UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

" O METODO DOS ISOMORFISMOS PARCIAIS E A CARACTERIZAÇÃO ALGEBRICA DA EXPRESSABILIDADE MATEMATICA "

Este exemplar corresponde á redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. José Carlos Cifuentes Vásquez e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de Junho de 1988

Walter Carnielli

Prof. Dr. Walter A. Carnielli
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

A mis padres Humberto y Maruja, y a Blanca, mi esposa, con profundo amor y humildad. Nunca podré corresponder los mejores momentos de sus vidas que me dedicaron y aun disfruto.

"Como sabemos que há um
céu e que ele é azul?
Saberíamos o que é o céu
se não tivéssemos <u>nome</u>
para ele?"

MAX MULLER

("A experiência matemática" de
Philip Davis e Reuben Hersh
pag. 346).

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta tese é uma exposição detalhada de alguns métodos metamatemáticos dirigidos ao estudo da expressabilidade dos Conceitos Matemáticos e de suas limitações, entendendo por Metamatemática o estudo de tais conceitos enquanto objetos susceptíveis de tratamento matemático.

Este tema pode ser situado na área de Teoria de Modelos, cujo enfoque geral acerca das estruturas matemáticas permite unificar diversas noções próprias da Álgebra, da Topologia e mesmo da Análise.

Obviamente nossa primeira preocupação é definir de forma rigorosa o que entendemos por Conceito Matemático e Expressabilidade. No início do capítulo I já delineamos a primeira destas noções, propondo uma interpretação matemática da mesma em termos de classes de estruturas matemáticas (ver introdução do capítulo I). Por outro lado, a segunda delas é definida no capítulo II a partir da noção de axiomatização.

Nosso propósito inicial, dado que este tema é pouco conhecido nos círculos de pós-graduação em matemática, foi mostrar algumas técnicas de teoria de modelos com aplicações de interesse à matemática. Para tal efeito escolhemos a técnica de extensão de isomorfismos parciais, ou de Back-and-Forth (introduzida no capítulo I), como eixo central da tese, complementada com a técnica de ultraprodutos, ambas de caráter puramente algébrico e de especial importância no estudo da expressabilidade.

Dado que a metamatemática é também reflexão sobre a matemática, achamos que o tema escolhido devia ser complementado com exemplos esclarecedores e ilustrado com aplicações a diversas áreas da matemática.

Do ponto de vista metodológico foi necessário começar diferenciando os aspectos algébricos-conjuntistas das estruturas matemáticas, dos aspectos linguísticos das mesmas, propondo sistemas de referência apropriados para o desenvolvimento de cada um deles. Tais sistemas de referência são chamados neste trabalho de referencial algébrico e referencial linguístico respectivamente.

Destacamos no primeiro deles a noção de isomorfismo, e no segundo, a noção de equivalência elementar, esta última relativa a cada linguagem formal introduzida. A interrelação entre isomorfismo e equivalência elementar é a motivação principal para este estudo.

Tal interrelação é semelhante, por exemplo, à que ocorre em Topologia Algébrica entre as noções de homeomorfismo de espaços topológicos e isomorfismo entre seus respectivos grupos fundamentais: é sabido que noções topológicas são traduzidas com proveito às noções algébricas, embora isto não signifique que sejam equivalentes.

Em nosso caso, propriedades algébricas das estruturas matemáticas (por exemplo, a noção de isomorfismo) são também traduzidas de maneira frutífera às noções semântico-linguísticas (como a de equivalência elementar).

Podemos dizer então que o tema central da tese é a exposição dos teoremas de caracterização algébrica da equivalência elementar como uma tentativa de aproximar ambos os referenciais mencionados.

A seguir descrevemos o conteúdo de cada capítulo:

No capítulo I apresentamos os diversos tipos de estruturas matemáticas desde o ponto de vista algébrico: estruturas relacionais e estruturas algébricas em geral. Damos especial atenção às estruturas com domínios duplos, que no texto chamamos de bissortidas, casos interessantes das quais são as estruturas topológicas, e as estruturas algébricas como espaços vetoriais, módulos, etc.

Como justificativa para o estudo de estruturas bissortidas destacamos, por exemplo, que o conceito de homeomorfismo da topologia geral corresponde ao de isomorfismo entre estruturas algébricas bissortidas adequadas.

No desenvolvimento deste capítulo incluimos alguns conceitos que aparecem de forma bastante natural como o de homomorfismo topológico (ver seção I.4.3), com aplicações, no capítulo III, ao estudo da topologia elementar do espaço de estruturas.

No capítulo II introduzimos diversas linguagens formais adequadas aos tipos de estruturas definidos no capítulo I, como as linguagens de 1ª ordem L^1 e as de 2ª ordem L^2, junto com seus fragmentos L^2-monádica, diádica, etc., e a linguagem de 2ª ordem fraca L^2_ω, todas motivadas no início do capítulo com diversos exemplos.

Neste capítulo definimos a relação semântica de satisfação que é a conexão fundamental entre os referenciais acima mencionados.

Em termos desta relação é possível definir a expressabilidade de um conceito matemático como a possibilidade de axiomatização da classe de estruturas que são sua referência.

São introduzidos também algumas propriedades de teoria de modelos como as propriedades de isomorfismo, de categoricidade e de Karp.

Destacamos a introdução do conceito de L-equivalência de classes (ver II.5.5) que generaliza o de equivalência elementar e permite, de um ponto de vista unificado, dar novas formulações, por exemplo, de algumas das propriedades de teoria de modelos mencionadas.

No capítulo III damos alguns outros critérios para a análise da expressabilidade, iniciada no capítulo anterior, fundamentalmente relacionados com a propriedade de compacidade, além de discutir os teoremas de Löwenheim-Skolem e os números de Hanf.

Para este propósito introduzimos uma topologia adequada no espaço de estruturas e apresentamos o método de ultraprodutos, e o teorema fundamental de Łos, como técnicas especiais.

Dado que a relação entre as estruturas e as linguagens que lhe são adequadas é de caráter semântico ou interpretativo, decidimos desenvolver todo o trabalho sem apelar à noção sintática de derivabilidade. Isto justifica plenamente a introdução do método de ultraprodutos já que a única demonstração conhecida de caráter puramente semântico da propriedade de compacidade, faz-se usando ultraprodutos, além de ser uma técnica de construção de modelos por si importante para as aplicações.

Devemos destacar neste capítulo um argumento contra a possível extensão do teorema de Łos para a linguagem de 2ª ordem monádica (ver III.2.7). Igualmente destacamos a discussão do Princípio de Lefschetz da geometria algébrica como uma das aplicações mais interessantes do problema da expressabilidade. Apresentamos também uma demonstração não-standard do teorema de Hahn-Banach como aplicação da Análise não-standard, baseada fundamentalmente na técnica de ultraprodutos.

No capítulo IV introduzimos as linguagens infinitárias como ambiente natural para a interação entre os isomorfismos parciais e a equivalência elementar, obtendo como resultados principais os teoremas de caracterização da equivalência elementar em diversas linguagens, em termos da existência de certa coleção de isomorfismos parciais. Incluimos também o teorema de Fraissé que caracteriza a equivalência elementar correspondente à linguagem de 1ª ordem.

Finalmente, neste capítulo também são apresentadas generalizações dos teoremas de Łos e de compacidade, mostrando a forte dependência destas noções com as propriedades conjuntistas dos números cardinais.

No final apresentamos uma pequena discussão acerca da comparação do poder expressivo entre as linguagens formais.

Noções de teoria de conjuntos, como se explica na introdução do capítulo I, são usadas frequentemente: entre elas, a diferença entre classes e conjuntos, e propriedades gerais dos números ordinais e cardinais.

Este trabalho pretende ser autocontido e está dirigido para estudantes e estudosos da matemática ao nível de pós-graduação que tenham poucos conhecimentos da teoria de modelos e da lógica matemática em geral. Obviamente, para um especialista algumas noções estarão insuficientemente tratadas, e outras estarão tratadas de forma abundante, mas nossa intenção é despertar o interesse dos primeiros.

Algumas provas são feitas em forma distinta à conhecida por razões de ilustrar algumas propriedades introduzidas, como é o caso do princípio de Lefschetz a partir de uma versão fraca do teste de Vaught.

Agradeço a meu orientador as discussões que tivemos desde o nascimento deste projeto, e por ter me permitido escolher o tema e dado a liberdade suficiente para desenvolve-lo. Nosso interesse mútuo é aplicá-lo no futuro ao estudo de caracterizações análogas para as lógicas polivalentes, as quais constituem parte de nosso interesse comum.

CAPÍTULO I

A NOÇÃO DE ESTRUTURA E OS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Esta tese pretende dar uma visão ampla da linguagem matemática estratificada em diversos níveis de compreensão. É possível que a diferença mais importante entre a linguagem matemática e as linguagens naturais seja o uso sistemático da noção de variável.

A estratificação mencionada será aqui considerada pela sistematização do uso das diversas variáveis presentes no discurso matemático, em sua versão formal, como variáveis quantificáveis, cujas adequadas interpretações e a determinação dos seus diversos contextos de expressão (ie. linguagem onde a quantificação adquire um significado semântico (ver II.3 e II.4)), serão fundamentais para a análise da expressabilidade dos conceitos matemáticos.

Sem pretender fazer uma análise filosófica da terminologia utilizada, devemos mencionar a diferença entre Conceito matemático e Objeto matemático. O Conceito é a entidade que nos interessaremos por expressar, enquanto por Objeto entendemos a referência ou a contrapartida real do Conceito. Por exemplo, o grupo alternado A_5 é um objeto matemático concreto, enquanto o conceito de grupo tem como referência os diversos exemplos de grupos que a matemática apresenta. Esta diferença, de certa forma análoga à diferença entre realidade física e linguagem natural, será salientada várias vezes nesta tese.

O anterior pressupõe um certo platonismo de trabalho, onde entenderemos por platonismo uma doutrina acerca da existência das entidades abstratas: adotaremos aqui, sob o nome de platonismo de trabalho, o pressuposto de que todos os objetos matemáticos que constituirão nossa realidade matemática podem ser definidos ou construídos dentro do "Paraíso de Cantor" da teoria de conjuntos clássica, por exemplo na teoria ZFC de Zermelo-Fraenkel com o axioma de escolha (cf. Takeuti-Zaring [1971]), ainda que tal definição seja por nós desconhecida.

Adotaremos também o pressuposto de que os objetos matemáticos podem ser descritos como estruturas (ver I. 1) que serão nomes desses objetos (se bem que a diferença entre um objeto e seu nome não será importante neste primeiro capítulo).

Neste capítulo definiremos e estudaremos o universo das estruturas matemáticas, e nos próximos capítulos construiremos o universo das Linguagens em que poderão ser expressos os conceitos, os quais tem como referência diversas classes formadas por tais estruturas.

Para começar, de agora em diante, matematizaremos o Conceito identificando-o com a classe de estruturas que são sua referência. Por exemplo, o conceito de "corpo ordenado arquimediano" será identificado com a classe formada por todos os corpos ordenados arquimedianos. Deste ponto de vista devemos distinguir o objeto A_5 do conceito (expressável) que ele determina $\{A_5\}$, assim como da linguagem em que tal conceito poderá ser expresso.

I.1- Estruturas Matemáticas

I.1.1- Estruturas Relacionais

Na linguagem matemática ocorrem em geral variáveis (quantificáveis) x, y etc. em expressões tais como $(\forall x)P(x)$ e $(\exists y)Q(y)$, ou em expressões mais complexas como $(\forall x)(\forall y)(x=y \rightarrow R(x,y))$, onde P, Q, R e = são predicados que referen-se a propriedades de x e y.

O domínio ontológico destas expressões, ie. os objetos (matemáticos) aos quais se referem as variáveis utilizadas, forma um conjunto que chamaremos de <u>domínio ou universo do discurso</u>, e os predicados mencionados expressam certas relações entre os elementos do domínio.

Isto dá origem à noção de <u>estrutura relacional</u> que definiremos como um par

I.1.1.1- $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_i^A\}_{i\in I}\rangle$

onde $A\neq\phi$ é o <u>domínio da estrutura</u> e cada R_i^A é uma relação definida em A. Sendo mais específicos, podemos pensar que temos definida inplicitamente uma função $\mu: I\rightarrow \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais) de tal modo que para cada $i\in I$, R_i^A é uma relação $\mu(i)$-ária, ie. $R_i^A \subseteq A^{\mu(i)}$. Escreveremos $R^A(x_1,\ldots,x_n)$ em vez de $(x_1,\ldots,x_n)\in R^A$.

I.1.1.2- Vamos supor que toda estrutura está munida da relação binária de identidade $=^A$ que não é outra que a diagonal $\Delta = \{(x,x)/x \in A\}$. (Usualmente não será incluída no conjunto de relações da estrutura).

Além disso, sempre ficará claro do contexto que A denotará o domínio da estrutura $\mathfrak{A}$ que usualmente é denotado por $|\mathfrak{A}|$.

Exemplos de estruturas relacionais são $\langle\mathbb{N}, \{\leqslant\}\rangle$ e $\langle\mathbb{N}, \{|\}\rangle$ onde $\leqslant$ é a relação de ordem usual em $\mathbb{N}$ e $|$ é a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$.

Devemos observar que ambas são relações binárias, o que significa que o valor da função μ definida em ambas as estruturas é o mesmo. Isto vai ter como consequência que ambas as estruturas são do mesmo "tipo" (ver definição abaixo de <u>tipo de similaridade</u>), embora elas sejam de diferente natureza : $\leqslant$ é uma ordem total (aliás, é uma boa ordem) e $|$ é uma ordem parcial.

I.1.2- Estruturas Algébricas

Aparentemente nem todas as estruturas matemáticas apresentam-se como estruturas relacionais. Por exemplo, os grupos, anéis ou corpos ordenados, além de possíveis relações, tem definidas certas funções, também chamadas de operações internas, e apresentam alguns elementos distinguidos.

Assim temos:

i) o grupo multiplicativo dos números racionais positivos

$\langle \mathbb{Q}^+, \{\cdot\}, \{1\}\rangle$

ii) o corpo ordenado dos números reais

$\langle \mathbb{R}, \{\leqslant\}, \{+, \cdot\}, \{0,1\}\rangle$

iii) o anel dos polinômios com coeficientes inteiros

$\langle \mathbb{Z}[X], \{+,\cdot\}, \{0,1\}\rangle$

iv) a álgebra de Boole dos subconjuntos de um conjunto

$\langle P(A), \{\cup,\cap\} \ \{\phi,A\}\rangle$

Devemos observar que por abuso de notação estamos usando os mesmos símbolos para a adição e a multiplicação em $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}[X]$ apesar de que, por construção, são objetos matemáticos distintos: $+^{\mathbb{Q}}$, $+^{\mathbb{R}}$, etc.

Em geral, uma <u>estrutura algébrica</u> é uma quádrupla:

I.1.3- $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_i^A\}_{i\in I}, \{F_j^A\}_{j\in J}, \{c_k^A\}_{k\in K}\rangle$

onde $A\neq\phi$ é o domínio da estrutura, as R_i^A são relações definidas em A, as F_j^A são funções ou operações definidas em A, e as c_k^A são elementos distinguidos de A.

Imaginamos implicitamente determinadas duas funções $\mu: I\to \mathbb{N}$ e $\nu: J\to \mathbb{N}$ que nos indicam a <u>aridade</u> das relações e operações da estrutura, assim:

$$R_i^A \subseteq A^{\mu(i)} \text{ e } F_j^A\colon A^{\nu(j)} \to A .$$

I.1.4- Tipo de Similaridade

Definição. Dada uma estrutura algébrica $\mathfrak{A}$ (como em I.1.3) definimos o <u>tipo de similaridade de $\mathfrak{A}$</u> como a tripla $\tau=\langle\mu, \nu, |K|\rangle$ ($|K|$ denota a cardinalidade de K).

No caso de I, J e K serem conjuntos finitos descrevemos a estrutura $\mathfrak{A}$ como:

$\mathfrak{A}=\langle A, R_1^A,\ldots,R_n^A; F_1^A,\ldots,F_m^A; c_1^A,\ldots,c_k^A\rangle$

e seu tipo como

$\tau=\langle\mu(1),\ldots,\mu(n); \nu(1),\ldots,\nu(m); k\rangle$.

Assim, por exemplo, o corpo ordenado em (ii) acima será descrito como $\langle\mathbb{R}; \leqslant; +, \cdot; 0, 1\rangle$ sendo seu tipo $\langle 2; 2, 2; 2\rangle$.

I.1.5- Observação. Uma mesma estrutura não é necessariamente descrita de maneira única. Por exemplo, um grupo pode ser apresentado na forma $\langle G; \cdot; e\rangle$ ou na forma $\langle G, \cdot, {}^{-1}; e\rangle$, nesta última, salientando a operação de inversão. O tipo da primeira é $\langle\phi; 2; 1\rangle$ e o da segunda $\langle\phi; 2, 1; 1\rangle$.

Analogamente, o corpo do exemplo (ii) poderia se dar como $\langle\mathbb{R}, \leqslant; +, \cdot, -, {}^{-1}; 0, 1\rangle$ fazendo aparecer as funções unárias $F_1^{\mathbb{R}}(x)=-x$ e $F_2^{\mathbb{R}}(x)=x^{-1}$ e consequentemente mudando o tipo de estrutura para $\langle 2; 2, 2, 1, 1; 2\rangle$, embora se tenha o problema de definir 0^{-1}, já que toda operação interna deve ser totalmen te definida no domínio da estrutura, fato que está implícito na definição de função numa estrutura e será justificado no capítulo II (ver II.4.7).

Às vezes é melhor, para evitar este tipo de dificuldades, substituir a função -1 pelo seu gráfico,

$$R_{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0 \text{ e } y=x^{-1}\}$$

obtendo uma nova relação. Assim teríamos a estrutura

$$\langle\mathbb{R};\leqslant,R_{-1};+,\cdot,-;0,1\rangle$$

cujo tipo seria agora <2, 2; 2, 2, 1; 2>.

I.1.6- O Funtor Rel

É claro que toda estrutura relacional é uma estrutura algébrica. Veremos a seguir que toda estrutura algébrica pode ser apresentada como uma estrutura relacional convertendo as constantes em funções e as funções em relações.

Primeiro devemos observar que se A é um conjunto, A^0 pode ser identificado com o conjunto $\{f:\phi\to A/f$ é função$\}=\{\phi\}$.

Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura algébrica (I.1.3); se c é uma constante da estrutura, definimos a função F_c: $A^0\to A$ por $F_c(\phi)=c$. Finalmente, se F é uma função n-ária da estrutura, definimos a relação R_F (n+1)-ária por

$$R_F(x_1,\ldots,x_n,y)\Longleftrightarrow y={}^{A}F(x_1,\ldots,x_n),$$

que corresponde ao gráfico da função como foi sugerido na observação I.1.5.

Do anterior resulta que se c é uma constante, sendo F_c uma função 0-ária, corresponde-lhe a relação unária R_{F_c} dada por $R_{F_c}(y) \Longleftrightarrow F_c(\phi) =^A y \Longleftrightarrow y =^A c$ ie. $R_{F_c} = \{c\} \subsetneq A$.

Teremos então associada a cada estrutura algébrica $\mathfrak{A}$ (de tipo τ) uma estrutura relacional:

I.1.6.1 $\mathfrak{A}^r = \langle A, \{R_i^A\}_{i\in I} \cup \{R_{F_j}^A\}_{j\in J} \cup \{R_{F_{c_k}}^A\}_{k\in K} \rangle$

cujo tipo denotaremos por τ^r.

I.1.6.2- Asserção. Seja τ um tipo de similaridade. Denotaremos com Est(τ) a coleção de todas as estruturas de tipo τ.

Este será o marco de referência para o segundo capítulo em que o nosso objetivo será analizar, desde o ponto de vista da linguagem, diversas classes de estruturas contidas em Est(τ). Por exemplo, se $\tau = \langle \phi; 2, 2; 2 \rangle$ então Est(τ) contém a classe dos corpos algebricamente fechados, a classe dos anéis noetherianos e a classe das álgebras de Boole, entre outras.

Em I.3 definiremos os morfismos correspondentes a Est(τ), tornando-a numa categoria (cf. McLane [1971]). Neste contexto ficará claro que a aplicação $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}^r$ é um funtor que cha maremos de Rel, entre as categorias Est(τ) e Est(τ^r).

I.2- Estruturas Bissortidas e Estruturas Topológicas

Uma estrutura é bissortida quando tem dois universos do discurso. Casos típicos são as estruturas de espaço vetorial sobre K ou de K-módulo, que chamaremos de estruturas de tipo vetorial:

I.2.1- $\mathfrak{A} = \langle V, K; +^V, +^K, \cdot^K, \cdot^{K,V}; 0^V, 0^K, 1^K \rangle$

onde V é o conjunto de vetores, K é o conjunto de escalares e, por exemplo, $\cdot^{K,V}: K \times V \to V$ é a operação de produto por um escalar.

Um outro exemplo muito frequente é a estrutura de espaço métrico

$$\mathfrak{M} = \langle M, \mathbb{R}; \leqslant^{\mathbb{R}}; +^{\mathbb{R}}, d^{M,\mathbb{R}}; 0^{\mathbb{R}} \rangle$$

onde $\mathbb{R}$ é o grupo aditivo ordenado dos números reais e $d^{M,\mathbb{R}}: M \times M \to \mathbb{R}$ é a métrica definida em M.

Um terceiro exemplo que estudaremos com certo detalhe nesta tese é a estrutura de espaço topológico

I.2.1.1- $T=\langle X, \tau; \epsilon\rangle$

onde $X\neq\phi$ é um conjunto, $\tau\subseteq P(X)$ é uma topologia sobre X e $\epsilon\subseteq X\times\tau$ é a relação de pertinência usual entre elementos de X e elementos de τ.

Análoga descrição aplica-se aos eapaços mensuráveis onde, neste caso, τ seria uma σ-álgebra sobre X.

A seguir definiremos as estruturas bissortidas em forma rigorosa. Analogamente pode-se definir as estruturas multissortidas em forma geral. Um caso particular serão então as estruturas algébricas I.1.3 que neste contexto, serão chamadas de unissortidas.

I.2.2- Definição

i) Definimos o conjunto das <u>sortes</u> como

$$S=\{(s_1,\ldots,s_n)/n\in\mathbb{N} \text{ e } s_i=0 \text{ ou } 1)\}.$$

ii) Uma <u>estrutura bissortida</u> é definida pela sêxtupla

I.2.3- $\langle A_0, A_1; \{R_i^{\mu(i)}\}_{i\in I}, \{F_j^{\nu(j)}\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K}, \{d_l\}_{l\in L}\rangle$

onde $A_0\neq\phi$ e $A_1\neq\phi$ (que suporemos disjuntos) são os domínios da estrutura, e $\mu: I \to S$ e $\nu: J \to S$ são funções de tal modo que cada $R_i^{\mu(i)}$ é uma relação de sorte $\mu(i)$, ie. se $\mu(i)=(s_1,\ldots,s_n)$ então $R_i^{\mu(i)} \subseteq As_1 \times \ldots \times As_n$; cada $F_j^{\nu(j)}$ é uma função de sorte $\nu(j)$ ie. se $\nu(j)=(s_1,\ldots,s_n, s)$ então $F_j^{\nu(j)}: As_1 \times \ldots \times As_n \to As$; e finalmente cada $c_k \in A_0$ e cada $d_l \in A_1$ são constantes. Supomos A_0 e A_1 munidas de $=^{A_0}$ e $=^{A_1}$ respectivamente.

Não é necessário considerar funções cujo contradomínio seja um produto cartesiano: neste caso bastaria considerar sua funções coordenadas.

O tipo de similaridade das estruturas bissortidas está dado pela quádrupla $<\mu, \nu, |K|, |L|>$.

I.2.4- Observações

i) as vezes é conveniente visualizar algumas estruturas unissortidas como bissortidas para salientar alguns de seus aspectos. Tal é o caso, por exemplo, dos grupos abelianos os quais podem ser vistos como $\mathbb{Z}$-módulos. As vezes também é possível olhar uma estrutura bissortida como unissortida, assim por exemplo, um espaço vetorial sobre K pode ser descrito como

$$<V; +^V, \{F_a\}_{a\in K}; 0^V>$$

onde as $F_a: V \to V$ são funções definidas por $F_a(x)=a.x$.

ii) há um procedimento geral para <u>traduzir</u> uma estrutura bissortida numa unissortida, definindo $A=A_0 \cup A_1$ como domínio da estrutura e acrescentando as relações unárias U_0 e U_1 definidas em A de tal modo que

$U_0(x) \longleftrightarrow x\in A_0$ e $U_1(x) \longleftrightarrow x\in A_1$.

Além disso, para cada $i\in I$, se $\mu(i)= (s_1,\ldots,s_n)$

então definimos

$R_i^A(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow x_k \in As_k (k=1,\ldots,n)$ e $R_i^{\mu(i)}(x_1,\ldots,x_n)$; e para cada $j \in J$, se $\nu(j)=(s_1,\ldots,s_n,s)$ definimos

$y =^A F_j^A(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow x_k \in As_k (k=1,\ldots,n)$, $y \in As$ e $y =^{As} F_j^{\nu(j)}(x_1,\ldots,x_n)$

onde não é difícil ver que $=^A$ coincide com $=^{A_0} \cup =^{A_1}$.

iii) As estruturas algébricas (unissortidas) munidas de uma topologia e a relação de pertinência usual serão chamadas de estruturas topológicas e serão denotadas por $<\mathfrak{A}, \tau, \in>$ onde $\mathfrak{A}$ é a estrutura algébrica correspondente. Exemplo delas são os grupos topológicos, os espaços vetoriais topológicos, etc. Igualmente, serão chamadas estruturas topológicas em sentido amplo as estruturas da forma anterior onde τ é qualquer subcoleção de $P(A)$, sendo A o domínio de $\mathfrak{A}$.

I.3- Subestruturas, Isomorfismos e Isomorfismos Parciais

I.3.1- Definição. Dadas as estruturas (do mesmo tipo de similaridade τ) $\mathfrak{A}=<A, \{R_i\}, \{F_j\}, \{c_k\}>$ e $\mathfrak{B}=<B, \{S_i\}, \{G_j\}, \{d_k\}>$, dizemos que $\mathfrak{B}$ é subestrutura de $\mathfrak{A}$, denotando-o por $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, se:

i) $B \subseteq A$.

ii) $S_i = R_i \cap B^{\mu(i)}$

iii) $G_j = F_j \cap B^{\nu(j)}$

iv) $d_k = c_k$.

É consequência da definição que qualquer subestrutura de $\mathfrak{A}$ deve conter as constantes de $\mathfrak{A}$, e deve ser invariante pela aplicação de qualquer função de $\mathfrak{A}$.

I.3.1.1- Definição. Dado um subconjunto S de A, a subestrutura gerada por S é a mínima subestrutura de $\mathfrak{A}$ que contém S, que será denotada por $\mathfrak{A}\upharpoonright S$. S é chamado um conjunto de geradores para $\mathfrak{A}\upharpoonright S$.

Dizemos que $\mathfrak{A}$ é k-gerado, onde k é um cardinal infinito, se existe $S\subseteq A$ com $|S|<k$ tal que $\mathfrak{A}\upharpoonright S=\mathfrak{A}$ (se $k=\aleph_0$, $\mathfrak{A}$ é dito finitamente gerado, se $k=\aleph_1$, $\mathfrak{A}$ é dito enumeravelmente gerado).

I.3.2- Observação

Nem toda subestrutura de uma estrutura é da mesma natureza matemática que a estrutura original. Por exemplo, se um grupo é representante por $\langle G; \circ; e\rangle$ nem toda subestrutura dele necessariamente é um subgrupo; assim temos que $\langle \mathbb{N}; +; 0\rangle$ é uma subestrutura do grupo aditivo $\langle \mathbb{Z}; +; 0\rangle$ embora ele não seja um grupo.

Facilmente podemos ver que a razão desta aparente anomalia é que a operação de inversão não está incluída no tipo de estrutura: se $\langle G; \cdot, {}^{-1}; e\rangle$ é um grupo, então toda subestrutura dele é um subgrupo.

Analogamente, pode-se ver que se $\langle K; +, \cdot; 0, 1\rangle$ é um corpo, todo subanel dele é uma subestrutura.

I.3.3- Definição

Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\in$ Est(τ)(como na def. I.3.1) e $f:A \to B$ uma aplicação sobrejetora. Dizemos que f é um <u>homomorfismo</u> de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$ se:

i) $R_i(x_1,\ldots,x_{\mu(i)}) \Rightarrow S_i(f(x_1),\ldots f(x_{\mu(i)}))$ para cada $i \in I$ e para quaisquer $x_1,\ldots,x_{\mu(i)} \in A$.

ii) $f(F_j(x_1,\ldots,x_{\nu(j)}) \overset{B}{=} G_j(f(x_1),\ldots,f(x_{\nu(j)}))$ para cada $j \in J$ e para quaisquer $x_1,\ldots,x_{\nu(j)} \in A$.

iii) $f(c_k) \overset{B}{=} d_k$ para todo $k \in K$.

Se f é uma bijeção e em (i) trocamos $\Rightarrow$ por $\Leftrightarrow$, dizemos que f é um <u>isomorfismo</u> de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, denotando-o por $f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. O fato de serem $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ isomorfos será denotado por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

I.3.4- Proposição

$\cong$ é uma relação de equivalência em Est(τ).

Demonstração. Imediata ■

I.3.5- Proposição

Se f é um homomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, então f é um homomorfismo de $\mathfrak{A}^r$ sobre $\mathfrak{B}^r$ (ver I.1.6).

Demonstração. Basta analizar o caso das funções da estrutura.

Seja F uma função n-ária definida em A e G a correspondente em B. Em $\mathfrak{A}^r$ e $\mathfrak{B}^r$ temos respectivamente:

$$R_F(x_1,\ldots,x_n,y)\Longleftrightarrow y=^A F(x_1,\ldots,x_n)$$

$$S_G(x_1,\ldots,x_n,y)\Longleftrightarrow y=^B G(x_1,\ldots,x_n)$$

então $R_F(x_1,\ldots,x_n,y)\Longrightarrow y=^A F(x_1,\ldots,x_n)\Longrightarrow f(y)=^B f(F(x_1,\ldots,x_n))$ $\Longrightarrow f(y)=^B G(f(x_1),\ldots,f(x_n))\Longrightarrow S_G(f(x_1),\ldots,f(x_n), f(y))$ ■

Corolário. $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}\Longleftrightarrow\mathfrak{A}^r\cong\mathfrak{B}^r$ ■

I.3.6- Observações

i) a relação de isomorfismo preserva cardinalidade, ie. $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}\Longrightarrow|A|=|B|$.

ii) a proposição I.3.5 prova que Rel é um funtor que associa a cada (homo)morfismo $f:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ o (homo)morfismo f^r: $\mathfrak{A}^r\to\mathfrak{B}^r$ definido por $f^r\restriction A=f$.

iii) seja $f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$. Dado $S\subseteq A^n$, definindo $f(S)=\{(f(x_1),\ldots,f(x_n))/S(x_1,\ldots,x_n)\}$, temos que $f:\langle\mathfrak{A},S\rangle\cong\langle\mathfrak{B},f(S)\rangle$, onde $\langle\mathfrak{A},S\rangle$ denota a <u>expansão</u> da estrutura $\mathfrak{A}$ acrescentando a relação S.

Com efeito, nesse caso temos $S(x_1,\ldots,x_n)\Longleftrightarrow f(S)(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ por definição.

I.3.7- Definição. Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\in$Est(τ) e $f:A\to B$. f é dito um mergulho se existe uma subestrutura $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$.

I.3.8- Exemplos.

i) sejam $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \langle \mathbb{N}; \leqslant \rangle$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n+1$. É fácil ver que $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}; \leqslant \rangle$ é uma subestrutura de $\mathcal{B}$ e que f é um mergulho tendo como imagem $\mathcal{C}$.

ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se e somente se a inclusão $i : A \to B$ é um mergulho

I.3.9- Digressão

A relação de isomorfismo é a relação mais importante na tentativa de compreensão das estruturas matemáticas de tal modo que um problema central na matemática contemporânea é o problema da classificação de diversas classes de estruturas salvo isomorfismo, ie. a partição delas em classes de isomorfismo.

Por exemplo, é bem conhecida na Álgebra a classificação dos grupos abelianos finitamente gerados: um grupo abeliano finitamente gerado é, salvo isomorfismo, uma soma direta finita de grupos ciclicos. (cf. Rotman [1973, pag. 193]). O problema geral de encontrar condições necessárias e suficientes para que um grupo dado possa ser decomposto, (salvo isomorfismo), em soma direta de grupos ciclicos não foi ainda resolvido.

Em forma análoga, conhece-se a classificação dos grupos abelianos divisíveis livres de torção: um grupo deste tipo é soma direta de grupos isomorfos ao grupo aditivo $\langle \mathbb{Q};+\rangle$, ie. é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

(Para ver isso em forma simples basta lembrar que um grupo G é dito <u>divisível</u> se para todo $x\in G$ e para todo $n\in\mathbb{Z}$ existe $y\in G$ tal que $ny=x$; se o grupo G é <u>livre de torção</u>, ie. nenhum elemento dele é de ordem finita, então tal y é único e é denotado por $\frac{x}{n}$. Pode-se definir, portanto, para $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ e $x\in G$: $\frac{m}{n}x=\frac{mx}{n}$, tornando G num espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$).

Nos últimos anos se obteve a classificação de todos os grupos finitos simples; ie. a classe dos grupos finitos simples foi particionada em classe de isomorfismo onde cada classe tem algum representante "conhecido" (cf. Gorenstein [1986]).

O conhecimento de tal representante é usualmente dado em termos de certos "invariantes", os quais geralmente são números cardinais. Um caso de destaque é a classificação por Steinitz de todos os corpos algebricamente fechados não-enumeráveis: se K_1 e K_2 são corpos desse tipo temos que: $K_1\cong K_2 \longleftrightarrow \text{caract}(K_1)=\text{caract}(K_2)$ e $|K_1|=|K_2|$. (cf. Bell-Slomson [1969, pag. 177]).

Neste e nos capítulos seguintes serão dadas outras noções de equivalência entre as estruturas, mais fracas que o isomorfismo, levantando-se o problema da classificação correspondente (a menos da equivalência). A aproximação destas equivalências ao isomorfismo será estabelecida em termos do que se conhece como <u>isomorfismos parciais</u>, uma de cujas versões definiremos a seguir.

I.3.10. **Definição**. Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$. Um <u>isomorfismo parcial</u> f de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é simplesmente um isomorfismo $f: \mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{B}_0$ onde $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}$.

Deve-se observar que todo mergulho é um isomorfismo parcial.

I.3.11. **Definição**. Seja I uma coleção de isomorfismo parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. Dizemos que I tem a <u>propriedade de vaivém</u> (ou como é mais conhecido em inglês, back-and-forth) se:

i) $\forall f \in I$ e $\forall x \in A$ $\exists g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $x \in \operatorname{dom} g$.

ii) $\forall f \in I$ e $\forall y \in B$ $\exists g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $y \in \operatorname{im} g$.

Notação. Se I é uma coleção de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ com a <u>propriedade de vaivém</u>, escrevemos $I: \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Neste caso dizemos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são parcialmente isomorfos o qual denotaremos com $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

É óbvio que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, mas não é imediato que $\cong_p$ seja uma relação de equivalência (a transitividade não é fácil de se provar).

A técnica de extensão de isomorfismos parciais chama-se de <u>técnica de back-and-forth</u> e será a técnica mais importante a ser usada neste trabalho. Ela tem aplicações não triviais à matemática como mostraremos ao longo desta tese (cf. Dickmann [1975]).

I.3.12. Proposição. Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$ duas estruturas <u>enumeravelmente geradas</u> (ie. com conjunto de geradores enumerável) parcialmente isomorfas, com domínios A e B respectivamente, e seja $I: \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Então, para todo $f_0 \in I$ existe um isomorfismo $f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ tal que $f_0 \subseteq f$.

Em particular, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tem domínio enumerável e $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demonstração. Enumeremos os conjuntos de geradores $A_0 = \{a_0, a_1, \ldots\}$ e $B_0 = \{b_0, b_1, \ldots\}$ de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ respectivamente, e definimos a sequência

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq \ldots f_n \subseteq \ldots$$

da seguinte maneira:

f_{2n+1} = algum $g \in I$ com $f_{2n} \subseteq g$ e $a_n \in dom\ g$,

f_{2n+2} = algum $g \in I$ com $f_{2n+1} \subseteq g$ e $b_n \in im\ g$,

a qual fica bem definida pela propriedade de vaivém de I.

Seja $f = \bigcup_n f_n$. É claro que $dom f = A$, $im f = B$ e que f é uma bijeção.

Resta apenas provar que f preserva relações, funções e constantes, mas é claro que basta provar o caso das relações.

Seja R uma relação n-ária em $\mathfrak{A}$ e S sua correspondente em $\mathfrak{B}$. Se $x_1, \ldots, x_n \in A$ então existe $m \geq 0$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in dom\ f_m = A_m$. Se $B_m = im\ f_m$ consideremos as restrições $R_m = R \cap A_m^n$ e $S_m = S \cap B_m^n$, então temos:

$R_m(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow S_m(f_m(x_1), \ldots, f_m(x_n))$, mas como $f \upharpoonright A_m = f_m$ temos que

$$R(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow S(f(x_1), \ldots f(x_n)) \blacksquare$$

I.3.13- Exemplo

Sejam $\mathfrak{A}=\langle A;<^A\rangle$ e $\mathfrak{B}=\langle B;<^B\rangle$ duas ordens lineares densas sem pontos extremos, então $\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}$.

Com efeito, seja I={isomorfismos parciais entre subestruturas finitas de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$}, ie. se $f\in I$ temos que dom$f=\{a_1<\ldots<a_n\}\subseteq A$, im$f=\{b_1<\ldots<b_n\}\subseteq B$ e $f(a_i)=b_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Seja $a\in A\setminus$dom$f$ e suponhamos, como caso representativo, que $a_k<a<a_{k+1}$, então, como $<^B$ é densa existe $b\in B$ tal que $b_k<b<b_{k+1}$. Definindo $g:\{a_1,\ldots,a_n,a\}\to\{b_1,\ldots,b_n,b\}$ como $g(a_i)=f(a_i)=b_i(i=1,\ldots,n)$ e $g(a)=b$ obtemos que $g\in I$, $f\subsetneq g$ e $a\in$dom$g$.

Em forma análoga prova-se que para $b\in B\setminus$im$f$ existe $g\in I$ tal que $f\subsetneq g$ e $b\in$im$g$ ■

Consequências

i) $\langle\mathbb{Q};<^{\mathbb{Q}}\rangle\cong_p\langle\mathbb{R};<^{\mathbb{R}}\rangle$; consequentemente, como $|\mathbb{Q}|\neq|\mathbb{R}|$, temos que em geral $\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}$ não implica $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

ii) (Cantor). É consequência da proposição I.3.12 e do exemplo I.3.13 que duas ordens lineares densas sem pontos extremos e enumeráveis são isomorfas.

iii) (Hausdorff). Como uma aplicação interessante do resultado de Cantor prova-se o seguinte:

Dado $q\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijeção continua tal que f preserva a ordem, $f(0)=q$ e $f\upharpoonright\mathbb{Q}\setminus\{0\}\subseteq\mathbb{Q}$.

Com efeito, seja $f_0:\{0\}\to\{q\}$, então por (ii) e a proposição I.3.12 existe $f_1:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\cup\{q\}$ isomorfismo de ordem tal que $f_0\subseteq f_1$ (pois ambos são conjuntos ordenados cujas ordens são lineares, densas e sem extremos, além de ser enumeráveis).

f_1 admite uma extensão ordenada natural $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida da seguinte maneira: se $x\in\mathbb{R}$ escolhemos uma sequência crescente $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ tal que $x=\sup_n x_n$, então definimos $f(x)=\lim_n f_1(x_n)$ o qual, não é difícil ver, coincide com $\sup_n f_1(x_n)$ pois a sequência $\{f_1(x_n)\}$ será também crescente e limitada. f está bem definida, é bijetiva e preserva a ordem.

Finalmente, f é contínua pois a topologia usual de $\mathbb{R}$ coincide com a topologia da ordem, mais do que isso, f é um homeomorfismo (cf. Hausdorff [1962]).

I.3.14- Exemplo. Sejam K_1 e K_2 dois corpos algebricamente fechados da mesma característica $p\geqslant 0$ e não-enumeráveis, então $K_1\equiv_p K_2$ (cf. A. Robinson [1968]).

Com efeito, seja $I=\{f:F_1\to F_2/F_1$ e F_2 são subcorpos finitos ou enumeráveis de K_1 e K_2 resp. e $f:F_1\cong F_2\}$.

$I\neq\phi$ pois os corpos primos de K_1 e K_2 são isomorfos por serem de mesma característica.

Seja $f\in I$, ie. $f:F_1\to F_2$, e seja $a\in K_1\setminus F_1$,

<u>Caso 1</u>. se a é trancendente sobre F_1, podemos escolher $b\in K_2\setminus F_2$ transcendente sobre F_2 (o qual existe pois K_2 é não enumerável e F_2 como seu fecho algébrico são no máximo enumeráveis); podemos definir então $g:F_1(a)\to F_2(b)$ tal que $g\upharpoonright F_1=f$ e $g(a)=b$ sendo g um isomorfismo.

Como $F_1(a)$ e $F_2(b)$ são também subcorpos contáveis de K_1 e K_2 temos que $g\in I$ com $f\subseteq g$ e $a\in\mathrm{dom}\ g$.

<u>Caso 2</u>. se a é algébrico sobre F_1, seja $p_1\in F_1[X]$ o polinômio mínimo de a, e seja b uma raiz de $p_2\in F_2[X]$ sendo $p_2(X)$ a imagem de

$p_1(X)$ pela extensão de f aos anéis de polinômios respectivos. Temos que $b \in K_2 \setminus F_2$ e podemos tomar $g: F_1(a) \to F_2(b)$ como o isomorfismo canônico que é extensão de f e mapeia a sobre b.

Para provar a condição (ii) dada na definição I.3.11 basta trocar os papéis de a e b ∎

I.3.15. Asserção. É importante salientar que K_1 e K_2 podem ser de distinta cardinalidade. Desta forma, mais que uma bonita aproximação ao teorema de Steinitz, temos um resultado complementário, o qual terá, veremos depois, profundas consequências na Geometria Algébrica em relação ao chamado "Princípio de Lefschetz".

I.3.16- Exemplo. Seja F um corpo e X e Y conjuntos infinitos de variáveis indeterminadas, então, os anéis de polinômios F[X] e F[Y] são parcialmente isomorfos.

Com efeito, suponhamos $X=\{X_i\}_{i\in I}$ e $Y=\{Y_j\}_{j\in J}$.

Seja $I= \{f: F[X_{i_1},\ldots,X_{in}] \to F[Y_{j_1},\ldots,Y_{jn}] / n \geq 0$ e é um F-isomorfismo de anéis$\}$. Obviamente, domf e imf são subestruturas de F[X] e F[Y] respectivamente, além disso $I \neq \phi$ pois $\rho \in I$.

Seja $p \in F[X] \setminus$ domf, então se $\partial p = m > 0$ existem $\ldots, X_{km} \in X$ tal que $p \in F[X_{k_1},\ldots,X_{km}]$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\ldots, X_{km}\} \cap \{X_{i_1},\ldots,X_{in}\} = \phi$, então escolhendo $Y_{k_1},\ldots,Y_{kn} \in$

Y distintos de $Y_{j_1},\ldots,Y_{jn}$ podemos definir $g:F[X_{i_1},\ldots,X_{in}][X_{k_1},\ldots,X_{km}]\to F[Y_{j_1},\ldots,Y_{jn}][Y_{k_1},\ldots,Y_{km}]$ de tal modo que $g\restriction F[X_{i_1},\ldots,X_{in}]=f$ e $g(X_{ki})=Y_{ki}$ para $i=1,\ldots,m$.

É óbvio que g é um F-isomorfismo, $f\subseteq g$ e $p\in\text{domg}$.

Em forma análoga prova-se a outra condição do back-and-forth. Portanto, $F[X]\equiv_p F[Y]$.

I.4- Isomorfismos Bissortidos vs. Homeomorfismos

Nesta seção definiremos o correspondente conceito de homomorfismo para estruturas bissortidas e o aplicaremos ao estudo das estruturas de tipo vetorial e as estruturas topológicas em sentido amplo.

I.4.1- Definição. Sejam $\langle A_0, A_1; \{R\}, \{F\}, \{c^{A_0}\}, \{d^{A_1}\}\rangle$ e $\langle B_0, B_1; \{S\}, \{G\}, \{c^{B_0}\}, \{d^{B_1}\}\rangle$ estruturas bissortidas (simplificando a notação em forma evidente). Um <u>homomorfismo bissortido</u> é um par de aplicações (f_0,f_1) onde $f_0:A_0\to B_0$ e $f_1:A_1\to B_1$ são sobrejetoras e satisfazem as seguintes condições:

i) se R é de sorte $(s_1,\ldots,s_n)$ e $x_1\in A_{s_1},\ldots,x_n\in A_{sn}$ então $R(x_1,\ldots,x_n)\Longrightarrow S(f_{s_1}(x_1),\ldots,f_{sn}(x_n))$.

ii) se F é de sorte $(s_1,\ldots,s_n,s)$ e $x_1\in A_{s_1},\ldots,x_n\in A_{sn}$ então $f_s(F(x_1,\ldots,x_n))=G(f_{s_1}(x_1),\ldots,f_{sn}(x_n))$.

iii) $f_0(c^{A_0})=c^{B_0}$ e $f_1(d^{A_1})=d^{B_1}$.

Ambas as estruturas são ditas <u>isomorfas</u> se f_1 e f_2 são bijeções e (i) é satisfeito com $\Longleftrightarrow$ em vez de $\Longrightarrow$, ie.

I.4.1.1- $R(x_1,\ldots,x_n) \Longleftrightarrow S(f_{s_1}(x_1),\ldots,f_{sn}(x_n))$.

I.4.2- Homomorfismo Entre Estruturas de Tipo Vetorial

Consideremos as estruturas $\langle V_i, K_i;\ldots\rangle$ $i=1, 2$ como em I.2.1, sendo V_i um K_i-módulo, e sejam $f:V_1 \to V_2$, $g:K_1 \to K_2$ sobrejetoras.

A condição de ser um homomorfismo bissortido se traduz no fato de f ser um homomorfismo de grupos abelianos e g um homomorfismo de anéis, além de satisfazer a condição:

I.4.2.1 $\forall\alpha \in K_1$ e $\forall x \in V_1$: $f(\alpha\cdot x)=g(\alpha)\cdot f(x)$ em concordância com I.4.1 (ii).

Isto permite generalizar o conceito de aplicação linear entre estruturas vetoriais cujo conjunto de escalares não é o mesmo.

Deve-se observar que no caso de K_1 e K_2 serem iguais, usualmente e implicitamente toma-se g como a identidade. Ainda neste caso é possível a generalização podendo-se tomar como g qualquer automorfismo de K_1 $(=K_2)$, sendo esta escolha particularmente frutífera no caso não comutativo como mostraremos a seguir.

Seja $\mathbb{H}$ o anel de divisão dos quatérnios reais. Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{H}$ é um $\mathbb{H}$-módulo onde a multiplicação por um escalar (à esquerda) está dada pela função $(\alpha,x)\to\alpha\cdot x$ satisfazendo: $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$

$\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x.$

Sabe-se que todo automorfismo de $\mathbb{H}$ é interno, ie. da forma $\sigma_q:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ onde $q\in\mathbb{H}$ e $\sigma_q(\alpha)=q\alpha q^{-1}$ (cf. Jauch [1968]).

I.4.2.2- Definição. Uma aplicação $f:V\to V$ é dita <u>semilinear</u> se $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e existe $q\in\mathbb{H}$ tal que:

$f(\alpha\cdot x)=\sigma_q(\alpha)\cdot f(x).$

I.4.2.3- Proposição. A função $f:V\to V$ dada por $f(x)=q\cdot x$ é semilinear.

Demonstração. A aditividade é imediata. Por outro lado $f(\alpha\cdot x)=q\cdot(\alpha\cdot x)=(q\alpha)\cdot x=(q\alpha q^{-1})\cdot(q\cdot x)=\sigma_q(\alpha)\cdot f(x)$. ∎

I.4.3. Homomorfismos Topológicos

Sejam $\langle X,\ \tau;\ \in\rangle$ e $\langle Y,\ \sigma;\ \in\rangle$ dois espaços topológicos em sentido amplo (ie. τ e σ são subcoleções arbitrárias de $P(X)$ e $P(Y)$ respectivamente).

Dada $f:X\to Y$, o fato de f ser <u>contínua</u> ou <u>aberta</u> com respeito das coleções τ e σ define-se na forma usual.

I.4.3.1- Definição. Um homomorfismo topológico entre as estruturas dadas é um par de funções (f,g) onde $f:X\to Y$ e $g:\tau\to\sigma$ são sobrejetoras e satisfazem a condição I.4.1.1., ie.,

I.4.3.2- $\forall x \in X,\ \forall A \in \tau: x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in g(A)$.

Observe-se que para se ter um homomorfismo bissortido neste caso exigir-se-ia uma condição mais fraca: $\forall x \in X$, $\forall A \in \tau$, $x \in A \Longrightarrow f(x) \in g(A)$, a qual equivale a: $\forall A \in \tau$, $f[A] \subseteq g(A)$, que aparentemente é desinteressante desde o ponto de vista topológico: em particular nada diz a respeito da continuidade da f, como se deveria esperar.

I.4.3.3- Definição. $f:X\to Y$ é dita τ-saturada se todo $A \in \tau$ é saturado com respeito a f, ie. $\forall A \in \tau: A=f^{-1}[f[A]]$ (cf. Elon Lima [1970, pag. 65-66]).

I.4.3.4- Lema. I.4.3.2 equivale a $\forall A \in \tau: A=f^{-1}[g(A)]$.

Demonstração. Imediata ∎

I.4.3.5- Proposição. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) o par (f,g) é um homomorfismo topológico.

b) f é sobre, contínua, aberta, τ-saturada e $\forall A\in \tau: g(A)=f[A]$.

Demonstração.

($a \Rightarrow b$) Como f é sobre, pelo lema segue-se que $\forall A\in \tau: f[A]=f[f^{-1}[g(A)]]=g(A)$, daí conclue-se que $\forall A \in \tau: f[A] \in \sigma$, ie. f é aberta, além disso, substituindo-se a igualdade anterior no lema obtemos $\forall A \in \tau: A=f^{-1}[f[A]]$, ie. f é τ-saturada.

Para ver que f é também contínua, tome $b \in \sigma$. Então, como g é sobre existe $A \in \tau$ tal que $B=g(A)$, logo, pelo lema, $f^{-1}[B]=f^{-1}[g(A)]=A \in \tau$.

($b \Rightarrow a$) Vejamos primeiro que g, definida por $g(A)=f[A]$, toma valores em σ e é sobre.

Com efeito, g toma valores em σ pois f é aberta. Seja $B \in \sigma$, então, $A=f^{-1}[B]$ é tal que $A \in \tau$ por ser f contínua e $g(A)=f[A]=f[f^{-1}[B]]=B$ por ser f sobre.

Para concluir, como f é τ-saturada temos que $\forall A\in \tau: A=f^{-1}[f[A]]= f^{-1}[g(A)]$, logo, pelo lema o par (f,g) é um homomorfismo topológico ∎

I.4.3.5.1- Convenção. Como sugerido pela proposição anterior, podemos evitar a menção da função g e dizer que um homomorfismo topológico é uma função f sobrejetora, aberta, contínua, e τ-saturada.

I.4.3.6- Corolário. Se $f:\langle X, \tau; \epsilon\rangle \to \langle Y, \sigma; \epsilon\rangle$ é um homomorfismo topológico, então $|\tau|=|\sigma|$.

Demonstração. Seja $g:\tau\to\sigma$ dado por $g(A)=f[A]$.

i) g é injetora: $g(A)=g(B) \Longrightarrow f[A]=f[B] \longrightarrow A=f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[f[B]]=B$ por ser f τ-saturada.

ii) g é sobrejetora: se $B \in \sigma$ então, como f é contínua, $f^{-1}[B]\in\tau$. Tomando $A=f^{-1}[B]$ temos que $g(A)=f[A]=f[f^{-1}[B]]=B$ por ser f sobrejetora ■

I.4.3.7- Observação. Sabe-se que uma função f é injetora se e somente se todo subconjunto de X é saturado com respeito a f, ie. $\forall A\subseteq X$: $A=f^{-1}[f[A]]$. Portanto um homomorfismo topológico f, na medida em que é τ-saturado, não está longe de ser um homeomorfismo (no sentido amplo).

Em particular, todo homeomorfismo f é trivialmente τ-saturado.

I.4.3.8- Corolário. Seja $f:X\to Y$. As afirmações seguintes são equivalentes:

a) f é um homomorfismo topológico injetivo.

b) f é um homeomorfismo.

c) f é um isomorfismo bissortido.

Demonstração. Imediata ■

I.4.3.9- Comentário

O conceito de isomorfismo entre estruturas (em geral multissortidas) é um conceito puramente algébrico: em sentido rigoroso, é um conceito que pode ser formulado na área conhecida como Álgebra Universal (cf. Gratzer [1968]).

Portanto, em virtude do corolário anterior, o conceito de homeomorfismo é de caráter totalmente algébrico.

Entretanto, não podemos daí concluir que a Topologia é uma subárea da Álgebra (Universal) já que ela não é somente o estudo das estruturas topológicas e dos invariantes por homeomorfismos, mas envolve também o conceito de continuidade, o qual é consideravelmente mais fraco (quiçá devemos dizer menos rígido) que o de homomorfismo topológico definido pela primeira vez aqui.

I.4.3.10- Proposição. Se $f:X\to Y$ é um homomorfismo topológico, então τ e σ são as topologias (em sentido amplo) induzidas e co-induzidas por f em X e Y respectivamente.

Demonstração. Sejam $\tau_f=\{f^{-1}[B]/B\in\sigma\}$ e $\sigma_f=\{B\subseteq Y/f^{-1}[B]\in\sigma\}$, devemos provar que $\tau=\tau_f$ e $\sigma=\sigma_f$.

É óbvio que pela continuidade de f, $\tau_f\subseteq\tau$. Se $A\in\tau$, então como f é aberta $f[A]\in\sigma$ e sendo $A=f^{-1}[f[A]]$ por ser f τ-saturada temos que $A\in\tau_f$, logo $\tau\subseteq\tau_f$.

Analogamente prova-se a outra igualdade ■

I.4.3.11- Observações.

i) Definindo $\tau^f=\{A\subseteq X/f[A]\in\sigma\}$ e $\sigma^f=\{f[A]/A\in\tau\}$ facilmente pode-se provar que se satisfazem $\tau^f=\tau_f$ e $\sigma^f=\sigma_f$. Portanto, para um homomorfismo topológico f tem-se $\tau=\tau_f=\tau^f$ e $\sigma=\sigma_f=\sigma^f$, o qual mostra, junto com I.4.3.6, em certa medida, a força do conceito de homomorfismo topológico (ver I.4.3.17 e III.1.10).

ii) Resulta como corolário da proposição anterior a versão seguinte do primeiro teorema de isomorfismo:

Seja X/f o espaço quociente partido pela relação $x\equiv y\longleftrightarrow f(x)=f(y)$. Então, se f é homomorfismo topológico temos $X/f\cong Y$ (ie. são homeomorfos ou isomorfos desde o ponto de vista bissortido).

Basta definir $\bar{f}: X/f\to Y$ de tal modo que, se $\pi:X\to X/f$ é a projeção canônica, se tenha que $\bar{f}\circ\pi=f$.

Terminaremos dando alguns exemplos concretos de homomorfismos topológicos e algumas propriedades adicionais.

I.4.3.12- Proposição. Seja $<X, \tau; \in>$ um espaço topológico no sentido usual e definamos a seguinte relação de equivalência em X:

$$x\equiv_c y\longleftrightarrow \overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$$

(A barra denota o fecho no sentido da topologia), então a projeção $\pi:X\to X/\equiv_c$ é um homomorfismo topológico.

Demonstração Obviamente π é sobre e contínua. Se provarmos que é τ-saturada, ie. $\forall A\in\tau : A=\pi^{-1}[\pi[A]]$ será imediato que é aberta.

Basta provar $\pi^{-1}[\pi[A]]\subseteq A$. Com efeito, $x\in\pi^{-1}[\pi[A]]\Longrightarrow \pi(x)\in\pi[A]\Longrightarrow\exists z\in A/\pi(x)=\pi(z)$, ie. $\overline{\{x\}}=\overline{\{z\}}$.

Se $x\notin A\Longrightarrow x\in A^c$ (o qual é fechado)$\Longrightarrow\overline{\{x\}}\subseteq\overline{A^c}=A^c\Longrightarrow \overline{\{z\}}\subseteq A^c\Longrightarrow z\in A^c$ o qual é uma contradição, logo $x\in A$ ■

I.4.3.13- Proposição. Sejam X e Y conjuntos quaisquer e f: $X\to Y$ uma função sobrejetora, então é possível topologizar X de tal modo que a projeção $\pi:X\to X/f$ seja um homomorfismo topológico.

Demonstração. Definimos o operador c: $P(X)\to P(X)$ dado por $c(A)=f^{-1}[f[A]]$. Facilmente prova-se que c satisfaz os axioma de fecho de Kuratowski, ie.

$c(\phi)=\phi$

$A\subseteq c(A)$

$c(c(A))=c(A)$

$c(A\cup B)=c(A)\cup c(B)$.

Observe-se que os conjuntos fechados coincidem com os conjuntos saturados com respeito a f. Além disso, $c(\{x\})=c(\{y\})\Longleftrightarrow f^{-1}[f(x)]=f^{-1}[f(y)]\Longleftrightarrow f(x)=f(y)$, isto significa que os conjuntos $X/\equiv_c$ e X/f coincidem. Logo, pela proposição anterior obtemos o resultado ■

Seja f: $X\to Y$ como na proposição acima. Chamaremos de τ_{sat} a coleção de todos os subconjuntos de X saturados com respeito a f.

I.4.3.14- Lema. Se $A, B \in \tau_{sat}$, então

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B].$$

Demonstração. Com efeito, $A \cap B = f^{-1}[f[A]] \cap f^{-1}[f[B]] = f^{-1}[f[A] \cap f[B]]$, portanto, como f é sobre temos $f[A \cap B] = f[f^{-1}[f[A] \cap f[B]]] = f[A] \cap f[B]$ ∎

I.4.3.15- Proposição. τ_{sat} é uma topologia (em sentido usual) sobre X.

Demonstração. É imediato que τ_{sat} é fechada para uniões arbitrárias. Para provar que é fechada para interseções finitas sejam $A, B \in \tau_{sat}$, então, pelo lema $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, logo $f^{-1}[f[A \cap B]] = f^{-1}[f[A] \cap f[B]] = f^{-1}[f[A]] \cap f^{-1}[f[B]] = A \cap B$, portanto $A \cap B \in \tau_{sat}$ ∎

I.4.3.16- Corolário. Sejam $\langle X, \tau; \epsilon\rangle$ e $\langle Y, \sigma; \epsilon\rangle$ espaços topológicos em sentido amplo, e $f: X \to Y$ um homomorfismo topológico.

i) como f é τ-saturada segue-se que $\tau \subseteq \tau_{sat}$, ie. τ_{sat} é a maior coleção para a qual f é um homomorfismo topológico, sendo ela uma topologia sem sentido usual.

ii) se $\bar{\tau}$ e $\bar{\sigma}$ denotam os fechos de τ e σ para uniões arbitrárias, então f é um homomorfismo topológico com respeito a $\bar{\tau}$ e $\bar{\sigma}$ ∎

I.4.3.17- Proposição. Se $f:X\to Y$ é um homomorfismo topológico, e $K\subseteq Y$ é compacto, então $f^{-1}[K]$ é compacto em X.

Demonstração. Suponhamos $f^{-1}[K]\subseteq \bigcup A_i$ onde cada $A_i\in\tau$, então $K= f[f^{-1}[K]]\subseteq f[\bigcup A_i]=\bigcup f[A_i]$.

Por ser f aberta, cada $f[A_i]\in\sigma$, logo por ser K compacto, existem $i_1,\ldots,i_n$ tais que $K\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f[A_{i_k}]$, então $f^{-1}[K]\subseteq f^{-1}[\bigcup_{k=1}^{n} f[A_{i_k}]]=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}[f[A_{i_k}]]=\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$ por ser f τ-saturada. Portanto, $f^{-1}[K]$ é compacto ∎

O conceito de homomorfismo topológico, embora surgido das estruturas topológicas (como estruturas bissortidas), tem também uma manifestação na Álgebra como mostraremos a seguir.

I.4.3.18- Exemplo. Seja $f:G\to\bar{G}$ um epimorfismo de grupos. Sejam $\tau=\{H\subseteq G/H$ é um subgrupo e $\ker f\subseteq H\}$ e $\sigma=\{K\subseteq\bar{G}/K$ é um subgrupo$\}$. Então $f:\langle G,\tau;\in\rangle\to\langle\bar{G},\sigma;\in\rangle$ é um homomorfismo topológico.

Demonstração. ($H\lessdot G$ denotará o fato de H ser um subgrupo de G).

i) f é aberta e contínua: é trivial pois as imagens direta e inversa de subgrupos são subgrupos, e no segundo caso contendo ao núcleo de f.

ii) f é τ-saturada: basta provar que $f^{-1}[f[H]]\subseteq H$. $x\in f^{-1}[f[H]]\Longrightarrow f(x)\in f[H]\Longrightarrow$ existe $z\in H$ tal que $f(x)=f(z)\Longrightarrow f(x\cdot z^{-1})=\bar{e}$ (elemento neutro de $\bar{G}$)$\Longrightarrow x\cdot z^{-1}\in\ker f\subseteq H\Longrightarrow$ como $z\in H$:

$x \in H$ ■

I.4.3.19. Outros exemplos imediatos são os seguintes:

i) Trocando acima "subgrupos" por "subgrupos normais" temos exatamente a mesma situação.

ii) se $f: A \to B$ é um epimorfismo de anéis, τ consta dos ideais de A que contém ao núcleo de f e σ consta dos ideais de B, então f é um homomorfismo topológico com respeito a τ e σ. Em particular, para todo ideal I que contém ker f temos que: $f^{-1}[f[I]]=I$.

Um outro exemplo menos trivial que os anteriores, e que depende fortemente da τ-saturação da f, é o seguinte:

Lema.

i) se I, J são ideais de A tal que $\ker f \subseteq I \subsetneq J$, então $f[I] \subsetneq f[J]$.

ii) se I, J são ideais de B, então $f^{-1}[I] \subsetneq f^{-1}[J]$.

Demonstração. É imediato que as inclusões são preservadas.

i) seja $x \in J \setminus I$. Se $f(x) \in F[I]$, então existe $z \in I$ tal que $f(x)=f(z)$, ie. $f(x-z)=0$, logo, $x-z \in \ker f \subseteq I$, então $x \in I$, o qual é uma contradição, portanto, $f(x) \in f[J] \setminus f[I]$.

ii) se $f^{-1}[I]=f^{-1}[J]$, então $I=f[f^{-1}[I]]=f[f^{-1}[J]]=J$, contradição, portanto, $f^{-1}[I] \neq f^{-1}[J]$ ■

I.4.3.20- Proposição. Seja $f:A\to B$ um epimorfismo de anéis, $\tau=\{M\subseteq A/M$ é ideal maximal (e $\ker f\subseteq M$)$\}$ e $\sigma=\{N\subseteq B/N$ é ideal maximal$\}$, então f é um homomorfismo topológico a respeito de τ e σ.

Demonstração

i) É imediato que f é τ-saturada por I.4.3.19(ii).

ii) f é contínua: seja $N\in\sigma$ e suponhamos que $f^{-1}[N]\subsetneq I$, então, pelo lema (i), $N=f[f^{-1}[N]]\subsetneq f[I]$, logo, como N é maximal, $f[I]=B$, então $I=f^{-1}[f[I]]=f^{-1}[B]=A$, portanto, $f^{-1}[N]\in\tau$.

iii) f é aberta: seja $M\in\tau$ e suponhamos que $f[M]\subsetneq J$, então, pelo lema (ii), $M=f^{-1}[f[M]]\subsetneq f^{-1}[J]$, logo, como M é maximal, $f^{-1}[J]=A$, então $J=f[f^{-1}[J]]=f[A]=B$, portanto, $f[M]\in\sigma$ ■

I.4.3.21- Observação

Os resultados acima, e essencialmente o corolário I.4.3.6, permitem unificar os diversos Teoremas de Correspondência que aparecem na Álgebra (cf. Rotman [1973] e Gonçalves [1979]).

CAPÍTULO II

LINGUAGENS FORMAIS E EXPRESSABILIDADE

II.1- Estratificação da Linguagem Matemática

A linguagem matemática nasce com o desejo de sistematizar o conhecimento matemático, e a linguagem da prática matemática é muito ampla e rica em poder de expressão; envolve, por exemplo, a linguagem conjuntista (da teoria intuitiva de conjuntos) e a linguagem categorial (da teoria de categorias).

Ao ser empregada usualmente sem a fundamentação adequada, sabe-se que pode conduzir a diversos paradoxos, como o paradoxo de Russell por exemplo (cf. Suppes [1972]). Devemos mencionar que a solução deste paradoxo deu origem à distinção entre conjuntos e classes próprias, distinção que vai ser necessário salientar no estudo das linguagens que introduziremos neste capítulo e no capítulo IV (ver proposição II.5.5.13). Por exemplo, várias vezes usaremos o fato de que somente os conjuntos podem ter assignada uma cardinalidade.

Para evitar tais paradoxos, nós vamos analizar a linguagem matemática, primeiro delimitando o universo dos objetos que pretende-se descrever: neste caso, o universo conjuntista das estruturas matemáticas como foram construídas no capítulo I. E segundo, distinguindo dois pontos de vista para tal descrição:

O ponto de vista microscópico ou interno, que vai nos conduzir, neste capítulo, à construção das Linguagens Formais adequadas a cada tipo de estrutura. Com elas trataremos de atingir os Conceitos Matemáticos, vale dizer as classes de estruturas, que pretendemos expressar.

Finalmente, o ponto de vista macroscópico ou metalinguístico sob o qual analizaremos tanto o relacionamento (conjuntista ou categorial) entre as estruturas, como temos feito no capítulo I, como o relacionamento destas com as linguagens formais que lhes são adequadas.

Os exemplos a seguir vão motivar a construção das linguagens formais e colocar o problema central da expressabilidade: a caracterização ou axiomatização de diversas classes de estruturas nessas linguagens (caracterização e axiomatização serão consideradas como sinônimas enquanto referidas a classes de estruturas).

Diremos então que a linguagem expressa o Conceito se ele, enquanto classe de estruturas, é axiomatizável (ver definição II.5.4.1).

II.1.1- A Classe K_{DOM} dos Domínios de Integridade

Um domínio de integridade é uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A; +^A, \cdot^A; 0^A, 1^A \rangle$ onde $+^A: A^2 \to A$, $\cdot^A: A^2 \to A$ são funções binárias e $0^A, 1^A \in A$ são constantes distinguidas.

As afirmações que faremos acerca de qualquer domínio de integridade não devem depender da natureza dos elementos de cada estrutura, mas sim do seu correspondente tipo de estrutura. Para isso omitiremos o índice A nos símbolos +, •, 0 e 1, considerando-os como nosso alfabeto básico. Este alfabeto também incluirá o símbolo =.

Observe-se que se $\tau_0=<\phi;\ 2,\ 2;\ 2>$ é o tipo de estrutura correspondente, então $K_{DOM} \subsetneq$ Est (τ_0).

Os membros da classe K_{DOM} podem ser caracterizados pelo conjunto de sentenças seguinte (para uma definição de sentença ver II.3.1.5 (iv)):

σ_1: $\neg(0=1)$

σ_2: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x+y)+z=x+(y+z))$

σ_3: $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$

σ_4: $(\forall x)(x+0=x)$

σ_5: $(\forall x)(\exists y)(x+y=0)$

σ_6: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$

σ_7: $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y=y\cdot x)$

σ_8: $(\forall x)(x\cdot 1=x)$

σ_9: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))$

σ_{10}: $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y=0\rightarrow x=0\vee y=0)$.

Podemos dizer também que o conceito de domínio de integridade fica caracterizado pelo conjunto de sentenças acima.

II.1.2- Observações

i) fica claro que, além dos símbolos não lógicos

$+$, $\cdot$, 0 e 1 correspondentes ao tipo de estrutura τ_0, o nosso alfabeto básico deve incluir os símbolos lógicos $\neg$(para negação), $\wedge$(para conjunção), $\vee$(para disjunção), $\rightarrow$(para condicional), $\leftrightarrow$(para bicondicional), $\forall$ e $\exists$ (para os quantificadores), além do símbolo de igualdade $=$ que será considerado um símbolo lógico (ver II.6 para uma discussão acerca das limitações de caracterização da igualdade).

No futuro abreviaremos $\neg(x=y)$ por $x\neq y$.

ii) fica subentendido que nas expressões acima, ao serem interpretadas em cada estrutura particular, as variáveis x, y, z variam, neste caso, sobre os elementos do domínio da estrutura, e não, por exemplo, sobre subconjuntos desse domínio. Tal tipo de variáveis também será considerado parte de nosso alfabeto básico, e a linguagem construída com este alfabeto será chamada de linguagem de 1ª ordem correspondente ao tipo de estrutura τ_0.

II.1.3- Comentário

Esta última observação é muito importante porque nos diz justamente que as variáveis capturam o domínio ontológico do discurso, ie. as expressões falam daquilo que suas variáveis representam (ver a introdução ao capítulo I). Isto está implícito na frase do lógico americano W.V.O. Quine: "Ser é ser o valor de uma variável". Disso pode-se concluir que os objetos que existam dentro de nossas estruturas serão justamente aqueles que nossas variáveis nos permitam construir ou definir na linguagem (ver observação II.4.2.1).

II.1.4- A Classe K_{DIP} dos Domínios de Ideais Principais

Um domínio de ideais principais é um domínio de integridade onde "todo ideal é principal". Temos então que $K_{DIP} \subsetneq K_{DOM}$.

É possível expressar a propriedade entre aspas em termos de nosso alfabeto básico?

Devemos definir primeiro o que é um ideal num domínio de integridade.

Seja $X \subseteq A$, definimos:

$$X \text{ é um ideal} \longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \rightarrow x+y \in X) \wedge (\forall x)(\forall y)(x \in X \rightarrow x \cdot y \in X)$$

Poderemos então caracterizar K_{DIP} como aquelas estruturas de $Est(\tau_0)$ que satisfazem σ_1-σ_{10} além de

σ_{11}: $(\forall X)(X \text{ é um ideal} \rightarrow (\exists x)(\forall y)(y \in X \rightarrow (\exists z)(y = z \cdot x)))$.

II.1.5- Observação

X é um novo tipo de variável que varia agora sobre subconjuntos do domínio da estrutura, entretanto, x, y e z conservam seu status anterior.

Ao introduzir este novo tipo de variável (que representaremos com letras maiúsculas) somos levados a introduzir também o símbolo de pertinência $\in$, que consideraremos como símbolo lógico o qual relaciona elementos de A com subconjuntos de A. Também é usual considerar X como um predicado unário, assim que a expressão $x \in X$ pode ser ecrita como

$X(x)$ evitando o uso do símbolo ϵ.

Nosso alfabeto básico vê-se acrescentado com um novo tipo de variáveis que variam sobre subconjuntos do domínio da estrutura. A linguagem construída com este novo alfabeto será chamada de linguagem de 2ª ordem monádica correspondente ao tipo de estrutura τ_0.

II.1.6- A Classe K_{BFIN} das Álgebras de Boole Finitas

Uma álgebra de Boole é uma estrutura $\mathcal{B}=\langle B; \wedge^B, \vee^B; 0^B, 1^B\rangle$ onde $\wedge^B: B^2 \to B$ e $\vee^B: B^2 \to B$ são funções binárias, e $0^B, 1^B \in B$ são constantes distinguidas.

Deve ser observado que o tipo de estrutura de $\mathcal{B}$ é também τ_0, logo $K_{BFIN} \subsetneq Est(\tau_0)$.

Uma álgebra de Boole é caracterizada por (cf. Bell e Slomson [1969]):

θ_1: $(\forall x)(\forall y)(x\wedge y=y\wedge x)$

θ_2: $(\forall x)(\forall y)(x\vee y=y\vee x)$

θ_3: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z)$

θ_4: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z)$

θ_5: $(\forall x)(\forall y)((x\vee y)\wedge y=y)$

θ_6: $(\forall x)(\forall y)((x\wedge y)\vee y=y)$

θ_7: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z))$

θ_8: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z))$

θ_9: $(\forall x)(\exists y)(x\vee y=1\wedge x\wedge y=0)$.

(por abuso de notação estamos usando o mesmo símbolo para as operações $\wedge$ e $\vee$ da álgebra de Boole, e para as operações lógicas de conjunção e de disjunção).

Podemos dizer que uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ é finita se "toda função de B em B injetora é também sobrejetora". Observamos que esta definição não depende da estrutura Booleana de B e pode-se aplicar a qualquer conjunto.

Seja $f:B\to B$ uma função, então podemos definir:

f é injetora $\longleftrightarrow$ $(\forall x)(\forall y)(f(x)=f(y)\to x=y)$,

f é sobrejetora $\longleftrightarrow$ $(\forall y)(\exists x)(f(x)=y)$,

portanto, baseados nestas expressões teríamos:

B é finito $\longleftrightarrow$ $(\forall f)$(f é injetora $\to$ f é sobrejetora).

A quantificação sobre funções é frequente em matemática, e toda expressão que a envolve é susceptível de ser transformada em outra que envolve quantificação sobre relações binárias, como veremos a seguir, embora na prática não seja necessário.

Se X^2 é uma variável que denota uma relação binária, ie. $X^2 \subseteq B^2$, então podemos definir:

X^2 é função $\longleftrightarrow$ $(\forall x)(\exists y)X^2(x,y)$

$$\wedge(\forall x)(\forall y)(\forall z)(X^2(x,y)\wedge X^2(x,z)\to y=z),$$

X^2 é injetora $\longleftrightarrow$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(X^2(x,z)\wedge X^2(y,z)\to x=y)$,

X^2 é sobrejetora $\longleftrightarrow$ $(\forall y)(\exists x)X^2(x,y)$,

portanto, teríamos que uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ é finita se satisfaz

θ_{10}: $(\forall X^2)(X^2$ é função $\wedge$ X^2 é injetora $\to$ X^2 é so brejetora).

Observamos novamente que esta expressão da finitude não depende do fato de $\mathcal{B}$ ser uma álgebra de Boole (ver também III.1.21).

O uso de variáveis que variam sobre relações binárias (além possivelmente dos outros tipos de variáveis mencionados) acrescentam o poder expressivo da linguagem, e uma tal linguagem é chamada de linguagem de 2ª ordem diádica (correspondente ao tipo de estruturas τ_0).

II.1.6.1- Observações

i) em toda álgebra de Boole é possível definir a operação de complementação $*: x \mapsto x^*$ que as vezes convém explicitar na estrutura:

$$<B; \wedge^B, \vee^B, *^B; 0^B, 1^B>,$$

sendo, neste caso, de tipo $<\phi;\ 2,\ 2,\ 1;\ 2>$.

Neste caso também é conveniente substituir a sentença θ_9 por

θ_9^1: $(\forall x)(x \vee x^* = 1 \wedge x \wedge x^* = 0)$.

ii) uma definição alternativa de finitude é a dada por Dedekind (cf. Suppes[1972, cap. 4]): um conjunto B é finito se "nenhum subconjunto próprio de B é equipotente com B". Aparentemente esta frase é de 2ª ordem monádica, mas a equipotência mencionada envolve a existência de uma função bijetiva, portanto, na realidade é uma expressão de 2ª ordem diádica.

II.1.7- A Classe K_{ARQ} dos Corpos Ordenados Arquimedianos

Um corpo ordenado é uma estrutura $<F; \leqslant^F; +^F, \cdot^F; 0^F, 1^F>$ cujo tipo é $\tau_1=<2; 2, 2; 2>$.

Uma linguagem adequada a esse tipo tem no seu alfabeto básico os símbolos $\leqslant$, $+$, $\cdot$, 0 e 1 onde, por exemplo, $\leqslant$ é um símbolo de relação binária. Faremos uso das abreviaturas seguintes: $x\geqslant y$ por $y\leqslant x$, $x<y$ por $x\leqslant y\wedge x\neq y$, e $x>y$ por $y<x$.

As expressões que caracterizam um corpo ordenado são σ_1-σ_9(em II.1.1), substituindo σ_{10} por

σ^1_{10}: $(\forall x)(x\neq 0\rightarrow(\exists y)(x\cdot y=1))$,

e acrescentando

σ_{12}: $(\forall x)(x\leqslant x)$

σ_{13}: $(\forall x)(\forall y)(x\leqslant y\wedge y\leqslant x\rightarrow x=y)$

σ_{14}: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\leqslant y\wedge y\leqslant z\rightarrow x\leqslant z)$

σ_{15}: $(\forall x)(\forall y)(x\leqslant y\vee y\leqslant x)$

σ_{16}: $(\forall x)(\forall y)(x\leqslant y\rightarrow(\forall z)(x+z\leqslant y+z))$

σ_{17}: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\leqslant y\wedge z\geqslant 0\rightarrow x\cdot z\leqslant y\cdot z)$.

Um corpo ordenado é <u>arquimediano</u> se satisfaz à seguinte propriedade informalmente simbolizada:

"$(\forall x)(x>0\to(\forall y)(\exists n\in\mathbb{N})(n\cdot x>y))$"

onde $n\cdot x=x+\ldots+x$ (n vezes).

O fragmento $(\exists n\in\mathbb{N})(n\cdot x>y)$ pode ser escrito na forma $(\exists n)(n\in\mathbb{N}\wedge n\cdot x>y)$. Agora, lembrando que as variáveis que fazem referência a indivíduos devem se referir a elementos do domínio da estrutura, e observando que $n\cdot x>y$ pode ser escrito como $(n\cdot 1)\cdot x>y$, podemos identificar $\mathbb{N}$ com o conjunto $\mathbb{N}\cdot 1=\{n\cdot 1/n\in\mathbb{N}\}\subseteq F$, que é possível pois todo corpo ordenado é de característica zero. Neste caso, aquele fragmento pode ser reescrito como $(\exists z)(z\in\mathbb{N}\cdot 1\wedge z\cdot x>y)$.

Ainda fica imprecisa, em termos da linguagem adequada ao tipo τ_1, a expressão $z\in\mathbb{N}\cdot 1$. Para salvar esta imprecisão podemos definir $\mathbb{N}\cdot 1$, como subconjunto do corpo F, do seguinte modo: seja $X\subseteq F$, definimos

X é indutivo $\longleftrightarrow$ $0\in X\wedge(\forall x)(x\in X\to x+1\in X)$

então é fácil ver que $\mathbb{N}\cdot 1=\cap\{X/X$ é indutivo$\}$.

Logo temos que:

$$z\in\mathbb{N}\cdot 1\longleftrightarrow(\forall X)(X \text{ é indutivo}\to z\in X).$$

Finalmente, podemos dizer que um corpo ordenado é arquimediano se satisfaz:

σ_{18}: $(\forall x)(x>0\to(\forall y)(\exists z)((\forall X)(X$ é indutivo$\to z\in X)\wedge z\cdot x>y))$.

Fica caracterizada então K_{ARQ}, como subclasse de $Est(\tau_1)$, na linguagem de 2ª ordem monádica adequada ao tipo τ_1.

II.1.8- A Classe K_{AF} dos Corpos Algebricamente Fechados

A frase "para cada $n \geq 1$, todo polimônio de grau n com coeficientes no corpo, tem alguma raiz no corpo" caracteriza o fato de um corpo ser algebricamente fechado, o que pode ser simbolizado informalmente na forma "$(\forall n \geq 1)\phi_n$" onde ϕ_n é a expressão de 1ª ordem:

$(\forall x_0)\ldots(\forall x_n)(x_n \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x_n \cdot y^n + \ldots + x_1 \cdot y + x_0 = 0))$,

entendendo y^k como uma abreviatura de $y \cdot \ldots \cdot y$ (k vezes).

A análise do exemplo anterior para caracterizar $\mathbb{N}$ como subconjunto do corpo não se aplica aqui, porque o n envolvido age como um índice e não pode ser identificado com nenhum elemento do corpo.

Neste caso, a expressão $(\forall n \geq 1)\phi_n$ pode ser substituida por uma coleção infinita de expressões de 1ª ordem $\Sigma = \{\phi_n / n \geq 1\}$, podendo dizer agora que a classe K_{AF} ($\subseteq Est(\tau_0)$) fica caracterizada pelas sentenças σ_1-σ_9,σ^1_{10} e por aquelas que constituem Σ.

II.1.9- A Classe K_{TOR} dos Grupos de Torsão

Um grupo, considerado como estrutura de tipo $\tau_2 = \langle\phi;\ 2, 1;\ 1\rangle$, ie. da forma $\langle G;\ \cdot,\ ^{-1};\ e\rangle$, é caracterizado pelo seguinte conjunto de expressões de 1ª ordem:

ρ_1: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$

ρ_2: $(\forall x)(x\cdot e=x \wedge e\cdot x=x)$

ρ_3: $(\forall x)(x\cdot x^{-1}=e \wedge x^{-1}\cdot x=e)$.

O problema de caracterizar a classe K_{TOR} consiste em formalizar "adequadamente" a expressão informal "$(\forall x)$ $(\exists n\geqslant 1)(x^n=e)$", à luz das análises anteriores.

De fato não têm sentido expressar $\mathbb{N}$ como subconjunto do grupo em consideração, nem é possível particionar a expressão entre aspas numa quantidade infinita de expressões de 1ª ordem.

Uma solução mais plausível é considerar o quantificador "$\exists n\geqslant 1$" como uma disjunção infinita obtendo:

ρ_4: $(\forall x)(x=e \vee x^2=e \vee \ldots \vee x^n=e \vee \ldots)$,

que pode ser abreviado por $(\forall x)\bigvee_{n\geqslant 1}(x^n=e)$.

Poderíamos também intentar uma caracterização mediante a sentença, aparentemente de 2ª ordem, "todo subgrupo cíclico é finito", porém a análise dela mostrará que precisamos igualmente da solução acima.

Em forma análoga, no caso dos corpos algebricamente fechados, a coleção infinita que os caracteriza pode ser simulada como a conjunção infinita $\bigwedge_{n\geqslant 1}\phi_n$, embora neste caso não seja necessário tal grau de sofisticação.

II.1.10- Digressão

A interpretação dos quantificadores universal e existêncial como conjunções e disjunções generalizadas respectivamente, correspondente à interpretação histórica original dos quantificadores, dada por exemplo por Peirce no final do século passado, tornando-se menos artificiais.

Vale mencionar que os quantificadores foram introduzidos na lógica e na matemática em 1879 pelo lógico alemão G. Frege (cf. W. e M. Kneale[1962]). Posteriormente Hilbert e Ackermann [1928] distinguiram pela primeira vez as linguagens de 1ª e 2ª ordens.

As linguagens que permitem conjunções infinitas (não só enumeráveis) são chamadas de linguagens infinitárias. A introdução delas em forma operativa na matemática e na lógica, não aconteceu antes da década de 50, por Tarski e Karp, devido à disputa entre as correntes formalista e intuicionista da filosofia da matemática, em torno da autenticidade do infinito atual, em contra posição ao infinito potencial, no pensamento matemático.

O uso de sentenças de comprimento infinito na matemática tem tanta validade como o uso das séries formais de potências na álgebra.

As linguagens infinitárias (que incluem, de forma rigorosa, a linguagem de 1ª ordem) serão estudadas com certo detalhe nesta tese (ver capítulo IV). A linguagem que permite conjunções e disjunções enumeráveis é chamada $L_{\omega_1\omega}$ e a razão de tal notação será apresentada depois.

II.1.11- Observação

Uma classe de estruturas pode ser caracterizada em duas linguagens distintas. Por exemplo, a linguagem infinitária $L\omega_1\omega$, introduzida no exemplo acima, permite expressar a propriedade que caracteriza o conceito de corpo ordenado arquimediano do seguinte modo:

$$(\forall x)(x>0\rightarrow(\forall y)\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(n\cdot x>y)).$$

II.1.12- A Classe K_{BOR} dos Conjuntos Bem Ordenados

Um conjunto bem ordenado é um conjunto A munido de uma ordem total $\leqslant^A$ onde "todo subconjunto não vazio tem elemento mínimo". O tipo de estrutura é $\tau_3=<2;\ \phi;\ 0>$.

Para $X\subseteq A$ podemos definir:

$$x \text{ é mínimo de } X \longleftrightarrow x\in X\wedge(\forall y)(y\in X\rightarrow x\leqslant y),$$

portanto, a propriedade entre aspas pode ser simbolizada por

$$\mu_1:\ (\forall X)((\exists x)(x\in X)\rightarrow(\exists x)(x \text{ é mínimo de } X)),$$

que é uma expressão de 2ª ordem monádica.

A razão de colocar este exemplo é que ele vai nos permitir introduzir um novo tipo de linguagem infinitária: aquela que permite quantificações sobre um número infinito de variáveis. Para isto devemos expressar a condição de A ser um conjunto bem ordenado em forma equivalente: "não existe nenhuma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em A estritamente decrescente", ie.

$$\mu_2: \neg(\exists x_1)\ldots(\exists x_m)\ldots \bigwedge_{n\geq 1}(x_{n+1}<x_n).$$

A linguagem infinitária que, além de permitir conjunções e disjunções enumeráveis, permite quantificações sobre uma quantidade enumerável de variáveis, chama-se $L\omega_1\omega_1$.

II.1.12.1- Observação

Em $L\omega_1\omega_1$ é expressável a finitude mediante a sentença seguinte:

$$\mu_3: \neg(\exists x_1)\ldots(\exists x n)\ldots \bigwedge_{1\leq i<j}(x_i\neq x_j).$$

II.1.13- A Classe K_{SEP} dos Espaços (Topológicos) Separáveis

Um espaço topológico em sentido amplo, devemos lembrar, é um estrutura bissortida $<X, \tau; \in>$.

Correspondendo aos dois domínios da estrutura devemos introduzir em nosso alfabeto básico dois tipos de variáveis de 1ª ordem: x, y,... para elementos de X e U, V,... para elementos de τ.

Entendemos por <u>separabilidade</u> a existência de um subconjunto enumerável de X, denso respecto da coleção τ, que pode ser expresso mediante a seguinte sentença:

μ_4: $(\exists Z)[Z$ é enumerável $\wedge$ $(\forall x)(\forall U)(x\in U\rightarrow(\exists y)(y\in Z\wedge y\in U))]$

onde

$$Z \text{ é enumerável} \longleftrightarrow (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\ldots[\bigwedge_{k\geqslant 1}(x_k\in Z)\wedge\bigwedge_{1\leqslant i<j}(x_i\neq x_j) \wedge (\forall y)(y\in Z\rightarrow\bigvee_{k\geqslant 1}(y=x_k))]$$

Deve ser observado que μ_4 é uma sentença globalmente bissortida, de 2ª ordem monádica e infinitária na linguagem $L_{\omega_1\omega_1}$, com respeito ao domínio X, mas só de 1ª ordem com respeito ao domínio τ. Além disso, a rigor devem-se distinguir formalmente as pertinências "$y\in Z$" e "$y\in U$", por exemplo, onde a segunda delas é a explicitada na estrutura, entretanto a primeira corresponde ao alfabeto básico de 2ª ordem, e poderia ser eliminada como foi sugerido na observação II.1.5.

II.1.14- A Classe K_{BE} dos Espaços com Base Enumerável

K_{BE} está formado pelos espaços $<X, \sigma; \in>$ onde σ é uma base enumerável para alguma topologia sobre X.

Facilmente pode-se conferir que o fato de ser σ uma base pode ser expresso mediante as sentenças seguintes (com as notações do exemplo anterior):

θ_{11}: $(\forall x)(\exists U)(x\in U)$

θ_{12}: $(\forall U)(\forall V)(\forall x)(x\in U\wedge x\in V\rightarrow(\exists W)(x\in W\wedge$

$\wedge(\forall y)(y\in W\rightarrow y\in U\wedge y\in V))$,

esta última obviamente pode ser abreviada com a notação usual obtendo

$$\theta^{1}_{12}:\ (\forall U)(\forall V)(\forall x)(x\in U\cap V\rightarrow(\exists W)(x\in W\wedge W\subseteq U\cap V)).$$

Além disso, temos que acrescentar, por razões técnicas que explicaremos no apêndice deste capítulo, a seguinte sentença, que relaciona a igualdade $=^{\sigma}$ do domínio σ com a relação $\in$, e que, em essência, é o axioma de extensionalidade da teoria de conjuntos:

$$\theta_{13}:\ (\forall U)(\forall V)(U=^{\sigma}V\longleftrightarrow(\forall x)(x\in U\longleftrightarrow x\in V)).$$

Resta expressar o fato de que σ é enumerável. Para isso, em contraste com o exemplo anterior, vamos proceder em 2ª ordem e informalmente, mas de tal modo que fique transparente a formalização final.

σ é enumerável $\longleftrightarrow |\sigma|=\aleph_0\longleftrightarrow|\sigma|\geq\aleph_0\wedge|\sigma|<\aleph_1\longleftrightarrow$(não $|\sigma|<\aleph_0$) $\wedge$ (não $|\sigma|\geq\aleph_1$).

A expressão $|\sigma|<\aleph_0$ diz que σ é finito, o que pode ser formalizado seguindo o exemplo II.1.6.

$|\sigma|\geq\aleph_1\longleftrightarrow$ existe um subconjunto infinito, de σ que não é equipotente com σ.

Para formalizar esta expressão introduziremos uma variável Z de 2ª ordem monádica para subconjuntos de σ obtendo (sempre informalmente):

$|\sigma|\geq\aleph_1\longleftrightarrow(\exists Z)(|Z|\geq\aleph_0$ e não $(\exists f)(f$ é bijeção e dom $f=Z$ e im $f=\sigma))$.

Existe uma expressão muito interessante, desde o ponto de vista teórico, da enumerabilidade de um conjunto, dada por Boolos e Jeffrey [1974, pag. 201]:

II.1.14.1- Seja A um conjunto, x e z variáveis para elementos de A, X uma variável para subconjuntos de A e f uma variável para funções de A em A.

Denotamos com Ind(z,f) a expressão "o par(z,f) satisfaz o axioma de indução" que pode ser definido como:

$\mathrm{Ind}(z,f) \longleftrightarrow (\forall X)(z\in X \wedge (\forall x)(x\in X \rightarrow f(x)\in X) \rightarrow (\forall x)\, x\in X)$.

Em termos disto tem-se:

$|A| = \aleph_0 \longleftrightarrow (\exists z)(\exists f)\,\mathrm{Ind}(z,f)$.

II.1.14.2-Asserção

Deve-se observar que as três expressões de enumerabilidade apresentadas são independentes da natureza particular do domínio analizado e da estrutura particular de que forma parte. Só envolve variáveis adequadas e símbolos lógicos, entre eles a igualdade = e a pertinência $\in$.

Estes requerimentos sempre serão importantes para a expressabilidade da cardinalidade do domínio de uma estrutura.

II.2- Categoricidade

Um dos ideais da formalização, pelo menos historicamente, é poder descrever, caracterizar ou axiomatizar, em forma categórica, ie. salvo isomorfismo, as principais estruturas da matemática. Tal foi a motivação, por exemplo, para a axiomatização da aritmética por Peano, e da geometria Euclideana por Hilbert, no final do século passado. Ambas as axiomatizações categóricas foram feitas, em terminologia moderna, numa linguagem de 2ª ordem monádica.

Intuitivamente podemos dizer que um conjunto de sentenças numa linguagem dada é <u>categórico</u> se as estruturas que ele descreve são todas isomorfas.

A seguir apresentaremos os dois exemplos mencionados de forma sucinta e com um enfoque atual.

II.2.1- Estruturas de Peano

Uma estrutura $\langle A; \sigma^A; 0^A\rangle$ onde $\sigma^A: A \to A$ é uma função e $0^A \in A$, é chamada uma <u>estrutura de Peano</u> se σ^A é injetiva, 0^A não pertence à imagem de σ^A e o par $(0^A, \sigma^A)$ satisfaz o <u>axioma de indução</u>, ie. Ind $(0^A, \sigma^A)$ (ver II.1.14.1). Um exemplo é a estrutura dos números naturais $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; \sigma^{\mathbb{N}}; 0^{\mathbb{N}}\rangle$ munida da função sucessor $\sigma^{\mathbb{N}}(n) = n+1$.

Tais propriedades podem ser expressas na linguagem de 2ª ordem monádica (adequada ao tipo de estrutura dado) mediante as seguintes sentenças:

η_1: $(\forall x)\sigma(x)\neq 0$

η_2: $(\forall x)(\forall y)(\sigma(x)=\sigma(y)\rightarrow x=y)$

η_3: $(\forall X)(0\in X\wedge(\forall x)(x\in X\rightarrow\sigma(x)\in X)\rightarrow(\forall x)x\in X)$.

Estas sentenças são conhecidas com o nome de axiomas de Peano da Aritmética de 2ª ordem. Dedekind provou que estes axiomas caracterizam em forma categórica a estrutura dos números naturais η (cf. Ebbinghaus, Flum e Thomas [1984]).

II.2.2- Teorema de Dedekind

Toda estrutura $<A;\ \sigma^A;\ 0^A>$ que satisfaça η_1, η_2 e η_3 é isomorfa a η.

Demonstração. Definimos por recursão $\phi:\mathbb{N}\rightarrow A$ dada por

$$\begin{cases}\phi(0^{\mathbb{N}})=0^A\\ \phi(\sigma^{\mathbb{N}}(n))=\sigma^A(\phi(n))\end{cases}\qquad \ldots.(*)$$

ou, em forma simples:

$$\begin{cases}\phi(0)=0^A\\ \phi(n+1)=\sigma^A(\phi(n)).\end{cases}$$

Basta provar que ϕ é uma bijeção pois as condições (*) provarão que ϕ é um isomorfismo entre ambas as estruturas.

i) ϕ é injetiva: por indução em n provaremos que $\forall m\in\mathbb{N};\ m\neq n\Longrightarrow\phi(m)\neq\phi(n)$.

Caso 1. n=0: se $m\neq 0$, então $m=k+1$, logo $\phi(m)=\phi(k+1)=\sigma^A(\phi(k))$, mas por η_1, $\sigma^A(\phi(k))\neq 0^A$, então $\phi(m)\neq 0^A$, ie. $\phi(m)\neq\phi(0)$.

Caso 2. $n>0$: seja $m\neq n+1$. Se $m=0$, então $0\neq n+1$, logo, por η_1, $\phi(0)=0^A\neq\sigma^A(\phi(n))=\phi(n+1)$.

Se $m\neq 0$, então $m=k+1$, ie. temos $k+1\neq n+1$, logo, $k\neq n$; agora, por hipótese indutiva, $\phi(k)\neq\phi(n)$, logo, por η_2, $\sigma^A(\phi(k))\neq\sigma^A(\phi(n))$, ie. $\phi(k+1)\neq\phi(n+1)$, portanto, $\phi(m)\neq\phi(n+1)$.

ii) ϕ é sobrejetiva: por indução em A provaremos que $\phi(\mathbb{N})=A$ (observar que como $\phi(\mathbb{N})$ é um subconjunto de A, é valido aplicar indução a $\phi(\mathbb{N})$ por η_3).

Caso 1. $0^A\in\phi(\mathbb{N})$ pois $0^A=\phi(0)$.

Caso 2. Se $x\in\phi(\mathbb{N})$, então existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x=\phi(n)$, logo, $\sigma^A(x)=\sigma^A(\phi(n))=\phi(n+1)$, ie. $\sigma^A(x)\in\phi(\mathbb{N})$. Portanto, por η_3: para todo $x\in A$, $x\in\phi(\mathbb{N})$, ie. $\phi(\mathbb{N})=A$ ∎

II.2.3- Observações

i) ao provar que ϕ é injetiva provou-se, sem usar o axiomo de 2ª ordem η_3, que η pode ser mergulhado em qualquer estrutura de Peano. Precisamente veremos no capítulo III (ver III.4.1.4 ex. 1) que se restringimos os axiomas de Peano a uma linguagem de 1ª ordem, existirão estruturas de Peano não isomorfas a η, embora η esteja mergulhado sempre nelas.

ii) η pode ser caracterizado também categoricamente na linguagem infinitária $L\omega_1\omega$: basta substituir o axiomo η_3 por

$$\eta_3': \ (\forall x)\bigvee_{n\geq 0}(x=\sigma^{(n)}(0))$$

onde $\sigma^{(0)}(0)=0$ e $\sigma^{(n+1)}(0)=\sigma(\sigma^{(n)}(0))$.

Com efeito, definindo $\phi:\mathbb{N}\to A$ por $\phi(n)=(\sigma^A)^{(n)}(0^A)$ temos um isomorfismo.

II.2.4- O Corpo Ordenado Completo dos Números Reais

Em II.1.7 descrevemos, numa linguagem de 1ª ordem, os corpos ordenados.

Um corpo ordenado é dito <u>completo</u> se satisfaz o conhecido <u>axioma do supremo</u> que passamos a formalizar.

Seja $\langle K; \leqslant^k; +^k, \cdot^k; 0^k, 1^k\rangle$ um corpo ordenado, $X\subseteq K$ e $y, z \in K$, definimos:

y é limite superior de $X \longleftrightarrow (\forall x)(x\in X\to x\leqslant y)$,

z é supremo de $X \longleftrightarrow z$ é limite superior de X

$\wedge\ (\forall y)(y$ é limite superior de $X\to z\leqslant y)$.

O axioma do supremo pode ser expresso mediante a seguinte sentença:

σ: $(\forall X)((\exists x)x\in X\to(\exists z)(z$ é supremo de $X))$.

O exemplo mais importante de corpo ordenado é o corpo ordenado $\mathcal{R}=\langle\mathbb{R};\leqslant^{\mathbb{R}};\ldots\rangle$ dos números reais. Veremos a seguir que, salvo isomorfismo, é o único corpo ordenado completo.

Em um corpo ordenado, a partir da ordem $\leqslant$ pode ser definido o <u>valor absoluto</u> na forma usual: para $x\in K$,

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{se } x\geqslant 0\\ -x, & \text{se } x<0\end{cases}$$

logo, podem ser definidos os conceitos de <u>sequência de Cauchy</u>

e de <u>sequência convergente</u> na forma usual: "para todo $\varepsilon>0$ com $\varepsilon\in K$..."

A partir daí pode-se provar metamatematicamente os seguintes fatos cujas demonstrações omitiremos (cf. Jacy Monteiro[1971]):

a) todo corpo ordenado K é de característica zero e o corpo primo K_0 de K é ordenadamente isomorfo a $\mathbb{Q}$ (o corpo dos números racionais).

b) K é completo $\longleftrightarrow$ K é arquimediano e toda sequência de Cauchy é convergente.

c) K é arquimediano $\longleftrightarrow$ todo elemento de K é limite de uma sequência de elementos de K_0.

II.2.5- **Proposição**

Se K é um corpo ordenado completo então $K\cong\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\phi_0:K_0\to\mathbb{Q}$ o isomorfismo de ordem garantido por (a).

Como K é completo, então, por (b) K é arquimediano, logo, por (c), para $x\in K$ existe uma sequência $\{x_n\}\subseteq K_0$ tal que $x=\lim x_n$.

Podemos definir então $\phi:K\to\mathbb{R}$ como: para $x\in K$, $\phi(x)=\lim \phi_0(x_n)$.

É fácil ver que esta definição não depende da escolha da sequência em K_0 que converge a x.

i) ϕ é um monomorfismo de corpos: basta provar que ϕ é um homomorfismo não nulo.

Com efeito, se $x=\lim x_n$ e $y=\lim y_n$ com $\{x_n\}\subseteq K_0$ e $\{y_n\}\subseteq K_0$, então $x+y=\lim (x_n+y_n)$, logo $\phi(x+y)=\lim \phi_0(x_n+y_n)=\lim \phi_0(x_n)+\lim \phi_0(y_n)=\phi(x)+\phi(y)$.

Analogamente, $\phi(x\cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$, e além disso, $\phi(1)=\phi_0(1)=1$.

ii) ϕ é sobre: seja $z\in\mathbb{R}$, então existe $\{r_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ tal que $z=\lim r_n$, logo, como ϕ_0 é um isomorfismo entre K_0 e $\mathbb{Q}$, existe $\{x_n\}\subseteq K_0$ tal que $\phi_0(x_n)=r_n$, além disso, como $\{r_n\}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$ por ser convergente, temos que $\{x_n\}$ é de Cauchy em K_0.

Agora, como K é completo, por (b), $\{x_n\}$ é convergente em K, ie. existe $x\in K$ tal que $x=\lim x_n$. Logo, $\phi(x)=\lim \phi_0(x_n)=\lim r_n=z$ ■

II.2.6- Observação

É consequência da demonstração acima que todo corpo ordenado arquimediano é isomorfo a um subcorpo de $\mathbb{R}$.

II.2.7- Asserção

A categoricidade de $\mathbb{R}$ na linguagem de 2ª ordem monádica faz com que $\mathbb{R}^n$ seja também caracterizável categoricamente na mesma linguagem, e em consequência, a geometria Euclideana (n-dimensional) modelada cartesianamente torna-se categórica nessa linguagem.

A aspiração de categoricidade é atingida em forma um tanto geral pela linguagem infinitária $L\omega_1\omega$, mediante o que se conhece com o nome de Teorema do Isomorfismo de Scott, que a seguir enunciaremos.

"Se $\mathfrak{A}$ é uma estrutura enumerável e com no máximo uma quantidade enumerável de relações, funções e constantes, então existe uma sentença na linguagem $L\omega_1\omega$ correspondente ao tipo de estrutura de $\mathfrak{A}$, que caracteriza $\mathfrak{A}$ salvo isomorfismo" (cf. Keisler[1971]).

Pelo contrário, veremos no capítulo III que, na linguagem de 1ª ordem, nenhuma estrutura infinita pode ser caracterizada, salvo isomorfismo, em forma categórica (ver III. 4.1.4 corolário 2).

Para tratar estes e outros resultados que relacionam estruturas com linguagens formais, devemos primeiro construir em forma rigorosa as linguagens apropriadas para depois definir um funtor semântico que relacione estruturas com expressões dessas linguagens. Tal funtor será chamado de relação de satisfação, e as propriedades que decorram dele serão chamadas de propriedades de teoria de modelos. Uma delas é a categoricidade, já analizada informalmente. Outras como as de isomorfismo ou compacidade, por exemplo, serão analizadas neste e no próximo capítulo.

II.3- As Linguagens $L^1(\tau)$ e $L^2(\tau)$

Fixemos um tipo de estrutura unissortido τ. Uma estrutura deste tipo é da forma I.1.3.

Vamos construir linguagens de 1ª e 2ª ordens adequadas ao tipo τ. É claro que os símbolos que denotem relações, funções e constantes não devem depender de nenhuma estrutura particular considerada.

Ao definirmos uma linguagem adequada ao tipo τ estamos criando a possibilidade de expressar diversas classes de estruturas desse tipo

Os símbolos que denotam relações (chamados também de símbolos de predicado), funções e constantes vão agir como nomes das relações, operações e constantes da (infra) estrutura correspondente.

II.3.1- $L^1(\tau)$

II.3.1.1- Alfabeto Básico

- símbolos de predicado: R_i para cada $i \in I$.
- símbolos de função: F_j para cada $j \in J$.
- símbolos de constantes: c_k para cada $k \in K$.
- variáveis (de 1ª ordem): $v, x, y, z, \ldots$ com ou sem subíndices, numa quantidade enumerável.
- símbolos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ e $=$.

(o uso dos parênteses vai-se supor subentendido).

A definição recursiva das categorias sintáticas a seguir será muito importante para as demonstrações por indução sobre a complexidade das expressões da linguagem. Tal indução será chamada de <u>indução semiótica</u>.

II.3.1.2- Termos

A classe Ter dos termos da linguagem é a menor classe satisfazendo:

i) as variáveis (de 1ª ordem) e os símbolos de constante são termos.

ii) se $t_1,\ldots,t_n \in$ Ter e F_j é um símbolo de função n-ário, então $F_j(t_1,\ldots,t_n) \in$ Ter.

II.3.1.3- Fórmulas Atômicas

São fórmulas atômicas as seguintes:

i) $t_1=t_2$ onde t_1, $t_2 \in$ Ter.

ii) $R_i(t_1,\ldots,t_n)$ onde R_i é um símbolo de predicado n-ário e $t_1,\ldots,t_n \in$ Ter.

II.3.1.4- Fórmulas

A classe For das fórmulas da linguagem é a menor classe satisfazendo:

i) as fórmulas atômicas são fórmulas.

ii) se ϕ, $\psi \in$ For, então $\neg\phi$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\longleftrightarrow\psi)\in$For.

iii) se $\phi\in$For e v é uma variável, então $(\forall v)\phi$, $(\exists v)\phi\in$For.

II.3.1.5- Terminologia

i) $L^1(\tau)$ vai ser considerada como a união do alfabeto básico com Ter e For. Devemos observar que $L^1(\tau)$ tem a mesma cardinalidade que seu alfabeto básico, sendo então $L^1(\tau)$ um conjunto e não uma classe própria.

ii) para concordar com a terminologia usual, diremos que a ocorrência de uma variável numa fórmula é <u>ligada</u> se aparece no alcance de um quantificador que quantifica essa variável, ie.

$$\ldots(Qv)\phi(\ldots,v,\ldots)\ldots$$

onde Q é $\forall$ ou $\exists$. A ocorrência de uma variável numa fórmula é <u>livre</u> se não é ligada. Uma variável está livre numa fórmula se tem alguma ocorrência livre nela. A ocorrência de uma variável num termo é sempre livre.

iii) denotaremos com $t\,(x_1,\ldots x_n)$ um termo, e com $\phi(x_1,\ldots x_n)$ uma fórmula, cujas variáveis livres estão contidas no conjunto $\{x_1,\ldots x_n\}$.

iv) um termo sem variáveis livres é dito um <u>termo fechado</u>, e uma fórmula sem variáveis livres é dita uma sen tença. As sentenças serão denotadas com σ, θ, η,... e a coleção delas com $L^1_S(\tau)$.

v) $L^1(\tau)$ é chamada de linguagem de 1ª ordem adequada ao tipo τ.

II.3.2- $L^2(\tau)$

II.3.2.1- Alfabeto Básico

O mesmo de $L^1(\tau)$ acrescentado com:

- variáveis (de 2ª ordem) monádicas: X^1, Y^1,..., ou X, Y,... com ou sem subíndices numa quantidade enumerável.
- variáveis (de 2ª ordem) diádicas: X^2, Y^2,... com ou sem subíndices numa quantidade enumerável.
- em geral, para cada $n \geqslant 1$, variáveis (2ª ordem) n-ádicas: X^n, Y^n,... com as mesmas características mencionadas.

II.3.2.2- Termos

Os mesmos que $L^1(\tau)$, (observar que as variáveis envolvidas são só as de 1ª ordem, ie. não definimos termos com variáveis de 2ª ordem).

II.3.2.3- Fórmulas Atômicas

As mesmas que $L^1(\tau)$ acrescentadas com:

iii) para cada $n \geq 1$, $X^n(t_1, \ldots t_n)$, onde X^n é uma variável de 2ª ordem n-ádica e $t_1, \ldots t_n \in$ Ter.

II.3.2.4- Fórmulas

As mesmas cláusulas que para $L^1(\tau)$ mais:

iv) se $\phi \in$ For e X^n é uma variável de 2ª ordem n-ádica, então $(\forall X^n)\phi$, $(\exists X^n)\phi \in$ For

II.3.2.5- Terminologia

$L^2(\tau)$ é chamada de linguagem de 2ª ordem total adequada ao tipo τ. Se restringimos as variáveis de 2ª ordem até as n-ádicas para um n fixo, obtemos a linguagem de 2ª ordem n-ádica.

No caso n=1 às vezes é conveniente introduzir como um novo símbolo lógico, o símbolo de pertinência usual $\in$, acrescentando como fórmulas atômicas as expressões $t \in X$ onde t é um termo e X é uma variável (de 2ª ordem) monádica.

$L^2_S(\tau)$ será a coleção de sentenças de $L^2(\tau)$. Como casos especiais usaremos $L^2_M(\tau)$ e $L^2_D(\tau)$ para denotar os fragmentos monádico e diádico respectivamente de $L^2(\tau)$.

$L^2(\tau)$ (assim como $L^2_S(\tau)$) é um conjunto cuja cardinalidade é a mesma que a de seu alfabeto básico.

II.3.2.6- Linguagem de 2ª Ordem Monádica para Estruturas Bissortidas

A seguir apresentamos, como um exemplo importante para posteriores análises, a construção de uma linguagem adequada às estruturas bissortidas da forma I.2.3. (S denota o conjunto das sortes da estrutura).

Alfabeto Básico

- símbolos de predicado: R_i^σ para cada $i \in I$ e $\sigma \in S$.
- símbolos de função: F_j^σ para cada $j \in J$ e $\sigma \in S$.
- o- constantes : c_k para cada $k \in K$.
- 1-constantes: d_ℓ para cada $\ell \in L$.
- o-variáveis de 1ª ordem: x, y,...para elementos de A_0
- 1-variáveis de 1ª ordem: u, v,...para elementos de A_1
- o-variáveis de 2ª ordem: X,...para subconjuntos de A_0
- 1-variáveis de 2ª ordem: W,...para subconjuntos de A_1
- símbolos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\overset{0}{=}$ e $\overset{1}{=}$.

s- Termos (s=0,1)

i) as s-constantes e as s-variáveis de 1ª ordem são s-termos

ii) se F_j^σ é um símbolo de função de sorte $\sigma = (s_1,\ldots,s_n,s)$ e t_k é um s_k-termo ($k=1,\ldots,n$), então $F_j^\sigma(t_1,\ldots t_n)$

é um s-termo.

Fórmulas Atômicas

i) se t_1 e t_2 são s-termos (s=0,1), então $t_1 =^s t_2$ e uma fórmula atômica.

ii) se R_i^σ é um símbolo de predicado de sorte $\sigma=(s_1,\ldots s_n)$ e t_k é um s_k-termo (k=1,...n), então $R_i^\sigma(t_1,\ldots t_n)$ é uma fórmula atômica.

iii) se X é uma s-variável de 2ª ordem e t é um s-termo (s=0,1), então X (t) é uma fórmula atômica.

Fórmulas

As mesmas cláusulas dadas em II.3.2.4 restringidas ao caso monádico.

Veremos, no capítulo III, o teorema fundamental de Łos (para ultraprodutos) demonstrado para o caso das linguagens de 1ª ordem adequadas às estruturas bissortidas, assim como a análise de uma possível extensão ao caso monádico de 2ª ordem (ver a seção III.2).

II.4- Semântica

II.4.1- Assignação de Valores às Variáveis

Daqui para frente neste capítulo só consideraremos o caso unissortido.

Vamos supor que as variáveis de 1ª ordem estão enumeradas e constituem o conjunto $\overset{0}{Var}=\{v_0,\ldots v_1,\ldots v_k,\ldots\}$. Analogamente, para cada $n\geqslant 1$, $\overset{n}{Var}=\{X_0^n,\ldots X_k^n,\ldots\}$ é o conjunto de variáveis de 2ª ordem n-ádicas.

II.4.1.1- Definição

Uma <u>interpretação</u> das variáveis na estrutura $\mathfrak{A}$ ou uma <u>assignação de valores</u> às variáveis nos universos de variação respectivos de $\mathfrak{A}$, é uma função α definida na união

$$Var=\bigcup_{n\geqslant 0}\overset{n}{Var}\text{, onde para cada } k\geqslant 0:$$

$$\alpha(v_k)=a_k\in A \text{ e } \alpha(X_k^n)=S_k^n\in P(A^n) \text{ para } n\geqslant 1.$$

A partir daí podemos definir por indução semiótica a interpretação dos termos da linguagem na estrutura. Observar que os termos de $L^1(\tau)$ e $L^2(\tau)$ coincidem.

II.4.2- Definição

Se $t\in Ter$ e α é uma assignação na estrutura $\mathfrak{A}$, definimos a <u>interpretação de t em $\mathfrak{A}$ como</u>:

$$t^{\alpha}=^{A}\begin{cases} c_k^A, \text{ se } t \text{ é } c_k \\ \alpha(v_k), \text{ se } t \text{ é } v_k \\ F_j^A(t_1^{\alpha},\ldots t_n^{\alpha}), \text{ se } t \text{ é } Fj\ (t_1,\ldots,t_n). \end{cases}$$

II.4.2.1- Observação

Para todo termo t de $L^1(\tau)$ ou de $L^2(\tau)$ temos que t^α é sempre um elemento de A. Portanto, α induz uma aplicação $\alpha: Ter \to A$ dada por $\alpha(t)=t^\alpha$. Os elementos $a \in A$ para os quais existe um termo fechado t tal que $t^\alpha =^A a$ são ditos <u>definíveis</u> na linguagem. É claro, por definição, que tal representação, sendo t um termo fechado, não depende da assignação α, ie. se t é fechado, então $t^\alpha =^A t^\beta$ para quaisquer assignações α e β. É claro também, por razões de cardinalidade, que em geral nem todo elemento de A é definível na linguagem.

II.4.2.2- Proposição

Se $f: \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ e α é uma assignação em $\mathcal{A}$, então $f_\circ\alpha$ é uma assignação em $\mathcal{B}$ e $f(t^\alpha) =^B t^{f_\circ\alpha}$ para todo termo t de $L^1(\tau)$ ou de $L^2(\tau)$.

Demonstração

É imediato que $f_\circ\alpha$ é uma assignação em $\mathcal{B}$. Para provar a segunda parte procedemos por indução semiótica:

i) t é $c_k \Rightarrow t^\alpha =^A c_k^A \Rightarrow f(t^\alpha) =^B f(c_k^A) =^B c_k^B =^B t^{f_\circ\alpha}$.

ii) t é $v_k \Rightarrow t^\alpha =^A \alpha(v_k) \Rightarrow f(t^\alpha) =^B f_\circ\alpha(v_k) =^B t^{f_\circ\alpha}$.

iii) t é $F_j(t_1, \ldots t_n)$ e como hipótese indutiva $f(t_k^\alpha) =^B t_k^{f_\circ\alpha}$ $(k=1,\ldots n) \Rightarrow t^\alpha =^A F_j^A(t_1^\alpha, \ldots t_n^\alpha) \Rightarrow f(t^\alpha) =^B f(F_j^A(t_1^\alpha, \ldots t_n^\alpha)) =^B F_j^B(f(t_1^\alpha), \ldots, f(t_n^\alpha)) =^B F_j^B(t_1^{f_\circ\alpha}, \ldots, t_n^{f_\circ\alpha}) =^B t^{f_\circ\alpha}$ ■

II.4.3- A Relação de Satisfação em $L^1(\tau)$ e em $L^2(\tau)$

Uma das partes mais importantes da teoria de modelos, e na qual se fundamenta a semântica das linguagens formais, é a definição da relação de satisfação, dada por Tarski, entre estruturas de um certo tipo de similaridade e expressões de uma linguagem adequada a esse tipo.

Para as definições a seguir precisamos do seguinte acordo:

$$\text{se } a\in A,\quad \alpha\left[\frac{v_k}{a}\right](v_i)=\begin{cases}\alpha(v_i), & \text{se } i\neq k\\ a, & \text{se } i=k,\end{cases}$$

$$\text{se } S\subseteq A^n,\quad \alpha\left[\frac{X_k^n}{S}\right](X_i^n)=\begin{cases}\alpha(X_i^n), & \text{se } i\neq k\\ S, & \text{se } i=k,\end{cases}$$

$\alpha[\ldots]$ é a assignação que coincide com α nas variáveis não especificadas no colchete, e toma o valor indicado, na variável dada.

II.4.3.1- Definição

Se ϕ e ψ são fórmulas em $L^1(\tau)$, $\mathfrak{A}\in Est(\tau)$ e α é uma assignação em $\mathfrak{A}$, definimos a relaçao de satisfação "$\mathfrak{A}\models\phi[\alpha]$" por indução semiótica do seguinte modo (tal relação pode ser lida como "ϕ é satisfeita pela assignação α em $\mathfrak{A}$"):

i) se ϕ é uma fórmula atômica:

Caso 1. se ϕ é $t_1=t_2$, então

$\mathfrak{A}\models(t_1=t_2)[\alpha]\longleftrightarrow t_1^\alpha =^A t_2^\alpha$.

Caso 2. se ϕ é $R_i\ (t_1,\ldots tn)$, então

$\mathfrak{A} \models R_i\ (t_1,\ldots tn)[\alpha] \longleftrightarrow R_i^A\ (t_1^\alpha,\ldots,t_n^\alpha)$

ii) se a fórmula não é atômica:

$\mathfrak{A} \models (\neg\phi)[\alpha] \longleftrightarrow$ não $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha]$ (ou $\mathfrak{A} \not\models \phi[\alpha]$),

$\mathfrak{A} \models (\phi\wedge\psi)[\alpha] \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \models \phi[\alpha]$ e $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha])$,

$\mathfrak{A} \models (\phi\vee\psi)[\alpha] \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \models \phi[\alpha]$ ou $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha])$,

$\mathfrak{A} \models (\phi\rightarrow\psi)[\alpha] \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \models \phi[\alpha] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\alpha])$,

$\mathfrak{A} \models (\phi\longleftrightarrow\psi)[\alpha] \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \models \phi[\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\alpha])$.

iii) para fórmulas com quantificadores:

$\mathfrak{A} \models (\forall v_k)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para todo $a \in A$: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{v_k}{a}]]$,

$\mathfrak{A} \models (\exists v_k)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para algum $a \in A$: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{v_k}{a}]]$.

II.4.3.2- Definição

Se ϕ e ψ são fórmulas de $L^2(\tau)$, devemos acrescentar à definição anterior:

em (i):

Caso 3. se ϕ é $X_k^n(t_1,\ldots tn)$ onde $X_k^n \in Var^n$,

$\mathfrak{A} \models X_k^n(t_1,\ldots,tn)[\alpha] \longleftrightarrow \alpha(X_k^n)(t_1^\alpha,\ldots,t_n^\alpha)$.

em (iii):

$\mathfrak{A} \models (\forall X_k^n)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para todo $S \subseteq A^n$: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{X_k^n}{S}]]$,

$\mathfrak{A} \models (\exists X_k^n)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para algum $S \subseteq A^n$: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{X_k^n}{S}]]$.

II.4.4.- Asserção

Se $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ é uma fórmula em $L^1(\tau)$ e α, β duas assignações que coincidem no conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$, podemos provar facilmente que

$$\mathfrak{A} \models \phi[\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta]$$

O mesmo acontece se $\phi(x_1,\ldots,x_n,X_1^{n_1},\ldots,X_k^{n_k})$ é uma fórmula em $L^2(\tau)$ e α, β são duas assignações que coincidem em $\{x_1,\ldots,x_n,X_1^{n_1},\ldots,X_k^{n_k}\}$.

Em consequência, se σ é uma sentença (ie. sem variáveis livres) então para quaisquer duas assignações α e β teremos que

$$\mathfrak{A} \models \sigma[\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \sigma[\beta],$$

neste caso, satisfazendo-se qualquer uma delas escreveremos simplesmente "$\mathfrak{A} \models \sigma$" o qual pode ser lido como "σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$" ou como "$\mathfrak{A}$ é modelo de σ".

Por exemplo, no corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais temos

$$\mathfrak{R} \models (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(x_1^2+\ldots+x_n^2=0 \rightarrow x_1=0 \wedge\ldots\wedge x_n=0).$$

II.4.5- Notação

Uma notação alternativa que usaremos para $\mathfrak{A} \models \phi(x_1,\ldots,x_n)[\alpha]$, onde $\alpha(x_k)=a_k$ (para $k=1,\ldots n$), é $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots a_n]$, ou $\mathfrak{A} \models \phi(x_1,\ldots x_n)[a_1,\ldots,a_n]$ se quisermos explicitar as variáveis livres de ϕ.

Em forma análoga, se $\alpha(x_k)=a_k$ $(k=1,\ldots,n)$ e $\alpha(X_k^{n_k})=S_k(k=1,\ldots,m)$, denotaremos $\mathfrak{A} \models \phi(x_1,\ldots x_n,X_1^{n_1},\ldots,X_m^{n_m})[\alpha]$ por $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_n,S_1,\ldots,Sm]$.

Igualmente, se $t(x_1,\ldots,x_n)$ é um termo, e α uma assignação como acima, então denotaremos t^{α} por $t[a_1,\ldots,a_n]$ ou

$t(x_1,\ldots,x_n)[a_1,\ldots,a_n]$.

II.4.6.- Digressão

Uma linguagem, adequada a um tipo de estrutura τ, munida de uma relação de satisfação, como definida em II. 4.3.1, se diz que constitue uma <u>lógica</u>. A lógica definida aqui é chamada de lógica clássica, e alterando apropriadamente as cláusulas da definição mencionada podemos obter lógicas não-clássicas como, por exemplo, a lógica paraconsistente, desenvolvida fundamentalmente pelos matemáticos brasileiros Newton da Costa e Ayda Arruda (cf. Elias Alves [1984]), assim como as lógicas polivalentes e suas relacionadas, as lógicas nebulosas (cf. Carnielli [1987] e Cifuentes [1986]).

Podemos dizer então que a conexão fundamental entre o plano real (algébrico-conjuntista) e o referencial linguístico das estruturas matemáticas, é dada pela noção de satisfação de Tarski, a qual é considerada a versão mais acabada e correta da teoria da verdade como correspondência entre entidades linguísticas e os fatos matemáticos que aquelas expressam.

II.4.7.- Como ilustração do uso dos conceitos introduzidos vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição. Sejam $t(x_1,\ldots,x_n)$ um termo de $L^1(\tau)$, $\mathfrak{A}\in Est(\tau)$ e

$a_1,\ldots,a_n \in A$, então

$$\mathfrak{A} \models (\exists! x)(t=x)[a_1,\ldots,a_n].$$

Demonstração

É óbvio que $t[a_1,\ldots,a_n] \in A$ (ver II.4.2.1 (i)), ie. para algum $a \in A$: $t[a_1,\ldots,a_n] =^A a$, então, por II.4.3.1 (i) temos que para algum $a \in A$: $\mathfrak{A} \models (t=x)[a_1,\ldots,a_n,a]$, portanto, por definição: $\mathfrak{A} \models (\exists x)(t=x)[a_1,\ldots,a_n]$ ∎

II.4.7.1- Observação

Complementando a observação II.4.2.1 (i), podemos dizer que uma função $F\colon A^n \to A$ é <u>definível</u> na linguagem $L^1(\tau)$ se existe um termo $t(x_1,\ldots,x_n)$ tal que para todo $a_1,\ldots,a_n \in A$:

$$F(a_1,\ldots,a_n) =^A t[a_1,\ldots,a_n].$$

Em particular, é óbvio que as funções F_j^A da estrutura são definíveis.

Portanto, a proposição anterior pode ser interpretada da seguinte maneira: toda função n-ária da estrutura $\mathfrak{A}$, definível na linguagem $L^1(\tau)$ deve ser total, ie. o seu domínio deve ser todo A^n (ver observação I.1.5).

Em particular, se t é um termo fechado da linguagem $L^1(\tau)$, então a sentença $(\exists x)(t=x)$ é verdadeira em toda estrutura $\mathfrak{A}$ de tipo τ.

II.4.8- Definição

Uma sentença σ (em qualquer linguagem adequada ao tipo τ) é dita válida se é verdadeira em toda estrutura de tipo τ. Este fato será denotado por "$\models \sigma$".

II.4.9- Um outro exemplo de sentença válida em $L^2(\tau)$, e de particular importância, é dada na seguinte proposição.

Proposição. Seja $\phi\ (x_1,\ldots x_n)$ uma fórmula em $L^2(\tau)$ (vamos supor que ϕ não tem variáveis livres de 2ª ordem) e X^n uma variável de 2ª ordem n-ádica, então para toda $\mathfrak{A} \in Est(\tau)$:

$$\mathfrak{A} \models (\exists X^n)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(X^n(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow \phi$$
$(x_1,\ldots x_n))$.

Demonstração. Definimos $S \subseteq A^n$ como

$$S = \{(a_1,\ldots,a_n) \in A^n / \mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots a_n]\},$$

então é óbvio que: para algum $S \subseteq A^n$ e para todo $a_1,\ldots a_n \in A$ temos

$$S\ (a_1,\ldots a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots a_n] \ldots.(*)$$

mas é fácil ver que

$$S(a_1,\ldots,a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models X^n(x_1,\ldots,x_n)[a_1,\ldots,a_n,S],$$

logo, (*) equivale a

$$\mathfrak{A} \models X^n(x_1,\ldots,x_n)[a_1,\ldots,a_n,S] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_n]$$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_n,S]$ pois X^n não é livre em ϕ, portanto, (*) equivale a

$$\mathfrak{A} \models (X^n(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n))[a_1,\ldots,a_n,S]$$

para algum $S \subseteq A^n$ e para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, logo,

$$\mathfrak{A} \models (\exists X^n)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(X^n(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n))$$ ■

II.4.9.1- Observações

i) a sentença demonstrada acima, válida em $L^2(\tau)$ total, é conhecida com o nome de <u>axioma de compreensão</u>, e afirma que toda fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ de $L^2(\tau)$, e em particular de $L^1(\tau)$, define uma relação n-ária em $\mathfrak{A}$.

Por analogia com a observação II.4.7.1 podemos dizer que uma relação $R \subseteq A^n$, $n \geq 1$, é <u>definível</u> na linguagem $L^1(\tau)$ se existe uma fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ em $L^1(\tau)$ tal que para todo $a_1,\ldots,a_n \in A$:

$$R(a_1,\ldots,a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_n].$$

Em particular, as relações R_i^A da estrutura são definíveis.

É muito importante observar que se $|A| \geq |L^1(\tau)|$ então, nem toda relação é definível. Mais do que isso: nem todo subconjunto de A é definível por uma fórmula da linguagem, no máximo são definíveis $|L^1(\tau)|$ subconjuntos, sendo que A tem $2^{|A|}$ subconjuntos.

ii) a linguagem de 1ª ordem adequada ao tipo de estruturas topológicas $<\mathfrak{A},\tau;\epsilon>$, embora tenha variáveis de 1ª ordem para elementos de τ, análogas às de 2ª ordem para subconjuntos de A, diferencia-se da linguagem de 2ª ordem monádica adequada a $\mathfrak{A}$ em que, em geral, não satisfaz o axioma de com preensão:

$<\mathfrak{A}, \tau; \epsilon> \models (\exists U)(\forall x)(x \in U \leftrightarrow \phi(x))$ significaria que $\{a \in A / \mathfrak{A} \models \phi[a]\}$ $\in \tau$, o qual não tem que ser verdade.

iii) as seguintes fórmulas válidas são úteis para simplificar a indução semiótica, permitindo que alguns dos conectivos lógicos ou quantificadores possam ser considerados como definidos a partir dos outros:

$\models (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \phi \vee \psi)$

$\models (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg \psi)$

$\models (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \rightarrow \neg \psi)$

$\models (\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg \phi \rightarrow \psi)$

$\models (\forall x) \phi \leftrightarrow \neg(\exists x) \neg \phi$

$\models (\exists x) \phi \leftrightarrow \neg(\forall x) \neg \phi$

$\models (\forall X) \phi \leftrightarrow \neg(\exists X) \neg \phi$

$\models (\exists X) \phi \leftrightarrow \neg(\forall X) \neg \phi$, etc.

II.5- Axiomatização e Equivalência Elementar

Com os conceitos introduzidos até agora estamos prontos para investigar a estrutura interna de Est(τ), as classes de estruturas contidas em Est(τ) que podem ser referidas pelas linguagens construídas, assim como os consequentes problemas de expressabilidade.

II.5.1- Convenção

De agora em diante L vai designar qualquer linguagem que satisfaça pelo menos as cláusulas II.3.1.1. até II.3.1.4 e II.4.3.1 correspondentes à linguagem de 1ª ordem $L^{i}(\tau)$. O tipo τ vai ser considerado fixo, embora seja arbitrário. L_S designará a coleção de sentenças de L, e uma linguagem poderá ser distinguido de outra, se necessário, pelo índice L, por exemplo, em $\models_L$.

Portanto, todas as linguagens consideradas neste trabalho serão extensões da linguagem de 1ª ordem, a que é chamada também de linguagem elementar.

II.5.2- Definição

i) seja $\Sigma \subseteq L_S$. A coleção de modelos de Σ, ie. a classe de estruturas que são modelos de todas as sentenças de Σ, é definida por

$$\mathrm{Mod}_L\,(\Sigma)=\{\mathfrak{A}\in \mathrm{Est}(\tau)/\forall\sigma\in\Sigma:\mathfrak{A}\models_L\sigma\}.$$

ii) seja $K\subseteq \mathrm{Est}(\tau)$. A teoria de K define-se com a coleção

$$\mathrm{Th}_L(K)=\{\sigma\in L_S/\forall\mathfrak{A}\in K:\mathfrak{A}\models_L\sigma\}.$$

Omitiremos o índice L quando não houver possibilidade a confusão.

Escreveremos $\mathrm{Mod}(\sigma)$ em vez de $\mathrm{Mod}(\{\sigma\})$, e $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ em vez de $\mathrm{Th}(\{\mathfrak{A}\})$. Também, as vezes escreveremos $\mathfrak{A}\models\Sigma$ para significar que $\forall\sigma\in\Sigma:\mathfrak{A}\models\sigma$.

II.5.3- São consequências imediatas da definição as seguintes:

i) $Mod(\Sigma)=\bigcap_{\sigma\in\Sigma} Mod(\sigma)$

ii) $Th(K)=\bigcap_{\mathfrak{A}\in K} Th(\mathfrak{A})$

iii) $\Sigma\subseteq Th(Mod(\Sigma))$ e

$Mod(Th(Mod(\Sigma)))= Mod(\Sigma)$.

iv) $K\subseteq Mod(Th(K))$ e

$Th(Mod(Th(K)))=Th(K)$.

II.5.4- Classes Axiomatizáveis e a Noção de Expressabilidade

Lembremos do capítulo I que os <u>conceitos matemáticos</u> foram considerados identificando-os com as classes de estruturas que são sua referência.

II.5.4.1- Definição. Seja $K\subseteq Est(\tau)$.

i) dizemos que K é <u>axiomatizável</u> na linguagem L se existe $\Sigma\subseteq L_S$ tal que $K=Mod(\Sigma)$.

ii) dizemos que K é <u>finitamente axiomatizável</u> se Σ em (i) é finito.

iii) um <u>conceito matemático</u> é <u>expressável</u> na linguagem L se a classe que é a sua referência é axiomatizável em L.

Por abuso da linguagem, quando K é axiomatizável em L diremos que K é expressável em L.

II.5.4.2- Observações

i) é claro que se σ é uma sentença válida, então $Mod(\sigma)=Est(\tau)$, portanto, a classe $Est(\tau)$ é (finitamente) axiomatizável.

ii) $Mod(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\})=Mod(\sigma_1\wedge\ldots\wedge\sigma_n)$, portanto, ser finitamente axiomatizável equivale a ser axiomatizável por uma sentença só.

iii) todos os exemplos dados em II.1 são classes axiomatizáveis nas linguagens em que foram caracterizadas.

Assim temos: a classe das álgebras de Boole finitas é finitamente axiomatizável em L^2 diádica. Igualmente poderia-se provar que a classe dos grupos finitos ou dos corpos finitos é finitamente axiomatizável em L^2 diádica.

Também temos que a classe dos corpos algebricamente fechados é axiomatizável em L^1. Igualmente a classe dos corpos de característica zero.

Poderíamos nos perguntar: a classe das estruturas finitas de um certo tipo é axiomatizável em L^2 monádica?, ou em L^1?, ainda, a classe dos corpos arquimedianos é axiomatizável em L^1?, será que a classe dos corpos algebricamente fechados é finitamente axiomatizável em L^1?, além disso, será possível caracterizar o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ em forma categórica em L^1?

Critérios para responder a todas estas perguntas serão dados no capítulo III.

II.5.4.3- Proposição

$$K \text{ é axiomatizável} \Longleftrightarrow K=Mod(Th(K)).$$

Demonstração

($\Leftarrow$) óbvio.

($\Rightarrow$) se K é axiomatizável, existe $\Sigma \subseteq L_S$ tal que $K=Mod(\Sigma)$, logo, por II.5.3 (iii): $Mod(Th(K))=Mod(Th(Mod(\Sigma)))=Mod(\Sigma)=K$ ∎

II.5.4.4- Proposição

$Mod(Th(K))$ é a "menor" classe axiomatizável que contém K, ie. se $K \subseteq K_1$ e K_1 é axiomatizável, então $Mod(Th(K)) \subseteq K_1$.

Demonstração

$\mathfrak{A} \in Mod(Th(K)) \Rightarrow \forall \sigma \in Th(K): \mathfrak{A} \models \sigma$, mas como $K \subseteq K_1$ temos $Th(K_1) \subseteq Th(K) \Rightarrow \forall \sigma \in Th(K_1): \mathfrak{A} \models \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \in Mod(Th(K_1))=K_1$ pois K_1 é axiomatizável ∎

II.5.4.5- Observação

Se K não é axiomatizável, então K é uma subclasse própria de $Mod(Th(K))$ (ver II.5.3(iv)), ie. existe $\mathfrak{B} \notin K$ tal que $\mathfrak{B} \models Th(K)$.

II.5.5- L- Equivalência de Classes

Nesta seção vamos introduzir um conceito que acreditamos original e que dará um outro enfoque a conceitos conhecidos. Esperamos estudar as propriedades deste conceito com mais amplitude no futuro.

II.5.5.1- Definição

Sejam K_1, $K_2 \subseteq Est(\tau)$. Dizemos que K_1 e K_2 são <u>L-equivalentes</u> se

$$Th_L(K_1)=Th_L(K_2).$$

II.5.5.2- Asserção

Toda classe K é L-equivalente a uma classe axiomatizável:

Com efeito, por II.5.3.4 (segunda parte), K é L-equivalente a Mod(Th(K)), sendo esta última axiomatizável por Th(K).

II.5.5.3- Definição

Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são <u>L-elemen</u>

tarmente equivalentes, e denotamos com $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$, se

$\forall \sigma \in L_S : \mathfrak{A} \models \sigma \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$.

É fácil ver que é uma relação de equivalência em Est(τ).

II.5.5.4- Proposição. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$.

ii) $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, ie. as classes $\{\mathfrak{A}\}$ e $\{\mathfrak{B}\}$ são L-equivalentes.

iii) $Th(\mathfrak{A}) \subseteq Th(\mathfrak{B})$.

iv) $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$.

Demonstração

(i)$\longleftrightarrow$(ii): $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B} \longleftrightarrow \forall \sigma \in L_S (\mathfrak{A} \models \sigma \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma) \longleftrightarrow \forall \sigma \in L_S (\sigma \in Th(\mathfrak{A}) \longleftrightarrow \sigma \in Th(\mathfrak{B})) \longleftrightarrow Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): óbvio

(iii)$\Longrightarrow$(ii): seja $\sigma \in Th(\mathfrak{B})$, então $\mathfrak{B} \models \sigma$. Se $\sigma \notin Th(\mathfrak{A})$ então $\mathfrak{A} \not\models \sigma$, logo, $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$, portanto, por (iii): $\mathfrak{B} \models \neg\sigma (\Rightarrow\Leftarrow)$.

(iii)$\longleftrightarrow$(iv): $Th(\mathfrak{A}) \subseteq Th(\mathfrak{B}) \longleftrightarrow \forall \sigma \in L_S (\sigma \in Th(\mathfrak{A}) \Longrightarrow \sigma \in Th(\mathfrak{B})) \longleftrightarrow \forall \sigma \in L_S (\sigma \in Th(\mathfrak{A}) \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma) \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$ ∎

O teorema mais importante neste contexto, e que tem profundas consequências como veremos, é o teorema do isomorfismo que analizaremos a seguir numa versão adaptada.

Seja $\mathfrak{A} \in Est(\tau)$, e seja $K[\mathfrak{A}] = \{\mathfrak{B} \in Est(\tau) / \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.

II.5.5.5- Teorema do Isomorfismo (para $L^2(\tau)$).

Para toda $\mathfrak{A}\in Est(\tau)$:

$Th(K[\mathfrak{A}])=Th(\mathfrak{A})$,

ie, $K[\mathfrak{A}]$ e $\{\mathfrak{A}\}$ são classes L^2-equivalentes.

É um jogo de dedução lógica provar que o anterior equivale à seguinte afirmação:

II.5.5.6- Para todo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in Est(\tau)$,

$$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}\Longrightarrow\mathfrak{A}\equiv_{L^2}\mathfrak{B}.$$

Este teorema será consequência imediata da seguinte proposição.

II.5.5.7- Proposição

Seja $f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$, então para toda fórmula ϕ de $L^2(\tau)$ e toda assignação α em $\mathfrak{A}$ temos:

$$\mathfrak{A}\models\phi[\alpha]\Longleftrightarrow\mathfrak{B}\models\phi[f\circ\alpha].$$

Demonstração. por indução semiótica (ie. sobre a complexidade da fórmula ϕ).

i) ϕ é atômica:

<u>Caso 1</u>. ϕ é $t_1=t_2$.

$\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[\alpha] \longleftrightarrow t_1^\alpha =^A t_2^\alpha \longleftrightarrow f(t_1^\alpha) =^B f(t_2^\alpha) \longleftrightarrow$ (por II.4.2.2) $t_1^{f \circ \alpha} =^B t_2^{f \circ \alpha} \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (t_1 = t_2)[f \circ \alpha]$.

Caso 2. ϕ é $R_i(t_1, \ldots, t_n)$.

$\mathfrak{A} \models R_i(t_1, \ldots, t_n)[\alpha] \longleftrightarrow R_i^A(t_1^\alpha, \ldots, t_n^\alpha) \longleftrightarrow R_i^B(f(t_1^\alpha), \ldots, f(t_n^\alpha)) \longleftrightarrow$ (por II.4.2.2) $R_i^B(t_1^{f \circ \alpha}, \ldots, t_n^{f \circ \alpha}) \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models R_i(t_1, \ldots, t_n)[f \circ \alpha]$.

Caso 3. ϕ é $X^n(t_1, \ldots, t_n)$.

$\mathfrak{A} \models X^n(t_1, \ldots, t_n)[\alpha] \longleftrightarrow \alpha(X^n)(t_1^\alpha, \ldots, t_n^\alpha) \longleftrightarrow$ (por I.3.6(iii)) $f(\alpha(X^n))(f(t_1^\alpha), \ldots, f(t_n^\alpha)) \longleftrightarrow (f \circ \alpha)(X^n)(t_1^{f \circ \alpha}, \ldots, t_n^{f \circ \alpha}) \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models X^n (t_1, \ldots, t_n)[f \circ \alpha]$

ii) ϕ é $\neg\psi$:

$\mathfrak{A} \models \phi[\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\neg\psi)[\alpha] \longleftrightarrow$ não $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) não $\mathfrak{B} \models \psi[f \circ \alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (\neg\psi)[f \circ \alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f \circ \alpha]$.

Em forma análoga para ϕ da forma $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$ e $\psi \leftrightarrow \theta$.

iii) ϕ é $(\forall v_k)\psi$:

$\mathfrak{A} \models (\forall v_k)\psi[\alpha] \longleftrightarrow$ para todo $a \in A$: $\mathfrak{A} \models \psi\, [\alpha[\frac{v_k}{a}]] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) para todo $a \in A$:

$\mathfrak{B} \models \psi[f \circ \alpha[\frac{v_k}{f(a)}]] \longleftrightarrow$ (por ser f bijeção) para todo $b \in B$: $\mathfrak{B} \models \psi [f \circ \alpha[\frac{v_k}{b}]] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (\forall v_k)\psi[f \circ \alpha]$.

iv) ϕ é $(\forall X_k^n)\psi$:

$\mathfrak{A} \models (\forall X_k^n)\psi[\alpha] \longleftrightarrow$ para todo $S \subseteq A^n$: $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha[\frac{X_k^n}{S}]] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) para todo $S \subseteq A^n$:

$\mathfrak{B} \models \psi[f \circ \alpha[\frac{X_k^n}{f(S)}]] \longleftrightarrow$ (por I.3.6(iii)) para todo $R \subseteq B^n$: $\mathfrak{B} \models \psi[f \circ \alpha[\frac{X_k^n}{R}]] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (\forall X_k^n)\psi[f \circ \alpha]$.

Os casos $(\exists v_k)\psi$ e $(\exists X_k^n)\psi$ são consequência do anterior e da observação II.4.8.1(iii) ■

II.5.5.8- Corolário. O teorema do isomorfismo é também válido paraalinguagem $L^1(\tau)$, ie.

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{L^1} \mathfrak{B} \blacksquare$$

II.5.5.9- Convenção. Quando uma linguagem L satisfaz o teorema do isomorfismo diremos que tem a <u>propriedade de isomorfismo</u>.

Todas as linguagens que estudaremos nesta tese terão esta propriedade.

II.5.5.10- Observação

Se K é axiomatizável e L tem a propriedade de isomorfismo, então K é fechado por equivalência elementar e por isomorfismo, ie. se $\mathfrak{A} \in K$ e $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B} \equiv_L \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{B} \in K$.

Um critério útil para provar que uma classe K não é axiomatizável é encontrar estruturas $\mathfrak{A} \in K$ e $\mathfrak{B} \notin K$ tais que $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$.

II.5.5.11- Definição

Seja $\Sigma \subseteq L_S$, dizemos que Σ é <u>categórico</u> se existe $\mathfrak{A}$ tal que $K[\mathfrak{A}] = Mod(\Sigma)$.

Isto significa que $\mathfrak{A}$ fica caracterizada, salvo isomorfismo, por Σ.

II.5.5.12- De fato, a noção de categoricidade tem como consequência que, se L admite uma estrutura $\mathfrak{A}$ que não pode ser caracterizada em forma categórica por nenhuma coleção Σ de sentenças de L, então $\equiv_L$ não implica $\cong$.

Com efeito, seja $\mathfrak{A}$ uma tal estrutura, então $K[\mathfrak{A}]$ não é axiomatizável, logo, pela observação II.5.4.5, existirá $\mathfrak{B} \notin K[\mathfrak{A}]$ tal que $\mathfrak{B} \models Th(K[\mathfrak{A}])$, ie. $\mathfrak{B} \ncong \mathfrak{A}$ mas $\mathfrak{B} \equiv_L \mathfrak{A}$.

Pode-se provar, por argumentos de cardinalidade, que sempre existe uma estrutura nessas condições.

II.5.5.13- Proposição

Se L_S forma um <u>conjunto</u> de cardinalidade λ, então existem no máximo 2^{λ} classes de equivalência elementar em $Est(\tau)$.

Demonstração

Primeiro denotamos com $[\mathfrak{A}]_L$ a classe de equivalência elementar de $\mathfrak{A}$, ie. $\{\mathfrak{B} \in Est(\tau) / \mathfrak{B} \equiv_L \mathfrak{A}\}$

Facilmente pode-se conferir que, por definição, $Th(\mathfrak{A}) = Th([\mathfrak{A}]_L)$, ie. $\{\mathfrak{A}\}$ e $[\mathfrak{A}]_L$ são L-equivalentes.

Portanto, podemos definir a seguinte aplicação: $[\mathfrak{A}]_L \longmapsto Th(\mathfrak{A})$.

Observando que $Th(\mathfrak{A}) \in P(L_S)$, resta provar que a aplicação é injetora:

Com efeito, se $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, então, por II.5.5.4,

$\mathcal{A} \equiv_L \mathcal{B}$, logo, $[\mathcal{A}]_L = [\mathcal{B}]_L$ ∎

II.5.5.14- Corolário. Nas condições da proposição anterior, $\equiv_L$ não implica $\cong$.

Com efeito, o número de classes de isomorfismo de Est(τ) não é limitado por nenhum cardinal já que, potencialmente, em Est(τ) existem estruturas de toda cardinalidade ∎

II.5.5.15- Digressão

O teorema do isomorfismo afirma que nenhuma sentença de L pode diferenciar estruturas isomorfas, o que significa que L não é capaz de penetrar a natureza particular de cada estrutura

Isto tem profundas repercussões, por exemplo, na teoria de modelos topológicos: uma linguagem bissortida adequada a modelos topológicos $\langle X, \tau; \epsilon\rangle$, mesmo em sentido amplo, não pode caracterizar o domínio τ como uma subcoleção de P(X), e em consequência, o símbolo ε não necessariamente é uma relação de pertinência (ver II.6 para uma discussão mais detalhada a respeito deste problema)

Por outro lado, o fato de $\equiv_L$ ser uma relação de equivalência em Est(τ) nos dá a possibilidade de propor o que poderíamos chamar de novo Princípio de Classificação de estruturas: a classificação salvo equivalência elementar, como um in tento, desde o plano linguístico, de aproximação ao velho problema de classificação salvo isomorfismo (ver digressão I.3.9)

Entretanto, as considerações sobre o número de classes de equivalência elementar e o número de classes de isomorfismo, o primeiro limitado e o segundo ilimitado na escala cardinal, nos mostram em certa medida a profunda diferença que existe entre os planos linguístico e real (algébrico-conjuntista) das estruturas matemáticas.

II.5.5.16- Podemos concluir então, baseados nestas considerações, que o ponto central da tese, que trataremos com todo detalhe no capítulo IV, é o estudo da caracterização algébrica da equivalência elementar em diversas linguagens, a que poderemos considerar como a melhor aproximação entre os referenciais algébrico e linguístico das estruturas matemáticas.

II.5.6- A Linguagem de 2ª Ordem Fraca $L\omega^{2}(\tau)$

Vamos terminar este capítulo introduzindo uma nova linguagem, não muito usual na matemática prática, porém muito importante para a análise lógica de certas propriedades de teoria de modelos (ver III.4 para uma aplicação interessante).

O conjunto de fórmulas de $L\omega^{2}(\tau)$ coincide com o da linguagem $L^{2}(\tau)$ monádica (na realidade pode-se igualmente definir o caso geral, mas neste trabalho não precisaremos de tal generalidade), e a relação de satisfação é a mesma salvo na cláusula II.4.3.2 (iii) que neste caso é (denotando com X^{ω} a variável monádica correspondente):

II.5.6.1- $\mathfrak{A} \models (\forall X^{\omega})\phi[\alpha] \Longleftrightarrow$ para todo $S \subseteq A$ com S finito: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{X^{\omega}}{S}]]$, e $\mathfrak{A} \models (\exists X^{\omega})\phi[\alpha] \Longleftrightarrow$ para algum $S \subseteq A$ com S finito: $\mathfrak{A} \models \phi[\alpha[\frac{X^{\omega}}{S}]]$.

II.5.6.2- Alguns Resultados Gerais

i) em $\overset{2}{L\omega}(\tau)$ não é mais válido o axioma de compreensão como pode-se conferir com o exemplo seguinte: seja $\mathfrak{A}=\langle A;\ldots\rangle$ uma estrutura com domínio infinito, e $\phi(x)$ a fórmula $x=x$, então temos $\mathfrak{A} \models \neg(\exists X^{\omega})(\forall x)(x \in X \leftrightarrow x=x)$, o que equivale a $\mathfrak{A} \models (\forall X^{\omega})(\exists x)(x \notin X^{\omega})$ que obviamente é verdade.

ii) a pesar de que $\overset{2}{L\omega}(\tau)$ utiliza variáveis monádicas para certos subconjuntos do domínio do discurso, não pode ser considerada como um fragmento da linguagem $\overset{2}{L}(\tau)$ monádica, porém pode-se provar que $\overset{2}{L\omega}(\tau)$ é representável em $\overset{2}{L}(\tau)$ diádica substituindo toda expressão da forma $(\forall X^{\omega})\phi$ por $(\forall X)(X$ é finito $\rightarrow \phi)$, e toda expressão da forma $(\exists X^{\omega})\phi$ por $(\exists X)(X$ é finito $\wedge\, \phi)$. A expressão "X é finito" é primariamente diádica (ver II.1.6), mas neste momento não podemos garantir que a finitude possa ser expressa em $\overset{2}{L}(\tau)$ monádica. Voltaremos a este tema no capítulo III.

iii) embora $L\overset{2}{\omega}(\tau)$ possa ser considerada apenas um fragmento da linguagem $L^2(\tau)$ diádica, nela pode ser expressa a finitude do seguinte modo:

$$A \text{ é finito} \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists X^{\omega})(\forall x)(x \in X^{\omega}).$$

Em geral, se K é uma classe de estruturas axiomatizável em $L\overset{2}{\omega}(\tau)$ por um conjunto de sentença Σ, e $K_0 = \{\mathfrak{A} \in K / A \text{ é finito}\}$, então K_0 é axiomatizável por $\Sigma \cup \{(\exists X^{\omega})(\forall x)(x \in X^{\omega})\}$. Em particular, a classe das álgebras de Boole finitas K_{BFIN} do exemplo II.1.6 é axiomatizável em $L\overset{2}{\omega}(\tau_0)$.

iv) facilmente pode-se conferir que a proposição II.5.5.7 é também válida para $L\overset{2}{\omega}(\tau)$. Em consequência, $L\overset{2}{\omega}(\tau)$ tem a propriedade de isomorfismo.

II.5.6.3- A Propriedade de Karp

A seguir vamos dar o primeiro passo na direção de aproximar a relação de equivalência elementar da relação de isomorfismo. Os argumentos empregados foram iniciados por Carol Karp no começo da década de 60 para as linguagens infinitárias (cf. Karp[1965]) e posteriormente generalizados para outras linguagens. Veremos que uma das perdas importantes neste passo, porém necessário, é a consideração da cardinalidade entre as estruturas. Veremos também que em certa forma a linguagem $L\overset{2}{\omega}$ é a melhor possível, dentre as linguagens estudadas até agora, nesta aproximação

Lembremos que o teorema do isomorfismo tem a forma seguinte: para toda estrutura $\mathfrak{A}$,

$Th(K[\mathfrak{A}])=Th(\mathfrak{A})$.

Sejam $\mathfrak{A}\in Est(\tau)$ e $K_p[\mathfrak{A}]=\{\mathfrak{B}\in Est(\tau)/\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}\}$ (ver I.3.11).

II.5.6.3.1- Definição

Uma linguagem L tem a propriedade de Karp ou de p-isomorfismo se para toda $\mathfrak{A}\in Est(\tau)$,

$$Th(K_p[\mathfrak{A}])=Th(\mathfrak{A}),$$

(ie. $K_p[\mathfrak{A}]$ e $\{\mathfrak{A}\}$ são L-equivalentes).

É fácil deduzir que equivale a:

$$\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{A}\equiv_L\mathfrak{B}.$$

Para provar a seguinte proposição necessitamos observar o seguinte: se $t(x_1,\ldots,x_n)$ é um termo de $L^2(\tau)$ (em particular de $L^2_\omega(\tau)$ e de $L^1(\tau)$), e $\mathfrak{A}^1=\langle A^1,\ldots\rangle$ é uma subestrutura de $\mathfrak{A}$, então para toda $a_1,\ldots,a_n\in A^1$ temos que $t[a_1,\ldots,a_n]\in A^1$, o que é consequência de que $\mathfrak{A}^1$ é fechada para as funções e constantes de $\mathfrak{A}$.

II.5.6.3.2- Teorema do p-Isomorfismo para $L^2_\omega(\tau)$

Para toda $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in Est(\tau)$: $\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{A}\equiv_{L^2_\omega}\mathfrak{B}$ (em particular $\mathfrak{A}\equiv_{L^1}\mathfrak{B}$).

Demonstração

Seja $I:\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}$. Provaremos por indução semiótica que se $\phi(x_1,\ldots x_n,X_1^{\omega},\ldots X_m^{\omega})$ é uma fórmula de $L^2\omega(\tau)$, $f:\mathfrak{A}^1\cong\mathfrak{B}^1$ é um isomorfismo, com $\mathfrak{A}^1\subseteq\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}^1\subseteq\mathfrak{B}$ e α é uma assignação em $\mathfrak{A}^1$, ie. $\alpha(x_K)=a_K\in A^1$ e $\alpha(X_K^{\omega})=S_K\subseteq A^1$, então:

$$\mathfrak{A}\models\phi[\alpha]\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models\phi[f\circ\alpha],$$

ou equivalentemente:

$$\mathfrak{A}\models\phi[a_1,\ldots,a_n,S_1,\ldots,Sm]\longleftrightarrow$$
$$\mathfrak{B}\models\phi[f(a_1),\ldots,f(a_n),f(S_1),\ldots,f(Sm)].$$

Observemos que pela proposição II.5.5.7 temos que $\mathfrak{A}^1\models\phi[\alpha]\longleftrightarrow\mathfrak{B}^1\models\phi[f\circ\alpha]$ por ser f um isomorfismo de $\mathfrak{A}^1$ em $\mathfrak{B}^1$.

i) ϕ é atômica:

<u>Caso 1</u>. ϕ é $t_1=t_2$.

$\mathfrak{A}\models(t_1=t_2)[\alpha]\longleftrightarrow t_1^{\alpha}=^{A}t_2^{\alpha}\longleftrightarrow t_1^{\alpha}=^{A^1}t_2^{\alpha}$(pois t_1^{α}, $t_2^{\alpha}\in A^1$)$\longleftrightarrow\mathfrak{A}^1\models(t_1=t_2)[\alpha]$ $\longleftrightarrow\mathfrak{B}^1\models(t_1=t_2)[f\circ\alpha]\longleftrightarrow t_1^{f\circ\alpha}=^{B^1}t_2^{f\circ\alpha}\longleftrightarrow t_1^{f\circ\alpha}=^{B}t_2^{f\circ\alpha}$(pois também $t_1^{f\circ\alpha}$, $t_2^{f\circ\alpha}\in B^1$)$\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models(t_1=t_2)[f\circ\alpha]$.

<u>Caso 2</u>. ϕ é $R_i(t_1,\ldots,t_n)$

É completamente análogo ao caso 1.

<u>Caso 3</u>. ϕ é $X^{\omega}(t)$ e $\alpha(X^{\omega})\subseteq A^1$.

$\mathfrak{A}\models X^{\omega}(t)[\alpha]\longleftrightarrow\alpha(X^{\omega})(t^{\alpha})\longleftrightarrow\mathfrak{A}^1\models X^{\omega}(t)[\alpha]$(pois $\alpha(X^{\omega})\subseteq A^1\subseteq A$)$\longleftrightarrow\mathfrak{B}^1\models$ $X^{\omega}(t)[f\circ\alpha]\longleftrightarrow(f\circ\alpha)(X^{\omega})(t^{f\circ\alpha})\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models X^{\omega}(t)[f\circ\alpha]$(pois $(f\circ\alpha)(X^{\omega})\subseteq B^1\subseteq B$).

ii) se ϕ é $\neg\psi$, $\psi\wedge\theta$, $\psi\vee\theta$, $\psi\rightarrow\theta$ ou $\psi\leftrightarrow\theta$ é trivial.

iii) ϕ é $(\exists v_K)\psi$.

$\mathfrak{A}\models(\exists v_K)\psi[a_1,\ldots,a_n,S_1,\ldots Sm]\longleftrightarrow$para algum $a\in A$:$\mathfrak{A}\models\psi$ $[a,a_1,\ldots,a_n,S_1,\ldots,Sm]$.

Aqui não podemos aplicar ainda a hipótese indutiva pois não necessariamente $a\in A^1$. Mas, pela propriedade de vaivém de I, existe $g\in I$ tal que $f\subseteq g$ e $a\in\mathrm{dom}\ g$, então, por hipótese indutiva:

$\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots, Sm] \longleftrightarrow$

$\mathfrak{B} \models \psi[g(a),\ g(a_1), \ldots, g(a_n),\ g(S_1), \ldots, g(Sm)] \longleftrightarrow$

$\mathfrak{B} \models \psi[\ g(a),\ f(a_1), \ldots, f(a_n),\ f(S_1), \ldots, f(Sm)]$ pois $f \subseteq g$, logo,

$\mathfrak{A} \models (\exists v_K)\psi[a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots, Sm] \longleftrightarrow$ para algum $b \in B$: $\mathfrak{B} \models \psi$ $[b,\ f(a_1), \ldots, f(a_n),\ f(S_1), \ldots, f(Sm)] \longleftrightarrow$

$\mathfrak{B} \models (\exists v_K)\psi[f(a_1), \ldots, f(a_n),\ f(S_1), \ldots, f(Sm)]$.

iv) ϕ é $(\exists X^{\omega})\psi$.

$\mathfrak{A} \models (\exists X^{\omega})\psi[a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots, Sm] \longleftrightarrow$ para algum $S \subseteq A$ com S finito: $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots, Sm, S]$.

Como em (iii), não necessariamente $S \subseteq A'$. Mas, como S é finito, pela propriedade de vaivém, existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $S \subseteq \mathrm{dom}\ g$. Devemos salientar que este passo em geral não é aplicável ao caso monádico, pois a propriedade de vaivém não pode extender f a conjuntos arbitrários de pontos de A.

Portanto, por hipótese indutiva:

$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots, Sm, S] \longleftrightarrow$

$\mathfrak{B} \models \psi[g(a_1), \ldots,\ g(a_n),\ g(S_1), \ldots,\ g(Sm),\ g(S)]$

$\longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[f(a_1), \ldots,\ f(a_n),\ f(S_1), \ldots,\ f(Sm),\ g(S)]$, logo,

$\mathfrak{A} \models (\exists X^{\omega})\psi\ [a_1, \ldots, a_n, S_1, \ldots Sm] \longleftrightarrow$ para algum $R \subseteq B$ com $R(=g(S))$ finito:

$\mathfrak{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n), f(S_1), \ldots, f(Sm), R]$

$\longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (\exists X^{\omega})\psi[f(a_1), \ldots, f(a_n),\ f(S_1), \ldots, f(Sm)]$ ∎

II.5.6.3.3- Consequências

i) por 1.3.14 temos que quaisquer dois corpos algébricamente fechados de mesma característica e não-enumeráveis são L^2_ω-elementarmente equivalentes, por serem parcialmente isomorfos. Isto fornece exemplos de estruturas elementarmente equivalentes que não são isomorfas. Este exemplo será usado no capítulo III para a análise do princípio de Lefschetz da geometria algébrica, (ver III.4).

ii) uma situação análoga ocorre entre dois espaços vetoriais V e W de dimensão infinita sobre o mesmo corpo F: $V \cong_p W$ pois a coleção $I = \{f: V^1 \cong W^1 / V^1 \subseteq V,\ W^1 \subseteq W$ e $\dim V^1 = \dim W^1 < \infty\}$ tem a propriedade de vaivém. Embora, V e W não tenham a mesma dimensão (infinita), eles satisfazem as mesmas sentenças da linguagem L^2_ω adequada ao tipo de estrutura correspondente (ver obs. I.2.4(i)).

iii) nenhuma sentença de L^2_ω pode distinguir duas estruturas parcialmente isomorfas. Mais do que isso, de (i) podemos concluir que nenhuma sentença de L^2_ω pode caracterizar a cardinalidade de uma estrutura não-enumerável.

iv) por I.3.13 temos que duas ordens lineares densas sem pontos extremos são também L^2_ω-elementarmente equivalentes. Em particular, como este exemplo inclui estruturas enumeráveis (por exemplo os racionais $\mathbb{Q}$), pode-se concluir, junto com (iii) acima, que nenhuma cardinalidade infinita pode ser caracterizada por sentenças de L^2_ω.

v) do anterior também podemos concluir que a propriedade de Karp ou de p-isomorfismo não é válida para L^2 total, nem ainda para L^2 diádica, pois aí pode-se caracterizar pelo menos a cardinalidade enumerável, como temos mostrado em II.1.14.1. O caso L^2 monádico será analizado no próximo capítulo.

II.5.6.3.4- Asserção

Uma das metas deste trabalho é estudar a possibilidade de se ter uma recíproca do teorema do p-isomorfismo dado em II.5.6.3.2.

Veremos no capítulo IV que isto é possível acrescentando o poder expressivo da linguagem $L\omega^2$, o que permitirá uma caracterização algébrica da equivalência elementar.

II.6- Apêndice ao Capítulo II:
Modelos Não-Standard da Igualdade

No capítulo I começamos supondo que toda estrutura $\mathfrak{A}$ em Est(τ) está munida da relação binária de igualdade $=^A$, e que esta relação era a diagonal $\Delta=\{(x,x)/x\in A\}$ (ver I.1.1.2).

Vamos analizar neste apêndice o que acontece se tirarmos a última suposição e só exigimos de $=^A$ que seja uma congruência, ie. uma relação de equivalência que preserva as relações, funções e constantes da estrutura. Neste caso é evidente que a nova classe Est*(τ) contém propriamente à classe Est(τ).

Neste contexto, dada uma linguagem L adequada ao tipo τ, é lícito perguntar se a subclasse Est(τ) é axiomatizável em L, como subclasse de Est*(τ), ie. se a diagonal das estruturas é caracterizável nessa linguagem.

II.6.1- Asserção

Seja L uma linguagem fechada para as operações de L^1, e = o símbolo de predicado correspondente à relação $=^A$. Podemos expressar em L o fato de $=^A$ ser congruência mediante o seguinte conjunto $\Sigma^=$ de axiomas que chamaremos de <u>Axiomas da Igualdade</u>:

α_1: $(\forall x)(x=x)$,

α_2: $(\forall x)(\forall y)(x=y \to F_j(t_1,\ldots,x,\ldots,t_n)=F_j(t_1,\ldots,y,\ldots,t_n))$

onde F_j é um símbolo de função e $t_1,\ldots,t_n$ são termos quaisquer,

α_3: $(\forall x)(\forall y)(x=y \to (R_i(t_1,\ldots,x,\ldots,t_n) \leftrightarrow R_i(t_1,\ldots,y,\ldots,t_n)))$

onde R_i é um símbolo de relação e $t_1,\ldots,t_n$ são termos quaisquer.

II.6.2- Observações

i) em geral, as fórmulas anteriores não são sentenças pois $t_1,\ldots,t_n$ podem ter ocorrências de variáveis. Neste caso vamos supor que estamos considerando seu fecho universal.

ii) observemos que $Est(\tau) \subsetneq Mod(\Sigma^=) = Est^*(\tau)$

II.6.3- Definição

Seja $\mathfrak{A}=\langle A; =^A,\ldots\rangle$ uma estrutura em Est*(τ). Definimos $\mathfrak{A}^1=\langle A^1; =^{A^1},\ldots\rangle$, onde $A^1=A/=^A$ é o quociente módulo $=^A$, do seguinte modo: seja $\pi:A\to A^1$ a projeção canônica, então

i) $\pi(a)=^{A^1}\pi(b)\longleftrightarrow a=^A b$, (devemos notar que π é sobre),

ii) $R_i^{A^1}(\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n))\longleftrightarrow R_i^A(a_1,\ldots,a_n)$,

iii) $F_j^{A^1}(\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n))=^{A^1}\pi(F_j^A(a_1,\ldots,a_n))$,

iv) $c_K^{A^1}=^{A^1}\pi(c_K^A)$.

Devemos observar que, por definição, $=^{A^1}$ coincide com a diagonal em A^1xA^1. Em consequência $\mathfrak{A}^1\epsilon$Est(τ)

Além disso, as noções acima estão bem definidas por ser $=^A$ uma congruência.

$\mathfrak{A}^1$ as vezes será denotada por $\mathfrak{A}/=^A$.

II.6.4- **Lema.** se α é uma assignação de valores em $\mathfrak{A}$ e t é um termo, então $\pi(t^\alpha)=^{A^1}t^{\pi\circ\alpha}$

Demonstração

Exatamente a mesma que em II.4.2.2, onde só usou-se o fato de f ser um homomorfismo, e π o é ■

II.6.5- Proposição

Se α é uma assignação em $\mathfrak{A} \in \mathrm{Est}^*(\tau)$ e ϕ é uma fórmula em $L^1(\tau)$, então:

$$\mathfrak{A} \models \phi[\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A}^1 \models \phi[\pi_0\alpha].$$

Demonstração

Por indução na complexidade da fórmula ϕ.

i) se ϕ é atômica:

Caso 1. ϕ é $t_1=t_2$.

$\mathfrak{A} \models (t_1=t_2)[\alpha] \longleftrightarrow t_1^{\alpha} \overset{A}{=} t_2^{\alpha} \longleftrightarrow \pi(t_1^{\alpha}) \overset{A^1}{=} \pi(t_2^{\alpha}) \longleftrightarrow$ (pelo lema) $t_1^{\pi_0\alpha} \overset{A^1}{=} t_2^{\pi_0\alpha} \longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}^1 \models (t_1=t_2)[\pi_0\alpha]$.

Caso 2. ϕ é $R_i(t_1,\ldots,t_n)$.

em forma análoga.

ii) ϕ e $\neg\psi$, é imediato.

Os demais casos serão tratados aqui numa forma especial para sua generalização às linguagens infinitárias no capítulo IV.

iii) se ϕ é $\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n$

$\mathfrak{A} \models (\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)[\alpha] \longleftrightarrow$ para cada $i=1,\ldots,n$:

$\mathfrak{A} \models \phi_i[\alpha] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) para cada $i=1,\ldots,n$:

$\mathfrak{A}^1 \models \phi_i[\pi_0\alpha] \longleftrightarrow \mathfrak{A}^1 \models (\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)[\pi_0\alpha]$.

iv) se ϕ é $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\psi$.

$\mathfrak{A} \models (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\psi[\alpha] \longleftrightarrow$ existem $a_1,\ldots,a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha[\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{xn}{an}]] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) existem $a_1,\ldots,a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A}^1 \models \psi[\pi_0(\alpha[\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{xn}{an}])] \longleftrightarrow$ existe $a_1,\ldots,a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A}^1 \models \psi[\pi_0\alpha[\frac{x_1}{\pi(a_1)},\ldots,\frac{xn}{\pi(a_n)}]] \longleftrightarrow$ (por ser π sobre) existem $b_1,\ldots,b_n \in A'$ tal que $\mathfrak{A}^1 \models \psi[\pi_0\alpha[\frac{x_1}{b_1},\ldots,\frac{xn}{bn}]] \longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}^1 \models (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\psi[\pi_0\alpha]$ ∎

II.6.6- Corolário $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{A}^1$ ∎

II.6.7- Proposição

Para toda $\mathfrak{A} \in Est(\tau)$ existe $\mathfrak{B} \in Est^*(\tau)$ tal que $\mathfrak{B}/{=^B} \cong \mathfrak{A}$.

Demonstração (cf. Monk [1976, pag. 478]).

Seja $B \supseteq A$ qualquer conjunto e fixemos $a \in A$. Definimos $f: B \to A$ por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in A \\ a, & \text{se } x \in B \setminus A \end{cases}$$

Então, a estrutura $\mathfrak{B} = \langle B; =^B, \ldots \rangle$ é definida do seguinte modo:

$$x =^B y \longleftrightarrow f(x) =^A f(y),$$
$$R_i^B(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow R_i^A(f(x_1), \ldots, f(x_n)),$$
$$F_j^B(x_1, \ldots, x_n) = F_j^A(f(x_1), \ldots, f(x_n))$$
$$c_k^B = c_k^A.$$

Consideremos $\pi: B \to B/{=^B} (= B^1)$ e definimos $g: B^1 \to A$ por $g(\pi(x)) = f(x)$.

i) g está bem definida: $\pi(x) = \pi(y) \longleftrightarrow x =^B y \longleftrightarrow f(x) = f(y) \longleftrightarrow g(\pi(x)) = g(\pi(y))$ (observar que por hipótese $=^A$ é a diagonal em $A \times A$).

ii) g é sobre: dado $y \in A$, então como f é sobre, existe $x \in B$ tal que $f(x) = y$, então para $\pi(x)$ temos, $g(\pi(x)) = f(x) = y$.

iii) g é injetora: $g(\pi(x)) = g(\pi(y)) \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow$

$x =^B y \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$.

iv) g preserva a estrutura: (usando a def.II.6.3)

$R_i^{B^1}(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)) \Longleftrightarrow R_i^B(x_1,\ldots,x_n) \Longleftrightarrow R_i^A(f(x_1),\ldots,f(x_n)) \Longleftrightarrow$
$R_i^A(g(\pi(x_1)),\ldots,g(\pi(x_n)))$, $g(F_j^{B^1}(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))) =$
$g \circ \pi(F_j^B(x_1,\ldots,x_n)) = f(F_j^A(f(x_1),\ldots,f(x_n))) \overset{*}{=} F_j^A(g(\pi(x_1)),\ldots g(\pi(x_n)))$,

a igualdade (*) é consequência do fato que $f(x_1),\ldots,f(x_n) \in A$,

F_j^A é uma função com valores em A, e $f \restriction A = id_A$; $g(c_\kappa^{B^1}) = g(\pi(c_\kappa^B))$
$= f(c_\kappa^B) = f(c_\kappa^A) = c_\kappa^A$.

Portanto, g é um isomorfismo ■

II.6.8- Observações

i) II.6.6 afirma que nenhuma coleção de sentenças de L^1 pode caracterizar a diagonal, ie. Est(τ) não é axiomatizável, como subclasse de Est*(τ),na linguagem $L^1(\tau)$.

ii) II.6.7 mostra que estruturas finitas podem ser L^1-elementarmente equivalentes a estrutras infinitas, já que B é arbitrário, mesmo sendo A finito. Isto tem como consequência que nehuma cardinalidade finita é expressável em L^1!

II.6.9- Digressão

A observação (ii) anterior tem consequências lógicas profundas, vejamos:

Usualmente a existência de n elementos num domínio vem expressa pela sentença $(n \geqslant 1)$

$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)[x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge (\forall y)(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)]$.

Observe-se que interpretada numa estrutra $\mathfrak{A} = \langle A; =^A, \ldots \rangle$ de $Est^*(\tau)$, mesmo que estiver em $Est(\tau)$, afirma a existência de exatamente n classes de equivalência módulo $=^A$ em termos de n representantes arbitrários.

Portanto, do ponto de vista de $Est^*(\tau)$, a linguagem $L^1(\tau)$ não pode individualizar os elementos de uma estrutura, a menos de classe de equivalência.

Veremos a seguir que as linguagens de 2ª ordem não tem esta anomalia. Para isto vamos considerar uma generalização da noção de variável de 2ª ordem mudando a sua interpretação.

II.6.10- Definição. seja $\mathfrak{A} = \langle A; =^A, \ldots \rangle \in Est^*(\tau)$ e $q \subseteq P(A)$ uma coleção de subconjuntos fixa de A. Seja X uma variável de 2ª ordem monádica. Definimos a <u>q-interpretação</u> de X mediante as seguintes cláusulas na definição da relação de satisfação:

i) $\mathfrak{A} \models_q (\forall X)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para todo $S \in q$: $\mathfrak{A} \models_q \phi[\alpha[\frac{X}{S}]]$,

ii) $\mathfrak{A} \models_q (\exists X)\phi[\alpha] \longleftrightarrow$ para algum $S \in q$: $\mathfrak{A} \models_q \phi[\alpha[\frac{X}{S}]]$.

Denotaremos com L_q^2 a linguagem de 2ª ordem monádica munida da q-interpretação. Quando $q = P(A)$ temos a linguagem L^2 monádica usual, quando $q = P_\omega(A)$ (= a coleção de subconjuntos finitos de A) temos a linguagem $L\omega^2$. Denotaremos com $P_\mu(A)$ a coleção de subconjuntos unitários de A.

II.6.11- Proposição. se $q \supseteq P_\mu(A)$, então:

$$\mathfrak{A} \in Est(\tau) \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models_q (\forall x)(\forall y)(x=y \leftrightarrow (\forall X)(x \in X \leftrightarrow y \in X)).$$

Demonstração

($\Longrightarrow$) sejam a, $b \in A$ quaisquer.

$\mathfrak{A} \models_q (x=y \rightarrow (\forall X)(x \in X \leftrightarrow y \in X))[a, b]$ é trivial pois por hipótese $=^A$ é a diagonal.

Suponhamos $\mathfrak{A} \models_q (\forall X)(x \in X \leftrightarrow y \in X)[a, b]$, então tomando $S=\{b\} \in q$ temos que $a \in \{b\} \longleftrightarrow b \in \{b\}$, mas é verdade que $b \in \{b\}$, logo $a \in \{b\}$, ie.

$a =^A b$, portanto, $\mathfrak{A} \models_q (x=y)[a, b]$.

($\Longleftarrow$) se $=^A$ não é a diagonal, existem a, $b \in A$ tais que $a \neq b$ e $a =^A b$, ie. $a \neq b$ mas $\mathfrak{A} \models_q (x=y)[a, b]$, então, pela hipótese, $\mathfrak{A} \models_q (\forall X)(x \in X \leftrightarrow y \in X)[a, b]$, ie. ara todo $S \in q$, $a \in S \longleftrightarrow b \in S$. Em particular para $S=\{b\}$, $a \in \{b\} \longleftrightarrow b \in \{b\}$, logo $a \in \{b\}$ o que implica $a=b$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$) ■

II.6.12- Corolário

A proposição anterior significa que em L^2_q, com $q \supseteq P_\mu(A)$, a classe $Est(\tau)$ é axiomatizável mediante a sentença dada. Em particular, em L^2 monádica e em L^2_ω é caracterizável a diagonal ■

A caracterização acima é conhecida com o nome de Princípio de Leibniz.

II.6.13- Asserção

Seja τ um tipo de similaridade fixo. Se $L\mu^{2}(\tau)$ é a linguagem de 2ª ordem correspondente à $P\mu(A)$-interpretação (onde $\mathfrak{A}=\langle A,\dots\rangle \in Est^*(\tau)$), então também a diagonal de tal classe de estruturas é caracterizável pela sentença

σ_μ: $(\forall x)(\forall y)(x=y \leftrightarrow (\forall X)(x\in X \leftrightarrow y\in X))$.

Agora, sendo X uma variável que representa um subconjunto unitário qualquer, poderíamos entender intuitivamente σ_μ como

"$(\forall x)(\forall y)(x=y \leftrightarrow (\forall z)(x\in\{z\} \leftrightarrow y\in\{z\}))$"

o qual sugere a seguinte interpretação de $L\mu^{2}(\tau)$ em $L^{1}(\tau^{P})$ onde P será um novo predicado binário cuja interpretação numa estrutura $\mathfrak{A}=\langle A;\ P^{A},\dots\rangle$ é: $\mathfrak{A}\models P(x,\ z)[a,\ b] \Longleftrightarrow a\in\{b\}$ $(\Longleftrightarrow P^{A}(a,\ b))$.

Isto exige acrescentar a $L^{1}(\tau)$ uma variável de 1ª ordem z_K para cada variável de 2ª ordem X_K e fazer a seguinte tradução:

i) $x_i\in X_K$ por $P(x_i,\ z_K)$

ii) $(\forall X_K)\phi(\dots x_i\in X_K\dots)$ por $(\forall z_K)\phi(\dots P(x_i,z_K)\dots)$ e $(\exists X_K)\phi(\dots x_i\in X_K\dots)$ por $(\forall z_K)\phi(\dots P(x_i,z_K)\dots)$.

Finalmente, exigindo só de cada P^{A} que seja reflexiva e antisimétrica podemos provar, seguindo a demonstração da proposição II.6.11, que para $\mathfrak{A}\in Est^*(\tau)$

$\mathfrak{A}\in Est(\tau) \Longleftrightarrow \langle\mathfrak{A},\ P^{A}\rangle \models (\forall x)(\forall y)(x=y \leftrightarrow (\forall z)(P(x,z) \leftrightarrow P(y,z)))$.

II.6.14- Digressão

Intuitivamente podemos entender a diagonal como a "menor" relação de equivalência da estrutura, mais ainda, como a "menor" relação reflexiva da estrutura. Isto sugere definir a seguinte aproximação em L^1 à diagonal:

Seja $R(x,y)$ uma relação binária definível em L^1 (ver II.4.8.1(i)), definimos,

$$Ref(R) \longleftrightarrow (\forall x) R(x,x),$$

(o qual significa que R é reflexiva), então nossa aproximação é dada por

α_4: $Ref(R) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(x=y \rightarrow R(x,y))$.

Não é difícil demonstrar, com um pouco de cálculo dedutivo em L^1, que $\alpha_1 \wedge \alpha_4$ equivale à conjunção das sentenças α_1, α_2 e α_3 (dadas em II.6.1).

Devemos observar, entretanto, que em L^2 diádica, a diagonal pode ser caracterizada por

$$(\forall R)(Ref(R) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(x=y \rightarrow R(x,y))),$$

sendo, neste caso, R uma variável de 2ª ordem diádica.

Caracterização das Estruturas Topológicas

Seja $<X, \tau; \in^1>$ uma estrutura bissortida com $\in^1 \subseteq X \times \tau$. Veremos que se se satisfaz o axioma de extensionalidade

$$(\forall U)(\forall V)(U =^{\tau} V \leftrightarrow (\forall x)(x \in^1 U \leftrightarrow x \in^1 V)),$$

então podemos identificar τ como uma subcoleção de $P(X)$, e $\in^1$ com a pertinência usual.

II.6.15- Proposição

Para cada $A\in\tau$ definimos $\overline{A}=\{a\in X/a\in^1 A\}$. Seja $\overline{\tau}=\{\overline{A}/A\in\tau\}$, então $<X, \tau; \in^1> \cong <X, \overline{\tau}; \in>$.

Demonstração

Sejam $f:X\to X$ e $g:\tau\to\overline{\tau}$ dadas por $f(x)=x$ e $g(A)=\overline{A}$.

É obvio que f é uma bijeção e que $(a\in^1 A \longleftrightarrow a\in\overline{A})$, ie. $(a\in^1 A \longleftrightarrow f(a)\in g(A))$; portanto, para que o par (f,g) constitua um isomorfismo bissortido resta provar que g é uma bijeção.

i) g é sobre: é imediata

ii) g é injetora: se $g(A)=^{\overline{\tau}}g(B)$, então $\overline{A}=^{\overline{\tau}}\overline{B}$, ie. para todo x, $(x\in\overline{A} \longleftrightarrow x\in\overline{B})$, o que equivale a $(x\in^1 A \longleftrightarrow x\in^1 B)$, ie. $<X, \tau; \in^1> \models (\forall x)(x\in^1 U \leftrightarrow x\in^1 V)[A,B]$, logo, pelo axioma de extensionalidade, temos que $<X, \tau; \in^1> \models (U=V)[A,B]$, ie. $A=^{\tau}B$ ∎

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE ANÁLISE DA EXPRESSABILIDADE

Neste capítulo vamos apresentar alguns critérios para análise da expressabilidade dos Conceitos Matemáticos, em termos do que já temos nos referido como Propriedades de Teoria de Modelos de uma linguagem L. Daremos também, como complemento ao tema desenvolvido, algumas aplicações não-triviais à matemática.

III.1- O Espaço Est(τ)

Vamos definir sobre Est(τ) uma topologia e explorar algumas das suas propriedades na análise da expressabilidade.

Alertamos para o fato de que a classe Est(τ) é em geral uma classe própria e que os abertos que definimos serão possivelmente classes próprias. Portanto, a noção de "topologia" deve ser considerada com muito cuidado.

Um tratamento rigoroso de "coleções de classes" ou "superclasses", embora não permitido no sistema de teoria de conjuntos ZFC, é dado no sistema MT de Morse-Tarski (cf. Chuaqui [1980]). Nós adotaremos este sistema quando seja necessário, pela liberdade que temos para escolher o referencial teórico para a análise metalinguística.

A topologia a ser introduzida vai depender da linguagem L adequada ao tipo τ.

Consideremos L fixo e seja $\phi\in L_S$, então $Mod(\phi)=\{\mathcal{A}\in Est(\tau)/\mathcal{A}\models\phi\}$.

Seja $\mathcal{B}=\{Mod(\phi)/\phi\in L_S\}$ (observar que em geral $\mathcal{B}$ é uma superclasse).

III.1.1- Proposição. $\mathcal{B}$ é uma <u>base</u> para uma topologia sobre $Est(\tau)$

Demonstração. Obviamente $\bigcup\mathcal{B}=Est(\tau)$ pois para qualquer sentença válida σ: $Est(\tau)=Mod(\sigma)$.

Se ϕ, $\psi\in L_S$, então $Mod(\phi)\cap Mod(\psi)=\{\mathcal{A}\in Est(\tau)/\mathcal{A}\models\phi\wedge\psi\}=Mod(\phi\wedge\psi)$, logo, $\mathcal{B}$ é fechado para interseções finitas ■

III.1.2- Definição. O espaço $Est(\tau)$ munido da topologia gerada por $\mathcal{B}$ será chamado de <u>L-espaço</u>, e denotado simplesmente por E se o tipo τ não for necessário especificar.

III.1.3- Proposição

i) os abertos básicos do L-espaço são também fechados.

ii) seja $K \subseteq E$, então:

K é axiomatizável $\Longleftrightarrow$ K é fechado no L-espaço.

iii) se $K \subseteq E$, então $\overline{K} = Mod(Th(K))$

($\overline{K}$ denota o fecho de K no L-espaço).

iv) K_1 e K_2 são L-equivalentes $\Longleftrightarrow \overline{K}_1 = \overline{K}_2$

v) $\overline{\{\mathfrak{A}\}} = \{\mathfrak{B} \in E / \mathfrak{B} \equiv_L \mathfrak{A}\} = [\mathfrak{A}]_L$.

Demonstração

i) $Mod(\phi)^c = \{\mathfrak{A} \in E / \mathfrak{A} \not\models \phi\} = \{\mathfrak{A} \in E / \mathfrak{A} \models \neg\phi\} = Mod(\neg\phi)$

ii) ($\Longrightarrow$) se K é axiomatizável, então existe $\Sigma \subseteq L_S$ tal que $K = Mod(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} Mod(\sigma)$ que é fechado por (i).

($\Longleftarrow$) suponhamos K fechado, então K^c é aberto, logo, para todo $\mathfrak{A} \in K^c$ existe $\sigma \in L_S$ tal que $\mathfrak{A} \in Mod(\sigma) \subseteq K^c$. Seja S a coleção de todos esses σ, então $K^c = \bigcup_{\sigma \in S} Mod(\sigma)$, logo, $K = \bigcap_{\sigma \in S} Mod(\neg\sigma) = Mod(\bigcup_{\sigma \in S}\{\neg\sigma\})$, ie. K é axiomatizável.

iii) é consequência imediata da proposição II.5.4.4 e de (ii).

iv) ($\Longleftarrow$) se K_1 e K_2 são L-equivalentes, então $Th(K_1) = Th(K_2)$, logo, $Mod(Th(K_1)) = Mod(Th(K_2))$, ie. $\overline{K}_1 = \overline{K}_2$

($\Longrightarrow$) se $\overline{K}_1 = \overline{K}_2$ então $Mod(Th(K_1)) = Mod(Th(K_2))$. Suponhamos que K_1 e K_2 não são L-equivalentes, então $Th(K_1) \neq Th(K_2)$, ie., por exemplo, existe $\sigma \in Th(K_1)$ tal que $\sigma \notin Th(K_2)$, logo, para todo $\mathfrak{A} \in K_1 : \mathfrak{A} \models \sigma$, e existe $\mathfrak{B} \in K_2$ com $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$.

Temos que $\mathfrak{B} \notin K_1$, mas $\mathfrak{B} \in K_2 \subseteq \overline{K}_2 = \overline{K}_1$, então $\mathfrak{B} \in \overline{K}_1 \setminus K_1$, ie. $\mathfrak{B}$ é um ponto de acumulação de K_1, logo, como $\mathfrak{B} \in Mod(\neg\sigma)$ (que é um aberto básico), existe $\mathfrak{A} \in K_1$ tal que $\mathfrak{A} \in Mod(\neg\sigma)$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$), portanto, K_1 e K_2 são L-equivalentes.

v) basta conferir que $[\mathfrak{A}]_L$ é sempre axiomatizável por $Th(\mathfrak{A})$, ie. $[\mathfrak{A}]_L = Mod(Th(\mathfrak{A}))$.

Com efeito, $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]_L \longleftrightarrow \mathfrak{B} \equiv_L \mathfrak{A} \longleftrightarrow$ (por II.5.5.4) $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A}) \longleftrightarrow \mathfrak{B} \in Mod(Th(\mathfrak{A}))$.

Portanto, por (iii): $\{\overline{\mathfrak{A}}\} = Mod(Th(\mathfrak{A})) = [\mathfrak{A}]_L$ ∎

III.1.4- Observações

i) na proposição acima parte(iv) temos provado que $Mod(Th(K_1)) = Mod(Th(K_2))$ implica $Th(K_1) = Th(K_2)$ usando argumentos topológicos, pois de outro modo seria bem mai trabalhoso.

ii) da proposição acima parte (v) resulta que $\{\overline{\mathfrak{A}}\} = \{\overline{\mathfrak{B}}\} \longleftrightarrow \mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$.

III.1.5- Proposição

i) o espaço quociente $Est(\tau)/\equiv_L$ é um espaço de Hausdorff.

ii) a projeção canônica $\pi: Est(\tau) \to Est(\tau)/\equiv_L$ é um homomorfismo topológico (ver I.4.3.6).

Demonstração

ii) é consequência imediata de I.4.3.12 e da ob servação III.1.4 (ii).

i) consideremos $[\mathfrak{A}]_L$ e $[\mathfrak{B}]_L$ como elementos de $Est(\tau)/\equiv_L$ e suponhamos $[\mathfrak{A}]_L \neq [\mathfrak{B}]_L$, então $\mathfrak{A} \not\equiv_L \mathfrak{B}$, logo, existe $\sigma \in L_S$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$ e $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$, ie. $\mathfrak{A} \in Mod(\sigma)$ e $\mathfrak{B} \in Mod(\neg\sigma)$, então $[\mathfrak{A}]_L = \pi(\mathfrak{A}) \in \pi(mod(\sigma))$ e $[\mathfrak{B}]_L = \pi(\mathfrak{B}) \in \pi(Mod(\neg\sigma))$.

Agora, por (ii) temos que π é aberta, logo, $\pi(Mod(\sigma))$ e $\pi(Mod(\neg\sigma))$ são abertos em $Est(\tau)/\equiv_L$. Além disso, sendo $Mod(\sigma) \cap Mod(\neg\sigma) = \phi$, temos que, por I.4.3.14, $\pi(Mod(\sigma)) \cap \pi(Mod(\neg\sigma)) = \pi(Mod(\sigma) \cap Mod(\neg\sigma)) = \pi(\phi) = \phi$ ■

III.1.6- Corolário. Se L é um conjunto, então a topologia do L-espaço é um conjunto (embora seus elementos sejam em geral classes próprias), da mesma cardinalidade que a topologia do quociente $Est(\tau)/\equiv_L$.

Demonstração. É consequência imediata do fato que a projeção π é um homomorfismo topológico e de I.4.3.6 ■

III.1.7- Observação

Dado que nenhuma sentença de L pode distinguir duas estruturas elementarmente equivalentes, o espaço quociente $Est(\tau)/\equiv_L$ é idôneo para o estudo das propriedades de teoria de modelos da linguagem L (cf. Sayeki [1968]). Além disso, em concordância com a proposição II.5.5.13, temos que para o caso de L ser um conjunto, $Est(\tau)/\equiv_L$ será também um conjunto, evitando assim o aparecimento de classes próprias, e menos ainda de super classes

Quiçá uma das propriedades de teoria de modelos mais importantes é a de compacidade que estudaremos a seguir neste contexto topológico, com um certo grau de generalidade que necessitaremos depois.

III.1.8- Definição

i) sejam α e β cardinais com $\alpha\leqslant\beta$. Dizemos que o espaço E é (α,β)-compacto se todo cobrimento aberto de E de cardinalidade $\leqslant\beta$ admite um subcobrimento de cardinalidade$<\alpha$.

ii) uma família de classes em E tem a propriedade de α-interseçao se toda subfamília de cardinalidade$<\alpha$ tem interseção não vazia(se $\alpha=\aleph_0$ temos a propriedade de interseção finita PIF).

Notações. Diremos que E é (α, ∞)- compacto se E é (α, β)-compacto para todo $\beta\geqslant\alpha$.

E é compacto se é $(\aleph_0, \infty)$-compacto. E é enumeravelmente compacto se é $(\aleph_0,\aleph_0)$-compacto. Observa-se que E é Lindelöf se é $(\aleph_1, \infty)$-compacto.

Diremos que a linguagem L é (α, β)-compacta se o L-espaço $Est(\tau)$ é (α, β)-compacto para todo τ.

III.1.9- Proposição. São equivalentes

i) E é (α,β)-compacto.

ii) toda família de fechados $\{F_i\}_{i\in I}$ com $|I|\leqslant\beta$ e com a propriedade de α-interseção, tem interseção não vazia.

iii) se $\Sigma\subseteq L_S$ com $|\Sigma|\leqslant\beta$ e se $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ com $|\Sigma_0|<\alpha$ tem modelo, então Σ tem modelo.

Demonstração

(i)$\Longrightarrow$(ii): seja $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família de fechados com $|I|\leqslant\beta$ e com a propriedade de α-interseção, e suponhamos que $\bigcap_{i\in I}F_i=\phi$, então $\bigcup_{i\in I}F_i^c=E$, mas como E é (α,β)-compacto e $\{F_i^c\}_{i\in I}$ é um cobrimento aberto com $|I|\leqslant\beta$ temos que existe $I_0\subseteq I$ com $|I_0|<\alpha$ tal que $\bigcup_{i\in I_0}F_i^c=E$, logo, $\bigcap_{i\in I_0}F_i=\phi$ o que contradiz a propriedade de α-interseção.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): seja $\Sigma\subseteq L_S$ com $|\Sigma|\leqslant\beta$ e tal que para todo $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ com $|\Sigma_0|<\alpha$, $\mathrm{Mod}(\Sigma_0)\neq\phi$.

Consideremos a família de fechados $\{\mathrm{Mod}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$; esta família tem cardinalidade $\leqslant\beta$ e tem a propriedade de α-interseção, pois se $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ com $|\Sigma_0|<\alpha$ então $\bigcap_{\sigma\in\Sigma_0}\mathrm{Mod}(\sigma)=$ $\mathrm{Mod}(\bigcup_{\sigma\in\Sigma_0}\{\sigma\})=\mathrm{Mod}(\Sigma_0)\neq\phi$. Logo, por (ii) $\mathrm{Mod}(\Sigma)=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{Mod}(\sigma)\neq\phi$, ie. Σ tem modelo.

(iii)$\Longrightarrow$(i): basta provar para abertos básicos. Suponhamos $E=\bigcup_{i\in I}\mathrm{Mod}(\sigma_i)$ com $|I|\leqslant\beta$, então $\bigcap_{i\in I}\mathrm{Mod}(\neg\sigma_i)=\phi$, ie. $\mathrm{Mod}(\bigcup_{i\in I}\{\neg\sigma_i\})=\phi$.

Seja $\Sigma=\bigcup_{i\in I}\{\neg\sigma_i\}$, então, como $|\Sigma|\leqslant\beta$, por (iii) existe $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ com $|\Sigma_0|<\alpha$ tal que $\mathrm{Mod}(\Sigma_0)=\phi$, ie. existe $I_0\subseteq I$ com $|I_0|<\alpha$ tal que $\Sigma_0=\bigcup_{i\in I_0}\{\neg\sigma_i\}$ e $\mathrm{Mod}(\bigcup_{i\in I_0}\{\neg\sigma_i\})=\phi$, logo, $\bigcap_{i\in I_0}\mathrm{Mod}$ $(\neg\sigma_i)=\phi$, ie. $\bigcup_{i\in I_0}\mathrm{Mod}(\sigma_i)=E$, portanto, E é (α,β)-compacto ■

III.1.10- Proposição. Sejam $<X, \tau; \epsilon>$ e $<Y, \sigma; \epsilon>$ dois espaços topológicos (em sentido amplo) e $f:X\to Y$ um homomorfismo topológico, então:

X é (α,β)-compacto $\Longleftrightarrow$ Y é (α,β)-compacto.

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ é consequência imediata de ser f contínua e sobre

$(\Longleftarrow)$ é imediato por ser f aberta, sobre e τ-saturada (ver também I.4.3.17) ∎

III.1.11- Corolário. Est(τ) é (α,β)-compacto $\Longleftrightarrow$ Est(τ)/$\equiv_L$ é (α,β)-compacto ∎

III.1.12- Asserção

Se E é compacto, então o espaço Est(τ)/$\equiv_L$ é compacto, e sendo Hausdorff, é também um espaço normal. Além disso, a projeção π: E $\to$ Est(τ)/$\equiv_L$, sendo contínua, é também fechada.

Como consequência disto temos que a coleção $\{\pi(Mod(\sigma))/\sigma\in L_S\}$ é uma base de abertos e fechados em Est(τ)/$\equiv_L$ tornando-se num espaço Booleano. Em particular, é totalmente desconexo (cf. Bell e Slomson[1969]).

III.1.13- Definição. Diremos que a linguagem L satisfaz a <u>propriedade de não-finitude</u> (PNF) se todo $\Sigma \subseteq L_S$ que tem modelos finitos arbitrariamente grandes, tem algum modelo infinito.

III.1.14- Proposição. Se L é compacta, então L satisfaz PNF.

Demonstração

Se $\Sigma \subseteq L_S$ um conjunto de sentenças tendo modelos finitos arbitrariamente grandes, e consideremos $\Sigma^1 = \Sigma \cup \{\varepsilon_n / n \geq 2\}$ onde ε_n é a sentença

$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$,

(lembrar que estamos considerando $L \supseteq L^1$).

ε_n expressa o fato que no domínio da estrutura existem pelo menos n elementos.

Seja $\Delta \subseteq \Sigma^1$ finito e $m = \text{máx}\{n / \varepsilon_n \in \Delta\}$.

Afirmação: Todo modelo de $\Sigma \cup \{\varepsilon_m\}$ é modelo de Δ. Com efeito, basta observar que se $\mathfrak{A} \models \varepsilon_m$ então $\mathfrak{A} \models \varepsilon_n$ para $n \leq m$.

Portanto, como Σ tem modelos finitos arbitrariamente grandes, então tem algum modelo com pelo menos m elementos, logo, $\Sigma \cup \{\varepsilon_m\}$ tem modelo, ie. Δ tem modelo.

Pela compacidade de L podemos concluir que Σ^1 tem modelo. Mas obviamente qualquer modelo Σ^1 deve ser infinito, além de ser modelo de Σ, logo, Σ tem modelo infinito ∎

III.1.15- Observação

A proposição anterior significa que se L é compacta, nenhuma classe K de estruturas contendo modelos finitos arbitrariamente grandes e nenhum modelo infinito, é axiomatizável em L.

Por exemplo, numa linguagem L compacta, as classes dos grupos finitos, dos corpos finitos ou das álgebras de Boole finitas, não são axiomatizáveis

III.1.16- Corolário. Se existe $\theta \in L_S$ tal que para toda estrutura $\mathfrak{A} = \langle A; \ldots \rangle$:

$$\mathfrak{A} \models \theta \longleftrightarrow |A| < \aleph_0$$

então L não satisfaz PNF e, portanto, não é compacta ■

III.1.17- Corolário

Por II.1.6- temos que L^2 diádica, e portanto L^2 total, por conter a L^2 diádica, não satisfazem PNF. Analogamente, por II.5.6.2 (iii), temos que L^2_ω também não satisfaz PNF. Logo, nenhuma delas é compacta ■

A seguir vamos provar que a linguagem $L^2(\tau)$ monádica (para um certo tipo τ) não satisfaz PNF. Para este fim vamos procurar uma classe de estruturas de tipo τ, axiomatizável em $L^2(\tau)$ monádica, que contenha estruturas finitas arbitrariamente grandes e que não contenha nenhuma estrutura infinita.

Necessitamos dos preliminares seguintes sobre filtros e ultrafiltros numa álgebra de Boole:

III.1.18- Definição

Seja $\mathcal{B}=\langle B; \wedge^B, \vee^B, *^B; 0^B, 1^B\rangle$ uma álgebra de Boole (ver II.1.6) e $F\subseteq B$. Dizemos que F é um <u>filtro</u> em B se

i) $a,b\in F \Longrightarrow a\wedge b\in F$

ii) $a\in F$ e $a\leqslant b \Longrightarrow b\in F$,

ou equivalente, $a,b\in F$ e $a\wedge b\leqslant c \Longrightarrow c\in F$, ($a\leqslant b$ define-se usualmente na forma $a\wedge b=a$ ou $a\vee b=b$).

Observa-se que B mesmo é um filtro em B e que $F=B \Longleftrightarrow 0\in F$. No caso que $0\notin F$ diremos que F é um filtro próprio.

Um filtro F é dito <u>principal</u> se existe $a\in F$ tal que $a=\inf F$. É fácil ver que todo filtro principal é da forma $F_a=\{b\in B/a\leqslant b\}$.

Diremos que um filtro próprio F é um <u>ultrafiltro</u> se é maximal com respeito à inclusão na classe dos filtro próprios de B.

III.1.19- Alguns Resultados Gerais

i) se $\{F_j\}$ é uma família de filtros em B, então $\bigcap F_j$ é um filtro em B.

ii) dado um subconjunto $S \subseteq B$, define-se o filtro gerado por S como $<S> = \bigcap\{F/F$ é filtro e $S \subseteq F\}$

Uma definição "construtiva" para $<S>$ é dada pelas seguintes especificações:

$S^c = \{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n / n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in S\}$

$S^0 = \{a / \exists b \in S$ com $b \leqslant a\}$,

então $<S> = (S^c)^0$.

iii) $<S>$ é um filtro próprio $\longleftrightarrow$ S tem a propriedade de interseção finita (PIF).

iv) o lema de Zorn garante que todo filtro próprio pode ser extendido a um ultrafiltro, e portanto, todo conjunto $S \subseteq B$ com a PIF está contido em algum ultrafiltro. Este resultado é conhecido com o nome de <u>teorema do ultrafiltro</u> e é um dos princípios de maximalidade mais importantes da teoria de conjuntos como o axioma de escolha, que é equivalente ao lema de Zorn, ou o princípio maximal de Hausdorff (cf. Kelley [1955]).

(Baseados no teorema de representação de Stone que afirma que toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de P(A) para algum conjunto A, podemos justificar a nossa observação anterior salientando que toda afirmação sobre a álgebra de Boole $<B;\ldots>$ é uma afirmação sobre a álgebra $<P(A);\ \cap,\ \cup,\ ^c;\ \phi,\ A>$ a qual pode se reduzir a uma afirmação sobre o conjunto parcialmente ordenado $<P(A);\subseteq>$ e em última instância pode ser expressa, metalinguísticamente, em termos do símbolo de pertinência $\in$, relação fundamental da teoria de conjuntos).

Não podemos deixar de mencionar que, embora o axioma de escolha implique o teorema do ultrafiltro, via o lema de Zorn, tem-se demonstrado que o teorema do ultrafiltro não implica o axioma de escolha, ie. é mais fraco que ele (cf. Halpern e Levy [1971]). Isto é importante de ser observado porque se um resultado matemático que usualmente requer o axioma de escolha para sua demonstração, puder ser provado a partir do teorema do ultrafiltro, teremos conseguido uma melhor compreensão dos seus fundamentos (ver III.5.3).

v) é fácil provar que se A é um conjunto finito, então todo ultrafiltro sobre A (ie, em P(A)) é principal. Por outro lado, se A é infinito, existem ultrafiltros não principais: aqueles que contém o filtro gerado pelos subconjuntos cofinitos de A (cf. Monk [1976, pag. 321]).

No caso geral, se B é uma álgebra de Boole finita, então B é da forma P(A) para algum A, logo, todo ultrafiltro em B é principal. Além disso, pode-se provar, a partir do teorema do ultrafiltro, que toda álgebra de Boole infinita admite ultrafiltros não-principais (cf. Levy [1979, pag. 263]).

Portanto, se $\mathcal{B}=\langle B;\ldots\rangle$ é uma álgebra de Boole, temos que:

$|B|<\aleph_0 \longleftrightarrow$ todo ultrafiltro em B é principal.

Nossa intensão a seguir é expressar a sentença a direita em $L^2(\tau)$ monádica, onde τ é o tipo de similaridade de $\mathcal{B}$.

III.1.20- Proposição

$$U \text{ é um ultrafiltro em } B \longleftrightarrow \forall a \in B: a \in U \text{ ou } a^* \in U.$$

Demonstração

($\longleftarrow$) seja $U \subseteq F \subseteq B$ com F filtro, e suponhamos que $F \neq U$, então existe $a \in F \setminus U$, mas por hipótese, como $a \notin U$: $a^* \in U$, ie. $a^* \in F$. Agora, como F é um filtro, $0 = a \wedge a^* \in F$, ie. $F = B$, portanto U é maximal.

($\longrightarrow$) suponhamos que U é um ultrafiltro e que $a \notin U$. Seja $F = \langle U \cup \{a\} \rangle$, então como U é um ultrafiltro que não contém a, devemos ter $F = B$, ie. F não é próprio, logo, por III. 1.19 (iii), $U \cup \{a\}$ não tem a PIF, ie. existem $a_1, \ldots, a_n \in U$ tais que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge a = 0$, então, $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leqslant a^*$, mas $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in U$ por ser filtro, portanto, pela mesma razão $a^* \in U$ ■

III.1.21- Sejam x, y variáveis de 1ª ordem e X uma variável de 2ª ordem monádica, então podemos expressar em $L^2(\tau)$:

$$x \leqslant y \longleftrightarrow x \wedge y = x,$$

$$X \text{ é filtro} \longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \rightarrow x \wedge y \in X)$$
$$\wedge\ (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge x \leqslant y \rightarrow y \in X),$$

X é próprio $\longleftrightarrow \neg(0 \in X)$,

X é principal $\longleftrightarrow X$ é filtro $\wedge$

$$(\exists x)(\forall y)(x \in X \wedge (y \in X \rightarrow x \leqslant y)),$$

X é ultrafiltro $\longleftrightarrow X$ é filtro $\wedge (\forall x)(x \in X \vee x^* \in X)$,

finalmente podemos expressar em $L^2(\tau)$ monádica: $|B| < \aleph_0 \longleftrightarrow \mathcal{B} \models$ $(\forall X)(X$ é ultrafiltro $\rightarrow X$ é principal$)$.

Devemos observar que esta expressão da finitude de B requer de toda a estrutura Booleana de $\mathcal{B}$, a diferença da expressão diádica dada em II.1.6.

III.1.22- Consequência

$L^2(\tau)$ monádica não satisfaz a PNF, logo, também não é compacta.

III.1.23- Vamos analizar a possibilidade deexpressar a finitude, sem restrinções de estrutura, em L^2 monádica. Para isto devemos observar que um conjunto A é finito se e somente se P(A) é finito, e sabendo que toda álgebra de Boole finita é a potência de um conjunto, podemos aplicar a redução mencionada em III.1.19 (iv) à sentença anterior, que chamaremos de θ, e obter uma sentença equivalente, mas que só contenha o símbolo de pertinência $\in$, próprio das linguagens de ordem superior, além do símbolo de igualdade=.

Isto, embora seja uma solução plausível, não resolve o nosso problema, porque a variável monádica X, sendo de 2ª ordem sobre P(A), é de 3ª ordem sobre A, ie. o universo de sua variação é o conjunto P(P(A)).

O fato de X ser uma variável de 2ª ordem monádica sobre P(A) sugere considerar estruturas bissortidas da forma $\langle A, \sigma; \in\rangle$ onde σ=P(A). Neste caso, X será uma variável monádica de 2ª ordem sobre o domínio σ.

Finalmente, baseados nas considerações dadas em II.6.15, para garantir que σ seja uma coleção de subconjuntos de A devemos impor o axioma de extensionalidade:

θ^1: $(\forall U)(\forall V)(U=V\leftrightarrow(\forall x)(x\in U\leftrightarrow x\in V))$,

onde U e V são variáveis de 1ª ordem sobre σ. Além disso, para garantir que σ seja todo P(A) devemos exigir.

θ^{11}: $(\forall \mathcal{Z})(\exists U)(\mathcal{Z}=U)$,

onde $\mathcal{Z}$ é uma variável de 2ª ordem monádica sobre A.

Assim, podemos expressar:

A é finito$\Longleftrightarrow$<A, σ; ϵ>$\models \theta\wedge\theta^1\wedge\theta^{11}$.

Fica aberto para nós o problema de expressar a finitude, em L^2 monádica, para estruturas unissortidas, sem outra relação que a de identidade.

III.1.24- Proposição

$L^1(\tau)$ é compacta para todo tipo de similaridade τ.

Este teorema, chamado de teorema de compacidade, é um dos mais importantes da teoria de modelos, e dedicaremos a próxima seção para a sua demonstração. A prova mais conhecida dele é a partir do teorema de completude do cálculo de predicados clássico, mas este resultado envolve a noção sintática de dedutibilidade que decidimos evitar neste tese. Daremos uma prova puramente semântica a partir do método de construção de modelos por ultraprodutos, que explicaremos com detalhe suficiente para as aplicações que apresentaremos.

III.2- O Teorema de Łos e a Compacidade

III.2.1- A Construção de Ultraprodutos

A seguinte construção é uma generalização da construção, em Álgebra, do produto direto de uma família de estruturas algébricas sem relações. Vamos mostrar esta construção no caso das estruturas bissortidas já que usualmente não se encontra na literatura, e por ser de especial interesse para as estruturas topológicas.

Seja $\mathfrak{A}_i=\langle A_i^0, A_i^1; R_i^\sigma\rangle$, $i\in I$, uma família de estruturas bissortidas munidas, por simplicidade, de uma relação de sorte $\sigma=(s_1,\dots s_n)$ com $s_k=0$ ou 1, (as funções e constantes podem ser tratadas como relações na forma descrita em I.1.6.

Para cada $s=0,1$ consideremos o produto cartesiano

$A_s=\prod_{i\in I}A_i^s=\{f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i^s/\forall i\in I:f(i)\in A_i^s\}$, e seja D um ultrafiltro sobre I (ie. em $P(I)$).

III.2.1.1- Definição

Para $s=0,1$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$\forall f,\ g\in A_s: f\sim_s g \longleftrightarrow \{i\in I/f(i)=_i^s g(i)\}\in D$,

onde $=_i^s$ é a relação de igualdade em A_i^s.

Denotamos com A_s/D, ou mais frequentemente com $\pi_D A_i^s$, o quociente respectivo, e com $*f$ a classe de equivalência de f módulo D.

A seguir vamos definir uma relação R_D^σ a fim de obter uma nova estrutura $\langle A_0/_D,\ A_1/_D;\ R_D^\sigma\rangle$ do mesmo tipo de similaridade que as originais $\mathfrak{A}_i$. Tal estrutura será denotada por $\underset{i\in I}{\pi}\mathfrak{A}_i/_D$ ou por $\pi_D\mathfrak{A}_i$ e será chamada de <u>ultraproduto</u> da família $\mathfrak{A}_i$.

III.2.1.2- Definição

Se $\sigma=(s_1,\ldots,s_n)$ e $f_\kappa\in A_{\bar{s}_\kappa}$ $(\kappa=1,\ldots,n)$, definimos $R_D^\sigma(*f_1,\ldots,*f_n)\longleftrightarrow\{i\in I/R_i^\sigma(f_1(i),\ldots,f_n(i))\}\in D$.

III.2.1.3- Interpretações no Ultraproduto

Seja α_i uma assignação em $\mathfrak{A}_i$ para cada $i\in I$ (ver definição II.4.1.1), então fica determinada uma assignação α em $\pi_D\mathfrak{A}_i$ dada por:

para cada s-variável $x(s=0,1)$ de 1ª ordem, $\alpha(x)=*f$ onde $f\in A_s$ e $f(i)=\alpha_i(x)$.

Reciprocamente, dada α em $\pi_D\mathfrak{A}_i$, e dada x uma s-variável, temos que existe $f \in A_S$ tal que $\alpha(x) = {}^*f$, então definimos para cada $i \in I$, $\alpha_i(x) = f(i)$ (aqui está implícito o axioma de escolha).

III.2.1.4- Observação

Esta última escolha de α_i depende do representante f de $^*f$, ie. se g é tal que $^*g = {}^*f$, podemos definir para cada $i \in I$, $\beta_i(x) = g(i)$. Esta nova assignação em geral é distinta de α_i, porém temos que: $^*g = {}^*f \longleftrightarrow \{i \in I / g(i) \overset{S}{=}_i f(i)\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \beta_i(x) \overset{S}{=}_i \alpha_i(x)\} \in D$.

A partir desta observação vê-se facilmente que, se ϕ é uma fórmula, então:
$\{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \phi[\alpha_i]\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \phi[\beta_i]\} \in D$,
podendo ser ambos os conjuntos distintos.

III.2.2- Teorema de Łos para $L^1(\tau)$ Bissortido

Seja D um ultrafiltro sobre I, α e α_i assignações como acima, e ϕ uma fórmula em $L^1(\tau)$, então
$\pi_D \mathfrak{A}_i \models \phi[\alpha] \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \phi[\alpha_i]\} \in D$.

Demonstração. Por indução sobre a complexidade da fórmula ϕ, (baseados na observação II.4.8.1 (iii) podemos supor que os únicos símbolos lógicos são $\neg$, $\wedge$ e $\exists$ além das igualdades $\overset{S}{=}$

para $s=0,1)$.

i) se ϕ é atômica:

<u>Caso 1</u>. ϕ é $x_1 =^s x_2$, $s=0,1$, com x_1, x_2 s-variáveis.

$\pi_D \mathfrak{A}_i \models (x_1 =^s x_2)[\alpha] \longleftrightarrow \alpha(x_1) =^s \alpha(x_2) \longleftrightarrow$ (por III.2.1.1) $\{i \in I / \alpha_i(x_1) \overset{s}{=}_i \alpha_i(x_2)\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models (x_1 =^s x_2)[\alpha_i]\} \in D$.

<u>Caso 2</u>. ϕ é $R^\sigma(x_1,\ldots,x_n)$, $\sigma=(s_1,\ldots s_n)$ e x_j é uma s_j-variável.

$\pi_D \mathfrak{A}_i \models R^\sigma(x_1,\ldots,x_n)[\alpha] \longleftrightarrow R^\sigma_D(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) \longleftrightarrow$ (por III.2.1.2) $\{i \in I / R^\sigma_i(\alpha_i(x_1),\ldots \alpha_i(x_n))\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models R^\sigma(x_1,\ldots,x_n)[\alpha_i]\} \in D$.

ii) se ϕ é $\neg\psi$:

$\pi_D \mathfrak{A}_i \models (\neg\psi)[\alpha] \longleftrightarrow$ não $\pi_D \mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha] \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha_i]\} \notin D \longleftrightarrow$ (por ser D um ultrafiltro) $\{i \in I / \mathfrak{A}_i \not\models \psi[\alpha_i]\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models (\neg\psi)[\alpha_i]\} \in D$.

iii) se ϕ é $\psi \wedge \theta$:

$\pi_D \mathfrak{A}_i \models (\psi \wedge \theta)[\alpha] \longleftrightarrow \pi_D \mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha]$ e $\pi_D \mathfrak{A}_i \models \theta[\alpha] \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha_i]\} \in D$ e $\{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \theta[\alpha_i]\} \in D \overset{(*)}{\longleftrightarrow} \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha_i]\} \cap \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models \theta[\alpha_i]\} \in D \longleftrightarrow \{i \in I / \mathfrak{A}_i \models (\psi \wedge \theta)[\alpha_i]\} \in D$.

Em (*), $\Longrightarrow$ é válida pois D sendo um filtro é fechado por interseções (finitas), entretanto, $\Longleftarrow$ é válida pois os conjuntos a esquerda contêm à interseção e então pertencem ao filtro D.

iv) se ϕ é $(\exists x)\psi$ com x uma s-variável $(s=0,1)$:

Vejamos primeiro que para todo $i \in I$:

$\alpha[\frac{x}{{}^*f}]_i = \alpha_i[\frac{x}{f(i)}]$.

Com efeito, seja z uma s-variável e suponhamos que $\alpha(z) = {}^*g$, então $\alpha_i(z) = g(i)$.

$$\text{Agora, } \alpha[\tfrac{x}{{}^*f}](z) = \begin{cases} \alpha(z), & \text{se } z \neq x \\ {}^*f, & \text{se } z = x, \end{cases}$$

$$\text{portanto, } \alpha[\tfrac{x}{{}^*f}]_i(z) = \begin{cases} g(i), & \text{se } z \neq x \\ f(i), & \text{se } z = x. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\alpha_i[\frac{x}{f(i)}](z)=\begin{cases}\alpha_i(z)=g(i), \text{ se } z\neq x\\ f(i), \text{ se } z=x\ .\end{cases}$$

Suponhamos agora que $\pi_D\mathfrak{A}_i\models(\exists x)\psi[\alpha]$, então existe $*f\in\pi_D{}^{s}_{i}$ tal que $\pi_D\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha[\frac{x}{*f}]]$, logo, por hipótese indutiva,

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha[\frac{x}{*f}]_i]\}\in D$, ie.

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha_i[\frac{x}{f(i)}]]\}\in D$, portanto,

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models(\exists x)\psi[\alpha_i]\}\in D$ pois este conjunto contém ao anterior e D é um filtro.

Por outro lado, se

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models(\exists x)\psi[\alpha_i]\}\in D$ então

$\{i\in I/\text{existe } a_i\in A_i^s:\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha_i[\frac{x}{a_i}]]\}\in D$.

Seja $f\in A_s$ tal que $f(i)=a_i$ para cada $i\in I$, então

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha_i[\frac{x}{f(i)}]]\}\in D$, ie. existe $*f\in\pi_D A_i^s$ tal que

$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha[\frac{x}{*f}]_i]\}\in D$, logo por hipótese indutiva novamente, temos que $\pi_D\mathfrak{A}_i\models\psi[\alpha[\frac{x}{*f}]]$, portanto, $\pi_D\mathfrak{A}_i\models(\exists x)\psi[\alpha]$ ∎

III.2.2.1- Corolário

i) se σ é uma sentença em $L^1(\tau)$, então

$\pi_D\mathfrak{A}_i\models\sigma\longleftrightarrow\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\sigma\}\in D$.

ii) se a linguagem admite funções F^σ com $\sigma=(s_1,\ldots,s_n,s)$, e $f\in A_s$, $f_\kappa\in A_{s_\kappa}(\kappa=1,\ldots,n)$

então:

$*f={}^{s}F_D^\sigma(*f_1,\ldots,*f_n)\longleftrightarrow\{i\in I/f(i)={}^{s}_{i}F_i^\sigma(f_1(i),\ldots,f_n(i))\}\in D$.

iii) seja K uma classe de estruturas axiomatizável por um conjunto de sentenças Σ com $|\Sigma|<\alpha$ (onde α é um cardinal infinito). Seja $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ uma família de estruturas e D um ultrafiltro sobre I fechado por interseções de um número $<\alpha$ conjuntos, então: $\pi_D\mathfrak{A}_i\in K \longleftrightarrow \{i\in I/\mathfrak{A}_i\in K\}\in D$.

Com efeito, se $K=Mod(\Sigma)$, então:

$\pi_D\mathfrak{A}_i\in Mod(\Sigma) \longleftrightarrow \forall\sigma\in\Sigma: \pi_D\mathfrak{A}_i\models\sigma \longleftrightarrow \forall\sigma\in\Sigma:$ $\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\sigma\}\in D \longleftrightarrow \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\sigma\}\in D \longleftrightarrow \{i\in I/\forall\sigma\in\Sigma:\mathfrak{A}_i\models\sigma\}\in D \longleftrightarrow \{i\in I/$ $\mathfrak{A}_i\in Mod(\Sigma)\}\in D$.

Os (ultra) filtros com a propriedade mencionada são ditos α-completos e serão estudados com algum detalhe no capítulo IV, em conexão com as linguagens infinitárias que introduziremos aí ∎

III.2.3- Teorema de Compacidade para $L^1(\tau)$ Bissortido

Seja $\Sigma\subseteq L_S(\tau)$ e suponhamos que todo $\Delta\subseteq\Sigma$ finito tem modelo (bissortido), então Σ tem modelo (bissortido).

Demonstração. Seja $I=P_\omega(\Sigma)=\{\Delta\subseteq\Sigma/\Delta$ é finito$\}$. Para cada $\Delta\in I$ seja $\mathfrak{A}_\Delta$ um modelo de Δ que por hipótese existe.

Vamos construir um ultrafiltro D sobre I de tal modo que o ultraproduto $\pi_D\mathfrak{A}_\Delta$ seja um modelo de Σ.

Para cada $\Delta\in I$ seja $A_\Delta=\{\Delta^1\in I/\Delta\subseteq\Delta^1\}$

Afirmação 1: $\{A_\Delta\}_{\Delta\in I}$ tem a PIF

Com efeito, como para $\kappa=1,\ldots,n$ temos que $\Delta_\kappa\subseteq\Delta_1$

$\ldots\cup\Delta_n\in I$, então

$$\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_n\in A_{\Delta_1}\cap\cdots\cap A_{\Delta n},$$

ie. $A_{\Delta_1}\cap\cdots\cap A_{\Delta_n}\neq 0$.

Logo, por III.1.19 (iv) existe um ultrafiltro D tal que para todo $\Delta\in I: A_\Delta\in D$.

Afirmação 2: $\pi_D\mathfrak{A}_\Delta\models\Sigma$.

Seja $\sigma\in\Sigma$, então $\{\sigma\}\in I$. Agora, se $\sigma\in\Delta\in I$, então $\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma$, logo temos que $A_{\{\sigma\}}=\{\Delta\in I/\sigma\in\Delta\}\subseteq\{\Delta\in I/\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma\}$, portanto, como $A_{\{\sigma\}}\in D$ e D é um filtro, $\{\Delta\in I/\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma\}\in D$, em consequência, pelo teorema de Łos, $\pi_D\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma$ ■

Para uma outra demonstração do teorema de compacidade usando ultraprodutos e a topologia do espaço Est(τ) pode-se consultar Prestel[1977].

II.2.3.1- Observações

i) o teorema de compacidade foi demonstrado a partir do teorema do ultrafiltro que permite a construção de ultraprodutos. Pode-se provar também a implicação contrária, tornando as duas noções equivalentes (cf. Bell e Slomson[1969, p. 104]).

ii) é necessário observar que a demonstração do teorema de compacidade só usa a implicação de direita a esquerda do teorema de Łos.

III.2.4- Algumas Consequências do Teorema de Łos

i) se $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ para todo $i\in I$, então $\pi_D \mathfrak{A}_i$ é chamado de ultrapotência de $\mathfrak{A}$ e denotado por $\mathfrak{A}^I/D$. Neste caso temos que se $\sigma \in L^1_S$ então:

$\mathfrak{A}^I/D \models \sigma \longleftrightarrow \{i\in I/\mathfrak{A} \models \sigma\} \in D \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \sigma$, portanto, $\mathfrak{A}^I/D \equiv_{L^1} \mathfrak{A}$.

ii) as aplicações $d_s : A_s \to A_s^I/D (s=0,1)$ definidas por $d_s(a) = {}^*f_a$ onde $f_a(i) = a$ para todo $i\in I$, constituem um mergulho bissortido, ie. se R^σ é uma relação da estrutura $\mathfrak{A}$ de sorte $\sigma=(s_1,\dots,s_n)$ e R_D^σ é a correspondente em $\mathfrak{A}^I/D$ temos que para $a_1 \in A_{s_1},\dots,a_n \in A_{s_n}$:

III.2.4.1- $R_D^\sigma(d_{s_1}(a_1),\dots d_{s_n}(an)) \longleftrightarrow R^\sigma(a_1,\dots,a_n)$, (em particular para as igualdades $=^s$, com o que se estabelece que cada d_s é uma aplicação injetora).

Mais do que isso, se R^σ é qualquer relação definível (ver II.4.8.1 (i)) na linguagem $L^1(\tau)$, então o teorema de Łos garante que III.2.4.1 é também satisfeita.

III.2.5- Digressão

A situação descrita no último parágrafo é tão importante em teoria de modelos que lhe foi dado um nome especial.

Sejam $\mathfrak{A} = \langle A;\dots\rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle B;\dots\rangle$ duas estruturas (unissortidas por simplicidade) e $f:A\to B$ uma função.

i) f é dito um <u>mergulho elementar</u> com respeito à linguagem L, se para toda relação n-ária ($n \geq 0$) R <u>definível</u> em L e para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos que:

$R^A(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow R^B(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, ou equivalentemente:

$$\mathfrak{A} \models R[a_1, \ldots, a_n] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models R[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

ii) se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma <u>subestrutura elementar</u> de $\mathfrak{B}$ se a inclusão $i: A \to B$ é um mergulho elementar. Este fato é usualmente denotado por $\mathfrak{A} <_L \mathfrak{B}$. Observe-se que $\mathfrak{A} <_L \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$.

Nem toda subestrutura é elementar. Por exemplo, se considerarmos $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathbb{Q}$ seu corpo primo, a relação $R(x)$ definida pela fórmula $(\exists y)(y^2 = x)$ não é preservada pela inclusão, pois temos que $\mathbb{R} \models R(2)$ embora $\mathbb{Q} \models \neg R(2)$.

Um exemplo importante que não trataremos aqui mas que pode ser consultado em Monk [1976, pag. 362], é o seguinte: se K_1 e K_2 são dois corpos ordenados real fechados e $K_1 \subseteq K_2$, então $K_1 <_{L^1} K_2$.

Finalmente, dado que toda estrutura $\mathfrak{A}$ está mergulhada em forma "natural" em $\mathfrak{A}^I/D$, podemos supor que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^I/D$ e, pelas considerações anteriores, que $\mathfrak{A} <_{L^1} \mathfrak{A}^I/D$. Pode-se provar que $\mathfrak{A}^I/D$ é uma extensão própria de $\mathfrak{A}$ se e somente se D é um ultrafiltro não-principal

O conceito de subestrutura elementar não será utilizado neste trabalho.

III.2.6- Proposição

L^1 satisfaz a propriedade de não-finitude (PNF), ie. se $\Sigma \subseteq L^1_S$ tem modelos finitos arbitrariamente grandes, então Σ admite um modelo infinito.

Demonstração. Vamos apresentar aqui uma demonstração distinta à dada em III.1.14 e usando o teorema de Łos.

Seja ε_k a sentença dada em III.1.14 que afirma a existência de $\geqslant k$ elementos $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 2$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathfrak{A}n$ um modelo finito de Σ com $\geqslant n$ elementos, os quais existem por hipótese. Seja D um ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que contém os subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$.

Afirmação. para todo $k \geqslant 2 : \pi_D \mathfrak{A}n \models \varepsilon_k$.

Com efeito, pela escolha dos $\mathfrak{A}n$ temos que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} / \mathfrak{A}n \models \neg \varepsilon_k\}$ é finito, logo, $\{n \in \mathbb{N} / \mathfrak{A}n \models \varepsilon_k\}$ é cofinito, ie. pertence a D, portanto, pelo teorema de Łos $\pi_D \mathfrak{A}n \models \varepsilon_k$. Isto significa que $\pi_D \mathfrak{A}n$ é infinito.

Finalmente, é imediato a partir do teorema de Łos que $\pi_D \mathfrak{A}n$ é modelo de Σ pois cada $\mathfrak{A}n$ o é ∎

III.2.6.1- Corolário

A classe dos corpos finitos K_c e a classe dos grupos finitos K_g não são axiomatizáveis em L^1.

Isto acarreta o seguinte fato: K_c e K_g são subclasses próprias de $Mod(Th(K_c))$ e $Mod(Th(K_g))$ respectivamente (ver II 5.4.5), ie. existem corpos infinitos e grupos infinitos que satisfazem as mesmas sentenças de 1ª ordem comuns a todos seus contrapartes finitos. Tais modelos são chamados de <u>pseudofinitos</u>, e podem ser obtidos, como mostra a proposição anterior, como ultraprodutos de modelos finitos de cardinalidade arbitrariamente grande ■

A teoria dos corpos pseudofinitos é tratada em Ax [1968], (da teoria dos grupos pseudofinitos, ou ainda, dos grupos abelianos pseudos finitos não conhecemos referência).

III.2.7- Possibilidade do Teorema de Łos para L^2 Monádica

Vamos analizar brevemente a possibilidade de extender o teorema de Łos para a linguagem L^2 monádica.

Primeiro faremos uma discussão sobre as assignações às variáveis monádicas no ultraproduto de uma família de estruturas unissortidas $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\epsilon I}$.

III.2.7.1- Definição

Sejam α_i assignações em $\mathfrak{A}_i$ para cada $i\epsilon I$. Se X é uma variável monádica, definimos $\alpha(X)(\subseteq\pi_D A_i)$ como:

$$\alpha(X)=\{{}^*f\epsilon\pi_D A_i/\{i\epsilon I/f(i)\epsilon\alpha_i(X)\}\epsilon D\}.$$

Facilmente pode-se verificar que está bem definida pois, se $^*g={}^*f$ então, $\{i\epsilon I/f(i)\epsilon\alpha_i(X)\}\epsilon D\longleftrightarrow\{i\epsilon I/g(i)\epsilon\alpha_i(X)\}\epsilon D$, já que $\{i\epsilon I/f(i)\epsilon\alpha_i(X)\}\cap\{i\epsilon I/f(i)=g(i)\}\subseteq\{i\epsilon I/g(i)\epsilon\alpha_i(X)\}$.

O anterior simplesmente pode ser dito do seguinte modo: para cada família de subconjuntos $S_i \subseteq A_i$ podemos definir $S \subseteq \pi_D A_i$ como $S = \{{}^*f \in \pi_D A_i / \{i \in I / f(i) \in S_i\} \in D\}$.

Isto é particularmente útil para gerar os abertos de uma topologia no ultraproduto $\pi_D A_i$ onde cada A_i é um espaço topológico e cada S_i um aberto em A_i (cf. Bankston [1977]).

III.2.7.2- Hipótese

Vamos supor como hipótese de trabalho que para cada $S \subseteq \pi_D A_i$ temos uma maneira "uniforme" de assignar a cada $i \in I$ um subconjunto $S(i) \subseteq A_i$. A palavra "uniforme" pode ser considerada, por exemplo, no sentido de que aplicando à família dos $S(i)$ a construção acima possamos obter novamente S, ie.

$$S = \{{}^*f \in \pi_D A_i / \{i \in I / f(i) \in S(i)\} \in D\}.$$

III.2.7.3- Definição. Sob a hipótese anterior, dada uma assignação α em $\pi_D \mathfrak{A}_i$, podemos definir as assignações α_i em cada $\mathfrak{A}_i$ do seguinte modo: para cada variável monádica X, $\alpha_i(X) = \alpha(X)(i)$.

III.2.7.4- Lema. Independentemente da forma de definir S(i) temos:

$$\alpha[\frac{X}{S}]_i = \alpha_i[\frac{X}{S(i)}]$$

Demonstração. Seja Z uma variável monádica, então

$$\alpha[\frac{X}{S}](Z)=\{\begin{matrix}\alpha(Z), & \text{se } Z\neq X\\ S\ , & \text{se } Z=X,\end{matrix}$$

portanto, $\alpha[\frac{X}{S}]_i(Z)=\alpha[\frac{X}{S}](Z)(i)$

$$=\{\begin{matrix}\alpha(Z)(i), & \text{se } Z\neq X\\ S(i), & \text{se } Z=X\end{matrix} =\{\begin{matrix}\alpha_i(Z), & \text{se } Z\neq X\\ S(i), & \text{se } Z=X\end{matrix}$$

$$=\alpha_i[\frac{X}{S(i)}](Z) \blacksquare$$

III.2.7.4- Proposição. Se ϕ é uma fórmula em $L^2(\tau)$ monádica (τ pode ser tomada também bissortida) então:

$\pi_D\mathfrak{A}_i \models \phi[\alpha] \Longrightarrow \{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \phi[\alpha_i]\}\in D$.

Demonstração. Basta acrescentar os seguintes passos na prova do teorema de Łos III.2.2.

Em (i):

<u>Caso 3</u>. Se ϕ é $X(x)$ onde X é uma s-variável (s=0,1) de 2ª ordem monádica e x é uma s-variável de 1ª ordem.

$\pi_D\mathfrak{A}_i \models X(x)[\alpha] \longleftrightarrow \alpha(X)(\alpha(x)) \longleftrightarrow \alpha(x)\in\alpha(X) \longleftrightarrow$ (por III.2.7.1) $\{i\in I/ \alpha_i(x)\in\alpha_i(X)\}\in D \longleftrightarrow \{i\in I/\mathfrak{A}_i \models X(x)[\alpha_i]\}\in D$.

Em (iv): Se ϕ é $(\exists X)\ \psi$ onde X é uma s-variável de 2ª ordem monádica.

$\pi_D\mathfrak{A}_i \models (\exists X)\psi[\alpha] \Longrightarrow$ existe $S\subseteq\pi_D A_i^s$ tal que $\pi_D\mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha[\frac{X}{S}]] \Longrightarrow$ (por hipótese indutiva) $\{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \psi[\alpha[\frac{X}{S}]_i]\}\in D \Longrightarrow$ (pelo lema) $\{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \psi$

$[\alpha_i[\frac{X}{S(i)}]]\}\in D \Rightarrow \{i\in I/\mathfrak{A}_i \models (\exists X)\psi[\alpha_i]\}\in D$ pois este conjunto contém ao anterior e D é um filtro ∎

III.2.7.5- Observação

Para provar a recíproca deveríamos garantir que dada uma família $S_i \subseteq A_i^s$, existe um $S \subseteq \pi_D A_i^s$ tal que para todo $i\in I$, $S(i)=S_i$. Isto de fato não é verdade porque a recíproca implica o teorema de compacidade como observamos em III.2.3.1, o qual não é válido em L^2 monádico (ver III.1.22).

III.2.7.6- Corolário

Se $\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}$ para todo $i\in I$, então para toda sentença $\sigma\in L_S^2(\tau)$ temos:

$$\mathfrak{A}^I/D \models \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \sigma \ \blacksquare$$

É fácil ver que o corolário acima implica sua recíproca: $\mathfrak{A}^I/D \not\models \sigma \Rightarrow \mathfrak{A}^I/D \models \neg\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \sigma$. Portanto, podemos concluir daí que, para todo I e para todo ultrafiltro D sobre I, $\mathfrak{A}^I/D \equiv_{L^2_{MON}} \mathfrak{A}$.

Tomando como $\mathfrak{A}$ o corpo ordenado completo $\mathfrak{R}$ dos números reais (ver II.2.4) poderíamos concluir que toda ultrapotência $\mathfrak{R}^I/D$ seria também um corpo ordenado completo, pois este fato é expressável em L^2 monádica. Portanto, por II.2.5, $\mathfrak{R}^I/D \cong \mathfrak{R}$, o que implicaria que toda ultrapotência de $\mathfrak{R}$ é arquimediana.

Isto não é verdade. Existem ultrapotência de $\mathcal{R}$ não-arquimedianas. Em consequência a nossa hipótese de trabalho dada em III.2.7.2 é falsa.

III.2.7.7- Observação

A respeito do teorema de Łos para estruturas bissortidas não podemos deixar de mencionar que se temos uma família de espaços topológicos em sentido amplo $\langle X_i, \sigma_i; \in\rangle i\in I$, onde para cada $i\in I$, $\sigma_i \subseteq P(X_i)$, então, dado que cada espaço satisfaz em forma óbvia o axioma de extensionalidade (sentença θ_{13} em II.1.14), o teorema de Łos garante que o ultraproduto $\langle \pi_D X_i; \pi_D \sigma_i; \in_D\rangle$ também o satisfaz, e portanto, por II.6.15, existe uma coleção $\sigma_D \subseteq P(\pi_D X_i)$ tal que $\langle \pi_D X_i, \pi_D \sigma_i; \in_D\rangle$ é isomorfo a $\langle \pi_D X_i, \sigma_D; \in\rangle$.

Além disso, se cada σ_i é base de uma topologia em X_i, a coleção σ_D também será uma base, pois este fato é expressável na linguagem de 1ª ordem bissortida correspondente (sentenças θ_{11} e θ_{12} em II.1.14).

III.3- Aplicações do Teorema de Compacidade

Nesta seção pretendemos mostrar a importância da existência de um certo teorema de compacidade numa linguagem

L (neste caso L^1) para a análise de expressabilidade em L.

III.3.1- Proposição

A classe K_{ARQ} dos corpos ordenados arquimedianos (ver II.1.7) não é axiomatizável em L^1.

Demonstração

Suponhamos que exista $\Sigma\subseteq L^1_S$ tal que $K_{ARQ}=Mod(\Sigma)$.

Acrescentamos a nossa linguagem (correspondente ao tipo de similaridade de K_{ARQ}) uma nova constante c. As sentenças que podem ser construídas com ela serão verdadeiras numa estrutura $<A,\ldots>$ na medida que exista algum elemento de A que as satisfaça.

Seja $\Sigma^1=\Sigma\cup\{n\cdot 1\leqslant c/n\geqslant 0\}$, e sejam $\Delta\subseteq\Sigma^1$ finito e $m=\max\{n/(n\cdot 1\leqslant c)\in\Delta\}$, então $\Sigma\cup\{n\cdot 1\leqslant c/0\leqslant n\leqslant m\}$ tem modelo (qualquer corpo (arquimediano) é modelo, basta interpretar c como $(m+1)\cdot 1$).

Além disso, todo modelo de $\Sigma\cup\{n\cdot 1\leqslant c/0\leqslant n\leqslant m\}$ é modelo de Δ. Portanto, por compacidade Σ^1 tem um modelo $\mathfrak{A}=<A,\ldots>$, ie. $\mathfrak{A}$ é modelo de Σ e de $\{n\cdot 1\leqslant c/n\geqslant 0\}$, o que significa que $\mathfrak{A}$ é um corpo arquimediano e existe um elemento $a\in A$ (interpretação de c em $\mathfrak{A}$) tal que $a\geqslant n\cdot 1$ para todo $n\geqslant 0$.

Isto contradiz a sentença informal que caracteriza os corpos arquimedianos:
"$(\forall x)(x>0\rightarrow(\forall y)(\exists n\in\mathbb{N})(n\cdot x>y))$" , que para o caso particular $x=1$ temos "$(\forall y)(\exists n\in\mathbb{N})(n\cdot 1>y)$" ∎

III.3.1.1- Um elemento a de um corpo ordenado que satisfaça $a \geq n \cdot 1$ para todo $n \geq 0$, é dito um elemento infinito do corpo.

III.3.2- Asserção

A proposição acima garante que existem corpos não arquimedianos que satisfazem todas as sentenças de 1ª ordem comuns a todos os corpos arquimedianos. Isto não acontece em 2ª ordem pois, como vimos em II.1.7, K_{ARQ} é axiomatizável em L^2 monádica.

Substituindo na prova anterior o conjunto Σ por $Th_{L^1}(\mathcal{R})$, onde $\mathcal{R}$ é o corpo ordenado dos números reais, podemos provar a existência de corpos não-arquimedianos que são modelos de $Th_{L^1}(\mathcal{R})$, ie. que são L^1-elementarmente equivalentes a $\mathcal{R}$. Tais modelos são chamados de modelos não-standard dos números reais.

Esses corpos podem ser construídos efetivamente como uma ultrapotência de $\mathcal{R}$, por exemplo, $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}/D$ onde D é um ultrafiltro que contém os subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$. Sendo D um ultrafiltro não-principal vê-se facilmente que essa extensão de $\mathcal{R}$ é não-arquimediana. Um elemento infinito, por exemplo, é dado pela sequência $*(0, 1, \ldots, n, \ldots)$.

No apêndice deste capítulo veremos uma aplicação não-trivial à Análise, demonstrando o teorema de Hahn-Banach por métodos de Análise não-standard.

III.3.3- Proposição

Se ϕ é uma sentença na linguagem elementar da teoria dos corpos que é verdadeira em todo corpo de característica zero, então existe um primo p_0 tal que ϕ é verdadeira em todo corpo de característica $p > p_0$.

Demonstração

Seja K_0 a classe dos corpos de característica zero.

Se Σ é a coleção de axiomas de 1ª ordem que caracterizam os corpos, e para cada p primo, σ_p é sentença $p \cdot 1 = 0$, então é fácil ver que $K_0 = Mod(\Sigma \cup \{\neg\sigma p / p \text{ é primo}\}) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} Mod(\sigma) \cap \bigcap_p Mod(\neg\sigma p)$.

O fato de ϕ ser verdadeira em todo corpo de característica zero significa que $K_0 \subseteq Mod(\phi)$, então, tomando complementares teríamos: $Mod(\neg\phi) \subseteq \bigcup_{\sigma \in \Sigma} Mod(\neg\sigma) \cup \bigcup_p Mod(\sigma_p)$.

Agora, o membro direito constitue um cobrimento aberto do fechado $Mod(\neg\phi)$, mas como $Est(\tau)$ é um espaço compacto, temos que $Mod(\neg\phi)$ é compacto, logo, admite um subcobrimento finito, em particular existem $p_1, \ldots, p_n$ tais que $Mod(\neg\phi) \subseteq \bigcup_{\sigma \in \Sigma} Mod(\neg\sigma) \cup \bigcup_{i=1}^{n} Mod(\sigma p_i)$, então $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} Mod(\sigma) \cap \bigcap_{i=1}^{n} Mod(\neg\sigma p_i) \subseteq Mod(\phi)$.

Finalmente, observemos que se $p > p_i$, todo modelo de σ_p é modelo de $\neg\sigma_{p_i}$ (ie. se a identidade 1 se anula para p, não pode se anular para um primo menor), logo, para $p > \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ $(= p_0)$ temos que $Mod(\sigma p) \subseteq Mod(\neg\sigma p_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, ie. $Mod(\sigma p) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Mod(\neg\sigma p_i)$; portanto, $Mod(\Sigma) \cap Mod(\sigma p) \subseteq Mod(\phi)$, ie. $Mod(\Sigma \cup \{\sigma p\}) \subseteq Mod(\phi)$; mas $\Sigma \cup \{\sigma p\}$ é a axiomatização da classe dos corpos de característica p, K_p, logo, $K_p \models Mod(\phi)$, o que prova que ϕ é verdadeira em todo corpo de característica $p>p_0$ ∎

III.3.4- Exemplo. Dados dois polimônios p(X) e q(X) com coeficientes inteiros, se eles são primos relativos em todo corpo de característica zero, fato que pode ser expresso em 1ª ordem, então eles são primos relativos em qualquer corpo de característica "suficientemente grande".

Um caso particular são os polinômios X^3-1 e $X^{p-1}+\ldots X+1$ para p primo.

O exemplo apresentado admite uma demonstração puramente algébrica, mas a proposição anterior de caráter puramente linguístico envolve todos os casos possíveis.

Damos a seguir esta demonstração para efeitos de completude:

Dados p(X) e q(X) em $\mathbb{Z}[X]$, se eles são primos relativos em todo corpo de característica zero, em particular o são em $\mathbb{Q}[X]$, então existem r(X) e s(X) em $\mathbb{Q}[X]$ tais que

$$p(X)r(X)+q(X)s(X)=1,$$

tomando denominador comum temos que

$$p_1(X)r_1(X)+q_1(X)s_1(X)=d(\neq 0).$$

Suponhamos $d=p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$, então, tomando $p_0=\max_{1\leq i\leq k} p_i$ e $p>p_0$ temos que, mediante a projeção módulo p:

$$\overline{p}_1(X)\overline{r}_1(X)+\overline{q}_1(X)\overline{s}_1(X)=\overline{d}\neq\overline{0},$$

logo, dividendo por $\overline{d}$ obtemos

$$\bar{p}(X)\bar{r}(X)+\bar{q}(X)\bar{s}(X)=\bar{1},$$

ie. $p(X)$ e $q(X)$ (módulo p) são primos relativos em $\mathbb{F}p[X]$, e de aí em todo corpo de característica $p(>p_0)$ por ser $\mathbb{F}_p$ o corpo primo de qualquer um deles.

III.3.5- Corolário. Embora K_0 seja axiomatizável em L^1 pelo conjunto de sentenças infinito dado em III.3.3, ela não é finitamente axiomatizável.

Demonstração. Suponhamos que K_0 for finitamente axiomatizável. Por II.5.4.2 (ii) podemos supor que é axiomatizável por uma sentença ϕ (a qual deve expressar o fato de ser um corpo de característica zero), ie. K_0=Mod(ϕ), mas aplicando a proposição anterior, ϕ deveria ser verdadeira em algum corpo de característica p>0, o que é uma contradição ■

III.3.6- Observação. Em forma análoga à proposição III.3.3 pode-se provar o seguinte resultado: se ϕ é uma sentença elementar válida em todo espaço vetorial de dimensão infinita sobre um dado corpo K, então ϕ é válida em todo espaço vetorial sobre K de dimensão finita "suficientemente grande" (cf. Bell e Slomson [1969, pag. 99]).

Pode-se provar também que toda sentença de L^1 verdadeira em todo grupo abeliano divisível (ver I.3.9), é verdadeira em algum grupo abeliano não divisível (cf. Barwise

[1977, pag. 8]). Em particular, a classe dos grupos abelianos divisíveis, axiomatizável pelas sentenças que caracterizam um grupo abeliano, mais a coleção infinita de sentenças $\{(\forall x)(\exists y)(n \cdot y = x) / n \geq 1\}$, não é finitamente axiomatizável em L^1.

III.4- O Princípio de Lefschetz

Um dos resultados mais interessantes de expressabilidade corresponde à Geometria Algébrica e é conhecido com o nome de Princípio de Lefschetz. Ele afirma, nas próprias palavras de Lefschetz, o seguinte: "num certo sentido, a geometria algébrica sobre um corpo [algebricamente fechado] de característica zero, pode ser reduzida à geometria algébrica complexa" (cf. Seindenberg [1958]).

Isto significa, por exemplo, na explicação de Seidenberg, que dada uma variedade V, definida sobre um corpo algebricamente fechado K de característica zero, a que é determinada por um número finito de quantidades, os coeficientes dos polinômios que definem V; o corpo gerado sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$ por estas quantidades, pode ser mergulhado isomorficamente no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, e essa passagem determina uma variedade V^*, sobre $\mathbb{C}$, que preserva estritamente as propriedades algébricas de V.

André Weil formula o princípio de Lefschetz da seguinte maneira: "para um dado valor da característica $p (\geq 0)$, todo resultado envolvendo apenas um número finito de pontos e de variedades, o qual tem sido provado para alguma escolha do domínio universal [ie. um corpo algebricamente fechado de característica p de grau de transcendência infinito sobre o corpo primo], permanece válido sem restrição; existe então uma geometria algébrica de característica p para cada valor de p, não uma geometria algébrica para cada domínio universal" (cf. Barwise e Eklof [1969]).

Demonstraremos uma versão fraca do princípio de Lefschetz correspondente à interpretação seguinte: todo teorema da geometria algébrica que pode ser formulado estritamente numa linguagem determinada, é verdadeiro num corpo algebricamente fechado de característica p (sem importar o grau de transcendência sobre o corpo primo) se e só se é verdadeiro em todos eles.

Neste momento estamos em condições de dar uma solução parcial ao nosso problema: em II.5.6.3.3 (i) vimos que se K_1 e K_2 são corpos algebricamente fechados de mesma característica e de cardinalidade $>\aleph_0$, então $K_1 \equiv_{L_\omega^2} K_2$, ie. satisfazem as mesmas sentenças da linguagem de 2ª ordem fraca adequada à classe dos corpos.

Em geral não podemos garantir que todo teorema da geometria algébrica, formulado naturalmente em termos de polinômios, ideais, variedades, etc. possa ser formulado nessa linguagem; porém, boa parte deles encontra uma expressão equivalente, eventualmente multissortida, já que, por exemplo, os polinômios, sendo sequências finitas de elementos do corpo, e os ideais de polinômios, sendo finitamente gerados (pois $K[X_1,\ldots,X_n]$ e Noetheriano), etc., podem ser representados nessa linguagem, sem maiores alterações, substituindo "subconjunto finito" por "sequência finita de elementos".

Observar que se $|K|>\aleph_0$, então K é de grau de transcendência infinita sobre seu corpo primo, mas de fato existem corpos enumeráveis com esta propriedade, portanto, também o problema, na formulação de Weil, está parcialmente solucionado. Para uma discussão mais ampla do prncípio de Lefschetz pode-se consultar Barwise e Eklof[1969], e Eklof[1973]. Para a terminologia algébrica pode-se consultar Van der Waerden[1970, vol. 2].

Para continuar o nosso estudo vamos estabelecer algumas outras propriedades de teoria de modelos que de por si tem interesse para a análise da expressabilidade, e especialmente vinculadas à categoricidade.

III.4.1- Os Teoremas de Löwenheim-Skolem

A seguir enunciaremos um resultado da teoria de modelos da linguagem L^2_ω, cuja demonstração omitiremos por ser puramente técnica. Ela também é válida, em particular, em L^1, e é o fundamento de toda uma teoria acerca da existência de modelos não-standard das teorias matemáticas, entendendo por teoria qualquer coleção de sentenças numa linguagem determinada. Daqui para frente, neste capítulo, só consideraremos estruturas unissortidas.

III.4.1.1- Teorema de Löwenheim-Skolem Descendente (L-S↓)

Seja Σ qualquer coleção de sentenças em $L^2_\omega(\tau)$. Se Σ tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$ com $|\Sigma|\leq|A|$ e máx $(\aleph_0,|\Sigma|)\leq\kappa\leq|A|$, então existe $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ tal que $|B|=\kappa$ e $\mathfrak{B}\equiv_{L^2_\omega}\mathfrak{A}$, em aprticular, $\mathfrak{B}$ é também modelo de Σ ■

Corolário 1. Se $|\Sigma|\leq\aleph_0$ e Σ tem modelo infinito, então Σ admite um modelo enumerável ■

Corolário 2. Se σ é uma sentença e $\mathfrak{A}$ é um modelo infinito de σ, então existe $\mathfrak{B}$ enumerável que é modelo de σ ■

Corolário 3. Em L^2_ω, e em particular em L^1, nenhum conjunto no máximo enumerável de sentenças, admitindo modelos não-enumeráveis, pode ser categórico (ver II.5.5.11) ■

Corolário 4. Dado que o corpo dos números reais pode ser caracterizado categoricamente em L^2 monádica (ver II.2.4), então as linguagens L^2 monádica, diádica e, em geral, total, não satisfazem L-S↓ para todo conjunto Σ de sentenças ■

Exemplo. Uma aplicação trivial porém ilustrativa do teorema L-S↓ em L^1 é a seguinte: sabemos que a teoria de corpos algebricamente fechados é expressável em L^1 mediante um conjunto enumerável de sentenças (ver II.1.8), portanto, se K é um corpo algebricamente fechado de cardinalidade $\kappa(\geq\aleph_0)$ e $\aleph_0\leq\lambda\leq\kappa$, então existe um subcorpo F, também algebricamente fechado, de cardinalidade λ tal que $F\equiv_{L^1}K$ (mais do que isso, $F\equiv_{L^2_\omega}K$ já que L^1 é sublinguagem de L^2_ω). Provaremos mais adiante que, na realidade, todo subcorpo algebricamente fechado de K satisfaz esta condição.

III.4.1.2- Definição. Uma linguagem L que satisfaz o corolário 2 acima se diz que tem a <u>propriedade de Löwenheim-Skolem</u>.

L^1 e L^2_ω tem esta propriedade. Veremos no próximo capítulo que também a linguagem infinitária $L\omega_1\omega$ a tem.

III.4.1.3- Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente (L-S↑)

Seja Σ qualquer coleção de sentenças em $L^1(\tau)$ com $|\Sigma|=\alpha$. Se Σ tem um modelo $\mathfrak{A}$ com $|A|=\beta\geqslant\aleph_0$, então para todo $\lambda\geqslant$ máx (α,β), Σ admite um modelo $\mathfrak{B}$ com $|B|=\lambda$ e $\mathfrak{B}\equiv_{L^1}\mathfrak{A}$

Demonstração

Seja $\lambda\geqslant$ máx (α,β) e seja I um conjunto de cardinalidade λ. Para cada $i\in I$ introduziremos no alfabeto básico de τ uma nova constante c_i; distintas constantes para distintos valores de i.

Seja $\mathfrak{A}\models\Sigma$ com $|A|=\beta$, obviamente $\mathfrak{A}\models Th(\mathfrak{A})$ e $\Sigma\subseteq Th(\mathfrak{A})$.

Consideremos $\Sigma^1=Th(\mathfrak{A})\cup\Gamma$ onde $\Gamma=\{c_i\neq c_j/i, j\in I$ e $i\neq j\}$.

As sentenças de Γ afirmam que as constantes introduzidas denotarão elementos, do modelo que as satisfaça, dois a dois distintos.

Observemos que $|\Sigma^1|=\lambda$.

Seja $\Delta\subseteq\Sigma^1$ finito, então $\mathfrak{A}$ é modelo de $Th(\mathfrak{A})\cup\Delta$ pois seu domínio é infinito e todas as constantes novas que intervem em Δ (em número finito necessariamente) podem ser interpretadas nele. Logo, Δ têm modelo.

Portanto, pelo teorema de compacidade de L^1, Σ^1

admite um modelo $\mathcal{B}^1$ o qual, por ser modelo de Γ deve ter cardinalidade $\geq\lambda$, e por ser modelo de $Th(\mathfrak{A})$ deve ser L^1-elementarmente equivalente a $\mathfrak{A}$.

Note-se que até agora temos garantido a existência de modelos $\mathcal{B}^1 \equiv_{L^1} \mathfrak{A}$ de cardinalidade $\geq\lambda$ para todo $\lambda \geq \max(\alpha, \beta)$.

Finalmente, por L-S↓ existe $\mathcal{B}$ tal que $|B|=\lambda$ e $\mathcal{B} \equiv_{L^1} \mathcal{B}^1$, ie. $\mathcal{B} \equiv_{L^1} \mathfrak{A}$ ■

Corolário 1. Se Σ é uma coleção de sentenças de $L^1(\tau)$ no máximo enumerável que tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$, então para todo cardinal infinito λ, existe $\mathcal{B}$ com $|B|=\lambda$ e $\mathcal{B} \equiv_{L^1} \mathfrak{A}$ ■

Corolário 2. Em L^1, nenhum conjunto de sentenças admitindo modelos infinitos pode ser categórico ■

Exemplo 1. Todo conjunto infinito pode ser linearmente ordenado.

Com efeito, os axiomas de ordem linear dados em II.1.7 são de 1ª ordem e admitem $\langle \mathbb{N};\leq\rangle$ como modelo enumerável, portanto, pelo corolário 1, para todo cardinal λ infinito, existe um conjunto linearmente ordenado A_λ dessa cardinalidade.

Se B é qualquer conjunto de cardinalidade λ, ie. equipotente com A_λ, existe uma bijeção $f:B\to A_\lambda$. Podemos definir em B: $a\leq b \longleftrightarrow f(a)\leq f(b)$.

É fácil ver que a relação definida é uma ordem linear sobre B.

Deve-se observar que, embora $\langle \mathbb{N};\leq\rangle$ seja uma estrutura bem ordenada (ver II.1.12), o teorema L-S↑ não garante que A_λ seja bem ordenado. De fato, a boa ordenação não é expressável em 1ª ordem (cf. Bell e Slomson[1969, pag. 94]).

Em forma análoga pode-se provar que todo conjunto infinito pode ser linearmente ordenado em forma densa.

Exemplo 2. Consideremos a estrutura de Peano (ver II.2.1) standard dos números naturais $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; \sigma^{\mathbb{N}}; 0^{\mathbb{N}} \rangle$ e a coleção de sentenças $Th_{L^1}(\mathcal{N})$. Dentre elas temos a seguinte versão em 1ª ordem do axioma de indução: se $\phi(x)$ é uma fórmula com só uma variável livre, então

$$\phi(0) \wedge (\forall x)(\phi(x) \rightarrow \phi(\sigma(x))) \rightarrow (\forall x)\phi(x).$$

Isto significa limitar a validade do axioma de indução aos subconjuntos de $\mathbb{N}$ <u>definíveis</u> em L^1.

O corolário 1 acima garante que $Th_{L^1}(\mathcal{N})$, sendo uma coleção enumerável de sentenças, admite modelos de toda cardinalidade infinita. Tais modelos, distintos de $\mathcal{N}$, são chamados de <u>modelos não-standard da aritmética</u>, e como foi observado em II.2.3 (i), $\mathcal{N}$ está mergulhado em todos eles.

III.4.1.4- Observação

Se uma linguagem L satisfaz algum dos teoremas de Löwenheim-Skolem, então existem estruturas cuja cardinalidade não é expressável por nenhum conjunto de sentenças de L. Por exemplo, em L^2_ω nenhum $\Sigma \subseteq L_S$ pode expressar o fato de um modelo ter cardinalidade não enumerável.

III.4.2- Os Números de Hanf

Na seção III.4.1 acima conseguimos provar, para L^1, o teorema L-S↑, pelo fato de L^1 satisfazer o teorema de compacidade.

Vamos dedicar algumas linhas para mostrar que, sob condições simples, aquele teorema tem uma versão geral.

III.4.2.1- Definição

Seja λ um cardinal infinito. Se para todo $\Sigma \subseteq L_S$, a existência de um modelo $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ de Σ com $|A| \geq \lambda$ implica que Σ tem modelos de toda cardinalidade $\geq |A|$, diremos que L admite um <u>número de Hanf</u>, o qual definiremos como o menor λ que satisfaz a condição acima, e denotaremos por h(L).

Observe-se que L-S↑ para L^1 afirma que $h(L^1) = \aleph_0$.

III.4.2.2- Teorema de Hanf

Se a coleção de sentenças L_S de L é um conjunto, então L admite um número de Hanf.

Demonstração

Seja F a família de todos os $\Sigma \subseteq L_S$ que não tem modelos infinitos arbitrariamente grandes. Então, para todo $\Sigma \in F$, existe um cardinal k_Σ tal que todo modelo de Σ tem cardinalidade $<k_\Sigma$.

Como L_S é um conjunto, então F, por ser uma subcoleção de $P(L_S)$, e portanto a coleção $\{k_\Sigma / \Sigma \in F\}$, são também conjuntos.

Sabe-se que toda coleção de números cardinais que constituem um conjunto é limitada, ie. existe o cardinal $\lambda = \sup\{k_\Sigma / \Sigma \in F\}$.

Logo, temos que, se Σ tem algum modelo de cardinalidade $\geq\lambda$, então $\Sigma \notin F$, o que significa que Σ admite modelos arbitrariamente grandes. Portanto, L tem um número de Hanf ■

III.4.2.3- Corolário. As linguagens L^2_ω, L^2 e seus fragmentos monádico, diádico, etc. admitem um número de Hanf ■

III.4.2.4- Asserção

É muito importante observar que a existência do número de Hanf h(L) de uma linguagem L afirma que a cardinalidade de uma estrutura $\mathfrak{A}$ com $|A| \geq h(L)$ não é expressável em L.

Em particular, isto tem como consequência que, como a cardinalidade $\aleph_0$ é expressável em L^2 diádica, e portanto em L^2 total, então $h(L^2) \geq \aleph_1$(ver II.1.14).

Vejamos que, na realidade, $h(L^2) \geq \aleph_\omega (= \sup_{n \geq 0} \aleph_n)$, provando por indução finita que $\aleph_n$ é expressável em L^2 (diádica) para todo $n \geq 0$.

Informalmente, o passo indutivo corresponde à seguinte sequência de afirmações:

$|A| = \aleph_n \longleftrightarrow (|A| \geq \aleph_n$ e $|A| < \aleph_{n+1}) \longleftrightarrow (|A| \geq \aleph_n$ e não $|A| \geq \aleph_{n+1}) \longleftrightarrow (|A| \geq \aleph_n$ e não (existe $S \subseteq A$ com $|S| \geq \aleph_n$ e S não equipotente com A)).

Finalmente, para $S \subseteq A$: $|S| \geq \aleph_n \longleftrightarrow$(existe $R \subseteq S$ com $|R| \geq \aleph_{n-1}$ e R não equipotente com S).

Tem-se demonstrado que, na realidade, $h(L^2)$ é um cardinal muito grande, que supera ao primeiro cardinal mensurável (ver def. IV.3.2) se é que ele existe. Para melhores referencias pode-se consultar Barwise[1972] e Kaufmann[1985].

III.4.3- λ-Categoricidade e o Teste de Vaught

À luz dos teoremas de Löwenheim-Skolem e dos resultados de Hanf, as teorias matemáticas, expressas numa linguagem L, não são em geral categóricas mas podem ser categóricas para determinadas cardinalidades, ie. todos os modelos de uma determinada cardinalidade são isomorfos.

III.4.3.1- Definição

Seja L uma linguagem, $\Sigma \subseteq L_S$ e λ um cardinal infinito. Dizemos que Σ é <u>λ-categórico</u> se Σ tem modelos de cardinalidade λ e todo par deles são isomorfos.

III.4.3.2- Exemplo

Como ilustração vamos analizar um exemplo particularmente simples: a teoria dos grupos abelianos divisíveis livres de torsão.

A classe K_D dos grupos abelianos divisíveis livres de torsão é axiomatizável em 1ª ordem mediante o seguinte conjunto Σ_D de sentenças, as que determinam o fato de ser grupo abeliano, junto com $\{(\forall x)(\exists y)(n\cdot y=x)/n\geq 1\}\cup\{(\forall x)(x\neq 0\rightarrow n\cdot x\neq 0)/n\geq 1\}$, expressas em notação aditiva.

Em I.3.9 vimos que todo membro de K_D é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, e portanto, considerado como grupo aditivo, é soma direta de grupos isomorfos ao grupo aditivo $<\mathbb{Q};+>$. Em particular o grupo $<\mathbb{R};+>$ está em K_D.

Sabe-se da álgebra linear que dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo são isomorfos se e somente se tem a mesma dimensão, sendo esta a cardinalidade do maior conjunto de vetores linearmente independentes.

Além disso, se $V\cong\bigoplus_I \mathbb{Q}$ com I um conjunto infinito, então $|V|=|I|=\dim V$. No caso de I ser finito temos que V é um espaço de dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$, mas de cardinalidade $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$; em particular, Σ_D não é $\aleph_0$-categórica.

Por último, se V e W são modelos de Σ_D com $|V|=$

$|W| \geq \aleph_1$, então $V \cong \underset{I}{\oplus} \mathbb{Q}$ e $W \cong \underset{J}{\oplus} \mathbb{Q}$ com $|I| \geq \aleph_1$ e $|J| \geq \aleph_1$, logo, pela discussão acima, $|I| = |J|$, ie. dim V=dim W, portanto $V \cong W$.

Temos provado então que Σ_D é λ-categórico para todo $\lambda \geq \aleph_1$.

O mesmo acontece com a teoria (formulada em 1ª ordem) dos corpos algebricamente fechados de mesma característica, como foi provado por Steinitz (ver I.3.9). Esta teoria é λ-categórica para todo λ não-enumerável. Também não é $\aleph_0$-categórica, basta observar os fechos algébricos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(X)$ com X transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

A versão fraca do Princípio de Lefschetz que provaremos mais adiante, e que usualmente requer destes fatos para sua demonstração, vai ser demonstrada aqui sem apelar a estes resultados.

III.4.3.3- Comentário

O fenômeno que relaciona os dois exemplos dados não é isolado. M. Morley[1965] provou que se um conjunto de sentenças $\Sigma \subseteq L^1_S$ (expressa numa linguagem com alfabeto básico no máximo enumerável) é λ-categórico para algum λ não-enumerável, então é λ-categórico para todo λ não-enumerável (pode-se consultar Chang e Keisler[1973]).

III.4.3.4- Teste de Vaught (versão forte)

Seja $\Sigma \subseteq L^1_S$ com alfabeto básico no máximo enumerável, ie. $|\Sigma| \leq \aleph_0$, tal que só possui modelos infinitos. Se existe um cardinal λ infinito tal que Σ é λ-categórico, então todos os modelos de Σ são L^1-elementarmente equivalentes, (usualmente se diz que Σ é uma teoria completa).

Demonstração. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ modelos de Σ, os quais devem ser infinitos por hipótese. Então, por L-S↑, para o cardinal λ dado existem modelos $\mathfrak{A}^1 \equiv \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}^1 \equiv \mathfrak{B}$ de cardinalidade λ. Mas como Σ é λ-categórico temos que $\mathfrak{A}^1 \cong \mathfrak{B}^1$, logo, pelo teorema do isomorfismo, $\mathfrak{A}^1 \equiv \mathfrak{B}^1$, o que implica que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ■

III.4.3.5- Corolário. Dois grupos abelianos divisíveis livres de torsão são L^1-elementarmente equivalentes.

Demonstração. Primeiro observemos que não existe grupos desse tipo que sejam finitos. Logo, é consequência imediata de III. 4.3.2 e o teste de Vaught, versão forte ■

Em particular, $\langle \mathbb{Q};+\rangle \equiv_{L^1} \langle \mathbb{R};+\rangle$.

III.4.3.6- Teste de Vaught (versão fraca)

Seja $\Sigma \subseteq L^1_S$ com alfabeto básico no máximo enumerável, ie. $|\Sigma| \leq \aleph_0$, e que só possui modelos infinitos. Se todo par de modelos de Σ não-enumeráveis são parcialmente isomorfos, então todo par de modelos de Σ são L^1-elementarmente equivalentes.

Demonstração. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ modelos de Σ, os quais devem ser infinitos por hipótese. Seja λ um cardinal não-enumerável qualquer, então por L-S↑ existem modelos $\mathfrak{A}^1 \equiv \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}^1 \equiv \mathfrak{B}$ de cardinalidade $\geqslant\lambda$ (observe-se que estamos usando aquela parte do teorema L-S↑ que não precisa do teorema L-S↓ (ver III.4.1.3)). Logo, por hipótese, $\mathfrak{A}^1 \cong_p \mathfrak{B}^1$, então, pelo teorema do p-isomorfismo (II.5.6.3.2), temos que $\mathfrak{A}^1 \equiv \mathfrak{B}^1$, o que implica que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ■

III.4.3.7- Observação

É importante salientar que a prova anterior não precisa do teorema L-S↓ porque não é necessário que os modelos $\mathfrak{A}^1$ e $\mathfrak{B}^1$, parcialmente isomorfos, sejam de cardinalidade exatamente λ.

Não conhecemos nenhum exemplo que possa se provar a partir da versão fraca do teste de Vaught e que não seja λ-categórico para algum λ não enumerável.

O exemplo III.4.3.2 também satisfaz as hipóteses da versão fraca do teste de Vaught, já que dois espaços vetoriais de dimensão infinita sobre o mesmo corpo são parcialmente isomorfos (ver II.5.6.3.3 (ii)).

III.4.3.8- Princípio de Lefschetz (versão fraca)

Dois corpos algebricamente fechados de mesma característica são L^1-elementarmente equivalentes.

Demonstração. Primeiro observemos que não existe corpos finitos algebricamente fechados. Logo, é consequência imediata de I.3.14 e da versão fraca do teste de Vaught ■

III.4.3.9- Observação

O princípio de Lefschetz demonstrado acima inclue os corpos algebricamente fechados enumeráveis que escapavam ao resultado II.5.6.3.3 (i). Porém, ele não pode se estender com toda amplitude a L^2_ω. Neste caso tem-se o resultado seguinte: dois corpos algebricamente fechados de mesma característica e de grau de transcendência infinito sobre seu corpo primo são L^2_ω-elementarmente equivalentes (cf. Scott e Tarski[1958]). Os corpos respectivos de grau de transcendência finito são L^2_ω-elementarmente equivalentes se e só se tem o mesmo grau, já que neste caso são isomorfos.

Corolário 1

Se $\bar{\mathbb{F}}_p$ denota o fecho algébrico do corpo primo $\mathbb{F}_p$, e K é qualquer corpo algebricamente fechado de característica p, então $K \equiv_{L^1} \bar{\mathbb{F}}_p$ ■

Corolário 2

Se K é um corpo algebricamente fechado de característica zero, então $K \equiv_{L_1} \mathbb{C}$ onde $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos. Em particular, $\tilde{\mathbb{Q}} \equiv_{L_1} \mathbb{C}$ ∎

Corolário 3

Se ϕ é uma sentença na linguagem elementar da teoria dos corpos que é verdadeira no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, então existe um primo p_0 tal que ϕ é verdadeira em todo corpo algebricamente fechado de característica $p > p_0$.

Demonstração. É consequência imediata do corolário 2 acima e da proposição III.3.3 convenientemente adaptada ∎

III.4.4- Uma Aplicação

A seguir damos uma aplicação concreta do princípio de Lefschetz à Geometria Algébrica, cuja prova faremos em detalhe já que a consideramos importante para ilustrar os métodos tratados nesta tese.

Proposição

Seja F um corpo algebricamente fechado e $f: F^n \to F^n$ uma aplicação polinomial, ie. $f = (f_1, \ldots, f_n)$ com $f_k \in F[X_1, \ldots, X_n]$ para $k = 1, \ldots n$. Se f é injetora, então f é sobre.

Demonstração

Vejamos primeiro que para n fixo e para $f=(f_1,\ldots,f_n)$ qualquer com graus $\partial f_1,\ldots,\partial f_n$ fixos, a afirmação da proposição é expressável com uma sentença ϕ de 1ª ordem na linguagem dos corpos. Ilustramos este fato com $n=1$ e $\partial f=m$, onde a sentença ϕ neste caso é a seguinte:

$(\forall x_0)\ldots(\forall x_m)[(\forall x)(\forall y)(f(x)=f(y)\rightarrow x=y)\rightarrow(\forall y)(\exists x)(f(x)=y)]$ onde $f(x)$ abrevia a expressão $x_0+x_1\cdot x+\ldots+x_m\cdot x^m$.

Pelo princípio de Lefschetz basta verificar que ϕ é verdadeira para um determinado corpo algebricamente fechado de cada característica.

i) obviamente ϕ é verdadeira com respeito a qualquer corpo finito F.

ii) provaremos que ϕ é verdadeira com respeito a $\tilde{\mathbb{F}}p$. Para isto precisamos do lema seguinte:

Lema. $\tilde{\mathbb{F}}p=\cup\{F_i/F_i$ é uma extensão finita de $\mathbb{F}p\}$.

Demonstração do Lema

Seja F_i um corpo finito extensão de $\mathbb{F}_p$. Se $a\in F_i$, então existe m tal que $a^{p^m}-a=0$, logo, sendo a raiz de um polinômio em $\mathbb{F}p\,[X]$ temos que $a\in\tilde{\mathbb{F}}p$. Portanto, $F_i\subseteq\tilde{\mathbb{F}}p$, de onde $\cup F_i\subseteq\tilde{\mathbb{F}}p$.

Se $a\in\tilde{\mathbb{F}}p$, então a é algébrico sobre $\mathbb{F}p$, logo $\mathbb{F}p(a)$ é uma extensão finita de $\mathbb{F}p$ que contém a, portanto $\tilde{\mathbb{F}}p\subseteq\cup F_i$ ∎

Seja agora $f:\tilde{\mathbb{F}}p^n\rightarrow\tilde{\mathbb{F}}p^n$ uma aplicação polinomial injetora com $f=(f_1,\ldots,f_n)$ e cada $f_k\in\tilde{\mathbb{F}}p[X_1,\ldots,X_n]$ chamemos de C o conjunto de todos os coeficientes dos polinômios de f. Observe-se que $C\subseteq\tilde{\mathbb{F}}p$, ie. cada coeficiente é algébrico sobre $\mathbb{F}p$.

Seja $(b_1,\dots,b_n)\in\bar{\mathbb{F}}p^n$ e seja $A=\{b_1,\dots,b_n\}\cup C$, então por ser A um conjunto finito de elementos algébricos sobre $\mathbb{F}p$ temos que o corpo $\mathbb{F}p(A)$ é uma extensão finita de $\mathbb{F}p$ tal que $b_k\in\mathbb{F}p(A)$ para $k=1,\dots,n$.

Além disso, $f\upharpoonright\mathbb{F}p(A)^n$ é também injetora e $\mathrm{im}\, f\upharpoonright\mathbb{F}p(A)^n\subseteq\mathbb{F}p(A)^n$ já que f é polinomial e os coeficientes estão contidos em $\mathbb{F}p(A)$.

Portanto, por (i), $f\upharpoonright\mathbb{F}p(A)^n$ é sobre $\mathbb{F}p(A)^n$, logo, f é sobre.

iii) temos provado em (ii) que para cada p primo $\tilde{\mathbb{F}}p\models\phi$. Provaremos agora que ϕ é válido num corpo algebricamente fechado de caractarística zero.

Seja $F=\pi_D\tilde{\mathbb{F}}_p$ onde D é um ultrafiltro não-principal sobre o conjunto dos números primos.

Como $\tilde{\mathbb{F}}p\models\phi$ para todo primo p, então pelo teorema de Łos (ver III.2.2.1) temos que $\pi_D\tilde{\mathbb{F}}_p\models\phi$. Além disso, como o fato de ser um corpo algebricamente fechado é expressável em 1ª ordem (ver II.1.8), e todo $\tilde{\mathbb{F}}p$ o é, temos em forma análoga que $\pi_D\tilde{\mathbb{F}}_p$ é um corpo algebricamente fechado.

Resta provar que é de característica zero. Suponhamos que exista $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, tal que $\pi_D\tilde{\mathbb{F}}_p\models(n\cdot 1=0)$, então, pelo teorema de Łos novamente, $\{p/\tilde{\mathbb{F}}p\models(n\cdot 1=0)\}\in D$, logo, $\{p/\tilde{\mathbb{F}}p\models(n\cdot 1=0)\}^c\notin D$ por ser um ultrafiltro, mas é fácil ver que o conjunto $\{p/\tilde{\mathbb{F}}p\models(n\cdot 1=0)\}$ é finito, portanto, o seu complementar, sendo cofinito deve pertencer a D pois D é não-principal (ver III.1.19 (v)); isto é uma contradição e a prova está concluída ■

Devemos indicar que esta proposição pode ser provada também, com ligeiras modificações, para qualquer variedade algébrica V em vez de F^n.

III.5- Apêndice ao Capítulo III:
Uma Demonstração Não-Standard do Teorema de Hahn-Banach

III.5.1- Preliminares

Seja $\mathcal{R}=\langle\mathbb{R};\leq;+,\cdot;0,1\rangle$ o corpo ordenado dos números reais.

Seja I um conjunto infinito e D um ultrafiltro não principal sobre I.

Denotando com $^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^I/D$, com $^*f$ a classe de equivalência de $f(\in\mathbb{R}^I)$ módulo D, e com $^*r$ a classe da função constante $r(\in\mathbb{R})$, definimos

$$^*f\leq{}^*g\longleftrightarrow\{i\in I/f(i)\leq g(i)\}\in D,$$

$$^*f+{}^*g={}^*h\longleftrightarrow\{i\in I/f(i)+g(i)=h(i)\}\in D,$$

$$^*f\cdot{}^*g={}^*h\longleftrightarrow\{i\in I/f(i)\cdot g(i)=h(i)\}\in D,$$

Então temos que a estrutura $^*\mathcal{R}=\langle{}^*\mathbb{R};\leq;+,\cdot;{}^*0,{}^*1\rangle$, com as relações e operações acima definidas, é um corpo ordenado que, pelas afirmações feitas em III.3.2, é não-arquimediano. Observar que podemos definir em $^*\mathcal{R}$, tanto como em $\mathcal{R}$, o <u>valor absoluto</u>, a partir da relação de ordem, na forma usual (ver II.2.4).

Além disso, por III.2.5 (ii), $^*\mathcal{R}$ pode ser considerada uma extensão própria de $\mathcal{R}$. Portanto, $^*\mathcal{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathcal{R}$.

III.5.2- Números Infinitesimais

Na teoria de corpos ordenados prova-se que se o corpo K é arquimediano, então K deve ser isomorfo a um sub-corpo de $\mathbb{R}$(ver II.2.6). $^*\mathbb{R}$ é um corpo não-arquimediano no seguinte sentido: existem elementos $x \in {}^*\mathbb{R}$ tais que $x \neq 0$ e todo $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, $|x| \leqslant r$. É fácil ver que tais elementos, que são chamados de <u>números infinitesimais</u> ou de <u>infinitésimos</u>, são inversos dos elementos infinitos cuja existência foi provada em III.3.1.

III.5.2.1- Definição

$${}^*\mathbb{R}_1 = \{x \in {}^*\mathbb{R} / \exists r \in \mathbb{R} \text{ com } |x| \leqslant r\}$$

$${}^*\mathbb{R}_0 = \{x \in {}^*\mathbb{R} / \forall r \in \mathbb{R}: |x| \leqslant r\}.$$

Os elementos de ${}^*\mathbb{R}_1$ são chamados de <u>elementos finitos</u> de $^*\mathbb{R}$, entretanto os de ${}^*\mathbb{R}_0$ são justamente os infinitésimos de $^*\mathbb{R}$.

Observa-se que $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}_1$.

III.5.2.2- Proposição

i) ${}^*\mathbb{R}_1$ é um subanel ordenado de $^*\mathbb{R}$.

ii) ${}^*\mathbb{R}_0$ é um ideal maximal de ${}^*\mathbb{R}_1$

iii) ${}^*\mathbb{R}_1 / {}^*\mathbb{R}_0 \cong \mathbb{R}$

Demonstração

i) trivial

ii) provemos que ${}^*\mathbb{R}_0$ é maximal em ${}^*\mathbb{R}_1$: suponhamos ${}^*\mathbb{R}_0 \subsetneq J \subseteq {}^*\mathbb{R}_1$ onde J é um ideal de ${}^*\mathbb{R}_1$; seja $a \in J \setminus {}^*\mathbb{R}_0$, então existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r_1 < |a| < r_2$. Como $|a^{-1}| = |a|^{-1} < r_1^{-1}$ temos que $a^{-1} \in {}^*\mathbb{R}_1$, portanto, como J é um ideal e $a \in J$, $1 = a \cdot a^{-1} \in J$, logo, $J = {}^*\mathbb{R}_1$

iii) precisamos do seguinte lema:

Lema. Para cada $x \in {}^*\mathbb{R}_1$ existe um único $r_x \in \mathbb{R}$ tal que $x - r_x$ é infinitesimal (ie. cada classe de equivalência de ${}^*\mathbb{R}_1$ módulo ${}^*\mathbb{R}_0$ contém um único número real).

Demonstração do Lema

Existência: seja $x \in {}^*\mathbb{R}_1$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leqslant s$.

Consideremos o conjunto $A_x = \{s \in \mathbb{R} / |x| \leqslant s\}$. Temos que A_x é um subconjunto não vazio de números reais limitado inferiormente, pois $|x| \geqslant 0$, logo, existe $r_0 = \inf A_x \in \mathbb{R}$.

Se $x > 0$ tomamos $r_x = r_0$, se $x < 0$ tomamos $r_x = -r_0$, e se $x = 0$ tomamos $r_x = 0$. É fácil provar que $x - r_x \in {}^*\mathbb{R}_0$.

Unicidade: se r_1 e r_2 pertencem à classe de equivalência de x (módulo ${}^*\mathbb{R}_0$) com r_1 e $r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$, então $r_1 - r_2$ é infinitesimal, ie. para todo $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$ temos $0 < |r_1 - r_2| \leqslant r$, mas tomando $r = \frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ $(\in \mathbb{R})$ temos uma contradição ∎

Agora, continuando com a demonstração de (iii) podemos definir a função

$$st : {}^*\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto st(x) = r_x .$$

É fácil provar que st é um homomorfismo ordenado de anéis sobrejetivo, e que Ker st=${}^*\mathbb{R}_0$, portanto, ${}^*\mathbb{R}_1/{}^*\mathbb{R}_0 \cong \mathbb{R}$ ∎

st(x) é chamada de <u>parte standard de x</u>. Observar que só é definida para os elementos finitos de ${}^*\mathbb{R}$.

III.5.3- Teorema de Hahn-Banach

Seja E um espaço vetorial real, $p:E\to\mathbb{R}$ um funcional sublinear, ie. $\forall x,\ y\in E$, $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ e $p(tx)=tp(x)$ para $t\geqslant 0$.

Seja G um subespaço de E (ie. $G\leqslant E$) e $f:G\to\mathbb{R}$ linear tal que $\forall x\in G$, $f(x)\leqslant p(x)$.

Então, existe $F:E\to\mathbb{R}$ linear tal que $F\restriction G=f$ e $\forall x\in E$, $F(x)\leqslant p(x)$.

Demonstração

Seja $F=\{(f_i,\ D_i)\}_{i\in I}$ a família de todos os pares $(f_i,\ D_i)$ onde $G\leqslant D_i\leqslant E$, $f_i:D_i\to\mathbb{R}$ é linear, $f_i\restriction G=f$ e $\forall x\in D_i$, $f_i(x)\leqslant p(x)$.

$F\neq 0$ pois $(f,G)\in F$ (equivalentemente $I\neq\phi$).

Para cada $x\in E$ definimos $I_x=\{i\in I/x\in D_i\}$

Lema 1. Para cada $x\in E$, $I_x\neq\phi$, ie. existe $(f_i,\ D_i)$ tal que $x\in D_i$.

Demonstração do Lema 1. Se $x\in G$ não temos nada que provar. Se $x\notin G$ consideramos o subespaço $G\oplus\mathbb{R}x$. Definindo $g:G\oplus\mathbb{R}x\to\mathbb{R}$ dada por $g(y+tx)=f(y)+t\alpha$, a demonstração standard do teorema de Hahn-Banach nos permite escolher $\alpha\in\mathbb{R}$ de tal modo que $(g, G\oplus\mathbb{R}x)\in F$ (cf. Rudin[1979]) ■

Lema 2. A família $\{I_x\}_{x\in E}$ tem a PIF, ie. se $x_1,\ldots,x_n\in E$, então $\bigcap_{k=1}^{n} I_{x_k}\neq\phi$.

Demonstração do Lema 2. Sejam $x_1,\ldots,x_n\in E$, então por indução, a partir do lema 1, temos que existe $i\in I$ tal que $x_1,\ldots,x_n\in D_i$, ie. $i\in I_{x_k}$ para $k=1,\ldots,n$, logo, $i\in\bigcap_{k=1}^{n} I_{x_k}$ ■

Por III.1.19 (iv) podemos concluir que existe um ultrafiltro U sobre I tal que $\{I_x\}_{x\in E}\subseteq U$.

Agora, consideremos a ultrapotência $^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^I/U$ a qual é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definimos $\tilde{f}:E\to{}^*\mathbb{R}$ do seguinte modo: dado $x\in E$, construimos $g_x:I\to\mathbb{R}$ como

$$g_x(i)=\begin{cases} f_i(x), & \text{se } i\in I_x \\ 0, & \text{se } i\notin I_x, \end{cases}$$

definimos então $\tilde{f}(x)={}^*g_x$.

$\tilde{f}$ tem as seguintes propriedades:

i) $\tilde{f}$ é linear

ii) $\tilde{f}\upharpoonright G=f$

iii) $\forall x\in E$, $\tilde{f}(x)\leq p(x)$.

Com efeito, para provar, por exemplo, que $\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)$, primeiro provamos que $I_x\cap I_y\subseteq\{i\in I/g_{x+y}(i)=g_x(i)+g_y(i)\}$ (chamemos este último conjunto de H):

Se $i\in I_x \cap I_y$, então $i\in I_x$ e $i\in I_y$, ie. $g_x(i)=f_i(x)$ e $g_y(i)=f_i(y)$; além disso, $x\in D_i$ e $y\in D_i$, logo $x+y\in D_i$, ie. $i\in I_{x+y}$ e $g_{x+y}(i)=f_i(x+y)$.

Então, $g_{x+y}(i)=f_i(x+y)=f_i(x)+f_i(y)=g_x(i)+g_y(i)$, logo, $i\in H$.

Portanto, como I_x, $I_y\in U$ e U é um filtro, temos que $H\in U$, logo, pelo teorema de Łos temos que $^*g_{x+y}={}^*g_x+{}^*g_y$, ie. $\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)$.

A prova de (iii) também é ilustrativa: primeiro observamos que para cada $x\in E$, $I_x=\{i\in I_x/f_i(x)\leqslant p(x)\}=\{i\in I_x/ g_x(i)\leqslant p(x)\}\subseteq\{i\in I/g_x(i)\leqslant p(x)\}$, portanto, como $I_x\in U$ temos que $\{i\in I/g_x(i)\leqslant p(x)\}\in U$, logo, pelo teorema de Łos novamente, $^*g_x \leqslant {}^*(p(x))$, mas como $p(x)\in\mathbb{R}$, temos que $^*(p(x))=p(x)$, então $^*g_x\leqslant p(x)$, ie. $\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$.

É fácil provar a partir daí que $\forall x\in E$:$-p(-x)\leqslant\tilde{f}(x)$, o qual implica que $\tilde{f}(x)$ é <u>finito</u> em $^*\mathbb{R}$, ie. $\operatorname{im}\tilde{f}\subseteq{}^*\mathbb{R}_1$.

Finalmente, podemos definir $F:E\to\mathbb{R}$ como $F(x) = st(\tilde{f}(x))$. É de rotina provar que F tem as propriedades desejadas ∎

III.5.3.1- Observação

Esta demonstração do teorema de Hahn-Banach baseou-se no teorema do ultrafiltro que, como indicamos em III.1.19 (iv), é mais fraco que o lema de Zorn ou o axioma de escolha, nos quais se baseiam suas demonstrações usuais.

Outras aplicações, interessantes à Análise podem ser consultadas em Luxenburg [1962] e [1969], e Bernstein [1973].

CAPÍTULO IV

Caracterização Algébrica da Equivalência Elementar

Neste capítulo vamos introduzir as linguagens infinitárias como ambiente natural de desenvolvimento do método de extensão de isomorfismos parciais, e onde será possível a caracterização da equivalência elementar correspondente, a qual, sabemos, depende da linguagem.

Vamos dar também uma generalização do método mencionado o que permitirá esclarecer alguns problemas, por exemplo, de classificação de grupos abelianos. Igualmente, construiremos um sistema de isomorfismos parciais que permita a caracterização da equivalência elementar em L^1

IV.1- Preliminares Sobre Cardinais

IV.1.1- Definição. Sejam α e β ordinais limites com $\beta\leq\alpha$. Dizemos que β é <u>cofinal</u> com α se existe uma função $f:\beta\to\alpha$ estritamente crescente (ie. $\delta<\eta(<\beta)\Longrightarrow f(\delta)<f(\eta)(<\alpha)$), tal que $\bigcup_{\eta<\beta} f(\eta)$ $(=\sup_{\eta<\beta} f(\eta))=\alpha$.

Isto equivale a ter uma β-sequência de ordinais $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\beta}$ tal que $\forall\eta<\beta:\alpha_\eta<\alpha$, e $\sup_{\eta<\beta}\alpha_\eta=\alpha$.

IV.1.2- Definição. Se α é um ordinal limite, definimos a <u>cofinalidade de α como</u>

$cf(\alpha)=$ o menor β tal que β é cofinal com α.

É imediato que $cf(\alpha)\leq\alpha$, além disso, pode-se provar que $cf(\alpha)$ é sempre um cardinal (ie. um ordinal inicial).

IV.1.3- Definição. Seja k um cardinal. Dizemos que k é <u>regular</u> se $cf(k)=k$, e <u>singular</u> se $cf(k)<k$.

É quase imediato provar, a partir da definição, a seguinte proposição.

IV.1.4- Proposição.

k é regular $\longleftrightarrow \forall\lambda<k$ e toda família $\{S_\eta\}_{\eta<\lambda}$ de subconjuntos de k com $|S_\eta|<k$ temos que $\bigcup_{\eta<\lambda} S_\eta<k$ ∎

Daí é fácil ver que $\aleph_0$ é regular pois a união finita de subconjuntos finitos é finito. Analogamente, usando o axioma de escolha resulta que $\aleph_1$ é também regular, pois a união enumerável de subconjuntos enumeráveis é enumerável. Em geral, todo cardinal sucessor é regular. Entretanto, $\aleph_\omega$ é singular, pois sendo, por definição, $\aleph_\omega=\sup_{n<\omega} \aleph_n$ temos que $cf(\aleph_\omega)=\aleph_0<\aleph_\omega$.

Observe-se que $\aleph_\omega$ é um cardinal limite singular. A existência de cardinais limites regulares não é demonstrável em ZFC; tais cardinais são chamados de (fracamente) inaccessíveis.

IV.2 As Linguagens Infinitárias $L_{k\lambda}(\tau)$

Em II.1.9 demos um exemplo de uma classe de estruturas cuja expressão, aparentemente natural, podia ser feita numa linguagem que permite conjunções e disjunções enumeráveis de fórmulas: a classe K_{TOR} dos grupos de torsão.

Veremos a seguir, como motivação para a introdução das linguagens infinitárias, que esta classe não é axiomatizável em L^1.

IV.2.1- Proposição. O conceito de "grupo de torsão" não é expressável em L^1.

Demonstração.

Vamos provar a existência de grupos G e H tais que $G\in K_{TOR}$, $H\notin K_{TOR}$ e $G\equiv_{L^1}H$.

Seja G um grupo de torsão tal que para todo $n\geq 1$, existe $a_n\in G$ com $o(a_n)\geq n$ (por exemplo $G=\bigoplus_{n<\omega}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Seja c um novo símbolo de constante e consideremos $\Sigma=Th(G)\cup\{n\cdot c\neq 0/n\geq 1\}$.

Seja $\Delta\subseteq\Sigma$ finito, então, pela condição imposta a G é óbvio que G é modelo de $Th(G)\cup\Delta$, e em consequência de Δ. Portanto, pelo teorema de compacidade de L^1, Σ admite um modelo H.

Temos então que $H\equiv_{L^1}G$ pois $H\models Th(G)$, e existe $a\in H$, interpretação de c em H, de ordem infinita, portanto, $H\notin K_{TOR}$ ∎

IV.2.2- Definição. Seja τ um tipo de similaridade (para estruturas unissortidas). A linguagem $L_{\infty\infty}(\tau)$ é definida do seguinte modo:

<u>Alfabeto Básico</u>.

- símbolos R_i, F_j e c_k igual que para $L^1(\tau)$.
- variáveis (de 1ª ordem): $v_0,\ldots,v_\alpha\ldots$ onde α é um ordinal qualquer, também usaremos $v_0,\ldots,v_\alpha,\ldots$
- símbolos lógicos: $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $\forall$, $\exists$ e $=$.

Devemos observar que a coleção Var das variáveis é uma classe própria.

Termos e Fórmulas Atômicas

São construídos da mesma forma que para $L^1(\tau)$, mas a partir da nova coleção de variáveis. Portanto, constituem também classes próprias.

Fórmulas

As cláusulas dadas em II.3.1.4 para $L^1(\tau)$ devem ser acrescentadas com:

Se Φ é um <u>conjunto</u> de fórmulas, então $\bigwedge\Phi$ e $\bigvee\Phi$ são fórmulas.

Ademais, se ϕ é uma fórmula e $\overline{v}$ é um <u>conjunto</u> de variáveis, então $(\forall\overline{v})\phi$ e $(\exists\overline{v})\phi$ são fórmulas.

Notação. se $\Phi=\{\phi_i\}_{i\in I}$, escreveremos $\bigwedge_{i\in I}\phi_i$ em vez de $\bigwedge\Phi$. Analogamente para $\bigvee\Phi$.

No caso de Φ ser finito $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ temos que $\bigwedge\Phi$ é $\bigwedge_{k=1}^{n}\phi_k$, e corresponde à conjunção de L^1: $\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n$. Analogamente para $\bigvee\Phi$.

Se $\overline{v}=\{v_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$, então escreveremos $(\forall_{\alpha<\lambda} v_\alpha)\phi$ ou $(\forall v\restriction\lambda)\phi$ em vez de $(\forall\overline{v})\phi$. Em forma análoga para $(\exists\overline{v})\phi$. Novamente podemos observar que no caso finito coincide com a quantificação de L^1.

IV.2.3- Definição

i) se $\lambda\geq\aleph_0$, a linguagem $L_{\infty\lambda}$ fica definida a partir de $L_{\infty\infty}$ restringindo $\bar{\vee}$ a conjuntos de variáveis de cardinalidade $<\lambda$.

Como caso particular temos $L_{\infty\omega}$ onde só é permitida quantificação sobre um número finito de variáveis.

ii) se $k\geqslant\lambda$, $L_{k\lambda}$ é a subclasse de $L_{\infty\lambda}$ obtida restringindo Φ a conjuntos de fórmulas de cardinalidade $<k$.

Como casos particulares temos as linguagens $L\omega_1\omega$, introduzida no exemplo II.1.9, $L\omega_1\omega_1$, introduzida no exemplo II. 1.12, e $L\omega\omega$ que não é outro que L^1.

IV.2.4- Observações

i) entendendo intuitivamente a noção de <u>subfórmula</u> de uma fórmula, podemos observar que, em $L_{\infty\lambda}$, se uma fórmula tem $<\lambda$ variáveis livres, então toda subfórmula dela também tem $<\lambda$ variáveis livres. Em particular, as subfórmulas das sentenças de $L_{\infty\lambda}$ tem $<\lambda$ variáveis livres. Portanto, para efeitos da análise semântica posterior vamos impor às fórmulas de $L_{\infty\lambda}$ a restrição de ter $<\lambda$ variáveis livres.

ii) suponhamos k regular, então é quase imediato que toda sentença de $L_{k\lambda}$ tem $<k$ subfórmulas. Agora, tendo cada uma delas $<k$ variáveis livres (pois $k\geqslant\lambda$), temos que em qualquer sentença ocorrem $<k$ variáveis en total. Portanto, reenumerando as variáveis, podemos observar que toda sentença de $L_{k\lambda}$ é equivalente a uma sentença que contém só variáveis do conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha<k}$.

Em consequência, módulo esta equivalência, $L_{k\lambda}$ é um conjunto.

iii) prova-se que para k singular, toda fórmula de $L_{k\lambda}$ é equivalente a uma de $L_{k^+\lambda}$, sendo k^+ um cardinal regular por ser sucessor. Para uma discussão completa destas observações, pode-se consultar Kueker [1975, pag. 42-47].

A seguir denotamos com $\phi(\overline{\nu})$ uma fórmula cujas variáveis livres estão contidas na sequência $\overline{\nu}(=\{\nu_\alpha\}_{\alpha<\lambda})$. Analogamente, se $\mathfrak{A}=<A;\ldots>$ é uma estrutura e $\overline{\alpha}$ é uma assignação denotamos com $\overline{a}$ a sequência correspondente de elementos de A pela aplicação da assignação $\overline{\alpha}$ a $\overline{\nu}$.

IV.2.5- Definição. Para as linguagens introduzidas, com as restrições correspondentes a cada uma delas, a relação de satisfação é complementada com:

i) $\mathfrak{A}\models\bigwedge\Phi[\overline{\alpha}]\longleftrightarrow$ para toda $\phi\in\Phi$: $\mathfrak{A}\models\phi[\overline{\alpha}]$.

ii) $\mathfrak{A}\models\bigvee\Phi[\overline{\alpha}]\longleftrightarrow$ para alguma $\phi\in\Phi$: $\mathfrak{A}\models\phi[\overline{\alpha}]$

iii) $\mathfrak{A}\models(\forall\overline{\nu})\phi[\overline{\alpha}]\longleftrightarrow$ para toda sequência $\overline{a}$ em A:

$$\mathfrak{A}\models\phi[\overline{\alpha}[\frac{\overline{\nu}}{\overline{a}}]].$$

iv) $\mathfrak{A}\models(\exists\overline{\nu})\phi[\overline{\alpha}]\longleftrightarrow$ para alguma sequência $\overline{a}$ em A:

$$\mathfrak{A}\models\phi[\overline{\alpha}[\frac{\overline{\nu}}{\overline{a}}]].$$

Aqui o significado de $\overline{\alpha}[\frac{\overline{\nu}}{\overline{a}}]$ é uma óbvia generalização do caso finitário.

$\mathfrak{A}\models\phi(\overline{\nu})[\overline{\alpha}]$ será abreviada por $\mathfrak{A}\models\phi[\overline{a}]$ se $\overline{a}=\overline{\alpha}(\overline{\nu})$.

Denotaremos com $\equiv_{\infty\lambda}$ e $\equiv_{k\lambda}$ as relações de equivalencia elementar em $L_{\infty\lambda}$ e $L_{k\lambda}$ respectivamente.

IV.2.6- Exemplos de Expressões Infinitárias

Exemplo 1- Em $L\omega_1\omega$ podemos expressar o fato de um conjunto ser finito do seguinte modo:

$$\bigvee_{n<\omega}(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y)\bigvee_{k=1}^{n}(y=x_k),$$

portanto, como $L\omega_1\omega\subseteq L_{k\lambda}$ para todo $k\geqslant\omega_1$ e $\lambda\geqslant\omega$, temos que, por III.1.16, $L_{k\lambda}$ não satisfaz a propriedade de não-finitude (PNF), o que implica que nenhuma dessas linguagens é compacta (ie. $(\aleph_0,\infty)$-compacta).

Exemplo 2- Como foi mostrado em II.2.3, em $L\omega_1\omega$ é caracterizável categoricamente a estrutura standard dos números naturais com a função "sucessor", portanto nenhuma linguagem $L_{k\lambda}(\supseteq L\omega_1\omega)$ satisfaz o teorema L-S↑, embora, sendo $L_{k\lambda}$ um conjunto como foi observado em IV.2.4 (ii), existe um número de Hanf para cada uma dessas linguagens. Mais adiante daremos uma limitação para o número de Hanf de algumas destas linguagens. Devemos mencionar que a linguagem $L\omega_1\omega$ tem a propriedade de Löwenheim-Skolen (cf. Keisler [1971]).

Exemplo 3- Em teoria de grupos (abelianos) muitos conceitos encontram uma expressão adequada nas linguagens infinitárias. Em $L\omega_1\omega$ temos por exemplo os seguintes:

i) grupo de torsão: $(\forall x)\bigvee_{n<\omega}(n\cdot x=0)$,

ii) p-grupo: $(\forall x)\bigvee_{n<\omega}(p^n\cdot x=0)$,

iii) grupo livre de torsão: $\bigwedge_{n\geqslant 1}(\forall x)(x\neq 0\rightarrow n\cdot x\neq 0)$,

iv) grupo finitamente gerado:

$$\bigvee_{n<\omega}(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y)\bigvee_{\overline{m}\in Z^n}(y=\sum_{k=1}^{n}m_k\cdot x_k)$$

onde $\overline{m}$ denota $(m_1,\ldots,m_n)\in Z^n$.

Exemplo 4- Um exemplo interessante é o caso dos grupos simples na linguagem das estruturas $\langle G; \cdot; ^{-1}; e\rangle$. A definição usual de grupo simples é de 2ª ordem: "todo subgrupo próprio normal é trivial", mas facilmente pode-se encontrar uma forma equivalente que possa ser expressa em $L\omega_1\omega$:

"G é simples $\longleftrightarrow$ $(\forall a\in G: a\neq e \Longrightarrow \langle a\rangle_N = G)$" onde $\langle a\rangle_N$ denota o subgrupo normal gerado por a, (cf. Dickmann [1975]).

Em $L\omega_1\omega$ temos:

$$(\forall x)[x\neq e\rightarrow(\forall y)\bigvee_{n\geq 1}(\exists z_1)\ldots(\exists z_n)\bigvee_{\bar{m}\in Z^n}(y=\prod_{k=1}^{n} z_k\cdot x^{m_k}\cdot z_k^{-1})]$$

Exemplo 5- Em $L\omega_1\omega_1$, o corpo ordenado dos números reais $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}; \leq; +, \cdot; 0, 1\rangle$ pode ser caracterizado categoricamente mediante a seguinte sentença: (cf. Kopperman [1967]),

$(\forall \nu\restriction\omega+1)[\bigwedge_{n<\omega} \nu_n\leq\nu_\omega \rightarrow (\exists\nu_{\omega+1})(\bigwedge_{n<\omega} \nu_n\leq\nu_{\omega+1} \wedge (\forall\nu_{\omega+2})(\bigwedge_{n<\omega} \nu_n\leq\nu_{\omega+2}\rightarrow \nu_{\omega+1}\leq\nu_{\omega+2}))]$, a qual expressa que toda sequência de números reais que tem um limite superior, tem um menor limite superior. Uma prova de que todo corpo ordenado que satisfaz esta sentença é isomorfo a $\mathcal{R}$, pode ser vista na referência citada.

Isto prova que nenhuma linguagem $L_{k\lambda}$ com $k,\lambda\geq\omega_1$ satisfaz os teoremas L-S↓ e L-S↑.

Exemplo 6- Expressão da Cardinalidade

Seja k um cardinal infinito e $\lambda<k$. Em L_{kk} podemos expressar o fato de um conjunto ter cardinalidade λ mediante a sentença:

$$\sigma_\lambda: (\exists\nu\restriction\lambda)[\bigwedge_{\alpha<\beta<\lambda}(\nu_\alpha\neq\nu_\beta)\wedge(\forall y)\bigvee_{\alpha<\lambda}(y=\nu_\alpha)];$$

entretanto, o fato de um conjunto ter cardinalidade $<k$ pode ser expresso por $\bigvee_{\lambda<k}\sigma_\lambda$. Observar que esta última sentença perten-

ce a L_{k^+k} (onde k^+ é o cardinal sucessor de k) pois o conjunto $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda<k}$ tem cardinalidade k (ver def. IV.2.3 (ii)).

Em particular, ambas as sentenças pertencem à linguagem $L_{\infty k}$.

Devemos observar, baseados em III.4.2.4, que como todo cardinal $<k$ é expressável em L_{kk}, então o número de Hanf $h(L_{kk})\geq k$.

Exemplo 7- Seja $<X, \tau; \epsilon>$ um espaço topológico com $|X|=k$. Em $L_{(2^k)^+2^k}$ podemos expressar o fato de τ ser fechada por uniões arbitrárias do seguinte modo:

$$\bigwedge_{\lambda<2^k}(\forall V\restriction\lambda)(\exists U)(\forall x)(x\epsilon U\leftrightarrow \bigvee_{\alpha<\lambda}(x\epsilon V_\alpha))$$

onde x é uma variável de 1ª ordem com respeito ao domínio X e U e cada V_α com $\alpha<\lambda$, são variáveis de 1ª ordem com respeito ao domínio τ.

Exemplo 8- Na teoria de grupos abelianos se generalizam as noções de ser finitamente gerado e de ser livre de torsão da seguinte maneira:

IV.2.6.1- Definição. Seja k um cardinal infinito ($\geq\aleph_0$) e G um grupo-abeliano infinito.

i) dizemos que G é <u>k-gerado</u> se é gerado por um número $<k$ de elementos de G.

ii) dizemos que G é <u>k-livre</u> se todo subgrupo k-gerado de G é livre (onde um grupo abeliano é dito livre, com λ geradores, se é isomorfo a $\bigoplus_I \mathbb{Z}$ com $|I|=\lambda$).

IV.2.6.2- Observações

i) É óbvio que "$\aleph_0$-gerado" significa "finitamente gerado".

Por outro lado, "$\aleph_0$-livre" equivale a "livre de torsão". Com efeito, se G é $\aleph_0$-livre, então todo subgrupo finitamente gerado é livre, em particular, o subgrupo gerado por um elemento, logo, G é livre de torsão. Reciprocamente, se G é livre de torsão e H é um subgrupo finitamente gerado de G, então é óbvio que também H é livre de torsão, mas pelo teorema fundamental de decomposição dos grupos abelianos finitamente gerados, H é isomorfo a uma soma direta finita de cópias de $\mathbb{Z}$, portanto, H é livre e G é $\aleph_0$-livre (cf. Rotman [1973, pag. 193]).

ii) Se $k > \aleph_0$, então G ser k-gerado equivale a ter $|G| < k$, mesmo se G for um grupo de torsão. Portanto, ser k-gerado é expressável em L_{k^+k} (ver ex. 6 acima), logo também em $L_{\infty k}$.

iii) É imediato que todo grupo livre é k-livre para qualquer cardinal infinito k. Provaremos na seção IV.3 que sob certas hipóteses impostas sobre o cardinal k, todo grupo k-livre é livre.

Agora, a sentença θ a seguir expressa o fato de G ser um grupo k-livre, para $k > \aleph_0$, na versão seguinte: "para toda cardinalidade $\lambda < k$, todo subgrupo de cardinalidade λ, contém um número λ de geradores livres".

Seja $I = \{\overline{m} \in \mathbb{Z}^\lambda / m_i = 0$ salvo para um número finito de índices$\}$ e $J = I \setminus \{\overline{0}\}$, então:

$$\theta : \bigwedge_{\lambda < k} (\forall \overline{x} \restriction \lambda)(\exists \overline{y} \restriction \lambda)[\bigwedge_{\alpha < \lambda} \bigvee_{\overline{m} \in I} (y_\alpha = \sum_\beta m_\beta \cdot x_\beta) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\beta<\lambda} \bigvee_{\overline{m}\in I} (x_\beta = \sum_\alpha m_\alpha \cdot y_\alpha) \wedge \bigwedge_{\overline{m}\in J} (\sum_\alpha m_\alpha \cdot y_\alpha \neq 0)].$$

θ é uma sentença em L_{k^+k} e portanto em $L_{\infty k}$.

IV.3- O Problema da Compacidade

Nesta seção vamos dar uma visão breve de alguns conceitos relacionados com a compacidade e o teorema de Łos para linguagens infinitárias. Obviamente será incompleta e só pretende mostrar o tipo de argumentos e problemas envolvidos neste tema.

Sabemos, pelo estudo feito no capítulo III, que a compacidade, mais especificamente, a $(\aleph_0, \infty)$-compacidade de L^1 pode ser provada a partir do teorema de Łos, e basicamente a construção, dentro da prova, do ultraproduto que serviria como o modelo procurado, foi possível pela existência de um certo ultrafiltro. O ponto chave foi o teorema do ultrafiltro que garantia a existência de um ultrafiltro contendo uma família com a propriedade de interseção finita.

Vamos generalizar esta situação introduzindo um "axioma" análogo ao teorema do ultrafiltro, porém, a diferença dele, não pode ser provado na teoria de conjuntos clássica (ZFC) nem usando o axioma de escolha.

IV. 3.1- Definição. Seja I um conjunto com $|I| \geq k$ e F um filtro sobre I. Dizemos que F é <u>k-completo</u> se para toda coleção

$\{A_j\}_{j\in J}\subseteq F$ com $|J|<k$ temos que $\bigcap A_j\in F$.

Antes de formular o nosso axioma vamos mostrar que a existência de ultrafiltros k-completos sobre I está intimamente ligada ao problema clássico do Análise Real da existência de uma certa medida totalmente definida no conjunto I.

IV.3.2- Definição. Seja I um conjunto com $|I|=k$. Dizemos que k é um <u>cardinal mensurável</u> se existe

$\mu:P(I)\to\{0,1\}$ tal que:

i) $\mu(I)=1$,

ii) μ é <u>k-aditiva</u>, ie. para toda coleção $\{A_j\}_{j\in J}\subseteq P(I)$ com $|J|<k$ e dois a dois disjuntos, temos que $\mu(\bigcup A_j)=\Sigma\mu(A_j)$.

iii) μ é não-trivial, ie. para todo $x\in I$, $\mu(\{x\})=0$.

IV.3.3- Proposição. k é mensurável $\longleftrightarrow$ existe sobre k um ultrafiltro não-principal k-completo.

Demonstração.

$(\Longrightarrow)$ $D=\{A\subseteq k/\mu(A)=1\}$ é um ultrafiltro não-principal e k-completo.
$(\Longleftarrow)$ $\mu:P(k)\to\{0,1\}$ dada por $\mu(A)=\begin{cases}1, & \text{se } A\in D\\ 0, & \text{se } A\notin D\end{cases}$ é uma medida k-aditiva e não-trivial sobre k ■

IV.3.4- Proposição

Se k é mensurável, então k é regular.

Demonstração. Suponhamos $\{A_j\}_{j\in J}\subseteq P(k)$ tal que $|J|<k$ e $\forall j\in J$: $|A_j|<k$.

Como μ é k-aditiva, então para cada $j\in J$: $\mu(A_j)=\mu(\bigcup_{x\in A_j}\{x\})=\sum_{x\in A_j}\mu(\{x\})=0$ pois μ é não-trivial.

Por outro lado, é fácil provar a partir da definição de μ que para toda coleção $\{B_j\}_{j\in J}$ com $|J|<k$, que $\mu(\cup B_j)\leqslant\Sigma\mu(B_j)$, portanto, $\mu(\cup A_j)\leqslant\Sigma\mu(A_j)=0$, ie. $\mu(\cup A_j)=0$, logo, $\cup A_j\neq k$ pois $\mu(k)=1$ ■

IV.3.5- Definição. Seja I um conjunto com $|I|\geqslant k$ e k regular. Seja $S\subseteq P(I)$ com a propriedade de k-interseção (ver def. III.1.8 (ii)). Definimos $\langle S\rangle=\{B\subseteq I/\text{existe } \{A_j\}_{j\in J}\subseteq S \text{ com } |J|<k \text{ e } \bigcap A_j\subseteq B\}$.

IV.3.6- Proposição. Se $S(\subseteq P(I))$ tem a propriedade de k-interseção, então $\langle S\rangle$ é um filtro próprio k-completo.

Demonstração. Basta verificar que é k-completo, o demais é trivial.

Seja $\{B_l\}_{l\in L}\subseteq\langle S\rangle$ com $|L|<k$, então, para cada $l\in L$ existe $\{A_{l_j}\}_{j\in J_l}$ com $|J_l|<k$ e $\bigcap_{j\in J_l}A_{l_j}\subseteq B_l$, logo, $\bigcap_{l\in L}\bigcap_{j\in J_l}A_{l_j}\subseteq\bigcap_{l\in L}B_l$.

Agora, seja $J = \bigcup_{l \in L} J_l$ e consideremos a família $\{A_{l_j}\}_{l_j \in J}$, então, como k é regular temos que $|J| = |\bigcup_{l \in L} J_l| < k$, logo, como $\bigcap_{l_j \in J} A_{l_j} \subseteq B$ temos que $B \in \langle S \rangle$ ∎

IV.3.7. **Proposição.** Para k regular e $|I| \geq k$, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) todo filtro próprio k-completo sobre I pode ser extendido a um ultrafiltro k-completo.

ii) toda família $S \subseteq P(I)$ com a propriedade de k-interseção está contida num ultrafiltro k-completo.

Demonstração

(i)⟹(ii): Basta observar que $S \subseteq \langle S \rangle$, o qual, pela proposição anterior é um filtro próprio k-completo.

(ii)⟹(i): Basta observar que todo filtro próprio k-completo tem a propriedade de k-interseção ∎

IV.3.8- **Definição.** Para k regular (e a falta de um nome mais apropriado) chamaremos de propriedade do k-ultrafiltro (k-U) qualquer uma das duas afirmações acima equivalentes.

Esta propriedade não pode ser provada na teoria de conjuntos ZFC porque implica a existência de cardinais (fracamente) inaccesíveis (ver seção IV.1).

IV.3.9- Proposição. Se k é regular e k satisfaz a propriedade k-U, então k é mensurável.

Demonstração. Como k ser mensurável equivale à existência de um ultrafiltro não-principal k-completo sobre k (ver IV.3.3), basta provar que em $P(k)$ existe pelo menos uma família com a propriedade de k-interseção.

Seja $S=\{A\subseteq k/|A^c|<k\}$ e seja $\{A_j\}_{j\in J}\subseteq S$ com $|J|<k$; se $\bigcap_{j\in J}A_j=\phi$, então $\bigcup_{j\in J}A_j^c=k$ o qual é impossível por ser k regular e cada $|A_j^c|<k$ e $|J|<k$. Portanto, $\bigcap_{j\in J}A_j\neq\phi$.

Finalmente, o ultrafiltro k-completo que contém S será não-principal porque S contém obviamente os subconjuntos cofinitos de k ∎

IV.3.10- Teorema de Łos para a Linguagem L_{kk}

Seja k um cardinal regular e I um conjunto com $|I|\geqslant k$ e satisfazendo a propriedade k-U. Se $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ é uma família de estruturas e D é um ultrafiltro k-completo sobre I, então para toda $\phi\in L_{kk}$ e toda assignação $\bar{\alpha}$ em $\pi_D\mathfrak{A}_i$ temos (ver III.2.1.3), $\pi_D\mathfrak{A}_i\models\phi[\bar{\alpha}]\longleftrightarrow\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\phi[\bar{\alpha}_i]\}\in D$.

Demonstração. A prova é a mesma que para o caso de L^1 salvo nos seguintes casos:

i) se ϕ é $\bigwedge_{j\in J}\phi_j$ com $|J|<k$.

$\pi_D\mathfrak{A}_i\models\bigwedge_{j\in J}\phi_j[\bar{\alpha}]\longleftrightarrow$ para todo $j\in J$: $\pi_D\mathfrak{A}_i\models\phi_j[\bar{\alpha}]$ $\longleftrightarrow$(por hipótese indutiva) para todo $j\in J$:$\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\phi_j[\bar{\alpha}_i]\}\in D$ $\longleftrightarrow$(por ser D k-completo) $\bigcap_{j\in I}\{i\in I/\mathfrak{A}_i\models\phi_j[\bar{\alpha}_i]\}\in D$ $\longleftrightarrow\{i\in I/\forall_{j\in J}$:

$\mathfrak{A}_i \models \phi_j[\bar{\alpha}_i]\}\in D \iff \{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \bigwedge_{j\in J}\phi_j[\bar{\alpha}_i]\}\in D$.

ii) ϕ é $(\exists_{j\in J} v_j)\psi$ com $|J|<k$.

$\pi_D\mathfrak{A}_i \models (\exists v_j)\psi[\bar{\alpha}] \iff$ existe $\{*f_j\}_{j\in J}\subseteq \pi_D\mathfrak{A}_i$ tal que $\pi_D\mathfrak{A}_i \models \psi[\bar{\alpha}[\frac{v_j}{*f_j}]] \iff$ para $\{*f_j\}_{j\in J}$ temos que $\{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \psi[\bar{\alpha}[\frac{v_j}{*f_j}]_i]\}$ $\in D \iff$ para $\{*f_j\}_{j\in J}$, $\{i\in I/\mathfrak{A}_i \models \psi[\bar{\alpha}_i[\frac{v_j}{f_j(i)}]]\}\in D \iff \{i\in I/\mathfrak{A}_i \models$ $(\exists v_j)\psi[\bar{\alpha}_i]\}\in D$ ∎

IV.3.11- Definição. Um cardinal k é dito <u>compacto</u> se k é regular e todo I com $|I|\geq k$ tem a propriedade de k-ultrafiltro.

IV.3.12- Proposição

Se k é compacto, então L_{kk} é (k,∞)-compacto.

Demonstração. Seja Σ uma coleção qualquer de sentenças em L_{kk} tal que toda $\Delta\in P_k(\Sigma)(=\{\Delta\subseteq\Sigma/|\Delta|<k\})$ tem modelo. Provaremos que Σ tem modelo em forma análoga ao caso clássico.

Seja $I=P_k(\Sigma)$ e para cada $\Delta\in I$ sejam $\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta$ (que por hipótese existe) e $A_\Delta=\{\Delta'\in I/\Delta\subseteq\Delta'\}$.

Afirmação 1. $\{A_\Delta\}_{\Delta\in I}$ tem a propriedade de k-interseção.

Com efeito, seja $\{A_{\Delta j}\}_{j\in J}$ com $|J|<k$, então, como k é regular, $|\bigcup_{j\in J}\Delta_j|<k$, ie. $\bigcup_{j\in J}\Delta_j\in I$; além disso, para cada $j\in J$, $\Delta_j\subseteq\bigcup_{j\in J}\Delta_j$, ie. $\bigcup_{j\in J}\Delta_j\in A_{\Delta_j}$, logo, $\bigcup_{j\in J}\Delta_j\in\bigcap_{j\in J}A_{\Delta_j}$, portanto, $\bigcap_{j\in J}A_{\Delta_j}\neq\phi$.

Agora como k é compacto e $|I|=|P_k(\Sigma)|\geq k$ temos que existe um ultrafiltro D k-completo sobre I tal que $\{A_\Delta\}_{\Delta\in I}\subseteq D$.

Afirmação 2. $\pi_D\mathfrak{A}_\Delta\models\Sigma$.

A prova é idêntica ao caso clássico e será omitida (ver III.2.3), onde o teorema de Łos é aplicável por D ser k-completo ∎

A seguinte proposição reproduz a situação dada em III.1.14 com respeito à propriedade de não-finitude numa linguagem $(\aleph_0,\infty)$-compacta.

IV.3.13- Proposição. Seja k compacto e Σ uma coleção de sentenças de L_{kk} tal que o conjunto $\{|A|/\mathfrak{A}\models\Sigma$ e $|A|<k\}$ é cofinal com k (ver IV.1.1), então existe $\mathfrak{A}\models\Sigma$ tal que $|A|\geqslant k$.

Demonstração. Para cada $\lambda<k$ consideremos a sentença $\theta_\lambda:(\exists v\restriction\lambda)\bigwedge_{i<j<\lambda}(v_i\neq v_j)\in L_{kk}$ (θ_λ expressa a existência de $\geqslant\lambda$ elementos na estrutura).

Seja $\Sigma'=\Sigma\cup\{\theta_\lambda/\lambda<k\}$ e $\Delta\subseteq\Sigma'$ com $|\Delta|<k$. Como k é regular temos que $\gamma=\sup\{\lambda/\theta_\lambda\in\Delta\}<k$, logo, pela condição de cofinalidade, $\Sigma\cup\{\theta_\gamma\}$ tem modelo e obviamente todo modelo de $\Sigma\cup\{\theta_\gamma\}$ é modelo de Δ, portanto, Δ tem modelo.

Finalmente, como L_{kk} é (k,∞)-compacta, Σ' tem um modelo $\mathfrak{A}=\langle A,\ldots\rangle$, ie. $\mathfrak{A}\models\Sigma$ e $|A|\geqslant\lambda$ para todo $\lambda<k$, logo, $|A|\geqslant k$ ∎

Corolário. "Ser de cardinalidade $<k$" não é axiomatizável em L_{kk} (para k compacto) ∎

IV.3.14- Proposição. Se k é compacto, então o número de Hanf $h(L_{kk})=k$.

Demonstração. Seja Σ uma coleção de sentenças em L_{kk} e suponhamos que Σ tem um modelo $\mathfrak{A}$ com $|A|\geqslant k$.

Acrescentamos à linguagem a coleção de constantes distintas $\{c_i\}_{i\in I}$ com $|I|=\lambda>|A|$.

Seja $\Sigma'=\Sigma\cup\{c_i\neq c_j/i,j\in I\}$. Se $\Delta\subseteq\Sigma'$ é tal que $|\Delta|<k$, então obviamente $\mathfrak{A}$ é modelo de Δ, portanto, como L_{kk} é (k,∞)-compacta, Σ' admite um modelo $\mathfrak{B}$, ie. $\mathfrak{B}\models\Sigma$ e $|B|\geqslant\lambda>|A|$.

Em consequência, pela definição III.4.2.1, $h(L_{kk})\leqslant k$.

Finalmente, por IV.2.6 (exemplo 6), $h(L_{kk})\geqslant k$, logo, $h(L_{kk})=k$ ∎

A seguir daremos uma aplicação interessante, dos resultados anteriores, à teoria de grupos abelianos (cf. Eklof [1977]).

IV.3.15- Proposição

Seja k um cardinal compacto com $k>\aleph_0$ e G um grupo abeliano infinito. Se G é k-livre, então G é livre (ver definição IV.2.6.1 (ii)).

Demonstração. Introduzimos na linguagem L_{kk} (adequada à teoria de grupos abelianos) uma nova constante c_a para cada $a\in G$, e um predicado unário P, obtendo a linguagem L^{λ}_{kk}.

Sejam as sentenças

$$\theta_1: \bigwedge_{n<\omega}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\left[\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \in P) \to \bigwedge_{\substack{\bar{m}\in \mathbb{Z}^n \\ \bar{m}\neq \bar{0}}}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \neq 0\right)\right],$$

$$\theta_2: (\forall y)\bigvee_{n<\omega}(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\left[\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \in P) \wedge \bigvee_{\bar{m}\in \mathbb{Z}^n}\left(y=\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i\right)\right].$$

θ_1 expressa que a interpretação P^G de P em G é um conjunto linearmente independente (no sentido da teoria de grupos abelianos), e θ_2 expressa que P^G gera G.

Com respeito à notação: $\bar{m}$ significa $(m_1,\ldots,m_n)$, e $x_i \in P$ significa $P(x_i)$.

Observar que θ_1, $\theta_2 \in L'_{\omega_1\omega} \subseteq L'_{kk}$ pois $k>\aleph_0$.

Além disso, devemos mencionar que um grupo G satisfaz θ_1 e θ_2 se e só se contém um subconjunto P^G de geradores livres (ie. linearmente independentes), (isto tem como consequência, em particular que a classe dos grupos livres (abelianos) é axiomatizável em $L_{\omega_1\omega}(\tau^P)$ onde τ^P é o tipo τ de estrutura dos grupos abelianos acrescentado com um símbolo de predicado unário P; veremos depois que esta classe não é axiomatizável em $L_{\infty\omega}(\tau)$, menos o será em $L_{\omega_1\omega}(\tau)$).

Seja $\Sigma=\{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot c_{a_i}=0 / n<\omega,\ a_1,\ldots,a_n \in G$ e em $G: \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a_i =^G 0\}$ (observar que $\Sigma \subseteq L'_{\omega\omega}$), e consideremos $\Sigma' = \Sigma \cup \{\theta_1, \theta_2\}$.

Seja $\Delta \subseteq \Sigma'$ com $|\Delta|<k$, vamos supor que $\theta_1, \theta_2 \in \Delta$, então Δ envolve $<k$ símbolos c_a.

Seja $S=\{a\in G / c_a$ ocorre em $\Delta\}$, então o subgrupo G' gerado por S tem cardinalidade $<k$. Logo, como G é k-livre, temos que G' é livre. Obviamente G' satisfaz as sentenças de Σ contidas em Δ, além disso, pelo dito acima G' também satisfaz θ_1 e θ_2, portanto, G' é modelo de Δ.

Agora, pela compacidade de k, Σ' tem um modelo F que por satisfazer θ_1 e θ_2 é um grupo livre.

Afirmação. G está mergulhado em F.

Com efeito, seja $f:G\to F$

$$a\to b_a$$

onde cada b_a é a interpretação de $\bar{c}_a$ em F.

i) f é injetora: $f(a)=f(a')\Longrightarrow b_a=b_{a'}\Longrightarrow c_a=c_{a'}\Longrightarrow a=a'$ (pela escolha dos c_a).

ii) para provar que $f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)$, basta provar que $b_{a_1+a_2}=^F b_{a_1}+b_{a_2}$.

Suponhamos $b_{a_1+a_2}=^F b_a$ e $b_{a_1}+b_{a_2}=^F b_{a'}$, então $b_{a_1+a_2}-b_a=^F 0$ e $b_{a_1}+b_{a_2}-b_{a'}=^F 0$, mas como F é modelo de Σ temos que as sentenças $c_{a_1+a_2}-c_a=0$ e $c_{a_1}+c_{a_2}-c_{a'}=0\in\Sigma$, ie. em G, $a_1+a_2=^G a$ e $a_1+a_2=^G a'$, logo, $a=^G a'$ e $b_a=^F b_{a'}$, portanto, $b_{a_1+a_2}=b_{a_1}+b_{a_2}$.

Finalmente, sabe-se que todo subgrupo de um grupo (abeliano) livre é livre, em consequência G é livre ∎

IV.3.16- Observações

i) por IV.2.6.2 (iii), podemos concluir que se k é compacto não-enumerável, então ser um grupo livre equivale a ser k-livre.

Portanto, se existe algum cardinal compacto não-enumerável k, a classe dos grupos abelianos livres é axiomatizável em $L_{\infty\infty}(\tau)$ ($\supseteq L_{kk}(\tau)$), onde τ é o tipo de estrutura dos grupos abelianos (sem nenhum predicado adicional).

ii) a prova anterior não é aplicável a $k=\aleph_0$, apesar de ser compacto, pois as sentenças $\theta_1,\theta_2\in L_{\omega_1\omega}\notin L_{\omega\omega}$. Mais do que isto, a proposição não é válida para $k=\aleph_0$ já que, por exem plo, $\mathbb{Z}^{\omega}$ é $\aleph_0$-livre (ie. livre de torsão) mas não é livre (cf. Dickmann [1975, teor. de Baer-Specker, pag. 380]).

Para $k=\aleph_0$ temos o seguinte resultado: se G é livre de torsão e finitamente gerado, então G é livre (cf. Rotman [1973, pag. 192]).

iii) sabe-se que mensurável não implica compacto. Sem a hipótese de k ser compacto, melhor ainda, sem a propriedade do k-ultrafiltro pode-se provar que se k é mensurável, então L_{kk} é (k,k)-compacto (cf. Chang e Keisler [1973]), com o que pode-se provar a seguinte versão fraca da proposição anterior: se G é k-livre (sendo k mensurável) e $|G|=k$, então G é livre.

iv) devemos destacar que Shelah [1975] provou sem hipóteses fortes o seguinte: se λ é um cardinal singular e G é um grupo abeliano λ-livre com $|G|=\lambda$, então G é livre.

IV.4- Caracterização Algébrica da L-Equivalência

Nesta seção vamos dar os resultados centrais da tese, os teoremas de caracterização algébrica da equivalência elementar em diversas linguagens. Fundamentalmente provaremos o seguinte, mas numa versão generalizada: se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$, então, $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Também daremos o resultado clássico da caracterização da L^1-equivalência elementar dada por Fraissé mofificando apropriadamente a definição de estruturas parcialmente isomorfas.

IV.4.1- Definição. Seja λ um cardinal infinito e $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Est(\tau)$. Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são <u>λ-parcialmente isomorfos</u> se existe uma família I de isomorfismos parciais de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ com a propriedade de λ-vaivém (Back-and-Forth) seguinte:

i) (Forth) se $f \in I$ e $S \subseteq A$ com $|S| < \lambda$, existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $S \subseteq domg$.

ii) (Back) se $f \in I$ e $R \subseteq B$ com $|R| < \lambda$, existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $R \subseteq img$.

Este fato será denotado com $\mathcal{A} \cong_\lambda \mathcal{B}$, ou $I : \mathcal{A} \cong_\lambda \mathcal{B}$ se queremos especificar a família I. Deve-se observar que para $\lambda = \aleph_0$ temos $\cong_p$ (ver def. I.3.11).

IV.4.2- Proposição. Se $\mathcal{A} \cong_\lambda \mathcal{B}$ e $|A| < \lambda$, então $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ (em particular, para $\lambda = \aleph_0$).

Demonstração. Como $|A| < \lambda$, existe $f \in I$ tal que $A = domf$. Se f não é sobre, existe $b \in B \setminus imf$ e $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ e $b \in img$, o que implica que existe $a \in A \setminus domf$ com $g(a) = b$ ($\Rightarrow\Leftarrow$) ■

IV.4.3- Exemplo. Se F_1 e F_2 são grupos livres (abelianos) e $|F_1| \geq \lambda$, $|F_2| \geq \lambda$ com λ não-enumerável, então, $F_1 \cong_\lambda F_2$.

IV.4.4- Observação. Se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Est(\tau)$ e $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, então para todo λ:

$\mathfrak{A}\cong_\lambda\mathfrak{B}$. Ademais, se $\eta<\lambda$ temos que $\mathfrak{A}\cong_\lambda\mathfrak{B}\Rightarrow\mathfrak{A}\cong_\eta\mathfrak{B}$, em particular, para todo λ: $\mathfrak{A}\cong_\lambda\mathfrak{B}\Rightarrow\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}$.

IV.4.5- Definição. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é <u>fortemente λ-parcialmente isomorfo</u> a $\mathfrak{B}$, e denotamos com $\mathfrak{A}\cong^s_\lambda\mathfrak{B}$, se existe uma família I de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ tal que $I:\mathfrak{A}\cong_\lambda\mathfrak{B}$ e I é fechado por uniões de cadeias de funções de comprimento $<cf(\lambda)$ (ver def. IV.1.2).

IV.4.6- Proposição. Se $\mathfrak{A}\cong^s_\lambda\mathfrak{B}$ e $|A|=|B|=\lambda$, então $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

Demonstração. Sejam $A=\{a_p\}_{p<\lambda}$ e $B=\{b_p\}_{p<\lambda}$ os domínios de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ respectivamente enumerados, e seja $\{\eta_\alpha\}_{\alpha<cf(\lambda)}$ uma sequência estritamente crescente de cardinais $<\lambda$ tais que $\sup\eta_\alpha=\lambda$.

Definimos $f_0\subseteq\ldots\subseteq f_\alpha\subseteq\ldots(\alpha<cf(\lambda))$ da seguinte maneira:

i) f_0 é qualquer $f_0\in I$ previamente fixada.

ii) se α é um ordinal sucessor, então existe β, ordinal limite, e $n<\omega$, com $n\neq 0$ e $\alpha=\beta+n$. Se n é ímpar, definimos $f_{\beta+n}=$ algum $g\in I$ tal que $f_{\beta+n-1}\subseteq g$ e $\{a_p/p<\eta_\alpha\}\subseteq \mathrm{dom}g$, a qual existe pela propriedade Forth já que $\eta_\alpha<\lambda$. Se n é par, em forma análoga, definimos $f_{\beta+n}=$ algum $g\supseteq f_{\beta+n-1}$ tal que $\{b_p/p<\eta_\alpha\}\subseteq \mathrm{img}$.

iii) se α é um ordinal limite, definimos $f\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}f_\beta\in I$ pois I é fechado por uniões de cadeias de comprimento $<cf(\lambda)$.

Finalmente, definindo $f = \bigcup_{\alpha<cf(\lambda)} f_\alpha$ temos que dom$f=A$ e im$f=B$ pois, como $\sup\{\eta_\alpha\}=\lambda$, então $\bigcup_{\alpha<cf(\lambda)}\{a_p/p<\eta_\alpha\}=A$ e $\bigcup_{\alpha<cf(\lambda)}\{b_p/p<\eta_\alpha\}=B$.

É fácil verificar que f é um isomorfismo. Mais do que isso, esta proposição é uma perfeita generalização da proposição I.3.12 que estabelece uma espécie de recíproca da observação anterior ∎

IV.4.7- Teorema de Caracterização da $L_{\infty\lambda}$-Equivalência Elementar

Para todo par de estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$:

$\mathfrak{A} \cong_\lambda \mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$.

Demonstração

($\Longrightarrow$) suponhamos $I: \mathfrak{A} \cong_\lambda \mathfrak{B}$. Provaremos por indução na complexidade das fórmulas $\phi(\overline{x}) \in L_{\infty\lambda}(\tau)$, com $|\overline{x}|<\lambda$ (ver obs. IV.2.4.(i)), que para toda $f \in I$ e toda assignação de valores $\overline{\alpha}$ em dom$f$, ie. $\overline{\alpha}(\overline{x})=\overline{a} \in$ dom$f$, temos que:

$$\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(\overline{a})].$$

Veremos somente os passos indutivos importantes (para os demais casos ver a prova feita em II.5.6.3.2).

i) se ϕ e $\bigwedge\phi_i$ (sem limitação de cardinalidade).

$\mathfrak{A} \models \bigwedge\phi_i[\overline{a}] \longleftrightarrow$ para todo $i: \mathfrak{A} \models \phi_i[\overline{a}] \longleftrightarrow$ por hipótese indutiva, para todo $i: \mathfrak{B} \models \phi_i[f(\overline{a})] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \bigwedge\phi_i[f(\overline{a})]$.

ii) ϕ é $(\exists\overline{v})\psi(\overline{x},\overline{v})$ com $|\overline{v}|<\lambda$.

$\mathfrak{A} \models (\exists\overline{v})\psi(\overline{x},\overline{v})[\overline{a}] \longrightarrow$ existe $\overline{b} \in A$ com $|\overline{b}|<\lambda$ tal que

$\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a},\bar{b}] \Longrightarrow$ (pela propriedade de Back-and-Forth) existe $g \in I$ com $f \subseteq g$ tal que $\bar{b} \in dom g$ e $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a},\bar{b}] \Longrightarrow$ (por hipótese indutiva) $\mathfrak{B} \models \psi[g(\bar{a}), g(\bar{b})] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[f(\bar{a}), g(\bar{b})] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models (\exists\bar{v})\psi(\bar{x},\bar{v})[f(\bar{a})]$.

Em forma análoga prova-se que $\mathfrak{B} \models (\exists\bar{v})\psi[f(\bar{a})]$ implica $\mathfrak{A} \models (\exists\bar{v})\psi[\bar{a}]$.

Isto completa a indução e mostra que para toda sentença σ: $\mathfrak{A} \models \sigma \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$, ie. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$.

($\Longleftarrow$) suponhamos $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$. Vamos construir uma família I de isomorfismos parciais tal que $I: \mathfrak{A} \cong_{\lambda} \mathfrak{B}$.

Por simplicidade vamos supor que as estruturas são relacionais, ie. não contêm funções nem constantes (isto acarreta o fato de que todo subconjunto da estrutura é domínio de uma subestrutura).

Definimos a família I da seguinte maneira ($\bar{a}$ denota uma coleção qualquer de elementos de A): $I = \{f: \bar{a} \cong f(\bar{a}) / |\bar{a}| = |f(\bar{a})| < \lambda$ e $\forall\phi \in L_{\infty\lambda}: \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(\bar{a})]\}$.

$I \neq \phi$ pois a função vazia $f = \phi \in I$ já que pela suposição, $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$, ie. $\forall\sigma$ (sem variáveis livres): $\mathfrak{A} \models \sigma \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$.

Provaremos que I tem a propriedade de λ-vaivém (basta provar a propriedade Forth).

Seja $f \in I$ e $\bar{c} \in A$ com $|\bar{c}| < \lambda$ e $\bar{c} \cap \bar{a} = \phi$. Devemos provar que existe $\bar{b} \in B$ com $|\bar{b}| = |\bar{c}|$ tal que

(*)....$\forall\phi \in L_{\infty\lambda}: \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a},\bar{c}] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(\bar{a}), \bar{b}]$.

Neste caso podemos definir $g: \bar{a} \cup \bar{c} \to f(\bar{a}) \cup \bar{b}$ mediante $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$ e $g(\bar{c}) = \bar{b}$ (supoe-se enumerações apropriadas de $\bar{c}$ e $\bar{b}$).

Além disso, a partir de (*) é fácil provar que g é um isomorfismo. Com efeito, chamemos de $\bar{m} = \bar{a} \cup \bar{c}$ e $g(\bar{m}) = f(\bar{a}) \cup \bar{b}$, então, pela definição anterior temos:

$$\forall\phi \in L_{\infty\lambda}: \mathfrak{A} \models \phi[\bar{m}] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[g(\bar{m})],$$

Em particular, para ϕ da forma $v_i = v_j$ temos que $\mathfrak{A} \models (v_i = v_j)[m_i, m_j] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models (v_i = v_j)[g(m_i), g(m_j)]$, ie. $m_i =^A m_j \longleftrightarrow g(m_i) =^B g(m_j)$, o que significa que g é injetora, mas como por definição é sobre, temos que g é bijetora.

Agora, o argumento anterior aplicado a ϕ da forma $R(v_1, \ldots, v_n)$ produz o fato que g preserva as relações; por tanto, g é um isomorfismo.

Finalmente, provaremos que existe $\bar{b} \in B$ com $|\bar{b}| = |\bar{c}|$ tal que se satisfaz (*) na seguinte versão aparentemente fraca: $\forall \phi \in L_{\infty\lambda} : \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}, \bar{c}] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(\bar{a}), \bar{b}]$, já que ela implica sua própria recíproca (basta aplicá-la a $\neg \phi$).

Seja $S = \{\bar{b} \in B / |\bar{b}| = |\bar{c}|\}$ e suponhamos que para todo $\bar{b} \in S$ exista uma fórmula $\phi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{v}) \in L_{\infty\lambda}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi_{\bar{b}}[\bar{a}, \bar{c}]$ e $\mathfrak{B} \models \neg \phi_{\bar{b}}[f(\bar{a}), \bar{b}]$.

Seja $\psi(\bar{x}, \bar{v})$ a fórmula $\bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{v}) \in L_{\infty\lambda}$, então temos $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}}[\bar{a}, \bar{c}]$, logo, para $\bar{v}$ com $|\bar{v}| = |\bar{c}|$, $\mathfrak{A} \models (\exists \bar{v}) \bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}}[\bar{a}]$.

Agora, como $f \in I$ e a fórmula $(\exists \bar{v}) \bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}} \in L_{\infty\lambda}$ temos que $\mathfrak{B} \models (\exists \bar{v}) \bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}}[f(\bar{a})]$, ie. existe $\bar{d} \in B$ com $|\bar{d}| = |\bar{v}| = |\bar{c}|$ (ie. $\bar{d} \in S$) tal que $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{\bar{b} \in S} \phi_{\bar{b}}[f(\bar{a}), \bar{d}]$, ie. para todo $\bar{b} \in S$: $\mathfrak{B} \models \phi_{\bar{b}}[f(\bar{a}), \bar{d}]$, em particular, para $\bar{b} = \bar{d}$: $\mathfrak{B} \models \phi_{\bar{d}}[f(\bar{a}), \bar{d}]$ $(\Longrightarrow\Longleftarrow)$ ∎

IV.4.8- Consequências

i) toda linguagem $L_{\infty\lambda}$, e portanto, $L_{k\lambda}$, tem a propriedade de isomorfismo, pois $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \cong_{\lambda} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{k\lambda} \mathfrak{B}$.

ii) para $\lambda = \aleph_0 = \omega$ temos:

$\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, em particular, a relação $\cong_p$ é transitiva, assim como as $\equiv_\lambda$.

iii) esta última equivalência implica que, num certo sentido que precisaremos depois, a linguagem $L_{\infty\omega}$ é maximal com respeito a ter a propriedade de Karp (ver II.5.6.3.1), em particular, para $\lambda > \aleph_0$, $L_{\infty\lambda}$ não tem a propriedade de Karp.

iv) de (ii) acima e de II.5.6.3.2, resulta que para todo par de estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$: $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_{L^2_\omega} \mathfrak{B}$.

v) o princípio de Lefschetz, na versão dada em III.4.3.8 para os corpos algebricamente fechados de mesma característica, não é válida em $L_{\infty\omega}$, pois existem corpos algebricamente fechados enumeráveis de característica zero que não são isomorfos, por exemplo, os fechos algébricos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(X)$ onde X é transcendente sobre $\mathbb{Q}$, o que implica, por I.3.12, que tais estruturas não são parcialmente isomorfas, ie. não são $L_{\infty\omega}$-elementarmente equivalentes.

Embora o princípio de Lefschetz pode-se recuperar na seguinte versão: se K_1 e K_2 são corpos algebricamente fechados de mesma característica e de grau de transcendência infinito sobre seu corpo primo, então $K_1 \equiv_{\infty\omega} K_2$.

A prova se faz diretamente provando que são parcialmente isomorfos e é similar à dada no exemplo I.3.14.

Devemos salientar que o fato de ser de grau de transcendência infinito sobre seu corpo primo é expressável em $L_{\omega_1\omega}$, e portanto, em $L_{\infty\omega}$.

vi) pode-se provar que a classe dos grupos abelianos livres não é axiomatizável em $L_{\infty\omega}$ (comparar com IV.3.16(i)), mostrando que existem grupos G livre e H não-livre tais que $G \equiv_{\infty\omega} H$.

Com efeito, $G = \bigoplus_J \mathbb{Z}$ e $H = \prod_J \mathbb{Z}$ com J um conjunto de índi ces infinito servem para este propósito.

Uma prova de que $G \cong_p H$ pode ser vista em Dickmann [1975, pag. 381].

(vii) (Scott) se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são enumeráveis e $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ (I.3.12).

A seguir vamos nos encaminhar hacia a caracterização algébrica da L^1-equivalência elementar. Para isto vamos definir um sistema adequado de isomorfismos parciais do modo seguinte.

IV.4.9- Definição

Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são <u>finitamente isomorfos</u>, e denotamos com $\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, se existe uma sequência $\{I_n\}_{n<\omega}$ tal que

i) cada $I_n \neq \phi$ é uma coleção de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

ii) (Forth) $\forall f \in I_{n+1}$ e $\forall a \in A$ $\exists g \in I_n / f \subseteq g$ e $a \in dom g$.

iii) (Back) $\forall f \in I_{n+1}$ e $\forall b \in B$ $\exists g \in I_n / f \subseteq g$ e $b \in im g$.

O teorema de caracterização devido a Fraissé vai ser demonstrado para estruturas relacionais e com um número finito de relações. O fato de ter só um número finito de relações é essencial como é mostrado em Ebbinghaus, Flum e Thomas [1984, pag. 187].

IV.4.10- Definição

Definimos o posto quantificacional de uma fórmula, por indução na complexidade, da seguinte maneira: se ϕ, $\psi \in L^1$,

$qr(\phi)=0$ se ϕ é atômica.

$qr(\neg\phi)=qr(\phi)$

$qr(\phi\wedge\psi)=qr(\phi\vee\psi)=qr(\phi\to\psi)=qr(\phi\leftrightarrow\psi)=\max(qr(\phi),qr(\psi))$.

$qr((\exists x)\phi)=qr((\forall x)\phi)=qr(\phi)+1$.

qr mide em certa forma o número máximo de quantificadores encaixados na fórmula.

IV.4.11- Teorema de Fraissé

Seja τ um tipo de similaridade relacional finito e $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$, então

$$\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \equiv_{L^1} \mathfrak{B}.$$

Demonstração

($\Longrightarrow$) seja $I=\{I_n\}_{n<\omega}$ tal que $I:\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$. Provaremos que para toda $\phi(x_1,\ldots,x_k)\in L^1(\tau)$ com $qr(\phi)\leq n$, para toda $f\in I_n$ e para $a_1,\ldots,a_k\in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_k] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(a_1),\ldots,f(a_k)].$$

Por indução na complexidade da fórmula, mostraremos só o caso mais importante:

Se ϕ é $(\exists x)\psi(x_1,\ldots,x_n)$; neste caso deve-se observar que o passo indutivo preserva o posto quantificacional, já que se $qr(\phi)\leqslant n$, então $qr(\psi)\leqslant n-1$. $\mathfrak{A}\models(\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_k]\longleftrightarrow$ existe $a\in A$ tal que $\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_k,a]\longleftrightarrow$ existe $a\in A$ e $g\in I_{n-1}$ com $f\subseteq g$ tal que $a\in dom\,g$ e $\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_k,a]\longleftrightarrow$ existe $a\in A$ e $g\in I_{n-1}$ com $f\subseteq g$ tal que $a\in dom\,g$ e $\mathfrak{B}\models\psi[f(a_1),\ldots,f(a_k),\ g(a)]\longleftrightarrow$ existe $b\in B$ e $g\in I_{n-1}$ com $f\subseteq g$ tal que $b\in img$ e $\mathfrak{B}\models\psi[f(a_1),\ldots,f(a_k),$ $b]\longleftrightarrow$ existe $b\in B$ tal que $\mathfrak{B}\models\psi[f(a_1),\ldots,f(a_k),\ b]\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models(\exists x)\psi$ $[f(a_1),\ldots,f(a_k)]$.

Portanto, para qualquer sentença σ de qualquer posto quantificacional n e qualquer $f\in I_n$ temos: $\mathfrak{A}\models\sigma\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models\sigma$, ie. $\mathfrak{A}\equiv_{L^1}\mathfrak{B}$.

($\Longleftarrow$) para provar a recíproca necessitamos do seguinte fato: para k fixo e n fixo, existe só um número finito de fórmulas $\psi(x_1,\ldots,x_k)\in L^1(\tau)$ com $qr(\psi)\leqslant n$ que não são logicamente equivalentes, onde dizemos que $\psi_1(x_1,\ldots,x_k)$ e ψ_2 $(x_1,\ldots,x_k)$ são logicamente equivalentes se $\models(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\psi_1$ $\leftrightarrow\psi_2)$. (Em terminologia lógica, e dado o teorema de completude de L^1, isto pode ser entendido do seguinte modo: toda fórmula pode ser transformada numa forma normal prenexa única, e para k e n fixos só existe um número finito de formas normais distintas, já que elas são combinações Booleanas das fórmulas atômicas, precedidas por uma cadeia finita de quantificadores numa ordem determinada).

Justamente para n=0, ie. para fórmulas sem quantificadores, se satisfaz pela exigência de ter só um número finito de símbolos de relações na linguagem.

Suponhamos $\mathfrak{A}\equiv_{L^1}\mathfrak{B}$. Para cada $n<\omega$ definimos: $I_n=$ $\{f:A'\cong f[A']/A'=\{a_1,\ldots,a_k\}$ e $\forall\phi(x_1,\ldots,x_k)\in L^1(\tau)$ com $qr(\phi)\leqslant n$: $\mathfrak{A}\models\phi[a_1,\ldots,a_k]\longleftrightarrow\mathfrak{B}\models\phi[f(a_1),\ldots,f(a_k)]\}$.

Cada $I_n\neq\phi$ pois como $\mathfrak{A}\equiv_{L^1}\mathfrak{B}$ temos que $f=\phi\in I_n$.

Provaremos a propriedade de Forth seguindo os mes mos passos que na prova de IV.4.7:

Seja $f \in I_{n+1}$ com $\mathrm{dom} f = \{a_1, \ldots, a_k\}$ e seja $a \in A \setminus \mathrm{dom} f$. Devemos provar que existe $b \in B$ tal que $\forall \phi(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^1(\tau)$ com $qr(\phi) \leq n$: (*).... $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_k, a] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(a_1), \ldots, f(a_k), b]$. Neste caso, definiriamos g com $\mathrm{dom} g = \{a_1, \ldots, a_k, a\}$, $\mathrm{img} = \{f(a_1), \ldots, f(a_k), b\}$ e $g(a) = b$. (Em forma análoga a IV.4.7 prova-se que g é um isomorfismo, igualmente basta provar a implicação $\Longrightarrow$ em (*)).

Suponhamos que para todo $b \in B$ exista uma fórmula $\phi_b(x_1, \ldots, x_{k+1})$ com $qr(\phi_b) \leq n$ e $\mathfrak{A} \models \phi_b[a_1, \ldots, a_k, a]$, mas $\mathfrak{B} \models \neg\phi_b[f(a_1), \ldots, f(a_k), b]$.

Sejam $b_1, \ldots, b_m \in B$ tais que as fórmulas $\phi_{b_1}, \ldots, \phi_{b_m}$ sejam uma coleção completa de representantes não logicamente equivalentes entre as ϕ_b, e consideremos a fórmula $\bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}$. Pelas suposições temos que $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}[a_1, \ldots, a_k, a]$, ie. $\mathfrak{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}[a_1, \ldots, a_k]$; mas a fórmula $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}$ tem $qr \leq n+1$ e k variáveis livres, logo, como $f \in I_{n+1}$ e satisfaz aquela fórmula, temos que $\mathfrak{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}[f(a_1), \ldots, f(a_k)]$, ie. existe $c \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{b_i}[f(a_1), \ldots, f(a_k), c]$, portanto para todo b_i, $i = 1, \ldots, m$: $\mathfrak{B} \models \phi_{b_i}[f(a_1), \ldots, f(a_k), c]$

Seja b_{i_0} tal que $\phi_{b_{i_0}}$ é logicamente equivalente a ϕ_c, ie $\models (\forall x_1) \ldots (\forall x_{k+1})(\phi_{b_{i_0}} \leftrightarrow \phi_c)$, em particular $\mathfrak{B} \models \phi_c[f(a_1), \ldots, f(a_k), c]$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ ■

IV.4.12- Observações

i) em III.2.5 (ii) foi mencionado o fato deque se

K_1 e K_2 são corpos ordenados real fechados com $K_1 \subseteq K_2$, então $K_1 \prec_{L^1} K_2$, isto implica que $K_1 \equiv_L{}^1 K_2$.

Na realidade pode-se provar mais: qualquer par de corpos real fechados são L^1-elementarmente equivalentes. Com efeito, se K_1 e K_2 são real fechados, então existem subcorpos $F_1 \subseteq K_1$ e $F_2 \subseteq K_2$ tais que $F_1 \cong \hat{\mathbb{Q}} \cong F_2$ onde $\hat{\mathbb{Q}}$ é o fecho real de $\mathbb{Q}$. Então $K_1 \equiv_L{}^1 F_1 \cong F_2 \equiv_L{}^1 K_2$, logo, pelo teorema do isomorfismo $K_1 \equiv_{L^1} K_2$.

Em consequência, todo par de corpos real fechados são finitamente isomorfos.

Por outro lado, pode-se observar que em geral não são parcialmente isomorfos, já que existem corpos real fechados arquimedianos e não-arquimedianos, fato que pode ser expresso em $L\omega_1\omega$ (ver II.1.11), e portanto também em $L_{\infty\omega}$.

ii) existem outras caracterizações da equivalência elementar na linguagem L^1 que também poderíamos chamar de algébricas, porém sem envolver o conceito de isomorfismo parcial. Quiçá uma das mais importantes é o <u>teorema da ultrapotência</u> de Keisler-Shelah: $\mathfrak{A} \equiv_L{}^1 \mathfrak{B} \iff$ existe um conjunto I e um ultrafiltro D sobre I tal que $\mathfrak{A}^I/D \cong \mathfrak{B}^I/D$, (cf. Chang e Keisler [1973, pag 319]).

IV.4.13- Digressão

Com estas caracterizações tem-se conseguido uma boa aproximação do enfoque linguístico ao enfoque algébrico das estruturas matemáticas. Saber que duas estruturas, por exemplo, são parcialmente isomorfas, é saber quase tudo acerca delas.

Como diz Barwise [1973, pag. 32], se ambas as estruturas não são isomorfas quiçá seja por razões triviais de cardinalidade.

Isto reforça o velho problema filosófico acerca da expressabilidade; que mais podemos conhecer ou saber do mundo real senão aquilo que podemos expressar?

IV.5- Comparação do Poder Expressivo das Linguagens

Nesta seção final vamos dar alguns critérios para relacionar linguagens enquanto a seu poder de expressão. Usualmente se dão os dois seguintes.

IV.5.1- Definição. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens adequadas ao mesmo tipo τ.

i) $L_1 \leq_M L_2 \iff$ para toda sentença $\phi \in L_1$ existe uma sentença $\psi \in L_2$ tal que $Mod_{L_1}(\phi) = Mod_{L_2}(\psi)$.

ii) $L_1 \leq_E L_2 \iff$ para todo par de estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Est(\tau)$: $\mathfrak{A} \equiv_{L_2} \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \equiv_{L_1} \mathfrak{B}$.

No primeiro caso diz que L_1 é <u>interpretável</u> ou <u>representável</u> em L_2. É óbvio que se $L_1 \subseteq L_2$, então L_1 é interpretável em L_2. Por exemplo, nesta tese estamos considerando $L^1 \leq_M L$ para toda linguagem L introduzida, L^2_ω, L^2_M (2ª ordem monádica), L^2_D (2ª ordem diádica), L^2 (2ª ordem total), $L_{k\lambda}$,...

Além disso, temos por exemplo, $L^2_M \leq_M L^2_D \leq_M L^2$, $L_{k\lambda} \leq_M L_{\infty\lambda}$. Um caso não-trivial de interpretabilidade mas não conten são é o seguinte $L^2_{\omega} \leqslant_M L^2_D$ como vimos em II.5.6.2(ii).

Por outro lado, como foi observado em IV.4.8 (iv), $L^2_{\omega} \leqslant_E L_{\infty\omega}$. Não é imediato neste caso que se satisfaça a recíproca ou que se satisfaça para a relação $\leqslant_M$.

IV.5.2- Proposição

$$L_1 \leqslant_M L_2 \Longrightarrow L_1 \leqslant_E L_2.$$

Demonstração

Para abreviar escreveremos no que segue: $\equiv_1$ por $\equiv_{L_1}$, $\models_1$ por $\models_{L_1}$, etc.

Suponhamos $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$ e seja ϕ uma sentença de L_1. Se $\mathfrak{A} \models_1 \phi$ então $\mathfrak{A} \in Mod_1(\phi)$, mas por hipótese, existe ψ em L_2 tal que $Mod_1(\phi) = Mod_2(\psi)$, então $\mathfrak{A} \in Mod_2(\psi)$, ie. $\mathfrak{A} \models_2 \psi$, logo, $\mathfrak{B} \models_2 \psi$, ie. $\mathfrak{B} \in Mod_2(\psi)$, portanto, $\mathfrak{B} \in Mod_1(\phi)$, ie. $\mathfrak{B} \models_1 \phi$.

Temos provado que $\mathfrak{A} \models_1 \phi \Longrightarrow \mathfrak{B} \models_1 \phi$. A recíproca é imediata ∎

IV.5.3- Proposição. Sejam $\mathfrak{A} \in Est^*(\tau)$ (ver def. II.6.3), $\mathfrak{A}'$ o quociente módulo $\equiv^A$ e $\Pi: A \to A'$ a projeção canônica, então para toda fórmula $\phi \in L_{k\lambda}(\tau)$ e toda assignação de valores em $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \phi[\overline{\alpha}] \longleftrightarrow \mathfrak{A}' \models \phi[\Pi_0 \overline{\alpha}].$$

Demonstração

A prova é por indução sobre a complexidade da fórmula ϕ, e é a mesma feita em II.6.5 substituindo:

iii) se ϕ é $\bigwedge_{i\in I}\phi_i$ com $|I|<k$.

$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i\in I}\phi_i[\bar{\alpha}] \longleftrightarrow$ para todo $i\in I$: $\mathfrak{A} \models \phi_i[\bar{\alpha}] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) para todo $i\in I$: $\mathfrak{A}' \models \phi_i[\Pi_0\bar{\alpha}] \longleftrightarrow \mathfrak{A}' \models \bigwedge_{i\in I}\phi_i[\Pi_0\bar{\alpha}]$.

iv) se ϕ é $(\exists\bar{v})\psi$ com $|\bar{v}|<\lambda$.

$\mathfrak{A} \models (\exists\bar{v})\psi[\bar{\alpha}] \longleftrightarrow$ existe $\bar{a}\in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha[\frac{\bar{v}}{\bar{a}}]] \longleftrightarrow$ (por hipótese indutiva) existe $\bar{a}\in A$ tal que $\mathfrak{A}' \models \psi[\Pi_0(\alpha[\frac{\bar{v}}{\bar{a}}])] \longleftrightarrow$ existe $\bar{a}\in A$ tal que $\mathfrak{A}' \models \psi[\Pi_0\alpha[\frac{\bar{v}}{\Pi(\bar{a})}]] \longleftrightarrow$ (por ser Π sobre) existe $\bar{b}\in A'$ tal que $\mathfrak{A}' \models \psi[\Pi_0\alpha[\frac{\bar{v}}{\bar{b}}]] \longleftrightarrow \mathfrak{A}' \models (\exists\bar{v})\psi[\Pi_0\bar{\alpha}]$ ∎

Corolário 1. $\mathfrak{A} \equiv_{k\lambda} \mathfrak{A}'$ ∎

Corolário 2. $Est(\tau)(\subsetneq Est^*(\tau))$ não é axiomatizável em $L_{k\lambda}(\tau)$ ∎

Corolário 3. $L^2_\omega(\tau) \nleq_M L_{k\lambda}(\tau)$

Demonstração. Suponhamos que for; seja $\sigma^=$ a sentença que caracteriza a diagonal em L^2_ω (ver II.6.11), então $Est(\tau)=Mod_{L^2_\omega}(\sigma^=)$, mas pela suposição deve existir $\sigma'\in L_{k\lambda}$ tal que $Est(\tau)=Mod_{k\lambda}(\sigma')$ $(\Longrightarrow\Longleftarrow)$ ∎

Corolário 4. $\leqslant_E$ não implica $\leqslant_M$, pois $L^2_\omega \leqslant_E L_{\infty\omega}$ ∎

IV.5.4- Proposição. Se $L_1\leqslant_M L_2$, $L_2\leqslant_E L_1$ e L_2 é compacta, então

$L_2 \leqslant_M L_1$.

Demonstração

Para cada $\phi \in L_1$, chamemos de ϕ^* a sentença de L^2 tal que $Mod_1(\phi) = Mod_2(\phi^*)$, e se $\Sigma \subseteq L_1$, então $\Sigma^* = \{\phi^* / \phi \in \Sigma\}$, (observar que $\mathcal{B} \models_1 \phi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models_2 \phi^*$).

Dado $\psi \in L_2$ devemos encontrar $\phi \in L_1$ tal que $Mod_1(\phi) = Mod_2(\psi)$.

Se $Mod_2(\psi) = \phi$ podemos tomar ϕ como $(\exists x)(x \neq x)$ e então $Mod_1(\phi) = \phi$. Podemos supor então $Mod_2(\psi) \neq \phi$.

Afirmação 1. Para cada $\mathcal{A} \in Mod_2(\psi)$: $Mod_2(Th_1(\mathcal{A})^*) \subseteq Mod_2(\psi)$. Com efeito, se $\mathcal{B} \models_2 Th_1(\mathcal{A})^*$, então, por definição de $*$, $\mathcal{B} \models_1 Th_1(\mathcal{A})$, ie. $\mathcal{A} \equiv_1 \mathcal{B}$, então, por hipótese, $\mathcal{A} \equiv_2 \mathcal{B}$, logo, como $\mathcal{A} \models_2 \psi$, temos que $\mathcal{B} \models_2 \psi$.

Afirmação 2. Como L_2 é compacta, existem $\phi_1, \ldots, \phi_n \in Th_1(\mathcal{A})$ tal que $Mod_2(\{\phi_1^*, \ldots, \phi_n^*\}) \subseteq Mod_2(\psi)$.

Basta observar que $Mod_2(Th_1(\mathcal{A})^*) = \bigcap_{\phi \in Th_1(\mathcal{A})} Mod_2(\phi^*)$.

Afirmação 3. Para cada $\mathcal{A} \in Mod_2(\psi)$ existe $\phi_{\mathcal{A}} \in L_1$ tal que $\mathcal{A} \models_1 \phi_{\mathcal{A}}$ e $Mod_2(\phi_{\mathcal{A}}^*) \subseteq Mod_2(\psi)$.

Com efeito, pela afirmação (2) basta tomar $\phi_{\mathcal{A}}$ como $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$, então é óbvio que $\mathcal{A} \models_1 \phi_{\mathcal{A}}$, além disso, devemos observar que $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)^*$ é $\phi_1^* \wedge \ldots \wedge \phi_n^*$ e que, por II.5.4.2 (ii), $Mod_2(\{\phi_1^*, \ldots, \phi_n^*\}) = Mod_2(\phi_1^* \wedge \ldots \wedge \phi_n^*)$, de onde resulta a afirmação.

Afirmação 4. $Mod_2(\psi)=\bigcup Mod_2(\phi_{\mathfrak{A}}^*)$, $\mathfrak{A}\in Mod_2(\psi)$.

Obviamente, de (3), $\bigcup Mod_2(\phi_{\mathfrak{A}}^*)\subseteq Mod_2(\psi)$. Seja, agora $\mathfrak{B}\in Mod_2(\psi)$, então existe $\phi_{\mathfrak{B}}\in L_1$ tal que $\mathfrak{B}\models_1\phi_{\mathfrak{B}}$, logo, $\mathfrak{B}\models_2\phi_{\mathfrak{B}}^*$, ie. $\mathfrak{B}\in Mod_2(\phi_{\mathfrak{B}}^*)$, portanto, $\mathfrak{B}\in\bigcup Mod_2(\phi_{\mathfrak{A}}^*)$.

Finalmente, por compacidade de L_2 existem $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_m\in Mod_2(\psi)$ tais que

$$
\begin{aligned}
Mod_2(\psi)&=Mod_2(\phi_{\mathfrak{A}_1}^*)\cup\ldots\cup Mod_2(\phi_{\mathfrak{A}_m}^*)\\
&=Mod_1(\phi_{\mathfrak{A}_1})\cup\ldots\cup Mod_1(\phi_{\mathfrak{A}_m})\\
&=Mod_1(\phi_{\mathfrak{A}_1}\vee\ldots\vee\phi_{\mathfrak{A}_m}),
\end{aligned}
$$

tomando então ϕ como $\phi_{\mathfrak{A}_1}\vee\ldots\vee\phi_{\mathfrak{A}_m}\in L_1$ temos que $Mod_2(\psi)=Mod_1(\phi)$ ∎

IV.5.5- Observação

Quando $L_1\leqslant_M L_2$ e $L_2\leqslant_M L_1$ se diz que L_1 e L_2 tem o mesmo poder de expressão e se denota por $L_1\equiv L_2$.

IV.5.6- Digressão: Os Teoremas de Limitação Tipo Lindström.

Per Lindström foi o primeiro que caracterizou a linguagem de 1ª ordem em termos de certas propriedades (abstratas) de teoria de modelos. Posteriormente Barwise, Flum e outros forneceram outras caracterizações de L^1 e caracterizações de outras linguagens como, por exemplo, $L_{\infty\omega}$.

O primeiro teorema de Lindström, dado em 1969, diz que se $L^1 \leqslant_M L$ e L é compacta (ou enumeravelmente compacta) e satisfaz a propriedade de Löwenheim-Skolem (ver III.4.1.2), então $L^1 \equiv L$; ie. L^1 é maximal, na relação $\leqslant_M$, com respeito às duas propriedades citadas (cf. Ebbinghaus, Flum e Thomas [1984, pag. 199]).

Em Flum [1985, pag. 91] pode-se encontrar uma outra caracterização interessante da linguagem L^1. Expressa em termos das propriedades que temos estudado nesta tese: se $L^1 \leqslant_M L$ e L é enumeravelmente compacta e satisfaz a propriedade de Karp (ver II.5.6.3.1), então $L^1 \equiv L$.

Baseadas no teorema de caracterização da linguagem $L_{\infty\omega}$ pode-se ver facilmente que é maximal, na relação $\leqslant_E$, com respeito à propriedade de Karp. Com efeito, se $L_{\infty\omega} \leqslant_E L$ e L tem a propriedade de Karp, então, para todo par de modelos temos: $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$, ie. $L \leqslant_E L_{\infty\omega}$.

Prova-se também que $L_{\infty\omega}$ é maximal, na relação $\leqslant_M$, com respeito à propriedade de Karp e uma outra propriedade chamada de <u>propriedade de limitação</u>, que em certa medida substitue à compacidade de L^1.

BIBLIOGRAFIA

01- ALVES, E.H. Paraconsistent Logic and Model Theory. Studia Logica, vol.43 (1984) 17-32.

02- AX, J. The Elementary Theory of Finite Fields. Ann. of Math, vol.88 (1968) 239-271.

03- BANKSTON, P. Ultraproducts in Topology. General Topology and its Applications, vol.7 (1977) 283-308.

04- BARWISE, J. The Hanf Number of Second Order Logic. J.S.L. vol.37 (1972) 588-594.

05- BARWISE, J. Back and Forth Through Infinitary Logic. Em Studies in Model Theory, Ed. M. Morley. The Math. Assoc. of America (1973) 5-34.

06- BARWISE, J. An Introduction to First-Order Logic. Em Handbook of Math. Logic, Ed. J. Barwise. North Holland Pub. Comp. (1977) 5-46.

07- BARWISE, J. e EKLOF, P. Lefschetz's Principle. J. of Álgebra, vol. 13 nº4 (1969) 554-570.

08- BELL, J.L. e SLOMSON, A.B. Models and Ultraproducts: An Introduction. North Holland Pub. Comp. 1969

09- BERNSTEIN, A.L. Non-Standard Analysis. Em Studies in Model Theory, Ed. M. Morley. The Math. Assoc. of America, (1973) 35-58.

10- BOOLOS, G. e JEFFREY, R. Computability and Logic. Cambridge Univ. Press, 1974.

11- CARNIELLI, W.A. Systematization of Finite Many-Valued Logics Through the Method of Tableaux J.S.L. vol.52, nº2 (1987) 473-493.

12- CIFUENTES V., CARLOS. An Underlying System for Fuzzy (sub) Set Theory (abstract) J.S.L., vol.51 nº4 (1986) 1103.

13- CHANG, C.C. e KEISLER, H.J. Model Theory. North Holland Pub. Comp. 1973.

14- CHUAQUI, R.B. Axiomatic Set Theory. Impredicative Theory of Classes. North Holland, Math. Studies, 1981.

15- DICKMANN, M.A. Large Infinitary Languages. Model Theory. North Holland Pub. Comp. 1975.

16- EBBINGHAUS, H.D., FLUM, J. e THOMAS, W. Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1984.

17- EKLOF, P. Lefschetz's Principle and Local Functors. Proc. A.M.S., vol.37 nº2 (1973) 333-339.

18- EKLOF, P. Methods of Logic in Abelian Group Theory. Lecture Notes in Math., vol.616 (1977) 251-269.

19- FLUM, J. Characterizing Logics. Em Model Theoretic Logics. Ed. J. Barwise e S. Feferman. Springer-Verlag (1985) 77-120.

20- GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Projeto Euclides. IMPA, 1979.

21- GORENSTEIN, D. Classifying the Finite Simple Groups. Bull, A.M.S. vol.14 nº1 (1986) 1-98.

22- GRATZER, G. Universal Álgebra. Van Nostrand Comp. Inc. 1968.

23- HALPERN, J.D. e LEVY, A. The Boolean Prime Ideal Theorem Does Not Imply the Axiom of Choice. Em Axiomatic Set Theory. A.M.S. Proc. Symposia Pure Math. 13 vol. I (1971) 83-134.

24- HAUSDORFF, F. Set Theory. Chelsea Pub. Comp. 1962.

25- HILBERT, D. e ACKERMANN, W. Elementos de Lógica Teórica. Ed. Tecnos, Madrid, 1975.

26- JAUCH, J.M. Projective Representation of the Poincaré Group in a Quaternionic Hilbert Space. Em Group Theory and its Applications. vol. I. Ed. E. Loebl. Academic Press, 1968.

27- KAUFMANN, M. A Note on the Hanf Number of Second-Order Logic. Notre Dame J. of Formal Logic, vol.26 nº4 (1985) 305-308.

28- KUEKER, D.W. Back-and-Forth Arguments and Infinitary Logics. Lecture Notes in Math. vol.492 (1975) 17-71.

29- KEISLER, H.J. Model Theory for Infinitary Logic North Holland Pub. Comp. 1971.

30- KOPPERMAN, R. The $L\omega_1\omega_1$-Theory of Hilbert Spaces J.S.L. vol.32 nº3 (1967) 295-304.

31- KNEALE, W. e M. O Desenvolvimento da Lógica. Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

32- KELLEY, J.L. General Topology. Van Nostrand, 1955.

33- KARP, C. Finite-Quantifier Equivalence. Em The Theory of Models. North Holland Pub. Comp. (1965) 407-412.

34- LEVY, A. Basic Set Theory. Springer-Verlag, 1979.

35- LIMA, ELON L. Elementos de Topologia Geral. Ao Livro Técnico S.A. IMPA, 1970.

36- LUXENBURG, W.A.J. Two Applications of the Method of Construction By Ultrapowers to Analysis. Bull. A.M.S. vol.68 nº4 (1962) 416-419.

37- LUXENBURG, W.A.J. (ED.) Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Holt-Rinehart and Winston, 1969.

38- MAC LANE, S. Categories for the Working Mathematician Springer-Verlag, 1971.

39- MONK, J.D. Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1976.

40- MONTEIRO, JACY. Álgebra Moderna. São Paulo, 1971.

41- MORLEY, M. Categoricity in Power. Transactions of A.M.S. vol. 114 (1965) 514-538.

42- PRESTEL, A. An Introduction to Ultraproducts. Atas da 3ª Escola de Álgebra, Rio de Janeiro (1977) 111-134.

43- ROBINSON, A. Problems and Methods of Model Theory. Em Aspects of Math. Logic. CIME, VARENNA, 1968.

44- ROTMAN, J.J. The Theory of Groups. An Introduction. Allyn and Bacon Inc. 1973.

45- RUDIN, W. Análisis Funcional. Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

46- SAYEKI, H. Some Consequences of the Normality of the Space of Models. Fund. Math. vol.61 (1968) 243-251.

47- SCOTT, D.S. e TARSKI, A. Extension Principles for Algebraically Closed Fields. Notices A.M.S. (1958) 778-779.

48- SEIDENBERG, A. Comments on Lefschetz's Principle. Am. Math. Monthly, vol.65 (1958) 685-690.

49- SHELAH, S. A Compactness Theorem for Singular Cardinals, Free Algebras, Whitehead Problem and Transversals. Israel J. of Math. vol.21 nº4 (1975) 319-349.

50- SUPPES, P. Axiomatic Set Theory. Dover, 1972.

51- TAKEUTI, G. e ZARING, W.M. Introduction to Axiomatic Set Theory. Springer-Verlag, 1979.

52- VAN DER WAERDEN, B.L. Álgebra. vol.I Frederick Ungar Pub. Comp. 1970.