



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC



A densidade de empacotamentos esféricos em reticulados

Lígia Rodrigues Bernabé Naves

ligia.rbn@bol.com.br

Dissertação de Mestrado

Orientador(a): Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa

Co-orientador(a): Prof^a. Dr^a. Patrícia Helena Araújo da Silva Nogueira

Dezembro de 2009

Campinas - SP

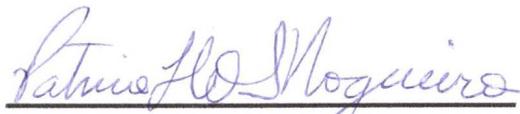
A densidade de empacotamentos esféricos em reticulados

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lígia Rodrigues Bernabé Naves** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de dezembro de 2009.



Prof^a. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora



Prof^a. Dr^a. Patrícia H. A. S. Nogueira
Co-orientadora

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC - UNICAMP)

Prof. Dr. Jaime Portugheis (FEEC - UNICAMP)

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC - UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Naves, Lígia Rodrigues Bernabé

N229d A densidade de empacotamentos esféricos em reticulados/Lígia Rodrigues Bernabé Naves-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientadores : Sueli Irene Rodrigues Costa ; Patricia Helena Araújo da Silva Nogueira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos reticulados. 2. Empacotamento de esferas. 3. Geometria de números. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Nogueira, Patricia Helena Araújo da Silva. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Titulo em inglês: The density of lattice sphere packings

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lattice theory. 2. Sphere packings. 3. Geometry of numbers.

Área de concentração: Geometria, Topologia

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof^ª Dr^ª Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Jaime Portugheis (FEEC - UNICAMP)
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 17/12/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 17 de dezembro de 2009 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof. (a). Dr (a). JAIME PORTUGHEIS



Prof. (a). Dr (a). JOSE PLINIO DE OLIVEIRA SANTOS

Aos meus filhos, Lorenzo e Ana Beatriz, e ao
meu marido, Marcelo

Dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, pela saúde, pela perseverança, pela paz e pela oportunidade que me concedeu.

Agradeço aos meus filhos, Lorenzo e Ana Beatriz, e ao meu marido, Marcelo, pela paciência e compreensão.

Agradeço às minhas orientadoras Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa e Prof^a. Dr^a. Patrícia Helena Araújo da Silva Nogueira, pelo incentivo, pelo apoio, pela paciência e pelo privilégio de compartilhar um pouco de seus conhecimentos. Agradecerei sempre pela oportunidade de ter feito essa caminhada ao lado de pessoas tão sábias.

Agradeço aos professores da banca examinadora, Prof. Dr. Jaime Portugheis e Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos, por suas valiosas sugestões.

Agradeço à AMAN e em especial ao Cel. Tércio, por todo o apoio. Agradeço também à EsPCEEx pelo espaço cedido durante o Curso de Verão.

Agradeço a todos os professores e colegas que me estimularam a prosseguir sempre estudando.

Agradeço aos meus pais, Benedito e Edite, e a todos os meus familiares que sempre torceram por mim e acreditaram que eu alcançaria meus objetivos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria de reticulados com foco na densidade de empacotamento, a qual possui várias aplicações e possibilita estabelecer interessantes conexões entre tópicos de álgebra linear, cálculo de várias variáveis e geometria discreta. No primeiro capítulo, introduzimos conceitos fundamentais sobre reticulados. No segundo capítulo, abordamos a densidade de empacotamentos esféricos e analisamos a importância e a dificuldade de se conhecer os empacotamentos mais densos. Discutimos também exemplos de reticulados com densidade máxima em suas dimensões. No terceiro capítulo, detalhamos a demonstração do teorema de Minkowski - Hlawka, que fornece um limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados. Apresentamos também o problema dos *fat struts*, que tem origem em teoria de comunicação e que se relaciona com a busca de reticulados-projeção de densidade máxima.

Abstract

This dissertation addresses the lattice theory with focus on packing density, which has many applications and allows to establish interesting connections between topics of linear algebra, calculus of several variables and discrete geometry. The first chapter is an introduction to the main concepts and properties of lattices. In the second chapter we discuss the sphere packing density problem, its importance and the difficulty in finding denser packings. Examples of lattices with maximum density are analyzed for lower dimensions. In the third chapter we detail the proof of the theorem of Minkowski - Hlawka which provides a lower bound for lattice packing density of lattices in any dimension. We also present the problem of the *fat struts* which comes from communication theory and is related to the search for denser projection lattices.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xv
Lista de Símbolos	xvii
Introdução	1
1 Reticulados	3
1.1 Uma breve contextualização da teoria de reticulados	3
1.2 Conceitos fundamentais	4
1.2.1 Empacotamento esférico reticulado	10
1.2.2 Regiões fundamentais	14
1.2.3 Matriz de Gram e determinante do reticulado	17
1.2.4 Reticulados equivalentes e reticulados duais	19
2 A densidade de empacotamentos esféricos reticulados	23
2.1 A importância dos empacotamentos mais densos	23
2.2 O problema da cobertura	27
2.3 O problema do “kissing number”	29
2.4 Exemplos de empacotamentos	31
2.4.1 O reticulado cúbico \mathbb{Z}^n	31
2.4.2 Os reticulados A_n e A_n^*	31
2.4.3 Os reticulados D_n e D_n^*	37
2.4.4 Os reticulados E_6, E_7 e E_8	38

2.4.5	O reticulado de Coxeter-Todd K_{12}	41
2.4.6	O reticulado de Barnes-Wall Λ_{16}	42
2.4.7	O reticulado de Leech Λ_{24}	43
2.5	Reticulado-projeção	45
2.6	Resultados conhecidos para o empacotamento esférico reticulado	49
2.7	Densidade máxima de empacotamentos esféricos reticulados	50
3	Limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados	53
3.1	Algumas noções gerais sobre empacotamentos	53
3.1.1	Noções básicas em geometria de números	54
3.1.2	Empacotamentos reticulados de corpos convexos	61
3.2	O teorema de Minkowski-Hlawka	62
3.3	Uma aplicação do limitante de Minkowski - Hlawka	66
	Referências Bibliográficas	71
	A Funções de Möbius e de Riemann	73
	B Algoritmos para o problema dos <i>fat struts</i>	77

Lista de Figuras

1.1 Reticulado no plano: $\Lambda = \mathbb{Z}^2$	5
1.2 Reticulado hexagonal no plano	5
1.3 Reticulado gerado por $\{(2, 1), (-1, 3)\}$	5
1.4 Reticulado unidimensional em \mathbb{R}^2 gerado por $\{(1, 1)\}$	5
1.5 Reticulado no espaço: $\Lambda = \mathbb{Z}^3$	6
1.6 Reticulado no espaço: $\Lambda = D_3$	6
1.7 Reticulado no espaço: $\Lambda = D_3^*$	6
1.8 Reticulado bidimensional em \mathbb{R}^3 : $\Lambda = A_2$	7
1.9 Discos no reticulado \mathbb{Z}^2	10
1.10 Esferas no reticulado <i>fcc</i>	10
1.11 Esferas no reticulado <i>bcc</i>	11
1.12 Regiões de Voronoi de reticulados planos	12
1.13 Região de Voronoi do reticulado <i>fcc</i> - Dodecaedro rômboico	13
1.14 Região de Voronoi do reticulado <i>bcc</i> - Octaedro truncado	13
1.15 Região de Voronoi do reticulado Λ unidimensional no plano	13
1.16 Ladrilhamento do plano por regiões de Voronoi de \mathbb{Z}^2	15
1.17 Ladrilhamento do plano por regiões de Voronoi de A_2	15
1.18 Ladrilhamento por politopos fundamentais no plano	17
2.1 Diferentes empacotamentos reticulados no plano	25
2.2 O problema da cobertura bidimensional	27
2.3 O problema do “kissing number” tridimensional	29
2.4 O problema do “kissing number” bidimensional	30
2.5 Comparação entre os empacotamentos <i>hcp</i> e <i>fcc</i>	35
2.6 Esferas unitárias no reticulado gerado por $\{(2, 0); (0, 2)\}$	52

2.7	Esferas unitárias no reticulado gerado por $\{(2, 0); (1, \sqrt{3})\}$	52
3.1	Exemplo de conjunto raio no espaço tridimensional	55
3.2	Exemplos de corpos-estrela no plano	56
3.3	Fat strut com $l \approx 10.630$ e $\varepsilon \approx 0.094$ na direção de $v = (7, 8)$	67
3.4	Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.34$ na direção de $v = (3, 2, 2)$	67
3.5	Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.24$ na direção de $v = (0, 1, 4)$	68
B.1	Fat strut com $l = \sqrt{113}$ e $\varepsilon = 1/\sqrt{113} \approx 0.094$ na direção de $q = (7, 8)$.	79
B.2	Resultado obtido para o vetor $q = (7, 8)$	79
B.3	Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.34$ na direção de $q = (2, 2, 3)$	81
B.4	Resultado obtido para o vetor $q = (2, 2, 3)$	81
B.5	Resultado obtido na direção de $q = (51, 52, 53, 54)$	82
B.6	Resultado obtido para o comprimento $r = \sqrt{17}$	86
B.7	Resultado obtido para o comprimento $r = \sqrt{54321}$	87
B.8	Fat strut com $l = \sqrt{54321}$ e $\varepsilon \approx 0.056$ na direção de $q = (46, 142, 179)$.	88

Lista de Símbolos

o	origem no espaço euclidiano
Λ	reticulado
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
w_α	coordenadas do vetor w com respeito à base α
$[T]_\beta^\alpha$	matriz de mudança de base (da base α para a base β)
$R(v)$	região de Voronoi do vetor v
$B_\rho(u)$	bola aberta de raio ρ e centro no ponto u
$d(u, v)$	distância euclidiana entre u e v
$V(S)$	volume do corpo S
ρ	raio de empacotamento
η	norma mínima em um reticulado
$[a]$	parte inteira do número real a
S_ρ	esfera de raio ρ
S_n	esfera unitária n -dimensional
V_n	volume da esfera unitária n -dimensional
$\text{int}(K)$	interior do corpo K
Δ	densidade do empacotamento reticulado (ou $\Delta(S\rho, \Lambda)$)
$\Delta(S, \Lambda)$	densidade do empacotamento reticulado do corpo S
$\Delta_{\max}(S)$	densidade máxima do empacotamento reticulado do corpo S
δ	densidade de centro
Θ	densidade de cobertura (thickness)
θ	densidade de cobertura normalizada
τ	kissing number

Λ_v	reticulado-projeção na direção do subespaço ortogonal ao vetor v
Π_v	função projeção
d_{crit}	determinante crítico

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a densidade de empacotamentos de esferas em reticulados. Analisamos os reticulados conhecidos que proporcionam os empacotamentos mais densos e um limitante inferior para a densidade, expresso pelo teorema de Minkowski - Hlawka. O propósito foi a redação de um texto didático que fornecesse uma introdução à teoria de reticulados com foco na densidade, apresentando sempre que possível a visualização geométrica do objeto abordado.

No primeiro capítulo apresentamos de maneira geral a importância da teoria de reticulados, dando ênfase à sua relação com o problema do empacotamento esférico. Introduzimos também os conceitos fundamentais que compõem os pré-requisitos para a análise da densidade de empacotamentos esféricos reticulados.

No segundo capítulo tratamos diretamente da densidade de empacotamentos esféricos reticulados, abordando a importância e a dificuldade de se conhecer os empacotamentos mais densos. Apresentamos vários exemplos de reticulados e suas características. Citamos também o problema do “kissing number” e o problema da cobertura, por sua relação com o problema do empacotamento esférico que, por sua vez, está diretamente relacionado a densidade. Apresentamos também o reticulado-projeção e suas propriedades. Além disso, definimos a densidade máxima de empacotamentos reticulados.

Nos dois primeiros capítulos temos aplicações de importantes conceitos de álgebra linear, tais como: mudança de base, transformação linear, distância, norma, ortogonalidade, produto escalar, propriedades de matrizes e projeções ortogonais.

No terceiro capítulo, fornecendo os pré-requisitos específicos, detalhamos a demonstração do teorema de Minkowski - Hlawka, que fornece um importante limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados em todas as dimensões. Apresentamos também um problema que tem origem em teoria de comunicação, mas que pode ser interpretado como o problema de encontrar o mais denso reticulado-projeção, em que o

limitante de Minkowski - Hlawka funciona como um parâmetro no estabelecimento de um limitante inferior. Neste capítulo apresentamos a noção de sequência de reticulados, juntamente com as noções de vizinhança e de convergência, e aplicamos o teorema de Mahler, o qual usa o teorema de Bolzano - Weierstrass em sua versão n-dimensional, representando uma aplicação de conceitos de funções de várias variáveis.

RETICULADOS

Este capítulo é dedicado à contextualização e à apresentação da teoria de reticulados. Citaremos a importância e os conceitos fundamentais desta teoria, fornecendo os pré-requisitos para a análise da densidade de empacotamentos esféricos reticulados. A primeira seção tem a função de exemplificar a importância da teoria de reticulados relacionando-a com o problema do empacotamento esférico. Na segunda seção apresentaremos as definições básicas desta teoria e aplicaremos conceitos de álgebra linear, tais como translações, bases, mudança de base, transformação linear, distância, norma, ortogonalidade, determinante e produto escalar.

As principais referências para este capítulo são [10], [2] e [3].

1.1 Uma breve contextualização da teoria de reticulados

A teoria de reticulados tem inúmeras aplicações. Atualmente, uma aplicação de grande interesse é a sua relação com o advento do computador quântico¹. Entretanto,

¹ Um computador quântico é um dispositivo que executa cálculos em alta velocidade fazendo uso direto de propriedades da mecânica quântica. Vale ressaltar que o advento do computador quântico faria com que sistemas criptográficos que protegem, por exemplo, a internet fossem quebrados. Acredita-se que alguns sistemas existentes resistem a computadores clássicos e a computadores quânticos; um desses sistemas é baseado na estrutura de reticulados.[7]

estaremos interessados em uma outra aplicação desta teoria dada pela sua relação com o problema do empacotamento esférico.

O problema do empacotamento esférico consiste em distribuir esferas de mesmo raio em \mathbb{R}^n , de modo que:

- duas esferas quaisquer deste arranjo apenas se toquem em um ponto da casca, ou não possuam intersecção nenhuma;
- este arranjo de esferas ocupe o maior espaço possível.

Quando os centros das esferas estão sobre pontos de um reticulado, temos um empacotamento reticulado de esferas ou empacotamento esférico reticulado e passamos a ter uma estrutura algébrica que, devido às suas propriedades, torna o problema um pouco menos complicado.

1.2 Conceitos fundamentais

Podemos então apresentar a definição de reticulados:

Definição 1.2.1 *Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_m\}$ um conjunto linearmente independente de vetores do \mathbb{R}^n . Chamamos de **reticulado** ao seguinte conjunto:*

$$\Lambda = \{a_1u_1 + \dots + a_mu_m; a_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq m\},$$

β é chamada base do reticulado.

Notemos que o reticulado é um conjunto discreto no subespaço de dimensão m gerado por β . Dizemos também que Λ é um reticulado de dimensão m contido em \mathbb{R}^n .

A seguir, temos a imagem de alguns reticulados no plano e no espaço.

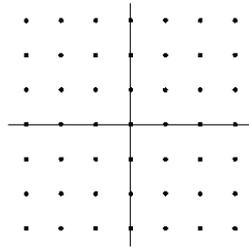


Figura 1.1: Reticulado no plano: $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Este reticulado é gerado pela base canônica do \mathbb{R}^2 .

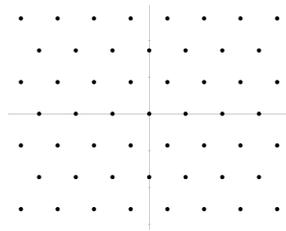


Figura 1.2: Reticulado hexagonal no plano. Este reticulado é gerado por $\{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$.

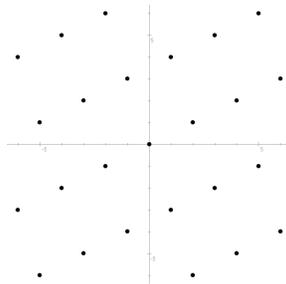


Figura 1.3: Reticulado gerado por $\{(2, 1), (-1, 3)\}$.

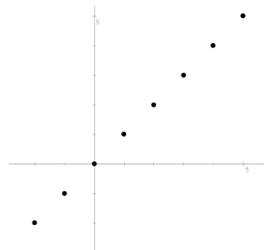


Figura 1.4: Reticulado unidimensional em \mathbb{R}^2 gerado por $\{(1, 1)\}$.

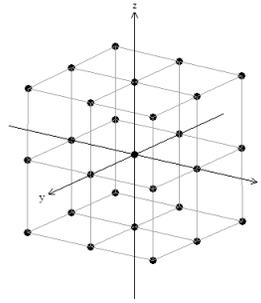


Figura 1.5: Reticulado no espaço: $\Lambda = \mathbb{Z}^3$. Este reticulado é gerado pela base canônica do \mathbb{R}^3 .

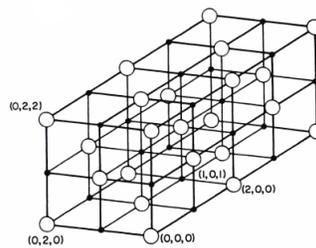


Figura 1.6: Reticulado no espaço: $\Lambda = D_3$. Este reticulado (representado pelas bolas abertas) é gerado pela base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

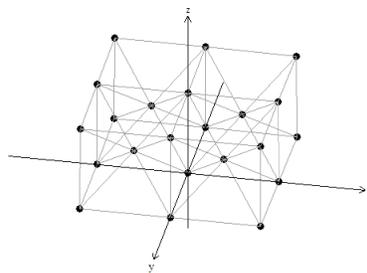


Figura 1.7: Reticulado no espaço: $\Lambda = D_3^*$. Este reticulado é gerado pela base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

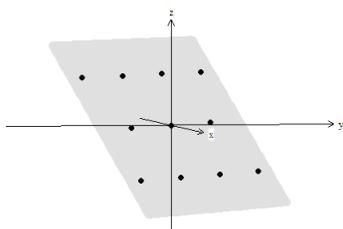


Figura 1.8: Reticulado bidimensional em \mathbb{R}^3 : $\Lambda = A_2$ gerado por $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.

Os reticulados representados nas figuras 1.6 e 1.7 são denominados, respectivamente, *face-centered cubic (fcc)* e *body-centered cubic (bcc)*. Estudaremos com mais detalhes estes reticulados no próximo capítulo e veremos que o reticulado hexagonal, na figura 1.2, representa a solução para o problema do empacotamento esférico (reticulado ou não reticulado) em \mathbb{R}^2 , enquanto o reticulado *fcc* soluciona o problema no ambiente do \mathbb{R}^3 , quando se considera apenas empacotamentos reticulados.

Ao considerarmos um determinado conjunto discreto, podemos verificar se ocorrem propriedades que facilitem o seu estudo. Uma importante propriedade é definida a seguir.

Definição 1.2.2 *Um conjunto X é geometricamente uniforme se e somente se:*

$$\forall x, y \in X, \exists T_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que}$$

1. T_j é isometria
2. $T_j(X) = X$
3. $T_j(x) = y$

A proposição a seguir nos mostra que a propriedade apresentada na definição 1.2.2 ocorre em reticulados.

Proposição 1.2.1 *Um reticulado Λ é geometricamente uniforme.*

Demonstração:

De acordo com a definição 1.2.2, basta provar que existe uma transformação T_j com as três características apresentadas.

Tomando T_j uma translação, sabe-se que toda translação é uma isometria.

Considere T_j a seguinte translação

$$T_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow x + j$$

$$T_j(x) = x + j.$$

Agora, provaremos que a translação T_j descrita acima, para $j = v$ e $v \in \Lambda$, leva Λ em Λ , ou seja, $T_v(\Lambda) = \Lambda$.

Sejam x e $v \in \Lambda$ e $\beta = \{u_1, \dots, u_m\}$ uma base de Λ , então podemos escrever $x = x_1u_1 + \dots + x_mu_m$ e $v = v_1u_1 + \dots + v_mu_m$. Assim, qualquer que seja o x escolhido, temos que $T_v(x) = x + v = (x_1 + v_1)u_1 + \dots + (x_m + v_m)u_m$; como x_i e v_i são inteiros, então $x_i + v_i$ também é inteiro e, portanto, $T_v(x)$ também pertence ao reticulado Λ .

Por último, provaremos que sempre existe uma translação T_j para quaisquer que sejam x e $y \in \Lambda$ tal que $T_j(x) = y$.

Se $x = y$, basta tomarmos $j = o$, o vetor nulo, e fazermos $T_j(x) = T_o(x) = x + o = x = y$.

Se $x \neq y$, então sempre podemos escrever $y = y_1u_1 + \dots + y_mu_m = (x_1 + k_1)u_1 + \dots + (x_m + k_m)u_m$ para k_i 's inteiros tal que $y = x + k$ e $k = k_1u_1 + \dots + k_mu_m \in \Lambda$. Logo, basta tomar $j = k$ e teremos $T_j(x) = T_k(x) = x + k = y$.

■

Portanto, está demonstrado que a estrutura algébrica de reticulado tem a propriedade de ser geometricamente uniforme. Isto faz que haja mais ferramentas para o estudo geométrico de problemas que envolvam esta estrutura.

Um reticulado possui diferentes bases. No caso em que a base do reticulado também for base do espaço ambiente ($m = n$), temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.2 *Dado um reticulado Λ gerado por uma base β , uma base α será base deste reticulado se e somente se a respectiva matriz mudança de base possui entradas inteiras e determinante ± 1 .*

Demonstração:

Supondo que $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ são bases de Λ e sejam $[T]_\alpha^\beta$ a matriz mudança de base de β para α e $[T]_\beta^\alpha$ a matriz mudança de base de α para β , temos que, para $w \in \Lambda$, podemos escrever:

$$w = a_1u_1 + \dots + a_nu_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n; a_i, b_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n.$$

Como cada elemento da base α pode ser escrito como combinação inteira dos elementos de β e vice versa, temos que:

$$u_1 = c_{11}v_1 + \dots + c_{n1}v_n$$

$$\vdots$$

$$u_n = c_{1n}v_1 + \dots + c_{nn}v_n.$$

Como cada $u_i \in \Lambda$ então cada $c_{kj} \in \mathbb{Z}$.

Logo

$$w = a_1u_1 + \dots + a_nu_n = a_1(c_{11}v_1 + \dots + c_{n1}v_n) + \dots + a_n(c_{1n}v_1 + \dots + c_{nn}v_n) = (a_1c_{11} + \dots + a_nc_{1n})v_1 + \dots + (a_1c_{n1} + \dots + a_nc_{nn})v_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n.$$

Assim

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$[T]_\beta^\alpha \cdot w_\alpha = w_\beta$$

Concluimos portanto que as matrizes $[T]_\alpha^\beta$ e $[T]_\beta^\alpha$ possuem apenas entradas inteiras e $[T]_\alpha^\beta = [T]_\beta^\alpha^{-1}$. Assim, $[T]_\alpha^\beta \cdot [T]_\beta^\alpha = I$. Daí, temos que $\det[T]_\alpha^\beta \cdot \det[T]_\beta^\alpha = 1$. Como $[T]_\alpha^\beta$ e $[T]_\beta^\alpha$ só possuem entradas inteiras, temos que o determinante também é inteiro, assim, $\det[T]_\alpha^\beta = \det[T]_\beta^\alpha = \pm 1$. A volta segue do fato de que como a matriz mudança de base possui apenas entradas inteiras e determinante ± 1 , então todo elemento da base

β pode ser escrito como combinação inteira dos elementos da base α e, portanto, todo elemento do reticulado gerado por β pertence ao reticulado gerado por α e vice-versa.

■

1.2.1 Empacotamento esférico reticulado

Considere o reticulado \mathbb{Z}^2 gerado pela base canônica do \mathbb{R}^2 representado na figura 1.1. Um empacotamento esférico (por discos, neste caso) é feito colocando-se discos de raio ρ com centro nos pontos do reticulado de forma que este raio seja o maior raio possível e que não haja sobreposição.

Podemos considerar, analogamente, reticulados no espaço tridimensional e realizar um empacotamento de esferas cujos centros são os pontos do reticulado.

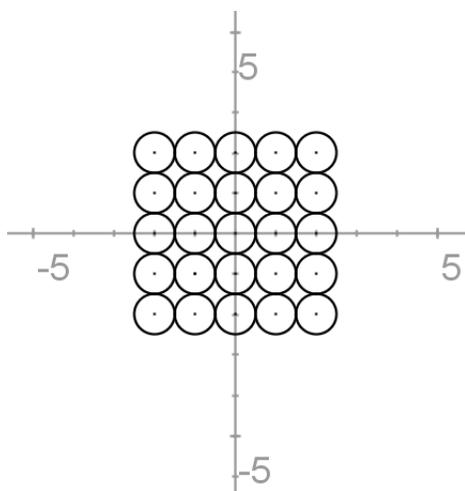


Figura 1.9: Discos no reticulado \mathbb{Z}^2

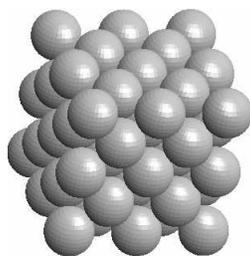


Figura 1.10: Esferas no reticulado fcc

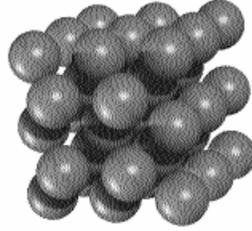


Figura 1.11: Esferas no reticulado *bcc*

Definição 1.2.3 *Raio de empacotamento* é o maior raio ρ tal que $B_\rho(u) \cap B_\rho(v) = \emptyset$ para quaisquer u e $v \in \Lambda$ e $u \neq v$.

No caso de \mathbb{Z}^2 temos que $\rho = 1/2$. Apresentaremos no próximo capítulo os reticulados *fcc* e *bcc* com mais detalhes.

Uma definição importante relacionada ao raio de empacotamento é a norma mínima de um vetor não nulo do reticulado que tem o mesmo valor da distância mínima entre dois pontos distintos deste.

Definição 1.2.4 A *norma mínima* η de um reticulado Λ é a menor norma dentre os elementos não nulos de Λ :

$$\eta = \min \{ \|x\| ; x \in \Lambda, x \neq 0 \}$$

Proposição 1.2.3 O raio de empacotamento ρ é igual à metade da distância mínima d entre pontos distintos do reticulado.

Demonstração:

Basta provarmos que se tomarmos $r = d/2$ então r satisfaz que $B_r(u) \cap B_r(v) = \emptyset$ e depois provarmos que $r = d/2$ é o maior possível.

Considere $r = d/2$. Se tomarmos qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in B_r(u)$, sabemos que $d(u, x) + d(x, v) \geq d(u, v) \geq d$ e que $d(u, x) < r = d/2$. Vamos supor que $x \in B_r(v)$, logo $d(x, v) < r = d/2$. Assim, temos $d(u, x) + d(x, v) < d/2 + d/2 = d$, o que é uma contradição. Portanto, tomando $r = d/2$ temos que $B_r(u) \cap B_r(v) = \emptyset$.

Agora provaremos que $r = d/2$ é o maior raio possível. Caso $r > d/2$, sejam $u, v \in \Lambda$ tais que $d(u, v) = d$. Para $h = \frac{u+v}{2} \in \mathbb{R}^n$ temos que $d(h, u) = d(h, v) = d/2 < r$.

Portanto, existiria $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $h \in B_r(u) \cap B_r(v)$, logo $r = d/2 = \rho$ é o maior raio possível.

■

Estamos interessados em medir a proporção do espaço \mathbb{R}^n que foi ocupada pelo empacotamento esférico e, para isso, precisamos definir uma região de \mathbb{R}^n que contenha a esfera de raio $\rho = d/2$.

Definição 1.2.5 Dado $v \in \Lambda$, a *região de Voronoi* associada a v , denotada por $R(v)$, é o seguinte subconjunto de \mathbb{R}^n :

$$R(v) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|v - x\| \leq \|u - x\|, \forall u \in \Lambda\}.$$

Assim, dado $v \in \Lambda$, $R(v)$ é o conjunto dos pontos que estão mais próximos de v do que de u para qualquer u em Λ . A região de Voronoi de um reticulado no plano ($n = 2$) pode ser construída tomando-se a intersecção de todos os semiplanos determinados pela mediatriz do segmento que liga u e v , que contém o ponto v , para todo $u \in \Lambda$. A região de Voronoi de um reticulado no espaço tridimensional é definida de maneira análoga e corresponde a um subconjunto do \mathbb{R}^3 , determinado pela intersecção de semiespaços.

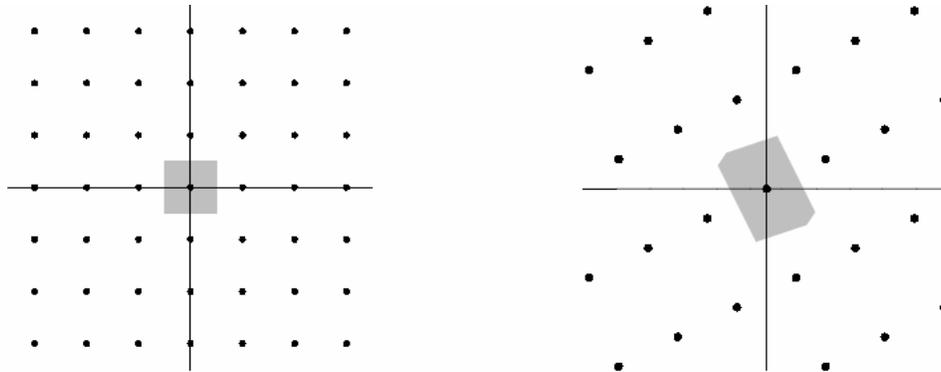


Figura 1.12: Regiões de Voronoi de reticulados planos: à esquerda temos a região de Voronoi da origem de \mathbb{Z}^2 e à direita temos a região de Voronoi da origem do reticulado gerado por $\{(2, 1), (-1, 3)\}$

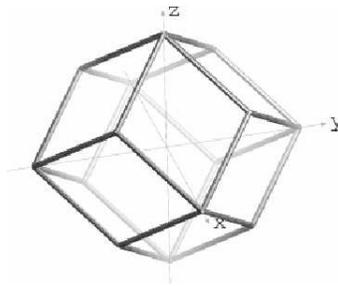


Figura 1.13: Região de Voronoi do reticulado *fcc* - Dodecaedro rômboide



Figura 1.14: Região de Voronoi do reticulado *bcc* - Octaedro truncado

A região de Voronoi de reticulados n -dimensionais no \mathbb{R}^n (caso em que $m = n$) são polítopos fechados e limitados gerados pela interseção de semiespaços de dimensão n .

Para o caso em que o reticulado tem dimensão m no \mathbb{R}^n , com $m < n$, a região de Voronoi é dada por polítopos fechados e não limitados como ilustrado na figura abaixo.

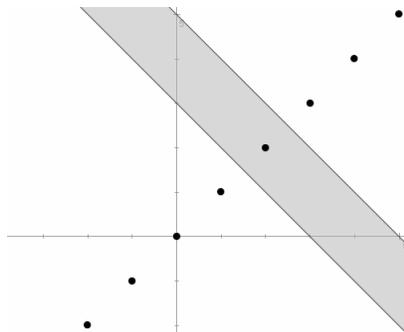


Figura 1.15: Região de Voronoi do reticulado Λ unidimensional no plano. Λ é gerado por $\{(1, 1)\}$.

1.2.2 Regiões fundamentais

Definição 1.2.6 *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Uma **região fundamental** F de Λ é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n que ladrilha \mathbb{R}^n , isto é, tomando os transladados $F + v$, com $v \in \Lambda$, conseguimos cobrir todo o \mathbb{R}^n de modo que dois ladrilhos ou não têm intersecção ou se intersectam apenas nos bordos.*

Proposição 1.2.4 *A região de Voronoi da origem, $R(o)$, é uma região fundamental de Λ .*

Demonstração:

Pela definição de região de Voronoi, sabe-se que $R(o)$ é fechada. Sabe-se também que qualquer vetor $r \in \mathbb{R}^n$ ou está mais próximo de algum vetor $v \in \Lambda$, neste caso pertence ao interior de $R(v)$, ou é equidistante a diferentes pontos do reticulado Λ incluindo v , neste caso pertence ao bordo de $R(v)$.

Basta provarmos que as regiões $R(v)$ podem ser escritas como os transladados de $R(o)$:

$$R(v) = v + R(o) = \{v + k \in \mathbb{R}^n, k \in R(o)\},$$

e teremos que a região $R(o)$ ladrilha o \mathbb{R}^n .

Sabe-se que

$$R(v) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|v - x\| \leq \|u - x\|, \forall u \in \Lambda\} \text{ e}$$

$$R(o) = \{k \in \mathbb{R}^n / \|k\| \leq \|w - k\|, \forall w \in \Lambda\}.$$

Seja

$$T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$k \rightarrow k + v$$

uma translação. Tomando qualquer $k \in R(o)$ e tomando $x = k + v$ temos:

$\|v - x\| = \|v - (k + v)\| = \|k\| \leq \|w - k\| = \|w - x + v\| = \|u - x\|, \forall u \in \Lambda$,
então $x = k + v \in R(v)$. Assim, $T_v(R(o)) \subset R(v)$, pois se $x \in T_v(R(o))$ então $x \in R(v)$.

Agora vamos provar que todo elemento de $R(v)$ pertence a $T_v(R(o))$. Seja $x \in R(v)$ então $x \in \mathbb{R}^n$ e pode ser escrito como $x = k + v$ para $v \in \Lambda$ e para algum $k \in \mathbb{R}^n$. Vamos provar que $k \in R(o)$.

Como $x \in R(v)$: $\|k\| = \|v - (k + v)\| = \|v - x\| \leq \|u - x\| = \|w - x + v\| = \|w - k\|, \forall w \in \Lambda$, então $k \in R(o)$. Logo, $R(v) \subset T_v(R(o))$.

Conclui-se que $T_v(R(o)) = v + R(o) = R(v)$. ■

As figuras a seguir ilustram o ladrilhamento por regiões de Voronoi de reticulados no plano.

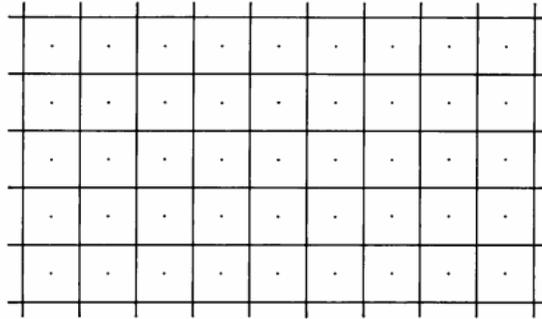


Figura 1.16: Ladrilhamento do plano por regiões de Voronoi de \mathbb{Z}^2

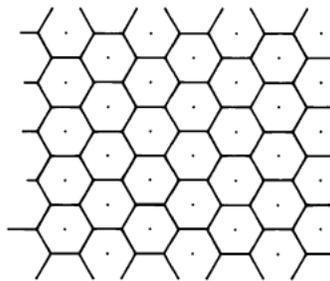


Figura 1.17: Ladrilhamento do plano por regiões de Voronoi de A_2

Definição 1.2.7 Para um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ com base $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, definimos o *politopo fundamental* gerado por esta base como sendo o sólido

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i; 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

Proposição 1.2.5 Um *politopo fundamental* P é uma região fundamental de Λ .

Demonstração:

Da forma como foi definido, sabe-se que P é fechado, devemos provar apenas que, tomando os transladados $P + v$ onde $v \in \Lambda$, conseguimos cobrir todo o \mathbb{R}^n de modo que dois ladrilhos ou não tem intersecção ou se interceptam apenas nos bordos. Considere $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de Λ .

Se

$$v + P = \{v + x; x \in P\},$$

então temos que:

(i) Cada vetor de \mathbb{R}^n pertence a um destes sólidos. De fato, se $[a]$ é a parte inteira do número real a , então $[a] \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a - [a] \leq 1$ e para cada vetor $y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n [a_i] \cdot u_i}_{\in \Lambda} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - [a_i]) u_i}_{\in P}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v \in \Lambda} v + P$.

(ii) O interior de $v + P$ é dado por:

$$\text{int}(v + P) = \left\{ v + \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i; 0 < a_i < 1 \right\}.$$

Sejam $v = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$ e $w = w_1 u_1 + \dots + w_n u_n \in \Lambda$ e $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \in \mathbb{R}^n$, então todo v_i e todo $w_i \in \mathbb{Z}$ e todo $x_i \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $x \in \text{int}(v + P)$ e $x \in \text{int}(w + P)$. Assim, para todo x_i temos $x_i = v_i + a_i = w_i + a'_i$ como $0 < a_i, a'_i < 1$ e $v_i, w_i \in \mathbb{Z}$ a igualdade implica que $v_i = w_i$ e $a_i = a'_i$, logo $v = w$. E daí se conclui que nenhum ponto pode estar simultaneamente no interior de mais de um transladado.

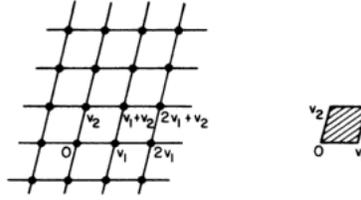


Figura 1.18: Ladrilhamento por politopos fundamentais no plano

Proposição 1.2.6 *O volume de qualquer região fundamental de Λ é o mesmo.*

Esta proposição nos mostra que a noção de politopos fundamentais é crucial no estudo de reticulados, pois trata-se de uma região fundamental com a propriedade de que o cálculo do volume é mais simples. Para uma demonstração desta proposição ver [5]. Veremos no próximo capítulo que esta propriedade facilita também o cálculo da densidade do empacotamento esférico reticulado.

1.2.3 Matriz de Gram e determinante do reticulado

Definição 1.2.8 *Dada a base $\beta = \{u_1, \dots, u_m\}$ do reticulado Λ , a **matriz geradora** de Λ é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

onde $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n}), \dots, u_m = (u_{m1}, \dots, u_{mn})$.

Seja $x = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m$ um elemento de Λ , podemos escrever os vetores na forma coluna e temos:

$$x = k_1 \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix} + \dots + k_m \cdot \begin{pmatrix} u_{m1} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

isto nos diz que Λ é a imagem de \mathbb{Z}^m pela matriz A .

Pode ocorrer que a dimensão de um reticulado Λ seja igual à dimensão do espaço ambiente ($m = n$). Neste caso, uma base do \mathbb{R}^n dada por $\gamma = \{w_1, \dots, w_n\}$ com $w_1 = (w_{11}, \dots, w_{1n}), \dots, w_m = (w_{n1}, \dots, w_{nn})$ gera Λ . Logo, a matriz geradora do reticulado é quadrada e é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1n} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Definição 1.2.9 Se A é a matriz geradora de um reticulado Λ , definimos a **matriz de Gram** G associada à A como sendo,

$$G = A^t A.$$

onde t denota a transposição.

Pela forma como foi definida, a matriz de Gram G é uma matriz simétrica e suas entradas são os produtos escalares $\langle u_i, u_j \rangle$, para u_i e $u_j \in \beta$ e β a base do reticulado.

Assim, G possui informações métricas importantes com respeito à base escolhida. Como um reticulado pode ter mais de uma base, a matriz de Gram pode mudar com a mudança da base inicial, entretanto seu determinante permanece o mesmo.

Proposição 1.2.7 Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{v_1, \dots, v_n\}$ duas bases de um reticulado Λ em \mathbb{R}^n e sejam G e G' as matrizes de Gram correspondentes. Então, $\det(G) = \det(G')$.

Demonstração:

Como β é base de Λ , podemos escrever

$$v_j = a_{1j}u_1 + \dots + a_{nj}u_n; 1 \leq j \leq n,$$

onde cada $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. A transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que leva u_j em v_j faz a mudança de base e tem matriz M com determinante ± 1 . Daí $B = MA$, para A e B matrizes geradoras com relação às bases β e β' respectivamente, e assim

$$\det(B^t B) = \det(A^t M^t M A) = \det(A^t) \det(M^t) \det(M) \det(A) = \det(A^t A).$$

■

Definição 1.2.10 Definimos o *determinante do reticulado* Λ , denotado por $\det(\Lambda)$, como o determinante de uma matriz de Gram de Λ .

Caso a matriz geradora A seja quadrada, temos que $\det(\Lambda) = \det(G) = \det(A^t A) = \det^2(A)$.

Temos também que o volume de um politopo fundamental P é $(\det(\Lambda))^{1/2}$.

1.2.4 Reticulados equivalentes e reticulados duais

Podemos estabelecer em reticulados a noção de congruência. Dois reticulados congruentes possuem mesmo raio de empacotamento ρ , mesma densidade Δ e uma mesma matriz de Gram G . Todavia, um conceito mais flexível, específico para reticulados, é o da equivalência.

Se os reticulados Λ_1 e Λ_2 são equivalentes, sua densidade é a mesma e seus raios de empacotamento e suas matrizes de Gram são relacionados por um simples fator escalar λ . A congruência é um caso particular da equivalência e ocorre quando o fator escalar $\lambda = 1$.

Definição 1.2.11 Λ_1 e Λ_2 com matrizes geradoras dadas respectivamente por A e B são *equivalentes* quando existem uma aplicação ortogonal $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um número real positivo λ tais que $(\lambda U)(A) = B$.

Podemos perceber que $\langle \lambda U u, \lambda U v \rangle = \lambda^2 \langle u, v \rangle$ e que, conseqüentemente, $\|\lambda U v\| = \lambda \|v\|$. Diremos que λ é a razão de semelhança de Λ_1 para Λ_2 .

Proposição 1.2.8 Se Λ_1 é equivalente a Λ_2 com razão de semelhança λ , então existem matrizes de Gram G_1 e G_2 e raios de empacotamento ρ_1 e ρ_2 respectivamente para Λ_1 e Λ_2 tais que

1. $G_2 = \lambda^2 G_1$,
2. $\rho_2 = \lambda \rho_1$.

Demonstração:

1. Sejam A e B matrizes geradoras de Λ_1 e Λ_2 respectivamente, então $\lambda U.A = B$, para U matriz ortogonal. Assim $G_2 = B^t B = \lambda^2 A^t U^t U A = \lambda^2 A^t A = \lambda^2 G_1$.
2. Para cada elemento $b_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ da matriz G_2 e cada elemento $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ da matriz G_1 temos $\langle v_i, v_j \rangle = \lambda^2 \langle u_i, u_j \rangle = \langle \lambda u_i, \lambda u_j \rangle$, logo $\|v_k\| = \lambda \|u_k\|$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \rho_2 &= \frac{\min \{\|v_k\|, v_k \in \Lambda_2\}}{2} \\
 &= \frac{\min \{\lambda \|u_k\|, u_k \in \Lambda_1\}}{2} \\
 &= \lambda \cdot \frac{\min \{\|u_k\|, u_k \in \Lambda_1\}}{2} \\
 &= \lambda \rho_1.
 \end{aligned}$$

■

É importante citar que todo reticulado m -dimensional em \mathbb{R}^n , com $m < n$, possui um reticulado equivalente descrito em \mathbb{R}^m .

Considere agora uma base $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ de um reticulado Λ em \mathbb{R}^n . Como os vetores $u_i, 1 \leq i \leq n$ são linearmente independentes, existem vetores $u_j^*, 1 \leq j \leq n$ tais que

$$\langle u_i, u_j^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.1)$$

O reticulado Λ^* com base $\beta^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ é chamado **reticulado dual, polar ou recíproco** de Λ .

Lema 1.2.1 [9] *O reticulado dual Λ^* de Λ consiste de todos os pontos x^* tais que $\langle x^*, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Lambda$. Podemos afirmar que reciprocamente Λ é dual de Λ^* . Além disso, se A e A^* são respectivamente as matrizes geradoras de Λ e Λ^* , vale que:*

$$\det(A) \cdot \det(A^*) = 1.$$

Demonstração:

Suponha que $x^* = \sum k_j u_j^* \in \Lambda^*$ e $x = \sum t_j u_j \in \Lambda$, k_j e t_j inteiros. Então $\langle x^*, x \rangle = \langle \sum k_j u_j^*, \sum t_j u_j \rangle = \sum k_j t_j$ é um inteiro. Portanto, o produto escalar de qualquer vetor de Λ^* com um de Λ é inteiro.

Seja c tal que $\langle c, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Lambda$. Em particular, podemos colocar $\langle c, u_j \rangle = k_j, 1 \leq j \leq n$ para quaisquer inteiros k_j . Tomando $x^* = \sum k_j u_j^*$, ou seja, fazendo uma combinação linear inteira com inteiros dados por $\langle c, u_j \rangle$ e com vetores tomados na base de Λ^* então:

$$\langle c, u_j \rangle - \langle x^*, u_j \rangle = k_j - \left\langle \sum k_j u_j^*, u_j \right\rangle = k_j - \langle k_j u_j^*, u_j \rangle = 0.$$

e

$$\langle c - x^*, u_j \rangle = 0, 1 \leq j \leq n.$$

Como os n vetores u_j são linearmente independentes, temos que $c - x^*$ certamente não é ortogonal a todo u_j e para que o produto escalar seja nulo devemos ter $c - x^* = 0$ e $c = x^* = \sum k_j u_j^*$, logo todo vetor c , tal que $\langle c, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Lambda$, pertence a Λ^* .

A segunda sentença do lema segue da primeira e da equação 1.1.

Podemos escrever $x^* = \sum k_j u_j^* = A^* k$ e $x = \sum t_j u_j = A t$ onde A^* e A são as matrizes geradoras de Λ^* e de Λ respectivamente e k e t são vetores em \mathbb{Z}^n . Assim temos que: $\langle x^*, x \rangle = \langle A^* k, A t \rangle = k^t (A^*)^t \cdot A t = k^t t$ e $(A^*)^t \cdot A = I$ conseqüentemente, $\det(A) \cdot \det(A^*) = 1$.

■

Podemos também estabelecer uma relação entre as matrizes de Gram de reticulados n -dimensionais duais. Sejam G e G^* as matrizes de Gram respectivamente de Λ e Λ^* , temos:

$$\begin{aligned} \det(GG^*) &= \det(G)\det(G^*) \\ &= \det(A^t A)\det((A^*)^t A^*) \\ &= \det(A^t)\det(A)\det((A^*)^t)\det(A^*) = 1 \end{aligned}$$

e

$$\det(G) = \det(G^*)^{-1}$$

Os reticulados *fcc* e *bcc*, representados respectivamente nas figuras 1.6 e 1.7, são duais [10].

A DENSIDADE DE EMPACOTAMENTOS ESFÉRICOS RETICULADOS

Neste capítulo apresentaremos a importância e a dificuldade de se conhecer os empacotamentos mais densos e comentaremos brevemente a complexidade computacional que envolve o cálculo da densidade. Citaremos o problema da cobertura e o problema do “kissing number” por serem semelhantes ao problema do empacotamento esférico. Abordaremos algumas famílias de reticulados e o reticulado-projeção, apresentando suas características. Aplicaremos neste capítulo mais alguns conceitos de álgebra linear na seção 2.4, no uso de propriedades de matrizes e no cálculo de determinantes com o uso do desenvolvimento de Laplace, e também na seção 2.5, quando estudamos projeções ortogonais. A última seção trata da noção de densidade máxima e de seu cálculo em empacotamentos reticulados de esferas unitárias.

As principais referências para este capítulo são [10], [15], [8], [1] e [21].

2.1 A importância dos empacotamentos mais densos

O problema de se encontrar o empacotamento mais denso foi citado por Hilbert em 1900 como o décimo oitavo problema de uma lista de questões que tiveram destaque no desenvolvimento da ciência e que têm sido um grande desafio para vários matemáticos.

A procura pelos empacotamentos mais densos aparece em diversas aplicações. Entretanto, em várias situações, a descoberta dos empacotamentos ótimos precedeu à descoberta de suas aplicações e apareceram conexões destes empacotamentos com áreas inesperadas da Matemática. A seguir, apresentaremos brevemente algumas destas aplicações. Para um melhor detalhamento de cada uma delas ver [10].

Os melhores empacotamentos em oito dimensões e as famílias de reticulados A_n , D_n e E_n , que serão apresentadas mais adiante, por exemplo, aparecem em várias áreas aparentemente não relacionadas. Semelhantemente, o reticulado Leech em 24 dimensões Λ_{24} tem conexão misteriosa com a geometria hiperbólica, álgebra de Lie e o “Monster simple group”.

Há aplicações diretas de empacotamentos reticulados em teoria de números, por exemplo, na solução de equações diofantinas e em geometria dos números.

Os empacotamentos em duas dimensões aparecem como seções transversais de um cabo de fibra óptica. Empacotamentos em três dimensões têm aplicações em química, física e biologia. Os empacotamentos n -dimensionais aparecem em comunicação digital e também podem ser usados na estimação numérica de integrais da superfície da esfera em \mathbb{R}^n ou de seu interior.

Existem conexões entre códigos e empacotamentos esféricos e entre códigos lineares e empacotamentos reticulados. Códigos corretores de erros são usados para construir empacotamentos esféricos densos em \mathbb{R}^n . Pode-se construir reticulados a partir de códigos binários. Uma das formas de se associar reticulados a códigos é chamada Construção A. Para realizá-la consideremos a aplicação $\Psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$, dada por:

$$\Psi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}).$$

Esta aplicação é sobrejetora e satisfaz a condição que $\Psi(u + v) = \Psi(u) + \Psi(v)$, ou seja, Ψ é um homomorfismo de grupos. Dado um código binário $C \subset \mathbb{Z}_2^n$ linear, obtemos então um reticulado $\Lambda(C)$, calculando $\Psi^{-1}(C)$. Alguns reticulados são obtidos fazendo uma perturbação na pré-imagem da aplicação Ψ , ou seja, $\Lambda(C) = a\Psi^{-1}(C)$, onde $a > 0$. Tomando $a = 1$, temos que o reticulado D_n , que apresentaremos neste capítulo, é obtido calculando $\Lambda(C_n) = \Psi^{-1}(C_n)$ [3].

Pelas aplicações supracitadas, podemos perceber a importância de se estabelecer o valor da densidade de cada empacotamento. Comparando as imagens do empacotamento esférico nos reticulados planos abaixo, podemos ter uma noção intuitiva do que seria a densidade de empacotamento e como seria o reticulado mais denso.

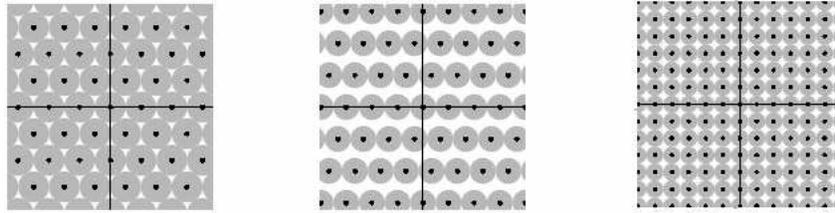


Figura 2.1: Diferentes empacotamentos reticulados no plano. Da esquerda para a direita temos os empacotamentos do reticulado hexagonal (A_2), do reticulado gerado por $\{(3/2, 0), (1/2, \sqrt{14}/2)\}$ e do reticulado \mathbb{Z}^2 .

Um bom empacotamento é aquele em que a proporção do volume ocupado pelas esferas numa porção do espaço está próxima do maior valor possível. A taxa que nos fornece esta proporção é a densidade do empacotamento.

Definição 2.1.1 *Dado um reticulado n -dimensional Λ em \mathbb{R}^n , definimos a densidade de um empacotamento de esferas com centros em Λ ou simplesmente a **densidade de um empacotamento esférico reticulado** como sendo*

$$\Delta = \frac{\text{volume de uma esfera em } \mathbb{R}^n}{\text{volume de uma região fundamental}} = \frac{\text{vol}(B_\rho(0))}{(\det(\Lambda))^{1/2}}$$

Assim, podemos calcular a densidade de um empacotamento esférico reticulado se tivermos uma base do reticulado e sua distância mínima.

Para empacotamentos não reticulados, a densidade é encontrada tomando uma região esférica muito grande de raio R , calculando a proporção desta região que é ocupada pelas esferas do empacotamento e fazendo $R \rightarrow \infty$.

Para reticulados n -dimensionais em \mathbb{R}^n , torna-se necessária a expressão do volume de uma esfera n -dimensional [10].

O volume V de uma esfera n -dimensional de raio ρ é dado por:

$$V = V_n \rho^n,$$

onde V_n é o volume de uma esfera n -dimensional de raio 1, que por sua vez é dado por:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} ((n-1)/2)!}{n!}$$

A primeira forma é usada para n par e a segunda para n ímpar.

Proposição 2.1.1 *Reticulados equivalentes têm a mesma densidade.*

Demonstração:

Sejam Λ_1 e Λ_2 reticulados equivalentes com matrizes de Gram G_1 e G_2 , respectivamente, temos:

$$\Delta_2 = \frac{V_n \rho_2^n}{|\det(G_2)|^{1/2}} = \frac{V_n \lambda^n \rho_1^n}{\lambda^n |\det(G_1)|^{1/2}} = \frac{V_n \rho_1^n}{|\det(G_1)|^{1/2}} = \Delta_1.$$

■

Uma outra taxa também muito usada é a densidade de centro.

Definição 2.1.2 *A densidade de centro δ é dada por:*

$$\delta = \frac{\Delta}{V_n},$$

onde V_n é o volume de uma esfera de raio 1 n -dimensional.

Para empacotamentos reticulados, podemos escrever:

$$\delta = \rho^n (\det(\Lambda))^{-1/2}.$$

Para encontrarmos a densidade de um empacotamento, precisamos do raio ρ do empacotamento, que, por sua vez, é dado pela metade da distância mínima entre pontos do

reticulado. Sabemos que a distância mínima equivale à menor norma dentre os elementos não nulos do reticulado e encontrar esta norma é um problema computacionalmente muito complexo.

O método conhecido como Redução de Minkowski nos fornece uma base para um reticulado Λ tal que o primeiro vetor desta base é o vetor de norma mínima de Λ . Entretanto, a implementação computacional deste método tem complexidade que cresce exponencialmente com a dimensão. Há alternativas ao método de Minkowski de complexidade polinomial, como LLL-Lenstra-Lenstra-Lovász, mas que não fornecem sempre o vetor de norma mínima. Para maiores detalhes sobre a complexidade computacional da obtenção do vetor de norma mínima, ver [21].

2.2 O problema da cobertura

O problema da cobertura pode ser considerado um dual do problema do empacotamento e consiste em encontrar a melhor cobertura do espaço por esferas sobrepostas.

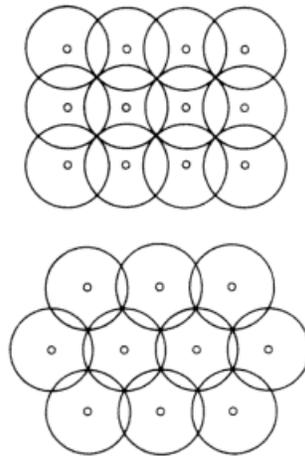


Figura 2.2: O problema da cobertura bidimensional. Acima temos discos com centros no reticulado \mathbb{Z}^2 e abaixo temos discos com centros no reticulado hexagonal A_2 .

A melhor cobertura é aquela em que a proporção de áreas sobrepostas é menor.

Pelas figuras acima podemos perceber que, considerando os reticulados \mathbb{Z}^2 e A_2 (hexagonal), o segundo oferece uma melhor cobertura.

Se os centros das esferas formam um reticulado, para medir qual a melhor cobertura temos uma taxa análoga à densidade de empacotamento: a densidade de cobertura (thickness).

Definição 2.2.1 *Considere um arranjo de esferas de raio R cobrindo o \mathbb{R}^n , a densidade de cobertura, Θ , é dada por:*

$$\Theta = \frac{\text{volume de uma esfera}}{(\det(\Lambda))^{1/2}} = \frac{V_n R^n}{(\det(\Lambda))^{1/2}},$$

onde V_n é o volume de uma esfera unitária n -dimensional e R é denominado raio de cobertura. R é o menor raio que resulta em uma cobertura do espaço gerado por Λ .

Para coberturas não reticuladas, Θ é definida da mesma forma que a densidade de um empacotamento arbitrário.

Enquanto o problema do empacotamento esférico procura os empacotamentos mais densos por esferas que se tangenciam, o problema da cobertura procura os empacotamentos menos densos por esferas que cobrem todo o espaço.

Num reticulado, a densidade de cobertura é dada pelas esferas de menor raio que, centradas no reticulado, cubram o espaço todo.

As densidades de empacotamento e de cobertura satisfazem:

$$\Delta \leq 1 \leq \Theta,$$

ou seja, o volume de uma esfera com raio de empacotamento ρ é sempre menor do que ou igual ao volume de uma região fundamental, enquanto o volume de uma esfera com raio de cobertura R é sempre maior do que ou igual ao volume de uma região fundamental.

Uma outra taxa utilizada é a densidade de centro associada à cobertura.

Definição 2.2.2 *A densidade de centro ou densidade de cobertura normalizada é dada por:*

$$\theta = \frac{\Theta}{V_n}.$$

No ambiente do espaço bidimensional, a melhor cobertura é feita pelo reticulado hexagonal. Em dimensões maiores, a melhor cobertura não é conhecida. Em \mathbb{R}^3 a melhor cobertura reticulada é dada pelo reticulado *bcc*.

O problema da cobertura aparece em teoria de comunicação na compressão de sinais. Alguns processos de transmissão de sinais fazem uso da melhor cobertura para o controle de distorções e, conseqüentemente, para a melhora da qualidade de sinais comprimidos [23].

2.3 O problema do “kissing number”

No espaço tridimensional, o problema do “kissing number” apareceu em uma famosa discussão entre Isaac Newton e David Gregory, em 1694. Este problema pergunta quantas esferas idênticas podem ser arranjadas de forma que todas elas toquem uma outra esfera idêntica central. No ambiente \mathbb{R}^3 , Newton acreditava serem doze esferas e Gregory, treze. Mais adiante verificaremos que Newton estava correto.

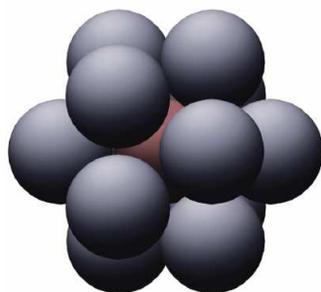


Figura 2.3: O problema do “kissing number” tridimensional

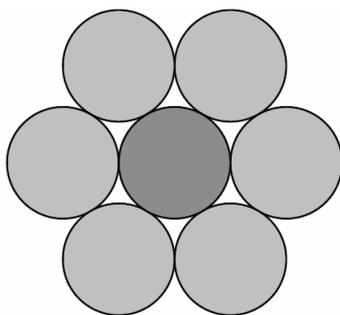


Figura 2.4: O problema do “kissing number” bidimensional

Definição 2.3.1 *O “kissing number” τ em \mathbb{R}^n é a quantidade de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho.*

Assim, no espaço n -dimensional o problema do “kissing number” pode ser considerado análogo ao problema do empacotamento esférico, tratando-se do “empacotamento” de pontos distribuídos na superfície de uma esfera.

No empacotamento reticulado, τ é o mesmo para qualquer esfera. Em empacotamentos arbitrários, τ pode variar de uma esfera para outra.

Se enunciarmos o problema do “kissing number” perguntando quantos pontos podem ser colocados na superfície de uma esfera n -dimensional tal que a separação angular entre quaisquer dois pontos seja ao menos igual a 60° , vemos que o problema do “kissing number” tem relação estreita com códigos esféricos.

Definição 2.3.2 *Seja $\Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum x_i^2 = 1\}$ a superfície de uma esfera n -dimensional, um **código esférico** é um subconjunto finito X de Ω_n .*

Sabe-se que no plano, $\tau = 6$; enquanto no espaço, conforme citado, $\tau = 12$ [10] [24].

O problema do “kissing number” tem aplicação em teoria de códigos. Um código baseado em reticulados pode ser avaliado primeiramente pela sua densidade, em que o melhor código possui o maior valor de densidade de empacotamento de esferas. Uma segunda categoria de avaliação é o “kissing number”, em que o melhor código é o que possui o menor “kissing number” (menor número de vizinhos), pois um número maior de vizinhos incrementa a probabilidade de erro na transmissão, como pode ser detectado, por exemplo, pelo limitante de Battacharya [6].

2.4 Exemplos de empacotamentos

Nesta seção apresentamos alguns reticulados importantes e suas propriedades. Para um melhor detalhamento dessas propriedades e para maiores informações sobre estes reticulados, ver [10].

2.4.1 O reticulado cúbico \mathbb{Z}^n

O reticulado cúbico \mathbb{Z}^n pode ser definido como:

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $n=2$ e $n=3$ temos a imagem deste reticulado nas figuras 1.1 e 1.5.

A matriz geradora para \mathbb{Z}^n é dada pela matriz identidade de ordem n . Logo, o determinante deste reticulado é 1.

A norma mínima é 1. Os vetores de norma mínima são todos os da forma $v = (0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$. O raio de empacotamento é $\rho = 1/2$ e o raio de cobertura é $R = \rho\sqrt{n} = \sqrt{n}/2$. A densidade de empacotamento é $\Delta = V_n 2^{-n}$. A densidade de centro é $\delta = 2^{-n}$. A densidade de cobertura é $\Theta = \frac{V_n n^{n/2}}{2^n}$.

As regiões de Voronoi são cubos.

O “kissing number” é $\tau = 2n$.

O reticulado \mathbb{Z}^n é autodual.

2.4.2 Os reticulados A_n e A_n^*

O reticulado A_n , com $n \geq 1$, é dado por:

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}; x_0 + \dots + x_n = 0\}.$$

Este reticulado usa $n + 1$ coordenadas para definir um reticulado n -dimensional. A_n encontra-se no hiperplano $\sum x_i = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Logo, sua matriz geradora não é quadrada e é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja A acima descrita a matriz geradora do reticulado A_n e $G = A^t A$ sua matriz de Gram, temos que:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos demonstrar que o determinante do reticulado A_n é dado por:

$$\det(A_n) = \det(G) = \det(A^t A) = n + 1$$

Para isso, considere a matriz $A' = [v|A]$ para $v = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $A = [v_1 \dots v_n]$ a matriz geradora de A_n . Como $v_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0) \dots v_n = (0, 0, 0, \dots, -1, 1)$ podemos perceber que v foi escolhido de forma a ser perpendicular a todo v_i com

$1 \leq i \leq n$. Temos que $A^t = \begin{bmatrix} v^t \\ A^t \end{bmatrix}$ e:

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(A'^t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nesta última forma temos na última linha da matriz o vetor v_1 . Com operações elementares em linhas, podemos tornar a última linha igual a $v'_1 = v + v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots + nv_n = (0, 0, \dots, n+1)$ e teremos:

$$\det(A') = (-1)^n \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^{n-1} (n+1) = -(n+1).$$

Logo:

$$\begin{aligned} \det(A^t A') &= \det \left(\begin{bmatrix} v^t \\ A^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & |A \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \|v\|^2 & 0 \\ 0 & A^t A \end{bmatrix} \right) = \|v\|^2 \det(A^t A) = (-(n+1))^2 \end{aligned}$$

Como $\|v\|^2 = n + 1$ temos que $\det(A^t A) = n + 1$.

O reticulado A_n está contido num subespaço de dimensão n em \mathbb{R}^{n+1} e é, portanto, equivalente a um reticulado descrito em \mathbb{R}^n , como visto na subseção 1.2.4. Por exemplo, o reticulado A_2 é equivalente ao reticulado hexagonal gerado por $\{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$.

Para $n=2$ e $n=3$ temos, respectivamente, a imagem deste reticulado nas figuras 1.2, reticulado *hexagonal*, e 1.6, reticulado *fcc- face-centered cubic*. Temos a imagem do empacotamento esférico com centro nestes reticulados na figura 2.1, à esquerda, e na figura 1.10. Ressaltamos que o reticulado hexagonal é o que possui a melhor densidade de empacotamento em duas dimensões, enquanto o reticulado *fcc* é o que possui a melhor densidade de empacotamento reticulado em três dimensões.

A norma mínima em A_n é $\sqrt{2}$. Os vetores de norma mínima são todos os da forma $v = (1, -1, 0, \dots, 0)$. O raio de empacotamento é $\rho = 1/\sqrt{2}$ e o raio de cobertura é $R = \rho \left\{ \frac{2a(n+1-a)}{n+1} \right\}^{1/2}$ onde $a = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. A densidade de empacotamento é $\Delta = V_n 2^{-n/2} (n+1)^{-1/2}$. A densidade de centro é $\delta = 2^{-n/2} (n+1)^{-1/2}$.

O “kissing number” é $\tau = n(n+1)$.

Em três dimensões há muitos empacotamentos não reticulados com a mesma densidade e “kissing number” do *fcc*. O mais simples deles é o *hcp* - hexagonal close packing - que tem considerável importância em química.

O *hcp* não é reticulado, mas pode ser definido como união do reticulado Λ gerado por $(1, 0, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $(0, 0, \sqrt{8/3})$ e sua translação $\Lambda + (1/2, 1/\sqrt{12}, \sqrt{2/3})$. Por esta definição, temos que as características do *hcp* são: norma mínima $\eta = 1$, “kissing number” $\tau = 12$, $\rho = 1/2$, $R = \rho\sqrt{2}$ e $\Delta = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Observe a figura a seguir para compararmos o arranjo de esferas nos empacotamentos *hcp* e *fcc*.

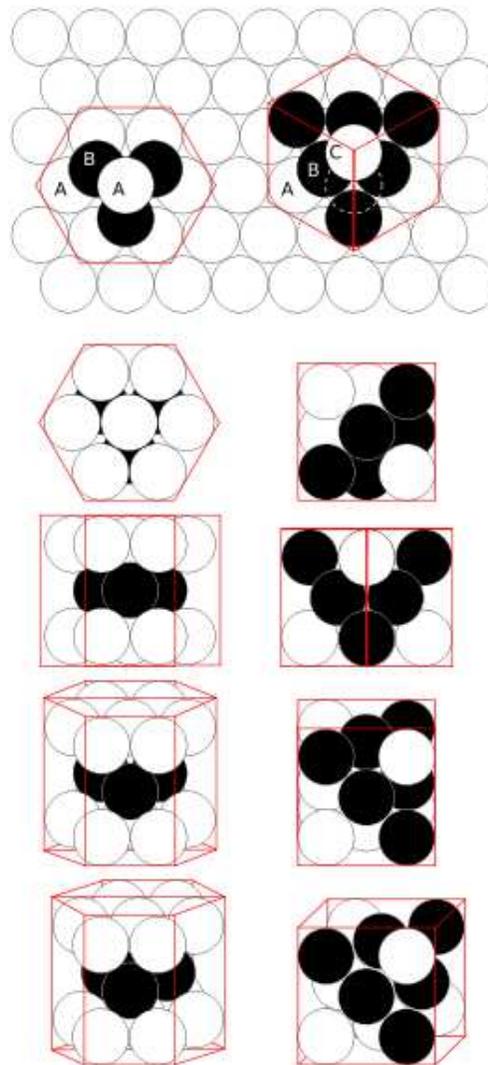


Figura 2.5: Comparação entre os empacotamentos *hcp* e *fcc*. À esquerda temos o empacotamento não reticulado *hexagonal close packing* e à direita temos o empacotamento reticulado *face-centered cubic*.

O dual do reticulado A_n é o reticulado A_n^* com matriz geradora $(n+1) \times (n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{-n}{n+1} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Sua matriz de Gram é:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Como vimos na subseção 1.2.4, as matrizes de Gram G e G^* de reticulados duais são relacionados da seguinte forma:

$$\det(G^*) = \det(G)^{-1}.$$

Logo

$$\det(A_n^*) = \det(A_n)^{-1} = 1/(n+1).$$

Temos que as características de A_n^* são: norma mínima quadrada $\eta^2 = \frac{n}{n+1}$, “kissing number” $\tau = 2$ para $n = 1$ e $\tau = 2n+2$ para $n \geq 2$, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $R = \rho\sqrt{\frac{n+2}{3}}$, densidade de empacotamento $\Delta = V_n(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}})^n(n+1)^2$, densidade de centro $\delta = \frac{n^{n/2}}{2^n(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$ e densidade de cobertura $\Theta = V_n\sqrt{n+1}[\frac{n(n+2)}{12(n+1)}]^{n/2}$.

2.4.3 Os reticulados D_n e D_n^*

Os reticulados D_n são definidos por:

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n; x_1 + \dots + x_n \text{ é par}\}$$

para $n \geq 3$.

Alguns autores definem este reticulado de uma forma alternativa como aquele obtido colorindo alternadamente os pontos de \mathbb{Z}^n com duas cores, como num tabuleiro de dama (*checkerboard*), por isso D_n é também chamado de *reticulado checkerboard*.

Sua matriz geradora é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente sua matriz de Gram é:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O determinante deste reticulado é $\det(D_n) = 4$, norma mínima $\eta = \sqrt{2}$, “kissing number” $\tau = 2n(n-1)$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, densidade de centro $\delta = 2^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ e $R = \rho\sqrt{2}$ para $n = 3$ e $\rho\sqrt{n/2}$ para $n \geq 4$.

O reticulado dual de D_n é denotado D_n^* e tem matriz geradora:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

As características de D_n^* são: determinante $\det(D_n^*) = 1/4$, norma mínima $\eta = \sqrt{\frac{3}{4}}$ para $n = 3$ ou 1 para $n \geq 4$, “kissing number” $\tau = 8$ para $n = 3$, $\tau = 24$ para $n = 4$ ou $2n$ para $n \geq 5$, $\rho = \frac{\sqrt{3}}{4}$ para $n = 3$ e $1/2$ para $n \geq 4$, $R = \rho \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2}}$ se n par e $R = \rho \sqrt{5/3}$ para $n = 3$ e $R = \rho \frac{(2n-1)^{1/2}}{2}$ para n ímpar $n \geq 5$.

Os reticulados A_3^* e D_3^* são equivalentes ao reticulado *bcc*, representado na figura 1.7 e muito familiar em química. A mais simples definição deste reticulado é via D_3^* :

$$bcc = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3; x, y, z \text{ são todos pares ou todos ímpares}\}.$$

2.4.4 Os reticulados E_6 , E_7 e E_8

Como os reticulados E_6 e E_7 podem ser definidos a partir de E_8 , começaremos definindo o último.

O reticulado E_8 é um subgrupo discreto de \mathbb{R}^8 que pode ser definido como:

$$E_8 = \left\{ (x_1, \dots, x_8); \text{ todo } x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou todo } x_i \in (\mathbb{Z} + 1/2); \sum x_i \text{ é par} \right\}.$$

Um descrição alternativa de E_8 é:

$$E_8' = \left\{ (x_1, \dots, x_8); \text{ todo } x_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum x_i \text{ é par ou todo } x_i \in (\mathbb{Z} + 1/2) \text{ e } \sum x_i \text{ é ímpar} \right\}.$$

Na primeira forma de definição, E_8 é também chamado de sistema de coordenadas par, enquanto na segunda, sistema de coordenadas ímpar.

No sistema de coordenadas par, E_8 tem a seguinte matriz geradora:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

As características de E_8 são: determinante $\det(E_8) = 1$, norma mínima $\eta = \sqrt{2}$, “kissing number” $\tau = 240$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \rho\sqrt{2} = 1$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \frac{\pi^4}{384} = 0,2537\dots$, a densidade de centro é $\delta = 1/16$ e a densidade de cobertura é $\Theta = \frac{\pi^4}{24} = 4,0587\dots$

O reticulado E_8 é notável porque dá soluções ao problema do empacotamento esférico reticulado e ao problema do “kissing number” em 8 dimensões. É conhecido que $\Delta = \frac{\pi^4}{384}$ é a densidade máxima que pode ser alcançada por um empacotamento reticulado em 8 dimensões. Além disso, o reticulado E_8 é o único (a menos de isometrias) com esta densidade. É conjecturado que esta densidade é ótima (até mesmo entre empacotamentos não reticulados). Pesquisadores mostraram recentemente que nenhuma densidade de empacotamento não reticulado pode exceder E_8 por um fator maior do que $1 + 10^{-14}$. Foi mostrado em 1979 que $\tau = 240$ é o maior “kissing number” possível em 8-dimensões. O problema do “kissing number” é notavelmente difícil e soluções só são conhecidas em 1, 2, 3, 4, 8, e 24 dimensões. Talvez, surpreendentemente, é mais fácil achar a solução em 8 (e 24) dimensões que em 3 ou 4. Isto segue das propriedades especiais do E_8 (e seu primo 24-dimensional, o reticulado de Leech).

O reticulado E_8 no sistema par de coordenadas pode ser caracterizado como o único reticulado em \mathbb{R}^8 com as seguintes propriedades:

1. É unimodular, isto é, sua matriz geradora tem determinante ± 1 . Equivalentemente, E_8 é auto-dual, ou seja, ele é igual ao seu dual.

2. É par, isto significa que a norma ao quadrado de qualquer vetor do reticulado é par.

Reticulados pares unimodulares podem ocorrer somente em dimensões divisíveis por oito. Em dimensão 16, há dois tipos. Em dimensão 24, há 24 tipos chamados reticulados Niemeier. O mais importante deles é o reticulado de Leech.

Podemos definir o reticulado E_6 da seguinte forma:

$$E_6 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8; x_1 + x_8 = x_2 + \dots + x_7 = 0\}$$

E_6 tem a seguinte matriz geradora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

As características de E_6 são: determinante $\det(E_6) = 3$, norma mínima $\eta = \sqrt{2}$, “kissing number” $\tau = 72$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \rho\sqrt{\frac{8}{3}} = 1$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} = 0,3729\dots$, a densidade de centro é $\delta = \frac{1}{8\sqrt{3}}$.

Um modo de definir o reticulado E_7 é:

$$E_7 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8; \sum x_i = 0\}$$

E_7 tem a seguinte matriz geradora:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

As características de E_7 são: determinante $\det(E_7) = 2$, norma mínima $\eta = \sqrt{2}$, “kissing number” $\tau = 126$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \rho\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \frac{\pi^3}{105} = 0,2953\dots$, a densidade de centro é $\delta = 1/16$.

2.4.5 O reticulado de Coxeter-Todd K_{12}

Os exemplos de reticulados detalhados até agora foram conhecidos no século XIX. A partir de agora trataremos de reticulados que apareceram no século XX.

O reticulado K_{12} foi descrito pela primeira vez em 1954 por Coxeter e Todd.

As características deste reticulado podem ser definidas por: $\det(K_{12}) = 729$, a norma mínima é $\eta = 2$, o raio de empacotamento é $\rho = 1$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \pi^6/19440 = 0,04945\dots$, a densidade de centro é $\delta = 1/27$, o raio de cobertura é $R = \rho\sqrt{\frac{8}{3}}$. O “kissing number” é $\tau = 756$.

K_{12} tem a seguinte matriz geradora:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2.4.6 O reticulado de Barnes-Wall Λ_{16}

Este reticulado apareceu em 1959 em uma publicação de Barnes e Wall.

Seu determinante é $\det(\Lambda_{16}) = 256$, a norma mínima é $\eta = 2$, o raio de empacotamento é $\rho = 1$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \frac{\pi^8}{16 \cdot 8!} = 0,01471\dots$, a densidade de centro é $\delta = 1/16$, o raio de cobertura é $R = \rho\sqrt{3}$ e o “kissing number” é $\tau = 4320$.

Λ_{16} tem a seguinte matriz geradora:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.7 O reticulado de Leech Λ_{24}

Este reticulado foi descoberto por Leech em 1965.

O determinante deste reticulado é $\det(\Lambda_{24}) = 1$, a norma mínima é $\eta = 2$, o raio de empacotamento é $\rho = 1$, a densidade de empacotamento é $\Delta = \pi^{12}/12! = 0,001930\dots$, a densidade de centro é $\delta = 1$, o raio de cobertura é $R = \sqrt{2}$ e a densidade de cobertura é $\Theta = (2\pi)^{12}/12!$. O “kissing number” é $\tau = 196560$.

Λ_{24} tem a seguinte matriz geradora:

2.5 Reticulado-projeção

Em alguns problemas, é conveniente considerar o reticulado $(n-1)$ -dimensional obtido como projeção do reticulado dos inteiros (\mathbb{Z}^n) por um de seus elementos.

Definição 2.5.1 *Seja*

$$v \in \mathbb{Z}^n, v = (a_1, \dots, a_n)$$

com $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$ e $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

A *função projeção* é dada por:

$$\Pi_v : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow x - \text{proj}_v x = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Proposição 2.5.1 *Dado*

$$v \in \mathbb{Z}^n, v = (a_1, \dots, a_n)$$

com $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$ e $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Existem $v_2, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^n / \{v, v_2, \dots, v_n\}$ geram \mathbb{Z}^n .

Demonstração:

Basta construirmos uma matriz A com os vetores v_i dispostos em colunas e definidos como:

$$A = \begin{pmatrix} v & v_2 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -y_1 \frac{a_1}{d_0} & -y_2 \frac{a_1}{d_1} & \dots & -y_{n-2} \frac{a_1}{d_{n-3}} & -y_{n-1} \frac{a_1}{d_{n-2}} \\ a_2 & x_1 & -y_2 \frac{a_2}{d_1} & \dots & -y_{n-2} \frac{a_2}{d_{n-3}} & -y_{n-1} \frac{a_2}{d_{n-2}} \\ a_3 & 0 & x_2 & \dots & -y_{n-2} \frac{a_3}{d_{n-3}} & -y_{n-1} \frac{a_3}{d_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x_{n-2} & -y_{n-1} \frac{a_{n-1}}{d_{n-2}} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

onde $d_i = \text{mdc}(a_1, \dots, a_{i+1})$, $d_0 = a_1$ e o par (x_i, y_i) é tal que

$$\langle (x_i, y_i), (d_{i-1}, a_{i+1}) \rangle = d_i; 1 \leq i \leq n-1.$$

A seguir demonstramos que o determinante de A acima definida é 1.

Multiplicando cada linha k de A por $\frac{a_1 \cdots a_n}{a_k}$, temos que:

$$\det(A) = \frac{1}{(a_1 \cdots a_n)^{n-1}} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n & -y'_1 & -y'_2 & \cdots & -y'_{n-2} & -y'_{n-1} \\ a_1 \cdots a_n & x'_1 & -y'_2 & \cdots & -y'_{n-2} & -y'_{n-1} \\ a_1 \cdots a_n & 0 & x'_2 & \cdots & -y'_{n-2} & -y'_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 \cdots a_n & 0 & 0 & \cdots & x'_{n-2} & -y'_{n-1} \\ a_1 \cdots a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x'_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } x'_i = \frac{x_i}{a_{i+1}}(a_1 \cdots a_n) = \frac{x_i}{a_{i+1}} \prod_{j=1}^n a_j \text{ e } y'_i = \frac{y_i}{d_{i-1}} \prod_{j=1}^n a_j.$$

Realizando operações em linhas tais que $l'_i = l_i - l_{i-1}$, para $2 \leq i \leq n$, temos:

$$\det(A) = \frac{1}{(a_1 \cdots a_n)^{n-1}} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n & -y'_1 & -y'_2 & \cdots & -y'_{n-2} & -y'_{n-1} \\ 0 & x'_1 + y'_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x'_1 & x'_2 + y'_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x'_{n-2} + y'_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x'_{n-2} & x'_{n-1} + y'_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na primeira linha, temos que:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{(a_1 \cdots a_n)^{n-1}} \cdot (a_1 \cdots a_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (x'_k + y'_k) \\
&= \frac{1}{(a_1 \cdots a_n)^{n-2}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x_k}{a_{k+1}} + \frac{y_k}{d_{k-1}} \right) (a_1 \cdots a_n) \right] \\
&= \frac{(a_1 \cdots a_n)^{n-1}}{(a_1 \cdots a_n)^{n-2}} \cdot \left[\left(\frac{x_1}{a_2} + \frac{y_1}{d_0} \right) \left(\frac{x_2}{a_3} + \frac{y_2}{d_1} \right) \cdots \left(\frac{x_{n-1}}{a_n} + \frac{y_{n-1}}{d_{n-2}} \right) \right] \\
&= (a_1 \cdots a_n) \left[\left(\frac{d_1}{a_2 d_0} \right) \left(\frac{d_2}{a_3 d_1} \right) \cdots \left(\frac{d_{n-1}}{a_n d_{n-2}} \right) \right] = d_{n-1} = \text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1
\end{aligned}$$

Como A é uma matriz quadrada inteira unimodular, sua inversa A^{-1} também tem entradas inteiras e é unimodular, logo, pela proposição 1.2.2, A também é matriz geradora de \mathbb{Z}^n . ■

Proposição 2.5.2 *A imagem de \mathbb{Z}^n pela função Π_v é um reticulado gerado por*

$$\{\Pi_v(v_2), \dots, \Pi_v(v_n)\}$$

que denotaremos por Λ_v ou $\Pi_v(\mathbb{Z}^n)$.

Demonstração:

Tomando qualquer elemento y de $\Pi_v(\mathbb{Z}^n)$, temos que $y = \Pi_v(x)$, para algum $x \in \mathbb{Z}^n$, $x = \sum_{i=1}^n k_i v_i$ onde $v_1 = v$, v_i , $2 \leq i \leq n$ e $k_i \in \mathbb{Z}$ são os mesmos da proposição anterior. É fácil ver que Π_v é uma transformação linear e podemos escrever:

$$y = \Pi_v(x) = \Pi_v\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i \Pi_v(v_i).$$

Como $\Pi_v(v_1) = \Pi_v(v) = 0$, todo elemento de $\Pi_v(\mathbb{Z}^n)$ pode ser escrito como combinação linear inteira de $\Pi_v(v_2), \dots, \Pi_v(v_n)$. Além disso, para qualquer vetor c tal que $c = \sum_{i=1}^n k_i \Pi_v(v_i)$, $k_i \in \mathbb{Z}$ temos que $c = \Pi_v(\sum k_i v_i) \in \Pi_v(\mathbb{Z}^n)$. Basta provarmos agora

que $\Pi_v(v_2), \dots, \Pi_v(v_n)$ são linearmente independentes. Tomando a combinação linear $\sum_n^{i=2} c_i \Pi_v(v_i) = 0$, vamos provar que todo $c_i = 0$:

$$\sum_n^{i=2} c_i \Pi_v(v_i) = c_2(v_2 - t_2 v) + \dots + c_n(v_n - t_n v) = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n - (t_2 + \dots + t_n)v = 0.$$

Como v, v_2, \dots, v_n foram dados na proposição anterior e são linearmente independentes, podemos concluir que $c_i = 0, 2 \leq i \leq n$. ■

Temos então que o reticulado projeção $\Lambda_v = \Pi_v(\mathbb{Z}^n)$ é $(n-1)$ -dimensional e é gerado por $\{\Pi_v(v_2), \dots, \Pi_v(v_n)\}$ já que $\Pi_v(v) = 0$.

Observemos que, tomando v qualquer, nem sempre obtemos como imagem de Π_v um reticulado. Por exemplo, se v possuir coordenadas irracionais, o resultado desta projeção deixa de ser um conjunto discreto.

Proposição 2.5.3 *O determinante do reticulado projeção Λ_v é dado por:*

$$\det(\Lambda_v) = \det(\Pi_v(\mathbb{Z}^n)) = \frac{1}{\|v\|^2}$$

Demonstração:

Sabe-se que \mathbb{Z}^n tem matriz geradora A que pode ser escrita na forma:

$$A = \begin{bmatrix} v & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix},$$

com $v = (a_1, \dots, a_n)$, $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$ e $\det(A) = 1$.

Sabe-se também que $\Pi_v(\mathbb{Z}^n)$, para $\Pi_v(x) = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$, tem matriz geradora:

$$M = \begin{bmatrix} \Pi_v(v_2) & \dots & \Pi_v(v_n) \end{bmatrix}.$$

Observe que M não é uma matriz quadrada.

O determinante de $\Pi_v(\mathbb{Z}^n)$ é dado por: $\det(\Pi_v(\mathbb{Z}^n)) = \det(M^t M)$.

Podemos escrever:

$$A' = \left[v \mid M \right] = \left[v \mid \Pi_v(v_2) \quad \dots \quad \Pi_v(v_n) \right] = \left[v \mid v_2 - \frac{\langle v_2, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \quad \dots \quad v_n - \frac{\langle v_n, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right]$$

Podemos perceber que A' assim definida foi obtida de A pelas seguintes operações elementares em colunas: $c'_i = c_i - t_i c_1 = c_i - \frac{\langle c_i, v \rangle}{\langle v, v \rangle} c_1$; para $2 \leq i \leq n$ e $c_1 = v$. Logo $\det(A) = \det(A') = 1$.

Assim, temos que:

$$A^t A' = \begin{bmatrix} v^t \\ M^t \end{bmatrix} \left[v \mid M \right] = \begin{bmatrix} \|v\|^2 & 0 \\ 0 & M^t M \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A^t A') = 1$ e $\det(A^t A') = \|v\|^2 \cdot \det(M^t M)$, então $\det(M^t M) = \frac{1}{\|v\|^2} = \det(\Pi_v(\mathbb{Z}^n))$. ■

O volume de uma região fundamental no reticulado projeção é dado por:

$$V = (\det(\Pi_v(\mathbb{Z}^n)))^{1/2} = \frac{1}{\|v\|}$$

Na figura 2.1 temos, ao centro, um reticulado projeção dado pela projeção de \mathbb{Z}^n pelo vetor $v = (1, 2, 3)$.

2.6 Resultados conhecidos para o empacotamento esférico reticulado

O problema do empacotamento esférico em reticulados procura basicamente os reticulados que proporcionam a maior densidade em suas dimensões. Embora este problema tenha sido estudado por vários matemáticos, até agora, só se conhece o resultado para dimensões até 8 e para a dimensão 24, como mostra a tabela a seguir onde δ denota a densidade de centro [10].

Dimensão	2	3	4	5	6	7	8	24
Reticulado	A_2	D_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	Λ_{24}
δ	$1/\sqrt{12}$	$1/\sqrt{32}$	$1/8$	$1/128$	$1/192$	$1/16$	$1/16$	1

Para o caso $n = 2$ temos o teorema de Lagrange e Thue [24] que afirma ser o reticulado hexagonal, gerado por $\{(2, 0), (1, \sqrt{3})\}$, o que proporciona o mais denso empacotamento de esferas (reticulado e não reticulado) em \mathbb{R}^2 .

Em 1611, J. Kepler fez a conjectura de que o mais denso empacotamento de esferas (reticulado e não reticulado) em \mathbb{R}^3 tem densidade de centro $1/\sqrt{32}$. Carl F. Gauss em 1831 provou parcialmente a conjectura mostrando que esse é o maior valor para a densidade de centro quando se considera apenas empacotamentos reticulados. Em 1998, Thomas Hales anunciou uma prova da conjectura de Kepler pelo método de exaustão, que envolve verificação de muitos casos individuais usando cálculos computacionais complexos. A prova de Hales foi avaliada como 99% correta. Para maiores detalhes sobre a conjectura de Kepler ver [24].

A complexidade da prova para o caso $n = 3$ bem como o fato de ainda não conhecermos os empacotamentos reticulados ótimos em dimensões $n \geq 9, n \neq 24$ explicitam o alto grau de dificuldade do problema.

É também um problema aberto em teoria de empacotamentos esféricos provar a existência de configurações não-reticuladas que forneçam um melhor empacotamento esférico que qualquer configuração reticulada de mesma dimensão. Para dimensões em que os empacotamentos reticulados mais densos são conhecidos, estes não podem ser localmente melhorados para um empacotamento periódico não reticulado de densidade maior.

2.7 Densidade máxima de empacotamentos esféricos reticulados

Primeiramente, vamos definir formalmente o empacotamento esférico.

Definição 2.7.1 *Sejam X um conjunto de pontos discretos em \mathbb{R}^n e S_n a esfera unitária n -dimensional. Nós chamamos $S_n + X = S_n + x; x \in X$ um empacotamento de transladados de S_n ou **empacotamento esférico** se:*

$$(int(S_n + x_1)) \cap (int(S_n + x_2)) = \emptyset$$

para x_1 e x_2 pontos distintos de X .

Se X é um reticulado, $S_n + X$ é um empacotamento esférico reticulado ou empacotamento reticulado de S_n .

Definimos na primeira seção a densidade de empacotamentos esféricos reticulados pela fórmula:

$$\Delta = \frac{V_n \rho^n}{(\det(\Lambda))^{1/2}}.$$

Podemos perceber que esta fórmula está associada a um dado reticulado Λ e a uma dada esfera de raio ρ denotada S_ρ . Assim, $\Delta = \Delta(S_\rho, \Lambda)$, isto é, a densidade depende do reticulado e do corpo a ser empacotado. Sob essa abordagem, temos para cada reticulado uma esfera de raio ρ que garante um melhor empacotamento.

Como o valor da densidade não depende do fator escala, como pudemos verificar nos reticulados equivalentes na proposição 2.1.1, podemos trabalhar com o empacotamento de esferas unitárias ($\rho = 1$), assumindo que a distância mínima é 2.

Assim, em busca do valor da densidade máxima de um empacotamento, faremos, a partir de agora, uma nova abordagem da densidade. Dada uma esfera unitária n -dimensional S_n , buscaremos, dentre todos os reticulados formados pelos centros dos transladados disjuntos de S_n , aquele que fornece a maior densidade de empacotamento. A densidade máxima ou densidade do mais denso empacotamento reticulado de S_n é dada por:

$$\Delta_{max}(S_n) = \sup_{\Lambda} \frac{V(S_n)}{(\det(\Lambda))^{1/2}} \quad (2.1)$$

onde o supremo é sobre todos os reticulados Λ tais que $S_n + \Lambda$ é o empacotamento reticulado de S_n .

Considere o empacotamento de esferas unitárias em \mathbb{R}^2 . Como já visto na seção 2.6, a densidade máxima é dada pelo empacotamento hexagonal.

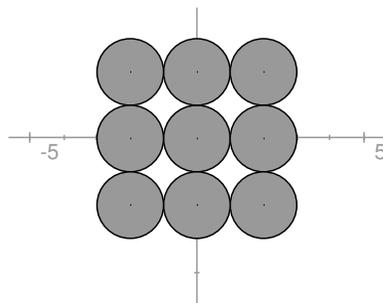


Figura 2.6: Esferas unitárias no reticulado gerado por $\{(2, 0); (0, 2)\}$

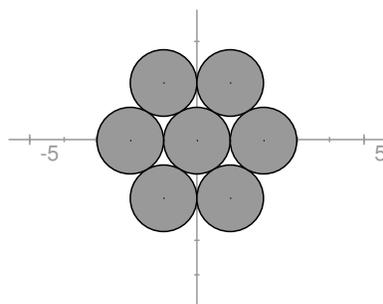


Figura 2.7: Esferas unitárias no reticulado gerado por $\{(2, 0); (1, \sqrt{3})\}$

O supremo dado pela equação 2.1 é atingido. Isto segue de teoremas existenciais gerais de Groemer [11] [12]. O próximo capítulo apresenta um limitante que tem por objetivo aproximar este valor supremo da densidade.

LIMITANTE INFERIOR PARA A DENSIDADE DE EMPACOTAMENTOS RETICULADOS

Este capítulo é dedicado ao teorema de Minkowski - Hlawka, que fornece um limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados. Na primeira seção, forneceremos noções de geometria dos números e alguns conceitos necessários para apresentarmos, na segunda seção, a demonstração deste teorema. Na subseção 3.1.1 é apresentada a noção de sequência de reticulados, cujas definições e propriedades exploram as conexões entre conceitos de natureza discreta e contínua em funções de várias variáveis.

As principais referências para este capítulo são [13], [9], [19], [24].

3.1 Algumas noções gerais sobre empacotamentos

Até agora citamos apenas empacotamentos reticulados (e não reticulados) de esferas. Entretanto, a noção de empacotamento pode ser considerada de maneira muito mais geral. Podemos trabalhar com empacotamentos de corpos convexos quaisquer (não necessariamente esferas) ou ainda podemos trabalhar com empacotamentos de corpos-

estrela (mais gerais que corpos convexos). Além disso, o empacotamento de cópias deste corpo pode ser considerado com “centros” nos pontos de um conjunto discreto qualquer.

3.1.1 Noções básicas em geometria de números

Apresentamos a seguir definições necessárias para entender como foi estabelecido o limitante de Minkowski - Hlawka.

Primeiramente apresentamos uma definição geral de empacotamento.

Definição 3.1.1 *Uma família de conjuntos em \mathbb{R}^n é um **empacotamento** se quaisquer dois destes conjuntos têm interiores disjuntos.*

Como comentamos, corpos convexos e corpos-estrela, cujas definições são apresentadas a seguir, podem ser considerados em empacotamentos.

Definição 3.1.2 *Um conjunto K em \mathbb{R}^n é chamado **convexo** se, para quaisquer pontos $x, y \in K$, K contém todos os pontos do segmento que une x e y . K é um **corpo convexo** se possui pontos interiores, ou seja, se não está contido em um hiperplano.*

Exemplos de corpos convexos em \mathbb{R}^n são esferas, cubos e, de maneira mais geral, elipsóides e paralelotos.

Um corpo convexo K é chamado *o*-simétrico se é simétrico em relação à origem:

$$\forall x \in K \rightarrow -x \in K$$

ou

$$K = -K.$$

Neste caso, a origem é sempre um ponto interior de K . Além disso, $K - K = 2K$.

Um corpo convexo fechado (possui os pontos de sua fronteira) e limitado é chamado, na terminologia de Minkowski, um eichkörper (corpo padrão).

Definição 3.1.3 *Um conjunto **raio** (ray set) em \mathbb{R}^n é um conjunto não-vazio R em \mathbb{R}^n com a seguinte propriedade:*

se $x \in R$ então $\lambda x \in R, \forall \lambda$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

A figura seguinte nos mostra um exemplo de conjunto raio R no ambiente \mathbb{R}^3 . Nesse exemplo, R é o conjunto dos segmentos que ligam $(0, 0, 0)$ aos pontos do tipo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

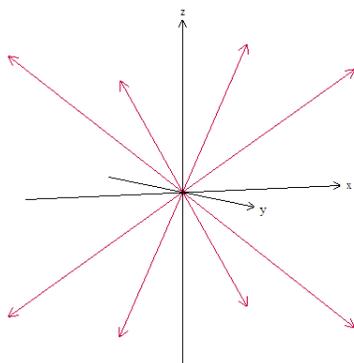


Figura 3.1: Exemplo de conjunto raio no espaço tridimensional

A origem sempre pertence a um conjunto raio. Um conjunto raio é chamado o -simétrico se é simétrico em relação à origem. Um conjunto R não vazio é um conjunto raio o -simétrico se e somente se ocorre a seguinte propriedade:

se $x \in R$ então $\lambda x \in R, \forall \lambda/|\lambda| \leq 1$.

Definiremos abaixo um tipo especial de conjunto raio.

Definição 3.1.4 *Um corpo-estrela (star body) o -simétrico é um conjunto raio S possuindo as seguintes propriedades:*

- S é fechado e
- se $x \in S$ e $|\lambda| < 1$, então λx é ponto interior de S .

Quando, ao invés da segunda propriedade, impusermos a condição mais fraca: se $x \in S$ e $0 \leq \lambda < 1$ então λx é ponto interior de S , nós chamamos S de corpo-estrela assimétrico.

As figuras abaixo ilustram corpos-estrela no plano.

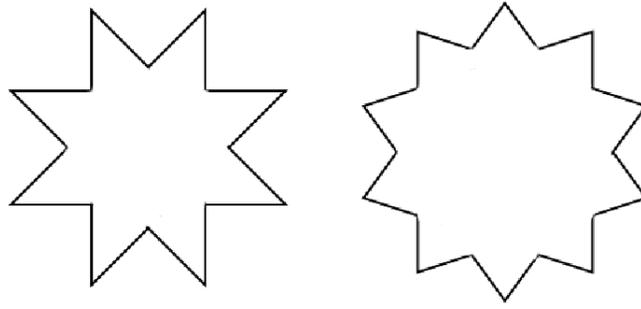


Figura 3.2: Exemplos de corpos-estrela no plano

Seja S um corpo-estrela compacto, se em um empacotamento da forma $\{S + x, x \in \Lambda\}$ o conjunto Λ é um reticulado, o empacotamento é chamado empacotamento reticulado de S .

Vamos estabelecer o valor da densidade do empacotamento reticulado de S . Para uma noção geral e intuitiva de densidade de um empacotamento, podemos dizer que se trata da proporção do espaço coberto por conjuntos do empacotamento, ou, menos precisamente, a soma dos volumes dos conjuntos do empacotamento dividido pelo volume de todo o espaço. Se $\{S + x, x \in \Lambda\}$ é o empacotamento reticulado de S a densidade é:

$$\Delta(S, \Lambda) = \frac{V(S)}{(\det(\Lambda))^{1/2}} \quad (3.1)$$

Temos, a seguir, mais algumas definições que representam pré-requisitos para o teorema de Minkowski - Hlawka.

Definição 3.1.5 *Seja M um conjunto arbitrário em \mathbb{R}^n . Então um reticulado Λ é chamado **M -admissível** ou **admissível por M** se no interior de M não há ponto de Λ diferente da origem. Ele é chamado **estritamente admissível por M** , se este conjunto não contém um ponto de Λ diferente da origem.*

Definição 3.1.6 *O **determinante crítico** de um conjunto M é a quantidade $d_{crit}(M)$ dada por:*

$$d_{crit}(M) = \inf\{(\det(\Lambda))^{1/2}; \Lambda \text{ é estritamente admissível por } M\}$$

de forma que $d_{crit}(M) = \infty$ se não há reticulados estritamente admissíveis. O conjunto M é dito finito ou infinito de acordo com o fato de $d_{crit}(M)$ ser finito ou infinito.

Podemos também considerar o ínfimo (maior cota inferior) de $(\det(\Lambda))^{1/2}$ sobre a coleção de todos os reticulados M -admissíveis:

$$d_{crit}^0(M) = \inf\{(\det(\Lambda))^{1/2}; \Lambda \text{ é admissível por } M\}.$$

Temos que o ínfimo do conjunto dos volumes de uma região fundamental de reticulados admissíveis por M é sempre menor do que ou igual ao ínfimo do conjunto dos volumes de uma região fundamental de reticulados estritamente admissíveis por M , ou seja, $d_{crit}^0(M) \leq d_{crit}(M)$ e que a igualdade ocorre para uma grande classe de conjuntos.

Teorema 3.1.1 *Se $M = S$ é um corpo-estrela, então as duas quantidades $d_{crit}(M)$ e $d_{crit}^0(M)$, acima definidas, são iguais.*

Demonstração:

Vamos provar que se Λ é S -admissível então $\alpha\Lambda$ é estritamente admissível por S , para todo $\alpha > 1$, logo podemos tomar $\alpha\Lambda$ tão próximo de Λ quanto se queira e, conseqüentemente, suas cotas inferiores para o $(\det(\Lambda))^{1/2}$ são iguais.

Seja S um corpo-estrela, seja Λ reticulado S -admissível e seja α um número real maior do que 1. Suponha que $\alpha\Lambda$ contém um ponto $x = \alpha k$ de S diferente da origem. Então $\alpha^{-1}x = \alpha^{-1}\alpha k = k$ é um ponto interior de S , pela definição de corpo-estrela, e é também um ponto de Λ diferente da origem, o que contradiz o fato de Λ ser S -admissível. Conseqüentemente, $\alpha\Lambda$ é estritamente admissível por S para todo $\alpha > 1$.

■

Apresentaremos mais adiante diversos conceitos válidos para corpos-estrela, entretanto nossa intenção será fornecer os conceitos gerais necessários para aproximarmos o valor máximo atingido pela densidade de empacotamento reticulado de um corpo convexo K . É importante ressaltar que o valor da densidade máxima do empacotamento

esférico reticulado dada pela expressão 2.1, no capítulo 2, possui seu análogo para o empacotamento reticulado de K :

$$\Delta_{max}(K) = \sup_{\Lambda} \frac{V(K)}{(\det(\Lambda))^{1/2}}$$

onde novamente o supremo é tomado sobre todos os reticulados tais que $\{K+v; v \in \Lambda\}$ é um empacotamento reticulado de K . A garantia de que este supremo é atingido é dada novamente pelos teoremas existenciais de Groemer [11] e [12].

Vamos tentar aproximar este valor supremo da densidade partindo da ideia de que, se a densidade de empacotamento reticulado de K é definida pela fórmula 3.1 (tomando $S=K$), então ela terá um valor máximo quando o valor do denominador $(\det(\Lambda))^{1/2}$ for mínimo. A definição que nos apresenta esse mínimo, que, na verdade, nos apresenta um ínfimo para este valor, é a definição de determinante crítico. Assim, é importante observar sob que condições o ínfimo dado pelo determinante crítico é atingido. Essa observação nos ajudará na aproximação da densidade máxima de empacotamento reticulado de corpos convexos.

Considere os reticulados que são admissíveis por uma esfera fixada $S_{\ell} = \{x; \|x\| \leq \ell\}$. Vamos apresentar o Teorema de Seleção de Mahler sobre sequências de reticulados e uma propriedade que garante que todo corpo-estrela S possui ao menos um reticulado em que o ínfimo dado por $d_{crit}(S)$ é atingido. Primeiramente, definimos a noção de sequência limitada de reticulados.

Definição 3.1.7 *Uma sequência \wp de reticulados Λ é chamada **limitada** se existem duas constantes positivas ℓ e σ tais que:*

1. *cada reticulado $\Lambda \in \wp$ é admissível por S_{ℓ}*
2. *$(\det(\Lambda))^{1/2} \leq \sigma$ para todo reticulado $\Lambda \in \wp$.*

Para $B = (b_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ com entradas b_{ij} , assumiremos $\|B\| = \max_{i,j} |b_{ij}|$.

Definição 3.1.8 *Seja Λ um reticulado, sejam β uma base de Λ e A sua matriz geradora e seja ε um número positivo. Então denominamos a **vizinhança** ε da base β de Λ ,*

denotada (A, ε) -vizinhança de Λ , como o conjunto dos reticulados Λ' com base β' e matriz geradora A' tal que $\|A' - A\| < \varepsilon$.

Definição 3.1.9 A sequência de reticulados Λ_r onde $r = 1, 2, \dots$ é **convergente** para um reticulado Λ , se para cada matriz geradora A de Λ e cada número positivo ε existe um índice r_0 tal que Λ_r pertence a (A, ε) -vizinhança de Λ para $r > r_0$.

Teorema 3.1.2 Cada reticulado Λ tem uma base $\{b_1, \dots, b_n\}$ tal que o quociente $\frac{(\det(\Lambda))^{1/2}}{\prod \|b_i\|}$, ou seja, a razão $\frac{\text{volume de um politopo fundamental } P}{\text{produto dos comprimentos das arestas de } P}$, é maior do que ou igual a uma constante positiva dependendo somente de n :

$$\frac{(\det(\Lambda))^{1/2}}{\prod \|b_i\|} \geq \alpha_n^{-1}.$$

A demonstração deste teorema envolve conceitos em teoria de redução e por isso não será apresentada. Para a demonstração deste teorema, ver [13].

Teorema 3.1.3 (Teorema de Seleção de Mahler) Uma sequência limitada de reticulados sempre tem uma subsequência convergente.

Demonstração:

Sejam ℓ e σ duas constantes positivas e seja $\{\Lambda_r\}$ uma sequência de reticulados os quais são todos $S\ell$ -admissíveis e têm determinante $(\det(\Lambda_r))^{1/2} \leq \sigma$. A estes reticulados nós aplicamos o teorema 3.1.2. Por este teorema, para $r = 1, 2, \dots$, existe uma base $\beta_r = \{a_{1,r}, \dots, a_{n,r}\}$ de Λ_r , tal que

$$\prod_{i=1}^n |a_{i,r}| \leq \alpha_n (\det(\Lambda_r))^{1/2}$$

onde α_n é uma constante positiva dependendo somente de n . Como Λ_r é admissível para a esfera $S\ell$ então $|a_{i,r}| \geq \ell$ para todo i e r e como $(\det(\Lambda_r))^{1/2} \leq \sigma$ para todo r segue que

$$\ell^{n-1} |a_{i,r}| \leq \prod_{i=1}^n |a_{i,r}| \leq \alpha_n (\det(\Lambda_r))^{1/2} \leq \alpha_n \sigma \text{ e}$$

$$|a_{i,r}| \leq \alpha_n \sigma \ell^{1-n} \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e } r = 1, 2, \dots$$

Deste modo, temos que as bases β_r estão todas contidas em alguma esfera fixada.

Pelo Teorema de Bolzano - Weierstrass, podemos concluir para as n sequências limitadas $a_{i,r}$ que existem n subsequências $\{a_{1,r_k}\}, \dots, \{a_{n,r_k}\}$ todas convergentes. Então a sequência $\{\beta_{r_k}\}$ converge, e portanto $\{\Lambda_{r_k}\}$ converge. ■

Definição 3.1.10 *Seja S um corpo-estrela do tipo finito. Então um reticulado Λ é chamado **reticulado crítico** de S se ele é admissível por S e tem volume da região fundamental $d_{crit}(S)$.*

Teorema 3.1.4 *Todo corpo-estrela do tipo finito possui ao menos um reticulado crítico.*

Demonstração:

Seja S um corpo-estrela do tipo finito que contém a esfera $|x| \leq \ell$ ($\ell > 0$). Em virtude da definição de $d_{crit}(S)$, existe uma sequência de reticulados S -admissíveis Λ_r com $r = 1, 2, \dots$, tal que $(\det(\Lambda_r))^{1/2} \rightarrow d_{crit}(S)$ quando $r \rightarrow \infty$. Tomando essa sequência, podemos perceber que os determinantes $d(\Lambda_r)$ são limitados. Além disso, os reticulados Λ_r são todos admissíveis para a esfera $|x| \leq \ell$. Deste modo a sequência $\{\Lambda_r\}$ é limitada.

Pelo Teorema de Seleção de Mahler, existe então uma subsequência $\{\Lambda_{r_k}\}$ que converge para um reticulado Λ . Vamos mostrar que Λ é um reticulado crítico de S .

Primeiramente,

$$(\det(\Lambda))^{1/2} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\det(\Lambda_{r_k}))^{1/2} = d_{crit}(S).$$

Agora, seja x um ponto arbitrário de Λ diferente da origem. Então, como

$$\Lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_{r_k},$$

existem pontos $x^k \neq o$ com

$$x^k \in \Lambda_{r_k} (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x.$$

Os pontos x^k não pertencem ao $\text{int}(S)$, porque Λ_{r_k} é S -admissível para todo k . Então x não pertence ao $\text{int}(S)$ também. Isto prova que Λ é admissível para S . Consequentemente, Λ é um reticulado crítico de S .

■

Com o teorema acima, podemos garantir que o ínfimo do conjunto dos volumes de regiões fundamentais em reticulados S -admissíveis é atingido. Este resultado será usado na demonstração do teorema de Minkowski - Hlawka.

3.1.2 Empacotamentos reticulados de corpos convexos

Considere agora K um corpo convexo limitado o -simétrico.

Teorema 3.1.5 *Um reticulado Λ é um empacotamento reticulado de K se e somente se ele é admissível por $2K$.*

Demonstração:

Podemos supor que K é aberto.

Primeiramente, suponha que Λ não é um empacotamento reticulado de K . Então existem dois pontos distintos x_1 e $x_2 \in \Lambda$ e um ponto a tal que $a \in K + x_1$ e $a \in K + x_2$. Então há pontos b_1 e $b_2 \in K$ tais que $a = b_1 + x_1 = b_2 + x_2$. Consequentemente, $x_1 - x_2 = b_2 - b_1 \in 2K$, onde $x_1 - x_2$ é diferente da origem e $x_1 - x_2 \in \Lambda$. Consequentemente, Λ não é admissível por $2K$.

Agora vamos supor que Λ não é admissível por $2K$. Então $2K$ contém um ponto y de Λ , $y \neq o$. Podemos colocar $y = 2k_0$, $k_0 \in K$ e $k_0 \neq o$. Além disso, $k_0 = y/2$ e $\pm y/2 \in K$ pela o -simetria de K . Podemos afirmar também que $y + (-y/2) = y/2 \in K + y$. Então os dois corpos K e $K + y$ têm o ponto $y/2$ em comum. Consequentemente, Λ não é um empacotamento reticulado de K .

■

Já sabemos que a densidade de um empacotamento reticulado de K é dada por $\Delta(K, \Lambda) = V(K)/(\det(\Lambda))^{1/2}$. Esse valor tem um máximo se $(\det(\Lambda))^{1/2}$ é mínimo. De acordo com o teorema acima, isso ocorre se Λ é crítico para $2K$.

Definição 3.1.11 A *densidade máxima* de um empacotamento reticulado de translações de K é chamada de *densidade do empacotamento reticulado mais próximo de K* e é denotada $\Delta_{max}(K)$.

Temos então que:

$$\Delta_{max}(K) = \frac{V(K)}{d_{crit}(2K)} = \frac{V(K)}{2^n d_{crit}(K)}. \quad (3.2)$$

3.2 O teorema de Minkowski-Hlawka

Como não é difícil inferir, determinar os valores máximos para a densidade de empacotamentos reticulados de corpos convexos para todas as dimensões é um problema de altíssima complexidade. Isto ressalta a importância de se ter um limitante razoável para estes valores.

Em 1905, estudando formas quadráticas definidas positivas, Herman Minkowski provou que

$$\Delta_{max}(S_n) \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}},$$

onde S_n é a esfera unitária n -dimensional e $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ é a função zeta de Riemann [16].

Na verdade, veremos adiante que esse limitante inferior para a densidade de empacotamento esférico reticulado pode ser visto, com algumas adaptações, como um limitante superior dado por:

$$\frac{d_{crit}(S_n)}{V(S_n)} \leq \frac{1}{2\zeta(n)}.$$

Minkowski fez uma conjectura geral de que se S é um corpo-estrela limitado e $V(S) < 2\zeta(n)det_1$, $det_1 > 0$, então existe um reticulado S -admissível com $(det(\Lambda))^{1/2} = det_1$. Isto implicaria que

$$\frac{d_{crit}(S)}{V(S)} \leq \frac{1}{2\zeta(n)},$$

ou seja, na forma de limitante superior, a desigualdade poderia ser estendida para corpos-estrela.

Em 1943, Edmund Hlawka provou a conjectura de Minkowski [14].

Para provar o teorema de Minkowski - Hlawka, apresentaremos um lema.

Lema 3.2.1 (*Lema de Hlawka*) [9] *Seja $f(x)$ uma função limitada integrável à Riemann desaparecendo fora de uma região limitada e sejam ε um número positivo e $\det_1 > 0$. Então existe um reticulado Λ com $(\det(\Lambda))^{1/2} = \det_1$ tal que*

$$\det_1 \sum_{u \in \Lambda, u \neq 0} f(u) < \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \varepsilon.$$

Para a demonstração deste lema, ver [9].

Enunciaremos a seguir o teorema de Minkowski - Hlawka na forma como foi provado por Hlawka envolvendo uma desigualdade (um limitante superior) para corpos-estrela e, posteriormente, usaremos este resultado para mostrar que ele é equivalente ao limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados de corpos convexos.

Teorema 3.2.1 *Seja S um corpo-estrela o -simétrico limitado com volume $V(S)$ e seja $V(S) < 2\zeta(n)\det_1$, $\det_1 > 0$. Então existe um reticulado Λ com $(\det(\Lambda))^{1/2} = \det_1$ o qual é admissível por S .*

Demonstração:

Suponha que $V(S) < 2\zeta(n)\det_1$. Denotamos por $\chi(x)$ a função característica ¹ de S e definimos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \chi(kx)$$

onde $\mu(k)$ é a função de Möbius.

Sabe-se que (ver apêndice A):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} = \frac{1}{\zeta(n)} \text{ e}$$

$$\sum_{k|m} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1; \\ 0 & \text{se } m > 1 \end{cases}.$$

¹ A função característica de um conjunto M é dada por: $\chi(x) = 1$, se $x \in M$ e $\chi(x) = 0$, se $x \notin M$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\chi(kx)dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \int_{\mathbb{R}^n} \chi(kx)dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} V(S) = \frac{V(S)}{\zeta(n)} < 2det_1. \end{aligned}$$

Seja Λ' o conjunto dos pontos primitivos de Λ , segue que

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \Lambda, u \neq o} f(u) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{u \in \Lambda'} f(lu) \\ &= \sum_{u \in \Lambda'} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\chi(klu) \\ &= \sum_{u \in \Lambda'} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(mu) \sum_{k|m} \mu(k) = \sum_{u \in \Lambda'} \chi(u). \end{aligned}$$

Então, pelo lema de Hlawka 3.2.1, existe um reticulado adequado Λ com $(det(\Lambda))^{1/2} = det_1$ tal que

$$\sum_{u \in \Lambda'} \chi(u) = \sum_{u \in \Lambda, u \neq o} f(u) < \frac{1}{det_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx < 2.$$

Este valor ser < 2 implica ser igual a zero, porque χ é a função característica de S e S é o -simétrico. Segue que S não contém um ponto primitivo do reticulado. Então S não contém um ponto de Λ diferente da origem. Consequentemente, Λ é estritamente admissível por S e $d_{crit}(S) \leq (det(\Lambda))^{1/2} = det_1$. ■

Segue deste teorema, válido para todo $det_1 > 0$, que $d_{crit}(S) \leq \frac{V(S)}{2\zeta(n)}$, para S corpo-estrela o -simétrico limitado [17] [19]. É claro que essa mesma desigualdade vale para corpos convexos o -simétricos limitados K : $d_{crit}(K) \leq \frac{V(K)}{2\zeta(n)}$. O que é equivalente a afirmar que

$$\frac{V(K)}{d_{crit}(K)} \geq 2\zeta(n)$$

e, usando a expressão 3.2, temos:

$$\Delta_{max}(K) = \frac{V(K)}{d_{crit}(2K)} = \frac{V(K)}{2^n d_{crit}(K)} \geq \frac{2\zeta(n)}{2^n}$$

$$\Delta_{max}(K) \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}.$$

Isto mostra que o limitante inferior para a densidade de empacotamentos reticulados de um corpo convexo (que pode ser uma esfera) segue diretamente do teorema de Minkowski - Hlawka, podendo ser uma outra maneira de enunciá-lo:

Teorema 3.2.2 (*Limitante de Minkowski - Hlawka para a densidade de empacotamentos reticulados*) *A densidade máxima de empacotamentos reticulados por corpos convexos, $\Delta_{max}(K)$, em \mathbb{R}^n satisfaz:*

$$\Delta_{max}(K) \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}.$$

O teorema de Minkowski - Hlawka é um importante resultado em geometria dos números. Desde 1943, após passadas mais de seis décadas, diferentes provas foram encontradas por matemáticos como Bateman, Cassels, Davenport, Rogers, Lekkerkerker, Macbeath, Mahler, Sanov, Schmidt, Schneider, Siegel, Weil e outros (para um melhor detalhamento ver [24]).

Para o caso mais interessante em que $K = S_n$, o melhor limitante inferior conhecido

$$\Delta_{max}(S_n) \geq \frac{(n-1)\zeta(n)}{2^{n-1}}$$

é devido a Ball[4].

Coxeter, Few e Rogers estabeleceram um limitante inferior para a densidade de empacotamentos esféricos (reticulados e não-reticulados) que envolve a densidade da mais fina cobertura esférica (menor densidade de cobertura) [24].

Vale citar também os limitantes superiores para a densidade máxima de empacotamentos de esferas criados na tentativa de aproximarmos cada vez mais esse valor

máximo para a densidade. Alguns desse limitantes serão citados brevemente abaixo e mais detalhes podem ser encontrados em [10] e [24].

Em 1929, Blichfeldt descobriu um notável método para determinar um limitante superior para a densidade máxima de empacotamento esférico. Este limitante é dado por:

$$\Delta'_{max}(S_n) \leq \frac{(n+1)2^{-0,5n}}{2}$$

onde $\Delta'_{max}(S_n)$ denota a densidade máxima do empacotamento esférico (reticulado e não-reticulado).

O método de Blichfeldt foi melhorado por Rankin, Sidelnikov, Levenshtein e outros. Rogers também estabeleceu um importante limitante superior para $\Delta'_{max}(S_n)$. O limitante de Rogers é o melhor conhecido para dimensões $n \leq 42$ e acima desta dimensão o melhor limitante superior conhecido é o de Kabatiansky-Levenshtein.

3.3 Uma aplicação do limitante de Minkowski - Hlawka

Apresentaremos a seguir de forma resumida o problema dos *fat struts* introduzido em [20] que exemplifica a importância de se conhecer os reticulados mais densos e o uso do limitante de Minkowski - Hlawka como um parâmetro no estabelecimento de um limitante para uma classe mais restrita de reticulados. Os resultados aqui descritos sobre o problema do *fat strut* assumem a validade da hipótese de Riemann².

Dado um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, um cilindro escorado em dois pontos do reticulado é chamado *strut* se seu interior não contém nenhum ponto do reticulado. O problema dos *fat struts* pode ser visto como o empacotamento por tubos e trata da determinação do raio máximo de um *strut* de dado comprimento. O “tubo” de raio máximo é chamado *fat strut*.

Em \mathbb{Z}^2 , para um cilindro (*strut*) escorado em dois pontos dados do reticulado que estão a uma distância l , temos que o raio máximo é $\varepsilon = 1/l$ independente da escolha dos pontos de escora.

² Dada a equação $\zeta(s) = 0$, a hipótese de Riemann conjectura que os valores não reais de s que satisfazem essa equação possuem parte real $Re(s) = 1/2$

Em dimensões $n > 2$, dois tubos de mesmo comprimento l podem ter diferentes raios ε e a questão então é, para dado comprimento, encontrar os pontos de espora que proporcionam o *fat strut* de maior raio e determinar este raio.

Para valores pequenos do comprimento l , é possível descobrir o tubo de maior raio por processos iterativos que fazem uso da função-projeção definida em 2.5.1. Usando esses algoritmos, é possível construir com precisão o gráfico do *fat strut* (para verificar como foram construídos os algoritmos, ver apêndice B).

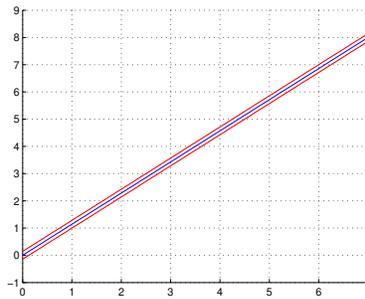


Figura 3.3: Fat strut com $l \approx 10.630$ e $\varepsilon \approx 0.094$ na direção de $v = (7, 8)$.

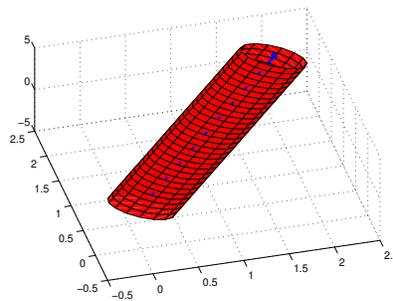


Figura 3.4: Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.34$ na direção de $v = (3, 2, 2)$.

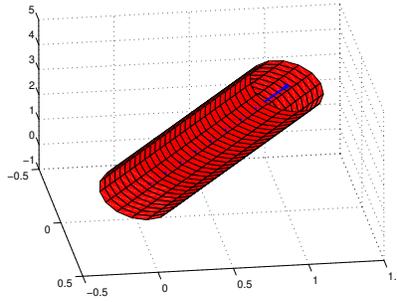


Figura 3.5: Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.24$ na direção de $v = (0, 1, 4)$.

O problema do *fat strut* aparece em teoria de comunicação quando tentamos otimizar a performance de um tipo de sistema de transmissão de sinais [20] [22]. A performance deste tipo de sistema é determinada por dois parâmetros geométricos da curva que o representa, de forma que, para otimizá-lo, devemos selecionar um dado $a \in \mathbb{Z}^n$ tal que a distância mínima ($d_{min}(a)$) de qualquer ponto $n \in \mathbb{Z}^n$ à reta ta , que liga a à origem, é máxima para determinado comprimento de a . Assim, considerando o comprimento $l = \|a\|$ e o raio máximo $\varepsilon = d_{min}(a)$, o esboço do problema se reduz ao problema do *fat strut*.

A distância mínima de um ponto $n \in \mathbb{Z}^n$ à reta ta que liga a à origem é dada pela função projeção (definida em 2.5.1): $d_{min}(a) = \min\|\Pi_a(n)\|$.

O raio do *fat strut* escorado entre a origem e a é então igual ao comprimento do vetor mais curto no reticulado Λ_a obtido pela projeção de \mathbb{Z}^n no subespaço ortogonal a a (a^\perp). O determinante de Λ_a , como visto no capítulo anterior, é $\det(\Lambda_a) = 1/\|a\|^2$ e equivale ao quadrado do volume de uma região fundamental de Λ_a . Sua densidade de empacotamento esférico é $\Delta = V_{n-1}\|a\|(d_{min}(a)/2)^{n-1} = 2^{1-n}V_{n-1}l\varepsilon^{n-1}$, onde V_n é o volume da esfera unitária n -dimensional. Isto nos diz que o produto $d_{min}^{n-1} \cdot \|a\|$ será tão grande quanto o reticulado permitir e nosso problema pode ser reduzido ao de selecionar a tal que Λ_a tem a maior densidade de empacotamento possível (densidade máxima).

Os mais densos empacotamentos reticulados em dimensões $n \leq 8$ são conhecidos e estão expostos na tabela 2.6.

Para $n = 3$ essa tabela nos diz que a deve ser escolhido tal que Λ_a está próximo do reticulado hexagonal A_2 , o qual tem densidade de empacotamento $\pi/\sqrt{12}$. Semelhante observação segue para grandes dimensões. Entretanto, não é certo que as densidades de empacotamento ótimas estabelecidas na tabela 2.6 possam ser atingidas pelos reticulados que são projeções de \mathbb{Z}^n .

Para $n = 3$ nós podemos fazer o reticulado-projeção convergir para o reticulado hexagonal A_2 . Na verdade, em [20] é provado um resultado mais forte:

Teorema 3.3.1 [20] *Dado qualquer reticulado L no plano, existe uma sequência de vetores $a_k = (1, b_k, c_k) \in \mathbb{Z}^3$ tais que o reticulado-projeção Λ_{a_k} converge para um reticulado que é geometricamente semelhante a L .*

Para $n = 4$ o reticulado desejado é o fcc (D_3), que também pode ser aproximado por projeções de \mathbb{Z}^4 .

Teorema 3.3.2 [20] *Seja $a_k = (1, b_k, c_k, d_k)$ onde $b_k = 2k^2 - k + 1$, $c_k = 2k^2 + k + 1$ e $d_k = k(4k^2 + 3)$. Então para $k \rightarrow \infty$ o reticulado-projeção Λ_{a_k} converge para um reticulado que é geometricamente semelhante ao D_3 .*

Sabe-se que, para dimensões $n \geq 9$ com $n \neq 24$, as densidades de empacotamento reticulado ótimas são até agora desconhecidas. Entretanto, para auxiliar a estimar um limitante inferior para o produto $l\varepsilon^{n-1}$, podemos usar o limitante de Minkowski - Hlawka, o qual é definido sobre uma classe mais geral de reticulados. Como os reticulados-projeção no problema do *fat strut* são mais restritos que aqueles do teorema de Minkowski - Hlawka, o limitante para a densidade de empacotamento do reticulado-projeção pode ser inferior ao de Minkowski - Hlawka. O limitante encontrado em [20] é dado por:

$$\Delta_{n-1} \geq \frac{V_{n-1}}{n2^{n-1}V_n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n-2}}.$$

Comparado com o limitante de Minkowski - Hlawka dado por $\Delta_{n-1} \geq \frac{\zeta(n-1)}{2^{n-2}}$, esse limitante é inferior por um fator de $\sqrt{2\pi n}$.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, C. Reticulados e Códigos. Tese de doutorado, Unicamp, Novembro 2008.
- [2] COSTA, S.I.R., SIQUEIRA, R.M., LAVOR, C.C., ALVES, M.M.S. . *Uma Introdução à Teoria de Códigos*. SBMAC-Notas em Matemática Aplicada, 2006.
- [3] SILVA, A.T. De Códigos Binários a Reticulados e Códigos Esféricos. Dissertação de mestrado, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Abril 2007.
- [4] BALL, K. A lower bound for the optimal density of lattice packing. In *Internat. Math.Res.Notices* (1992).
- [5] BEARDON, A.F. *The geometry of discrete groups*. Springer, 1995.
- [6] BENEDETTO, S., BIGLIERI, E. Principles of Digital Transmission With Wireless Applications. In *Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York*. (1999).
- [7] BERNSTEIN, D.J., BUCHMANN, J. E DAHMEN, E. *Post Quantum Cryptography*. Springer, 2009.
- [8] CARLOS, T.B. Abordagem Algébrica e Geométrica de Reticulados. Tese de doutorado, Unicamp, Maio 2007.
- [9] CASSELS, J.S.W. *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer, 1971.
- [10] CONWAY, J.H., SLOANE, N.J.A. *Sphere, Packings, Lattices and Groups*. Springer, 1998.
- [11] GROEMER, H. Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum. *Mathematik 81* (1963), 260–278.

- [12] GROEMER, H. Existenzsätze für Lagerungen in metrischen Räumen. *Monatshefte für mathematik* 72 (1968), 325–334.
- [13] GRUBER, P.M. , LEKKERKERKER, C.G. *Geometry of numbers*. Elsevier Science Publishers B. V., 1991.
- [14] HLAWKA, E. Zur Geometrie der Zahlen. *Mathematische Zeitschrift* 49 (1943), 285–312.
- [15] MINAMI, L.T. Códigos sobre Grafos que são Quocientes de Reticulados. Tese de mestrado, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Dezembro 2004.
- [16] MINKOWSKI, H. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 129 (1905), 220–274.
- [17] ROGERS, C.A. Existence theorems in the Geometry of Numbers. *Annals of Mathematics* 48 (1947), 994–1002.
- [18] SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 2007.
- [19] SIEGEL, C.L. *Lectures on the Geometry of numbers*. Springer, 1988.
- [20] SLOANE, N.J.A., VAISHAMPAYAN, V.A., COSTA, S.I.R. Fat Struts: Constructions and a bound. In *Proceedings Information Theory Workshop, Italy* (2009).
- [21] STRAPASSON, J.E. Geometria Discreta e Códigos. Tese de doutorado, Unicamp, Abril 2007.
- [22] VAISHAMPAYAN, V.A., COSTA, S.I.R. Curves on a sphere, shift-map dynamics, and error control for continuous alphabet sources. *IEEE Transactions on Information Theory*. 49 (7) (2003), 1658–1672.
- [23] XIAOLIN WU. Optimal binary vector quantization via enumeration of covering codes. *IEEE Transactions on Information Theory*. 43 (1997), 638–645.
- [24] ZONG, C. *Sphere Packings*. Springer, 1999.

FUNÇÕES DE MÖBIUS E DE RIEMANN

Apresentamos a seguir algumas definições usadas na demonstração do teorema de Minkowski - Hlawka.

A função $\mu(n)$ de Möbius é definida para números naturais.

Definição A.0.1 *A função μ de Möbius é dada por:*

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1 \text{ e para } n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} \\ \mu(n) &= (-1)^r, \text{ se } a_1 = \dots = a_r = 1 \\ \mu(n) &= 0, \text{ caso algum } a_i > 1, 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Considere $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ a decomposição em fatores primos do número natural n .

Um resultado conhecido [18] sobre a função μ é dado pela proposição a seguir.

Proposição A.0.1 *Considere a função μ de Möbius. Vale que:*

$$\sum_{k|m} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1; \\ 0 & \text{se } m > 1 \end{cases}.$$

Demonstração: Sabe-se que a função μ de Möbius é uma função aritmética (definida para todos os inteiros positivos) multiplicativa ($\mu(mn) = \mu(m) \cdot \mu(n)$, para m e n relativamente primos). Sabe-se também que se $\mu(m)$ é multiplicativa então $M(m) =$

$\sum_{k|m} \mu(k)$ também é multiplicativa [18]. Como $M(m)$ é multiplicativa basta avaliarmos $M(m)$ para $m = p^r$, p primo. Temos que

$$M(m) = \sum_{k|m} \mu(k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^r) = 1 + \mu(p) = 0.$$

Logo $M(m) = 0$ para todo $m > 1$ e $M(1) = \mu(1) = 1$.

■

Definição A.0.2 Chamamos de *Séries de Dirichlet* as séries do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, a_n e $s \in \mathbb{C}$.

Podemos mostrar que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-s})^{-1}$$

onde p_i para $i = 1, 2, \dots$ é a sequência crescente dos primos. Basta tomarmos:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \\ \frac{1}{2^s} \zeta(s) &= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots \end{aligned}$$

subtraindo a segunda linha da primeira, temos

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2^s}) \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \text{ e} \\ \frac{1}{3^s} (1 - \frac{1}{2^s}) \zeta(s) &= \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots \end{aligned}$$

tomando a diferença das duas últimas linhas, temos

$$(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s}) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots$$

prossequindo assim, para todo p_i (para todos os primos), temos

$$(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s})\dots(1 - \frac{1}{p_i^s})\dots\zeta(s) = 1$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_i^s})\zeta(s) = 1 \text{ e}$$

$$\zeta(s) = (\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_i^s}))^{-1} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_i^s})^{-1}.$$

Particularmente, estamos interessados no seguinte resultado sobre as séries de Dirichlet:

Proposição A.0.2 *Seja $\zeta(s)$ a função zeta de Riemann e considere também a função μ de Möbius. Vale que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Demonstração: Podemos definir a função zeta de Riemann por produto de Euler:
 $\zeta(s) = \prod_{(p \text{ primo})} (1 - p^{-s})^{-1}$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p^s}) \\ &= (1 - \frac{1}{p_1^s})(1 - \frac{1}{p_2^s})(1 - \frac{1}{p_3^s})\dots \\ &= 1 - (\frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_3^s} + \dots) + (\frac{1}{p_1^s p_2^s} + \frac{1}{p_1^s p_3^s} + \dots + \frac{1}{p_2^s p_3^s} + \frac{1}{p_2^s p_4^s} + \dots) - \dots \\ &= 1 - \sum_{0 < i} \frac{1}{p_i^s} + \sum_{0 < i < j} \frac{1}{p_i^s p_j^s} - \sum_{0 < i < j < k} \frac{1}{p_i^s p_j^s p_k^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

■

ALGORITMOS PARA O PROBLEMA DOS

fat struts

A seguir, temos alguns algoritmos construídos no software Matlab para o cálculo do raio de um *fat strut*.

Os algoritmos que serão apresentados fazem uso da função projeção definida em 2.5.1 e ilustram conceitos diretamente relacionados ao estudo da densidade de empacotamentos esféricos em reticulados, tais como base do reticulado, norma mínima, simetria e uniformidade.

Apresentaremos primeiramente o algoritmo construído para o caso bidimensional. Sabemos que no plano, para quaisquer pontos de escora, o raio do *fat strut* depende somente do comprimento l e é dado por $\varepsilon = 1/l$. Entretanto, construímos um algoritmo que realiza o cálculo do raio iterativamente e exibe a imagem da faixa que representa o *fat strut*.

Neste algoritmo temos como objetivo encontrar o valor mínimo da função projeção em um domínio discreto. Dado um ponto q de coordenadas coprimas, o algoritmo percorre todos os pontos do reticulado que pertencem à região

$$U_2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq q(1)/2 \text{ e } 0 \leq y \leq q(2)/2\}$$

e calcula a distância destes pontos à reta que liga q à origem (ou seja, calcula o valor da função projeção para cada ponto de U). O algoritmo usa a simetria para fazer o cálculo só até a metade do vetor q .

Após calcular todas as distâncias, o algoritmo desenha o gráfico da faixa que representa o *fat strut* com raio dado pela menor distância calculada.

```

1 clear all;
2 clc;
3 format long
4 q=[7;8]
5 p=q;
6 m=q(2)/q(1);
7 e=0;
8 for j=0:floor(q(1)/2) do
9     for i=0:floor(q(2)/2) do
10        p(1)=j;
11        p(2)=i;
12        if norm(p)>0 then
13            d=norm(p-(p'*q)*(q)/(q'*q));
14            if e==0 / e>=d then
15                e=d;
16            end
17        end
18    end
19 end
20 disp('Raio='); disp(e)
21 gráfico
22 x=0:0.1:q(1); y=m*x-((e)/(cos(atan(m)))); hold on; grid on; plot(x,y)
23 x=0:0.1:q(1); y=m*x+((e)/(cos(atan(m)))); hold on; plot(x,y)
24 x=0:0.1:q(1); y=m*x; hold on; plot(x,y)

```

Algoritmo 1: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^2

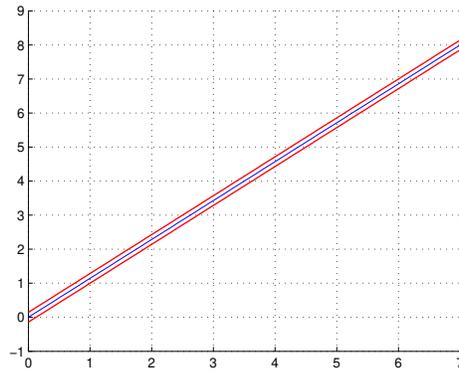


Figura B.1: Fat strut com $l = \sqrt{113}$ e $\varepsilon = 1/\sqrt{113} \approx 0.094$ na direção de $q = (7, 8)$

```

q =
    7
    8

Raio=
    0.09407208683836

>>

```

Figura B.2: Resultado obtido para o vetor $q = (7, 8)$

Analogamente ao caso em duas dimensões, podemos construir algoritmos em dimensões 3 e 4 tais que, dado o vetor q de coordenadas coprimas, o algoritmo calcula o valor da distância relativa a q dos pontos reticulados nas respectivas regiões

$$U_3 = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq q(1)/2, 0 \leq y \leq q(2)/2 \text{ e } 0 \leq z \leq q(3)/2\}$$

e

$$U_4 = \{(x, y, z, w); 0 \leq x \leq q(1)/2, 0 \leq y \leq q(2)/2, 0 \leq z \leq q(3)/2 \text{ e } 0 \leq w \leq q(4)/2\},$$

de forma que a menor distância representa o raio do *fat strut*.

No caso tridimensional, ao executarmos o algoritmo 2 a seguir, obtemos o gráfico do cilindro, com eixo de simetria dado pelo vetor q , correspondente ao tubo de maior

raio nesta direção com comprimento $\|q\|$.

```

1 clear all;
2 clc;
3 format long
4 q=[2;2;3]
5 p=q;
6 e=0;
7 for k=0:floor(q(1)/2) do
8     for j=0:floor(q(2)/2) do
9         for i=0:floor(q(3)/2) do
10            p(1)=k;
11            p(2)=j;
12            p(3)=i;
13            if norm(p)>0 then
14                d=norm(p-(p'*q)*(q)/(q'*q));
15                if e==0 / e>=d then
16                    e=d;
17                end
18            end
19        end
20    end
21 end
22 disp('Raio='); disp(e)
23 ortogonalização
24 r1=q+[1;0;0];
25 r2=q+[0;1;0];
26 q1=r1-((r1'*q)/(q'*q))*q;
27 q2=r2-((r2'*q1)/(q1'*q1))*q1-((r2'*q)/(q'*q))*q;
28 w1=q1/norm(q1);
29 w2=q2/norm(q2);
30 gráfico
31 t=0:0.1:1; x=q(1)*t; y=q(2)*t; z=q(3)*t; hold on; grid on; plot3(x,y,z)
32 plot3(q(1),q(2),q(3),'c*'); hold on; grid on;
33 n = 30; teta = (0 : 1/n : 1); fi = (0 : 4*pi/n : 2*pi)';
34 x = ( s(1)*w1(1)* cos(fi)+s(1)*w2(1)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(1);
35 y = ( s(1)*w1(2) * cos(fi)+s(1)*w2(2)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(2);
36 z = ( s(1)*w1(3) * cos(fi)+s(1)*w2(3)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(3);
37 surf(x,y,z)

```

Algoritmo 2: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^3 na direção de um vetor dado

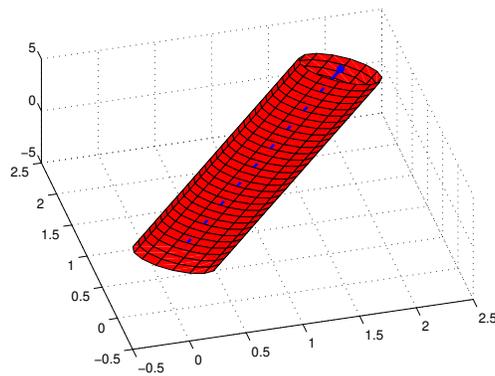


Figura B.3: Fat strut com $l = \sqrt{17}$ e $\varepsilon \approx 0.34$ na direção de $q = (2, 2, 3)$

```
q =  
  
    2  
    2  
    3  
  
Raio=  
    0.34299717028502  
  
>>
```

Figura B.4: Resultado obtido para o vetor $q = (2, 2, 3)$

Veremos adiante que, no espaço tridimensional, o vetor $q = (2, 2, 3)$ representa a direção em que temos o maior *fat strut* para o comprimento $l = \sqrt{17}$.

Para o caso 4-dimensional, construímos o algoritmo a seguir.

```

1 clear all;
2 clc;
3 format long
4 q=[51;52;53;54]
5 p=q;
6 e=0;
7 for t=0:floor(q(1)/2) do
8     for k=0:floor(q(2)/2) do
9         for j=0:floor(q(3)/2) do
10            for i=0:floor(q(4)/2) do
11                p(1)=t;
12                p(2)=k;
13                p(3)=j;
14                p(4)=i;
15                if norm(p)>0 then
16                    d=norm(p-(p'*q)*(q)/(q'*q));
17                    if e==0 / e>=d then
18                        e=d;
19                    end
20                end
21            end
22        end
23    end
24 end
25 disp('Raio='); disp(e)

```

Algoritmo 3: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^4 na direção de um vetor dado

```

q =

    51
    52
    53
    54

    0.04258211628583

>>

```

Figura B.5: Resultado obtido na direção de $q = (51, 52, 53, 54)$

Sabemos que, para dimensões $n > 2$, o problema dos *fat struts* é mais complexo e, para dado comprimento l , podemos ter diferentes raios ε . Assim, um algoritmo que

calcule o maior *fat strut* de dado comprimento deve considerar todos os possíveis pontos de coordenadas coprimas com esse mesmo módulo.

Os algoritmos 2 e 3 podem ser usados na construção de um algoritmo que, tomando todos os pontos de coordenadas coprimas para dado comprimento, calcule o *fat strut* para cada um destes pontos e determine dentre os *fat struts* calculados qual deles é o maior. Assim, teremos para dado comprimento quais são os pontos de escora que proporcionam o maior dos *fat struts*.

Considerando um comprimento l relativamente pequeno ($l \approx 100$), podemos construir um algoritmo que calcule todos os pontos de coordenadas coprimas com módulo l e indique o raio do *fat strut* para cada um deles, para que possamos tomar aquele ponto que proporciona o maior raio.

Para dimensão $n = 3$, temos o algoritmo apresentado a seguir para dado comprimento denotado por r .

Este algoritmo foi dividido em três partes devido à sua extensão: na primeira parte, temos apenas a declaração do valor inicial das variáveis usadas; na segunda, temos a apresentação do algoritmo de uma forma geral; e na terceira parte, apenas apresentamos os resultados obtidos e o gráfico.

```
clear all;
clc;
format long
r=sqrt(54321);
tol=10-13;
b = 0;
c=1;
pri=0;
comp=0;
permut=0;
k=0;
aux=0;
a=sqrt(r2 - b2 - c2);
```

Algoritmo 4: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^3 para dado comprimento - Parte 1

```

while  $a^2 > 0$  do
  while  $(a - \text{floor}(a)) > \text{tol} \ \& \ (b^2 < r^2 - c^2) \ \& \ (\text{ceil}(a) - a) > \text{tol}$  do
    c=c+1;
    if  $c^2 > r^2 - b^2$  then
      c=1; b=b+1;
    a=sqrt( $r^2 - b^2 - c^2$ );
  if  $(a - \text{floor}(a)) < \text{tol} \ \& \ a^2 \geq 0$  then
    q=[floor(a);b;c]; aux=aux+1;
  if  $\text{ceil}(a) - a < \text{tol} \ \& \ a^2 \geq 0$  then
    q=[ceil(a);b;c]; aux=aux+1;
  if aux>0 then
    if gcd(q(1),gcd(q(2),q(3)))==1 then
      [q,ind]=sort(q);
      if pri>0 then
        for i=1:(pri) do
          j=P(:,i);
          if q==j then
            permut=permut+1;
        if permut==0 then
          pri=pri+1; P(:,pri)=q; p=q; e=0;
          for k=0:floor(q(1)/2) do
            for j=0:floor(q(2)/2) do
              for i=0:floor(q(3)/2) do
                p(1)=k; p(2)=j; p(3)=i;
                if norm(p)>0 then
                  d=norm(p-(p'*q)*(q)/(q'*q));
                  if e==0 /e>=d then
                    e=d;
            R(:,pri)=e; k=0; d=0;
          else
            [q,ind]=sort(q);
            if comp>0 then
              for i=1:(comp) do
                f=C(:,i);
                if q==f then
                  permut=permut+1;
            if permut==0 then
              comp=comp+1; C(:,comp)=q;
    c=c+1;
    if  $c^2 > r^2 - b^2$  then
      c=1; b=b+1;
    permut=0; aux=0; a=sqrt( $r^2 - b^2 - c^2$ );

```

Algoritmo 5: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^3 para dado comprimento - Parte 2

```

disp('Comprimento: r='); disp(r);
if pri>0 then
    disp('Matriz cujas colunas são as ternas primitivas de comprimento a: P=');
    disp(P);
    disp('Respectivos raios de fat struts para cada vetor de P: R=');
    disp(R);
    [raio,ind]=sort(R);
    disp('este é o maior raio para um fat strut de comprimento r:');
    raio(pri);
    disp('este é o vetor na direção do qual temos o maior raio');
    P(:,ind(pri));
    q=P(:,ind(pri));
    ortogonalizacao
    r1=q+[1;0;0];
    r2=q+[0;1;0];
    q1=r1-((r1'*q)/(q'*q))*q;
    q2=r2-((r2'*q1)/(q1'*q1))*q1-((r2'*q)/(q'*q))*q;
    w1=q1/norm(q1);
    w2=q2/norm(q2);
    gráfico
    t=0:0.1:1; x=q(1)*t; y=q(2)*t; z=q(3)*t;hold on; grid on; plot3(x,y,z)
    plot3(q(1),q(2),q(3),'c*');hold on; grid on;
    n = 30; teta = (0 : 1/n : 1); fi = (0 : 4*pi/n : 2*pi)';
    x = ( raio(pri)*w1(1)* cos(fi)+raio(pri)*w2(1)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(1);
    y = ( raio(pri)*w1(2) * cos(fi)+raio(pri)*w2(2)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(2);
    z = ( raio(pri)*w1(3) * cos(fi)+raio(pri)*w2(3)* sin(fi) ) * ones(size(teta))+ones(size(fi))*teta*q(3);
    surf(x,y,z)
else
    disp('Não há vetores primitivos')
if comp>0 then
    disp('Existem vetores não primitivos') disp(comp);disp(C)
else
    disp('Não há vetores não primitivos')

```

Algoritmo 6: Algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^3 para dado comprimento-Parte 3

Para o comprimento $r = \sqrt{17}$, temos o resultado a seguir, que nos indica que o melhor vetor para o qual obtemos o maior raio para *fat strut* é $q = (2, 2, 3)$. Este *fat strut* é dado pela figura B.3.

```
Comprimento: r=
  4.12310562561766

Matriz cujas colunas são as ternas primitivas de comprimento r: P=
  0   2
  1   2
  4   3

Respectivos raios de fat struts para cada vetor de P: R=
  0.24253562503633  0.34299717028502

este é o maior raio para um fat strut de comprimento r:

ans =

  0.34299717028502

este é o vetor na direção do qual temos o maior raio

ans =

  2
  2
  3

Não há vetores não primitivos
>>
```

Figura B.6: Resultado obtido para o comprimento $r = \sqrt{17}$

Para exemplificar o funcionamento do algoritmo para *fat strut* em \mathbb{Z}^3 para dado comprimento r , tomamos um valor maior para r , dado por $r \approx 233$, e obtivemos o seguinte resultado:

```

Comprimento: r=
  2.330686594117708e+002

Matriz cujas colunas são as ternas primitivas de comprimento r: P=
Columns 1 through 19

   2   2   4   4   7  14  14  14  14  23  23  26  26  40  44  44  46  46  46
  74 109   4 143  64  35  98 110 163 124 164  46 154 136  47 151  58 142 157
 221 206 233 184 224 230 211 205 166 196 164 227 173 185 224 172 221 179 166

Columns 20 through 38

   56  56  56  56  64  67  68  70  70  74  79  80  80  83  86  89  98 109 124
   64  79  89 113 140  86 151  70  86 131 136  89 145 154 122 112 131 122 136
  217 212 208 196 175 206 164 211 205 178 172 200 164 154 179 184 166 166 143

Respectivos raios de fat struts para cada vetor de P: R=
Columns 1 through 6

  0.02747312424413  0.02747312424413  0.00606779807265  0.03033899036323  0.03123590236308  0.02310548668674

Columns 7 through 12

  0.03033899036323  0.04873163436159  0.05184328945852  0.02747312424413  0.00606779807265  0.04873163436159

Columns 13 through 18

  0.03033899036324  0.05643378423835  0.05184328945852  0.02310548668673  0.04560950339511  0.05643378423835

Columns 19 through 24

  0.02310548668674  0.04560950339511  0.05643378423835  0.05184328945853  0.03123590236308  0.02747312424413

Columns 25 through 30

  0.03033899036324  0.05643378423835  0.05184328945852  0.02310548668673  0.04560950339511  0.05643378423835

Columns 19 through 24

  0.02310548668674  0.04560950339511  0.05643378423835  0.05184328945853  0.03123590236308  0.02747312424413

Columns 25 through 30

  0.04560950339511  0.04873163436159  0.00606779807265  0.05643378423835  0.03123590236308  0.03239317741959

Columns 31 through 36

  0.02310548668674  0.03033899036323  0.00606779807265  0.03239317741959  0.04873163436159  0.05184328945852

Columns 37 through 38

  0.03123590236308  0.04560950339510

este é o maior raio para um fat strut de comprimento r:

ans =

  0.05643378423835

este é o vetor na direção do qual temos o maior raio

ans =

   46
  142
  179

Não há vetores não primitivos
>>

```

Figura B.7: Resultado obtido para o comprimento $r = \sqrt{54321}$

Para valores maiores do comprimento r , a figura cilíndrica obtida torna-se de difícil observação. Veja o gráfico obtido para comprimento $r = \sqrt{54321}$:

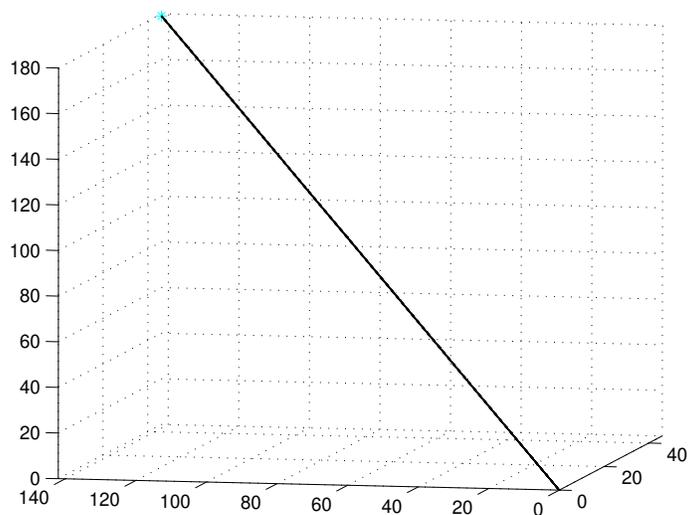


Figura B.8: Fat strut com $l = \sqrt{54321}$ e $\varepsilon \approx 0.056$ na direção de $q = (46, 142, 179)$