UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

SIMEÃO TARGINO DA SILVA

Propriedades Finas da Desintegração de Medidas Invariantes

Campinas

2020

Simeão Targino da Silva

Propriedades Finas da Desintegração de Medidas Invariantes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Simeão Targino da Silva e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38p Silva, Simeão Targino da.
Propriedades finas da desintegração de medidas invariantes / Simeão Targino da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria ergódica. 2. Medidas invariantes. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fine properties of the disintegration of invariant measures
Palavras-chave em inglês:
Ergodic theory
Invariant measures
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Ricardo Miranda Martins
Gabriel Elias Mantovani
Pouya Mehdipour Balagafsheh
Fernando Nera Lenarduzzi
Data de defesa: 20-02-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-2609-1791
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5294502617021413

Tese de Doutorado defendida em 20 de fevereiro de 2020 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). GABRIEL ELIAS MANTOVANI

Prof(a). Dr(a). POUYA MEHDIPOUR BALAGAFSHEH

Prof(a). Dr(a). FERNANDO NERA LENARDUZZI

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

A Deus, nosso criador, pela força e inteligência que me fez concluir este trabalho. Ao professor José Régis Azevedo Varão Filho pela grande ajuda e paciência que demostrou, com quem aprendi muito sobre Sistemas Dinâmicos durante todo o período que me orientou.

A todos os professores, funcionários, amigos e colegas do IMECC pelo aprendizado, incentivos e companheirismo. Aos professores que fizeram parte da comissão examinadora, pela presença e ajuda nas correções finais que tanto contribuíram para a melhoria deste trabalho.

“Ergam os olhos para o céu e vejam. Quem criou estas coisas?
Foi Aquele que as faz sair como um exército, por número;
Ele chama a todas elas por nome. Por causa da sua imensa energia
dinâmica e do seu atemorizante poder, não falta nem sequer uma delas.”
(Bíblia Sagrada, Isaías 40: 26)

Resumo

Neste trabalho estudamos desintegrações de medidas em folheações com enfoque em entender principalmente as desintegrações atômicas. Uma das motivações deste trabalho foi o artigo (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014), onde os autores provam, para difeomorfismos derivado de Anosov, desintegrações mono-atômica. Nós generalizamos alguns desses resultados mostrando que também podemos ter desintegrações mono-atômica para sistemas mais gerais, sem condições de hiperbolicidade, no qual eliminamos a necessidade de partições de Markov, que são estruturas herdadas dos difeomorfismos de Anosov. Para obtermos monoatomicidade em folhas que se contraem, exigimos mensurabilidades das folhas. Por outro lado, sem supor mensurabilidade, também chegamos na monoatomicidade exigindo contração uniforme nas folhas, assim como condições de transitividade e atomicidade. Um outro resultado que obtemos nos permitiu compreender como a desintegração atômica afeta a própria geometria da folheação quando olhamos suas holonomias.

Palavras-chave: medida, medidas invariantes, desintegração de medidas, desintegração atômica, desintegração mono atômica, desintegração ergódica, folheações absolutamente contínuas, sistemas dinâmicos, sistemas hiperbólicos.

Abstract

In this paper we study disintegrations of measures in foliations with a focus on understanding mainly atomic disintegrations. One of the motivations of this work was the article (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014), where the authors proved, for Anosov-derived diffeomorphisms, mono-atomic disintegrations. We generalize some of these results by showing that we can also have mono-atomic disintegrations for more general systems without conditions of hyperbolicity, in which we eliminate the need of Markov partitions, which are structures inherited from Anosov's diffeomorphisms. To obtain mono-atomicity in the context of shrinking leaves, we require a measurable foliation. On the other hand, without assuming measurability, we also arrive at mono-atomicity by requiring uniform contractions in the leaves, as well as conditions for transitivity and atomicity. Another result that we obtained allowed us to understand how atomic disintegration affects the leaf geometry itself when looking at its holonomies.

Keywords: measure, invariant measures, disintegration of measures, atomic disintegration, mono-atomic disintegration, ergodic disintegration, absolutely continuous foliations, dynamical systems, hyperbolic systems.

Sumário

Introdução

Uma classe importante de sistemas dinâmicos muito estudado devido às suas ricas propriedades dinâmicas são os difeomorfismos de Anosov. Associadas a esses difeomorfismos estão as estruturas geométricas conhecidas como folheações estáveis e instáveis. Um dos resultados fundamentais da teoria hiperbólica, provado por Anosov (ANOSOV, 1969) é que todo difeomorfismo de Anosov de classe C^2 que preserva volume é ergódico com relação à medida de volume. Um dos pontos fundamentais dessa prova está na compreensão do comportamento métrico dessas folheações (estáveis e instáveis). Mais precisamente entender que a desintegração do volume com relação as folheações estáveis e instáveis fornecem medidas equivalentes à medida de Lebesgue da folha, ou seja, as folheações estáveis e instáveis possuem comportamento regular o suficiente de modo que se possa “aplicar” o teorema de Fubini.

O comportamento métrico de folheações associadas a uma dinâmica é o ponto chave deste trabalho. O comportamento das folheações poderia ser traduzido em compreender a desintegração de uma medida nas folhas. Dado um espaço de probabilidade $(M, \mathcal{B}, \mu)$, onde M é uma variedade compacta e $\mathcal{B}$ é sua σ-álgebra de Borel, uma desintegração da medida μ é uma família $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades tal que cada medida μ_P está definida na σ-álgebra $\mathcal{B}$ e assume peso total no conjunto $P \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição do conjunto M, e a medida original μ é uma soma dessa família. Mais precisamente, a medida de cada conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é dada por

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{P}} \mu_P(E) d\widehat{\mu}.$$

Dizemos que uma desintegração de uma medida em relação a uma folheação é atômica quando existe um conjunto de medida total tal que sua interseção com cada folha é um conjunto enumerável ou, mais precisamente, uma desintegração é atômica quando cada medida desintegrada μ_P na folha for uma soma de medidas de Dirac. Neste caso, existe um conjunto de medida total $N \subseteq M$ tal que, para cada $P \in \mathcal{P}$, a interseção $N \cap P$ é um conjunto enumerável de pontos que chamaremos de átomos. Quando cada medida μ_P for apenas uma medida de Dirac, dizemos que a desintegração é mono-atômica, o que significa que os conjuntos $N \cap P$ são unitários (têm apenas um átomo).

Na década de 70, R. Mañé e M. Shub (veja (BONATTI; DÍAZ; VIANA, 2005)) deram exemplos de sistemas robustamente transitivos que não eram difeomorfismos de Anosov, ou seja, não possuíam hiperbolicidade uniforme. Esses exemplos assemelham-se com os difeomorfismos de Anosov no sentido que possuem direções estáveis e instáveis. Entretanto eles possuem uma terceira direção cujo comportamento não é hiperbólico. Essa terceira direção é chamada de direção central e os difeomorfismos que exibem esta direção com comportamento intermediário são chamados de Parcialmente Hiperbólicos.

Uma novidade dos Parcialmente Hiperbólicos é que a folheação central (quando existe) não possui o "bom comportamento" exibido pelas folheações estáveis e instáveis. Ruelle e Wilkinson em (RUELLE; WILKINSON, 2001) deram um exemplo em que a desintegração do volume na direção central é atômica. O exemplo tratado em (RUELLE; WILKINSON, 2001) é um *skew-product* e sua folheação central é compacta e um-dimensional (círculos). Em (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) Ponce, Tahzibi e Varão exibem um exemplo dinâmico ainda mais curioso: um sistema parcialmente hiperbólico que preserva volume, com uma folheação um-dimensional por folhas não compactas minimal (ou seja, toda folha é densa) e que existe um conjunto de volume total que intersecta cada folha dessa folheação em um único ponto.

Esses comportamentos de desintegração atômica em um primeiro momento podem dar a impressão de um comportamento patológico das folheações, mas os exemplos citados acima, tanto de Ruelle e Wilkinson quanto de Ponce, Tahzibi e Varão, valem em conjuntos abertos (dentro do mundo conservativo).

Muito tem-se estudado sobre a desintegração de medidas em folheações invariantes (aqui tendo em mente principalmente dinâmica não-uniformemente hiperbólica). Para citar um exemplo, em (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2015) os autores estudam a desintegração do volume para perturbados de tempo-um do fluxo geodésico em superfícies compactas, obtendo uma dicotomia: ou a medida é muito comportada (desintegração equivalente à Lebesgue) ou é muito "irregular" (desintegração atômica). O mesmo tipo de estudo também foi feito em (VARÃO, 2016) para outra classe. Mais recentemente em (PONCE; VARÃO, 2019) os autores estudam a desintegração de medidas invariantes para as ações de grupos em contextos muito gerais e conseguem obter uma dicotomia da desintegração de medidas em muito regulares ou atômicas.

Ou seja, em muitos contextos dinâmicos, a desintegração de medidas recai na dicotomia muito regular ou atômica. Em geral, a desintegração mais regular implica heuristicamente em uma maior facilidade para se lidar com essa dinâmica. Um exemplo de implicação dinâmica quando se supõe uma "boa desintegração" da medida considerada pode ser encontrado em (VARÃO, 2016) e (VARÃO, 2018).

Neste trabalho iremos explorar a direção das medidas atômicas, por ser um pouco menos explorado na literatura. Temos dois principais objetivos: o primeiro é estudar os casos de desintegrações atômicas ou que geram desintegração atômica com o mínimo possível de hipóteses, na tentativa de generalizar resultados que estão relacionados com a desintegração atômica de (VARÃO, 2016) e (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) como por exemplo:

Teorema 1 (G. Ponce, A. Tahzibi, R. Varão)**.** *Seja $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo DA, que tem medida de volume invariante e ergódica. Se o volume tem desintegração atômica nas folhas centrais, então a desintegração é mono atômica.*

Esse resultado (e os outros mencionados até aqui) sempre se utilizam de muita regularidade do mapa e objetos geométricos invariantes (folheações estáveis, instáveis e centrais). O resultado acima faz forte uso de partições de Markov para o Anosov linear associado ao sistema (para mais detalhes sobre as partições de Markov e os difeomorfismos de Anosov veja o clássico (BOWEN, 2008)). Ou seja, há muita estrutura na dinâmica. Conseguimos reduzir a estrutura na dinâmica: a única condição dinâmica que colocamos na folheação é que as folhas contraiam no futuro. A contração não precisa ser uniforme, basta que pontos na mesma folha tendam a zero quando iterados. Mais precisamente provamos que:

Teorema A. *Sejam M uma variedade compacta, $f : M \to M$ um homeomorfismo que preserva uma folheação $\mathcal{F}$ (i.e. $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$) e μ uma medida de probabilidade invariante e ergódica para f. Suponha que $\mathcal{F}$ é contraída por f, isto é, $\mathcal{F}$ é tal que para todos $x, y \in M$, com $x \in \mathcal{F}(y)$, tem-se*

$$\limsup_{n \to +\infty} d_{\mathcal{F}}(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Se a partição de M pelas folhas de $\mathcal{F}$ é mensurável, então a desintegração de μ é mono-atômica.

Quando não se supõe mensurabilidade na folheação é mais difícil tratar a desintegração, assim, sem supor a mensurabilidade da folheação, adicionamos que a folheação seja uma contração uniforme e alguma condição nos pontos transitivos. Obtemos:

Teorema B. *Sejam M uma variedade compacta, $\mathcal{F}$ uma folheação de M por retas (folheação cujas folhas são variedades imersas 1-dimensionais e não compactas) que é invariante por um homeomorfismo $f : M \to M$ (i.e. $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$) e μ uma medida de probabilidade invariante e ergódica para f. Suponha que o conjunto dos pontos transitivos para f tenha medida total e que $\mathcal{F}$ é contraída uniformemente por f, isto é, existe $0 < \lambda < 1$ tal que, dados $x, y \in M$, com $x \in \mathcal{F}(y)$,*

$$d_{\mathcal{F}(x)}(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_{\mathcal{F}(x)}(x, y).$$

Se μ tem desintegração atômica nas folhas de $\mathcal{F}$, então a desintegração é mono-atômica.

Por fim conseguimos estudar a própria geometria das folheações que admitem desintegração atômica. De fato, o que provamos é que as folheações que admitem desintegração atômicas quando olhadas suas holonomias possuem um comportamento peculiar.

Teorema C. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade compacta M e $\mathcal{T}$ uma folheação de classe C^1 localmente transversal a $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ tenha desintegração atômica e que, para uma dada carta folheada Q de $\mathcal{F}$, exista $k \in \mathbb{N}$ tal que a desintegração de μ nas folhas de Q tenha no máximo k átomos. Então, para $\mu \times \mu$ quase todo ponto $(x, y) \in Q \times Q$, a holonomia $h_{x,y} : \mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_y$ leva o conjunto $\mathcal{T}_x \cap Q \cap \{\text{átomos de } \mathcal{F}\}$ (que tem medida de Lebesgue 1) em um conjunto com medida de Lebesgue zero.*

1 Conceitos Preliminares

1.1 Introdução à Teoria da Medida

Apresentaremos nesta introdução alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria da medida que serão utilizados ao longo deste trabalho, para mais detalhes veja (BARTLE, 1995).

Definição 1. *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto M é chamada de* ***álgebra*** *se possui as seguintes propriedades:*

(i) $M \in \mathcal{B}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{B}$, *então* $A^c = M \backslash A \in \mathcal{B}$;

(iii) Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}$, *então* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$.

Se a família $\mathcal{B}$ possui as propriedades (i), (ii) e

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}, \text{ para todos } A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{B} \tag{1.1}$$

dizemos que $\mathcal{B}$ é uma ***σ-álgebra***. *Neste caso, os elementos de conjuntos $A \in \mathcal{B}$ são chamados de conjuntos mensuráveis.*

Observação 1. *(a) Se a família $\mathcal{B}$ for uma σ-álgebra, as propriedades (i) e (ii) implicam que $\emptyset \in \mathcal{B}$. Além disso, de (ii) e (1.1), também temos*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}, \text{ para todos } A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{B}.$$

Em particular, temos

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B} \text{ e } A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}, \text{ para todos } A_1, A_2 \in \mathcal{B}.$$

(b) Para qualquer coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de M, a interseção de todas as σ-álgebras que contém $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra (esta é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$), que denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ e chamamos de σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

Definição 2. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de M. Uma* ***medida*** *em M é uma função $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e, para qualquer família $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{B}$,*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

*A tripla $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada de espaço de medida. Quando $\mu(M) = 1$, dizemos que μ é uma **medida de probabilidade** e que $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.*

Observação 2. *Se (M, τ) for um espaço topológico, a σ-álgebra $\sigma(\tau)$ é chamada de σ-álgebra de Borel e os conjuntos $A \in \sigma(\tau)$ são chamados de Borelianos. Uma medida de Borel é uma medida definida na σ-álgebra de Borel $\sigma(\tau)$.*

Definição 3. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, onde μ é uma medida de Borel. Dizemos que a medida μ é regular se, para todo conjunto mensurável $B \in \mathcal{B}$ e todo $\varepsilon > 0$, existirem um conjunto fechado F e um conjunto aberto A tais que $F \subseteq B \subseteq A$ e $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$.*

Definição 4. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Um ponto $x \in M$, com $\{x\} \in \mathcal{B}$, tal que $\mu(\{x\}) > 0$ é chamado de **átomo**.*

Definição 5. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de M.*

(a) Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ é finitamente aditiva se

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

para qualquer família finita $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos.

(b) Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ é σ-aditiva se

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para qualquer família $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Teorema 2 (Continuidade no Vazio)**.** *Sejam M um conjunto, $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de M e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ uma função finitamente aditiva, com $\mu(M) < +\infty$. Então, a função μ é σ-aditiva se, e somente se,*

$$\lim_{i \to +\infty} \mu(A_i) = 0$$

para toda sequência decrescente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_i \supseteq ...$ de elementos da álgebra $\mathcal{A}$ tal que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Teorema 3 (Extensão de Medidas)**.** *Sejam M um conjunto, $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de M e $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ uma função σ-aditiva e com $\mu(M) < +\infty$. Então existe uma única medida $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ tal que*

$$\mu(A) = \mu_0(A), \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Proposição 1 (Critério de σ-aditividade)**.** *Sejam M um espaço métrico completo e separável e $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por uma base enumerável $\mathcal{U} = \{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de abertos de M. Se $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ for uma função aditiva com $\mu(\emptyset) = 0$, então μ se estende a uma medida de probabilidade na σ-álgebra de Borel de M.*

Demonstração. Está feita com detalhes em (VIANA; OLIVEIRA, 2016). □

Definição 6. *Sejam $(M, \mathcal{B}_1)$ e $(N, \mathcal{B}_2)$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : M \to N$ é mensurável se*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1,\ \ \textit{para todo } A \in \mathcal{B}_2.$$

Definição 7. *Dado um conjunto M, uma família não vazia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de M, com $M \in \mathcal{C}$, é uma **classe monótona** se satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

(a) Se $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$, então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}.$$

Observação 3. *Note que se $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ for uma família de classes monótonas, então $\cap_{i\in I}\mathcal{C}_i$ é uma classe monótona.*

Teorema 4 (das Classes Monótonas)**.** *Se $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ for a família de todas as classes monótonas que contém uma álgebra $\mathcal{A}$, então $\cap_{i\in I}\mathcal{C}_i = \sigma(\mathcal{A})$.*

Proposição 2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra numa variedade M, μ uma medida de probabilidade na σ-álgebra gerada $\sigma(\mathcal{A})$ e $f : M \to M$ uma bijeção tal que*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \ \ \textit{e} \ \ \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A),\ \ \textit{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Então:

(a) $f^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{A})$, para todo $A \in \sigma(\mathcal{A})$

(b) $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo $A \in \sigma(\mathcal{A})$.

Demonstração. (a) O conjunto dado por

$$\mathcal{C}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{A});\ f^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

é uma classe monótona, pois $M \in \mathcal{C}_1$ e valem as propriedades:

(i) Dados $A_i \in \mathcal{C}_1$, com $A_i \subseteq A_{i+1}$, temos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \quad e \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in \sigma(\mathcal{A}),$$

mostrando que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}_1$.

(ii) Dados $A_i \in \mathcal{C}_1$, com $A_i \supseteq A_{i+1}$, temos

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \quad e \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in \sigma(\mathcal{A}),$$

mostrando que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}_1$.

Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$, se denotarmos por $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ a família das classes monótonas que contém $\mathcal{A}$, então

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_1,$$

provando o item (a).

(b) O conjunto dado por

$$\mathcal{C}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{A});\ \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)\}$$

é uma classe monótona, pois $M \in \mathcal{C}_2$ e valem as propriedades:

(i) Dados $A_i \in \mathcal{C}_2$, com $A_i \subseteq A_{i+1}$, temos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \quad e \quad \mu(f^{-1}(A_i)) = \mu(A_i),\ \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $f^{-1}(A_i) \subseteq f^{-1}(A_{i+1})$, temos também

$$\bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(A_N).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(A_i)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(f^{-1}(A_N)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu(A_N) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right),
\end{aligned}$$

mostrando que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}_2$.

(ii) Dados $A_i \in \mathcal{C}_2$, com $A_i \supseteq A_{i+1}$, temos

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{A}) \quad e \quad \mu(f^{-1}(A_i)) = \mu(A_i), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $f^{-1}(A_i) \supseteq f^{-1}(A_{i+1})$, temos também

$$\bigcap_{i=1}^{N} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(A_N).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) &= \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{N} f^{-1}(A_i)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(f^{-1}(A_N)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu(A_N) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) \\
&= \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),
\end{aligned}$$

mostrando que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}_2$.

Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_2$, se denotarmos por $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ a família das classes monótonas que contém $\mathcal{A}$, então

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_2,$$

provando o item (b).

□

Proposição 3. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade.*

(a) Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $a, b \in \mathbb{R}$. Então as funções

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x) \quad e \quad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

são mensuráveis.

(b) Se $f_n : M \to [-\infty, +\infty]$ é uma sequência de funções mensuráveis, então as funções

$$s(x) = \sup_n\{f_n(x)\} \quad e \quad i(x) = \inf_n\{f_n(x)\}$$

$$f^*(x) = \limsup_n\{f_n(x)\} \quad e \quad f_*(x) = \liminf_n\{f_n(x)\}$$

são mensuráveis.

(c) Se $\varphi : M \to \mathbb{R}$ for uma função mensurável limitada, então as funções

$$\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\} \quad e \quad \varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$$

são mensuráveis.

Teorema 5 (Convergência Monótona)**.** *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Se $f_n : M \to [0, +\infty]$ for uma sequência monótona crescente de funções integráveis, então a função definida por $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ é integrável e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Teorema 6 (Convergência Dominada)**.** *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f_n : M \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis. Suponha que existe uma função integrável $h : M \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$, para μ-quase todo $x \in M$, e suponha que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ existe, para μ-quase todo $x \in M$. Então f é integrável e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Definição 8. *Sejam ν, μ medidas definidas em $(M, \mathcal{B})$. Dizemos que ν **é absolutamente contínua com relação a** μ, e escrevemos $\nu \ll \mu$, se para todo $A \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0.$$

Quando $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$, dizemos que ν e μ são equivalentes.

Teorema 7 (Derivada de Radon-Nikodym)**.** *Sejam ν, μ medidas definidas em $(M, \mathcal{B})$. Se $\nu \ll \mu$, então existe uma função mensurável $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, com $f \geqslant 0$, tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu,$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, N um conjunto e $f : M \to N$ uma função. Então, a família de subconjuntos de N dada por

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{Q \subseteq N;\; f^{-1}(Q) \in \mathcal{B}\}$$

é uma σ-álgebra e a função denotada por $f_*\mu : \widehat{\mathcal{B}} \to [0, +\infty)$ e definida por

$$f_*\mu(Q) = \mu(f^{-1}(Q)), \text{ para cada } Q \in \widehat{\mathcal{B}}$$

é uma medida de probabilidade. Assim, temos o espaço de probabilidade $(N, \widehat{\mathcal{B}}, f_*\mu)$. No caso particular de uma função mensurável $f : M \to M$, a função $f_*\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$, dada pela expressão

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \text{ para todo } A \in \mathcal{B}$$

define uma outra medida de probabilidade na σ-álgebra $\mathcal{B}$.

Teorema 8 (Mudança de Variável)**.** *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e sejam $f : M \to M$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis, com φ limitada num subconjunto mensurável $B \subseteq M$. Então*

$$\int_{f^{-1}(B)} (\varphi \circ f) d\mu = \int_B \varphi d f_* \mu.$$

Demonstração. Se φ for a função característica, $\varphi = \chi_B$, a igualdade acima é verdadeira por ser equivalente a $\mu(f^{-1}(B)) = f_*\mu(B)$. Se φ for uma função simples, ou seja, uma combinação de funções características

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ são constantes e $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos mensuráveis disjuntos, pela linearidade da integral, também obtemos a igualdade. No caso de φ ser uma função mensurável mais geral, a igualdade segue do fato conhecido de que φ é o limite de uma sequência de funções simples. □

Teorema 9 (Mudança de Variável)**.** *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, N um conjunto e $f : M \to N$ uma função. Suponha que $\varphi : N \to \mathbb{R}$ seja uma função mensurável, com relação ao espaço de probabilidade $(N, \widehat{\mathcal{B}}, f_*\mu)$, e que φ seja limitada num subconjunto $\widehat{\mathcal{B}}$-mensurável $B \subseteq N$. Então*

$$\int_{f^{-1}(B)} (\varphi \circ f) d\mu = \int_B \varphi d f_* \mu.$$

Demonstração. Análoga ao caso anterior. □

1.2 Desintegração de medidas

Definição 9. *Seja $(M, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma* ***partição*** *$\mathcal{P}$ de M é uma família de subconjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, tal que*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = M.$$

Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Podemos definir, em M, a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y),$$

onde $\mathcal{P}(x)$ é o elemento da partição $\mathcal{P}$ que contém o ponto x. Assim, o conjunto quociente

$$M/\sim = \mathcal{P} = \{\mathcal{P}(x);\ x \in M\}$$

pode ser munido de uma estrutura de espaço de probabilidade da seguinte forma: Primeiro, considere a projeção natural

$$\pi : M \to \mathcal{P}$$
$$x \mapsto \mathcal{P}(x)$$

depois, defina em $\mathcal{P}$ a σ-álgebra

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P};\ \pi^{-1}(\mathcal{Q}) \in \mathcal{B}\}$$

e a seguinte medida de probabilidade:

$$\widehat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})),\ \text{para cada } \mathcal{Q} \in \widehat{\mathcal{B}}.$$

Desta forma, obtemos o espaço de probabilidade $(\mathcal{P}, \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu})$.

Dizemos que uma sequência de partições enumeráveis $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, ou que $\mathcal{P}_n$ é menos fina do que $\mathcal{P}_{n+1}$, e escrevemos $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_{n+1}$, se todo elemento de $\mathcal{P}_{n+1}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_n$. Denotando

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n;\ \ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset\ e\ P_n \in \mathcal{P}_n,\ \text{para todo } n \in \mathbb{N} \right\},$$

segue que $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é a partição menos fina tal que

$$\mathcal{P}_n \prec \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n,\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 10. *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Dizemos que $\mathcal{P}$ á uma **partição mensurável** se existe algum conjunto mensurável $M_0 \subseteq M$, com $\mu(M_0) = 1$, tal que, restrito a M_0,*

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n,$$

para alguma sequência crescente $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec ... \prec \mathcal{P}_n \prec ...$ de partições enumeráveis.

A definição acima é equivalente à seguinte definição:

Definição 11. *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Dizemos que $\mathcal{P}$ á uma **partição mensurável** se existe algum conjunto mensurável $M_0 \subseteq M$, com $\mu(M_0) = 1$, e uma família enumerável $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos mensuráveis tais que, para cada $P \in \mathcal{P}$, existe uma sequência $B_n \in \{A_n, M \backslash A_n\}$, que depende de P, tal que*

$$P \cap M_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap M_0).$$

Definição 12. *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Uma **desintegração** de μ relativamente a $\mathcal{P}$ é uma família $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades, definidas na σ-álgebra $\mathcal{B}$, com as seguintes propriedades:*

(a) $\mu_P(P) = 1$ para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;

(b) Para toda $\varphi \in L^1(M, \mathcal{B}, \mu)$, a função $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$, dada por $P \mapsto \int_M \varphi d\mu_P$, é $\widehat{\mu}$-mensurável e

$$\int_M \varphi d\mu = \int_{\mathcal{P}} \left(\int_M \varphi d\mu_P \right) d\widehat{\mu}.$$

Observação 4. *Segue do item (b) que, para todo conjunto mensurável $E \subseteq M$, a função $P \mapsto \mu_P(E)$ é $\widehat{\mu}$-mensurável e*

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{P}} \mu_P(E) d\widehat{\mu}.$$

Exemplo 1. *Para um caso simples de desintegração basta considerar $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ uma partição finita de M formada por subconjuntos mensuráveis, com $\mu(P_j) > 0$, e a medida quociente dada por $\widehat{\mu}(\{P_j\}) = \mu(P_j)$. Então, a família $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ de probabilidades dada por*

$$\mu_j(E) = \frac{\mu(E \cap P_j)}{\mu(P_j)}, \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subseteq M,$$

é uma desintegração de μ relativamente a $\mathcal{P}$, pois satisfaz às propriedades (a) e (b) da definição, onde

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(E) \widehat{\mu}(\{P_j\}).$$

O seguinte teorema, provado em (VIANA; OLIVEIRA, 2016), mostra que, para σ- álgebras enumeravelmente geradas, a desintegração é essencialmente única.

Teorema 10. *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Suponha que a σ- álgebra $\mathcal{B}$ admita um gerador enumerável. Se $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ e $\{\nu_P : P \in \mathcal{P}\}$ são desintegrações de μ com relação a $\mathcal{P}$, então $\mu_p = \nu_P$ para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$.*

Enunciaremos agora os teoremas da desintegração de Rokhlin e desintegração ergódica. As demonstrações apresentadas encontram-se na referência (VIANA; OLIVEIRA, 2016).

Teorema 11 (Desintegração de Rokhlin)**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma partição mensurável de um espaço métrico compacto M e μ uma probabilidade definida na σ- álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Então existe uma desintegração de μ em relação a $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{P}$ seja uma partição mensurável de M. Então existem uma sequência crescente de partições enumeráveis $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec ... \prec \mathcal{P}_n \prec ...$ e um conjunto $M_0 \subseteq M$, com $\mu(M_0) = 1$, tais que, restrito a M_0, temos a igualdade

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n.$$

Sendo assim, para cada função mensurável limitada $\varphi : M \to \mathbb{R}$, podemos definir uma sequência de funções $e_n(\varphi) : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$e_n(\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \displaystyle\int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu & \text{se } \mu(\mathcal{P}_n(x)) > 0, \\ 0 & \text{se } \mu(\mathcal{P}_n(x)) = 0, \end{cases}$$

onde $\mathcal{P}_n(x)$ é o elemento da partição $\mathcal{P}_n$ que contém o ponto x. Como, para todo $y \in \mathcal{P}_n(x)$, vale $\mathcal{P}_n(y) = \mathcal{P}_n(x)$, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $e_n(\varphi)$ é constante em cada $\mathcal{P}_n(x) \in \mathcal{P}_n$. Logo, para toda função mensurável limitada $\varphi : M \to \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\int e_n(\varphi) d\mu &= \sum_{\mathcal{P}_n(x)} \int_{\mathcal{P}_n(x)} e_n(\varphi) d\mu \\
&= \sum_{\mathcal{P}_n(x)} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \left[\frac{1}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu \right] d\mu \\
&= \sum_{\mathcal{P}_n(x)} \left[\frac{1}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu \right] \int_{\mathcal{P}_n(x)} 1 d\mu \\
&= \sum_{\mathcal{P}_n(x)} \left[\frac{1}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu \right] \mu(\mathcal{P}_n(x)) \\
&= \sum_{\mathcal{P}_n(x)} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu \\
&= \int \varphi d\mu,
\end{aligned}$$

onde as somas acima envolvem apenas os elementos $\mathcal{P}_n(x) \in \mathcal{P}_n$ tais que $\mu(\mathcal{P}_n(x)) > 0$. Assim, mostramos que, para toda função mensurável limitada $\varphi : M \to \mathbb{R}$, temos a igualdade

$$\int e_n(\varphi) d\mu = \int \varphi d\mu, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Lema 1. *Para cada função mensurável limitada $\varphi : M \to \mathbb{R}$, existe um conjunto $M_\varphi \subseteq M$, com $\mu(M_\varphi) = 1$, tal que*

(a) O limite $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(\varphi)(x)$ existe para todo $x \in M_\varphi$.

(b) A função $e(\varphi) : M_\varphi \to \mathbb{R}$ dada por

$$e(\varphi)(x) = \lim_{n \to +\infty} e_n(\varphi)(x)$$

é mensurável e é constante em cada $P \in \mathcal{P}$.

(c) $\displaystyle\int e(\varphi) d\mu = \int \varphi d\mu.$

Demonstração.

(a) Suponha que $\varphi \geqslant 0$. Considerando α, β como sendo números racionais, seja $S(\alpha, \beta)$ o conjuntos dos pontos $x \in M$ tais que

$$\liminf_n e_n(\varphi)(x) < \alpha < \beta < \limsup_n e_n(\varphi)(x)$$

Assim, a sequência $(e_n(\varphi)(x))_n$ diverge se, e somente se, $x \in S(\alpha, \beta)$ para algum par de números racionais $\alpha < \beta$, ou equivalentemente, o limite $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(\varphi)(x)$ existe se, e somente se,

$$x \in M_\varphi = \bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \\ \alpha < \beta}} S(\alpha, \beta)^c,$$

onde $S(\alpha, \beta)^c$ é o complementar do conjunto $S(\alpha, \beta)$.
Afirmação: O conjunto definido por

$$M_\varphi = \bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \\ \alpha < \beta}} S(\alpha, \beta)^c$$

satisfaz $\mu(M_\varphi) = 1$.
Como a interseção acima é enumerável, para provar a afirmação, basta mostrar que $\mu(S(\alpha, \beta)) = 0$, para todo $\alpha < \beta$. Para isso, considere α, β racionais fixos. Para cada $x \in S(\alpha, \beta)$, considere uma sequência de naturais $1 \leqslant a_1^x < b_1^x < a_2^x < b_2^x < ... < a_i^x < b_i^x < ...$ tal que

$$e_{a_i^x}(\varphi)(x) < \alpha \quad e \quad e_{b_i^x}(\varphi)(x) > \beta, \text{ para todo } i \geqslant 1.$$

Os conjuntos definidos por

$$A_i = \bigcup_{x \in S(\alpha, \beta)} \mathcal{P}_{a_i^x}(x) \quad e \quad B_i = \bigcup_{x \in S(\alpha, \beta)} \mathcal{P}_{b_i^x}(x)$$

satisfazem $S(\alpha, \beta) \subseteq A_{i+1} \subseteq B_i \subseteq A_i$, para todo $i \geqslant 1$, pois $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $S(\alpha, \beta)$ está contido no conjunto

$$\widetilde{S} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i. \tag{1.3}$$

Como a sequência $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec ... \prec \mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_{n+1} \prec ...$ é crescente, para quaisquer dois conjuntos $\mathcal{P}_{a_i^x}(x)$ e $\mathcal{P}_{a_j^x}(x)$, ou eles são disjuntos ou um deles está contido no outro. Logo, os conjuntos $\mathcal{P}_{a_i^x}(x)$, que são maximais, são disjuntos dois a dois e, portanto, eles formam uma partição do conjunto A_i. Escolhendo apenas estes conjuntos $\mathcal{P}_{a_i^x}(x)$ maximais que têm medida positiva e usando a definição da função $e_{a_i^x}(\varphi)$, obtemos

$$\int_{A_i} \varphi d\mu = \sum_{\mathcal{P}_{a_i^x}(x)} \int_{\mathcal{P}_{a_i^x}(x)} \varphi d\mu \leqslant \sum_{\mathcal{P}_{a_i^x}(x)} \alpha\mu(\mathcal{P}_{a_i^x}(x)) = \alpha\mu(A_i),$$

para todo $i \geqslant 1$. Analogamente, para o conjunto B_i, temos

$$\int_{B_i} \varphi d\mu = \sum_{\mathcal{P}_{b_i^x}(x)} \int_{\mathcal{P}_{b_i^x}(x)} \varphi d\mu \geqslant \sum_{\mathcal{P}_{b_i^x}(x)} \beta\mu(\mathcal{P}_{b_i^x}(x)) = \beta\mu(B_i),$$

mostrando que

$$\beta\mu(B_i) \leqslant \int_{B_i} \varphi d\mu \quad e \quad \int_{A_i} \varphi d\mu \leqslant \alpha\mu(A_i),$$

para todo $i \geqslant 1$ e, como $B_i \subseteq A_i$ e $\varphi \geqslant 0$, segue que

$$\beta\mu(B_i) \leqslant \int_{B_i} \varphi d\mu \leqslant \int_{A_i} \varphi d\mu \leqslant \alpha\mu(A_i).$$

Portanto,

$$\beta\mu(B_i) \leqslant \alpha\mu(A_i), \text{ para todo } i \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Como $A_{i+1} \subseteq B_i \subseteq A_i$, segue de (1.3) que

$$\lim_{i\to+\infty} \mu(B_i) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = \mu(\widetilde{S}).$$

Sendo assim, fazendo $i \to +\infty$ em (1.4), obtemos $\beta\mu(\widetilde{S}) \leqslant \alpha\mu(\widetilde{S})$. Logo $\mu(\widetilde{S}) = 0$ e, como $S(\alpha,\beta) \subseteq \widetilde{S}$, temos que $\mu(S(\alpha,\beta)) = 0$. Portanto $\mu(M_\varphi) = 1$, provando assim nossa afirmação. Isto prova o item (a) quando $\varphi \geqslant 0$. Para o caso geral de uma função mensurável limitada qualquer $\varphi : M \to \mathbb{R}$, podemos escrever $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, onde as funções

$$\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\} \quad e \quad \varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$$

são mensuráveis, limitadas e não negativas. Logo, pelo que acabamos de provar, existem conjuntos $M_{\varphi^+}, M_{\varphi^-} \subseteq M$, com $\mu(M_{\varphi^+}) = \mu(M_{\varphi^-}) = 1$, tais que

$$\lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^+)(x) \text{ existe para todo } x \in M_{\varphi^+}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^-)(x) \text{ existe para todo } x \in M_{\varphi^-}.$$

Como $e_n(\varphi) = e_n(\varphi^+) - e_n(\varphi^-)$, o conjunto $M_\varphi = M_{\varphi^+} \cap M_{\varphi^-}$ é tal que $\mu(M_\varphi) = 1$ e o limite

$$\lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi)(x) = \lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^+)(x) - \lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^-)(x)$$

existe para todo $x \in M_\varphi$, a prova do item (a) está completa.

(b) Como as funções φ^+ e φ^- satisfazem o item (b), a função $e(\varphi) : M_\varphi \to \mathbb{R}$ dada por

$$e(\varphi)(x) = \lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi)(x) = \lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^+)(x) - \lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi^-)(x) = e(\varphi^+)(x) - e(\varphi^-)(x)$$

é mensurável (veja Proposição 3) e é constante em cada $P \in \mathcal{P}$.

(c) De (1.2), temos que

$$\int e_n(\varphi)d\mu = \int \varphi d\mu, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, para μ-quase todo $x \in M$,

$$|e_n(\varphi)(x)| = \left| \frac{1}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \int_{\mathcal{P}_n(x)} \varphi d\mu \right| \leqslant \sup |\varphi|$$

e $\lim_{n\to+\infty} e_n(\varphi)(x) = e(\varphi)(x)$, pelo Teorema 6, da convergência dominada, obtemos

$$\int e(\varphi)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int e_n(\varphi)d\mu = \int \varphi d\mu,$$

mostrando que

$$\int e(\varphi)d\mu = \int \varphi d\mu.$$

□

Dado um conjunto mensurável $A \subseteq M$, no caso particular da função característica $\varphi = \chi_A$, a definição de $e_n(\varphi)$ e o item (b) do lema acima nos dar

$$e(\varphi)(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x) \cap A)}{\mu(\mathcal{P}_n(x))}. \tag{1.5}$$

O conjunto $\mathcal{P}_A$ definido por

$$\mathcal{P}_A = \{P \in \mathcal{P};\ M_\varphi \cap P \neq \emptyset\}$$

satisfaz $\widehat{\mu}(\mathcal{P}_A) = 1$. Como $e(\varphi)$, dada pelo lema acima, é constante em cada $P \in \mathcal{P}$, a função $E(A) : \mathcal{P}_A \to \mathbb{R}$ dada por

$$E(A)(P) = e(\varphi)(x), \text{ para qualquer } x \in M_\varphi \cap P \tag{1.6}$$

está bem definida e é mensurável, pois $e(\varphi) = E(A) \circ \pi \mid_{M_\varphi}$. Além disso, do item (c) do lema anterior e do Teorema 9, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \varphi d\mu &= \int_{M_\varphi} e(\varphi)d\mu \\
&= \int_{M_\varphi = \pi^{-1}(\mathcal{P}_A)} E(A) \circ \pi \mid_{M_\varphi} d\mu \\
&= \int_{\mathcal{P}_A} E(A) d\pi_*\mu \\
&= \int_{\mathcal{P}_A} E(A) d\widehat{\mu},
\end{aligned}$$

mostrando que
$$\int_M \varphi d\mu = \int_{\mathcal{P}_A} E(A) d\widehat{\mu}$$
e, como estamos supondo que $\varphi = \chi_A$, a equação acima é equivalente a

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{P}_A} E(A) d\widehat{\mu} \tag{1.7}$$

Sendo M um espaço métrico compacto, temos uma base enumerável de abertos $\mathcal{U} = \{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Seja $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por $\mathcal{U}$. Assim, a álgebra $\mathcal{A}$ é enumerável, pois, se denotarmos por $\mathcal{A}_n$ a álgebra gerada pela família finita $\{U_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, cada álgebra $\mathcal{A}_n$ é enumerável já que é finita e, sendo
$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n,$$
segue que $\mathcal{A}$ é enumerável. Além disso, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de Borel de M, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Como, para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$, temos $\widehat{\mu}(\mathcal{P}_A) = 1$ e sendo $\mathcal{A}$ enumerável , o conjunto definido por
$$\mathcal{P}_* = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_A$$
é $\widehat{\mu}$-mensurável por ser uma interseção enumerável e $\widehat{\mu}(\mathcal{P}_*) = 1$. Agora, para cada $P \in \mathcal{P}_*$, defina a função $\mu_P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ por
$$\mu_P(A) = E(A)(P).$$
Das equações (1.5) e (1.6) concluímos que
$$E(A)(P) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x) \cap A)}{\mu(\mathcal{P}_n(x))}$$
e, portanto $\mu_P(M) = E(M)(P) = 1$. Além disso, cada μ_P é uma função aditiva, pois, dados $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \cap B = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned}
\mu_P(A \cup B) &= E(A \cup B)(P) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x) \cap (A \cup B))}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu((\mathcal{P}_n(x) \cap A) \cup (\mathcal{P}_n(x) \cap B))}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x) \cap A)}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} + \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x) \cap B)}{\mu(\mathcal{P}_n(x))} \\
&= E(A)(P) + E(B)(P) \\
&= \mu_P(A) + \mu_P(B).
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1, cada função μ_P pode ser estendida a uma medida de probabilidade $\mu_P : \mathcal{B} \to [0, 1]$ (que denotaremos pelo mesmo símbolo μ_P) definida na σ-álgebra de Borel

$\mathcal{B}$. Portanto, a seguinte afirmação conclui a prova do nosso teorema:

Afirmação: A família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}_*\}$ é uma desintegração de μ relativamente à partição $\mathcal{P}_*$.

De fato, vamos verificar que essa família satisfaz as propriedades (a) e (b) da Definição 12.

(a) Seja $P \in \mathcal{P}_* = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_A \subseteq \mathcal{P}$. Como cada $\mathcal{P}_n$ é uma partição e

$$\mathcal{P}_n \prec \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

existe um único $P_n \in \mathcal{P}_n$ que contém P. Além disso,

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos $P_m \subseteq P_n$, para todo $m \geqslant n$, pois $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_m$. Sendo a medida μ_P regular, existe uma sequência de abertos $A_1^n, A_2^n, ..., A_i^n, ...,$ com $P_n \subseteq A_i^n$ para todo i, tal que

$$\mu_P(P_n) = \mu_P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^n\right). \tag{1.8}$$

Como $P_m \subseteq P_n \subseteq A_i^n$, para todo $m \geqslant n$, temos que

$$\mu_P(A_i^n) = E(A_i^n)(P) = \lim_{m \to +\infty} \frac{\mu(P_m \cap A_i^n)}{\mu(P_m)} = \lim_{m \to +\infty} \frac{\mu(P_m)}{\mu(P_m)} = 1,$$

mostrando que $\mu_P(A_i^n) = 1$, para todo i e, por (1.8), concluímos que $\mu_P(P_n) = 1$. Portanto,

$$\mu_P(P) = \mu_P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\right) = 1.$$

(b) Pelo item (b) do Lema 1, para cada $A \in \mathcal{A}$, a função $\mathcal{P}_* \to \mathbb{R}$ dada por

$$P \mapsto \mu_P(A) = E(A)(P)$$

é mensurável (veja a definição de $E(A)(P)$ em (1.6)) e, por (1.7), temos

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\mathcal{P}_A} E(A)d\widehat{\mu} \\ &= \int_{\mathcal{P}_*} E(A)d\widehat{\mu} \\ &= \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(A)d\widehat{\mu}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos o fato de que $\widehat{\mu}(\mathcal{P}_*) = \widehat{\mu}(\mathcal{P}_A) = 1$. Em resumo, provamos duas propriedades:

(i) Para todo $A \in \mathcal{A}$, a função $\mathcal{P}_* \to \mathbb{R}$ dada por

$$P \mapsto \mu_P(A) = E(A)(P)$$

é mensurável.

(ii) Para todo $A \in \mathcal{A}$, temos

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(A) d\widehat{\mu}.$$

A família de subconjuntos

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B};\ A \text{ satisfaz as propriedades } (i) \text{ e } (ii)\ acima\}$$

é uma classe monótona. De fato, se $(A_i)_i \subset \mathcal{C}$ for uma sequência crescente e $(B_i)_i \subset \mathcal{C}$ for uma sequência decrescente de subconjuntos, então $P \mapsto \mu_P(A_i)$ é uma sequência crescente de funções mensuráveis e $P \mapsto \mu_P(B_i)$ é uma sequência decrescente de funções mensuráveis. Logo, denotando

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad e \quad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

temos, pelos teoremas de convergência (5) e (6), que as funções

$$P \mapsto \mu_P(A) = \sup_i \mu_P(A_i) \quad e \quad P \mapsto \mu_P(B) = \inf_i \mu_P(B_i)$$

são mensuráveis. Além disso, temos

$$\mu(A) = \lim_{i \to +\infty} \mu(A_i) = \lim_{i \to +\infty} \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(A_i) d\widehat{\mu} = \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(A) d\widehat{\mu}$$

e

$$\mu(B) = \lim_{i \to +\infty} \mu(B_i) = \lim_{i \to +\infty} \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(B_i) d\widehat{\mu} = \int_{\mathcal{P}_*} \mu_P(B) d\widehat{\mu},$$

mostrando que $A, B \in \mathcal{C}$, ou seja, que a família $\mathcal{C}$ é uma classe monótona. Portanto, sendo $\mathcal{C}$ uma classe monótona que contém a álgebra $\mathcal{A}$, pelo Teorema 4, obtemos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$. Assim, as propriedades (i) e (ii) são válidas para todo conjunto $A \in \mathcal{B}$. Logo, o item (ii) é equivalente a: Para todo $A \in \mathcal{B}$ e $\varphi = \chi_A$, temos

$$\int \varphi d\mu = \int_{\mathcal{P}_*} \left(\int \varphi d\mu_P \right) d\widehat{\mu}. \tag{1.9}$$

Para finalizar, suponha que $\varphi : M \to \mathbb{R}$ seja uma função mensurável e limitada. Então, existe uma sequência de funções simples $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente para φ. Logo, a sequência de funções mensuráveis $P \mapsto \int \varphi_i d\mu_P$ converge uniformemente para a função $P \mapsto \int \varphi d\mu_P$. Portanto, a função $P \mapsto \int \varphi d\mu_P$ é mensurável e a equação (1.9) é verdadeira. $\square$

Definição 13. *Sejam* $(M, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $f : M \to M$ *uma função mensurável, que também chamaremos de* ***sistema dinâmico****. Dizemos que a medida* μ *é* f*-****invariante****, ou que* μ *é invariante por* f*, ou ainda, que* f *preserva a medida* μ *se* $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$*, para todo conjunto mensurável* $A \subseteq M$*.*

Observação 5. *Note que dizer que* μ *é* f*-invariante é equivalente a dizer que* $f_*\mu = \mu$*.*

Definição 14. *Sejam* $(M, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $f : M \to M$ *uma função mensurável. Dizemos que um conjunto mensurável* $A \subseteq M$ *é invariante se*

$$\mu\left(A \triangle f^{-1}(A)\right) = 0,$$

onde $A \triangle f^{-1}(A) = (A \backslash f^{-1}(A)) \cup (f^{-1}(A) \backslash A)$ *é a diferença simétrica entre os conjuntos* A *e* $f^{-1}(A)$*.*

Definição 15. *Sejam* $(M, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de probabilidade,* $f : M \to M$ *uma função mensurável e suponha que* μ *seja* f*-invariante. Neste caso, dizemos que o par* (f, μ) *é* ***ergódico****, ou que a medida* μ *é ergódica, se para todo conjunto invariante* A*, tivermos* $\mu(A) = 0$ *ou* $\mu(A) = 1$*.*

Teorema 12 (Desintegração Ergódica)**.** *Sejam* M *um espaço métrico completo e separável,* $f : M \to M$ *uma função mensurável e* μ *uma medida de probabilidade* f*-invariante. Então existem um conjunto mensurável* $M_0 \subseteq M$ *com* $\mu(M_0) = 1$*, uma partição* $\mathcal{P}$ *de* M_0 *em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades* $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ *em* M*, com as seguintes propriedades:*

(a) $\mu_P(P) = 1$ *para* $\widehat{\mu}$*-quase todo* $P \in \mathcal{P}$*;*

(b) Para toda $\varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$*, a função* $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$*, dada por* $P \mapsto \displaystyle\int_M \varphi d\mu_P$*, é* $\widehat{\mu}$*-mensurável e*

$$\int_M \varphi d\mu = \int_{\mathcal{P}} \left(\int_M \varphi d\mu_P \right) d\widehat{\mu}.$$

(c) μ_P *é* f*-invariante e ergódica para* $\widehat{\mu}$*-quase todo* $P \in \mathcal{P}$*.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por uma base enumerável de abertos de M. Então $\mathcal{A}$ é enumerável e ela gera a σ-álgebra de Borel de M. Pelo Teorema de Birkhoff (veja (KATOK; HASSELBLATT, 1995)), para cada conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$, o limite

$$\tau(A, x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)),$$

existe para μ- quase todo ponto $x \in M$. Assim, para cada $A \in \mathcal{A}$, existe um conjunto $M_A \subseteq M$, com $\mu(M_A) = 1$, tal que o limite $\tau(A, x)$ acima existe para todo $x \in M_A$. Considerando,

$$M_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} M_A,$$

temos que $\mu(M_0) = 1$, pois o conjunto $M \backslash M_0$ tem medida nula por ser uma união enumerável de conjuntos de medida nula.

Seja $\mathcal{P}$ a partição de M_0 dada pela seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow \tau(A,x) = \tau(A,y), \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Afirmação 1: A partição $\mathcal{P}$, definida acima, é mensurável.

De fato, sejam $\{A_k; k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos elementos da álgebra $\mathcal{A}$ e $\{q_k; k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos números racionais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n$ a partição de M_0 dada pela relação de equivalência: $x \sim y \Leftrightarrow$ para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\begin{cases} \tau(A_i, x) \leqslant q_j \;\; e \;\; \tau(A_i, y) \leqslant q_j \\ \qquad\qquad ou \\ \tau(A_i, x) > q_j \;\; e \;\; \tau(A_i, y) > q_j. \end{cases}$$

Assim, cada $\mathcal{P}_n$ é uma partição finita de M_0 com, no máximo, 2^{n^2} elementos. Além disso, $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, todo elemento de $\mathcal{P}_{n+1}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_n$. Logo, x, y estão num mesmo elemento do conjunto

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n; \;\; \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset \; e \; P_n \in \mathcal{P}_n, \forall n \right\}$$

$$\Leftrightarrow \;\; x, y \in P_n \in \mathcal{P}_n \;\; \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow \;\; \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}, \;\; temos$$

$$\begin{cases} \tau(A_i, x) \leqslant q_j \;\; e \;\; \tau(A_i, y) \leqslant q_j \\ \qquad\qquad ou \\ \tau(A_i, x) > q_j \;\; e \;\; \tau(A_i, y) > q_j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \;\; \tau(A_i, x) = \tau(A_i, y), \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$
$$\text{pois } \{q_j; j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \text{ é denso em } \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \;\; \tau(A, x) = \tau(A, y), \text{ para todo } A \in \{A_i; i \in \mathbb{N}\} = \mathcal{A}$$
$$\Leftrightarrow \;\; x, y \text{ estão num mesmo elemento do conjunto } \mathcal{P}.$$

Logo $\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ e, portanto, $\mathcal{P}$ é mensurável. Assim, pelo Teorema de Desintegração de Rokhlin, existe uma desintegração $\{\mu_p;\; P \in \mathcal{P}\}$ de μ em relação a $\mathcal{P}$ satisfazendo as propriedades (a) e (b). Logo, para concluir a demonstração, basta provar a seguinte afirmação:

Afirmação 2: μ_P é invariante e ergódica para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$.

Primeiro, note que todo conjunto $P \in \mathcal{P}$ é invariante por f, pois, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\tau(A, f(x)) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_A(f^j(x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) - \frac{1}{n}[\chi_A(x) - \chi_A(f^n(x))] \\ &= \tau(A,x) - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[\chi_A(x) - \chi_A(f^n(x))] \\ &= \tau(A,x),\end{aligned}$$

mostrando que x *e* $f(x)$ estão sempre num mesmo elemento de $\mathcal{P}$. Sendo assim, a família de probabilidades $\{f_*\mu_p;\ P \in \mathcal{P}\}$ satisfaz:

$$f_*\mu_p(P) = \mu_p(f^{-1}(P)) = \mu_p(P) = 1,$$

para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$. Além disso, sendo $\{\mu_p;\ P \in \mathcal{P}\}$ uma desintegração, para todo conjunto mensurável $E \subseteq M$, a função $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$ dada por

$$P \mapsto f_*\mu_p(E) = \mu_p(f^{-1}(E))$$

é mensurável e, sendo μ invariante por f, temos

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) = \int_{\mathcal{P}} \mu_p(f^{-1}(E))d\widehat{\mu} = \int_{\mathcal{P}} f_*\mu_p(E)d\widehat{\mu}.$$

Portanto, a família $\{f_*\mu_p;\ P \in \mathcal{P}\}$ é uma desintegração de μ em relação a $\mathcal{P}$ e, pela unicidade da desintegração, segue que $f_*\mu_p = \mu_P$, para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$.

Para finalizar, mostraremos que μ_P é ergódica para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$. De fato, sendo $\mu(M_0) = 1$, temos que $\mu_P(M_0 \cap P) = 1$ para quase todo $P \in \mathcal{P}$. Logo, por uma caracterização de ergodicidade, basta mostrar que, para qualquer conjunto mensurável $E \subseteq M$, a função

$$x \mapsto \tau(E,x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))$$

está bem definida e é constante em $M_0 \cap P$.

Para isso, tome $P \in \mathcal{P}$ fixo e considere a coleção de subconjuntos de M dada por

$$\mathcal{C} = \{E \subseteq M; E \text{ é mensurável } e\ \tau(E,x) \text{ está bem definido e é constante em } M_0 \cap P\}.$$

Dado $A \in \mathcal{A}$, da definição de M_0, segue que $\tau(A,x)$ está bem definida em $M_0 \cap P$ e, pela definição da partição $\mathcal{P}$, $\tau(A,x)$ é constante em $M_0 \cap P$. Sendo assim, temos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Além disso, dados $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$, com $E_1 \subseteq E_2$, temos

$$\tau(E_2 \backslash E_1, x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{E_2\backslash E_1}(f^j(x))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} [\chi_{E_2}(f^j(x)) - \chi_{E_1}(f^j(x))]$$

$$= \tau(E_2, x) - \tau(E_1, x),$$

o que implica que $E_2 \backslash E_1 \in \mathcal{C}$. Em particular, se $E \in \mathcal{C}$, então $E^c = M \backslash E \in \mathcal{C}$, pois $M \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Além disso, para qualquer família $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, temos que

$$\begin{aligned}
\tau(\cup_{i=1}^{\infty} E_i, x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i}(f^j(x)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}\right](f^j(x)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(f^j(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{E_i}(f^j(x))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i, x)
\end{aligned}$$

está bem definido e é constante em $M_0 \cap P$, mostrando que $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{C}$.

Usando as propriedades acima, concluímos que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona. De fato, para quaisquer $A_j, B_j \in \mathcal{C}$, com $A_j \subseteq A_{j+1}$ e $B_j \supseteq B_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \bigcup \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{j+1} \backslash A_j)\right] \in \mathcal{C} \quad e \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^c\right)^c \in \mathcal{C}.$$

Pelo Teorema 4, das classes monótonas, segue que $\mathcal{C}$ contém a σ- álgebra de Borel de M. Sendo assim, para todo conjunto mensurável e f-invariante $E \subseteq M$, temos $E \in \mathcal{C}$ e, consequentemente

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))$$

é constante em $M_0 \cap P$, com $\mu_P(M_0 \cap P) = 1$. Logo $\mu_P(E) = 0$ ou $\mu_P(E) = 1$ e, portanto, μ_P é ergódica para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$. $\square$

Para finalizar esta seção enunciaremos um teorema importante que será útil na demonstração do nosso Teorema B.

Teorema 13 (Recorrência de Poincaré)**.** *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : M \to M$ uma função mensurável e suponha que μ seja uma medida f-invariante. Se $A \subseteq M$ for um conjunto mensurável com medida positiva, então para μ-quase todo $x \in A$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N};\ f^n(x) \in A\}$ é infinito.*

1.3 Folheações em Variedades

Definição 16. *Seja M uma variedade de dimensão $m \geqslant 2$ e classe C^∞. Uma* ***folheação*** *de dimensão n, com $0 < n < m$, e classe C^r é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r, com as seguintes propriedades:*
a) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde D_1 e D_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente;
b) Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenada

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

é da forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Observação 6. *Boas referências sobre folheações e variedades são os livros (CAMACHO; NETO, 1985) e (LEE, 2013).*

Definição 17. *Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade M é* ***minimal*** *se todas as folhas são densas em M.*

Definição 18. *Sejam (M, σ) um espaço topológico e $f : M \to M$ uma transformação contínua. Dizemos que f é* ***transitiva*** *se existe $x \in M$ tal que a órbita $\{f^n(x) :\ n \in \mathbb{N}\}$ é densa em M. Neste caso, o ponto x é chamado de* ***ponto transitivo*** *para f.*

Definição 19. *Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é* ***robustamente transitivo*** *se existe uma vizinhança aberta $U_f \subset Diff(M)$, na topologia C^1, tal que todo $g \in U_f$ é transitivo.*

Definição 20. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ de M tem* ***desintegração atômica*** *com relação à medida μ se, para toda carta folheada $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, as medidas condicionais (isto é, as medidas $\mu_x|_{U \cap \mathcal{F}}$), obtidas da desintegração de μ nas folhas de U, são somas de medidas de Dirac. Dizemos que a desintegração é* ***mono-atômica*** *se cada medida condicional for apenas uma medida de Dirac.*

1.4 Folheações absolutamente contínuas

Nesta seção apresentaremos algumas definições e conceitos que serão utilizados na demonstração do Teorema C, para mais detalhes veja (BRIN; STUCK, 2015).

Definição 21. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade M. Dizemos que uma folheação $\mathcal{T}$ é **localmente transversal** a $\mathcal{F}$ se, para cada ponto $p \in M$, existir uma vizinhança $U \ni p$ tal que $U \cap \mathcal{F}_p \cap \mathcal{T}_p = \{p\}$ e, além disso,*

$$T_pM = T_p\mathcal{F}_p \oplus T_p\mathcal{T}_p.$$

Desta forma, uma holonomia (ou $\mathcal{F}$-holonomia) entre duas folhas T_1 e T_2 de $\mathcal{T}$ é a função $h_{T_1,T_2} : T_1 \to T_2$ definida por $h_{T_1,T_2}(p) = \mathcal{F}_p \cap T_2$.

Definição 22. *Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade M é **transversalmente absolutamente contínua** se, para todo par de folhas T_1 e T_2 transversais a $\mathcal{F}$, a $\mathcal{F}$-holonomia h_{T_1,T_2} entre T_1 e T_2 é absolutamente contínua em relação as medidas λ_{T_1} e λ_{T_2}, isto é, se $A \subseteq T_1$ for tal que $\lambda_{T_1}(A) = 0$, então $\lambda_{T_2}(h_{T_1,T_2}(A)) = 0$ (aqui λ_{T_1} e λ_{T_2} são as medidas das folhas T_1 e T_2, respectivamente).*

Proposição 4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade compacta M. Então $\mathcal{F}$ é transversalmente absolutamente contínua se, e somente se, para cada par de folhas T_1 e T_2 transversais a $\mathcal{F}$, existe uma função mensurável positiva $J : T_1 \to \mathbb{R}$, tal que*

$$\lambda_{T_2}(h_{T_1,T_2}(A)) = \int_{T_1} 1_A J d\lambda_{T_1},$$

para todo subconjunto mensurável $A \subseteq T_1$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F}$ seja transversalmente absolutamente contínua. Como $h^{-1}_{T_2,T_1} = h_{T_1,T_2}$, dado um subconjunto $B \subseteq T_1$, com $\lambda_{T_1}(B) = 0$, temos

$$(h_{T_2,T_1})_* \lambda_{T_2}(B) = \lambda_{T_2}(h^{-1}_{T_2,T_1}(B)) = \lambda_{T_2}(h_{T_1,T_2}(B)) = 0,$$

mostrando que $(h_{T_2,T_1})_* \lambda_{T_2} \ll \lambda_{T_1}$ e, pelo Teorema 7, de Radon-Nikodym, existe uma função mensurável positiva $J : T_1 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\lambda_{T_2}(h_{T_1,T_2}(A)) = (h_{T_2,T_1})_* \lambda_{T_2}(A) = \int_{T_1} 1_A J d\lambda_{T_1},$$

para todo subconjunto mensurável $A \subseteq T_1$. A recíproca é imediata. □

Definição 23. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 de uma variedade M. Dada uma folheação $\mathcal{L}$ de classe C^1 e localmente transversal a $\mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **folheação absolutamente contínua** (ou folheação absolutamente contínua em relação a $\mathcal{L}$) se, para cada carta folheada U e para cada $L \in \mathcal{L}$ que intercepta U, existe uma família de* *funções mensuráveis positivas* $\delta_x : \mathcal{F}_x \cap U \to \mathbb{R}$, *com* $x \in L$, *(chamadas de densidades condicionais) tal que, para todo conjunto mensurável* $A \subseteq U$,

$$\mu(A) = \int_L \left[\int_{\mathcal{F}_x \cap U} 1_A(x,y)\delta_x(y) d\lambda_{\mathcal{F}_x}(y) \right] d\lambda_L(x),$$

onde $\chi_A(x,.) : U \to \{0,1\}$, *com* $x \in L$, *é uma família de funções característica de* A.

A propriedade de uma folheação ser transversalmente absolutamente contínua é sempre mais forte do que a continuidade absoluta, como mostra o próximo resultado cuja demonstração pode ser encontrada em (BRIN; STUCK, 2015).

Proposição 5. *Seja* M *uma variedade compacta. Então, toda folheação* $\mathcal{W}$ *de* M *transversalmente absolutamente contínua é absolutamente contínua.*

Definição 24. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação de uma variedade* M. *Então:*

(i) $\mathcal{F}$ *é* ***inferiormente absolutamente contínua*** *se, dada uma carta folheada* (U, φ), *para* μ*-quase todo* $x \in U$, *a medida da folha* $\lambda_{\mathcal{F}_x}$ *é absolutamente contínua em relação a medida desintegrada* μ_x, *isto é,*

$$\lambda_{\mathcal{F}_x} \ll \mu_x, \quad para\ \mu - quase\ todo\ x \in U.$$

(ii) $\mathcal{F}$ *é* ***superiormente absolutamente contínua*** *se, dada uma carta folheada* (U, φ), *para* μ*-quase todo* $x \in U$, *a medida desintegrada* μ_x *é absolutamente contínua em relação a medida da folha* $\lambda_{\mathcal{F}_x}$, *isto é,*

$$\mu_x \ll \lambda_{\mathcal{F}_x}, \quad para\ \mu - quase\ todo\ x \in U.$$

(iii) $\mathcal{F}$ *é* ***inferiormente e superiormente absolutamente contínua*** *se, dada uma carta folheada* (U, φ), *para* μ*-quase todo* $x \in U$, *a medida da folha* $\lambda_{\mathcal{F}_x}$ *é equivalente a medida desintegrada* μ_x, *isto é,*

$$\lambda_{\mathcal{F}_x} \ll \mu_x \ \ e \ \ \mu_x \ll \lambda_{\mathcal{F}_x}, \quad para\ \mu - quase\ todo\ x \in U.$$

Observação 7. *Na definição acima, estamos pensando na medida desintegrada* μ_x *como sendo a restrição* $\mu_x |_{\mathcal{F}_x}$ *que, pela teoria da desintegração de medidas, é uma medida de probabilidade na subvariedade* $\mathcal{F}_x$.

1.5 Sistemas Hiperbólicos

Nesta seção enunciaremos alguns resultados de (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014). Como esses autores abordam desintegrações em sistemas dinâmicos parcialmente hiperbólicos, falaremos brevemente um pouco destes conceitos (veja também (HAMMERLINDL, 2009)).

Definição 25. *Seja M uma variedade compacta. Um difeomorfismo $f : M \to M$ é chamado de* ***parcialmente hiperbólico*** *se existem constantes $\lambda < \alpha_1 < 1 < \alpha_2 < \mu$ e $C > 0$ tais que, para todo $x \in M$, existe uma decomposição do espaço tangente T_xM em soma direta*

$$T_xM = E_x^u \oplus E_x^c \oplus E_x^s,$$

com $D_xfE_x^\tau = E_{f(x)}^\tau$, para todo $\tau \in \{s, c, u\}$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\mu^n\|v\| &< \|(D_xf)^n v\|, && \text{para todo } v \in E_x^u\backslash\{0\} \\ \frac{1}{C}\alpha_1^n\|v\| &< \|(D_xf)^n v\| < C\alpha_2^n\|v\|, && \text{para todo } v \in E_x^c\backslash\{0\} \\ \|(D_xf)^n v\| &< C\lambda^n\|v\|, && \text{para todo } v \in E_x^s\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Observação 8. *É possível escolher uma métrica em M (chamada de métrica adaptada) de tal forma que $C = 1$ na definição acima. Neste caso, segue das desigualdades acima que,*

$$\|(D_xf)^n v^s\| < \|(D_xf)^n v^c\| < \|(D_xf)^n v^u\|,$$

para todo vetor unitário $v^\tau \in E_x^\tau$, com $\tau \in \{s, c, u\}$. Além disso, temos $\|(D_xf)^n|E_x^s\| < 1$ e $\|(D_xf)^{-n}|E_x^u\| < 1$.

Definição 26. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo definido numa variedade compacta M. Dizemos que f é um* ***difeomorfismo de Anosov*** *se, para todo $x \in M$, o espaço tangente T_xM pode ser decomposto como uma soma direta de subespaços*

$$T_xM = E_x^s \oplus E_x^u,$$

com as seguintes propriedades:

(a) *$D_xf(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ e $D_xf(E_x^u) = E_{f(x)}^u$;*

(b) *Existem constantes $\lambda \in (0, 1)$ e $C > 0$ tais que*

$$\begin{cases} \| (D_xf)^n(v) \| \leqslant C\lambda^n \| v \| \quad \text{para todo} \quad v \in E_x^s \quad e \quad n \geqslant 0 \\ \qquad\qquad e \\ \| (D_xf)^{-n}(v) \| \leqslant C\lambda^n \| v \| \quad \text{para todo} \quad v \in E_x^u \quad e \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemplo 2. *Para uma matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica, isto é, sem autovalores de módulo um, o difeomorfismo hiperbólico linear*

$$f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$$

$$[x] \to [Ax]$$

é um difeomorfismo de Anosov que é chamado de Anosov linear associado a matriz A.

Definição 27. *Um difeomorfismo $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é chamado de **Derivado de Anosov**, ou simplesmente **DA**, se ele for parcialmente hiperbólico e for homotopicamente equivalente a algum difeomorfismo hiperbólico linear f_A.*

Observação 9. *Se o difeomorfismo $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ for um **DA**, seu Anosov linear associado f_A é único.*

Teorema 14 (G. Ponce, A. Tahzibi, R. Varão)**.** *Existe um subconjunto aberto $U \subseteq Diff_{Vol}(\mathbb{T}^3)$ no espaço dos difeomorfismos $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ parcialmente hiperbólicos que preservam volume tal que, para todo $g \in U$, a folheação central de g é minimal e ainda mensurável (em relação à medida de Lebesgue) como partição.*

Teorema 15 (G. Ponce, A. Tahzibi, R. Varão)**.** *Seja $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo DA, que tem medida de volume invariante e ergódica. Se o volume tem desintegração atômica nas folhas centrais, então a desintegração é mono atômica.*

Definição 28. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico numa variedade compacta M. Definimos os **expoentes de Lyapunov** de f no ponto x em relação aos espaços E^u, E^c e E^s por*

$$\lambda^\tau(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} log\|(D_x f)^n v\|,$$

onde $v \in E^\tau$ e $\tau \in \{u, c, s\}$.

Teorema 16 (G. Ponce, A. Tahzibi, R. Varão)**.** *Seja $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo DA, que preserva volume. Suponha que sua linearização f_A tenha decomposição*

$$T_A M = E^{us} \oplus E^{u\omega} \oplus E^s$$

(onde E^{us} e $E^{u\omega}$ correspondem às folhas instável forte e instável fraca, respectivamente). Se f tem $\lambda^c(x) < 0$ para quase todos os pontos $x \in \mathbb{T}^3$ (em relação a medida de volume), então o volume tem desintegração atômica nas folhas $\mathcal{F}^c_f$ e, consequentemente, a desintegração é mono atômica.

2 Resultados principais

2.1 Teorema A

Teorema A. *Sejam M uma variedade compacta de dimensão m e $\mathcal{F}$ uma folheação de M por folhas não compactas de dimensão n (folheação cujas folhas são variedades imersas n-dimensionais e não compactas), com $1 \leqslant n < m$, que é invariante por um homeomorfismo $f : M \to M$, ou seja, $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$, e seja μ uma medida de probabilidade definida na σ-álgebra de Borel de M tal que $f_*\mu = \mu$. Suponha que (f, μ) seja ergódico e que $\mathcal{F}$ é contraída por f, isto é, para todos $x, y \in M$, com $x \in \mathcal{F}(y)$, temos*

$$\limsup_{n\to+\infty} d_{\mathcal{F}}(f^n(x), f^n(y)) = 0. \tag{2.1}$$

Se a partição de M pelas folhas de $\mathcal{F}$ é mensurável, então a desintegração de μ é mono-atômica.

Demonstração. Como a partição de M pelas folhas é mensurável, existe uma desintegração de μ em uma família de probabilidades $\{\mu_x; x \in \mathcal{F}(x)\}$. Sendo $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$, segue que $\{f_*\mu_{f^{-1}(x)}; x \in \mathcal{F}(x)\}$ também é uma desintegração de μ e, pela unicidade, obtemos $f_*\mu_{f^{-1}(x)} = \mu_x$, para μ-quase todo $x \in M$.

Vamos definir, a partir de M, um novo espaço de probabilidade da seguinte forma: Primeiro considere o conjunto

$$\widetilde{M} = \bigcup_{x\in M} (\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x))),$$

isto é, $\widetilde{M}$ é o conjunto dos pares ordenados da forma $\xi = (x, y)$, com $x \in M$, $y \in \mathcal{F}(x)$. Agora, chamaremos de **conjuntos básicos** todos os subconjuntos de $\widetilde{M}$ da forma

$$\bigcup_{x\in B} (\{x\} \times (A \cap \mathcal{F}(x))), \text{ com } A, B \in \mathcal{B},$$

onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de M. Considerando a família de todos os conjuntos básicos

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left\{ \bigcup_{x\in B} (\{x\} \times (A \cap \mathcal{F}(x))); \text{ com } A, B \in \mathcal{B} \right\},$$

temos o seguinte lema:

Lema 2. *A família de uniões finitas*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i; \ \textit{com } \widetilde{A}_i \in \widetilde{\mathcal{C}} \textit{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma álgebra de subconjuntos de $\widetilde{M}$.

Demonstração. Os três itens abaixo provam nosso lema:

(i) Como $M \in \mathcal{B}$, temos que

$$\widetilde{M} = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x))) \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

(ii) É óbvio que o conjunto $\widetilde{\mathcal{A}}$ é fechado para uniões finitas.

(iii) O complementar de um conjunto básico

$$\left[\bigcup_{x \in B} (\{x\} \times (A \cap \mathcal{F}(x)))\right]^c = \left[\bigcup_{x \in B} (\{x\} \times (A^c \cap \mathcal{F}(x)))\right] \bigcup \left[\bigcup_{x \in B^c} (\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right]$$

é sempre a união de dois conjuntos básicos. Por outro lado, dados os conjuntos básicos

$$\bigcup_{x \in B_i} (\{x\} \times (A_i \cap \mathcal{F}(x))), \text{ com } i = 1, 2, ..., r$$

temos $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r \in \mathcal{B}$ e $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_r \in \mathcal{B}$. Assim,

$$\bigcap_{i=1}^{r} \left[\bigcup_{x \in B_i} (\{x\} \times (A_i \cap \mathcal{F}(x)))\right] = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_r} (\{x\} \times (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r \cap \mathcal{F}(x)))$$

mostra que a interseção finita de conjuntos básicos é sempre um conjunto básico. Consequentemente, como todo $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ é uma união finita de conjuntos básicos

$$\widetilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i,$$

o seu complementar é dado por

$$\widetilde{A}^c = \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} (\widetilde{B}_i \cup \widetilde{C}_i),$$

onde $\widetilde{B}_i$ e $\widetilde{C}_i$ são conjuntos básicos e, por distributividade, segue que $\widetilde{A}^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$ pois $\widetilde{A}^c$ é uma união finita de interseções de conjuntos básicos. Portanto o conjunto $\widetilde{\mathcal{A}}$ é fechado para o complementar.

□

Definiremos agora uma função σ-aditiva $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ da seguinte forma: A imagem pela $\widetilde{\mu}$ de cada conjunto básico

$$\widetilde{A}_i = \bigcup_{x \in B_i} (\{x\} \times (A_i \cap \mathcal{F}(x)))$$

é dada por

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i) = \int_{B_i} \mu_x(A_i) d\mu$$

e a imagem de cada união finita de conjuntos básicos

$$\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

é definida pela expressão

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i) - \sum_{1\leqslant i<j} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j \cap \widetilde{A}_k) \\
&\quad - \sum_{1\leqslant i<j<k<p} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j \cap \widetilde{A}_k \cap \widetilde{A}_p) + \ldots + (-1)^{n-1}\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \ldots \cap \widetilde{A}_n).
\end{aligned}$$

Vamos usar o Teorema 3, da extensão de medidas, para obter, a partir de $\widetilde{\mu}$, uma medida de probabilidade na σ-álgebra gerada por $\widetilde{\mathcal{A}}$, mas antes, vamos verificar se $\widetilde{\mu}(\widetilde{M}) = 1$ e se $\widetilde{\mu}$ é realmente σ-aditiva nos seguintes itens:

(i) Sendo

$$\widetilde{M} = \bigcup_{x\in M} (\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))$$

um conjunto básico, segue que

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{M}) = \int_M \mu_x(M) d\mu = 1.$$

(ii) Para mostrar a σ-aditividade usaremos o Teorema 2, da continuidade no vazio. Pela forma como foi definida a função $\widetilde{\mu}$ é claro que, para qualquer família finita $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ de conjuntos disjuntos, temos

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i),$$

mostrando que $\widetilde{\mu}$ é finitamente aditiva. Para verificar a propriedade da continuidade no vazio, considere uma sequência decrescente $\widetilde{A}_1 \supseteq \widetilde{A}_2 \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{A}_i \supseteq \ldots$ de elementos da álgebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ tal que $\cap_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i = \emptyset$ e provaremos que

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i) = 0.$$

De fato, cada conjunto $\widetilde{A}_i$ é uma união finita de conjuntos básicos, isto é,

$$\widetilde{A}_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \left[\bigcup_{x\in B_j^i} (\{x\} \times (A_j^i \cap \mathcal{F}(x))) \right].$$

A família de conjuntos dada por

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i$$

satisfaz $B_i \supseteq B_{i+1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
x \in B_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{n_{i+1}} B_j^{i+1} \quad &\Rightarrow \quad x \in B_{j_0}^{i+1}, \text{ para algum } j_0 \in \{1,2,...,n_{i+1}\}\\
&\Rightarrow \quad \{x\} \times (A_{j_0}^{i+1} \cap \mathcal{F}(x)) \subseteq \widetilde{A}_{i+1} \subseteq \widetilde{A}_i\\
&\Rightarrow \quad \{x\} \times (A_{j_0}^{i+1} \cap \mathcal{F}(x)) \subseteq \widetilde{A}_i\\
&\Rightarrow \quad x \in B_{j_{00}}^{i}, \text{ para algum } j_{00} \in \{1,2,...,n_i\}\\
&\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i = B_i,
\end{aligned}$$

mostrando que $B_i \supseteq B_{i+1}$. Agora, considerando o conjunto

$$B := \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq M$$

temos a seguinte união disjunta

$$\widetilde{A}_i = \left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right)\right) \dot{\bigcup} \left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right)\right)$$

e, portanto

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i) = \widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right)\right) + \widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right)\right).$$

Então, basta mostrar que cada parcela da soma acima tem limite zero quando $i \to +\infty$. De fato, para o segundo conjunto da união disjunta acima, temos a inclusão

$$\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right) \subseteq \bigcup_{x\in B_i \cap B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))$$

e, pela definição da função $\widetilde{\mu}$,

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{x\in B_i \cap B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right) = \int_{B_i \cap B^c} \mu_x(M) d\mu = \mu(B_i \cap B^c).$$

Portanto

$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B^c}(\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x)))\right)\right) \leqslant \mu(B_i \cap B^c). \tag{2.2}$$

Sendo $B_i \supseteq B_{i+1}$, segue que

$$B_i \cap B^c = \left(\bigcap_{l=1}^{i} B_l\right) \cap B^c,$$

além disso, temos a sequência decrescente $B_i \cap B^c \supseteq B_{i+1} \cap B^c$. Como

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(B_i \cap B^c) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{l=1}^{i} B_l\right) \cap B^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap B^c = B \cap B^c = \varnothing$$

e μ é σ-aditiva, temos, pelo Teorema 2, da continuidade no vazio, que

$$\lim_{i\to+\infty} = \mu(B_i \cap B^c) = 0$$

e, por (2.2), concluímos que

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B^c}(\{x\}\times(M\cap\mathcal{F}(x)))\right)\right) = 0. \tag{2.3}$$

Por outro lado, pela definição da função $\widetilde{\mu}$, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B}(\{x\}\times(M\cap\mathcal{F}(x)))\right)\right) &= \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{x\in B}\widetilde{A}_i \cap(\{x\}\times(M\cap\mathcal{F}(x)))\right)\\ &= \int_B \mu_x(A_i(x))d\mu, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $A_i(x) = \{y \in \mathcal{F}(x);\ (x,y)\in \widetilde{A}_i\}$ e, como $\widetilde{A}_i \supseteq \widetilde{A}_{i+1}$ e $\cap_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}_i = \varnothing$, para cada $x \in B$,

$$A_i(x) \supseteq A_{i+1}(x) \quad e \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i(x) = \varnothing$$

e, sendo cada μ_x σ-aditiva, temos

$$\lim_{i\to+\infty}\mu_x(A_i(x)) = 0.$$

Sendo assim, a sequência de funções mensuráveis $f_i : B \to \mathbb{R}_+$ dada por $f_i(x) = \mu_x(A_i(x))$ é tal que $|f_i(x)| \leqslant 1$ e $\lim\limits_{i\to+\infty} f_i(x) = 0$. Logo, pelo Teorema 6, da convergência dominada, obtemos

$$\lim_{i\to+\infty}\int_B \mu_x(A_i(x))d\mu = \lim_{i\to+\infty}\int_B f_i d\mu = 0$$

e, por (2.4), concluímos que

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{\mu}\left(\widetilde{A}_i \cap \left(\bigcup_{x\in B}(\{x\}\times(M\cap\mathcal{F}(x)))\right)\right) = 0. \tag{2.5}$$

De (2.3) e (2.5) segue que $\lim\limits_{i\to+\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i) = 0$, provando que a função $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$ é σ-aditiva. Portanto, pelo Teorema 3, da extensão de medidas, existe uma única medida de probabilidade, que estende $\widetilde{\mu}$, definida na σ-álgebra gerada $\widetilde{\mathcal{B}} := \sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ que, para simplificar, denotaremos pelo mesmo símbolo $\widetilde{\mu}$.

Lema 3. *A função*

$$\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

$$(x,y) \mapsto (f(x), f(y))$$

é uma bijeção $\widetilde{\mathcal{B}}$-mensurável com inversa $\widetilde{\mathcal{B}}$-mensurável e $\widetilde{f}_*\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}$.

Demonstração. Sendo f um homeomorfismo, segue que $\widetilde{f}$ é claramente uma bijeção e com inversa

$$\widetilde{f}^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Quanto à mensurabilidade de $\widetilde{f}$ (a prova da mensurabilidade de $\widetilde{f}^{-1}$ é análoga), basta observar que, para cada conjunto básico

$$\widetilde{A}_i = \bigcup_{x \in B_i} (\{x\} \times (A_i \cap \mathcal{F}(x))),$$

sua imagem inversa

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i) &= \bigcup_{x \in B_i} \widetilde{f}^{-1}((\{x\} \times (A_i \cap \mathcal{F}(x)))) \\
&= \bigcup_{x \in B_i} (\{f^{-1}(x)\} \times (f^{-1}(A_i) \cap \mathcal{F}(f^{-1}(x)))) \\
&= \bigcup_{f^{-1}(x) \in f^{-1}(B_i)} (\{f^{-1}(x)\} \times (f^{-1}(A_i) \cap \mathcal{F}(f^{-1}(x)))) \\
&= \bigcup_{y \in f^{-1}(B_i)} (\{y\} \times (f^{-1}(A_i) \cap \mathcal{F}(y)))
\end{aligned}$$

é um conjunto básico, pois $f^{-1}(A_i), f^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}$. Além disso,

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)) = \int_{f^{-1}(B_i)} \mu_y(f^{-1}(A_i)) d\mu(y) = \int_{f^{-1}(B_i)} f_*\mu_y(A_i) d\mu(y) = \int_{f^{-1}(B_i)} \mu_{f(y)}(A_i) d\mu(y),$$

onde, na última igualdade, usamos o fato de que $f_*\mu_y = \mu_{f(y)}$ para μ-qtp. Assim,

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)) = \int_{f^{-1}(B_i)} \mu_{f(y)}(A_i) d\mu(y). \tag{2.6}$$

Considerando a função $f : f^{-1}(B_i) \to B_i$ e a função mensurável limitada $\varphi : B_i \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(z) = \mu_z(A_i)$ temos, pelo Teorema 8, da mudança de variável, que

$$\int_{f^{-1}(B_i)} (\varphi \circ f) d\mu = \int_{B_i} \varphi d f_*\mu$$

e, sendo $(\varphi \circ f)(y) = \mu_{f(y)}(A_i)$, $\varphi(z) = \mu_z(A_i)$ e $f_*\mu = \mu$, segue que

$$\int_{f^{-1}(B_i)} \mu_{f(y)}(A_i) d\mu(y) = \int_{B_i} \mu_z(A_i) d\mu(z) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i). \tag{2.7}$$

As equações (2.6) e (2.7) provam que $\widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i)$, para todo conjunto básico $\widetilde{A}_i$. Logo, como a imagem inversa preserva as operações de conjuntos, para toda união finita de conjuntos básicos

$$\widetilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i \in \widetilde{\mathcal{A}},$$

os conjuntos $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)$ são básicos e

$$\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i) \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Tendo em vista que $\widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_i)$, para todo conjunto básico $\widetilde{A}_i$, usando a expressão que define a função $\widetilde{\mu}$ na união finita de conjuntos básicos e o fato dos conjuntos básicos serem fechados para interseções, obtemos

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)\right) = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i\right) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A})$$

e, consequentemente

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A})) = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}_i)\right) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}).$$

Portanto,

$$\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A}) \in \widetilde{\mathcal{A}} \;\; e \;\; \widetilde{\mu}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{A})) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}), \text{ para todo } \widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

e, pela Proposição 2, o mesmo vale na σ-álgebra gerada $\widetilde{\mathcal{B}} = \sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$. □

Lema 4. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, o conjunto*

$$\widetilde{D}_i^{\varepsilon} = \left\{(x, y) \in \widetilde{M};\; d_{\mathcal{F}}(f^i(x), f^i(y)) \leqslant \varepsilon\right\}$$

é $\widetilde{\mu}$-mensurável.

Demonstração. Os conjuntos da forma $A \times B$, com A, B abertos de M, geram a σ-álgebra de Borel de $M \times M$. Sendo

$$\widetilde{M} = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times (M \cap \mathcal{F}(x))) \subseteq M \times M$$

e

$$(A \times B) \cap \widetilde{M} = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times (B \cap \mathcal{F}(x))), \text{ para todos } A, B \subseteq M \text{ abertos},$$

a σ-álgebra $\widetilde{\mathcal{B}}$, que construímos acima, é a σ-álgebra dos Borelianos de $\widetilde{M}$. Como a composta de funções contínuas $F : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, dada por $(x, y) \mapsto d_{\mathcal{F}}(f^i(x), f^i(y))$, é mensurável, o conjunto $\widetilde{D}_i^{\varepsilon} = F^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ é $\widetilde{\mu}$-mensurável. □

Lema 5.

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{x \in M} \{(x, x)\}\right) = 1.$$

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$, os conjuntos

$$\widetilde{B}_k^{\varepsilon} = \left\{(x, y) \in \widetilde{M};\; \sup_{n \geqslant k} d_{\mathcal{F}}(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \varepsilon\right\}$$

são $\widetilde{\mu}$-mensuráveis, pois

$$\widetilde{B}_k^{\varepsilon} = \bigcap_{i=k}^{\infty} \widetilde{D}_i^{\varepsilon},$$

com
$$\widetilde{D}_i^{\varepsilon} = \left\{(x,y) \in \widetilde{M};\ d_{\mathcal{F}}(f^i(x), f^i(y)) \leqslant \varepsilon\right\}$$
e, pelo Lema 4 acima, os conjuntos $\widetilde{D}_i^{\varepsilon}$ são $\widetilde{\mu}$-mensuráveis. Além disso,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k^{\varepsilon} = \widetilde{M} \quad e \quad \widetilde{B}_k^{\varepsilon} \subseteq \widetilde{B}_{k+1}^{\varepsilon}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, como $\widetilde{\mu}(\widetilde{M}) = 1$, para $\varepsilon = 1/2$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{B}_{k_1}^{1/2}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2},$$
para $\varepsilon = 1/2^2$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$, com $k_2 > k_1$, tal que
$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{B}_{k_2}^{1/2^2}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^2},$$
$$\vdots$$
para $\varepsilon = 1/2^j$, existe $k_j \in \mathbb{N}$, com $k_j > k_{j-1}$, tal que
$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j}.$$

Como $\widetilde{f}_*\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}$, temos que
$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{f}^n\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right)\right) = \widetilde{\mu}\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, os conjuntos
$$\widetilde{P}_k^j = \bigcup_{n=k}^{\infty} \widetilde{f}^n\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right)$$
satisfazem $\widetilde{P}_k^j \supseteq \widetilde{P}_{k+1}^j$, e ainda
$$\widetilde{\mu}\left(\widetilde{P}_k^j\right) \geqslant \widetilde{\mu}\left(\widetilde{f}^k\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right)\right) = \widetilde{\mu}\left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j},$$
para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica
$$\widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j\right) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \widetilde{P}_k^j\right) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\mu}\left(\widetilde{P}_N^j\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j},$$
mostrando que
$$\widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j}.$$

Afirmação: Para todo $j \in \mathbb{N}$,
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j \subseteq \bigcup_{x\in M} \left(\{x\} \times B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j]\right),$$

onde $B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j]$ é a bola fechada na folha de centro x e raio $1/2^j$.

Como

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \widetilde{f}^n \left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \right) \subseteq \bigcup_{n=k_j}^{\infty} \widetilde{f}^n \left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \right), \text{ para qualquer } k_j,$$

basta mostrarmos que

$$\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \widetilde{f}^n \left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \right) \subseteq \bigcup_{x \in M} \left(\{x\} \times B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j] \right). \tag{2.8}$$

De fato,

$$(x, y) \in \bigcup_{n=k_j}^{\infty} \widetilde{f}^n \left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \right) \Rightarrow (x, y) \in \widetilde{f}^{k_j+m} \left(\widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \right), \text{ para algum } m \in \mathbb{N},$$

logo

$$\begin{aligned} (x, y) = \widetilde{f}^{k_j+m}(x_0, y_0) = (f^{k_j+m}(x_0), f^{k_j+m}(y_0)), \text{ com } (x_0, y_0) \in \widetilde{B}_{k_j}^{1/2^j} \\ \Rightarrow (x_0, y_0) \in \widetilde{M} \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(f^{k_j+m}(x_0), f^{k_j+m}(y_0)) \leqslant \sup_{n \geqslant k_j} d_{\mathcal{F}}(f^n(x_0), f^n(y_0)) \leqslant 1/2^j \\ \Rightarrow y \in \mathcal{F}(x) \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(x, y) \leqslant 1/2^j \\ \Rightarrow (x, y) \in \bigcup_{x \in M} \left(\{x\} \times B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j] \right), \end{aligned}$$

provando (2.8). Portanto, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j \subseteq \bigcup_{x \in M} \left(\{x\} \times B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j] \right),$$

com

$$\widetilde{\mu} \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_k^j \right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j}.$$

Consequentemente

$$\widetilde{\mu} \left(\bigcup_{x \in M} \left(\{x\} \times B_{\mathcal{F}}[x, 1/2^j] \right) \right) \geqslant 1 - \frac{1}{2^j}$$

e, fazendo $j \to +\infty$, obtemos

$$\widetilde{\mu} \left(\bigcup_{x \in M} \{(x, x)\} \right) \geqslant 1$$

e portanto

$$\widetilde{\mu} \left(\bigcup_{x \in M} \{(x, x)\} \right) = 1.$$

□

Sendo assim, pela definição da medida $\widetilde{\mu}$, temos que

$$\int_M \mu_x(\{x\})d\mu = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{x\in M}\{x\}\times(\{x\}\cap\mathcal{F}(x))\right) = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{x\in M}\{(x,x)\}\right) = 1,$$

o que mostra que

$$\int_M \mu_x(\{x\})d\mu = 1.$$

Portanto, o conjunto

$$N = \{x \in M;\ \mu_x(\{x\}) > 0\}$$

é tal que $\mu(N) = 1$, ou seja, N é um conjunto de átomos com medida total.

Lema 6. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $\widehat{\mu}$-quase toda folha $\mathcal{F}$, o conjunto $\mathcal{F} \cap N$ tem exatamente n_0 átomos.*

Demonstração. Para cada $\delta \geqslant 0$, o conjunto

$$A_\delta = \{x \in N;\ \mu_x(\{x\}) > \delta\}$$

é f-invariante, pois

$$\begin{aligned} x \in A_\delta \quad &\Rightarrow \quad x \in N \ \text{ e } \ \mu_x(\{x\}) > \delta \\ &\Rightarrow \quad \mu_{f(x)}(\{f(x)\}) = f_*\mu_x(\{f(x)\}) = \mu_x(\{x\}) > \delta \\ &\Rightarrow \quad f(x) \in N \ \text{ e } \ \mu_{f(x)}(\{f(x)\}) > \delta \\ &\Rightarrow \quad f(x) \in A_\delta, \end{aligned}$$

mostrando que $f(A_\delta) \subseteq A_\delta$. Logo, pela ergodicidade de f, obtemos $\mu(A_\delta) = 0$ ou $\mu(A_\delta) = 1$ (note que $\mu(A_0) = 1$ e $\mu(A_\delta) = 0$, para $\delta \geqslant 1$). Considerando

$$\delta_0 = sup\{\delta;\ \mu(A_\delta) = 1\},$$

afirmamos que: para $\widehat{\mu}$-quase toda folha $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{F}$, cada átomo $x \in \mathcal{F} \cap N$ satisfaz $\mu_x(\{x\}) = \delta_0$ (aqui $\widehat{\mu} = \pi_*\mu$ é a medida no espaço quociente). De fato, pela definição de supremo, temos

$$\mu(A_{\delta_0 - 1/n}) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que implica $\mu_x(\{x\}) > \delta_0 - 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente $\mu_x(\{x\}) \geqslant \delta_0$. Por outro lado,

$$A_{\delta_0} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in N;\ \mu_x(\{x\}) > \delta_0 + 1/n\},$$

com $\mu\left(\{x \in N;\ \mu_x(\{x\}) > \delta_0 + 1/n\}\right) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\mu(A_{\delta_0}) = 0$ e, consequentemente $\mu_x(\{x\}) \leqslant \delta_0$. Portanto, para $\widehat{\mu}$-quase toda folha $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{F}$, temos $\mu_x(\{x\}) = \delta_0$ e, sendo μ_x probabilidades, cada uma dessas folhas tem $1/\delta_0 = n_0$ átomos. □

O próximo lema conclui a prova do Teorema A.

Lema 7. *Para $\widehat{\mu}$-quase toda folha $\mathcal{F}$, o conjunto $\mathcal{F} \cap N$ tem exatamente um átomo.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, os conjuntos de átomos

$$E_n = \left\{ x \in N; \sup_{y \in N \cap \mathcal{F}(x)} d_{\mathcal{F}}(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon, \text{ para todo } j \geqslant n \right\}$$

satisfazem $E_n \subseteq E_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = N.$$

Cada conjunto E_n é f- invariante pois

$$\begin{aligned} x \in E_n \Rightarrow & \sup_{y \in N \cap \mathcal{F}(x)} d_{\mathcal{F}}(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon, \text{ para todo } j \geqslant n \\ & \Rightarrow \sup_{f(y) \in N \cap \mathcal{F}(f(x))} d_{\mathcal{F}}(f^j(f(x)), f^j(f(y))) < \varepsilon, \text{ para todo } j \geqslant n \\ & \Rightarrow f(x) \in E_n, \end{aligned}$$

mostrando que $f(E_n) \subseteq E_n$. Assim, pela ergodicidade de f, obtemos

$$\mu(E_n) = 0 \ \ ou \ \ \mu(E_n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, sendo

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = N, \text{ com } \mu(N) = 1,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) = 1$. Logo, pela invariância de f, o conjunto de átomos $f^{n_0}(E_{n_0})$ satisfaz

$$\mu(f^{n_0}(E_{n_0})) = \mu(E_{n_0}) = 1.$$

Além disso, para quaisquer $y_1, y_2 \in f^{n_0}(E_{n_0})$ e na mesma folha, temos $y_1 = f^{n_0}(x_1)$ e $y_2 = f^{n_0}(x_2)$, com $x_1, x_2 \in E_{n_0}$ e, portanto

$$d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) = d_{\mathcal{F}}(f^{n_0}(x_1), f^{n_0}(x_2)) < \varepsilon.$$

Em resumo, o argumento acima mostra que, para cada $\varepsilon > 0$, existe sempre um conjunto de átomos E_ε, com $\mu(E_\varepsilon) = 1$, tal que $d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) < \varepsilon$, para todos $y_1, y_2 \in E_\varepsilon$ na mesma folha. Em particular, tomando $\varepsilon = 1/2^i$, o conjunto de átomos

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{1/2^i}$$

é tal que $\mu(E) = 1$ e $d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) = 0$, para todos $y_1, y_2 \in E$ na mesma folha. Portanto o conjunto E tem medida total e sua interseção com cada folha é um conjunto unitário. $\square$

□

Agora, falaremos um pouco do conceito de transformações induzidas, que será usado na demonstração do nosso próximo resultado. Aqui, estamos considerando $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida de Borel e $f : M \to M$ um sistema dinâmico tal que $f_*\mu = \mu$. Se $A \subseteq M$ for um conjunto mensurável com $\mu(A) > 0$, pelo Teorema 13, da recorrência de Poincaré, o tempo do primeiro retorno de x a A, definido por

$$n_A(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{n; f^n(x) \in A\}$$

existe, para μ-quase todo ponto $x \in A$. Sendo assim, a função $f_A : A \to A$, dada por $f_A(x) = f^{n_A(x)}(x)$ e definida em μ-quase todos os pontos de A é chamada de transformação induzida pela f em A. Se a transformação f for ergódica, o próximo lema, provado em (EINSIEDLER; WARD, 2011), nos garante a ergodicidade da transformação induzida f_A.

Lema 8. *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida de Borel, $f : M \to M$ uma bijeção tal que $f_*\mu = \mu$, $A \subseteq M$ um conjunto de medida positiva e f_A a transformação induzida pela f em A, que está definida (a menos de um conjunto de medida nula) no espaço de medida*

$$\left(A, \mathcal{B}|_A, \mu_A = \frac{1}{\mu(A)} \mu|_A \right).$$

Se (f, μ) for ergódico, então (f_A, μ_A) é ergódico.

2.2 Teorema B

Teorema B. *Seja M uma variedade compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de M por retas (folheação cujas folhas são variedades imersas 1-dimensionais e não compactas) que é invariante por um homeomorfismo $f : M \to M$, ou seja, $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$, e seja μ uma medida de probabilidade invariante pela f e definida na σ-álgebra de Borel de M. Suponha que (f, μ) seja ergódico, o conjunto dos pontos transitivos para f tenha medida total e que $\mathcal{F}$ é contraída uniformemente por f, isto é, existe $0 < \lambda < 1$ tal que, dados $x, y \in M$, com $x \in \mathcal{F}(y)$,*

$$d_{\mathcal{F}(x)}(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_{\mathcal{F}(x)}(x, y).$$

Se μ tem desintegração atômica nas folhas de $\mathcal{F}$, então a desintegração é mono-atômica.

Demonstração. Para cada ponto transitivo $x_0 \in M$ denotaremos por $R^{\varepsilon}_{x_0}$ um subconjunto de alguma carta folheada (U, φ) e que também seja uma carta folheada (chamaremos esses conjuntos de retângulos) tal que as folhas de $R^{\varepsilon}_{x_0}$ tenham comprimento ε (aqui estamos supondo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que o retângulo $R^{3\varepsilon}_{x_0}$ também esteja contido em alguma carta folheada). Considerando em cada retângulo $R^{\varepsilon}_{x_0}$ a função $g : R^{\varepsilon}_{x_0} \to R^{\varepsilon}_{x_0}$ dada por

$$g(x) = f^{n(x)}(x), \quad \text{onde } n(x) \text{ é o tempo do primeiro retorno de } x \text{ a } R^{\varepsilon}_{x_0}$$

temos, pelo Lema 8 acima, que g é ergódica com relação à medida $\mu_{R^{\varepsilon}_{x_0}}$. Denotando por μ_x as medidas desintegradas de μ no retângulo $R^{3\varepsilon}_{x_0}$ e considerando o conjunto

$$A_\delta = \{x \in R^{\varepsilon}_{x_0};\ \mu_x(\{x\}) \leqslant \delta\},$$

temos o seguinte lema:

Lema 9. *Para todo $\delta \geqslant 0$, temos $g(A_\delta) \subseteq A_\delta$.*

Demonstração. Para um $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo tal que $3\lambda^{n_0} < 1$ é válida a seguinte afirmação: **Afirmação**: Para cada ponto transitivo $x_0 \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que o tempo do primeiro retorno a $R^{\varepsilon}_{x_0}$, para μ-quase todo $x \in R^{\varepsilon}_{x_0}$, é maior que n_0.
De fato, como o ponto x_0 é transitivo, a órbita $f^n(x_0)$, com $n \in \mathbb{N}$, é formada por pontos disjuntos. Sendo assim, pela continuidade das funções $f, f^2, f^3, ..., f^{n_0}$, existe uma vizinhança aberta $U \ni x_0$ tal que

$$U \cap f^n(U) = \emptyset, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, ..., n_0.$$

Logo, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $R^{\varepsilon}_{x_0} \subset U$, o tempo do primeiro retorno a $R^{\varepsilon}_{x_0}$, para μ-quase todo $x \in R^{\varepsilon}_{x_0}$, é maior que n_0, ou seja, $n(x) > n_0$, para μ-quase todo $x \in R^{\varepsilon}_{x_0}$, provando assim nossa afirmação.

Consequentemente, para μ-quase todo $x \in R^{\varepsilon}_{x_0}$, temos

$$f^{n(x)}\left(\mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}(x)\right) \subseteq \mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}\left(f^{n(x)}(x)\right), \tag{2.9}$$

onde $\mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}(x)$ denota a componente conexa em $R^{3\varepsilon}_{x_0}$ da folha que passa no ponto $x \in R^{\varepsilon}_{x_0}$. De fato, sendo $3\lambda^{n_0} < 1$ e $n(x) > n_0$, temos

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}(x) \quad &\Rightarrow \quad y \in R^{3\varepsilon}_{x_0} \cap \mathcal{F}(x) \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(x, y) < 3\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad f^{n(x)}(y) \in \mathcal{F}(f^{n(x)}(x)) \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(f^{n(x)}(x), f^{n(x)}(y)) \leqslant \lambda^{n(x)} d_{\mathcal{F}}(x, y) < 3\lambda^{n(x)}\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad f^{n(x)}(y) \in \mathcal{F}(f^{n(x)}(x)) \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(f^{n(x)}(x), f^{n(x)}(y)) < 3\lambda^{n(x)}\varepsilon < 3\lambda^{n_0}\varepsilon < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad f^{n(x)}(y) \in \mathcal{F}(f^{n(x)}(x)) \quad e \quad d_{\mathcal{F}}(f^{n(x)}(x), f^{n(x)}(y)) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad f^{n(x)}(y) \in \mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}\left(f^{n(x)}(x)\right),
\end{aligned}$$

onde, na última implicação, usamos o fato de que $f^{n(x)}(x) \in R^{\varepsilon}_{x_0}$ pois, estamos denotando por $n(x)$ o tempo do primeiro retorno de x a $R^{\varepsilon}_{x_0}$. Portanto, sendo a inclusão (2.9) verdadeira, para todo subconjunto mensurável $A \subseteq f^{n(x)}\left(\mathcal{F}_{R^{3\varepsilon}_{x_0}}(x)\right)$, temos

$$\mu_{f^{n(x)}(x)}(A) \leqslant \mu_x(f^{-n(x)}(A)) = f^{n(x)}_* \mu_x(A)$$

e, em particular

$$\mu_{f^{n(x)}(x)}(\{f^{n(x)}(x)\}) \leqslant f_*^{n(x)}\mu_x(\{f^{n(x)}(x)\}), \text{ para } \mu - \text{quase todo } x \in R_{x_0}^{\varepsilon}.$$

Logo

$$\begin{aligned} x \in A_\delta \quad &\Rightarrow \quad \mu_x(\{x\}) \leqslant \delta \\ &\Rightarrow \quad \mu_{f^{n(x)}(x)}(\{f^{n(x)}(x)\}) \leqslant f_*^{n(x)}\mu_x(\{f^{n(x)}(x)\}) = \mu_x(\{x\}) \leqslant \delta \\ &\Rightarrow \quad \mu_{f^{n(x)}(x)}(\{f^{n(x)}(x)\}) \leqslant \delta \\ &\Rightarrow \quad g(x) = f^{n(x)}(x) \in A_\delta, \end{aligned}$$

provando que $g(A_\delta) \subseteq A_\delta$, para todo $\delta \geqslant 0$. □

Lema 10. *Quase toda folha de qualquer retângulo $R_{x_0}^{\varepsilon}$ tem no máximo N_0 átomos, para algum natural N_0.*

Demonstração. Como a função g é ergódica com relação à medida $\mu_{R_{x_0}^{\varepsilon}}$ e, para todo $\delta \geqslant 0$, o conjunto A_δ é g-invariante, segue que

$$\frac{1}{\mu(R_{x_0}^{\varepsilon})}\mu|_{R_{x_0}^{\varepsilon}}(A_\delta) = 0 \ \text{ ou } \ \frac{1}{\mu(R_{x_0}^{\varepsilon})}\mu|_{R_{x_0}^{\varepsilon}}(A_\delta) = 1, \text{ para todo } \delta \geqslant 0.$$

Pela definição do conjunto A_δ temos que

$$\frac{1}{\mu(R_{x_0}^{\varepsilon})}\mu|_{R_{x_0}^{\varepsilon}}(A_0) = 0 \ \ e \ \ \frac{1}{\mu(R_{x_0}^{\varepsilon})}\mu|_{R_{x_0}^{\varepsilon}}(A_\delta) = 1, \text{ para todo } \delta \geqslant 1.$$

Sendo assim, definindo

$$\delta_0 = \inf\left\{\delta;\ \frac{1}{\mu(R_{x_0}^{\varepsilon})}\mu|_{R_{x_0}^{\varepsilon}}(A_\delta) = 1\right\},$$

concluímos, de forma análoga ao argumento usado na demonstração do Lema 6 do teorema anterior, que

$$\mu_x(\{x\}) = \delta_0, \text{ para } \mu - \text{quase todo ponto } x \in R_{x_0}^{\varepsilon}.$$

Logo, como todos os átomos de $R_{x_0}^{\varepsilon}$ tem peso δ_0, no máximo temos $\lceil 1/\delta_0 \rceil = N_0$ átomos nas folhas de $R_{x_0}^{\varepsilon}$, onde $\lceil 1/\delta_0 \rceil$ denota o maior inteiro menor ou igual a $1/\delta_0$. □

Lema 11. *Quase toda folha de $\mathcal{F}$ tem no máximo N_0 átomos.*

Demonstração. Suponha que os pontos transitivos $x_1, x_2, ..., x_{N_0+1}$ sejam átomos distintos de alguma folha genérica $\mathcal{F}(x)$ (lembre que estamos supondo que o conjunto dos pontos transitivos tem medida total) e seja I um segmento desta folha que contém esses átomos. Denotando por $C(I)$ o comprimento do segmento I, temos

$$C(f^n(I)) \leqslant \lambda^n C(I), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, para todo retângulo $R^{\varepsilon}_{x_0}$ e todo ponto transitivo x_i, temos $f^n(x_i) \in R^{\varepsilon}_{x_0}$ para infinitos valores de n e sendo $C(f^n(I)) \to 0$, concluímos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$f^{n_1}(I) \subset R^{\varepsilon}_{x_0},$$

para algum retângulo $R^{\varepsilon}_{x_0}$. Portanto os N_0+1 átomos $f^{n_1}(x_1), f^{n_1}(x_2), ..., f^{n_1}(x_{N_0+1})$ estão numa mesma folha de $R^{\varepsilon}_{x_0}$, contradizendo o lema anterior. □

Lema 12. *Existe* $n_1 \in \{1, 2, ..., N_0\}$ *tal que, quase toda folha de* $\mathcal{F}$ *tem exatamente* n_1 *átomos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_i$ o conjunto das folhas de $\mathcal{F}$ que têm apenas i átomo(s). Seja N o conjunto de todos os átomos e considere os conjuntos

$$A_i = \{x \in N;\ \mathcal{F}(x) \in \mathcal{F}_i\}.$$

Como a imagem de um átomo é sempre um átomo, os conjuntos A_i são invariantes pela f e, portanto, $\mu(A_i) = 0$ ou $\mu(A_i) = 1$. Como toda folha de $\mathcal{F}$ tem no máximo N_0 átomos, temos

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_0} A_i\right) = 1.$$

Logo existe $n_1 \in \{1, 2, ..., N_0\}$ tal que $\mu(A_{n_1}) = 1$. □

Agora, no próximo lema, mostraremos que cada folha de $\mathcal{F}$ tem apenas um átomo e concluímos assim a prova do Teorema B.

Lema 13. *Quase toda folha de* $\mathcal{F}$ *tem apenas um único átomo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T}$ uma folha transversal a folheação $\mathcal{F}$. Denotando por N o conjunto de todos os átomos e considerando a família de conjuntos

$$Q_n = \left\{x \in N;\ d_{\mathcal{F}(y)}(y, \mathcal{T}) \leqslant n,\ \text{para todo } y \in N \cap \mathcal{F}(x)\right\},$$

onde $d_{\mathcal{F}(y)}(y, \mathcal{T})$ é a distância, ao longo da folha $\mathcal{F}(y)$, do átomo y à folha $\mathcal{T}$, temos a seguinte afirmação:

Afirmação:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = \mu(N) = 1.$$

De fato, a inclusão

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset N$$

é óbvia. Por outro lado, considerando apenas as folhas de $\mathcal{F}$ que têm n_1 átomos, temos

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

pois, para $x \in N$, a folha $\mathcal{F}(x)$ tem n_1 átomos e, escolhendo n o menor natural tal que

$$\sup_{y \in N \cap \mathcal{F}(x)} d_{\mathcal{F}(y)}(y, \mathcal{T}) \leqslant n$$

concluímos que $x \in Q_n$, o que prova nossa afirmação.
Sendo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = 1,$$

existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(Q_{l_0}) > 0$. Além disso, pela definição de Q_{l_0}, para todo $x \in Q_{l_0}$, o conjunto $Q_{l_0} \cap \mathcal{F}(x)$ tem n_1 átomos e

$$d_{\mathcal{F}(x)}(a,b) \leqslant 2l_0, \text{ para quaisquer } a, b \in Q_{l_0} \cap \mathcal{F}(x).$$

Agora, para a família de conjuntos

$$B(n) = \bigcup_{i=n}^{\infty} f^i(Q_{l_0}), \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

temos

$$f(B(n)) = \bigcup_{i=n}^{\infty} f^{i+1}(Q_{l_0}) = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} f^i(Q_{l_0}) \subseteq B(n),$$

ou seja,

$$f(B(n)) \subseteq B(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

com $\mu(B(n)) > 0$ e, pela ergodicidade da f, temos

$$\mu(B(n)) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, o conjunto

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(n)$$

tem medida total e a próxima afirmação conclui a prova do lema.
Afirmação: Para todo átomo $x \in B$, o conjunto $B \cap \mathcal{F}(x)$ tem apenas um átomo.
De fato, dados átomos $x \in B$ e

$$y \in B \cap \mathcal{F}(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(n) \cap \mathcal{F}(x),$$

temos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que $y \in B(n)$; logo existem $i_n \in \mathbb{N}$, com $i_n \geqslant n$, e um átomo $b \in Q_{l_0}$ tais que $y = f^{i_n}(b)$. A folha $\mathcal{F}(b)$ contém n_1 átomos e todos esses átomos estão no conjunto Q_{l_0}, logo o conjunto $f^{i_n}(Q_{l_0} \cap \mathcal{F}(b))$ contém todos os átomos da folha $f^{i_n}(\mathcal{F}(b)) = \mathcal{F}(f^{i_n}(b)) = \mathcal{F}(y)$ e, como $x \in \mathcal{F}(y)$, temos que $x \in f^{i_n}(Q_{l_0} \cap \mathcal{F}(b))$; assim, existe um átomo $a \in Q_{l_0} \cap \mathcal{F}(b)$ tal que $x = f^{i_n}(a)$. Portanto,

$$d_{\mathcal{F}}(x,y) = d_{\mathcal{F}}(f^{i_n}(a), f^{i_n}(b)) \leqslant \lambda^{i_n} d_{\mathcal{F}}(a,b) \leqslant \lambda^n d_{\mathcal{F}}(a,b) \leqslant \lambda^n 2l_0,$$

ou seja,

$$d_{\mathcal{F}}(x,y) \leqslant \lambda^n 2l_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, fazendo $n \to +\infty$, obtemos $d_{\mathcal{F}}(x,y) = 0$, mostrando que $x = y$. $\square$

□

2.3 Teorema C

Teorema C. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade compacta M e $\mathcal{T}$ uma folheação de classe C^1 localmente transversal a $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ tenha desintegração atômica e que, para uma dada carta folheada Q de $\mathcal{F}$, exista $k \in \mathbb{N}$ tal que a desintegração de μ nas folhas de Q tenha no máximo k átomos. Então, para $\mu \times \mu$ quase todo ponto $(x, y) \in Q \times Q$, a holonomia $h_{x,y} : \mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_y$ leva o conjunto $\mathcal{T}_x \cap Q \cap \{\text{átomos de } \mathcal{F}\}$ (que tem medida de Lebesgue 1) em um conjunto com medida de Lebesgue zero.*

Demonstração. Como o conjunto dos átomos da folheação $\mathcal{F}$, que estamos denotando por $\{\acute{a}tomos\ de\ \mathcal{F}\}$, tem medida total, para todo conjunto $H \subseteq Q$, com $\mu(H) > 0$, os conjuntos da forma

$$A_x = \mathcal{T}_x \cap Q \cap \{\acute{a}tomos\ de\ \mathcal{F}\}$$

sempre satisfazem a condição $\lambda_x(A_x) > 0$, para μ-quase todo $x \in H$ (aqui λ_x denota a medida de Lebesgue da folha $\mathcal{T}_x \cap Q$).

Pela definição do conjunto A_x, a igualdade $\lambda_x(A_x) = 1$ é sempre verdadeira, assim, basta provarmos que $\lambda_y(A_{x,y}) = 0$, onde $A_{x,y} = h_{x,y}(A_x)$. Suponha por absurdo que exista um conjunto $W \subseteq Q \times Q$, com medida positiva (produto de medidas de Lebesgue), tal que

$$\lambda_y(A_{x,y}) > 0, \text{ para todo } (x, y) \in W.$$

Como W tem medida positiva, usando o teorema de Fubini, podemos encontrar um subconjunto em forma de produto cartesiano $W_1 \times W_2 \subseteq W$, com $\mu(W_i) > 0$, para $i = 1, 2$, tal que

$$\lambda_y(A_{x,y}) > 0, \text{ para todo } (x, y) \in W_1 \times W_2.$$

Sendo $\mu(W_i) > 0$, para $i = 1, 2$, existe um subconjunto $H \times V \subseteq W_1 \times W_2$, com $\mu(H) > 0$ e $\mu(V) > 0$, tal que $\lambda_x(H \cap \mathcal{T}_x) > 0$ para todo $x \in H$, $\lambda_y(V \cap \mathcal{T}_y) > 0$ para todo $y \in V$ e satisfazendo a condição

$$\lambda_y(A_{x,y}) > 0, \text{ para todo } (x, y) \in H \times V.$$

Então, para cada $y \in V$ fixo, temos $\lambda_y(A_{x,y}) > 0$ para todo $x \in H$ e, como $\lambda_x(H \cap \mathcal{T}_x) > 0$, o conjunto H tem uma quantidade não enumerável de pontos, logo existe uma sequência $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset H$ tal que

$$\lambda_y(A_{x_i,y}) > 1/n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Note que, para cada $x_i \in H$, o conjunto $A_{x_i} = \mathcal{T}_{x_i} \cap Q \cap \{\acute{a}tomos\ de\ \mathcal{F}\}$ é formado apenas por átomos das folhas de $\mathcal{F}$.

Como $1/n < \lambda_y(A_{x_i,y}) \leqslant 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$, entre os $n+1$ conjuntos

$$A_{x_1,y},\ A_{x_2,y},\ A_{x_3,y}, \ldots,\ A_{x_{n+1},y}$$

existem dois, que denotaremos por $A_{x_{n_1},y}$ e $A_{x_{n_2},y}$, cuja interseção $A^1_{x_{n_1},y} := A_{x_{n_1},y} \cap A_{x_{n_2},y}$ satisfaz $\lambda_y(A^1_{x_{n_1},y}) > 1/n^2$ e, como as folhas $\mathcal{T}_{x_{n_1}}$ e $\mathcal{T}_{x_{n_2}}$ são distintas, existem folhas de $\mathcal{F}$ com pelo menos 2 átomos que intersectam $A^1_{x_{n_1},y}$. Analogamente, entre os $n+1$ conjuntos

$$A_{x_{n+2},y},\ A_{x_{n+3},y},\ A_{x_{n+4},y}, \ldots,\ A_{x_{2n+2},y}$$

existem dois cuja interseção, que denotaremos por $A^1_{x_{n_2},y}$, satisfaz $\lambda_y(A^1_{x_{n_2},y}) > 1/n^2$ e, além disso, existem folhas de $\mathcal{F}$ com pelo menos 2 átomos que intersectam $A^1_{x_{n_2},y}$. Prosseguindo dessa forma, obtemos uma nova sequência de conjuntos $(A^1_{x_{n_i},y})_{i\in\mathbb{N}}$, com $\lambda_y(A^1_{x_{n_i},y}) > 1/n^2$, tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem folhas de $\mathcal{F}$ com pelo menos 2 átomos que intersectam $A^1_{x_{n_i},y}$. Agora, repetindo o mesmo argumento acima com a sequência $(A^1_{x_{n_i},y})_{i\in\mathbb{N}}$, podemos obter uma outra sequência $(A^2_{x_{n_i},y})_{i\in\mathbb{N}}$, com $\lambda_y(A^2_{x_{n_i},y}) > 1/n^4$, tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem folhas de $\mathcal{F}$ com pelo menos 2^2 átomos que intersectam $A^2_{x_{n_i},y}$. Portanto, repetindo várias vezes o mesmo processo, sempre podemos encontrar folhas de $\mathcal{F}$ com uma quantidade arbitrariamente grande de átomos, o que contradiz uma das hipóteses do teorema. □

Para finalizar, apresentamos o corolário a seguir, que é uma consequência imediata do teorema acima.

Corolário 1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade compacta M. Suponha que $\mathcal{F}$ tenha desintegração atômica e que existam $k \in \mathbb{N}$ e uma carta folheada Q de $\mathcal{F}$ tais que, para toda folha $F \in \mathcal{F}$, o número de átomos de $Q \cap F$ seja menor ou igual a k. Então $\mathcal{F}$ não pode ser transversalmente absolutamente contínua.*

Referências

ANOSOV, D. V. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature.* [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969. iv+235 p. (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). Translated from the Russian by S. Feder). Citado na página 10.

AVILA, A.; VIANA, M.; WILKINSON, A. Absolute continuity, Lyapunov exponents and rigidity I: geodesic flows. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, v. 17, n. 6, p. 1435–1462, 2015. ISSN 1435-9855. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4171/JEMS/534>. Citado na página 11.

BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995. xii+179 p. (Wiley Classics Library). Containing a corrected reprint of the 1966 original [ıt The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-04222-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/9781118164471>. Citado na página 14.

BONATTI, C.; DÍAZ, L. J.; VIANA, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity.* [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 2005. v. 102. xviii+384 p. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v. 102). A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III. ISBN 3-540-22066-6. Citado na página 10.

BOWEN, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* revised. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 2008. v. 470. viii+75 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 470). With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes. ISBN 978-3-540-77605-5. Citado na página 12.

BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to dynamical systems.* [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2015. xii+247 p. Corrected paper back edition of the 2002 original [MR1963683]. ISBN 978-1-107-53894-8; 978-0-521-80841-5. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

CAMACHO, C.; NETO, A. L. *Geometric theory of foliations.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. vi+205 p. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. ISBN 0-8176-3139-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5292-4>. Citado na página 34.

EINSIEDLER, M.; WARD, T. *Ergodic theory with a view towards number theory.* Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. v. 259. xviii+481 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 259). ISBN 978-0-85729-020-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-021-2>. Citado na página 50.

HAMMERLINDL, A. S. *Leaf conjugacies on the torus.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2009. 69 p. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada). ISBN 978-0494-59086-7. Disponível em: <http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:NR59086>. Citado na página 36.

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. v. 54. xviii+802 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 54). With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. ISBN 0-521-34187-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809187>. Citado na página 30.

LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Second. [S.l.]: Springer, New York, 2013. v. 218. xvi+708 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 978-1-4419-9981-8. Citado na página 34.

PONCE, G.; TAHZIBI, A.; VARÃO, R. Minimal yet measurable foliations. *J. Mod. Dyn.*, v. 8, n. 1, p. 93–107, 2014. ISSN 1930-5311. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/jmd.2014.8.93>. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 11 e 36.

PONCE, G.; VARÃO, R. Measure rigidity for leafwise weakly rigid actions. *arXiv preprint arXiv:1812.00057*, 2019. Citado na página 11.

RUELLE, D.; WILKINSON, A. Absolutely singular dynamical foliations. *Comm. Math. Phys.*, v. 219, n. 3, p. 481–487, 2001. ISSN 0010-3616. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s002200100420>. Citado na página 11.

VARÃO, R. Center foliation: absolute continuity, disintegration and rigidity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, v. 36, n. 1, p. 256–275, 2016. ISSN 0143-3857. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/etds.2014.53>. Citado na página 11.

______. Rigidity for partially hyperbolic diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, v. 38, n. 8, p. 3188–3200, 2018. ISSN 0143-3857. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/etds.2017.11>. Citado na página 11.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Foundations of ergodic theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016. v. 151. xvi+530 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 151). ISBN 978-1-107-12696-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9781316422601>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.