$  é dito local se ele possui um único ideal maximal.

Desta maneira, o anel  $R_{\mathfrak{p}}$  é local.

O processo de passar de  $R$  para  $R_{\mathfrak{p}}$  é chamado *localização em  $\mathfrak{p}$* , e o anel  $R_{\mathfrak{p}}$  é chamado *localizado de  $R$  em  $\mathfrak{p}$* . Uma vez que  $R_{\mathfrak{p}}$  é um anel local, os termos “localizado” e “localização” fazem sentido.

Podemos agora usar o processo de localização para entender a estrutura dos módulos projetivos finitamente gerados.

**Definição 1.11.** Sejam  $P$  um  $R$ -módulo, e  $S \subset R$  uma parte multiplicativa de  $R$ . Chamamos ao conjunto  $P_S = P \otimes_R R_S$  *módulo de frações de  $P$  com respeito a  $S$* .

Veja que  $P_S$  é um  $R_S$ -módulo, e que pode ser entendido como formado pelos quocientes  $\frac{m}{s}$  com  $m \in P$  e  $s \in S$ .

Como fizemos para o anel  $R$ , dado um ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $R$ , podemos formar o  $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo  $P_{\mathfrak{p}}$ .

**Proposição 1.12.** *Se  $R$  é um anel local, então todo  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado é livre.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathfrak{m}$  o ideal maximal de  $R$ , e  $P$  um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado. Tendo em vista que  $P$  é finitamente gerado, e  $R/\mathfrak{m}$  é um corpo,  $P/\mathfrak{m}P \simeq P \otimes_R R/\mathfrak{m}$  é um  $R/\mathfrak{m}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Seja  $\{v_1, \dots, v_k\}$  uma base de  $P/\mathfrak{m}P$  sobre  $R/\mathfrak{m}$ , e tomemos elementos  $\{u_1, \dots, u_k\} \subset P$  cujas imagens via a projeção canônica são os elementos  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Temos então um homomorfismo  $\zeta : R^k \rightarrow P$ , que aplica os elemento  $e_i$  da base canônica de  $R^k$  no elemento  $u_i$  de  $P$ , provendo-nos da seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\zeta) \longrightarrow R^k \xrightarrow{\zeta} P \longrightarrow \text{Coker}(\zeta) \longrightarrow 0$$

Como  $\text{Coker}(\zeta) = P/\zeta(R^k)$  é finitamente gerado, reduzindo módulo  $\mathfrak{m}$  temos  $\text{Coker}(\zeta)_{\mathfrak{m}} = \text{Coker}(\zeta)/\mathfrak{m}\text{Coker}(\zeta) = 0$ , donde o lema de Nakayama [39] nos fornece  $\text{Coker}(\zeta) = 0$ . Isso reduz a seqüência exata anterior a

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\zeta) \longrightarrow R^k \xrightarrow{\zeta} P \longrightarrow 0.$$

Como  $P$  é projetivo,  $\text{Ker}(\zeta)$  é finitamente gerado. Reduzindo módulo  $\mathfrak{m}$  obtemos  $\text{Ker}(\zeta)_{\mathfrak{m}} = \text{Ker}(\zeta)/\mathfrak{m}\text{Ker}(\zeta) = 0$  e, mais uma vez, o lema de Nakayama nos fornece  $\text{Ker}(\zeta) = 0$ . Segue disso que  $P = R^k$ . ■

Em vista deste resultado, faz sentido falar em posto nos termos da definição seguinte.

**Definição 1.13.** Seja  $P$  um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado. Dizemos que  $P$  é de posto  $n$  em  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  se  $P_{\mathfrak{p}}$  é um  $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo de posto  $n$ .

Finalmente, temos uma caracterização local para os módulos projetivos finitamente gerados.

**Teorema 1.14 (Trivialidade Local para Módulos).** *Sejam  $P$  um  $R$ -módulo projetivo finitamente gerado e  $n$  seu posto em  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ . Então existe  $f \in R - \mathfrak{p}$  tal que  $P_f$  é um  $R_f$ -módulo livre de posto  $n$ .*

*Demonstração.* Como  $R_{\mathfrak{p}}$  é local, a proposição anterior nos dá que  $P_{\mathfrak{p}}$  é um  $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo livre. Seja então  $\{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $P_{\mathfrak{p}}$ . Reduzindo-se a um denominador comum, encontramos um homomorfismo  $\zeta : R^n \rightarrow P$ , de onde construímos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\zeta) \longrightarrow R^n \xrightarrow{\zeta} P \longrightarrow \text{Coker}(\zeta) \longrightarrow 0.$$

Localizando em  $\mathfrak{p}$ , temos  $\text{Coker}(\zeta)_{\mathfrak{p}} = 0$ . Como  $\text{Coker}(\zeta)$  é finitamente gerado, existe  $g \in R - \mathfrak{p}$  tal que  $\text{Coker}(\zeta)_g = 0$ . Desta forma, obtemos uma nova seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\zeta)_g \longrightarrow R_g^n \longrightarrow P_g \longrightarrow 0.$$

Uma vez que  $P_g$  é projetivo,  $\text{ker}(\zeta)_g$  é um  $R_g$ -módulo finitamente gerado. Como  $\text{ker}(\zeta)_{\mathfrak{p}} = 0$ , existe  $h \in R - \mathfrak{p}$  tal que  $\text{ker}(\zeta)_{gh} = 0$ . Segue disso que  $P_{gh} = R_{gh}^n$ . ■

## 1.2 A Equivalência entre Fibrados Vetoriais e Módulos Projetivos

Nesta seção discutiremos a íntima relação entre fibrados vetoriais e módulos projetivos finitamente gerados. Para isso, vamos rever os principais aspectos a respeito da estrutura dos fibrados vetoriais.

**Definição 1.15.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma família de espaços vetoriais sobre  $X$  é um espaço topológico  $E$ , munido de uma aplicação contínua  $\xi : E \rightarrow X$  e uma estrutura de espaço vetorial de dimensão finita (sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) em cada fibra  $E_x = \xi^{-1}(x)$ , e tal estrutura é compatível com a topologia de  $E$ .

Um *homomorfismo* de uma família  $\xi : E \rightarrow X$  em uma família  $\zeta : F \rightarrow X$  é uma aplicação contínua  $f : E \rightarrow F$ , para a qual o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow \xi & \swarrow \zeta \\ & X & \end{array}$$

é comutativo, e a aplicação induzida  $f_x : E_x \rightarrow F_x$  é uma transformação linear de espaços vetoriais.

Não é difícil definir isomorfismos de famílias, de modo que obtemos a categoria formada por famílias de espaços vetoriais sobre  $X$  e seus homomorfismos.

Por exemplo, se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , a projeção de  $T^n = X \times V$  em  $X$  forma uma família “constante” de espaços vetoriais. Chamamos tal família, e qualquer família isomorfa a esta, de *fibrado vetorial trivial* sobre  $X$ .

Se  $Y \subset X$ , escrevemos  $E|Y$  para a restrição  $\xi^{-1}(Y)$  de  $E$  a  $Y$ ; a restrição  $\xi|Y : E|Y \rightarrow Y$  de  $\xi$  faz de  $E|Y$  uma família de espaços vetoriais sobre  $Y$ . Mais geralmente, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, podemos construir a família induzida  $f^*\xi : f^*E \rightarrow Y$  como segue: o espaço  $f^*E$  é o subespaço de  $Y \times E$ , consistindo de todos os pares  $(y, e)$  tais que  $f(y) = \xi(e)$ , e  $f^*E \rightarrow Y$  é a restrição da projeção. Uma vez que a fibra de  $f^*E$  em  $y \in Y$  é  $E_{f(y)}$ , segue que  $f^*E$  é uma família de espaços vetoriais sobre  $Y$ .

**Definição 1.16.** Um *fibrado vetorial* sobre  $X$  é uma família de espaços vetoriais  $\xi : E \rightarrow X$ , tal que todo ponto  $x \in X$  possui uma vizinhança  $U \subset X$  com  $\xi|U : E|U \rightarrow U$  trivial. Um fibrado vetorial também é chamado de família de espaços vetoriais *localmente trivial*.

O conceito de fibrado diferenciável<sup>1</sup> pode ser definido de maneira análoga. Apenas se exige que  $E$  e  $X$  sejam variedades diferenciáveis, que  $\xi$  seja uma aplicação diferenciável, e que, para cada  $x \in X$ , exista uma vizinhança  $U \subset X$ , de modo que  $\xi^{-1}(U)$  seja difeomorfo a um fibrado trivial.

A *soma de Whitney*  $E \oplus F$  de dois fibrados vetoriais  $\xi : E \rightarrow X$  e  $\zeta : F \rightarrow X$ , é a família de todos os espaços vetoriais  $E_x \oplus F_x$ , munida da topologia de subespaço de  $E \times F$ . Uma vez que  $E$  e  $F$  são localmente triviais, não é difícil ver que  $E \oplus F$  também o é, de modo que este último é um fibrado vetorial.

Um *sub-fibrado* de um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow X$  é um subespaço  $F \subset E$ , que é um fibrado vetorial com respeito a estrutura induzida de  $E$ . Isto significa que cada fibra  $F_x$  é um subespaço vetorial de  $E_x$ , e a família  $F \rightarrow X$  é localmente trivial. O *fibrado quociente*  $E/F$  é a união de todos os espaços vetoriais  $E_x/F_x$ , munido da topologia quociente. Não é difícil ver que  $E/F$  é localmente trivial, uma vez que  $E$  e  $F$  o são, de

<sup>1</sup>Convencionamos que diferenciabilidade sempre significará  $C^\infty$ .

modo que ele é um fibrado vetorial. Isto provê uma “seqüência exata curta” de fibrados vetoriais:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

Se  $E$  é um fibrado vetorial sobre  $X$ , então a dimensão  $\dim(E_x)$  da fibra  $E_x$  é uma função localmente constante de  $X$  a valores em  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ; em particular, é constante quando  $X$  é conexo. Assim,  $\dim(E)$  é uma função contínua de  $X$  a valores no espaço topológico discreto  $\mathbb{N}$ .

**Definição 1.17.** Um *fibrado vetorial  $n$ -dimensional* é um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow X$  tal que  $\dim(E) = n$  é constante.

Os fibrados vetoriais 1-dimensionais são usualmente chamados de *fibrados de linhas* (line bundles).

**Definição 1.18.** Uma *seção* de um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow X$  é uma aplicação contínua  $s : X \rightarrow E$ , tal que  $\xi \circ s = 1_X$ .

O espaço de todas as seções de  $E$  é denotado por  $\Gamma(X, E)$ . Em particular,  $s(x) = 0_x$  (o vetor nulo de  $E_x$ ) é uma seção, chamada *seção nula*.

Toda seção  $s : X \rightarrow E$  determina uma aplicação do fibrado vetorial trivial  $X \times \mathbb{R}$  em  $E$  e, portanto, se  $s$  não se anula em em nenhum ponto, sua imagem é um subfibrado de linhas de  $E$ .

**Proposição 1.19.** Um *fibrado vetorial  $n$ -dimensional*  $\xi : E \rightarrow X$  é trivial se, e somente se, existem  $n$  seções linearmente independentes em todo ponto  $x \in X$ .

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $E$  seja trivial. Então, existe um isomorfismo  $f : E \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ . Definamos para  $i = 1, \dots, n$  as aplicações  $\hat{s}_i : X \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ , por

$$\hat{s}_i(x) = (x, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)),$$

sendo 1, somente a  $i$ -ésima coordenada de  $\mathbb{R}^n$ . É claro que  $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n$  são seções de  $X \times \mathbb{R}^n$ . Definindo-se então  $s_i = f^{-1} \circ \hat{s}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , obtemos as seções procuradas.

Reciprocamente, suponha que  $s_1, \dots, s_n$  são  $n$  seções linearmente independentes em cada ponto  $x \in X$ . Definamos  $f : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  por

$$f(x, a_1, \dots, a_n) = a_1 s_1(x) + \dots + a_n s_n(x).$$

É claro que  $f$  assim definida é um isomorfismo de fibrados vetoriais. ■

**Definição 1.20.** Seja  $\xi : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial real. Uma coleção de seções  $s_1, \dots, s_n$  é chamada *referencial* de  $X$  em  $E$ , se para todo  $x \in X$ ,  $s_1(x), \dots, s_n(x)$  forma uma base para  $E_x$ .

Considere agora um homomorfismo  $f : E \rightarrow F$  de um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow X$  em um fibrado vetorial  $\zeta : F \rightarrow X$ . Para cada  $x \in X$  temos o espaço vetorial  $\text{Ker}(f_x)$ , do qual formamos a família de espaços vetoriais  $\text{Ker}(f)$ . A fim de que esta família seja um fibrado vetorial, devemos mostrar que é localmente trivial. Mas, uma vez que  $E$  é localmente trivial, dado  $x \in X$ , existe um aberto  $U \subset X$ ,  $x \in U$ , tal que  $E|U \simeq X \times V$ . Desta forma, se identificamos as fibras de  $E|U$  com  $V$ ,  $\text{Ker}(f)$  será um fibrado vetorial se e somente se  $\dim(\text{Ker}(f_x))$  for uma função localmente constante em cada componente conexa de  $X$ . Ocorrendo isso, podemos identificar  $\text{Ker}(f_x)$  com um subespaço  $K \subset V$ , de modo que  $\text{Ker}(f)|U \simeq U \times K$ .

**Lema 1.21.** *Se  $X$  é um espaço localmente compacto, então toda seqüência exata de fibrados vetoriais sobre  $X$*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0,$$

(onde  $\dim(E) = p$ ,  $\dim(G) = q$  e  $\dim(F) = q - p$ ) cinde, i.e., existe um homomorfismo  $\sigma : E \rightarrow G$  tal que  $\beta \circ \sigma = 1_E$ .

*Demonstração.* Para cada ponto  $x \in X$  existe uma vizinhança aberta  $U_x$  para a qual  $G|U_x \simeq T^q$  e  $E|U_x \simeq T^p$ , onde  $T^i = U_x \times \mathbb{R}^i$ . Sejam  $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(U_x, G|U_x)$  um referencial de  $U_x$  em  $G|U_x$ . Da sobrejetividade de  $\beta$  segue que  $\{\beta_y(s_1(y)), \dots, \beta_y(s_q(y))\}$  gera  $E_y$  para todo  $y \in U_x$ . Então existem

$$\{s_{i_1}, \dots, s_{i_p}\} \subset \{s_1, \dots, s_q\},$$

tais que  $\{\beta_x(s_{i_1}(x)), \dots, \beta_x(s_{i_p}(x))\}$  é uma base para  $E_x$ . Da continuidade em  $x$  de  $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_p}\}$ , existe um aberto  $V_x \subset U_x$ , tal que para cada  $y \in V_x$  o conjunto  $\{\beta_y(s_{i_1}(y)), \dots, \beta_y(s_{i_p}(y))\}$  é uma base para  $E_y$ . Definimos então a aplicação  $\sigma_x : E|V_x \rightarrow G|V_x$  como

$$\sigma_x(a_1\beta_y(s_{i_1}(y)) + \dots + a_p\beta_y(s_{i_p}(y))) = a_1s_{i_1}(y) + \dots + a_ps_{i_p}(y).$$

Uma vez que  $X$  é um espaço localmente compacto, existe uma partição da unidade  $\{\phi_x\}_{x \in X}$  subordinada a  $\{V_x\}_{x \in X}$ .

Colocando  $\sigma = \sum_{x \in X} \sigma_x \phi_x$ , a soma é contínua, e um homomorfismo de fibrados vetoriais. Além disso, como

$$\beta \circ \sigma = \sum_{x \in X} (\beta \circ \sigma_x) \phi_x = \sum_{x \in X} (1_E|_{V_x}) \phi_x = 1_E,$$

$\sigma$  é uma cisão, completando a demonstração. ■

De posse deste lema, é possível demonstrar um teorema que traduz algebricamente a estrutura de um fibrado vetorial sobre um espaço compacto.

**Teorema 1.22.** *Sejam  $\xi : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial real  $n$ -dimensional, onde  $X$  é um espaço topológico compacto. Então*

1.  $\Gamma(X, E)$  é um  $C(X)$ -módulo finitamente gerado.
2. Existe um fibrado vetorial real  $\zeta : F \rightarrow X$  tal que  $E \oplus F$  é trivial.

*Demonstração.* Como  $E$  é localmente trivial, existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $X$  tal que, para cada aberto  $U \in \mathcal{U}$ , se tenha  $E|U \simeq X \times \mathbb{R}^n$ . Pela Proposição 1.19, existem  $n$  seções  $s_1^U, \dots, s_n^U \in \Gamma(U, E|U)$  que geram  $E_x$  em cada ponto  $x \in U$ . Como  $X$  é compacto, existem uma subcobertura finita  $\{U_1, \dots, U_k\} \subset \mathcal{U}$ , e uma partição da unidade  $\{\phi_i\}_{i=1}^k$  subordinada a ela. Desta forma, temos  $n \cdot k$  seções

$$\hat{s}_{ij}(x) = \phi_i(x)s_j^{U_i}(x) \in \Gamma(X, E),$$

$1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ , que por construção geram  $\Gamma(X, E)$ . Isto prova a primeira afirmação.

Para provar a segunda afirmação, colocamos  $T^{n \cdot k} = X \times \mathbb{R}^{n \cdot k}$  e definimos a aplicação  $f : T^{n \cdot k} \rightarrow E$  como

$$f(x, (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{kn})) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{s}_{ij}(x).$$

$f$  assim definida é um epimorfismo de fibrados vetoriais. Veja ainda que

$$\dim(\text{Ker}(f_x)) = \dim(\mathbb{R}^{n \cdot k}) - \dim(E_x) = nk - n = n(k - 1),$$

para todo  $x \in X$ , mostrando que  $\text{Ker}(f)$  é um fibrado vetorial. Com isso, formamos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \longrightarrow T^{n \cdot k} \xrightarrow{f} E \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema anterior, segue que  $T^{n \cdot k} \simeq E \oplus \text{Ker}(f)$ , concluindo a segunda parte do teorema. ■

Este teorema sintetiza duas importantes propriedades que relacionam fibrados vetoriais com módulos projetivos finitamente gerados. Antes, porém, de analisar mais intimamente esta relação, vejamos uma situação muito particular para a qual a segunda afirmação do teorema é válida.

Se  $X$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $d$ , seu fibrado tangente  $TX \rightarrow X$  é um fibrado vetorial real  $d$ -dimensional. Mergulhando  $X$  em  $\mathbb{R}^n$ , podemos formar o fibrado normal  $NX \rightarrow X$ , onde  $N_x X$  é o complemento ortogonal de  $T_x X$  em  $\mathbb{R}^n$ . Não é difícil ver que  $TX \oplus NX$  é o fibrado vetorial  $n$ -dimensional trivial  $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ .

Seja  $\xi : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial real  $n$ -dimensional, com  $X$  um espaço topológico compacto, o Teorema 1.22 diz que  $\Gamma(X, E)$  é um  $C(X)$ -módulo projetivo finitamente gerado. Na verdade, temos o teorema de Swan [61], que caracteriza a recíproca desse fato.

**Teorema 1.23 (Swan).** *Seja  $X$  compacto. Então um  $C(X)$ -módulo  $P$  é isomorfo a um módulo da forma  $\Gamma(X, E)$ , onde  $\xi : E \rightarrow X$  é um fibrado vetorial real  $n$ -dimensional, se e somente se  $P$  é finitamente gerado e projetivo.*

*Demonstração.* O Teorema 1.22 estabelece a necessidade da afirmação. Para a suficiência, veja que sendo  $X$  compacto, a Proposição 1.6 garante que  $X \simeq \text{Max}(X)$  por meio do homeomorfismo

$$x \mapsto \mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}.$$

Então, para cada  $x \in X$  o conjunto

$$E_x = P \otimes_{C(X)} (C(X)/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{R})$$

é um espaço vetorial real de dimensão finita, de modo que podemos formar o conjunto

$$E = \bigcup_{x \in X} E_x.$$

Colocando  $\xi : E \rightarrow X$  como  $\xi(E_x) = x$ , e munindo  $E$  da maior topologia que faz  $\xi$  contínua, temos  $E$  uma família de espaços vetoriais, onde  $\dim(E_x)$  é uma função localmente constante em cada componente conexo de  $X$ .

A fim de que  $\xi : E \rightarrow X$  seja um fibrado vetorial, devemos mostrar que este é localmente trivial. Para isso, o Teorema 1.14 nos fornece  $f \in C(X) - \mathfrak{m}_x$  tal que  $P_f$  é um  $C(X)_f$ -módulo livre. Desta maneira,  $\mathfrak{m}_x \in X_f$ . Além disso, temos

$$X_f = \{\mathfrak{m}_y : f(y) \neq 0\} \simeq U = \{y \in X : f(y) \neq 0\}.$$

Como  $P$  é finitamente gerado, existem  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset P$  tais que o conjunto  $\mathcal{B}_y = \{v_1 \otimes (1 + \mathfrak{m}_y), \dots, v_k \otimes (1 + \mathfrak{m}_y)\}$  é uma  $\mathbb{R}$ -base de  $P \otimes_{C(X)} (C(X)/\mathfrak{m}_y)$  para todo  $y \in U$ . Com isso, definimos seções  $s_i : U \rightarrow E$ ,  $1 \leq i \leq k$ , por

$$s_i(y) = v_i \otimes (f + \mathfrak{m}_y).$$

Uma vez que, para todo  $y \in U$  tem-se  $f(y) \neq 0$ , as seções  $\{s_1, \dots, s_k\}$  formam um referencial de  $U$  em  $E|U$ . A Proposição 1.19, então, fornece  $E|U \simeq U \times (P \otimes_{C(X)} \mathbb{R})$ . Finalmente, a construção de  $E$  evidencia que  $\Gamma(X, E) \simeq P$ . ■

Na demonstração deste teorema, foi de vital importância tomarmos o elemento  $f \in C(X) - \mathfrak{m}_x$  fornecido pelo Teorema 1.14, pois esta é a garantia de que, variando-se  $y$  convenientemente, o conjunto  $\mathcal{B}_y$  é uma base.

Se  $X$  é um espaço topológico compacto, o Teorema de Swan provê uma equivalência categórica entre a categoria dos fibrados vetoriais de dimensão finita, sobre  $X$ , e a categoria dos  $C(X)$ -módulos projetivos finitamente gerados. Por meio desta equivalência, é possível obter novos fibrados vetoriais por meio de construções puramente algébricas sobre módulos projetivos finitamente gerados.

## 1.2.1 Corte e Costura com Fibrados Vetoriais

Neste ponto, o leitor deve achar no mínimo estranho o título deste tópico. Entretanto, o que faremos com fibrados vetoriais muito se assemelhará ao processo de cortar e costurar partes de diferentes tecidos para se confeccionar uma peça de roupa de particulares características.

As construções algébricas sobre módulos nos dirão como cortar e costurar, e o Teorema de Swan nos dará a existência (a menos de isomorfismo) de um fibrado vetorial nas características desejadas.

No que segue,  $X$  será um espaço compacto e todos os fibrados em questão serão reais e de dimensão finita.

**Produto Tensorial:** Sejam  $\xi : E \rightarrow X$  e  $\zeta : F \rightarrow X$  dois fibrados vetoriais. Então  $P = \Gamma(X, E)$  e  $Q = \Gamma(X, F)$  são módulos projetivos finitamente gerados. Pelo Teorema de Swan, existe um único fibrado vetorial  $W$  (a menos de isomorfismo) tal que  $P \otimes Q = \Gamma(X, W)$ . Pela construção de  $W$ , não é difícil ver que  $W_x = E_x \otimes F_x$ , de modo que denotamos  $W$  por  $E \otimes F$ .

**Fibrado de Homomorfismos:** Sejam  $\xi : E \rightarrow X$  e  $\zeta : F \rightarrow X$  dois fibrados vetoriais. Então  $P = \Gamma(X, E)$  e  $Q = \Gamma(X, F)$  são módulos projetivos finitamente gerados. Pelo Teorema de Swan, existe um único fibrado vetorial  $W$  (a menos de isomorfismo) tal que  $\text{Hom}_{C(X)}(P, Q) = \Gamma(X, W)$ . Pela construção de  $W$ , não é difícil ver que  $W_x = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x, F_x)$ , de modo que denotamos  $W$  por  $\text{Hom}(E, F)$ .

**Fibrado Dual:** Seja  $\xi : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial. Então  $P = \Gamma(X, E)$  é um módulo projetivo. Pelo Teorema de Swan, existe um único fibrado vetorial  $W$  (a menos de isomorfismo) tal que  $P^* = \Gamma(X, W)$ . Por construção,  $W_x = E_x^*$ , de modo que denotamos  $W$  por  $E^*$ .

**Fibrado Produto Exterior:** Sejam  $\xi : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial e  $P = \Gamma(X, E)$  seu módulo de seções. Formamos a *álgebra tensorial*

$$T(P) = C(X) \oplus P \oplus P^{\otimes 2} \oplus P^{\otimes 3} \oplus \dots,$$

onde  $P^{\otimes n} = P \otimes_{C(X)} \dots \otimes_{C(X)} P$  é o produto tensorial de  $n$  parcelas de  $P$ . Tal álgebra é um módulo projetivo, mas não finitamente gerado. Tomemos agora o ideal bilateral  $I$  desta álgebra, gerado pelos elementos da forma  $x \otimes y + y \otimes x$  com  $x, y \in P$ . O quociente

$$\Lambda P = T(P)/I$$

é um módulo projetivo finitamente gerado. Como álgebra  $\Lambda P$  possui uma gradação, então

$$\Lambda P = \Lambda^0 P \oplus \dots \oplus \Lambda^n P,$$

onde  $n$  é o posto de  $P$ . Desta maneira, o posto de  $\Lambda P$  não excede  $2^n$ . Pelo teorema de Swan, existe um fibrado vetorial, que denotaremos por  $\Lambda E$ , tal que

$\Lambda P = \Gamma(X, \Lambda E)$  e  $\Lambda^k P = \Gamma(X, \Lambda^k E)$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Por construção, para cada  $x \in X$  temos  $(\Lambda E)_x = \Lambda E_x$ . Assim, a fibra de  $\Lambda E$  em  $x$  é a álgebra exterior de  $E_x$ . Isto mostra que  $\dim(\Lambda^n E) = 1$ , de modo que este fibrado é um fibrado de linhas. Tal fibrado é usualmente chamado de *fibrado determinante*, dado que determinantes de matrizes de mudança de base estão envolvidos em sua construção.

**Construção Funtorial Geral** Para uma construção geral, sejam  $\mathcal{V}$  a categoria que consiste de todos os espaços vetoriais reais de dimensão finita e todos os isomorfismos entre tais espaços,

$$T : \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

um functor contínuo de  $k$  variáveis e  $E^1, \dots, E^k$  fibrados vetoriais sobre  $X$ . A continuidade de  $T$  juntamente com o Teorema de Swan provêm a existência de um fibrado vetorial  $E$  tal que

$$E_x = T(E_x^1, \dots, E_x^k)$$

para todo  $x \in X$ .

As construções que fizemos acima, na verdade não dependem da equivalência categórica dada pelo Teorema de Swan; este é um artefato algébrico que nos dá os resultados esperados. De fato, se lançarmos mão das chamadas *trivializações locais*, podemos fazer construções similares às acima para fibrados vetoriais sobre uma base não compacta. Como estamos buscando uma formulação algébrica, isso não vem ao caso em nosso estudo. Para mais informações, vide [33, 62].

## 1.3 Operadores Diferenciais

Introduziremos, a princípio, algumas definições e resultados da geometria algébrica “à la Grothendieck” [24], e então, mediante o Teorema de Swan, mostraremos a equivalência de tal abordagem, com o tratamento clássico de operadores diferenciais lineares sobre fibrados vetoriais [51, 52]. Isto justificará a preferência que fizemos por uma abordagem algébrica. Tal abordagem será fundamental no estudo de operadores diferenciais lineares sobre álgebras de Clifford.

### 1.3.1 Cálculo Diferencial sobre Anéis Comutativos

Sejam  $K$  um anel comutativo com identidade, e  $R$  uma  $K$ -álgebra comutativa com identidade. Se  $1_R \in R$  representa a identidade de  $R$ , construímos o homomorfismo  $\varphi : K \rightarrow R$  definido por  $\varphi(k) = k1_R$ . Desta forma, todo  $R$ -módulo é também um  $K$ -módulo, imaginando-se  $K \subset R$  por meio da identificação dada por  $\varphi$ .

Dado um par de  $R$ -módulos  $P$  e  $Q$  e um elemento  $a \in R$ , definimos os operadores de multiplicação à esquerda  $l_a$  e multiplicação à direita  $r_a$  por  $a$  como

$$l_a(\phi)(p) = a\phi(p) \quad \text{e} \quad r_a(\phi)(p) = \phi(ap)$$

para todo  $\phi \in \text{Hom}_K(P, Q)$ . Também definimos o operador  $\delta_a$  como a diferença entre os operadores  $r_a$  e  $l_a$ :  $\delta_a = r_a - l_a$ . Estas multiplicações à direita e à esquerda determinam uma estrutura de  $R$ -bimódulo sobre  $\text{Hom}_K(P, Q)$ .

Por uma questão de simplicidade, se  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ , definimos

$$\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n} = \delta_{a_0} \circ \delta_{a_1} \circ \dots \circ \delta_{a_n}.$$

**Definição 1.24.** Dizemos que  $\Delta \in \text{Hom}_K(P, Q)$  é um operador diferencial sobre  $R$  de ordem  $\leq n$  ( $n \geq 0$ ) agindo do  $R$ -módulo  $P$  para o  $R$ -módulo  $Q$ , se  $\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(\Delta) = 0$  para todo o conjunto de elementos  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ .

Equivalentemente, veja que  $\Delta$  é um operador diferencial de ordem  $\leq n$  de  $P$  em  $Q$  se e somente se para todo  $a \in R$ ,  $\delta_a(\Delta)$  é um operador diferencial de ordem  $\leq n - 1$ . Isto possibilita definir operadores diferenciais recursivamente.

Denotamos por  $\text{Dif}_n(P, Q)$  o conjunto de todos os operadores diferenciais de ordem  $\leq n$  de  $P$  em  $Q$ . Este conjunto possui uma estrutura natural de  $R$ -bimódulo dada pelas multiplicações à direita e à esquerda. Também se tem  $\text{Dif}_0(P, Q) = \text{Hom}_R(P, Q)$ .

Se  $P, Q$  e  $T$  são  $R$ -módulos,  $\Delta_1 \in \text{Dif}_m(P, Q)$  e  $\Delta_2 \in \text{Dif}_n(Q, T)$  são operadores diferenciais, a composição  $\Delta_2 \circ \Delta_1$  está definida, e para todo  $a \in R$  vale

$$\delta_a(\Delta_2 \circ \Delta_1) = \delta_a(\Delta_2) \circ \Delta_1 + \Delta_2 \circ \delta_a(\Delta_1).$$

Isto mostra que  $\Delta_2 \circ \Delta_1 \in \text{Dif}_{m+n}(P, T)$ .

### 1.3.2 Representação de Operadores Diferenciais e Derivações

Denotemos por  $\mathbf{Mod}(R)$  a categoria dos  $R$ -módulos. Dizemos que um funtor  $\mathcal{F} : \mathbf{Mod}(R) \times \mathbf{Mod}(R) \rightarrow \mathbf{Mod}(R)$  é representável se, para cada objeto  $P \in \mathbf{Mod}(R)$ , existe um objeto  $\mathcal{R}(P) \in \mathbf{Mod}(R)$ , tal que  $\mathcal{F}(P, Q) \simeq \text{Hom}_R(\mathcal{R}(P), Q)$ .

Este é exatamente nosso caso, pois temos o funtor

$$\text{Dif}_n : \mathbf{Mod}(R) \times \mathbf{Mod}(R) \rightarrow \mathbf{Mod}(R).$$

Nosso objetivo aqui será a construção dos módulos de jatos  $\mathcal{J}^n(P)$  que são os objetos que caracterizam a representação de  $\text{Dif}_n$ , i.e.,  $\text{Dif}_n(P, Q) \simeq \text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$  para todos os  $R$ -módulos  $P$  e  $Q$ . Para tal, consideremos o produto tensorial  $R \otimes_K P$  munido da estrutura de  $R$ -módulo dada por

$$b(a \otimes p) = (ba) \otimes p,$$

para todos os elementos  $a, b \in R$  e  $p \in P$ .

**Proposição 1.25.**  $\text{Hom}_K(P, Q)$  e  $\text{Hom}_R(R \otimes_K P, Q)$  são canonicamente isomorfos.

*Demonstração.* Se  $\varphi \in \text{Hom}_K(P, Q)$ , definimos a aplicação  $\varphi^\sharp \in \text{Hom}_R(R \otimes_K P, Q)$  por

$$\varphi^\sharp(a \otimes p) = a\varphi(p).$$

Por outro lado, se  $\psi \in \text{Hom}_R(R \otimes_K P, Q)$ , como  $a \otimes p = a(1 \otimes p)$  tem-se  $\psi(a \otimes p) = a\psi(1 \otimes p)$ . Desta forma, definimos  $\psi^\flat \in \text{Hom}_K(P, Q)$  por

$$\psi^\flat(p) = \psi(1 \otimes p).$$

Finalmente, veja que

$$(\varphi^\sharp)^\flat = \varphi \quad \text{e} \quad (\psi^\flat)^\sharp = \psi$$

para todos os  $\varphi \in \text{Hom}_K(P, Q)$  e os  $\psi \in \text{Hom}_R(R \otimes_K P, Q)$ . Isto conclui a demonstração.  $\blacksquare$

Dado um elemento  $b \in R$ , denotamos por  $\delta^b$  o  $R$ -endomorfismo de  $R \otimes_K P$  definido por

$$\delta^b(a \otimes p) = a \otimes bp - ba \otimes p.$$

Como antes, por uma questão de simplicidade, se  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ , definimos

$$\delta^{a_0, a_1, \dots, a_n} = \delta^{a_0} \circ \delta^{a_1} \circ \dots \circ \delta^{a_n}.$$

Denotemos por  $I^{n+1}(P)$  o sub-módulo de  $R \otimes_K P$  gerado por todos os elementos da forma  $\delta^{a_0, a_1, \dots, a_n}(a \otimes p)$ . Entretanto, por causa da estrutura de  $R$ -módulo de  $R \otimes_K P$ , temos

$$a \otimes p = a(1 \otimes p),$$

de modo que, como  $R$ -módulo,  $I^{n+1}(P)$  é de fato gerado pelos elementos da forma  $\delta^{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p)$ .

**Proposição 1.26.**  $\Delta \in \text{Dif}_n(P, Q)$  se e somente se  $\Delta^\sharp(I^{n+1}(P)) = 0$ .

*Demonstração.* Primeiramente, se  $a \in R$ , temos

$$\begin{aligned} \delta_a(\Delta)(p) &= \Delta(ap) - a\Delta(p) \\ &= \Delta^\sharp(a \otimes p - 1 \otimes ap) \\ &= \Delta^\sharp(\delta^a(1 \otimes p)). \end{aligned}$$

Indutivamente, se  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ , temos

$$\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(\Delta) = \Delta^\sharp(\delta^{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p)).$$

Como  $I^{n+1}(P)$  é gerado sobre  $R$  pelos elementos da forma  $\delta^{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p)$  com  $p \in P$ , e  $\Delta^\sharp$  é  $R$ -linear, temos  $\Delta^\sharp(I^{n+1}(P)) = 0$  se e somente se  $\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(\Delta)(p) = 0$  para todo  $p \in P$  e todos os  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ , i.e.,  $\Delta \in \text{Dif}_n(P, Q)$ .  $\blacksquare$

Denotamos por  $\mathcal{J}^n(P)$  o módulo quociente  $(R \otimes_K P)/I^{n+1}(P)$  e por  $j_n : P \rightarrow \mathcal{J}^n(P)$  a aplicação  $K$ -linear definida por  $j_n(p) = 1 \otimes p + I^{n+1}(P)$ . A estrutura de  $R$ -módulo de  $R \otimes_K P$  mostra que  $\mathcal{J}^n(P)$  é gerado (como  $R$ -módulo) pelos elementos  $j_n(p)$ , com  $p \in P$ .

**Teorema 1.27.**  $\text{Dif}_n(P, Q)$  é canonicamente isomorfo a  $\text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$ .

*Demonstração.* Considere a aplicação  $\Phi : \text{Dif}_n(P, Q) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$  dada por  $\Phi(\Delta)(a \otimes p + I^{n+1}(P)) = a\Delta(p)$ . Esta aplicação está bem definida, e na verdade é um homomorfismo de  $R$ -módulos. De fato, vale que  $a\Delta(p) = \Delta^\sharp(a \otimes p)$ , e a Proposição 1.26 nos fornece

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta)(a \otimes p + I^{n+1}(P)) &= \Delta^\sharp(a \otimes p + I^{n+1}(P)) \\ &= \Delta^\sharp(a \otimes p) \\ &= a\Delta^\sharp(1 \otimes p) \\ &= a\Delta(p). \end{aligned}$$

Além disso, veja que  $\Phi(\Delta) = 0$  se e somente se  $\Delta = 0$ , mostrando que  $\Phi$  é um monomorfismo. A fim de provarmos que  $\Phi$  é também um epimorfismo, seja  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$ . Definimos  $\Delta \in \text{Hom}_K(P, Q)$  como  $\Delta = h \circ j_n$ , e então vale

$$\begin{aligned} \Delta^\sharp(a \otimes p) &= a\Delta(p) = a(h \circ j_n)(p) \\ &= ah(1 \otimes p + I^{n+1}(P)) \\ &= h(a \otimes p + I^{n+1}(P)). \end{aligned}$$

Se  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$  temos

$$\begin{aligned} \delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(\Delta)(p) &= \Delta^\sharp(\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p)) \\ &= h(\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) + I^{n+1}(P)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $\delta_{a_0, a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) \in I^{n+1}(P)$ . Segue que  $\Delta \in \text{Dif}_n(P, Q)$  e que  $\Phi(\Delta) = h$ . Isto conclui a demonstração.  $\blacksquare$

Este teorema afirma que  $\text{Dif} : \mathbf{Mod}(R) \times \mathbf{Mod}(R) \rightarrow \mathbf{Mod}(R)$  é representável na categoria dos  $R$ -módulos. Além disso, veja que  $j_n : P \rightarrow \mathcal{J}^n(P)$  é um operador diferencial de ordem  $\leq n$  que é universal no sentido do corolário seguinte.

**Corolário 1.28.**  $\Delta \in \text{Dif}_n(P, Q)$  se, e somente se, existe  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$  tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow j_n & \nearrow h \\ & \mathcal{J}^n(P) & \end{array}$$

Isto mostra que a todo operador diferencial  $\Delta \in \text{Dif}_n(P, Q)$  corresponde um homomorfismo  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{J}^n(P), Q)$  tal que  $\Delta = h \circ j_n$ . Alguns autores chamam  $j_n$  de *operador diferencial universal* de ordem  $\leq n$  (para maiores detalhes ver [52]).

Vamos agora nos restringir a uma situação especial, onde veremos uma importante consequência do Teorema 1.27. Por simplicidade, denotemos  $\mathcal{J}^n(R)$  por  $\mathcal{J}^n$  e  $\text{Dif}_n(R, Q)$  por  $\text{Dif}_n(Q)$ . Definimos o  $R$ -epimorfismo  $\Pi : \text{Dif}_n(Q) \rightarrow Q$  como  $\Pi(\Delta) = \Delta(1)$ . Temos então a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\Pi) \longrightarrow \text{Dif}_1(Q) \xrightarrow{\Pi} Q \longrightarrow 0.$$

Se  $\Delta \in \text{Ker}(\Pi)$ , então  $\Delta(1) = 0$ . Logo, dados  $a, b \in R$ , uma vez que  $\Delta \in \text{Dif}_1(Q)$ , vale

$$\delta_{a,b}(\Delta)(1) = 0,$$

de onde se conclui que  $\Delta(ab) = \Delta(a)b + a\Delta(b)$ . Nesse caso,  $\Delta$  satisfaz a regra de Leibnitz.

**Definição 1.29.** Dizemos que  $\Delta \in \text{Hom}_K(R, Q)$  é uma *derivação de  $R$  a valores em  $Q$*  se para todos os  $a, b \in R$  vale a regra de Leibnitz

$$\Delta(ab) = \Delta(a)b + a\Delta(b).$$

Denotamos por  $\text{Der}_K(R, Q)$  o  $R$ -módulo de todas as derivações de  $R$  em  $Q$ . Se  $\Delta \in \text{Ker}(\Pi)$ , então  $\Delta \in \text{Der}_K(R, Q)$ . Por outro lado, se  $\Delta \in \text{Der}_K(R, Q)$  então

$$\Delta(1) = \Delta(1 \cdot 1) = \Delta(1) + \Delta(1),$$

de modo que  $\Delta(1) = 0$  e  $\Delta \in \text{Ker}(\Pi)$ . Segue disso que  $\text{Ker}(\Pi) = \text{Der}_K(R, Q)$ . Assim, temos a nova seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Der}_K(R, Q) \longrightarrow \text{Dif}_1(Q) \xrightarrow{\Pi} Q \longrightarrow 0.$$

Note agora que o  $R$ -epimorfismo  $\chi : \text{Dif}_1(Q) \rightarrow \text{Der}_K(R, Q)$  definido por  $\chi(\Delta) = \Delta - \Delta(1)$  produz uma cisão nessa seqüência exata, de forma que

$$\text{Dif}(Q) \simeq \text{Der}_K(R, Q) \oplus Q.$$

Definimos o  $R$ -monomorfismo  $i : R \rightarrow \mathcal{J}^1$  por  $i(a) = aj_1(1)$ , e denotamos por  $\Omega_K(R)$  ao quociente  $\mathcal{J}^1/\text{Im}(i)$ . Se  $\pi : \mathcal{J}^1 \rightarrow \Omega_K(R)$  é a projeção canônica, temos a aplicação  $d : R \rightarrow \Omega_K(R)$  definida como  $d = \pi \circ j_1$ . Não é difícil ver que  $d$  é uma derivação de  $R$  a valores no  $R$ -módulo  $\Omega_K(R)$ .

**Proposição 1.30.**  $\text{Der}_K(R, Q)$  é canonicamente isomorfo a  $\text{Hom}_R(\Omega_K(R), Q)$ .

*Demonstração.* Dado  $\Delta \in \text{Der}_K(R, Q)$ , o Teorema 1.27 fornece um único homomorfismo  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{I}^1, Q)$  tal que  $\Delta = h \circ j_1$ . Como  $\Delta(1) = 0$ , tem-se  $h(j_1(1)) = 0$ . Conseqüentemente,  $h(\text{Im}(i)) = 0$ . Segue que  $\Delta$  determina o elemento  $\tilde{h} \in \text{Hom}_R(\Omega_K(R), Q)$  dado por  $\tilde{h} = h \circ \pi$ . Reciprocamente, se  $\tilde{h} \in \text{Hom}_R(\Omega_K(R), Q)$  definimos a derivação  $\Delta = \tilde{h} \circ d$ . Isto completa a demonstração. ■

Como uma conseqüência natural desta proposição, o conjunto das derivações é representável na categoria das  $K$ -álgebras comutativas e satisfaz a propriedade universal dada pelo resultado seguinte:

**Corolário 1.31.**  $\Delta \in \text{Der}_K(R, Q)$  se, e somente se, existe  $\tilde{h} \in \text{Hom}_R(\Omega_K(R), Q)$  tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow d & \nearrow \tilde{h} \\ & \Omega_K(R) & \end{array}$$

Isto mostra que toda derivação  $\Delta \in \text{Der}_K(R, Q)$  se fatora através de  $d$  por meio de um homomorfismo  $\tilde{h} \in \text{Hom}_R(\Omega_K(R), Q)$ , i.e.,  $\Delta = \tilde{h} \circ d$ . Neste sentido, podemos dizer que o par  $(\Omega_K(R), d)$  é universal.

Uma vez que, como  $R$ -módulo,  $\mathcal{I}^1$  é gerado pelos elementos da forma  $j_1(a)$ , o  $R$ -módulo  $\Omega_K(R)$  é gerado pelos elementos da forma  $da$ .  $\Omega_K(R)$  possui importantes propriedades functoriais, e é chamado *módulo dos diferenciais de Kähler*. Para maiores detalhes, vide o Capítulo 10 de [46].

Este processo de construção pode ser naturalmente estendido. Para isso, denotemos por  $R^{\otimes n} = R \otimes_K \cdots \otimes_K R$  o produto tensorial, sobre  $K$ , de  $n$  cópias de  $R$  (convencionamos que  $R^{\otimes 0} = K$  e  $R^{\otimes 1} = R$ ), e por  $\mathcal{S}_n$  o grupo das permutações de  $n$ -elementos.

**Definição 1.32.** Sejam  $Q$  um  $R$ -módulo e  $\Delta \in \text{Hom}_K(R^{\otimes n}, Q)$ . Dizemos que  $\Delta$  é uma  $n$ -*derivação anti-simétrica* de  $R$  a valores em  $Q$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\Delta(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(2)}) = (-1)^\sigma \Delta(a_1, \dots, a_n)$  para todos os  $a_1, \dots, a_n \in R$  e  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , onde  $(-1)^\sigma$  é o sinal da permutação  $\sigma$ .
2. Para toda família finita de elementos  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in R$  e para todo inteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , a aplicação  $b \mapsto \Delta(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n)$  é uma derivação de  $R$  a valores em  $Q$ .

O conjunto das  $n$ -derivações anti-simétricas possui uma natural estrutura de  $R$ -módulo, denotada por  $D_n(Q)$ . Com isso,  $D_0(Q) = Q$  e  $D_1(Q) = \text{Der}_K(R, Q)$ .

Seja agora  $P$  um  $R$ -módulo e

$$T(P) = R \oplus P \oplus P^{\otimes 2} \oplus \cdots,$$

a álgebra tensorial de  $P$ , onde  $P^{\otimes n} = P \otimes_R \cdots \otimes_R P$  é o produto tensorial, sobre  $R$ , de  $n$  cópias de  $P$  (novamente, para efeito de notação, colocamos  $P^{\otimes 0} = R$  e  $P^{\otimes 1} = P$ ). O produto em  $T(P)$  é o produto tensorial. Definimos por  $A(P)$  o ideal bilateral de  $T(P)$  gerado por todos os elementos da forma  $p \otimes p$  com  $p \in P$ .

**Definição 1.33.** Seja  $P$  um  $R$ -módulo. A álgebra exterior  $\Lambda P$  de  $P$  é definida como o quociente  $\Lambda P = T(P)/A(P)$ .

Se denotamos a classe de equivalência  $p \otimes q + A(P)$  por  $p \wedge q$ , temos  $p \wedge q - q \wedge p = (p + q) \otimes (p + q) + A(P) = A(P)$ , e conseqüentemente tem-se

$$p \wedge q = -q \wedge p.$$

Desta maneira, um elemento  $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \in \Lambda P$  satisfaz

$$p_{\sigma(1)} \wedge p_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge p_{\sigma(n)} = (-1)^\sigma p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

para todos os elementos  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$ .

A graduação de  $T(P)$  produz uma graduação em  $\Lambda P$ , por meio da projeção dos fatores  $P^{\otimes n}$  em  $\Lambda P$ , de onde se tem

$$\Lambda P = \Lambda^0 P \oplus \Lambda^1 P \oplus \Lambda^2 P \oplus \cdots,$$

com  $\Lambda^0(P) = R + J(P)$  e  $\Lambda^n(P) = P^{\otimes n} + J(P)$ . Assim,  $\Lambda^n(P)$  é gerado, como  $R$ -módulo, pelos elementos da forma  $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$  com  $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ .

Por simplicidade, denotemos por  $\Omega$  o módulo  $\Omega_R(R)$ .

**Proposição 1.34.**  $D_n(Q)$  é canonicamente isomorfo a  $\text{Hom}_R(\Lambda^n \Omega, Q)$ .

*Demonstração.*  $\Lambda^n \Omega$  é gerado, como  $R$ -módulo, pelos elementos da forma  $da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$ , com  $a_1, \dots, a_n \in R$ . Além disso, o operador  $d : R \rightarrow \Omega$  é uma derivação. Desta forma, definindo

$$\varphi(bda_1 \wedge \cdots \wedge da_n) = b\Delta(a_1, \dots, a_n),$$

verifica-se que, se  $\Delta \in D_n(Q)$ , então  $\varphi \in \text{Hom}_R(\Lambda^n P, Q)$  e reciprocamente. ■

Na situação especial de  $\Omega$  ser projetivo e finitamente gerado, pode-se provar um resultado um pouco mais geral a respeito da estrutura de  $D_n$ .

**Corolário 1.35.** Se  $\Omega$  é projetivo e finitamente gerado, então  $D_n(Q) \simeq Q \otimes_R D_n(R)$ .

*Demonstração.* Pela proposição anterior, tem-se  $D_n(Q) \simeq \text{Hom}_R(\Lambda^n \Omega, Q)$ . Desta forma, como  $\Omega$  é projetivo e finitamente gerado, vale

$$D_n(Q) \simeq \text{Hom}_R(\Lambda^n \Omega, Q) \simeq Q \otimes_R \text{Hom}_R(\Lambda^n \Omega, R) \simeq Q \otimes_R D_n(R).$$

Isto conclui a demonstração. █

Finalizando, definimos indutivamente os operadores diferenciais de primeira ordem  $d : \Lambda^n \Omega \rightarrow \Lambda^{n+1} \Omega$ . Para  $n = 0$ , tome como  $d$  meramente o operador  $d : R \rightarrow \Omega$  introduzido anteriormente. Se  $n = 1$ , definimos  $d(bda) = db \wedge da$ . Para  $n > 1$  e qualquer elemento decomponível  $\omega \wedge \theta \in \Lambda^n \Omega$ , definimos

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^\omega \omega \wedge d\theta,$$

onde o sobrescrito em  $(-1)^\omega$  significa o grau de  $\omega$ , i.e., o inteiro  $n$  para o qual  $\omega \in \Lambda^n \Omega$ .

Os operadores  $d : \Lambda^n \Omega \rightarrow \Lambda^{n+1} \Omega$  estão bem definidos e satisfazem a relação  $d^2 = d \circ d = 0$ . Isto nos fornece o resultado seguinte.

**Proposição 1.36.** *A seqüência*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d} \Lambda^1 \Omega \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n \Omega \xrightarrow{d} \dots$$

é um complexo, i.e.,  $d^2 = d \circ d = 0$ .

Este complexo é chamado *complexo de De Rham* de  $R$ , e é fundamental na definição e no estudo das lagrangeanas.

### 1.3.3 Símbolos e a Primeira Identidade Fundamental

Nosso objetivo aqui será a caracterização dos módulos  $\text{Smb}_n(P, Q)$  dos símbolos. Isto possibilitará provar a primeira identidade fundamental dos jatos, bem como uma relação entre os símbolos e os diferenciais de Kähler.

Se  $P$  e  $Q$  são  $R$ -módulos, a Definição 1.24 implica que  $\text{Dif}_m(P, Q) \subset \text{Dif}_n(P, Q)$  se  $m \leq n$ . Desta maneira, temos uma filtração crescente, que nos permite definir o módulo filtrado

$$\text{Dif}(P, Q) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Dif}_n(P, Q).$$

O módulo graduado

$$\text{Smb}(P, Q) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Dif}_n(P, Q)}{\text{Dif}_{n-1}(P, Q)}$$

associado a esta filtração, é chamado *módulo dos símbolos*. Denotamos por  $\text{Smb}_n(P, Q)$  ao fator  $\text{Dif}_n(P, Q)/\text{Dif}_{n-1}(P, Q)$ .

Se  $m \leq n$ , então  $I^{m+1}(P) \subset I^{n+1}(P)$ , de modo que  $v_{n,m} : \mathcal{J}^n(P) \rightarrow \mathcal{J}^m(P)$  dada por

$$v_{n,m}(a \otimes p + I^{n+1}(P)) = a \otimes p + I^{m+1}(P)$$

está bem definida, e é um epimorfismo de  $R$ -módulos. Quando  $m = n - 1$ , temos

$$\begin{aligned}\text{Ker}(v_{n,n-1}) &= \{a \otimes p + I^{n+1}(P) : a \otimes p \in I^n(P)\} \\ &\simeq I^n(P)/I^{n+1}(P).\end{aligned}$$

Isto fornece a seqüência exata de  $R$ -módulos

$$0 \longrightarrow I^n(P)/I^{n+1}(P) \longrightarrow \mathcal{J}^n(P) \xrightarrow{v_{n,n-1}} \mathcal{J}^{n-1}(P) \longrightarrow 0.$$

Seja agora  $P$  um  $R$ -módulo e  $T(P)$  a álgebra tensorial de  $P$ . Definimos por  $J(P)$  o ideal bilateral de  $T(P)$  gerado por todos os elementos da forma  $p \otimes q - q \otimes p$ , com  $p, q \in P$ .

**Definição 1.37.** Seja  $P$  um  $R$ -módulo. A álgebra simétrica  $S(P)$  de  $P$  é definida como o quociente  $S(P) = T(P)/J(P)$ .

Se denotarmos a classe de equivalência do elemento  $p \otimes q$  simplesmente pela justaposição  $pq$ , como  $p \otimes q - q \otimes p \in J(P)$ , tem-se

$$pq = qp.$$

Desta maneira, um elemento  $p_1 p_2 \cdots p_n \in S(P)$  satisfaz

$$p_{\sigma(1)} p_{\sigma(2)} \cdots p_{\sigma(n)} = p_1 p_2 \cdots p_n$$

para todos os elementos  $\sigma$  do grupo de permutações de  $n$ -elementos  $\mathcal{S}_n$ .

A graduação de  $T(P)$  produz uma graduação em  $S(P)$ , por meio da projeção dos fatores  $P^{\otimes n}$  em  $S(P)$ , de onde se tem

$$S(P) = S^0(P) \oplus S^1(P) \oplus S^2(P) \oplus \cdots,$$

com  $S^0(P) = R + J(P)$  e  $S^n(P) = P^{\otimes n} + J(P)$ . Assim,  $S^n(P)$  é gerado, como  $R$ -módulo, pelos elementos da forma  $p_1 p_2 \cdots p_n$  com  $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ .

Denotamos por  $P^*$  o módulo dual de  $P$ , formado por todos os  $R$ -homomorfismos de  $P$  a valores em  $R$ .

Consideremos o caso  $P = \Omega_K(R)$  e, por simplicidade, denotemos  $\Omega_K(R)$  por  $\Omega$ .  $S^n(\Omega)$  é gerado, sobre  $R$ , pelos elementos da forma

$$da_1 da_2 \cdots da_n,$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ . Como para todos os  $a, b \in R$  vale a relação  $\delta^a \circ \delta^b = \delta^b \circ \delta^a$ , a função  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \delta^{a_1, \dots, a_n}$  é simétrica, i.e., para todo  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  tem-se

$$\delta^{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)} = \delta^{a_1, \dots, a_n}.$$

Com isso, podemos demonstrar a primeira identidade fundamental dos espaços de jatos.

**Teorema 1.38 (Primeira Identidade Fundamental).**  $S^n(\Omega) \otimes_R P$  é canonicamente isomorfo a  $I^n(P)/I^{n+1}(P)$ .

*Demonstração.* Definimos o  $R$ -homomorfismo  $\Theta : S^n(\Omega) \otimes_R P \rightarrow I^n(P)/I^{n+1}(P)$  por

$$\Theta(da_1 \cdots da_n \otimes p) = \delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) + I^{n+1}(P).$$

Como a seqüência

$$0 \longrightarrow I^n(P)/I^{n+1}(P) \longrightarrow \mathcal{J}^n(P) \xrightarrow{v_{n,n-1}} \mathcal{J}^{n-1}(P) \longrightarrow 0$$

é exata, temos

$$\begin{aligned} v_{n,n-1} \circ \Theta(da_1 \cdots da_n \otimes p) &= v_{n,n-1}(\delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) + I^{n+1}(P)) \\ &= \delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) + I^n(P) \\ &= I^n(P). \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\Theta$  está bem definida e, uma vez que  $I^n(P)$  é gerado como  $R$ -módulo pelos elementos da forma  $\delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p)$ , segue que  $\Theta$  é um epimorfismo.

Por outro lado, definamos o  $R$ -homomorfismo  $\Psi : I^n(P)/I^{n+1}(P) \rightarrow S^n(\Omega) \otimes_R P$  por

$$\Psi(\delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p) + I^{n+1}(P)) = da_1 \cdots da_n \otimes p.$$

Se  $\delta^{a_1, \dots, a_n, b}(1 \otimes p) \in I^{n+1}(P)$ , então

$$\delta^{a_1, \dots, a_n, b}(1 \otimes p) = \delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes bp) - b\delta^{a_1, \dots, a_n}(1 \otimes p).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \Psi(\delta^{a_1, \dots, a_n, b}(1 \otimes p) + I^{n+1}(P)) &= da_1 \cdots da_n \otimes bp - bda_1 \cdots da_n \otimes p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\Psi$  está bem definida e, de fato, é um epimorfismo.

Uma vez que  $\Psi \circ \Theta = 1_{S^n(\Omega) \otimes_R P}$  e  $\Theta \circ \Psi = 1_{I^n(P)/I^{n+1}(P)}$ , a demonstração do teorema está concluída. ■

Levando em conta o isomorfismo dado por esse teorema, temos a seguinte seqüência exata de jatos:

$$0 \longrightarrow S^n(\Omega) \otimes P \longrightarrow \mathcal{J}^n(P) \xrightarrow{v_{n,n-1}} \mathcal{J}^{n-1}(P) \longrightarrow 0.$$

Para obtermos uma caracterização completa dos símbolos, precisaremos estabelecer alguns resultados a respeito das álgebras simétricas:

**Proposição 1.39.** *Se  $P$  é projetivo e finitamente gerado, então  $S^n(P)$  é projetivo e finitamente gerado.*

*Demonstração.* Se  $P$  é finitamente gerado, é claro que  $S^n(P)$  é finitamente gerado. Se  $P$  é projetivo, então existe um módulo projetivo  $Q$  tal que  $P \oplus Q$  é livre. Como  $S^n(P \oplus Q)$  é livre, a fórmula

$$S^n(P \oplus Q) \simeq \bigoplus_{i+j=n} S^i(P) \oplus S^j(Q)$$

mostra que  $S^n(P)$  é somando direto de um módulo livre e, portanto, projetivo.  $\blacksquare$

Finalmente, precisaremos relacionar  $(S^n(P))^*$  com  $S^n(P^*)$ . Para isso, adicionamos a hipótese de  $K$  ser de característica zero. De fato, definindo  $\theta : S^n(P^*) \rightarrow (S^n(P))^*$  como

$$\theta(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(a_1 \cdots a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varphi_1(a_{\sigma(1)}) \cdots \varphi_n(a_{\sigma(n)}),$$

fica claro que, para todo  $n$ ,  $n!$  deve ser invertível em  $K$ . A Proposição abaixo estabelece um pouco mais a respeito da estrutura de  $\theta$ .

**Proposição 1.40.** *Se  $P$  é projetivo e finitamente gerado, então  $\theta$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Se  $\theta(\varphi_1 \cdots \varphi_n) = 0$ , então  $\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n) = 0$  para todos os  $a_1, \dots, a_n \in R$ , de modo que algum dos  $\varphi_i$  é identicamente nulo. Sendo assim, tem-se  $\varphi_1 \cdots \varphi_n = 0$ . Segue disso que  $\theta$  é um monomorfismo.

A fim de mostrar que  $\theta$  é também um epimorfismo, note que, como  $P$  é projetivo e finitamente gerado, a Proposição 1.39 garante a existência de um módulo livre e finitamente gerado  $F$  e epimorfismos  $\xi : S^n(F^*) \rightarrow S^n(P^*)$  e  $\eta : S^n(F)^* \rightarrow (S^n(P))^*$  que levam as bases canônicas de  $S^n(F^*)$  e  $S^n(F)^*$  sobre os geradores de  $S^n(P^*)$  e  $(S^n(P))^*$ . Definimos o  $R$ -homomorfismo  $\tilde{\theta} : S^n(F^*) \rightarrow S^n(F)^*$  como

$$\tilde{\theta}(\tilde{\varphi}_1 \cdots \tilde{\varphi}_n)(a_1 \cdots a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \tilde{\varphi}_1(a_{\sigma(1)}) \cdots \tilde{\varphi}_n(a_{\sigma(n)}).$$

Como antes, não é difícil ver que  $\tilde{\theta}$  é um monomorfismo. Além disso, como  $\dim_R S^n(F^*) = \dim_R S^n(F)^*$ ,  $\tilde{\theta}$  é de fato um isomorfismo de  $R$ -módulos. Temos portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^n(F^*) & \xlongequal{\tilde{\theta}} & S^n(F)^* \\ \downarrow \xi^* & & \downarrow \eta^* \\ S^n(P^*) & \xrightarrow{\theta} & (S^n(P))^* \end{array}$$

que por construção é comutativo. Como  $\tilde{\theta}$  é um isomorfismo e  $\xi$  e  $\eta$  são epimorfismos segue que  $\theta$  é epimorfismo. Com isso se conclui que  $\theta$  é um isomorfismo.  $\blacksquare$

De posse desta proposição temos, finalmente, a identidade para os módulos dos símbolos.

**Corolário 1.41 (Identidade dos Símbolos).** *Se  $K$  é de característica zero e  $P$  e  $\Omega$  são  $R$ -módulos projetivos e finitamente gerados, existe um isomorfismo entre  $\text{Smb}_n(P, Q)$  e  $S^n(\Omega^*) \otimes_R \text{Hom}_R(P, Q)$ .*

*Demonstração.* O Teorema 1.38 nos fornece a seguinte seqüência exata:

$$0 \longrightarrow S^n(\Omega) \otimes P \longrightarrow \mathcal{J}^n(P) \xrightarrow{V_{n,n-1}} \mathcal{J}^{n-1}(P) \longrightarrow 0.$$

Dado um  $R$ -módulo  $Q$ , como  $\Omega$  e  $P$  são projetivos, a aplicação do funtor  $\text{Hom}_R(\cdot, Q)$  à seqüência acima produz a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Dif}_{n-1}(P, Q) \longrightarrow \text{Dif}_n(P, Q) \longrightarrow \text{Hom}_R(S^n(\Omega) \otimes P, Q) \longrightarrow 0.$$

Segue disso que  $\text{Smb}_n(P, Q) \simeq \text{Hom}_R(S^n(\Omega) \otimes P, Q)$ . Como  $\Omega$  é projetivo e finitamente gerado, temos  $S^n(\Omega)^* \simeq S^n(\Omega^*)$ . Portanto

$$\begin{aligned} \text{Smb}_n(P, Q) &\simeq \text{Hom}_R(S^n(\Omega) \otimes P, Q) \\ &\simeq S^n(\Omega)^* \otimes_R P^* \otimes_R Q \\ &\simeq S^n(\Omega)^* \otimes_R \text{Hom}_R(P, Q) \\ &\simeq S^n(\Omega^*) \otimes_R \text{Hom}_R(P, Q). \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

A colocação da hipótese de  $\Omega$  ser projetivo e finitamente gerado faz sentido, pois, se  $X$  é uma variedade, não há garantias de que  $\Omega_{\mathbb{R}}(C^\infty(X))$  seja finitamente gerado, a menos que  $X$  seja compacta. Este será o caso de interesse para nós.

### 1.3.4 Módulos Geométricos

É de se esperar que o formalismo algébrico que até aqui foi desenvolvido para os operadores diferenciais, possua uma natural realização geométrica. Tal realização se dá por meio da equivalência entre módulos e fibrados vetoriais.

Como foi feito na seção 1.2, pode-se construir uma equivalência entre fibrados vetoriais diferenciáveis sobre uma variedade  $X$  e a categoria de módulos projetivos sobre o anel  $C^\infty(X)$ , das funções diferenciáveis sobre esta variedade [61]. Nossa prova do teorema de Swan foi puramente algébrica; entretanto, a estrutura do anel de funções diferenciáveis sobre  $X$  é suficiente para se reproduzir uma prova para a situação diferenciável.

Quando  $X$  é uma variedade, o papel desempenhado pelo anel  $R$  passa agora a ser desempenhado pelo anel  $C^\infty(X)$ . Note que uma repetição direta dos argumentos da

subseção anterior para a construção dos módulos  $\mathcal{J}^k(P)$  e  $\Lambda^k\Omega$ , se deparara com dificuldades adicionais. Se tais módulos são vistos como objetos que representam os correspondentes funtores definidos nessa categoria ( $\text{Dif}_n$  e  $D_n$ ), eles conterão elementos que serão “redundantes” no seguinte sentido: apesar de não serem elementos nulos no módulo, eles se anulam em todos os pontos do espectro maximal, i.e., são os elementos  $p \in P$  tais que  $p + \mathfrak{m}P = 0$  para todos os ideais  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$ .

Para ver isso em mais detalhes, considere a seguinte situação: Sejam  $X$  uma variedade e  $R = C^\infty(X)$ . Se  $\xi : E \rightarrow M$  e  $\zeta : F \rightarrow M$  são dois fibrados vetoriais diferenciáveis, e  $P = \Gamma(E)$ ,  $Q = \Gamma(F)$ , os correspondentes  $R$ -módulos de seções, pode-se mostrar que  $\text{Dif}_n(P, Q)$  coincide com o módulo de operadores diferenciais de  $\xi$  para  $\zeta$  e o módulo  $D_1(R)$  coincide com o módulo de campos de vetores sobre a variedade  $X$  ([35, 52]).

Entretanto, se construímos os objetos representativos para os funtores  $\text{Dif}_n(P, \cdot)$  e  $D_n$  na categoria de todos os  $R$ -módulos, os módulos  $\mathcal{J}^n(P)$  e  $\Lambda^n\Omega$  não coincidirão com os equivalentes “geométricos” dos jatos e formas diferenciais. Por exemplo, no caso  $X = \mathbb{R}$  as funções  $\cos t$  e  $t$  são algebricamente independentes, mas a forma diferencial “algébrica”  $\omega = d(\cos t) + (\sin t)dt$  é um elemento não nulo de  $\Omega = \Omega_{\mathbb{R}}(C^\infty(X))$ , satisfazendo  $\omega + \mathfrak{m}_x\Omega = 0$  para todo  $x \in X$ .

Estas dificuldades podem ser superadas restringindo a categoria dos  $R$ -módulos a uma classe mais conveniente de objetos.

**Definição 1.42.** Um  $R$ -módulo  $P$  é dito *geométrico* se  $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)} \mathfrak{m}P = 0$ .<sup>2</sup>

Dado um  $R$ -módulo  $P$ , coloquemos

$$\mathcal{G}(P) = \frac{P}{\bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)} \mathfrak{m}P}.$$

Evidentemente  $\mathcal{G}(P)$  é um  $R$ -módulo geométrico, e a correspondência  $P \mapsto \mathcal{G}(P)$  dá origem a um funtor da categoria de todos os  $R$ -módulos para a categoria dos  $R$ -módulos geométricos.

Abaixo colocamos uma proposição que sumariza algumas propriedades imediatas do funtor  $\mathcal{G}$ .

**Proposição 1.43.** *Sejam  $R$  um anel,  $P$  um  $R$ -módulo e  $\Omega = \Omega_K(R)$ .*

1. *Os objetos representativos para os funtores  $\text{Dif}_n(P, \cdot)$  e  $D_n$  na categoria dos  $R$ -módulos geométricos, coincidem com  $\mathcal{G}(\mathcal{J}^n(P))$  e  $\mathcal{G}(\Lambda^n\Omega)$  respectivamente.*
2. *Se  $P = \Gamma(\xi)$  para um fibrado diferenciável  $\xi : E \rightarrow X$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{J}^n(P))$  coincide com o módulo  $\Gamma(\xi_n)$ , onde  $\xi_n : J^n(\xi) \rightarrow X$  é o fibrado dos jatos de ordem  $n$  sobre  $X$ .<sup>3</sup>*

<sup>2</sup>Em uma situação algébrica mais geral, usualmente se requer  $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} \mathfrak{p}P = 0$ , mas para nossos propósitos basta a Definição 1.42.

<sup>3</sup>Para a definição de fibrado de jatos veja [52]

*Demonstração.* Quanto à primeira afirmação, basta notar que, se  $Q$  é um módulo geométrico, então todos os elementos de  $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)} \mathfrak{m} \mathcal{J}^n(P)$  serão levados em zero por qualquer  $R$ -homomorfismo de  $\mathcal{J}^n(P)$  em  $Q$ . Dada a definição do operador  $d : R \rightarrow \Omega$  consequentemente ter-se-á o mesmo para os elementos de  $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)} \mathfrak{m} \Omega$ .

A segunda afirmação decorre diretamente da primeira. ▮

Uma análise da demonstração que fizemos para a identidade dos símbolos (Corolário 1.41) mostra que a validade deste resultado em uma variedade  $X$  é essencialmente devido ao fato de que o módulo dos diferenciais de Kähler nesta situação é projetivo e finitamente gerado. Enfatizamos, ainda, que a projetividade e a existência de um número finito de geradores desse módulo são determinados não somente pela álgebra  $R = C^\infty(X)$ , mas também pelo fato de estarmos trabalhando em uma categoria de módulos geométricos. Por esse motivo, resumimos na definição abaixo as imposições, sobre os tipos de estrutura algébrica, necessária para abarcar as situações acima descritas.

**Definição 1.44.** Por *situação diferenciável* entendemos o seguinte:

1. uma  $K$ -álgebra  $R$  para a qual o módulo dos diferenciais de Kähler  $\Omega_K(R)$  é projetivo e finitamente gerado.
2. uma  $K$ -álgebra  $R$  para a qual o módulo  $\mathcal{G}(\Omega_K(R))$  é projetivo e finitamente gerado,  $\text{char}(K) = 0^4$  e  $R$  é um  $R$ -módulo geométrico.

Veja que a situação diferenciável está relacionada diretamente com as propriedades da  $K$ -álgebra  $R$ . De fato, se  $R$  é um  $R$ -módulo geométrico, o radical de  $R$  é nulo e, portanto, todo  $R$ -módulo projetivo é geométrico.

---

<sup>4</sup>Aqui  $\text{char}(K)$  designa a característica do anel  $K$

## Capítulo 2

# Aplicações às Álgebras de Clifford

Tendo por base o Capítulo 1, estudamos nesse capítulo algumas propriedades dos operadores diferenciais sobre as álgebras de Clifford. Para tal, lançaremos mão de algumas propriedades das álgebras de Azumaya [5, 7] e da cohomologia de Hochschild [30, 54]. Com isso é possível mostrar que a álgebra de Clifford é rígida, e tirar conclusões a respeito das quantizações por deformação. Além disso, uma classificação parcial para os operadores diferenciais sobre a álgebra de Clifford é obtida, mostrando a relação deles com uma versão generalizada do operador de Dirac.

Estas considerações também apontam para uma maneira de se estudar a álgebra de Clifford do ponto de vista da Geometria não-Comutativa de Connes [13, 14].

### 2.1 A Estrutura das Álgebras de Clifford

Sejam  $R$  um anel comutativo com identidade  $1_R$ ,  $P$  um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado, e  $q : P \rightarrow R$  uma forma quadrática sobre  $P$  [5, 7]. Dizemos que o par  $(P, q)$  é um *módulo quadrático*.

Denotamos por  $T(P)$  a álgebra tensorial de  $P$ , i.e.,

$$T(P) = R \oplus P \oplus P^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus P^{\otimes n} \oplus \dots$$

Considere em  $T(P)$  o ideal bilateral  $J(q)$  gerado por todos os elementos da forma  $p \otimes p - q(p)$ , com  $p \in P$ .

**Definição 2.1.** A *álgebra de Clifford*  $\mathcal{C}(P, q)$  do módulo quadrático  $(P, q)$  é o quociente  $\mathcal{C}(P, q) = T(P)/J(q)$ .

As inclusões naturais  $R \hookrightarrow T(P)$  e  $P \hookrightarrow T(P)$  induzem injeções de  $R$  e  $P$  em  $\mathcal{C}(P, q)$  (para maiores detalhes vide [5, 7]). Tais injeções tornam possíveis as identificações

$$a \equiv a + J(q), \quad u \equiv u + J(q) \quad \forall a \in R, u \in M.$$

Se denotarmos  $uv = u \otimes v + J(q)$ , segue que  $u^2 = uu = q(u)$ . Esta relação caracteriza a propriedade universal de  $\mathcal{C}$ :

**Propriedade Universal de  $\mathcal{C}$ .** Sejam  $\mathcal{A}$  uma  $R$ -álgebra e  $\rho : P \rightarrow \mathcal{A}$  uma aplicação  $R$ -linear tal que  $(\rho(p))^2 = q(p)1_{\mathcal{A}}$ , para todo  $p \in P$ . Então existe um único homomorfismo  $\eta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\rho = \eta \circ \pi$ , onde  $\pi : P \rightarrow \mathcal{C}$  é a injeção canônica.

Este é um resultado bem conhecido da teoria das álgebras de Clifford, e sua demonstração pode ser encontrada em [5, 36].

O homomorfismo  $\alpha : P \rightarrow \mathcal{C}$ , definido por  $\alpha(u) = -u$ , satisfaz  $\alpha(u)^2 = q(u)1_{\mathcal{C}}$ . Portanto, pela propriedade universal de  $\mathcal{C}$ , ele se estende, de maneira única, a um automorfismo  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , chamado de *automorfismo canônico*, que é caracterizado pela identidade

$$\alpha(u_1 \cdots u_k) = (-u_1) \cdots (-u_k) = (-1)^k u_1 \cdots u_k.$$

Com isso,  $\alpha^2 = 1_{\mathcal{C}}$ , mostrando que  $\alpha$  é uma involução de  $\mathcal{C}$ . Este fato gera a decomposição de  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^1,$$

onde  $\mathcal{C}^0 = \text{Ker}(\alpha - \text{id}_{\mathcal{C}})$  e  $\mathcal{C}^1 = \text{Ker}(\alpha + \text{id}_{\mathcal{C}})$ . Tal decomposição mune  $\mathcal{C}$  de uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação, dada por

$$\mathcal{C}^i \mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^{i+r},$$

onde  $i, r \in \mathbb{Z}_2$ . Daqui para frente, toda vez que usarmos o termo “gradação” de  $\mathcal{C}$  estaremos nos referindo a esta estrutura de  $\mathbb{Z}_2$ -gradação.

A definição que demos para a álgebra de Clifford, corresponde à definição usual de fibrado de Clifford. De fato, se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana (ou semi-Riemanniana) consideramos o anel  $R = C^\infty(M)$ , o módulo  $P = \Gamma(M, TM)$ , onde  $TM$  é o fibrado tangente, e  $q(u) = g(u, u)$  para todo campo de vetores  $u \in \Gamma(M, TM)$ <sup>1</sup>. Podemos então construir a álgebra de Clifford  $\mathcal{C}(P, q)$  que, pelo Teorema de Swan 1.23, naturalmente se identifica com o fibrado de Clifford  $C(M)$  [56].

Além disso, no caso trivial, onde  $R = \mathbb{R}$ , e  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço vetorial munido de um produto interno, a construção para a álgebra de Clifford que propusemos, leva diretamente à definição da álgebra de Clifford real  $\mathcal{C}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  [57].

Nesse ponto, notamos que apenas a simplicidade e a functorialidade da definição que demos para álgebra de Clifford, já são suficientes para justificar seu uso. Assim, podemos estudar de uma só maneira tanto as álgebras de Clifford sobre corpos, quanto o fibrado de Clifford.

No que segue, vamos analisar um resultado que caracteriza a estrutura das álgebras de Clifford em termos da álgebra exterior. Para isso, precisaremos lançar mão dos módulos ortogonais e dos módulos hiperbólicos.

Um módulo quadrático  $(P, q)$  é dito ser um *módulo ortogonal* se a forma bilinear  $h_q : P \times P \rightarrow R$ , definida por

$$h_q(p_1, p_2) = q(p_1 + p_2) - q(p_1) - q(p_2),$$

<sup>1</sup>Aqui estamos usando a dualidade entre campos de vetores e seções do fibrado tangente.

onde  $p_1, p_2 \in P$ , é não-degenerada. Associamos a todo  $R$ -módulo  $P$ , o *módulo hiperbólico*

$$H(P) = (P \oplus P^*, q_P),$$

onde  $P^*$  é o dual algébrico de  $P$  e  $q_P(p, f) = f(p)$  para todos os  $p \in P$  e  $f \in P^*$ .

Dados então dois módulos quadráticos  $(P, q)$  e  $(P', q')$ , construímos o módulo

$$(P, q) \perp (P', q') = (P \oplus P', q \oplus q'),$$

onde  $q \oplus q'(p, p') = q(p) + q'(p')$ . De [5], encontramos que

$$\mathcal{C}((P, q) \perp (P', q')) \simeq \mathcal{C}(P, q) \otimes_R \mathcal{C}(P', q').$$

Quando  $(P, q)$  é um módulo ortogonal, por [7, 36], existe um isomorfismo  $(P, q) \perp (P, -q) \simeq H(P)$ . Desta forma, temos

$$\mathcal{C}(P, q) \otimes_R \mathcal{C}(P, -q) \simeq \mathcal{C}(H(P)).$$

Isso mostra que, se entendermos os módulos hiperbólicos, poderemos ter um entendimento de  $\mathcal{C}(P, q)$ . Essa é a razão para os considerarmos aqui.

É possível então, para todo  $R$ -módulo  $P$ , construir um homomorfismo

$$\Psi_P : \mathcal{C}(H(P)) \rightarrow \text{End}_R(\Lambda P).$$

Tal homomorfismo desempenha papel primordial no estudo das álgebras de Clifford, pois nos leva ao seguinte teorema de estrutura:

**Teorema de Estrutura.** Se  $P$  é um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado, então  $\Psi_P$  é um isomorfismo.

A demonstração desse fato pode ser encontrada em diversos textos [5, 7, 36]. Entretanto, queremos aqui entender mais a respeito da construção de  $\Psi_P$ . Para isso, sejam  $x \in P$  e  $f \in P^*$ . Temos, então, dois homomorfismos de  $\Lambda(P)$ ,

$$l_x, d_f : \Lambda(P) \rightarrow \Lambda(P),$$

definidos como:  $l_x$  é a multiplicação à esquerda por  $x$ , dada por

$$l_x(y) = x \wedge y,$$

para todos os  $x \in P$  e  $y \in \Lambda(P)$ ;  $d_f$  é a única antiderivação prolongando  $f : P \rightarrow R$  [36].

Uma vez que  $l_x^2 = 0$  e  $d_f^2 = 0$ , tem-se, para todos os  $x \in P$  e  $y \in \Lambda(P)$ ,

$$d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y - x \wedge d_f(y) = f(x)y - x \wedge d_f(y).$$

Desta forma,  $d_f \circ l_x + l_x \circ d_f = f(x)1_{\Lambda(P)}$  e

$$(l_x + d_f)^2 = f(x)1_{\Lambda(P)} = q_P(x, f)1_{\Lambda(P)}.$$

Pela propriedade universal das álgebras de Clifford, a aplicação

$$\begin{aligned} P \otimes_R P^* &\longrightarrow \text{End}_R(\Lambda(P)) \\ (x, f) &\longmapsto l_x + d_f \end{aligned}$$

induz o homomorfismo  $\Psi_P$ , que procuramos.

Podemos ainda verificar a naturalidade desse isomorfismo, entretanto não faremos isso aqui. Para mais detalhes, vide [7].

O Teorema de Estrutura para as álgebras de Clifford estabelece um *isomorfismo entre álgebras*. Mas, se esquecermos a estrutura de produto da álgebra de Clifford, de [5, 36] temos:

**Teorema 2.2.** *Existe um isomorfismo de  $R$ -módulos entre  $\mathcal{C}(P, q)$  e  $\Lambda(P)$ .*

Assim, fica clara a distinção da estrutura de  $R$ -álgebra, da estrutura de  $R$ -módulo de  $\mathcal{C}(P, q)$ .

## 2.2 Álgebras de Azumaya, Cohomologias de Hochschild, Derivações e Quantizações

Nesta seção vamos caracterizar a estrutura das derivações e obter um resultado a respeito de deformações das álgebras de Clifford, mostrando a trivialidade algébrica de alguns processos de quantização.

Um  $R$ -módulo  $P = P_0 \oplus P_1$  é dito ser um módulo  $\mathbb{Z}_2$ -graduado. Com base nisso, temos a definição:

**Definição 2.3.** Uma  $R$  álgebra  $A$  é dita ser uma *álgebra de Azumaya* se existe uma álgebra graduada  $B$  e um  $R$ -módulo  $\mathbb{Z}_2$ -graduado  $Q$ , projetivo e finitamente gerado, tal que

$$A \otimes_R B \simeq \text{End}_R(Q),$$

onde  $\text{End}_R$  denota o funtor dos endomorfismos referentes à  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $P$ .

Pelo que vimos na seção anterior, se  $(P, q)$  é um módulo quadrático, com  $P$  projetivo e finitamente gerado, temos

$$\mathcal{C}(P, q) \otimes_R \mathcal{C}(P, -q) \simeq \text{End}_R(\Lambda(P)),$$

mostrando que  $\mathcal{C}(P, q)$  é uma álgebra de Azumaya.

Esse fato desempenhará papel dos mais importantes no estudo das derivações de  $\mathcal{C}(P, q)$  e na classificação das deformações, no sentido de Gerstenhaber [22, 54]. Antes, entretanto, precisamos introduzir algumas noções elementares a respeito da cohomologia de Hochschild [30].

Sejam  $\mathcal{C}$  uma  $R$ -álgebra associativa, e  $F$  um  $\mathcal{C}$ -bimódulo.<sup>2</sup> Uma aplicação  $\Phi : \mathcal{C}^k \rightarrow F$  é dita  $R$ -multilinear se ela é  $R$ -linear em cada argumento. Denotamos por  $C_R^k(\mathcal{C}, F)$  o conjunto de todas as aplicações  $k$ -multilineares de  $\mathcal{C}$  em  $F$ . Para  $k = 0$ , definimos  $C_R^0(\mathcal{C}, F) = F$ . Se  $\Psi, \Phi \in C_R^k(\mathcal{C}, F)$  e  $a \in R$ , a aplicação  $\Psi + a\Phi$  é bem definida, e faz de  $C_R^k(\mathcal{C}, F)$  um  $R$ -módulo.

Vamos agora definir uma estrutura de complexo cocadeia sobre  $(C_R^k(\mathcal{C}, F))_{k=0}^\infty$ . Para isso, definimos os operadores  $d^k : C_R^k(\mathcal{C}, F) \rightarrow C_R^{k+1}(\mathcal{C}, F)$  como

$$d^0(u)(A) = [A, u] = Au - uA, \quad \forall u \in F, A \in \mathcal{C},$$

e, para  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} d^k(\Phi)(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}) &= A_1 \Phi(A_2, \dots, A_{k+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \Phi(A_1, \dots, A_i A_{i+1}, \dots, A_{k+1}) + (-1)^{k+1} \Phi(A_1, \dots, A_k) A_{k+1}. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos o *complexo de Hochschild* [30, 54]

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{d_0} C_R^1(\mathcal{C}, F) \xrightarrow{d_1} C_R^2(\mathcal{C}, F) \xrightarrow{d_2} \dots$$

A cohomologia deste complexo é chamada de *cohomologia de Hochschild de  $\mathcal{C}$  com valores em  $F$*  [54], e os grupos de cohomologia são denotados por  $H^k(\mathcal{C}, F)$ .

Para  $k = 0$ , os elementos dos  $R$ -módulo  $\text{Int}(\mathcal{C}, F) = d^0(F)$  são chamados de *derivações interiores* de  $\mathcal{C}$  em  $F$  e, para  $k = 1$ , temos

$$(d^1 \Phi)(A_1, A_2) = A_1 \Phi(A_2) - \Phi(A_1 A_2) + \Phi(A_1) A_2.$$

Assim, se  $\Phi \in C_R^1(\mathcal{C}, F)$  é fechada, segue que

$$\Phi(A_1 A_2) = \Phi(A_1) A_2 + A_1 \Phi(A_2),$$

mostrando que o  $R$ -módulo das cocadeias fechadas é, de fato, o  $R$ -módulo  $\text{Der}_R(\mathcal{C}, F)$  das  $R$ -derivações de  $\mathcal{C}$  em  $F$ .

Com isso, podemos tomar  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P, q)$  como a álgebra de Clifford de um módulo quadrático, e estabelecer um resultado que descreve a estrutura da cohomologia de Hochschild de  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 2.4.** *Sejam  $(P, q)$  é um módulo quadrático graduado, com  $P$  projetivo e finitamente gerado,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P, q)$  a álgebra de Clifford a ele associada, e  $F$  é um  $\mathcal{C}$ -bimódulo. Então toda  $R$ -derivação de  $\mathcal{C}$  em  $F$  é interior.*

<sup>2</sup>Um  $\mathcal{C}$ -bimódulo é um  $\mathcal{C}$ -módulo à direita e um  $\mathcal{C}$ -módulo à esquerda.

*Demonstração.* Como a álgebra de Clifford é uma álgebra de Azumaya, ela é separável e projetiva como  $R$ -módulo [5, 7]. Mas então, por [30, 54], temos  $H^k(\mathcal{C}, F) = 0$  para todo  $k \geq 0$ . Em particular,  $H^1(\mathcal{C}, F) = 0$ . Isso conclui o teorema. ■

Na demonstração deste teorema, pudemos ver que  $H^k(\mathcal{C}, F) = 0$  para todo  $k \geq 0$ . Uma vez que  $\mathcal{C}$  é naturalmente um  $\mathcal{C}$ -bimódulo, segue que  $H^2(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = 0$ . Mas, como a obstrução para a rigidez [22] é um elemento de  $H^2(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ , então  $\mathcal{C}$  é rígida, i.e., todas as deformações da multiplicação em  $\mathcal{C}$  são equivalentes.

A atual proliferação das teorias de quantização da álgebra de Clifford, por meio de deformações, tornou muito popular a possibilidade de se desenvolver um “cálculo quântico” em  $\mathcal{C}$ . Entretanto, pelo que pudemos ver, todas essas considerações são triviais do ponto de vista das deformações (no sentido de Gerstenhaber), i.e., todas as quantizações algébricas na álgebra de Clifford são equivalentes. Isto significa que a idéia de quantização por deformações precisa ser aprimorada. Uma sugestão de como isso pode ser feito, é por meio das álgebras  $C^*$  [14] e das quantizações por deformação via operadores diferenciais [27, 55].

## 2.3 Operadores Diferenciais sobre as Álgebras de Clifford

Como antes,  $K$  será um anel comutativo com identidade,  $R$  uma  $K$ -álgebra comutativa com identidade, e  $\Omega_K(R)$  o módulo dos diferenciais de Kähler. Assumimos aqui que  $\Omega_K(R)$  é projetivo e finitamente gerado.

Aqui vamos supor que o  $R$ -módulo  $\text{Der}_K(R)$  é munido de uma forma quadrática  $q : \text{Der}_K(R, R) \rightarrow R$ . Então, podemos construir a álgebra de Clifford

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\text{Der}_K(R, R), q).$$

A fim de estudar os operadores diferenciais sobre  $\mathcal{C}$ , precisamos supor que  $\text{Der}_K(R)$  é munido de uma *conexão compatível com a forma quadrática  $q$* , i.e.,

$$\nabla : \text{Der}_K(R) \rightarrow \text{End}_K(\text{Der}_K(R)),$$

onde  $u \rightarrow \nabla_u$ , satisfaz as condições seguintes:

1.  $\nabla_u(fv) = u(f)v + f\nabla_u(v)$
2.  $\nabla_u(J(q)) \subset J(q)$ ,

para todos os  $u, v \in \text{Der}_K(R)$  e  $f \in R$ . A segunda propriedade garante que a conexão  $\nabla$  passa ao quociente, permitindo-nos estender a ação de  $\nabla$  à álgebra de Clifford  $\mathcal{C}$ .<sup>3</sup> Com isso, obtemos a seguinte identidade:

$$\nabla_u(AB) = \nabla_u(A)B + A\nabla_u(B),$$

<sup>3</sup>Essas considerações naturalmente são válidas no caso diferenciável. Para ver isso, considere  $(M, g)$

onde  $A, B \in \mathcal{C}$  e  $u \in \text{Der}_K(R)$ .

**Teorema 2.5 (Classificação Parcial dos Operadores Diferenciais em  $\mathcal{C}$ ).** *Seja  $\Delta \in \text{Dif}_1(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ . Então, existem um operador diferencial  $\square \in \text{Dif}_1(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ , nulo sobre  $R$ ,  $A_1, \dots, A_k, B \in \mathcal{C}$  e  $u_1, \dots, u_k \in \text{Der}_k(R)$ , tais que*

$$\Delta = \sum_{i=1}^k A_i \otimes \nabla_{u_i} + \square + B.$$

*Demonstração.* Uma vez que  $R \subset \mathcal{C}$ , podemos considerar a restrição  $\Delta|_R$ . Então  $\Delta|_R$  se escreve como

$$\Delta|_R = D + \Delta(1),$$

onde  $D$  é uma  $K$ -derivação de  $R$  a valores em  $\mathcal{C}$ . Portanto, basta estudarmos a natureza da derivação  $D$ . Como  $\Omega_K(R)$  é projetivo e finitamente gerado, temos

$$\begin{aligned} \text{Der}_K(R, \mathcal{C}) &\simeq \text{Hom}_R(\Omega_K(R), \mathcal{C}) \\ &\simeq \mathcal{C} \otimes_R \text{Hom}_R(\Omega_K(R), R) \\ &\simeq \mathcal{C} \otimes_R \text{Der}_K(R). \end{aligned}$$

Desta forma, podemos considerar  $D$  como um elemento de  $\mathcal{C} \otimes_R \text{Der}_K(R)$ . Com isso, existem  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{C}$  e  $u_1, \dots, u_k \in \text{Der}_K(R)$  tais que

$$D = A_1 \otimes u_1 + \dots + A_k \otimes u_k.$$

Definindo

$$\nabla^D = A_1 \otimes \nabla_{u_1} + \dots + A_k \otimes \nabla_{u_k}$$

temos  $\nabla^D \in \text{Dif}_1(\mathcal{C}, \mathcal{C})$  e  $\nabla^D|_R = D$ . Colocando  $\square = \Delta - \nabla^D$ , obtemos  $\square|_R = 0$ ; então

$$\begin{aligned} \Delta &= \nabla^D + \square + \Delta(1) \\ &= A_1 \otimes \nabla_{u_1} + \dots + A_k \otimes \nabla_{u_k} + \square + \Delta(1). \end{aligned}$$

uma variedade Riemanniana (ou semi-Riemanniana), e  $R = C^\infty(M)$  seu anel de funções. Neste caso, os campos de vetores sobre  $M$  podem ser pensados como derivações de  $R$ . Assumamos ainda que  $M$  é munida de uma conexão  $\nabla$ , compatível com a forma quadrática  $q(u) = g(u, u)$ , i.e.,

$$\nabla : \text{Der}_{\mathbb{R}}(R) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\text{Der}_{\mathbb{R}}(R)),$$

onde  $u \rightarrow \nabla_u$ , satisfaz as condições seguintes:

1.  $\nabla_u(fv) = u(f)v + f\nabla_u(v)$
2.  $\nabla_u(J(q)) \subset J(q)$ ,

para todos os  $u, v \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(R)$  e  $f \in R$ . A segunda propriedade garante que a conexão  $\nabla$  passa ao quociente, permitindo-nos estender a ação de  $\nabla$  ao fibrado de Clifford  $C(M) = \mathcal{C}(\Gamma(M, TM), q)$  [15, 56].

Isso conclui o teorema. ■

Essa classificação é parcial, pois depende do operador  $\square$ . No caso de uma variedade diferenciável, pode-se mostrar que esse operador é um colchete ou a derivação definida pela extensão a  $\mathcal{C}$  de algum homomorfismo  $f : \text{Der}_K(R) \rightarrow R$ .

Um ponto importante nesse teorema é que o operador  $\nabla^D$  é uma generalização do operador de Dirac [56, 57, 66]. Portanto, todo operador diferencial sobre  $\mathcal{C}$  se escreve como soma de um operador de Dirac generalizado, um operador nulo sobre  $R$  e uma constante (operador de grau zero).

Este teorema pode ser generalizado para módulos de Clifford<sup>4</sup>, e suscita investigações a respeito do caráter do operador  $\square$ . Nessa linha, pode-se estudar estruturas espinoriais algébricas, bem como obter resultados algébricos para sua existência, com base em cohomologias de álgebras e representações.

Uma última consideração a respeito deste teorema vai na linha da Geometria não-Comutativa [14, 44]. Uma vez que as cohomologias de Hochschild são nulas, dado  $u \in \text{Der}_K(R, R)$ , a conexão  $\nabla_u$  determina um elemento  $F_u \in \mathcal{C}$  tal que

$$\nabla_u(x) = [F_u, x]$$

para todo elemento  $x \in \mathcal{C}$ . Comparando essa fórmula com a obtida por Connes [13], podemos vislumbrar um estudo das álgebras de Clifford por meio da Geometria não-Comutativa.

---

<sup>4</sup>S é um módulo de Clifford se ele é um  $\mathcal{C}$ -módulo.

## Capítulo 3

# Formalismo Hamiltoniano na Linguagem dos Operadores Diferenciais

Curiosamente, o formalismo Hamiltoniano clássico tem reaparecido como um componente essencial a algumas teorias matemáticas que, aparentemente, nada têm a ver com a mecânica. Há uns 30 anos surgiram as aplicações desse formalismo ao estudo das órbitas, na teoria de representações de grupos de Lie [37], e à teoria de solubilidade local de operadores diferenciais lineares [16]. Recentemente, as profíguas idéias matemáticas de quantização algébrica [8, 9, 19, 55], juntamente com as idéias da Geometria Não-comutativa [14, 27, 42], vêm promovendo importantes avanços no estudo de uma versão algébrica para o Teorema do Índice [48]. Também recentemente, uma versão do Teorema de Riemann-Roch foi obtida por meio de quantização por deformações [12]. Nessas teorias, tem-se interesse em que o formalismo Hamiltoniano desempenhe diferentes regras funcionais. Isto sugere que tal formalismo seja parte de um sistema matemático mais amplo. Para o caso linear<sup>1</sup>, acreditamos que este sistema seja a teoria de operadores diferenciais lineares, como a desenvolvemos no Capítulo 1. Esta idéia é reforçada por [67] e pelos avanços no entendimento da geometria diferencial por meio do complexo de Euler [38, 51]. Talvez isso explique, em parte, as inúmeras aplicações do formalismo Hamiltoniano e nos permita um entendimento mais profundo das possibilidades do método Hamiltoniano, bem como um vislumbre de novas aplicações.

O modesto objetivo do presente capítulo é traduzir os conceitos básicos do formalismo Hamiltoniano em uma linguagem algébrica natural, por meio do cálculo sobre anéis comutativos. Motivada por [44], esta tradução naturalmente permite uma generalização para uma teoria de schemas afins Hamiltonianos, e aponta para uma versão algébrica do teorema do índice [48].

---

<sup>1</sup>Entendemos por *caso linear* aquelas situações que gerem equações diferenciais lineares sobre fibrados vetoriais.

### 3.1 Espaços de Fase e Anéis Comutativos

O cenário para o estudo do formalismo Hamiltoniano, o espaço de fase, é o fibrado cotangente  $T^*M$  de alguma variedade  $M$  de estados (configurações) [41].

Do ponto de vista da geometria algébrica “à la Grothendieck” [24], pode-se estudar a variedade  $M$  estudando seu anel de funções  $C^\infty(M)$ . Por essa razão, o cálculo diferencial sobre anéis comutativos, em que se fundamenta nossa construção, se baseia na transição da variedade  $M$  para o anel  $R = C^\infty(M)$ .

Como antes,  $K$  será um anel comutativo com identidade,  $R$  uma  $K$ -álgebra comutativa com identidade e  $\Omega_K(R)$  o módulo dos diferenciais de Kähler.

Devemos então encontrar, em termos puramente algébricos, o equivalente a  $T^*(M)$ , quando trocamos  $C^\infty(M)$  pelo anel arbitrário  $R$ , i.e., devemos descobrir que “anel” corresponde a  $T^*(M)$ .

Para isso, vamos considerar o caso clássico, onde  $K = \mathbb{R}$  e  $R = C^\infty(M)$ . Nesse caso,  $\text{Smb}(R) = \text{Smb}(R, R)$  é a álgebra dos campos de tensores simétricos contravariantes sobre  $M$  [52, 67]. Cada um desses tensores pode ser identificado com uma função que é polinomial ao longo das fibras  $\pi^{-1}(x)$ , onde  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$  é a projeção natural do fibrado cotangente [52, 67]. Desta forma,  $\text{Spec}(\text{Smb}(R))$  é a complexificação do fibrado  $\pi$ , de modo que temos a identificação  $T^*(M) \subset \text{Spec}(\text{Smb}(R))$ .

De acordo com o que vimos no Capítulo 1, juntamente com [26, 39], cada elemento de  $\text{Smb}(R)$  pode ser pensado como uma aplicação sobre  $\text{Spec}(\text{Smb}(R))$ . Finalmente, da teoria das schemas afins [20, 24, 26], segue que os elementos de  $\text{Smb}(R)$  podem ser recuperados por meio de suas restrições ao subespaço  $T^*(M) \subset \text{Spec}(\text{Smb}(R))$ . Por isso, os pontos do complemento  $\text{Spec}(\text{Smb}(R)) \setminus T^*(M)$  são desnecessários, do ponto de vista da realização geométrica do anel  $\text{Smb}(R)$ , i.e., sua representação como o anel de funções de “algum espaço”.

Essa discussão mostra que  $T^*(M)$  pode ser considerado como o equivalente geométrico do anel  $\text{Smb}(R)$ .

Já que temos essa identificação, seguindo as idéias de [25], daqui para frente vamos escrever  $T^*(R)$  ao invés de  $\text{Spec}(\text{Smb}(R))$

### 3.2 Colchetes de Poisson e Hamiltonianas

Seja  $\text{Dif}_k(R) \rightarrow \text{Smb}_k(R) = \text{Smb}(R, R)$  a projeção canônica, e considere  $\Delta \in \text{Dif}_k(R)$ . A imagem de  $\Delta$ , sob essa projeção, é denotada por  $|\Delta|_k = |\Delta|$ , e é chamada *símbolo do operador*  $\Delta$ . Temos o homomorfismo

$$\text{Smb}_k(R) \otimes_R \text{Smb}_l(R) \rightarrow \text{Smb}_{k+l}(R)$$

induzido pela composição de operadores diferenciais:

$$|\nabla|_l \cdot |\Delta|_k = |\nabla \circ \Delta|_{k+l}.$$

Em particular,  $\text{Smb}(R)$  é uma  $R$ -álgebra associativa.

Considere dois operadores  $\Delta_i \in \text{Dif}_{k_i}(R)$ ,  $i = 1, 2$ . Então, como vimos no Capítulo 1, seu comutador  $[\Delta_1, \Delta_2] = \Delta_1 \circ \Delta_2 - \Delta_2 \circ \Delta_1 \in \text{Dif}_{k_1+k_2-1}$ . Colocando  $s = |\Delta_1|$  e  $t = |\Delta_2|$ , definimos o *colchete de Poisson* de  $s$  e  $t$  como

$$\{s, t\} = |[\Delta_1, \Delta_2]|_{k_1+k_2-1} = |\Delta_1 \circ \Delta_2 - \Delta_2 \circ \Delta_1|_{k_1+k_2-1}.$$

Denotando  $S = \text{Smb}(R)$ , segue diretamente dessa definição que  $\{\cdot, \cdot\}$  é  $R$ -bilinear, e que:

**Proposição 3.1.** *Para quaisquer elementos  $s, t, r \in S$  temos*

1.  $\{s, t\} = -\{t, s\}$  (*anti-comutatividade*)
2.  $\{s, \{t, r\}\} + \{t, \{r, s\}\} + \{r, \{s, t\}\} = 0$  (*identidade de Jacobi*)
3.  $\{s, tr\} = \{s, t\} \cdot r + t \cdot \{s, r\}$

Isto mostra que  $\{\cdot, \cdot\}$  é um colchete de Lie sobre  $S = \text{Smb}(R)$ . Da terceira afirmação da proposição, fixado  $s_0 \in S$ , a aplicação  $H_{s_0} : S \rightarrow S$  definida por  $H_{s_0}(s) = \{s_0, s\}$  é uma derivação de  $S$ . Entretanto, como “campos de vetores de  $S$ ” e “derivações de  $S$ ” são sinônimos<sup>2</sup>, podemos pensar em  $H_{s_0}$  como um campo de vetores sobre  $T^*(R)$ , i.e.,  $H_{s_0}$  é o *campo de vetores Hamiltoniano* correspondente à “Hamiltoniana”  $s_0$ .

A terceira afirmação da proposição mostra também que a aplicação  $H : S \rightarrow \text{Der}_K(S)$ , dada por  $s \mapsto H_s$  é uma derivação de  $S$  a valores no  $S$ -módulo  $\text{Der}_K(S)$ . Da representação do funtor  $\text{Der}_K(\cdot)$ , que vimos no Capítulo 1, existe um  $S$ -homomorfismo  $h : \Omega_K(S) \rightarrow \text{Der}_K(S)$ , de modo que o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{H} & \text{Der}_K(S), \\ & \searrow d & \nearrow h \\ & & \Omega_K(S) \end{array}$$

onde  $d : S \rightarrow \Omega_K(S)$  é o diferencial de Kähler.

Desta forma, especificar a derivação  $H$  é o mesmo que especificar  $h$ . Portanto, o colchete de Poisson pode ser escrito em termos de  $h$ :

$$\{s, t\} = H_s(t) = \langle h(ds), dt \rangle,$$

onde  $\langle, \rangle$  é o emparelhamento natural de  $\Omega_K(S)$  e  $\text{Der}_K(S)$ , induzido pela representação do funtor  $\text{Der}_K$ , dada por  $\text{Der}_K(S) \simeq \text{Hom}_S(\Omega_K(S), S)$ .

Assim, ao invés de usar  $h$ , podemos considerar a forma bilinear  $\omega_h$  sobre  $\Omega_K(R)$ , definida por

$$\omega_h(\alpha, \beta) = \langle h(\alpha), \beta \rangle,$$

<sup>2</sup>Um fato básico do estudo das variedades diferenciáveis é que os campos de vetores são as derivações do anel das funções diferenciáveis dessa variedade.

onde  $\alpha, \beta \in \Omega_K(S)$ . Quando  $h$  é um isomorfismo, podemos também considerar a forma  $\widehat{\omega}_h$ , sobre  $\text{Der}_K(S)$ , definida como

$$\widehat{\omega}_h(D_1, D_2) = \omega_h(h^{-1}(D_1), h^{-1}(D_2)),$$

onde  $D_1, D_2 \in \text{Der}_K(S)$ . Se  $\widehat{\omega}_h \in \Lambda^2(S) = \Lambda^2(\Omega_K(S))$ , é natural interpretá-la como uma 2-forma sobre a variedade  $\text{Spec}(S) = T^*(R)$ .

**Proposição 3.2.** *Se a forma  $\widehat{\omega}_h$  existe, então ela é fechada, i.e.,  $d\widehat{\omega}_h = 0$ .*

*Demonstração.* A representação do módulo  $\Lambda^i(S)$  como a  $i$ -ésima potência exterior de  $\Omega_K(S)$ , permite-nos pensar nos elementos  $\alpha \in \Lambda^i(S)$  como funções anti-simétricas  $i$ -lineares sobre  $\text{Der}_K(S)$ , que corresponde ao tratamento clássico de uma forma diferencial sobre uma variedade. Neste caso, continua válida a fórmula clássica para a diferencial exterior [62, 72], de modo que devemos mostrar que:

$$\begin{aligned} d\widehat{\omega}_h(D_1, D_2, D_3) &= D_1\widehat{\omega}_h(D_2, D_3) - D_2\widehat{\omega}_h(D_1, D_3) + D_3\widehat{\omega}_h(D_1, D_2) - \\ &\quad - \widehat{\omega}_h([D_1, D_2], D_3) + \widehat{\omega}_h([D_1, D_3], D_2) - \widehat{\omega}_h([D_2, D_3], D_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $D_1, D_2, D_3 \in \text{Der}_K(S)$ .

Como  $\Omega_K(S)$  é gerado, como  $S$ -módulo, pelos elementos da forma  $ds$ , e como  $h$  é, por hipótese, um isomorfismo, o módulo  $\text{Der}_K(S)$  é gerado pelas derivações da forma  $H_s$  com as mesmas relações. Portanto, como a fórmula clássica para a diferencial exterior é linear em todos os argumentos, basta verificarmos-la para  $D_i = H_{s_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Assim,

$$\begin{aligned} d\widehat{\omega}_h(H_{s_1}, H_{s_2}, H_{s_3}) &= H_{s_1}\widehat{\omega}_h(H_{s_2}, H_{s_3}) - H_{s_2}\widehat{\omega}_h(H_{s_1}, H_{s_3}) + \\ &\quad + H_{s_3}\widehat{\omega}_h(H_{s_1}, H_{s_2}) - \widehat{\omega}_h([H_{s_1}, H_{s_2}], H_{s_3}) + \\ &\quad + \widehat{\omega}_h([H_{s_1}, H_{s_3}], H_{s_2}) - \widehat{\omega}_h([H_{s_2}, H_{s_3}], H_{s_1}) \\ &= 2(\{s_1, \{s_2, s_3\}\} + \{s_3, \{s_1, s_2\}\} + \{s_2, \{s_3, s_1\}\}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

devido à identidade de Jacobi do colchete de Poisson, estabelecida pela Proposição 3.1. Isso completa a prova. ■

No caso clássico, quando  $R = C^\infty(M)$ , temos  $\widehat{\omega}_h = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ , nas coordenadas de  $T^*(M)$ . Assim, quando  $h$  é um isomorfismo,  $\widehat{\omega}_h$  é a “realização geométrica” de  $h^3$ . Por isso, a aplicação  $H$  (ou  $h$ ) é um objeto mais fundamental que  $\widehat{\omega}_h$ .

<sup>3</sup>Esta pode ser pensada também como a realização geométrica de  $H$ , ou mesmo do colchete de Poisson.

Apesar de o ponto de vista convencional considerar a Hamiltoniana (estrutura canônica) como uma 2-forma sobre  $T^*(M)$ , que neste caso equivale a especificar  $H$  ou  $h$ , em uma situação geral devemos entender por estrutura Hamiltoniana (canônica) um dos três objetos: o operador  $H$ , o homomorfismo  $h$ , ou a forma  $\widehat{\omega}_h$ . Obviamente, esses três objetos deverão satisfazer condições convenientes. Por exemplo, o operador  $H$  deve ser uma derivação de  $S$  em  $\text{Der}_K(S)$ , onde  $H_{s_1}(s_2) + H_{s_2}(s_1) = 0$  para todos os  $s_1, s_2 \in S$ .

Podemos, então, estender essa idéia para anéis arbitrários.

**Definição 3.3.** Seja  $S$  uma  $K$ -álgebra comutativa com identidade (não necessariamente igual ao anel dos símbolos  $\text{Smb}(R)$ ). Uma derivação  $H : S \rightarrow \text{Der}_K(S)$  satisfazendo  $H_{s_1}(s_2) + H_{s_2}(s_1) = 0$  para todos os  $s_1, s_2 \in S$  é dita ser uma *estrutura canônica* sobre  $S$ . O par  $(S, H)$  é então chamado *anel canônico*.

Note que, quando  $M$  é uma variedade canônica (simplética), existe uma estrutura canônica natural sobre o anel de funções  $C^\infty(M)$ . Desta forma, o conceito de anel canônico é uma generalização daquele para variedades simpléticas [41].

Nota-se também que a equação  $H_{s_1}(s_2) = \{s_1, s_2\}$  define um “colchete de Poisson” sobre o anel canônico  $S$ . Reciprocamente, este colchete determina, de maneira única, a estrutura canônica  $H : S \rightarrow \text{Der}_K(S)$ .

Na mecânica clássica, a forma  $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$  é exata, e aparece de maneira puramente geométrica como a diferencial da 1-forma  $\theta = \sum_i p_i dq_i$  sobre o espaço de fase  $T^*(M)$  [1, 71]. Esta 1-forma, por sua vez, é determinada naturalmente pela propriedade universal:  $s_\rho^*(\theta) = \rho$ , onde  $\rho$  é uma 1-forma arbitrária sobre  $M$ , e  $s_\rho$  é a seção<sup>4</sup> do fibrado cotangente  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$ , correspondente a  $\rho$ .

Entretanto, em geral, esta construção pode não ser possível. Suponhamos que o anel  $R$  seja uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra, e definamos  $\rho = da \in \Omega_{\mathbb{Q}}(R)$ , onde  $a \in R$ . Dado então  $\sigma = |\Delta|_k \in \text{Smb}_k(R)$ ,  $\Delta \in \text{Dif}_k(R)$ , definimos

$$s_\rho^*(\sigma) = \frac{1}{k!} \underbrace{\delta_{a, \dots, a}}_{k \text{ vezes}}(\Delta) \in R = \text{Dif}_0(R).$$

Olhando com um pouco mais de cuidado, notamos que a aplicação  $s_\rho^* : \text{Smb}(R) \rightarrow R$  é um homomorfismo de anéis que, no caso de  $R = C^\infty(M)$ , corresponde ao homomorfismo  $s_\rho^* : C^\infty(T^*(M)) \rightarrow C^\infty(M)$ , gerado pela seção  $s_\rho$ . Assim, o homomorfismo  $s_\rho^*$  é o equivalente algébrico do conceito de seção de  $T^*(M)$ . Isto mostra que a existência de uma aplicação do tipo  $s_\rho^*$  pode não permitir a construção da forma  $\theta$ . A seguir, damos um exemplo ilustrando essa situação.

Considere o anel

$$R = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua e } f'(0) \text{ existe}\}.$$

<sup>4</sup>Recordemos que as 1-formas sobre  $M$  são seções do fibrado cotangente  $T^*(M)$  [72].

Dado  $a \in \mathbb{R}$ , denotemos por  $\mathfrak{m}_a \subset R$  o ideal maximal consistindo de todas as funções de  $R$  que se anulam em  $a$ . Como  $\Omega_{\mathbb{R}}(R) \neq 0$ , existem derivações de  $R$  com valores em  $R/\mathfrak{m}_0$ . Por outro lado, para  $a \neq 0$ , os módulos  $\text{Der}_K(R/\mathfrak{m}_a)$  são todos triviais, uma vez que  $\mathfrak{m}_a^2 = \mathfrak{m}_a$  para  $a \neq 0$ . Por isso, o módulo  $\text{Der}_K(R)$  é trivial pois, se existe uma derivação não nula  $\Delta : R \rightarrow R$ , então sua composição com a projeção  $R \rightarrow R/\mathfrak{m}_a$ , para algum  $a \neq 0$ , também seria uma derivação não nula, em contradição com o que dissemos acima<sup>5</sup>. Esses argumentos mostram que a aplicação  $s_\rho^*$  não depende de  $\rho \in \Omega_{\mathbb{R}}(R)$ , i.e., não existe uma forma universal  $\theta$ .

Portanto, o mecanismo clássico que garante que  $\widehat{\omega}_h$  é exata, não funciona, em geral, em  $T^*(R)$ .

### 3.3 Transformações Canônicas

Da equivalência dada pelo Teorema de Swan 1.23, as aplicações diferenciáveis na categoria da variedades diferenciáveis estão em correspondência um a um com os homomorfismos dos respectivos anéis de funções diferenciáveis. Desta forma, é natural definir-se os difeomorfismos da variedade  $\text{Spec}(S)$  como automorfismos do anel  $S$ . Isto nos leva à definição de uma transformação canônica como um automorfismo que respeita a estrutura Hamiltoniana, no seguinte sentido:

**Definição 3.4.** Um automorfismo  $\varphi$  de  $S$  é dito ser *canônico* se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega_K(R) & \xrightarrow{h} & \text{Der}_K(S) \\ \Omega\varphi \downarrow & & \uparrow D\varphi \\ \Omega_K(S) & \xrightarrow{h} & \text{Der}_K(S) \end{array}$$

é comutativo, i.e.,  $h = D\varphi \circ h \circ \Omega\varphi$ .

Aqui, definimos  $\Omega\varphi$  e  $D\varphi$  como

$$\begin{aligned} \Omega\varphi(s'ds) &= \varphi(s')d\varphi(s) \\ D\varphi(\partial) &= \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi, \end{aligned}$$

onde  $s, s' \in S$  e  $\partial \in \text{Der}_K(S)$ .

Os homomorfismos  $\Omega\varphi$  e  $D\varphi$  estão relacionados, por meio do emparelhamento natural de  $\text{Der}_K(S)$  e  $\Omega_R(S)$ , da seguinte maneira:

$$\langle \partial, \Omega\varphi(\alpha) \rangle = \varphi(\langle D\varphi(\partial), \alpha \rangle).$$

Essa identificação nos permite provar a proposição seguinte.

<sup>5</sup>Mais informações a respeito disso podem ser encontradas em [46], onde estudam-se também as extensões de Hochschild.

**Proposição 3.5.** *O diagrama da Proposição 3.4 é comutativo se, e somente se,  $\omega_h$  é invariante por  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned}\omega_h(\Omega\varphi(\alpha_1), \Omega\varphi(\alpha_2)) &= \langle h(\Omega\varphi(\alpha_1)), \Omega\varphi(\alpha_2) \rangle \\ &= \varphi(\langle D\varphi \circ h \circ \Omega\varphi(\alpha_1), \alpha_2 \rangle) \\ &= \varphi(\langle h(\alpha_1), \alpha_2 \rangle) \\ &= \varphi(\omega_h(\alpha_1, \alpha_2)),\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do emparelhamento natural que relaciona  $\Omega\varphi$  e  $D\varphi$ , e a terceira é consequência da comutatividade do diagrama da Proposição 3.4. Esta seqüência de igualdades demonstra a necessidade e a suficiência da proposição. ■

Recordando a relação entre  $H$  e  $h$ , segue diretamente da proposição que acabamos de provar que:

**Proposição 3.6.** *O automorfismo  $\varphi$  do anel  $S$  é canônico se, e somente se, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{H} & \text{Der}_K(S) \\ \varphi \downarrow & & \uparrow D\varphi \\ S & \xrightarrow{H} & \text{Der}_K(S) \end{array}$$

*é comutativo, i.e., se, e somente se,  $H(\varphi(s)) = \varphi \circ H_s \circ \varphi^{-1}$  para todo  $s \in S$ .*

O conceito de transformação canônica que introduzimos aqui corresponde, no caso clássico quando  $R = C^\infty(M)$ , ao conceito usual de transformação canônica em  $T^*(M)$  [1, 71].

### 3.4 Transformações Canônicas Infinitesimais

O análogo de uma transformação canônica infinitesimal, i.e., um campo de vetores que respeita a estrutura Hamiltoniana, deve, em geral, ser tomado como uma derivação do anel  $S$  que respeita a estrutura Hamiltoniana.

**Definição 3.7.** Uma derivação  $\psi \in \text{Der}_K(S)$  do anel dos símbolos  $S$  é dita ser *canônica* se satisfaz a relação

$$\widetilde{D}\psi \circ h + h \circ \widetilde{\Omega}\psi = 0,$$

onde, por definição,  $\widetilde{D}\psi(\partial) = [\partial, \psi]$  para toda  $\partial \in \text{Der}_K(S)$  e  $\widetilde{\Omega}\psi(s'ds) = \psi(s')ds + s'd\psi(s)$  para todos os  $s, s' \in S$ .

Dessa definição, segue diretamente que:

**Proposição 3.8.** *Uma derivação  $\psi \in \text{Der}_K(S)$  é canônica se, e somente se, satisfaz a ambas as condições*

1.  $\omega_h(\widetilde{\Omega\psi}(\alpha_1), \alpha_2) + \omega_h(\alpha_1, \widetilde{\Omega\psi}(\alpha_2)) = \psi(\omega_h(\alpha_1, \alpha_2)).$
2.  $H(\psi(s)) = [\psi, H_s].$

Como acima, seja  $S = \text{Smb}(R)$ . Escrevemos  $\text{Ham}(S)$  para o conjunto de todos os campos de vetores Hamiltonianos sobre  $T^*(R)$ , (derivações de  $S$  da forma  $H_s$  para  $s \in S$ ), e  $\text{Can}(S)$  para o conjunto de todos os campos de vetores canônicos sobre  $T^*(R)$  (derivações canônicas sobre  $S$ ).

Quando aplicamos a segunda afirmação da Proposição 3.8 a um elemento  $s' \in S$ , a identidade de Jacobi do colchete de Poisson nos dá a validade de  $\psi(\{s, s'\}) = \{\psi(s), s'\} + \{s, \psi(s')\}$  para todos os elementos da forma  $\psi = H_{s'}$ , onde  $s' \in S$ . Logo, temos a inclusão de conjuntos  $\text{Ham}(S) \subset \text{Can}(S)$ .

Por outro lado, como  $\text{Ham}(S)$  e  $\text{Can}(S)$  estão munidos do colchete de Lie de derivações, a segunda parte da Proposição 3.8 mostra que  $\text{Ham}(S)$  é um ideal em  $\text{Can}(S)$ . No caso clássico, quando  $R = C^\infty(M)$ , o “teorema fundamental da mecânica” [71] afirma que  $\text{Ham}(S) = \text{Can}(S)$  localmente (e globalmente se  $M$  é simplesmente conexa).<sup>6</sup> Portanto, devemos entender como “teorema fundamental da mecânica” para um anel  $R$ , um teorema que descreva a estrutura da  $K$ -álgebra de Lie  $\text{Can}(S)/\text{Ham}(S)$ .

Como antes, os conceitos aqui introduzidos correspondem completamente, no caso clássico, aos usuais [41, 71].

### 3.5 Variedades Lagrangeanas e a Equação de Hamilton-Jacobi

De [1, 41, 71] sabemos que toda variedade Lagrangeana  $L \subset T^*(M)$ , que está na superfície de nível  $\mathcal{H} = 0$  da função Hamiltoniana, é invariante pelo correspondente campo de vetores Hamiltoniano. Este princípio de absorção, traduzido em linguagem algébrica, leva à seguinte definição:

**Definição 3.9.** Um ideal  $J \subset S$  é dito ser *autoestável* se ele é invariante pela ação de todos os operadores  $H_s$ , com  $s \in J$ . Um ideal maximal autoestável é dito ser um ideal *Lagrangeano*. A subvariedade  $L_J \subset T^*(R)$ , correspondendo a um ideal Lagrangeano, é também dita ser *Lagrangeana*.

No caso clássico, onde  $R = C^\infty(M)$ , o conceito algébrico introduzido acima corresponde ao conceito geométrico de variedade Lagrangeana em  $T^*(M)$  [41, 71].

<sup>6</sup>Isto é uma consequência do lema de Poincaré para variedades. Também, no caso em que  $M$  é uma variedade canônica arbitrária, tendo em vista que a forma fundamental é não-degenerada, o conjunto  $h^{-1}(\text{Can}(S))$  coincide com o conjunto de todas as 1-formas fechadas de  $M$ , ao passo que  $h^{-1}(\text{Ham}(S))$  coincide com o conjunto de todas as 1-formas exatas. Com isso,  $\text{Can}(S)/\text{Ham}(S) \simeq H^1(M, \mathbb{R})$ .

Desta forma, o fato de que alguma variedade Lagrangeana (conexa) está na superfície de nível  $\mathcal{H} = 0$ , pode ser considerado como a “realização geométrica” da situação onde o ideal principal de  $S$  gerado por  $\mathcal{H}$  está contido no correspondente ideal Lagrangeano.

No que segue, vamos usar esta interpretação para determinar o significado algébrico da equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi. Para isso, vamos, primeiramente, dar um significado geométrico para a equação de Hamilton-Jacobi no contexto clássico:

$$H\left(q, \frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0, \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_n}\right), \quad u = u(q).$$

Aqui,  $q_1, \dots, q_n$  são as coordenadas locais em  $U \subset M$ , e  $(q, p)$  são as coordenadas canônicas em  $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M)$ , onde  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$  é a projeção natural do fibrado cotangente. Com essa equação, podemos associar uma função  $H(q, p)$  em  $T^*(M)$ . Desta forma, o fato de que uma função  $f \in C^\infty(M)$  satisfaz as equações acima, significa que a variedade  $L = L(f) \subset T^*(M)$ , definida pelas equações

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

em  $\pi^{-1}(U)$ , está na superfície de nível  $H(p, q) = 0$ .

As subvariedades da forma  $L(f)$  são unicamente caracterizadas pelas duas propriedades seguintes [41, 71]:

1.  $L(f)$  é Lagrangeana;
2.  $\pi|_{L(f)}$  é um difeomorfismo.

Logo, as soluções procuradas estão em correspondência um a um com as variedades Lagrangeanas  $L \subset \{\mathcal{H} = c\}$  para as quais  $\pi|_L$  é um difeomorfismo.

Esta interpretação geométrica do conceito de solução da equação de Hamilton-Jacobi não é invariante por transformações canônicas do espaço de fase  $T^*(M)$ . A obstrução para isso é a exigência de que  $\pi|_L$  seja um difeomorfismo. Se descartarmos esta condição, poderemos considerar como *solução generalizada* da equação de Hamilton-Jacobi qualquer variedade Lagrangeana que esteja contida inteiramente na superfície de nível  $\mathcal{H} = 0$ <sup>7</sup>

Por sua vez, esta formulação geométrica tem a seguinte representação algébrica, em virtude do significado algébrico da inclusão  $L \subset \{\mathcal{H} = 0\}$ : uma solução da “equação de Hamilton-Jacobi”  $\mathcal{H} = 0$ , com  $\mathcal{H} \in S$ , é um ideal Lagrangeano  $J \subset S$  contendo o ideal principal gerado por  $\mathcal{H}$ , i.e., na notação do Capítulo 1,  $\langle \mathcal{H} \rangle \subset J$ .

Vamos chamar o problema de encontrar todos os ideais Lagrangeanos  $J \subset S$  contendo um dado ideal principal  $\langle \mathcal{H} \rangle$  de *problema de Hamilton-Jacobi*. Desta forma,

<sup>7</sup>Existem uma série de outras razões, físicas e matemáticas, para que se use esse conceito mais geral de solução. Para mais detalhes ver [67, 71].

no caso clássico onde  $R = C^\infty(M)$ , o problema de Hamilton-Jacobi consiste em encontrar todas as soluções generalizadas da equação de hamilton-Jacobi. Em vista disso, é natural considerar a equação de Hamilton-Jacobi como a maneira “geométrica” de expressar o problema de Hamilton-Jacobi.

Finalmente, vamos indicar o significado algébrico de uma solução “ordinária” da equação de Hamilton-Jacobi. Por simplicidade, vamos nos restringir a um anel  $R$  que é uma  $\mathbb{Q}$ -álgebra. Vamos então construir a variedade  $L(f)$ . Seja  $X_f$  o campo hamiltoniano sobre  $T^*(M)$  correspondendo à hamiltoniana  $\pi^*(f)$ , sendo  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$  a projeção natural do fibrado cotangente. Denotamos por  $A_t : T^*(M) \rightarrow T^*(M)$  a curva integral do campo  $X_f$ . Então, nas coordenadas canônicas consideradas acima,

$$A_t(p, q) = \left( q, p - t \frac{\partial f}{\partial q} \right).$$

Em particular,  $A_1(L(f)) = L(0)$ , e assim  $L(0)$  é a seção nula do fibrado vetorial  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$ . Uma vez que  $X_f$  tem curvas integrais globalmente definidas [1, 71], podemos representar o automorfismo  $A_t^* : C^\infty(T^*(M)) \rightarrow C^\infty(T^*(M))$  na forma  $A_t^* = e^{tX_f}$ , onde

$$e^{tX_f} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n X_f^n}{n!},$$

e onde interpretamos  $X_f$  como uma derivação do anel  $C^\infty(T^*(M))$ , ou, em notação “algébrica”,  $A_t^* = e^{H(\pi^*f)}$ . Portanto, o operador  $A_{-1}^* = e^{-H(\pi^*f)}$  leva o ideal Lagrangeano  $J_0$ , correspondendo a  $L(0)$  no ideal Lagrangeano  $J_f$ , correspondendo a  $f$ . Assim, para descrever  $J_f$  basta descrever  $J_0$ .

Por outro lado, olhando algebricamente, temos  $J_0 = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Smb}_i(R)$ . Assim, em geral, define-se  $J_f$  como a imagem inversa do ideal  $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Smb}_i(R) \subset S$  pelo automorfismo  $e^{-H_j(f)}$ , onde  $f \in R$  e  $j : K \rightarrow \text{Smb}(R)$  é a inclusão natural. Mas note que

$$e^{-H_j(f)}(s) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{H_{j(f)}^i(s)}{i!},$$

para  $s \in \text{Smb}_m(R)$ , desde que  $H_{j(f)}^i(s) = 0$  para  $i > m$ , de modo que o operador  $e^{-H_j(f)}$  tem um significado para anéis que são  $\mathbb{Q}$ -álgebras.

Após essas considerações, notamos que um elemento  $f \in R$  é uma solução “ordinária” para a equação de Hamilton-Jacobi se o ideal Lagrangeano contiver  $\langle \mathcal{H} \rangle$ .

### 3.6 Formalismo Hamiltoniano a Valores em Módulos

Recordemos que, se  $R = C^\infty(M)$ , então  $\text{Smb}(R) = \text{Smb}(R, R)$  pode ser representado como a álgebra dos campos de tensores simétricos e contravariantes sobre  $M$  [52, 67]. Cada um desses tensores, por sua vez, pode ser identificado com uma função sobre

$T^*(M)$  que é polinomial ao longo das fibras  $\pi^{-1}(x)$ , onde  $\pi : T^*(M) \rightarrow M$  é a projeção natural.

Dado agora um  $R$ -módulo  $P$ , o Teorema de Swan 1.23 nos garante que existe um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow M$ , tal que  $\Gamma(M, E) \simeq P$ . Desta forma, consideremos  $N = C^\infty(E)$ . Então, o módulo graduado  $\text{Smb}(N) = \text{Smb}(N, N)$  consiste das seções  $C^\infty$  do fibrado  $\pi^*(E)$ , que são polinomiais ao longo das fibras, sendo que  $\pi^*(E)$  é o “pull-back” do fibrado  $\xi : E \rightarrow M$ .

Um formalismo Hamiltoniano sobre  $E$  é então uma maneira de escrever conceitos e funtores na categoria dos módulos graduados dos símbolos  $\text{Smb}(N)$ . Entretanto, o objeto básico, que é o colchete de Poisson, não é possível de ser escrito sem considerarmos uma estrutura adicional: uma conexão no  $R$ -módulo  $P$ .

**Definição 3.10.** Uma *conexão* no  $R$ -módulo  $N$  é um homomorfismo de módulos filtrados

$$\begin{aligned} \nabla : \text{Dif}(R, R) &\rightarrow \text{Dif}(N, N) \\ \partial &\mapsto \nabla_\partial \end{aligned}$$

tal que  $\nabla_1 = 1_N \in \text{Hom}_R(N, N)$  e  $\delta_a(\nabla_\partial) = \nabla_{\delta_a(\partial)}$  para todos os  $a \in R$  e  $\partial \in \text{Dif}(R, R)$ .

Desta forma, para todos os  $\partial \in \text{Dif}_k(R, R)$  e  $\Delta \in \text{Dif}_m(N, N)$ , o colchete

$$[\Delta, \partial]_\nabla = \Delta \circ \partial - \nabla_\partial(\Delta)$$

é um operador diferencial de ordem  $\leq k + m - 1$ , sobre  $N$ , cujo símbolo depende somente dos símbolos dos operadores  $\partial$  e  $\Delta$ .

Este raciocínio nos permite definir o colchete de Poisson:

$$\{\text{Smb}(\Delta), \text{Smb}(\partial)\} = \text{Smb}([\Delta, \partial]_\nabla).$$

É fácil ver que  $\{\text{Smb}(\Delta), \text{Smb}(\partial)\} \in \text{Smb}_{k+m-1}N$ . É claro que, no caso clássico, essas considerações nos levam ao “formalismo Hamiltoniano com valores no fibrado  $E$ ” [67], onde  $N = C^\infty(E)$ .

Isso nos permite definir um formalismo Hamiltoniano algébrico a valores em um anel  $N$ . Para isso, consideremos os anéis  $R$  e  $N$ , onde  $N$  é um  $R$ -módulo, e a conexão dada pela Definição 3.10. O colchete de Poisson, e conseqüentemente os campos Hamiltonianos, ficam bem definidos. Entretanto, dado um  $R$ -módulo arbitrário  $P$ , que anel  $N$  devemos associar a ele, de modo a obter um formalismo Hamiltoniano a valores em  $P$ ? Obviamente esta situação não está clara.

No caso em que  $R = C^\infty(M)$ , já sabemos como fazer isso, tendo em vista a equivalência categorial dada pelo Teorema de Swan 1.23. Uma resposta parcial a esta questão pode ser encontrada em [68]. Entretanto, a idéia de conexão gera uma cisão em uma seqüência exata de fibrados vetoriais, envolvendo o fibrado tangente e o fibrado  $E$ , dando à luz os campos verticais e aos horizontais [62]. Dessa cisão obtemos a  $\mathcal{C}$ -seqüência espectral de Vinogradov [63, 70], envolvendo os invariantes integrais de

Cartan [23, 64]. Tal seqüência espectral carrega dentro de seus termos as Hamiltonianas, como se pode ver em [68, 70]. Ela também está naturalmente relacionada com a cohomologia do complexo variacional [63] e com a resolução do complexo de Euler-Lagrange [38]. Esta abordagem, naturalmente, mistura-se com a teoria de operadores diferenciais não-lineares, e mostra um pouco da natureza do problema.

Dadas as proporções do problema, em [64], o autor chega a sugerir a gênese de um novo campo de estudos na Matemática, a *Geometria Diferencial Algébrica*, cujo objetivo seria estudar as propriedades geométricas do complexo variacional. De fato, em [38, 51, 70] é mostrado que toda a Geometria Diferencial advém das estruturas envolvidas na parte vertical do complexo de Euler-Lagrange<sup>8</sup>. O estudo da parte horizontal pode vir a proporcionar novos resultados e a abertura de profícuos campos de estudo na matemática, resgatando e dando entendimento a importantes resultados das geometrias clássica e moderna. Tal estudo esbarra, entre outras coisas, no entendimento de uma versão algébrica para o Teorema do Índice, como sugerido em [67]. Voltaremos a essa questão no Capítulo 5.

### 3.7 O Formalismo Hamiltoniano em Anéis Hamiltonianos

De nossas discussões anteriores, do ponto de vista formal, precisamos somente da existência de um colchete de Poisson para construir um “formalismo Hamiltoniano”. Por outro lado, o método usado para se definir os colchetes de Poisson se baseia no fato de que, no anel filtrado  $\text{Dif}(R) \supset \dots \supset \text{Dif}_k(R) \supset \dots \supset R$ , o comutador  $[\Delta_1, \Delta_2]$ , de elementos das filtrações  $\leq v_1, \leq v_2$ , respectivamente, é um elemento da filtração  $\leq v_1 + v_2 - 1$ . Desta forma, podemos construir um “formalismo Hamiltoniano” para qualquer anel comutativo, com identidade, e filtrado,  $F \supset \dots \supset F_k \supset \dots \supset F_0$  em que a relação de comutação esteja ligada à filtração, da maneira que indicamos acima. Chamamos tais anéis de *Hamiltonianos*. Assim, o anel graduado

$$\text{Smb}(F) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

associado a  $F$ , tendo em vista as suposições feitas anteriormente, é comutativo e com identidade.

Dados elementos  $\sigma_1 \in F_{n_1} \subset F$  e  $\sigma_2 \in F_{n_2} \subset F$ , definimos os símbolos  $\text{Smb}(\sigma_1) \in F_{n_1}/F_{n_1-1}$  e  $\text{Smb}(\sigma_2) \in F_{n_2}/F_{n_2-1}$  por meio das projeções naturais  $F_{n_1} \rightarrow F_{n_1}/F_{n_1-1}$  e  $F_{n_2} \rightarrow F_{n_2}/F_{n_2-1}$ . Desta maneira, podemos definir o colchete de Poisson dos elementos  $s = \text{Smb}(\sigma_1)$  e  $t = \text{Smb}(\sigma_2)$  como

$$\{s, t\} = \text{Smb}_{n_1+n_2-1}([\sigma_1, \sigma_2]).$$

<sup>8</sup>A cisão dada pela conexão de que falamos antes, cinde o complexo variacional em partes horizontal e vertical que, por sua vez, dão origem às partes vertical e horizontal do complexo de Euler-Lagrange.

Daqui para frente, a construção de um “formalismo Hamiltoniano” para o anel  $F$  prossegue, passo a passo, como fizemos nas seções anteriores.

Isso mostra que podemos construir um “formalismo Hamiltoniano” para qualquer anel Hamiltoniano  $F$ . Tais anéis podem aparecer como extensões de filtrações determinadas por fibrados vetoriais sobre uma variedade. Com efeito, a referência [67] aponta uma maneira de se obter importantes invariantes “topológico-geométricos” para o anel  $F$  por meio do “formalismo Hamiltoniano”.

### 3.8 Em Direção a uma Teoria de Schemas Afins Hamiltonianos

Uma sugestão dada por Manin [44] para a superação dos problemas apresentados no final da seção 3.6, vem da Geometria Não-Comutativa. Comentando a respeito da fórmula

$$da = i[F, a],$$

apresentada no artigo publicado por Connes em 1982, Manin sugere que os diferenciais devam pertencer a um *feixe estrutural* de um “superschema” [44, 45] mais geral que aquele advindo de um fibrado algébrico de linhas [13, 14].

Isso mostra que o problema pode ser abordado por meio de técnicas da Geometria Algébrica, que generalizam a noção de schema para “superschema”, em consonância com as idéias da Geometria Não-Comutativa. Em [44, 45] temos uma idéia de como isso pode ser feito.

Podemos, ainda que de uma maneira bem primitiva, adaptar algumas dessas idéias a nosso estudo. Procuraremos não nos aprofundar muito nessa questão, pois tal envolveria um estudo de operadores diferenciais sobre schemas [20] e superschemas [44], e cohomologia cíclica [13], fugindo ao escopo desta tese.

A definição que demos para automorfismo canônico, pode ser generalizada no seguinte sentido: Um homomorfismo de anéis canônicos  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é dito ser um *homomorfismo canônico* se ele preserva os colchetes de Poisson, i.e., se

$$\varphi(\{s_1, s_2\}_1) = \{\varphi(s_1), \varphi(s_2)\}_2,$$

para todos os  $s_1, s_2 \in S_1$ , onde  $\{\cdot, \cdot\}_1$  é o colchete de Poisson de  $S_1$  e  $\{\cdot, \cdot\}_2$  o de  $S_2$ . Assim, se  $s_1 \in \text{Ker}(\varphi)$ , então  $\varphi(\{s_1, s_2\}_1) = \{\varphi(s_1), \varphi(s_2)\}_2 = 0$ , i.e.,  $\{s_1, s_2\} \in \text{Ker}(\varphi)$ . Portanto,  $H_{s_1}(\text{Ker}(\varphi)) \subset \text{Ker}(\varphi)$  para todo  $s_1 \in S$ .

Os ideais que são invariantes pela ação de todas as hamiltoneanas, são chamados *estáveis*. Isto significa que um ideal de um anel canônico  $S$  é estável se ele é também um ideal com respeito à estrutura de álgebra de Lie de  $S$ , determinada pelo colchete de Poisson. Com isso, temos diretamente o resultado seguinte.

**Proposição 3.11.** *Seja  $\mathfrak{p}$  um ideal estável de um anel canônico  $S$ . Então, a igualdade  $\{\varphi(s_1), \varphi(s_2)\} = \varphi(\{s_1, s_2\})$ , onde  $\varphi : S \rightarrow S/\mathfrak{p}$  é a projeção no quociente, determi-*

na uma estrutura canônica bem definida em  $S/\mathfrak{p}$ . Além disso,  $\varphi$  é um isomorfismo canônico.

Em vista desta proposição, é natural considerar o anel quociente como a localização [26] do anel canônico  $S$ .

O quadro geométrico correspondendo ao ideal estável  $\mathfrak{p} \subset S$  é que a “subvariedade”  $\text{Spec}(S/\mathfrak{p})$  da “variedade”  $\text{Spec}(S)$  é tangente a todo campo de vetores Hamiltoniano. Com isso, é natural definir a órbita Hamiltoniana [41] de um subconjunto  $A \subset \text{Spec}(S)$  como sendo o menor subconjunto  $A_H \subset \text{Spec}(S)$ , com  $A \subset A_H$ , que toca todos os campos de vetores Hamiltonianos. Intuitivamente, podemos imaginar  $A_H$  como sendo o conjunto obtido de  $A$  por meio de todas as transformações Hamiltonianas, i.e., deslocamento ao longo das linhas integrais dos campos Hamiltonianos. É claro que não podemos dar um significado preciso para esse conceito intuitivo, em geral. Entretanto, uma versão algébrica do conjunto  $A_H$  existe, e é dada pela definição a seguir:

**Definição 3.12.** A órbita algébrica de um ponto  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S)$  é a “subvariedade”  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$ , onde  $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$  é o maior ideal estável de  $S$  contido em  $\mathfrak{p}$ .

Note que a projeção  $S \rightarrow S/\mathcal{O}(\mathfrak{p})$  dá a luz o homomorfismo  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p})) \rightarrow \text{Spec}(S)$ . Além disso, intuitivamente, podemos interpretar  $S/\mathcal{O}(\mathfrak{p})$  como sendo o “anel de funções sobre  $\mathfrak{p}_H$ ”. O teorema seguinte esclarece um pouco mais a respeito da estrutura algébrica de  $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ .

**Teorema 3.13.** Para todo ideal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S)$ , o ideal  $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$  existe, é único, e é primo.

*Demonstração.* Se  $\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ , não há o que provar. Denotemos, então,  $\mathfrak{q} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})$ . Vamos, primeiramente, mostrar que  $\mathfrak{q} = \mathcal{R}(\mathfrak{q})$ , onde  $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$  é o radical [39] de  $\mathfrak{q}$ . Uma vez que o radical é um ideal estável contendo  $\mathfrak{q}$ , o fato de  $\mathfrak{p}$  ser primo implica que  $\mathfrak{q} \subset \mathcal{R}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$ . Da maximalidade de  $\mathfrak{q}$ , segue que  $\mathcal{R}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ .

Consideremos agora um elemento  $s \in S/\mathfrak{q}$ , e denotemos por

$$\mathfrak{q}_s = \{s' \in S' \mid s^n s' \in \mathfrak{q} \text{ para algum } n\}.$$

Não é difícil ver que  $\mathfrak{q}_s$  é um ideal com  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_s$ . A identidade

$$H_\sigma(s') \cdot s^{n+1} = H_\sigma(s \cdot s^{n+1}) - H_\sigma(s^{n+1}) \cdot s' = H_\sigma(s \cdot s^{n+1}) - (n+1)s^n s' H_\sigma(s)$$

mostra que  $H_\sigma(s')s^{n+1} \in \mathfrak{q}$  se  $s' \in \mathfrak{q}_s$  e  $\sigma \in S$ . Isto mostra que  $\mathfrak{q}_s$  é estável. Por outro lado, uma vez que  $\mathfrak{p}$  é primo, tem-se  $\mathfrak{q}_s \subset \mathfrak{p}$  se  $s \notin \mathfrak{p}$ .

Sejam então  $s, s' \in S$ , tais que  $ss' \in \mathfrak{q}$ . Assumimos que um dos dois,  $s$  ou  $s'$ , não pertence a  $\mathfrak{q}$ . Digamos que  $s \notin \mathfrak{q}$ , e consideremos o ideal  $\mathfrak{q}_s$ . Se existe um elemento  $s'' \in \mathfrak{q}_s$  com  $s'' \notin \mathfrak{p}$ , então  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_{s''} \subset \mathfrak{p}$  e, desta forma,  $\mathfrak{q}_{s''} = \mathfrak{q}$ . Uma vez que  $s^n s'' \in \mathfrak{q}$ , segue que  $s^n \in \mathfrak{q}_{s''}$ , e daí  $s^n \in \mathfrak{q}$ . Como  $\mathfrak{q}$  é igual ao seu próprio radical, vale que  $s \in \mathfrak{q}$ , contradizendo o fato de que  $s \notin \mathfrak{q}$ . Assim, devemos ter  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_s \subset \mathfrak{p}$ , e portanto  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_s$ . Desta forma, como  $s' \in \mathfrak{q}_s$ , segue que  $s' \in \mathfrak{q}$ . Isso mostra que  $\mathfrak{q}$  é primo. ■

Como conseqüências diretas desse teorema, temos os seguintes resultados:

**Corolário 3.14.** *Uma estrutura Hamiltoniana sobre  $S$  define uma aplicação  $\mathcal{O} : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(S)$ , onde cada ideal  $\mathfrak{p} \subset S$  é associado ao ideal  $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ . Tal aplicação é a projeção do espaço  $\text{Spec}(S)$  sobre o subespaço  $\text{Spec}_H(S)$ , consistindo de todos os ideais primos estáveis de  $S$ .*

**Corolário 3.15.** *O conjunto das órbitas algébricas em  $\text{Spec}(S)$  está em correspondência um a um com o conjunto de ideais primos estáveis de  $S$ , i.e.,  $\text{Spec}_H(S)$  é o “espaço das órbitas”.*

Mesmo quando se pode dar um significado geométrico à idéia da órbita Hamiltoniana  $\mathfrak{p}_H$ , como discutimos anteriormente, pode acontecer que  $\mathfrak{p}_H \neq \text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$ <sup>9</sup>. Essa situação tem a ver com o fato de  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$  ser meramente o “fecho algébrico” de  $\mathfrak{p}_H$ , e portanto ser consideravelmente maior que  $\mathfrak{p}_H$ . Neste caso, o espaço de órbitas  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$  contém objetos geométricos  $\mathfrak{q}_H$  com  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S)$ . A definição seguinte corresponde, intuitivamente, à operação de excisão das órbitas geométricas  $\mathfrak{q}_H$ , que não possuem dimensão maximal, do espaço  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$ .

**Definição 3.16.** *Seja  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S)$  um ideal primo de  $S$ . A parte principal da órbita algébrica de  $\mathfrak{p}$  é definida como*

$$P(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}^{-1}(\mathcal{O}(\mathfrak{p})).$$

Como consequência direta dessa definição, temos os resultados:

**Proposição 3.17.** *Seja  $S$  um anel canônico. Valem:*

1. *A partição de  $\text{Spec}(S)$  em partes principais das órbitas algébricas é uma partição em classes disjuntas.*
2. *A órbita algébrica de  $\text{Spec}(S/\mathfrak{q})$  coincide com sua parte principal se, e somente se,  $\mathfrak{q}$  é um ideal estável maximal.*

Definimos o *centro de Poisson*  $Z(S)$  de um anel canônico  $S$  como o conjunto dos  $s \in S$  para os quais se tem  $H_s = 0$ . Dessa definição, segue que  $Z(S)$  é um subanel de  $S$ . O resultado seguinte caracteriza o centro de Poisson quando  $\mathfrak{q}$  é um ideal estável maximal.

**Proposição 3.18.** *Se  $\mathfrak{q}$  é um ideal estável maximal, então o centro de Poisson de  $S/\mathfrak{q}$  é um corpo.*

*Demonstração.* Primeiramente, notemos que o centro de Poisson de  $S/\mathfrak{q}$  é o “anel de funções” sobre a órbita correspondendo a  $\mathfrak{q}$ . Assim, o anel  $S/\mathfrak{q}$  é munido de uma estrutura Hamiltoniana, e é caracterizado pelo fato de não possuir ideais estáveis próprios. É claro que  $Z(S/\mathfrak{q}) \neq \emptyset$ . Seja então  $z \in S/\mathfrak{q}$ . Então, o ideal principal  $\langle z \rangle$  é estável

<sup>9</sup>De fato, temos sempre  $\mathfrak{p}_H \subset \text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$ .

e, conseqüentemente, ele coincide com o anel todo  $S/\mathfrak{q}$ . Isto mostra que  $z$  é invertível em  $S/\mathfrak{q}$ . É evidente que sua inversa  $z^{-1}$  também pertence a  $Z(S/\mathfrak{q})$ . ■

Isto mostra que, associado a uma órbita algébrica de um determinado tipo, está o corpo  $Z(S/\mathfrak{q})$ , que é uma extensão do anel de base  $R$ . É natural chamar os elementos deste corpo de *caracteres infinitesimais* da órbita algébrica  $\text{Spec}(S/\mathcal{O}(\mathfrak{q}))$  [16].

Os conceitos que introduzimos aqui podem ser considerados como um análogo algébrico-geométrico do conceito de variedade canônica, e apontam para uma teoria de “schemas afins Hamiltonianos”, como já foi discutido no início.

## Capítulo 4

# Formas de Berezin e Lagrangeanas Algébricas

Por meio da Geometria Não-comutativa, vislumbra-se a possibilidade de reformular as noções clássicas de geometria diferencial em termos puramente algébricos. Nesse contexto, o cálculo diferencial torna-se uma extensão da linguagem da álgebra comutativa [2]. Por outro lado, existem vários casos bastante importantes, onde é possível ir além disso [44]. Eles deram ímpeto a novas pesquisas, cujo objetivo é transplantar as ferramentas da análise e geometria em termos não-comutativos. Um exemplo vem do estudo de uma teoria não-comutativa de integração, leis de conservação e formalismo Lagrangeano [40, 47]. Entretanto, surge o problema da descrição do processo de integração. A primeira questão é a seguinte: dada uma álgebra comutativa, como definir o módulo das formas de volume? Uma resposta a essa questão, em particular, dá a possibilidade de definir as formas de volume (formas de Berezin) sobre uma supervariiedade da maneira usual, i.e., usando convenientemente a regra de sinais [53]. Tendo em vista as peculiaridades bem conhecidas da integração de Berezin, o caráter do problema torna-se evidente, pois resulta na perda de um claro cenário algébrico para o processo de integração e de construções relacionadas a este processo.

Se entendermos por Lagrangeana multivetorial a natural generalização algébrica da Lagrangeana usual, as dificuldades de entendimento tornam-se apenas dificuldades de linguagem e de entendimento das propriedades do módulo das formas de Berezin. De fato, a inesperada relação entre lagrangeanas e formas de Berezin nos dão uma idéia mais clara para estudar problemas variacionais em supervariiedades.

Assim, nosso objetivo neste capítulo será buscar um adequado cenário algébrico para a construção do formalismo Lagrangeano. Trabalharemos sobre um anel comutativo arbitrário a fim de mostrar que as noções de formas de Berezin, adjuntas de operadores, operador de Euler, fórmula de Green, etc., podem ser estendidas a este anel de uma maneira bastante natural.

## 4.1 A Adjunta de um Operador

Como antes,  $K$  será um anel comutativo com identidade,  $R$  uma  $K$ -álgebra comutativa com identidade e  $\Omega_K(R)$  o módulo dos diferenciais de Kähler.

Dados  $R$ -módulos  $P$  e  $Q$ , definimos uma estrutura de  $R$ -módulo à direita em  $\text{Dif}_k(P, Q)$  através da operação de multiplicação

$$(\Delta \circ a)(p) = \Delta(ap),$$

para todo  $a \in R$ ,  $p \in P$  e  $\Delta \in \text{Dif}_k(P, Q)$ .

Denotamos por  $\text{Dif}_k^+(P, Q)$  o módulo  $\text{Dif}_k(P, Q)$  munido desta estrutura de  $R$ -módulo à direita.

Note que qualquer operador diferencial de ordem  $\leq k$ , agindo de  $P$  a  $Q$ , é também um operador diferencial de ordem  $\leq l$  para todo  $l \geq k$ . Conseqüentemente, obtemos inclusões  $\text{Dif}_k^+(P, Q) \subset \text{Dif}_l^+(P, Q)$ , que nos permitem definir a filtração

$$\text{Dif}_0^+(P, Q) \subset \text{Dif}_1^+(P, Q) \subset \cdots \subset \text{Dif}_n^+(P, Q) \subset \cdots$$

Por simplicidade, denotaremos por  $\text{Dif}^+(P, Q)$  ao módulo filtrado  $\bigcup_{n \geq 0} \text{Dif}_n^+(P, Q)$ . Também denotaremos  $\Lambda^n(\Omega_K(P))$  simplesmente por  $\Lambda^n$ .

Sendo  $d : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^{n+1}$  o diferencial do complexo de De Rham, definimos a seguinte seqüência

$$0 \longrightarrow \text{Dif}^+(P, R) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(P, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(P, \Lambda^2) \xrightarrow{w} \cdots,$$

onde  $w(\nabla) = d \circ \nabla \in \text{Dif}(P, \Lambda^{n+1})$  para todo operador  $\nabla \in \text{Dif}(P, \Lambda^n)$ . Uma vez que  $w \circ w(\nabla) = d \circ d \circ \nabla = 0$  para todo  $\nabla \in \text{Dif}(P, \Lambda^n)$ ,  $n \geq 0$ , a seqüência acima é, de fato, um complexo.

Denotemos por  $\hat{P}_n$ ,  $n \geq 0$ , o seguinte módulo de cohomologia deste complexo:

$$\hat{P}_n = \frac{\{\nabla \in \text{Dif}^+(P, \Lambda^n) : w(\nabla) = 0\}}{w(\text{Dif}^+(P, \Lambda^{n-1}))}.$$

Se  $\Delta : P \rightarrow Q$  é um operador diferencial, denotamos por  $\tilde{\Delta}$  a aplicação definida como  $\tilde{\Delta}(\nabla) = \nabla \circ \Delta \in \text{Dif}^+(P, \Lambda^n)$ , para todo o operador  $\nabla \in \text{Dif}^+(Q, \Lambda^n)$ . Uma vez que  $w(\tilde{\Delta}(\nabla)) = d \circ \nabla \circ \Delta = \tilde{\Delta}(w(\nabla))$ ,  $\tilde{\Delta}$  induz uma aplicação cocadeia entre complexos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Dif}^+(Q, \Lambda^n) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(Q, \Lambda^{n+1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \tilde{\Delta} & & \downarrow \tilde{\Delta} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Dif}^+(P, \Lambda^n) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(P, \Lambda^{n+1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Esta aplicação cocadeia passa ao nível de cohomologia, determinando uma aplicação  $\Delta_n^* : \hat{Q}_n \rightarrow \hat{P}_n$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Definição 4.1.** O operador  $\Delta_n^*$  induzido por  $\tilde{\Delta}$ , é chamado  $n$ -ésima *adjunta* do operador  $\Delta$  [70].

Para finalizar esta seção, quando não causar confusão, denotaremos  $\text{Dif}^+$  simplesmente por  $\text{Dif}$ , e fixaremos o inteiro  $n$ , omitindo o índice correspondente, a fim de simplificar a notação.

**Proposição 4.2.** *Sejam  $P, Q$  e  $T, R$ -módulos.*

1. Se  $\Delta \in \text{Dif}_k(P, Q)$ , então  $\Delta^* \in \text{Dif}_k(\hat{Q}, \hat{P})$ .
2. Se  $\Delta_1 \in \text{Dif}(P, Q)$  e  $\Delta_2 \in \text{Dif}(Q, T)$ , então  $(\Delta_2 \circ \Delta_1)^* = \Delta_1^* \circ \Delta_2^*$ .

*Demonstração.* Denotemos por  $[\nabla]$  a classe de cohomologia de um operador  $\nabla \in \text{Dif}(P, \Lambda^n)$ , onde  $w(\nabla) = 0$ . Dado  $a \in R$ , denotemos por  $a \circ \Delta$  e  $\Delta \circ a$  os operadores definidos por  $a \circ \Delta(p) = a\Delta(p)$  e  $\Delta \circ a(p) = \Delta(ap)$  respectivamente.

Para demonstrarmos a primeira afirmação, seja  $a \in R$ . Então

$$\begin{aligned} \delta_a(\Delta^*)([\nabla]) &= a\Delta^*([\nabla]) - \Delta^*(a[\nabla]) = [\nabla \circ a \circ \Delta] - [\nabla \circ \Delta \circ a] \\ &= (a \circ \Delta)^*([\nabla]) - (\Delta \circ a)^*([\nabla]) = -(\delta_a(\Delta))^*([\nabla]). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,  $\delta_{a_0, \dots, a_n}(\Delta^*) = (-1)^{n+1}(\delta_{a_0, \dots, a_n}(\Delta))^*$  para quaisquer elementos  $a_0, \dots, a_n \in R$ .

A segunda afirmação segue diretamente da identidade

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)^*([\nabla]) = [\nabla \circ \Delta_2 \circ \Delta_1] = \Delta_1^*([\nabla \circ \Delta_2]) = \Delta_1^*(\Delta_2([\nabla])) = (\Delta_1^* \circ \Delta_2^*)([\nabla]).$$

Isto conclui a demonstração. ■

Vejamos alguns exemplos de adjuntas de operadores.

**Exemplo 4.3.** Seja  $a \in R$  e  $a = a_p : P \rightarrow P$  o operador de multiplicação:  $a : p \mapsto ap$ . Então  $a_p^*([\nabla]) = [\nabla \circ a_p] = [\nabla]a$ . Assim,  $a_p^*$  é a multiplicação à direita por  $a$  em  $\hat{P}$ .

**Exemplo 4.4.** Dado  $p \in P$ , definimos o operador  $p : R \rightarrow P$  por  $p(a) = ap$ ,  $a \in R$ . Pela primeira parte da Proposição 4.2, segue que  $p^* \in \text{Hom}_R(\hat{P}, \hat{R})$ . Assim, existe um emparelhamento natural  $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \otimes_R \hat{P} \rightarrow \hat{R}$ , definido por  $\langle p, \hat{p} \rangle = p^*(\hat{p})$ ,  $\hat{p} \in \hat{P}$ .

## 4.2 Formas de Berezin e Integração Algébrica

Dado um complexo de operadores diferenciais  $\dots \longrightarrow P_k \xrightarrow{\Delta_k} P_{k+1} \longrightarrow \dots$ , colocamos

$$\hat{P}_k^{(n)} = \frac{\{\nabla \in \text{Dif}(P_k, \Lambda^n) : w(\nabla) = 0\}}{w(\text{Dif}(P_k, \Lambda^{n-1}))}.$$

Pela Proposição 4.2, para cada  $n \geq 0$  a seqüência  $\dots \leftarrow \widehat{P}_k^{(n)} \xleftarrow{\Delta_k^*} \widehat{P}_{k+1}^{(n)} \leftarrow \dots$  é também um complexo de operadores diferenciais, uma vez que  $\Delta_k^* \circ \Delta_{k+1}^* = (\Delta_{k+1} \circ \Delta_k)^* = 0$ . Por simplicidade, como antes, omitimos o índice  $n$ , e chamamos o complexo

$$\dots \leftarrow \widehat{P}_k \xleftarrow{\Delta_k^*} \widehat{P}_{k+1} \leftarrow \dots$$

de *complexo adjunto* do complexo original.

**Definição 4.5.** O complexo adjunto ao complexo de De Rham do anel  $R$ , é chamado *complexo de formas integrais*, e é denotado por

$$0 \leftarrow \Sigma_0 \xleftarrow{\delta} \Sigma_1 \xleftarrow{\delta} \dots,$$

onde  $\Sigma_k = \widehat{\Lambda}^k$  e  $\delta = d^*$ . O módulo  $\Sigma_0 = \widehat{R}$  é chamado *Bereziniano* (ou *módulo das formas de volume*), e é denotado por  $\mathfrak{B}$  [45, 53].

Quando  $P$  é um módulo projetivo e finitamente gerado, podemos caracterizar  $\widehat{P}$  em termos do Bereziniano. Isto é feito por meio das proposições a seguir:

**Proposição 4.6.**  $\text{Dif}^+(P, Q)$  é canonicamente isomorfo a  $\text{Hom}_R(P, \text{Dif}^+(R, Q))$ .

*Demonstração.* Dado  $\Delta \in \text{Dif}^+(P, Q)$ , definimos a aplicação  $f : P \rightarrow \text{Dif}^+(R, Q)$  por  $f(p)(a) = \Delta(ap)$ , para todos os  $a \in R$  e  $p \in P$ . Uma vez que  $(\Delta \circ a)(p) = \Delta(ap)^1$ , segue que  $f(p)(a) = (f(p) \circ a)(1)$ , mostrando que  $f$  é  $R$ -linear.

Reciprocamente, dada  $f \in \text{Hom}_R(P, \text{Dif}^+(R, Q))$ , temos  $\Pi \circ f \in \text{Dif}^+(P, Q)$ , onde  $\Pi : \text{Dif}^+(R, Q) \rightarrow Q$  é definida por  $\Pi(\Delta) = \Delta(1)$ . ■

**Proposição 4.7.** Quando  $P$  é um módulo projetivo e finitamente gerado, tem-se o isomorfismo  $\widehat{P} \simeq \text{Hom}_R(P, \mathfrak{B})$ .

*Demonstração.* Pela proposição anterior, e do fato de  $P$  ser projetivo e finitamente

<sup>1</sup>Recordemos que  $\Delta \circ a$  é a multiplicação à direita de  $\Delta$  por  $a$ .

gerado, temos a seguinte seqüência de igualdades e isomorfismos

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^{(n)} &= \frac{\{\nabla \in \text{Dif}^+(P, \Lambda^n) : w(\nabla) = 0\}}{w(\text{Dif}^+(P, \Lambda^{n-1}))} \\
&= \frac{\{\nabla \in \text{Dif}^+(P, \Lambda^n) : d \circ \nabla = 0\}}{\{d \circ \nabla : \nabla \in \text{Dif}^+(P, \Lambda^{n-1})\}} \\
&\simeq \frac{P^* \otimes_R \{\nabla \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^n) : d \circ \nabla = 0\}}{P^* \otimes_R \{d \circ \nabla : \nabla \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^{n-1})\}} \\
&\simeq P^* \otimes_R \frac{\{\nabla \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^n) : d \circ \nabla = 0\}}{\{d \circ \nabla : \nabla \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^{n-1})\}} \\
&\simeq P^* \otimes_R \mathfrak{B}^{(n)} \\
&\simeq \text{Hom}_R(P, \mathfrak{B}^{(n)})
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

Por meio dessa proposição, podemos caracterizar completamente o complexo de formas integrais somente em termos do Bereziniano quando  $P = R$ :

**Corolário 4.8.** *Se  $P = R$ , tem-se  $\Sigma_k = \widehat{\Lambda}^k = \text{Hom}_R(\Lambda^k, \mathfrak{B}) \simeq D_k(\mathfrak{B})$ .*

Notemos que o  $R$ -epimorfismo  $\Pi : \text{Dif}(R, \Lambda^n) \rightarrow \Lambda^n$ , definido por  $\Pi(\Delta) = \Delta(1)$ , induz uma aplicação cocadeia

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \text{Dif}(R, \Lambda^n) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}(R, \Lambda^{n+1}) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \Pi \downarrow & & \Pi \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Lambda^n & \xrightarrow{d} & \Lambda^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

pois  $d \circ \Pi = \Pi \circ w$ . Desta maneira, a aplicação  $\Pi$  passa ao nível de cohomologia gerando a aplicação  $\int : \mathfrak{B} \rightarrow H^*(\Lambda^*)$ , do Bereziniano a valores nos módulos da cohomologia de De Rham, definida por

$$\int [\nabla] = \nabla(1) + d\Lambda^{n-1} \in H^n(\Lambda^*),$$

onde  $[\nabla] \in \mathfrak{B}^{(n)} = \widehat{R}^{(n)}$ . Esta é uma versão algébrica para a integração, como sugerida em [53], que se relaciona diretamente com a integral de Berezin [45, 53].

**Proposição 4.9.** *A aplicação  $\int : \mathfrak{B} \rightarrow H^*(\Lambda^*)$  satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se  $\omega \in \Sigma_1$  então  $\int \delta \omega = 0$*

2. (“Integração por Partes”) Para qualquer operador diferencial  $\Delta : P \rightarrow Q$  e elementos  $p \in P$  e  $\hat{q} \in \hat{Q}$ , a identidade

$$\int \langle \Delta(p), \hat{q} \rangle = \int \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle.$$

é válida.

*Demonstração.* Para a primeira afirmação, suponha que  $\omega \in \Sigma_1$ . Então  $\delta\omega = [\nabla \circ d]$  e, conseqüentemente,  $\int \delta\omega = [\nabla \circ d(1)] = 0$ . Quanto à segunda afirmação, suponha que  $\hat{q} = [\nabla]$  para algum operador  $\nabla : Q \rightarrow \Lambda^n$ . Então

$$\int \langle \Delta(p), \hat{q} \rangle = \int [\nabla \circ \Delta(p)] = \int [\nabla \circ \Delta \circ p] = \int \langle p, [\nabla \circ \Delta] \rangle = \int \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle,$$

completando a demonstração. ■

### 4.3 Seqüências Espectrais e a Dualidade de Poincaré

Nesta seção descreveremos uma seqüência espectral, que estabelece a relação entre a cohomologia de De Rham e a homologia do complexo das formas integrais. Para maiores detalhes a respeito de seqüências espectrais, vide o Apêndice B ou [43].

Podemos definir o operador  $d' : \text{Dif}^+(\Lambda^k, P) \rightarrow \text{Dif}^+(\Lambda^{k-1}, P)$  por  $d'(\Delta) = \Delta \circ d$ . Desta maneira, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Dif}^+(R, R) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(R, \Lambda^1) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(R, \Lambda^2) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' \\ 0 & \longrightarrow & \text{Dif}^+(\Lambda^1, R) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(\Lambda^1, \Lambda^1) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(\Lambda^1, \Lambda^2) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' \\ 0 & \longrightarrow & \text{Dif}^+(\Lambda^2, R) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(\Lambda^2, \Lambda^1) & \xrightarrow{w} & \text{Dif}^+(\Lambda^2, \Lambda^2) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow d' & & \uparrow d' & & \uparrow d' \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Uma vez que  $\text{Dif}^+(\Lambda^{-p-1}, Q) = \text{Dif}(\Lambda^{-(p+1)}, Q)$ , definindo  $K^{p,q} = \text{Dif}^+(\Lambda^{-p}, \Lambda^q)$ , temos  $d' : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$  e  $w : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ . Além disso, como  $w \circ w = 0$ ,  $d' \circ d' = 0$  e  $w \circ d' = d' \circ w$ , temos um complexo duplo munido de dois operadores diferenciais, de maneira que a construção desenvolvida no Apêndice B se aplica neste caso, e produz duas seqüências espectrais, ambas convergindo para o mesmo módulo graduado. O resultado abaixo completa essa discussão.

**Teorema 4.10 (Dualidade de Poincaré Algébrica).** *Existe uma seqüência espectral  $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}$  com*

$$E_2^{p,q} = H_{-p}(\Sigma_*^{(q)}),$$

*sendo esta a homologia do complexo de formas integrais, e convergindo para a cohomologia de De Rham  $H(\Lambda^*)$ .*

*Demonstração.* O diferencial  $\tilde{d} = d' + (-1)^p w$  aplica  $K^n$  em  $K^{n+1}$ , onde

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q},$$

fazendo de  $K = \bigoplus_n K^n$  um complexo diferencial. Pelo que temos do Apêndice B, segue que

$${}^{II}E_2^{p,q} = H_w^p(H_{d'}^q(K)).$$

Mas  $H_{d'}^q(K) = \Lambda^q$  se  $p = 0$  e  $0$  se  $p \neq 0$ . Assim,  ${}^{II}E_2^{p,q} = H_w^p(H_{d'}^q(K)) = H^q(\Lambda^*)$  se  $p = 0$  e  ${}^{II}E_2^{p,q} = 0$  se  $p \neq 0$ . Desta forma, a segunda seqüência espectral converge para a cohomologia de De Rham. Da primeira seqüência espectral, temos

$${}^I E_2^{p,q} = H_{d'}^p(H_w^q(K)).$$

Mas  $H_w^q(K) = \Sigma_*^{(q)}$ . Como o operador  $d'$  é um operador de homologia sobre esse complexo, tem-se  ${}^I E_2^{p,q} = H_{d'}^p(H_w^q(K)) = H_{d'}^p(\Sigma_*^{(q)}) = H_{-p}(\Sigma_*^{(q)})$ . Note que, por construção, devemos ter

$${}^{II}E_2^{p,q} = E_2^{p,q}.$$

Uma vez que as duas seqüências espectrais convergem para o mesmo limite, concluímos a demonstração. ■

No caso das variedades diferenciáveis, e mesmo das supervarieties, é possível obter um resultado mais amplo, caracterizando completamente a homologia das formas integrais em termos da cohomologia de De Rham. Faremos isso na subseção seguinte, como uma aplicação desta versão algébrica da dualidade de Poincaré.

### 4.3.1 Complexos de Kozul e as Teorias Supersimétricas

Uma das questões mais frequentes em álgebra homológica é estabelecer que um determinado complexo é acíclico, i.e., exato em todos os graus. Uma das maneiras mais simples de provar isso, é verificando que ele é um complexo de Kozul. Os complexos de Kozul envolvem as álgebras simétricas e a álgebra exterior, sendo por isso de particular importância no contexto de nosso estudo dos operadores diferenciais.

Seja  $V$  um espaço vetorial, e considere a seqüência

$$0 \longleftarrow S^n(V) \xleftarrow{d} S^{n-1}(V) \otimes V \xleftarrow{d} S^{n-2}(V) \otimes \Lambda^2(V) \xleftarrow{d} \dots,$$

com

$$d(z \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_q) = \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} v_i z \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_q),$$

onde  $z \in S^{n-q}(V)$ ,  $v_1, \dots, v_q \in V$  e  $v_i z$  denota o produto simétrico de  $v_i$  por  $z$ . Como  $d^2 = d \circ d = 0$ , esta seqüência é um complexo. Este complexo é chamado *complexo de Kozul*. Para mostrar que ele é acíclico, definimos o operador

$$s(z_1 \cdots z_p \otimes v) = \sum_{i=1}^p z_1 \cdots z_{i-1} z_{i+1} \cdots z_p \otimes (z_i \wedge v),$$

onde  $z_1, \dots, z_p \in V$  e  $v \in \Lambda^{n-p}(V)$ . Um cálculo, usando a definição de  $d$  e  $s$ , leva a

$$(d \circ s + s \circ d)(x) = (p+q)x$$

para todo  $x \in S^p(V) \otimes \Lambda^q(V)$ . Isto nos mostra que este complexo é homotópico a zero<sup>2</sup>, i.e., é acíclico. Olhando com um pouco mais de cuidado, notamos que  $s^2 = s \circ s = 0$ , fazendo com que

$$0 \longrightarrow S^n(V) \xrightarrow{s} S^{n-1}(V) \otimes V \xrightarrow{s} S^{n-2}(V) \otimes \Lambda^2(V) \xrightarrow{s} \cdots$$

seja um complexo. Este complexo é chamado *complexo de De Rham polinomial* e, tal qual o complexo de Kozul, é acíclico.

Com essas considerações prévias, podemos agora caracterizar o Bereziniano quando  $R$  é o anel de funções de uma variedade diferenciável de dimensão finita.

**Teorema 4.11.** *Suponha que  $R = C^\infty(M)$ , onde  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Então*

1.  $\widehat{R}^{(k)} = 0$  para  $k \neq n$ .
2.  $\mathfrak{B} \simeq \Lambda^n$ , i.e., o Bereziniano coincide com o módulo das formas de volume de  $M$ .

*Demonstração.* Devemos calcular a cohomologia do complexo

$$0 \longrightarrow \text{Dif}^+(R, R) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(R, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(R, \Lambda^2) \xrightarrow{w} \cdots \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(R, \Lambda^n) \longrightarrow 0$$

Para isso, consideramos o complexo aumentado

$$0 \longrightarrow \text{Dif}_k^+(R, R) \xrightarrow{w} \text{Dif}_{k+1}^+(R, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \cdots \xrightarrow{w} \text{Dif}_{k+n}^+(R, \Lambda^n) \xrightarrow{\Pi} \Lambda^n \longrightarrow 0,$$

onde  $\Pi(\nabla) = \nabla(1)$ .

<sup>2</sup>A construção de operadores de homotopia é um processo padrão para a demonstração da aciclicidade de complexos. Para mais detalhes, veja [11, 58]

Da definição da filtração crescente de  $\text{Dif}^+(R, \Lambda^P)$ , se mostrarmos que esse complexo é acíclico para todo o inteiro  $k \geq 0$ , poderemos tomar o limite algébrico sobre  $k$ , obtendo o resultado procurado.

Uma vez que, localmente, vale a dualidade de Poincaré para formas, temos um isomorfismo natural  $\Theta : D_k(\Lambda^n) \simeq \Lambda^{n-k}$ . Tal isomorfismo é definido tomando-se uma forma de volume local  $\omega \in \Lambda^n$ . Então, se  $Z = X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \otimes \omega \in D_k(\Lambda^n)$ , temos

$$\Theta(Z)(Y_1, \dots, Y_{n-k}) = \omega(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_{n-k}),$$

onde  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_{n-k}$  são campos de vetores definidos localmente. Obviamente essa definição não depende da particular escolha de  $\omega$ .

Se  $P$  é um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado, tem-se, a seqüência de isomorfismos

$$\begin{aligned} D_s(\text{Dif}_{k-s}(R, P)) &\simeq \text{Hom}_R(\Lambda^s, \text{Dif}_{k-s}(R, P)) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\Lambda^s, \text{Hom}_R(\mathcal{I}^{k-s}(R), P)) \\ &\simeq (\Lambda^s)^* \otimes_R \text{Hom}_R(\mathcal{I}^{k-s}(R), P) \\ &\simeq \mathcal{I}^{k-s}(R)^* \otimes_R (\Lambda^s)^* \otimes_R P \\ &\simeq \mathcal{I}^{k-s}(R)^* \otimes \text{Hom}_R(\Lambda^s, P) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\mathcal{I}^{k-s}(R), D_s(P)) \\ &\simeq \text{Dif}_{k-s}(R, D_s(P)). \end{aligned}$$

Uma vez que  $D_k(\Lambda^n) \simeq \Lambda^{n-s}$ , que  $\Lambda^n$  é projetivo e finitamente gerado, e que  $\text{Dif}_{n-k}^+$  é um funtor exato, temos mais uma seqüência de isomorfismos

$$\begin{aligned} D_s(\text{Dif}_{k-s}(R, \Lambda^n)) &\simeq \text{Dif}_{k-s}(R, D_s(\Lambda^n)) \\ &\simeq \text{Dif}_{k-s}(R, \Lambda^{n-s}) \\ &\simeq \text{Dif}_{k-s}^+(R, \Lambda^{n-s}). \end{aligned}$$

Tomando então dois complexos aumentados, definidos como no início da demonstração, um de ordem  $k$  e outro de ordem  $k-1$ , e considerando as inclusões naturais  $\text{Dif}_{k-1}(P, Q) \hookrightarrow \text{Dif}_k(P, Q)$ , temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \Lambda^n & \longleftarrow & \text{Dif}_k^+(R, \Lambda^n) & \longleftarrow & D_1(\text{Dif}_{k-1}(R, \Lambda^n)) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \Lambda^n & \longleftarrow & \text{Dif}_{k-1}^+(R, \Lambda^n) & \longleftarrow & D_1(\text{Dif}_{k-2}(R, \Lambda^n)) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Assim, como estamos em uma situação diferenciável, passando ao quociente, temos o complexo

$$0 \longleftarrow \text{Smb}_k(R, R) \xleftarrow{\sigma} D_1(\text{Smb}_{k-1}(R, \Lambda^n)) \xleftarrow{\sigma} D_2(\text{Smb}_{k-2}(R, \Lambda^n)) \xleftarrow{\sigma} \cdots$$

Se provarmos que esse complexo é acíclico, os outros dois também serão [11, 58]. Para isso, notamos que, das identidades fundamentais para os símbolos e da representação do funtor  $D_i$ , temos

$$D_i(\text{Smb}l_k(\Lambda_n)) \simeq \text{Hom}_R(\Lambda^i, \Lambda^n \otimes_R S^k(\Omega^*)) \simeq \Lambda^n \otimes_R S^k(\Omega^*) \otimes_R \Lambda^i(\Omega^*).$$

Mas, da definição do operador  $w$ , não é difícil ver que o operador

$$\sigma : \Lambda^n \otimes_R S^k(\Omega^*) \otimes_R \Lambda^i(\Omega^*) \rightarrow \Lambda^n \otimes_R S^{k+1}(\Omega^*) \otimes_R \Lambda^{i-1}(\Omega^*)$$

é expresso por

$$\sigma(\omega \otimes \Psi \otimes \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_i) = \sum_{r=1}^i (-1)^{r+1} \omega \otimes \Psi \varphi_r \otimes \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{r-1} \wedge \varphi_{r+1} \wedge \cdots \wedge \varphi_i,$$

onde  $\omega \in \Lambda^n$ ,  $\Psi \in S^k(\Omega^*)$ ,  $\varphi_r \in \Omega^*$ , sendo que  $\Psi \varphi_r$  denota o produto simétrico de  $\Psi$  e  $\varphi_r$  em  $S^{k+1}(\Omega^*)$ .

Com isso, vemos que o operador  $\sigma$  coincide com o diferencial de Kozul, mostrando que o complexo em questão é de Kozul. Isto implica que o complexo aumentado é acíclico. Tomando o limite algébrico sobre  $k$ , nesse complexo, obtemos a aciclicidade de:

$$0 \longrightarrow \text{Dif}^+(R, R) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(R, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \cdots \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(R, \Lambda^n) \xrightarrow{\Pi} \Lambda^n \longrightarrow 0.$$

Da exatidão dessa seqüência segue, em particular, que

$$\tilde{R}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ \Lambda^n & \text{se } k = n. \end{cases}$$

Isso completa a demonstração. ■

Na situação diferenciável, existe um isomorfismo natural  $\Lambda^i \simeq D_{n-i}(\Lambda^n) = \Sigma_i$ , que leva  $\alpha \in \Lambda^i$  no homomorfismo  $\alpha : \Lambda^{n-i} \rightarrow \Lambda^n$  dado por  $\alpha(\eta) = \eta \wedge \alpha$ , para todo  $\eta \in \Lambda^{n-i}$ .

Na demonstração do teorema, aqueles mais familiarizados com a teoria de Spencer, puderam notar que o complexo, cuja cohomologia define os módulos  $\widehat{\Lambda}^k$ , é equivalente ao complexo de Spencer para o funtor Dif. Para mais detalhes a esse respeito, vide [35, 60].

O Teorema 4.11, juntamente com o Teorema 4.10, produzem diretamente a dualidade de Poincaré.

**Corolário 4.12.** *Se  $\widehat{R}^{(k)} = 0$  para todos os  $k \neq n$  e  $\widehat{R}^{(n)} = \Lambda^n$ , então*

$$H^{n-i}(\Lambda^*) \simeq H_i(\Sigma_*) \simeq H_i(\Lambda^*).$$

É óbvio que não fizemos todo esse esforço meramente para provar a dualidade de Poincaré. Na verdade, o Teorema 4.11 provê um resultado análogo para as supervarieties, onde obtemos uma ferramenta para calcular a homologia das formas integrais em termos da cohomologia de De Rham. Isso dá uma caracterização simples para as formas de Berezin.

As supervarieties têm se demonstrado cenário adequado para o estudo de teorias quânticas supersimétricas. Uma necessidade que surge nesse contexto, está relacionada com a superação de problemas topológicos envolvendo a homologia das formas de Berezin. Para mais detalhes a respeito dessas questões, vide [31, 32, 34, 45].

A teoria de operadores diferenciais que desenvolvemos, é baseada em considerações puramente algébricas. Portanto, os resultados que obtivemos continuam válidos para o caso de superoperadores diferenciais (e também para as superequações induzidas por esses operadores), desde que se insira um sinal negativo onde for apropriado. Um estudo das supervarieties e questões topológicas envolvendo formas de Berezin, pode ser encontrado em [45] e as definições de superoperadores diferenciais, superjatos, etc., podem ser encontradas em [28, 29]. Discutiremos aqui somente a extensão do Teorema 4.10 e do Teorema 4.11, alguns pontos menos óbvios e a fórmula da mudança de coordenadas.

Sejam  $M$  uma supervariety,  $\dim M = n|m$ , e  $\pi : E \rightarrow M$  um superfibrado sobre  $M$  com dimensão  $s|t$ . A validade do Teorema 4.10 segue diretamente da definição dos “superanálogos” do complexo de De Rham e do complexo das formas integrais.

Localmente, as seções do fibrado  $\text{Ber}(M)$  são escritas na forma  $f(x)\mathbf{D}(x)$  [45], onde  $f \in C^\infty(U)$  e  $\mathbf{D}$  é uma seção local básica, que é multiplicada pelo determinante de Berezin da matriz Jacobiana, quando ocorre mudança de coordenadas. O determinante de Berezin de uma matrix em blocos  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  é definido como  $\det(A - BD^{-1}C)(\det D)^{-1}$ .

A seguir temos o “superanálogo” do Teorema 4.11.

**Teorema 4.13.** *Suponha que  $R = C^\infty(M)$ . Então*

1.  $\widehat{R}^{(k)} = 0$  para  $k \neq n$ .
2.  $\widehat{R}^{(n)}$  é o módulo das seções do fibrado  $\text{Ber}(M)$ .

*Demonstração.* Como as afirmações são locais, podemos considerar um domínio  $U$  com coordenadas  $x = (y_i, \xi_j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Nesse caso, há uma cisão do complexo  $\text{Dif}^+(R, \Lambda^*)$  em um produto tensorial de complexos  $\text{Dif}^+(R, \Lambda^*)_{\text{par}} \otimes_R \text{Dif}^+(R, \Lambda^*)_{\text{impar}}$ , onde  $\text{Dif}^+(R, \Lambda^*)_{\text{par}}$  é o complexo

$$0 \longrightarrow \text{Dif}^+(P, R) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(P, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \text{Dif}^+(P, \Lambda^2) \xrightarrow{w} \dots,$$

nas variáveis  $y_1, \dots, y_n$  e  $\text{Dif}^+(R, \Lambda^*)_{\text{impar}}$  é o mesmo complexo para as variáveis  $\xi_1, \dots, \xi_m$  da álgebra de Grassmann.

Pelo Teorema 4.11 temos  $H^k(\text{Dif}^+(\Lambda^*)_{\text{par}}) = 0$  para  $k \neq n$  e  $H^n(\text{Dif}^+(\Lambda^*)_{\text{par}}) = \Lambda_U^n$ , onde  $\Lambda_U^n$  é o módulo das  $n$ -formas definidas nas variáveis  $y_1, \dots, y_n$ . Para calcular a cohomologia de  $\text{Dif}^+(\Lambda^*)_{\text{ímpar}}$ , consideramos, como na demonstração do Teorema 4.11, o complexo quociente

$$0 \longrightarrow \text{Smb}_k(R, R)_{\text{ímpar}} \longrightarrow \text{Smb}_{k+1}(R, \Lambda^1)_{\text{ímpar}} \longrightarrow \dots$$

onde  $\text{Smb}_k(R, P)_{\text{ímpar}} = \text{Dif}_k^+(R, P)_{\text{ímpar}} / \text{Dif}_{k+1}^+(R, P)_{\text{ímpar}}$ . O mesmo cálculo feito lá mostra que esses são complexos de Kozul, e portanto obtemos  $H^k(\text{Dif}^+(\Lambda^*)_{\text{ímpar}}) = 0$  para  $k > 0$ , sendo que  $H^0(\text{Dif}^+(\Lambda^*)_{\text{ímpar}})$  é um módulo de posto 1. Portanto,  $\widehat{R}^{(k)} = H^k(\text{Dif}^+(\Lambda^*)) = 0$  para  $k \neq n$ .<sup>3</sup>

De [45] temos que os únicos operadores que representam cociclos não-triviais tem a forma  $f(y, \xi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \frac{\partial^m}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_m}$ . Assim, para completar a prova, devemos mostrar que  $\widehat{R}^{(n)}$  é precisamente o módulo das seções  $\Gamma(M, \text{Ber}(M))$ , i.e., que fazendo uma mudança de coordenadas obtemos

$$f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \frac{\partial^m}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_m} = f \text{Ber} J \left( \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \right) dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \frac{\partial^m}{\partial \eta_1 \dots \partial \eta_m} + T,$$

onde  $z = (v_i, \eta_j)$  é um novo sistema de coordenadas sobre  $U$ ,  $\text{Ber}$  denota o determinante de Berezin,  $J \left( \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \right)$  é a matriz jacobiana e  $T$  é cohomologo a zero (veja [53]). Mas isto é consequência direta de um cálculo envolvendo o determinante de Berezin, como descrito a seguir:

Se  $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  e  $X^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$  são inversas uma da outra, tem-se  $A\tilde{B} + B\tilde{D} = 0$  e  $C\tilde{B} + D\tilde{D} = 1$ , onde  $D = \tilde{D}^{-1} + CA^{-1}B$ . Desta forma,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \tilde{D}^{-1} + CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \tilde{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Com isso, obtemos

$$\text{Ber} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Ber} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{Ber} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \tilde{D}^{-1} \end{pmatrix} = \det(A) \det(\tilde{D}).$$

Isso conclui a demonstração. ■

Por fim, esse teorema, juntamente com o “superanálogo” do Teorema 4.10, implicam o seguinte:

**Corolário 4.14.** *Se  $\widehat{R}^{(k)} = 0$  para todo  $k \neq n$ , então  $H_k(\Sigma_*) \simeq H^{n-k}(\Lambda^*)$ .*

Isso provê uma caracterização da homologia do complexo das formas de volume em termos da cohomologia de De Rham da supervariiedade  $M$ .

<sup>3</sup>Esse fato segue da fórmula de Küeth para o cálculo da cohomologia produto. Para mais detalhes, vide [58].

## 4.4 A Fórmula de Green

No que segue, vamos assumir que o módulo  $\Omega_K(R)$  é projetivo e finitamente gerado. Isso implica que os módulos  $\Lambda^k$  e  $\mathcal{J}^k(R)$  são projetivos e finitamente gerados. Neste caso, vamos considerar uma variante da construção da adjunta de um operador.

Seja  $Q$  um  $R$ -módulo. Então existe um homomorfismo natural  $\xi_Q : Q \rightarrow \widehat{Q}$ , definido por  $\xi_Q(q)(\widehat{q}) = \langle q, \widehat{q} \rangle$ . Conseqüentemente, para todo operador diferencial  $\Delta : P \rightarrow \widehat{Q}$ , corresponde o operador  $\Delta^\circ : Q \rightarrow \widehat{P}$ , onde  $\Delta^\circ = \Delta^* \circ \xi_Q$ . Este operador também será chamado de *adjunto* de  $\Delta$ .

Com base em considerações análogas às que fizemos na última seção, pode-se mostrar que as duas definições de adjunto coincidem no caso diferenciável.

**Exemplo 4.15.** Seja  $\widehat{q} \in \widehat{Q}$  e  $\widehat{q} : R \rightarrow \widehat{Q}$  o operador de ordem zero definido por  $a \mapsto a\widehat{q}$ . Desta forma, podemos pensar no adjunto deste operador como um elemento de  $\text{Hom}_R(Q, \mathfrak{B})$ .

**Proposição 4.16.** *A correspondência  $\Delta \mapsto \Delta^\circ$  possui as seguintes propriedades:*

1. *Sejam  $\Delta \in \text{Dif}(P, \widehat{Q})$  e  $\Delta(p) = [\nabla_p]$ , onde  $\nabla_p \in \text{Dif}(Q, \Lambda^i)$ . Então  $\Delta^\circ = [\square_q]$ , onde  $\square_q \in \text{Dif}(P, \Lambda^i)$  e  $\square_q(p) = \nabla_p(q)$ .*
2. *Para todo  $\Delta \in \text{Dif}(P, \widehat{Q})$ , temos  $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ .*
3. *Para todo  $a \in R$ , temos  $(a\Delta)^\circ = \Delta^\circ \circ a$ .*
4. *Se  $\Delta \in \text{Dif}_k(R, \mathfrak{B})$  então  $\Delta^\circ(a) = j_k^* \circ (a\Delta)$ .*
5. *Se  $X \in D_1(\mathfrak{B})$ , então  $X + X^\circ = \delta(X) \in \text{Dif}_0(R, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ .*

*Demonstração.* A primeira e a terceira afirmações são conseqüências diretas da definição de  $\Delta^\circ$ , e a segunda afirmação segue diretamente da primeira.

Para a quarta afirmação, note que, pela definição de  $\Delta^\circ$ , temos  $\Delta^\circ \in \text{Hom}_R(R, \widehat{P})$ . Assim,

$$\Delta^\circ(a) = \Delta^* \circ \xi_R(a) = (h \circ j_k)^*(\xi_R(a)) = (j_k^* \circ h^*)(\xi_R(a)),$$

onde  $\Delta = h \circ j_k$  é dado pelo isomorfismo  $\text{Dif}_k(P, \mathfrak{B}) \simeq \text{Hom}_R(\mathcal{J}^k(P), \mathfrak{B})$ . Como  $\xi_R$  e  $h^*$  são  $R$ -lineares, e  $\widehat{\mathcal{J}^k(P)} \simeq \text{Dif}_k(P, \mathfrak{B})$ , segue que

$$(j_k^* \circ h^*)(\xi_R(a)) = j_k^* \circ (ah^*(\xi_R(1))) = j_k^* \circ (a\Delta).$$

Para demonstrar a quinta afirmação, note que  $\delta_a(j_1) = j_1(a) - aj_1(1) \in \mathcal{J}^1(R)$ . Portanto, para  $\Delta \in \text{Dif}_1(R, P)$  temos  $(\delta_a(j_1))^*(\Delta) = \Delta(a) - a\Delta(1) = (\delta_a(\Delta))(1)$ . Conseqüentemente,

$$\delta_a(X + X^\circ)(1) = (\delta_a(X))(1) + (\delta_a(j_1^*))(X) = (\delta_a(X))(1) - (\delta_a(j_1))^*(X) = 0.$$

Assim,  $\delta(X) = j_1^*(X) = X^\circ(1) = X + X^\circ$ . Isso conclui a demonstração █

Nesse contexto, podemos obter um resultado semelhante ao Teorema 4.11, que nos será útil tanto na demonstração da fórmula de Green [69, 70] para operadores diferenciais, quanto na demonstração de certos resultados, que veremos mais adiante, envolvendo Lagrangeanas.

**Teorema 4.17.** *O complexo abaixo é exato*

$$0 \longleftarrow \widehat{P} \xleftarrow{\mu} \text{Dif}(P, \mathfrak{B}) \xleftarrow{\omega} \text{Dif}(R, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \text{Dif}(R, \Sigma_2) \xleftarrow{\omega} \dots,$$

onde  $\omega = \delta \circ \nabla$ , para  $\nabla \in \text{Dif}(P, \Sigma_k)$ , e  $\mu(\nabla) = \nabla^\circ(1)$ , para  $\nabla \in \text{Dif}(P, \mathfrak{B})$ .

*Demonstração.* Se provarmos que, para todo  $k \geq 0$ , o complexo

$$0 \longleftarrow \widehat{P} \xleftarrow{\mu} \text{Dif}_k(P, \mathfrak{B}) \xleftarrow{\omega} \text{Dif}_k(P, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \text{Dif}_k(P, \Sigma_2) \xleftarrow{\omega} \dots$$

é exato, tendo em vista a filtração crescente  $\text{Dif}(P, \Sigma_i) = \bigcup_{k \geq 0} \text{Dif}_k(P, \Sigma_i)$ , poderemos tomar o limite algébrico sobre  $k$ , obtendo o resultado procurado.

Recordemos que, se  $P$  é projetivo e finitamente gerado, temos os isomorfismos

$$D_i(\text{Dif}_k^+(R, \widehat{P})) \simeq D_i(\text{Dif}_k(P, \mathfrak{B})) \simeq \text{Dif}_k(P, D_i(\mathfrak{B})) \simeq \text{Dif}_k(P, \Sigma_i).$$

Por meio deles, podemos transformar o complexo original no complexo

$$0 \longleftarrow \widehat{P} \xleftarrow{\Pi} \text{Dif}_k(R, \widehat{P}) \xleftarrow{S} D_1(\text{Dif}_{k-1}(R, \widehat{P})) \xleftarrow{S} D_2(\text{Dif}_{k-2}(R, \widehat{P})) \xleftarrow{S} \dots,$$

onde  $S(\nabla)(a_1, \dots, a_{r-1})(a) = \nabla(a_1, \dots, a_{r-1}, a)$ ,  $\nabla \in D_r(\text{Dif}_{k-r}(R, \widehat{P}))$ .

Procedendo exatamente como na demonstração do Teorema 4.11, provamos que esse complexo é um complexo de Kozul; logo, acíclico. Isso conclui a demonstração. █

Note que, se  $\Delta : P \rightarrow Q$  é um operador diferencial, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \widehat{Q} & \xleftarrow{\mu} & \text{Dif}(Q, \mathfrak{B}) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(Q, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \dots \\ & & \Delta^* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \widehat{P} & \xleftarrow{\mu} & \text{Dif}(P, \mathfrak{B}) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(P, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \dots \end{array}$$

Na Proposição 4.9 obtivemos a fórmula para a integração por partes, associando um operador diferencial e sua adjunta. No corolário seguinte, obtemos um resultado semelhante à fórmula de Green do cálculo vetorial.

**Corolário 4.18 (Fórmula de Green).** Se  $\Delta \in \text{Dif}(P, \widehat{Q})$ ,  $p \in P$  e  $q \in Q$ , então

$$\langle q, \Delta(p) \rangle - \langle \Delta^\circ(q), p \rangle = \delta G,$$

para alguma 1-forma integral  $G \in \Sigma_1$ .

*Demonstração.* Considere o operador  $\nabla \in \text{Dif}(R, \mathfrak{B})$ . Então, pelo Teorema 4.17,  $\nabla - \nabla^\circ(1) \in \text{Ker } \mu$  e, conseqüentemente, existe um operador  $\square \in \text{Dif}(R, \Sigma_1)$  satisfazendo  $\nabla - \nabla^\circ(1) = \omega(\square) = \delta \circ \square$ . Assim,  $\nabla(1) - \nabla^\circ(1) = \delta G$ , onde  $G = \square(1)$ . Colocando  $\nabla(a) = \langle q, \Delta(ap) \rangle$  obtemos o resultado procurado. ■

A 1-forma integral  $G$ , que encontramos na demonstração do corolário, depende de  $p$  e  $q$ . Entretanto, podemos escolher  $G$  de modo que a aplicação  $(p, q) \mapsto G(p, q)$  seja um operador bidiferencial<sup>4</sup>. Como a aplicação  $\omega : \text{Dif}^+(R, \Sigma_1) \rightarrow \text{Dif}^+(R, \mathfrak{B})$  é um  $R$ -homomorfismo, o fato de o módulo  $\text{Dif}^+(R, \Sigma_1)$  ser projetivo, implica na existência de um  $R$ -homomorfismo  $\kappa : \text{Im}(\omega) \rightarrow \text{Dif}^+(R, \Sigma_1)$ , tal que  $\omega \circ \kappa = 1_{\text{Dif}^+(R, \mathfrak{B})}$ . Colocando  $\square = \kappa(\nabla - \nabla^\circ(1))$ , obtemos  $G = \kappa(\nabla - \nabla^\circ(1))(1)$ . Isso prova nossa afirmação.

Para terminar, do ponto vista algébrico, existe, na situação diferenciável, uma vasta gama de isomorfismos; por exemplo,  $\mathfrak{B} \simeq \Lambda^n$ ,  $\Delta^\circ = \Delta^*$ , etc. No caso geral, por exemplo no caso supercomutativo, estes isomorfismos desaparecem, a menos que se tenha certas homologias iguais a zero.

## 4.5 Lagrangeanas, o Operador de Euler e o Teorema de Noether

Nesta seção,  $P$  e  $Q$  serão  $R$ -módulos projetivos. Introduzimos a notação

$$\text{Dif}_{(2)}(P, Q) = \text{Dif}(P, \text{Dif}(P, Q)).$$

Os elementos de  $\text{Dif}_{(2)}(P, Q)$  são chamados *operadores bidiferenciais*.

Um operador  $\nabla \in \text{Dif}_{(2)}(P, Q)$  satisfazendo a condição

$$\nabla(p_1, p_2) = \nabla(p_1)(p_2) = \sigma \nabla(p_2)(p_1) = \sigma \nabla(p_2, p_1),$$

é chamado *simétrico* se  $\sigma = 1$ , e *anti-simétrico* se  $\sigma = -1$ , para todos os  $p_1, p_2 \in P$ . O  $R$ -módulo de todos os operadores bidiferenciais simétricos, de  $P$  a valores em  $Q$ , será denotado por  $\text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, Q)$ .

**Teorema 4.19.** A seqüência abaixo é exata

$$0 \longleftarrow \text{Dif}^{\text{sim}}(P, \widehat{P}) \xleftarrow{\mu} \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B}) \xleftarrow{\omega} \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \dots,$$

onde  $\omega(\nabla) = \delta \circ \nabla$ ,  $\nabla \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Sigma_k)$ ,  $k > 0$ , e  $\mu(\nabla)(p) = (\nabla(p))^\circ(1)$ ,  $p \in P$ .

<sup>4</sup>A definição encontra-se na próxima seção

*Demonstração.* Do Teorema 4.17, juntamente com o fato de  $P$  ser projetivo e de  $\text{Dif}(P, \cdot)$  ser um funtor exato, segue que

$$0 \longleftarrow \text{Dif}(P, \widehat{P}) \xleftarrow{\tilde{\mu}} \text{Dif}(P, \mathfrak{B}) \xleftarrow{\tilde{\omega}} \text{Dif}(P, \Sigma_1) \xleftarrow{\tilde{\omega}} \cdots,$$

é um complexo acíclico, onde  $\tilde{\omega}(\nabla) = \delta \circ \nabla$ ,  $\tilde{\mu}(\nabla)(p) = (\nabla(p))^\circ(1)$ .

Para provarmos o teorema, é suficiente mostrar que este complexo cinde em partes simétrica e anti-simétrica. Para fazer isso, vamos mostrar que a involução  $\rho$ , definida como  $\rho(\nabla)(p_1)(p_2) = \nabla(p_2)(p_1)$ ,  $\nabla \in \text{Dif}(P, \text{Dif}(P, \Sigma_k))$  e  $\rho(\nabla) = \nabla^\circ$ , para  $\nabla \in \text{Dif}(P, \widehat{P})$ , é um automorfismo deste complexo. Pela definição de  $\rho$ , segue diretamente que  $\tilde{\omega} \circ \rho = \rho \circ \tilde{\omega}$ . Vamos então verificar que  $\tilde{\mu} \circ \rho = \rho \circ \tilde{\mu}$ . Para isso, sejam  $\Delta \in \text{Dif}(P, \text{Dif}(P, \mathfrak{B}))$  e  $\Delta(p_1)(p_2) = [\nabla_{p_1, p_2}]$ ,  $\nabla_{p_1, p_2} \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^n)$ . Segue da Proposição 4.16 que

$$\langle \tilde{\mu}(\Delta)(p_1), p_2 \rangle = [\square],$$

onde  $\square \in \text{Dif}^+(R, \Lambda^n)$ ,  $\square(a) = \nabla_{p_1, ap_2}(1)$ ,  $p_1, p_2 \in P$ . Portanto,

$$\langle \rho \tilde{\mu}(\Delta)(p_1), p_2 \rangle = \langle \tilde{\mu}(\Delta)^\circ(p_1), p_2 \rangle = [\square'],$$

onde  $\square'(a) = \nabla_{ap_2, p_1}(1)$ . Por outro lado,

$$\langle \tilde{\mu} \rho(\Delta)(p_1), p_2 \rangle = [\square''],$$

onde  $\square''(a) = \nabla_{p_1, ap_2}(1)$ , sendo que  $\langle \rho(\Delta)(p_1), p_2 \rangle = [\nabla'_{p_1, p_2}]$ . Por construção, tem-se  $\nabla'_{p_1, p_2} = \nabla_{p_2, p_1}$ . Desta forma,  $\square''(a) = \nabla_{ap_2, p_1}(1)$ . ■

De posse desse teorema, podemos definir o espaço das Lagrangeanas e os operadores de Euler e de Euler-Lagrange.

**Definição 4.20.** O espaço  $\text{Lag}(P)$ , das *Lagrangeanas quadráticas* sobre  $P$ , é definido como o cokernel do operador  $\omega : \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Sigma_1) \rightarrow \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})$ , i.e.,

$$\text{Lag}(P) = \frac{\text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})}{\text{Im}(\omega)}.$$

Um operador  $L \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})$  é dito ser uma *densidade* da Lagrangeana  $\mathcal{L} \in \text{Lag}(P)$  se  $\mathcal{L} = L \text{ mod Im}(\omega)$ .

Do Teorema 4.19, passando ao quociente,  $\mu$  dá origem ao isomorfismo

$$\text{Lag}(P) = \frac{\text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})}{\omega \left( \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Sigma_1) \right)} \simeq \left\{ \nabla \in \text{Dif}(P, \widehat{P}) \mid (\nabla(p))^\circ = \nabla(p) \right\}.$$

Este isomorfismo é chamado *operador de Euler*, e será denotado por  $\mathcal{E}^5$ .

Não vamos aqui introduzir algum tipo de princípio variacional. Nosso modesto objetivo é observar a relação entre o formalismo lagrangeano e as formas de Berezin.

Apesar de termos considerado somente Lagrangeanas quadráticas, os argumentos que usamos podem ser naturalmente generalizados. Por exemplo, definindo

$$\text{Dif}_{(k)}(P, Q) = \underbrace{\text{Dif}(P, \dots, \text{Dif}(P, Q) \dots)}_{k \text{ vezes}}$$

podemos generalizar, de maneira imediata, os resultados que obtivemos. Pode-se também generalizar para supervariedades, fazendo uso adequado da regra dos sinais. Para mais detalhes a respeito do formalismo lagrangeano, vide [40, 69].

### 4.5.1 O Formalismo Lagrangeano em Variedades

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional e  $R = C^\infty(M)$ . Nesse caso, temos  $\mathfrak{B} = \Lambda^n$ . Além disso, não é difícil ver que  $d_i^* = (-1)^{i+1} d_{n-i-1}$ , onde  $d_i : \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^{i+1}$  é o diferencial de De Rham.

Dado um  $R$ -módulo projetivo e finitamente gerado  $P$ , sejam  $L \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Lambda^n)$  e  $L(p, q) = L_p(q)$ , com  $p, q \in P$ . Consideremos a variação de  $L(p, p)$  (valor da densidade em  $p$ ) correspondendo à mudança de variável  $p \mapsto p + \varepsilon h$ , com  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e  $h \in P$ . Então, como  $L$  é  $\mathbb{R}$ -bilinear, temos

$$L(p + \varepsilon h, p + \varepsilon h) = L(p, p) + 2\varepsilon L(p, h) + \varepsilon^2 L(h, h).$$

O fato de  $p$  ser um extremo, significa que

$$\int_V L(p, h) = 0$$

para todo  $h \in P$  com  $h|_{\partial V} = 0$ , onde  $V \subset M$  é o domínio onde estamos resolvendo o problema variacional<sup>6</sup>.

Tendo em vista a relação  $L_p(h, 1) = L_p(h) = L(p, h)$ , a fórmula de Green aplicada a  $L_p(h, 1)$  fornece

$$L(p, h) - \langle L_p^*(1), h \rangle = dG,$$

onde  $G = G(L_p(h, 1))$ . Desta forma,

$$\int_V L(p, h) = \int_V (\langle L_p^*(1), h \rangle + dG).$$

<sup>5</sup>Existe uma pequena diferença entre as definições do operador de Euler. Em face desse isomorfismo, alguns autores chamam de operador de Euler à correspondência  $\mathbf{E} : \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B}) \rightarrow \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \hat{P})$ ,  $L \rightarrow \mathcal{L}$ , enquanto que os operadores da forma  $\Delta = \mathbf{E}(L)$  são chamados de *operadores de Euler-Lagrange*. Preferimos adotar aqui a definição mais tradicional, que é usada na construção do complexo variacional [38, 51, 65].

<sup>6</sup>Veja que, pelo Teorema de Swan, existe um fibrado vetorial  $\xi : E \rightarrow M$  tal que  $\Gamma(M, E) \simeq P$ . Por isso, pensamos em um elemento  $p \in P$  como uma seção de  $E$ .

Mas note que  $L_p^*(1) = \mu(L)(p) = \mathcal{E}(\mathcal{L})(p)$ .

Introduzindo a notação  $\mu(L) = \mathcal{E}_L$ , podemos então escrever:

$$\int_V L(p, h) = \int_V (\langle \mathcal{E}_L(p), h \rangle + dG).$$

Suponha que a variação  $h$  tenha suporte  $W$ . Então o suporte da forma  $G$  está contido em  $W$ , uma vez que  $h \mapsto G(L_p(h, 1))$  pode ser escolhido como um operador diferencial. Se  $\partial V \cap W = \emptyset$ , então

$$\int_V L(p, h) = \int_V \langle \mathcal{E}_L(p), h \rangle.$$

Uma vez que a expressão  $\langle \mathcal{E}_L(p), h \rangle$  é  $R$ -linear com respeito a  $h$ , a igualdade  $\int_V \langle \mathcal{E}_L(p), h \rangle = 0$  para todo  $h$  com suporte compacto contido em  $V$ , implica que  $\mathcal{E}_L(p) = 0$  [10], i.e.,

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}) = 0.$$

Isto mostra que o formalismo lagrangeano que introduzimos, coincide com o formalismo lagrangeano usual em variedades.

## 4.5.2 Leis de Conservação

Na última subseção, vimos que o formalismo lagrangeano que introduzimos coincide com o usual formalismo lagrangano em variedades. Aqui iremos além, definindo leis de conservação para uma equação diferencial linear.

A equação diferencial associada a um operador  $\Delta \in \text{Dif}_k(P, Q)$  é o conjunto dos pontos  $p \in P$  para os quais  $\Delta(p) = 0$ . Denotemos por  $E$  a equação diferencial associada a  $\Delta$ , i.e., o conjunto

$$E = \{p \in P \mid \Delta(p) = 0\}.$$

O operador  $\Delta$  dá origem a uma aplicação de cadeia  $\Omega_\Delta$  entre os complexos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Dif}(Q, \mathfrak{B}) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(Q, \Sigma_1) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(Q, \Sigma_2) & \xleftarrow{\omega} & \dots \\ & & \Omega_\Delta \downarrow & & \Omega_\Delta \downarrow & & \Omega_\Delta \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \text{Dif}(P, \mathfrak{B}) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(P, \Sigma_1) & \xleftarrow{\omega} & \text{Dif}(P, \Sigma_2) & \xleftarrow{\omega} & \dots \end{array}$$

Como em [70], definimos as *leis de conservação* para a equação  $E$ , como os elementos do primeiro grupo de homologia do complexo Coker  $\Omega_\Delta$ . Vamos denotar o grupo de leis de conservação da equação  $E$  por  $\text{LC}(\Delta) = H_1(\text{Coker } \Omega_\Delta)$ . O teorema e o corolário seguintes descrevem o grupo  $\text{LC}(\Delta)$  de uma maneira mais completa.

**Teorema 4.21.** *Existe uma seqüência exata*

$$0 \longrightarrow H_1(\text{Im } \Omega_\Delta) \longrightarrow H_0(\text{Ker } \Omega_\Delta) \longrightarrow \text{Ker } \Delta^* \longrightarrow \text{LC}(\Delta) \longrightarrow 0.$$

*Demonstração.* Por um processo padrão de álgebra homológica [58], dada uma seqüência exata curta de complexos, obtemos uma seqüência exata longa, relacionando a homologia dos três complexos. Desta forma, segue do Teorema 4.19 que as homologias das seqüências exatas curtas de complexos

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \Omega_{\Delta} \longrightarrow \text{Dif}(Q, \Sigma_*) \longrightarrow \text{Im } \Omega_{\Delta} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Im } \Omega_{\Delta} \longrightarrow \text{Dif}(P, \Sigma_*) \longrightarrow \text{Coker } \Omega_{\Delta} \longrightarrow 0$$

têm a forma

$$0 \longrightarrow H_1(\text{Im } \Omega_{\Delta}) \longrightarrow H_0(\text{Ker } \Omega_{\Delta}) \xrightarrow{i_1} \widehat{Q} \xrightarrow{i} H_0(\text{Im } \Omega_{\Delta}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_1(\text{Coker } \Omega_{\Delta}) \longrightarrow H_0(\text{Im } \Omega_{\Delta}) \xrightarrow{j} \widehat{P} \longrightarrow H_0(\text{Coker } \Omega_{\Delta}) \longrightarrow 0.$$

Por construção, a composição  $j \circ i : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{P}$  coincide com a adjunta  $\Delta^* : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{P}$ . Portanto,  $\text{Ker } \Delta^* / \text{Im } i_1$  é isomorfo a  $\text{Ker } j = \text{LC}(\Delta)$ . Com isso, obtemos a seqüência exata procurada. ■

Como uma conseqüência imediata deste teorema, temos o seguinte corário:

**Corolário 4.22.** *Se  $\text{Ker } \Omega_{\Delta} = 0$ , o grupo de leis de conservação  $\text{LC}(\Delta)$  é isomorfo a  $\text{Ker } \Delta^*$ .*

Vamos dar uma expressão mais explícita para a aplicação  $\text{Ker } \Delta^* \rightarrow \text{LC}(\Delta)$ . Para isso, suponha que  $\hat{q} \in \text{Ker } \Delta^* \subset \widehat{Q}$ . Então, pelas considerações que fizemos após a demonstração da fórmula de Green, temos um operador diferencial  $p \mapsto G(\Delta(p, \hat{q}))$ , tal que

$$\langle \Delta(p), \hat{q} \rangle = \delta G(\Delta(p, \hat{q})).$$

Logo, o operador  $p \mapsto G(\Delta(p, \hat{q}))$  é um 1-cociclo do complexo  $\text{Coker } \Omega_{\Delta}$ , de maneira que obtemos uma aplicação  $\chi : \text{Ker } \Delta^* \rightarrow \text{LC}(\Delta)$ , onde  $\chi(\hat{q})$  é a lei de conservação correspondendo ao operador  $p \mapsto G(\Delta(p, \hat{q}))$ . Vamos ver que esta é a aplicação que procuramos.

Se  $\nabla$  é um 1-cociclo de  $\text{Coker } \Omega_{\Delta}$ , de acordo com a demonstração do Teorema 4.21, o elemento  $\hat{q} \in \text{Ker } \Delta^*$  correspondente a ele pode ser encontrado como  $\hat{q} = \mu(\square)$ , onde  $\square \in \text{Dif}(Q, \mathfrak{B})$  satisfaz a relação  $\square \circ \Delta = \delta \circ \nabla$ . Se  $\nabla$  é o operador  $p \mapsto G(\Delta(p, \hat{q}))$ , então  $\square = \hat{q} \in \text{Dif}(P, \mathfrak{B})$  e  $\mu(\square) = \mu(\hat{q}) = \hat{q}$ .

Um aprofundamento maior no estudo das leis de conservação, fatalmente esbarra na idéia de características. Não desenvolveremos esta teoria aqui, pois foge ao escopo de nossos propósitos. Para mais detalhes a esse respeito, bem como para exemplos onde  $R = C^{\infty}(M)$ , com  $M$  uma variedade diferenciável, vide [70]

### 4.5.3 O Teorema de Noether

Vamos começar descrevendo as transformações dos objetos que o teorema de Noether inclui. Para isso, considere os pares  $(X_p, X)$  tais que  $X \in D_1(R)$ ,  $X_p \in \text{Dif}_1(P, P)$  onde  $X_p(ap) = aX_p(p) + X(a)p$  para todos os  $a \in R$  e  $p \in P$ . Denotamos por  $\text{Der}(P)$  o conjunto de todos esses pares.

Assim, se  $X \in D_1(R)$  então  $(X_{\mathfrak{B}}, X) \in \text{Der}(\mathfrak{B})$ , onde  $X_{\mathfrak{B}} = -X^*$ <sup>7</sup>.

Dado  $(X_p, X) \in \text{Der}(P)$ , definimos  $(X_{\text{Dif}}, X) \in \text{Der}(\text{Dif}(P, \mathfrak{B}))$  pela fórmula

$$X_{\text{Dif}}(\Delta) = [X, \Delta] = X_{\mathfrak{B}} \circ \Delta - \Delta \circ X_{\mathfrak{B}}.$$

Para  $L \in \text{Dif}(P, \text{Dif}(P, \mathfrak{B}))$ , colocamos  $X_p(L) = X_{\text{Dif}} \circ L - L \circ X_p$ . Se  $L \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})$ , é fácil ver que  $X_p(L) \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})$ . Desta forma,  $X_p$  gera uma aplicação das Lagrangeanas de  $P$ .  $X_p(L)$  é chamado de *variação* de  $L$  sob a transformação infinitesimal  $X_p$ .

Da definição de variação, segue que

$$X_p(L)(p_1)(p_2) = X_{\mathfrak{B}}(L(p_1)(p_2)) - L(p_1)(X_p(p_2)) - L(X_p(p_1))(p_2).$$

Além disso, usando a quinta afirmação da Proposição 4.16, temos

$$X_{\mathfrak{B}}(L(p_1)(p_2)) = -\delta(L(p_1)(p_2) \circ X).$$

Como vimos na subseção anterior, das considerações que fizemos após a demonstração da fórmula de Green, temos que, para todos os  $p_1, p_2 \in P$ ,

$$L(p_1, p_2) = \langle \mathcal{E}_L(p_1), p_2 \rangle + \delta G(L_{p_1}(p_2, 1)),$$

onde  $G$  é tomado como sendo um operador bidiferencial.

Combinando essas duas fórmulas, obtemos o teorema seguinte:

**Teorema 4.23 (Fórmula para a Primeira Variação).** *Sejam  $(X_p, X) \in \text{Der}(P)$  e  $L \in \text{Dif}(P, \text{Dif}(P, \mathfrak{B}))$ . Se definimos  $X_p(L) \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \mathfrak{B})$  vale que*

$$X_p(L)(p_1)(p_2) = - \langle X_p(p_2), \mathcal{E}_L(p_1) \rangle - \langle X_p(p_1), \mathcal{E}_L(p_2) \rangle - \delta n(p_1, p_2),$$

onde  $n(p_1, p_2) = L(p_1)(p_2) \circ X + G(p_1, X_p(p_2)) + G(p_1, X_p(p_2))$ .

Assim, podemos finalmente definir simetria para uma Lagrangeana  $\mathcal{L} \in \text{Lag}(P)$ .

**Definição 4.24.**  $X_p \in \text{Der}(P)$  é dita ser uma *simetria* da Lagrangeana  $\mathcal{L}$  se  $X_p(\mathcal{L}) = 0$ .

Pelo Teorema 4.19, uma simetria da Lagrangeana  $\mathcal{L}$  é uma simetria do operador  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \mathcal{E}(\mathcal{L})$ , i.e.,  $X_p(\mathcal{E}_{\mathcal{L}}) = X_{\hat{P}} \circ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} - \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \circ X_p = 0$  e reciprocamente.

<sup>7</sup>Mais geralmente, se  $(X_p, X) \in \text{Der}(P)$ , podemos definir  $(X_{\hat{P}}, X) \in \text{Der}(\hat{P})$  como  $X_{\hat{P}} = -(X_p)^*$ .

**Teorema 4.25 (Noether).** *Se  $X_p$  é uma simetria da Lagrangeana  $\mathcal{L} = L \bmod \text{Im}(\omega)$ , e o módulo  $P$  é projetivo, então a aplicação  $p \mapsto n(p, p) + L'(p)(p)$ ,  $p \in P$  dá origem a uma lei de conservação da equação  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .*

*Demonstração.* Se  $X_p$  é uma simetria de  $\mathcal{L}$ , então  $X_p(L) = \omega(L')$ , onde  $L$  é uma densidade de  $\mathcal{L}$ , e  $L' \in \text{Dif}_{(2)}^{\text{sim}}(P, \Sigma_1)$ . Considerando a 1-forma integral  $n(p_1, p_2) + L'(p_1)(p_2)$ , a fórmula para a primeira variação implica que esta forma é fechada para todos os  $p_1, p_2 \in \text{Ker } \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ . Portanto, como a classe de homologia desta forma não depende da particular escolha de  $L'$ , nem do homomorfismo  $\kappa$  (que tomamos para que  $G$  fosse escolhido de modo a ser um operador bidiferencial), o teorema é provado. ■

A forma  $n(p) = n(p, p)$  faz o papel da corrente de Noether clássica. No caso clássico do cálculo de variações, a Lagrangeana  $\mathcal{L} = \int_V L$  é dita ser invariante com respeito a alguma transformação se a “ação”  $\int_V L$  não é alterada para um domínio compacto arbitrário  $V$ . Isto é equivalente à invariância da densidade da Lagrangeana  $L$  com respeito à transformação. Por esta razão,  $X_p$  é chamado simetria da densidade da Lagrangeana  $L$  se  $X_p(L) = 0$ . Isso implica que  $X_p(\mathcal{E}_L) = 0$  toda vez que  $X_p$  é uma simetria da densidade de  $L$ . Em particular,  $X_p(p) \in \text{Ker } \mathcal{E}_L$  quando  $p \in \text{Ker } \mathcal{E}_L$ .

Para mais detalhes a respeito do teorema de Noether em variedades vide [70]

## Capítulo 5

# Considerações Finais: Em Direção a uma Versão Algébrica para o Teorema do Índice

É inegável o fato de que o teorema do índice de Atiyah-Singer seja um dos maiores resultados do século. A vastidão de suas conseqüências abriram novos horizontes tanto na matemática quanto na física. Em sua versão original [3, 4], o índice de um operador se relaciona com o caráter de Chern, a classe de Euler e a classe de Todd. Isto mostra a natureza tanto topológica quanto analítica do problema. Entretanto, com o advento da Geometria não-Comutativa de Allain Connes, aplicações à álgebra tornaram-se possíveis. Um exemplo disso é o trabalho [18] de Gerd Faltings.

Já em 1972, Vinogradov apontava para uma versão algébrica do teorema do índice [67]. Sua idéia era bem simples: dado  $\Delta \in \text{Dif}_s(P, Q)$ , denotamos por  $\Delta_t$  a composição

$$\text{Dif}_t^+(P) \xrightarrow{\Pi} P \longrightarrow Q.$$

Esta composição é chamada *t-extensão* do operador  $\Delta$ . Denotamos por  $b_t = b_t(\Delta) : \text{Dif}_t^+(P) \rightarrow \text{Dif}_{s+t}(Q)$  o homomorfismo correspondente ao operador  $\Delta_t$ . Tomando o limite algébrico quando  $t \rightarrow \infty$ , obtemos um homomorfismo de módulos filtrados

$$b_* : \text{Dif}^+(P) \rightarrow \text{Dif}^+(Q).$$

Tanto  $b_t$  quanto  $b_*$  induzem, ao nível dos símbolos, homomorfismos graduados, os quais denotamos por  $\bar{b}_t : \text{Smb}_t(P) \rightarrow \text{Smb}_t(Q)$  e  $\bar{b}_* : \text{Smb}(P) \rightarrow \text{Smb}(Q)$ . Note que  $\bar{b}_0(\Delta) = \text{Smb}(\Delta)$  é a aplicação que leva  $\Delta$  em seu símbolo. O homomorfismo  $\bar{b}_*$  é chamado de *símbolo total* do operador  $\Delta$ .

Com base nessas idéias, Vinogradov [67] propôs a seguinte definição para um operador elíptico:

**Definição 5.1.** Um operador  $\Delta : P \rightarrow Q$  é dito ser *elíptico* se seu símbolo total  $\bar{b}_* : \text{Smb}(P) \rightarrow \text{Smb}(Q)$  é uma equivalência “birracional” [26] dos módulos graduados  $\text{Smb}(P)$  e  $\text{Smb}(Q)$ .

Em particular, esta definição aponta para a natureza algébrica da elipticidade. Em [67] ele afirmou que apresentaria uma generalização algébrica para o teorema do índice em outro artigo. Entretanto, até agora, tal generalização ainda não apareceu.

Uma generalização deste tipo, fatalmente esbarra em diversas dificuldades, que só podem ser superadas por meio de métodos da Geometria não-Comutativa.

As primeiras idéias para um teorema do índice, como o conhecemos hoje, veio do estudo do Teorema de Riemann-Roch, feito por Grothendieck. Em [18] encontramos uma descrição mais precisa a esse respeito. Com base nisso, vários artigos foram publicados, abordando o problema [12, 17, 21, 27, 48, 49, 55].

Uma das abordagens que obteve mais sucesso, usa um misto de idéias da Física, a respeito de quantização por deformações, e métodos da Geometria não-Comutativa.

Uma *quantização por deformação* [6, 48] sobre uma variedade  $M$  é uma deformação formal a 1-parâmetro do feixe estrutural  $\mathcal{O}_M$  [12, 24, 26, 44], i.e., um feixe de álgebras  $\mathbb{A}_M^{\hbar}$  sobre o anel das séries formais  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  munido de um isomorfismo de álgebras  $\mathbb{A}_M^{\hbar} \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_M$ . Nesse contexto, a fórmula

$$\{f, g\} = \frac{1}{\hbar} [\bar{f}, \bar{g}] + \hbar \cdot \mathbb{A}_M^{\hbar},$$

onde  $f$  e  $g$  são duas seções locais de  $\mathcal{O}_M$ , e  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  são seus respectivos levantamentos a  $\mathbb{A}_M^{\hbar}$ , define um colchete de Poisson sobre  $M$ , associado à quantização por deformação  $\mathbb{A}_M^{\hbar}$ .

Essas quantizações estão associadas às classes características da variedade [12, 48, 49]. Por esse motivo, usando cohomologia de Hochschild e o caráter de Chern algébrico, pode-se mostrar que, se  $M = T^*X$  para uma variedade complexa  $X$  e  $\mathbb{A}_{T^*X}^{\hbar}$  é a quantização por deformação com classe característica  $\theta = \frac{1}{2}\pi^*(c_1(X))$ , então

$$\widehat{A}(TM) \cup e^{\theta} = \pi^* \text{Td}(TX),$$

onde  $\widehat{A}(TM)$  é o  $\widehat{A}$ -genus de  $TM$  e  $\text{Td}(TX)$  é a classe de Todd de  $TX$ . Esta é, na verdade, uma generalização do teorema de Riemann-Roch e, como o lado direito da igualdade não depende de  $\hbar$ , obtém-se a conjectura de P. Schapira e J. P. Schneiders [49, 59].

Nesse contexto, é possível estabelecer uma versão algébrica para o teorema do índice, segundo [49]. Ela é baseada na seguinte idéia geométrica: dada uma variedade simplética  $2n$ -dimensional  $(M, \omega)$  com um produto estrela  $*$ , definido por<sup>1</sup>

$$f * g = \sum (i\hbar)^k \varphi_k(f, g),$$

tomamos  $\mathbb{A}^{\hbar}(M) = C^{\infty}(M)[[\hbar]]$  munida do produto  $*$ , e colocamos  $\mathbb{A}_c^{\hbar}(M) = C_c^{\infty}(M)[[\hbar]]$ . O seguinte teorema foi provado em [49]. Considere o traço canônico

$$\text{Tr}(f) = \frac{1}{(i\hbar)^n n!} \left( \int_M f \omega^n + \sum_{k=1}^{\infty} (i\hbar)^k D_k(f) \omega^n \right),$$

<sup>1</sup>Para mais detalhes a respeito da construção desse produto, vide [27].

onde  $D_k$  são certos operadores diferenciais.

Tomemos dois elementos  $X = X^2$  e  $Y = Y^2$ , da álgebra matricial  $M_N(\mathbb{A}^{\hbar}(M))$ , tais que  $X - Y \in M_N(\mathbb{A}_c^{\hbar}(M))$ . Colocando  $X_0 = X \bmod \hbar$  e  $Y_0 = Y \bmod \hbar$ , temos que

$$\text{ch}(X_0) = \sum_k \frac{1}{k!} \text{tr} X_0 (dX_0)^{2k}$$

é o caráter de Chern da conexão  $dX_0$  no fibrado vetorial  $X_0 \mathbb{C}^N$  [48, 49].

Recordemos que, a cada quantização por deformação de  $M$ , está associada uma classe característica  $\theta$ , definida como um elemento de  $H^2(M)[[\hbar]]$ , onde  $\theta/i\hbar$  é a curvatura da conexão de Fedosov definindo a deformação [49]. Com isso, temos a seguinte versão para o teorema do índice [49]:

**Teorema 5.2.**

$$\text{Tr}(X - Y) = \int_M (\text{ch}(X_0) - \text{ch}(Y_0)) \widehat{A}(TM) e^{\theta/i\hbar},$$

onde  $\theta$  é a classe característica associada a  $*$ .

Com base nessas idéias de Nest e Tsygan, em conjunto com as concepções algébricas de Vinogradov, podemos definir um colchete de Poisson, como indicamos no Capítulo 3, para módulos sobre uma variedade. Para isso, precisaremos introduzir uma conexão, que cindirá o complexo variacional [64] em partes horizontal e vertical, levando, inevitavelmente, ao estudo da parte horizontal. Acreditamos que o processo de quantização por deformação, aplicado a esse complexo, produza uma versão puramente algébrica para o teorema do índice. Tal estudo foge ao escopo desta tese, mas, não poderíamos deixar de vislumbrá-lo mediante a teoria que desenvolvemos até este ponto.

# Apêndice A

## Limites Algébricos

Os limites algébricos surgem em diversas aplicações tais como a demonstração das dualidades de Poincaré e Alexander sobre variedades, onde os módulos de cohomologia não são, em geral, os módulos de cohomologia singular, mas outros obtidos através deles por meio do processo de passagem ao limite. Além disso, o completamento  $I$ -ádico de um anel é obtido por meio de um limite [58].

Para se estudar limites, a primeira noção que se faz necessária é a de *proximidade*, e assim, precisamos de um sentido mais abstrato de ordem. Esta é dada por meio de conjunto dirigido.

**Definição A.1.** Um *conjunto dirigido*  $\mathcal{A}$  é um conjunto munido de uma relação  $\leq$  tal que:

1.  $\alpha \leq \alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .
2.  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \gamma$  implica  $\alpha \leq \gamma$ .
3. Para todos os  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  existe  $\gamma \in \mathcal{A}$  tal que  $\alpha \leq \gamma$  e  $\beta \leq \gamma$ .

As propriedades 1. e 2. definem o que chamamos de *conjunto pré-ordenado*. O elemento  $\gamma$  na parte 3 da definição, é dito ser um *limitante superior* de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Note que dois elementos quaisquer de um conjunto dirigido podem não ser comparáveis. Em vista da definição, isto é perfeitamente possível. Vejamos alguns exemplos que elucidam esta situação:

**Exemplo A.2.** A classe dos subconjuntos finitos de um conjunto  $X$ , com a ordem parcial dada pela inclusão, é um conjunto dirigido. Note que dois subconjuntos finitos de  $X$  não necessariamente são comparáveis nesse caso.

**Exemplo A.3.** Sejam  $K$  um subconjunto de um conjunto  $X$ , e  $\mathcal{A}$  a classe de todos os subconjuntos que contêm  $K$ . Colocamos em  $\mathcal{A}$  uma relação de ordem parcial dada da seguinte maneira: se  $A, B \in \mathcal{A}$ , definimos  $A \leq B$  se e somente se  $B \subset A$ . Assim, para cada par  $A, B \in \mathcal{A}$ , tem-se  $A \leq A \cap B$  e  $B \leq A \cap B$ , mostrando que  $\mathcal{A}$  é um conjunto dirigido.

**Exemplo A.4.** Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto dos inteiros não nulos. Colocamos em  $\mathcal{A}$  a seguinte relação de ordem: dados  $m, n \in \mathcal{A}$ , dizemos que  $m \leq n$  se e somente se  $m$  divide  $n$ . Para quaisquer elementos  $m, n \in \mathcal{A}$ , o mínimo múltiplo comum  $\text{mmc}(m, n)$  é tal que  $m \leq \text{mmc}(m, n)$  e  $n \leq \text{mmc}(m, n)$ . Desta forma,  $\mathcal{A}$  é um conjunto dirigido.

A noções que daremos a seguir, de uma certa maneira, relembram a idéia de rede. Aqui, no entanto, temos uma rede de conjuntos. Isto é necessário para obtermos uma noção, ainda que primitiva, de convergência.

**Definição A.5.** Um *sistema indutivo (ou direto)* de conjuntos  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ , é uma função que, a cada  $p \in \mathcal{A}$ , associa um conjunto  $M_p$ , e a cada par  $p, q \in \mathcal{A}$ , com  $p \leq q$ , uma aplicação

$$\varphi_p^q : M_p \rightarrow M_q$$

tal que  $\varphi_p^p =$  identidade, e para  $p \leq q \leq r$  em  $\mathcal{A}$ ,

$$\varphi_q^r \circ \varphi_p^q = \varphi_p^r.$$

Analogamente, se quando  $p \leq q$ , contrariamente à definição anterior, as aplicações  $\varphi_p^q$  forem tais que  $\varphi_p^q : M_p \leftarrow M_q$ , temos a noção dual de sistema indutivo. Aqui, por razões psicológicas, revertamos a flecha  $M_p \leftarrow M_q$ . Desta maneira, podemos imaginar o sistema dual como sendo um sistema indutivo onde as flechas entre os conjuntos  $M_p$  são invertidas. Desta forma, a definição seguinte faz sentido:

**Definição A.6.** Um *sistema projetivo (inverso)* de conjuntos  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$  é uma função que a cada  $p \in \mathcal{A}$  associa um conjunto  $M_p$ , e a cada par  $p, q \in \mathcal{A}$ , com  $p \leq q$ , uma aplicação

$$\varphi_p^q : M_p \leftarrow M_q$$

tal que  $\varphi_p^p =$  identidade, e para  $p \leq q \leq r$  em  $\mathcal{A}$ ,

$$\varphi_q^r \circ \varphi_p^q = \varphi_p^r.$$

Em um sistema indutivo (projetivo), as aplicações  $\varphi_p^q$  são chamadas *projeções do sistema*. Se cada  $M_p$  é um espaço topológico, ou um  $R$ -módulo, ou um grupo topológico, e cada projeção é, respectivamente, contínua,  $R$ -linear, um homomorfismo contínuo, então  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  é dito ser um sistema indutivo (projetivo) de espaços topológicos,  $R$ -módulos, ou grupos topológicos, respectivamente.

**Definição A.7.** Sejam  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  e  $\{N_r, \psi_r^s\}$  sistemas indutivos sobre conjuntos dirigidos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Uma aplicação

$$\Lambda : \{M_p, \varphi_p^q\} \rightarrow \{N_r, \psi_r^s\}$$

consiste de uma aplicação  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , e para cada  $p \in \mathcal{A}$ , de uma aplicação

$$\lambda_p : M_p \rightarrow N_{\lambda(p)}$$

tal que, se  $p \leq q$  em  $\mathcal{A}$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{\varphi_q^p} & M_q \\ \lambda_p \downarrow & & \downarrow \lambda_q \\ N_{\lambda(p)} & \xrightarrow[\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)}]{} & N_{\lambda(q)} \end{array}$$

é comutativo.

Não é difícil imaginar a definição análoga de aplicação entre sistemas projetivos.

Para isso, basta introduzir as flechas invertidas  $M_p \xleftarrow{\varphi_p^q} M_q$  e  $N_{\lambda(p)} \xleftarrow[\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)}]{} N_{\lambda(q)}$ , e exigir a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xleftarrow{\varphi_p^q} & M_q \\ \lambda_p \downarrow & & \downarrow \lambda_q \\ N_{\lambda(p)} & \xleftarrow[\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)}]{} & N_{\lambda(q)} \end{array}$$

Toda vez que os sistemas indutivos (projetivos) são sistemas de espaços topológicos, ou de grupos, etc., as componentes  $\lambda_p$  da aplicação  $\Lambda$  são requeridas serem contínuas, ou homomorfismos de grupos, etc. Caso

$$\Lambda : \{M_p, \varphi_p^q\} \rightarrow \{N_r, \psi_r^s\}, \quad \Theta : \{N_r, \psi_r^s\} \rightarrow \{T_m, \tau_m^t\},$$

sejam duas aplicações de sistemas indutivos (projetivos), sua composição

$$\Theta \circ \Lambda : \{M_p, \varphi_p^q\} \rightarrow \{T_m, \tau_m^t\}$$

está definida, e consiste das composições  $\theta \circ \lambda$  e  $\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(\cdot)} \circ \varphi_p^q$ ,  $p \in \mathcal{A}$ .

Não é difícil verificar que os sistemas indutivos (projetivos) de qualquer tipo especificado formam uma categoria. De fato, se  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  é um sistema indutivo (projetivo), a aplicação identidade  $\Lambda$  é a composta pelas identidades  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  e  $\lambda_p : M_p \rightarrow M_p$  (resp.  $\lambda_p : M_p \leftarrow M_p$ ).

Vejamos agora alguns exemplos de sistemas indutivos e projetivos:

**Exemplo A.8.** Para qualquer conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ , fixe um  $R$ -módulo  $M$  e coloque  $M_p = M$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , e  $\varphi_p^q = \text{id}_M$  para todos os  $p \leq q$ . Este é o sistema indutivo e projetivo constante com conjunto de índices  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo A.9.** Seja  $\mathcal{A}$  tendo a ordem parcial trivial:  $p \leq q$  se e somente se  $p = q$ . Um sistema indutivo (ou projetivo) sobre  $\mathcal{A}$  é uma família indexada  $\{M_p : p \in \mathcal{A}\}$ .

**Exemplo A.10.** Seja  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$  com a ordem parcial  $1 \leq 2$  e  $2 \leq 3$ . Um sistema projetivo sobre  $\mathcal{A}$  é um diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longleftarrow & M_2 \\ & & \uparrow \\ & & M_3 \end{array}$$

**Exemplo A.11.** Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto dos inteiros positivos com a ordem parcial usual. Um sistema indutivo sobre  $\mathcal{A}$  é uma seqüência  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$ , e um sistema projetivo sobre  $\mathcal{A}$  é uma seqüência  $M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \dots$ .

**Exemplo A.12.** Seja  $M$  um módulo. Então a família de todos os submódulos finitamente gerados de  $M$ , é um conjunto dirigido, com a ordem parcial dada pela inclusão. Esta família, juntamente com todas as possíveis aplicações de inclusão, é um sistema indutivo.

**Exemplo A.13.** Se  $M = \bigoplus_{p \in \mathcal{A}} M_p$ , então a família de todas as somas parciais  $M_{p_1} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$  é parcialmente ordenada pela inclusão. Esta família, munida de todas as projeções em cada fator da soma, é um sistema projetivo.

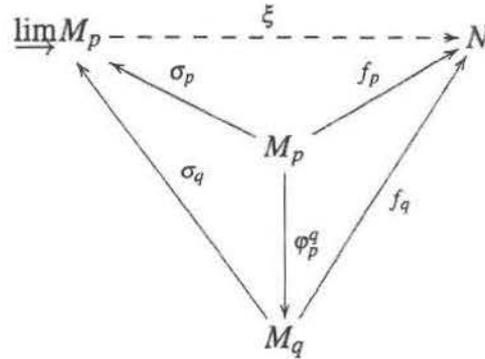
Daqui para frente, convencionamos que todos os sistemas indutivos ou projetivos em questão, são de grupos abelianos e homomorfismos de grupos abelianos. Outras estruturas, tais como anéis, módulos, espaços topológicos, etc, possuem um tratamento similar, de modo que deixamos a cargo do leitor fazer as adaptações necessárias aos casos que lhes interessem.

**Definição A.14.** seja  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  um sistema indutivo de grupos abelianos sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ . O *limite indutivo* (ou *limite direto*, ou simplesmente o *limite*) deste sistema é um grupo abeliano, denotado por  $\varinjlim M_p$ , e uma família de homomorfismos

$$\sigma_p : M_p \rightarrow \varinjlim M_p$$

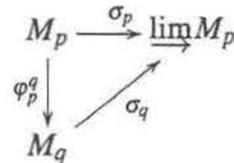
com  $\sigma_p \circ \varphi_p^q$  se  $p \leq q$ , satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo grupo abeliano  $N$  e toda família de homomorfismos  $f_p : M_p \rightarrow N$  com  $f_p = f_q \circ \varphi_p^q$ , sempre que  $p \leq q$ , existe um único homomorfismo  $\xi : \varinjlim M_p \rightarrow N$  fazendo com que o

diagrama

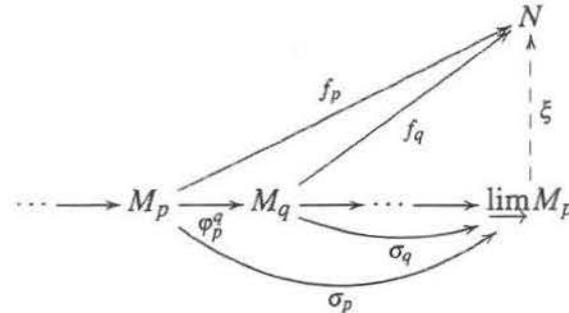


seja comutativo.

A condição  $\sigma_p = \sigma_q \circ \varphi_p^q$  na definição, nada mais é que a comutatividade do diagrama



A propriedade universal pode, então, ser entendida como: para todo grupo abeliano  $N$  e toda família de homomorfismos  $f_p : M_p \rightarrow N$  satisfazendo  $f_p = f_q \circ \varphi_p^q$ , toda vez que  $p \leq q$ , existe um único homomorfismo  $\xi : \varprojlim M_p \rightarrow N$  tal que  $f_p = \xi \circ \sigma_p$ , para todo  $p \in \mathcal{A}$ . Visualmente, esse fato é ilustrado por meio do diagrama

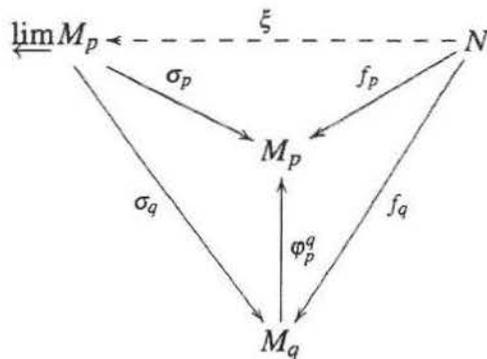


É claro que existe também uma propriedade universal como essa, para os sistemas projetivos. Sendo a interpretação desta análoga à dos limites indutivos, deixamo-la a cargo do leitor.

**Definição A.15.** Seja  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  um sistema projetivo de grupos abelianos sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ . O *limite projetivo* (ou *inverso*, ou simplesmente *limite*) deste sistema é um grupo abeliano, denotado por  $\varprojlim M_p$ , e uma família de homomorfismos

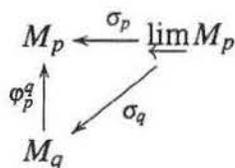
$$\sigma_p : M_p \leftarrow \varprojlim M_p$$

com  $\sigma_p = \varphi_p^q \circ \sigma_q$  se  $p \leq q$ , satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo grupo abeliano  $N$  e toda família de homomorfismos  $f_p : M_p \leftarrow N$  com  $f_p = \varphi_p^q \circ f_q$ , sempre que  $p \leq q$ , existe um único homomorfismo  $\xi : \varprojlim M_p \leftarrow N$ , fazendo com que o diagrama



seja comutativo.

Como no caso dos limites indutivos, a condição  $\sigma_p = \sigma_q \circ \varphi_p^q$  é equivalente à comutatividade do diagrama



Como é usual em álgebra, a menos de isomorfismo, as propriedades universais que definem os limites indutivo e projetivo implicam na unicidade destes. Para se ter uma idéia a respeito dos chamados *problemas universais*, que visam à construção de objetos (tais como os produtos tensorial e exterior) por meio de propriedades universais, vide [50]. No que segue, mostraremos a existência e a unicidade dos limites.

**Proposição A.16.** *O limite de um sistema indutivo  $\{M_p, \varphi_p^q\}$ , sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ , existe e é único (a menos de isomorfismo).*

*Demonstração.* A unicidade, a menos de isomorfismo, segue diretamente da propriedade universal. De fato, dois limites indutivos são isomorfos. Quanto à existência, para cada  $p \in \mathcal{A}$ , seja  $\lambda_p : M_p \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{A}} M_p$  a  $p$ -ésima injeção na soma. Defina o quociente

$$\varinjlim M_p = \left( \bigoplus_{p \in \mathcal{A}} M_p \right) / S,$$

onde  $S$  é o subgrupo abeliano gerado por todos os elementos da forma  $(\lambda_q \circ \varphi_p^q)(a_p) - \lambda_p(a_p)$ , com  $a_p \in M_p$  e  $p \leq q$ . Se, além disso, definimos  $\sigma_p : M_p \rightarrow \varinjlim M_p$  por  $a_p \mapsto \lambda_p(a_p) + S$  então se nota facilmente que o grupo abeliano  $\varinjlim M_p$ , juntamente com os homomorfismos  $\sigma_p$ , satisfazem a definição de limite indutivo. ■

Na demonstração, não fizemos uso do fato de  $\mathcal{A}$  ser um conjunto dirigido. Na verdade, apenas usamos que  $\mathcal{A}$  é um conjunto pré-ordenado. A necessidade de  $\mathcal{A}$  ser um conjunto dirigido somente aparecerá quando considerarmos seqüências exatas. Muitos autores, em se tratando de limites, apenas tomam  $\mathcal{A}$  um conjunto pré-ordenado. Para mais detalhes a esse respeito, vide [58]. Veja ainda que o conjunto  $S$  pode ser caracterizado como

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n a_{p_i} : \text{existe } q \in \mathcal{A}, q \geq p_i \text{ para todo } i, \text{ e } \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}^q(a_{p_i}) = 0 \right\}$$

Além disso,  $a_p \in M_p$  e  $a_q \in M_q$  são iguais no limite se, para algum  $r \in \mathcal{A}$ , com  $p \leq r$  e  $q \leq r$ , vale  $\varphi_p^r(a_p) = \varphi_q^r(a_q)$ , i.e., uma classe de equivalência do limite é formada pelos elementos que “estabilizam” com o “crescimento” dos índices de  $\mathcal{A}$ .

O limite indutivo foi construído como o quociente de uma soma, gerando assim uma sobrejeção. A noção dual, de limite projetivo, nos vem então à mente, como algum tipo de injeção em um produto de módulos. A proposição abaixo traz um pouco mais de luz neste assunto:

**Proposição A.17.** *O limite de um sistema projetivo  $\{M_p, \varphi_p^q\}$ , sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ , existe e é único (a menos de isomorfismo).*

*Demonstração.* A unicidade, a menos de isomorfismo, segue diretamente da propriedade universal. De fato, dois limites projetivos são isomorfos. Quanto à existência, considere o grupo abeliano produto  $\prod_{p \in \mathcal{A}} M_p$  e, para cada  $p \in \mathcal{A}$ , seja  $\lambda : \prod_{p \in \mathcal{A}} M_p \rightarrow M_p$  a  $p$ -ésima projeção. Defina o subgrupo abeliano

$$\varprojlim M_p = \left\{ (a_p)_{p \in \mathcal{A}} \in \prod_{p \in \mathcal{A}} M_p : a_p = \varphi_p^q(a_q), \text{ sempre que } p \leq q \right\}.$$

Se, além disso, definimos  $\sigma_p : M_p \leftarrow \varprojlim M_p$  como sendo a restrição  $\lambda_p|_{\varprojlim M_p}$ , nota-se facilmente que o grupo abeliano  $\varprojlim M_p$ , juntamente com os homomorfismos  $\sigma_p$ , satisfazem a propriedade universal que define o limite projetivo. ■

Novamente, não fizemos uso do fato de  $\mathcal{A}$  ser um conjunto dirigido. Neste caso, realmente não há muito sentido em se considerar um conjunto dirigido, uma vez que os limites projetivos gozam de um comportamento restritivo, no que se refere a seqüências exatas. Mais adiante, veremos que o limite projetivo de uma seqüência exata, em geral, não é exata.

Vamos agora determinar alguns dos limites dos sistemas indutivos e projetivos, apresentados nos exemplos anteriores.

**Exemplo A.18.** O limite indutivo e projetivo do sistema constante do exemplo A.8 é  $M$ .

**Exemplo A.19.** Se  $\mathcal{A}$  possui a ordem parcial trivial, como no exemplo A.9, temos

$$\varprojlim M_p = \prod_{p \in \mathcal{A}} M_p.$$

Para ver isso, note que não existem aplicações  $\varphi_p^q$  quando  $p \neq q$ . Isto mostra que o submódulo  $\varprojlim M_p$  é todo  $\prod_{p \in \mathcal{A}} M_p$ .

Além desses exemplos, temos algumas propriedades que seguem diretamente da caracterização dos limites indutivo e projetivo como quociente.

**Proposição A.20.**

1. Assuma que  $\mathcal{A}$  é o conjunto dos inteiros positivos com a ordem usual, e que temos uma seqüência decrescente  $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ . Então  $\varprojlim M_p \simeq \bigcap_{p=1}^{\infty} M_p$ .
2. Seja  $M$  um grupo abeliano, e  $\mathcal{A}$  a família de todos os subgrupos finitamente gerados de  $M$ , com a ordem parcial dada pela inclusão. Esta família, munida de todas as possíveis aplicações de inclusão, é um sistema indutivo, cujo limite indutivo é o próprio  $M$ .
3.  $\bigoplus_{p \in \mathcal{A}} M_p \simeq \varinjlim (M_{p_1} \oplus \dots \oplus M_{p_n})$ , o limite de todas as "somadas parciais" finitas.

Nosso objetivo, agora, é examinar o comportamento de seqüências exatas mediante limites, i.e., se o limite de uma seqüência exata de sistemas indutivos ou projetivos é ainda uma seqüência exata. Teremos de tratar separadamente os dois tipos de limites, pois nem sempre o limite de uma seqüência exata de sistemas projetivos será exata.

Consideremos primeiramente os sistemas indutivos, que é onde temos algumas boas propriedades.

**Definição A.21.** Seja  $\Lambda : \{M_p, \varphi_p^q\} \rightarrow \{N_r, \psi_r^s\}$  uma aplicação de um sistema indutivo sobre  $\mathcal{A}$  em um sistema indutivo sobre  $\mathcal{B}$ . Os homomorfismos  $\lambda_p : M_p \rightarrow N_{\lambda(p)}$  são componentes de um homomorfismo  $\Theta : \bigoplus_{p \in \mathcal{A}} M_p \rightarrow \bigoplus_{r \in \mathcal{B}} N_r$ . Como  $\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)} \circ \lambda_p = \lambda_q \circ \varphi_p^q$ , para  $p \leq q$ ,  $\Theta$  induz um homomorfismo

$$\theta : \varinjlim M_p \rightarrow \varinjlim N_r,$$

chamado *limite indutivo* de  $\Lambda$ .

Olhando para a relação de equivalência que usamos na construção do limite indutivo, se  $a_p \in M_p$  está relacionado com  $a_q \in M_q$ , então  $\lambda_p(a_p) = \lambda_q(a_q)$ . Portanto,  $\Lambda$  aplica uma classe de equivalência de  $\varinjlim M_p$  em uma de  $\varinjlim N_r$ . A aplicação induzida entre essas classes é precisamente  $\theta$ . Além disso, temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{\sigma_p} & \varinjlim M_p \\ \lambda_p \downarrow & & \downarrow \theta \\ N_{\lambda(p)} & \xrightarrow{\tau_{\lambda(p)}} & \varinjlim N_r \end{array}$$

onde  $\sigma_p$  e  $\tau_r$  são os homomorfismos induzidos pelos limites indutivos  $\varinjlim M_p$  e  $\varinjlim N_r$ , respectivamente. Com isso em mente, passemos ao estudo de seqüências exatas.

Suponha que temos três sistemas indutivos:  $\{L_p, \tau_p^q\}$ ,  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  e  $\{N_p, \psi_p^q\}$ , definidos sobre o mesmo conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ . Além disso, suponha que tenhamos homomorfismos

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} N_p \longrightarrow 0,$$

de modo que esta seqüência seja exata, e tal que para  $p \leq q$  o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_p & \xrightarrow{f_p} & M_p & \xrightarrow{g_p} & N_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \tau_p^q \downarrow & & \varphi_p^q \downarrow & & \psi_p^q \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L_q & \xrightarrow{f_q} & M_q & \xrightarrow{g_q} & N_q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

seja comutativo. Passando ao limite, obtemos homomorfismos

$$\varinjlim L_p \xrightarrow{f} \varinjlim M_p \xrightarrow{g} \varinjlim N_p$$

tais que  $f \circ \tau_p = \varphi_p \circ f_p$  e  $g \circ \varphi_p = \psi_p \circ g_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , onde  $\tau_p : L_p \rightarrow \varinjlim L_p$ ,  $\varphi_p : M_p \rightarrow \varinjlim M_p$  e  $\psi_p : N_p \rightarrow \varinjlim N_p$  são as aplicações induzidas pelos limites indutivos. Isto é visualizado através do diagrama, que em certo sentido pode ser imaginado como o “diagrama limite”

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_p & \xrightarrow{f_p} & M_p & \xrightarrow{g_p} & N_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \tau_p \downarrow & & \varphi_p \downarrow & & \psi_p \downarrow & & \\ & & \varinjlim L_p & \xrightarrow{f} & \varinjlim M_p & \xrightarrow{g} & \varinjlim N_p & & \end{array}$$

Antes de demonstrarmos que o limite de uma seqüência exata é novamente uma seqüência exata, precisamos de um resultado auxiliar.

**Lema A.22.** *Sejam  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  um sistema indutivo sobre um conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ , e  $\sigma_p : M_p \rightarrow \varinjlim M_p$  a família de homomorfismos dada pelo limite indutivo. Então  $\varinjlim M_p = \bigcup_{p \in \mathcal{A}} \sigma_p(M_p)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $N = \bigcup_{p \in \mathcal{A}} \sigma_p(M_p)$ , e  $\psi_p$  a composição dos homomorfismos  $M_p \xrightarrow{\sigma_p} \varinjlim M_p \hookrightarrow N$ . Então  $N$ , juntamente com os homomorfismos  $\psi_p$ , é um outro limite indutivo do sistema. Sejam  $\psi : \varinjlim M_p \rightarrow N$  e  $\varphi : N \rightarrow \varinjlim M_p$  os únicos homomorfismos satisfazendo  $\psi_p = \psi \circ \sigma_p$  e  $\sigma_p = \varphi \circ \psi_p$ . Mas então  $\varphi$  é a inclusão  $N \hookrightarrow \varinjlim M_p$  e  $\psi = \varphi^{-1}$ . Assim,  $\varinjlim M_p = N$ .  $\blacksquare$

**Teorema A.23.** *A seqüência limite*

$$0 \longrightarrow \varinjlim L_p \xrightarrow{f} \varinjlim M_p \xrightarrow{g} \varinjlim N_p \longrightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração.* A sobrejetividade de  $g$  e a injetividade de  $f$  seguem diretamente do diagrama limite, acima. Vejamos que o núcleo de  $g$  é igual à imagem de  $f$ .

Dado  $l \in \varinjlim L_p$ , pelo lema anterior, existe  $l_p \in L_p$  tal que  $l = \tau_p(l_p)$ . Então  $(g \circ f)(l) = (\psi_p \circ g_p \circ f_p)(l_p) = 0$ , mostrando que a imagem de  $f$  está contida no núcleo de  $g$ .

Para a inclusão contrária, dado  $m \in \varinjlim M_p$  tal que  $g(m) = 0$ , pelo lema anterior existe  $m_p$  com  $m = \varphi_p(m_p)$ . Visto que  $(\psi \circ g_p)(m_p) = 0$ , existe um  $q \in \mathcal{A}$ , com  $p \leq q$ , tal que  $0 = (\psi_p^q \circ g_p)(m_p) = (g_p \circ \varphi_p^q)(m_p)$ . Pela exatidão da seqüência no estágio  $q$ , existe  $l_q \in L_q$  tal que  $\varphi_p^q(m_p) = f_p(l_q)$ . Então,  $(f \circ \tau_q)(l_q) = (\varphi_p \circ f)(l_q) = \varphi_p(m_p) = m$ . Isto completa a demonstração.  $\blacksquare$

**Corolário A.24.** *Se cada  $f_p$  é sobrejetora (resp. cada  $g_p$  é injetora) então  $f$  também o é (resp.  $g$ ).*

Tratemos agora dos limites projetivos. Muitas das definições e resultados, apresentados acima, terão naturalmente seus análogos.

**Definição A.25.** Seja  $\Lambda : \{M_p, \varphi_p^q\} \rightarrow \{N_r, \psi_r^s\}$  uma aplicação de um sistema projetivo sobre  $\mathcal{A}$  em um sistema projetivo sobre  $\mathcal{B}$ . Os homomorfismos  $\lambda_p : M_p \rightarrow N_{\lambda(p)}$  são componentes de um homomorfismo  $\Theta : \prod_{p \in \mathcal{A}} M_p \rightarrow \prod_{r \in \mathcal{B}} N_r$ . Como  $\psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)} \circ \lambda_q = \lambda_p \circ \varphi_p^q$ , para  $p \leq q$ ,  $\Theta$  induz um homomorfismo

$$\theta : \varprojlim M_p \rightarrow \varprojlim N_r,$$

chamado *limite projetivo* de  $\Lambda$ .

Olhando para a construção do limite projetivo, se  $(a_p)_{p \in \mathcal{A}} \in \varprojlim M_p$ , a construção feita na Proposição A.17 nos dá que  $a_p = \varphi_p^q(a_q)$ , desde que  $p \leq q$ . Desta forma, temos  $\lambda_p(a_p)_{p \in \mathcal{A}} \in \varprojlim N_r$ , uma vez que  $\lambda_p(a_p) = \lambda_p(\varphi_p^q(a_q)) = \psi_{\lambda(p)}^{\lambda(q)}(\lambda_q(a_q))$ . Isto mostra que a aplicação  $\theta$  está bem definida. Desta maneira, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xleftarrow{\sigma_p} & \varprojlim M_p \\ \lambda_p \downarrow & & \downarrow \theta \\ N_{\lambda(p)} & \xleftarrow{\tau_{\lambda(p)}} & \varprojlim N_r \end{array}$$

onde  $\sigma_p$  e  $\tau_r$  são os homomorfismos induzidos pelos limites projetivos  $\varprojlim_p M_p$  e  $\varprojlim_r N_r$ , respectivamente.

Consideraremos agora seqüências exatas. Para tal, tomemos três sistemas projetivos  $\{L_p, \tau_p^q\}$ ,  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  e  $\{N_p, \psi_p^q\}$  definidos sobre o mesmo conjunto dirigido  $\mathcal{A}$ . Além disso, suponha que tenhamos homomorfismos

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} N_p \longrightarrow 0,$$

de modo que esta seqüência seja exata, e tal que, para  $p \leq q$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_p & \xrightarrow{f_p} & M_p & \xrightarrow{g_p} & N_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \tau_p^q & & \uparrow \varphi_p^q & & \uparrow \psi_p^q & & \\ 0 & \longrightarrow & L_q & \xrightarrow{f_q} & M_q & \xrightarrow{g_q} & N_q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

seja comutativo. Passando ao limite obtemos homomorfismos

$$\varprojlim L_p \xrightarrow{f} \varprojlim M_p \xrightarrow{g} \varprojlim N_p$$

tais que  $\varphi_p \circ f = f_p \circ \tau_p$  e  $\psi_p \circ g = g_p \circ \varphi_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , onde  $\tau_p : L_p \leftarrow \varprojlim L_p$ ,  $\varphi_p : M_p \leftarrow \varprojlim M_p$  e  $\psi_p : N_p \leftarrow \varprojlim N_p$  são as aplicações induzidas pelos limites projetivos. Isto é visualizado através “diagrama limite”

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_p & \xrightarrow{f_p} & M_p & \xrightarrow{g_p} & N_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \tau_p & & \uparrow \varphi_p & & \uparrow \psi_p & & \\ \varprojlim L_p & \longrightarrow & \varprojlim L_p & \xrightarrow{f} & \varprojlim M_p & \xrightarrow{g} & \varprojlim N_p & & \end{array}$$

Infelizmente, o limite projetivo não possui tão boas propriedades, com respeito a seqüências exatas, quanto o limite indutivo i.e., a seqüência limite, é exata somente em  $\varprojlim L_p$  e  $\varprojlim M_p$ . A aplicação  $g$  não é sempre sobrejetora.

**Teorema A.26.** *A seqüência limite*

$$0 \longrightarrow \varprojlim L_p \xrightarrow{f} \varprojlim M_p \xrightarrow{g} \varprojlim N_p$$

é exata.

*Demonstração.* Suponha que  $f(l) = 0$ . Do diagrama limite temos  $0 = \varphi_p(f(l)) = f_p(\tau_p(l))$ , e da injetividade de  $f_p$ ,  $\tau_p(l) = 0$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ . Sendo  $\tau_p$  uma projeção de um produto e  $l = (l_p)_{p \in \mathcal{A}}$ , temos  $l_p = 0$  para todo  $p \in \mathcal{A}$  e portanto  $l = 0$ .

Provemos agora que  $\text{Ker } g = \text{Im } f$ . Suponha que  $g(m) = 0$ . Então  $g_p(\varphi_p(m)) = \psi_p(g(m)) = 0$ , de modo que existe  $l_p \in L_p$ , tal que  $f_p(l_p) = \varphi_p(m) = m_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , sendo que a última igualdade se deve ao fato de  $\varphi_p$  ser uma projeção. Tomando

$l = (l_p)_{p \in \mathcal{A}}$ , devemos mostrar que  $f(l) = m$  mas, para isso, devemos primeiramente ter  $l \in \varprojlim L_p$ . Veja que  $f_p(\tau_p^q(l_q)) = \varphi_p^q(f_q(l_q)) = \varphi_p^q(m_q) = m_p$ . Por outro lado,  $f_p(l_p) = m_p$ , e da injetividade de  $f_p$  temos  $\tau_p^q(l_q) = l_p$ , mostrando que  $l \in \varprojlim L_p$ . Agora, como  $\varphi_p$  é uma projeção e  $\varphi_p(f(l)) = f_p(\tau_p(l)) = f_p(l_p) = m_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , segue que  $f(l) = m$  e  $\text{Kerg} \subset \text{Im}f$ . A inclusão contrária demonstra-se semelhantemente. ■

Existem estudos para estabelecer a exatidão da seqüência

$$0 \longrightarrow \varprojlim L_p \longrightarrow \varprojlim M_p \longrightarrow \varprojlim N_p \longrightarrow 0.$$

Para isso, utiliza-se a chamada *condição de Mittag-Leffler*. Para mais detalhes, vide [26].

Se  $\{M_p, \varphi_p^q\}$  é um sistema indutivo, existe uma importante propriedade, consequência dos desenvolvimentos anteriores, entre limite indutivo e o limite projetivo.

**Corolário A.27.** *Para todo grupo abeliano  $N$ , tem-se*

$$\text{Hom}(\varinjlim M_p, N) \simeq \varprojlim \text{Hom}(M_p, N).$$

Veja que poderíamos, ao invés de grupos abelianos, ter os limites para anéis e homomorfismos de anéis,  $R$ -módulos e aplicações  $R$ -lineares, espaços topológicos e aplicações contínuas, etc. Desta forma, tudo que desenvolvemos pode ser facilmente refeito para outros casos que nos interessem.

## Apêndice B

# Seqüências Espectrais

Sejam  $A$  um anel comutativo com unidade, e  $K$  um  $A$ -módulo. Chamamos *filtração decrescente* de  $K$  a toda seqüência de submódulos  $K_p$ , verificando as condições:

$$K_{p+1} \subset K_p \quad \text{e} \quad \bigcup_p K_p = K.$$

Chamamos *módulo filtrado* a todo  $A$ -módulo  $K$  munido de uma filtração decrescente.

Dado um módulo filtrado  $K$ , chama-se *módulo graduado associado* a  $K$  o módulo

$$G(K) = \bigoplus_p K_p / K_{p+1}.$$

Se  $K = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} K^r$  é um módulo graduado, podemos filtrá-lo por meio de seus submódulos

$$K_p = \bigoplus_{r \geq p} K^r.$$

É claro, então, que o módulo graduado  $G(K)$  é isomorfo ao próprio  $K$ .

Seja  $K$  um módulo filtrado e, suponha que  $K = \bigoplus_r K^r$ . Dizemos que a filtração e a graduação de  $K$  são compatíveis se

$$K_p = \bigoplus_r (K_p \cap K^r),$$

isto é, se os  $K_p$  são homogêneos.

Ao invés de dizer que uma filtração de  $K$  é compatível com uma graduação de  $K$ , diremos somente que esta é uma *filtração do módulo graduado* obtida, munindo-se  $K$  da graduação em questão.  $K$ , munido da graduação e da filtração dados, será chamado *módulo graduado filtrado*.

Seja  $K$  um módulo graduado filtrado. Dizemos que a filtração de  $K$  é *regular* se existirem  $n_r$  tais que

$$K_p \cap K^r = 0 \quad \text{para } p > n_r.$$

Chamamos *módulo diferencial filtrado* a todo módulo diferencial<sup>1</sup>  $K$  munido de uma filtração tal que se tenha  $d(K_p) \subset K_p$  para todo  $p$ . A teoria das *seqüências espectrais* consiste essencialmente em utilizar a filtração de  $K$  para construir por “aproximações sucessivas” o módulo derivado  $H(K) = \ker(d)/\text{Im}(d)$ .

Seja  $r$  um inteiro. Colocamos

$$Z_r^p = Z(K_p \text{ mod } K_{p+r}),$$

isto é,

$$Z_r^p = \{x \in K_p : dx \in K_{p+r}\}.$$

Para  $r \leq 0$  tem-se, evidentemente,  $Z_r^p = K_p$ .

Entre os elementos de  $Z_r^p$ , encontram-se, por um lado, aqueles de  $Z_{r-1}^{p+1}$  e, por outro, todos os elementos de  $K_p$  que são bordos. Em particular,  $Z_r^p$  contém  $dZ_{r-1}^{p+1-r}$ , o conjunto dos elementos de  $K_p$  que são bordos de elementos de  $K_{p+1-r}$ . Colocamos

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{dZ_{r-1}^{p+1-r} + Z_{r-1}^{p+1}}, \quad \text{e} \quad E_r = \bigoplus_p E_r^p.$$

Observa-se que, se  $x \in K_p$  é um ciclo ( $dx = 0$ ), ele define um elemento de  $E_r^p$  para todo  $r$  e, se ele é um bordo ( $x = dy$ ), o elemento de  $E_r^p$  definido por ele é nulo para  $r$  suficientemente grande.

O diferencial  $d : K \rightarrow K$  aplica  $Z_r^p$  em  $Z_r^{p+r}$  e  $dZ_{r-1}^{p+1-r} + Z_{r-1}^{p+1}$  em  $dZ_{r-1}^{p+1}$ . Assim, como

$$E_r^{p+r} = \frac{Z_r^{p+r}}{dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}},$$

por passagem ao quociente,  $d$  induz um diferencial

$$d_r : E_r^p \rightarrow E_r^{p+r},$$

definido por

$$d_r \left( x + (dZ_{r-1}^{p+1-r} + Z_{r-1}^{p+1}) \right) = dx + (dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}),$$

uma vez que  $d(dZ_{r-1}^{p+1-r} + Z_{r-1}^{p+1}) = dZ_{r-1}^{p+1} \subset dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}$ .

Não é difícil ver que  $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$ , isto é,  $E_{r+1}^p = H^p(E_r, d_r)$ .

A *seqüência espectral* de  $K$  é, por definição, formada pelos complexos  $E_r$  definidos como acima.

Definimos o termo  $E_\infty$ , como segue. Coloquemos

$$\begin{aligned} K_\infty &= 0 & K_{-\infty} &= K \\ Z_\infty^p &= Z(K_p \text{ mod } K_\infty) & &= \text{ciclos de } K_p \\ B_\infty^p &= K_p \cap dK_{-\infty} & &= \text{bordos de } K_p \text{ em } K. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> $K$  é um módulo diferencial quando existe um homomorfismo  $d : K \rightarrow K$  tal que  $d \circ d = 0$ .

e definimos então

$$E_\infty^p = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}} \quad \text{e} \quad E_\infty = \bigoplus_p E_\infty^p.$$

Se colocamos de forma geral  $B_r^p = K_p \cap dK_{p-r}$ , obtemos a fórmula

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}.$$

Temos uma inclusão natural  $i : K_p \hookrightarrow K$ , que por sua vez induz uma aplicação  $i^* : H(K_p) \rightarrow H(K)$  (que não tem por que ser inclusão). Denotando por  $F^p(H(K))$  a imagem de  $H(K_p)$  em  $H(K)$  por  $i^*$  temos a seguinte filtração de  $H(K)$

$$F^{p+1}(H(K)) \subset F^p(H(K)) \quad \text{e} \quad \bigcup_p F^p(H(K)) = H(K).$$

Com isso, não é difícil ver que existe um isomorfismo canônico

$$E_\infty \simeq G(H(K)).$$

Dado um módulo diferencial filtrado  $K$ , é fácil ver que

$$Z_0^p = K_p, \quad Z_{-1}^{p+1} = K_{p+1}, \quad dZ_{-1}^{p+1} \subset K_{p+1},$$

de modo que

$$E_0^p = \frac{K_p}{K_{p+1}}.$$

Conseqüentemente, o termo  $E_0$  é idêntico ao módulo graduado associado à  $K$ , e a diferencial  $d_0$  se deduz por passagem ao quociente da diferencial  $d$  de  $K$ . Além disso,

$$E_1^p = H(K_p/K_{p+1}),$$

sendo a cohomologia tomada com respeito ao operador  $d_0$ .

Examinaremos agora o caso onde o módulo  $K$  está munido de uma graduação compatível com a filtração dada e, para a qual,  $d$  é homogêneo e de grau  $+1$ . Nesse caso, dizemos que  $K$  é um *complexo filtrado*. Pode-se introduzir sobre os termos  $E_r$  uma bigraduação. Para isso, colocamos

$$Z_r^{p,q} = Z_r^p \cap K^{p+q}, \quad B_r^{p,q} = B_r^p \cap K^{p+q},$$

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}.$$

Para um elemento de  $E_r^{p,q}$ , diz-se usualmente que  $p$  é o *grau filtrante*,  $p+q$  é o *grau total* e  $q$  o *grau complementar*.

Uma vez que

$$d(Z_r^{p,q}) = d(Z_r^{p,q} \cap K^{p+q}) \subset Z_r^{p+r} \cap K^{p+q+1} = Z_r^{p+r} \cap K^{p+r+q-r+1} = Z_r^{p+r, q-r+1},$$

e

$$\begin{aligned} d(Z_{r-1}^{p+1, q-1}) &= d(Z_{r-1}^{p+1} \cap K^{p+q}) \subset d(Z_{r-1}^{p+1}) \cap K^{p+q+1} = B_{r-1}^{p+r} \cap K^{p+q+1} \\ &\subset B_{r-1}^{p+r} \cap K^{p+r+q-r+1} = B_{r-1}^{p+r, q-r+1} \subset Z_{r-1}^{p+r+1, q-r} + B_{r-1}^{p+r, q-r+1} \end{aligned}$$

tem-se que  $d_r$  aplica  $E_r^{p,q}$  em  $E_r^{p+r, q-r+1}$ , sendo definida por

$$d_r \left( x + (Z_{r-1}^{p+1, q-1} + B_{r-1}^{p,q}) \right) = dx + (Z_{r-1}^{p+r+1, q-r} + B_{r-1}^{p+r, q-r+1}).$$

Além disso, em  $H(K)$  a filtração pelos  $F^p(H(K))$  e a gradação pelos  $H^q(K)$  são compatíveis. Finalmente, colocando

$$F^p(H^q(K)) = H^q(K) \cap F^q(H(K))$$

tem-se a relação

$$E_\infty^{p,q} = \frac{F^p(H^{p+q}(K))}{F^{p+1}(H^{p+q}(K))}.$$

Vejamos agora o que ocorre para complexos duplos. Seja

$$K = \bigoplus_{p,q} K^{p,q}$$

um complexo duplo com operadores diferenciais

$$\delta : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q} \quad \text{e} \quad \partial : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1},$$

verificando  $\delta^2 = \partial^2 = 0$  e  $\delta \circ \partial = \partial \circ \delta$ . Podemos então considerar  $K$  como um complexo "simples", utilizando a gradação total

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}.$$

A diferencial  $d = \delta + (-1)^p \partial$  aplica  $K^n$  em  $K^{n+1}$ , fazendo de  $K = \bigoplus_n K^n$  um complexo diferencial.

Existem duas filtrações muito particulares, que refletem diretamente as propriedades dos diferenciais  $\delta$  e  $\partial$ . A primeira dessas filtrações é dada por

$${}^I K_p = \bigoplus_{i \geq p} \bigoplus_j K^{i,j}.$$

Os termos da seqüência espectral correspondente serão denotados por  ${}^I E_r^{p,q}$  (note que  $K = \bigoplus_n K^n$  é um complexo diferencial filtrado). Vamos calcular esses termos para  $r = 1, 2$ .

Recordemos que  ${}^I E_1^p = H({}^I K_p / {}^I K_{p+1})$ , onde  ${}^I K_p / {}^I K_{p+1}$  se identifica canonicamente ao grupo graduado

$$K^{p,*} = \bigoplus_j K^{p,j},$$

e como  $\delta$  aplica  ${}^I K_p$  em  ${}^I K_{p+1}$ , a identificação acima transforma a diferencial  $d_0$  em  $(-1)^k \partial$ . Portanto,

$${}^I E_1^p = {}^I H({}^I K_p / {}^I K_{p+1}) = H_\partial(K^{p,*}),$$

onde o índice inferior  $\partial$  indica que o cálculo da cohomologia é feito com o operador  $\partial$ . Um pouco de cálculo mostra que

$$\begin{aligned} d_1 : {}^I E_1^p &\longrightarrow {}^I E_1^p \\ [x] &\longmapsto [\delta x], \end{aligned}$$

isto é, o operador  $d_1$  é induzido por  $\delta$ . Conseqüentemente, se munimos o grupo  $H_\partial(K)$ , que representa a  $\partial$ -cohomologia de  $K$ , da graduação definida pela fórmula

$$H_\partial(K) = \bigoplus_p H_\partial(K^{p,*})$$

e do diferencial induzido pelos homomorfismos  $\delta : K^{p,*} \rightarrow K^{p+1,*}$  obtemos isomorfismos canônicos

$${}^I E_2^p \simeq H_\delta(H_\partial(K)).$$

A fim de obtermos um resultado completo, devemos ainda explicitar a segunda graduação do termo  $E_2$ . Ora,  ${}^I E_2^{p,q}$  é formado pelos elementos de  $E^p$  que podem ser representados pelos elementos de graus  $p+q$  de  $K$ , sendo entendido que  $K$  está munido de sua graduação total. Mas, evidentemente,  ${}^I E_2^p$  é o conjunto dos elementos de  ${}^I E_2$  representados pelos elementos de  $K^{p,*}$ , dentre eles os elementos de grau  $p+q$  formam o grupo  $K^{p,q}$ . Então, se designarmos por  $H_\partial^q(K)$  o grupo de cohomologia de grau  $q$  de  $K$ , calculado por meio da *segunda* diferencial e da segunda graduação de  $K$ , obtemos a fórmula abaixo

$${}^I E_2^{p,q} = H_\delta^p(H_\partial^q(K)).$$

De maneira inteiramente análoga, considerando uma segunda filtração de  $K$  como

$${}^{II} K_p = \bigoplus_i \bigoplus_{j \geq p} K^{i,j},$$

obtemos  $d_0 = \delta$  e, então,  ${}^{II} E_1^p = H_\delta(K^{*,p})$ . Além disso, também vale que  $d_1([x]) = [\partial x]$ , levando a  ${}^{II} E_2^{p,q} = H_\partial^p(H_\delta^q(K))$ .

**Definição B.1.** Uma seqüência espectral  $\{E_r^{p,q}, d_r\}$  é dita *convergir* para um módulo graduado  $H^*$  se existe uma filtração  $F$  em  $H^*$  tal que

$$E_\infty^{p,q} \simeq \frac{F^p(H^{p+q})}{F^{p+1}(H^{p+q})}.$$

Ora, mas pelo que vimos na página 97, a seqüência espectral de um complexo filtrado, construída a partir da filtração, como fizemos, converge para a cohomologia deste complexo. Para que, então, definir convergência?

O que ocorre, no entanto, é que, dada a seqüência espectral  $\{E_r^{p,q}, d_r\}$  construída a partir da filtração de um complexo filtrado  $K$ , como podemos saber se ela converge para  $H^*(K, d)$  e não para algum outro grupo, digamos  $H^*(L, d')$ ? Para ilustrar, seja  $M$  um módulo livre graduado. Considere o complexo  $K \oplus M$ , com diferencial  $d \oplus 0$  e filtração dada por

$$\cdots \subset (K_{p+1} \oplus M) \subset (K_p \oplus M) \subset (K_{p-1} \oplus M) \cdots$$

Não é difícil ver que as seqüências espectrais de  $K$  e de  $K \oplus M$ , construídas a partir das respectivas filtrações desses módulos, são iguais. Assim, uma mesma seqüência espectral converge para  $H(K, d)$  e  $H(K, d) \oplus M$ .

Surge então a pergunta: como (ou quando) a seqüência espectral  $\{E_r^{p,q}, d_r\}$  construída à partir da filtração de um complexo filtrado  $K$ , determina completamente o módulo  $H(K, d)$ ?

Para respondermos a esta pergunta, consideremos um complexo filtrado  $K$  e suponhamos que a filtração de  $K$  é regular, isto é,

$$K_p \cap K^q = 0 \text{ para } p > n(q).$$

Então, deduzimos que

$$Z_r^{p,q} = Z_\infty^{p,q} \text{ para } r > n(p+q+1) - p,$$

pois se  $x \in Z_r^{p,q}$ , temos  $dx \in K_{p+r} \cap K^{p+q+1}$ , módulo que é nulo para  $p+r > n(p+q+1)$ . Além disso, temos  $d_r = 0$  sobre  $E_r^{p,q}$  para  $r > n(p+q+1) - p$ , pois, para os valores de  $r$  em questão, vale  $Z^{p+r, q-r+1} = 0$ .

Uma vez que, para  $p$  e  $q$  dados e  $r$  suficientemente grande,  $d_r$  é nulo, sobre  $E_r^{p,q}$  temos, mediante a identificação  $H(E_r) = E_{r+1}$ , uma aplicação de  $E_r^{p,q}$  sobre  $E_{r+1}^{p,q}$ , visto que  $Z_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}) = E_r^{p,q}$ . Iterando estes homomorfismos, obtemos epimorfismos

$$\theta_s^r : E_r^{p,q} \rightarrow E_s^{p,q}$$

definidos para  $s, r > n(p+q+1) - p$ .

Evidentemente, estes  $\theta_s^r$  gozam das relações de transitividade que permitem definir o limite indutivo<sup>2</sup> dos  $E_r^{p,q}$  quando  $r$  aumenta indefinidamente. Vamos ver que limite indutivo é precisamente  $E_\infty^{p,q}$ .

Com efeito, para  $r$  suficientemente grande, temos  $Z_r^{p,q} = Z_\infty^{p,q}$  e  $Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_\infty^{p+1, q-1}$ . Além disso, para todo  $r$  temos  $B_r^{p,q} \subset B_\infty^{p,q}$ . Como valem as fórmulas

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}}$$

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1, q-1}}$$

<sup>2</sup>Para mais detalhes a respeito de limites algébricos vide o Apêndice A

então para  $r$  suficientemente grande temos um homomorfismo canônico

$$\theta_\infty^r : E_r^{p,q} \rightarrow E_\infty^{p,q}$$

induzido pela aplicação identidade  $Z_\infty^{p,q} \rightarrow Z_\infty^{p,q}$ . Veja que este homomorfismo é evidentemente sobrejetivo. Além disso, uma vez que  $\theta_s^r$  é induzido pela aplicação identidade  $Z_r^{p,q} \rightarrow Z_s^{p,q}$ , tem-se a relação de compatibilidade

$$\theta_\infty^r = \theta_\infty^s \circ \theta_s^r, \quad r < s.$$

Para ver que  $E_\infty^{p,q}$  se identifica com o limite indutivo dos  $E_r^{p,q}$  resta ver que  $B_\infty^{p,q}$  é a união dos  $B_r^{p,q}$ , fato este que resulta de  $K$  ser a união dos  $K_p$ .

Como conseqüência deste resultado, consideremos dois complexos filtrados  $K$  e  $L$ , e um homomorfismo  $f : K \rightarrow L$  (compatível com as gradações e filtrações). Deduzimos, de maneira evidente, homomorfismos

$$E_r(K) \rightarrow E_r(L)$$

comutando com os diferenciais  $d_r$  compatíveis com a identificação  $E_{r+1} = H(E_r)$  para  $r$  finito e, com as identificações  $E_\infty(K) = G(H(K))$ ,  $E_\infty(L) = G(H(L))$ . Dito isto, suponhamos que as filtrações de  $K$  e  $L$  são regulares. Com esta suposição, o mesmo ocorrerá com as filtrações de  $H(K)$  e  $H(L)$ . Então, se o homomorfismo  $E_\infty(K) \rightarrow E_\infty(L)$ , deduzido de  $f$ , é bijetivo, o mesmo ocorrerá para  $f^* : H(K) \rightarrow H(L)$ . Levando em conta que, se  $f^* : E_r(K) \rightarrow E_r(L)$  é bijetiva para um índice  $r_0$ , ela também será bijetiva para todo  $r \geq r_0$  temos o resultado seguinte:

**Teorema B.2.** *Seja  $f$  um homomorfismo de um complexo filtrado  $K$  em um complexo filtrado  $L$ . Suponhamos que as filtrações de  $K$  e  $L$  são regulares. Se, para um inteiro  $r$  o homomorfismo  $f^* : E_r(K) \rightarrow E_r(L)$  é isomorfismo, então o homomorfismo*

$$f^* : H(K) \rightarrow H(L)$$

*também é um isomorfismo.*

Com este teorema, ficam eliminados problemas como o exposto na página 100, pois a seqüência espectral construída a partir da filtração de um complexo graduado, converge para um único módulo, quando esta filtração é regular, a saber, o módulo  $H(K)$ .

Para concurir nosso raciocínio, queremos saber quando podemos determinar explicitamente  $H(K)$  a partir de  $E_\infty(K)$ .

Em geral, quando a filtração é regular, não se consegue determinar explicitamente  $H(K)$ . Entretanto, se supusermos que a *filtração de  $K$  é limitada*, i.e., para cada dimensão  $n$  dos complexo  $K$ , existem valores  $s = s(n)$  e  $t = t(n)$  tais que

$$K^n = K_t \cap K^n \supset K_{t+1} \cap K^n \supset \cdots \supset K_{s-1} \cap K^n \supset K_s \cap K^n \supset 0;$$

então, sendo este um caso especial de filtração regular, o Teorema B.2 se aplica, levando à conclusão de que a seqüência espectral  $\{E_r^{p,q}, d_r\}$  construída por meio desta filtração, converge para um único valor, a cohomologia  $H(K)$ , com

$$E_\infty^{p,q} \simeq \frac{F^p(H^{p+q}(K))}{F^{p+1}(H^{p+q}(K))}.$$

Para ver que  $H(K)$  pode ser efetivamente recuperado a partir de  $E_\infty$ , é suficiente notar que  $F^r(H^{p+q}(K)) = H^{p+q}(K)$  quando  $r \geq t(p+q)$  e  $F^r(H^{p+q}(K)) = 0$  quando  $r < s(p+q)$ .

# Bibliografia

- [1] Abraham, R., Marsden, J.: *Foundations of Mechanics*. Second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.
- [2] Alekseevskij, D., Vinogradov, A., Lychagin, V. em *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Geometry I*, vol. 28. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1991.
- [3] Atiyah, M., Singer, I.: *The Index of Elliptic Operators I*. Ann. of Math. **87**, 485-546, 1968.
- [4] Atiyah, M., Singer, I.: *The Index of Elliptic Operators II*. Ann. of Math. **93**, 119-139, 1971.
- [5] Baeza, R.: *Quadratic Forms overs Semilocal Rings*. Lect. Notes Math. **665**, 1978.
- [6] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerovicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization I e II*. Annals of Physics **111**, 61-151, 1978.
- [7] Bass, H.: *Lectures on Topics in K-Theory*. Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1967.
- [8] Bimonte, G., Musto, R., Stern, A., Vitale, P.: *Deformed Chern-Simons Theories*. Phys. Lett. **B406**, 205-214, 1997.
- [9] Bimonte, G., Musto, R., Stern, A., Vitale, P.: *2+1 Einstein Gravity as a Deformed Chern-Simons Theory*. Int. J. Mod. Phys. **A13**, 4023-4048, 1998.
- [10] Bleecker, D.: *Gauge Theories and Variational Principles*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1981.
- [11] Bott, R., Tu, L.: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [12] Bressler, P., Nest, R., Tsygan, B.: *Riemann-Roch Theorems via Deformation Quantization I*. Preprint.
- [13] Connes, A.: *Noncommutative Differential Geometry*. Publ. Math. IHES, 1986.
- [14] Connes, A.: *Noncomutative Geometry*. Academic Press, New York, 1994.

- [15] Crumeyrolle, A.: *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [16] Egorov, Yu.: *On The Solubility of Differential Equations with Simple Characteristics*. Russian Math. Surv. **26**, 113-130, 1971.
- [17] Elliot, G., Natsume, T., Nest, R.: *The Atiyah-Singer Index Theorem as Passage to Classical Limit in Quantum Mechanics*. Commun. Math. Phys. **182**, 505-533, 1996.
- [18] Faltings, G.: *Lectures on the Arithmetic Riemann-Roch Theorem*. Annals of Mathematics Studies, vol. 127, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [19] Fort, H., Gambini, R., Pullin, J.: *Lattice Knot Theory and Quantum Gravity in the Loop Representation*. Phys. Rev. **D56**, 2127-2143, 1997.
- [20] Gabriel, P.: *Propriétés Générales des Schémas en Groupes*. Lect. Notes Math. **151**, Springer-Verlag, 1970.
- [21] Gelfand, I., Tsygan, B.: *On The Localization of Topological Invariants*. Commun. Math. Phys. **146**, 73-90, 1992.
- [22] Gerstenhaber, M.: *On the Defomation of Rings and Algebras*. Ann. Math. **79**, 59-103, 1964.
- [23] Godbillon, C.: *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Collection Méthodes, Herman, Paris, 1969.
- [24] Grothendieck, A.: *Eléments de Géométrie Algébrique. IV. Etude Locale des Schémas et des Morphismes de Schémas*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **32**, 1967.
- [25] Grothendieck, A.: *Catégories Cofibrées Additives et Complexe Cotangent Relatif*. Lect. Notes Math. **79**, Springer-Verlag, 1968.
- [26] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] Hawkins, E.: *Geometric Quantization of Vector Bundles*. Preprint, subm. J. Math. Phys.
- [28] Hernández Ruipérez, D., Muñoz Masqué, J.: *Global Variational Calculus on Graded Manifolds, I: Graded Jet Bundles, Structure 1-form and Graded Infinitesimal Contact Transformations*. J. Math. Pura. Appl. **63**, 283-309, 1984.
- [29] Hernández Ruipérez, D., Muñoz Masqué, J.: *Global Variational Calculus on Graded Manifolds, II*. J. Math. Pura. Appl. **65**, 87-104, 1985.

- [30] Hochschild, G.: *Cohomology and Representations of Associative Algebras*. Duke M. J. **14**, 921-948, 1947.
- [31] Ibort, L., Marín-Solano, J.: *Geometrical Foundations of Lagrangian Supermechanics and Supersymmetry*. Rep. Math. Phys. **32**, 385-409, 1993.
- [32] Ibort, L., Marín-Solano, J., Marmo, G.: *On the Inverse Problem of Lagrangian Supermechanics*. Int. J. Modern Phys. A **8**, 3565-3576, 1993.
- [33] Karoubi, M.: *K-Theory, an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [34] Kempf, A., Majid, S.: *Algebraic  $q$ -Integration and Fourier Theory on Quantum and Braided Spaces*. J. Math. Phys. **35**, 6802-6837, 1994.
- [35] Krasil'shchik, I., Lychagin, V., Vinogradov, A.: *Geometry of Jet Spaces and Non-linear Partial Differential Equations*. Gordon and Brech, New York, 1986.
- [36] Knus, M.: *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
- [37] Kostant, B.: *Quantization and Unitary Representations*. Lectures in Modern Analysis and Applications, II, Springer-Verlag, New York, pages. 87-208, 1970.
- [38] Kumpera, A.: *Les Symétries Généralisées et le Complexe d'Euler-Lagrange*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **38**, 589-622, 1991.
- [39] Kunz, E.: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [40] Kupershmidt, B.: *An Algebraic Model for Graded Calculus of Variations*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **101**, 151-166, 1987.
- [41] Libermann, P., Marle, C.: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [42] Malik, R., Mishra, A., Rajasekaran, G.: *Dynamics in a Noncommutative Phase Space*. Int. J. Mod. Phys. **A13**, 4759-4776, 1998.
- [43] McCleary, J.: *User's Guide to Spectral Sequences*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1985.
- [44] Manin, Yu.: *Topics in Noncommutative Geometry*. Princeton University Press, 1991.
- [45] Manin, Yu.: *Gauge Field Theory and Complex Geometry*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1988.
- [46] Matsumura, H.: *Commutative Algebra*. W. A. Benjamin Co., New York, 1970.

- [47] Monterde, J.: *Higer Order Graded and Berezinian Lagrangians Densities and Their Euler-Lagrange Equations*. Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. **57** (1992), 3-26.
- [48] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem*. Commun. Math. Phys. **172**, 223-262, 1995.
- [49] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem for Families*. Adv. Math. **113**, 151-205, 1995.
- [50] Northcott, D.: *Multilinear Algebra*. Cambridge University Press, 1984.
- [51] Olver, P.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2nd ed., Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [52] Palais, R.: *Differential Operators on Vector Bundles*, em Seminar on Atiyah-Singer Index Theorem. Annals of Mathematics Studies 57, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.
- [53] Penkov, I.:  *$\mathcal{D}$ -Modules on Supermanifolds*. Invent. Math. **71**, 501-512, 1983.
- [54] Pierce, R.: *Associative Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [55] Rieffel, M.: *Quantizations and  $C^*$ -algebras*. Contemp. Math. **167**, 67-97, 1994.
- [56] Rodrigues Jr, W., Oliveira, E.: *Dirac and Maxwell Equations in the Clifford and Spin-Clifford Bundles*. Int. J. Theor. Phys. **29**, 397-412 (1990).
- [57] Rodrigues Jr, W., Vaz, J.: *Clifford Algebras, Supercalculus and Spinning Particle Models* em J. Dowling (ed.), Proc. Nato Conference: Electron Theory and Quantum Electrodynamics-100 Years Later, pp. 201-222. Plenum Publ. Corp., New York (1997).
- [58] Rotman, J.: *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, San Diego, 1979.
- [59] Schapira, P., Schneiders, J.: *Index Theorem for Elliptic Pairs II*. Asterisque, vol. 224, 1994.
- [60] Spencer, D.: *Overdetermined Systems of Linear Partial Differential Equations*. Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 179-239, 1969.
- [61] Swan, R.: *Vector Bundles and Projective Modules*. Trans. AMS **105**, 264-277, 1962.
- [62] Trovon, A.: *Fundamentos Matemáticos das Teorias de Calibre*. Tese de Mestrado, IMECC, UNICAMP, 1992.

- [63] Tsujishita, T.: *On Variational Bicomplexes Associated to Differential Equations*. Osaka J. Math. **19**, 311-363, 1982.
- [64] Tsujishita, T.: *Formal Geometry of Systems of Differential Equations*. Sugaku Expositions **3**, 25-73, 1990.
- [65] Tulczyjew, W.: *The Lagrange Complex*. Bull. Soc. Math. France **105**, 419-431, 1977.
- [66] Vaz, J.: *A Álgebra do Espaço-Tempo, O Spinor de Dirac-Hestenes e a Teoria do Eletron*. Tese de doutoramento, IMECC-Unicamp, 1993.
- [67] Vinogradov, A.: *The Algebra of Logic for The Theory of Linear Differential Operators*. Soviet. Math. Dokl. **13**, 1058-1062, 1972.
- [68] Vinogradov, A.: *Multivalued Solutions and a Classification Principle for Differential Equations*. Soviet Math. Dokl. **14**, 661-665, 1973.
- [69] Vinogradov, A.: *On the Algebro-Geometric Foundations of Lagrangian Field Theory*. Soviet Math. Dokl. **18**, 1200-1204, 1977.
- [70] Vinogradov, A.: *The  $\mathcal{C}$ -Spectral Sequence, Lagrangian Formalism, and Conservation Laws. I. The Linear Theory. II. The Nonlinear Theory*. J. Math. Anal. Appl. **100**, 1-129, 1984.
- [71] Vinogradov, A., Kupeshmidt, B.: *The Structure of Hamiltonian Mechanics*. Russian Math. Surveys **23**, 177-243, 1977.
- [72] von Westenholz, C.: *Differential Forms in Mathematical Physics*. North-Holand, Amsterdam, 1978.