

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Homotopia entre Trajetórias de Equações
Dirigidas por Caminhos Rugosos**

por

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira [†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

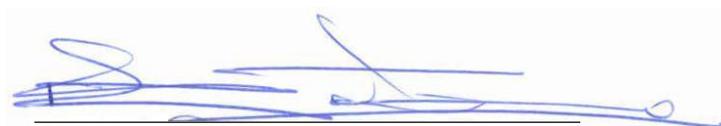
Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Homotopia entre Trajetórias de Equações Dirigidas por Caminhos Rugosos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de novembro de 2009.



Prof. Dr. Pedro José Catuogno.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.

Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin.

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino.

Prof. Dr. Alexandre José Santana.

Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática.**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Vieira, Marcelo Gonçalves Oliveira

V673h Homotopia entre trajetórias de equações dirigidas por caminhos rugosos / Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Pedro José Catuogno

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria da homotopia. 2. Teoria de Rough Path. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Equações diferenciais estocásticas. I. Catuogno, Pedro José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Homotopy between trajectories of equations driven by rough paths.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Homotopy theory. 2. Rough Path theory. 3. Dynamical systems. 4. Stochastic differential equations.

Área de concentração: Geometria / Topologia

Titulação: Doutor em Matemática

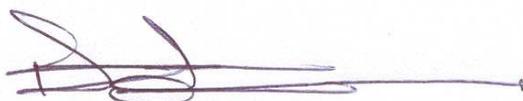
Banca examinadora: Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Alexandre José Santana (UEM)
Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli (USP)

Data da defesa: 12/11/2009

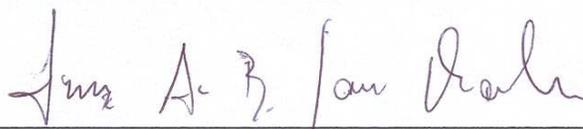
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 12 de novembro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



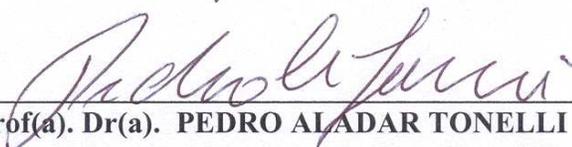
Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). ALEXANDRE JOSE SANTANA



Prof(a). Dr(a). PEDRO ALADAR TONELLI

*À minha esposa, Carolina,
e aos meus pais, Marta e Nicásio.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre ter instruído-me, ensinado-me o caminho a seguir e guiado-me com os teus olhos durante a minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Pedro José Catuogno pelos ensinamentos, pela confiança, dedicação, paciência e amizade.

À minha esposa Carolina Martins Rodrigues pelo amor, dedicação e compreensão.

Aos meus pais Nicásio e Marta e à minha irmã Marcia pelo apoio, pelo amor e por orarem por mim sempre.

Aos professores, funcionários e amigos do IMECC/UNICAMP e da FACIP/UFU pelos momentos felizes e pela solidariedade durante os momentos difíceis, e de um modo especial ao Prof. Dr. Paulo R. C. Ruffino, ao Prof. Dr. Caio J. C. Negreiros, ao Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin e aos amigos Neiton, Vinícius, Ariosvaldo, Rafael, Allan, Fabiano, Rinaldo, Simão, Sebastian, Cristian, Germano, Daniel e tantos outros.

RESUMO

Este trabalho aborda homotopias não usuais entre soluções de equações pertencentes a uma coleção de equações. Cada coleção de equações é denominada pelo termo sistema e neste trabalho são considerados dois tipos de sistemas, os sistemas de Young e os sistemas rugosos. Sob determinadas condições, mostramos que um conjunto de pontos acessíveis de um sistema de Young admite recobrimento e um resultado análogo para sistemas rugosos também é válido. Além disso, mostramos que a concatenação de trajetórias de um sistema ainda é uma trajetória deste sistema. Com esse resultado é possível definir uma operação entre as classes de homotopias de trajetórias de um sistema. Outro ponto abordado é estender ao contexto de um sistema de Young a noção de trajetórias regulares de equações diferenciais ordinárias pertencentes a um sistema de controle. Nesta direção obtivemos um resultado o qual diz que a concatenação entre uma trajetória regular e qualquer outra trajetória produz uma trajetória regular. Por fim, estudamos como o conceito de homotopia entre trajetórias de um sistema rugoso se relaciona com conjugação de sistemas e com equações diferenciais estocásticas.

ABSTRACT

This work accosts unusual homotopy between solutions of equations belonging to a collection of equations. Each collection of equations is called by system and in this work are considered two types of systems, Young systems and rough systems. Under certain conditions, we show that a set of points accessible from an Young system admits covering and a similar result for rough systems is also valid. Furthermore, we show that the concatenation of trajectories of a system is also a trajectory of the system. With this result it is possible to define an operation between the classes of homotopy between trajectories of a system. Another point discussed is to extend to the context of trajectories of an Young system the notion of regularity of trajectories of ordinary differential equations belonging to a control system. In this way we obtain a result which says that the concatenation of a regular trajectory and any other trajectory produces a regular trajectory. Finally, we study how the concept of homotopy between trajectories of a rough system relates with conjugation of systems and stochastic differential equations.

SUMÁRIO

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	1
Objetivos	3
Estrutura dos Tópicos Apresentados	3
1 Sistemas de Young	9
1.1 Caminhos de p -Variação Finita	10
1.2 Aproximações de Caminhos de p -Variação Finita	17
1.3 Teorema Young	22
1.4 Sistemas de Young	29
2 Homotopia Monotônica Associada a Sistemas de Young	35
2.1 Concatenação entre Trajetórias de Young	35
2.2 Homotopia Monotônica em um Sistema de Young	38
2.3 Recobrimento de um Conjunto de Acessibilidade de um Sistema de Young	41
2.4 Caracterização da Homotopia Monotônica	49
3 Trajetórias Regulares de um Sistema de Young	51
3.1 Trajetórias Regulares	51
3.2 Fórmulas Relacionadas a uma Equação de Young	54
3.3 Fórmula de Variação dos Parâmetros para Equações de Young	57

3.4	Concatenação entre Trajetórias Regulares	64
3.5	Homotopia Monotônica entre Trajetórias Regulares	67
4	Caminhos Rugosos	71
4.1	Séries Formais e Assinaturas de Caminhos	71
4.2	A Imagem da Aplicação Assinatura	78
4.3	Métrica de Carnot-Caratheodory	81
4.4	Espaço dos Caminhos Rugosos	84
4.5	Equações Dirigidas por Caminhos Rugosos	89
5	Homotopia Monotônica Associada a Sistemas Rugosos	93
5.1	Homotopia entre Trajetórias Dadas por Caminhos Rugosos	93
5.2	Concatenação entre Trajetórias Dirigidas por Caminhos Rugosos	95
5.3	Recobrimento de um Conjunto de Acessibilidade de um Sistema Rugoso	98
5.4	Relação ente Conjugação de Sistemas Rugosos e Homotopia Rugosa	100
5.5	Relação entre Equações Estocásticas e Homotopia Rugosa	105
	Considerações Finais	113
	Referências Bibliográficas	117
	Índice Remissivo	121

INTRODUÇÃO

Uma homotopia pode ser entendida como uma deformação contínua entre duas aplicações contínuas. Dentre as homotopias de maior interesse estão aquelas cujas aplicações que se deformam são caminhos contínuos sobre um determinado espaço topológico M .

Suponha que num espaço topológico M não dispomos, não conhecemos, ou ainda, não controlamos todos os possíveis caminhos contínuos tomando valores em M , mas que apenas temos controle sobre uma parte dos possíveis caminhos contínuos tomando valores em M . Uma questão natural que surge é a seguinte: Ainda é possível realizar homotopias somente entre caminhos contínuos em M sobre os quais temos controle? Se sim, esta noção de homotopia se difere da noção usual de homotopia?

Tais questões foram tratadas por Colonijs, Kizil e San Martin [2] no contexto em que os caminhos sob os quais se tem controle são as soluções de um sistema controlado de equações diferenciais ordinárias e as homotopias entre estas soluções receberam o nome de homotopias monotônicas.

Nesta tese, trataremos sobre as questões acima mencionadas no contexto de sistemas de Young e no contexto de sistemas rugosos. Outras questões relacionadas ao estudo de homotopias monotônicas dos sistemas citados também serão abordadas aqui, a saber, construção de recobrimento via homotopia monotônica, estudo de trajetórias regulares de sistemas de Young, relação entre homotopia monotônica e conjugação de sistemas e relação entre homotopia monotônica e equações diferenciais estocásticas.

Dados E_1 e E_2 espaços de Banach e fixada uma aplicação $f: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$, um sistema de Young é basicamente uma coleção de equações integrais (no sentido de integração de Young) do tipo

$$y_t = y_0 + \int_0^t f(y_s) dX_s \tag{1}$$

onde cada uma das equações é obtida escolhendo um integrador X num certo conjunto Δ de integradores. Neste caso, os integradores são caminhos contínuos com p -variação finita tomado valores em E_1 e as soluções “ y ” das equações acima, quando existirem, são caminhos contínuos com p -variação finita tomado valores em E_2 . Deste modo, integrais no sentido de Young presentes num sistema de Young são generalizações de integrais no sentido Riemann, visto que seus integradores não se restringem apenas ao integrador “ dt ”.

Um sistema de controle evoluindo sobre \mathbb{R}^n , com equações do tipo

$$\dot{y} = w_t(y) \tag{2}$$

onde cada controle w é um caminho contínuo tomando valores num subespaço de dimensão finita E do espaço dos campos de vetores sobre \mathbb{R}^n , pode ser visto como um sistema de Young, bastando para isto considerar uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ dada por $f(y)(w) = w(y)$ e considerar para cada controle w_t o integrador $X_t^w = \int_0^t w_s ds$. De fato, no caso em que X é um integrador de classe C^1 tem-se que $\int_0^t f(y_s) dX_s = \int_0^t f(y_s)(\dot{X}_s) ds$ e como $\dot{X}_t^w = w_t$, segue que $y_t = y_0 + \int_0^t f(y_s) dX_s$ e $\dot{y} = w_t(y)$ são equações equivalentes.

Um sistema de Young qualquer pode ter equações dirigidas por integradores mais gerais do que integradores de classe C^1 , como por exemplo, integradores com p -variação finita, sendo p um valor alto. Em outras palavras, os integradores de um sistema de Young podem ser bastante irregulares, o que implica no sistema de Young ter soluções bastante irregulares, podendo estas soluções inclusive não serem diferenciáveis em todos os pontos dos seus domínios, o que não ocorre com as soluções de um sistema de controle.

O segundo tipo de sistema considerado neste trabalho são os sistemas rugosos, cujas equações são dirigidas por caminhos chamados rugosos. Os caminhos rugosos são caminhos tomando valores em um grupo de Lie, cujos elementos são seqüências truncadas de integrais iteradas no sentido de Young.

Para as homotopias abordadas nesta tese, os objetos a serem avaliados como homotópicos são trajetórias, isto é, soluções dadas por equações de um sistema, seja este um sistema de Young ou um sistema rugoso. Nestas homotopias, além das condições usuais exigidas para que se tenha uma deformação contínua de uma trajetória em outra (trajetórias vistas a princípio apenas como caminhos), exigem-se ainda condições adicionais, a saber, que as curvas intermediárias sejam também trajetórias do sistema em questão e que a continuidade da homotopia seja com respeito à topologia do espaço de trajetórias.

Objetivos

Os objetivos desta tese são essencialmente três.

O primeiro constitui-se em estender ao contexto de sistemas de Young os principais resultados associados ao conceito de homotopia monotônica para sistemas de controle. Dentre os resultados, citamos a construção de recobrimento para um conjunto de acessibilidade de um sistema e resultados relacionados ao conceito de regularidade de uma trajetória.

O segundo objetivo é construir uma noção análoga de homotopia monotônica para as trajetórias de um sistema rugoso, e para tanto, se faz necessário mostrar que concatenação de duas trajetórias de um sistema rugoso ainda é uma trajetória deste sistema, algo fundamental se quisermos ter um produto entre classes de equivalência dada pela relação de homotopia entre as trajetórias do sistema.

Por fim, o terceiro objetivo é estudar como o conceito de homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema rugoso se relaciona com conjugação de sistemas e com equações diferenciais estocásticas.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

Abaixo segue um resumo do conteúdo da tese, qual foi dividido em cinco capítulos.

Capítulo 1

No capítulo 1 é apresentada a noção de sistema de Young, que nada mais é do que uma coleção de equações indexadas por parâmetros tomados num subconjunto apropriado de um espaço de caminhos.

A definição de sistema de Young exige o conhecimento prévio de alguns objetos matemáticos, que são eles: os caminhos de p -variação finita, aos quais se destina a seção 1.1, as aproximações poligonais de caminhos de p -variação finita, vistas na seção 1.2, e as integrais no sentido de Young, cuja existência é garantida pelo Teorema de Young, sendo estas integrais e o teorema citado abordados na seção 1.3.

Na seção 1.4 apresentaremos as equações integrais no sentido de Young e comentamos sobre resultados de existência e unicidade de soluções relacionados a estas equações.

O capítulo 1 é finalizado com a seção 1.5, onde formalizaremos a idéia de um sistema de Young $\Sigma = (f, \Delta, M)$ e do espaço de suas trajetórias $T(\Sigma, u, v)$.

Capítulo 2

O capítulo 2 trata o conceito de homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de Young. Na seção 2.1 provaremos o seguinte resultado:

Proposição: *Seja Σ um sistema de Young consistente. Se $I_\Sigma(u, X) \in T(\Sigma, u, v)$ e $I_\Sigma(v, Y) \in T(\Sigma, v, w)$ então*

$$I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y) \in T(\Sigma, u, w). \quad (3)$$

O termo consistente utilizado na proposição acima visa apenas renomear em sistemas de Young a propriedade de existência e unicidade de solução encontrada nas equações de Young presentes nos teoremas da seção 1.3. A importância do resultado acima é que ele dá consistência à definição de produto entre classes de equivalência dadas pela relação de homotopia monotônica entre as trajetórias do sistema Σ .

Na seção 2.2 apresentaremos a definição de homotopia monotônica entre as trajetórias de um sistema de Young Σ , algumas propriedades desta homotopia e um exemplo de que tal homotopia difere da homotopia usual entre caminhos contínuos.

Na seção 2.3 apresentaremos um resultado que estabelece em que condições um conjunto de pontos acessíveis $A(\Sigma, x)$ de um sistema Σ admite recobrimento. Em outras palavras, na seção 2.3 demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema: *Sejam $p \in [1, \infty)$ e $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema consistente com p -variação. Se Δ contém algum sinal constante e $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , então $A(\Sigma, x)$ admite recobrimento.*

Na seção 2.4 apresentaremos uma caracterização que possibilita decidir se duas trajetórias em $T(\Sigma, u)$ são ou não monotonicamente homotópicas.

Capítulo 3

No capítulo 3 estudaremos as trajetórias regulares de um sistema de Young. Na seção 3.1 definiremos trajetórias regulares e apresentaremos propriedades básicas associadas, enquanto que nas seções 3.2 e 3.3 demonstraremos resultados preparatórios para obtenção dos principais resultados deste capítulo, resultados estes apresentados na seção 3.4. Abaixo indicamos os principais resultados da seção 3.4.

Teorema: *Seja Σ um sistema de Young regular da forma $\Sigma = (f, \Delta, M)$. Então*

$$D(e^{\Sigma, u})|_{(X*Y)}(Z_1 * Z_2) = (D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v \circ D(e^{\Sigma, u})|_X)(Z_1) + D(e^{\Sigma, v})|_Y(Z_2) \quad (4)$$

para todo $u \in M$, $X, Y \in \Delta$ e $Z_1, Z_2 \in \text{span}(\Delta)$.

No teorema acima, $e^{\Sigma,u}$ denota a aplicação que associa a cada integrador $X \in \Delta$ o ponto final da trajetória $I_\Sigma(u, X) \in T(\Sigma, u)$, v indica o ponto $e^{\Sigma,u}(X)$ e $\Phi_T^{\Sigma,Y}$ denota a aplicação que associa a cada ponto $w \in M$ o ponto final da trajetória $I_\Sigma(w, Y) \in T(\Sigma, w)$.

Teorema: *Sejam Σ um sistema de Young regular, $\alpha \in T(\Sigma, x, y)$ e $\beta \in T(\Sigma, y, z)$. Se α ou β forem trajetórias regulares então $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.*

Na seção 3.5 definiremos homotopia monotônica regular e abordaremos alguns resultados oriundos deste conceito.

Capítulo 4

O Capítulo 4 é dedicado a fazer uma introdução básica de caminhos rugosos. Basicamente este capítulo introduz as definições, notações e resultados considerados como pré-requisitos para se definir um caminho rugoso.

Na seção 4.1 são apresentadas as séries formais, em especial as séries da forma

$$(1, \int_{0 \leq u_1 \leq T} dX_{u_1}, \dots, \int_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq T} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_n}), \quad (5)$$

onde $X: [0, T] \rightarrow E$ é um caminho de p -variação finita tomando valores no espaço vetorial E , $p \in [1, 2)$ e as integrais consideradas são integrais no sentido de Young. Uma série formal de integrais iteradas, como a acima, é chamada de assinatura truncada de X de ordem n com respeito ao intervalo $[0, T]$.

Na seção 4.2 constataremos que o conjunto das assinaturas de todos os caminhos contínuos de p variação finita tomando valores em E é um grupo de Lie, o qual denotamos por $G^n(E)$. A seção 4.3 tem como objetivo introduzir uma métrica invariante à esquerda para o grupo $G^n(E)$, a chamada métrica de Carnot-Carathéodory. Na seção 4.4 é apresentada a definição de caminhos rugosos e na seção 4.5 são apresentadas as equações dirigidas por caminhos rugosos.

Capítulo 5

No capítulo 5 estenderemos ao contexto de sistemas rugosos resultados sobre homotopias monotônicas de sistemas de Young obtidos no capítulo 2. Além disso, relacionaremos a homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema rugoso com conjugação de sistemas rugosos e com equações diferenciais estocásticas.

Na seção 5.1 definiremos homotopia rugosa, que é a homotopia monotônica entre as trajetórias de um sistema rugoso do tipo $\Lambda = (f, \Delta, M)$. Na seção 5.2 demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema: *Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais de dimensão finita, $u \in E_2$, $p \in [1, \infty)$ e $f \in Lip^{[p]+1}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ (isto é, \mathbf{X} e \mathbf{Y} são caminhos p -rugosos geométricos com respeito a E_1) e $v = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})(T)$, então*

$$\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) * \mathbf{I}_f^v(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X} * \mathbf{Y}) \quad (6)$$

onde $\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})$, $\mathbf{I}_f^v(\mathbf{Y})$ e $\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X} * \mathbf{Y})$ denotam trajetórias dadas respectivamente por \mathbf{X} , \mathbf{Y} e $\mathbf{X} * \mathbf{Y}$.

Tal resultado é um análogo do resultado principal da seção 2.1, contudo no contexto de sistemas rugosos a demonstração se torna mais trabalhosa, na medida em que faz necessária a utilização do Teorema de Chen.

Na seção 5.3, apresentaremos a versão do teorema que diz sob quais condições, o conjunto de pontos acessíveis de um sistema rugoso admite recobrimento e também apresentaremos uma caracterização para homotopia rugosa entre duas trajetórias.

A seção 5.4 é dedicada a estudar a relação entre homotopia rugosa e conjugação entre dois sistemas rugosos. Nesta seção apresentamos os seguintes resultados.

Teorema: *Sejam Λ um sistema p -rugoso com respeito ao intervalo compacto $J = [0, T]$ e $L: J \times [0, 1] \rightarrow M$ uma aplicação contínua. Se $H(s) \in T(\Lambda, u, v)$, para todo $s \in [0, 1]$, onde*

$$H(s)(t) = L(t, s) \quad (7)$$

então as seguintes afirmações são válidas:

i) *Existe uma seqüência $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^1(J, E_2))$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(H^n(s), H(s)) = 0 \quad (8)$$

para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $q > p$.

ii) *Se $\sup_{s \in [0, 1]} \|H(s)\|_{p, J} < \infty$ então $H: [0, 1] \rightarrow T(\Lambda, u, v)$ é uma homotopia q -rugosa, para todo $q > p$.*

Teorema: *Sejam Λ e Λ' sistemas p -rugosos e $\alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v)$. Se $\alpha \sim_p \beta$ e h é uma conjugação de classe C^1 entre Λ e Λ' então $h \circ \alpha \sim_q h \circ \beta$, para todo $q > p$.*

Estes dois últimos teoremas admitem versões similares no contexto de sistemas de Young e homotopias p -monotônicas entre trajetórias de um sistema de Young e além disso, as demonstrações são análogas.

Por fim, na seção 5.5 relacionaremos homotopia rugosa com homotopia entre trajetórias amostrais de uma solução de uma equação diferencial estocástica. Nesta seção provaremos os seguintes resultados.

Teorema: *Sejam $p \in (2, 3)$, $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$, B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d e \mathbb{P} a medida de Wiener associada a B . Se Y é a única solução contínua no intervalo J da equação diferencial estocástica*

$$dY_t = f(Y_t) \circ dB_t \quad (9)$$

com condição inicial $Y_0 = y \in \mathbb{R}^e$ então

$$Y(\omega) \in T(\Lambda, y) \quad (10)$$

para \mathbb{P} -quase todo ω , onde $T(\Lambda, y)$ denota conjunto de trajetórias iniciadas em y do sistema p -rugoso

$$\Lambda = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e). \quad (11)$$

Teorema: *Sejam $p \in (2, 3)$, $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$, B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d e \mathbb{P} a medida de Wiener associada a B . Se Y é a única solução contínua no intervalo J da equação diferencial estocástica (9) então*

$$\text{supp } \mathbb{P}_Y = \overline{T(\Lambda, y)}^{d_p} \quad (12)$$

onde Λ é o sistema p -rugoso $(f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$.

Estes dois resultados possibilitam, através do conceito homotopia rugosa, definir uma homotopia entre duas trajetórias amostrais da solução de uma equação diferencial estocástica, de forma que as deformações intermediárias da homotopia ainda sejam trajetórias amostrais desta solução. Isto permite estudar conjugação de soluções de equações diferenciais estocásticas como um problema relacionado à conjugação de sistemas rugosos e nesta direção a homotopia rugosa é usada como critério de obstrução para ocorrência de conjugação.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE YOUNG

Uma equação diferencial ordinária do tipo

$$\dot{y} = F(y), \quad (1.1)$$

com condição inicial $y(0) = y_0$ e soluções definidas num intervalo $[0, T]$ e tomando valores num espaço de estados E , digamos $E = \mathbb{R}^d$, pode ser interpretada como uma equação integral do tipo

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(y(s)) ds \quad (1.2)$$

com $t \in [0, T]$, onde a integral considerada é uma integral no sentido de Riemman.

Temos que as equações que compõem um sistema de Young são uma generalização do conceito de equações diferenciais ordinárias, uma vez que considerado um sentido de integração adequado, tais equações são do tipo

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(y(s)) dx(s) \quad (1.3)$$

com $t \in [0, T]$, onde $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é um caminho contínuo com uma determinada variação.

Em outras palavras, nas equações diferenciais ordinárias o integrador, presente nas integrações consideradas, é sempre o caminho $id: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$id(s) = s \quad (1.4)$$

enquanto numa equação de um sistema de Young, o integrador pode ser um caminho $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ totalmente diferente do caminho $id: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Nesta generalização uma solução de uma equação pertencente a um sistema de Young pode não ser diferenciável em relação ao tempo, fato que não ocorre com as soluções de uma equação diferencial ordinária, as quais são diferenciáveis no tempo. Neste sentido, o ambiente das soluções de um sistema de Young é mais amplo que o ambiente das soluções de uma equação diferencial ordinária.

1.1 Caminhos de p -Variação Finita

Em todo o texto o conjunto de todas as partições $D = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k = b\}$ de um intervalo $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{P}([a, b])$. Seja $T > 0$ e também em todo o texto o intervalo $[0, T]$ será denotado por J , o conjunto dos caminhos contínuos de J em E será denotado por $C(J, E)$, o conjunto dos caminhos de classe C^k de J em E será denotado por $C^k(J, E)$, com $k = 1, 2, \dots$ e por fim o conjunto caminhos suaves (classe C^∞) de J em E será denotado por $C^\infty(J, E)$.

Definição 1.1.1. Sejam $p \in (0, \infty)$ e (E, d) um espaço métrico. A p -variação de um caminho contínuo $X: J \rightarrow E$ com respeito ao subintervalo $[a, b]$ do domínio J é definida por

$$\|X\|_{p,[a,b]} = \left(\sup_{D \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{t_i \in D} (d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i}))^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5)$$

Dizemos que um caminho contínuo $X: J \rightarrow E$ tem p -variação finita se $\|X\|_{p,J} < \infty$.

Exemplo 1.1.2. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade

$$B = \{B_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid t \in [0, \infty)\} \quad (1.6)$$

um movimento Browniano. O caminho $X: J \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{P})$ dado por

$$X(t) = B_t \quad (1.7)$$

tem 2-variação finita. De fato,

$$\sum_{t_i \in D} \|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\|_{L^2}^2 = \sum_{t_i \in D} \mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \sum_{t_i \in D} t_{i+1} - t_i = T$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$. Portanto, $\|X\|_{2,J} = T^{1/2}$.

O conjunto de todos os caminhos contínuos de J em E com p -variação finita é denotado por $\mathcal{V}^p(J, E)$.

Se E é um espaço de Banach com respeito a uma norma $\|\cdot\|$ então o conjunto $\mathcal{V}^p(J, E)$ é um espaço de Banach, quando munido com a norma

$$\|X\|_{\mathcal{V}^p(J,E)} = \|X\|_{p,J} + \|X\|_{\infty,J} \quad (1.8)$$

onde

$$\|X\|_{\infty, J} := \sup_{t \in J} \|X_t\| \quad (1.9)$$

denota a *norma da convergência uniforme* em $C(J, E)$. A norma descrita na expressão (1.8) é chamada de *norma da p -variação* e tal norma pode ser denotada simplesmente por $\|X\|_{\mathcal{V}^p}$ quando não houver perigo de confusão com os espaços envolvidos em um dado contexto.

Se (E, d) é um espaço métrico, então aplicação $d_\infty: C(J, E) \times C(J, E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d_\infty(X, Y) = \sup_{t \in J} d(X_t, Y_t) \quad (1.10)$$

é uma métrica em $C(J, E)$ chamada *métrica da convergência uniforme*.

No caso em que $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, a aplicação $\bar{d}_p: \mathcal{V}^p(J, E) \times \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\bar{d}_p(X, Y) = \|X - Y\|_{p, J} + d_\infty(X, Y) \quad (1.11)$$

é uma métrica em $\mathcal{V}^p(J, E)$ chamada *métrica da p -variação*, a qual nada mais é do que a métrica induzida pela norma da p -variação em $\mathcal{V}^p(J, E)$, isto é,

$$\bar{d}_p(X, Y) = \|X - Y\|_{p, J} + \|X_t - Y_t\|_{\infty, J} = \|X - Y\|_{\mathcal{V}^p}. \quad (1.12)$$

Proposição 1.1.3. *Seja (E, d) um espaço métrico. Se $p \in (0, 1)$ e $X: J \rightarrow E$ é caminho contínuo com p -variação finita então X é constante, isto é, $X(t) = X(0)$ para todo $t \in J$.*

Demonstração: Seja $D \in \mathcal{P}(J)$. Então

$$d(X_t, X_0) \leq \sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i}) \leq \max_i d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})^{1-p} \cdot \|X\|_{p, J}^p.$$

Usando a continuidade uniforme de X no intervalo compacto J , podemos tomar $\max_i d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})$ arbitrariamente pequeno tomando uma partição D , com $|D| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ suficientemente pequeno.

Portanto, $d(X_t, X_0) = 0$ para todo $t \in J$, donde segue que $X(t) = X(0)$ para todo $t \in J$. \square

Proposição 1.1.4. *Sejam (E, d) um espaço métrico e $X \in C(J, E)$. Se $1 \leq p \leq q < \infty$ então*

$$\|X\|_{q, J} \leq \|X\|_{p, J}. \quad (1.13)$$

Em particular,

$$\mathcal{V}^1(J, E) \subset \mathcal{V}^p(J, E) \subset \mathcal{V}^q(J, E) \subset C(J, E). \quad (1.14)$$

Demonstração: Segue da desigualdade

$$\left(\sum_i |a_i|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_i |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

□

Proposição 1.1.5. *Sejam (E, d) um espaço métrico, $X \in C(J, E)$ e $p \in [1, \infty)$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

i) *Se $\varphi: J \rightarrow J$ é sobrejetiva e não-decrescente, então*

$$\|X\|_{p,J} = \|X \circ \varphi\|_{p,J}. \quad (1.15)$$

ii) *Tem-se que*

$$\sup_{s,t \in J} d(X_t, X_s) \leq \|X\|_{p,J}. \quad (1.16)$$

iii) *Se $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0}$ é uma seqüência em $\mathcal{V}^p(J, E)$ que converge pontualmente ao caminho X , então*

$$\|X\|_{p,[s,t]} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)}\|_{p,[s,t]} \quad (1.17)$$

para todo $s < t$ em J .

Demonstração: i) Temos que

$$\sum_{t_i \in D} d(X_{\varphi(t_{i+1})}, X_{\varphi(t_i)})^p = \sum_{l_i \in \varphi(D)} d(X_{l_{i+1}}, X_{l_i})^p \quad (1.18)$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$.

Da igualdade (1.18) segue que

$$\sum_{t_i \in D} d(X_{\varphi(t_{i+1})}, X_{\varphi(t_i)})^p \leq \|X\|_{p,J}^p$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$, donde decorre que

$$\|X \circ \varphi\|_{p,J} \leq \|X\|_{p,J}.$$

De modo análogo, utilizando a igualdade (1.18) temos que $\|X\|_{p,J} \leq \|X \circ \varphi\|_{p,J}$.

ii) Sejam $s, t \in J$ tal que $s \leq t$. Considere a partição $D = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$ do intervalo J . Temos que

$$d(X_t, X_s)^p \leq \sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})^p \leq \|X\|_{p,J}^p.$$

Logo,

$$d(X_t, X_s) \leq \|X\|_{p,J}$$

para todo $s, t \in J$, donde segue que

$$\sup_{s, t \in J} d(X_t, X_s) \leq \|X\|_{p, J}.$$

iii) Sejam $s < t$ em J . Como $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{V}^p(J, E)$ converge pontualmente a X segue que

$$\sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})^p = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}^{(n)}, X_{t_i}^{(n)})^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)}\|_{p, [s, t]}^p$$

para todo $D \in \mathcal{P}([s, t])$.

Portanto,

$$\|X\|_{p, [s, t]} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)}\|_{p, [s, t]}.$$

□

Seja E um espaço de Banach. O subespaço de $\mathcal{V}^p(J, E)$ constituído por todos os caminhos iniciados em $0 \in E$ é denotado por $\mathcal{V}_0^p(J, E)$. A aplicação $d_p: \mathcal{V}_0^p(J, E) \times \mathcal{V}_0^p(J, E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d_p(X, Y) = \|X - Y\|_{p, J} \tag{1.19}$$

é uma métrica e ela é equivalente a métrica \bar{d}_p restrita a $\mathcal{V}_0^p(J, E)$. De fato, pelo item ii) da Proposição 1.1.5 temos que

$$\|X\|_{p, J} \leq \|X\|_{\mathcal{V}^p} = \|X\|_{p, J} + \sup_{t \in J} \|X_t - X_0\| \leq \|X\|_{p, J} + \sup_{s, t \in J} \|X_t - X_s\| \leq 2\|X\|_{p, J}$$

para todo $X \in \mathcal{V}_0^p(J, E)$ e portanto

$$d_p(X, Y) \leq \bar{d}_p(X, Y) \leq 2d_p(X, Y)$$

para todo $X, Y \in \mathcal{V}_0^p(J, E)$.

Para todo $p \in [1, \infty)$, o conjunto

$$D^p = \{X \in \mathcal{V}^p(J, E) : \|X\|_{p, J} \leq 1\} \tag{1.20}$$

é fechado na topologia uniforme de $C(J, E)$. De fato, se $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0} \subset D^p$ é uma sequência convergente na norma uniforme com $\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = Y$, então pelo item iii) da Proposição 1.1.5 temos que $\|Y\|_{p, J} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)}\|_{p, J} \leq 1$, o que implica que $Y \in D^p$. Portanto D^p é fechado na topologia uniforme.

Definição 1.1.6. Seja $\Delta_T = \{(s, t) \in [0, T]^2 : s \leq t\}$ o conjunto simplexo. Uma aplicação $c: \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma *função de controle* ou um *controle* em $[0, T]$ se:

- i) c é contínua;
- ii) $c(s, t) \geq 0$, para todo $(s, t) \in \Delta_T$ e $c(t, t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$;
- iii) $c(s, u) + c(u, t) \leq c(s, t)$, para todos $s, u, t \in J$, com $s \leq u \leq t$.

Observação 1.1.7. A condição iii) na definição anterior é denominada *superaditividade*.

Exemplo 1.1.8. Sejam (E, d) um espaço métrico, $p \in [1, \infty)$ e $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$. A função $c_{X,p}: \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$c_{X,p}(s, t) = \|X\|_{p,[s,t]}^p \quad (1.21)$$

é um exemplo de controle.

O controle $c_{X,p}: \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}$, onde $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, é uma função não-decrescente na segunda variável, isto é, para cada $s \in J$ fixado, a função $t \mapsto c_{X,p}(s, t)$ é não-decrescente. Analogamente, para cada $t \in J$ fixado, a função $s \mapsto c_{X,p}(s, t)$ é não-crescente.

A soma finita de controles ainda é um controle. Se a soma de uma infinidade de controles converge pontualmente, então a soma ainda é um controle. O máximo de dois controles pode não ser um controle pois a superaditividade pode falhar.

Definição 1.1.9. Dizemos que a p -variação de um caminho contínuo $X: J \rightarrow E$ é *controlada* por um controle $c: \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\|X\|_{p,[s,t]} \leq c(s, t)^{\frac{1}{p}} \quad (1.22)$$

para todo $(s, t) \in \Delta_T$.

Proposição 1.1.10. Sejam (E, d) um espaço métrico, $X \in C(J, E)$, $p \in [1, \infty)$ e $K > 0$ uma constante. Se $c: \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de superaditividade e $d(X_v, X_u) \leq Kc(u, v)^{1/p}$, para todo $(u, v) \in \Delta_T$, então

$$\|X\|_{p,[s,t]} \leq Kc(s, t)^{1/p} \quad (1.23)$$

para todo $(s, t) \in \Delta_T$.

Demonstração: Sejam $(s, t) \in \Delta_T$. Usando hipótese que $d(X_v, X_u)^p \leq K^p c(u, v)$, para todo $(u, v) \in \Delta_T$ e a superaditividade de c temos que

$$\sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})^p = \sum_{t_i \in D} K^p c(t_i, t_{i+1}) \leq K^p c(s, t)$$

para todo $D \in \mathcal{P}([s, t])$.

Portanto,

$$\|X\|_{p,[s,t]} \leq Kc(s, t)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Proposição 1.1.11. *Sejam (E, d) um espaço métrico, $p_0 \in [1, \infty)$ e $X \in \mathcal{V}^{p_0}(J, E)$. Para todo $s < t$ em J , a aplicação $\nu_{X,[s,t]}: [p_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por*

$$\nu_{X,[s,t]}(p) = \|X\|_{p,[s,t]} \quad (1.24)$$

é não-crescente e satisfaz

$$\lim_{q \searrow p} \|X\|_{q,[s,t]} = \|X\|_{p,[s,t]}. \quad (1.25)$$

Demonstração: Segue da Proposição 1.1.4 que a função $\nu_{X,[s,t]}$ é não-crescente. Em particular isto implica que

$$c(s, t)^{1/p} := \lim_{q \searrow p} \|X\|_{q,[s,t]}$$

existe e satisfaz

$$c(s, t)^{1/p} \leq \|X\|_{p,[s,t]}.$$

Mostremos a desigualdade inversa. Decorre do item ii) da Proposição 1.1.5 que $d(X_v, X_u) \leq \|X\|_{q,[u,v]}$, para todo $q \in [p, \infty)$ e daí fazendo $q \searrow p$ temos que

$$d(X_v, X_u) \leq c(u, v)^{1/p} \quad (1.26)$$

para todo $u < v$ no intervalo J .

Mostremos que c é superaditiva. Observe que

$$c(s, t) = \left(\lim_{q \searrow p} \|X\|_{q,[s,t]} \right)^p = \lim_{q \searrow p} \|X\|_{q,[s,t]}^p = \lim_{q \searrow p} c_{X,q}(s, t).$$

Usando a superaditividade de $c_{X,q}$ temos que

$$c(s, t) + c(t, u) = \lim_{q \searrow p} (c_{X,q}(s, t) + c_{X,q}(t, u)) \leq \lim_{q \searrow p} c_{X,q}(s, u) = c(s, u)$$

para todo $s < t < u$ no intervalo J , ou seja, c é superaditiva.

Logo, usando a desigualdade 1.26 e a superaditividade de c , segue pela Proposição 1.1.10 que

$$\|X\|_{p,[s,t]} \leq c(s, t)^{1/p}.$$

Portanto,

$$\lim_{q \searrow p} \|X\|_{q,[s,t]} = c(s, t)^{1/p} = \|X\|_{p,[s,t]}.$$

□

Definição 1.1.12. *Sejam (E, d) um espaço métrico e $\alpha > 0$. Um caminho $X: J \rightarrow E$ é dito α -Holder se existe uma constante $K > 0$ tal que $d(X_t, X_s) < K|t - s|^\alpha$, para todo $s, t \in J$.*

O conjunto de todos os caminhos α -Holder de J em E é denotado por $\mathcal{H}^\alpha(J, E)$ e o conjunto de todos os caminhos α -Holder de J em E iniciados em $0 \in E$ é denotado por $\mathcal{H}_0^\alpha(J, E)$.

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $B = \{B_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid t \in [0, \infty)\}$ um movimento Browniano. Vimos que o caminho $X: J \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{P})$ dado por $X(t) = B_t$ tem 2-variação finita. Entretanto, \mathbb{P} -quase sempre os caminhos amostrais que compõem o movimento Browniano são α -Holder, com $\alpha \in (0, 1/2)$ (Ver [17], página 6). Em outras palavras, dado $\alpha \in (0, 1/2)$, existe $\Omega' \subset \Omega$, com $P(\Omega') = 1$, tal que os caminhos $X^\omega: J \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$X^\omega(t) = B_t(\omega) \quad (1.27)$$

são α -Holder, para todo $\omega \in \Omega'$.

Uma questão que surge é se os caminhos amostrais do movimento Browniano restritos ao intervalo compacto J teriam \mathbb{P} -quase sempre p -variação finita para algum $p \in [1, \infty)$.

Seja $p > 0$. Temos que qualquer caminho $(1/p)$ -Holder é um caminho contínuo com p -variação finita. De fato, se $X \in \mathcal{H}^{1/p}(J, E)$, então existe uma constante $K > 0$ tal que $d(X_t, X_s) < K|t - s|^{1/p}$, para todo $s, t \in J$. Logo,

$$\sum_{t_i \in D} d(X_{t_{i+1}}, X_{t_i})^p \leq K^p \sum_{t_i \in D} |t_{i+1} - t_i| = K^p T$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$ e portanto

$$\|X\|_{p,J} \leq KT^{1/p}$$

isto é, $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$.

Baseado nisto, concluímos que \mathbb{P} -quase sempre os caminhos amostrais do movimento Browniano tem p -variação finita, com $p \in (2, \infty)$.

Proposição 1.1.13. *Sejam (E, d) um espaço métrico e $X \in C(J, E)$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$ e $t \rightarrow c_{X,p}(0, t)$ é uma função crescente, então existem uma função crescente $h: J \rightarrow J$ e $Y \in \mathcal{H}^{1/p}(J, E)$ tais que*

$$X = Y \circ h. \quad (1.28)$$

Demonstração: Seja $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$. Considere a aplicação $h: J \rightarrow J$ dada por

$$h(t) = \frac{T}{c_{X,p}(0, T)} \cdot c_{X,p}(0, t). \quad (1.29)$$

Temos que h é uma bijeção, pois $c_{X,p}$ é uma função crescente.

Considere

$$Y = X \circ h^{-1}. \quad (1.30)$$

Segue do item ii) da Proposição 1.1.5 que

$$\|X_{h^{-1}(t)} - X_{h^{-1}(s)}\|^p \leq \|X\|_{p,[h^{-1}(s),h^{-1}(t)]}^p$$

para todo $s \leq t$ em J e como $c_{X,p}$ é superaditiva, segue que

$$\begin{aligned} \|Y(t) - Y(s)\|^p &= \|X_{h^{-1}(t)} - X_{h^{-1}(s)}\|^p \\ &\leq c_{X,p}(h^{-1}(s), h^{-1}(t)) \\ &\leq c_{X,p}(0, h^{-1}(t)) - c_{X,p}(0, h^{-1}(s)) \\ &= \frac{c_{X,p}(0, T)}{T} \cdot (h \circ h^{-1}(t) - h \circ h^{-1}(s)) \\ &= \frac{c_{X,p}(0, T)}{T} \cdot (t - s) \end{aligned}$$

para todo $s \leq t$ em J , donde seque que $Y \in \mathcal{H}^{1/p}(J, E)$.

Portanto, $X = Y \circ h$, onde h é um função crescente e $Y \in \mathcal{H}^{1/p}(J, E)$. □

1.2 Aproximações de Caminhos de p -Variação Finita

Definição 1.2.1. Seja (E, d) um espaço métrico. Dizemos que $\Upsilon^{a,b}: [0, 1] \rightarrow E$ é um *caminho geodésico* ligando os pontos $a, b \in E$ se $\Upsilon^{a,b}(0) = a$, $\Upsilon^{a,b}(1) = b$ e

$$d(\Upsilon^{a,b}(s), \Upsilon^{a,b}(t)) = |t - s| \cdot d(a, b) \tag{1.31}$$

para todo $s < t$ em $[0, 1]$.

Se quaisquer dois pontos de (E, d) são ligados por um caminho geodésico, dizemos que E é um *espaço geodésico*.

Temos que \mathbb{R}^d munido com a métrica euclidiana é um espaço geodésico. Em geral, um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço geodésico. De fato, dados $a, b \in E$, então o caminho $\gamma^{a,b}: [0, 1] \rightarrow E$ dado por

$$\gamma^{a,b}(t) = (1 - t)a + tb \tag{1.32}$$

é um caminho geodésico ligando os pontos $a, b \in E$, visto que

$$\|\gamma^{a,b}(t) - \gamma^{a,b}(s)\| = |t - s| \cdot \|b - a\|, \tag{1.33}$$

para todo $s < t$ em $[0, 1]$.

Definição 1.2.2. Sejam (E, d) um espaço geodésico, $X \in C(J, E)$ e $D = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ uma partição do intervalo J . Uma *aproximação geodésica* de X com respeito a D é um caminho $X^D \in C(J, E)$ dado por

$$X^D(t) = \begin{cases} X(t), & \text{se } t \in D \\ \Upsilon^{X_{t_i}, X_{t_{i+1}}}(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}), & \text{se } t \in (t_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (1.34)$$

onde cada $\Upsilon^{X_{t_i}, X_{t_{i+1}}}$ é um caminho geodésico em (E, d) .

Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, $X \in C(J, E)$ e D é uma partição do intervalo J então a *aproximação poligonal* do caminho X com respeito a D é a aproximação geodésica dada por

$$X^D(t) = \begin{cases} X(t), & \text{se } t \in D \\ \gamma^{X_{t_i}, X_{t_{i+1}}}(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}), & \text{se } t \in (t_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (1.35)$$

lembrando que cada $\gamma^{X_{t_i}, X_{t_{i+1}}}: [0, 1] \rightarrow E$ é dado por

$$\gamma^{X_{t_i}, X_{t_{i+1}}}(t) = (1-t)X_{t_i} + tX_{t_{i+1}}. \quad (1.36)$$

Proposição 1.2.3. Sejam (E, d) um espaço geodésico e $X \in C(J, E)$. Se $\{D_n\}_{n \geq 0}$ é uma seqüência de partições do intervalo J tais que $|D_n| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então qualquer seqüência $\{X^{D_n}\}_{n \geq 0}$ de aproximações geodésicas de X , com respeito as partições D_n , converge uniformemente para X , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(X^{D_n}, X) = 0. \quad (1.37)$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{osc}(X, \delta) := \sup_{|t-s| < \delta} d(X_s, X_t) < \epsilon/2 \quad (1.38)$$

o que é possível, uma vez que X é um caminho contínuo no intervalo compacto $J = [0, T]$ e portanto uniformemente contínuo.

Como $|D_n| \rightarrow 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|D^n| < \delta$, para todo $n \geq n_0$. Então tomando a partição D^{n_0} e $t_i < t_{i+1}$ dois pontos consecutivos em D^{n_0} , para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$\begin{aligned} d(X_t^{D^n}, X_t) &\leq d(X_t^{D^n}, X_{t_i}) + d(X_{t_i}, X_t) \\ &= d(X_t^{D^n}, X_{t_i}^{D^n}) + d(X_{t_i}, X_t) \\ &= \left| \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \right| d(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) + d(X_{t_i}, X_t) \\ &\leq 2 \text{osc}(X, \delta) < \epsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Logo

$$d_\infty(X^{D_n}, X) = \sup_{t \in J} d(X_t^{D_n}, X_t) < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(X^{D_n}, X) = 0$. \square

Lema 1.2.4. *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < q$. Se $X, Y \in \mathcal{V}^p(J, E)$ então*

$$\|X - Y\|_{\mathcal{V}^q(J, E)} \leq (2\|X - Y\|_{\infty, J})^{1-\frac{p}{q}} (\|X - Y\|_{p, J})^{\frac{p}{q}} + \|X - Y\|_{\infty, J} \quad (1.39)$$

e consequentemente

$$\|X - Y\|_{\mathcal{V}^q(J, E)} \leq (2\|X - Y\|_{\infty, J})^{1-\frac{p}{q}} (\|X\|_{\mathcal{V}^p(J, E)} + \|Y\|_{\mathcal{V}^p(J, E)})^{\frac{p}{q}} + \|X - Y\|_{\infty, J}. \quad (1.40)$$

Demonstração: Primeiramente mostremos que se $1 \leq p < q$ e $Z \in \mathcal{V}^p(J, E)$ então vale a desigualdade

$$\|Z\|_{q, J} \leq \left(\sup_{s, t \in J} \|Z_t - Z_s\| \right)^{1-\frac{p}{q}} (\|Z\|_{p, J})^{\frac{p}{q}}. \quad (1.41)$$

De fato, tal desigualdade segue do fato que

$$\sum_{t_i \in D} \|Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\|^q = \sum_{t_i \in D} \|Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\|^p \|Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\|^{q-p} \leq \left(\sup_{s, t \in J} \|Z_t - Z_s\| \right)^{q-p} \sum_{t_i \in D} \|Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\|^p$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$.

Agora usando a desigualdade (1.41) para $Y = X - Y$ temos que

$$\begin{aligned} \|X - Y\|_{q, J} &\leq \left(\sup_{s, t \in J} \|X_t - Y_t - (X_s - Y_s)\| \right)^{1-\frac{p}{q}} (\|X - Y\|_{p, J})^{\frac{p}{q}} \\ &\leq (2 \sup_{t \in J} \|X_t - Y_t\|)^{1-p/q} (\|X - Y\|_{p, J})^{p/q} \end{aligned}$$

donde segue imediatamente as desigualdades desejadas. \square

Lema 1.2.5. *Sejam E um espaço de Banach, $\{X^{(n)}\}_{n>0} \subset C(J, E)$ e $X \in C(J, E)$ e $p \in [1, \infty)$. Se $X^{(n)}$ converge uniformemente para X , $\sup_n \|X^{(n)}\|_{p, J} < \infty$ e $q > p$ então $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0}$ converge para X na norma da q -variação, isto é*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{(n)}, X) = 0. \quad (1.42)$$

Demonstração: Como $X^{(n)}$ converge uniformemente para X segue do item iii) da Proposição 1.1.5 que

$$\|X\|_{p, [s, t]} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)}\|_{p, [s, t]}$$

para todo $s < t$ em J e como $\sup_n \|X^{(n)}\|_{p,J} < \infty$, segue que X tem p -variação finita. Como $X^{(n)}$ converge uniformemente para X segue que $\sup_n \|X^{(n)}\|_{\infty,J} < \infty$. Logo

$$\sup_n \|X^{(n)}\|_{\mathcal{V}^p(J,E)} \leq \sup_n \|X^{(n)}\|_{\infty,J} + \sup_n \|X^{(n)}\|_{p,J} < \infty.$$

Usando a desigualdade anterior e a desigualdade (1.40) do Lema 1.2.4 para $X - X^{(n)}$ segue que

$$\|X - X^{(n)}\|_{\mathcal{V}^q(J,E)} \leq (2\|X - X^{(n)}\|_{\infty,J})^{1-\frac{p}{q}} (\|X\|_{\mathcal{V}^p(J,E)} + \sup_n \|X^{(n)}\|_{\mathcal{V}^p(J,E)})^{\frac{p}{q}} + \|X - X^{(n)}\|_{\infty,J}.$$

Como $X^{(n)}$ converge uniformemente para X (isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X^{(n)}\|_{\infty,J} = 0$) decorre desta última desigualdade que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X^{(n)}\|_{\mathcal{V}^q(J,E)} = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{(n)}, X) = 0$ como queríamos. \square

Corolário 1.2.6. *Sejam E um espaço de Banach, $1 \leq p < q$ e \mathcal{X} um subconjunto de $\mathcal{V}^p(J, E)$. Se \mathcal{X} é limitado e uniformemente equicontínuo, então \mathcal{X} é relativamente compacto em $\mathcal{V}^q(J, E)$.*

Em particular, se c é um controle em J , então o conjunto

$$\{X \in C(J, E) : X_0 = 0 \text{ e } \|X\|_{p,[s,t]} \leq c(s, t)^{1/p}, \quad \forall (s, t) \in \Delta_T\} \quad (1.43)$$

é relativamente compacto em $\mathcal{V}^q(J, E)$.

Demonstração: Decorre do teorema de Arzelá-Ascoli e do Lema 1.2.5. \square

Teorema 1.2.7. *Sejam E um espaço de Banach, $1 \leq p < q$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$ e $\{D_n\}_{n \geq 0}$ é uma seqüência de partições do intervalo J tais que $|D_n| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então a seqüência $\{X^{D_n}\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{V}^1(J, E)$ de aproximações poligonais de X converge na norma da q -variação para X , isto é,*

$$\bar{d}_q(X^{D_n}, X) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.44)$$

Demonstração: Uma vez que $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, vale a desigualdade

$$\|X^D\|_{p,J} \leq 3^{1-1/p} \|X\|_{p,J} \quad (1.45)$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$ (Ver [5]).

Logo,

$$\sup_n \|X^{D_n}\|_{p,J} \leq 3^{1-1/p} \|X\|_{p,J} < \infty$$

e deste fato, juntamente com as demais hipóteses, segue pelo Lema 1.2.5 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{D_n}, X) = 0.$$

\square

Sejam E um espaço de Banach e $p \in [1, \infty)$. Denotaremos o fecho de $C^\infty(J, E)$ em relação a métrica \bar{d}_p da p -variação no espaço $\mathcal{V}^p(J, E)$ por $\mathcal{V}^{0,p}(J, E)$, ou seja,

$$\mathcal{V}^{0,p}(J, E) = \overline{C^\infty(J, E)}^{\bar{d}_p}. \quad (1.46)$$

O conjunto $\mathcal{V}^{0,p}(J, E)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{V}^p(J, E)$ e portanto é um espaço de Banach. Da mesma forma

$$\mathcal{V}_0^{0,p}(J, E) = \overline{C_0^\infty(J, E)}^{\bar{d}_p} = \overline{C_0^\infty(J, E)}^{d_p} \quad (1.47)$$

é também um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{V}^p(J, E)$ e portanto é um espaço de Banach.

Proposição 1.2.8. *Sejam E um espaço de Banach e $p \in (1, \infty)$. Se $\Omega \subset \mathcal{V}^1(J, E)$ e $\mathcal{V}^{0,1}(J, E) \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_1}$, então*

$$\bar{\Omega}^{\bar{d}_p} = \mathcal{V}^{0,p}(J, E). \quad (1.48)$$

Demonstração: Primeiramente mostremos que

$$\mathcal{V}^{0,p}(J, E) \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_p}.$$

Decorre da Proposição 1.1.4 que se $1 \leq p \leq q < \infty$ então

$$\bar{\Omega}^{\bar{d}_1} \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_p} \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_q}.$$

Usando o fato acima e a hipótese que $\mathcal{V}^{0,1}(J, E) \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_1}$, temos que

$$C^\infty(J, E) \subset \overline{C^\infty(J, E)}^{\bar{d}_1} = \mathcal{V}^{0,1}(J, E) \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_1} \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_p}$$

donde segue que

$$\mathcal{V}^{0,p}(J, E) = \overline{C^\infty(J, E)}^{\bar{d}_p} \subset \bar{\Omega}^{\bar{d}_p}.$$

Agora mostremos a outra inclusão. Temos

$$\mathcal{V}^1(J, E) \subset \mathcal{V}^{0,p}(J, E).$$

De fato, qualquer $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ pode ser aproximado uniformemente por uma sequência $X_n \in C^\infty(J, E)$ tal que $\sup_n \|X_n\|_{1,J} < \infty$ e daí usando o Lema 1.2.5 (em relação a 1 e p) temos a inclusão acima.

Logo,

$$\Omega \subset \mathcal{V}^1(J, E) \subset \mathcal{V}^{0,p}(J, E) = \overline{C_0^\infty(J, E)}^{\bar{d}_p}$$

e portanto

$$\bar{\Omega}^{\bar{d}_p} \subset \overline{C_0^\infty(J, E)}^{\bar{d}_p} = \mathcal{V}^{0,p}(J, E)$$

como queríamos. □

Como conseqüência imediata da Proposição 1.2.8 temos que

$$\overline{\mathcal{V}^1(J, E)}^{\bar{d}_p} = \mathcal{V}^{0,p}(J, E). \quad (1.49)$$

Se E é um espaço de Banach e $1 \leq p < q$, temos que

$$\mathcal{V}^p(J, E) \subset \mathcal{V}^{0,q}(J, E). \quad (1.50)$$

De fato, dado $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, decorre do Teorema 1.2.7 que existe uma seqüência $\{X^{D_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de aproximações poligonais de X tal que cada $X^{D_n} \in \mathcal{V}^1(J, E)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{D_n}, X) = 0$. Logo, $X \in \overline{\mathcal{V}^1(J, E)}^{\bar{d}_q} = \mathcal{V}^{0,q}(J, E)$.

1.3 Teorema Young

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. Denote por $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de E_1 em E_2 .

Definição 1.3.1. Sejam $X: [a, b] \rightarrow E_1$ e $Y: [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ caminhos contínuos. Se o limite

$$\lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ D \in \mathcal{P}([a, b])}} \sum_{s_i \in D} Y_{s_i} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) \quad (1.51)$$

existe, dizemos que tal limite é uma *integral de Riemann-Stieltjes* de Y com respeito a X no intervalo $[a, b]$ e o denotamos por

$$\int_a^b Y_s dX_s. \quad (1.52)$$

Seja E um espaço vetorial normado, $X \in C(J, E)$ e $v \in E$. Definimos operador translação por v em $C(J, E)$ como sendo a aplicação $L_v: C(J, E) \rightarrow C(J, E)$ dada por

$$L_v(X)(s) = X(s) + v. \quad (1.53)$$

Proposição 1.3.2. *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $X \in C([r, t], E_1)$, $Y \in C([r, t], \mathcal{L}(E_1, E_2))$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

i) Se $v \in E_1$ então

$$\int_r^t Y_s dX_s = \int_r^t Y_s d(L_v(X))_s. \quad (1.54)$$

ii) Se $\varphi: [a, b] \rightarrow [r, t]$ é um homeomorfismo crescente então

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} Y_s dX_s = \int_a^b (Y \circ \varphi)_s d(X \circ \varphi)_s. \quad (1.55)$$

iii) Se $\varphi: [a, b] \rightarrow [r, t]$ é um homeomorfismo decrescente então

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} Y_s dX_s = - \int_a^b (Y \circ \varphi)_s d(X \circ \varphi)_s. \quad (1.56)$$

Demonstração: i) Decorre da igualdade

$$\sum_{s_i \in D} Y_{s_i}(X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) = \sum_{s_i \in D} Y_{s_i}((X_{s_{i+1}} + v) - (X_{s_i} + v)) = \sum_{s_i \in D} Y_{s_i}(L_v(X)_{s_{i+1}} - L_v(X)_{s_i})$$

a qual é válida para todo $D \in \mathcal{P}([r, t])$.

ii) Seja $D = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b\}$ e considere $\varphi D = \{r = \varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \dots < \varphi(s_k) = t\}$.

Temos que aplicação $\bar{\varphi}: \mathcal{P}([a, b]) \rightarrow \mathcal{P}([r, t])$ dada por

$$\bar{\varphi}(D) = \varphi D \tag{1.57}$$

é uma bijeção e além disso $|D| \rightarrow 0$ se, e somente se, $|\varphi D| \rightarrow 0$.

Assim, denotando $\varphi(s_i) = \bar{s}_i$ para $s_i \in D$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{s}_i \in \varphi D} Y_{\bar{s}_i}(X_{\bar{s}_{i+1}} - X_{\bar{s}_i}) &= \sum_{s_i \in D} Y_{\varphi(s_i)}(X_{\varphi(s_{i+1})} - X_{\varphi(s_i)}) \\ &= \sum_{s_i \in D} (Y \circ \varphi)_{s_i}((X \circ \varphi)_{s_{i+1}} - (X \circ \varphi)_{s_i}). \end{aligned}$$

Segue da igualdade acima que se existe o limite de um dos termos da igualdade, então existe o limite do outro termo e além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} Y_s dX_s &= \int_r^t Y_s dX_s \\ &= \lim_{\substack{|\varphi D| \rightarrow 0 \\ \varphi D \in \mathcal{P}([r, t])}} \sum_{\bar{s}_i \in \varphi D} Y_{\bar{s}_i}(X_{\bar{s}_{i+1}} - X_{\bar{s}_i}) \\ &= \lim_{\substack{|\varphi D| \rightarrow 0 \\ D \in \mathcal{P}([a, b])}} \sum_{s_i \in D} (Y \circ \varphi)_{s_i}((X \circ \varphi)_{s_{i+1}} - (X \circ \varphi)_{s_i}) \\ &= \int_a^b (Y \circ \varphi)_s d(X \circ \varphi)_s. \end{aligned}$$

iii) Decorre de maneira análoga a demonstração do item ii). □

Proposição 1.3.3. *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. Se $X \in \mathcal{V}^1(J, E_1)$ e $Y \in C(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ então para cada $t \in J$ existe a integral*

$$\int_0^t Y_s dX_s. \tag{1.58}$$

Além disso, $\int_0^t Y_s dX_s$ é linear em relação a Y e em relação a X e vale que

$$\|\int_0^t Y_s dX_s\|_{E_2} \leq (\sup_{t \in J} \|Y_t\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}) \|X\|_{1, [0, t]}. \tag{1.59}$$

Demonstração: Veja E. Lima [14], página 194. □

Uma questão que surge é se existe a integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^t Y_s dX_s$, se por a caso X não tiver 1-variância, mas sim um grau de variação maior.

L. C. Young [28] apresentou as condições suficientes para que a integral $\int_0^t Y_s dX_s$ exista, caso a variação de X seja maior do que 1. Mais precisamente ele provou que a integral existe quando X tem p -variância finita, Y tem q -variância finita e é satisfeita a condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Em seguida apresentaremos uma demonstração deste resultado baseada na demonstração apresentada por T. Lyons e colaboradores [17].

Teorema 1.3.4 (Young). *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach e $p, q \in [1, \infty)$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, $Y \in \mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ então para cada $[s, t] \subset J$ existe a integral*

$$\int_s^t Y_u dX_u. \quad (1.60)$$

Além disso, $\int_s^t Y_u dX_u \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ e existe um constante $C_{p,q}$ dependente de p e q tal que

$$\|\int_s^t Y_u dX_u\|_{p,[s,t]} \leq C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} \|X\|_{p,[s,t]} \quad (1.61)$$

para todo $[s, t] \subset J$.

Demonstração: Seja $[s, t] \subset J$.

No caso em que $\|X\|_{p,[s,t]} = 0$, temos que $X|_{[s,t]}$ é um caminho constante, logo $\int_s^t Y_u dX_u = 0$ e a condição (1.61) é satisfeita para qualquer constante C .

No caso em que $\|Y\|_{q,[s,t]} = 0$, temos que $Y|_{[s,t]}$ é um caminho constante, logo

$$\int_s^t Y_u dX_u = Y_s(X_t - X_s)$$

e

$$\|\int_s^t Y_u dX_u\|_{p,[s,t]} \leq \|Y_s\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \|X\|_{p,[s,t]}$$

lembrando que neste caso, $\|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} = \|Y_s\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}$.

No caso em que $\|X\|_{p,[s,t]} \neq 0$ e $\|Y\|_{q,[s,t]} \neq 0$, considere o caminho $\tilde{X}: [s, t] \rightarrow E_1$ dado por

$$\tilde{X}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|_{p,J}} \quad (1.62)$$

e o caminho $\tilde{Y}: [s, t] \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ dado por

$$\tilde{Y}(t) = \frac{Y(t)}{\|Y\|_{q,J}}. \quad (1.63)$$

Defina $c: \Delta_{[s,t]} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c(u, v) = \left(\frac{\|X\|_{p,[u,v]}}{\|X\|_{p,[s,t]}} \right)^p + \left(\frac{\|Y\|_{q,[u,v]}}{\|Y\|_{q,[s,t]}} \right)^q. \quad (1.64)$$

Segue que $c(s, t) = 2$ e c controla a p -variação de \tilde{X} e a q -variação de \tilde{Y} em $[s, t]$.

Seja $D = \{t_0 = s < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = t\}$ uma partição do intervalo $[s, t] \subset J$ e considere $\int_D Y dX := \sum_{i=0}^{r-1} Y_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$. Queremos limitar $\|\int_D Y dX\|_{E_2}$ independentemente de D . Para isso removeremos pontos de D .

Se D possui apenas três pontos, retiramos o ponto intermediário t_1 . Se $r > 2$, escolhemos t_i , com $i \in \{1, \dots, r-1\}$, tal que

$$c(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2}{r-1} \cdot c(s, t). \quad (1.65)$$

Tal t_i existe. De fato, suponha que $c(t_{i-1}, t_{i+1}) > \frac{2}{r-1} \cdot c(s, t)$ para todo $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Segue disto e da superaditividade de c que:

- Se $r-1$ é ímpar, então

$$2 \cdot c(s, t) = (r-1) \frac{2}{r-1} \cdot c(s, t) < \sum_{i=1}^{r-1} c(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq c(s, t_r) + c(t_1, t_{r-1}) \leq 2 \cdot c(s, t). \quad (1.66)$$

- Se $r-1$ é par, então

$$2 \cdot c(s, t) = (r-1) \frac{2}{r-1} \cdot c(s, t) < \sum_{i=1}^{r-1} c(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq c(s, t_{r-1}) + c(t_1, t_r) \leq 2 \cdot c(s, t). \quad (1.67)$$

Logo, $c(s, t) < c(s, t)$, o que é absurdo.

Agora, considere a partição $D^1 = D^0 - \{t_i\}$, onde $D^0 = D$ e $t_i \in D$ é o ponto escolhido acima. Temos que

$$\begin{aligned} \|\int_D \tilde{Y} d\tilde{X} - \int_{D^1} \tilde{Y} d\tilde{X}\|_{E_2} &= \|\tilde{Y}_{t_{i-1}} (\tilde{X}_{t_i} - \tilde{X}_{t_{i-1}}) + \tilde{Y}_{t_i} (\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i}) - \tilde{Y}_{t_{i-1}} (\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_{i-1}})\|_{E_2} \\ &= \|(\tilde{Y}_{t_i} - \tilde{Y}_{t_{i-1}})(\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i})\|_{E_2} \\ &\leq \|\tilde{Y}_{t_i} - \tilde{Y}_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \cdot \|\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i}\|_{E_1} \\ &\leq \frac{\|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)}}{\|Y\|_{q, [s, t]}} \cdot \frac{\|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\|_{E_1}}{\|X\|_{p, [s, t]}} \\ &\leq \frac{\|Y\|_{q, [t_{i-1}, t_i]}}{\|Y\|_{q, [s, t]}} \cdot \frac{\|X\|_{p, [t_i, t_{i+1}]}}{\|X\|_{p, [s, t]}} \\ &= \left(\left(\frac{\|Y\|_{q, [t_{i-1}, t_i]}}{\|Y\|_{q, [s, t]}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\frac{\|X\|_{p, [t_i, t_{i+1}]}}{\|X\|_{p, [s, t]}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c(t_{i-1}, t_i)^{\frac{1}{q}} \cdot c(t_i, t_{i+1})^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_D \tilde{Y} d\tilde{X} - \int_{D^1} \tilde{Y} d\tilde{X} \right\|_{E_2} &\leq c(t_{i-1}, t_i)^{\frac{1}{q}} \cdot c(t_i, t_{i+1})^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq c(t_{i-1}, t_{i+1})^{\frac{1}{q}} \cdot c(t_{i-1}, t_{i+1})^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq c(t_{i-1}, t_{i+1})^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\frac{2}{r-1} \cdot c(s, t) \right)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \\
 &= \left(\frac{4}{r-1} \right)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

De modo recursivo, para cada $n = 2, \dots, r-1$ obtemos $D^n = D^{n-1} - \{t_j^{(n-1)}\}$, onde $t_j^{(n-1)} \in D^{n-1} = \{t_0^{(n-1)} = s < t_1^{(n-1)} < \dots < t_{r-n}^{(n-1)} < t_{r-(n-1)}^{(n-1)} = t\}$, $j \in \{1, \dots, r-n\}$ e $t_j^{(n-1)}$ satisfaz

$$c(t_{j-1}^{(n-1)}, t_{j+1}^{(n-1)}) \leq \frac{2}{r-n} \cdot c(s, t) \quad (1.68)$$

e

$$\left\| \int_{D^{n-1}} \tilde{Y} d\tilde{X} - \int_{D^n} \tilde{Y} d\tilde{X} \right\|_{E_2} \leq \left(\frac{4}{r-n} \right)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}. \quad (1.69)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_D (\tilde{Y} - \tilde{Y}_s) d\tilde{X} \right\|_{E_2} &= \left\| \int_D \tilde{Y} d\tilde{X} - \tilde{Y}_s (\tilde{X}_t - \tilde{X}_s) \right\|_{E_2} \\
 &= \left\| \int_D \tilde{Y} d\tilde{X} - \int_{D^{r-1}} \tilde{Y} d\tilde{X} \right\|_{E_2} \\
 &\leq \sum_{n=1}^{r-1} \left\| \int_{D^{n-1}} \tilde{Y} d\tilde{X} - \int_{D^n} \tilde{Y} d\tilde{X} \right\| \\
 &= 4^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \cdot \sum_{n=1}^{r-1} \left(\frac{1}{r-n} \right)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \\
 &= 4^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \cdot \sum_{n=1}^{r-1} \frac{1}{(n)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}}.
 \end{aligned}$$

Como

$$\left\| \int_D (\tilde{Y} - \tilde{Y}_s) d\tilde{X} \right\|_{E_2} = \left\| \int_D \left(\frac{Y - Y_s}{\|Y\|_{q,[s,t]}} \right) d \left(\frac{X}{\|X\|_{p,[s,t]}} \right) \right\|_{E_2} = \frac{\left\| \int_D (Y - Y_s) dX \right\|_{E_2}}{\|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]}}$$

e

$$\xi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} < \infty,$$

uma vez que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1,$$

segue que

$$\|\int_D (Y - Y_s) dX\|_{E_2} \leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]}, \quad (1.70)$$

onde $C_{p,q} = 4^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \cdot \xi(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$.

Logo,

$$\sup_{D \in \mathcal{P}([s,t])} \|\int_D (Y - Y_s) dX\|_{E_2} \leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]} \quad (1.71)$$

para todo $[s, t] \subset J$.

Temos também que

$$\|\|\int_D Y dX\|_{E_2} - \|Y_s(X_t - X_s)\|_{E_2}\| \leq \|\int_D (Y - Y_s) dX\|_{E_2} \leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]}$$

então

$$\begin{aligned} \|\int_D Y dX\|_{E_2} &\leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]} + \|Y_s(X_t - X_s)\|_{E_2} \\ &\leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]} + \|Y_s\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \|X_t - X_s\|_{E_1} \\ &\leq C_{p,q} \|Y\|_{q,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]} + \|Y\|_{\infty,[s,t]} \|X\|_{p,[s,t]} \\ &\leq C_{p,q} (\|Y\|_{q,[s,t]} + \|Y\|_{\infty,[s,t]}) \|X\|_{p,[s,t]} \\ &\leq C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} \|X\|_{p,[s,t]}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_{D \in \mathcal{P}([s,t])} \|\int_D Y dX\|_{E_2} \leq C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} \|X\|_{p,[s,t]} \quad (1.72)$$

para todo $[s, t] \subset J$.

Agora usaremos um argumento de aproximação para garantir que a integral existe. Seja $p' \geq p$ tal que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} > 1$. Segue pela Teorema 1.2.7 que existe uma seqüência $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}^1(J, E_1)$ de aproximações poligonais X tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_{p'}(X^{D_n}, X) = 0. \quad (1.73)$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $X^{(n)}$ tem 1-variação, decorre da Proposição 1.3.3 que existe a integral de Riemann-Stieljes

$$\int_s^t Y_u dX_u^{(n)} = \lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ D \in \mathcal{P}([s,t])}} \int_D Y dX^{(n)}. \quad (1.74)$$

Desta forma da $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|X^{(n_0)} - X\|_{\mathcal{V}^{p'}} \leq \frac{\epsilon}{3C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q}} \quad (1.75)$$

e existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\int_D Y dX^{(n_0)} - \int_{D'} Y dX^{(n_0)}\|_{E_2} \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (1.76)$$

para todo $D, D' \in \mathcal{P}([s, t])$ satisfazendo $\max\{|D|, |D'|\} < \delta$.

Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\int_D Y dX - \int_{D'} Y dX\|_{E_2} &\leq \|\int_D Y dX - \int_D Y dX^{(n_0)}\|_{E_2} \\ &\quad + \|\int_D Y dX^{(n_0)} - \int_{D'} Y dX^{(n_0)}\|_{E_2} + \|\int_{D'} Y dX^{(n_0)} - \int_{D'} Y dX\|_{E_2} \\ &\leq \|\int_D Y d(X - X^{(n_0)})\|_{E_2} \\ &\quad + \|\int_D Y dX^{(n_0)} - \int_{D'} Y dX^{(n_0)}\|_{E_2} + \|\int_{D'} Y d(X^{(n_0)} - X)\|_{E_2} \\ &\leq 2C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} \|X^{(n_0)} - X\|_{\mathcal{V}^{p'}([s,t], E_1)} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

para todo $D, D' \in \mathcal{P}([s, t])$ satisfazendo $\max\{|D|, |D'|\} < \delta$, ou seja, existe a integral

$$\int_s^t Y_u dX_u = \lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ D \in \mathcal{P}([s,t])}} \int_D Y dX. \quad (1.77)$$

Por fim, usando a desigualdade (1.72) temos que

$$\begin{aligned} \|\int_s^t Y_u dX_u\|_{p,[s,t]}^p &= \sup_{D \in \mathcal{P}([s,t])} \sum_{t_i \in D} \|\int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_u dX_u\|_{E_2}^p \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{P}([s,t])} \sum_{t_i \in D} (C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))})^p \|X\|_{p,[t_i, t_{i+1}]}^p \\ &\leq (C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))})^p \sup_{D \in \mathcal{P}([s,t])} \left(\sum_{t_i \in D} \|X\|_{p,[t_i, t_{i+1}]} \right)^p \\ &\leq (C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))})^p \|X\|_{p,[s,t]}^p, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\int_s^t Y_u dX_u\|_{p,[s,t]} \leq C_{p,q} \|Y\|_{\mathcal{V}^q([s,t], \mathcal{L}(E_1, E_2))} \|X\|_{p,[s,t]} \quad (1.78)$$

para todo $[s, t] \subset J$. □

Definição 1.3.5. Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $X \in C(J, E_1)$, $Y \in C(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Dizemos que a integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^T Y_u dX_u$ é uma *integral no sentido de Young* se existem $p, q \in [1, \infty)$ tais que $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, $Y \in \mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

Para finalizar esta seção enunciaremos uma proposição que fornece uma descrição de uma integral de Riemann-Stieltjes como integral de Riemann, caso o integrador seja um caminho de classe C^1 .

Contudo, antes disso é importante informar sobre a notação utilizada nesta tese para a derivada de uma aplicação. Dados V e W espaços vetoriais, $U \subset V$ um aberto e uma aplicação $g: U \rightarrow W$ diferenciável, denotaremos a sua aplicação derivada $Dg: U \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ avaliada num ponto $u \in U$ por $Dg|_u$, ou seja, $Dg(u) = Dg|_u$.

Proposição 1.3.6. *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. Se $X \in C^1(J, E_1)$ e $Y \in C(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ então*

$$\int_0^t Y_s dX_s = \int_0^t Y_s(\dot{X}_s) ds, \quad (1.79)$$

para todo $t \in J$, onde $\dot{X}: J \rightarrow E_1$ é o caminho derivada dado por $\dot{X}(t) = DX|_t(1)$.

Demonstração: Veja E. Lima [14], página 195. □

1.4 Sistemas de Young

Nesta seção nós propomos dar uma notação mais formal para uma coleção de equações integrais (no sentido de Young) cujos integradores são caminhos contínuos com p -variação finita. A cada uma destas coleções de equações demos a denominação de sistema de Young.

Proposição 1.4.1. *Sejam V_1 e V_2 espaços de Banach, $f: V_1 \rightarrow V_2$ uma aplicação Holder contínua com expoente $\gamma \in (0, 1]$ e $Y \in \mathcal{V}^p(J, V_1)$, com $p \in [1, \infty)$. Então $f \circ Y \in \mathcal{V}^{\frac{p}{\gamma}}(J, V_2)$ e existe um constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|f \circ Y\|_{\frac{p}{\gamma}, J} \leq C \|Y\|_{\mathcal{V}^p(J, V_1)}. \quad (1.80)$$

Demonstração: Como $f: V_1 \rightarrow V_2$ é Holder contínuo com expoente $\gamma \in (0, 1]$, então existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|f(u) - f(v)\|_{V_2} \leq C \|u - v\|_{V_1}^\gamma. \quad (1.81)$$

Então para toda partição $D \in \mathcal{P}(J)$ temos que

$$\begin{aligned} \|f \circ Y\|_{\frac{p}{\gamma}, J} &= \left(\sup_{D \in \mathcal{P}(J)} \sum_{t_i \in D \subset J} \|f(Y_{t_{i+1}}) - f(Y_{t_i})\|_{V_2}^{\frac{p}{\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{p}} \\ &\leq \left(\sup_{D \in \mathcal{P}(J)} \sum_{t_i \in D \subset J} C^{\frac{p}{\gamma}} \|Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\|_{V_1}^p \right)^{\frac{\gamma}{p}} \\ &= C \left(\left(\sup_{D \in \mathcal{P}(J)} \sum_{t_i \in D \subset J} \|Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\|_{V_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^\gamma \\ &= C \|Y\|_{p, J}^\gamma \leq C \|Y\|_{\mathcal{V}^p}^\gamma. \end{aligned}$$

□

Observação 1.4.2. Sejam $f: V_1 \rightarrow V_2$ uma aplicação Holder contínua com expoente $\gamma \in (0, 1]$ e $Y \in \mathcal{V}^p(J, V_1)$, com $p \in [1, \infty)$. Estudar a continuidade da aplicação $Y \mapsto f(Y)$ é uma problema difícil. O que verificamos com alguma facilidade é que se uma seqüência

$\{Y^{(n)}\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{V}^p(J, V_1)$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_p(Y^{(n)}, Y) = 0$, então a sequência $\{f(Y_n)\}_{n \geq 0}$ é limitada na norma da $\frac{p}{\gamma}$ -variação e $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f(Y_n), f(Y)) = 0$. Daí, usando o Lema 1.2.4 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_{\frac{q}{\gamma}}(f(Y_n), f(Y)) = 0$, para todo $q > p$, isto é, a sequência $\{f(Y_n)\}_{n \geq 0}$ converge na norma da $\frac{q}{\gamma}$ -variação para $f(Y)$, para todo $q > p$.

Observação 1.4.3. Um outro ponto importante a mencionar é que se $f: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ é uma aplicação Holder contínua com expoente $\gamma \in (0, 1]$ e se $Y \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ então de acordo com a Proposição 1.4.1 tem-se que $f \circ Y \in \mathcal{V}^{\frac{p}{\gamma}}(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Desta forma, se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$ e $f \circ Y \in \mathcal{V}^{\frac{p}{\gamma}}(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, para poder utilizar o Teorema de Young e assim garantir que a integral $\int_0^\cdot f(Y_s) dX_s$ existe é suficiente que a desigualdade

$$\frac{1}{p} + \frac{\gamma}{p} > 1 \Leftrightarrow 1 + \gamma > p \quad (1.82)$$

seja válida, e uma vez válida, esta desigualdade implica que $p \in [1, 2)$, visto que $\gamma \in (0, 1]$.

Dado um numero real $\gamma \in (0, \infty)$, denotaremos por $[\gamma]$, o maior inteiro estritamente menor do que γ , isto é,

$$\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}, \quad \text{onde } [\gamma] \in \mathbb{N} \text{ e } \{\gamma\} \in (0, 1]. \quad (1.83)$$

Definição 1.4.4. Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetoriais normados e $\gamma \in (0, \infty)$. Uma aplicação $f: V_1 \rightarrow V_2$ é chamada de γ -Lipschitz se f é $[\gamma]$ -vezes continuamente diferenciável e existe um constante $C > 0$ tal que:

- i) $\sup_{x \in V_1} \|f^{(k)}(x)\| < C$, para $k = 0, \dots, [\gamma]$, onde $f^{(k)}$ denota a k -éssima derivada de f ;
- ii) $\|f^{([\gamma])}(x) - f^{([\gamma])}(y)\| \leq C \|x - y\|_{V_1}^{\{\gamma\}}$, para todo $x, y \in V_1$.

Denotamos o conjunto das aplicações de V_1 em V_2 que são γ -Lipschitz por $Lip^\gamma(V_1, V_2)$ e ressaltamos que o número γ é chamado de expoente Lipschitz.

Definição 1.4.5. Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $p \in [1, \infty)$, $\Delta \subset \mathcal{V}^p(J, E_1)$ e $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\gamma \in (0, \infty)$. Para cada $X \in \Delta$ e para cada $u \in E_2$ dizemos que um caminho $\alpha \in C(J, E_2)$ é uma solução para a equação de Young

$$\begin{cases} dY = f(Y) dX \\ Y_0 = u \in E_2 \end{cases} \quad (1.84)$$

se $\alpha \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ e satisfaz

$$\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s) dX_s \quad (1.85)$$

para todo $t \in J$, onde a integral $\int_0^t f(\alpha_s) dX_s$ é uma integral no sentido de Young.

A aplicação f na definição acima é chamada de *campo*, o caminho X de *senal* (ou controle) de integração e o elemento u de *de condição inicial*. É importante mencionar que uma solução para a equação de Young (1.84) pode não ser diferenciável com respeito aos pontos do intervalo J .

Teorema 1.4.6 (Cauchy-Peano). *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $p \in [1, 2)$ e $\gamma \in (0, 1]$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $1 + \gamma > p$, então para todo $u \in E_2$ a equação*

$$\begin{cases} dY = f(Y) dX \\ Y_0 = u \in E_2 \end{cases} \quad (1.86)$$

admite solução.

Demonstração: Veja T. Lyons [17], página 16. \square

Teorema 1.4.7 (Picard-Lindelöf). *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $p \in [1, 2)$ e $\gamma \in (1, 2]$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\gamma > p$, então para todo $u \in E_2$ a equação*

$$\begin{cases} dY = f(Y) dX \\ Y_0 = u \in E_2 \end{cases} \quad (1.87)$$

admite uma única solução.

Além disso se $I_f(u, X)$ denota a solução iniciada em $u \in E_2$ da equação acima, então a aplicação

$$\begin{aligned} I_f: E_2 \times \mathcal{V}^p(J, E_1) &\rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2) \\ (u, X) &\mapsto I_f(u, X) \end{aligned} \quad (1.88)$$

é contínua.

Demonstração: Veja T. Lyons [17], página 22. \square

Definição 1.4.8. Sejam E um espaço de Banach, $p \in [1, \infty)$ e $\Delta \subset \mathcal{V}^p(J, E)$. Dizemos que:

i) Δ é um conjunto *fechado por reparametrizações positivas* se para cada $X \in \Delta$ e para cada função $\varphi: J \rightarrow [0, t]$, com $t \in J$, contínua, C^1 por partes, sobrejetiva e não-decrescente, temos que $X \circ \varphi \in \Delta$.

ii) Δ é um conjunto *fechado por concatenações contínuas* se para cada $(X, Y) \in \Delta \times \Delta$ temos que $X * Y \in \Delta$, onde

$$(X * Y)_t = \begin{cases} X_t, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ Y_{2t-T} + X_T - Y_0, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases} . \quad (1.89)$$

Observação 1.4.9. No item *i*) da definição anterior a exigência de que as funções φ consideradas sejam C^1 por partes é colocada para que o subconjunto de $\mathcal{V}^1(J, E)$ constituído de caminhos C^1 por partes seja um conjunto fechado por reparametrizações positivas.

Definição 1.4.10. Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, $1 \leq p < \gamma$, $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, $\Delta \subseteq \mathcal{V}^p(J, E_1)$ um conjunto fechado por reparametrizações positivas e por concatenações contínuas e M subespaço topológico de E_2 . Dizemos que a tripla Σ dada por

$$(f, \Delta, M) \tag{1.90}$$

é um *sistema de Young* com p -variação.

Dado um sistema de Young $\Sigma = (f, \Delta, M)$ dizemos que f é o *campo*, Δ é o conjunto de *sinais (ou controles) de integração* e M é o *espaço de estados* do sistema Σ .

De agora em diante quando nos referirmos a um sistema de Young (f, Δ, M) com p -variação, entenderemos, mesmo não sendo mencionado explicitamente, que este sistema está relacionado a espaços de Banach E_1 e E_2 e a algum $\gamma \in (p, \infty]$, onde $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, $\Delta \subseteq \mathcal{V}^p(J, E_1)$ e M é subespaço topológico de E_2 . Quando for necessário explicitar as considerações acima, diremos que E_1 e E_2 são os espaços associados ao sistema de Young (f, Δ, M) .

Definição 1.4.11. Seja Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, M) com p -variação. Os elementos do conjunto

$$T(\Sigma) = \left\{ \alpha \in \mathcal{V}^p(J, E_2) : \alpha = u + \int_0^\cdot f(\alpha_s) dX_s, X \in \Delta \text{ e } \alpha(J) \subset M \right\} \tag{1.91}$$

são chamados de *trajetórias do sistema de Young* Σ .

Dados $u, v \in M$, o conjunto das trajetórias do sistema Σ que iniciam em u é denotado por $T(\Sigma, u)$, enquanto o conjunto das trajetórias do sistema Σ que iniciam em u e terminam em v é denotado por $T(\Sigma, u, v)$. O conjunto

$$A(\Sigma, u) = \{ w \in M : w = \alpha(T) \text{ para algum } \alpha \in T(\Sigma, u) \} \tag{1.92}$$

é chamado de *conjunto dos pontos acessíveis* (ou *conjunto de acessibilidade*) a partir de u com respeito ao sistema Σ .

Agora, construiremos alguns exemplos de sistemas de Young. Sejam R e S espaços de Banach. Tome $E_1 = C^k(R, S)$, $E_2 = S$ e $g \in C^k(S, R)$. Defina $f_g: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ dada por

$$f_g(x)(h) = (h \circ g)(x). \tag{1.93}$$

Temos que f_g é de classe C^k e

$$D(f_g)|_x(y)(h) = D(h \circ g)|_x(y). \quad (1.94)$$

Sejam $X^i \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, com $i = 1, \dots, n$. Denotamos por

$$[X^1, \dots, X^n]_p \quad (1.95)$$

o menor subconjunto de $\mathcal{V}^p(J, E_1)$ fechado por reparametrizações positivas e concatenações contínuas contendo X^1, \dots, X^{n-1} e X^n .

Tomando $\Delta = [X^1, \dots, X^n]_p$, temos que Σ dado por

$$(f_g, \Delta, S) \quad (1.96)$$

é um sistema de Young com p -variação.

Se na construção do exemplo genérico acima, tomarmos $X^i: J \rightarrow E_1$ diferenciáveis então o sistema de Young Σ acima tem 1-variação e suas trajetórias coincidem com as soluções do sistema de controle $\langle F^1, \dots, F^n \rangle$ gerado pelos campos $F^i: J \times S \rightarrow S$ dados por

$$F^i(s, x) = ((D(X^i)|_s(1)) \circ g)(x) = (\dot{X}_s^i \circ g)(x). \quad (1.97)$$

De fato, usando a Proposição 1.3.6 temos que

$$dY_t = f_g(Y_t) dX_t^i \Leftrightarrow dY_t = f_g(Y_t)(\dot{X}_t^i) dt \Leftrightarrow \dot{Y}_t = \dot{X}_t^i(g(Y_t)) \Leftrightarrow \dot{Y}_t = F^i(t, Y_t).$$

Exemplo 1.4.12. Seja $E_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $E_2 = \mathbb{R}^2$ e considere a transformação linear

$$A(x, y) = (y, -x).$$

Então a aplicação $f_A: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ é dada por

$$f_A(x, y)(L) = (L \circ A)(x, y).$$

Considere

$$\Delta = [0, X^1, X^2]$$

onde 0 denota o caminho constante $X^0 = 0$ e os caminhos $X^i: J \rightarrow E_1$, $i = 1, 2$, são dados por

$$X_t^1(x, y) = (tx, ty)$$

e

$$X_t^2(x, y) = (-ty, -tx).$$

Portanto as trajetórias do sistema de Young

$$(f_A, \Delta, \mathbb{R}^2)$$

coincidem com as soluções do sistema de controle (veja ilustração)

$$\langle 0, \dot{X}_t^1 \circ A, \dot{X}_t^2 \circ A \rangle = \langle 0, A, F \rangle$$

onde

$$F(x, y) = (x, -y).$$

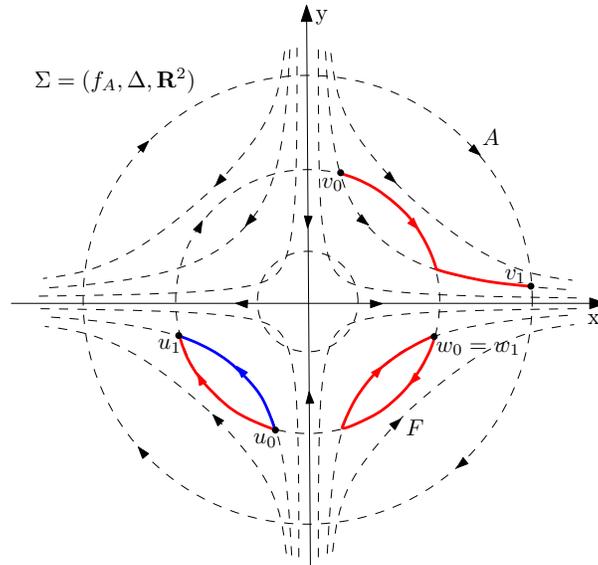


Figura 1.1: Algumas trajetórias do sistema de Young $(f_A, \Delta, \mathbb{R}^2)$.

Definição 1.4.13. Seja Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, M) . Dizemos que o sistema Σ é *consistente* se cada $(u, X) \in M \times \Delta$ está em correspondência com uma única trajetória $\alpha \in T(\Sigma)$ tal que $\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s) dX_s$, para todo $t \in J$, e além disso, tal correspondência é contínua.

Se Σ é um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, M) , então faz sentido definir a *aplicação de Itô* $I_\Sigma: M \times \Delta \rightarrow T(\Sigma)$ dada por

$$I_\Sigma(u, X) = \alpha \tag{1.98}$$

onde

$$\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s) dX_s \tag{1.99}$$

para todo $t \in J$. Segue da definição de Σ ser consistente que I_Σ é uma aplicação contínua.

Exemplo 1.4.14. Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach e $\Sigma = (f, \Delta, E_2)$ um sistema de Young com p -variação, onde $p \in [1, 2)$, $k \geq p$, $f \in C^k(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\Delta \subseteq \mathcal{V}^p(J, E_1)$. Então segue pelo Teorema de Picard-Lindelöf que Σ é consistente.

CAPÍTULO 2

HOMOTOPIA MONOTÔNICA ASSOCIADA A SISTEMAS DE YOUNG

Este capítulo tem por objetivo estender ao contexto de sistemas de Young resultados associados ao conceito de homotopia monotônica para sistemas de controle. A homotopia monotônica para trajetórias de um sistema de controle e seus resultados associados foram apresentados por F. Colonius, E. Kizil e L. A. San Martin em [2].

2.1 Concatenação entre Trajetórias de Young

Uma das conseqüências da consistência de um sistema de Young, é que a concatenação de duas trajetórias deste sistema ainda continua sendo uma trajetória deste sistema. Abordamos tal fato na seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Seja Σ um sistema de Young consistente. Se $I_{\Sigma}(u, X) \in T(\Sigma, u, v)$ e $I_{\Sigma}(v, Y) \in T(\Sigma, v, w)$ então*

$$I_{\Sigma}(u, X) * I_{\Sigma}(v, Y) = I_{\Sigma}(u, X * Y) \quad (2.1)$$

e portanto

$$I_{\Sigma}(u, X) * I_{\Sigma}(v, Y) \in T(\Sigma, u, w). \quad (2.2)$$

Demonstração: Seja Σ um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, M) .

Usando o item ii) da Proposição 1.3.2 temos que se $t \in [0, T/2]$, então

$$\begin{aligned}
(I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(t) &= I_\Sigma(u, X)(2t) \\
&= u + \int_0^{2t} f(I_\Sigma(u, X)(s)) dX_s \\
&= u + \int_0^t f(I_\Sigma(u, X)(2s)) dX_{2s} \\
&= u + \int_0^t f(((I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(s)) d(X * Y)_s.
\end{aligned}$$

Usando os itens i) e ii) da Proposição 1.3.2 temos que se $t \in [T/2, T]$, então

$$\begin{aligned}
(I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(t) &= I_\Sigma(v, Y)(2t - T) + I_\Sigma(u, X)(T) - I_\Sigma(v, Y)(0) \\
&= v + \int_0^{2t-T} f(I_\Sigma(v, Y)(s)) dY_s + u + \int_0^T f(I_\Sigma(u, X)(s)) dX_s - v \\
&= u + \int_0^{T/2} f(I_\Sigma(u, X)(2s)) dX_{2s} + \int_{T/2}^t f(I_\Sigma(u, Y)(2s - T)) dY_{2s-T} \\
&= u + \int_0^{T/2} f(I_\Sigma(u, X)(2s)) dX_{2s} \\
&\quad + \int_{T/2}^t f(I_\Sigma(u, Y)(2s - T)) d(L_{X_T - Y_0}(Y))_{2s-T} \\
&= u + \int_0^{T/2} f(((I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(s)) d(X * Y)_s \\
&\quad + \int_{T/2}^t f(((I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(s)) d(X * Y)_s \\
&= u + \int_0^t f(((I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(s)) d(X * Y)_s.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(t) = u + \int_0^t f(((I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y))(s)) d(X * Y)_s,$$

para todo $t \in J$.

Por outro lado, como Σ é consistente, temos que

$$I_\Sigma(u, X * Y)(t) = u + \int_0^t f(I_\Sigma(u, X * Y)(s)) d(X * Y)_s$$

para todo $t \in J$.

Mais ainda, como Σ é consistente então existe unicidade de soluções neste sistema e portanto

$$I_{\Sigma}(u, X) * I_{\Sigma}(v, Y) = I_{\Sigma}(u, X * Y).$$

□

A importância do resultado acima é que ele dá consistência a definição de produto entre classes de equivalência dadas pela relação de homotopia monotônica entre as trajetórias do sistema Σ .

Definição 2.1.2. Seja Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, M) . Dizemos que Σ é um sistema *reversível* se para todo $X \in \Delta$ temos que $X^{-1} \in \Delta$, onde $X_t^{-1} = X_{T-t}$, para todo $t \in [0, T]$.

Abaixo apresentaremos um outro resultado numa linha similar ao do resultado abordado anteriormente.

Proposição 2.1.3. *Seja Σ um sistema de Young consistente. Se Σ é reversível e $I_{\Sigma}(u, X) \in T(\Sigma, u, v)$ então*

$$(I_{\Sigma}(u, X))^{-1} = I_{\Sigma}(v, X^{-1}). \tag{2.3}$$

Demonstração: Usando o item iii) da Proposição 1.3.2 temos que

$$\begin{aligned} ((I_{\Sigma}(u, X))^{-1}(t) &= (I_{\Sigma}(u, X))(T - t) \\ &= u + \int_0^{T-t} f(I_{\Sigma}(u, X)(s)) dX_s \\ &= u - \int_t^T f(I_{\Sigma}(u, X)(T - s)) dX_{T-s} \\ &= u - \int_0^T f(I_{\Sigma}(u, X)(T - s)) dX_{T-s} + \int_0^t f(I_{\Sigma}(u, X)(T - s)) dX_{T-s} \\ &= u + \int_0^T f(I_{\Sigma}(u, X)(s)) dX_s + \int_0^t f(I_{\Sigma}(u, X)^{-1}(s)) dX_s^{-1} \\ &= v + \int_0^t f(I_{\Sigma}(u, X)^{-1}(s)) dX_s^{-1} \end{aligned}$$

para todo $t \in J$.

Por outro lado, como Σ é consistente, temos que

$$I_{\Sigma}(v, X^{-1})(t) = v + \int_0^t f(I_{\Sigma}(v, X^{-1})(s)) dX_s^{-1}$$

para todo $t \in J$.

Mais ainda, como Σ é consistente então existe unicidade de soluções neste sistema e portanto

$$(I_{\Sigma}(u, X))^{-1} = I_{\Sigma}(v, X^{-1}).$$

□

2.2 Homotopia Monotônica em um Sistema de Young

Homotopias entre trajetórias de um sistema de controle dado por equações diferenciais ordinárias foram tratadas por F. Colonius, E. Kizil e L. A. San Martin em [2]. Tais homotopias presente neste artigo receberam o nome de homotopias monotônicas. Nesta seção nossa proposta é apresentar uma versão de homotopia monotônica para trajetórias de um sistema de Young.

Sejam $p \in [1, \infty)$, $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema de Young com p -variação e E_1 e E_2 os espaços de Banach associados ao sistema Σ . Temos que $T(\Sigma, x, y) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$ e portanto consideraremos $T(\Sigma, x, y)$ munido com a topologia \mathcal{T}^p induzida pela norma da p -variação em $\mathcal{V}^p(J, E_2)$.

Note que

$$T(\Sigma, x, y) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2) \subset \mathcal{V}^q(J, E_2) \subset C(J, E_2), \quad (2.4)$$

para todo $1 \leq p < q$ e denote por \mathcal{T}^∞ a topologia induzida em $T(\Sigma, x, y)$ pela norma da convergência uniforme em $C(J, E_2)$. Segue da expressão (1.8), a qual define a norma p -variação, que dado $\alpha \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ então

$$\|\alpha\|_{J, \infty} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{V}^p} \quad (2.5)$$

e portanto $\mathcal{T}^\infty \subset \mathcal{T}^p$.

Definição 2.2.1. Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema Young com p -variação e $\alpha, \beta \in T(\Sigma, x, y)$. Dizemos que α é p -monotonicamente homotópica a β com respeito ao sistema Σ se existe um caminho contínuo $H: [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, x, y)$ em relação a topologia \mathcal{T}^p tal que $H(0) = \alpha$ e $H(1) = \beta$.

O caminho contínuo H é chamado *homotopia p -monotônica entre α e β* e usamos a notação $\alpha \simeq_p \beta$ para dizer que α é p -monotonicamente homotópica a β . Também usamos a notação $H: \alpha \simeq_p \beta$ quando queremos indicar que H é a homotopia p -monotônica entre α e β a ser considerada.

A relação \simeq_p é uma relação de equivalência em $T(\Sigma)$. O espaço quociente dado pela relação de equivalência \simeq_p é denotado por

$$\Gamma(\Sigma) = T(\Sigma) / \simeq_p \quad (2.6)$$

e para cada $\alpha \in T(\Sigma)$, sua classe de equivalência em $\Gamma(\Sigma)$ é denotada por $[\alpha]_p$. Para cada $x \in M$ o espaço quociente $T(\Sigma, x) / \simeq_p$ é denotado por $\Gamma(\Sigma, x)$.

O próximo resultado elementar será útil no resto da seção.

Proposição 2.2.2. *Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema de Young com p -variação da forma (f, Δ, M) e $\alpha, \beta \in T(\Sigma, x, y)$. Se α é p -monotonicamente homotópica a β com respeito ao sistema Σ , então existe uma aplicação contínua $L: J \times [0, 1] \rightarrow M$ satisfazendo:*

- i) $L(t, 0) = \alpha_t$ e $L(t, 1) = \beta_t$, para todo $t \in J$.*
- ii) $L^s \in T(\Sigma, x, y)$, para todo $s \in [0, 1]$, onde $L^s(t) = L(t, s)$.*

Demonstração: Seja $H: \alpha \simeq_p \beta$. Temos que $H: [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, x, y)$ é um caminho contínuo com respeito a topologia \mathcal{T}^p . Como $\mathcal{T}^\infty \subset \mathcal{T}^p$ então H é contínuo com respeito a topologia \mathcal{T}^∞ e deste fato segue que $L: J \times [0, 1] \rightarrow M$ dado por

$$L(t, s) = H(s)(t) \quad (2.7)$$

é uma homotopia clássica entre os caminhos α e β . Portanto a aplicação L é contínua (com respeito a topologia em M) e a verificação que as propriedades i) e ii) são satisfeitas por L segue imediatamente da definição de L . \square

Segue da Proposição 2.2.2 que se $\alpha \simeq_p \beta$ então $\alpha \simeq \beta$, onde \simeq denota a relação de equivalência dada pela homotopia clássica entre caminhos contínuos. Entretanto, existem sistemas de Young Σ com $\alpha, \beta \in T(\Sigma, x, y)$ nos quais $\alpha \simeq \beta$ e não existe $H: [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, x, y)$ tal que $H: \alpha \simeq_p \beta$. Abaixo formalizamos um exemplo de A. A. Agrachev, que nos foi comunicado oralmente por E. Kizil, o qual ilustra esta situação mencionada.

Sejam $E_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $E_2 = \mathbb{R}^3$. Considere a transformação linear

$$A(x, y, z) = (-y, x, z); \quad (2.8)$$

a aplicação $f_A: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ dada por

$$f_A(x, y, z)(L) = (L \circ A)(x, y, z) \quad (2.9)$$

e

$$\Delta = [0, X^1, X^2] \quad (2.10)$$

onde os caminhos $X^i: J \rightarrow E_1$ são dados por

$$X_t^1(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{e} \quad X_t^2(x, y, z) = (tz, -tx, -ty). \quad (2.11)$$

Considere o sistema de Young Σ dado por

$$(f_A, \Delta, \mathbb{S}^2) \quad (2.12)$$

o qual suas trajetórias coincidem com as soluções do sistema de controle $\langle 0, A, F \rangle$, onde $F(x, y, z) = (z, y, -x)$. Considere também $u = (1, 0, 0)$ e as trajetórias $\alpha, \beta \in T(\Sigma, u, u)$ dadas por

$$\alpha(t) = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (\cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T), 0). \quad (2.13)$$

Nós temos que $\alpha \simeq \beta$, pois \mathbb{S}^2 é simplesmente conexo. Entretanto, não existe $H : [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, x, y)$ tal que $H : \alpha \simeq_p \beta$.

De fato, supondo que exista $H : \alpha \simeq_p \beta$, decorre da Proposição 2.2.2 que existe uma aplicação contínua $L : J \times [0, 1] \rightarrow M$ satisfazendo:

- i) $L(t, 0) = \alpha_t$ and $L(t, 1) = \beta_t$, para todo $t \in J$.
- ii) $L^s \in T(\Sigma, u, u)$, para todo $s \in [0, 1]$, onde $L^s(t) = L(t, s) = H(s)(t)$.

Tomemos uma pequena vizinhança $W \subset \mathbb{S}^2$ de $u = (1, 0, 0)$, tal que $(0, 1, 0) \notin W$ e $(0, 0, 1) \notin W$. Usando o fato que L é contínua, então existe algum $s \in [0, 1]$ tal que $L^s(J) \subset W$, $L^s \neq \alpha$ e $L^s(0) = L^s(T) = u$, isto é, existe uma trajetória não constante em forma de loop contida em W . Mas isto é absurdo, visto que os sinais de Δ fornecem apenas trajetórias do sistema Σ contidas em W que sejam diferentes de loops, como pode ser visto na ilustração abaixo.

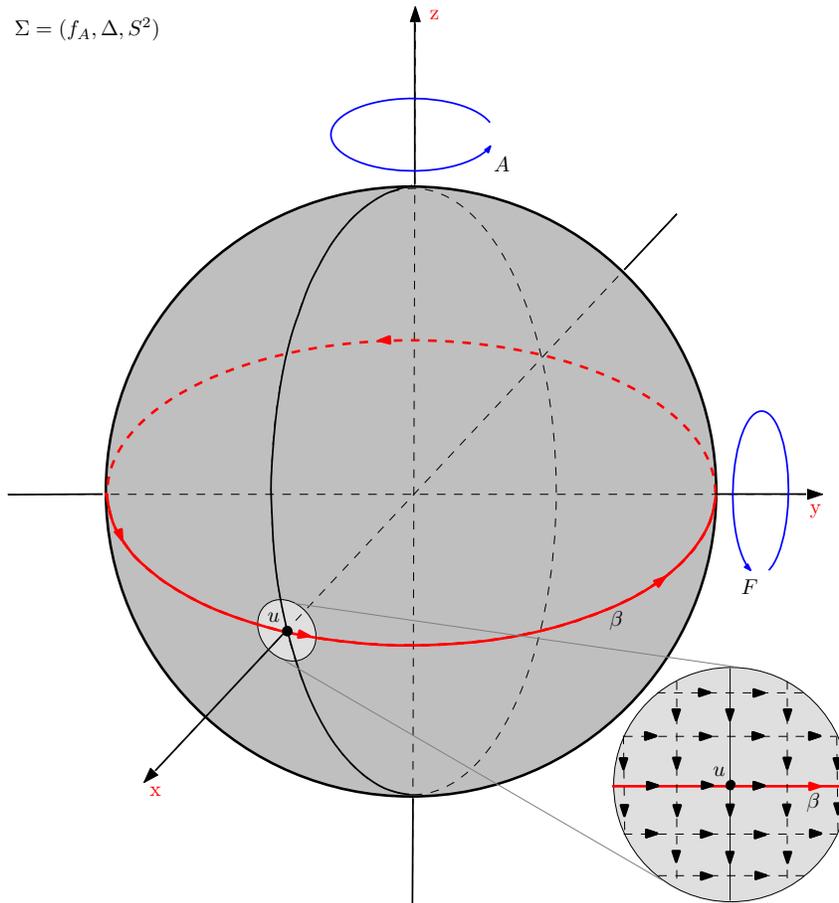


Figura 2.1: Trajetórias homotópicas no sentido usual que não são p -monotonicamente homotópicas.

2.3 Recobrimento de um Conjunto de Acessibilidade de um Sistema de Young

F. Colonius, E. Kizil e L. A. San Martin em [2] mostraram que um conjunto de acessibilidade (via trajetórias regulares) de um sistema de controle admite recobrimento e para a construção de tal recobrimento foi utilizado o espaço das classes de equivalência dadas pela relação de homotopia monotônica entre as trajetórias regulares deste sistema de controle. Resumidamente, para cada condição inicial u num espaço de estados eles consideraram uma aplicação que associava a cada controle w a sua respectiva trajetória iniciada em u , a qual denotaram por $trj_u(w)$. Além disso, consideraram a aplicação de avaliação $ev_u(w) = trj_u(w)(T)$, onde T representa o tempo final. Desta forma, em [2], controles regulares são aqueles controles, cuja derivada de $D(ev_u)|_w$ é sobrejetora e trajetórias regulares são aquelas trajetórias provenientes de algum controle regular.

Em sistemas de Young, respeitadas as particularidades deste contexto, os sinais de integração correspondem aos controles dados em [2] e a aplicação de Itô $I_\Sigma(u, \cdot)$ corresponde a aplicação trajetória trj_u . Desta forma é possível considerar no contexto de sistemas de Young a noção de trajetórias regulares, o que será tratado no Capítulo 3.

Entretanto, também estamos interessados em estudar as homotopias monotônicas entre trajetórias quaisquer de um sistema de Young, para que no capítulo 5 possamos estender esta noção a trajetórias quaisquer de um sistema rugoso e por fim, através do teorema do suporte de Stroock Varadhan, relacionar tais homotopias com as trajetórias amostrais de um processo estocástico solução de uma equação diferencial estocástica.

Devido a este interesse de se estudar homotopias monotônicas entre trajetórias quaisquer de um sistema de Young, nesta seção mostraremos que, sob determinadas condições, um conjunto de acessibilidade (via trajetórias quaisquer) de um sistema de Young com p -variação admite recobrimento e também utilizaremos o espaço das classes de equivalência dadas pela relação de homotopia p -monotônica entre as trajetórias do sistema de Young para tal finalidade.

As condições para a construção deste recobrimento são condições de natureza topológica relacionadas as trajetórias do sistema de Young e desta forma nos basearemos nas técnicas encontradas na construção de recobrimentos utilizando o espaço de classes de homotopia clássica entre caminhos contínuos sobre um espaço topológico, como pode ser conferido em M. J. Greenberg e J. R. Happer [6]. As técnicas baseadas em [6] e empregadas aqui são diferentes das técnicas empregadas em [2], nas quais o espaço das classes de equivalência (segundo relação de homotopia p -monotônica) é munido de uma estrutura de variedade diferenciável obtida através de uma família de injeções, o que será discutido na seção 5 do capítulo 3.

Proposição 2.3.1. *Sejam Σ um sistema de Young consistente, $\alpha_0, \alpha_1 \in T(\Sigma, x, y)$ e $\beta_0, \beta_1 \in T(\Sigma, y, z)$. Se $\alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq_p \beta_1$ então $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_p \alpha_1 * \beta_1$.*

Demonstração: Se $\alpha_0 \simeq_p \alpha_1$, então existe F tal que $F : \alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ e da mesma forma, se $\beta_0 \simeq_p \beta_1$, então existe G tal que $G : \beta_0 \simeq_p \beta_1$.

Para cada $s \in [0, 1]$, temos que $F(s) \in T(\Sigma, x, y)$ e $G(s) \in T(\Sigma, y, z)$. Assim, resulta pela Proposição 2.1.1 que $F(s) * G(s) \in T(\Sigma, x, z)$, para cada $s \in [0, 1]$.

Defina $H : [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, x, z)$ por

$$H(s)(t) = (F(s) * G(s))(t) = \begin{cases} F(s)(2t), & \text{se } t \in [0, T/2] \\ G(s)(2t - T), & \text{se } t \in [T/2, T] \end{cases} . \quad (2.14)$$

Segue que H é uma homotopia p -monotônica entre as trajetórias $\alpha_0 * \beta_0$ e $\alpha_1 * \beta_1$. \square

Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema de Young com p -variação, $[\alpha]_p \in \Gamma(\Sigma, x)$ e $[\beta]_p \in \Gamma(\Sigma, y)$, onde $\alpha_T = y$. Definimos o produto de $[\alpha]_p$ por $[\beta]_p$ da seguinte forma:

$$[\alpha]_p [\beta]_p = [\alpha * \beta]_p . \quad (2.15)$$

A Proposição 2.3.1 garante que este produto não depende da escolha das trajetórias que representam as classes $[\alpha]_p$ e $[\beta]_p$, isto é, se $[\alpha]_p = [\alpha']_p$ e $[\beta]_p = [\beta']_p$ então $[\alpha * \beta]_p = [\alpha' * \beta']_p$.

Analogamente, se Σ é um sistema de Young reversível com p -variação, $p \in [1, \infty)$, e $[\alpha]_p \in \Gamma(\Sigma, x)$ então definimos sua classe inversa por

$$[\alpha]_p^{-1} = [\alpha^{-1}]_p . \quad (2.16)$$

Sejam Σ um sistema de Young com p -variação da forma (f, Δ, M) . Se $\mathbf{o} \in \Delta$ é um sinal constante e $x \in M$ então o caminho $c_x : J \rightarrow M$ dado por $c_x(t) = x$ é uma trajetória de Σ . Dito de outra forma, se Δ contém algum sinal constante \mathbf{o} , então $c_x \in T(\Sigma, x, x)$, para todo $x \in M$. De fato, para todo $t \in J$ segue que

$$c_x(t) - x = 0 = \int_0^t f(c_x(s)) d\mathbf{o}_s . \quad (2.17)$$

Proposição 2.3.2. *Sejam Σ um sistema de Young consistente com p -variação, $\alpha \in T(\Sigma, x, y)$, $\beta \in T(\Sigma, y, z)$ e $\gamma \in T(\Sigma, z, w)$. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) Se Δ contém algum sinal constante e $\alpha^{-1} \in T(\Sigma, y, x)$, então $[\alpha]_p [\alpha]_p^{-1} = [c_x]_p$ e $[\alpha]_p^{-1} [\alpha]_p = [c_y]_p$, onde $c_x(t) = x$ e $c_y(t) = y$, para todo $t \in J$.*
- ii) Se Δ contém algum sinal constante, então $[c_x]_p [\alpha]_p = [\alpha]_p = [\alpha]_p [c_y]_p$.*
- iii) $([\alpha]_p [\beta]_p) [\alpha] = [\alpha]_p ([\beta]_p [\alpha])$.*

Demonstração: As provas destas propriedades são similares as provas das mesmas propriedades no caso da homotopia clássica. \square

Sejam $p \in [1, \infty)$ e Σ um sistema de Young consistente com p -variação. Considere a aplicação $\epsilon_\Sigma: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ dada por

$$\epsilon_\Sigma([\alpha]_p) = \alpha(T). \quad (2.18)$$

Sejam $y \in A(\Sigma, x)$ e $\beta \in T(\Sigma, y)$. Podemos definir o caminho $\bar{\beta}: J \rightarrow T(\Sigma, y)$, onde para cada $s \in J$, a trajetória $\bar{\beta}_s: J \rightarrow M$ é dada por

$$\bar{\beta}_s(t) = \beta((s/T) \cdot t). \quad (2.19)$$

Note que cada aplicação $\bar{\beta}_s: J \rightarrow M$ é uma trajetória, pois Δ é fechado por reparametrizações positivas e Σ é um sistema consistente. Mais ainda, usando o fato que $y \in A(\Sigma, x)$ e a Proposição (2.1.1) temos que $\bar{\beta}_s(J) \subset A(\Sigma, x)$, para cada $s \in J$.

Como $y \in A(\Sigma, x)$ então $T(\Sigma, x, y) \neq \emptyset$. Portanto, para cada $\alpha \in T(\Sigma, x, y)$, podemos definir o caminho $\beta^\alpha: J \rightarrow T(\Sigma, x)$ dado por

$$\beta_s^\alpha = \alpha * \bar{\beta}_s \quad (2.20)$$

e podemos definir também o caminho $\hat{\beta}^\alpha: J \rightarrow \Gamma(\Sigma, x)$ dado por

$$\hat{\beta}_s^\alpha = [\alpha * \bar{\beta}_s]_p. \quad (2.21)$$

Mais ainda, temos que

$$\epsilon_\Sigma \circ \hat{\beta}^\alpha = \beta. \quad (2.22)$$

Diante das considerações acima apresentaremos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.3. *Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema de Young consistente com p -variação, $\Gamma(\Sigma, x)$ munido com alguma topologia \mathcal{T} , $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Sigma, x, y)$ e $\beta \in T(\Sigma, y)$. Se os caminhos $\hat{\beta}^{\alpha_i}: J \rightarrow \Gamma(\Sigma, x)$, com $i = 1, 2$, são contínuos com respeito a \mathcal{T} e $\epsilon_\Sigma: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ satisfaz a propriedade de levantamento único então a seguinte propriedade é válida:*

$$[\alpha_1]_p [\beta]_p = [\alpha_2]_p [\beta]_p \Leftrightarrow [\alpha_1]_p = [\alpha_2]_p. \quad (2.23)$$

Demonstração: Se $[\alpha_1]_p = [\alpha_2]_p$, segue da Proposição 2.3.1 que $[\alpha_1]_p [\beta]_p = [\alpha_2]_p [\beta]_p$. Se $[\alpha_1]_p [\beta]_p = [\alpha_2]_p [\beta]_p$ então $\hat{\beta}^{\alpha_1}(T) = \hat{\beta}^{\alpha_2}(T)$. Como os caminhos $\hat{\beta}^{\alpha_i}$ são contínuos e $\epsilon_\Sigma \circ \hat{\beta}^{\alpha_i} = \beta$, para $i = 1, 2$, então $\hat{\beta}^{\alpha_1}$ e $\hat{\beta}^{\alpha_2}$ são levantamentos dos caminho β a partir de $\hat{\beta}^{\alpha_1}(T) = \hat{\beta}^{\alpha_2}(T)$. Como ϵ_Σ tem a propriedade de levantamento único então $\hat{\beta}^{\alpha_1} = \hat{\beta}^{\alpha_2}$ e portanto $\hat{\beta}^{\alpha_1}(0) = \hat{\beta}^{\alpha_2}(0)$, isto é, $[\alpha_1]_p = [\alpha_2]_p$. \square

Definição 2.3.4. Sejam $p \in [1, \infty)$ e Σ um sistema de Young consistente com p -variação. Dizemos que Σ tem a *propriedade de cancelamento à direita* se para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in T(\Sigma)$ tal que $\alpha_1 * \beta \simeq_p \alpha_2 * \beta$, temos que $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$.

Portanto, em um sistema Σ com a propriedade de cancelamento à direita vale:

$$[\alpha_1]_p [\beta]_p = [\alpha_2]_p [\beta]_p \Rightarrow [\alpha_1]_p = [\alpha_2]_p. \quad (2.24)$$

No caso em que $\Sigma = (f, \Delta, M)$ é um sistema de Young consistente reversível e Δ contém algum caminho constante, então Σ tem a propriedade de cancelamento à direita.

Agora, considere $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema de Young consistente, Δ contendo algum sinal constante e B_x^Σ a família de todos os conjuntos da forma

$$[\alpha, W]_p = \{[\alpha * \beta]_p : \beta \in T(\Sigma, \alpha(T)) \text{ e } \beta(J) \subset W\}, \quad (2.25)$$

onde $\alpha \in T(\Sigma, x)$ e W é uma vizinhança aberta de $\alpha(T)$ em M . Temos que:

i) $\Gamma(\Sigma, x) = \bigcup_{[\alpha, W]_p \in B_x^\Sigma} [\alpha, W]_p$.

ii) Se $[\gamma]_p \in [\alpha_1, W_1]_p \cap [\alpha_2, W_2]_p$, então $[\gamma, W_1 \cap W_2]_p \subset [\alpha_1, W_1]_p \cap [\alpha_2, W_2]_p$.

De fato, $[\gamma]_p \in [\alpha_1, W_1]_p \cap [\alpha_2, W_2]_p$, então $[\gamma, W_i]_p \subset [\alpha_i, W_i]_p$, para $i = 1, 2$ e portanto $[\gamma, W_1 \cap W_2]_p \subset [\gamma, W_1]_p \cap [\gamma, W_2]_p \subset [\alpha_1, W_1]_p \cap [\alpha_2, W_2]_p$.

Portanto, a família B_x^Σ é uma base topológica em $\Gamma(\Sigma, x)$ e a topologia gerada por B_x^Σ em $\Gamma(\Sigma, x)$ é denotada por \mathcal{T}_x^Σ .

Sejam $[\alpha, V]_p \in B_x^\Sigma$ e $y \in \epsilon_\Sigma([\alpha, V]_p)$. Então existe $[\gamma]_p \in [\alpha, V]_p$ tal que $\gamma_T = y$. Logo, $[\gamma]_p = [\alpha * \beta]_p$, com $\beta(J) \subset V$, e conseqüentemente $y = \gamma_T = \beta_T \in V$. Portanto $\epsilon_\Sigma([\alpha, V]_p) \subset V$.

Definição 2.3.5. Sejam Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, M) e A um subespaço topológico de M .

i) Dizemos que A é *conexo por trajetórias de Σ* se

$$\{\alpha \in T(\Sigma, u, v) : \alpha(J) \subset A\} \neq \emptyset \quad (2.26)$$

para todo $(u, v) \in A \times A$.

ii) Dizemos que A é *localmente conexo por trajetórias de Σ* se para cada $y \in A$ e para cada vizinhança $W_y \ni y$ em A existe uma vizinhança aberta V_y tal que $y \in V_y \subset W_y$ e

$$\{\alpha \in T(\Sigma, u, v) : \alpha(J) \subset V_y\} \neq \emptyset \quad (2.27)$$

para todo $(u, v) \in V_y \times V_y$.

Exemplo 2.3.6. Considere o sistema de Young $\Sigma_1 = (g, \Delta_1, \mathbb{R}^2)$, onde $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ é dada por

$$g(x, y)(a, b, c) = (a - c, b - c) \quad (2.28)$$

e $\Delta_1 = [0, X^1, X^2, X^3]$, sendo cada caminho $X^i: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, dado por

$$\begin{aligned} X_t^1 &= (t, 0, 0) \\ X_t^2 &= (0, t, 0) \\ X_t^3 &= (0, 0, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

O sistema Σ_1 não é reversível, \mathbb{R}^2 é conexo por trajetórias de Σ_1 e localmente conexo por trajetórias de Σ_1 .

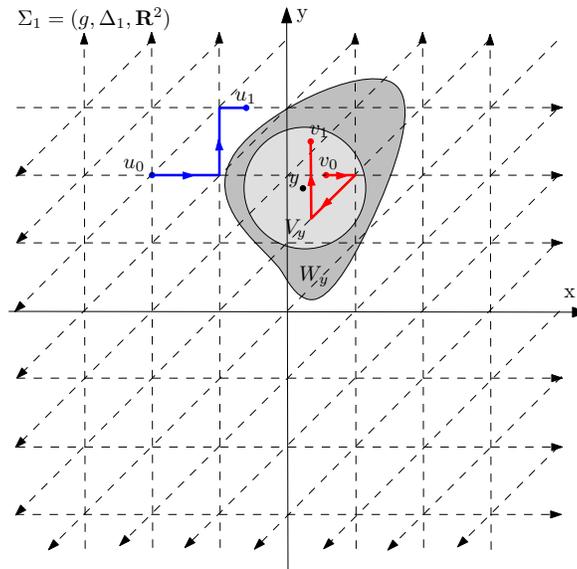


Figura 2.2: Conexidade e conexidade local por trajetórias do sistema de Young Σ_1 .

Já o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ não é conexo por trajetórias de Σ_1 e também não é localmente conexo por trajetórias de Σ_1 .

Exemplo 2.3.7. Considere o sistema de Young $\Sigma_2 = (h, \Delta_2, \mathbb{R}^2)$, onde $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é dada por

$$h(x, y)(a, b) = (a, b) \quad (2.30)$$

e $\Delta_2 = [0, X^1, -X^1, X^2, -X^2]$, sendo cada caminho $X^i: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, dado por

$$\begin{aligned} X_t^1 &= (t, 0) \\ X_t^2 &= (0, t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

O sistema Σ_2 é reversível e \mathbb{R}^2 é localmente conexo por trajetórias de Σ_2 e conexo por trajetórias de Σ_2 .

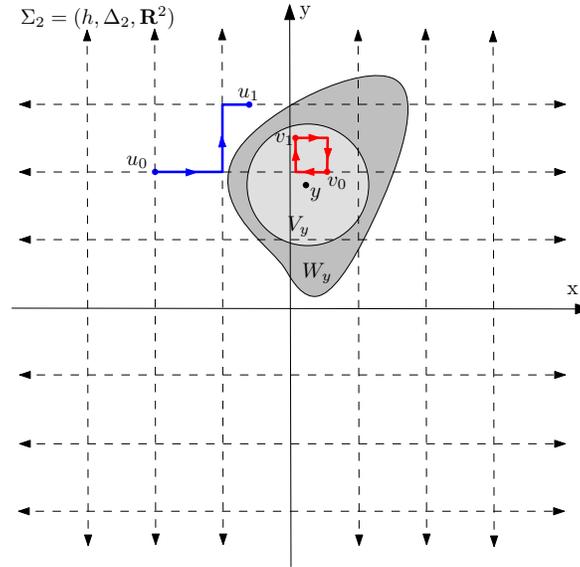


Figura 2.3: Conexidade e conexidade local por trajetórias do sistema de Young Σ_2 .

Já o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ é conexo por trajetórias de Σ_2 , mas não é localmente conexo por trajetórias de Σ_2 .

Proposição 2.3.8. *Sejam $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema de Young consistente, no qual Δ contém algum sinal constante, e $[\alpha, W]_p \in B_x^\Sigma$. Se $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ então existe $[\alpha, V]_p \in B_x^\Sigma$ tal que $V \subset W$ e $\epsilon_\Sigma([\gamma, V]_p) = V$, para todo $\gamma \in T(\Sigma, x, y)$, com $y \in V$. Em particular, $\epsilon_\Sigma([\alpha, V]_p) = V$.*

Demonstração: Como $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ , então existe um aberto V tal que $\alpha_T \in V \subset W$ e $\{\beta \in T(\Sigma, u, v) : \beta(J) \subset V\} \neq \emptyset$, para todo $u, v \in V$.

Sejam $\gamma \in T(\Sigma, x, y)$, com $y \in V$ e $z \in V$. Como $\{\beta \in T(\Sigma, u, v) : \beta(J) \subset V\} \neq \emptyset$, para todo $u, v \in V$, então existe $\beta' \in T(\Sigma, y, z)$ tal que $\beta'(J) \subset V$. Assim, $[\gamma * \beta']_p \in [\gamma, V]_p$ e conseqüentemente $z = \epsilon_\Sigma([\gamma * \beta']_p) \in \epsilon_\Sigma([\gamma, V]_p)$.

Logo, $V \subset \epsilon_\Sigma([\gamma, V]_p)$. A inclusão $\epsilon_\Sigma([\gamma, V]_p) \subset V$ é sempre válida.

Portanto, $\epsilon_\Sigma([\gamma, V]_p) = V$, para todo $\gamma \in T(\Sigma, x, y)$, com $y \in V$. \square

Definição 2.3.9. Sejam Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, M) e A um subespaço topológico de M .

i) Dizemos que A é *localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ* se para todo $u \in A$ existe uma vizinhança $W_u \ni u$ em A satisfazendo a seguinte propriedade:

Se $\alpha, \beta \in T(\Sigma, u, v)$ e $\alpha(J), \beta(J) \subset W_u$, então existe $H : \alpha \simeq_p \beta$, com $H(J \times [0, 1]) \subset W_u$.

ii) Dizemos que A é *semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias* de Σ se para todo $u \in A$ existe uma vizinhança $W_u \ni u$ em A satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{Se } \alpha, \beta \in T(\Sigma, u, v) \text{ e } \alpha(J), \beta(J) \subset W_u \text{ então existe } H: \alpha \simeq_p \beta. \quad (2.32)$$

Segue imediatamente das definições que se A é um conjunto localmente simplesmente conexo por trajetórias de um sistema de Young então A é semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias deste mesmo sistema de Young.

Exemplo 2.3.10. Considere os sistemas de Young Σ_1 e Σ_2 apresentados nos exemplos (2.3.6) e (2.3.7) respectivamente. Temos que \mathbb{R}^2 é localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ_1 e localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ_2 .

Exemplo 2.3.11. Considere o sistema de Young $\Sigma = (h, \Delta, \mathbb{R}^3)$, onde $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é dada por

$$h(x, y, z)(a, b, c) = (a, b, c) \quad (2.33)$$

e Δ é o conjunto todos os caminhos $X: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínuos e C^1 por partes. As trajetórias do sistema de Young Σ são translações em \mathbb{R}^3 dos caminhos de Δ .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja C_n o círculo de centro $(0, 1/n, 0)$ e raio $1/n$. Note que cada círculo C_n tangencia o eixo x na origem $(0, 0, 0)$.

Sejam $C = \cup_n C_n$ e A o espaço obtido tomando um cone de base C e identificando o vértice deste cone com a origem $(0, 0, 0)$.

O espaço A é semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , pois cada ponto de A possui uma vizinhança, na qual a propriedade 2.32 é satisfeita. Entretanto, A não é localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , pois dada qualquer vizinhança W_0 da origem $(0, 0, 0)$, não é possível obter uma homotopia 1-monotônica $H: \mathbf{o} \simeq_1 \alpha$, com $H(J \times [0, 1]) \subset W_0$, onde \mathbf{o} é trajetória constante $(0, 0, 0)$ e α é uma trajetória que dá um número inteiro positivo de voltas completas em torno de um círculo C_n , para algum n suficientemente grande.

O seguinte resultado é o resultado central deste capítulo.

Teorema 2.3.12. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e Σ um sistema consistente com p -variação da forma (f, Δ, M) . Se Δ contém algum sinal constante e $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , então a aplicação $\epsilon: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ é uma aplicação de recobrimento com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ em $\Gamma(\Sigma, x)$.*

Demonstração: Seja W um aberto em $A(\Sigma, x)$.

Temos que $[\alpha, W]_p \subset \epsilon_\Sigma^{-1}(W)$, para todo $[\alpha, W]_p \in B_x^\Sigma$, e conseqüentemente $\epsilon_\Sigma^{-1}(W) \in \mathcal{T}_x^\Sigma$. De fato, se $[\gamma]_p \in [\alpha, W]_p$ então $[\gamma]_p = [\alpha * \beta]_p$, para alguma trajetória β tal que $\beta(J) \subset W$. Assim, $\gamma_T = \beta_T \in W$ e $[\gamma]_p \in \epsilon_\Sigma^{-1}(W)$.

Portanto, a aplicação ϵ_Σ é contínua com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ .

Sejam $\hat{W} \in \mathcal{T}_x^\Sigma$ e $y \in \epsilon_\Sigma(\hat{W})$. Então existe $[\alpha]_p \in \hat{W}$ tal que $\epsilon_\Sigma([\alpha]_p) = y$ e existe $[\gamma, W]_p \in B_x^\Sigma$ tal que $[\alpha]_p \in [\gamma, W]_p \subset \hat{W}$. Assim,

$$[\alpha]_p \in [\alpha, W]_p \subset [\gamma, W]_p \subset \hat{W}. \quad (2.34)$$

Como $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ , usando a Proposição 2.3.8 então existe $[\alpha, V]_p \in B_x^\Sigma$ tal que $V \subset W$ e $\epsilon_\Sigma([\alpha, V]_p) = V$, e usando (2.34) temos que $y \in V \subset \epsilon_\Sigma(\hat{W})$.

Portanto ϵ_Σ é uma aplicação aberta com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ .

Seja $y \in A(\Sigma, x)$. Sendo $A(\Sigma, x)$ um conjunto de acessibilidade, existe $\gamma \in T(\Sigma, x, y)$. Como $A(\Sigma, x)$ é semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , existe uma vizinhança $W_y \ni y$ em $A(\Sigma, x)$ satisfazendo a propriedade (2.32). Tomemos $[\gamma, W_y]_p \in B_x^\Sigma$.

Como $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ , decorre da Proposição 2.3.8 que existe uma vizinhança aberta $V_y \ni y$ tal que $V_y \subset W_y$ e

$$\epsilon_\Sigma([\alpha, V_y]_p) = V_y \quad (2.35)$$

para todo $[\alpha]_p \in B_y$, onde $B_y = \{[\alpha]_p : \epsilon_\Sigma([\alpha]_p) \in V_y\}$.

Temos que cada V_y satisfaz

$$\epsilon_\Sigma^{-1}(V_y) = \bigcup_{[\alpha]_p \in B_y} [\alpha, V_y]_p \quad (2.36)$$

e dado $[\alpha_1]_p, [\alpha_2]_p \in B_y$ com $[\alpha_1]_p \neq [\alpha_2]_p$, então

$$[\alpha_1, V_y]_p \cap [\alpha_2, V_y]_p = \emptyset \quad \text{ou} \quad [\alpha_1, V_y]_p = [\alpha_2, V_y]_p. \quad (2.37)$$

A verificação de (2.36) é imediata.

Para verificar (2.37) considere $[\alpha_1]_p, [\alpha_2]_p \in B_y$ e suponha que exista $[\alpha]_p \in [\alpha_1, V_y]_p \cap [\alpha_2, V_y]_p$. Assim, $[\alpha_1 * \beta_1]_p = [\alpha]_p = [\alpha_2 * \beta_2]_p$, com $\beta_i(J) \subset V_y$, para $i = 1, 2$.

Como $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias, existem $\eta \in T(\Sigma, (\alpha_1)_T, (\alpha_2)_T)$, com $\eta(J) \subset V_y$, e $\mu \in T(\Sigma, (\alpha_2)_T, (\alpha_1)_T)$, com $\mu(J) \subset V_y$. Como $A(\Sigma, x)$ é localmente simplesmente conexo por trajetórias, $V_y \subset W_y \Delta$ contém algum sinal constante, temos que

$[\eta * \mu]_p = [c_{(\alpha_1)_T}]_p$ e $[\mu * \eta]_p = [c_{(\alpha_2)_T}]_p$, onde $c_{(\alpha_i)_T}$ indica a trajetória constante igual ao ponto $\alpha_i(T)$, com $i = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned} [\alpha_1 * \eta]_p [\mu * \beta_1]_p &= [\alpha_1]_p [\eta]_p [\mu]_p [\beta_1]_p = [\alpha_1]_p [\eta * \mu]_p [\beta_1]_p = [\alpha_1]_p [c_{(\alpha_1)_T}]_p [\beta_1]_p \\ &= [\alpha_1]_p [\beta_1]_p = [\alpha_1 * \beta_1]_p = [\alpha_2 * \beta_2]_p = [\alpha_2]_p [\beta_2]_p. \end{aligned}$$

Como $A(\Sigma, x)$ é semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias e $V_y \subset W_y$, então $[\mu * \beta_1]_p = [\beta_2]_p$, conseqüentemente

$$[\alpha_1 * \eta]_p [\beta_2]_p = [\alpha_2]_p [\beta_2]_p. \quad (2.38)$$

Usando novamente o fato que $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias, ou mais especificamente, usando o fato que a vizinhança V_y (conforme descrito na prova da Proposição 2.3.8) satisfaz

$$\{\gamma \in T(\Sigma, u, v) : \gamma(J) \subset V_y\} \neq \emptyset \quad (2.39)$$

para todo $u, v \in V_y$, segue que existe $\gamma \in T(\Sigma, (\beta_2)_T, (\beta_2)_0)$ tal que $\gamma(J) \subset V_y$.

Assim, como $A(\Sigma, x)$ é semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias e $V_y \subset W_y$, segue que $[\beta_2 * \gamma]_p = [c_{(\alpha_2)_T}]_p$ e disto juntamente com a expressão (2.38), decorre que

$$[\alpha_1 * \eta]_p = [\alpha_2]_p, \quad (2.40)$$

isto é, $[\alpha_2]_p \in [\alpha_1, V_y]_p$ e portanto $[\alpha_2, V_y]_p \subset [\alpha_1, V_y]_p$.

Similarmente, $[\alpha_1, V_y]_p \subset [\alpha_2, V_y]_p$ e portanto $[\alpha_1, V_y]_p = [\alpha_2, V_y]_p$, donde-se conclui que (2.37) é válido.

Finalmente, temos que a restrição $\epsilon_\Sigma|_{[\alpha, V_y]_p}$ é uma bijeção em V_y . De fato, se $\epsilon([\alpha * \beta_1]_p) = \epsilon([\alpha * \beta_2]_p)$ então $\beta_1(T) = \beta_2(T)$. Como $\beta_1, \beta_2 \in T(\Sigma, \alpha_T)$, $\beta_1(J) \subset V_y$ e $\beta_2(J) \subset V_y$, $A(\Sigma, x)$ é localmente simplesmente conexo por trajetórias e $V_y \subset W_y$, então $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ e $[\alpha * \beta_1]_p = [\alpha * \beta_2]_p$.

Portanto ϵ_Σ é uma aplicação de recobrimento. \square

2.4 Caracterização da Homotopia Monotônica

Baseados nas técnicas encontradas no contexto de homotopia clássica entre caminhos apresentaremos um resultado que caracteriza quando duas trajetórias de um sistema de Young com p -variação são p -monotonicamente homotópicas.

Seja $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema de Young consistente tal que Δ contém algum sinal constante. Suponha que $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e localmente simplesmente conexo por trajetórias Σ . Sejam $y \in A(\Sigma, x)$ e $[\alpha]_p \in \epsilon_\Sigma^{-1}(y)$. Temos que $\hat{\beta}^\alpha$ é um caminho contínuo com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ em $\Gamma(\Sigma, x)$.

Proposição 2.4.1. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e Σ um sistema consistente com p -variação da forma (f, Δ, M) . Se Δ contém algum sinal constante e $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , então Σ tem a propriedade de cancelamento à direita.*

Demonstração: A proposição acima satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3.12, logo a aplicação $\epsilon: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ é uma aplicação de recobrimento com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ em $\Gamma(\Sigma, x)$.

Toda aplicação de recobrimento satisfaz a propriedade de levantamento único e a aplicação $\epsilon: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ é uma aplicação de recobrimento (com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ). Como cada $\hat{\beta}^\alpha$ é um caminho contínuo com respeito a topologia \mathcal{T}_x^Σ e $\epsilon: \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow A(\Sigma, x)$ satisfaz a propriedade de levantamento único, resulta da Proposição 2.3.3 que Σ tem a propriedade de cancelamento à direita. \square

Considere a aplicação $\Theta_\alpha: \Gamma(\Sigma, y) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x)$ dada por

$$\Theta_\alpha([\beta]_p) = [\alpha * \beta]_p . \quad (2.41)$$

Temos que a aplicação Θ_α está bem definida. Na verdade, usando a Proposição (2.3.1), se $[\beta']_p = [\beta]_p$ então

$$\Theta_\alpha([\beta']_p) = [\alpha * \beta']_p = [\alpha * \beta]_p = \Theta_\alpha([\beta]_p). \quad (2.42)$$

Mais ainda, como Σ tem propriedade de cancelamento, se

$$[\alpha * \beta']_p = \Theta_\alpha([\beta']_p) = \Theta_\alpha([\beta]_p) = [\alpha * \beta]_p \quad (2.43)$$

então

$$[\beta']_p = [\beta]_p , \quad (2.44)$$

isto é, a aplicação Θ_α é injetora. Além disso,

$$\Theta_\alpha([\beta]_p) = [\alpha * \beta]_p = \hat{\beta}^\alpha(T). \quad (2.45)$$

Teorema 2.4.2. *Sejam $\Sigma = (f, \Delta, M)$ um sistema consistente com Δ contendo algum sinal constante, $y \in A(\Sigma, x)$, $[\alpha]_p \in \epsilon_\Sigma^{-1}(y)$ e $\beta_1, \beta_2 \in T(\Sigma, y)$. Suponha que $A(\Sigma, x)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ . Então, $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ se, e somente se, $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$.*

Demonstração: Se $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ então $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \Theta_\alpha([\beta_1]_p) = \Theta_\alpha([\beta_2]_p) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$.

Reciprocamente, se $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$ então $\Theta_\alpha([\beta_1]_p) = \Theta_\alpha([\beta_2]_p)$ e como Θ_α é injetora então $[\beta_1]_p = [\beta_2]_p$, isto é, $\beta_1 \simeq_p \beta_2$. \square

CAPÍTULO 3

TRAJETÓRIAS REGULARES DE UM SISTEMA DE YOUNG

F. Colonius, E. Kizil e L. A. San Martin no artigo [2] apresentaram o conceito de trajetórias regulares de um sistema de controle. Tal conceito também pode ser trabalhado no contexto de trajetórias de um sistema de Young e nós verificamos que o principal resultado obtido por Colonius, Kizil e San Martin sobre concatenações de trajetórias regulares de um sistema de controle ainda continua válido para trajetórias de um sistema de Young, muito embora os resultados preliminares para se chegar ao resultado principal se tornem resultados com provas mais trabalhosas. Isto ocorre pois os controles de integração de uma equação de Young não precisam ser necessariamente caminhos diferenciáveis, o que por sua vez implica que as fórmulas utilizadas no trabalho de Colonius, Kizil e San Martin, por serem provenientes de relações de dependência de parâmetros para equações diferenciais ordinárias, não poderão ser aplicadas diretamente para equações de Young. Nós contornamos estes problemas, verificando que cada uma das fórmulas necessárias possuem uma versão correspondente e apropriada para equações envolvendo integrações no sentido de Young.

3.1 Trajetórias Regulares

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. X. D. Li e T. Lyons [13] mostraram que se $p \in [1, 2)$, $u \in E_2$ e $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\lfloor \gamma \rfloor \geq 1$ e $\{\gamma\} > \{p\}$, então a aplicação

$$\psi^{f,u} : \mathcal{V}^p(J, E_1) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2) \quad (3.1)$$

dada por

$$\psi^{f,u}(X) = I_f(u, X) \quad (3.2)$$

é $\lfloor \gamma \rfloor$ -vezes Frechet diferenciável.

Lembre-se que I_f denota a aplicação de Itô associada ao campo f , isto é, para cada $u \in E_2$ e $X \in V^p(J, E_1)$ fixados, $I_f(u, X)$ denota a solução da equação

$$\begin{cases} dY = f(Y) dX \\ Y(0) = u \end{cases} \quad (3.3)$$

Note também que a condição de que $\lfloor \gamma \rfloor \geq 1$ e $\{\gamma\} > \{p\}$ implica que $\gamma > p$ e portanto pelo Teorema de Picard-Lindelof a equação acima admite uma única solução $I_f(u, X)$.

Mais ainda, para cada $s \in J$ e cada sinal $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$ temos que a equação

$$\begin{cases} dY = f(Y) dX \\ Y(s) = u \end{cases} \quad (3.4)$$

tem um fluxo $\phi^{f,X}$ de difeomorfismos de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$ em E_2 (veja P. Friz [5]), isto é, para cada $(s, t) \in J \times J$, com $s < t$, existe um difeomorfismo $\phi_{s,t}^{f,X} : E_2 \rightarrow E_2$ de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$ dado por

$$\phi_{s,t}^{f,X}(u) = I_f(s; u, X)(t) \quad (3.5)$$

onde $I_f(s; u, X)(t)$ é a única solução da equação (3.4), e este difeomorfismo satisfaz

$$\phi_{s,t}^{f,X} \circ \phi_{r,s}^{f,X} = \phi_{r,t}^{f,X} \quad (3.6)$$

para todo $r \leq s \leq t$ em J .

Considere a seguinte situação. Tome $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{R}^n$, $p \in [1, 2)$, Δ um subconjunto aberto em $\mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$ fechado por reparametrizações e concatenações contínuas e $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\lfloor \gamma \rfloor \geq 1$ e $\{\gamma\} > \{p\}$. Além disso, suponha que $M \subset E_2$ é uma variedade diferenciável compacta, $u \in M$, a aplicação $F : E_2 \rightarrow E_2$ é tal que restrita a M é um campo de vetores tangentes a M e que $f(v)(\lambda) = \lambda F(v)$. Verifica-se que:

- $\Sigma = (f, \Delta, M)$ é um sistema de Young consistente;
- a aplicação $\Phi_t^{\Sigma, X} : E_2 \rightarrow E_2$ dada por

$$\Phi_t^{\Sigma, X}(u) = I_f(u, X)(t) \quad (3.7)$$

é um difeomorfismo de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$ (e portanto de classe C^1), para cada $(t, X) \in J \times \Delta$ e além disso, como Σ é consistente tem-se que $\Phi_t^{\Sigma, X}(M) \subset M$.

- a aplicação $\Psi_t^{\Sigma, u} : \Delta \rightarrow M$ dada por

$$\Psi_t^{\Sigma, u}(X) = I_\Sigma(u, X)(t) \quad (3.8)$$

é aplicação de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$ (e portanto de classe C^1) para cada $(t, u) \in J \times M$.

As propriedades descritas acima inspiram a definir a seguinte classe de sistemas de Young.

Definição 3.1.1. Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema de Young com p -variação da forma (f, Δ, M) e E_1 e E_2 os espaços associados a Σ . Dizemos Σ é um sistema *regular* se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) Δ é aberto em $\mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$;
- ii) Σ é consistente;
- iii) para cada $(t, X) \in J \times \Delta$ tem-se que $\Phi_t^{\Sigma, X}: E_2 \rightarrow E_2$ é um difeomorfismo de classe C^1 ;
- iv) para cada $(t, u) \in J \times M$ tem-se que $\Psi_t^{\Sigma, u}: \Delta \subset \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1) \rightarrow M$ é uma aplicação de classe C^1 .

Observação 3.1.2. a) Na definição acima Δ é considerado munido com topologia induzida pela topologia de $\mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$, e esta topologia por sua vez é induzida pela topologia \mathcal{T}_p de $\mathcal{V}^p(J, E_1)$, onde p é o grau da variação do sistema Σ considerado.

b) As condições ii) iii) e iv) são baseadas nas propriedades do exemplo citado anteriormente. Já a condição i) é uma condição técnica, uma vez que para todo caminho $X \in \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$ existe uma seqüência caminhos suaves converge na métrica da p -variação para X (e não apenas na métrica da q -variação, com $q > p$). Tal condição será utilizada em resultados que serão vistos posteriormente.

Definição 3.1.3. Sejam Σ um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) , $X \in \Delta$ e $u \in M$. Dizemos que X é um *senal regular* com respeito a u se a derivada $D(\Psi_T^{\Sigma, u})|_X$ é sobrejetiva.

Num sistema de Young regular Σ da forma (f, Δ, M) , denotaremos o conjunto dos sinais regulares com respeito a $u \in M$ (relativamente ao sistema Σ) por $\dot{\Delta}_u$.

Definição 3.1.4. Sejam Σ um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) e $\alpha \in T(\Sigma, u)$. Dizemos que α é uma *trajetória regular* se existe $X \in \dot{\Delta}_u$ tal que $\alpha = I_\Sigma(u, X)$.

Denotaremos o conjunto de todas as trajetórias regulares de Σ por $\dot{T}(\Sigma)$, o conjunto das trajetórias regulares de Σ iniciando em $x \in U$ por $\dot{T}(\Sigma, x)$ e o conjunto de todas as trajetórias regulares de Σ iniciando em $x \in U$ e terminando em $y \in M$ por $\dot{T}(\Sigma, x, y)$.

O conjunto

$$\dot{A}(\Sigma, x) = \{v \in M : v = \alpha(T) \text{ para algum } \alpha \in \dot{T}(\Sigma, x)\} \quad (3.9)$$

é chamado de *conjunto de acessibilidade regular* de x com respeito a Σ .

3.2 Fórmulas Relacionadas a uma Equação de Young

Nesta seção iremos trabalhar no sentido de encontrar expressões que descrevam as derivadas das aplicações $\Psi_t^{\Sigma,u}$ e $\Phi_t^{\Sigma,X}$, onde Σ é um sistema de Young regular. Estes resultados são importantes para a conclusão de outros resultados nas seções posteriores. O primeiro resultado é o seguinte:

Proposição 3.2.1. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e E_1 e E_2 espaços de Banach. Se Σ é um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) com p -variação e E_1 e E_2 espaços associados, então*

$$D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z) = \int_0^t Df|_{\Psi_s^{\Sigma,u}(X)}(D(\Psi_s^{\Sigma,u})|_X(Z)) dX_s + \int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X)) dZ_s \quad (3.10)$$

para todo $(t, u, X, Z) \in J \times M \times \Delta \times \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$.

Demonstração: Como $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\gamma > p$, segue que f é de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$, onde $\lfloor \gamma \rfloor \geq 1$, então podemos definir a aplicação $\hat{f}: E_2 \times E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ dada por

$$\hat{f}(x, y)(v) = \int_0^1 Df|_{(\lambda y + (1-\lambda)x)}(v) d\lambda. \quad (3.11)$$

Como f é de classe $C^{\lfloor \gamma \rfloor}$ segue que $Df: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ é contínua e isto implica que \hat{f} é contínua.

A aplicação \hat{f} satisfaz

$$\hat{f}(x, x) = Df|_x \quad (3.12)$$

e

$$f(y) - f(x) = \hat{f}(x, y)(y - x). \quad (3.13)$$

De fato, a verificação da propriedade (3.12) é imediata. Para verificar a propriedade (3.13), considere $g: [0, 1] \rightarrow E_2$ dada por $g(\lambda) = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Então

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 D(f \circ g)(\lambda) d\lambda = \int_0^1 Df|_{(\lambda y + (1-\lambda)x)}(Dg|_\lambda) d\lambda = \hat{f}(x, y)(Dg|_\lambda) = \hat{f}(x, y)(y - x).$$

Sejam $(t, u, X, Z) \in J \times M \times \Delta \times \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como Σ é regular (e portanto consistente) temos que para cada $(u, X) \in U \times \Delta$ existe um único $I_\Sigma(u, X)$ tal que

$$I_\Sigma(u, X)(t) = u + \int_0^t f(I_\Sigma(u, X)(s)) dX_s$$

e daí usando (3.13) e considerando λ suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z) - \Psi_t^{\Sigma,u}(X)}{\lambda} &= \frac{I_\Sigma(u, X + \lambda Z)(t) - I_\Sigma(u, X)(t)}{\lambda} \\ &= \frac{\int_0^t f(I_\Sigma(u, X + \lambda Z)(s)) d(X + \lambda Z)_s}{\lambda} - \frac{\int_0^t f(I_\Sigma(u, X)(s)) dX_s}{\lambda} \\ &= \frac{\int_0^t (f(I_\Sigma(u, X + \lambda Z)(s)) - f(I_\Sigma(u, X)(s))) dX_s}{\lambda} \\ &\quad + \int_0^t f(I_\Sigma(u, X + \lambda Z)(s)) d(Z)_s, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z) - \Psi_t^{\Sigma,u}(X)}{\lambda} = A_1(\lambda) + A_2(\lambda) \quad (3.14)$$

onde

$$A_1(\lambda) = \int_0^t \hat{f}(\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z), \Psi_t^{\Sigma,u}(X)) \left(\frac{\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z) - \Psi_t^{\Sigma,u}(X)}{\lambda} \right) dX_s \quad (3.15)$$

e

$$A_2(\lambda) = \int_0^t f(\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z)) d(Z)_s. \quad (3.16)$$

Note que $\Psi_t^{\Sigma,u}$ é contínuo e que para $X \in \text{int}(\Delta)$ existe $D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X$, uma vez que Σ é regular. Além disso,

$$D_Z(\Psi_t^{\Sigma,u})(X) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^{\Sigma,u}(X + \lambda Z) - \Psi_t^{\Sigma,u}(X)}{\lambda} \quad (3.17)$$

e

$$D_Z(\Psi_t^{\Sigma,u})(X) = D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z). \quad (3.18)$$

Portanto, tomando limite quando λ tende a 0 na expressão (3.14), usando a continuidade das aplicações \hat{f} e $\Psi_t^{\Sigma,u}$ e usando (3.12) e (3.17), segue que

$$D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z) = \int_0^t Df|_{\Psi_s^{\Sigma,u}(X)}(D(\Psi_s^{\Sigma,u})|_X(Z)) dX_s + \int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X)) dZ_s.$$

□

Com demonstração semelhante, apresentamos outro resultado que será útil para a próxima seção.

Proposição 3.2.2. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e E_1 e E_2 espaços de Banach. Se Σ é um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) com p -variação e E_1 e E_2 espaços associados, então*

$$D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u(v) = v + \int_0^t Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u(v)) dX_s \quad (3.19)$$

para todo $(t, u, X, v) \in J \times M \times \Delta \times E_2$.

Demonstração: Como $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\gamma > p$, de modo análogo a Proposição 3.2.1, tem-se a aplicação contínua $\hat{f}: E_2 \times E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ dada por

$$\hat{f}(x, y)(v) = \int_0^1 Df|_{(\lambda y + (1-\lambda)x)}(v) d\lambda \quad (3.20)$$

e que satisfaz

$$\hat{f}(x, x) = Df|_x \quad (3.21)$$

e

$$f(y) - f(x) = \hat{f}(x, y)(y - x). \quad (3.22)$$

Sejam $(t, u, X, v) \in J \times M \times \Delta \times E_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada $w \in E_2$ temos que $\Phi_t^{\Sigma, X}(w)$ satisfaz

$$\Phi_t^{\Sigma, X}(w) = w + \int_0^t f(\Phi_s^{\Sigma, X}(w)) dX_s, \quad (3.23)$$

e daí considerando $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$\frac{\Phi_t^{\Sigma, X}(u + \lambda v) - \Phi_t^{\Sigma, X}(u)}{\lambda} = v + \frac{\int_0^t f(\Phi_s^{\Sigma, X}(u + \lambda v)(s)) - f(\Phi_s^{\Sigma, X}(u)) dX_s}{\lambda} \quad (3.24)$$

donde, usando (3.22), decorre que

$$\frac{\Phi_t^{\Sigma, X}(u + \lambda v) - \Phi_t^{\Sigma, X}(u)}{\lambda} = v + \int_0^t \hat{f}(\Phi_s^{\Sigma, X}(u + \lambda v), \Phi_s^{\Sigma, X}(u)) \left(\frac{\Phi_s^{\Sigma, X}(u + \lambda v) - \Phi_s^{\Sigma, X}(u)}{\lambda} \right) dX_s. \quad (3.25)$$

Note que $\Phi_t^{\Sigma, X}$ é contínuo e que para $u \in M$ existe $D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u$, um vez que Σ é regular. Além disso,

$$D_v(\Phi_t^{\Sigma, X})(u) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^{\Sigma, X}(u + \lambda v) - \Phi_t^{\Sigma, X}(u)}{\lambda} \quad (3.26)$$

e

$$D_v(\Phi_t^{\Sigma, X})(u) = D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u(v). \quad (3.27)$$

Portanto, tomando limite quando λ tende a 0 na expressão (3.25), usando a continuidade das aplicações \hat{f} e $\Phi_t^{\Sigma, X}$ e usando (3.21) e (3.26), segue que

$$D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u(v) = v + \int_0^t Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u(v)) dX_s.$$

□

3.3 Fórmula de Variação dos Parâmetros para Equações de Young

A fórmula de variação de parâmetros para equações diferenciais ordinárias foi utilizada de maneira direta por F. Colonus, E. Kizil e L. A. San Martin [2] para se obter uma fórmula ou expressão intermediária a qual conduz ao resultado principal relacionado a concatenação de trajetórias regulares. Como já foi dito anteriormente, fórmulas provenientes do contexto de equações diferenciais ordinárias podem não ser aplicadas a equações de Young, uma vez que as soluções destas últimas não são necessariamente diferenciáveis em relação ao tempo.

Neste sentido, trabalhamos nesta seção para encontrar uma fórmula apropriada no contexto de sistemas de Young a qual cumpra um papel similar a da fórmula de variação de parâmetros para equações diferenciais ordinárias. Em outras palavras, o objetivo desta seção é o provar o seguinte resultado.

Proposição 3.3.1. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e E_1 e E_2 espaços de Banach. Se Σ é um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) com p -variação e E_1 e E_2 espaços associados, então*

$$D(\Psi_t^{\Sigma, u})|_X(Z) = D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u \left(\int_0^t (D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ f(\Phi_s^{\Sigma, X}(u)) dZ_s \right) \quad (3.28)$$

para todo $(t, u, X, Z) \in J \times M \times \Delta \times \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$.

No restante desta seção apresentaremos os resultados preliminares para se obter a prova da Proposição 3.3.1.

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach e considere as aplicações contínuas $Y : J \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ e $X : J \rightarrow E_1$. Se existe o limite

$$\lim_{|\mathcal{D}_n| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D}_n \subset J} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})(X_{t_{i+1}}) \quad (3.29)$$

então o denotaremos por $\int_0^t X_s dY_s$.

Lema 3.3.2. *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach, $t \in J$, $Y \in C(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $X \in C(J, E_1)$. A integral $\int_0^t Y_s dX_s$ existe se, e somente se, a integral $\int_0^t X_s dY_s$ existe. Mais ainda, a equação*

$$Y_t(X_t) - Y_0(X_0) = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s \quad (3.30)$$

é válida.

Demonstração: A prova segue das igualdades abaixo

$$\begin{aligned}
Y_t(X_t) - Y_0(X_0) &= \sum_{t_i \in \mathcal{D}_n \subset J} Y_{t_{i+1}}(X_{t_{i+1}}) - Y_{t_i}(X_{t_i}) \\
&= \sum_{t_i \in \mathcal{D}_n \subset J} Y_{t_{i+1}}(X_{t_{i+1}}) - Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}) + Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}) - Y_{t_i}(X_{t_i}) \\
&= \sum_{t_i \in \mathcal{D}_n \subset J} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})(X_{t_{i+1}}) + \sum_{t_i \in \mathcal{D}_n \subset J} Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *Sejam U, V e W espaços de Banach. Se $g \in C(J, \mathcal{L}(U, V))$ e $h \in C(J, \mathcal{L}(V, W))$ então a aplicação $k: J \rightarrow \mathcal{L}(U, W)$ dada por*

$$k(t) = h(t) \circ g(t) \quad (3.31)$$

é contínua, ou seja, $k \in C(J, \mathcal{L}(U, W))$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$.

Como $g \in C(J, \mathcal{L}(U, V))$ e J é um intervalo compacto então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|g(t)\|_{\mathcal{L}(U, V)} < C_1$, para todo $t \in J$. Do mesmo modo, como $h \in C(J, \mathcal{L}(V, W))$ e J é um intervalo compacto então existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $\|h(t)\|_{\mathcal{L}(V, W)} < C_2$, para todo $t \in J$.

Além disso, decorre da continuidade uniforme de $g \in C(J, \mathcal{L}(U, V))$ que existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|g(t) - g(s)\|_{\mathcal{L}(U, V)} < \frac{\epsilon}{2C_2}$, sempre que $|t - s| > \delta_1$. Do mesmo modo, a continuidade uniforme de $h \in C(J, \mathcal{L}(V, W))$ implica que existe $\delta_2 > 0$ tal que $\|h(t) - h(s)\|_{\mathcal{L}(V, W)} < \frac{\epsilon}{2C_1}$, sempre que $|t - s| > \delta_2$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|k(t) - k(s)\|_{\mathcal{L}(U, W)} &= \|(h(t) \circ g(t)) - (h(s) \circ g(s))\|_{\mathcal{L}(U, W)} \\
&\leq \|h(t)(g(t)) - h(t)(g(s))\|_{\mathcal{L}(U, W)} + \|h(t)(g(s)) - h(s)(g(s))\|_{\mathcal{L}(U, W)} \\
&\leq \|h(t)(g(t) - g(s))\|_{\mathcal{L}(U, W)} + \|(h(t) - h(s))(g(s))\|_{\mathcal{L}(U, W)} \\
&\leq \|h(t)\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|g(t) - g(s)\|_{\mathcal{L}(U, V)} + \|h(t) - h(s)\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|g(s)\|_{\mathcal{L}(U, W)} \\
&\leq C_2 \cdot \frac{\epsilon}{2C_2} + \frac{\epsilon}{2C_1} \cdot C_1 = \epsilon,
\end{aligned}$$

sempre que que $|t - s| > \max\{\delta_1, \delta_2\}$.

Portanto, $k \in C(J, \mathcal{L}(U, W))$. □

Lema 3.3.4. *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach e Σ um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) com E_1 e E_2 espaços associados. Para cada $s \in J$ considere a aplicação $F_s: \mathcal{L}(E_2, E_2) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, E_2))$ dada por*

$$[F_s(T)(x)](v) = Df|_{\Phi_s^{\Sigma, x}(u)}(T(v))(x), \quad (3.32)$$

onde $(u, X) \in M \times \Delta$ e denote $\mathcal{L}(E_2, E_2)$ por W_2 .

As seguintes afirmações são válidas:

- i) Cada aplicação F_s é uma transformação linear contínua, isto é, $F_s \in \mathcal{L}(W_2, \mathcal{L}(E_1, W_2))$.
- ii) O caminho $s \mapsto F_s$ é contínuo, isto é $F \in C(J, \mathcal{L}(W_2, \mathcal{L}(E_1, W_2)))$.
- iii) O caminho $\mu: J \rightarrow W_2$ dado por

$$\mu(t) = D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u \quad (3.33)$$

satisfaz

$$\mu_t = Id + \int_0^t F_s(\mu_s) dX_s \quad (3.34)$$

para todo $t \in J$, onde Id é a transformação identidade de E_2 em E_2 .

Demonstração: i) Primeiramente verifiquemos que cada aplicação F_s tem o contradomínio correto. Para isto, verificaremos que:

- a) Para cada $(T, x) \in W_2 \times E_1$ fixado, então $F_s(T)(x) \in W_2$.
- b) Para cada $T \in W_2$ fixado, então $F_s(T) \in \mathcal{L}(E_1, W_2)$.

Note que $f: E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ e $\Phi_s^{\Sigma, X}(u) \in M \subset E_2$, logo $Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)} \in \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$.

Sejam $v, w \in E_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere $(T, x) \in W_2 \times E_1$ fixo. Usando que $Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)} \circ T \in \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, temos que

$$\begin{aligned} [F_s(T)(x)](v + \lambda \cdot w) &= Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v + \lambda \cdot w))(x) \\ &= Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(x) + \lambda \cdot Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(w))(x) \\ &= [F_s(T)(x)](v) + \lambda \cdot [F_s(T)(x)](w). \end{aligned}$$

Logo, $F_s(T)(x)$ é uma transformação linear de E_2 em E_2 .

Considere a constante positiva $C_{s,x,T}$ (dependente da escolha de $s \in J$, $x \in E_1$ e $T \in W_2$) dada por

$$C_{s,x,T} = \|Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))} \cdot \|T\|_{W_2} \cdot \|x\|_{E_1}. \quad (3.35)$$

Como

$$\|[F_s(T)(x)](v)\|_{E_2} = \|Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(x)\|_{E_2} \leq C_{s,x,T} \cdot \|v\|_{E_2} \quad (3.36)$$

para todo $v \in E_2$, segue que $F_s(T)(x)$ é contínua e

$$\|F_s(T)(x)\|_{W_2} \leq C_{s,x,T}. \quad (3.37)$$

Portanto $F_s(T)(x) \in \mathcal{L}(E_2, E_2)$, como desejávamos provar para o item a) acima.

Sejam $x, y \in E_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere $T \in W_2$ fixo. Usando que $(Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)} \circ T)(v) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, para todo $v \in E_2$, temos que

$$\begin{aligned} [F_s(T)(x + \lambda \cdot y)](v) &= Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(x + \lambda \cdot y) \\ &= Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(x) + \lambda \cdot Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(y) \\ &= [F_s(T)(x)](v) + \lambda \cdot [F_s(T)(y)](v) \end{aligned}$$

para todo $v \in E_2$, ou seja,

$$F_s(T)(x + \lambda \cdot y) = F_s(T)(x) + \lambda \cdot F_s(T)(y).$$

Logo, $F_s(T)$ é uma transformação linear de E_1 em W_2 .

Considere a constante $C_{s,T}$ (dependente da escolha de $s \in J$ e $T \in W_2$) dada por

$$C_{s,T} = \|Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(E_2, E_2)}. \quad (3.38)$$

Como

$$\|F_s(T)(x)\|_{W_2} \leq C_{s,x,T} = C_{s,T} \cdot \|x\|_{E_1} \quad (3.39)$$

para todo $x \in E_1$, segue que $F_s(T)$ é contínua e

$$\|F_s(T)\|_{\mathcal{L}(E_1, W_2)} \leq C_{s,T}. \quad (3.40)$$

Portanto $F_s(T) \in \mathcal{L}(E_1, W_2)$, como desejávamos provar para o item b) acima.

Sejam $S, T \in W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando que $Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)} \in \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, temos que

$$\begin{aligned} [F_s(S + \lambda \cdot T)(x)](v) &= Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}((S + \lambda \cdot T)(v))(x) \\ &= Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(S(v))(x) + \lambda \cdot Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(y) \\ &= [F_s(S)(x)](v) + \lambda \cdot [F_s(T)(x)](v) \end{aligned}$$

para todo $v \in E_2$ e para todo $x \in E_1$, ou seja,

$$F_s(S + \lambda \cdot T) = F_s(S) + \lambda \cdot F_s(T).$$

Logo, F_s é uma transformação linear de W_2 em $\mathcal{L}(E_1, W_2)$.

Considere a constante C_s (dependente de $s \in J$) dada por

$$C_s = \|Df_{|\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))}. \quad (3.41)$$

Como

$$\|F_s(T)\|_{\mathcal{L}(E_1, W_2)} \leq C_{s,T} = C_s \cdot \|T\|_{W_2} \quad (3.42)$$

para todo $T \in W_2$, segue que F_s é contínua e

$$\|F_s\|_{\mathcal{L}(W_2, \mathcal{L}(E_1, W_2))} \leq C_s. \quad (3.43)$$

Portanto $F_s \in \mathcal{L}(W_2, \mathcal{L}(E_1, W_2))$, como desejávamos provar para o item i).

ii) Sejam $s, t \in J$.

Para $x \in E_1$ e $T \in W_2$ fixos, considere a constante positiva $C_{(s,t),x,T}$ dada por

$$C_{(s,t),x,T} = \|Df_{|\Phi_t^{\Sigma,X}(u)} - Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))} \cdot \|T\|_{W_2} \cdot \|x\|_{E_1}. \quad (3.44)$$

Logo

$$\|[F_t(T)(x)](v) - [F_s(T)(x)](v)\|_{E_2} \leq C_{(s,t),x,T} \cdot \|v\|_{E_2} \quad (3.45)$$

donde segue que

$$\|F_t(T)(x) - F_s(T)(x)\|_{W_2} \leq C_{(s,t),x,T}. \quad (3.46)$$

Daí procedendo de forma análoga ao item i) e considerando a constante $C_{(s,t),T}$ dada por

$$C_{(s,t),T} = \|Df_{|\Phi_t^{\Sigma,X}(u)} - Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(E_2, E_2)} \quad (3.47)$$

tem-se que

$$\|F_t(T) - F_s(T)\|_{\mathcal{L}(E_1, W_2)} \leq C_{(s,t),T} \quad (3.48)$$

e em seguida considerando a constante $C_{s,t}$ dada por

$$C_{s,t} = \|Df_{|\Phi_t^{\Sigma,X}(u)} - Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}\|_{\mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))} \quad (3.49)$$

conclui-se que

$$\|F_t - F_s\|_{\mathcal{L}(W_2, \mathcal{L}(E_1, W_2))} \leq C_{s,t}. \quad (3.50)$$

Como num sistema de Young a aplicação f é no mínimo de classe C^1 , segue que Df é uma aplicação contínua e como $s \mapsto \Phi_s^{\Sigma,X}(u)$ é um caminho contínuo decorre que $s \mapsto Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}$ é caminho contínuo (lembre-se que $Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}$ denota $Df(\Phi_s^{\Sigma,X}(u))$). Assim, segue pela continuidade de $s \mapsto Df_{|\Phi_s^{\Sigma,X}(u)}$ e pela desigualdade (3.50) que $s \mapsto F_s$ é um caminho contínuo.

iii) Mostrar que vale a igualdade

$$\mu_t = Id + \int_0^t F_s(\mu_s) dX_s \quad (3.51)$$

é equivalente a mostrar que igualdade

$$\mu_t(v) = \left(Id + \int_0^t F_s(\mu_s) dX_s \right) (v) \quad (3.52)$$

é válida para todo $v \in E_2$.

Como Σ é um sistema regular segue da Proposição 3.2.2 que a igualdade

$$D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u(v) = v + \int_0^t Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u(v)) dX_s \quad (3.53)$$

é válida para todo $v \in E_2$ e esta igualdade por sua vez é equivalente a igualdade (3.52), donde concluímos o que desejávamos. \square

Agora apresentaremos a prova da Proposição 3.3.1.

Demonstração da Proposição 3.3.1: Seja $(t, u, X, Z) \in J \times M \times \Delta \times \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$.

Considere o caminho $\eta: J \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ dado por

$$\eta(t) = (D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ f(\Phi_t^{\Sigma, X}(u)) = (D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ f(\Psi_t^{\Sigma, u}(X)). \quad (3.54)$$

Decorre do Lema 3.3.3 que o caminho η é contínuo.

Agora, considere os caminhos contínuos

$$\mu(t) = D(\Phi_t^{\Sigma, X})|_u \quad (3.55)$$

e

$$\nu(t) = \int_0^t \eta_s dZ_s = \int_0^t (D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ f(\Phi_s^{\Sigma, X}(u)) dZ_s. \quad (3.56)$$

Primeiramente provaremos o resultado para o caso em que $X \in \Delta \cap C^1(J, E_1)$, $Z \in C^1(J, E_1)$.

Como $Z \in C^1(J, E_1)$ então segue, pela Proposição 1.3.6, que

$$\nu(t) = \int_0^t \eta_s(\dot{Z}_s) ds \quad (3.57)$$

e neste caso ν é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\dot{\nu}(t) = \eta_t \circ \dot{Z}_t \quad (3.58)$$

a qual também é uma aplicação contínua, uma vez que é uma composição de aplicações contínuas. Em resumo, no caso em que $Z \in C^1(J, E_1)$, temos que ν também é um caminho de classe C^1 .

Se a integral $\int_0^t \mu_s d\nu_s$ existe, segue do Lema 3.3.2 que

$$\mu_t(\nu_t) = \mu_t(\nu_t) - \mu_0(\nu_0) = \int_0^t \mu_s d\nu_s + \int_0^t \nu_s \mathbf{d}\mu_s. \quad (3.59)$$

A integral

$$\int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X)) dZ_s = \int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X)) (\dot{Z}_s) ds \quad (3.60)$$

existe, pois é uma integral de Riemann com integrando contínuo.

Garantiremos que a integral $\int_0^t \mu_s d\nu_s$ existe mostrando que

$$\int_0^t \mu_s d\nu_s = \int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X)) dZ_s. \quad (3.61)$$

Temos que

$$\int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X)) dZ_s = \int_0^t (D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u \circ (D(\Phi_s^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X))) dZ_s = \int_0^t \mu_s \circ \eta_s dZ_s$$

logo

$$\int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X)) dZ_s = \int_0^t \mu_s \circ \eta_s dZ_s = \int_0^t \mu_s \circ \eta_s \circ \dot{Z}_s ds = \int_0^t \mu_s \circ \dot{\nu}_s ds = \int_0^t \mu_s d\nu_s.$$

Agora mostraremos que

$$\int_0^t \nu_s \mathbf{d}\mu_s = \int_0^t Df|_{\Psi_s^{\Sigma, u}(X)}(\mu_s(\nu_s)) dX_s. \quad (3.62)$$

Decorre do item iii) do Lema 3.3.4 que

$$\mu_t = \int_0^t F_s(\mu_s) dX_s \quad (3.63)$$

onde $F_s: \mathcal{L}(E_2, E_2) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, E_2))$ é dada por

$$[F_s(T)(x)](v) = Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(T(v))(x). \quad (3.64)$$

Assim, como $X \in C^1(J, E_1)$ segue que

$$\mu_t = \int_0^t F_s(\mu_s)(\dot{X}_s) ds \quad (3.65)$$

e usando o item ii) do Lema 3.3.4 temos, neste caso, que o caminho μ é diferenciável e

$$\dot{\mu}_t = F_t(\mu_t)(\dot{X}_t). \quad (3.66)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \nu_s \mathbf{d}\mu_s &= \int_0^t \dot{\mu}_s(\nu_s) ds = \int_0^t F_s(\mu_s)(\dot{X}_s)(\nu_s) ds \\ &= \int_0^t Df|_{\Phi_s^{\Sigma, X}(u)}(\mu_s(\nu_s))(\dot{X}_s) ds \\ &= \int_0^t Df|_{\Psi_s^{\Sigma, u}(X)}(\mu_s(\nu_s)) dX_s \end{aligned}$$

como queríamos.

Usando as expressões (3.59), (3.61) e (3.62) temos que

$$\mu_t(\nu_t) = \int_0^t Df(\Psi_s^{\Sigma,u}(X))(\mu_s(\nu_s)) dX_s + \int_0^t f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X)) dZ_s. \quad (3.67)$$

Pela Proposição 3.2.1 temos que $D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z)$ também satisfaz a equação (3.67) e como tal equação tem solução única, uma vez que $X, Z \in C^1(J, E_1)$, segue que

$$D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z) = \mu_t(\nu_t),$$

isto é,

$$D(\Psi_t^{\Sigma,u})|_X(Z) = D(\Phi_t^{\Sigma,X})|_u \left(\int_0^t (D(\Phi_s^{\Sigma,X})|_u)^{-1} \circ f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X)) dZ_s \right).$$

Por fim, a fórmula ainda é válida para $X \in \Delta \subset \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$ e $Z \in \mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$, uma vez que $C^1(J, E_1)$ é denso em $\mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$ (segundo a Proposição 1.2.8) e que as aplicações $D(\Psi_t^{\Sigma,u})$, $\Phi_t^{\Sigma,\cdot}$ e $\Psi_s^{\Sigma,u}$ são contínuas em relação a topologia de $\mathcal{V}^{0,p}(J, E_1)$. \square

3.4 Concatenação entre Trajetórias Regulares

Nesta seção mostraremos o principal resultado deste capítulo, o qual diz que num sistema de Young a concatenação de uma trajetória regular com uma trajetória qualquer produz uma outra trajetória regular.

Sejam Σ um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) e $u \in M$. A aplicação $ev^{\Sigma,u}: \Delta \rightarrow M$ dada por

$$ev^{\Sigma,u}(X) = \Psi_T^{\Sigma,u}(X) \quad (3.68)$$

é chamada *avaliação de ponto final* do sistema Σ com respeito a u .

Como Σ é um sistema de Young regular decorre da Proposição 3.3.1 que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_X(Z) = D(\Phi_T^{\Sigma,X})|_u \left(\int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma,X})|_u)^{-1} \circ f(\Phi_s^{\Sigma,X}(u)) dZ_s \right). \quad (3.69)$$

Abaixo apresentamos uma fórmula crucial para a alcançar o objetivo desta seção.

Teorema 3.4.1. *Se Σ é um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) então*

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z_1 * Z_2) = (D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_v \circ D(ev^{\Sigma,u})|_X)(Z_1) + D(ev^{\Sigma,v})|_Y(Z_2) \quad (3.70)$$

para todo $u \in U$, $X, Y \in \Delta$ e $Z_1, Z_2 \in \text{span}(\Delta)$, onde $v = ev^{\Sigma,u}(X)$.

Demonstração: Como Σ é regular, segue pela Proposição 3.3.1, ou mais especificamente pela equação (3.69), que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z_1 * Z_2) = D(\Phi_T^{\Sigma,X*Y})|_u \left(\int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma,X*Y})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y))) d(Z_1 * Z_2)_s \right). \quad (3.71)$$

Usando a Proposição 2.1.1 temos que

$$\Phi_T^{\Sigma,X*Y} = \Phi_T^{\Sigma,Y} \circ \Phi_T^{\Sigma,X}.$$

Logo,

$$D(\Phi_T^{\Sigma,X*Y})|_u = D(\Phi_T^{\Sigma,Y} \circ \Phi_T^{\Sigma,X})|_u = D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_{\Phi_T^{\Sigma,X}(u)} \circ D(\Phi_T^{\Sigma,X})|_u \quad (3.72)$$

e substituindo a expressão (3.72) na expressão (3.71), segue que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z_1 * Z_2) = D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_v(A + B) = D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_v(A) + D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_v(B) \quad (3.73)$$

onde

$$A = D(\Phi_T^{\Sigma,X})|_u \left(\int_0^{T/2} (D(\Phi_s^{\Sigma,X*Y})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y))) d(Z_1 * Z_2)_s \right)$$

e

$$B = D(\Phi_T^{\Sigma,X})|_u \left(\int_{T/2}^T (D(\Phi_s^{\Sigma,X*Y})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y))) d(Z_1 * Z_2)_s \right).$$

Para $s \in [0, T/2]$, temos que

$$\Phi_s^{\Sigma,X*Y} = \Phi_{2s}^{\Sigma,X}$$

e

$$\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y) = \Psi_{2s}^{\Sigma,u}(X)$$

donde segue, usando a Proposição 1.3.2, que

$$\int_0^{T/2} (D(\Phi_s^{\Sigma,X*Y})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y))) d(Z_1 * Z_2)_s = \int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma,X})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X))) d(Z_1)_s$$

e usando a Proposição 3.3.1 que

$$A = D(\Phi_T^{\Sigma,X})|_u \left(\int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma,X})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma,u}(X))) d(Z_1)_s \right) = D(ev^{\Sigma,u})|_X(Z_1). \quad (3.74)$$

De modo similar, para $s \in [T/2, T]$, temos que

$$\Phi_s^{\Sigma,X*Y} = \Phi_{2s-T}^{\Sigma,Y} \circ \Phi_T^{\Sigma,X}$$

e

$$\Psi_s^{\Sigma,u}(X * Y) = \Psi_{2s-T}^{\Sigma,v}(Y)$$

donde resulta, usando a Proposição 1.3.2, que

$$\begin{aligned}
B &= D(\Phi_T^{\Sigma, X})|_u \left(\int_{T/2}^T (D(\Phi_s^{\Sigma, X*Y})|_u)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma, u}(X * Y))) d(Z_1 * Z_2)_s \right) \\
&= D(\Phi_T^{\Sigma, X})|_u \left(\int_{T/2}^T (D(\Phi_T^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \circ (D(\Phi_{2s-T}^{\Sigma, Y})|_v)^{-1} \circ (f(\Psi_{2s-T}^{\Sigma, v}(Y))) d(Z_2)_{2s-T} \right) \\
&= D(\Phi_T^{\Sigma, X})|_u \circ (D(\Phi_T^{\Sigma, X})|_u)^{-1} \left(\int_{T/2}^T (D(\Phi_{2s-T}^{\Sigma, Y})|_v)^{-1} \circ (f(\Psi_{2s-T}^{\Sigma, v}(Y))) d(Z_2)_{2s-T} \right) \\
&= \int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma, Y})|_v)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma, v}(Y))) d(Z_2)_s
\end{aligned}$$

e usando a Proposição 3.3.1 que

$$D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v(B) = D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v \left(\int_0^T (D(\Phi_s^{\Sigma, Y})|_v)^{-1} \circ (f(\Psi_s^{\Sigma, v}(Y))) d(Z_2)_s \right) = D(ev^{\Sigma, v})|_Y(Z_2). \quad (3.75)$$

Portanto, substituindo as expressões (3.74) e (3.75) na expressão (3.73), temos que

$$D(ev^{\Sigma, u})|_{(X*Y)}(Z_1 * Z_2) = (D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v \circ D(ev^{\Sigma, u})|_X)(Z_1) + D(ev^{\Sigma, v})|_Y(Z_2).$$

□

O teorema a seguir é o resultado central deste capítulo.

Teorema 3.4.2. *Sejam Σ um sistema de Young regular da forma (f, Δ, M) , $\alpha \in T(\Sigma, u, v)$ e $\beta \in T(\Sigma, v, w)$. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) *Se α é uma trajetória regular então $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.*
- ii) *Se β é uma trajetória regular então $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.*

Demonstração: Se α e β são trajetórias regulares, então existem $X \in \dot{\Delta}_u \subset \Delta$ e $Y \in \dot{\Delta}_v \subset \Delta$ tais que $\alpha = I_\Sigma(u, X)$ e $\beta = I_\Sigma(v, Y)$. Segue pela Proposição 2.1.1 que $\alpha * \beta = I_\Sigma(u, X * Y)$. Seja E_2 o espaço de Banach associado ao sistema Σ tal que $M \subset E_2$. Abaixo constam as demonstrações das afirmações i) e ii) respectivamente.

i) Para mostramos que $\alpha * \beta = I_\Sigma(u, X * Y)$ é um trajetória regular, basta mostrarmos que $D(\Psi_T^{\Sigma, u})|_{X*Y} = D(ev^{\Sigma, u})|_{(X*Y)}$ é sobrejetiva, ou seja, basta mostrarmos que dado $a \in E_2$, existe $Z \in span(\Delta)$ tal que $D(ev^{\Sigma, u})|_{(X*Y)}(Z) = a$.

Seja $a \in E_2$. Como $D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v$ é bijetiva então existe $b \in E_2$ tal que

$$D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v(b) = a \quad (3.76)$$

e como α é uma trajetória regular então existe $Z_1 \in span(\Delta)$ tal que

$$D(ev^{\Sigma, u})|_X(Z_1) = D(\Psi_T^{\Sigma, u})|_X(Z_1) = b. \quad (3.77)$$

Como Σ é um sistema regular, vale o Teorema 3.4.1, donde decorre que

$$D(ev^{\Sigma, u})|_{(X*Y)}(Z_1 * 0) = (D(\Phi_T^{\Sigma, Y})|_v \circ D(ev^{\Sigma, u})|_X)(Z_1) + D(ev^{\Sigma, v})|_Y(0) = a.$$

Assim, tomando $Z = Z_1 * 0$ temos que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z) = a, \quad (3.78)$$

como queríamos.

Logo $D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}$ é sobrejetiva, o que resulta em $X * Y \in \dot{\Delta}_u$. Portanto $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.

ii) Da mesma forma, para mostramos que $\alpha * \beta = I_\Sigma(u, X * Y)$ é um trajetória regular, basta mostrarmos que dado $a \in E_2$, existe $Z \in span(\Delta)$ tal que $D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z) = a$.

Seja $a \in E_2$. Como β é uma trajetória regular então existe $Z_2 \in span(\Delta)$ tal que

$$D(ev^{\Sigma,v})|_Y(Z_2) = D(\Psi_T^{\Sigma,v})|_Y(Z_2) = a. \quad (3.79)$$

Como Σ é sistema regular, vale o Teorema 3.4.1, donde decorre que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(0 * Z_2) = (D(\Phi_T^{\Sigma,Y})|_Y \circ D(ev^{\Sigma,u})|_X)(0) + D(ev^{\Sigma,v})|_Y(Z_2) = a.$$

Assim, tomando $Z = 0 * Z_2$ temos que

$$D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}(Z) = a, \quad (3.80)$$

como queríamos.

Portanto, $D(ev^{\Sigma,u})|_{(X*Y)}$ é sobrejetiva, donde resulta que $X * Y \in \dot{\Delta}_u$ e $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular. \square

3.5 Homotopia Monotônica entre Trajetórias Regulares

De forma similar ao capítulo 2, os resultados de homotopia p -monotônica podem ser refeitos, para o conjunto de trajetórias regulares de um sistema de Young. Isto é o que discutiremos nesta seção.

Definição 3.5.1. Sejam $p \in [1, \infty)$, Σ um sistema de Young regular com p -variação e $\alpha, \beta \in \dot{T}(\Sigma, u, v)$. Dizemos que α é p -monotonicamente regular homotópica a β com respeito ao sistema Σ se existe um caminho contínuo $K: [0, 1] \rightarrow \dot{T}(\Sigma, u, v)$ com relação a topologia \mathcal{T}^p tal que $K(0) = \alpha$ e $K(1) = \beta$.

A aplicação K é chamada *homotopia p -monotônica regular* entre α e β , e usamos a notação $\alpha \overset{\sim}{\simeq}_p \beta$ para dizer que α é p -monotonicamente regular homotópica a β .

A relação \simeq_p é uma relação de equivalência em $\dot{T}(\Sigma)$. O espaço quociente dado pela relação de equivalência \simeq_p é denotado por

$$\dot{\Gamma}(\Sigma) = \dot{T}(\Sigma) / \simeq_p \quad (3.81)$$

e para cada $\alpha \in \dot{T}(\Sigma)$, suas classe de equivalência em $\dot{\Gamma}(\Sigma)$ são denotadas por $[\dot{\alpha}]_p$. Para cada $u \in M$ o espaço quociente $\dot{T}(\Sigma, u) / \simeq_p$ é denotado por $\dot{\Gamma}(\Sigma, u)$.

Seja Σ um sistema de Young regular e $\alpha, \beta \in \dot{T}(\Sigma)$. Temos que se $\alpha \simeq_p \beta$ então $\alpha \simeq_p \beta$ e portanto $\alpha \simeq \beta$, onde \simeq é a relação de equivalência dada pela homotopia clássica entre caminhos contínuos.

Proposição 3.5.2. *Sejam Σ um sistema de Young regular, $\alpha_0, \alpha_1 \in \dot{T}(\Sigma, u, v)$ e $\beta_0, \beta_1 \in \dot{T}(\Sigma, v, w)$.*

i) *Se $\alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq_p \beta_1$ então $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_p \alpha_1 * \beta_1$.*

ii) *Se $\alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq_p \beta_1$ então $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_p \alpha_1 * \beta_1$.*

Demonstração: i) Se $F : \alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ então $F : \alpha_0 \simeq_p \alpha_1$ e como $G : \beta_0 \simeq_p \beta_1$ então segue pela Proposição 2.3.1 que existe $H : \beta_0 * \alpha_0 \simeq_p \beta_1 * \alpha_1$, onde

$$H(s)(t) = \begin{cases} F(s)(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ G(s)(2t - T), & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases} \quad (3.82)$$

Temos que $H(s) = G(s) * F(s) \in \dot{T}(\Sigma, x, z), \forall s \in [0, 1]$.

De fato, por hipótese $F(s) \in \dot{T}(\Sigma, x, y)$ e $G(s) \in \dot{T}(\Sigma, y, z)$, então segue pelo Teorema 3.4.2 que $F(s) * G(s) \in \dot{T}(\Sigma, x, z)$. Portanto $H : \alpha_0 * \beta_0 \simeq_p \alpha_1 * \beta_1$

ii) Segue de modo similar. □

Utilizando trajetórias regulares de um sistema de controle Σ evoluindo sobre um variedade diferenciável M , F. Colonius, E. Kizil e L. A. San Martin aplicando um resultado sobre construção de variedades a partir de uma família de injeções (ver [16], Lema 1, página 137) verificaram que o conjunto de classes de homotopia regular $\dot{\Gamma}(\Sigma, u)$ tem uma estrutura de variedade diferenciável e $(\epsilon_\Sigma)|_{\dot{\Gamma}(\Sigma, u)}$ é uma aplicação de recobrimento. Fixado $u \in M$, eles consideraram a família

$$\mathcal{F}^u = \{(\phi_w, A_w) : w \in \dot{\Delta}_u\} \quad (3.83)$$

onde $\dot{\Delta}_u$ denota os controles regulares do sistema de controle no ponto u ; cada A_w é um aberto difeomorfo a um aberto da variedade M (o que decorre do fato de w ser controle regular) e cada $\phi_w : A_w \rightarrow \dot{\Gamma}(\Sigma, u)$ é dada por

$$\phi_w = \pi_{\dot{\Gamma}} \circ (trj_u)|_{A_w} \quad (3.84)$$

sendo trj_u a aplicação que associa cada controle w a sua trajetória iniciada em u e $\pi_{\dot{\Gamma}}$ a projeção das trajetórias em suas classes de homotopia monotônica regular.

No contexto de um sistema de Young Σ , de modo similar ao que se fez em [2], é possível definir injeções $\phi_X : A_X \rightarrow \dot{\Gamma}(\Sigma, u)$ dadas por

$$\phi_X = \pi_{\dot{\Gamma}} \circ (I_{\Sigma}^u)|_{A_X} \quad (3.85)$$

onde X são sinais regulares e A_X abertos correspondentes. Também é possível provir $\dot{\Gamma}(\Sigma, u)$ de uma topologia tal que as bijeções ϕ_X sejam homeomorfismos, contudo com tal topologia não podemos garantir uma “boa” estrutura de variedade diferenciável para $\dot{\Gamma}(\Sigma, u)$.

Uma alternativa para construir um recobrimento para o conjunto de acessibilidade regular de um sistema de Young regular com p -variação é proceder de modo análogo ao Teorema 2.3.12.

Teorema 3.5.3. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e Σ um sistema de Young regular com p -variação da forma (f, Δ, M) . Se Δ contém algum sinal constante e $\dot{A}(\Sigma, u)$ é localmente conexo por trajetórias de Σ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Σ , então $\dot{A}(\Sigma, u)$ admite um espaço de recobrimento.*

Demonstração: Usando a Proposição 3.5.2 é possível considerar a família \dot{B}_u^{Σ} de todos os conjuntos da forma

$$[\alpha, \dot{W}]_p = \{[\alpha * \beta]_p : \beta \in T(\Sigma, \alpha(T)) \text{ and } \beta(J) \subset W\}, \quad (3.86)$$

onde $\alpha \in \dot{T}(\Sigma, u)$ e W é uma vizinhança aberta de $\alpha(T)$ em $\dot{A}(\Sigma, u)$.

A família \dot{B}_u^{Σ} é uma base para a topologia em $\dot{\Gamma}(\Sigma, u)$. A restrição $(\epsilon_{\Sigma})|_{\dot{\Gamma}(\Sigma, u)}$ é a aplicação de recobrimento procurada e o resto da prova é similar a prova do Teorema 2.3.12. \square

CAPÍTULO 4

CAMINHOS RUGOSOS

O objetivo neste capítulo é fazer uma breve apresentação dos conceitos básicos relativos a caminhos rugosos (“rough paths”), os quais se fazem necessários para o desenvolvimento posterior do capítulo 5.

4.1 Séries Formais e Assinaturas de Caminhos

Nesta seção discutiremos, segundo T. J. Lyons, M. Caruana e T. Levy [17], sobre as séries formais e as assinaturas de caminhos introduzidos por K. Chen.

Definição 4.1.1. Seja E um espaço de Banach e considere $E^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. O conjunto

$$T(E) = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_n \in E^{\otimes n}, \forall n \in \mathbb{N}\} \quad (4.1)$$

é denominado espaço das *séries formais* de tensores de E .

Sejam $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots) \in T(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideramos o espaço $T(E)$ munido com as seguintes operações:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$\mathbf{a} \bar{\otimes} \mathbf{b} = (c_0, c_1, \dots), \text{ onde } c_n = \sum_{k=0}^n a_k \otimes b_{n-k}$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots)$$

O espaço $T(E)$ das séries formais de E com as operações acima é uma álgebra associativa, não-comutativa e com unidade $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0, \dots)$. Um elemento $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \in T(E)$ é inversível se, e somente se, $a_0 \neq 0$, e caso seja inversível seu inverso é dado por

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{a_0} \sum_{n \geq 0} \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{a}}{a_0} \right)^n. \quad (4.2)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$B_n = \{(a_0, a_1, \dots) \in T(E) \mid a_0 = \dots = a_n = 0\} \quad (4.3)$$

o qual é um ideal de $T(E)$. A álgebra tensorial truncada de ordem n de E é o espaço quociente

$$T^n(E) = \frac{T(E)}{B_n}. \quad (4.4)$$

Considere o homomorfismo canônico $\pi_n: T(E) \rightarrow T^n(E)$ dado por

$$\pi_n(a_0, \dots, a_n, \dots) = (a_0, \dots, a_n). \quad (4.5)$$

Vale ressaltar que álgebra tensorial truncada $T^n(E)$ é isomorfa a $\bigoplus_{k=0}^n E^{\otimes k}$ munido com o produto

$$(a_0, \dots, a_n) \bar{\otimes} (b_0, \dots, b_n) = (c_0, \dots, c_n) \quad (4.6)$$

onde $c_k = \sum_{i=0}^k a_i \otimes b_{k-i}$. Além disso, a álgebra tensorial truncada $T^n(E)$ possui uma norma usual dada por

$$\|(a_0, \dots, a_n)\|_{T^n(E)} = \left(\sum_{i=0}^n \|a_i\|_{E^{\otimes i}}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

A álgebra $T(E)$ tem dois subconjuntos relevantes que são

$$T_1(E) = \{(a_0, a_1, \dots) \in T(E) : a_0 = 1\} \quad (4.8)$$

e

$$T_0(E) = \{(a_0, a_1, \dots) \in T(E) : a_0 = 0\}. \quad (4.9)$$

Do mesmo modo, a álgebra quociente $T^n(E)$ tem os subconjuntos

$$T_1^n(E) = \{\mathbf{g} \in T^n(E) : \mathbf{g} = (1, g_1, \dots, g_n)\} \quad (4.10)$$

e

$$T_0^n(E) = \{\mathbf{a} \in T^n(E) : \mathbf{a} = (0, a_1, \dots, a_n)\}. \quad (4.11)$$

Definição 4.1.2. Sejam E um espaço de Banach e $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$. A assinatura de X com respeito um subintervalo $[s, t] \subset J$ é o elemento $S(X)_{s,t} \in T(E)$ dado por

$$S(X)_{s,t} = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2, \dots) \quad (4.12)$$

onde

$$X_{s,t}^n = \int \cdots \int_{s \leq u_1 < \dots < u_n \leq t} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_n} \quad (4.13)$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

O elemento $\pi_n(S(X)_{s,t}) \in T^n(E)$ é chamado de *assinatura truncada* de X de ordem n com respeito ao subintervalo $[s, t] \subset J$ e tal elemento será denotado por $S_n(X)_{s,t}$.

A assinatura é uma aplicação com domínio no conjunto de caminhos tomando valores em E , com contra-domínio na álgebra $T(E)$ e é invariante por translações e reparametrizações, o que é uma decorrência da Proposição 1.3.2.

É interessante notar que o conjunto de caminhos, a menos translações e reparametrizações, tomando valores em E tem uma operação de multiplicação que é a concatenação entre caminhos. Dados dois caminhos contínuos $X : [r, s] \rightarrow E$ e $Y : [s, t] \rightarrow E$ a *concatenação contínua simples* de X por Y é o caminho $X \vee Y : [r, t] \rightarrow E$ dado por

$$(X \vee Y)_t = \begin{cases} X_u, & \text{se } u \in [r, s] \\ Y_u + (X_s - Y_s), & \text{se } u \in [s, t] \end{cases}. \quad (4.14)$$

Teorema 4.1.3 (Chen). *Seja E um espaço de Banach. Se $X \in \mathcal{V}^1([r, s], E)$ e $Y \in \mathcal{V}^1([s, t], E)$ então*

$$S(X \vee Y)_{r,t} = S(X)_{r,s} \bar{\otimes} S(Y)_{s,t}. \quad (4.15)$$

Demonstração: Sejam $S(X)_{r,s} = (1, X_{r,s}^1, X_{r,s}^2, \dots)$, $S(Y)_{s,t} = (1, Y_{s,t}^1, Y_{s,t}^2, \dots)$ e $Z = X \vee Y$. Temos que $S(Z)_{r,t} = (1, Z_{r,t}^1, Z_{r,t}^2, \dots)$, onde

$$Z_{r,t}^n = \int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_n < t} dZ_{u_1} \otimes \dots \otimes dZ_{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Por outro lado, $S(X)_{r,s} \bar{\otimes} S(Y)_{s,t} = (1, A^1, A^2, \dots)$, onde

$$A^n = \sum_{k=0}^n X_{r,s}^k \otimes Y_{s,t}^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ou mais especificamente,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \left[\left(\int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_k < s} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_k} \right) \otimes \left(\int \cdots \int_{s < v_1 < \dots < v_{n-k} < t} dY_{v_1} \otimes \dots \otimes dY_{v_{n-k}} \right) \right].$$

Pelo Teorema de Fubini tem-se que $A^n = Z_{r,t}^n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. De fato,

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^n \left[\left(\int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_k < s} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_k} \right) \otimes \left(\int \cdots \int_{s < v_1 < \dots < v_{n-k} < t} dY_{v_1} \otimes \dots \otimes dY_{v_{n-k}} \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\left(\int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_k < s} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_k} \right) \otimes \left(\int \cdots \int_{s < u_{k+1} < \dots < u_n < t} dY_{u_{k+1}} \otimes \dots \otimes dY_{u_n} \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\left(\int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_k < s} dZ_{u_1} \otimes \dots \otimes dZ_{u_k} \right) \otimes \left(\int \cdots \int_{s < u_{k+1} < \dots < u_n < t} dZ_{u_{k+1}} \otimes \dots \otimes dZ_{u_n} \right) \right] \\
&= \int \cdots \int_{r < u_1 < \dots < u_n < t} dZ_{u_1} \otimes \dots \otimes dZ_{u_n} = Z_{r,t}^n.
\end{aligned}$$

Portanto $S(X \vee Y)_{r,t} = S(X)_{r,s} \bar{\otimes} S(Y)_{s,t}$. □

Agora relembre que se $(X, Y) \in \mathcal{V}^p(J, E) \times \mathcal{V}^p(J, E)$ então $X * Y \in \mathcal{V}^p(J, E)$ é dada por

$$(X * Y)_t = \begin{cases} X_{2t}, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ Y_{2t-T} + X_T - Y_0, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}. \quad (4.16)$$

Um resultado simples, conseqüência do Teorema de Chen, que nós observamos é o seguinte:

Corolário 4.1.4. *Seja E um espaço de Banach. Se $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ e $Y \in \mathcal{V}^1(J, E)$ então*

$$S(X * Y)_{0,T} = S(X)_{0,T} \bar{\otimes} S(Y)_{0,T}. \quad (4.17)$$

Demonstração: Note que

$$X * Y = [X \vee (Y \circ \varphi)] \circ \mu, \quad (4.18)$$

onde $\varphi : [T, 2T] \rightarrow [0, T]$ é dado por $\varphi(t) = t - T$ e $\mu : [0, T] \rightarrow [0, 2T]$ é dado por $\mu(t) = 2t$. Então usando o fato de que a assinatura de um caminho é invariante por reparametrizações deste caminho e usando o Teorema de Chen temos que

$$\begin{aligned}
S(X * Y)_{0,T} &= S([X \vee (Y \circ \varphi)] \circ \mu)_{0,T} \\
&= S([X \vee (Y \circ \varphi)])_{\mu_0, \mu_T} \\
&= S([X \vee (Y \circ \varphi)])_{0, 2T} \\
&= S(X)_{0,T} \bar{\otimes} S(Y \circ \varphi)_{T, 2T} \\
&= S(X)_{0,T} \bar{\otimes} S(Y)_{\varphi_T, \varphi_{2T}} \\
&= S(X)_{0,T} \bar{\otimes} S(Y)_{0,T}.
\end{aligned}$$

□

Com a intenção de simplificar a notação, a assinatura de um caminho $X : J \rightarrow E$ com respeito ao próprio intervalo J será denotado simplesmente por $\mathbf{S}(X)$ e a denominaremos por assinatura de X , sem mencionar o subintervalo. Em outras palavras, $\mathbf{S}(X) = S(X)_{0,T}$. Também denotaremos $\pi_n(\mathbf{S}(X))$ por $\mathbf{S}_n(X)$.

Naturalmente podemos considerar a aplicação $\mathbf{S}_n : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ dada por

$$\mathbf{S}(X) = S(X)_{0,T} \quad (4.19)$$

denominada *aplicação assinatura* e a aplicação $\mathbf{S}_n : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ dada por

$$\mathbf{S}_n(X) = S_n(X)_{0,T} \quad (4.20)$$

denominada *aplicação assinatura truncada* de ordem n .

Uma pergunta natural é se o teorema de Chen ainda vale para caminhos de p -variação finita, com $p > 1$? A resposta é sim para $p \in (1, 2)$.

Proposição 4.1.5. *Sejam $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$ e $\mathcal{L} : T^n(E) \rightarrow \mathcal{L}(E, T^n(E))$ dada por*

$$\mathcal{L}(a_0, \dots, a_n)(x) = (0, a_0 \otimes x, \dots, a_{n-1} \otimes x). \quad (4.21)$$

Então o caminho $\mathbf{L}^X : [0, T] \rightarrow T^n(E)$ dado por

$$\mathbf{L}_t^X = S_n(X)_{0,t} = (1, X_{0,t}^1, \dots, X_{0,t}^n) \quad (4.22)$$

é a única solução da equação diferencial

$$dL_t = \mathcal{L}(L_t) dX_t, \quad \text{com } L_0 = (1, 0, \dots, 0). \quad (4.23)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{L}(\mathbf{L}_s^X) dX_s &= \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D} \cap [0, t]} \mathcal{L}(\mathbf{L}_{t_i}^X)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &= \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D} \cap [0, t]} \mathcal{L}(1, X_{0,t_i}^1, \dots, X_{0,t_i}^n)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &= \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D} \cap [0, t]} (0, 1 \otimes (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), \dots, X_{0,t_i}^{n-1} \otimes (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) \\ &= (0, \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D} \cap [0, t]} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), \dots, \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \mathcal{D} \cap [0, t]} X_{0,t_i}^{n-1} \otimes (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) \\ &= (0, \int_{0 < u_1 < t} dX_{u_1}, \int_{0 < u_2 < t} X_{0,u_2}^1 \otimes dX_{u_2}, \dots, \int_{0 < u_n < t} X_{0,u_n}^{n-1} \otimes dX_{u_n}) \\ &= (0, \int_{0 < u_1 < t} dX_{u_1}, \dots, \iint_{0 < u_1 < \dots < u_n < t} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_n}) \\ &= (1, \int_{0 < u_1 < t} dX_{u_1}, \dots, \iint_{0 < u_1 < \dots < u_n < t} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_n}) - (1, 0, \dots, 0) \\ &= \mathbf{L}_t^X - \mathbf{L}_0^X. \end{aligned}$$

Como $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$, a unicidade da solução decorre do Teorema de Picard-Lindelöf. \square

Denominamos por *aplicação de Lyons* de ordem n a aplicação $S_n : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, T^n(E))$ dada por

$$S_n(X) = \mathbf{L}^X \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{L}^X : [0, T] \rightarrow T^n(E)$ é solução da equação acima dirigida por $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$. Já o caminho $S_n(X) : [0, T] \rightarrow T^n(E)$ dado por

$$S_n(X)(t) = \mathbf{L}_t^X = S_n(X)_{0,t} \quad (4.25)$$

é denominado o *n-levantamento de Lyons* do caminho $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$. O caminho $S_n(X)$ avaliado em um ponto $t \in J$ também pode ser denotado por $S_n(X)_t$.

Apesar de parecer mais sugestivo denotar o *n-levantamento de Lyons* de um caminho $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$ por \mathbf{L}^X , o denotaremos a partir de agora somente por $S_n(X)$ que é a notação mais freqüente encontrada nos livros sobre “rough paths”. Ressaltamos que o leitor deve ter sempre em mente que $S_n(X)$ denota *n-levantamento de Lyons* de X , o qual é um caminho tomando valores em $T^n(E)$, enquanto $\mathbf{S}_n(X)$ é a *n-assinatura* de X , a qual é um elemento de $T^n(E)$. Mais ainda,

$$S_n(X)_T = \mathbf{S}_n(X). \quad (4.26)$$

Corolário 4.1.6. *Sejam $p \in [1, 2)$ e E um espaço de Banach. Temos que as aplicações $S_n : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, T^n(E))$ e $\mathbf{S}_n : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ são contínuas.*

Demonstração: Decorre do teorema de Picard-Lindelöf que a aplicação de Itô $I_{\mathcal{L}} : \mathcal{V}^p(J, E) \times T^n(E) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, T^n(E))$, na qual cada $I_{\mathcal{L}}(X, \mathbf{a})$ é solução da equação

$$dL_t = f(L_t) dX_t, \quad \text{com } L_0 = \mathbf{a} \quad (4.27)$$

dada na Proposição 4.1.5, é uma aplicação contínua.

Logo a restrição $I_{\mathcal{L}}^1 : \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, T^n(E))$ dada por

$$I_{\mathcal{L}}^1(X) = I_{\mathcal{L}}(X, \mathbf{1}) = S_n(X)$$

é contínua, isto é, $I_{\mathcal{L}}^1 = S_n$ e portanto S_n é contínua.

Agora, como para todo $t \in J$ a aplicação $\pi_t : \mathcal{V}^p(J, T^n(E)) \rightarrow T^n(E)$ dada por

$$\pi_t(\mathbf{H}) = \mathbf{H}_t$$

também é contínua, conseqüentemente $\pi_T \circ I_{\mathcal{L}}^1$ é contínua.

Mas, para todo $X \in \mathcal{V}^p(J, T^n(E))$ tem-se que

$$(\pi_T \circ I_{\mathcal{L}}^1)(X) = \pi_T(I_{\mathcal{L}}^1(X)) = \pi_T(S_n(X)) = S_n(X)_T = \mathbf{S}_n(X).$$

Logo $\pi_T \circ I_{\mathcal{L}}^1 = \mathbf{S}_n$ e portanto \mathbf{S}_n é contínua. \square

Corolário 4.1.7. *Sejam $p \in [1, 2)$ e E um espaço de Banach. Para cada $s, t \in J$ a aplicação $\mathbf{S}_n^{s,t}: \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ dada por $\mathbf{S}_n^{s,t}(X) = \pi_n(S(X)_{s,t})$ é contínua.*

Demonstração: Análogo a demonstração do corolário anterior. \square

Proposição 4.1.8. *Sejam $X_k: J \rightarrow E$ caminhos Lipschitz tais que $\|X_k\|_{Lip} \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se a seqüência $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para $X: J \rightarrow E$ então $\|S_n(X_k)\|_{Lip} \leq C_1$ e $(S_n(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para o caminho $S_n(X)$. Em particular, $\mathbf{S}_n(X_k)$ converge $\mathbf{S}_n(X)$.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que $S_n(X_k)$ é a única solução da equação

$$dL_t = \mathcal{L}(L_t) d(X_k)_t, \quad \text{com } L_0 = \mathbf{1}, \quad (4.28)$$

isto é, $I_{\mathcal{L}}(X_k) = S_n(X_k)$. Do mesmo modo, $S_n(X)$ é a única solução da equação

$$dL_t = \mathcal{L}(L_t) dX_t, \quad \text{com } L_0 = \mathbf{1}, \quad (4.29)$$

isto é, $I_{\mathcal{L}}(X) = S_n(X)$. Logo, usando as hipóteses segue de resultados para equações diferenciais dirigidas por caminhos Lipschitz que $\|I_{\mathcal{L}}(X_k)\|_{Lip} \leq C_1$ e que $(I_{\mathcal{L}}(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para o caminho $I_{\mathcal{L}}(X)$, o que é exatamente o que queríamos. \square

O próximo resultado é chamado de *teorema generalizado de Chen*.

Teorema 4.1.9. *Seja E um espaço de Banach. Se $X \in \mathcal{V}^p([r, s], E)$ e $Y \in \mathcal{V}^p([s, t], E)$, com $p \in [1, 2)$, então*

$$S(X \vee Y)_{r,t} = S(X)_{r,s} \bar{\otimes} S(Y)_{s,t}. \quad (4.30)$$

Demonstração: Seja $p \in [1, 2)$. Escolha $q \in [p, 2)$. Como $X \in \mathcal{V}^p([r, s], E)$ e $Y \in \mathcal{V}^p([s, t], E)$ existem seqüências $(X^{(n)})_{n \geq 0} \subset \mathcal{V}^p([r, s], E)$ e $(Y^{(n)})_{n \geq 0} \subset \mathcal{V}^p([s, t], E)$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{(n)}, X) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(Y^{(n)}, Y) = 0$.

Como cada $X^{(n)}$ e $Y^{(n)}$ são aproximações poligonais de X e Y respectivamente, tem-se que cada $X^{(n)} \in \mathcal{V}^1([r, s], E)$ e $Y^{(n)} \in \mathcal{V}^1([s, t], E)$, logo pelo Teorema de Chen vale que

$$S(X^{(n)} \vee Y^{(n)})_{r,t} = S(X^{(n)})_{r,s} \bar{\otimes} S(Y^{(n)})_{s,t}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (4.31)$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}\pi_m(S(X^{(n)} \vee Y^{(n)})_{r,t}) &= \pi_m(S(X^{(n)})_{r,s} \bar{\otimes} S(Y^{(n)})_{s,t}) \\ &= \pi_m(S(X^{(n)})_{r,s}) \bar{\otimes} \pi_m(S(Y^{(n)})_{s,t}), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Pelo Corolário anterior, para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ as aplicações $\pi_m(S(\cdot)_{r,t})$, $\pi_m(S(\cdot)_{r,s})$ e $\pi_m(S(\cdot)_{s,t})$ são contínuas, e como $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(X^{(n)}, X) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(Y^{(n)}, Y) = 0$, segue de (4.32) que

$$\pi_m(S(X \vee Y)_{r,t}) = \pi_m(S(X)_{r,s}) \bar{\otimes} \pi_m(S(Y)_{s,t}), \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (4.33)$$

e portanto

$$S(X \vee Y)_{r,t} = S(X)_{r,s} \bar{\otimes} S(Y)_{s,t}. \quad (4.34)$$

□

Corolário 4.1.10. *Seja E um espaço de Banach. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$ e $Y \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$, então*

$$\mathbf{S}(X * Y) = \mathbf{S}(X) \bar{\otimes} \mathbf{S}(Y). \quad (4.35)$$

Demonstração: Análoga a demonstração do Corolário 4.1.4. □

4.2 A Imagem da Aplicação Assinatura

A imagem da aplicação assinatura truncada $\mathbf{S}_n: \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ é um objeto importante e portanto nosso objetivo nesta seção é descrevê-lo. O teorema de Chen afirma que esta imagem é fechada pela multiplicação de $T^n(E)$. Como o termo de grau 0 em $\mathbf{S}_n(X)$ é 1, segue que $\mathbf{S}_n(X)$ é inversível em $T^n(E)$. Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$, então

$$(\mathbf{S}(X))^{-1} = \mathbf{S}(X^{-1}) \quad (4.36)$$

onde $X_t^{-1} = X_{T-t}$. Isto garante que $(\mathbf{S}(X))^{-1}$ ainda está na imagem da aplicação assinatura.

A partir de agora considere E como sendo um espaço vetorial de dimensão finita. Fixado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, temos que $(T_0^n(E), [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie, onde o colchete é dado por

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \bar{\otimes} \mathbf{b} - \mathbf{b} \bar{\otimes} \mathbf{a}. \quad (4.37)$$

Considere a aplicação $\exp: T_0^n(E) \rightarrow T_1^n(E)$ dada por

$$\exp(\mathbf{a}) = \mathbf{1} + \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a} \bar{\otimes}^2}{2!} + \frac{\mathbf{a} \bar{\otimes}^3}{3!} + \dots \quad (4.38)$$

Dito isto, e identificando E com o conjunto $\{(0, v, 0, \dots, 0) \in T_0^n(E) : v \in E\}$ podemos definir os seguintes conjuntos:

$$L^n(E) = E \oplus [E, E] \oplus [E, [E, E]] \oplus \dots \subset T_0^n(E) \quad (4.39)$$

o qual é uma subálgebra de Lie de $T_0^n(E)$ e

$$G^n(E) = \exp(L^n(E)) \quad (4.40)$$

o qual é um grupo de Lie, sendo $L^n(E)$ a sua álgebra de Lie associada.

Como já foi visto na Proposição 4.1.5, dado $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ o n -levantamento de Lyons $S_n(X): J \rightarrow T^n(E)$ é a única solução da equação diferencial

$$dL_t = \mathcal{L}(L_t) dX_t, \quad \text{com } L_0 = \mathbf{1} \quad (4.41)$$

onde $\mathcal{L}: T^n(E) \rightarrow \mathcal{L}(E, T^n(E))$ é dada por

$$\mathcal{L}(a_0, \dots, a_n)(x) = (0, a_0 \otimes x, \dots, a_{n-1} \otimes x) = (a_0, \dots, a_n) \bar{\otimes} (0, x, 0, \dots, 0). \quad (4.42)$$

Note que para cada $\mathbf{a} \in T^n(E)$ tem-se que $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ é uma transformação linear, logo dado uma base $B = \{v_1, \dots, v_d\}$ do espaço vetorial E , se $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d$ então

$$\mathcal{L}(\mathbf{a})(x) = \lambda_1 \mathcal{L}(\mathbf{a})(v_1) + \dots + \lambda_d \mathcal{L}(\mathbf{a})(v_d). \quad (4.43)$$

Considerando as aplicações $\mathcal{L}_i: T^n(E) \rightarrow T^n(E)$, com $i = 1, \dots, d$, dadas por

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{a}) = \mathcal{L}(\mathbf{a})(v_i) \quad (4.44)$$

segue que a equação diferencial acima pode ser reescrita como o sistema de equações diferenciais

$$dL_t = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(L_t) dX_t^i, \quad \text{com } L_0 = \mathbf{1} \quad (4.45)$$

onde cada X^i , com $i = 1, \dots, d$, representa uma coordenada do caminho $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ em relação a base B , isto é, $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)_B$.

Teorema 4.2.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Se $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ então o n -levantamento de Lyons $S_n(X)$ toma valores no grupo de Lie $G^n(E)$, isto é,*

$$S_n(X)_t \in G^n(E), \quad \forall t \in J. \quad (4.46)$$

Em particular,

$$\mathbf{S}_n(\mathcal{V}^1(J, E)) \subset G^n(E). \quad (4.47)$$

Demonstração: Como já foi dito o caminho $S_n(X): J \rightarrow T^n(E)$ é a única solução do sistema de equações diferenciais

$$dL_t = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(L_t) dX_t^i, \quad \text{com } H_0 = \mathbf{1} \in G^n(E) \quad (4.48)$$

onde cada X^i , com $i = 1, \dots, d$, representa uma coordenada do caminho $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$ em relação a uma base $B = \{v_1, \dots, v_d\}$ de E . Lembremos que $G^n(E)$ é um grupo de Lie, e portanto uma variedade. Se $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d\}$ forem campos de vetores tangentes a variedade $G^n(E)$, então qualquer solução de um sistema de equações diferenciais dada por estes campos de vetores e com condição inicial em um ponto de $G^n(E)$ permanece ao longo do tempo em $G^n(E)$. Mostremos que os campos de vetores $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ são tangentes a variedade $G^n(E)$, logo

$$S_n(X)_t \in G^n(E), \quad \forall t \in J. \quad (4.49)$$

De fato, considere para cada $\mathbf{g} \in G^n(E)$, a aplicação $m_{\mathbf{g}}: G^n(E) \rightarrow G^n(E)$ dada por $m_{\mathbf{g}}(\mathbf{h}) = \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}$. Temos que a derivada $D(m_{\mathbf{g}})|_{\mathbf{1}}: T_{\mathbf{1}}G^n(E) \rightarrow T_{\mathbf{g}}G^n(E)$ é dada por $D(m_{\mathbf{g}})|_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{x}$. Para cada $i = 1, \dots, d$, denote $\mathbf{v}_i = (0, v_i, 0, \dots, 0) \in T^n(E)$ e note que na verdade $\mathbf{v}_i \in L^n(E) = T_{\mathbf{1}}G^n(E)$, logo

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{v}_i = D(m_{\mathbf{g}})|_{\mathbf{1}}(\mathbf{v}_i) \in T_{\mathbf{g}}G^n(E), \quad \forall \mathbf{g} \in G^n(E), \quad (4.50)$$

ou seja, cada \mathcal{L}_i é um campo tangente a $G^n(E)$ como queríamos.

Por fim $S_n(X)_T = \mathbf{S}_n(X)$ e daí segue como caso particular do que provamos acima que $\mathbf{S}_n(X) \in G^n(E)$, donde decorre que

$$\mathbf{S}_n(\mathcal{V}^1(J, E)) \subset G^n(E). \quad (4.51)$$

□

O teorema de Chow (veja P.Friz [5] página 10) diz que para todo $\mathbf{g} \in G^n(E)$ existe um caminho $X: J \rightarrow E$ Lipschitz linear por partes (e portanto $X \in \mathcal{V}^1(J, E)$) tal que $\mathbf{g} = \mathbf{S}_n(X)$. Logo, segue do Teorema de Chow que

$$G^n(E) \subset \mathbf{S}_n(\mathcal{V}^1(J, E)). \quad (4.52)$$

Assim concluímos, a partir das expressões (4.47) e (4.52) que a imagem da aplicação assinatura truncada $\mathbf{S}_n: \mathcal{V}^p(J, E) \rightarrow T^n(E)$ coincide com o grupo de Lie $G^n(E)$, ou seja,

$$\mathbf{S}_n(\mathcal{V}^1(J, E)) = G^n(E). \quad (4.53)$$

4.3 Métrica de Carnot-Caratheodory

Definição 4.3.1. Considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e E um espaço de Banach sobre \mathbb{R} . A aplicação $\delta_\lambda: T^n(E) \rightarrow T^n(E)$ dada por

$$\delta_\lambda(g_0, g_1, \dots, g_n) = (g_0, \lambda^1 g_1, \dots, \lambda^n g_n) \quad (4.54)$$

é chamada *aplicação de dilatação*.

Se $X \in \mathcal{V}^p(J, E)$, com $p \in [1, 2)$, decorre diretamente da definição de assinatura de um caminho que

$$S_n(\lambda X)_{s,t} = \delta_\lambda(S_n(X)_{s,t}). \quad (4.55)$$

Definição 4.3.2. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão finita. Uma aplicação contínua $\|\cdot\|: G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dita uma *norma homogênea* se satisfaz as seguintes condições:

- i) $\|\mathbf{g}\| = 0$ se, e somente se, $\mathbf{g} = \mathbf{1}$
- ii) $\|\cdot\|$ é homogênea com respeito a aplicação de dilatação δ_λ , isto é, $\|\delta_\lambda \mathbf{g}\| = |\lambda| \|\mathbf{g}\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uma norma homogênea é dita *simétrica* se $\|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{g}^{-1}\|$. Uma norma homogênea é dita *sub-aditiva* se $\|\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}\| \leq \|\mathbf{g}\| + \|\mathbf{h}\|$.

Se $\|\cdot\|: G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma norma homogênea não-simétrica, seque que a aplicação $\mathbf{g} \mapsto \|\mathbf{g}\| + \|\mathbf{g}^{-1}\|$ é uma norma homogênea simétrica. Além disso, a propriedade de sub-aditividade é preservada sob tal simetrização.

Exemplo 4.3.3. A aplicação contínua $\|\cdot\|: G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|(1, g_1, \dots, g_n)\| = \max\{(\|g_k\|_{E^{\otimes k}})^{1/k} : k = 1, \dots, n\} \quad (4.56)$$

é uma norma homogênea.

Proposição 4.3.4. Se $\|\cdot\|: G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma norma homogênea sub-aditiva e simétrica então aplicação $d: G^n(E) \times G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\| \quad (4.57)$$

é uma métrica invariante a esquerda.

Demonstração: Primeiramente, usando a propriedade i) da definição de norma homogênea temos que

$$d(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{h}.$$

Segue do fato de que a norma homogênea é simétrica que

$$d(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\| = \|(\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h})^{-1}\| = \|\mathbf{h}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{g}\| = d(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

e usando o fato de que a norma homogênea é sub-aditiva temos que

$$d(\mathbf{g}, \mathbf{k}) = \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{k}\| = \|(\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}) \bar{\otimes} (\mathbf{h}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{k})\| \leq \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{k}\| = d(\mathbf{g}, \mathbf{h}) + d(\mathbf{h}, \mathbf{k}).$$

Todos os fatos concluídos acima, junto como o fato de que a aplicação d assume valores positivos, implica que d é uma métrica.

Por fim, temos que

$$d(\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}, \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{k}) = \|(\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h})^{-1} \bar{\otimes} (\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{k})\| = \|\mathbf{h}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{k}\| = \|\mathbf{h}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{k}\| = d(\mathbf{h}, \mathbf{k}),$$

ou seja, d é invariante a esquerda. \square

Seja $\mathbf{g} \in G^n(E)$ e considere o conjunto

$$\ell_{\mathbf{g}} = \left\{ \int_0^T \|dX_u\|_E : X \in \mathcal{V}_0^1(J, E) \text{ e } \mathbf{S}_n(X) = \mathbf{g} \right\} \quad (4.58)$$

onde

$$\int_0^T \|dX_u\|_E = \lim_{\substack{|D| \rightarrow 0 \\ D \in \mathcal{P}([0, T])}} \sum_{t_i \in D} \|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\|_E. \quad (4.59)$$

Para cada $\mathbf{g} \in G^n(E)$ existe $\lambda \in \ell_{\mathbf{g}}$ tal que $\lambda = \inf \ell_{\mathbf{g}}$. Em outras palavras, o conjunto $\ell_{\mathbf{g}}$ admite mínimo (veja P. Friz [5] página 11).

Proposição 4.3.5. *A aplicação $\|\cdot\|_{cc}: G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\|\mathbf{g}\|_{cc} = \inf \ell_{\mathbf{g}} = \min \ell_{\mathbf{g}} \quad (4.60)$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\|\mathbf{g}\|_{cc} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{g} = \mathbf{1}$.
- ii) *homogeneidade:* $\|\delta_{\lambda} \mathbf{g}\|_{cc} = |\lambda| \|\mathbf{g}\|_{cc}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- iii) *simetria:* $\|\mathbf{g}\|_{cc} = \|\mathbf{g}^{-1}\|_{cc}$.
- iv) *sub-aditividade:* $\|\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} \leq \|\mathbf{g}\|_{cc} + \|\mathbf{h}\|_{cc}$.
- v) $|\|\mathbf{g}\|_{cc} - \|\mathbf{h}\|_{cc}| \leq \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc}$.
- vi) *continuidade:* $\|\cdot\|_{cc}$ é contínua.

Demonstração: i) Dado $\mathbf{g} \in G^n(E)$, existe $X \in \mathcal{V}_0^1(J, E)$ tal que $\mathbf{S}_n(X) = \mathbf{g}$ e $\int_0^T \|dX_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc}$. Portanto,

$$\|\mathbf{g}\|_{cc} = 0 \Leftrightarrow \int_0^T \|dX_u\|_E = 0 \Leftrightarrow X \text{ é constante} \Leftrightarrow \mathbf{S}_n(X) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{1}.$$

ii) Se $\lambda = 0$ então vale que $\|\delta_\lambda \mathbf{g}\|_{cc} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{g}\|_{cc}$. Suponhamos que $\lambda \neq 0$. Seja $X \in \mathcal{V}_0^1(J, E)$ tal que $\mathbf{S}_n(X) = \mathbf{g}$ e $\int_0^T \|dX_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc}$. Temos que $\mathbf{S}_n(\lambda X) = \delta_\lambda(\mathbf{S}_n(X)) = \delta_\lambda(\mathbf{g})$. Isto implica que

$$\|\delta_\lambda(\mathbf{g})\|_{cc} \leq \int_0^T \|d(\lambda X_u)\|_E = |\lambda| \int_0^T \|dX_u\|_E = |\lambda| \|\mathbf{g}\|_{cc}.$$

A desigualdade oposta segue substituindo λ por $1/\lambda$ e \mathbf{g} por $\delta_\lambda(\mathbf{g})$ na desigualdade acima.

iii) Dado $\mathbf{g} \in G^n(E)$, existe $X \in \mathcal{V}_0^1(J, E)$ tal que $\mathbf{S}_n(X) = \mathbf{g}$ e $\int_0^T \|dX_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc}$. Temos que $\mathbf{S}_n(X^{-1}) = (\mathbf{S}_n(X))^{-1} = \mathbf{g}^{-1}$. Isto implica que

$$\|\mathbf{g}^{-1}\|_{cc} \leq \int_0^T \|dX_u^{-1}\|_E = \int_0^T \|dX_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc}.$$

A desigualdade oposta segue substituindo \mathbf{g} por \mathbf{g}^{-1} na desigualdade acima.

iv) Dados $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in G^n(E)$, existem $X, Y \in \mathcal{V}_0^1(J, E)$ tais que $\mathbf{S}_n(X) = \mathbf{g}$, $\mathbf{S}_n(Y) = \mathbf{h}$, $\int_0^T \|dX_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc}$ e $\int_0^T \|dY_u\|_E = \|\mathbf{h}\|_{cc}$. Decorre do teorema de Chen generalizado, ou mais especificamente do Corolário 4.1.10, que $\mathbf{S}_n(X * Y) = \mathbf{S}_n(X) \bar{\otimes} \mathbf{S}_n(Y) = \mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} &\leq \int_0^T \|d(X * Y)_u\|_E = \int_0^{T/2} \|d(X * Y)_u\|_E + \int_{T/2}^T \|d(X * Y)_u\|_E \\ &= \int_0^T \|dX_u\|_E + \int_0^T \|dY_u\|_E = \|\mathbf{g}\|_{cc} + \|\mathbf{h}\|_{cc}. \end{aligned}$$

v) Usando o item iv) temos que

$$\|\mathbf{h}\|_{cc} = \|\mathbf{g} \bar{\otimes} \mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} \leq \|\mathbf{g}\|_{cc} + \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc}$$

donde segue que

$$-\|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} \leq \|\mathbf{g}\|_{cc} - \|\mathbf{h}\|_{cc}. \quad (4.61)$$

Por outro lado, usando o item iv) temos que

$$\|\mathbf{g}^{-1}\|_{cc} = \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h} \bar{\otimes} \mathbf{h}^{-1}\|_{cc} \leq \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} + \|\mathbf{h}^{-1}\|_{cc}$$

donde decorre, usando o item iii), que

$$\|\mathbf{g}\|_{cc} - \|\mathbf{h}\|_{cc} \leq \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc}. \quad (4.62)$$

Portanto, segue de (4.61) e (4.62) que

$$|\|\mathbf{g}\|_{cc} - \|\mathbf{h}\|_{cc}| \leq \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc}.$$

vi) Primeiramente mostraremos a continuidade no elemento neutro $\mathbf{1}$ de $G^n(E)$.

Considere uma seqüência $\{\mathbf{h}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G^n(E)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^{(k)} - \mathbf{1}\|_{T^n(E)} = 0$. Então $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}_i^{(k)}\|_{E^{\otimes i}} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$ e decorre disto e do teorema de Chow que para cada

$k \in \mathbb{N}$ existe um caminho $X^{(k)} : J \rightarrow E$ Lipschitz linear por partes tal que $S_n(X^{(k)}) = \mathbf{h}^{(k)}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^T dX_u^{(k)} \right\|_E = 0$

Assim

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^{(k)}\|_{cc} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|dX_u^{(k)}\|_E = 0$$

e portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^{(k)}\|_{cc} = 0 = \|\mathbf{1}\|_{cc},$$

isto é, $\|\cdot\|$ é contínua em $\mathbf{1}$.

Agora, sejam $\mathbf{g} \in G^n(E)$ e $\{\mathbf{g}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G^n(E)$ uma sequência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^{(k)} - \mathbf{g}\|_{T^n(E)} = 0$. Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} \|((\mathbf{g}^{(k)})^{-1} \otimes \mathbf{g}) - \mathbf{1}\|_{T^n(E)} = 0$, o que implica $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(\mathbf{g}^{(k)})^{-1} \otimes \mathbf{g}\|_{cc} = \|\mathbf{1}\|_{cc} = 0$ e daí usando o item v) temos que

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^{(k)}\|_{cc} - \|\mathbf{g}\|_{cc} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(\mathbf{g}^{(k)})^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{g}\|_{cc} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^{(k)}\|_{cc} = \|\mathbf{g}\|_{cc},$$

ou seja, $\|\cdot\|$ é contínua em \mathbf{g} . □

Concluimos da proposição anterior que aplicação $\|\cdot\|_{cc} : G^n(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|\mathbf{g}\|_{cc} = \inf \ell_{\mathbf{g}} = \min \ell_{\mathbf{g}} \tag{4.63}$$

é uma norma homogênea simétrica e sub-aditiva. Logo, decorre da Proposição 4.3.4 que

$$d_{cc}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{g}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{h}\|_{cc} \tag{4.64}$$

é uma métrica invariante a esquerda em $G^n(E)$. Esta métrica é chamada *métrica de Carnot-Caratheodory*.

4.4 Espaço dos Caminhos Rugosos

Dado um caminho $\mathbf{X} : J \rightarrow G^n(E)$, denotaremos $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_s^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{X}_t$. Em tudo o que segue o grupo $G^n(E)$ estará munido com a topologia dada pela métrica de Carnot-Caratheodory. Sendo assim, para $p \in [1, \infty)$, a *p-variância* de um caminho contínuo $\mathbf{X} : J \rightarrow G^n(E)$ com respeito ao subintervalo $[a, b]$ do domínio J é dada por

$$\|\mathbf{X}\|_{p,[a,b]} = \left(\sup_{D \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_{i+1}}, \mathbf{X}_{t_i})^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{D \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{t_i \in D} \|\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.65}$$

Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C(J, G^n(E))$ considere

$$d_{p\text{-var}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sup_{D \in \mathcal{P}(J)} \sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.66)$$

Com o objetivo de simplificar a notação em todo o texto denotaremos $d_{p\text{-var}}$ simplesmente por d_p . Vale ressaltar que $d_p(\mathbf{1}, \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{p,J}$. A aplicação $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é positiva, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 &\Leftrightarrow d_{cc}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t}) = 0, \quad \forall s, t \in J \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}_{0,t} = \mathbf{Y}_{0,t}, \quad \forall t \in J \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_0 \bar{\otimes} \mathbf{Y}_0^{-1}) \bar{\otimes} \mathbf{Y}_t, \quad \forall t \in J, \end{aligned}$$

ou seja, se $d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ então os caminhos \mathbf{X} e \mathbf{Y} podem não ser iguais, mas é certo que um é uma translação do outro por uma constante, a saber, $(\mathbf{X}_0 \bar{\otimes} \mathbf{Y}_0^{-1}) \in G^n(E)$. Portanto, $d_{p\text{-var}}$ não é uma métrica para conjunto $\mathcal{V}^p(J, G^n(E))$, entretanto, $d_{p\text{-var}}$ é uma métrica para o conjunto

$$\mathcal{V}_1^p(J, G^n(E)) = \{\mathbf{X} \in \mathcal{V}^p(J, G^n(E)) : \mathbf{X}_0 = \mathbf{1}\}. \quad (4.67)$$

Além disso,

$$\bar{d}_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_{t \in J} d_{cc}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t) + d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (4.68)$$

é uma métrica genuína para o conjunto $\mathcal{V}^p(J, G^n(E))$.

Proposição 4.4.1. *Seja $1 \leq p < q$. Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}^p(J, G^n(E))$ então*

$$d_q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq \left(\sup_{0 \leq s < t \leq T} d_{cc}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t}) \right)^{1-p/q} (\|\mathbf{X}\|_{p,J} + \|\mathbf{Y}\|_{p,J})^{p/q}. \quad (4.69)$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^q &= \sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^p d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^{q-p} \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s < t \leq T} d_{cc}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t}) \right)^{q-p} \sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^p \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s < t \leq T} d_{cc}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t}) \right)^{q-p} \sum_{t_i \in D} \|\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc}^p \end{aligned}$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$.

Usando as propriedades de sub-aditividade e simetria de $\|\cdot\|_{cc}$ vistas na Proposição 4.3.5 tem-se

$$\sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^q \leq \left(\sup_{0 \leq s < t \leq T} d_{cc}(\mathbf{X}_{s,t}, \mathbf{Y}_{s,t}) \right)^{q-p} \sum_{t_i \in D} (\|\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc} + \|\mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc})^p$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$.

Usando a desigualdade $(\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, segue que

$$\sum_{t_i \in D} d_{cc}(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}, \mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}})^q \leq \left(\sup_{0 \leq s < t \leq T} d_{cc}(\mathbf{X}_{s, t}, \mathbf{Y}_{s, t}) \right)^{q-p} \left(\sum_{t_i \in D} \|\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{t_i \in D} \|\mathbf{Y}_{t_i, t_{i+1}}\|_{cc}^p \right)^{\frac{1}{p}})^p$$

para todo $D \in \mathcal{P}(J)$, donde resulta a desigualdade desejada. \square

Proposição 4.4.2. *Seja $1 \leq p < q$. Se $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $C(J, G^n(E))$, a qual é equicontínua, limitada e $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\mathbf{X}_k\|_{p, J} < \infty$, então existe $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^p(J, G^n(E))$ e uma subseqüência $(\mathbf{X}_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d_\infty(\mathbf{X}_{k_l}, \mathbf{X}) = 0 \quad (4.70)$$

e

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{d}_q(\mathbf{X}_{k_l}, \mathbf{X}) = 0. \quad (4.71)$$

Demonstração: Se $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência equicontínua e limitada em $C(J, G^n(E))$, segue que do teorema de Arzelá-Ascoli que existe $\mathbf{X} \in C(J, G^n(E))$ e uma subseqüência $(\mathbf{X}_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbf{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{l \rightarrow \infty} d_\infty(\mathbf{X}_{k_l}, \mathbf{X}) = 0$.

Usando o item iii) da Proposição 1.1.5 e a hipótese que $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\mathbf{X}_k\|_{p, J} < \infty$ temos que $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^p(J, G^n(E))$.

Por fim, decorre da Proposição 4.4.1 que $\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{d}_q(\mathbf{X}_{k_l}, \mathbf{X}) = 0$. \square

Definição 4.4.3. *Seja $p \in [1, \infty)$. Definimos $\mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^n(E))$ como o conjunto dos caminhos contínuos $\mathbf{X}: J \rightarrow G^n(E)$, com $\mathbf{X}_0 = \mathbf{1}$, para o qual existe um seqüência de caminhos suaves $X_k: J \rightarrow E$ tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(\mathbf{X}, S_n(X_k)) = 0. \quad (4.72)$$

Em outras palavras,

$$\mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^n(E)) = \overline{S_n(C^\infty(J, E))}^{d_p} \quad (4.73)$$

onde $\overline{S_n(C^\infty(J, E))}^{d_p}$ denota o fecho do conjunto imagem $S_n(C^\infty(J, E))$ em relação a topologia induzida pela métrica d_p em $\mathcal{V}_1^p(J, G^n(E))$.

Outro conjunto a ser considerado é o conjunto

$$\mathcal{V}^{0,p}(J, G^n(E)) = \{\mathbf{X} \in \mathcal{V}^p(J, G^n(E)) : \mathbf{X}^1 \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^n(E))\} \quad (4.74)$$

onde $\mathbf{X}^1: J \rightarrow G^n(E)$ é dado por

$$\mathbf{X}_t^1 = \mathbf{X}_0^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{X}_t. \quad (4.75)$$

Segue da continuidade da aplicação de Lyons $S_n: \mathcal{V}^1(J, E) \rightarrow \mathcal{V}^1(J, G^n(E))$ que

$$S_n(\mathcal{V}^{0,1}(J, E)) \subset \mathcal{V}_1^{0,1}(J, G^n(E)). \quad (4.76)$$

Proposição 4.4.4. *Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita e $p > 1$. Se $\Omega \subset \mathcal{V}_1^1(J, G^n(E))$ e $\mathcal{V}_1^{0,1}(J, G^n(E)) \subset \overline{\Omega}^{d_1}$, então*

$$\overline{\Omega}^{d_p} = \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^n(E)). \quad (4.77)$$

Demonstração: A prova desta proposição é similar a prova da Proposição 1.2.8. \square

Um caso particular da Proposição acima é que

$$\overline{\mathcal{V}_1^1(J, G^n(E))}^{d_p} = \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^n(E)). \quad (4.78)$$

O teorema de Lyons (veja [17], [18] e [5]) diz que se $p \in [1, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $n \geq p$, então a aplicação $\pi_{n,p}: \mathcal{V}^p(J, G^n(E)) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, G^{\lfloor p \rfloor}(E))$ dada por

$$\pi_{n,p}(1, \mathbf{X}^1(\cdot), \dots, \mathbf{X}^n(\cdot)) = (1, \mathbf{X}^1(\cdot), \dots, \mathbf{X}^{\lfloor p \rfloor}(\cdot)) \quad (4.79)$$

é bijetiva e a partir disto tem-se a seguinte definição.

Definição 4.4.5. Seja $p \in [1, \infty)$. O conjunto $\mathcal{V}^p(J, G^{\lfloor p \rfloor}(E))$ é chamado *espaço dos caminhos p -rugosos* e o conjunto $\mathcal{V}^{0,p}(J, G^{\lfloor p \rfloor}(E))$ é chamado *espaço dos caminhos p -rugosos geométricos*.

Para finalizar esta seção, daremos um exemplo de caminho p -rugoso, o qual será construído a partir de um movimento Browniano. Seja $B = (B^1, \dots, B^d)$ um movimento Browniano em \mathbb{R}^d .

Definição 4.4.6. Seja $t \in J$ e $i, j \in \{1, \dots, d\}$. A *área de Levy* é a matriz $A_t = (A_t^{i,j})_{d \times d}$, onde

$$A_t^{i,j} = \frac{1}{2} \left(\int_0^t B_s^i \circ dB_s^j - \int_0^t B_s^j \circ dB_s^i \right) \quad (4.80)$$

e as integrais $\int \circ d$ consideradas são integrais no sentido de Stratonovich.

Se $X: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um caminho Lipschitz iniciado em $0 \in \mathbb{R}^d$ (conseqüentemente, $X \in \mathcal{V}_0^1(J, \mathbb{R}^d)$) então o seu 2-levantamento de Lyons é dado por

$$S_2(X)_t = \exp(X_t + a_t), \quad (4.81)$$

onde $X_t + a_t^{i,j}$ denota o elemento $(0, X_t, a_t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $a_t = (a_t^{i,j})_{d \times d}$,

$$a_t^{i,j} = \frac{1}{2} \left(\int_0^t X_s^i dX_s^j - \int_0^t X_s^j dX_s^i \right) \quad (4.82)$$

e as integrais consideradas são integrais no sentido de Young. Para verificarmos que o levantamento de Lyons satisfaz as igualdade acima, observe primeiramente que se $\mathbf{g} = (0, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) \in T_0^2(E)$, então

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{g}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{g}^{\otimes k} \\ &= (1, 0, 0) + (0, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) + \frac{1}{2} \cdot (0, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) \bar{\otimes} (0, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) + \dots \\ &= (1, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) + \frac{1}{2} \cdot (0, 0, \mathbf{g}^1 \otimes \mathbf{g}^1) \\ &= (1, \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2 + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{g}^1 \otimes \mathbf{g}^1)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \exp(0, X_t, a_t) &= (1, X_t, a_t + \frac{1}{2} \cdot (X_t \otimes X_t)) \\ &= (1, (X_t^1, \dots, X_t^d), (a_t^{i,j})_{d \times d} + \frac{1}{2} \cdot (X_t^i \cdot X_t^j)_{d \times d}) \\ &= (1, (X_t^1, \dots, X_t^d), \frac{1}{2} \cdot (\int_0^t X_s^i dX_s^j - \int_0^t X_s^j dX_s^i)_{d \times d} + \frac{1}{2} \cdot (\int_0^t X_s^i dX_s^j + \int_0^t X_s^j dX_s^i)_{d \times d}) \\ &= (1, (X_t^1, \dots, X_t^d), (\int_0^t X_s^i dX_s^j)_{d \times d}) \\ &= (1, \int_0^t dX_{u_1}, \dots, \iint_{0 \leq u_1 < u_2 \leq t} dX_{u_1} \otimes dX_{u_2}) \\ &= S_2(X)_t. \end{aligned}$$

Definição 4.4.7. Seja $B = (B^1, \dots, B^d)$ um movimento Browniano em \mathbb{R}^d . O movimento Browniano “enhanced” associado ao movimento Browniano B é o processo estocástico \mathbf{B} tomando valores em $G^2(\mathbb{R}^d)$ dado por

$$\mathbf{B}_t = \exp(B_t + A_t) = \exp(0, B_t, A_t), \quad (4.83)$$

onde A_t é a área de Levy associada ao movimento Browniano B .

Como $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_t\}_{t \geq 0}$ é um processo tomando valores em $G^2(\mathbb{R}^d)$, então para cada $t \geq 0$ fixado, $\mathbf{B}_t: \Omega \rightarrow G^2(\mathbb{R}^d)$ é uma variável aleatória. Para quase todo $\omega \in \Omega$, tem-se que $\mathbf{B}(\omega): J \rightarrow G^2(\mathbb{R}^d)$ é um caminho p -rugoso geométrico, com $p \in (2, 3]$ (veja P. Friz [5], página 33), ou seja, $\mathbf{B}(\omega) \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d))$ para quase todo $\omega \in \Omega$.

4.5 Equações Dirigidas por Caminhos Rugosos

Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais de dimensões finitas, $1 \leq p < \gamma$ e $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Considere todas as equações do tipo

$$dY = f(Y) dX \quad (4.84)$$

com $X \in \mathcal{V}^1(J, E_1)$ e condição inicial $u \in E_2$.

Como já foi visto nos capítulos anteriores, fixado $u \in E_2$, a solução de uma equação do tipo (4.84) associada a cada $X \in \mathcal{V}^1(J, E_1)$ é caminho em $\mathcal{V}^1(J, E_2)$ da forma

$$Y_t = u + \int_0^t f(Y_s) dX_s \quad (4.85)$$

e a aplicação de Itô $I_f^u: \mathcal{V}^1(J, E_1) \rightarrow \mathcal{V}^1(J, E_2)$ dada por $I_f^u(X) = Y$ é diferenciável e portanto contínua. Logo, dados $X \in \mathcal{V}^1(J, E_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\bar{d}_1(X, Z) < \delta \Rightarrow \bar{d}_1(I_f^u(X), I_f^u(Z)) < \epsilon. \quad (4.86)$$

Visto que $\mathcal{V}^1(J, E_2) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$ podemos considerar I_f^u com contra-domínio $\mathcal{V}^p(J, E_2)$ e ainda assim temos que $I_f^u: \mathcal{V}^1(J, E_1) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2)$ permanece contínua em relação a topologia induzida pela \bar{d}_p em $\mathcal{V}^p(J, E_2)$, uma vez que

$$\bar{d}_p(I_f^u(X), I_f^u(Z)) = \|I_f^u(X) - I_f^u(Z)\|_{p,J} \leq \|I_f^u(X) - I_f^u(Z)\|_{1,J} = \bar{d}_1(I_f^u(X), I_f^u(Z)).$$

Proposição 4.5.1. *Sejam (E, d_1) um espaço métrico, (W, d_2) um espaço métrico completo e $V \subset E$. Se $g: V \rightarrow W$ é uniformemente contínua em subconjuntos limitados de V , então existe uma única aplicação contínua $\bar{g}: \bar{V} \rightarrow W$ tal que $\bar{g}|_V = g$.*

Demonstração: Para cada $v \in \bar{V} \setminus V$ existe uma seqüência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$. Como $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente, segue que $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é um subconjunto limitado de V , e daí como $g: V \rightarrow W$ é uniformemente contínua em conjuntos limitados segue dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_2(g(u), g(w)) < \epsilon$, para todo $u, w \in \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $d_1(u, w) < \delta$.

Como $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy (pois é convergente), então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal

$$d_1(v_k, v_l) < \delta, \quad \forall k, l \geq k_0.$$

Desta forma, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal

$$d_2(g(v_k)g(v_l)) < \epsilon, \quad \forall k, l \geq k_0,$$

isto é, $\{g(v_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, e como W é completo, então $\lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k) \in W$.

Defina

$$\bar{g}(v) = \begin{cases} g(v), & \text{se } v \in V \\ \lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k), & \text{se } v \in \bar{V} \setminus V \end{cases}$$

onde $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente para v .

Mostremos que \bar{g} está bem definida, isto é que se $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ é outra seqüência tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = v \text{ então } \lim_{k \rightarrow \infty} g(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k).$$

Coloque $x = \lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k)$ e $y = \lim_{k \rightarrow \infty} g(u_k)$. Seja $\epsilon > 0$ e considere $B(v, 1)$ a bola de centro v e raio 1. Por hipótese g é uniformemente contínua em $B(v, 1) \cap V$ e portanto existe $0 < \delta < 1$ tal que $d_2(g(u), g(w)) < \epsilon/3$ sempre que $d_1(u, w) < \delta$ e $u, w \in B(v, 1) \cap V$.

Como $v_k \rightarrow v$ então existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d_1(v, v_k) < \delta/2$, para todo $k \geq k_1$. Da mesma forma existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d_1(v, u_k) < \delta/2$, para todo $k \geq k_2$. Então para todo $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ temos que $d_1(v_k, u_k) < \delta$, o que implica que $d_2(g(v_k), g(u_k)) < \epsilon/3$.

Por outro lado, existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que $d_2(x, g(v_k)) < \epsilon/3$, para todo $k \geq k_3$, pois $g(v_k)$ converge para x . Analogamente existe $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que $d_2(y, g(u_k)) < \epsilon/3$, para todo $k \geq k_3$, pois $g(u_k)$ converge para y .

Tomando $l \geq \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, segue

$$d_2(x, y) \leq d_2(x, g(v_l)) + d_2(g(v_l), g(u_l)) + d_2(g(u_l), y) \leq \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, então $d_2(x, y) = 0$ e portanto $x = y$.

Por fim, a continuidade de \bar{g} decorre da sua própria definição e a sua unicidade é de fácil verificação. \square

Temos que $C^\infty(J, E_1) \subset \mathcal{V}^1(J, E_1)$, logo

$$S_{[p]}(C^\infty(J, E_1)) \subset S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1)) \quad (4.87)$$

e conseqüentemente

$$\overline{S_{[p]}(C^\infty(J, E_1))}^{d_1} \subset \overline{S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1))}^{d_1}. \quad (4.88)$$

Em outras palavras, a inclusão

$$\mathcal{V}_1^{0,1}(J, G^{[p]}(E_1)) \subset \overline{S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1))}^{d_1} \quad (4.89)$$

é sempre válida, e disto resulta, usando a Proposição (4.4.4), que

$$\overline{S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1))}^{d_p} = \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1)). \quad (4.90)$$

Sejam $p \in [1, \infty)$ e $S_{[p]}: \mathcal{V}^1(J, E_1) \rightarrow \mathcal{V}^1(J, G^{[p]}(E_1))$ a aplicação de Lyons. Considere a aplicação $\mathbf{i}_f^u: S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1)) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2)$ dada por

$$\mathbf{i}_f^u(S_{[p]}(X)) = I_f^u(X). \quad (4.91)$$

Se $f \in Lip^{[p]+1}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, tem-se que a aplicação

$$\mathbf{i}_f^u: S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1)) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2) \quad (4.92)$$

é uniformemente contínua em subconjuntos limitados de seu domínio $S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1))$, com respeito a métrica d_p de $\mathcal{V}_1^p(J, G^{[p]}(E_1))$ (veja P. Friz [5], página 25).

Logo, decorre da Proposição 4.5.1 que $\mathbf{i}_f^u: S_{[p]}(\mathcal{V}^1(J, E_1)) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2)$ admite uma única extensão contínua

$$\mathbf{I}_f^u: \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1)) \rightarrow \mathcal{V}^p(J, E_2). \quad (4.93)$$

O domínio $\mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ da aplicação \mathbf{I}_f^u pode ser substituído por $\mathcal{V}^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}^1) \quad (4.94)$$

para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$, onde $\mathbf{X}^1: J \rightarrow G^n(E)$ é dado por $\mathbf{X}_t^1 = \mathbf{X}_0^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{X}_t$.

Definição 4.5.2. Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais de dimensões finitas, $p \in [1, \infty)$, $f \in Lip^{[p]+1}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$. A equação

$$\begin{cases} dY = f(Y) d\mathbf{X} \\ Y_0 = u \in E_2 \end{cases} \quad (4.95)$$

é chamada equação diferencial dirigida pelo caminho p -rugoso geométrico \mathbf{X} , ou simplesmente, *equação diferencial p -rugosa* dirigida por \mathbf{X} e a sua (única) solução é definida como sendo o caminho

$$\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) \in \mathcal{V}^p(J, E_2). \quad (4.96)$$

É importante salientar que da maneira como foram construídas as equações diferenciais rugosas, a solução de uma equação diferencial rugosa dirigida por $S_{[p]}(X)$, com $X \in \mathcal{V}^1(J, E_1)$, coincide com a solução da equação diferencial de Young dirigida por X , caso o campo f seja o mesmo para as duas equações.

Teorema 4.5.3 (Wong-Zakai). *Seja B um movimento Browniano em \mathbb{R}^d . Considere a equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich*

$$dY = f(Y) \circ dB, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e \quad (4.97)$$

onde $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$. Tal equação tem uma única solução contínua Y no intervalo J (a menos de indistinguibilidade).

Mais ainda, $I_f^y(B_{(k)})$ converge para Y em probabilidade e uniformemente no intervalo J , onde cada $I_f^y(B_{(k)})$ é a única solução da equação

$$\dot{Y} = f(Y) \dot{B}_{(k)}, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e \quad (4.98)$$

e $\{B_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de aproximações poligonais do movimento Browniano B em relação ao intervalo J .

Demonstração: Veja P. Friz [5], página 36. □

Proposição 4.5.4. *Seja B um movimento Browniano em \mathbb{R}^d e $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$. Então $\mathbf{I}_f^y(\mathbf{B})$ é uma versão da única solução da equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich*

$$dY = f(Y) \circ dB, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e. \quad (4.99)$$

Demonstração: Temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_2(B_k(\omega)), \mathbf{B}(\omega)) = 0$, para quase todo $\omega \in \Omega$, visto que $\mathbf{B}(\omega) \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d))$, com $p \in (2, 3]$, para quase todo $\omega \in \Omega$. Decorre da continuidade de \mathbf{I}_f^y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}_p(\mathbf{I}_f^y(S_2(B_k(\omega))), \mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega))) = 0 \quad (4.100)$$

para quase todo $\omega \in \Omega$, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_\infty(\mathbf{I}_f^y(S_2(B_k(\omega))), \mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega))) = 0 \quad (4.101)$$

para quase todo $\omega \in \Omega$.

Por outro lado, $\mathbf{I}_f^y(S_2(B_k(\omega))) = I_f^y((B_k(\omega)))$ e decorre do teorema de Wong-Zakai que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_\infty(\mathbf{I}_f^y(S_2(B_k(\omega))), Y(\omega)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_\infty(I_f^y((B_k(\omega))), Y(\omega)) = 0 \quad (4.102)$$

para quase todo $\omega \in \Omega$, onde Y é o único processo solução da equação

$$dY = f(Y) \circ dB, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e.$$

Portanto, $Y(\omega) = \mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega))$, para quase todo $\omega \in \Omega$. □

CAPÍTULO 5

HOMOTOPIA MONOTÔNICA ASSOCIADA A SISTEMAS RUGOSOS

Neste capítulo temos como objetivo estender os resultados de p -homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema de Young para o contexto de trajetórias provenientes de equações dirigidas por caminhos rugosos. Estas homotopias serão denominadas de homotopias rugosas. Além disso, neste capítulo é verificado que a homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema rugoso é preservada por conjugação de sistemas rugosos. Finalizamos este capítulo estabelecendo uma relação entre homotopia rugosa e homotopia entre trajetórias amostrais de um processo estocástico, o qual é solução de uma equação diferencial estocástica determinada pelo mesmo campo do sistema rugoso considerado.

5.1 Homotopia entre Trajetórias Dadas por Caminhos Rugosos

Começaremos esta seção definindo a noção de concatenação entre caminhos tomando valores em $G^n(E)$.

Definição 5.1.1. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C(J, G^n(E))$. A *concatenação contínua* entre os caminhos \mathbf{X} e \mathbf{Y} , denotada por $\mathbf{X} * \mathbf{Y}$, é o caminho

$$(\mathbf{X} * \mathbf{Y})_t = \begin{cases} \mathbf{X}_{2t}, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ (\mathbf{X}_T \bar{\otimes} \mathbf{Y}_0^{-1}) \bar{\otimes} \mathbf{Y}_{2t-T}, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases} . \quad (5.1)$$

Dizemos que um subconjunto de Δ de $C(J, G^n(E))$ é *fechado por concatenações contínuas* se para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Delta$ tem-se que $\mathbf{X} * \mathbf{Y} \in \Delta$.

Sejam E_1 um espaço vetorial de dimensão finita, E_2 um espaço de Banach, $p \in [1, \infty)$, $f \in Lip^{[p]+1}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, $\Delta \subset \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ um conjunto fechado por concatenações contínuas e reparametrizações positivas e $M \subset E_2$.

Dizemos que a tripla $\Lambda = (f, \Delta, M)$ representa um *sistema p -rugoso*. Para $u, v \in M$ definimos o conjunto

$$T(\Lambda, u, v) = \{\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) \in \mathcal{V}^p(J, E_2) : \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})(T) = v, \mathbf{X} \in \Delta \text{ e } \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})(J) \subset M\} \quad (5.2)$$

o qual denominamos de *conjunto das trajetórias do sistema p -rugoso Λ* .

Usaremos a notação $\mathbf{I}_\Lambda^u(\mathbf{X})$ para a trajetória $\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})$ de um sistema p -rugoso $\Lambda = (f, \Delta, M)$, pois com esta notação fica subentendido, pela definição do que é uma trajetória de Λ , que $\mathbf{I}_\Lambda^u(\mathbf{X}) \subset M$ e $X \in \Delta$.

Como $T(\Lambda, u, v) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$, consideraremos o conjunto $T(\Lambda, u, v)$ munido com a topologia induzida pela topologia de $\mathcal{V}^p(J, E_2)$, lembrando que a topologia de $\mathcal{V}^p(J, E_2)$ é a topologia proveniente da métrica \bar{d}_p .

Definição 5.1.2. Sejam $\alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v)$. Dizemos que α é *p -rugosamente homotópica* a β se existe um caminho contínuo $H: [0, 1] \rightarrow T(\Lambda, u, v)$ tal que $H(0) = \alpha$ e $H(1) = \beta$.

A aplicação H é chamada *homotopia p -rugosa* entre α e β e empregaremos a notação $\alpha \sim_p \beta$ ou $H: \alpha \sim_p \beta$ para dizer que α é *p -rugosamente homotópica* a β .

A relação \sim_p é uma relação de equivalência em $T(\Lambda, u) = \{\alpha \in T(\Lambda, u, v) : v \in M\}$ e o espaço quociente $T(\Lambda, u) / \sim_p$ é denotado por $\Upsilon(\Lambda, u)$.

Uma homotopia p -rugosa é basicamente um análogo da homotopia p -monotônica para trajetórias de equações diferenciais no sentido de Young. A diferença reside no fato de que as trajetórias de um sistema p -rugoso do tipo $\Lambda = (f, \Delta, M)$ são controladas por caminhos p -rugosos pertencentes ao conjunto $\Delta \subset \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$, enquanto as trajetórias de um sistema de Young com p -variação do tipo $\Sigma = (f, \Delta', M)$ são controladas por caminhos de p -variação finitas pertencentes ao conjunto $\Delta' \subset \mathcal{V}^p(J, E_1)$.

Proposição 5.1.3. *Sejam Λ um sistema p -rugoso e $\alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v)$. Se α é p -rugosamente homotópica a β , então existe uma aplicação contínua $L: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow M$ satisfazendo:*

- i) $L(t, 0) = \alpha_t$ e $L(t, 1) = \beta_t$, para todo $t \in J$.
- ii) $L^s \in T(\Lambda, u, v)$, para todo $s \in [0, 1]$, onde $L^s(t) = L(t, s)$.

Demonstração: A prova desta proposição é análoga a prova da Proposição 2.2.2. \square

De acordo com a proposição acima, se $\alpha \sim_p \beta$, então $\alpha \simeq \beta$, lembrando \simeq denota a relação de homotopia clássica. Entretanto, existem sistemas p -rugosos Λ , com $\alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v)$, tais que $\alpha \simeq \beta$, mas não existem aplicações contínuas $H: [0, 1] \rightarrow T(\Lambda, u, v)$ tais que $H: \alpha \sim_p \beta$.

Exemplo 5.1.4. Um exemplo que ilustra o comentário acima é o exemplo das trajetórias $\alpha(t) = (1, 0, 0)$ e $\beta(t) = (\cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T), 0)$ do sistema de Young $\Sigma = (f_A, \Delta, \mathbb{S}^2)$, onde f_A é dada pela expressão (2.9) e Δ é gerado por caminhos expressos em (2.11). Vimos que as trajetórias α e β são homotópicas no sentido clássico, mas não são 1-monotonicamente homotópicas. Tais trajetórias são também trajetórias do sistema 1-rugoso $\Lambda = (f_A, S_1(\Delta), \mathbb{S}^2)$, visto que $\Delta \subset \mathcal{V}^1(J, E_1)$ e conseqüentemente $I_{f_A}^u(Z) = \mathbf{I}_{f_A}^u(S_1(Z))$, para todo $Z \in \Delta$. Distto, resulta que α não é 1-rugosamente homotópica a β , pois se existisse uma homotopia 1-rugosa entre elas, esta homotopia também seria uma homotopia 1-monotônica, o que geraria uma contradição.

5.2 Concatenação entre Trajetórias Dirigidas por Caminhos Rugosos

Nesta seção apresentamos um resultado importante sobre concatenações entre soluções de equações diferenciais p -rugosas, isto é, equações do tipo $dY = f(Y) d\mathbf{X}$, onde $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$. A prova deste resultado no contexto equações rugosas exige um pouco mais de trabalho para ser realizada do que a prova de seu análogo no caso de sistemas de Young. Começamos com o seguinte lema.

Lema 5.2.1. *Sejam E um espaço de Banach e $X, Y \in \mathcal{V}^1(J, E)$. Temos que*

$$S_n(X) * S_n(Y) = S_n(X * Y). \quad (5.3)$$

Demonstração: Temos que

$$(S_n(X) * S_n(Y))_t = \begin{cases} S_n(X)_{2t}, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ (S_n(X)_{T \bar{\otimes} (S_n(Y)_0)^{-1}}) \bar{\otimes} S_n(Y)_{2t-T}, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

o que equivale a

$$(S_n(X) * S_n(Y))_t = \begin{cases} S_n(X)_{0,2t}, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ S_n(X)_{0,T} \bar{\otimes} S_n(Y)_{0,2t-T}, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}.$$

Computemos agora $S_n(X * Y)$. Primeiramente lembremos que

$$(X * Y)_{2t} = \begin{cases} X_t, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ Y_{2t-T} + X_T - Y_0, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}.$$

Seja $t \in [0, T/2]$. Então

$$\begin{aligned} S_n(X * Y)_t &= S_n(X * Y)_{0,t} \\ &= (1, \int_{0 \leq u_1 \leq t} d(X * Y)_{u_1}, \dots, \int \cdots \int_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq t} d(X * Y)_{u_1} \otimes \dots \otimes d(X * Y)_{u_n}) \\ &= (1, \int_{0 \leq u_1 \leq t} dX_{2u_1}, \dots, \int \cdots \int_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq t} dX_{2u_1} \otimes \dots \otimes dX_{2u_n}) \\ &= (1, \int_{0 \leq u_1 \leq 2t} dX_{u_1}, \dots, \int \cdots \int_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq 2t} dX_{u_1} \otimes \dots \otimes dX_{u_n}) \\ &= S_n(X)_{0,2t}. \end{aligned}$$

Agora consideremos $t \in [T/2, T]$. Notemos que

$$X * Y = [X \vee (Y \circ \varphi)] \circ \mu$$

onde $\varphi : [T, 2T] \rightarrow [0, T]$ é dado por $\varphi(t) = t - T$ e $\mu : [0, T] \rightarrow [0, 2T]$ é dado por $\mu(t) = 2t$, e disto decorre, usando o fato de que a assinatura de um caminho é invariante por reparametrizações e usando o Teorema de Chen, que

$$\begin{aligned} S_n(X * Y)_{0,t} &= S_n([X \vee (Y \circ \varphi)] \circ \mu)_{0,t} \\ &= S_n([X \vee (Y \circ \varphi)])_{\mu_0, \mu t} \\ &= S_n([X \vee (Y \circ \varphi)])_{0,2t} \\ &= S_n(X)_{0,T} \bar{\otimes} S_n(Y \circ \varphi)_{T,2t} \\ &= S_n(X)_{0,T} \bar{\otimes} S_n(Y)_{\varphi_T, \varphi_{2t}} \\ &= S_n(X)_{0,T} \bar{\otimes} S_n(Y)_{0,2t-T}. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_n(X * Y)_t = \begin{cases} S_n(X)_{0,2t}, & \text{se } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ S_n(X)_{0,T} \bar{\otimes} S_n(Y)_{0,2t-T}, & \text{se } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}.$$

Portanto,

$$S_n(X) * S_n(Y) = S_n(X * Y)$$

como queríamos. □

Agora apresentaremos o resultado central desta seção.

Teorema 5.2.2. *Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais de dimensão finita, $u \in E_2$, $p \in [1, \infty)$ e $f \in Lip^{[p]+1}(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ e $v = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X})(T)$, então*

$$\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) * \mathbf{I}_f^v(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X} * \mathbf{Y}). \quad (5.4)$$

Demonstração: Como $\mathbf{X} \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ então existe uma seqüência $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in C^\infty(J, E_1)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_{[p]}(X_k), \mathbf{X}) = 0$.

Da mesma forma, como $\mathbf{Y} \in \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^{[p]}(E_1))$ então existe uma seqüência $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in C^\infty(J, E_1)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_{[p]}(Y_k), \mathbf{Y}) = 0$.

Pela definição de \mathbf{I}_f restrita a elementos do conjunto $S_{[p]}(C^\infty(J, E_1))$ temos que

$$\mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k)) * \mathbf{I}_f^v(S_{[p]}(Y_k)) = I_f^u(X_k) * I_f^v(Y_k).$$

Segue do Teorema 2.1.1 que

$$I_f^u(X_k) * I_f^v(Y_k) = I_f^u(X_k * Y_k).$$

Mas

$$I_f^u(X_k * Y_k) = \mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k * Y_k))$$

e decorre do Lema 5.2.1 que

$$\mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k * Y_k)) = \mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k) * S_{[p]}(Y_k)).$$

Portanto,

$$\mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k)) * \mathbf{I}_f^v(S_{[p]}(Y_k)) = \mathbf{I}_f^u(S_{[p]}(X_k) * S_{[p]}(Y_k)). \quad (5.5)$$

Por fim, usando a continuidade das aplicações \mathbf{I}_f^u e \mathbf{I}_f^v e o fato que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_{[p]}(X_k), \mathbf{X}) = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_{[p]}(Y_k), \mathbf{Y}) = 0$ (e conseqüentemente que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(S_{[p]}(X_k) * S_{[p]}(Y_k), \mathbf{X} * \mathbf{Y}) = 0$), resulta tomando limite quando $k \rightarrow \infty$ na equação (5.5) que

$$\mathbf{I}_f^u(\mathbf{X}) * \mathbf{I}_f^v(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_f^u(\mathbf{X} * \mathbf{Y})$$

como queríamos. □

Corolário 5.2.3. *Seja Λ um sistema de p -rugoso. Se $I_\Lambda^u(\mathbf{X}) \in T(\Lambda, u, v)$ e $I_\Lambda^v(\mathbf{Y}) \in T(\Lambda, v, w)$ então*

$$I_\Lambda^u(\mathbf{X}) * I_\Lambda^v(\mathbf{Y}) = I_\Lambda^u(u, \mathbf{X} * \mathbf{Y}) \quad (5.6)$$

e portanto

$$I_\Lambda^u(\mathbf{X}) * I_\Lambda^v(\mathbf{Y}) \in T(\Lambda, u, w). \quad (5.7)$$

A importância deste resultado, mais precisamente de seu corolário, está no fato de que ele garante que a concatenação entre duas trajetórias, com respeito a um sistema p -rugoso Λ , é também uma trajetória com respeito Λ . Logo podemos definir uma operação de produto entre classes de equivalência dada pela relação de homotopia p -rugosa. Isto é, se $\alpha \in T(\Lambda, u, v)$ e $\beta \in T(\Lambda, v, w)$, então definimos

$$\langle \alpha \rangle_p \langle \beta \rangle_p = \langle \alpha * \beta \rangle_p. \quad (5.8)$$

Este produto está bem definido pois vale o seguinte resultado.

Proposição 5.2.4. *Sejam Λ um sistema p -rugoso, $\alpha_0, \alpha_1 \in T(\Lambda, u, v)$ e $\beta_0, \beta_1 \in T(\Lambda, v, w)$. Se $\alpha_0 \sim_p \alpha_1$ e $\beta_0 \sim_p \beta_1$ então $\alpha_0 * \beta_0 \sim_p \alpha_1 * \beta_1$.*

Demonstração: Se $\alpha_0 \sim_p \alpha_1$, então existe F tal que $F : \alpha_0 \sim_p \alpha_1$ e da mesma forma, se $\beta_0 \sim_p \beta_1$, então existe G tal que $G : \beta_0 \sim_p \beta_1$.

Para cada $s \in [0, 1]$, temos que $F(s) \in T(\Sigma, u, v)$ e $G(s) \in T(\Sigma, v, w)$. Assim, resulta pelo Corolário (5.2.3) que $F(s) * G(s) \in T(\Sigma, u, w)$, para cada $s \in [0, 1]$.

Defina $H : [0, 1] \rightarrow T(\Sigma, u, w)$ por

$$H(s)(t) = (F(s) * G(s))(t) = \begin{cases} F(s)(2t), & \text{se } t \in [0, T/2] \\ G(s)(2t - T), & \text{se } t \in [T/2, T] \end{cases}. \quad (5.9)$$

Segue que H é uma homotopia p -rugosa entre as trajetórias $\alpha_0 * \beta_0$ e $\alpha_1 * \beta_1$. \square

5.3 Recobrimento de um Conjunto de Acessibilidade de um Sistema Rugoso

Da mesma forma que, sob determinadas condições topológicas, um conjunto de pontos acessíveis de um sistema de Young possui recobrimento, o mesmo é válido para um conjunto de acessibilidade de um sistema p -rugoso, sendo que as condições exigidas são análogas a exigidas para sistema de Young.

Seja $\Lambda = (f, \Delta, M)$ um sistema p -rugoso e $x \in M$. O conjunto

$$A(\Lambda, x) = \{v \in M : v = \alpha(T) \text{ para algum } \alpha \in T(\Lambda, x)\} \quad (5.10)$$

é chamado *conjunto dos pontos acessíveis a partir de x* com respeito ao sistema p -rugoso Λ .

Definição 5.3.1. Seja $\Lambda = (f, \Delta, M)$ um sistema p -rugoso e $A \subset M$. Dizemos que:

i) O sistema Λ tem a *propriedade de cancelamento à direita* se para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Lambda, u, v)$ e $\beta \in T(\Lambda, v, w)$ a propriedade abaixo vale:

$$\langle \alpha_1 \rangle_p \langle \beta \rangle_p = \langle \alpha_2 \rangle_p \langle \beta \rangle_p \Rightarrow \langle \alpha_1 \rangle_p = \langle \alpha_2 \rangle_p. \quad (5.11)$$

ii) O conjunto A é *localmente conexo por trajetórias* de Λ se para cada $y \in A$ e para cada vizinhança $W_y \ni y$ em A existe uma vizinhança aberta V_y tal que $y \in V_y \subset W_y$ e

$$\{\alpha \in T(\Lambda, u, v) : \alpha(J) \subset V_y\} \neq \emptyset \quad (5.12)$$

para todo $(u, v) \in V_y \times V_y$.

iii) O conjunto A é *semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias* de Λ se para todo $u \in A$ existe uma vizinhança $W_u \ni u$ em A satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{Se } \alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v), \alpha(J) \subset W_u \text{ e } \beta(J) \subset W_u \text{ então } \alpha \sim_p \beta. \quad (5.13)$$

Seja Λ um sistema p -rugoso, $p \in [1, \infty)$. Considere a aplicação $\epsilon_\Lambda : \Upsilon(\Lambda, x) \rightarrow A(\Lambda, x)$ dada por

$$\epsilon_\Lambda(\langle \alpha \rangle_p) = \alpha(T). \quad (5.14)$$

Teorema 5.3.2. *Se um sistema p -rugoso $\Lambda = (f, \Delta, M)$ é tal que Δ contém algum sinal constante e o conjunto de pontos acessíveis $A(\Lambda, u)$ é localmente conexo por trajetórias de Λ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Λ , então $A(\Lambda, u)$ admite um espaço de recobrimento.*

Demonstração: Considere a família B_u^Λ de todos os conjuntos da forma

$$\langle \alpha, W \rangle_p = \{\langle \alpha * \beta \rangle_p : \beta \in T(\Sigma, \alpha(T)) \text{ e } \beta(J) \subset W\}, \quad (5.15)$$

onde $\alpha \in T(\Lambda, u)$ e W é uma vizinhança aberta de $\alpha(T)$ em $\dot{A}(\Lambda, u)$.

A família B_u^Λ é uma base para a topologia em $\Upsilon(\Lambda, u)$. A restrição $(\epsilon_\Lambda)|_{\Upsilon(\Sigma, u)}$ é a aplicação de recobrimento procurada e o resto da prova é similar a prova do Teorema 2.3.12. \square

A família B_u^Λ , descrita na demonstração do teorema anterior, é uma base topológica em $\Upsilon(\Sigma, u)$ e a topologia gerada por B_u^Λ em $\Upsilon(\Lambda, u)$ é denotada por \mathcal{T}_u^Λ .

Seja $\Lambda = (f, \Delta, M)$ um sistema p -rugoso tal que Δ contém algum sinal constante. Suponha que $A(\Lambda, u)$ é localmente conexo por trajetórias de Λ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias Λ . Sejam $v \in A(\Lambda, u)$ e $\langle \alpha \rangle_p \in \epsilon_\Lambda^{-1}(v)$. Temos que $\hat{\beta}^\alpha$, definido de maneira similar a (2.21), é um caminho contínuo com respeito a topologia \mathcal{T}_u^Λ em $\Gamma(\Lambda, u)$. Sendo $(\epsilon_\Lambda)|_{\Upsilon(\Sigma, u)}$ uma aplicação de recobrimento, segue que $\hat{\beta}^\alpha$ é o levantamento de β em $\Gamma(\Lambda, u)$

iniciando em $\langle \alpha \rangle_p \in \epsilon_\Lambda^{-1}(v)$. De forma similar ao realizado da demonstração da Proposição 2.4.1, conclui-se que Λ satisfaz a propriedade de cancelamento à direita.

Considere a aplicação $\Theta_\alpha: \Gamma(\Lambda, v) \rightarrow \Gamma(\Lambda, u)$ dada por

$$\Theta_\alpha(\langle \beta \rangle_p) = \langle \alpha * \beta \rangle_p. \quad (5.16)$$

Temos que a aplicação Θ_α está bem definida. Na verdade, usando a Proposição (5.2.4), se $\langle \beta' \rangle_p = \langle \beta \rangle_p$ então $\Theta_\alpha(\langle \beta' \rangle_p) = \langle \alpha * \beta' \rangle_p = \langle \alpha * \beta \rangle_p = \Theta_\alpha(\langle \beta \rangle_p)$. Mais ainda, como Λ tem a propriedade de cancelamento, se $\langle \alpha * \beta' \rangle_p = \Theta_\alpha(\langle \beta' \rangle_p) = \Theta_\alpha(\langle \beta \rangle_p) = \langle \alpha * \beta \rangle_p$ então $\langle \beta' \rangle_p = \langle \beta \rangle_p$, isto é, a aplicação Θ_α é injetora. Além disso,

$$\Theta_\alpha(\langle \beta \rangle_p) = \langle \alpha * \beta \rangle_p = \hat{\beta}^\alpha(T). \quad (5.17)$$

Teorema 5.3.3. *Sejam $\Lambda = (f, \Delta, M)$ um sistema p -rugoso com Δ contendo algum sinal constante, $v \in A(\Lambda, u)$, $\langle \alpha \rangle_p \in \epsilon_\Lambda^{-1}(v)$ e $\beta_1, \beta_2 \in T(\Lambda, y)$. Suponha que $A(\Lambda, u)$ é localmente conexo por trajetórias de Λ e semi-localmente simplesmente conexo por trajetórias de Λ . Então, $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ se, e somente se, $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$.*

Demonstração: Se $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ então $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \Theta_\alpha(\langle \beta_1 \rangle_p) = \Theta_\alpha(\langle \beta_2 \rangle_p) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$.

Reciprocamente, se $\hat{\beta}_1^\alpha(T) = \hat{\beta}_2^\alpha(T)$ então $\Theta_\alpha(\langle \beta_1 \rangle_p) = \Theta_\alpha(\langle \beta_2 \rangle_p)$ e como Θ_α é injetora então $\langle \beta_1 \rangle_p = \langle \beta_2 \rangle_p$, isto é, $\beta_1 \simeq_p \beta_2$. \square

5.4 Relação ente Conjugação de Sistemas Rugosos e Homotopia Rugosa

No estudo dos sistemas rugosos um problema que pode ser considerado é o de comparar dois sistemas, identificando-os se eles tiverem as mesmas propriedades essenciais de estrutura. Nos sistemas rugosos as trajetórias são os elementos mais relevantes. Portanto, é de se esperar que qualquer noção de equivalência entre sistemas rugosos preserve, de alguma forma, as trajetórias. Nesta seção apresentaremos a noção de conjugação entre dois sistemas rugosos e a sua relação com homotopia rugosa.

Definição 5.4.1. Sejam $\Lambda = (f, \Delta, M)$ e $\Lambda' = (g, \Delta, N)$ dois sistemas p -rugosos com respeito ao intervalo $J = [0, T]$. Dizemos que Λ é *topologicamente conjugado* a Λ' se existe um homeomorfismo $h: M \rightarrow N$, chamado de *conjugação*, tal que

$$h(\mathbf{I}_\Lambda^u(\mathbf{X})(t)) = \mathbf{I}_{\Lambda'}^{h(u)}(\mathbf{X})(t) \quad (5.18)$$

para todo $(t, u, \mathbf{X}) \in J \times M \times \Delta$.

Se uma conjugação h entre dois sistemas p -rugosos é uma aplicação de classe C^k , dizemos que esta é uma *conjugação de classe C^k* entre os sistemas rugosos.

As homotopias rugosas podem ser aplicadas no contexto de conjugação de sistemas rugosos como um invariante. Mais especificamente, homotopias rugosas podem ser utilizadas como critério para dizer que certos homeomorfismos não podem ser uma conjugação entre dois sistemas rugosos.

Para abordarmos tal questão obtivemos previamente um resultado que funciona como uma recíproca fraca da Proposição 5.1.3, ou seja, se uma homotopia no sentido clássico entre caminhos satisfaz a condição ii) da Proposição 5.1.3, mais uma condição adicional, então esta é uma homotopia rugosa.

Teorema 5.4.2. *Sejam Λ um sistema p -rugoso com respeito ao intervalo compacto $J = [0, T]$ e $L: J \times [0, 1] \rightarrow M$ uma aplicação contínua. Se $H(s) \in T(\Lambda, u, v)$, para todo $s \in [0, 1]$, onde*

$$H(s)(t) = L(t, s) \tag{5.19}$$

então as seguintes afirmações são válidas:

i) *Existe uma seqüência $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^1(J, E_2))$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(H^n(s), H(s)) = 0 \tag{5.20}$$

para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $q > p$.

ii) *Se $\sup_{s \in [0, 1]} \|H(s)\|_{p, J} < \infty$ então $H: [0, 1] \rightarrow T(\Lambda, u, v)$ é uma homotopia q -rugosa, para todo $q > p$.*

Demonstração: i) Sendo Λ um sistema p -rugoso, então $T(\Lambda, u, v) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$, onde E_2 é um dos espaços de Banach associado ao sistema Λ .

Seja $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(J)$ uma seqüência de partições do intervalo J tal que $|D_n| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação $H^n: [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}^1(J, E_2)$ dada por

$$H^n(s) = (H(s))^{D_n} \tag{5.21}$$

onde $(H(s))^{D_n}$ é aproximação poligonal do caminho $H(s) \in T(\Lambda, u, v) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$ com respeito a partição D_n .

Sejam $\epsilon > 0$ e $s, s' \in [0, 1]$.

Recordemos que

$$\bar{d}_1(H^n(s), H^n(s')) = \|H^n(s) - H^n(s')\|_{1, J} + \sup_{t \in J} \|H^n(s)(t) - H^n(s')(t)\|_{E_2}.$$

Como $H^n(s)$ e $H^n(s')$ são caminhos poligonais temos que

$$\begin{aligned} \|H^n(s) - H^n(s')\|_{1,J} &= \sum_{t_i \in D^n} \|H^n(s)(t_{i+1}) - H^n(s')(t_{i+1}) - H^n(s)(t_i) + H^n(s')(t_i)\|_{E_2} \\ &\leq \|H^n(s)(0) - H^n(s')(0)\|_{E_2} + \|H^n(s)(T) - H^n(s')(T)\|_{E_2} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{k_n-1} \|H^n(s)(t_i) - H^n(s')(t_i)\|_{E_2} \\ &\leq \|L(0, s) - L(0, s')\|_{E_2} + \|L(T, s) - L(T, s')\|_{E_2} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{k_n-1} \|L(t_i, s) - L(t_i, s')\|_{E_2} \end{aligned}$$

onde $k_n + 1$ representa número de elementos da partição D_n e temos também que

$$\sup_{t \in J} \|H^n(s)(t) - H^n(s')(t)\|_{E_2} = \max_{t_i \in D_n} \|H^n(s)(t_i) - H^n(s')(t_i)\|_{E_2} = \max_{t_i \in D_n} \|L(t_i, s) - L(t_i, s')\|_{E_2}.$$

Por hipótese temos que L é contínua e $[0, 1] \times J$ é um compacto, então L é uniformemente contínua. Logo existe $\delta(n) > 0$ tal que $\|L(t, s) - L(t', s')\|_{E_2} < \epsilon/(2k_n + 1)$, para quaisquer $(t, s), (t', s') \in J \times [0, 1]$ cumprindo a condição $\max\{|s - s'|, |t - t'|\} < \delta(n)$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta(n) > 0$ como mencionado acima temos que

$$\begin{aligned} \bar{d}_1(H^n(s), H^n(s')) &= \|L(0, s) - L(0, s')\|_{E_2} + \|L(T, s) - L(T, s')\|_{E_2} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \|L(t_i, s) - L(t_i, s')\|_{E_2} + \max_{t_i \in D_n} \|L(t_i, s) - L(t_i, s')\|_{E_2} \\ &\leq (2k_n + 1) \frac{\epsilon}{2k_n + 1} = \epsilon \end{aligned}$$

sempre que $|s - s'| < \delta$.

Portanto $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^1(J, E_2))$ e além disso, para cada $s \in [0, 1]$, como $H(s) \in T(\Lambda, u, v) \subset \mathcal{V}^p(J, E_2)$, decorre do Teorema 1.2.7 que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \bar{d}_q((H(s))^{D_n}, H(s)) = 0 \tag{5.22}$$

para todo $q > p$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_q(H^n(s), H(s)) = 0$, para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $q > p$. Em outras palavras, H^n converge pontualmente para H com respeito a métrica \bar{d}_q , para todo $q > p$.

ii) Usando a hipótese que $\sup_{s \in [0,1]} \|H(s)\|_{p,J} < \infty$, segue que

$$\|(H(s))^{D_n}\|_{p,J} \leq 3^{1-1/p} \|H(s)\|_{p,J} \leq 3^{1-1/p} \sup_{s \in [0,1]} \|H(s)\|_{p,J}$$

para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como L é contínua e $[0, 1] \times J$ é compacto segue que $\sup_{(t,s) \in J \times [0,1]} \|L(t, s)\|_{E_2} \leq \infty$,
 donde resulta que

$$\sup_{t \in J} \|(H(s))^{D_n}(t)\|_{E_2} = \max_{t_i \in D_n} \|(H(s))^{D_n}(t_i)\|_{E_2} = \max_{t_i \in D_n} \|L(s, t_i)\|_{E_2} \leq \sup_{(t,s) \in J \times [0,1]} \|L(t, s)\|_{E_2}$$

para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\sup_{s \in [0,1]} \|H^n(s)\|_{\mathcal{V}^p} \leq K \tag{5.23}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$K = 3^{1-1/p} \sup_{s \in [0,1]} \|H(s)\|_{p,J} + \sup_{(t,s) \in J \times [0,1]} \|L(t, s)\|_{E_2}. \tag{5.24}$$

Dado $\epsilon > 0$, como L é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\|L(t, s) - L(t', s')\|_{E_2} < \epsilon$,
 para quaisquer $(t, s), (t', s') \in J \times [0, 1]$ cumprindo a condição $\max\{|s - s'|, |t - t'|\} < \delta$.
 Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|H^n(s) - H^n(s')\|_{\infty, J} = \sup_{t \in J} \|H^n(s)(t) - H^n(s')(t)\|_{E_2} = \max_{t_i \in D_n} \|L(t_i, s) - L(t_i, s')\|_{E_2} < \epsilon \tag{5.25}$$

sempre que $|s - s'| < \delta$.

Como $H^n \in C([0, 1], \mathcal{V}^1(J, E_2))$, $\mathcal{V}^1(J, E_2) \subset \mathcal{V}^q(J, E_2)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^q} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{V}^1}$, resulta que $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^q(J, E_2))$.

Usando o Lema 1.2.4 e a expressão (5.23) temos que

$$\|H^n(s) - H^n(s')\|_{\mathcal{V}^q} \leq (2\|H^n(s) - H^n(s')\|_{\infty, J})^{1-\frac{p}{q}} (2K)^{\frac{p}{q}} + \|H^n(s) - H^n(s')\|_{\infty, J} \tag{5.26}$$

para todo $q > p$, donde resulta, usando a expressão (5.25), que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|H^n(s) - H^n(s')\|_{\mathcal{V}^q} \leq (2\epsilon)^{1-\frac{p}{q}} (2K)^{\frac{p}{q}} + \epsilon \tag{5.27}$$

sempre que $|s - s'| < \delta$.

Logo, a seqüência que $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^q(J, E_2))$ é uma seqüência equicontínua em relação a métrica \bar{d}_q .

Lembremos que se uma seqüência aplicações equicontínuas converge pontualmente, então seu limite é uma aplicação contínua. Como $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathcal{V}^q(J, E_2))$ é uma seqüência equicontínua a qual converge pontualmente para H em relação a métrica \bar{d}_q , segue que $H \in C([0, 1], \mathcal{V}^q(J, E_2))$.

Portanto H é uma homotopia q -rugosa, para todo $q > p$. □

Agora estamos em condições de relacionar homotopias rugosas com conjugações de sistemas rugosos.

Teorema 5.4.3. *Sejam Λ e Λ' sistemas p -rugosos e $\alpha, \beta \in T(\Lambda, u, v)$. Se $\alpha \sim_p \beta$ e h é uma conjugação de classe C^1 entre Λ e Λ' então $h \circ \alpha \sim_q h \circ \beta$, para todo $q > p$.*

Demonstração: Seja H uma homotopia p -rugosa entre α e β . Como $H: \alpha \sim_p \beta$ segue da Proposição 5.1.3 que

$$L(t, s) = H(s)(t) \tag{5.28}$$

é uma homotopia no sentido clássico entre α e β , ou seja $L: \alpha \simeq \beta$.

Note que $L^s = H(s) \in T(\Lambda, u, v)$, para todo $s \in [0, 1]$, uma vez que H é uma homotopia p -rugosa com respeito ao sistema Λ .

Como h é uma aplicação contínua de classe C^1 então

$$h \circ L: h \circ \alpha \simeq h \circ \beta. \tag{5.29}$$

Usando a hipótese que h é uma conjugação entre Λ e Λ' temos que $h \circ L^s \in T(\Lambda', h(u), h(v))$, para todo $s \in [0, 1]$.

Como $L(J \times [0, 1])$ é compacto e h é uma aplicação de classe C^1 , segue que h é Lipschitz sobre $L(J \times [0, 1])$. Logo, como na demonstração da Proposição 1.4.1, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|h \circ L^s\|_p \leq C \|L^s\|_{\mathcal{V}^p} \tag{5.30}$$

para todo $s \in [0, 1]$.

Como H uma homotopia p -rugosa, então H é contínua no intervalo $[0, 1]$ com respeito a métrica \bar{d}_p , logo $\sup_{s \in [0, 1]} \|L^s\|_{\mathcal{V}^p} = \sup_{s \in [0, 1]} \|H(s)\|_{\mathcal{V}^p} < \infty$ e

$$\sup_{s \in [0, 1]} \|h \circ L^s\|_p < \infty. \tag{5.31}$$

Definido $G(s) = (h \circ L^s)$, para todo $s \in [0, 1]$, temos que G satisfaz as hipóteses do Teorema 5.4.2, donde segue que

$$G: h \circ \alpha \sim_q h \circ \beta \tag{5.32}$$

para todo $q > p$. □

Abaixo apresentamos um exemplo de situação na qual a Teorema 5.4.3 pode ser empregada.

Exemplo 5.4.4. Considere o sistema 1-rugoso $\Lambda = (f_A, S_1(\Delta), \mathbb{S}^2)$ e as trajetórias $\alpha(t) = (1, 0, 0)$ e $\beta(t) = (\cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T), 0)$ deste sistema, como no exemplo (5.1.4).

Não existe sistema 1-rugoso do tipo $\Lambda' = (g, S_1(\Delta), \mathbb{S}^2)$ que seja conjugado, via um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 2$, ao sistema Λ acima e que satisfaça a condição de que quaisquer duas trajetórias em formato de loop sejam 1-rugosamente homotópicas entre si.

De fato, se existisse um sistema rugoso Λ' como foi citado, então existiria um difeomorfismo h de classe C^k , $k \geq 2$, que seria uma conjugação entre Λ e Λ' . Deste modo, teríamos que $h \circ \alpha, h \circ \beta \in T(\Lambda', h(u), h(u))$ e então $h \circ \alpha \sim_1 h \circ \beta$. Daí, se $h \circ \alpha \sim_1 h \circ \beta$ resultaria pelo Teorema 5.4.3 que $h^{-1} \circ h \circ \alpha \sim_q h^{-1} \circ h \circ \beta$, para todo $q > 1$, ou equivalentemente, que $\alpha \sim_q \beta$ para todo $q > 1$. Mas isto é um absurdo, pois α não é q -rugosamente homotópica a β com respeito ao sistema Λ , o que pode ser verificado de maneira análoga ao exemplo do final da seção 2.2.

Observação 5.4.5. Resultados similares ao Teorema 5.4.2 e ao Teorema 5.4.3 são válidos no contexto de sistemas de Young e homotopias p -monotônicas entre trajetórias de um sistema de Young. Além disso, as demonstrações são similares.

5.5 Relação entre Equações Estocásticas e Homotopia Rugosa

Nesta seção caracterizaremos, através de uma homotopia p -rugosa, uma homotopia entre duas trajetórias amostrais de uma solução de uma equação diferencial estocástica, de modo que os caminhos intermediários desta homotopia sejam trajetórias amostrais desta solução.

Tome o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \text{Borel}(C([0, \infty), \mathbb{R}))$ e \mathbb{P} é a medida de Wiener. Seja B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R} , ou seja,

$$B_t(\omega) = \omega(t). \tag{5.33}$$

Considere a equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich

$$dY_t = rY_t dt + \alpha Y_t \circ dB_t \tag{5.34}$$

onde r e α são constantes e B é um movimento Browniano em \mathbb{R} .

Do fato que as integrais de Stratonovich e as integrais de Itô se relacionam mediante a fórmula

$$\int_0^t Z \circ dX = \int_0^t Z dX + \frac{1}{2}[X, Z] \tag{5.35}$$

e que $[t, B_t] = 0$ e $[B_t, B_t] = t$, segue que a equação (5.34) é equivalente à equação diferencial estocástica no sentido de Itô

$$dY_t = \left(r + \frac{1}{2}\alpha^2\right)Y_t dt + \alpha Y_t dB_t. \quad (5.36)$$

Considere a equação diferencial estocástica de Itô

$$d\bar{Y}_t = \bar{r}\bar{Y}_t dt + \alpha\bar{Y}_t dB_t \quad (5.37)$$

onde \bar{r} é uma constante. Usando ferramentas de Cálculo Estocástico deduz-se que

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_0 \exp\left(\left(\bar{r} - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t\right) \quad (5.38)$$

é solução da equação (5.37). No caso particular em que $\bar{r} = r + \frac{1}{2}\alpha^2$ temos que a equação (5.37) coincide com a equação (5.36) e

$$Y_t = Y_0 \exp(rt + \alpha B_t) \quad (5.39)$$

é solução das equações diferenciais estocásticas (5.36) e (5.34). Tomando $r = 0$ e $\alpha = 1$, segue que

$$Y_t = \exp(B_t) \quad (5.40)$$

é solução da equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich

$$dY_t = Y_t \circ dB_t \quad (5.41)$$

com condição inicial $Y_0 = 1$. Decorre da Proposição 4.5.4 que existe um subconjunto $\Omega' \subset \Omega$, com $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tal que

$$Y_t(\omega) = \exp(B_t(\omega)) \quad (5.42)$$

é solução da equação rugosa

$$dY_t = Y_t d\mathbf{B}_t(\omega) \quad (5.43)$$

com condição inicial $Y_0 = 1$, para todo $\omega \in \Omega'$.

Este exemplo simples ilustra uma situação em que o conhecimento de soluções de equações diferenciais estocástica permite conhecer soluções de equações rugosas com o mesmo campo da equação estocástica e dirigidas pelos caminhos amostrais do movimento Browniano en-hanced. Mais do que simplesmente isto, este exemplo sinaliza a possibilidade de relacionar homotopias entre os caminhos amostrais no suporte da solução de uma equação estocástica com homotopias rugosas entre trajetórias de um sistema rugoso associado a estas equação estocástica. Antes de explicitarmos de que maneira se dá esta relação entre homotopias, apresentaremos a seguir algumas informações relevantes relacionadas a suportes associados processos estocásticos.

Definição 5.5.1. Seja μ uma medida de probabilidade em um espaço métrico (E, d) . O *suporte* da medida μ , com respeito a topologia induzida por d , é o menor conjunto fechado $A \subset E$ tal que $\mu(A) = 1$. Denotamos A por $\text{supp } \mu$.

Dada uma variável aleatória $Z: \Omega \rightarrow E$, onde E é um espaço métrico e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade \mathbb{P} , induzimos uma medida de probabilidade \mathbb{P}_Z em E por

$$\mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}(Z^{-1}(A)) \tag{5.44}$$

para todo $A \in \text{Borel}(E)$. A medida de probabilidade \mathbb{P}_Z é denominada *lei* de Z e o suporte de \mathbb{P}_Z é denominado *suporte associado à variável aleatória* Z .

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d , onde $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F} = \text{Borel}(C([0, \infty), \mathbb{R}^d))$ e \mathbb{P} é a medida de Wiener. O movimento Browniano B pode ser visto como uma variável aleatória tomando valores em $C(J, \mathbb{R}^d)$, onde $J = [0, T]$ e $T > 0$. Em outras palavras, $B: \Omega \rightarrow C(J, \mathbb{R}^d)$, pode ser visto como uma variável aleatória dada por

$$B(\omega) = \omega. \tag{5.45}$$

Para $p \in (2, \infty)$, temos que $B(\omega) \in \mathcal{V}_0^p(J, \mathbb{R}^d)$, para quase todo $\omega \in \Omega$. Mais do que isso, temos que o suporte associado ao movimento Browniano B , visto como variável aleatória, é precisamente

$$\text{supp } \mathbb{P}_B = \mathcal{V}_0^{0,p}(J, \mathbb{R}^d) \tag{5.46}$$

onde $p \in (2, \infty)$ (Veja P. Friz [5]). Já o suporte do movimento Browniano “enhanced” \mathbf{B} interpretado como uma variável aleatória $\mathbf{B}: \Omega \rightarrow C(J, G^2(\mathbb{R}^d))$ é

$$\text{supp } \mathbb{P}_{\mathbf{B}} = \mathcal{V}_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)) \tag{5.47}$$

onde $p \in (2, \infty)$.

Um resultado de grande importância para o estudo de suportes de soluções de equações diferenciais estocásticas é o teorema suporte de Stroock-Varadhan.

Teorema 5.5.2 (Stroock-Varadhan). *Sejam $p \in (2, 3)$, $f \in \text{Lip}^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$ e B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d . Se Y é a única solução contínua no intervalo J (a menos de indistinguibilidade) da equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich*

$$dY = f(Y) \circ dB, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e \tag{5.48}$$

então $Y(\omega) \in \mathcal{V}^p(J, \mathbb{R}^e)$, para quase todo $\omega \in \Omega$ e

$$\text{supp } \mathbb{P}_Y = \overline{\{I_f^y(h) : h \in C_{0,\wedge}^\infty(J, \mathbb{R}^d)\}}^{\bar{d}_p} \tag{5.49}$$

onde $C_{0,\wedge}^\infty(J, \mathbb{R}^d)$ indica o conjunto dos caminhos contínuos de J em \mathbb{R}^d iniciados em 0 e suaves por partes, \bar{d}_p indica a métrica de $\mathcal{V}^p(J, \mathbb{R}^d)$ e cada $I_f^y(h)$ é a única solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{Y} = f(Y)\dot{h}, \quad \text{com } Y_0 = y \in \mathbb{R}^e. \quad (5.50)$$

Uma prova relativamente curta para o Teorema de Stroock-Varadhan, a qual se utiliza de ferramentas da teoria dos caminhos rugosos, está disponível nas notas de P. Friz [5]. Outras provas deste teorema podem ser encontradas em [11], [20] e [26].

O Teorema de Stroock-Varadhan pode ser interpretado da seguinte maneira: O suporte associado ao processo estocástico Y , solução da equação (5.48), é dado por

$$\text{supp } \mathbb{P}_Y = \overline{T(\Sigma, y)}^{d_p} \quad (5.51)$$

onde $T(\Sigma, y)$ denota conjunto de trajetórias iniciadas em y do sistema de Young com 1- variação (ou sistema 1-rugoso)

$$\Sigma = (f, C_{0,\wedge}^\infty(J, \mathbb{R}^d), \mathbb{R}^e) \quad (5.52)$$

ou seja, o conjunto de trajetórias deste sistema é

$$T(\Sigma, y) = \{I_f^y(h) : h \in C_{0,\wedge}^\infty(J, \mathbb{R}^d)\}. \quad (5.53)$$

Baseado nestes fatos, seria interessante definir um tipo especial de homotopia entre as trajetórias amostrais de um processo estocástico Y , solução de uma equação do tipo (5.48), de tal forma que os caminhos intermediários desta homotopia continuem sendo trajetórias amostrais de Y . A estratégia de definir diretamente uma homotopia entre trajetórias amostrais satisfazendo tal condição leva imediatamente a questão sobre a possibilidade de se definir um produto entre as classes desta relação de homotopia. Dito de outra forma, a questão que surge é se a concatenação entre trajetórias amostrais de um processo estocástico continua sendo trajetória amostral deste processo. Uma idéia para tratar esta problemática seria enquadrá-la em um ambiente já conhecido, que seria o ambiente das homotopias rugosas, uma vez que neste ambiente o produto de classes de homotopia está bem definido.

Uma primeira tentativa neste sentido seria definir tal homotopia como sendo a homotopia 1-rugosa entre as trajetórias do sistema $\Sigma = (f, C_{0,\wedge}^\infty(J, \mathbb{R}^d), \mathbb{R}^e)$, entretanto poderia ocorrer das trajetórias amostrais de Y não serem \mathbb{P} -quase sempre trajetórias de $T(\Sigma, y)$, muito embora tenha-se pelo teorema do suporte que $\text{supp } \mathbb{P}_Y = \overline{T(\Sigma, y)}^{d_p}$. Contudo podemos enxergar as trajetórias amostrais de Y \mathbb{P} -quase sempre inclusas em um espaço trajetórias de um outro sistema rugoso. Formalizamos isto no seguinte resultado.

Teorema 5.5.3. *Sejam $p \in (2, 3)$, $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$, B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d e \mathbb{P} a medida de Wiener associada a B . Se Y é a única solução contínua no intervalo J da equação diferencial estocástica (5.48) então*

$$Y(\omega) \in T(\Lambda, y) \tag{5.54}$$

para \mathbb{P} -quase todo ω , onde $T(\Lambda, y)$ denota conjunto de trajetórias iniciadas em y do sistema p -rugoso

$$\Lambda = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e). \tag{5.55}$$

Demonstração: Seja Ω o espaço amostral associado a \mathbb{P} . Decorre da Proposição 4.5.4 que existe um subconjunto $\Omega' \subset \Omega$, com $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tal que

$$Y_t(\omega) = \mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega)) \tag{5.56}$$

para todo $\omega \in \Omega'$, onde $\mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega))$ é solução da equação rugosa

$$dY = f(Y) d\mathbf{B}(\omega) \tag{5.57}$$

com condição inicial $Y_0 = y$.

Tome $\Omega'' = \Omega' \cap (\mathbf{B}^{-1}(supp \mathbb{P}_{\mathbf{B}}))$. Temos que $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$ e se $\omega \in \Omega''$ então $\mathbf{B}(\omega) \in supp \mathbb{P}_{\mathbf{B}}$.

Como $supp \mathbb{P}_{\mathbf{B}} = V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d))$ então $\mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega)) \in T(\Lambda, y)$ para todo $\omega \in \Omega''$. Por outro lado $Y_t(\omega) = \mathbf{I}_f^y(\mathbf{B}(\omega))(t)$ para todo $\omega \in \Omega''$.

Portanto, $Y_t(\omega) \in T(\Lambda, y)$ para todo $\omega \in \Omega''$ e $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$. □

Definição 5.5.4. *Seja Y o processo solução no intervalo J de uma equação estocástica do tipo (5.48). Dizemos que duas trajetórias amostrais de Y , digamos $Y(\omega_0)$ e $Y(\omega_1)$, são estocasticamente homotópicas se as seguintes condições são satisfeitas.*

- i) $Y_T(\omega_0) = Y_T(\omega_1)$.
- ii) $Y(\omega_0), Y(\omega_1) \in T(\Lambda, y)$, onde $\Lambda = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$ e $p \in (2, 3)$.
- iii) $Y(\omega_0)$ é p -rugosamente homotópica $Y(\omega_1)$, com respeito ao sistema p -rugoso Λ .

Se $Y(\omega_0)$ e $Y(\omega_1)$ são trajetórias amostrais do processo Y (solução de uma equação estocástica do tipo (5.48)) e H é uma homotopia p -rugosa entre $Y(\omega_0)$ e $Y(\omega_1)$ em $T(\Lambda, y)$, onde $\Lambda = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$, então dizemos que H é uma *homotopia estocástica* entre $Y(\omega_0)$ e $Y(\omega_1)$.

Sejam Y o processo solução no intervalo J de uma equação estocástica do tipo (5.48) e $H: Y(\omega_0) \sim_p Y(\omega_1)$ uma homotopia estocástica com respeito a Y . Embora os caminhos intermediários da homotopia estocástica H pertençam ao conjunto de trajetórias $T(\Lambda, y)$ do sistema p -rugoso $\Lambda = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$, uma questão que falta verificarmos é se este

caminhos intermediários da homotopia estocástica H são trajetórias amostrais de Y , isto é, para cada $s \in [0, 1]$ existe algum $\omega_s \in \Omega$ tal que $H(s) = Y(\omega_s)$? A resposta para isto é que os caminhos intermediários da homotopia estocástica H são trajetórias amostrais de Y e este fato é uma consequência imediata do teorema a seguir.

Teorema 5.5.5. *Sejam $p \in (2, 3)$, $f \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$, B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d e \mathbb{P} a medida de Wiener associada a B . Se Y é a única solução contínua no intervalo J da equação diferencial estocástica (5.48) então*

$$supp \mathbb{P}_Y = \overline{T(\Lambda, y)}^{d_p} \tag{5.58}$$

onde Λ é o sistema p -rugoso $(f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$.

Demonstração: Seja Ω o espaço amostral associado a \mathbb{P} . Segue da Proposição 5.5.3 que existe um subconjunto $\Omega'' \subset \Omega$, com $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$ e $Y(\omega) \in T(\Lambda, y)$, para todo $\omega \in \Omega''$.

Assim

$$1 = \mathbb{P}(\Omega'') \leq \mathbb{P}(Y^{-1}(Y(\Omega''))) = \mathbb{P}_Y(Y(\Omega'')) \leq \mathbb{P}_Y(T(\Lambda, y)) \leq \mathbb{P}_Y(\overline{T(\Lambda, y)}^{d_p}) \leq 1$$

e então segue da definição de suporte que

$$supp \mathbb{P}_Y \subset \overline{T(\Lambda, y)}^{d_p}.$$

Decorre do teorema de Stooock-Varadhan que $supp \mathbb{P}_Y = \overline{I_f^y(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d))}^{d_p}$.

Temos que $I_f^y(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d)) = \mathbf{I}_f^y(S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d)))$, logo $supp \mathbb{P}_Y = \overline{\mathbf{I}_f^y(S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d)))}^{d_p}$.

Assim,

$$S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d)) \subset (\mathbf{I}_f^y)^{-1}(\mathbf{I}_f^y(S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d)))) \subset (\mathbf{I}_f^y)^{-1}(supp \mathbb{P}_Y). \tag{5.59}$$

Segue da Proposição 4.4.4 que $V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e = \overline{S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d))}^{d_p}$ e como \mathbf{I}_f^y é contínua, segue que $(\mathbf{I}_f^y)^{-1}(supp \mathbb{P}_Y)$ é fechado e conseqüentemente, segue da expressão (5.59) que

$$V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e = \overline{S_2(C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d))}^{d_p} \subset (\mathbf{I}_f^y)^{-1}(supp \mathbb{P}_Y).$$

Portanto,

$$T(\Lambda, y) = \mathbf{I}_f^y(V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e) \subset supp \mathbb{P}_Y.$$

como queríamos. □

Corolário 5.5.6. *Seja $p \in (2, 3)$. Se Λ é o sistema p -rugoso $(f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$ e Σ é o sistema 1-rugoso $(f, C_{0,\lambda}^\infty(J, \mathbb{R}^d), \mathbb{R}^e)$ então*

$$\overline{T(\Lambda, y)}^{d_p} = \overline{T(\Sigma, y)}^{d_p}. \tag{5.60}$$

Demonstração: Decorre da proposição anterior e do teorema de Stroock-Varadhan. \square

Para finalizar, apresentaremos um exemplo que ilustra que sob determinadas condições é possível explicitar a homotopia p -rugosa entre trajetórias de um sistema do tipo $\Lambda' = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), M)$, onde M é um variedade diferenciável contida em \mathbb{R}^e .

Exemplo 5.5.7. Sejam F_1, \dots, F_d campos de vetores C^∞ em \mathbb{R}^e . Considere sistema p -rugoso $\Lambda' = (h, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), M)$, onde $p \in (2, 3)$, $M \subset \mathbb{R}^e$ é uma variedade diferenciável e $h: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ é dado por

$$h(x)(y_1, \dots, y_d) = y_1 F_1(x) + \dots + y_d F_d(x). \quad (5.61)$$

Temos que $T(\Lambda', z_0) \subset \text{supp } \mathbb{P}_Y$, onde Y é o processo estocástico solução da equação

$$dY = h(Y) \circ dB = F_1(Y) \circ dB^1 + \dots + F_d(Y) \circ dB^d \quad (5.62)$$

com condição inicial $Y(0) = z_0$ e $B = (B^1, \dots, B^d)$ é o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d .

Se F_1, \dots, F_d são campos de vetores (com respeito a M) completos e que comutam entre si então

$$Y_t(\omega) = \exp(B_t^1 F_1) \circ \dots \circ \exp(B_t^d F_d)(z_0) \quad (5.63)$$

onde $\exp tF_i$ é o grupo de transformações a 1-parâmetro gerado pelo campo de vetores F_i , $i = 1, \dots, d$, ou seja, $\phi_t^i(x) = \exp(B_t^i F_i)$ é solução de $d\phi_t^i = F_i(\phi_t^i) \circ dB_t^i$ (ver H. Kunita [11], D. W. Stroock [26]).

Neste caso, dados $\alpha, \beta \in T(\Lambda', z_0)$ temos que α e β são trajetórias amostrais de Y , digamos $\alpha(t) = Y_t(\omega^0)$ e $\beta(t) = Y_t(\omega^1)$, e portanto α é p -rugosamente homotópica a β se, e somente se, α é estocasticamente homotópica a β . Ou ainda, α é p -rugosamente homotópica a β se, e somente se, ω^0 e ω^1 estão na mesma componente conexa por caminhos de $Y^{-1}(\text{supp } \mathbb{P}_Y)$.

De fato, se L é um caminho contínuo ligando ω^0 e ω^1 em $Y^{-1}(\text{supp } \mathbb{P}_Y)$ então

$$H(s, t) = \exp(L^1(s, t)F_1) \circ \dots \circ \exp(L^d(s, t)F_d)(z_0) \quad (5.64)$$

com $s \in [0, 1]$, $t \in J$, é uma homotopia p -rugosa entre α e β . Reciprocamente se H é uma homotopia p -rugosa entre $\alpha(t) = Y_t(\omega^0)$ e $\beta(t) = Y_t(\omega^1)$ então $H(s) \in T(\Lambda', z_0) \subset Y^{-1}(\text{supp } \mathbb{P}_Y)$ para todo $s \in [0, 1]$ e H é da forma

$$H(s, t) = \exp(B_t^1(\omega^s)F_1) \circ \dots \circ \exp(B_t^d(\omega^s)F_d)(z_0). \quad (5.65)$$

Logo, $\exp(B_t^i(\omega^s)F_i)$ e conseqüentemente $B_t^i(\omega^s)$ são contínuos em relação $s \in [0, 1]$, para $i = 1, \dots, d$. Como $\omega^s(t) = B_t(\omega^s) = (B_t^1(\omega^s), \dots, B_t^d(\omega^s))$ segue que $L(s) = \omega(s)$ é um caminho contínuo ligando ω^0 e ω^1 em $Y^{-1}(\text{supp } \mathbb{P}_Y)$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sejam $p \in (2, 3)$; $f, g \in Lip^3(\mathbb{R}^e, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$; $M, N \subset \mathbb{R}^e$ e B o movimento Browniano canônico em \mathbb{R}^d . Se Y é a solução no intervalo J da equação diferencial estocástica

$$dY = f(Y) \circ dB, \quad \text{com } Y_0 = y \in M \quad (5.66)$$

e Z é a solução no intervalo J da equação diferencial estocástica

$$dZ = g(Z) \circ dB, \quad \text{com } Z_0 = z \in N \quad (5.67)$$

então um problema que pode ser considerado é se existe um difeomorfismo $h: M \rightarrow N$ de classe C^k , $k \geq 2$, tal que

$$h \circ Y = Z, \quad (5.68)$$

ou seja, se existe difeomorfismo h de classe C^k , $k \geq 2$, que leve trajetórias amostrais de Y em trajetórias amostrais de Z .

Uma possibilidade para o estudo de tal problema seria enxergá-lo como um problema de conjugação entre o sistema p -rugoso $\Lambda_Y = (f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), M)$ e o sistema p -rugoso $\Lambda_Z = (g, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), N)$, associados respectivamente aos processos estocásticos Y e Z .

Por exemplo, suponha que o campo f na equação (5.66) seja dado por

$$f(y)(y_1, \dots, y_d) = y_1 F_1(y) + \dots + y_d F_d(y) \quad (5.69)$$

onde F_1, \dots, F_d são campos de vetores em M completos e que comutam entre si. Do mesmo modo, suponha que o campo g na equação (5.67) seja dado por

$$g(z)(z_1, \dots, z_d) = z_1 G_1(z) + \dots + z_d G_d(z) \quad (5.70)$$

onde G_1, \dots, G_d são campos de vetores em N completos e que comutam entre si. Se $Y^{-1}(supp \mathbb{P}_Y)$ tiver duas componentes conexas por caminho e $Z^{-1}(supp \mathbb{P}_Z)$ tiver uma única

componente conexa por caminhos então os seus respectivos sistemas rugosos associados, Λ_Y e Λ_Z , não são conjugados por meio de um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 2$,

De fato, se existisse uma conjugação h entre Λ_Y e Λ_Z tal que h é um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 2$, então tomando ω^0 e ω^1 eventos em componentes conexas por caminhos distintas de $Y^{-1}(supp \mathbb{P}_Y)$ teríamos que $h \circ Y(\omega^0) = Z(\bar{\omega}^0)$, para algum $\bar{\omega}^0 \in Z^{-1}(supp \mathbb{P}_Z)$ e $h \circ Y(\omega^1) = Z(\bar{\omega}^1)$, para algum $\bar{\omega}^1 \in Z^{-1}(supp \mathbb{P}_Z)$. Como $\bar{\omega}^0$ e $\bar{\omega}^1$ estão na mesma componente conexa por caminho de $Z^{-1}(supp \mathbb{P}_Z)$, pelo que foi visto no exemplo 5.5.7, teríamos que $Z(\bar{\omega}^0) \sim_p Z(\bar{\omega}^1)$. Logo, pelo Teorema 5.4.3 teríamos que $h^{-1} \circ Z(\bar{\omega}^0) \sim_q h^{-1} \circ Z(\bar{\omega}^1)$ para $q \in (p, 3)$, ou seja, $Y(\omega^0) \sim_q Y(\omega^1)$ para $q \in (p, 3)$ e daí, novamente pelo que foi visto no exemplo 5.5.7, concluiríamos que ω^0 e ω^1 estariam na mesma componente conexa por caminho de $Y^{-1}(supp \mathbb{P}_Y)$, o que seria um absurdo.

O que observamos na situação acima é que podemos utilizar a invariância por conjugações das homotopias rugosas (ou homotopias estocásticas) como critério de obstrução para identificar casos em que não existem difeomorfismos de classe C^k , $k \geq 2$, que levem trajetórias amostrais da solução de uma equação diferencial estocástica em trajetórias amostrais da solução de uma outra equação diferencial estocástica.

Evidentemente, o fato de se considerar a situação acima, em que as equações diferenciais estocásticas são dadas por campos de vetores completos e que comutam entre si, nos permite ter conhecimento mais explícito das homotopias estocásticas entre as trajetórias amostrais que compõem as soluções destas equações. Portanto, nesta situação a utilização das homotopias rugosas como critério de obstrução para identificar casos em que não existem conjugações entre soluções de equações estocásticas se mostra uma ferramenta considerável.

Uma questão que surge, e que nos dá uma direção para continuar futuras pesquisas neste tema, é como utilizar de maneira efetiva a invariância por conjugações das homotopias rugosas como critério de obstrução nos casos em que as equações diferenciais estocásticas não são dadas por campos de vetores que comutam entre si? Neste sentido, um problema que ainda requer estudos é o de se caracterizar como são as homotopias rugosas (ou estocásticas) entre trajetórias amostrais de soluções de equações diferenciais estocásticas, cujos campos de vetores não comutam entre si.

Uma outra linha para se dar continuidade a futuras pesquisas seria o problema de computar a probabilidade de cada classe de equivalência segundo a relação de homotopia rugosa associada a solução de uma equação diferencial estocástica. Decorre do Teorema 5.5.5 que dado Y uma solução de uma equação estocástica do tipo (5.48), então

$$T(\Lambda, y) \subset supp \mathbb{P}_Y \tag{5.71}$$

onde Λ é o sistema rugoso $(f, V_1^{0,p}(J, G^2(\mathbb{R}^d)), \mathbb{R}^e)$ associado a Y e portanto as classes de

equivalência homotópica das trajetórias de $T(\Lambda, y)$ são subconjuntos disjuntos em $\text{supp } \mathbb{P}_Y$ os quais possuem um certa medida de probabilidade.

Um outro problema em aberto seria caracterizar nos sistemas de Young em que condições uma homotopia p -monotônica entre duas trajetórias regulares é estritamente uma homotopia p -monotônica regular entre estas duas trajetórias, visto que a recíproca (homotopia p -monotônica regular implica em p -monotônica) desta questão é sempre válida.

Verificar a possibilidade de estender a sistemas de Young e a sistemas rugosos resultados de Teoria de Controle, como por exemplo, resultados sobre controlabilidade e acessibilidade é uma outra direção de estudos que também pode ser adotada.

Uma outra linha para estudos futuros, baseados no tema homotopia rugosa, seria a linha de explorar propriedades topológicas provenientes da homotopia rugosa, como por exemplo, explorar questões relativas a recobrimentos (obtidos através das homotopias rugosas) daqueles subconjuntos de um espaço de estados de um sistema rugoso que admitam recobrimento, ou então, estudar grupos fundamentais associados a homotopias rugosas naqueles sistemas rugosos que admitam trajetórias em formato de loop.

O estudo de trajetórias de equações dirigidas por caminhos rugosos ainda pode ser explorado em muitas direções e o que apresentamos nestas considerações finais foram apenas algumas das questões que podem ser tratadas em futuras pesquisas sobre o tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Baudoin, F., *An Introduction to the Geometry of Stochastic Flows*. Imperial College Press, 2004.
- [2] Colonius, F., Kizil, E. and San Martin, L. A. B., *Covering space for monotonic homotopy of trajectories of control system*. J. Differential Equations, 216, issue 2, 2005, pp. 324-353.
- [3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators - Part I: General Theory*. Wiley Classics Library, Wiley-Interscience, 1988.
- [4] Emery, M., *Stochastic Calculus in Manifolds*. Springer-Verlag, 1989.
- [5] Friz, P. K. *Minicourse on Stochastic Analysis via Rough Paths*. Columbia, 2008.
homepage: <http://www.statslab.cam.ac.uk/~peter/Columbia2008/roughpaths.htm>.
- [6] Greenberg, M. J., Harper, J. R.: *Algebraic Topology*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [7] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [8] James, B.R., *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Projeto Euclides, IMPA, 1981.
- [9] Kizil, E., *Homotopia Causal de Trajetórias de Sistemas de Controle*. Tese de Doutorado, IMECC/Unicamp, 2003.
- [10] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*. Pure and Applied Mathematics, Vol. I. Wiley-Interscience, 1963.
- [11] Kunita, H., *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, 1990.

- [12] Lang, S., *Differential Manifolds*. Addison Wesley, 1972.
- [13] Li, X. D., Lyons, T. J.: *Smoothness of Itô maps and diffusion process on path spaces (I)*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., t.39, n.4, 2006, pp. 649-677.
- [14] Lima, E.L., *Curso de Análise - Volume 2*. Projeto Euclides, IMPA, 2000.
- [15] Lima, E.L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [16] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, 1973.
- [17] Lyons, T. J., Caruana, M. and Lévy T.: *Differential Equations Driven by Rough Paths*. Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIV, Springer, 2004.
- [18] Lyons, T. J., Qian, Z.: *System Control and Rough Paths*. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [19] Martin, D., *Manifolds Theory: An Introduction for Mathematical Physicists*. Ellis Horwood, 1991.
- [20] Millet, A., Sanz-Solé, M., *A simple proof of the support theorem for diffusion process*. Séminaire de probabilités de Strasbourg, 28, 1994, pp. 36-48.
- [21] Oksendal, B., *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*. Fourth Edition, Springer-Verlag, 1995.
- [22] Reed, M., Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics - Vol. 1*. Academic Press, Inc., 1980.
- [23] Scárdua, B.C.A., *Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias*. XXII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1999.
- [24] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [25] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*. Tradução: Carlos A. de Moura, Editora Ciência Moderna Ltda, 2003.
- [26] Stroock, D. W., *Markov Process from K. Itô's Perspective*. Annals of Mathematics Studies, n. 155, Princeton University Press, 2003.
- [27] Troncoso, R. M. M., *Controlabilidade e Contrabilidade Local de Sistemas de Controle*. Dissertação de Mestado - IMECC-UNICAMP, 1995.

- [28] Young, L. C.: *An inequality of Hölder type, connected with Stieljes integration*. Acta Math., n.67, 1936, pp. 251-258.

ÍNDICE REMISSIVO

p -variação

- controlada, 14
- de um caminho, 10, 84
- finita, 10

Área

- de Levy, 87

Aplicação

- γ -Lipschitz, 30
- assinatura, 75
- assinatura truncada, 75
- avaliação de ponto final, 64
- campo, 31, 32
- de dilatação, 81
- de Itô, 34
- de Lyons, 76
- norma homogênea, 81
 - simétrica, 81
 - sub-aditiva, 81

Aproximação

- geodésica de um caminho, 18
- poligonal de um caminho, 18

Assinatura

- de um caminho, 73
- truncada de um caminho, 73

Caminho

- geodésico, 17

rugoso, 87

- rugoso geométrico, 87

Concatenação

- contínua entre caminhos, 31, 93
- contínua simples entre caminhos, 73

Conjugação

- de classe C^k entre sistemas rugosos, 101
- entre sistemas rugosos, 100

Conjunto

- conexo por trajetórias, 44
- de acessibilidade
 - de um sistema de Young, 32
 - de um sistema rugoso, 98
 - regular de um sistema de Young, 53
- fechado
 - por concatenações contínuas, 31, 94
 - por reparametrizações positivas, 31
- localmente
 - conexo por trajetórias, 44, 99
 - simplesmente conexo por trajetórias, 46
- semi-localmente
 - simplesmente conexo por trajetórias, 47, 99

Função de controle, 13

Homotopia

- p -monotônica, 38

p -monotônica regular, 67
 p -rugosa, 94
 estocástica, 109

Integral
 de Riemann-Stieltjes, 22
 no sentido de Young, 28

Levantamento de Lyons, 76

Métrica
 da p -variação, 11
 da convergência uniforme, 11
 de Carnot-Caratheodory, 84

Movimento Browniano “enhanced”, 88

Norma
 da p -variação, 11
 da convergência uniforme, 11

Propriedade de cancelamento à direita, 44, 99

Séries formais, 71

Sinal
 (ou controle) de integração, 31, 32
 regular, 53

Sistema
 de Young, 32
 reversível, 37
 consistente, 34
 regular, 53
 rugoso, 94

Solução
 de uma equação de Young, 30
 de uma equação diferencial rugosa, 91

Suporte
 associado a uma variável aleatória, 107
 de uma probabilidade, 107

Teorema
 de Cauchy-Peano, 31

 de Chen, 73
 generalizado, 77
 de Picard-Lindelöf, 31
 de Wong-Zakai, 91
 de Young, 24
 do suporte de Stroock-Varadhan, 107

Trajetórias
 p -monotonicamente homotópicas, 38
 p -monotonicamente regulares homotópicas,
 67
 p -rugosamente homotópicas, 94
 de um sistema de Young, 32
 de um sistema rugoso, 94
 estocasticamente homotópicas, 109
 regulares de um sistema de Young, 53