
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

**Modelagem e simulações do
comportamento evolutivo de poluentes em
corpos aquáticos de grande extensão: o
caso da represa do rio Manso**

Leidy Diane Wolmuth

Mestrado em Matemática Aplicada

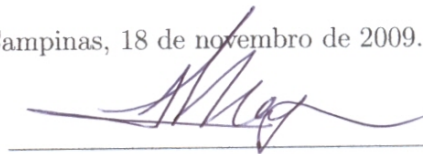
Orientador: Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Campinas
2009

Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: o caso da represa do rio Manso

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Leidy Diane Wolmuth** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de novembro de 2009.



Prof. Dr. João Frederico da Costa
Azevedo Meyer
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
2. Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
3. Prof^ª. Dra. Vera Lúcia da Rocha Lopes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Wolmuth, Leidy Diane

W836m Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes
em corpos aquáticos de grande extensão : o caso da represa do rio
Manso/Leidy Diane Wolmuth-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Impacto ambiental. 2.Método dos elementos finitos. 3.Simulação
por computador. 4.Equações diferenciais parciais. I. Meyer, João
Frederico da Costa Azevedo. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Modeling and simulation of the evolutive behavior of pollutants in aquatic
spills in large water bodies: the case of the dam's Manso river

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Environmental impact. 2. Finite element method.
3.Computational simulation. 4. Partial differential equations.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: João Frederico da Costa Azevedo Meyer (IMECC-UNICAMP)
Vera Lúcia Rocha Lopes (IMECC-UNICAMP)
Geraldo Lúcio Diniz (ICET - UFMT)

Data da defesa: 09/10/2009

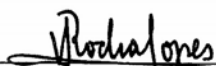
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de outubro de 2009 e aprovada

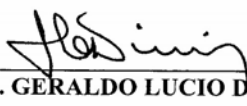
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER



Prof. (a). Dr (a). VERA LUCIA DA ROCHA LOPES



Prof. (a). Dr (a). GERALDO LUCIO DINIZ

Agradecimentos

Ao Joni, meu mestre, orientador e amigo, pelo apoio nas horas de dificuldade acadêmica e paciência infinita.

Ao Prof. Geraldo Diniz, que me ensinou os primeiros passos na biomatemática, pela grande ajuda, incentivo e apoio.

A professora Vera Lopes pela contribuição para o aprimoramento deste trabalho.

À minha querida mãe que mesmo longe sempre me animou e torceu muito.

Aos amigos: Juliana e Douglas pela amizade, carinho e companhia nas horas difíceis, pelos vários finais de semana de muito estudo, qualquer palavra que eu diga não exprime meu sentimento carregado de gratidão e carinho.

Aos amigos na pós-graduação: Salvador, André, Luciana Takata, Nana e aos demais colegas, pela ajuda e pelos bons momentos.

Aos professores do departamento de matemática da UFMT que sempre acreditaram e apostaram em mim.

A Claider, grande amiga, que junto com minha mãe fizeram de tudo para que eu pudesse estudar, sempre me incentivando e ajudando no início desta caminhada.

*Ao Rosalvo: grande amor e
companheiro. É a você que de-
dico este trabalho. Sem seu
apoio, paciência e amor, tudo
seria muito mais difícil.*

Resumo

Este trabalho modela o comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão. O tratamento é bidimensional na variável espacial, que descreve a superfície de um lago ou represa, por exemplo, e a concentração de poluentes é considerada em cada ponto, e a cada instante.

O modelo apóia-se no uso de uma Equação Diferencial Parcial de Difusão-advecção com certas características especiais nas condições de contorno expressas, de modo genérico, numa expressão dita de Robin. Dada a geometria (em geral obtida via mapas ou imagens aéreas), a solução da EDP resultante desta modelagem é usada não em sua formulação clássica, mas num ambiente variacional (ou fraco), e é aproximada por métodos de comprovada confiabilidade, o método de Elementos Finitos via Galerkin para o espaço e o método de Crank-Nicolson para o tempo (ambos métodos de segunda ordem de aproximação). Um algoritmo para simulações computacionais é apresentado num ambiente Matlab, bem como alguns resultados numéricos usados para a produção de saídas gráficas qualitativamente adequadas para se avaliarem cenários possíveis de impacto.

Abstract

This work presents a model for the evolutive description of the movements of pollutant spills in large water bodies. It uses a bidimensional spatial approach in modelling a lake or a reservoir, for example and considers pollutant concentration on each planar point and at each moment in time. For this, the Diffusive-advective Partial Differential Equation is adopted with special border conditions, expressed, generically in the Robin formulation. Due to the geometry of the studied domain (in general obtained from aerial imagery), the solution of the resulting PDE is not used in its strong formulation but rather in the weak or variational one, and it is approximated with reliable methods: Galerkin Method through the Finite element option for space, as well as Crank-Nicolson for approximation in time (both of these methods are of second order). An algorithm for this numerical scheme is presented in a Matlab environment and numerical results are graphically presented in order to enable a qualitative evaluation of possible impact scenarios.

Lista de Figuras

4.1	Localização do Lago de Manso	25
4.2	Lago de Manso e seus principais afluentes	27
4.3	O Domínio Ω discretizado	28
5.1	Localização das fontes e fronteira onde há plantação	30
5.2	Cenário 1	32
5.3	Cenário 1 (pontos)	33
5.4	Cenário 2	33
5.5	Cenário 2 (pontos)	34
5.6	Cenário 3	35
5.7	Cenário 3 (pontos)	35
5.8	Cenário 4	36
5.9	Cenário 4 (pontos)	36
5.10	Cenário 5	37
5.11	Cenário 5 (pontos)	37
5.12	Cenário 6	38
5.13	Cenário 6 (pontos)	38
5.14	Cenário 7	39
5.15	Cenário 7 (pontos)	39
5.16	Cenário 8	40
5.17	Cenário 8 (pontos)	40
B.1	Representação da transformação que leva do triângulo de referência para um triângulo qualquer	51

Lista de Tabelas

1.1	Número de usinas no Brasil / Fonte: ANEEL	3
5.1	Parâmetros utilizados nas simulações de cenários	32

Sumário

1	Introdução	2
2	O modelo clássico	7
3	A formulação variacional	10
3.1	Aproximações Espaciais	12
3.2	Aproximações temporais	14
3.3	Existência e unicidade da solução fraca	16
4	A represa do rio Manso	23
4.1	Um pouco de História	23
4.2	Bacias de contribuição do rio Manso	26
4.3	Características climáticas	28
5	Simulações Numéricas	30
5.1	Simulação de Cenários	31
5.2	Conclusões	40
A	Formulação Variacional	45
B	O Método de Elementos Finitos	50
C	Códigos fonte	55

Capítulo 1

Introdução

No Brasil em 1889 houve a inauguração da primeira usina hidrelétrica (UH) de grande porte denominada Marmelos, no Rio Paraibuna, Município de Juiz de Fora, MG.

A partir de 1920, o Brasil teve aumentado o número de usinas hidrelétricas instaladas para atender às demandas que foram exigidas pela indústria e pela sociedade da época.

Em 1960 iniciaram-se as negociações sobre aquela que seria a maior usina em operação do mundo: a usina hidrelétrica de Itaipu Binacional. Já em 1987, foi aberto o canal de desvio do rio Paraná e, em 1991, entrou em funcionamento a última das 18 unidades geradoras.

O aproveitamento de determinado curso de água, deve levar em conta que o barramento atenda múltiplas funções para ser considerado sustentável, ou seja, não pode atender a apenas uma função e desprezar as outras. Assim, devem ser observadas as peculiaridades de cada local, visando melhorá-la e atender outras, dentro do que segue:

- Geração de energia elétrica;
- Controle de cheias e estiagens;
- Navegação;
- Irrigação;
- Turismo e esportes;
- Piscicultura;
- Desenvolvimento regional (social) etc.

Quanto à função, os aproveitamentos podem ser classificados em:

1. Exclusivo para produção de energia elétrica: que é o caso mais comum nas bacias hidrográficas montanhosas, com altas quedas e pequenas vazões, normalmente utilizadas para as pequenas centrais hidrelétricas. A geração por este tipo de queda é menos impactante ao meio ambiente;
2. Aproveitamento múltiplo: são casos de rios com declividade acentuada e uniforme e grande volume de águas (ex. Três Marias).

A tabela abaixo, representa a matriz de energia elétrica no Brasil, de empreendimentos em operação.

Tabela 1.1: Número de usinas no Brasil / Fonte: ANEEL

Fonte	Número de usinas	%
Hidrelétrica	814	78,76
Gás	122	10,42
Petróleo	798	4,93
Biomassa	337	5,14
Nuclear	2	1,76
Carvão mineral	8	1,28
Eólica	36	0,53

O potencial hidráulico é proporcionado pela vazão hidráulica e pela concentração dos desníveis existentes ao longo do curso de um rio. Isto pode se dar de forma natural, quando o desnível está concentrado numa cachoeira ou através de uma barragem, quando pequenos desníveis são concentrados na altura da barragem ou através de desvio do rio de seu leito natural, concentrando-se os pequenos desníveis nesse desvio.

Basicamente, uma usina hidrelétrica compõe-se das seguintes partes: barragem, sistemas de captação e adução de água, casa de força e sistema de restituição de água ao leito natural do rio (Furnas (2008) [28]).

A água captada no lago formado pela barragem é conduzida até a casa de força através de canais, túneis e/ou condutos metálicos. Após passar pela turbina hidráulica, na casa de força, a água é restituída ao leito natural do rio, através do canal de fuga.

Dessa forma, a potência hidráulica é transformada em potência mecânica quando a água passa pela turbina, fazendo com que esta gire, e, no gerador, que também gira acoplado mecanicamente à turbina, a potência mecânica é transformada em potência elétrica.

A energia assim gerada é levada através de cabos ou barras condutoras dos terminais do gerador até o transformador elevador, onde tem sua tensão (voltagem) elevada

para adequada condução, através de linhas de transmissão, até os centros de consumo. Daí, através de transformadores abaixadores, a energia tem sua tensão levada a níveis adequados para utilização pelos consumidores, ver Furnas [23].

Atualmente, é a principal fonte geradora de energia elétrica para mais de 30 países e representa cerca de 20% de toda a eletricidade gerada no mundo. Em função do potencial hídrico é que no Brasil se optou por esse tipo de geração, mas temos que enfrentar problemas ambientais decorrentes da instalação de hidrelétricas (Oliveira (2006) [15]). Dentre eles podemos citar os fatores abióticos e fatores bióticos.

Os fatores abióticos, também chamados não vivos, são a atmosfera, a água, o solo, a temperatura e a luminosidade. Abaixo definimos alguns fatores abióticos.

Redução da concentração de oxigênio: Ocorre devido a mudança do meio lótico¹ para lântico ².

Estratificação térmica: ocorre no lago formado pela barragem onde, na parte mais profunda, forma-se camadas de água com diferentes temperaturas e, conseqüentemente, camadas com diferentes concentrações de oxigênio, o que limita o desenvolvimento de espécies aquáticas a uma camada específica.

Estratificação hidráulica: a estratificação hidráulica também forma várias camadas de água com diferentes concentrações de material hidrotransportado, inclusive nutrientes.

Retenção de material sólido hidrotransportado: o material sólido é hidrotransportado pelos rios que desaguam no reservatório, este material decanta no fundo do reservatório causando o assoreamento do mesmo.

Variação do nível e da vazão do reservatório: a inconstância das tomadas de água, que dependem da demanda de energia elétrica, pode causar erosão das margens e piracemas ³ fora da época. Neste caso, o estudo estatístico da demanda de energia elétrica e de épocas de cheia ou secas, ajuda a programar uma tomada de água mais constante, diminuindo as oscilações do nível de água do reservatório.

Elevação dos níveis freáticos: a pressão hidrostática pode aumentar os níveis freáticos da região, causando uma maior ocorrência ou inversão dos lençóis freáticos. Podendo causar a poluição dos poços artesianos.

Clima: Para sabermos a influência de um reservatório no clima de uma região, precisamos entender as condições meteorológicas anteriores à formação do lago e verificar quais os fatores que determinam as propriedades do clima desta região.

Temperatura: as médias de temperatura podem apresentar variação nesta região,

¹Águas lóticicas são águas correntes, por exemplo as de rios.

²Águas lânticas são águas paradas, por exemplo as de lagos, lagoas e represas.

³Migração de peixes para a reprodução.

pois áreas que anteriormente eram protegidas por vales, ou protegidas de ventos podem ficar expostas à margem do novo lago.

Umidade relativa: em regiões de baixa umidade, o reservatório propicia a evaporação o que causa um aumento na umidade relativa do ar, no microclima local.

Insolação: o aumento da umidade relativa do ar, devido a barragem, pode causar a redução da quantidade de horas de incidência solar nas regiões próximas da barragem.

Geologia: o aumento da pressão hidrostática, produzido pela ação da água infiltrada, pode diminuir a resistência das rochas, reativar falhas geológicas, quebrar camadas rochosas e alterar a resistência do substrato.

Aumento na frequência de abalos sísmicos: os abalos sísmicos devido a barragem variam de acordo com a região, a velocidade de enchimento do reservatório e o tamanho da coluna de água. Mas os abalos são raros, e quando ocorrem, são percebidos após o reservatório atingir sua cota máxima.

Os fatores bióticos, termo que designa todos os elementos vivos e suas relações, que se configuram como condição fundamental para a existência das populações que formam um ecossistema. Por exemplo, a presença de uma espécie em número suficiente para assegurar a alimentação de outra condiciona a existência e a saúde desta última.

Abaixo definimos alguns fatores bióticos.

Produção de gases sulfídricos e de metano: a redução do oxigênio devido a decomposição da vegetação submersa é responsável pelo surgimento de gases sulfídricos e metano que causam a chuva ácida e o efeito estufa, respectivamente.

Eutrofização da água: a eutrofização da água é devido a alta concentração de nutrientes o que aumenta o surgimento de macrófitas.

Proliferação de algas: a redução de oxigênio faz com que haja a proliferação de algas, o que altera a cor, odor e o gosto da água.

Proliferação de macrófitas: a proliferação de macrófitas aumenta com a eutrofização da água, e é responsável pela proliferação de insetos e caramujos.

Redução do oxigênio dissolvido: prejudica as formas de vida aeróbicas, acelera o surgimento de algas e a produção de gases.

Ameaça à biodiversidade local: devido o alagamento de grandes regiões de mata, pode ocorrer a diminuição da biodiversidade local e ameaçar espécies de vegetais existentes apenas na região atingida. A preservação de matas nativas próximas às áreas alagadas é essencial à manutenção da vida animal. Também deve ser feito o resgate e cultivo de espécies vegetais em unidades de conservação, para manter a biodiversidade.

Deslocamento de animais de seu habitat natural: para redução do impacto ambiental deve-se resgatar a fauna, e também preservar áreas importantes dos ecossistemas

com risco de alterações. Infelizmente há um desequilíbrio nos habitats onde foram introduzidos os animais resgatados, o que acaba causando a morte dos animais resgatados como dos outros que já viviam na região, devido a competição entre as espécie.

Alterações das espécies aquáticas no reservatório: devido a mudança do ambiente de lótico para lêntico, os organismos que necessitam de ambientes lótico acabam migrando para os rios que contribuem para o reservatório.

Influência e obstáculos na ocorrência da piracema: as oscilações do nível do reservatório acabam por causar a piracema em períodos anormais. Também as barragens constituem grandes obstáculos à Piracema, reduzindo o espaço da migração e muitos peixes acabam se reproduzindo próximo aos canais de fuga das represas, o que representa o maior impacto sobre a vida aquática.

Este trabalho pretende modelar o comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão. O tratamento é bidimensional na variável espacial x , que modela a superfície, e a concentração de poluentes $C(x, t)$ é considerada em cada ponto x ($x = (x, y)$) e em cada instante t .

A solução da EDP resultante desta modelagem será aproximada por métodos de comprovada confiabilidade e um algoritmo para simulações computacionais e resultados numéricos com estimativas de erro conhecidas será usado na produção de saídas gráficas qualitativamente adequadas para se avaliarem cenários possíveis de impacto.

O objetivo deste esforço é o de disponibilizar a órgãos e autoridades locais um instrumento matemático e um algoritmo para avaliar cenários, estratégias ou políticas de contenção e combate a impacto e preservação ambiental no domínio em estudo.

O trabalho está organizado em 4 capítulos.

O capítulo 2 apresenta a formulação clássica do problema, bem como o modelo proposto com as respectivas condições de fronteira e domínios trabalhados nas simulações.

O capítulo 3 traz a formulação fraca do modelo completo, bem como a existência e unicidade da solução fraca e a discretização espaço-temporal do problema.

O capítulo 4 fala sobre o lago de Manso.

No capítulo 5 são apresentadas as simulações realizadas em ambiente matlab e os resultados obtidos e as conclusões.

Capítulo 2

O modelo clássico

Apresentaremos a equação de difusão-advecção para C , representando a concentração de poluentes em corpos aquáticos, onde $C = C(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in J = (0, T] \subset \mathbb{R}$, C de classe $\mathcal{C}^2$ em Ω .

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \{div(fluxo)\} + \{decaimento\} = \{fonte\}, \quad (2.1)$$

com condições adequadas tanto inicial quanto de contorno.

Vamos considerar o fluxo em duas parcelas: o fluxo advectivo modela os movimentos macroscópicos da lagoa, resultantes de movimentos do próprio meio, causados pela correnteza, e difusivo, optando pela modelagem da difusão efetiva, que contém os efeitos da difusão molecular e da turbulenta. Assim,

$$fluxo = fluxo_{advectivo} + fluxo_{difusivo}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2, \quad (2.2)$$

onde $\vec{J}_1$ é o fluxo difusivo e $\vec{J}_2$ é o fluxo advectivo.

Segundo a lei de difusão de Fick, (ver referências: Okubo (2002) [8], Marchuck (1986)[6]), o fluxo $\vec{J}_1$ de poluente é proporcional ao gradiente da densidade do poluente. No caso unidimensional, a quantidade de poluentes transportados na direção x através de uma área unitária normal em uma unidade de tempo, isto é, o fluxo J_1 é proporcional ao gradiente da concentração do poluente. Assim, $J_1 = -\alpha \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$, onde C é a concentração do poluente e α é a difusibilidade. Utilizando a lei de Fick, a equação de difusão em espaço unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial J_1}{\partial x} = \frac{\partial(-\alpha \cdot \frac{\partial C}{\partial x})}{\partial x} \quad (2.3)$$

Ampliando a dimensão do espaço, podemos representar a equação de difusão da seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(J_1) = \text{div}(-\alpha \nabla C) \quad (2.4)$$

As partículas em movimento na água tomam velocidade e participam de uma rede de movimentos coletivos. Seja v a velocidade da água, logo o fluxo do poluente é dado por $\vec{J}_2 = vC$, onde toda quantidade pode variar com o espaço e o tempo. Para o caso unidimensional temos a seguinte equação de transporte:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[v(x, t)C(x, t)] \quad (2.5)$$

ou, em espaço de dimensão arbitrária

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(\vec{V}C) \quad (2.6)$$

sendo o campo $V(x, y, t)$, tal que $\text{div}(V) = 0$.

O termo de decaimento descreve como se comporta a perda de massa no sistema, e assumiremos que esta perda é proporcional à própria concentração de poluente.

Em termos de modelagem clássica destes fenômenos, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\text{difusão}\} &= (\text{div})[-\alpha \nabla C] \text{ (Okubo(2002)[8])} \\ \{\text{transporte advectivo}\} &= \text{div}(\vec{V}C) \text{ (Edelstein(1988)[7])} \\ \{\text{decaimento}\} &= \sigma C \text{ (Bassanezi(1988)[11])} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Resulta, portanto, que a equação adotada para modelar o processo de dispersão efetiva de poluentes no domínio aquático é dada por: $C = C(x, y, t)$ num espaço adequadamente definido, já que exige-se minimamente que $C \in \mathcal{C}^2(\Omega)$,

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \Delta C + \text{div}(\vec{V}C) + \sigma C = f, (x, y) \in \Omega, t \in J = (0, T] \quad (2.8)$$

onde o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dadas as dimensões geofísicas do estudo, ainda:

α = é a constante de difusibilidade do poluente no meio aquático, que consideraremos constante, e ficando determinado somente pelas condições do meio em que se difunde (Murray (2008) [10]).

σ = é a taxa de decaimento total no meio aquático.

$\vec{V}$ = é o campo das velocidades.

f = é uma ou várias fontes de poluente, pontuais ou não.

As condições de fronteira $\forall t \in J$ serão dadas por:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta}|_{\Gamma_0} = 0, (Von\ Neumann), \quad (2.9)$$

nas regiões onde há rocha ou concreto, indicando que a presença de poluentes não muda na direção da normal exterior a $\Gamma_0 \in \partial\Omega$.

Onde há mata ou região de pântano ou lodo, as condições de contorno adotadas serão

$$-\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = k_i C, (Robin) \quad (2.10)$$

com $i = 1, 2$ onde k_1 indica que há mata e k_2 indica a região em que há pântano ou lodo, sendo que $k_1 > k_2$. Para os locais onde há plantações, a condição de contorno adotada será:

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta}|_{\Gamma_3} = g, \quad (2.11)$$

indicando o escoamento de produtos agroquímicos, numa taxa g na direção da normal exterior a Γ_3 .

A fronteira da região Ω será dada por $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ onde $\Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$ para $k \neq l$, onde $k, l = 0, 1, 2, 3$.

Na realidade, a condição de contorno pode ser descrita de modo genérico como

$$aC + b \frac{\partial C}{\partial \eta} = g \quad (2.12)$$

e, com adequadas escolhas de a, b e g , se definem as condições (2.9), (2.10) e (2.11).

Capítulo 3

A formulação variacional

A formulação clássica ou forte exige condições de regularidade analítica que problemas ambientais simplesmente não tem.

Além disto, as geometrias envolvidas eliminam, com as ferramentas de que dispomos hoje, a possibilidade de exibir qual é a solução analítica $C(x, y, t)$. Isto nos leva naturalmente a métodos de aproximação, cujos instrumentos também não têm as exigências de regularidade que a formulação forte exige.

A opção natural é a de optar pela formulação variacional ou fraca em que as necessidades exigidas de regularidade são sensivelmente menos restritivas, devido ao uso de derivadas no sentido de distribuições e de integrais de Lebesgue, (Bartle (1995) [1]).

Uma observação pertinente é a de que se houver solução do problema na formulação (2.1) esta será, também, a solução do problema na concepção variacional.

A partir da formulação forte ou clássica dada em (2.8), passamos à formulação fraca ou variacional que permite ampliar a possibilidade de se operar com condições de menor regularidade. Em outras palavras, a preferência é trabalhar em subespaços adequados de $L^2((0, T], H^1(\Omega))$, além de considerar derivadas no sentido de distribuições.

Olhando para a formulação clássica, percebemos que C deve pertencer ao $\mathcal{C}^2(\Omega)$, mas estamos procurando a solução num espaço mais amplo, com a vantagem de que as funções de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ também pertençam a este espaço. De modo geral Ω ¹, é um domínio pertencente a $\mathbb{R}^2$, com fronteiras $\partial\Omega$ convenientes. Definimos então, o espaço das funções de quadrado integráveis no sentido de Lebesgue, sobre o domínio Ω , denotado por $L^2(\Omega)$, onde o produto interno é dado por:

$$(u|v) = \int \int_{\Omega} (uv) d\Omega \quad (3.1)$$

¹considerando Ω aberto limitado.

e, para a norma, temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

para u, v pertencentes a $L^2(\Omega)$. Mas precisamos que as derivadas parciais fracas com relação a x e y sejam de quadrado integráveis também, por isso vamos trabalhar no espaço $H^1(\Omega)$. Este espaço é um espaço de Sobolev (ver Oden (1983) [3]), onde as funções são quadrado integráveis, bem como são suas derivadas no sentido de distribuições.

$$H^1(\Omega) = \left\{ \nu(x, y) \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \nu}{\partial x}, \frac{\partial \nu}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (3.3)$$

Em $H^1(\Omega)$ temos

$$(u|v)_{H^1(\Omega)} = (u|v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \middle| \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \middle| \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{L^2(\Omega)} \quad (3.4)$$

e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

Na obtenção de aproximações da solução $C = C(x, y, t)$, usaremos para variáveis espaciais o Método de Galerkin e, no tempo, um método passo-a-passo.

Vamos trabalhar com a formulação variacional da equação (2.8), que consiste em:

- (1) considerar as derivadas do modelo clássico no sentido de distribuições;
- (2) efetuar o produto interno de cada termo da formulação clássica por ν denominada função teste, sendo esta pertencente a um espaço adequado $H^1(\Omega)$.

Seja $C = C(x, y, t) \in \mathcal{V}$, onde

$$\mathcal{V} = \left\{ C \in L^2((0, T], H^1(\Omega)) : \frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in (0, T] \right\}, \quad (3.6)$$

Se aplicarmos o produto interno de cada termo da EDP em (2.8) por $\nu \in H^1(\Omega)$ com $C \in \mathcal{V}$, $\forall t \in (0, T]$, obtemos:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \middle| \nu \right)_{\Omega} - \alpha (\Delta C | \nu)_{0, \Omega} + (\operatorname{div}(VC) | \nu)_{0, \Omega} + \sigma(C | \nu)_{0, \Omega} = (f | \nu)_{0, \Omega} \quad (3.7)$$

As condições de contorno dadas em (2.9), (2.10) e (2.11) serão incorporadas a esta formulação mais adiante.

Para a aproximação espacial via Galerkin, faremos uso de método dos Elementos Finitos (Oden (1983)[3, 4], Ciarlet (2002) [5]) e, para as aproximações temporais, faremos uso do método de Crank-Nicolson.

3.1 Aproximações Espaciais

O método de Elementos Finitos (ver apêndice B) é uma técnica geral, especialmente adequada para construção de aproximações da solução de problemas de valor de contorno. O método envolve a divisão do domínio da solução em um número finito de subdomínios simples ou elementos simples e, em cada domínio uma função conveniente (dita função teste) que será útil na aproximação global da solução procurada. Uma solução aproximada da EDP pode ser localmente desenvolvida para cada um desses elementos². A solução total é então gerada, reunindo de modo estratégico estes domínios e suas funções.

A discretização da região Ω se dará através de Elementos Finitos triangulares de primeira ordem.

Para definir o domínio geométrico Ω_h do problema faremos uso da imagem de satélite da região de estudo, aproximando $\partial\Omega$ por $\partial\Omega_h$ através de segmentos de retas, visando refinarmos a malha do domínio Ω_h , sempre que seja necessário aproximar “mais” (em determinado sentido) Ω por Ω_h . De modo genérico podemos dizer que buscamos uma aproximação Ω_h de Ω tal que $\Omega_h \rightarrow \Omega$ quando se refina a malha.

Com o auxílio do software GMSH (Geuzaine (2008)[29]) conseguimos tal contorno e a triangularização plenamente satisfatória da região em estudo.

A partir da formulação variacional (A.2), com o uso da fórmula de Green (Oden (1983)[4]), isto é recorrendo a:

$$-\alpha(\Delta C|\nu)_{0,\Omega} = \alpha(\nabla C|\nabla\nu)_{0,\Omega} - \alpha\left(\frac{\partial C}{\partial\eta}|\nu\right)_{0,\partial\Omega}, \forall \nu \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J, \quad (3.8)$$

para $C \in \mathcal{V}$, obtém-se

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}|\nu\right)_{0,\Omega} + \alpha(\nabla C|\nabla\nu)_{0,\Omega} - \alpha\left(\frac{\partial C}{\partial\eta}|\nu\right)_{0,\partial\Omega} + u\left(\frac{\partial C}{\partial x}|\nu\right)_{0,\Omega} + v\left(\frac{\partial C}{\partial y}|\nu\right)_{0,\Omega} + \sigma(C|\nu)_{0,\Omega} = (f|\nu)_{0,\Omega} \quad (3.9)$$

$$\forall \nu \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in (0, T].$$

Tomemos H_h um subespaço vetorial de $H^1(\Omega)$ de dimensão finita N_h , cuja base é dada por $\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$. A solução da nossa equação será construída nesse espaço. Com o método de Galerkin ganhamos uma separação de variáveis não só da solução, mas também no espaço em que buscamos nossa solução aproximada. Esta separação de variáveis é dada por

²Na verdade embora haja um uso costumeiro de “elemento” como o subdomínio espacial, trata-se de uma terna: o subdomínio, a função aí definida e seu grau

$$C(x, y, t) \cong C_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_h} c_j(t) \varphi_j(x, y). \quad (3.10)$$

Com este espaço H_h , e a separação indicada em (3.10), define-se, para a solução aproximada, um novo subespaço $\mathcal{V}_h$ de $\mathcal{V}$ das funções nesta forma.

Assim, obtem-se a equação para $C_h \in \mathcal{V}_h$ tal que:

$$\left(\frac{\partial C_h}{\partial t} | \nu\right)_{0,\Omega} + \alpha(\nabla C_h | \nabla \nu)_{0,\Omega} - \alpha\left(\frac{\partial C_h}{\partial \eta} | \nu\right)_{0,\partial\Omega} + u\left(\frac{\partial C_h}{\partial x} | \nu\right)_{0,\Omega} + v\left(\frac{\partial C_h}{\partial y} | \nu\right)_{0,\Omega} + \sigma(C_h | \nu)_{0,\Omega} = (f | \nu)_{0,\Omega}. \quad (3.11)$$

A idéia central é que obtenhamos nossa solução como o produto de funções independentes nas variáveis espaciais e temporal.

Usando a aproximação dada por (3.10) com a formulação variacional (3.11), e usando

$$\frac{\partial C_h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \varphi_j(x, y) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{dc_j}{dt}(t) \varphi_j(x, y), \quad (3.12)$$

portanto no subespaço $\mathcal{V}_\zeta$, queremos $C_h \in \mathcal{V}_\zeta$ tal que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C_h}{\partial t} | \nu_h\right)_{0,\Omega} + \alpha(\nabla C_h | \nabla \nu_h)_{0,\Omega} - \alpha\left(\frac{\partial C_h}{\partial \eta} | \nu_h\right)_{0,\partial\Omega} + u\left(\frac{\partial C_h}{\partial x} | \nu_h\right)_{0,\Omega} + v\left(\frac{\partial C_h}{\partial y} | \nu_h\right)_{0,\Omega} + \\ & \sigma(C_h | \nu_h)_{0,\Omega} = (f | \nu_h)_{0,\Omega}, \forall \nu_h \in H_h. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ora, isto nos leva a:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_j \frac{dc_j}{dt} \varphi_j | \varphi_i\right)_{0,\Omega} + \alpha\left(\sum_j c_j \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i\right)_{0,\Omega} + k_1\left(\sum_{j \in \Gamma_1} c_j \varphi_j | \varphi_i\right)_{0,\Gamma_1} + k_2\left(\sum_{j \in \Gamma_2} c_j \varphi_j | \varphi_i\right)_{0,\Gamma_2} + \\ & u\left(\sum_j c_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i\right)_{0,\Omega} + v\left(\sum_j c_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i\right)_{0,\Omega} + \sigma\left(\sum_j c_j \varphi_j | \varphi_i\right)_{0,\Omega} = (f | \varphi_i)_{0,\Omega} + (g | \varphi_i)_{0,\Gamma_3}, \quad \forall \varphi_i \in \beta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na expressão (3.14), a notação $j \in \Gamma_j$ indica que a somatória se restringe aos nós da triangularização que estão naquela parte de $\partial\Omega_h$ que descreve ou aproxima Γ_i .

Temos, então, via aproximação de Galerkin, nas variáveis espaciais, o seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \alpha \sum_j c_j(t) (\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + k_1 \sum_{j \in \Gamma_1} c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_1} + \\
& k_2 \sum_{j \in \Gamma_2} c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_2} + u \sum_j c_j(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_{0,\Omega} + v \sum_j c_j(t) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right)_{0,\Omega} + \\
& \sigma \sum_j c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} = \sum_j f_j(t) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + g \sum_{j \in \Gamma_3} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_3}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para $j = 1, \dots, N_h$ e $\forall \varphi_i \in \beta$.

Em outras palavras e, numa linguagem matricial para EDOs,

$\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{RC} + \mathbf{b}$, com $\mathbf{C}(0)$ dado, já que $C_0(x, y)$ é a condição inicial aproximada por $C(0)$.

Como, da formulação forte, se tem:

$$C(x, y, t) |_{t=0} = C(x, y, 0) = C_0(x, y).$$

A condição inicial, muitas vezes aproximada pela relação vetorial

$C_j = C_0(x_j, y_j)$, sendo também dada (e muitas vezes mais adequadamente) por

$$\sum_j C_j^0 (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} = \sum_j C_0(x_j, y_j) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega}$$

ou, de modo matricial,

$$\mathbf{MC}^0 = \mathbf{M}(C_0(x_j, y_j))_{j=1}^n.$$

3.2 Aproximações temporais

As aproximações temporais serão dadas pelo Método de Crank-Nicolson, que consiste em tomarmos a aproximação em um ponto intermediário no tempo $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Assim, temos as aproximações

(i) da derivada temporal

$$\frac{dc_j^{n+1/2}}{dt} \cong \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \tag{3.16}$$

onde o índice n representa o passo no tempo e

(ii) para os coeficientes c_j e o termo fonte, dados pelas componentes f_j ,

$$c_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2} \quad \text{e} \quad f_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f_j^{n+1} + f_j^n}{2}. \tag{3.17}$$

Isto fornece, para (3.14), a aproximação:

$$\begin{aligned}
& \sum_j (c_j^{n+1} - c_j^n)(\varphi_j|\varphi_i)_{0,\Omega} + \sum_j (c_j^{n+1} + c_j^n) \left\{ \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j || \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + \frac{u \cdot \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_{0,\Omega} + \right. \\
& \quad \left. \frac{v \cdot \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right)_{0,\Omega} + \frac{\sigma \cdot \Delta t}{2} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} \right\} + \frac{k_1 \cdot \Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_1} (c_j^{n+1} + c_j^n)(\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_1} + \\
& \quad \frac{k_2 \cdot \Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_2} (c_j^{n+1} + c_j^n)(\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_2} = \Delta t \sum_{j=1}^n f_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \Delta t \sum_{j \in \Gamma_3} g_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Gamma_3},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

considerando que g_j permanece constante ao longo do tempo.

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{n+1} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i || \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} + u \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{0,\Omega} + \right. \\
& \quad \left. v \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)_{0,\Omega} \right\} + k_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_1} c_j^{n+1} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} + k_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_2} c_j^{n+1} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} = \\
& \quad \sum_j c_j^n \left\{ \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i || \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} - u \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{0,\Omega} - \right. \\
& \quad \left. v \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)_{0,\Omega} \right\} - k_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_1} c_j^n (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} - k_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_2} c_j^n (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} + \\
& \quad \Delta t \sum_{j=1}^n f_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \Delta t \sum_{j \in \Gamma_3} g_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_3}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

³ ou, também na forma matricial,

$$Ac^{n+1} = Bc^n + d$$

onde

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i || \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} + k_1 \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} + k_2 \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} + \\
& u \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{0,\Omega} + v \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)_{0,\Omega},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

³Para efeito de “tradução” deste esquema numérico para uma linguagem algorítmica, os índices usados em (3.18) correspondendo à discretização, passam a ser escritos de modo conveniente para se programarem os produtos algébricos. Daí a troca criteriosa dos índices.

$$b_{ij} = [1 - \frac{\sigma \Delta t}{2}] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} - k_1 \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} - k_2 \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} - u \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x})_{0,\Omega} - v \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial y})_{0,\Omega} \quad (3.21)$$

e

$$d_i = \Delta t \sum_{j=1}^n (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \Delta t \sum_{j \in \Gamma_3} g_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_3}. \quad (3.22)$$

O sistema acima será resolvido iterativamente no tempo, a partir da condição inicial C^0 , pontualmente fornecida.

3.3 Existência e unicidade da solução fraca

Em termos da existência e unicidade da solução desejada, sua garantia pode ser dada, para situações como aquela descrita em (3.9), a partir de um resultado clássico de (Lions (1961) [9]) e desenvolvida para o contexto das equações que modelam problemas de poluição de corpos aquáticos, como feito nos trabalhos de Diniz (2003) [12], Oliveira (2003)[18], Meyer (1988)[20].

Nestes trabalhos, o que se verifica, a rigor, é que os operadores usados na descrição dos problemas em sua formulação variacional, satisfazem às hipóteses do teorema de Lions (Lions (1961) [9]), vamos nos basear nos passos seguidos por Diniz, na demonstração da existência e unicidade da solução fraca do problema (3.9).

Nesta situação, garante-se que existe e é única a solução do problema (2.8)-(2.11). Esta prova é necessária de modo fundamental para que, em seguida, se possa verificar, também com referência a outros trabalhos do grupo (Biomatemática/IMECC/UNICAMP), a convergência do algoritmo aqui programado. Baseado no método de Elementos Finitos via Galerkin, em conjunto com Crank-Nicolson, respectivamente nas aproximações espacial e temporal, temos que, quando as dimensões das discretizações espaciais e temporal forem a zero, as soluções aproximadas por:

$(C_j^{(n+1)})_j$ tendem à solução do problema original (2.8)-(2.11) onde, $C = C(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega$ e $t \in J$.

Esta convergência se dá com erro local de segunda ordem tanto nas variáveis espaciais quanto na temporal.

Seguindo os passos de Diniz, vamos agrupar os termos de (3.9) introduzindo a notação usada no teorema de Lions, tem-se:

$$\widehat{A}(t, \cdot) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t) + A_0 \quad (3.23)$$

o que nos fornece:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial C}{\partial t} | \nu)_{0,\Omega} + (\widehat{A}(t, C) | \nu)_{0,\Omega} + k_1(C | \nu)_{0,\Gamma_1} + k_2(C | \nu)_{0,\Gamma_2} &= (g, \nu)_{0,\Gamma_3} + (f, \nu)_{0,\Omega} + \\ ((C_0 | \nu)_{0,\Omega}) \delta_0(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\forall \nu \in H^1(\Omega), \forall t \in (0, T]$$

ou numa notação mais simplificada:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial C}{\partial t} | \nu) + A(t, C, \nu) &= L_f(\nu) \\ \text{onde} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$A(t, C, \nu) = (\widehat{A}(t, C) | \nu)_{0,\Omega} + k_1(C | \nu)_{0,\Gamma_1} + k_2(C | \nu)_{0,\Gamma_2}$$

$$L_f(\nu) = (g, \nu)_{0,\Gamma_3} + (f, \nu)_{0,\Omega} + ((C_0 | \nu)_{0,\Omega}) \delta_0(t)$$

dadas as escolhas em (3.24) de:

$$A_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} u & \text{if } i = 1 \\ v & \text{if } i = 2 \end{cases}$$

$$A_0 = \sigma$$

onde δ_0 é o operador delta de Dirac que “fixa” a condição inicial.

Agora vamos verificar se (3.25) satisfaz as hipóteses do teorema de Lions.

Teorema(Lions). Dado o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, considere os espaços $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $\mathcal{V}$ tais que: $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$ para $w = w(x, t)$ e $\nu = \nu(x, t)$, seja o operador A dado por:

$$A(t; w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0(x, t) w v dx$$

se

1. a_{ij}, a_i e $a_0 \in L^2(\Omega \times (0, T))$;
2. $\forall w, \nu \in \mathcal{V}$, a função: $\Lambda : t \rightarrow A(t; w, \nu)$ é mensurável;
3. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $|A(t; w, \nu)|^2 + \lambda \|w\|_{L^2}^2 \geq \delta \|w\|_{H^1(\Omega)}^2, \delta > 0, w \in \mathcal{V}$;
4. $|A(t; w, \nu)| \leq M \|w\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}$;
5. $L_f(\nu) = \int_{\Omega} f \nu dx + (\int_{\Omega} w_0 \nu dx) \delta_0(t)$ é contínuo;
6. $f \in L^2((-\infty, T); L^2(\Omega))$ e $w_0(x) \in L^2(\Omega)$ então, existe uma única função $w \in L^2((-\infty, T); L^2(\Omega))$ e $\{w : (-\infty, 0) \rightarrow 0\}$ que é solução do problema variacional (2.25).

Prova: Para demonstração deste teorema consultar (Lions, 1961, Teorema 1.1-capítulo IV).

Para averiguar que (3.25) satisfaz as hipóteses acima, tem-se:

1. Com efeito, é imediato verificar que A satisfaz as hipóteses 1. e 2. do teorema enunciado acima, tendo em vista as escolhas de a_{ij}, a_i e a_0 .
2. A hipótese 3. em (3.25) denominada coercividade do operador A pode ser obtida pelo que se segue:

como

$$\begin{aligned}
A(t; \nu, \nu) + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2 &= \iint_{\Omega} \hat{A}(t; \nu) \nu d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} \nu^2 d\gamma + k_2 \int_{\Gamma_2} \nu^2 d\gamma + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2 \\
&= \iint_{\Omega} \alpha \nabla \nu \cdot \nabla \nu d\mu + u \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial x} \nu d\mu + v \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial y} \nu d\mu \\
&\quad + \sigma \iint_{\Omega} \nu^2 d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} \nu^2 d\gamma + k_2 \int_{\Gamma_2} \nu^2 d\gamma + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
A(t; \nu, \nu) + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2 &= \iint_{\Omega} \alpha \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}^2 + \frac{\partial \nu}{\partial y}^2 \right) d\mu + u \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial x} \nu d\mu + v \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial y} \nu d\mu \\
&\quad + k_1 \int_{\Gamma_1} \nu^2 d\gamma + k_2 \int_{\Gamma_2} \nu^2 d\gamma + (\lambda + \sigma) \|\nu\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

temos que:

$$\|u \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial x} \nu d\mu\| \leq u \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x} \nu \right| d\mu \leq u \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right| |\nu| d\mu \leq u \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2}$$

logo

$$-\|u \iint_{\Omega} \frac{\partial \nu}{\partial x} \nu d\mu\| \geq -u \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2}$$

Assim, tomando $\zeta = \max\{\|u\|, \|v\|\}$ e aplicando a desigualdade de Hölder ao segundo e terceiro termos do lado direito da equação (3.27) temos:

$$\begin{aligned} A(t; \nu, \nu) + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2 &\geq \alpha \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \nu^2}{\partial x} + \frac{\partial \nu^2}{\partial y} \right) d\mu + (\lambda + \sigma) \|\nu\|_{L^2}^2 - \zeta \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \right) + k_1 \|\nu\|_{L^2}^2 + k_2 \|\nu\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A(t; \nu, \nu) + \lambda \|\nu\|_{L^2}^2 &\geq \alpha \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + (\lambda + \sigma + k_1 + k_2) \|\nu\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \zeta \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando o recurso clássico da desigualdade

$$a.b \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \quad \forall a, b \text{ positivos}$$

que, aplicado aos termos:

$$\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\nu\|_{L^2}^2$$

e

$$\left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\nu\|_{L^2}^2$$

somando membro a membro, chegamos a seguinte desigualdade:

$$\left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2} \right) \|\nu\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \|\nu\|_{L^2}^2$$

logo,

$$-\zeta(\|\frac{\partial \nu}{\partial x}\|_{L^2} + \|\frac{\partial \nu}{\partial y}\|_{L^2})\|\nu\|_{L^2} \geq -\frac{\zeta \epsilon}{2}(\|\frac{\partial \nu}{\partial x}\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial \nu}{\partial y}\|_{L^2}^2)\|\nu\|_{L^2} - \frac{\zeta}{2\epsilon}\|\nu\|_{L^2}^{2\epsilon}$$

logo, a desigualdade (3.28) se torna

$$A(t; \nu, \nu) + \lambda\|\nu\|_{L^2}^2 \geq (\alpha - \frac{\zeta \epsilon}{2})(\|\frac{\partial \nu}{\partial x}\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial \nu}{\partial y}\|_{L^2}^2) + (\lambda + \sigma + k_1 + k_2 - \frac{\zeta}{2\epsilon})\|\nu\|_{L^2}^2$$

Assim, tomando

$$\delta = \min\{(\alpha - \frac{\zeta \epsilon}{2}); (\lambda + \sigma + k_1 + k_2 - \frac{\zeta}{2\epsilon})\}$$

podemos escolher ζ e ϵ , de modo que $\delta > 0$ e, portanto, tem-se:

$$A(t; \nu, \nu) + \lambda\|\nu\|_{L^2}^2 \geq \delta(\|\nu\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial \nu}{\partial x}\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial \nu}{\partial y}\|_{L^2}^2) = \delta\|\nu\|_{H^1(\Omega)}^2$$

$\forall \nu \in H^1(\Omega)$, para cada $t \in (0, T)$.

A condio dada na hip3tose (4) em (3.25) denominada continuidade do operador A pode ser obtida da seguinte forma:

Dado que

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\mu + A(t, C, \nu) = L_f(\nu)$$

onde

$$\widehat{A}(t; C, \nu) = \iint_{\Omega} \widehat{A}(t; C) \nu d\mu + k_1 \int_{\Gamma_1} C \nu d\gamma + k_2 \int_{\Gamma_2} C \nu d\gamma$$

e

$$\iint_{\Omega} A(t; C) \nu d\mu = \iint_{\Omega} \alpha \nabla C \cdot \nabla \nu d\mu + u \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} \nu d\mu + v \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} \nu d\mu + \sigma \iint_{\Omega} C \nu d\mu$$

da3, para cada $t \in (0, T)$, seja $\varepsilon = \max\{|\alpha|, |\sigma|\}$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$|\alpha| \iint_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla \nu d\mu + \sigma \iint_{\Omega} C \nu d\mu \leq \varepsilon \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}$$

e, pela desigualdade de H3lder, tem-se:

$$|u| \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} \nu d\mu \leq |u| \|\frac{\partial C}{\partial x}\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \leq |u| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|v| \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} \nu d\mu \leq |v| \left\| \frac{\partial C}{\partial y} \right\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \leq |v| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}$$

dada a continuidade da imersão $H^1(\Omega)$ em L^2 , obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 \int_{\Gamma_1} C \nu d\gamma &\leq |k_1| \|C\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nu\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq |k_1| \|C\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\nu\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq |k_1| \|C\|_{L^2(\Omega)} \|\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq |k_1| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 \int_{\Gamma_2} C \nu d\gamma &\leq |k_2| \|C\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\nu\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq |k_2| \|C\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\nu\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq |k_2| \|C\|_{L^2(\Omega)} \|\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq |k_2| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

logo, temos

$$\begin{aligned} |A(t; C, \nu)| &\leq \varepsilon \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} + |u| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} + |v| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + |k_1| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} + |k_2| \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

agora, tomando $M = \varepsilon + |u| + |v| + |k_1| + |k_2|$ temos:

$$|A(t; C, \nu)| \leq M \|C\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}$$

Como o termo $L_f(\nu)$ de (3.25) é dado por:

$$L_f(\nu) = \int_{\Gamma_3} g \nu d\gamma + \iint_{\Omega} f \nu d\mu + \left(\iint_{\Omega} C_0 \nu d\mu \right) \delta_0(t)$$

e, além disso,

$$\|\nu\|_{L^2} \leq \mu(\Omega) \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \nu \in H^1(\Omega),$$

dadas as escolhas de f, g e $C_0 \in L^2(\Omega \times [0, T])$ se tem:

$$\begin{aligned} |L_f(\nu)| &= \left| \int_{\Gamma_3} g \nu d\gamma + \iint_{\Omega} f \nu d\mu + \left(\iint_{\Omega} C_0 \nu d\mu \right) \delta_0(t) \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |g \nu| d\gamma + \iint_{\Omega} |f \nu| d\mu + \left(\iint_{\Omega} |C_0 \nu| d\mu \right) \delta_0(t) \\ &\leq \|g\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} + \|C_0\|_{L^2} \|\nu\|_{L^2} \\ &\leq (\|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + \|C_0\|_{L^2}) \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

o que satisfaz as hipótese (5) e (6) do teorema de Lions.

Portanto existe uma única solução do problema (3.25), formulado variacionalmente.

Capítulo 4

A represa do rio Manso

4.1 Um pouco de História

A história da construção da Usina de Manso é herança das faraônicas obras de infraestrutura planejadas pelo governo militar. A idéia surgiu após uma grande enchente no rio Cuiabá em 1974, na qual milhares de famílias ribeirinhas ficaram desabrigadas. Desde então, começou-se a estudar a implantação de uma barragem na região que unisse um sistema de controle de cheias do rio à geração de energia, na forma de um aproveitamento múltiplo. Termo usado é hoje por Furnas para designar a UHE de Manso: APM Manso, ou Aproveitamento Múltiplo de Manso.

A principal dúvida desde o início da construção da usina era sobre os impactos dessa alteração nos sistemas de cheia do rio Cuiabá, conhecido nas décadas de 60 e 70 como um dos locais mais piscosos do Pantanal. As incertezas sobre sua eficácia e impactos adiaram a construção da usina durante décadas, mas as obras acabaram saindo do papel por influência do governador Dante de Oliveira que, no final dos anos 90, defendeu a obra como prioritária para o desenvolvimento do Estado, apesar do baixo potencial de geração de energia de Manso.

A característica de contenção dos ciclos de cheia do rio Cuiabá, uma das principais bandeiras dos defensores de Manso, também é um dos pontos mais criticados por ambientalistas e ribeirinhos. Nos anos de 1975 e de 1995, coerente com as grandes precipitações atípicas que ocorreram no período de cheia destes anos, o rio subiu acima da média, coerente com as grandes precipitações atípicas que ocorreram no período de cheia destes anos, depois da construção da Usina de Manso o rio não subiu mais como antes e a lufada¹ não ocorreu mais como anteriormente na parte alta do rio Cuiabá.

¹Lufada é um termo usado no Pantanal que significa a volta dos peixes dos campos que foram alagados no período das cheias e serviram de maternidade de várias espécies. Quando as águas começam

Um relatório conclusivo de quatro anos de monitoramento, encomendado pela própria Furnas e realizado pelo Núcleo de Pesquisas em Limnologia, Ictiologia e Aquicultura (Núpélia) da Universidade Estadual de Maringá, confirmou que, durante os dois primeiros anos de formação do lago de Manso, os cardumes não fizeram a lufada na região entre a barra do Aricá, no rio Cuiabá, até as proximidades do reservatório, no rio Manso. A ausência do fenômeno que atestava a abundância de peixes e a reprodução dessas populações no rio, pode ser um indicador de que um significativo impacto está acontecendo nos rios Manso e Cuiabá, com sérios prejuízos ainda não avaliados em sua relevância.

Durante os anos de 2000 e 2001, tivemos um longo período de seca no país, o que, somado ao fechamento das comportas da Usina², fizeram com que os cardumes não subissem o rio Cuiabá, desovando também fora das regiões de costume. A grande dificuldade de se chegar a um parecer mais concreto sobre as pesquisas que o Nupélia vem desenvolvendo é a ausência de um estudo preliminar. Não há informações científicas de como era a realidade dos rios Cuiabá e Manso antes da UHE, além das informações locais que mesmo não sendo quantitativas são qualitativamente confiáveis. O que sabemos são dados de depois de 2000, quando as comportas já estavam fechadas. Isso porque não há nem no estudo, nem no Relatório de Impacto Ambiental (EIA/RIMA), dados mais específicos sobre o comportamento da ictiofauna da região. A lacuna no EIA/RIMA que, mesmo assim, foram aprovados pela extinta FEMA é um dos principais obstáculos para se medir, hoje, o grau do impacto gerado pela construção da Usina Hidrelétrica de Manso.

O arranjo concebido para a usina hidrelétrica de Manso compreende uma barragem principal de terra e enrocamento, com 3.660m de extensão e altura máxima de 72m, cujo corpo, separados por um muro do tipo gravidade, esta o vertedouro principal de superfície, controlado por três comportas de segmento e tomada d'água do tipo gravidade que promove a captação e a adução da água através de quatro condutos forçados até as unidades de geração.

A potência instalada total é de 210 MW (Furnas (2007)[23]), com quatro unidades de 52,5MW cada. O nível máximo normal do reservatório encontra-se na cota 287,00m, correspondendo a uma área inundada de 427km² e um volume estimado de $7.337 \times 10^6 m^3$, e profundidade média de 19m. O lago ocupa cerca de 263km² do município de Chapada dos Guimarães, 58km² de Nova Brasilândia e 66km² de Cuiabá e se estende

a vazar, os peixes retornam ao leito dos rios como se fosse uma piracema ao contrário. Este movimento de retorno é chamado de lufada.

²as comportas foram fechadas em novembro de 1999, no final da seca, o que foi desastroso para o ciclo das águas.

a partir do local da barragem, por cerca de 50km a leste e sudeste, em direção às nascentes dos rios Manso e Casca.

Até cerca de 30 km do local da barragem, na direção à montante nesses rios, o reservatório é mais amplo, com largura média de 4,5km. Ainda nesse trecho, nas imediações da confluência dos rios Casca/Quilombo e Palmeiras/Manso, atinge larguras da ordem de 15km e 9km, respectivamente. A montante desse trecho, as faixas são mais estreitas, com larguras inferiores a 2,5km.

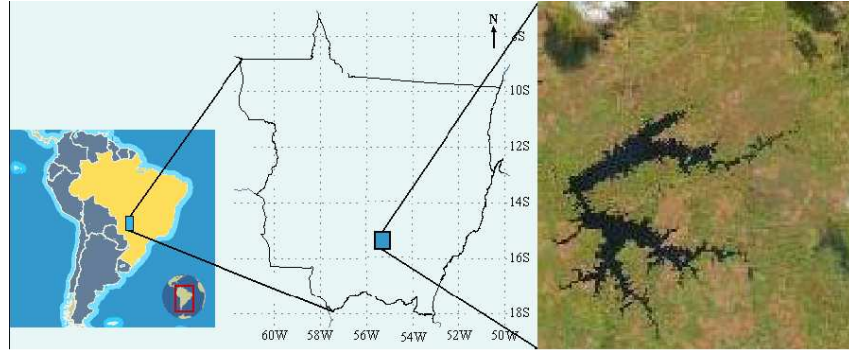


Figura 4.1: Localização do Lago de Manso

O enchimento do reservatório se iniciou em 30 de novembro de 1999, a entrada em operação da primeira unidade geradora em novembro de 2000, seguida das outras três entre janeiro e março de 2001. No ano de 2002, começaram os estudos sobre a contaminação do rio Manso. Ai foi detectado que, na jusante do lago de Manso a contaminação estava mais evidente. As análises feitas na água indicaram que as características da água do rio Manso tiveram alterações nas quantidades de Oxigênio dissolvido, no PH, na transparência, no nitrogênio NKT³ e no fósforo. Essas mudanças facilitaram as atividades microbiológicas e liberaram o mercúrio que estava na vegetação no fundo do lago na forma de metilmercúrio e contaminaram os peixes (Mistro (1992) [13], Brasiloeste (2007) [24], Ecoagencia (2007) [22], Estação vida (2003) [25]).

As águas da represa de Manso contribuiu, e ainda contribui, para um aumento da concentração de cor no rio Cuiabá, uma vez que, sendo a vazão controlada e apresentando descargas muito superiores ao período em que as comportas foram fechadas, há uma coincidência em que o aumento de vazão é diretamente proporcional ao aumento na concentração de cor. Outra possibilidade apontada é a de que com a enxurrada, o solo é “lavado” e, como trata-se de uma região rica em agricultura, fertilizantes e outros produtos ricos em fósforo e nitrogênio podem estar sendo carregados para o leito do rio ao longo do seu percurso (Vargas (2003) [27], Priante (2000) [26]).

³Nitrogênio Kjeldahl total, refere-se a combinação de amônia e do nitrogênio orgânico.

No período de 1999 a 2003, os índices de oxigênio dissolvido na jusante da barragem, mostram um aumento do consumo de oxigênio na água, cujos valores estão abaixo do limite estabelecido pela Resolução do Conama, sobretudo no período posterior ao fechamento da represa. Com relação a Demanda Bioquímica do Oxigênio (DBO), no rio Manso, os teores de DBO subiram consideravelmente, isso se deu em função da demanda de oxigênio devido a decomposição de matéria orgânica ocorrida no lago.

4.2 Bacias de contribuição do rio Manso

A falha Geológica entre a Serra Azul e a Chapada dos Guimarães permitiu que entre as duas surgisse a bacia hidrográfica do Rio Manso. As características geográficas constam de altitude média de 474,22 m, sendo que a mínima registrada é de 250 m e a máxima de 880m, com declividade média de 3,87% e uma área de drenagem estimada em 1.367,16km². No local da Barragem, o rio Manso controla uma área de drenagem de 9.183,86km² e representa cerca de 40% da bacia do rio Cuiabá (Ode (2005)[19]).

A sub-bacia do rio Manso tem como corpo principal o rio Manso, antes de sua confluência com o rio Cuiabá, apresenta característica de rios de planície, com sinuosidade marcante e baixa declividade e não atravessa, em nenhum trecho, áreas urbanas. Nas regiões das nascentes do rio da Casca, Roncador e Manso, predomina a monocultura de soja, milho e arroz. A vazão média do rio Manso é de 200m³.s⁻¹.

O rio Manso tem como principal afluente o rio Casca cuja área de drenagem representa aproximadamente 45% da área de drenagem total do rio Manso no APM Manso. A bacia do rio Casca é formada por uma camada de solo conlúvio residual arenoso com alta porosidade, a porosidade efetiva é da ordem de 20%, alta permeabilidade e por formações areníticas subjacentes, com uma porosidade mais reduzida e baixa permeabilidade (SONDOTÉCNICA (2000) [21]). Em razão destas características geológicas (solos de grande porosidade), o rio da Casca apresenta no período da estiagem, descargas específicas extremamente elevadas em comparação com as dos outros rios da região. A sub-bacia do rio Manso, a montante da foz do rio Casca, com área de drenagem de 4.251km², cerca de 55% da área controlada pela barragem, possui solos de baixa permeabilidade que, durante o período chuvoso, contribuem para a formação de cheias nos rios Manso e Cuiabá e, no período da estiagem, proporcionam descargas extremamente reduzidas.

A região de estudo está representada na figura abaixo, bem como as fontes de poluição.

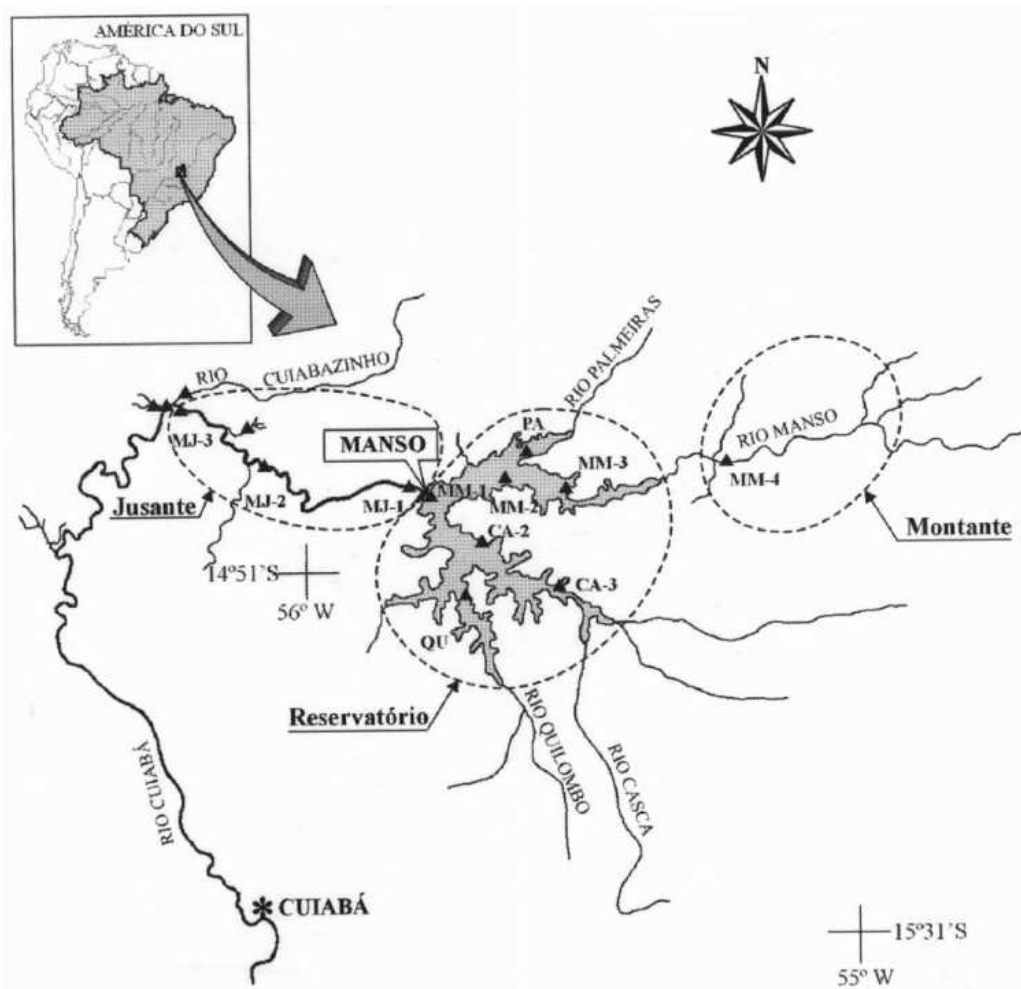


Fig. 2. Localização das estações de amostragem no reservatório de Manso, Mato Grosso, à montante e à jusante.

Figura 4.2: Lago de Manso e seus principais afluentes



Figura 4.3: Usina Hidrelétrica de Manso

Com auxílio do *software* GMSH (Geuzaine (2008) [29]), obtivemos a região triangularizada, apresenta na figura (4.3).

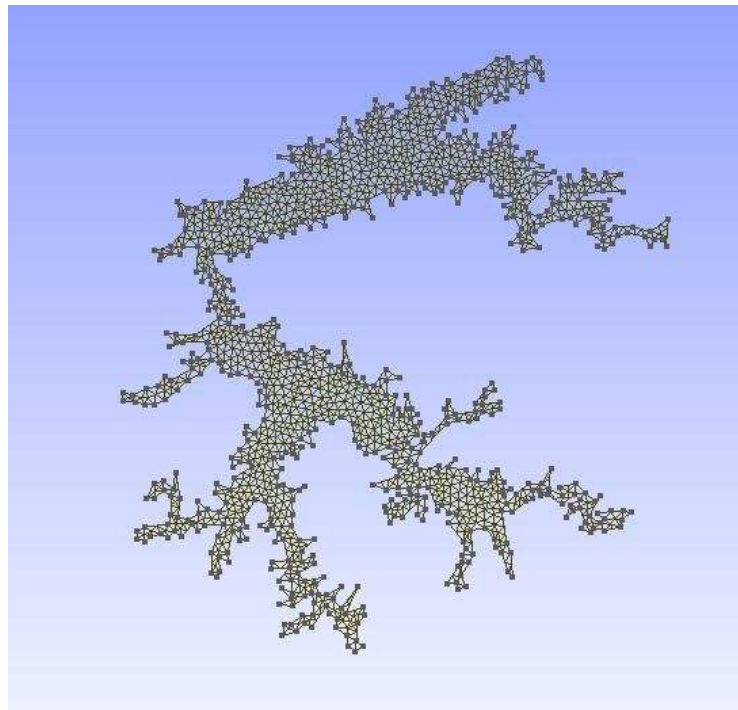


Figura 4.4: O Domínio Ω discretizado

4.3 Características climáticas

O clima do Estado de Mato Grosso é caracterizado como Equatorial e Tropical.

Os dados referentes a temperatura, umidade e ventos na região do Lago de Manso foram obtidos em Chiletto (2005)[17], e datam de set/2003 a ago/2004.

A temperatura média registrada neste período foi de $26,0^{\circ}C$, em dezembro/2003 ocorreu a máxima de $29,8^{\circ}C$ e em setembro/2003 ocorreu a mínima de $16,2^{\circ}C$.

A umidade relativa média anual foi de 67,9%, a mínima de 26,8% e máxima de 78,7%.

A velocidade média mensal do vento variou de $2,3m.s^{-1}$ a $3,4m.s^{-1}$, ocorrendo maior velocidade média do vento em maio e a menor em março, com média anual de $2,8m.s^{-1}$.

A velocidade média mínima mensal variou de $1,2m.s^{-1}$ a $2,0m.s^{-1}$, ocorrendo a maior velocidade média em maio, e a menor em março, com média anual de $1,6m.s^{-1}$.

A velocidade média máxima mensal variou de $3,3m.s^{-1}$ a $5,0m.s^{-1}$, ocorrendo a maior velocidade média em maio, e a menor velocidade em agosto, com média anual de $4,1m.s^{-1}$.

A situação geral desta região parece apontar para um amplo ecossistema com alguma fragilidade, especialmente ao se considerarem os impactos potenciais com o represamento do rio. Parte dos estudos da região vem sendo feito do ponto de vista ecológico matemático, como é o caso do presente trabalho bem como os de Odi (2005)[19], Diniz (2003) [12].

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Neste capítulo pretendemos realizar alguns experimentos computacionais que simulem o espalhamento de um poluente sobre a superfície do lago da represa de Manso, MT.

Muitos parâmetros utilizados foram estimados, devido a dificuldade de obtê-los na literatura. Os parâmetros foram estimados dentro de aspectos presumidamente plausíveis, para as simulações e testes dos códigos numéricos desenvolvidos.

A figura abaixo mostra as fontes utilizadas, alguns pontos da região que serão analisados e em vermelho a fronteira onde há plantações.

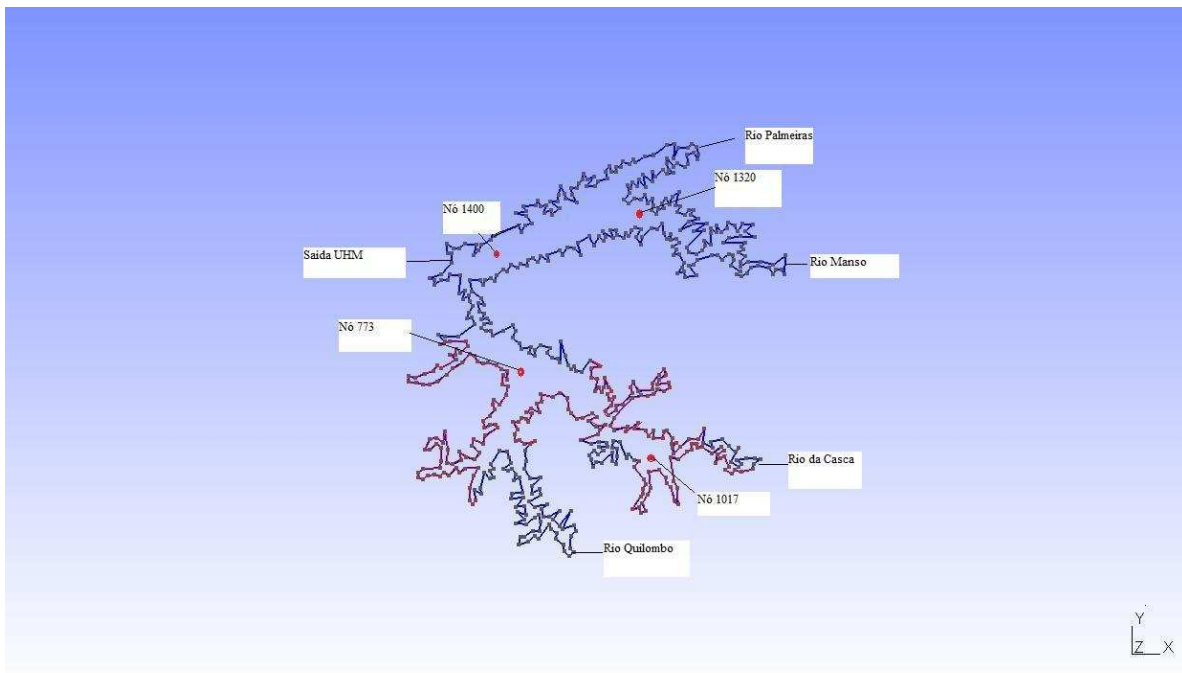


Figura 5.1: Localização das fontes e fronteira onde há plantação

5.1 Simulação de Cenários

A principal característica das simulações apresentadas nesta seção é a visualização gráfica, cuja compreensão pode ser facilitada, uma vez que ainda que a dispersão de poluentes venha despertando, cada vez mais, o interesse de organizações não-governamentais ligadas a problemas ambientais e pesquisadores de várias áreas do conhecimento, a apresentação de vetores do tipo $(C_j^n)_j$ pouco ilustra os fenômenos estudados.

Escolhemos alguns pontos para acompanhar a evolução de poluentes, ver figura (5.1), a escolha destes pontos particulares é devida à sua localização estratégica: o ponto 773 fica em uma região onde há presença de plantações nas margens próximas; o ponto 1400 fica na região do vertedouro da usina; o ponto 1320 próximo de onde as águas do rio Manso entram na represa e o ponto 1017 fica próximo de onde as águas do rio da Casca entram na represa e da área de plantações. A tabela abaixo contém os parâmetros utilizados na simulação de cenários, conforme aparecem na equação a seguir:

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{n+1} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} + u \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x})_{0,\Omega} + \right. \\
& \quad \left. v \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial y})_{0,\Omega} \right\} + k_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_1} c_j^{n+1} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} + k_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_2} c_j^{n+1} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} = \\
& \quad \sum_j c_j^n \left\{ \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} - \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} - u \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial x})_{0,\Omega} - \right. \\
& \quad \left. v \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial y})_{0,\Omega} \right\} - k_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_1} c_j^n (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_1} - k_2 \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \Gamma_2} c_j^n (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_2} + \\
& \quad \Delta t \sum_{j=1}^n f_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} + \Delta t \sum_{j \in \Gamma_3} g_j^{n+\frac{1}{2}} (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Gamma_3}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Estes parâmetros são qualitativos, no sentido de terem sido aqui definidos em função de observações pessoais. Do que se pode obter em Chiletto (2005) [17], a velocidade máxima do vento na região foi de $18 \frac{km}{h}$.

Dadas as limitações numéricas esta velocidade foi reduzida proporcionalmente.

O objetivo foi o de provocar, no uso do algoritmo, a produção de cenários com visibilidade suficiente para compreender comportamentos, possibilidades, riscos ainda que de modo qualitativo.

No cenário 1, foram utilizados tempo final e número de iterações, respectivamente iguais a, $t_{fin} = 1440$ minutos e $it_{max} = 2500$ iterações, isto corresponde a um dia. A

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados nas simulações de cenários

α	$0.4 \text{ m}^2/\text{min}$	k_3	$0.0 \text{ m}/\text{min}$
σ	0.0 min^{-1}	g	0.0125
v	$0,3 \frac{\text{m}}{\text{min}}$	g_r	-0.02
F_1	$0.5 \text{ q}/\text{min}$	C_0	0.15
F_2	$0.14 \text{ q}/\text{min}$	Δt	0.576 min
k_1	$0.005 \text{ m}/\text{min}$	tfin	1440 min
k_2	$0.01 \text{ m}/\text{min}$	itmax	2500

direção predominante dos ventos utilizada foi de sudoeste para nordeste.

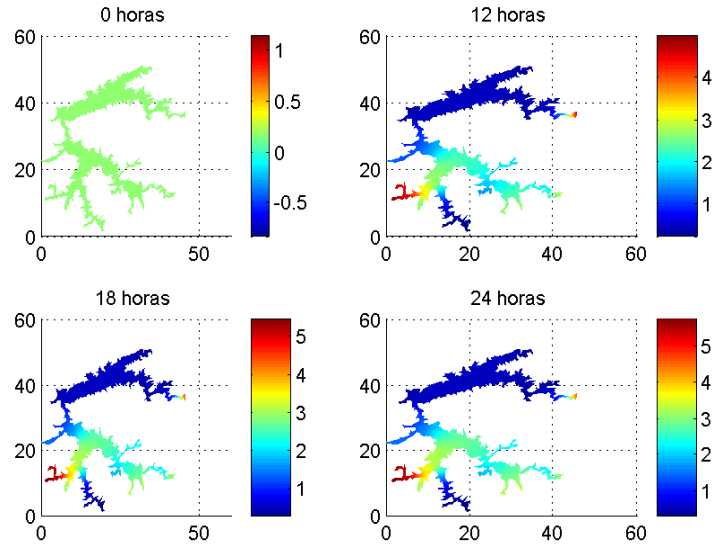


Figura 5.2: Cenário 1

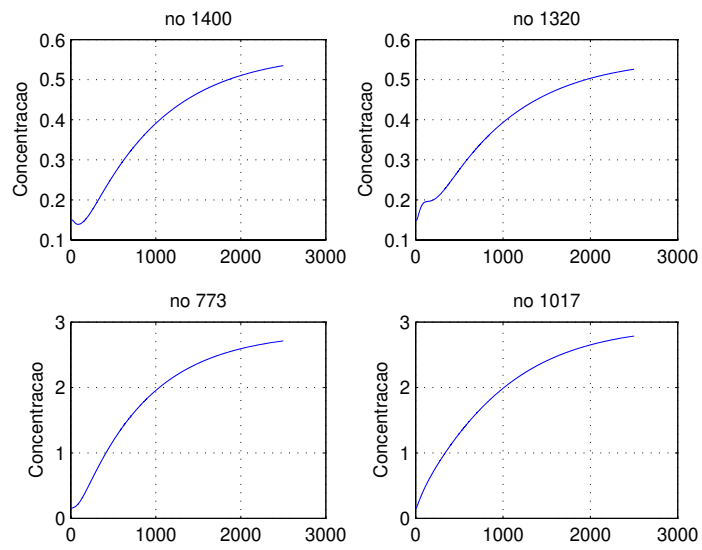


Figura 5.3: Cenário 1 (pontos)

No cenário 2 temos os dados da tabela (5.1) mas agora com uma redução de 40% de g , ou seja, $g = 0.0075$.

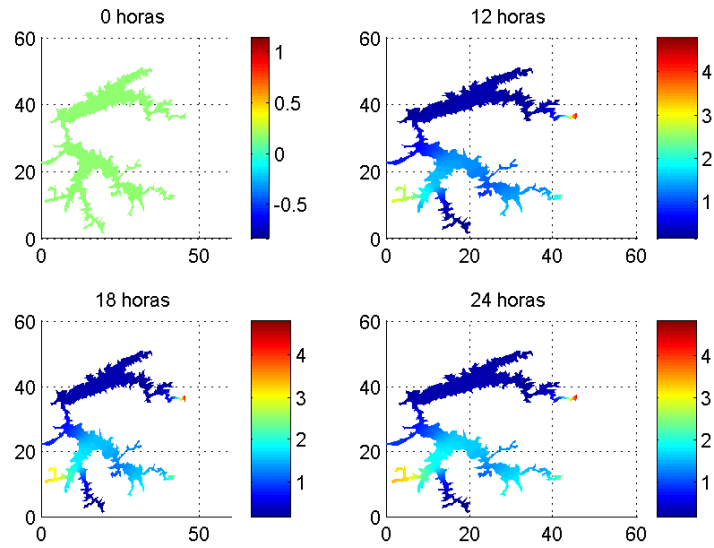


Figura 5.4: Cenário 2

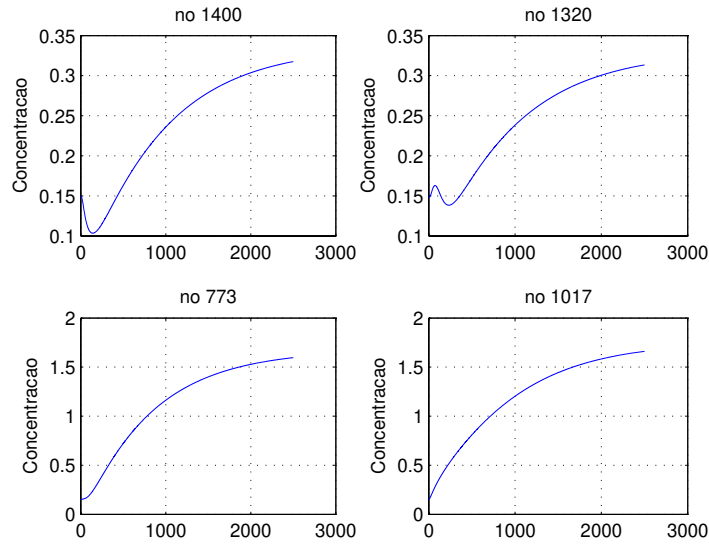


Figura 5.5: Cenário 2 (pontos)

Nos cenários 1 e 2, em princípio a intenção foi a de trabalhar com um período de cerca de 6 *dias* ($t_{fin} = 8640 \text{ minutos}$ com $it_{max} = 18000$, ou seja, com $\Delta t = 0.48 \text{ minutos}$). No entanto, o tempo de computação e o comportamento assintótico das soluções numéricas indicavam uma possibilidade um pouco mais acessível: $t_{fin} = 1440$ minutos e $it_{max} = 2500$ iterações, o que corresponde a um período de 1 dia com $\Delta t = 0,576m$.

Com a redução de 40% no *runoff*¹, indicando o escoamento de produtos agroquímicos, numa taxa g na direção da normal exterior a Γ_3 , percebemos que, nos pontos próximos a plantações (os de número 773 e 1017) houve uma redução drástica de poluentes, sendo estes pesticidas e fertilizantes, e houve influência na concentração de poluentes mesmo nos outros pontos que não estão próximos de áreas agrícolas.

Nos cenários 3 e 4 temos os dados da tabela (5.1), porém a direção predominante do vento será de nordeste para sudoeste, com tempo final e número de iterações respectivamente iguais a: $t_{fin} = 1440$ minutos e $it_{max} = 2500$ iterações, o que corresponde a um período de 1 *dia* e, $\Delta t = 0.576$.

¹É o nome que se dá à parcela das águas de chuva que corre sobre a superfície da terra, em direção aos rios. Uma parte da água que cai pelas chuvas infiltra-se no solo, outra fica retida nas folhas - e, posteriormente, raízes - das plantas, outra é barrada por obstáculos naturais, e outra escorre pela superfície. Essa que escorre pela superfície é o "runoff", que em português técnico se denomina "deflúvio superficial".

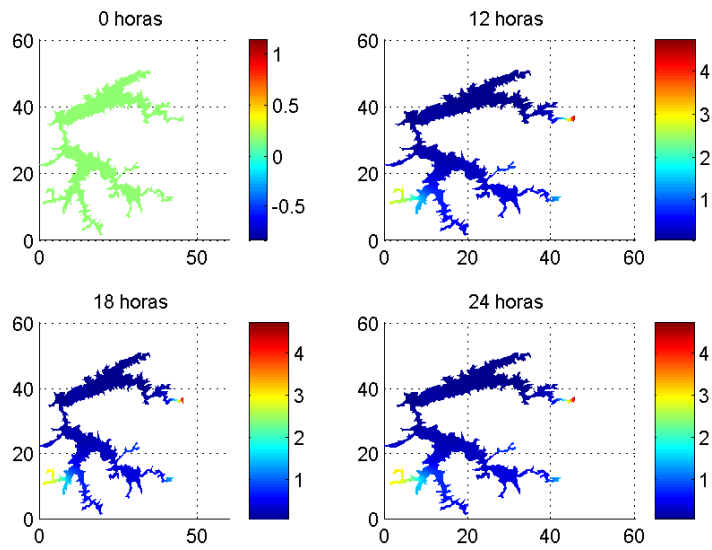


Figura 5.6: Cenário 3

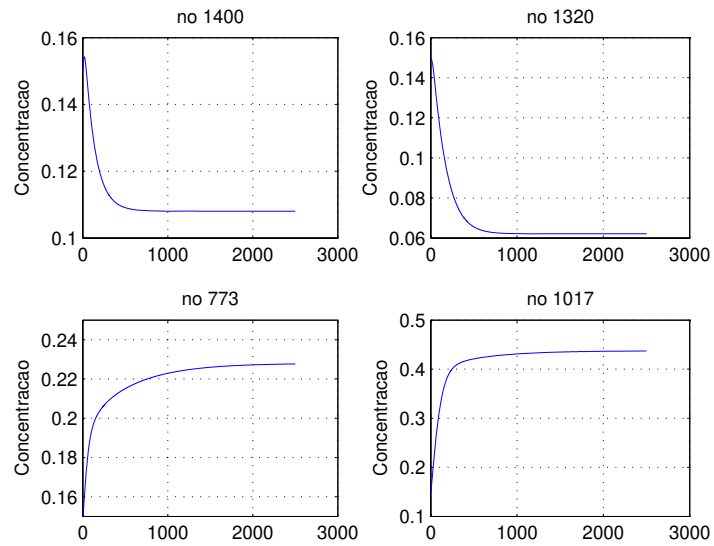


Figura 5.7: Cenário 3 (pontos)

No cenário 4 temos todos os dados referentes ao cenário 3, a diferença está novamente na redução de 40% de g , o escoamento de produtos agroquímicos nas margens próximas a plantações.

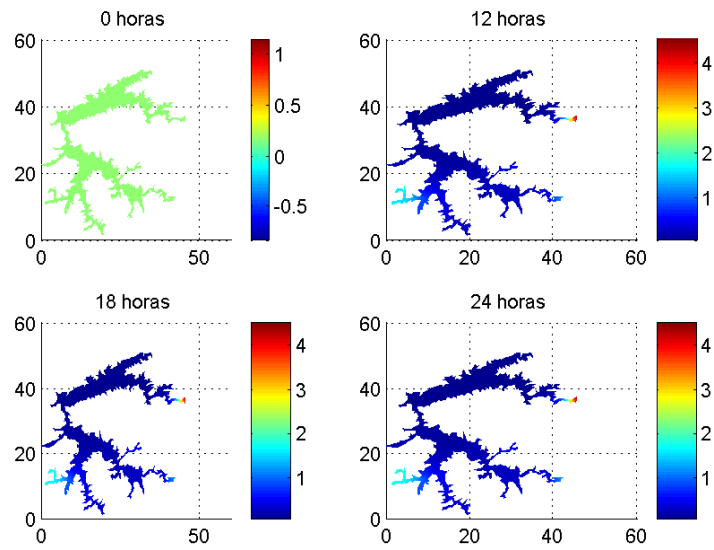


Figura 5.8: Cenário 4

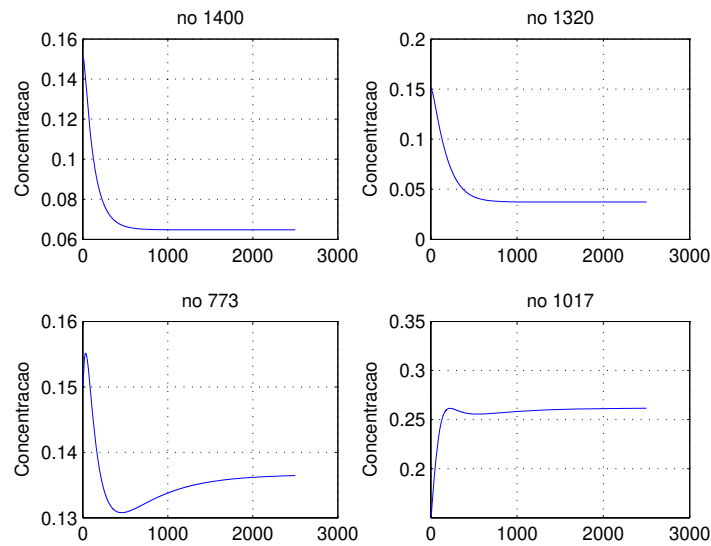


Figura 5.9: Cenário 4 (pontos)

Ainda em termos dos cenários 3 e 4, percebe-se que os pontos 1400 e 1320 não tiveram alteração visível com a redução de g , devido à direção predominante do vento, ao que tudo indica, a poluição vinda das plantações não chega a estes pontos.

Já no ponto 773, até aproximadamente 50 iterações, ocorre redução da poluição, pois até este momento os poluentes oriundos das plantações e do rio da Casca não atingem estes pontos. A partir do momento em que a poluição chega efetivamente ai, temos um aumento significativo no comportamento assintótico da poluição.

Nos cenários 5 e 6 o vento predominante será o de sudeste para noroeste, e com os dados da tabela (5.1), com $t_{fin} = 1440$ e $itmax = 2500$ e, $\Delta t = 0.576$, no cenário 6 com uma redução de 40% no valor de g .

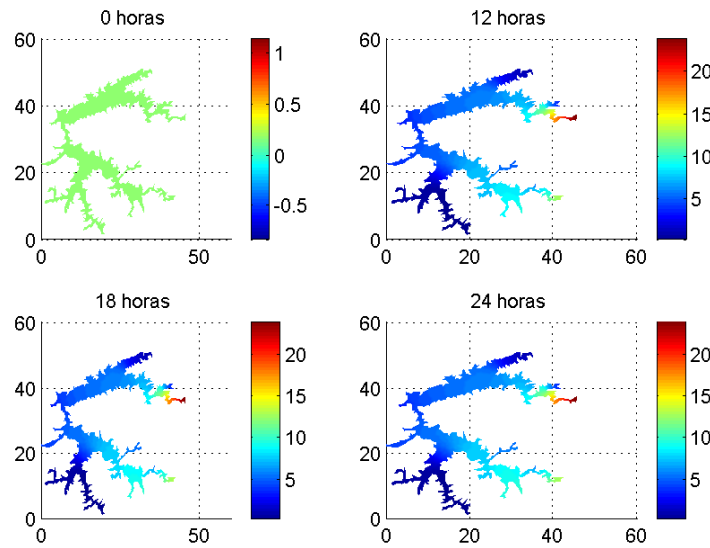


Figura 5.10: Cenário 5

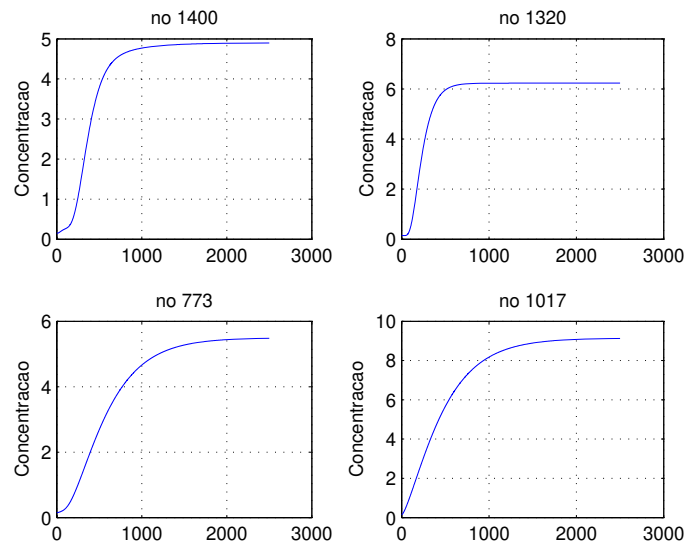


Figura 5.11: Cenário 5 (pontos)

Nos cenários 5 e 6, os pontos 1400 e 1320 não sofreram alteração com a redução de g . Já nos pontos 773 e 1017, percebe-se claramente a redução da concentração de poluentes.

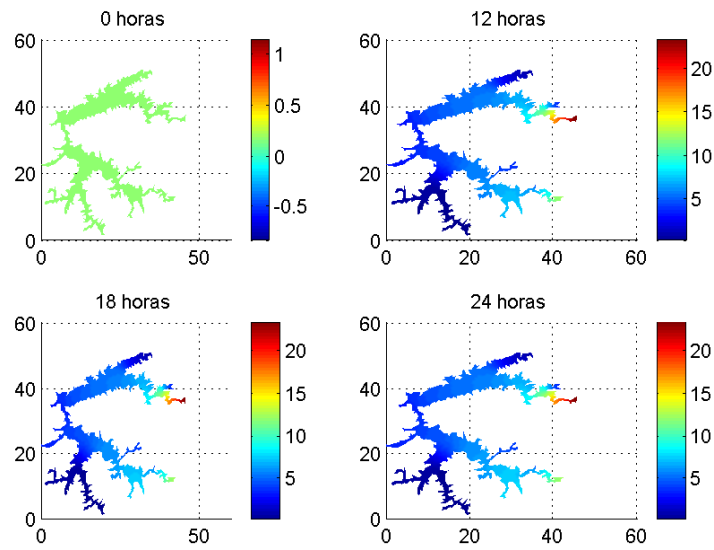


Figura 5.12: Cenário 6

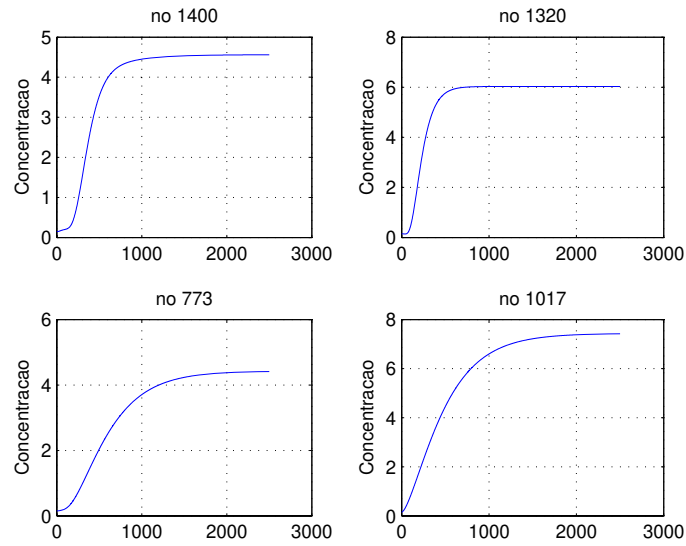


Figura 5.13: Cenário 6 (pontos)

Nos cenários 7 e 8 a direção predominante do vento será de nordeste para sudoeste, e com os dados da tabela (5.1), tomando $t_{fin} = 1440$, $it_{max} = 2500$, ou seja, $\Delta t = 0.576$, têm-se ainda comportamentos assintóticos, indicando a presença de poluentes a médio e longo prazos.

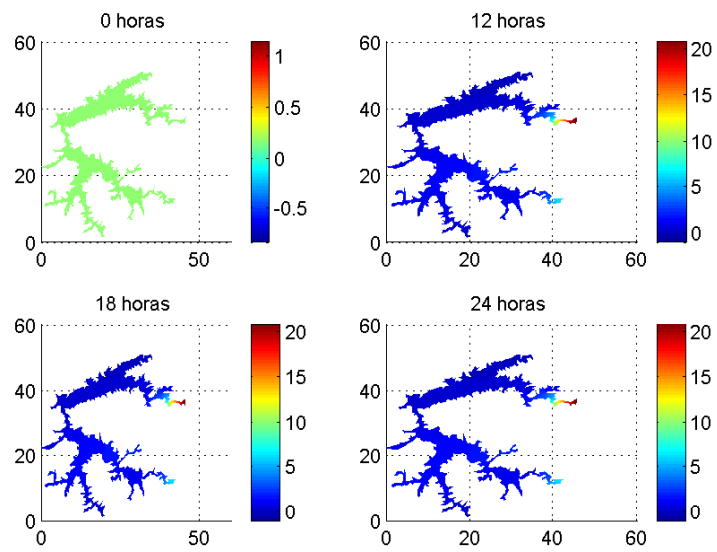


Figura 5.14: Cenário 7

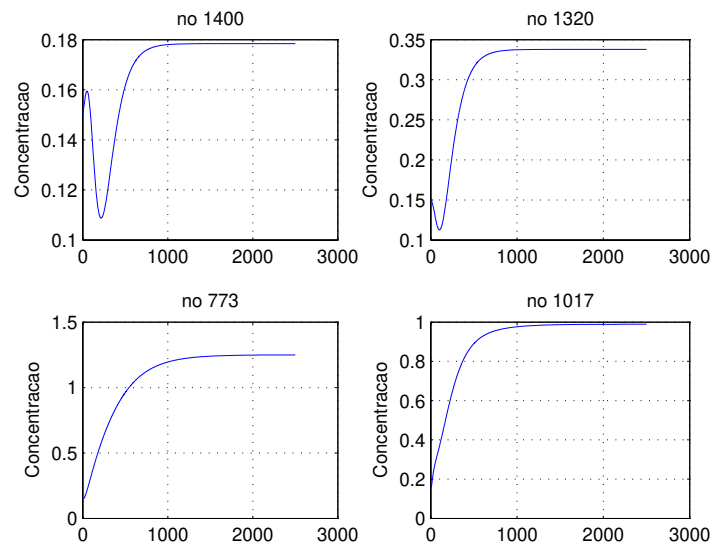


Figura 5.15: Cenário 7 (pontos)

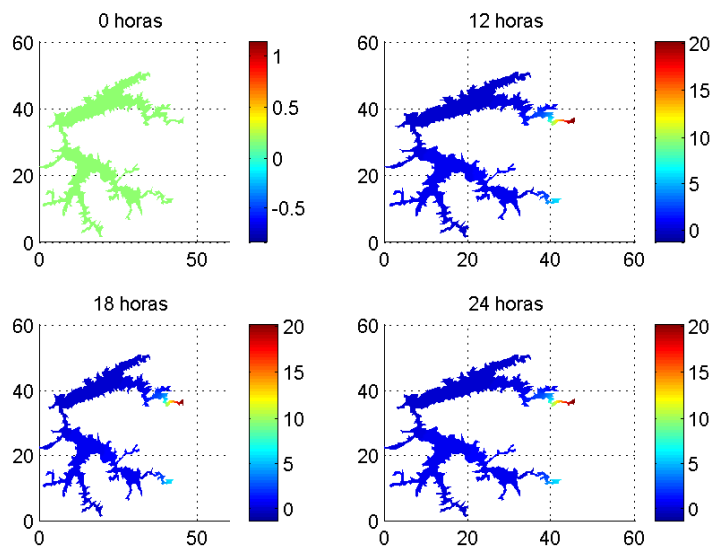


Figura 5.16: Cenário 8

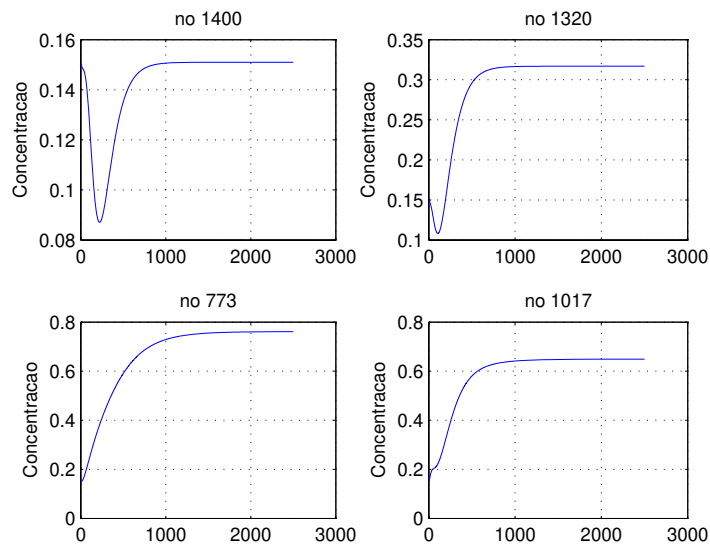


Figura 5.17: Cenário 8 (pontos)

5.2 Conclusões

Este trabalho tem como objetivo principal, agregar aos estudos já realizados por pesquisadores de várias áreas do conhecimento, no que diz respeito a dispersão de poluentes oriundos da atividade agroindustrial na região do lago de Manso - MT. Através de

simulações numéricas analisamos vários cenários possíveis utilizando-se das variações do vento, e redução da taxa de escoamento de produtos agroquímicos, contribuindo assim com um instrumento para avaliar o espalhamento de poluentes na água, visamos também contribuir com o grupo de ecologia matemática do IMECC/UNICAMP.

Para complementar este trabalho, verificamos a necessidade de se obter medidas físico-químicas e geomorfológicas do lago formado pelo represamento do rio Manso. A falta de parâmetros conhecidos, dificultou a realização de testes computacionais.

Construímos uma ferramenta algorítmica com a qual é possível gerar cenários para auxiliar de modo significativo o estabelecimento de políticas públicas de contenção e combate a impacto e preservação ambiental no domínio em estudo.

De inovador esta dissertação apresenta:

1. O tratamento de *runoff* ou escoamento de material impactante de regiões de exploração agroindustrial, nos trabalhos como o de Odi (2005) [19], foi investigada a dispersão do vapor d'água atmosférico, oriundo do lago formado a partir do represamento do rio Manso. Neste trabalho, Odi propôs um modelo matemático para simular e avaliar os fluxos superficiais de umidade na região da Usina Hidrelétrica do rio Manso (UHE de Manso), cujo objetivo foi a proposição de um modelo matemático e simulação de cenários da dinâmica da dispersão do vapor d'água junto à superfície. Em nosso trabalho a contribuição foi tratar a dispersão de poluentes na água.
2. O uso do *software* GMSH acoplado às imagens do *freeware Google Earth* e de uma triangularização irregular, o que nos deu uma melhor aproximação para a região de estudo.

Sob esta ótica, vislumbramos algumas possibilidades de abordagens para trabalhos futuros no sentido de aprimorar o programa apresentado, como por exemplo:

- (a) A possibilidade de se trabalhar em $\mathbb{R}^3$;
- (b) A utilização de equações do tipo Stokes para gerar a circulação do lago.

Contudo, mesmo com a falta de dados, pôde-se avaliar qualitativamente o comportamento dos poluentes no lago de Manso. De certo modo este trabalho mostrou ser um importante ponto de partida, através do qual pode-se incluir novos poluentes e fontes poluidoras. Nosso algoritmo também pode ser utilizado para simular outras regiões, inserindo as matrizes malha, coordenada dos nós e as fronteiras.

Referências Bibliográficas

- [1] R. G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley-Interscience, 1rd, (1995).
- [2] S. C. Brenner, L. R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer, 3rd, (2007).
- [3] J.T. Oden, G. F. Carey, Finite Elements: Mathematical aspects, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, vol. VI, (1983).
- [4] J.T. Oden, G. F. Carey, Finite Elements: a second course, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, vol. II, (1983).
- [5] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM, 2rd, (2002).
- [6] G. I. Marchuk, Mathematical models in environmental problems, studies in mathematics and its applications, North-holland, vol. 16, (1986).
- [7] L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology, McGraw-Hill Companies, 1rd, (1988).
- [8] S. A. Levin, A. Okubo, Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives, Springer, 2rd, (2002).
- [9] J. L. Lions, Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes Aux Limites, Springer, 2rd, (1961).
- [10] J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, (2008).
- [11] R. C. Bassanezi, W.C. Ferreira Jr, Equações diferenciais com Aplicações. São Paulo, Harbra, (1988)

- [12] G. L. Diniz, Dispersão de Poluentes num Sistema Ar- Água: Modelagem, Aproximação e Aplicações. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Campinas/SP, (2003).
- [13] D. C. Mistro, O problema de poluição em rios por mercúrio metálico: Modelagem e simulações. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, (1992).
- [14] N. L. G. Odi, Estudo dos fluxos superficiais de vapor d'água na área da represa do rio Manso-MT. Dissertação de Mestrado, ICET - UFMT, Cuiabá/MT, (2005).
- [15] W. Oliveira, Hidrelétrica e a importância do EPIA/RIMA em empreendimentos para produção de energia com desenvolvimento sustentável. Dissertação de Mestrado, UNIMEP, Piracicaba/SP, (2006).
- [16] R. F. Cantão, Modelagem e Simulação Numérica de Derrames de Óleo no Canal de São Sebastião, SP. Dissertação de Mestrado, IMECC- Unicamp, Campinas/SP, (1998).
- [17] E. C. Chilleto, Caracterização climática da região do lago de Manso: um estudo comparativo com a área urbana da grande Cuiabá, ICET- UFMT, Cuiabá/MT, (2005).
- [18] R. F. de Oliveira, O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: modelagem, análise numérica e simulações. IMECC- UNICAMP, Campinas/ SP, (2003).
- [19] N. L. G. Odi, Estudo dos fluxos superficiais de vapor d'água na área da represa do rio Manso/MT: modelagem e simulações. ICET- UFMT, Cuiabá/MT, (2005)
- [20] J. F. C. A. Meyer, Modelagem e Simulação Numérica do Transiente Térmico em Meios Compostos, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - Unicamp, Campinas/SP, (1988).
- [21] SONDOTÉCNICA S. A., Diagnóstico da Qualidade da Água da Área de Influência do APM Manso/Fase Rio. Relatório Final, *APM – 07 – 0014 RE*, Rio de Janeiro - RJ, (2000).
- [22] Ecoagencia, <http://www.ecoagencia.com.br/index.php?option=contenttask=viewid=1267Itemid=59>, acesso 05-outubro-2007, (2007).
- [23] Furnas, http://www.furnas.com.br/hotsites/sistemapfurnas/usina_hidr_manso.asp, acesso 05-outubro-2007, (2007).

- [24] Brasiloeste, <http://www.brasiloeste.com.br/noticia/544/>, acesso 05-outubro-2007, (2007)
- [25] Estação vida, http://www.riosvivos.org.br/canal.php?canal=50mat_id=8355, acesso 25-outubro-2007, (2003)
- [26] G. R. Priante, Qualidade de água da bacia do rio Cuiabá, da nascente até Exutório Porto Cercado, Pantanal Poconé, Mato Grosso, <http://www.cpap.embrapa.br/agencia/congresso/ABIOTICOS/PRIANTE-007.pdf>, acesso 22-fevereiro-2008, (2000).
- [27] R. Vargas, Memória e ciência em confronto nas hidrelétricas, http://www.gta.org.br/noticias_exibir.php?cod_cel=1872, acesso 22-fevereiro-2008, (2003).
- [28] Furnas, Usina Hidrelétrica, http://www.furnas.com.br/hotsites/sistemapfurnas/usina_hidr_funciona.asp, acesso 22-fevereiro-2008.
- [29] S. Geuzaine, J. F. Remacle, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, <http://www.geuz.org/gmsh/>, acesso 22-fevereiro-2008, (2008).

Apêndice A

Formulação Variacional

Seja a equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \Delta \operatorname{div}(\overrightarrow{VC}) + \sigma C = f \quad (\text{A.1})$$

a formulação clássica do problema. Vamos passar a equação (A.1) da formulação clássica para a formulação fraca ou variacional, pois com a formulação variacional podemos trabalhar com fontes e condição inicial descontínuas, e seu uso nos permite representar numa única expressão integral todos os elementos relevantes ao problema em estudo (Oden (2003) [4]).

Vamos utilizar o método de Galerkin, pois ele utiliza a equação diferencial na forma forte. A formulação variacional consiste em:

- (1) considerar as derivadas do modelo clássico no sentido de distribuições;
- (2) efetuar o produto interno de cada termo da formulação clássica por ν denominada função teste, sendo está pertencente a um espaço adequado. Logo

$$\left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, \nu \right\rangle - \alpha \langle \Delta, \nu \rangle + \langle \operatorname{div}(VC), \nu \rangle + \sigma \langle C, \nu \rangle = \langle f, \nu \rangle \quad (\text{A.2})$$

Pensando n o caso em que $C(x, t)$ e $\nu(x)$ na (A.2) a função teste ν é suficientemente bem comportada que o produto interno faz sentido.

Denotaremos o conjunto das funções testes por D , onde $D(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo. Os elementos de $D(\Omega)$ são funções em $C_0^\infty(\Omega)$, uma sequência ν_n de funções testes é dito convergir para a função teste ν se existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\nu_n - \nu) \subset K \quad \forall n \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \nu_n = D^\alpha \nu \quad (\text{A.3})$$

uniforme em $K \forall \alpha$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciável que tem

suporte compacto. Neste espaço, uma sequência $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero quando:

- (1) ν_n tem suporte contido em um compacto $K \in D$
- (2) além de ν_n , também as sequências de suas derivadas de todas as ordens convergem uniformemente para zero.

O espaço das distribuições é o dual topológico de $D(\Omega)$, ou seja, $D'(\Omega)$ que é também um espaço vetorial topológico localmente convexo. Um funcional $q \in D(\Omega)$ é uma distribuição, se e somente se, para todo conjunto compacto $K \in D$, existe uma constante $c_k > 0$ e um inteiro $m > 0$ tal que

$$|q(\nu)| \leq c_k \sup_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha \nu(x)| \quad \forall \quad x \in K \quad e \quad \forall \quad \nu \in D(\Omega) \quad (\text{A.4})$$

onde $D(K)$ é o espaço das funções teste em $D(\Omega)$ cujos suportes estão contidos em K .

As funções do espaço K são contínuas indefinidamente diferenciáveis com suporte limitado e constituem um espaço vetorial. Vamos introduzir a seguinte noção de convergência em K

Uma sequência $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K é dita convergente para uma função $\nu \in K$, se:

- (1) existe um intervalo fora do qual todas as funções ν_n se anulam;
- (2) a sequência $\{\nu_n^{(k)}\}$ das k -ésimas derivadas ($k = 0, 1, \dots$) convergem uniformemente para $\nu^{(k)}$.

O espaço K munido da convergência que acabamos de definir, será chamado de espaço básico e seus elementos são funções básicas.

Uma distribuição sobre a reta $(-\infty < x < \infty)$ é um funcional linear contínuo $T(\nu)$ definido sobre o espaço básico K , onde

$$\begin{aligned} T(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \nu(x) dx \\ \frac{dT}{dx}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \nu(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \nu'(x) dx \\ \frac{dT}{dx}(\nu) &= -T(\nu') \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

São consequências imediatas da definição de derivada de uma distribuição as seguintes proposições:

- (1) toda função generalizada admite derivada de todas as ordens;
- (2) dada qualquer sequência de distribuições ν_n converge para uma distribuição ν , a sequência ν'_n das derivadas converge para a derivada ν' da função limite. O mesmo vale para as derivadas de qualquer ordem.

Agora vamos examinar as condições que determinam a escolha de K como espaço básico. Submetendo os elementos de K a restrições rígidas - funções indefinidamente diferenciáveis com suporte limitado - obtivemos uma classe ampla de funções generalizadas das operações da análise - as distribuições. Ao mesmo tempo, o espaço K não é demasiado restrito. Comporta bastante elementos para que se possa distinguir funções contínuas. Mais precisamente, dadas duas funções contínuas restritas sobre a reta f_1 e f_2 (portanto, localmente integráveis), existe uma função $\nu \in K$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\nu(x)dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\nu(x)dx \quad (\text{A.6})$$

De fato, tomemos $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Dado que $f(x) \neq 0$, existe x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$. Então $f(x)$ conserva o mesmo sinal num intervalo (a, b) que contém o ponto x_0 . Consideremos a função

$$\nu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(b-x)(x-a)}} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{para os demais } x \end{cases}$$

que se anula fora do intervalo (a, b) e é positivo no seu interior. Ademais, admitindo derivadas de qualquer ordem, $\nu \in K$. Nestas condições é evidente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu(x)dx = \int_a^b f(x)\nu(x)dx \neq 0 \quad (\text{A.7})$$

O espaço K é, portanto, suficiente para distinguir duas funções contínuas quaisquer quaisquer.

Como o espaço vetorial das funções f cuja restrição ao subconjunto compacto K de Ω é integrável, chamaremos este espaço de $L^1_{loc}(\Omega)$, onde a cada elemento f podemos associar uma distribuição

$$\langle T, \nu \rangle := \int_K f(x)\nu(x)dx \quad \forall \quad \nu \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.8})$$

é uma distribuição definida por $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mas, existem distribuições que não podem ser definidas por qualquer função de $L^1_{loc}(\Omega)$, onde $L^1_{loc}(\Omega) = L^1(K)$ e $L^1_{loc}(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$.

Sobolev introduziu o conceito de derivada fraca de funções.

$$\int_{\Omega} f(x)\nu'(x)dx = - \int_{\Omega} h(x)\nu(x)dx \quad \forall \quad \nu \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.9})$$

onde $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a única função que torna verdadeira a expressão acima.

A generalização para uma distribuição T qualquer é devida a Schwarz, onde a derivada fraca $\frac{dT}{dx}$ é a única distribuição tal que

$$\begin{aligned}\langle \frac{dT}{dx}, \nu \rangle &= \langle T, \frac{d\nu}{dx} \rangle \quad \forall \quad \nu \in C_0^\infty(\Omega) \\ \langle \frac{d^n T}{dx^n}, \nu \rangle &= (-1)^n \langle T, \frac{d^n \nu}{dx^n} \rangle \quad \forall \quad \nu \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned}\tag{A.10}$$

Nós temos interesse nas funções cujo quadrado é integrável, ou seja, as que pertencem a $L^2(\Omega)$, onde $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

$L^1(\Omega)$ é o espaço linear das classes de equivalência de funções mensuráveis u para que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^1 dx < \infty\tag{A.11}$$

onde a integração é de Lebesgue.

AS funções de $L^2(\Omega)$ também são distribuições, então também tem derivadas de todas as ordens. O espaço é definido da seguinte forma:

$$L^2(\Omega) \equiv \left\{ \nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} (\nu(x, y))^2 d\gamma < \infty \right\}.\tag{A.12}$$

Onde o produto interno em $L^2(\Omega)$ é dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int \int_{\Omega} (f(x, y)g(x, y)) dA\tag{A.13}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial\Omega} (fg) d\gamma\tag{A.14}$$

para f, g pertencentes a $L^2(\Omega)$.

Mas nem toda função em $L^2(\Omega)$ tem derivada fraca em $L^2(\Omega)$. Então vamos tomar as distribuições em $L^2(\Omega)$ que também tem derivadas com distribuições em $L^2(\Omega)$, este espaço será o espaço $H^1(\Omega)$ que é um espaço de Sobolev, onde

$$\begin{aligned}\langle u, \nu \rangle &= \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{d\nu}{dx} dx + \int_{\Omega} u\nu dx \\ \|\nu\|^2 &= \int_{\Omega} \left| \frac{d\nu}{dx} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nu|^2 dx\end{aligned}\tag{A.15}$$

o que o torna um espaço de Hilbert real. Mas

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset C_0'^\infty(\Omega)$$

Se tomarmos $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ os elementos de $\mathcal{V}$ serão distribuições que se anulam na

fronteira de Ω .

Apêndice B

O Método de Elementos Finitos

O método de Elementos finitos (Oden (1983) [3], Brenner (2007) [24], Cantão (1998) [16]) é uma técnica geral para construção de aproximações da solução de problemas de valor de contorno. O método envolve a divisão do domínio da solução em um número finito de subdomínios simples ou elemento simples. Uma solução aproximada da EDP pode ser localmente desenvolvida para cada um desses elementos. A solução total é então gerada, reunindo-as de modo adequado.

Vamos dividir o domínio Ω em ntr triângulos $T_1, T_2, \dots, T_{ntr}$, dois a dois disjuntos ou tendo como interseção uma aresta ou um vértice.

A escolha das funções testes φ_i será a de elementos finitos triangulares de primeira ordem, onde cada φ_i é linear por partes e satisfaz a seguinte condição:

$$\varphi_i(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

, onde (x_i, y_j) são as coordenadas do j -ésimo nó da malha. Assim conseguimos uma função sobre cada nó, linear por partes, assumindo valor 1 no j -ésimo nó e zero nos demais.

Na montagem das sub-matrizes de rigidez A e B dadas por (3.18) e (3.19), cada elemento corresponde a uma série de produtos internos entre as funções de base, ou suas derivadas.

Vamos calcular as integrais localmente, em cada elemento da malha. Para isso, utilizaremos uma transformação que leve do triângulo padrão $\hat{K}$ com coordenadas (ξ, η) para um triângulo qualquer K de coordenadas (x, y) .

As funções testes são dadas por:

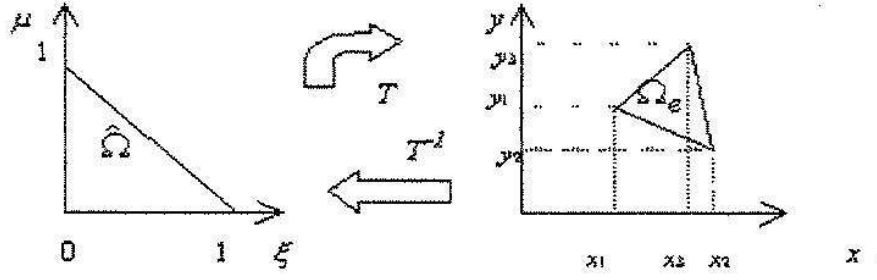


Figura B.1: Representação da transformação que leva do triângulo de referência para um triângulo qualquer

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, y) &= 1 + \frac{(y_2 - y_3)(x - x_1) - (x_2 - x_3)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\
 \varphi_2(x, y) &= \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\
 \varphi_3(x, y) &= \frac{(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Essa transformação de variável é dada por:

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\
 y(\xi, \eta) &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

de onde $\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ leva funções globais em locais. Pela transformação dada acima temos:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\
 \varphi_2(\xi, \eta) &= \xi \\
 \varphi_3(\xi, \eta) &= \eta
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

As derivadas das funções globais em função das derivadas locais será dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\eta}\end{aligned}\tag{B.4}$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= \frac{1}{|\det J|} \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \cdot \frac{dy}{d\eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \cdot \frac{dy}{d\xi} \right\} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} &= \frac{1}{|\det J|} \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \cdot \frac{dx}{d\xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \cdot \frac{dx}{d\eta} \right\}\end{aligned}\tag{B.5}$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} \end{pmatrix}\tag{B.6}$$

Representa a matriz Jacobiana da transformação.

Na resolução das integrais sobre um triângulo qualquer K , vamos utilizar a mudança de variáveis.

$$I_1 = (\varphi_i | \varphi_j)_{0,\Omega} = \int \int_{\Omega} (\varphi_i(x, y) \cdot \varphi_j(x, y)) dy \cdot dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\varphi_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_j(\xi, \eta)) d\eta \cdot d\xi\tag{B.7}$$

$$I_2 = (\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j)_{0,\Omega} = \int \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i(x, y) \cdot \nabla \varphi_j(x, y)) dy \cdot dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\nabla \varphi_i(\xi, \eta) \cdot \nabla \varphi_j(\xi, \eta)) d\eta \cdot d\xi\tag{B.8}$$

$$I_3 = (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x, y))_{0,\Omega} = \int \int_{\Omega} (\varphi_i(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x, y)) dy \cdot dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\varphi_i(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(\xi, \eta)) d\eta \cdot d\xi\tag{B.9}$$

$$I_4 = (\varphi_i | \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x, y))_{0,\Omega} = \int \int_{\Omega} (\varphi_i(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x, y)) dy \cdot dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\varphi_i(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(\xi, \eta)) d\eta \cdot d\xi\tag{B.10}$$

Para resolvermos as integrais de fronteira vamos utilizar a seguinte mudança de variáveis.

$$\begin{aligned}x(\xi) &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi \\y(\xi) &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi\end{aligned}\tag{B.11}$$

Logo $\varphi_i(x) = \varphi_i(x(\xi))$, de onde obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= 1 - \xi \\ \varphi_2(\xi) &= \xi \\ \varphi_3(\xi) &= 0\end{aligned}\tag{B.12}$$

onde as integrais sobre as fronteiras $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ serão dadas por:

$$I_5 = (\varphi_i|\varphi_j)_{0,\Gamma_k} = \int_{\Gamma_i} (\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)) dx = J_2 \int_0^1 (\varphi_i(\xi) \cdot \varphi_j(\xi)) d\xi\tag{B.13}$$

onde $k = 0, 1, 2$.

$$I_6 = (g|\varphi_i)_{0,\Gamma_3} = \int_{\Gamma_3} (g \cdot \varphi_i(x)) dx = J_2 g \int_0^1 (\varphi_i(\xi)) d\xi\tag{B.14}$$

Sendo $J_2 = \sqrt{(\frac{dx}{d\xi})^2 + (\frac{dy}{d\xi})^2}$

As submatrizes de rigidez do sistema são dadas por:

$$smr1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}\tag{B.15}$$

dada pela resolução de (A7).

$$smr2 = \begin{pmatrix} (h_1 + h_2 - 2h_3) & (-h_1 + h_3) & (-h_2 + h_3) \\ (-h_1 + h_3) & h_1 & -h_3 \\ (-h_2 + h_3) & -h_3 & h_2 \end{pmatrix}\tag{B.16}$$

dada pela resolução de (A8), onde

$$\begin{aligned}h_1 &= ((y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2) \\ h_2 &= (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\ h_3 &= (y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

$$smr3 = \begin{pmatrix} -(y_3 - y_2) & (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(y_3 - y_2) & (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(y_3 - y_2) & (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \end{pmatrix}\tag{B.17}$$

dada pela resolução da integral em (A9).

$$smr4 = \begin{pmatrix} (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

dada pela resolução da integral em (A10).

$$smr5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

dada pela resolução da integral em (A13) e (A14).

Apêndice C

Códigos fonte

Neste apêndice, são apresentados os códigos numéricos utilizados na implementação do método numérico escolhido para as aproximações da solução do problema.

```
%Descrição: Dispersão de poluentes no lago de Manso/ MT
clear all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%          Parametros do problema          %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CARREGANDO ARQUIVOS
%
load fronteiraplantacao
load fronteiramata
load fronteirarochaconcreto
load fronteiraterra
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  coeficiente de difusao do poluente      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alfp=0.4;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%coeficiente de decaimento do poluente    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
sigp=0.0;
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      fonte(s) de poluicao      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F1=0.5;
F2=0.14;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%transporte de poluente na direcao horizontal%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w1=0.3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%transporte de poluente na direcao vertical %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w2=0.3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      Parametros da discretizacao      %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%instante final
tfin=1440;
%numero de iteracoes temporais
itmax=2500;
%intervalo de tempo de cada iteracao temporal
dt=tfin/itmax;
%numero total de nos
nn=2325;
%numero total de elementos (triangulos)
ntr=4646;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Abrindo a matriz malha (malha.dat)      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fid = fopen('malha.dat','r');
malha = fscanf(fid,'%d',[9 ntr]);
malha = malha';
malha = [malha(:,7),malha(:,8),malha(:,9)];

```

```

fclose(fid);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Abrindo a matriz de coordenadas dos pontos (coord.dat)%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fid = fopen('coord.dat','r');
coord = fscanf(fid,'%lf',[4 nn]);
coord = coord';
coord = [coord(:,2) coord(:,3)];
fclose(fid);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %
% Condições Iniciais e Fonte %
% %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
p0=0.15*ones(nn,1);
f1=zeros(nn,1);
f2=zeros(nn,1);
%preenchendo as fontes pontuais
f1(252)=F1;      %rio manso
f1(690)=F1+0.1; %rio manso
f1(691)=F1+0.1; %rio manso
f1(253)=F1;      %rio manso
f1(450)= F2;     %rio da Casca
f1(451)= F2+0.1;%rio da Casca
f1(452)= F2;     %rio da Casca
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% constante (condicoes de fronteira)      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k1   = 0.005;   % perda p/ margem (mata)
k2   = 0.01;    % perda p/ margem (terra)
k3   = 0;       % onde há rocha ou concreto
g    = 0.0125;  % taxa de escoamento de produtos agroquimicos na direção
                % da normal exterior (plantações)

```

```

gr = -0.02; % saida vertedouro
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Novos parametros %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
stm=1+sigp*dt/2;
stn=1-sigp*dt/2;
at= alfp*dt/2;
wtx=w1*dt/2;
wty=w2*dt/2;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %
% Submatrizes de Rigidez %
% %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% submatriz resultante de (fi|fj)em omega
%
smr1=[(1/12) (1/24) (1/24);
      (1/24) (1/12) (1/24);
      (1/24) (1/24) (1/12)];
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Integrais nas fronteiras G2, G3 e G4
smr5=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Preenchimento das parcelas lineares das matrizes esquerda e
% direita dos elementos

```

```

%
pe=sparse(nn,nn);
pd=sparse(nn,nn);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
for itr = 1:ntr
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);
        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
    end
    jac = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
    s = abs(jac);
%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% substituiçoes para obter smr2 e smr3      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Encontrando smr2, (grad fi|grad fj) em omega
%
smr21= [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3))
(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3))
(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
%
%
smr22=[(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3))
(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3))
(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
%
%
```

```

smr2=smr21+smr22;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Encontrando smr3 a partir de (fi|dfj/dx) em omega
%
smr3= [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)
dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)
dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Encontrando smr4 a partir de(fi|dfj/dy) em omega
%
smr4=[dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)
dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)
dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for il = 1:3
    ig = malha(itr,il);
    for jl = 1:3
        jg = malha(itr,jl);
        slt=(at/s)*smr2(il,jl)+((wtx*s)/(6*jac))*smr3(il,jl)+((wty*s)/(6*jac))*smr4(il,jl);
        pe(ig,jg) = pe(ig,jg) + s*stm*smr1(il,jl)+slt;
        pd(ig,jg) = pd(ig,jg) + s*stn*smr1(il,jl)-slt;
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Entrada das condicoes de fronteira %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% G2 fronteira onde temos runoff e saida da UHM
%

n2 = max(size(G2));
for itr1f = 1:n2
    for ilocal = 1:2;
        iglobal = G2(itr1f, ilocal);

```

```

        for jlocal = 1:2;
            jglobal= G2(itrlf, jlocal);
            x(ilocal)=coord(iglobal,1);
            y(ilocal)=coord(iglobal,2);
        end
        s2=sqrt((-x(1)+x(2))*(-x(1)+x(2))+(-y(1)+y(2))*(-y(1)+y(2)));
        if itrlf ~= n2
            A0= (dt/2)*s2*g*smr5(ilocal,jlocal);
        else
            A0= (dt/2)*s2*gr*smr5(ilocal,jlocal);
        end
        f2(iglobal)= f2(iglobal)+A0;
    end
end

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% G1 representa a fronteira onde temos mata
%
n1=max(size(G1));
    for itrlf = 1:n1
        for ilocal = 1:2;
            iglobal = G1(itrlf, ilocal);
            for jlocal = 1:2;
                jglobal= G1(itrlf, jlocal);
                x(ilocal)=coord(iglobal,1);
                y(ilocal)=coord(iglobal,2);
            end
            s2=sqrt((-x(1)+x(2))*(-x(1)+x(2))+(-y(1)+y(2))*(-y(1)+y(2)));
            A1= (dt/2)*k1*s2*smr5(ilocal,jlocal);
            pe(iglobal,jglobal)= pe(iglobal,jglobal)+A1;
            pd(iglobal,jglobal)= pd(iglobal,jglobal)-A1;
        end
    end
    %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % G3 representa a fronteira onde temos rocha ou concreto

```

```

%
n3 = max(size(G3));
    for itr1f = 1:n3
        for ilocal = 1:2;
            iglobal = G3(itr1f, ilocal);
            for jlocal = 1:2;
                jglobal= G3(itr1f, jlocal);
                x(ilocal)=coord(iglobal,1);
                y(ilocal)=coord(iglobal,2);
            end
            s2=sqrt((-x(1)+x(2))*(-x(1)+x(2))+(-y(1)+y(2))*(-y(1)+y(2)));
            A2= (dt/2)*k3*s2*smr5(ilocal,jlocal);
            pe(iglobal,jglobal)= pe(iglobal,jglobal)+ A2;
            pd(iglobal,jglobal)= pd(iglobal,jglobal)- A2;
        end
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% G4 representa a fronteira onde temos terra ou lodo
%
n4 = max(size(G4));
    for itr1f = 1:n4
        for ilocal = 1:2;
            iglobal = G4(itr1f, ilocal);
            for jlocal = 1:2;
                jglobal= G4(itr1f, jlocal);
                x(ilocal)=coord(iglobal,1);
                y(ilocal)=coord(iglobal,2);
            end
            s2=sqrt((-x(1)+x(2))*(-x(1)+x(2))+(-y(1)+y(2))*(-y(1)+y(2)));
            A3= (dt/2)*k2*s2*smr5(ilocal,jlocal);
            pe(iglobal,jglobal)= pe(iglobal,jglobal)+ A3;
            pd(iglobal,jglobal)= pd(iglobal,jglobal)- A3;
        end
    end

%%

```



```

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %
% Plotando a condicao inicial %
% %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% CONDICAO INICIAL
%   estruturando o vetor solucao para o grafico
%
    subplot(2,2,1)
    trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),p0), title('0 horas'),view(0,90),colorbar,
        shading interp;
%
%   resolução dos sucessivos sistemas.
%
    ugt = itmax/4;
    for it = 1:itmax
        dirp=pd*p0+(dt*f1+f2);
        dirp=sparse(dirp);
        pe=sparse(pe);
        p1=pe\(dirp);
        %
        %
        if it==0
            subplot(2,2,1)
            trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),p0), title('0 horas'),view(0,90),colorbar
            shading interp;%,axis([0 xmax ymin ymax 0 6]);
        end
        if it==2*ugt
            subplot(2,2,2)
            trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),p0), title('12 horas'),view(0,90),
            shading interp;%,axis([0 xmax ymin ymax 0 6]);
        end
        if it==3*ugt
            subplot(2,2,3)

```

```

        trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),p0), title('18 horas'),view(0,90),colorbar;
        shading interp;%,axis([0 xmax ymin ymax 0 6]);
    end
    if it==4*ugt
        subplot(2,2,4)
        trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),p0), title('24 horas'),view(0,90),
        view(0,90),shading interp;%,axis([0 xmax ymin ymax 0 6]);
    end

    p0=p1;
    ver1(it)=p1(1400);
    ver2(it)=p1(1320);
    ver3(it)=p1(773);
    ver4(it)=p1(1017);
    end
    figure(2);
    subplot(2,2,1)
    plot(ver1),title('no 1400'), ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,2)
    plot(ver2),title('no 1320'), ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,3)
    plot(ver3),title('no 773'), ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,4)
    plot(ver4),title('no 1017'), ylabel('Concentracao'),grid on;

```