Aplicações dos Teoremas de Ramsey à Teoria dos Espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

CANDIDATA: JAQUELINE BORGES NICOLAU
ORIENTADOR: PROF. DR. JORGE TULIO MUJICA ASCUI

IMECC - UNICAMP
FEVEREIRO DE 1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Nicolau, Jaqueline Borges

N543a Aplicações dos teoremas de Ramsey à teoria dos espaços de Banach / Jaqueline Borges Nicolau -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Espaços sequenciais. 3. Operadores lineares. 3. Analise funcional. I. Ascui, Jorge Tulio Mujica. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Aplicações dos Teoremas de Ramsey à Teoria dos Espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Jaqueline Borges Nicolau e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de março de 1999,

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
2. Prof. Dr. Mário Matos
3. Prof. Dr. Raymundo Alencar

Dissertação apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Tese de Mestrado defendida em 12 de março de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIZ DE ALENCAR

A matemática é o trabalho do espírito humano, que está destinado tanto a estudar como a conhecer, tanto a procurar a verdade como a encontrá-la.

E. Galois

Sumário

Lista de Símbolos

Neste trabalho utilizaremos com freqüência a seguinte notação:

X: *um espaço normado não trivial sobre* $\boldsymbol{R}$.

X^*: *o dual topológico de* X.

X^{**}: *o dual topológico de* X^*; $X^{**} = (X^*)^*$.

χ_A: *a função característica do conjunto* A; $\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \notin A \\ 1 & se \quad x \in A \end{cases}$.

$\dim X$: *a dimensão de* X.

$\{x_n\}$: *uma seqüência em* X, *ou* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$[x_n]$: *o subespaço gerado por* $\{x_n\}$.

A é fechado: A *é fechado na norma.*

$\bar{A}$: *o fecho de* A *na norma.*

$\bar{A}^w$: *o fecho fraco de* A.

$\bar{A}^{w*}$: *o fecho fraco* $*$ *de* $A \subset X^*$.

S_X: *a esfera unitária de* X.

$B_X(x,r) = \{y \in X, \|y - x\| < r\}$.

B_X: *a bola unitária fechada de* X; $B_X = B_X(0,1)$.

Topologia fraca $*$: *a topologia fraca estrela.*

$J(A)$: *a imagem de* A *pela aplicação* $J : x \in X \mapsto J_x \in X^{**}$, *onde* $J_x : \varphi \in X^* \mapsto \varphi(x) \in \boldsymbol{R}$.

$\boldsymbol{N}$: $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

L.I: *linearmente independente.*

$\operatorname{Ker} T$: *o núcleo de transformação linear* $T: X \to Y$; $\operatorname{Ker} T = \{x \in X,\ T(x) = 0\}$.

$\mathcal{L}(X,Y)$: *o espaço vetorial das transformações lineares contínuas de* X *em* Y, *onde* X *e* Y *são espaços normados.*

$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X}\{\|T(x)\|,\ \|x\| \leq 1\}$.

$T^* : Y^* \to X^*$: *o operador dual de* $T : X \to Y$; $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$ *para cada* $\varphi \in Y^*$.

c_0: *o espaço vetorial das seqüências que convergem a zero.*

ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$: *o espaço vetorial das seqüências tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

$L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$: *o espaço vetorial das classes de equivalência de funções Lebesgue mensuráveis tais que*

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx < \infty.$$

$[A]$: *o subespaço gerado por* $A \subset X$.

$\|\cdot\|_X$: *a norma considerada em* X.

$X \setminus Y$: *a diferença entre* X *e* Y; $X \setminus Y = \{x; x \in X \text{ e } x \notin Y\}$.

$x_n \to x$: *a seqüência* $\{x_n\} \subset X$ *converge a* x; *também denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $\lim_n x_n = x$.

$p \Rightarrow q$: *"p implica q".*

$I : X \to X$: *a função identidade,* $I(x) = x$, $\forall x \in X$.

sinal $f(x)$: *o sinal da função real* f *aplicada a* x;

$$\text{sinal } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x) > 0 \\ -1, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

$\sigma(X^*, X)$: *a topologia fraca estrela de* X^*.

$(X^*, \sigma(X^*, X))$: X^* *está munido da topologia fraca* $*$.

$\operatorname{f\,lim}_n x_n$: *o limite fraco da seqüência* $\{x_n\}$.

$\bar{\tau} \leq \tau$: *a topologia* τ *tem mais abertos que a topologia* $\bar{\tau}$.

$\{0,1\}^{N}$: *o conjunto das funções* $f : N \to \{0,1\}$.

conjunto τ-aberto (fechado): *conjunto aberto (fechado) na topologia* τ.

Prefácio

Um elegante princípio combinatório, conhecido como Teorema de Ramsey, tem tido um forte impacto na teoria dos espaços de Banach, a partir dos anos setenta. Pela expressão *Teoremas de Ramsey* nos referiremos tanto ao teorema original de Ramsey [38], quanto às diversas generalizações obtidas por vários autores. Veja, por exemplo, Nash-Williams [33], Silver [45], Galvin-Prikry [17] e Ellentuck [12].

Um famoso problema devido ao próprio Banach, e que esteve em aberto por muito tempo é o seguinte: se todo espaço de Banach de dimensão infinita tem subespaços isomorfos a c_0 ou a ℓ_p, para algum $1 \leq p < \infty$. Uma solução negativa para este problema foi dada por Tsirelson, em 1974, quando construiu exemplos de espaços de Banach reflexivos não contendo cópias de c_0 ou ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$.

O passo seguinte foi encontrar critérios, para que um dado espaço de Banach contenha cópia de algum dos espaços mencionados. Para o caso do espaço ℓ_1 temos resultados particularmente profundos, devidos fundamentalmente a Rosenthal. Um destes resultados, formulado de forma a sugerir a presença dos teoremas de Ramsey nos seus fundamentos, é o seguinte: seja $\{x_n\}$ uma seqüência limitada num espaço de Banach X, então, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$, que satisfaz uma das duas seguintes alternativas, que se excluem mutuamente:

i). $\{x_{n_k}\}$ é equivalente à base de Schauder canônica de ℓ_1,

ii). $\{x_{n_k}\}$ é uma seqüência fracamente de Cauchy.

O primeiro a aplicar um teorema de Ramsey à teoria dos espaços de Banach foi Farahat [16], que utilizou um teorema de Ramsey devido a Nash-williams [33], para provar o famoso teorema ℓ_1 de Rosenthal [39]. A partir de então, vários autores passaram a aplicar os teoremas de Ramsey à teoria dos espaços de Banach. Veja, por exemplo, Stern [47], Odell [34, 35], Elton e Odell [13], Knaust e Odell [25, 26] e Terenzi [48].

Neste trabalho, apresentaremos uma exposição sistemática dos teoremas de Ramsey e desenvolveremos, detalhadamente, algumas aplicações destes teoremas à teoria dos espaços de Banach.

Para elaborar esta dissertação de mestrado, foi necessário estudar profundamente os seguintes assuntos:

- Bases de Schauder. Seqüências básicas. Teorema de Mazur sobre a existência de seqüências básicas. Princípio de seleção de Bessaga e Pelczynski. Espaços de Banach contendo subespaços isomorfos a c_0.
- Topologias na coleção dos subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Famílias de Ramsey. Teorema de Ramsey. Teorema de Nash-Williams.
- Espaços de Banach contendo subespaços isomorfos a ℓ_1. Teorema de Rosenthal.

Elementos de Topologia Geral e Análise Funcional são assumidos como familiares ao leitor. Além disso, muitos teoremas da Teoria de Espaços de Banach são bem conhecidos e acessíveis em vários livros, por exemplo [5, 11, 22] e [27]. Suas demonstrações não são incluidas aqui, mas, alguns resultados são mencionados no Apêndice. Este trabalho também tem o propósito de dar uma visão de resultados interessantes e importantes da teoria dos espaços de Banach e, simultaneamente, introduzir muitas técnicas básicas usadas nesta área.

No primeiro capítulo, introduzimos as noções de bases de Schauder e seqüências básicas.

No segundo capítulo, apresentamos um critério que garante a existência de seqüências básicas: o Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski. Posteriormente, uma versão mais sofisticada deste princípio, permite localizar seqüências básicas de blocos.

No capítulo três, caracterizamos os espaços contendo subespaços isomorfos a c_0.

No capítulo quatro e cinco, concentra-se a parte principal deste trabalho: os teoremas de Ramsey e algumas de suas aplicações.

Finalmente, a autora se responsabiliza por todos os erros, matemáticos ou de outra natureza, que ocorrerem neste trabalho.

Jaqueline Borges Nicolau
Campinas, Fevereiro de 1999

Agradecimentos

Escrever este trabalho foi uma experiência muito enriquecedora. Aprendi muito mais coisas do que conseguirei transmitir. Nele fui auxiliada por diversas pessoas, a quem desejo externar meus melhores agradecimentos. Jorge Tulio Mujica Ascui (orientador), cuja compreensão nos momentos difíceis e excelente orientação tornaram-no, muito mais que um amigo, um modelo de profissional a ser seguido. Agradeço-o, também, pela revisão muito cuidadosa do original na sua forma quase definitiva, formulando críticas sempre válidas e da maior utilidade. Aos Prof(a)s. Dr(a)s. Mário Matos, Raymundo L. Alencar e Sueli Roversi, membros da banca examinadora, agradeço críticas e sugestões.

Agradeço, também, à minha mãe (e minha família), com quem aprendi a acreditar e valorizar meus dons matemáticos, e aos meus amigos (em especial à Lorena Ramos Correia) pelos incentivos.

Ao meu namorado (Augusto Cesar Redolfi), por sua agradável companhia, apoio, dedicação e, especialmente, pela versão em LaTeX do trabalho, que tornou bastante claro o visual das páginas deste texto.

Quero terminar expressando a minha gratidão à Fundação de Amparo à Pesquisa de São Paulo (FAPESP) e à UNICAMP, por todo o apoio gentilmente concedido.

Capítulo I

Seqüências Básicas

Ao longo deste capítulo trataremos de seqüências básicas, um conceito que é muito importante, pois nos permitirá realizar muitas das mais interessantes construções da *Teoria de Seqüências e Séries em Espaços de Banach.*

No Capítulo II, mostraremos como Mazur provou a existência de seqüências básicas em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita. Este resultado trouxe idéias novas, que foram utilizadas por Pelczynski para obter uma prova diferente do teorema de Eberlein-Šmulian [9]. O princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski será uma conseqüência. No Capítulo III, após uma breve discussão de seqüências fracamente somáveis, este princípio será aplicado para caracterizar espaços contendo subespaços isomorfos a c_0.

Por simplicidade, só consideraremos espaços normados reais.

1 Bases de Schauder

As noções de base algébrica em um espaço vetorial de dimensão finita e de base ortonormal em um espaço de Hilbert são essenciais para o estudo destes espaços. No entanto, se desejamos investigar a estrutura de um Espaço de Banach qualquer, é natural encontrar um conceito correspondente, já que a base algébrica não dá informações relacionadas à topologia do espaço. Com relação à base algébrica, somente o conceito de decomposições finitas é usado. Aqui trabalharemos com decomposições enumeráveis.

Definição 1.1 *Uma seqüência $\{e_n\}$ em um espaço normado X é dita uma base se, para cada $x \in X$, existe uma única seqüência de escalares $\{\lambda_n\}$, tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, onde a série converge em norma.*

Os elementos em $\{\lambda_n\}$ dependem linearmente de x e eles são chamados de *funcionais coeficientes* da base $\{e_n\}$.

Definição 1.2 (Bases de Schauder) *Uma base que tem funcionais coeficientes contínuos é chamada de base de Schauder.*

Definição 1.3 (Seqüência Básica) *Uma seqüência básica em um espaço normado X é uma seqüência $\{e_n\}$ que é base para $\overline{[e_n]}$.*

Os funcionais coeficientes

$$e_n^* : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \in X \longrightarrow \lambda_n \in \boldsymbol{R}$$

e as projeções

$$S_n : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \in X \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X$$

são evidentemente lineares e o seguinte resultado de Banach [1, pg. 111], mostra que também são contínuos, quando X é um espaço de Banach.

Proposição 1.4 *Seja $\{e_n\}$ uma base para o espaço de Banach X. Então, existe uma constante $k \geq 1$, tal que $\|S_n(x)\| \leq k\|x\|$ e $|e_n^*(x)| \leq 2k\|x\|/\|e_n\|$, para todo $x \in X$ e $n \in \boldsymbol{N}$.*

Prova: Seja Y o espaço vetorial sobre $\boldsymbol{R}$ de todas as seqüências $y = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \boldsymbol{R}$, para as quais $\lim_n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ existe. Claramente, $\sup_n \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| < \infty$, para cada $y \in Y$ e, portanto, a função $\|y\|$ sobre Y, dada por $\|y\| = \sup_n \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\|$, define uma norma sobre Y. Assim, Y é um espaço vetorial normado.

Agora, seja $T : Y \to X$ a transformação linear definida por $T(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$, onde $y = \{\lambda_n\}$. Desde que qualquer $x \in X$ tem uma expansão única da forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$, pois $\{e_n\}$ é base, então T, é bijetiva. Como $\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\| \leq \sup_n \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\|$, então, $\|T(y)\| \leq \|y\|$ e segue que T é contínua.

Mostraremos adiante que Y é completo e, conseqüentemente, é um espaço de Banach. Portanto, pelo *Teorema da Aplicação Aberta*, $T^{-1} : X \to Y$ é contínua. Mas, $T^{-1}(x) = \{e_n^*(x)\}$. Assim

$$\|S_n(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} e_j^*(x) e_j\right\| \leq \sup_m \left\|\sum_{j=1}^{m} e_j^*(x) e_j\right\| = \|\{e_j^*(x)\}\| = \|T^{-1}(x)\| \leq \|T^{-1}\|\|x\| \text{ e}$$

$$|e_n^*(x)|\|e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq 2\|y\| = 2\|T^{-1}(x)\| \leq 2\|T^{-1}\|\|x\|.$$

Provaremos que Y é completo.

De fato: seja $\{y_p\}$ uma seqüência de Cauchy em Y (cada y_p define uma seqüência $\{\lambda_{pn}\} \subset \boldsymbol{R}$). Como, para todo n,

$$|\lambda_{pn} - \lambda_{qn}|\|e_n\| \leq 2\sup_m \left\| \sum_{j=1}^{m} (\lambda_{pj} - \lambda_{qj})e_j \right\| = 2\|y_p - y_q\|,$$

então, $\{\lambda_{pn}\}$ é de Cauchy e, sendo $\boldsymbol{R}$ completo, existe uma seqüência $\{\lambda_n\} \subset \boldsymbol{R}$, tal que $\lim_p \lambda_{pn} = \lambda_n$. Além disso, $\{y_p\}$ é de Cauchy. Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe um índice r, tal que $\|y_p - y_q\| < \varepsilon/3$ para $p, q \geq r$. Assim,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{pj} - \lambda_{qj})e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{, para todo } p, q \geq r \text{ e todo } n. \tag{I}$$

Tomando o limite sobre p, depois o supremo sobre n em (I), obtemos

$$\sup_n \| \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{qj})e_j\| \leq \varepsilon/3, \quad \text{para todo } q \geq r. \tag{II}$$

Por outro lado, $y_r \in Y$ e existe um índice n_ε, dependendo de r, tal que

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_{rj}e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para} \quad m > n \geq n_\varepsilon. \tag{III}$$

Por (II) e (III), temos para $m > n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j e_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=n+1}^{m} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j \right\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_{rj}e_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j - \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j \right\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_{rj}e_j \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j \right\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_{rj}e_j \right\| \\
&\leq 2\sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{rj})e_j \right\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_{rj}e_j \right\| \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, $y = \{\lambda_n\}$ é um elemento de Y . Por (II), para $q \geq r$, $\|y - y_q\| \leq \varepsilon/3$, logo $y_q \to y$ e Y é completo. ∎

Corolário 1.5 *Em um espaço de Banach X, toda base é base de Schauder.*

A partir de agora, X denotará, sempre, um espaço de Banach e não faremos distinção entre *base* e *base de Schauder*.

2 Exemplos de Bases de Schauder

Toda seqüência ortonormal completa em um espaço de Hilbert separável é *base de Schauder*.

Um espaço, que tem base de Schauder, é separável. Além disso, os espaços separáveis são os que, geralmente, têm base de Schauder. No entanto, encontrar base de Schauder para um determinado espaço, mesmo que muito conhecido, é, sempre, tarefa difícil.

No caso dos clássicos espaços separáveis c_0 e $\ell_p (1 \leq p < \infty)$, a seqüência $\{e_n\}$ de vetores coordenados unitários $e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ é uma base de Schauder. No caso de c, o espaço de seqüências convergentes, a seqüência constante $1 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, juntamente com os vetores $\{e_n\}$, formam uma base para c. As demonstrações destes fatos são simples e por isso serão omitidas.

Agora é bem conhecido que existem espaços de Banach separáveis sem base. Per Enflo [14] foi o primeiro a encontrar um tal espaço. Procurou dentro de c_0 e respondeu negativamente a pergunta, levantada por Banach, sobre a possibilidade de que todo espaço de Banach separável pudesse ter base de Schauder. Com relação a espaços de funções, obter bases de Schauder se torna algo muito complicado. Schauder [42, 43], foi quem introduziu a noção de base de Schauder, provando que o sistema de Schauder(veja exemplo 2.4) é uma base de Schauder para $C[0,1]$, enquanto que o sistema de Haar(veja exemplo 2.5) é uma base de Schauder para $L^p[0,1]$, quando $1 \leq p < \infty$. Estes resultados de Schauder podem ser provados a partir do seguinte critério, que pode ser encontrado no artigo de R. James [23].

Teorema 2.1 (Nikolskii) *Seja $\{e_n\}$ uma seqüência de vetores não nulos em um espaço de Banach X. Então, $\{e_n\}$ é uma seqüência básica se, e somente se, existe uma constante $k > 0$, tal que, para toda seqüência de escalares $\{\lambda_n\}$ e todo inteiro $m < n$,*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \leq k \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|.$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Consideremos $M = \overline{[e_n]}$. Suponhamos que $\{e_n\}$ é base para M e definamos

$$S_n : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \in M \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in M.$$

Já vimos que cada S_n é um operador linear limitado e que cada funcional coeficiente é contínuo. Além disso, para todo $x \in M$, temos que $x = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$. Lembrando que M é espaço de Banach, segue do *Teorema de Banach-Steinhaus* que

$$k = \sup_n \|S_n\| < \infty.$$

Conseqüentemente, dada uma seqüência $\{\lambda_n\}$, se $m < n$ e $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X$, então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| = \left\| S_m \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right) \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| S_m \left(S_n \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right) \right) \right\| \\
&= \left\| S_m \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right) \right\| \\
&\leq \|S_m\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \\
&\leq \sup_n \|S_n\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \\
&= k \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| .
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Observemos que a existência de $k \geq 1$, tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \leq k \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|, \tag{IV}$$

para quaisquer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ em $\boldsymbol{R}$ e $m < n$ em $\boldsymbol{N}$, implica que o conjunto de vetores $\{e_n\}$ é L.I. De fato, se $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$, então $\|\lambda_1 e_1\| \leq k_1 \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| = k_1.0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Da mesma forma, $\|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| \leq k_2 \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| = k_2.0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$. Raciocinando assim, sucessivamente, provamos que $\lambda_j = 0$, para $j = 1, \ldots, n$.

Deste modo, podemos definir

$$e_n^* : \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \in [e_n] \longrightarrow \lambda_n \in \boldsymbol{R} \quad \text{e} \tag{V}$$

$$S_n : \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \in [e_n] \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X. \tag{VI}$$

De (IV), (V) e (VI) obtemos $\|S_n(x)\| \leq k\|x\|$ e $|e_n^*(x)| \leq 2k\|x\|/\|e_n\|$, para todo $x \in M$ e $n \in \boldsymbol{N}$. Como $\overline{[e_n]} = M$, então, pelo teorema 3 do Apêndice, obtemos que cada e_n^* e cada S_n tem uma única extensão contínua para M.

Provaremos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$, para todo $x \in M$. De fato, sejam $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ dados. Como $\overline{[e_n]} = M$, ou seja, $[e_n]$ é denso em M, encontramos $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \in [e_n]$, tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Se $n \geq m$, então,

$$
\begin{aligned}
\|x - S_n(x)\| &\leq \|x - y\| + \|y - S_n(y)\| + \|S_n(y) - S_n(x)\| \\
&= \|x - y\| + \|y - y\| + \|S_n\| \|y - x\| \\
&= (1 + \|S_n\|) \|x - y\| \\
&\leq (1 + k) \|x - y\| \\
&\leq (1 + k) \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, $x = \lim_{x\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j$.

Mostraremos que tal representação é única, ou seja: se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n = 0$, então, $\lambda_n = 0$, para todo n. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$, tal que $\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. De (IV), obtemos $\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\| \leq k\varepsilon$, para todo $m \in \boldsymbol{N}$. Logo, $|\lambda_m|\|e_m\| \leq 2k\varepsilon$, para todo $m \in \boldsymbol{N}$ e $\varepsilon > 0$, o que completa a prova. ■

Podemos, portanto, formular o seguinte resultado:

A seqüência $\{e_n\}$, de vetores não nulos em X, é base de Schauder, se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1. O subespaço gerado por $\{e_n\}$ é denso em X,
2. Existe uma constante $k \geq 1$, tal que $\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\| \leq k\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\|$, para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ e $m < n$ em $\boldsymbol{N}$.

Veremos, agora, algumas conseqüências importantes deste teorema:

Corolário 2.2 *Se $\{e_n\}$ é uma base de Schauder para X, então, $\{e_n^*\}$ é seqüência básica em X^*.*

Prova: Como $\{e_n\}$ é base de Schauder, então, dado $x \in X$, temos $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ escrito em forma única. Assim, podemos considerar as projeções $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j$, para todo $x \in X$, $n \in \boldsymbol{N}$.

O operador dual é dado por $S_n^*(x^*) = \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j)e_j^*$, para todo $x^* \in X^*$, e $\|S_n\| = \|S_n^*\|$, para todo $n \in \boldsymbol{N}$. Pela proposição 1.4, existe $k \geq 1$, tal que $\|S_n^*\| = \|S_n\| \leq k$, para todo n.

Observemos que, se $x^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$, então, $x^*(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_k) = \lambda_k$, para $k = 1, \ldots, n$. Assim, $x^* = \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j)e_j^*$. Deste modo, se $m < n$ e $x^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$, então,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j^*\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{m} x^*(e_j)e_j^*\right\| \\
&= \|S_m^*(x^*)\| \\
&\leq \|S_m^*\|\|x^*\| \\
&\leq k\|x^*\| \\
&= k\left\|\sum_{j=1}^{n} x^*(e_j)e_j^*\right\| \\
&= k\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*\right\|.
\end{aligned}$$

Agora, podemos usar o teorema 2.1 e obter nosso resultado. ■

Corolário 2.3 *Se $\{x_n\}$ é uma base de Schauder de um espaço de Banach reflexivo X, então, $\{x_n^*\}$ é uma base de Schauder para X^*.*

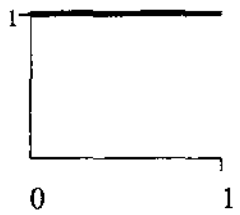
Prova: Para $x \in X$ e $x^* \in X^*$, temos

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x^*\left(S_n(x)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x^*\left(\sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j)e_j^*(x). \end{aligned}$$

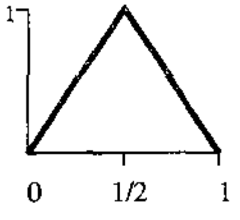
Assim, a seqüência $(\sum_{j=1}^{n} x^*(e_j)e_j^*)$ converge a x^*, no sentido da topologia fraca $*$. Ou seja, $X^* = \overline{[e_n^*]}^{w*}$. Como X é reflexivo, então, o fecho fraco $*$ coincide com o fecho fraco e estes coincidem com o fecho na norma, logo $X^* = \overline{[e_n^*]}$. Pelo corolário anterior, X^* tem base de Schauder. ∎

Exemplo 2.4 A seguinte seqüência em $C[0,1]$ (sistema de Schauder) é base de Schauder para $C[0,1]$:

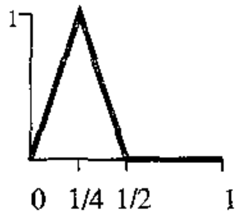


$x_0(t) = 1$, para $t \in [0,1]$

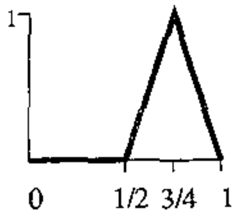
$x_1(t) = t$, para $t \in [0,1]$



$$x_2(t) = \begin{cases} 2t, & \text{para} \quad t \in [0,1/2] \\ 2-2t, & \text{para} \quad t \in [1/2,1] \end{cases}$$



$$x_3(t) = \begin{cases} 4t, & \text{para} \quad t \in [0, 1/4] \\ 2 - 4t, & \text{para} \quad t \in [1/4, 1/2] \\ 0, & \text{para} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



$$x_4(t) = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad t \in [0, 1/2] \\ 4t - 2, & \text{para} \quad t \in [1/2, 3/4] \\ 4 - 4t, & \text{para} \quad t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

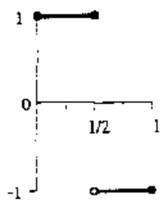
Exemplo 2.5 O sistema de Haar, que é dado por

$$x_1(t) \equiv 1,$$

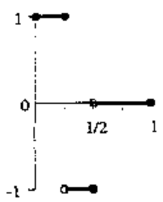
$$x_{2^n+j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in [(2j-2)2^{-n-1}, (2j-1)2^{-n-1}] \\ -1, & \text{se} \quad t \in ((2j-1)2^{-n-1}, 2j.2^{-n-1}] \\ 0, & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

onde $n \geq 0$ e $j = 1, 2, \ldots, 2^n$, é base de Schauder para $L^P[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

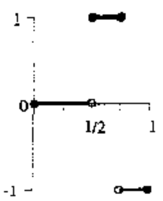
Mais explicitamente, temos,



$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \in [0, 1/2] \\ -1, & \text{para } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$



$$x_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \in [0, 1/4] \\ -1, & \text{para } t \in (1/4, 1/2] \\ 0, & \text{para } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$



$$x_4(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \in [1/2, 3/4] \\ -1, & \text{para } t \in (3/4, 1] \\ 0, & \text{para } t \in [0, 1/2) \end{cases}$$

Observação: Se integramos o Sistema de Haar, obtemos a seqüência $\{y_n\}$ dada por

$$y_1(t) \equiv 1, \ y_n(t) = \int_o^t x_{n-1}(x)\,dx, \ n > 1,$$

que é, exatamente, o Sistema de Schauder.

Ciesielski e J. Domsta [8] e S. Schonefeld [44] provaram a existência de uma base em $C^k(I^n)$ (= o espaço de todas as funções reais $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $t_i \in [0,1]$, que são continuamente diferenciáveis até a ordem k, com a norma usual). S.V. Botschkariev [4] provou a existência de uma base para o espaço consistindo de todas as funções $f(z)$, que são analíticas sobre $|z| < 1$ e contínuas sobre $|z| \leq 1$, com a norma do sup.

Exemplo 2.6 Nos artigos mencionados anteriormente, o leitor poderá encontrar o chamado Sistema de Franklin. O sistema de Franklin consiste da seqüência de funções $\{f_n(t)\}$, sobre $[0,1]$, que é obtida, a partir do sistema de Schauder, por uma aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (com relação à medida de Lebesgue sobre $[0,1]$). O sistema de Franklin é uma seqüência ortonormal, que é base de Schauder para $C[0,1]$.

3 Existência de Bases de Schauder

Uma aplicação do teorema 2.1 mostra que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço com uma base. A prova deste fato, baseada nas idéias de Mazur, foi publicada por Pelczynski [37]. Começaremos com o seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja M um subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach X de dimensão infinita e seja $0 < \varepsilon < 1$. Então, existe $y \in X$, tal que $\|y\| = 1$ e*

$$\|x + \lambda y\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|, \tag{VII}$$

para todo $x \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova: Sabemos que S_M é compacto e, portanto, totalmente limitado. Assim, existem $x_1, \ldots, x_n \in S_M$, tais que $S_M \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$.

Por um corolário do Teorema de Hahn-Banach, existem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$, tais que $\varphi_j(x_j) = \|x_j\| = 1$, para $j = 1, \ldots, n$.

Como X é de dimensão infinita, podemos encontrar $y \in X$, tal que $\|y\| = 1$ e $\varphi_j(y) = 0$, para $j = 1, \ldots, n$. Com efeito, consideremos a aplicação linear $T : X \to \mathbb{R}^n$, dada por $T(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))$. Se $\ker T = \{0\}$, então, T é injetiva e, conseqüentemente, $\dim X \leq n$, o que nos dá uma contradição. Logo, $\ker T \neq \{0\}$.

Dado x e S_M, existe $j \in \boldsymbol{N}$, $1 \leq j \leq n$, tal que $\|x - x_j\| \leq \varepsilon$. Então, para cada $\lambda \in \boldsymbol{R}$, temos

$$\begin{aligned}\|x + \lambda y\| &\geq \|x_j + \lambda y\| - \|x_j - x\| \\ &\geq \varphi_j(x_j + \lambda y) - \|x_j - x\| \geq 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Notemos que, para $x = 0$, a desigualdade (VII) é trivialmente satisfeita. Suponhamos, então, que $x \neq 0$, $x \in M$ qualquer. Então, $x/\|x\| \in S_M$ e é claro que $\varphi_j(y/\|x\|) = 0$. Assim,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{\lambda}{\|x\|} y \right\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Portanto, para todo $x \in M$ e $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

$$\|x + \lambda y\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|. \blacksquare$$

Teorema 3.2 *Todo espaço de Banach de dimensão infinita tem um subespaço fechado de dimensão infinita com base de Schauder.*

Prova: Seja X um espaço de Banach e seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos uma seqüência $\{\varepsilon_n\}$, tal que $0 < \varepsilon_n < 1$ e $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \varepsilon_n) \geq (1 - \varepsilon)$.

Tomemos $e_1 \in S_X$. Pelo lema anterior, existe $e_2 \in S_X$ tal que $\|x + \lambda e_2\| \geq (1 - \varepsilon_1)\|x\|$, para todo $x \in [e_1]$. Seja M o subespaço gerado por e_1 e e_2. Assim, podemos encontrar $e_3 \in S_X$, tal que $\|x + \lambda e_3\| \geq (1 - \varepsilon_2)\|x\|$, para todo $x \in M$ e $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Podemos repetir esse raciocínio, de modo indutivo e obter a seqüência $\{e_n\}$, que é base de Schauder para o subespaço $\overline{[e_n]}$. De fato,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\| &\geq \prod_{k=m}^{n-1}(1 - \varepsilon_k)\left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\right\| \\ &\geq \prod_{k=m}^{\infty}(1 - \varepsilon_k)\left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\right\| \\ &\geq (1 - \varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\right\|,\end{aligned}$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ em $\boldsymbol{R}$ e $m < n$ em $\boldsymbol{N}$. $\blacksquare$

O leitor poderá conhecer mais acerca da teoria de bases, consultando [3], [4], [8], [24], [30], [37], [44], [46], [49] e [50].

$\infty \quad \infty \quad \infty$

Capítulo II

O Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski

Nesta seção, serão estudados certos tipos de seqüências básicas, muito importantes para a análise de subespaços isomorfos a c_0 ou ℓ_p. Bessaga e Pelczynski estabeleceram um critério fundamental para localizar um tipo especial de seqüências, que chamaremos de *seqüências básicas de blocos*[1]. Para começar, uma nova noção é introduzida: a de equivalência de bases.

4 Equivalência de Bases

Sejam X e Y espaços de Banach e suponhamos que $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ são bases para X e Y, respectivamente.

Definição 4.1 *Dizemos que $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ são equivalentes se, para toda seqüência $\{\lambda_n\}$ de escalares, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge se, e somente se, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j$ converge.*

Teorema 4.2 *As bases $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ são equivalentes se, e só se, existe um isomorfismo entre X e Y, que leva $\{e_n\}$ em $\{f_n\}$.*

Prova: $(\Leftarrow)$ É trivial.

$(\Rightarrow)$ Podemos supor que os termos das seqüências $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ têm norma 1.

Consideremos X munido da norma $|||x||| = \sup_m \left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\right\|$ e as transformações lineares $T_k : X \to Y$, dadas por $T_k\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$. Pela proposição 1.4, os funcionais

[1] Em particular, utilizaremos a teoria de bases, para mostrar que cada subespaço complementado de dimensão infinita de um espaço de seqüências clássico X é linearmente isomorfo a X e que cada subespaço fechado de dimensão infinita de X contém um subespaço complementado de dimensão infinita.

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \to \lambda_j$ são contínuos, e, daí, cada T_k é contínua. Então, a transformação linear $T : X \to Y$, dada por $T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j = \lim_{k\to\infty} T_k\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\right)$ é contínua, pelo *Teorema de Banach-Steinhaus*. Além disso, $T(e_n) = f_n$ e T é bijetiva, já que $\{x_n\}$ e $\{f_n\}$ são bases. Portanto, T é um isomorfismo entre X e Y. ∎

Definição 4.3 *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência. Dizemos que a seqüência $\{x_n\}$ é fracamente nula, se $\{x_n\}$ converge fracamente a zero, e, $\{x_n\}$ é dita normalizada se $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.*

5 Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski (Versão 1)

Teorema 5.1 (Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski) *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência fracamente nula e normalizada em um espaço de Banach. Então, $\{x_n\}$ admite uma subseqüência, que é seqüência básica.*

Prova: Seja $\{\varepsilon_n\}$ uma seqüência de números positivos, tal que $0 < \varepsilon_n < 1$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, e $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 1 - \varepsilon_0$.

Provaremos o fato usando indução:

Sejam $x_{n_1} = x_1$ e $Y(1) = [x_1]$. Claramente $Y(1)$ é de dimensão finita. Logo $S_{Y(1)}$ é compacto, e, portanto, totalmente limitado. Assim, existem $z_1, \ldots, z_m$ em $S_{Y(1)}$, tais que cada $y \in S_{Y(1)}$ dista $\varepsilon_1/3$ de algum z_j.

Por um corolário do Teorema de Hahn-Banach, existem $z_1^*, \ldots, z_m^*$ em S_{X^*}, tais que $|z_j^*(z_j)| = 1$, para cada $j = 1, \ldots, m$ (I).

Por hipótese, $\{x_n\}$ é fracamente nula. Então, para cada $x^* \in X^*, \lim_{n\to} x^*(x_n) = 0$. Assim, para cada z_j^*, temos $\lim_{n\to\infty} z_j^*(x_n) = 0$. Portanto, para $\varepsilon > 0$, existe $n_j \in \boldsymbol{N}$, tal que, para $n \geq n_j$, $|z_j^*(x_n)| < \varepsilon$.

Seja $\varepsilon = \varepsilon_1/3$. Tomando $n_0 = \max_{1\leq j\leq m}\{n_j\}$ e escolhendo $n_2 > n_0$, temos $|z_j^*(x_{n_2})| < \varepsilon_1/3$, para $j = 1, \ldots, m$ (II). Assim, para todo $y \in S_{Y(1)}$ e $\lambda \in \boldsymbol{R}$, temos $\|y + \lambda x_{n_2}\| \geq (1-\varepsilon_1)\|y\|$. Com efeito:

<u>Caso 1:</u> Se $|\lambda| \geq 2$, então, $\|y + \lambda x_{n_2}\| \geq |\lambda|\|x_{n_2}\| - \|y\| \geq 2 - 1 \geq (1-\varepsilon_1)\|y\|$.

<u>Caso 2:</u> Se $|\lambda| < 2$, utilizando (I) e (II), obtemos

$$\begin{aligned}
\|y + \lambda x_{n_2}\| &\geq |z_j^*(y + \lambda x_{n_2})| \\
&= |z_j^*(y + z_j - z_j + \lambda x_{n_2})| \\
&= |z_j^*(z_j) + z_j^*(y - z_j) + z_j^*(\lambda x_{n_2})| \\
&\geq |z_j^*(z_j)| - |z_j^*(y - z_j)| - |\lambda||z_j^*(x_{n_2})|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 1 - \|y - z_j\| - 2\varepsilon_1/4 \\
&> 1 - \varepsilon_1/3 - 2\varepsilon_1/3 = 1 - \varepsilon_1 \\
&= (1 - \varepsilon_1)\|y\|.
\end{aligned}
$$

Supondo que já encontramos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, com $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, seja $Y(k) = [x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}]$.

Pelo mesmo argumento feito anteriormente, podemos tomar $z_1, \ldots, z_m$ em $S_{Y(k)}$, tais que cada $y \in S_{Y(k)}$ dista $\varepsilon_k/3$ de algum z_j, e, $z_1^*, \ldots, z_m^*$ em S_{X^*}, tais que $|z_j^*(z_j)| = 1$, para cada $j = 1, \ldots, m$.

Como $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$, para cada $x^* \in X^*$, então, podemos encontrar $x_{n_{k+1}}$, com $n_{k+1} > n_k$, tal que $|z_j^*(x_{n_{k+1}})| < \varepsilon_k/3$, para $j = 1 \ldots, m$. Além disso, para todo $y \in S_{Y(k)}$ e $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\|y + \lambda x_{n_{k+1}}\| \geq (1 - \varepsilon_k)\|y\|$.

A mesma demonstração usada no teorema 3.2 prova, então, que $\{x_{n_k}\}$ é uma seqüência básica. ∎

Teorema 5.2 *Sejam X um espaço de Banach e $\{e_n\}$ uma seqüência básica em X, com seus funcionais coeficientes $\{e_n^*\}$. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de elementos não nulos em X e $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j - f_j\|\|e_j^*\| = a < 1$, então, $\{f_n\}$ é uma seqüência básica equivalente a $\{e_n\}$.*

Prova: Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m}$ uma seqüência finita de escalares. Então,

$$|\lambda_j| = \left| e_j^* \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) \right| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| \|e_j^*\| \quad \text{, para} \quad j = 1, \ldots, n,$$

e

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j - e_j) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \|f_j - e_j\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| \|f_j - e_j\| \|e_j^*\| \\
&\leq (1 + a) \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \quad \text{(III)}.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j f_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j (e_j + f_j - e_j) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j e_j\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j (f_j - e_j)\right\| \\
&\geq \left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j e_j\right\| - \sum_{j=1}^{n+m} |\lambda_j| \|f_j - e_j\| \\
&\geq \left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j e_j\right\| - \sum_{j=1}^{n+m} \left(\left\|\sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k e_k\right\| \|e_j^*\| \|f_j - e_j\|\right) \\
&\geq (1-a)\left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j e_j\right\| \quad \text{(IV)}.
\end{aligned}$$

Se k é a constante do teorema 2.1 para $\{e_n\}$, então, por (III) e (IV) temos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\right\| \leq (1+a)\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\| \leq (1+a)k\left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j e_j\right\| \leq \frac{(1+a)k}{1-a}\left\|\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j f_j\right\|.$$

Pelo teorema 2.1, $\{f_n\}$ é seqüência básica. Por (III) e (IV), $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ são equivalentes. ∎

Teorema 5.3 (Bessaga-Pelczynski) *Seja X um espaço de Banach e suponhamos que $\{e_n\}$ é uma seqüência básica em X, com funcionais coeficientes $\{e_n^*\}$. Suponhamos que exista uma projeção linear limitada $P : X \to \overline{[e_n]}$. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência em X, tal que $\|P\| \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j^*\| \|e_j - f_j\| < 1$, então, $\{f_n\}$ é uma seqüência básica equivalente a $\{e_n\}$ e $\overline{[f_n]}$ é complementado em X.*

Para provarmos este teorema, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.4 *Seja $T \in \mathcal{L}(X, X)$, com $\|T\| < 1$. Então, $I - T$ é um isomorfismo e $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

Prova: Desde que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|},$$

segue que $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X, X)$. Além disso,

$$S_n = I + T + T^2 + \cdots + T^n,$$

$$S_n \circ T = T + T^2 + \cdots + T^{n+1} \text{ e}$$

$$S_n \circ (I - T) = I - T^{n+1}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos que $S \circ (I - T) = I$. De forma análoga, se prova que $(I - T) \circ S = I$. ∎

Prova: Seja $Q : X \to X$, definida por $Q(x) = x - P(x) + \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(x))f_j$. Claramente, Q é linear. Notemos que, dado $x \in X$, $P(x) \in \overline{[e_n]}$. Como $\{e_n\}$ é base de Schauder para $\overline{[e_n]}$, então, $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(x))e_j$.

O operador Q é limitado, já que

$$\begin{aligned} \|Q - I\| &= \sup\{\|Q(x) - x\|;\ \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\|P(x) - \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(x))e_j + \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(x))(e_j - f_j)\|;\ \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|\sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(x))(e_j - f_j)\|;\ \|x\| \leq 1\right\} \\ &\leq \|P\| \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j^*\|\|e_j - f_j\| < 1 . \end{aligned}$$

Pelo lema 5.4, Q é um isomorfismo de X em si mesmo e $Q^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - Q)^n$. Além disso,

$$\begin{aligned} Q(e_n) &= e_n - P(e_n) + \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(P(e_n))f_j \\ &= e_n - e_n + \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(e_n)f_j \\ &= f_n. \end{aligned}$$

Se tomarmos $\mathcal{R} = \mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}$, obtemos que $\mathcal{R}^2 = \mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{R}$, e $\text{Im}\mathcal{R} = \overline{[f_n]}$. Isso prova que $\overline{[f_n]}$ é complementado em X.

Finalmente, como P é uma projeção, com imagem não trivial, $\|P\| \geq 1$, então,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j - f_j\|\|e_j^*\| \leq \|P\| \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j - f_j\|\|e_j^*\| < 1.$$

Pelo teorema 5.2, $\{f_n\}$ é seqüência básica equivalente a $\{e_n\}$. ∎

Teorema 5.5 *Sejam $\{e_n\}$ uma seqüência básica em X, $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ seqüências de números naturais, tais que $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 \ldots$, e $\{\lambda_n\}$ uma seqüência de escalares. A seqüência $\{f_n\}$, definida por $f_n = \sum_{j=p_n}^{q_n} \lambda_j e_j$, é uma seqüência básica em X.*

Prova: Aplicando o teorema 2.1, resulta que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=p_j}^{q_j} \lambda_k e_k\right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=p_j}^{q_j} \alpha_j \lambda_k e_k \right\| \\
&\leq k \left\| \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k=p_j}^{q_j} \alpha_j \lambda_k e_k \right\| \\
&= k \left\| \sum_{j=1}^{n+m} \alpha_j \sum_{k=p_j}^{q_j} \lambda_k e_k \right\| \\
&= k \left\| \sum_{j=1}^{n+m} \alpha_j f_j \right\| . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 5.6 *Dizemos que a seqüência $\{f_n\}$, definida no teorema anterior, é uma seqüência básica de blocos da seqüência básica $\{e_n\}$.*

6 Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski (Versão 2)

Teorema 6.1 (Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski) *Seja $\{e_n\}$ uma base para X e suponhamos que $\{e_n^*\}$ é a seqüência de funcionais coeficientes. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência em X, satisfazendo $\inf_n \|f_n\| > 0$ e $\lim_n e_j^*(f_n) = 0$, para todo j, então, existe uma subseqüência básica de $\{f_n\}$, que é equivalente a uma seqüência básica de blocos a respeito de $\{e_n\}$.*

Prova: Seja $k > 0$, tal que, para $m, n \geq 1$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leq k \left\| \sum_{j=1}^{m+n} \lambda_j e_j \right\| .$$

Como $\inf_n \|f_n\| > 0$, então, podemos assumir que $\|f_n\| = 1$, para todo n.

Desde que $\{e_n\}$ é base para X, f_1 admite uma expansão

$$f_1 = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(f_1) e_j .$$

Daí, existe um q_1, tal que

$$\left\| \sum_{j=q_1+1}^{\infty} e_j^*(f_1) e_j \right\| < \frac{1}{4k2^3} .$$

Desde que $\lim_n e_j^*(f_n) = 0$, para cada j, existe um $p_2 > 1 = p_1$, tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{q_1} e_j^*(f_{p_2}) e_j \right\| \leq \frac{1}{4k2^4} .$$

Novamente, como $\{e_n\}$ é uma base para X, também f_{p_2} admite uma representação

$$f_{p_2} = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(f_{p_2}) e_j .$$

Daí, exite $q_2 > q_1$, tal que

$$\left\| \sum_{j=q_2+1}^{\infty} e_j^*(f_{p_2}) e_j \right\| < \frac{1}{4k2^4} .$$

De forma análoga, podemos encontrar $p_3 > p_2$, tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{q_2} e_j^*(f_{p_3}) e_j \right\| < \frac{1}{4k2^5} .$$

Seja $g_n = \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} e_j^*(f_{p_{n+1}}) e_j$. Observando que

$$\begin{aligned}
1 &= \left\| f_{p_{n+1}} \right\| = \left\| \left(\sum_{j=1}^{q_n} + \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} + \sum_{j=q_{n+1}+1}^{\infty} \right) e_j^*(f_{p_{n+1}}) e_j \right\| \\
&\leq \left\| \left(\sum_{j=1}^{q_n} + \sum_{j=q_{n+1}+1}^{\infty} \right) e_j^*(f_{p_{n+1}}) e_j \right\| + \|g_n\| \\
&\leq \frac{1}{4k2^{n+3}} + \frac{1}{4k2^{n+3}} + \|g_n\|,
\end{aligned}$$

segue que $\|g_n\| \geq 1/2$, para todo n (V).

A seqüência $\{g_n\}$ é uma seqüência básica de blocos a respeito de $\{e_n\}$ e, para $m < n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j \right\| \leq k \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j \right\| .$$

Por (V), obtemos que os coeficientes funcionais de $\{g_n\}$ satisfazem $\|g_n^*\| \leq 4k$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n^*\| \|g_n - f_{p_{n+1}}\| &\leq 4k \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n - f_{p_{n+1}}\| \\
&\leq 4k \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^{q_n} + \sum_{j=q_{n+1}+1}^{\infty} \right) e_j^*(f_{p_{n+1}}) e_j \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k2^{n+3}} + \frac{1}{4k2^{n+3}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+3}} \right) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Pelo teorema 5.2, $\{f_{p_{n+1}}\}$ é uma seqüência básica equivalente a $\{g_n\}$. ∎

Os próximos dois teoremas são válidos tanto para ℓ_p como para c_0, mas faremos as provas baseadas em ℓ_p. Considere $\{e_n\}$ como sendo a base canônica para estes espaços.

Usaremos a letra X para representar ℓ_p ou c_0.

Teorema 6.2 *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de vetores não nulos em X, tal que existe uma seqüência crescente $\{p_n\}$ de números naturais com $f_n = \sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_j^n e_j$. Então,*

(1) *$\{f_n\}$ é seqüência básica,*

(2) *$\overline{[f_n]}$ é isometricamente isomorfo a X e*

(3) *$\overline{[f_n]}$ é complementado em X.*

Prova:

(1) Pelo teorema 5.5, $\{f_n\}$ é uma seqüência básica. ∎

(2) Seja $\{\alpha_n\}$ uma seqüência de escalares. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n f_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_n \lambda_j^n e_j \right\| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{k} \sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_n \lambda_j^n|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^p \|f_n\|^p \right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n / \|f_n\|$ converge se, e só se, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty$.
Seja S definida por $S(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_m / \|f_n\|$, para $\{\alpha_n\}$ em ℓ_p. Então, S é isometria linear de ℓ_p sobre $\overline{[f_n]}$. ∎

(3) Seja $X_n = [e_{p_n+1}, \ldots, e_{p_{n+1}}]$. Então, $f_n \in X_n$ e existe um $f_n^* \in X_n^*$, tal que $f_n^*(f_n) = 1$ e $\|f_n^*\| = 1/\|f_n\|$. Seja $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ em ℓ_p. Definimos $P : \ell_p \to \overline{[f_n]}$, por

$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(\sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_j e_j) f_n$. P está bem definida, pois

$$\left| f_n^* \left(\sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_j e_j \right) \right| \leq \frac{1}{\|f_n\|} \left(\sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_j|^p \right)^{1/p}.$$

Como $\{f_n\}$ é base para $\overline{[f_n]}$ e $P(f_n) = f_n$, para todo n, P é projeção de ℓ_p em $[f_n]$. Mais ainda, $\|P(x)\| \leq \|x\|$, para todo x em ℓ_p. ∎

O próximo teorema é uma aplicação do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski.

Teorema 6.3 *Seja Y um subespaço fechado de dimensão infinita de X. Então Y tem um subespaço complementado em X e isomorfo a X.*

Prova: Desde que Y é subespaço fechado de dimensão infinita de X, é possível encontrarmos uma seqüência crescente $\{p_n\}$ de números naturais, tal que

$$f_n = \sum_{j=p_n+1}^{\infty} \lambda_j^n e_j \in Y \qquad \|f_n\| = 1,$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Com efeito, consideremos a aplicação $f : Y \to \mathbb{R}^p$, definida por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \in Y \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p).$$

Tal aplicação é linear e não é injetiva, já que $\dim Y$ é infinita e $\dim \mathbb{R}^p = p < \infty$. Logo, $\ker T \neq \{0\}$ e podemos encontrar uma seqüência de escalares $\{\lambda_n\}$, tal que $0 \neq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \in Y$, satisfazendo $f(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Como $\lim_n e_j^*(f_n) = \lim_n \lambda_j^n = 0$, então, pelo princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski (versão 2), existe uma subseqüência de $\{f_n\}$, digamos $\{f_{n_k}\}$, equivalente a uma seqüência básica de blocos com relação a $\{e_n\}$. Pelo teorema 6.2, $\overline{[f_{n_k}]}$ é isometricamente isomorfo a X e $\overline{[f_{n_k}]}$ é complementado em X. ∎

∞ ∞ ∞

Capítulo III

Caracterizações de Espaços contendo Subespaços Isomorfos a c_0

Finalmente, vamos investigar que tipo de espaços de Banach contém esse espaço de seqüências. Para isto, introduziremos a noção de seqüência fracamente somável e as diversas caracterizações desse conceito.

7 Seqüências Fracamente Somáveis

Definição 7.1 *Uma seqüência $\{e_n\}$ é fracamente somável (fs), se, para cada $x^* \in X^*$, $\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(e_j)| < \infty$.*

O seguinte teorema apresenta caracterizações básicas de seqüências fracamente somáveis.

Teorema 7.2 *As seguintes condições, a respeito de uma seqüência $\{e_n\}$ em um espaço de Banach, são equivalentes:*

1. *$\{e_n\}$ é fs.*

2. *Existe uma constante $k > 0$, tal que, para cada seqüência $\{\lambda_n\} \in \ell_\infty$,*

$$\sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leq k \sup_n |\lambda_n| .$$

3. *Para toda seqüência $\{\lambda_n\} \in c_0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge.*

4. Existe uma constante $k > 0$, tal que, para todo subconjunto finito Δ de $\mathbb{N}$ e toda seqüência $\{\varepsilon_n\}$, com $\varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left\| \sum_{j\in\Delta} \varepsilon_j e_j \right\| \leq k\,.$$

Prova: ($1 \Rightarrow 2$) Definamos $T : X^* \to \ell_1$, dada por $T(x^*) = \{x^*(e_n)\}$. Como $\{e_n\}$ é fs, então, $\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(e_j)| < \infty$ e $\{x^*(e_n)\} \in \ell_1$. Portanto, T está bem definida e é obviamente linear.

Sabemos que X^* e ℓ_1 são espaços de Banach e, usando o teorema do gráfico fechado, provamos que T é contínua.

Disto resulta que, para toda seqüência $\{\lambda_n\} \in B_{\ell_\infty}$ e todo $x^* \in B_{X^*}$,

$$\begin{aligned}
\left| x^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} x^*(\lambda_j e_j)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^*(e_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|\,|x^*(e_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sup_m |\lambda_m|\,|x^*(e_j)| \\
&= \sup_m |\lambda_m| \sum_{j=1}^{n} |x^*(e_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |x^*(e_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(e_j)| \\
&= \|\{x^*(e_n)\}\|_{\ell_1} \\
&= \|T(x^*)\|_{\ell_1} \\
&\leq \|T\|\,\|x^*\| \;\leq\; \|T\|.
\end{aligned}$$

Logo $\sup_{\substack{x^*\in X^* \\ \|x^*\|\leq 1}} \left|x^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right)\right| \leq \|T\|$, mas, por um corolário do Teorema de Hahn-Banach,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\| = \sup_{\substack{x^*\in X^* \\ \|x^*\|\leq 1}} \left|x^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right)\right| \leq \|T\|$$

e $\sup_n \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| \leq \|T\|$. Para uma seqüência não nula $\{\lambda_n\} \in \ell_\infty$, tomemos

$$\frac{\{\lambda_n\}}{\|\{\lambda_n\}\|_{\ell_\infty}} = \frac{\{\lambda_n\}}{\sup_n |\lambda_n|} \in B_{\ell_\infty}. \text{ Assim, } \quad \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sup_n |\lambda_n|} e_j \right\| \leq \|T\|$$

implica

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leq \|T\| \sup_n |\lambda_n|.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Seja $\{\lambda_n\} \in c_0 \subseteq \ell_\infty$, então, para $n \in \boldsymbol{N}$, temos, por hipótese, que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leq k \sup_n |\lambda_n|.$$

Mas, para $m \geq n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \leq k \sup_{n+1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \to 0$$

e $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge.

$(3 \Rightarrow 4)$ Suponhamos válida a condição 3 e consideremos a transformação linear $T : c_0 \to X$, dada por $T(\{\lambda_n\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$, a qual está bem definida, pois, sendo $\{\lambda_n\} \in c_0$, então, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge. Pelo *teorema de Banach-Steinhaus*, T é contínua.

Seja Δ um subconjunto finito de $\boldsymbol{N}$ e seja $\{\varepsilon_n\}$, tal que $\varepsilon_n = \pm 1$. Vamos provar que $\sum_{j \in \Delta} \varepsilon_j e_j$ é uniformemente limitada. De fato, note que podemos definir uma seqüência $\{\delta_n\}$, da seguinte forma

$$\delta_n = \begin{cases} \varepsilon_n, & \text{para } n \in \Delta \\ 0, & \text{para } n \notin \Delta. \end{cases}$$

Claramente $\{\delta_n\} \in c_0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in \Delta} \varepsilon_j e_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j e_j \right\| = \|T(\{\delta_n\})\| \\ &\leq \|T\| \sup_n |\delta_n| = \|T\|. \end{aligned}$$

$(4 \Rightarrow 1)$ Finalmente, se vale 4, então, para todo $x^* \in B_{X^*}$,

$$\sum_{j \in \Delta} \varepsilon_j x^*(e_j) = x^* \left(\sum_{j \in \Delta} \varepsilon_j e_j \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| x^* \left(\sum_{j\in\Delta} \varepsilon_j e_j \right) \right| \\
&\leq \|x^*\| \left\| \sum_{j\in\Delta} \varepsilon_j e_j \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j\in\Delta} \varepsilon_j e_j \right\| \leq k.
\end{aligned}
$$

Para $\{\gamma_n\}$, definida como segue

$$
\gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{se para } n \in \Delta : x^*(e_n) \geq 0 \\ -1 & \text{se para } n \in \Delta : x^*(e_n) < 0, \end{cases}
$$

temos, para $x^* \in B_{X^*}$,

$$
\sum_{j\in\Delta} |x^*(e_j)| = \sum_{j\in\Delta} |\gamma_j||x^*(e_j)| = \sum_{j\in\Delta} \gamma_j x^*(e_j) \leq k
$$

e, portanto, para todo $n \in \boldsymbol{N}$,

$$
\sum_{j=1}^{n} |x^*(e_j)| \leq k \ \text{ e } \ \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(e_j)| < \infty. \ \blacksquare
$$

Corolário 7.3 *Uma seqüência básica $\{f_n\}$, tal que $\inf_n \|f_n\| > 0$ e $\{f_n\}$ é fs, é equivalente à base de vetores unitários de c_0.*

Prova: Se $\{f_n\}$ é seqüência básica e $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j$ é convergente, então, $\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Fazendo $n \to \infty$, a seqüência

$$
|\lambda_n| \, \|f_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

Disto e do fato de que $\inf_n \|f_n\| > 0$, segue que $\{\lambda_n\} \in c_0$.

Seja $\{e_n\}$ a base de vetores unitários de c_0. Assim,

$$
\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \right\|_{c_0} = \|\{\lambda_n\}\|_{c_0} < \infty
$$

e $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge.

Por outro lado, suponhamos $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ convergente. Então, da mesma forma, $\{\lambda_n\} \in c_0$. Como $\{f_n\}$ é uma seqüência básica e $\{f_n\}$ é fs, então, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j$ converge, para cada $\{\lambda_n\} \in c_0$, graças ao teorema 7.2, parte 3. $\blacksquare$

Definição 7.4 *A série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é dita incondicionalmente convergente, se, para toda permutação π dos números naturais, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)}$ converge.*

8 O Teorema de Orlicz-Pettis

Obteremos o famoso Teorema de Orlicz-Pettis a partir de alguns resultados de Bessaga-Pelczynski, demonstrados na seção anterior deste capítulo. Vale comentar que este importante teorema foi originalmente provado, utilizando-se recursos da Teoria de Medida Vetorial [9].

Teorema 8.1 (de Orlicz-Pettis) *Sejam X espaço de Banach e $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ uma série em X, tal que, para cada seqüência crescente $\{k_n\}$ de números naturais, $f\lim_n \sum_{j=1}^{n} f_{k_j}$ existe. Então, para cada seqüência crescente $\{k_n\}$ de números naturais, $\lim_n \sum_{j=1}^{n} f_{k_j}$ existe.*

Prova: Consideremos a seqüência crescente $\{k_n\}$ de números naturais, tal que $f\lim_n \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} = x$. É fácil verificar que $\{f_{k_n}\}$ é fs.

Suponhamos, por absurdo, que $\sum_{j=1}^{\infty} f_{k_j}$ não seja convergente. Deste modo, a seqüência de somas parciais dessa série não é convergente. Assim, existem $\varepsilon > 0$ e $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, tais que $\|\sum_{j=n_q+1}^{n_p} f_{k_j}\| \geq \varepsilon$, para $p \neq q$. Seja $g_{n_p} = \sum_{j=n_p+1}^{n_{p+1}} f_{k_j}$ para cada p. Evidentemente a seqüência $\{g_{n_p}\}$ é fs e $\inf_p \|g_{n_p}\| > 0$. Pelo Princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, $\{g_{n_p}\}$ admite uma subseqüência, que denotaremos $\{h_{n_p}\}$, que é básica. Graças ao corolário 7.3, $\{h_{n_p}\}$ é equivalente à base de vetores unitários $\{e_n\}$ de c_0.

Observamos que $\{h_{n_p}\}$ é fracamente somável e, como é equivalente à base de vetores unitários de c_0, então, a seqüência $\{\sum_{j=1}^{n} e_j\}$ deveria ser fracamente convergente. Digamos que $e = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ seja seu limite fraco. Então, para $\pi_i : c_0 \to \boldsymbol{R}$, dada por $\pi_i(\{\lambda_n\}) = \lambda_i$, temos $\pi_i(\sum_{j=1}^{n} e_j) = \pi_i((1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)) = 1$, para $1 \leq i \leq n$ e $\pi_i(e) = \pi_i((\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)) = \lambda_i$. Como n é qualquer, vem que $\lambda_i = 1$, para todo $i \in \boldsymbol{N}$ e $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin c_0$. Isto fornece uma contradição. Assim, $\lim_n \sum_{j=1}^{n} f_{k_j}$ existe. ∎

9 Espaços contendo Subespaços Isomorfos a c_0

Teorema 9.1 *Seja X um espaço de Banach. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma seqüência $\{f_n\}$, que é fs, e a série $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ não é incondicionalmente convergente (em norma).*
2. *Existe uma seqüência $\{f_n\}$, que é fs, tal que* $\inf_n \|f_n\| > 0$.
3. *X contém um subespaço isomorfo a c_0.*

Prova: ($1 \Rightarrow 2$) Suponhamos que a seqüência $\{f_n\}$ satisfaz (1). Assim, $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ não é incondicionalmente convergente e, portanto, para alguma permutação $\{k_n\}$ de índices, $\sum_{j=1}^{\infty} f_{k_j}$ não converge. Disto resulta que existe uma seqüência crescente $\{q_n\}$ de índices, tal que $\inf_n \|\sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} f_{k_j}\| > 0$.

A seqüência $g_n = \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} f_{k_j}$ é fs, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(g_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| x^* \left(\sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} f_{k_j} \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} \left(x^*(f_{k_j}) \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} |x^*(f_{k_j})| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(f_j)| < \infty,
\end{aligned}$$

e satisfaz (2).

($2 \Rightarrow 3$) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência fs, tal que $\inf_n \|f_n\| = \delta > 0$. Então, $\{f_n\}$ é fracamente nula. Com efeito: para cada $x^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$, como $\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(f_j)| < \infty$, então, existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$, tal que para $n > n_0$, $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x^*(f_j)| < \varepsilon$. Deste modo, para $n > n_0$, $|x^*(f_n)| \leq \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x^*(f_j)| < \varepsilon$ e $x^*(f_n) \to 0$.

Por outro lado, $\inf_n \|f_n\| = \delta > 0$ e podemos supor que a seqüência $\{f_n\}$ esteja normalizada. Utilizando o Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski (versão 1), vemos que $\{f_n\}$ admite uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$, que é seqüência básica. Claramente $\{f_{n_k}\}$ também e fs e $\inf \|f_{n_k}\| > 0$. Pelo corolário 7.3, $\{f_{n_k}\}$ é equivalente à base de vetores unitários de c_0. Portanto, vale (3).

($3 \Rightarrow 1$) Consideremos a seqüência $\{e_n\}$ de vetores unitários de c_0. Esta seqüência é fs, pelo teorema 7.2, pois, sendo $\{e_n\}$ base de Schauder para c_0, então, para cada $\{\lambda_n\} \in c_0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge. Mas, $\sum_{j=1}^{\infty} e_j$ não é incondicionalmente convergente, já que $\sum_{j=1}^{\infty} e_j = (1, 1, \ldots) \notin c_0$. ∎

Corolário 9.2 *Seja X um espaço de Banach. Então, para que cada seqüência $\{f_n\}$ fs seja incondicionalmente convergente, é necessário e suficiente que X não contenha uma cópia de c_0.*

Prova: O resultado segue diretamente do teorema 9.1. ∎

Utilizando o princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 9.3 *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *X^* contém uma cópia de c_0.*
2. *X contém uma cópia complementada de ℓ_1.*

3. X^* contém uma cópia complementada de ℓ_∞.

Prova: $(3 \Rightarrow 1)$ É óbvia.

Antes de provar $(2 \Rightarrow 3)$, precisamos de alguns lemas:

Lema 9.4 *Sejam X, Y espaços de Banach, $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, tais que*

$$T \circ S(y) = y,$$

para cada $y \in Y$. Então, Y é isomorfo a um subespaço complementado de X.

Prova: Sejam $M = S(Y) \subset X$ e $P = S \circ T \in \mathcal{L}(X, X)$. Então,

$$P(X) = S \circ T(X) \subset S(Y) = M$$

e

$$P^2 = (S \circ T) \circ (S \circ T) = S \circ (T \circ S) \circ T = S \circ T = P.$$

Além disso, $S : Y \to M$ é isomorfismo, pois $T \circ S(y) = y$, para cada $y \in Y$, e $P(x) = S \circ T(x) = S \circ T \circ S(y) = S(y) = x$, para todo $x \in M$, $x = S(y)$, com $y \in Y$. ∎

Lema 9.5 *Seja $T : X \to \ell_1$ um operador linear limitado e sobrejetivo. Então, X contém um subespaço complementado isomorfo a ℓ_1.*

Prova: Como $T : X \to \ell_1$ é contínuo e sobrejetivo, então, pelo *teorema da aplicação aberta*, T é aberto e, deste modo, $T(B_X(0,1))$ é aberto em ℓ_1. Portanto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_{\ell_1}(0, \varepsilon) \subset T(B_X(0,1))$. A seqüência $\{e_n\}$ de vetores unitários de ℓ_1 está em

$$B_{\ell_1}(0, 2) = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) B_{\ell_1}(0, \varepsilon) \subset \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) T(B_X(0,1))$$

e portanto existe uma seqüência $\{x_n\} \subset B_X(0, r)$, tal que $T(x_n) = e_n$, para todo n, com $r = 2/\varepsilon$. Consideremos o operador linear $S : \ell_1 \to X$, que leva e_n em x_n, isto é:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \in X.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda_j x_j\| &= \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j\| \\ &< r \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \end{aligned}$$

$$= r\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j\right\|,$$

o operador S é limitado e $T\circ S:\ell_1\to\ell_1$ satisfaz $T\circ S(x)=x$, para cada $x\in\ell_1$. Pelo lema anterior, X contém um subespaço complementado isomorfo a ℓ_1. ∎

(2 ⇒ 3) Por (2), existem $S\in\mathcal{L}(\ell_1,X)$ e $T\in\mathcal{L}(X,\ell_1)$, tais que $T\circ S=I$. Daí, $T^*\in\mathcal{L}(\ell_\infty,X^*), S^*\in\mathcal{L}(X^*,\ell_\infty)$ e $S^*\circ T^*=I$. Pelo lema 9.4, concluímos que X^* contém uma cópia complementada de ℓ_∞.

(1 ⇒ 2) Seja $T:c_0\to X^*$ um isomorfismo sobre sua imagem, e denotemos por $\{e_n\}$ a base de Schauder de c_0.

Consideremos $T^*:X^{**}\to\ell_1$ e seja $S=T^*\circ J:X\to\ell_1$. Para $x\in X$, $Sx=(Te_1(x),Te_2(x),\ldots)$. De fato:

Seja $Sx=\{\eta_n\}=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_n f_n$, onde f_n é base de Schauder de ℓ_1. Assim, $Sx(\xi)=T^*\circ J_x(\xi)=J_x(T(\xi))=T\xi(x)$.

Se $\xi\in c_0$, $\eta\in\ell_1$, então, $\eta(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\eta_j$. Assim, $\eta(e_n)$ é igual a η_n. Deste modo, se $Sx=\{\eta_n\}$, então, $\eta_n=Sx(e_n)=Te_n$, isto é

$$Sx=\{Te_n(x)\}\in\ell_1.$$

Desde que T é um isomorfismo e $I:T(c_0)\to X^*$ é a inclusão, então, por Hahn-Banach e observando que

$$\ell_1\xleftarrow{T^*}[T(c_0)]^*\xleftarrow{I^*}X^*,$$

concluimos que T^* é sobre.

Através do seguinte diagrama de funções contínuas e por *Goldstine* (Apêndice, teorema 7),

$$\sigma(X,X^*)\xrightarrow{J}\sigma(X^{**},X^*)\xrightarrow{T^*}\sigma(\ell_1,c_0),\quad \text{concluímos que}$$

existe $\varepsilon>0$, tal que

$$\begin{aligned} B_{\ell_1}(0,\varepsilon) &\subset T^*B_{X^{**}}(0,1)\\ &\subset T^*\overline{JB_X(0,1)}^{\sigma(X^{**},X^*)}\\ &\subset \overline{T^*JB_X(0,1)}^{\sigma(\ell_1,c_0)}\\ &= \overline{SB_X(0,1)}^{\sigma(\ell_1,c_0)}.\end{aligned}$$

Portanto, existe uma seqüência $\{x_n\}\subset B_X(0,1)$, tal que

$$|(Sx_n-\varepsilon f_n)(e_k)|<\frac{\varepsilon}{2n},$$

para $k = 1, \ldots, n$. Ou seja,

$$|Sx_n(e_k)| < \frac{\varepsilon}{2n}, \quad \text{para} \quad k < n \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} Sx_n(e_k) = 0.$$

Além disso,

$$|Sx_n(e_k) - \varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2n} \cdot$$

Daí

$$|Sx_n(e_n)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2n} \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Pelo princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, $\{Sx_n\}$ tem uma subseqüência básica $\{Sx_{n_k}\}$, que é equivalente a uma seqüência básica de blocos a respeito da base canônica de ℓ_1.

Para simplificar a notação, escreveremos $\{Sx_n\}$ no lugar de $\{Sx_{n_k}\}$.

Pela proposição 6.2, $\overline{[Sx_n]}$ é complementado em ℓ_1 e $\overline{[Sx_n]}$ é isomorfo a ℓ_1.

Sejam $Q : \ell_1 \to \overline{[Sx_n]}$ uma projeção, $R : \overline{[Sx_n]} \to \ell_1$ um isomorfismo e $U = R \circ Q \circ S$. Então, $U \in \mathcal{L}(X, \ell_1)$ e é sobrejetiva. Pelo lema anterior, X contém uma cópia complementada de ℓ_1.

$\infty \quad \infty \quad \infty$

Capítulo IV

O Teorema de Ramsey

Neste capítulo apresentaremos o elegante Teorema de Ramsey e também as diversas generalizações obtidas por vários autores. Com este princípio combinatório surgiu uma nova técnica matemática que permitiu solucionar alguns problemas, que estiveram em aberto por muito tempo. Em especial, o teorema ℓ^1 de Rosenthal [39] que será abordado no capítulo 5.

10 O Teorema de Ramsey

Seja $M \subset \boldsymbol{N}$ um subconjunto infinito. Denotaremos por $[M]$ o conjunto de todos os subconjuntos infinitos de M, $[M]_F$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de M e $[M]_k = \{(m_1, m_2, \ldots, m_k) : m_i \in M \text{ para } 1 \leq i \leq k \text{ e } m_1 < m_2 < \ldots < m_k\}$. Sempre escreveremos $M = \{m_i\} \in [\boldsymbol{N}]$, quando $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$.

O clássico Teorema de Ramsey diz o seguinte (ver ref. [38]):

Teorema 10.1 (Ramsey) *Seja $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]_2$. Então, existe $M \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[M]_2 \subset \mathcal{A}$ ou $[M]_2 \subset [\boldsymbol{N}]_2 \setminus \mathcal{A}$.*

Prova: Seja $m_1 \in \boldsymbol{N}$ qualquer. Escolhemos $M_1 \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $(m_1, m) \in \mathcal{A}$, para todo $m \in M_1$, ou $(m_1, m) \notin \mathcal{A}$, para todo $m \in M_1$.

De fato existe tal conjunto, pois, colocando $\mathcal{A} = \{(k_1, \ell_1), (k_2, \ell_2), \ldots \text{ com } k_i < \ell_i, i \in \boldsymbol{N}\}$, se $m_1 = k_j$, para infinitos j, então, podemos tomar os ℓ_j correspondentes para formar o subconjunto infinito M_1, tal que para cada $m \in M_1$, $(m_1, m) \in \mathcal{A}$. Da mesma forma, se $m_1 = k_j$, para apenas um número finito de j, então, o conjunto M_1, dos ℓ_j correspondentes aos demais k_j, será um conjunto infinito, tal que, para todo $m \in M_1$, $(m_1, m) \notin \mathcal{A}$. Dizemos que (m_1, M_1) é bom, no primeiro caso, e ruim, no segundo.

Seja $m_2 \in M_1$, $m_2 > m_1$. Aplicando o raciocínio anterior a $\mathcal{A} \cap [M_1]_2$, vemos que existe $M_2 \in [M_1]$, tal que, (m_2, M_2) é bom ou ruim. Continuando o processo, se $I \in [\boldsymbol{N}]$ é tal que $(m_i, M_i)_{i\in I}$ são todos bons ou todos ruins, tomemos $M = \{m_{i,i\in I}\}$. Então, pela própria construção de M, $[M]_2 \subset \mathcal{A}$, se $(m_i, M_i)_{i\in I}$ forem bons e $[M]_2 \subset [\boldsymbol{N}]_2 \setminus \mathcal{A}$, se $(m_i, M_i)_{i\in I}$ forem ruins. ∎

Um argumento similar mostra que:

Teorema 10.2 *Dado $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]_k$, existe $M \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[M]_k \subset \mathcal{A}$ ou $[M]_k \subset [\boldsymbol{N}]_k \setminus \mathcal{A}$.*

11 Famílias de Ramsey

Definição 11.1 *Uma família $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]$ é dita Ramsey, se, para todo subconjunto $L \in [\boldsymbol{N}]$, existe $M \in [L]$, tal que $[M] \subset \mathcal{A}$ ou $[M] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$.*

É claro que $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]$ é Ramsey, se, e só se, $[\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$ é Ramsey.

Contra-exemplo 11.2 O axioma da escolha garante que o conjunto $[\boldsymbol{N}]$ pode ser bem ordenado. Denotemos por $<$ tal ordem e consideremos a família de conjuntos $\mathcal{A} = \{M \in [\boldsymbol{N}] : M > M'$, para algum $M' \in [M]\}$.

Provaremos que $\mathcal{A}$ não é Ramsey. Mais precisamente, não existe $M \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[M] \subset \mathcal{A}$ ou $[M] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$. Seja $M \in [\boldsymbol{N}]$ e seja M_0 o primeiro elemento de $[M]$. Então, $M_0 < L$, para todo $L \in [M]$ e, claramente, $M_0 \notin \mathcal{A}$. Isto mostra que $[M] \not\subset \mathcal{A}$. Falta provar que $[M] \not\subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$. Com efeito, coloquemos $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$. Para $i \in \boldsymbol{N}$, consideremos o conjunto $M_i = \{m_2, m_4, \ldots, m_{2i}, m_1, m_3, m_5, \ldots\}$. É claro que $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M$. Além disso, cada M_i está em $[M]$. Agora, seja $M_{i_0} = \min_{i\in \boldsymbol{N}} M_i$. Então, $M_{i_0} < M_{i_0+1}$, $M_{i_0} \subset M_{i_0+1}$ e $M_{i_0+1} \in \mathcal{A}$. Portanto, $[M] \not\subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$.

12 Topologias na Coleção de Subconjuntos Infinitos de $\boldsymbol{N}$

Definição 12.1 *Dados $X, Y \subset \boldsymbol{N}$, escreveremos $X < Y$, se $x < y$, para cada $x \in X$ e $y \in Y$. Dados $A \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $M \in [\boldsymbol{N}]$, seja $[A, M] = \{L \in [\boldsymbol{N}], A \subset L \subset A \cup M, A < L \setminus A\}$.*

Observemos que $[\emptyset, M] = \{L \in [\boldsymbol{N}];\ \emptyset \subset L \subset \emptyset \cup M,\ \emptyset < L \setminus \emptyset\} = \{L \in [\boldsymbol{N}]; L \subset M\} = [M]$, para todo $M \in [\boldsymbol{N}]\}$.

Proposição 12.2 *Os conjuntos da forma $[A, M]$, onde $A \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $M \in [\boldsymbol{N}]$, formam uma base para uma topologia sobre $[\boldsymbol{N}]$. Denotaremos tal topologia por τ.*

Prova: Desde que $[\boldsymbol{N}] = [\emptyset, \boldsymbol{N}]$, então, $[\boldsymbol{N}] = \bigcup\{[A, M]; A \in [\boldsymbol{N}]_F \text{ e } M \in [\boldsymbol{N}]\}$.

Além disso, se $N \in [A_1, M_1] \cap [A_2, M_2]$, então $N \in [A_1 \cup A_2, N]$. Como

$$A_1 \subset N \subset A_1 \cup M_1,$$

$$A_2 \subset N \subset A_2 \cup M_2,$$

então, para $L \in [A_1 \cup A_2, N]$, temos que

$$A_1 \subset L \subset A_1 \cup A_2 \cup N = N \subset A_1 \cup M_1,$$

$$A_2 \subset L \subset A_1 \cup A_2 \cup N = N \subset A_2 \cup M_2,$$

e $A_1 < L \setminus A_1$, $A_2 < L \setminus A_2$, já que $L \subset N$ e $A_1 < N \setminus A_1$, $A_2 < N \setminus A_2$. Portanto,

$$L \in [A_1, M_1] \cap [A_2, M_2]. \blacksquare$$

Identificando cada conjunto $M \in [\boldsymbol{N}]$ com sua função característica $\chi_M : \boldsymbol{N} \to \{0, 1\}$, podemos pensar que $[\boldsymbol{N}]$ é um subconjunto do produto $\{0, 1\}^{\boldsymbol{N}}$. Denotaremos por $\tilde{\tau}$ a topologia induzida em $[\boldsymbol{N}]$ pela topologia produto.

Proposição 12.3 *A função $M \in [\boldsymbol{N}] \xrightarrow{\psi} \chi_M \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N}}$ é contínua.*

Prova: Seja $M = \{m_i\} \in [\boldsymbol{N}]$. Uma base de vizinhanças abertas de M em $\{0, 1\}^{\boldsymbol{N}}$ é um conjunto da forma $\mathcal{U}_k = \{\{\theta_n\} \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N}} : \theta_n = 1$, quando $1 \leq n \leq k$ e $n = m_j$ para algum $j\}$. Se colocarmos, $A = \{m_j; m_j \leq k\}$, então, como $[A, \boldsymbol{N}] = \psi^{-1}(\mathcal{U}_k)$, temos ψ contínua no ponto M. $\blacksquare$

Corolário 12.4 $\tilde{\tau} \leq \tau$.

13 Teorema de Nash-Williams

Definição 13.1 *Consideremos uma família $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]$. Sejam $A \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $L \in [\boldsymbol{N}]$. Dizemos que L aceita A, se $[A, L] \subset \mathcal{A}$, e L rejeita A, se nenhum $M \in [L]$ aceita A, ou seja, se $[A, M] \not\subset \mathcal{A}$ para todo $M \in [L]$.*

Lema 13.2 *Sejam $A \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $M \in [\boldsymbol{N}]$.*

1. *Suponhamos que M aceita A. Então, cada $N \in [M]$ também aceita A.*
2. *Suponhamos que M rejeita A. Então, cada $N \in [M]$ também rejeita A.*

Prova:

1. Como M aceita A, então $[A, M] \subset \mathcal{A}$. Por outro lado, $N \in [M]$ implica que $N \subset M$. Portanto, $[A, N] \subset [A, M] \subset \mathcal{A}$. ∎

2. Suponhamos que algum $N \in [M]$ não rejeita A. Deste modo, por definição, existe $P \in [N]$ que aceita A. Desde que $P \in [N] \subset [M]$, então, existe um conjunto em $[M]$, que aceita A, o que é uma contradição, pois M rejeita A. ∎

Proposição 13.3 *Dado $L \in [\mathbb{N}]$, existe $M \in [L]$, tal que M aceita cada um de seus subconjuntos finitos ou rejeita cada um de seus subconjuntos finitos.*

Prova:

Caso 1: Existe $M \in [L]$, que aceita o conjunto $\emptyset$. Então, $[M] = [\emptyset, M] \subset \mathcal{A}$. Portanto, para todo $A \in [M]_F$, temos

$$\begin{aligned}[A, M] &= \{L \in [\mathbb{N}];\ A \subset L \subset A \cup M,\ \ A < L \setminus A\} \\ &= \{L \in [\mathbb{N}];\ A \subset L \subset M,\ \ A < L \setminus A\} \subset [M] \subset \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Segue que M aceita todos os seus subconjuntos finitos.

Caso 2: Suponhamos que nenhum $M \in [L]$ aceita o vazio, ou seja, L rejeita o conjunto $\emptyset$.

Para provar o que desejamos, deveremos mostrar, primeiramente, dois lemas importantes:

Lema 13.4 *Existem $M_1 \in [L]$ e $m_1 \in M_1$, tais que M_1 rejeita $\{m_1\}$.*

Prova: Suponhamos falso o lema e sejam $N_1 \in [L]$ e $n_1 \in N_1$. Como N_1 não rejeita $\{n_1\}$, existe $N_2 \in [N_1]$ que aceita $\{n_1\}$. Seja $n_2 \in N_2$, com $n_2 > n_1$. Então, existe $N_3 \in [N_2]$ que aceita $\{n_2\}$. Se continuamos o processo, obtemos $L \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$ e $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$, tais que $n_j \in N_j$ e $[\{n_j\},\ N_{j+1}] \subset \mathcal{A}$, para $j \geq 1$. Tomando $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$, então, $[N] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}[\{n_j\},\ N_{j+1}] \subset \mathcal{A}$. Deste modo, N aceita o conjunto $\emptyset$, uma contradição. ∎

Lema 13.5 *Existem $M_2 \in [M_1]$ e $m_2 \in M_2$, tais que M_2 rejeita todo $A \subset \{m_1, m_2\}$.*

Prova: Suponhamos falso o lema e sejam $N_2 \in [M_1]$ e $n_2 \in N_2$, $n_2 > m_1$. Desde que N_2 não rejeita algum $A_2 \subset \{m_1, m_2\}$, existe $N_3 \in [N_2]$, que aceita A_2. Seja $n_3 \in N_3$, $n_3 > n_2$. Então, existe $N_4 \in [N_3]$, que aceita algum $A_3 \subset \{m_1, n_3\}$. Se continuamos o processo, obtemos $M_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$, $m_1 < n_2 < n_3 \ldots$ e $A_j \subset \{m_1, n_j\}$, $(j \geq 2)$, tais que $n_j \in N_j$ e $[A_j, N_{j+1}] \subset \mathcal{A}$, para $j \geq 2$. Como $N_{j+1} \subset M_1$ e M_1 rejeita $\emptyset$ e $\{m_1\}$, então, $n_j \in A_j$, para todo $j \geq 2$. Segue que $A_j = B_j \cup \{n_j\}$, com $B_j \subset \{m_1\}$, para todo $j \geq 2$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que $B_j = B$, para todo $j \geq 2$.

Segue que $[B \cup \{n_j\},\ N_{j+1}] \subset \mathcal{A}$, para todo $j \geq 2$. Se pomos $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$, então, é fácil verificar que

$$[B, N] \subset \bigcup_{j=2}^{\infty} [B \cup \{n_j\},\ N_{j+1}] \subset \mathcal{A}.$$

Deste modo N aceita B, o que é uma contradição, já que $N \subset M_1$ e M_1 rejeita $\emptyset$ e $\{m_1\}$. ∎

Se continuamos este processo, obtemos $L \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ e $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, tais que $m_j \in M_j$ e M_j rejeita todo $A \subset \{m_1, \ldots, m_j\}$.

Seja $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$. Provaremos que M rejeita todos os seus subconjuntos finitos. Suponhamos que isso seja falso. Então, existem $A \subset \{m_1, \ldots, m_j\}$ e $N \in [M]$ tais que $[A, N] \subset \mathcal{A}$. Logo, $[A, N \cap M_j] \subset [A, N] \subset \mathcal{A}$ e $N \cap M_j$ aceita A, o que é uma contradição, já que todo subconjunto de M_j rejeita todo $A \subset \{m_1, \ldots, m_j\}$. ∎

Depois de alguns resultados obtidos por Nash-Williams em [33] e outros, Galvin e Prikry [17] provaram que todo conjunto τ-Borel é Ramsey. J. Silver [45] mostrou, com um argumento meta-matemático, que todo conjunto τ-analítico é Ramsey. Mathias [31] deu uma outra prova disto e Ellentuck [12] deduziu este resultado em um artigo de três páginas, usando somente noções clássicas e alguns lemas de [17].

Neste trabalho apresentaremos o seguinte resultado devido a Nash-Williams, que é de grande importância na prova do teorema ℓ_1 de Rosenthal.

Teorema 13.6 *Os conjuntos τ-abertos em $[\mathbb{N}]$ formam uma família de Ramsey. Conseqüentemente, os conjuntos τ-fechados formam uma família de Ramsey.*

Prova: Seja $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]$ um conjunto τ-aberto e seja $L \in [\mathbb{N}]$. Pela proposição anterior, existe $M \in [L]$, tal que M aceita todos os seus subconjuntos finitos ou M rejeita todos os seus subconjuntos finitos. No primeiro caso, M aceita o conjunto $\emptyset$. Assim, $[M] = [\emptyset, M] \subset \mathcal{A}$.

No segundo caso, vamos mostrar que $[M] \subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}$. Suponhamos que $[M] \not\subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}$. Então existe $N \in [M] \cap \mathcal{A}$. Pela proposição 12.2, podemos encontrar $A \in [\mathbb{N}]_F$, tal que $N \in [A, \mathbb{N}] \subset \mathcal{A}$. Logo, $[A, N] \subset [A, \mathbb{N}] \subset \mathcal{A}$ e N aceita A. Mas $N \subset M$ e M rejeita todos os seus subconjuntos finitos, temos uma contradição. Conseqüentemente $[M] \subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}$. ∎

Definição 13.7 *$\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]$ é completamente Ramsey se, para cada $A \in [\mathbb{N}]_F$ e cada $L \in [\mathbb{N}]$, existir $M \in [L]$, tal que $[A, M] \subset \mathcal{A}$ ou $[A, M] \subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}$.*

Teorema 13.8 (Nash-Williams) *Os conjuntos τ-abertos de $[\mathbb{N}]$ formam uma família completamente Ramsey. Conseqüentemente, os conjuntos τ-fechados formam uma família completamente Ramsey.*

Prova: Sejam $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]$ um conjunto τ-aberto, $A \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $M \in [\boldsymbol{N}]$.

Tomemos $\beta : \boldsymbol{N} \to M$, uma função bijetiva crescente. β induz uma função contínua f de $[\boldsymbol{N}]$ em $[\boldsymbol{N}]$, por: $f(L) = \beta(L)$, para todo $L \in [\boldsymbol{N}]$.

Mostraremos que f é τ-contínua. Sejam $L \in [\boldsymbol{N}]$, $A_2 \in [\boldsymbol{N}]_F$ e $M_2 \in [\boldsymbol{N}]$ tais que $f(L) \subset [A_2, M_2]$. Escolhendo $A_1 = \beta^{-1}(A_2)$, $M_1 = \beta^{-1}(M_2)$, obtemos que

$$L \in [A_1, M_1] \subset f^{-1}([A_2, M_2]).$$

Definimos $g : [\boldsymbol{N}] \to [\boldsymbol{N}]$ por $g(L) = L \cup A$. A função g é contínua, pois, se $L \in [\boldsymbol{N}]$, $A_2 \in [\boldsymbol{N}]_F$, $M_2 \in [\boldsymbol{N}]$ são tais que $g(L) \in [A_2, M_2]$, então, definindo $A_1 = A_2 \setminus (A \setminus L)$, $M_1 = M_2$, obtemos $L \in [A_1, M_1] \subset g^{-1}([A_2, M_2])$.

Desde que $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{A})$ é τ-aberto, então, pelo teorema 13.6, ele é Ramsey. Assim, existe $X \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[X] \subset (g \circ f)^{-1}(\mathcal{A})$ ou $[X] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus (g \circ f)^{-1}(\mathcal{A})$. Pondo $Y = f(X) \in [M]$, temos $[Y] \subset g^{-1}(\mathcal{A})$ ou $[Y] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus g^{-1}(\mathcal{A})$.

Observemos que $[A, Y] \subset \{A \cup M;\ M \in [\boldsymbol{N}],\ M \subset Y\} \subset g([Y])$. Logo

$$[A, Y] \subset g([Y]) \subset \mathcal{A}$$

ou

$$\begin{aligned}
[A, Y] \subset g([\boldsymbol{N}] \setminus g^{-1}(\mathcal{A})) &= \{A \cup L;\ L \in [\boldsymbol{N}] \setminus g^{-1}(\mathcal{A})\} \\
&= \{A \cup L;\ L \in [\boldsymbol{N}],\ A \cup L \notin \mathcal{A}\} \\
&\subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova. ∎

Para finalizar, demonstraremos o caso geral do Teorema de Ramsey de forma diferente da que foi sugerida na Seção 10.

Teorema 13.9 (de Ramsey) *Dado $\mathcal{A} \subset [\boldsymbol{N}]_k$ existe $M \in [\boldsymbol{N}]$ tal que $[M]_k \subset \mathcal{A}$ ou $[M]_k \subset [\boldsymbol{N}]_k \setminus \mathcal{A}$.*

Prova: Seja $f_k : [\boldsymbol{N}] \to [\boldsymbol{N}]_k$, a função restrição $f(\{n_1, n_2, \ldots\}) = \{n_1, \ldots, n_k\}$, onde $n_1 < n_2 < \ldots$.

Notemos que, se $A \in [\boldsymbol{N}]_k$ e $L \in [\boldsymbol{N}]$, então, $f_k(X) = A$, para todo $X \in [A, L]$.

Tomando $\mathcal{M} = \bigcup\{[A, L] : A \in \mathcal{A},\ L \in [\boldsymbol{N}]\}$, então, $\mathcal{M}$ é τ-aberto e, portanto, Ramsey. Deste modo, existe $M \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[M] \subset \mathcal{M}$ ou $[M] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{M}$. Aplicando a função f_k, temos $[M]_k \subset \mathcal{A}$ ou $[M]_k \subset [\boldsymbol{N}]_k \setminus \mathcal{A}$. ∎

$\infty \quad \infty \quad \infty$

Capítulo V

Aplicações dos Teoremas de Ramsey à Teoria dos Espaços de Banach

Um resultado importantíssimo de Eberlein-Šmulian diz o seguinte: de uma seqüência limitada em X podemos extrair uma subseqüência fracamente convergente, se, e somente se, X é um espaço de Banach reflexivo. Exigindo menos, ou seja, se de uma seqüência limitada em X pudermos extrair uma subseqüência fracamente Cauchy ($\{x_n\}$ é fracamente Cauchy, se, para cada $x^* \in X^*$, a seqüência de escalares $x^*(x_n)$ é convergente), o que podemos afirmar a cerca do espaço de Banach X? A condição suficiente (reflexividade) está garantida pelo teorema de Eberlein-Šmulian. No entanto, se X é um espaço de Banach separável (reflexivo ou não), com X^* também separável, então, cada seqüência limitada em X tem subseqüências fracamente Cauchy.

Neste capítulo, o teorema ℓ_1 de Haskell P. Rosenthal, que será demonstrado utilizando-se dos teoremas de Ramsey e suas generalizações, serve de contra-exemplo para a condição necessária no teorema de Eberlein-Šmulian.

Começaremos aplicando os teoremas de Ramsey para encontrar espaços de Banach contendo c_0.

14 Espaços de Banach contendo c_0

Teorema 14.1 *Seja $\{e_n\}$ uma seqüência básica normalizada em um espaço de Banach X. Então, $\{e_n\}$ satisfaz uma das seguintes alternativas, que se excluem mutuamente:*

1. *Existe uma subseqüência básica $\{f_n\}$ da seqüência $\{e_n\}$, que é equivalente à base de Schauder canônica de c_0.*

2. *Existe uma subseqüência $\{g_n\}$ da seqüência $\{e_n\}$, tal que $\sup_p \|\sum_{j=1}^{p} g_{n_j}\| = \infty$, para toda seqüência estritamente crescente $\{n_j\}$ em $\boldsymbol{N}$.*

Prova: Para $0 < c < \infty$, seja $\mathcal{A}_c = \{N = \{n_j\} \in [\boldsymbol{N}];\ \sup_p \| \sum_{j=1}^p e_{n_j} \| \leq 2c\}$. É importante notar que, eventualmente, a coleção $\mathcal{A}_c$ pode ser vazia.

Afirmamos que a coleção $\mathcal{A}_c$ é τ - fechada em $[\boldsymbol{N}]$.

De fato: seja $N = \{n_j\} \in \overline{\mathcal{A}_c}$ e consideremos a vizinhança de $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, dada por $\mathcal{U}_p = [A_p, \boldsymbol{N}]$, onde $A_p = \{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p\}$. É claro que $A_p \subset \{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset A_p \cup \boldsymbol{N}$. Se $M = \{m_j\} \in \mathcal{A}_c \cap [A_q, \boldsymbol{N}]$, então,

$$\sup_p \| \sum_{j=1}^p e_{m_j} \| \leq 2c \quad \text{e}$$

$$\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_q\} \subset M \subset A_q \cup \boldsymbol{N}.$$

Conseqüentemente, para $j \leq q$, temos

$$n_j = m_j \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^q e_{n_j} \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^q e_{m_j} \right\| \\ &\leq \sup_m \left\| \sum_{j=1}^m e_{m_j} \right\| \leq 2c, \end{aligned}$$

para todo q. Logo, $\sup_q \| \sum_{j=1}^q e_{n_j} \| \leq 2c$ e $N = \{n_j\} \in \mathcal{A}_c$. Segue que $\mathcal{A}_c$ é τ-fechada e é Ramsey, para todo c.

Deste modo, existe $N_1 \in [\boldsymbol{N}]$, tal que $[N_1] \subset \mathcal{A}_1$ ou $[N_1] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}_1$.

Também podemos encontrar $N_2 \in [N_1]$, tal que $N_2 \subset \mathcal{A}_2$ ou $N_2 \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}_2$. Procedendo de forma indutiva, escolhemos $\boldsymbol{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$ tais que $[N_j] \subset \mathcal{A}_j$ ou $[N_j] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}_j$, para cada $j \in \boldsymbol{N}$.

Primeiramente, assumimos que $[N_j] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}_j$, para cada $j \in \boldsymbol{N}$. Seja $N_j = \{n_{jk}\}$, para todo j, e seja $N = \{n_{kk}\}$ a seqüência diagonal. Como $N_j \supset N_{j+1} \supset N_{j+2} \supset \ldots$, então, $N \setminus \{\{n_{kk}\};\ k < j\} \in [N_j] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}_j$, para todo j. Além disso, para cada j, vai existir $p_j > j$, tal que $\| \sum_{k=j}^{p_j} e_{n_{kk}} \| > 2j$. Portanto,

$$\begin{aligned} \| \sum_{k=1}^{p_j} e_{n_{kk}} \| &= \left\| \sum_{k=j}^{p_j} e_{n_{kk}} + \sum_{k=1}^{j-1} e_{n_{kk}} \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{k=j}^{p_j} e_{n_{kk}} - \sum_{k=1}^{j-1} e_{n_{kk}} \right\| \\ &> 2j - (j-1) = j+1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{p} e_{n_{kk}} \right\| = \infty.$$

Fazendo $g_k = e_{n_{kk}}$, para cada k, então, está demonstrado que $\sup_p \|\sum_{k=1}^{p} g_k\| = \infty$. O mesmo argumento mostra que $\sup_p \|\sum_{\ell=1}^{p} g_{k_\ell}\| = \infty$, para cada seqüência estritamente crescente $\{k_\ell\}$ em $\boldsymbol{N}$.

Por outro lado, se assumirmos que $[N_j] \subset \mathcal{A}_j$, para algum $j \in \boldsymbol{N}$, provaremos que a seqüência $\{e_{n_{jk}}\}$ é equivalente à base de Schauder canônica de c_0.

Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \boldsymbol{R}$, escolhemos $\varphi_\lambda \in X^*$, $\|\varphi_\lambda\| = 1$, satisfazendo

$$\varphi_\lambda\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{n_{jk}}\right) = \left\|\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{n_{jk}}\right\|.$$

Colocando $A = \{k;\ k \leq p,\ \varphi(e_{n_{jk}}) \geq 0\}$ e $B = \{k;\ k \leq p,\ \varphi(e_{n_{jk}}) < 0\}$, então,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{n_{jk}}\right\| &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_\lambda(e_{n_{jk}}) \\
&= \sum_{k\in A} \lambda_k \varphi_\lambda(e_{n_{jk}}) + \sum_{k\in B} \lambda_k \varphi_\lambda(e_{n_{jk}}) \\
&\leq \max_{k\in \boldsymbol{N}} |\lambda_k| \left(\left|\sum_{k\in A} \varphi_\lambda(e_{n_{jk}})\right| + \left|\sum_{k\in B} \varphi_\lambda(e_{n_{jk}})\right|\right) \\
&\leq \max_{k\in \boldsymbol{N}} |\lambda_k| \left(\left|\varphi_\lambda\left(\sum_{k\in A} e_{n_{jk}}\right)\right| + \left|\varphi_\lambda\left(\sum_{k\in B} e_{n_{jk}}\right)\right|\right) \\
&\leq \max_{k\in \boldsymbol{N}} |\lambda_k| \|\varphi_\lambda\| \left(\left\|\sum_{k\in A} e_{n_{jk}}\right\| + \left\|\sum_{k\in B} e_{n_{jk}}\right\|\right) \\
&= 4j \max_{k\in \boldsymbol{N}} |\lambda_k|
\end{aligned}$$

Deste modo, se $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge, então, $\{\lambda_n\}$ e c_0, isto é, $\lambda_n \to 0$. Assim,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n_{jk}}\right\| \leq 4j \max_{k\in \boldsymbol{N}} |\lambda_k| < \infty.$$

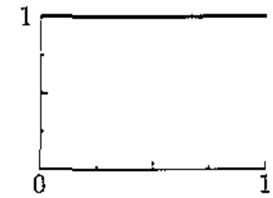
Reciprocamente, se $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n_{jk}}$ converge, então, $\lambda_n \to 0$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge. Assim, $\{e_{n_{jk}}\}$ é uma seqüência equivalente à base de Schauder canônica de c_0. ∎

15 Sistemas Independentes

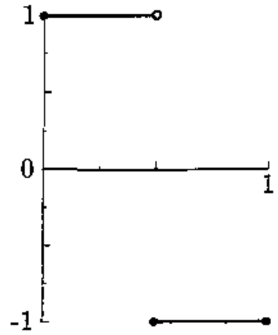
Definição 15.1 *Uma seqüência de subconjuntos (A_n, B_n) de um conjunto fixo S, com $A_n \cap B_n = \emptyset$ para cada $n \in \boldsymbol{N}$, é chamada um sistema independente, se, para cada n-upla $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, com $\varepsilon_j = \pm 1$, para todo $j = 1, \ldots, n$, tivermos $\bigcap_{j=1}^{n} \varepsilon_j A_j \neq \emptyset$, onde $\varepsilon_j A_j = A_j$, se $\varepsilon_j = +1$ e $\varepsilon_j A_j = B_j$, se $\varepsilon_j = -1$.*

Exemplo 15.2 Um sistema independente (A_n, B_n) em $[0,1]$ é dado por $A_n = \{t;\ r_n(t) = 1\}$ e $B_n = \{t;\ r_n(t) = -1\}$, onde $\{r_n\}$ são as funções de Rademacher. A primeira função é dada por, $r_1(t) = 1$, para todo $t \in [0,1]$. A segunda, r_2, é 1, sobre o intervalo $[0, 1/2)$, e -1, sobre $[1/2, 1]$; r_3 é 1, sobre $[0, 1/4)$ e $[1/2, 3/4)$, mas é -1, sobre $[1/4, 1/2)$ e $[3/4, 1]$, etc.

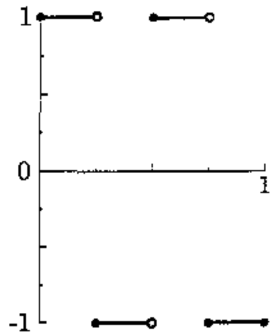
Mais explicitamente:



$$x_1(t) = 1, \text{ para } t \in [0,1]$$



$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad t \in [0, 1/2) \\ -1, & \text{para} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



$$x_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad t \in [0, 1/4) \cup [1/2, 3/4] \\ -1, & \text{para} \quad t \in [1/4, 1/2) \cup [3/4, 1] \end{cases}$$

A seqüência de funções $\{r_n\}$ é uma seqüência básica em $L_p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$, equivalente à base canônica de ℓ_1.

Proposição 15.3 *Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Se existem $b > a > 0$, tais que*

$$a \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq b \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|,$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ e $n \in \boldsymbol{N}$, então, $\{x_n\}$ é uma seqüência básica em X equivalente à *base canônica de ℓ_1.*

Prova: Seja $T : \ell_1 \to X$, definido por

$$T : \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \to \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \in X.$$

Da desigualdade da direita, segue que T está bem definido e é contínuo. Da desigualdade da esquerda, segue que T é um isomorfismo entre ℓ_1 e $\overline{[x_n]}$. Além disso, $Te_n = x_n$, para cada n. Logo, T é uma base de $\overline{[x_n]}$ equivalente a $\{e_n\}$. ∎

Proposição 15.4 *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência uniformemente limitada de funções reais sobre um conjunto S. Sejam $r \in \boldsymbol{R}$ e $\delta > 0$, $A_n = \{s \in S;\ f_n(s) > r + \delta\}$ e $B_n = \{s \in S;\ f_n(s) < r\}$. Se (A_n, B_n) é um sistema independente, então, $\{f_n\}$ é uma seqüência básica em $\ell_\infty(S)$, que é equivalente à base canônica de ℓ_1.*

Prova: Se $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ converge, então, $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$ e

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|f_j\| \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty.\end{aligned}$$

Pela proposição anterior, é suficiente provar que $\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\| \geq (\delta/2) \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$, para $\forall n$.

Sejam $F = \{j \in \boldsymbol{N};\ \lambda_j \geq 0\}$ e $G = \{j \in \boldsymbol{N};\ \lambda_j < 0\}$.

Como o sistema (A_n, B_n) é independente, podemos tomar

$$s, t \in \left(\bigcap_{n \in F} A_n\right) \bigcap \left(\bigcap_{n \in G} B_n\right).$$

Como s, t estão em cada A_n e em cada B_n, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(s) &= \sum_{j \in F} \lambda_j f_j(s) + \sum_{j \in G} \lambda_j f_j(s) \\ &= \sum_{j \in F} |\lambda_j| f_j(s) - \sum_{j \in G} |\lambda_j| f_j(s) \\ &\geq \sum_{j \in F} |\lambda_j| (r + \delta) + \sum_{j \in G} |\lambda_j| (-r) \\ &= \sum_{j \in F} |\lambda_j| (r + \delta) + \sum_{j \in G} |\lambda_j| r \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t) &= \sum_{j\in G} |\lambda_j| f_j(t) - \sum_{j\in F} |\lambda_j| f_j(t) \\ &\geq \sum_{j\in G} |\lambda_j|(r+\delta) - \sum_{j\in F} |\lambda_j| r. \end{aligned} \tag{II}$$

Adicionando (I) e (II), temos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j(s) - f_j(t)) \geq \delta \sum_{j\in F} |\lambda_j| + \delta \sum_{j\in G} |\lambda_j| = \delta \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(s)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t)\right| &\geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(s) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t) \\ &\geq \delta \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\max\left(\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(s)\right|, \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t)\right|\right) \geq \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Deste modo, para todo $n \in \boldsymbol{N}$,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\right\| &= \sup_{u\in S} \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(u)\right| \\ &\geq \max\left(\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(s)\right|, \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t)\right|\right) \\ &\geq \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|. \ \blacksquare \end{aligned}$$

16 Teorema de Rosenthal sobre Espaços de Banach contendo ℓ_1

Um dos mais bonitos teoremas na teoria dos espaços de Banach é devido a H.P. Rosenthal [39] (veja L. Dor [10], para o caso complexo). A prova original de Rosenthal não utiliza o teorema de Ramsey, mas Farahat [16] mostrou que o teorema de Ramsey pode ser aplicado num ponto chave do argumento. Na verdade, a demonstração feita por Rosenthal contém muito dos elementos necessários para se obter o teorema de Ramsey.

Teorema 16.1 (**ℓ_1 de Rosenthal**) *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência limitada em um espaço de Banach X. Então, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$, que satisfaz uma das duas seguintes alternativas, que se excluem mutuamente:*

1. $\{x_{n_k}\}$ é uma seqüência básica equivalente à base de Schauder canônica de ℓ_1.

2. $\{x_{n_k}\}$ é uma seqüência fracamente Cauchy.

Prova: A idéia da prova deste teorema está em mostrar que, se $\{x_n\}$ não tem uma subseqüência fracamente Cauchy, então, ela contém uma subseqüência, cujos termos são parecidos com as funções de Rademacher sobre um determinado conjunto. Mais precisamente, ela contém uma subseqüência, que satisfaz a hipótese da proposição 15.4.

Suponhamos que $\{x_n\}$ é uma seqüência limitada em um espaço de Banach X e que $\{x_n\}$ não tem subseqüência fracamente Cauchy.

Considerando o mergulho canônico J, temos $x \in X \mapsto J_x \in X^{**} \subset \ell_\infty(B_{X^*}, \boldsymbol{R})$. Deste modo, um elemento $x \in X$ pode ser visto como um elemento de $\ell_\infty(B_{X^*}, \boldsymbol{R})$. Neste caso, $\{x_n\}$ não ter seqüência fracamente Cauchy equivale a dizer que J_{x_n} não tem subseqüência pontualmente convergente, pois, $x^*(x_n)$ converge, para cada $x^* \in X^*$, se, e só se, $J_{x_n}(x^*)(= x^*(x_n))$ converge, para cada $x^* \in X^*$.

Para simplificar a notação, trabalharemos com a seqüência $\{x_n\}$ em lugar da seqüência $\{J_{x_n}\}$, mediante aquela identificação.

Provaremos que $\{x_n\}$ tem uma subseqüência básica equivalente à base de vetores unitários de ℓ_1.

De fato:

Seja $\mathcal{I}$ a coleção enumerável de todos os pares (C_j, D_j) de bolas abertas de $\boldsymbol{R}$ (ou seja, intervalos), cujos centros e raios são racionais e satisfazem diam $C_j =$ diam $D_j \leq (1/2)\mathrm{d}\,(C_j, D_j)$. Aqui diam C_j é o diâmetro do intervalo C_j e $\mathrm{d}(C_j, D_j)$ é a distância entre C_j e D_j. Fazendo $C_j = (r_j - \delta_j, r_j + \delta_j)$ e $D_j = (s_j - \delta_j, s_j + \delta_j)$, com $r_j, s_j \in \boldsymbol{Q}$, $r_j < s_j$, se $6\delta_j < s_j - r_j$, é fácil verificar que diam $C_j =$ diam $D_j \leq (1/2)\mathrm{d}(C_j, D_j)$.

Lema 16.2 *Existem $k \in \boldsymbol{N}$ e $L \in [\boldsymbol{N}]$, tais que, para cada $M \in [L]$, existe x_M^* em B_{X^*}, para o qual $\{x_m(x_M^*)\}_{m\in M}$ tem pontos de acumulação em ambos C_k e D_k.*

Prova: Suponhamos falso o lema, ou seja, para cada $k \in \boldsymbol{N}$ e cada $L \in [\boldsymbol{N}]$, existirá um conjunto $M \in [L]$, tal que, para todo $x^* \in B_{X^*}$, a seqüência $\{x_m(x^*)\}_{m\in M}$ não tem pontos de acumulação em cada C_k e D_k. Em particular, existe um conjunto $M_1 \in [\boldsymbol{N}]$, tal que para cada x^* em B_{X^*}, a seqüência $\{x_m(x^*)\}_{m\in M_1}$ não tem pontos de acumulação em C_1 e D_1. Da mesma forma, existe $M_2 \in [M_1]$, tal que, para cada $x^* \in B_{X^*}$, a seqüência $\{x_m(x^*)\}_{m\in M_2}$ não tem pontos de acumulação em C_2 e D_2.

Por indução, encontramos uma seqüência $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ de subconjuntos $M_{j+1} \in [M_j]$, tal que, dado $n \in \mathbb{N}$, se $x^* \in B_{X^*}$, a seqüência $\{x_m(x^*)\}_{m \in M_n}$ não tem pontos de acumulação em $C_n \in D_n$. Seja $P = \{p_n\} \in [\mathbb{N}]$, tal que $p_n \in M_n$, para cada n. Podemos assumir que $\{p_n\}$ é estritamente crescente. Lembremos que nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ converge pontualmente sobre B_{X^*}. Deste modo, existe $x_0^* \in B_{X^*}$, tal que a seqüência $\{x_{p_n}(x_0^*)\}$ não é convergente. Mas $\{x_{p_n}(x_0^*)\}$ é uma seqüência limitada. Lembremos o resultado: *Dados uma seqüência $\{x_n\} \subset X$ (espaço topológico) e $x \in X$. Se cada subseqüência de $\{x_n\}$ possui uma subseqüência que converge a x, então, $x_n \to x$.* Então, temos que $\{x_{p_n}(x_0^*)\}$ com pelo menos dois pontos de acumulação. Digamos que c e d sã os pontos de acumulação para $\{x_{p_n}(x_0^*)\}$. Podemos supor $c < d$. Escolha $0 < \delta_k < (d-c)/6$ e $r_k, s_k \in \mathbb{Q}$, satisfazendo

$$r_k < c < r_k + \delta_k, \quad s_k - \delta_k < d < s_k.$$

Então, $c \in C_k$, $d \in D_k$ e

$$6\delta_k < \frac{d-c}{6} < \frac{s_k - r_k}{6}.$$

Para cada $j \geq 1$, a seqüência $\{x_{p_n}(x_0^*)\}_{n \geq j}$ tem c e d como pontos de acumulação. Ainda mais, é uma subseqüência de $\{x_m(x_0^*)\}_{m \in M_j}$. Deste modo, para $j = k$, temos que $\{x_{p_n}(x_0^*)\}_{n \geq k}$ tem c e d como pontos de acumulação. Isto implica que $\{x_m(x_0^*)\}_{m \in M_k}$ tem c e d como pontos de acumulação em C_k e D_k, contrariando a definição dos M_j. ∎

Consideraremos $\{x_n\}_{n \in L}$ como sendo $\{x_n\}$, $C_k = C$ e $D_k = D$, para simplificar a notação.

Temos, até este momento, que $\{x_n\}$ é uma seqüência limitada em X, sem uma subseqüência que seja pontualmente convergente sobre B_{X^*}. C e D são intervalos disjuntos de mesmo diâmetro e separados por, pelo menos, duas vezes o diâmetro. Dado um subconjunto $M \in [\mathbb{N}]$, existe um x_M^* em B_{X^*}, tal que $\{x_m(x_M^*)\}_{m \in M}$ tem pontos de acumulação em C e D.

Sejam os conjuntos A_n, B_n definidos por

$$\begin{aligned} A_n &= \{x^* \in B_{X^*};\ x_n(x^*) \in C\}, \\ B_n &= \{x^* \in B_{X^*};\ x_n(x^*) \in D\}. \end{aligned}$$

Lema 16.3 *A seqüência (A_n, B_n) tem subseqüência, que é um sistema independente.*

Prova: De fato: Denotaremos por $-A_j$ o conjunto B_j. Assim, para cada k, seja $\mathcal{A}_k$ a coleção

$$\mathcal{A}_k = \left\{ \{n_j\} \in [\mathbb{N}];\ \bigcap_{j=1}^{k} (-1)^j A_{n_j} \neq \emptyset \right\}.$$

Identificaremos cada subconjunto de $\boldsymbol{N}$ com um ponto em $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ e alegamos que $\cap_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k$ é um subconjunto fechado de $[\boldsymbol{N}]$, com relação à topologia de $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ e, portanto, fechado em $[\boldsymbol{N}]$. De fato, seja $\{n_j^0\} \in \overline{\mathcal{A}_k}$ e consideremos a vizinhança básica $\mathcal{U}$ de $\{n_j\}$, dada por

$$\mathcal{U} = \Big\{\{n_j\} \in [\boldsymbol{N}];\;\; n_j = n_j^0 \text{ para } 1 \leq j \leq k\Big\}.$$

Claramente $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ (basta ver a definição de $\mathcal{A}_k$) e, portanto, existe $\{n_j^1\} \in \mathcal{A}_k$, tal que

$$n_1^0 = n_1^1, n_2^0 = n_2^1, \ldots, n_k^0 = n_k^1.$$

Assim,

$$\bigcap_{j=1}^{k}(-1)^j A_{n_j^0} = \bigcap_{j=1}^{k}(-1)^j A_{n_j^1} \neq \emptyset \text{ e}$$

$$\{n_j^0\} \in \mathcal{A}_k.$$

Fazendo $\mathcal{A} = \cap_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k$, então, também $\mathcal{A}$ é fechado. Pelo teorema 13.6, $\mathcal{A}$ é Ramsey e existe $M \in [\boldsymbol{N}]$, $M = \{m_p\}$, tal que $[M] \subset \mathcal{A}$ ou $[M] \subset [\boldsymbol{N}] \setminus \mathcal{A}$. Sabemos que, dado $M \in [\boldsymbol{N}]$, existe um x_M^* em B_{X^*}, tal que $\{x_m(x_M^*)\}_{m\in M}$ tem pontos de acumulação em ambos C e D. Assim, existe um subconjunto $N \in [M]$, $N = \{m_{p_q}\}$, tal que, se q é ímpar, $x_{m_{p_q}}(x_M^*) \in C$, ao passo que, se q é par, então, $x_{m_{p_q}}(x_M^*) \in D$. Ou ainda, para q ímpar, $x_M^* \in A_{m_{p_q}}$ e, para q par, $x_M^* \in B_{m_{p_q}}$. Logo, para todo q,

$$x_M^* \in (-1)^q A_{m_{p_q}},$$

o que mostra $\{m_{p_q}\} \in \mathcal{A}$, e descartamos a possibilidade de que $[M] \subset \boldsymbol{N} \setminus \mathcal{A}$. Segue que $[M] \subset \mathcal{A}$. Podemos dizer que $\{m_p\}$ é uma seqüência estritamente crescente de números naturais, tal que uma subseqüência $\{m'_p\}$ de $\{m_p\}$ satisfaz

$$\bigcap_{p=1}^{k}(-1)^p A_{m'_p} \neq \emptyset \text{ para todo } k \in \boldsymbol{N}$$

Lembrando que $-A_j = B_j$, temos na verdade que, para qualquer subseqüência $\{m'_p\} \in [M]$, se interceptamos $B_{m'_1}$ com $A_{m'_2}$ com $B_{m'_3}$ com $\ldots$ (um número finito deles), então, o conjunto resultante é não vazio. Tomemos $O \in [M]$, tal que $O = \{m_{2p}\}$. Dado qualquer subseqüência $\{m'_{2p}\} \in [O]$, a intersecção de um número finito de A e B indexados por $\{m'_{2p}\}$ é do tipo $A_{m'_{2p}} \cap A_{m'_{2(p+1)}}$. Essa intersecção contém $A_{m'_{2p}} \cap B_{m_k} \cap A_{m'2(p+1)}$, onde k é um natural qualquer, tal que $m'_{2p} < m_k < m'_{2(p+1)}$. De forma análoga, se prova que se dois $B_{m'_{2p}}$ ocorrem um após o outro, digamos $B_{m_j} \cap B_{m_l}$, então, essa intersecção contém $B_{m_j} \cap A_{m_k} \cap B_{m_l}$, onde $j < k < l$. Portanto, a seqüência $(A_{m_{2p}}, B_{m_{2p}})$ é uma seqüência independente de subconjuntos disjuntos de B_{X^*}. ∎

Pelo lema 16.3, (A_n, B_n) tem uma subseqüência que é um sistema independente e, pela proposição 15.4, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência básica equivalente à base canônica de ℓ_1. ∎

Outras aplicações do teorema de Ramsey podem ser encontradas em [39–46].

$\infty \quad \infty \quad \infty$

Apêndice

Alguns Resultados Importantes

Apresentaremos aqui alguns resultados fundamentais [5, 9], que podem ser considerados, de certa forma, como pré-requisitos para a compreensão deste trabalho.

Teorema 1 (da aplicação aberta) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e sobrejetivo de X sobre Y. Então, existe uma constante $k > 0$, tal que*

$$T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,k)$$

Corolário 1 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de X sobre Y. Então, T^{-1} é contínuo de Y em X.*

Teorema 2 (Banach-Steinhaus) *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares contínuos de X em Y. Suponhamos que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty \quad \forall x \in X,$$

então,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

Dito de outro modo: existe uma constante k, tal que $\|T_i(x)\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$, $\forall i \in I$.

Corolário 2 *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $\{T_n\}$ uma seqüência de operadores lineares contínuos de X e Y, tal que para cada $x \in X$, $T_n(x)$ converge, quando $n \to \infty$, a um denotado por $T(x)$. Então, se tem*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sup \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty, \\ \text{(b)} & T \in \mathcal{L}(X,Y), \\ \text{(c)} & \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \end{array}$$

Teorema 3 *Seja M subespaço de um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach. Se $T : M \to Y$ é transformação linear contínua, então, existe, uma única $\tilde{T} : \overline{M} \to Y$ linear contínua.*

Teorema 4 (Hahn-Banach, forma analítica) *Seja $p : X \to \mathcal{R}$ uma aplicação, que verifica*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \forall \lambda > 0 \\ \text{(b)} & p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \end{array}$$

Sejam, também, $Y \subset X$ um subespaço vetorial e $g : Y \to \mathcal{R}$ uma aplicação linear, tal que $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Y$. Então, existe uma forma linear f definida sobre X que estende g, isto é, $g(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$ e $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$.

Obs.: Neste teorema, X é apenas um espaço vetorial.

Corolário 3 *Para todo $x_0 \in X$, existe $f \in X^*$, tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Teorema 5 (do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja T uma transformação linear de X em Y. Suponhamos que o gráfico de $T, G(T)$, é fechado em $X \times Y$. Então, T é contínua.*

Teorema 6 (Eberlein-Šmulian) *Um subconjunto de um espaço de Banach é relativamente fracamente compacto, se, e somente se, é relativamente fracamente sequencialmente compacto. Em particular, um subconjunto de um espaço de Banach é fracamente compacto, se, e só se, é fracamente sequencialmente compacto.*

Teorema 7 (Goldstine) *Para todo espaço vetorial normado X, $J(B_X)$ é fraco $*$ denso em $B_{X^{**}}$ e $J(X)$ é fraco $*$ denso em X^{**}.*

$\infty \quad \infty \quad \infty$

Referências Bibliográficas

[1] S. Banach, *Theorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1932, reprinted by Chelsea, New York.

[2] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland Mathematics Studies, 1985.

[3] C. Bessaga, A. Pelczynski, *On bases and unconditionals convergence of series of Banach spaces*, Studia Math., 27(1958), 151–164.

[4] S.V. Botschkariev, *Existence of a basis in the space of analytic functions, and some properties of the Franklin system*, Matem. Sbornik, 24(1974), 1–16, [translated from russian].

[5] H. Brézis, *Análisis Funcional (Teoria y Aplicaciones)*, Alianza Editorial, 1983.

[6] A. Brunel, L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Th., 7(1974), 294–299.

[7] A. Brunel, L. Sucheston, *On J-convexity and some ergodic super-properties on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 204(1975), 79–90.

[8] Z. Ciesielski, J. Domsta, *Construction of an orthonormal basis in* $C^m(I^d)$ *and* $W_p^m(I^d)$, Studia Math. 41(1972), 211–224.

[9] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer,1984.

[10] L.E. Dor, *On sequences spanning a complex* ℓ_1*-space*, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 515–516.

[11] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operator I.*, Interscience, 1958.

[12] E.E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symbolic Logic 39 (1974), 163–165.

[13] J.Elton, E. Odell, *The unit ball of every infinite dimensional normed linear space contains a* $(1+\epsilon)$*-separated sequence*, Colloq. Math. 44 (1981) ,105–109.

[14] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math., 130(1973), 309–317.

[15] P. Erdös, R. Rado, *Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set*, Proc. London Math. Soc., (3) 2 (1952), 417–439.

[16] J. Farahat, *Espaces de Banach contenant ℓ_1, d'apres*, H. P. Rosenthal, em: Séminaire Maurey-Schwartz 1973–1974, Ecole Polytechnique.

[17] F. Galvin, K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's Theorem*, J. Symbolic Logic 38 (1973), 193–198.

[18] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley, 1980.

[19] J. Hagler, W.B. Johnson, *On Banach spaces whose dual balls are not weak $*$ sequentially compact*, Israel J. Math., 28(1977), 325–330.

[20] J. Hagler, E. Odell, *A Banach space not containing ℓ_1 whose dual ball is not weak $*$ sequentially compact*, Illinois J. Math., 22 (1978), 290–294.

[21] R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing ℓ_1*, Math, Proc. Comb. Phil. Soc., 80(1976), 269–276.

[22] C.S. Hönig, *Análise funcional e aplicações*, USP, 1970.

[23] R. James, *Bases and Reflexivity in Banach Spaces*, Ann. of Math., 52(1950), 518–527.

[24] M.I. Kadec, A. Pelczynski, *Basic sequences, biorthogonal systems and norming sets in Banach and Frechet spaces*, Studia Math., 25(1965), 297–323.

[25] H. Knaust, E. Odell, *On c_0 sequences in Banach spaces*, Israel J. Math. 67 (1989), 153–169.

[26] H. Knaust, Odell, *Weakly null sequences with upper ℓ_p-estimates*, em: Functional Analysis, E. Odell e H. Rosenthal (eds), Lecture Notes in Math. 1470, Springer, 1991, 85–107.

[27] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, J. Wiley and Sons, 1978.

[28] H.E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

[29] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer, 1977.

[30] J. T. Marti, *Introduction to the Theory of Bases*, Springer - Verlag New York Inc., 1969.

[31] A.R.D. Mathias, *On a generalization of Ramsey's theorem*, Notices Amer. Math. Soc., 15(1968), 931.

[32] J. Mujica, *Separable Quotients of Banach Spaces*, em: Minicurso apresentado no 43º seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, maio de 1996.

[33] C. Nash-Williams, *On well quasi-ordering transfinite sequences*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 61 (1965), 33–39.

[34] E. Odell, *Applications of Ramsey theorems to Banach space theory*, em: Notes in Banach Spaces, E. Lacey (ed), University of Texas Press, 1980, 379–404.

[35] E. Odell, *On Schreier unconditional sequences*, em: Banach Spaces, B. L. Lin e W. B. Johnson (eds), Contemporary Mathematics 144, Amer. Math. Soc., 1993, 197–201.

[36] E. Odell, H.P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing* ℓ^1, Israel J. Math., 20(1975), 375–384.

[37] A. Pelczynski, *A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces"*, Studia Math., 1962.

[38] F. Ramsey, *On a Problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30 (1929), 264–286.

[39] H.P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 (1974), 2411–2413.

[40] H.P. Rosenthal, *Pointwise compact subsets of the first Baire class*, Amer. J. Math., 99(1977), 362–378.

[41] H.P. Rosenthal, *Some recent discoveries in the isomorfic theory of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(1978), 803–831.

[42] J. Schauder, *Eine Eigenschaft der Haarschen Orthogonal Systems*, Math. Z., 28(1928), 317–320.

[43] J. Schauder, *Zur Theorie Stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z., 26(1927), 47–65.

[44] S. Schonefeld, *Schauder bases in the Banach spaces* $C^k(T^q)$, Trans. Amer. Math. Soc., 165(1972), 309–318.

[45] J. Silver, *Every analytic set is ramsey*, J. Symbolic Logic 35 (1970), 60–64.

[46] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.

[47] J. Stern, *A Ramsey theorem for trees, with an application to Banach spaces*, Israel J. Math. 29 (1978), 179–188.

[48] P. Terenzi, *Sequences in Banach spaces*, em: Banach Space theory and its Applications, A. Pietsch, N. Popa e I. Singer (eds), Lecture Notes in Math. 991, Springer-Verlag, 1983, 259–271.

[49] P. Wojtasczyck, *The Franklin system is an unconditional basis in H^1*.

[50] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math., 6(1968), 74–79.

⋆ ⋆ ⋆