Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Teoria de Rough Paths via Integração Algébrica

por

Rafael Andretto Castrequini †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESp

Teoria de Rough Paths via Integração Algébrica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rafael Andretto Castrequini e aprovada pela comisssão julgadora.

Campinas, 16 de Setembro de 2009

Prof. Dr:. Pedro José Catuogno
Orientador

Banca Examinadora:

1. Pedro José Catuogno
2. Paulo Régis Caron Ruffino
3. Alberto Masayoshi Faria Ohashi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Castrequini, Rafael Andretto
C279t Teoria de rough paths via integração algébrica/Rafael Andretto Castrequini-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Pedro José Catuogno

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Teoria de rough path. 2.Equações diferenciais estocásticas. 3.Integrais de trajetórias. 4.Processo estocástico. I. Catuogno, Pedro José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Rough paths theory via algebraic integration

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Rough path theory. 2. Stochastic differential equation. 3. Path integrals. 4. Stochastic processes.

Área de concentração: Sistemas estocásticos

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Pedro José Catuogno (IMECC - UNICAMP)
Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Alberto Masayoshi Faria Ohashi (INSPER)

Data da defesa: 16/09/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de setembro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof. (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

Prof. (a). Dr (a). ALBERTO MASAYOSHI FARIA OHASHI

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial a minha mãe Márcia, e ao meu irmão Bruno, pelo suporte e compreensão. Por sempre me dar apoio, carinho, sempre acreditar em mim incondicionalmente.

À minha namorada Érika, por sempre ter paciência comigo e tomar as decisões cotidianas facilitando minha vida.

Ao Prof. orientador e amigo Pedro Catuogno, pela paciência, respeito e compreensão. Pelos bons momentos de discussão. Pelas várias dicas para realização desse trabalho. Por me guiar na vida acadêmica.

Aos membros da banca, pelas sugestões valiosas. Pela amizade, em especial ao Prof. Paulo Ruffino, sempre presente no decorrer de todo esse tempo dentro e fora da universidade.

Aos Prof. Ary Chiacchio e Maria Sueli Roversi por terem me ensinado a dar os primeiros passos durante a iniciação científica.

A minha família CTJ, a qual moramos juntos por seis anos em Campinas, proporcionando um dos melhores momentos da minha vida.

Aos companheiros de sala Edson e Paulo Henrique pela companhia. A todos os amigos do Imecc/Unicamp, em especial aos irmãos (alunos do Pedro) e aos primos (alunos do Paulo), pelo apoio e carinho.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do Imecc/Unicamp pelo carinho e empenho em resolver os problemas.

À FAPESp pelo suporte financeiro.

RESUMO

Introduzimos a teoria dos p-rough paths seguindo a abordagem de M. Gubinelli, conhecida por integração algébrica. Durante toda a dissertação nos restringimos ao caso $1 \leq p < 3$, o que é suficiente para lidar com trajetórias do movimento Browniano e aplicações ao Cálculo Estocástico. Em seguida, estudamos as equações diferenciais associadas aos rough paths, onde nós conectamos a abordagem de A. M. Davie (às equações) e a abordagem de M. Gubinelli (às integrais). No final da dissertação, aplicamos a teoria de rough path ao cálculo estocástico, mais precisamente relacionando as integrais de Itô e Stratonovich com a integral ao longo de caminhos.

ABSTRACT

We introduce p-Rough Path Theory following M. Gubinelli´s approach, as known as algebraic integration. Throughout this master´s thesis, we are concerned only in the case where $1 \leq p < 3$, witch is enough to deal with trajectories of a Brownnian motion and some applications to Stochastic Calculus. Afterwards, we study differential equations related to rough paths, where we connect the approach of A. M. Davie to equations with the approach of M. Gubinelli to integrals. At the end of this work, we apply the theory of rough paths to stochastic calculus, more precisely, we related the integrals of Itô and Stratonovich to integral along paths.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A primeira preocupação da Teoria de Rough Paths é definir e entender integrais da forma

$$\int_s^t dx\,(u)\,\phi\,(y\,(u))$$

ou, equivalentemente, definir equações do tipo

$$dy = \phi\,(y)\,dx \tag{0.0.1}$$

onde $y : I \subset \mathbb{R} \to W$ e $x : I \subset \mathbb{R} \to V$ são caminhos nos espaços de Banach W e V respectivamente, e $\phi : W \to L\,(V, W)$. Sendo que x não tem, necessariamente, variação limitada. Do ponto de vista da Análise Estocástica, a Teoria de Rough Paths é capaz de dar uma formulação "caminho-a-caminho" para integrais e equações diferenciais estocásticas.

A grande descoberta de T. Lyons, pai da teoria, foi que no caso do integrador x ser diferenciável, a solução da equação dirigida (0.0.1) depende de maneira "bem comportada" das integrais iteradas, $\mathbf{x}$, de x:

$$(s,t) \in I^2 \longmapsto \mathbf{x}^{\bar{a}}\,(s,t) := \mathbf{x}^{\bar{a}}_{ts} := \int_s^t dx^{a_n}_{u_n} \int_s^{u_n} dx^{a_{n-1}}_{u_{n-1}} \int_s^{u_{n-1}} \cdots \int_s^{u_2} dx^{a_1}_{u_1}$$

onde $\bar{a}$ é o multi-índice $(a_1, \ldots, a_n)$ com $|\bar{a}| = n$ sendo seu comprimento. Por exemplo, no caso $V = \mathbb{R}^n$, $x^{a_i}_{u_i}$ é a a_i-ésima coordenada de x_{u_i}, enquanto no caso geral (mesmo quando $\dim V = \infty$), $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ pode ser visto como uma $|\bar{a}|-$upla de funcionais lineares, e então $x^{a_i}_{u_i} := a_i\,(x_{u_i})$.

Pode-se dizer que, em algum sentido, as integrais iteradas codificam o comportamento local do caminho x suficientemente bem para recuperar seu efeito na solução y. A idéia de representar fielmente um caminho pelas integrais iteradas, originalmente foi desenvolvido por K. T. Chen na década de 60. Para referências históricas: [2, 3, 4].

Numa perspectiva de sistema de equações, as integrais iteradas fornecem um conjunto de coordenadas canônicas para a análise de sistemas não lineares, análogo aos coeficientes de Fourier para sistemas lineares.

Para um exemplo mais concreto e numérico, recomendamos a introdução do livro de T. Lyons e Z. Qian [17], onde através de um exemplo simples mostra-se a eficiência das integrais iteradas do caminho x para aproximar a solução de equações do tipo (0.0.1).

Este trabalho teve como motivação relacionar a abordagem (discretizada) de A. M. Davie, [5], nas equações diferenciais a abordagem (algébrica) de M. Gubinelli, [7], nos rough paths. Esta relação até então não tinha sido feita, e a chave para conseguirmos isto foi construir uma versão discreta do resultado fundamental de M. Gubinelli: a *aplicação costura* ("Sewing map").

No decorrer da dissertação essencialmente estamos em dimensão finita. Avisamos isto, pois apesar do esforço e de alguns argumentos serem válidos para dimensão infinita, em algum momento nos rendemos à dimensão finita. Vale ressaltar que o esforço não foi em completamente em vão, pois mantivemos a linguagem de espaço vetorial abstrato o tempo todo, portanto é bastante provável que pode-se facilmente verificar a validade de todos (ou quase todos) os resultados para um espaço de Hilbert qualquer.

No Capítulo 1, introduzimos a linguagem apropriada para a integração algébrica: os incrementos. Inicinalmente provamos algumas propriedades simples do operador δ e alguns fatos sobre a norma nos incrementos, que são usuais no contexto de funções Hölder contínuas. No final deste capítulo, provamos os resultados fundamentais da dissertação: Aplicação costura (e a sua versão discretizada), Teoremas 1.4.1 e 1.4.2, e o Corolário da integração algébrica 1.4.6. Numa primeira leitura, recomendamos pular as demonstrações.

No Capítulo 2, é onde a teoria de rough paths é de fato abordada: integração ao longo de caminhos. As duas primeiras seções é dedicada a familiarizar-se com o operador δ e construir a integral de Young, como exemplo de aplição dos resultados do capítulo anterior. Em seguida, no desenvolvimento da integração ao longo de caminhos, é muito importante a idéia de como aproximar integrais usuais (tipo Riemann-Stieltjes) e como esta aproximação junto com a aplicação costura Λ (para controlar o "resto") são usados para extender a noção de integral. As duas seções finais é devotada a comentários gerais da teoria e a abordagem a teoria de rough paths de T. Lyons via os funcionais multiplicativos. Como exemplo da versatilidade da aplicação Λ, provamos dois resultados importantes da abordagem de T. Lyons, [16]. Estas últimas seções podem ser omitidas pois tratam de tópicos além dos desenvolvidos na dissertação.

No Capítulo 3, primeiramente desenvolvemos a teoria de equações diferenciais associadas aos rough paths provando resultados típicos: existência, unicidade e dependência contínua dos parâmetros iniciais para soluções da equação diferencial do tipo (0.0.1). A idéia da aproximação discreta para a solução da equação é de A. M. Davie, [5]. Como pré-requito para os resultados citados, é necessário apenas a aplicação costura discreta e familiaridade com o operador δ. Deste modo, pode-se passar rapidamente ao estudo das equações diferenciais sem a definição de integral. No final deste capítulo, mostramos que a noção de solução e a definição de integral ao longo de caminhos são compatíveis. Tal conexão entre as teorias é original e foi desenvolvido por nós durante o mestrado.

No Capítulo 4, fazemos uma rápida aplicação ao cálculo estocástico mostrando como podemos interpretar as integrais estocásticas de Itô e Stratonovich caminho a caminho via a integral ao longo de caminhos definida no Capítulo 2. Feito a relação, segue imediatamente do capítulo anterior que temos resultados de existência e unicidade de soluções, caminho a caminho, para equações diferenciais estocásticas (sob hipóteses adequadas).

CAPÍTULO 1

INTEGRAÇÃO ALGÉBRICA

Apresentaremos aqui os fundamentos da integração algébrica seguindo M. Gubinelli, [7, 13]. O autor introduziu os *incrementos* para formalizar abstratamente os conceitos e resultados técnicos necessários para estabelecer rapidamente os rough paths e a integração ao longo destes. Primeiramente chamou esta sua abordagem de *Integração Algébrica*, pois introduzia a integração com integradores de variação ilimitada através de um problema algébrico [7].

1.1 Motivação

Terry Lyons propôs as primeiras definições e formulações para os rough paths em 1998, [15]. Depois reescreveu com mais clareza, [16]. Atualmente, a referência mais completa seguindo a abordagem de Lyons é P. Friz [6], livro que ainda não foi publicado, entretanto está disponível na rede.

Os integradores que estamos interessados em definir a integral são caminhos Hölder contínuos, i.e., $x : I \to V$ que satisfaz a seguinte desigualdade

$$|x_t - x_s| \leq C\,|t-s|^{1/p}$$

para algum $C > 0$ e $1 \leq p < 3$. Vale observar que a restrição no expoente p não é essencial, a teoria está desenvolvida para qualquer $1 \leq p < \infty$. Durante toda a dissertação discutiremos apenas o caso $1 \leq p < 3$, pois é suficiente para, por exemplo, lidar com as trajetórias do movimento Browniano fracionário com expoente de Hurst $H \in (1/3, 1]$.

Como motivação temos o problema de dar uma definição do tipo *soma de Riemann* para a integral

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)_{ts} := \int_s^t dx_u \phi\left(x_u\right) \overset{?}{:=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{u_i \in \mathcal{P}-\{t\}} \phi\left(x_{u_i}\right)\left(x_{u_{i+1}} - x_{u_i}\right)$$

sendo $\phi : V \to L\left(V, W\right)$ suave, onde $L\left(V, W\right)$ é o espaço das transformações lineares contínuas de V em W. Procedendo por aproximações, consideramos uma família $\{x\left(\varepsilon\right)\}_{\varepsilon>0}$ de aproximações suaves do caminho x e

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)\left(\varepsilon\right)_{ts} = \int_s^t dx\left(\varepsilon\right)_u \phi\left(x\left(\varepsilon\right)_u\right),$$

é fácil de se convencer que em geral não temos nenhum controle da convergência destas integrais quando $\lim_{\varepsilon\to 0} x\left(\varepsilon\right) = x$ na norma $1/p-$Hölder. Um fato notável é que todas as possíveis integrais obtidas variando a função ϕ convergem ao mesmo tempo (contanto que ϕ seja suficientemente suave), desde que as integrais *iteradas aproximadas* (abaixo) de ordem 2 convirjam à uma função $\mathbf{x} : I^2 \to V \otimes V$.

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço de Banach e seja $x : [0, T] \to V$ um caminho C^∞. Definimos a integral iterada de ordem 2*

$$\mathbf{x} = \int_0^T dx_t \otimes \int_0^t dx_s \in V \otimes V,$$

coordenada a coordenada. Isto é, fixamos $\{e_a : a \in A\}$ base de V e denotamos $x_t^a \in \mathbb{R}$ a coordenada de x_t na direção de e_a, e então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{b,a} \quad : \quad &= \int_0^T dx_s^b \left(\int_0^s dx_t^a\right) \ \textit{para } a, b \in A, \\ &= \int_0^T dx_s^b \left(x_s^a - x_0^a\right) \\ &= \int_0^T ds \dot{x}_s^b \left(x_s^a - x_0^a\right) \end{aligned}$$

(onde as integrais são no sentido de Riemann).

Convém interpretarmos $\mathbf{x}$ como função dos extremos de integração

$$(t,s) \mapsto \mathbf{x}_{ts}^{b,a} := \int_s^t dx_u^b \int_s^u dx_r^a$$

A convergência das integrais iteradas das aproximações $x(\varepsilon)$ para $\mathbf{x}$ é no seguinte sentido

$$\sup_{s,t \in I} \frac{\left|\mathbf{x}(\varepsilon)_{ts}^{b,a} - \mathbf{x}_{ts}^{b,a}\right|}{|t-s|^{2/p}} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0 \ ,$$

onde,

$$\mathbf{x}(\varepsilon)_{ts} = \int_s^t dx_u(\varepsilon) \otimes \int_s^u dx_r(\varepsilon) .$$

Então, em algum sentido, podemos afirmar que a teoria de integração com o integrador x está bem definida desde que possamos controlar a convergência das integrais iteradas de ordem 2. Assumindo isto é possível definir as integrais: $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ e as integrais iteradas de ordem superior. Estas novas integrais serão "boas funções" do caminho x e $\mathbf{x}^{a_1,a_2}$.

Vale observar que a afirmação "podemos definir as outras integrais sabendo x e $\mathbf{x}^{a_1,a_2}$" é válida somente quando $1 \leq p < 3$. No caso geral, serão necessárias $\lfloor p \rfloor$ −integrais iteradas para definir as integrais $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ e as integrais iteradas de ordem superior. Entretanto, o caso geral não será tratado aqui. Recomendamos P. Friz [6], para um tratamento deste.

Observamos que uma vez tomado o limite $\varepsilon \to 0$, o objeto $\mathbf{x}$ não é mais uma integral iterada (no sentido usual, ver Definição 1.1.1) e pode ser caracterizado abstratamente pelas seguintes propriedades

1. Relação de Chen

$$\mathbf{x}_{ts}^{a_1,a_2} = \mathbf{x}_{tu}^{a_1,a_2} + \mathbf{x}_{us}^{a_1,a_2} + \left(x_t^{a_1} - x_u^{a_1}\right)\left(x_u^{a_2} - x_s^{a_2}\right) \tag{1.1.1}$$

2. Condição de regularidade

$$\sup_{s,t \in I} \frac{\left|\mathbf{x}_{ts}^{a_1,a_2}\right|}{|t-s|^{2/p}} < \infty$$

O mais interessante é que pode existir mais de uma escolha possível para este objeto que satisfaz estas duas propriedades. Desta maneira, levando a diferentes teorias de integração. Por exemplo, com a integral de Itô e a integral de Stratonovich cada uma fornece uma definição para o objeto $\mathbf{x}$ de maneira diferente. Veremos mais detalhes no Capítulo 4.

Neste contexto limitado encontramos o primeiro exemplo não trivial de rough path: o par $(x, \mathbf{x})$

$$\begin{array}{rccl} (x,\mathbf{x}): & I^2 & \to & V \oplus (V \otimes V) \\ & (t,s) & \mapsto & (x_t - x_s, \mathbf{x}_{ts}) \end{array}$$

é denominado $p-$rough path. Em outras palavras, um rough path é um caminho mais alguma informação na forma de “integrais iteradas”, para o qual uma completa teoria de integração e de equações diferenciais pode ser construída.

1.2 Incrementos

M. Gubinelli introduziu um *complexo de cocadeias* para codificar as relações algébricas referentes às integrais iteradas e aos rough paths. Seja V um espaço de Banach e $I \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Não estamos interessados nas dificuldades técnicas que um espaço de dimensão infinita pode oferecer, mas sempre que possível não colocaremos hipóteses adicionais em V. A grande dificuldade está na definição para os produtos tensoriais $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$ e na escolha das normas em $V^{\otimes n}$. Vamos assumir que existe uma família de normas admissíveis $\{|\cdot|_n \ ; n \in \mathbb{N}\}$, onde $|\cdot|_n$ é norma em $V^{\otimes n}$. Mais precisamente.

Definição 1.2.1 $((V^{\otimes n}, |\cdot|_n))$**.** *Seja V um espaço de Banach. Dizemos que as potências tensoriais $V^{\otimes n}$ estão munidos de normas admissíveis se as seguintes condições são válidas*

1. *Para cada $n \geq 1$, o grupo simétrico S_n age por isometrias em $V^{\otimes n}$, isto é,*

$$\left|v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\right|_n = |v_1 \otimes \cdots \otimes v_n| \,, \ \forall v_i \in V, \forall \sigma \in S_n$$

2. *O produto tensorial tem norma 1, isto é, para cada $n, m \geq 1$*

$$|v \otimes w|_{m+n} \leq |v|_m \, |w|_n \,, \, \forall v \in V^{\otimes m}, \forall w \in V^{\otimes n}$$

Notação 1.2.2. *Sempre que não causar confusão, omitiremos o índice n nas normas $|\cdot|_n$, simplesmente denotando por $|\cdot|$ para todo n.*

Exemplo 1.2.3. *Em dimensão finita temos os exemplos usuais. Fixe $\{e_a : a = 1, \ldots m\}$ base de V. Então $\{e_{\bar{a}} := e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_n} : \bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{1, \ldots, m\}^n\}$ é base de $V^{\otimes n}$. Seja $v = \sum_{\bar{a}} v^{\bar{a}} e_{\bar{a}} \in V^{\otimes n}$ (soma finita) e considere as normas em $V^{\otimes n}$*

$$|v|_n := \sum_{\bar{a}} |v^{\bar{a}}|$$

e

$$\|v\|_n := \max_{\bar{a}} |v^{\bar{a}}| .$$

Então $(V^{\otimes n}, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(V^{\otimes n}, |\cdot|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são exemplos de famílias de normas admissíveis.*

Exemplo 1.2.4. *Suponha* $V = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *espaço de Hilbert separável.* $H^{\otimes 2}$ *é o completamento com respeito a* $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ *do espaço das formas bilineares*

$$\begin{array}{rccc} \phi\otimes\psi : & H\times H & \to & \mathbb{R} \\ & (h_1,h_2) & \mapsto & \langle\phi,h_1\rangle\langle\psi,h_2\rangle \end{array}, \text{ onde } \phi,\psi\in H$$

sendo

$$\langle\phi\otimes\psi, \theta\otimes\eta\rangle_2 := \langle\phi,\theta\rangle\langle\psi,\eta\rangle .$$

Munimos $H^{\otimes 2}$ *com a norma,* $|\cdot|_2$, *induzida por* $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. *Analogamente construímos* $(H^{\otimes n}, |\cdot|_n)$ *para cada* $n\in\mathbb{N}$. *Notamos que* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *tem a seguinte propriedade: se* $\{e_a : a\in\mathbb{N}\}$ *é base ortonormal de* H *então* $\{e_{\bar{a}} := e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_n} : \bar{a}\in\mathbb{N}^n\}$ *é base ortonormal de* $(H^{\otimes n}, |\cdot|_n)$. *Deste modo, para* $v = \sum_{\bar{a}\in\mathbb{N}^n} v^{\bar{a}} e_{\bar{a}} \in H^{\otimes n}$ *e* $w = \sum_{\bar{b}\in\mathbb{N}^m} w^{\bar{b}} e_{\bar{b}} \in H^{\otimes m}$ *temos*

$$\begin{aligned} |v\otimes w|_{n+m}^2 &= \sum_{\bar{a},\bar{b}} \left|v^{\bar{a}}w^{\bar{b}}\right|^2 |e_{\bar{a}}\otimes e_{\bar{b}}|_{n+m}^2 \\ &= \sum_{\bar{a},\bar{b}} \left|v^{\bar{a}}w^{\bar{b}}\right|^2 \\ &= \sum_{\bar{a}} |v^{\bar{a}}|^2 \sum_{\bar{b}} \left|w^{\bar{b}}\right|^2 \\ &= |v|_n |w|_m \end{aligned}$$

portanto $(H^{\otimes n}, |\cdot|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma família de normas admissíveis.*

Observação 1.2.5. *Para exemplos e construções de tensores e normas admissíveis para espaços de Banach de dimensão infinita ver R. A. Ryan [18].*

Vamos ao *complexo de cocadeias.* Definimos

$$\mathcal{C}_1(V) := \{f : I \to V\}$$

e para $k\geq 2$,

$$\mathcal{C}_k(V) := \left\{f : I^k \to V : f_{t_1\cdots t_k} = 0 \text{ quando } t_i = t_{i+1} \text{ para algum } i\right\}$$

onde $f_{t_1 \cdots t_k} := f(t_1, \ldots, t_k)$. Os elementos de $\mathcal{C}_k(V)$ são chamados de $k-$*incremento*, $k \geq 1$.

Seja $\mathcal{C}_*(V) := \cup_{k \geq 1} \mathcal{C}_k(V)$. Definimos o *operador de cobordo* $\delta : \mathcal{C}_k(V) \to \mathcal{C}_{k+1}(V)$ por

$$(\delta g)_{t_1 \cdots t_{k+1}} := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \, g_{t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots t_{k+1}}$$

onde $\hat{t}_i$ significa que esta variável em particular é omitida.

Denotamos

$$\mathcal{ZC}_k(V) := \mathcal{C}_k(V) \cap \ker \delta \quad \text{e} \quad \mathcal{BC}_k(V) := \mathcal{C}_k(V) \cap \operatorname{Im} \delta$$

os $k-$*cociclos* e os $k-$*cobordos*, respectivamente.

O par $(\mathcal{C}_*, \delta)$ é denominado complexo de cocadeias. A nomenclatura introduzida aqui é convencional na *álgebra homológica*.

Notação 1.2.6. *As vezes omitiremos o espaço V na notação introduzida.*

Exemplo 1.2.7. *Ação de δ: dados $g \in \mathcal{C}_1$ e $h \in \mathcal{C}_2$, então, para qualquer $t, u, s \in I$ temos*

$$(\delta g)_{ts} = g_t - g_s \quad e \quad (\delta h)_{tus} = h_{ts} - h_{tu} - h_{us}$$

Exemplo 1.2.8. *Os principais exemplos de $2-$incrementos são as integrais. Sejam $x, y : I = [0, T] \to \mathbb{R}$ caminhos C^∞. Definimos $h^1, h^2 \in \mathcal{C}_2$ por*

$$h^1_{ts} := \textstyle\int_s^t dx_r y_r \quad e \quad h^2_{ts} := \int_s^t dx_u \int_s^u dy_r.$$

Note que $h^1 \in \mathcal{ZC}_2$ enquanto h^2 não necessariamente pertence à $\mathcal{ZC}_2$. Isto é, temos

$$\begin{aligned} \left(\delta h^1\right)_{tus} &= \int_s^t dx_r y_r - \int_u^t dx_r y_r \int_s^u dx_r y_r = 0 \\ \left(\delta h^2\right)_{tus} &= (x_t - x_u)(y_u - y_s) = (\delta x)_{tu} (\delta y)_{us} \end{aligned}$$

e não temos a garantia de que $\delta h^2 = 0$.

Segue algumas propriedades algébricas do operador δ

Proposição 1.2.9. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *$\delta : \mathcal{C}_k(V) \to \mathcal{C}_{k+1}(V)$ é linear*

2. $\delta\delta = 0$

3. $(\mathcal{C}_*, \delta)$ *é* acíclico*, isto é,* $\mathcal{ZC}_{k+1}(V) = \mathcal{BC}_k(V)$

Demonstração. 1. Trivial

2. Seja $g \in \mathcal{C}_n$, vamos mostrar, pela definição, que $\delta\delta g = 0$. Convém introduzirmos o operador que exclui a variável na posição i, $T_i : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_{n+1}$, definido por

$$T_i(g)_{t_1 \cdots t_{n+1}} := g_{\cdots t_{i-1} t_{i+1} \cdots},$$

deste modo

$$\delta g = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (-1)^i T_i g$$

Vamos mostrar que é verdadeira a seguinte igualdade $T_j T_i = T_i T_{j-1}$, para $i < j$. Este fato será útil para provarmos que $\delta\delta = 0$. Por um lado,

$$\begin{aligned} (T_j T_i g)_{t_1 \cdots t_{n+2}} &= (T_i g)_{t_1 \cdots t_i \cdots \hat{t}_j \cdots t_{n+2}} \\ &= g_{t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots \hat{t}_j \cdots t_{n+2}}, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} (T_i T_{j-1} g)_{t_1 \cdots t_{n+2}} &= (T_{j-1} g)_{t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots t_j \cdots t_{n+2}} \\ &= g_{t_1 \cdots \hat{t}_i \cdots \hat{t}_j \cdots t_{n+2}} \end{aligned}$$

portanto vale $T_j T_i = T_i T_{j-1}$ para $1 \leq i < j \leq n+1$. Calculemos $\delta\delta g$. Segue da linearidade de δ que

$$\begin{aligned} \delta\delta g &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta(T_i g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} T_j T_i g \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} T_j T_i g + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} T_j T_i g \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} T_i T_{j-1} g + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} T_j T_i g \end{aligned}$$

usamos a relação $T_jT_i = T_iT_{j-1}$ no somatório da esquerda na última igualdade. Para finalizar, trocando j por $j+1$ no somatório da esquerda e trocando i por j no da direita resulta que

$$\begin{aligned}\delta\delta g &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(-1)^{i+(j+1)}T_iT_jg + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(-1)^{j+i}T_iT_jg \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Pelo item 2, $\mathcal{ZC}_{k+1}(V) \supseteq \mathcal{BC}_k(V)$. Agora, se $g \in \mathcal{ZC}_{k+1}(V)$, fixe $s \in I$ e defina $h_{t_1\cdots t_k} := (-1)^{k+1} g_{t_1\cdots t_k s}$. Obviamente, $t_i = t_{i+1} \Rightarrow h_{\cdots t_i t_i\cdots} = 0$. Agora

$$\begin{aligned}(\delta h)_{t_1\cdots t_{k+1}} &= [-h_{t_2\cdots t_{k+1}} + h_{t_1\hat{t}_2\cdots t_{k+1}} + \cdots + (-1)^k h_{t_1\cdots t_{k-1}t_{k+1}} + (-1)^{k+1} h_{t_1\cdots t_k}] \\ &= (-1)^{k+1}[-g_{t_2\cdots t_{k+1}s} + g_{t_1t_2\cdots t_{k+1}s} + \cdots + (-1)^{k+1} g_{t_1\cdots t_k s}] \\ &= (-1)^{k+1}[(\delta g)_{t_1\cdots t_{k+1}s} - (-1)^{k+2} g_{t_1\cdots t_{k+1}}] \\ &= g_{t_1\cdots t_{k+1}}\end{aligned}$$

usamos na última igualdade que $\delta g = 0$. Resulta que $h \in \mathcal{C}_k$ e $\delta h = g$.

□

No caso de $V = \mathbb{R}$ então podemos introduzir um produto em $\mathcal{C}_* = \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$, da seguinte maneira. Sejam $h \in \mathcal{C}_m$, e $g \in \mathcal{C}_n$, definimos $hg \in \mathcal{C}_{m+n-1}$ por

$$(hg)_{t_1\cdots t_{m+n-1}} := h_{t_1\cdots t_m} g_{t_m\cdots t_{m+n-1}}.$$

Proposição 1.2.10. *Se $V = \mathbb{R}$, então $\mathcal{C}_* = \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ munido do produto definido acima, é uma álgebra graduada (associativa, não comutativa) e δ age como uma derivação graduada. Em particular, para $f, g \in \mathcal{C}_1$ e $h, \tilde{h} \in \mathcal{C}_2$, δ satisfaz*

$$\begin{aligned}\delta(fg) &= \delta fg + f\delta g \\ \delta(fh) &= \delta fh + f\delta h \\ \delta(hf) &= \delta hf - h\delta f \qquad (1.2.1) \\ \delta\left(h\tilde{h}\right) &= \delta h\tilde{h} - h\delta\tilde{h} \qquad (1.2.2)\end{aligned}$$

Demonstração. Elementar. □

Observação 1.2.11. *Mais adiante, vamos considerar outros produtos, análogos ao definido acima, quando os incrementos tomam valores em espaços vetoriais quaisquer. Por exemplo, se* $x, y \in \mathcal{C}_m(I, V)$ *e* $T \in \mathcal{C}_n(I, L(V, W))$ *então podemos definir*

$$(Tx)_{t_1 \cdots t_{m+n-1}} := T_{t_1 \cdots t_m} x_{t_m \cdots t_{m+n-1}},$$

também

$$(xT)_{t_1 \cdots t_{m+n-1}} = T_{t_n \cdots t_{m+n-1}} x_{t_1 \cdots t_n}$$

e também

$$(xy)_{t_1 \cdots t_{2m-1}} := x_{t_1 \cdots t_m} \otimes x_{t_m \cdots t_{2m-1}} \in V^{\otimes 2}$$

1.3 Espaços $\mathcal{C}_k^\mu$ e $C^{\gamma-H\ddot{o}l}$

Para introduzir as condições de regularidade nas integrais iteradas, é necessário definir normas nos espaços $\mathcal{C}_k(V)$, $k = 1, 2, 3$.

Definição 1.3.1 ($\mathcal{C}_k^\mu$)**.** *Se* $\mu \in [0, \infty)$

1. *Para* $h \in \mathcal{C}_1(V)$, $\|h\|_\mu := \|h\|_{\mathcal{C}_1^\mu(V)} := \sup_{t,u \in I} \frac{|h_t - h_u|}{|t-u|^\mu}$
2. *Para* $h \in \mathcal{C}_2(V)$, $\|h\|_\mu := \|h\|_{\mathcal{C}_2^\mu(V)} := \sup_{t,u \in I} \frac{|h_{tu}|}{|t-u|^\mu}$.
3. *Para* $h \in \mathcal{C}_3(V)$, $\|h\|_\mu := \|h\|_{\mathcal{C}_3^\mu(V)} := \sup_{s<u<t} \frac{|h_{tus}|}{|t-s|^\mu}$.
4. *Para* $h \in \mathcal{C}_k(V)$ *(*$k = 1, 2, 3$*)*, $\|h\|_\infty := \sup_{t_1, \cdots, t_k \in I} |h_{t_1 \cdots t_k}|$.
5. $\mathcal{C}_k^\mu(V) := \{h \in \mathcal{C}_k(V) : \|h\|_\mu < \infty\}$, *para* $k = 1, 2, 3$.
6. $\mathcal{C}_{1,o}^\mu(V) := \{h \in \mathcal{C}_1^\mu(V) : h_0 = o\}$, *onde* $o \in V$ *fixo.*
7. $\mathcal{C}_k^{1+}(V) := \cup_{\mu > 1} \mathcal{C}_k^\mu(V)$, *como união de conjuntos. Analogamente,* $\mathcal{ZC}_k^\mu := \mathcal{ZC}_k \cap \mathcal{C}_k^\mu$, $\mathcal{BC}_k^\mu$, ...

Proposição 1.3.2. *Seja* $I = [0, T]$*. Então* $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_k^\mu}$ *é uma seminorma para* $k = 1$ *e é norma quando* $k = 2, 3$. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_1^\mu}$ *induz uma métrica* d *em* $\mathcal{C}_{1,o}^\mu(I, V)$ *e é uma norma quando* $o = 0$*. Os espaços* $\mathcal{C}_{1,o}^\mu(I, V)$, $\mathcal{C}_k^\mu(I, V)$ *(*$k = 2, 3$*) são completos.*

Demonstração. Caso $k=1$. Sejam $h, h^1, h^2 \in \mathcal{C}_{1,o}^\mu$. Segue das propriedades de funções Hölder contínuas que $\|\cdot\|_\mu$ é uma seminorma. Também sabemos que $\|h\|_\mu = 0$ se, e somente se, h é constante. Logo $d(h^1, h^2) = \|h^1 - h^2\|_\mu = 0$ se, e somente se, $h_t^1 = h_t^2 = o$ $(\forall t \in I)$. Ou seja, $d(h^1, h^2) = 0$ se, e somente se, $h^1 = h^2$, e portanto d é uma métrica. É óbvio que $\mathcal{C}_{1,0}^\mu$ é um espaço vetorial e portanto $\|\cdot\|_\mu$ é uma norma. A demonstração da completude é análoga ao caso $k=3$.

Caso $k=3$. Provaremos que $\|\cdot\|_\mu$ é norma para $k=3$. Seja h tal que $\|h\|_\mu = 0$. Então $|h_{tus}| \leq \|h\|_\mu |t-s|^\mu = 0$, logo $h_{tus} = 0$. Os outros axiomas de norma seguem facilmente.

Provaremos que $\mathcal{C}_3^\mu$ é completo. Seja $(h^n)_n \subset \mathcal{C}_3^\mu$ sequência de Cauchy. Então

$$\begin{aligned} |h_{tus}^n - h_{tus}^m| &\leq \sup_{t,u,s \in I} \frac{|h_{tus}^n - h_{tus}^m|}{|t-s|^\mu} . \sup_{t,s \in I} |t-s|^\mu \\ &\leq T^\mu \sup_{t,u,s \in I} \frac{|h_{tus}^n - h_{tus}^m|}{|t-s|^\mu} \\ &= T^\mu \|h^n - h^m\|_\mu . \end{aligned}$$

Logo

$$\|h^n - h^m\| \leq T^\mu \|h^n - h^m\|_\mu ,$$

ou seja, (h^n) é Cauchy na norma $\|\cdot\|_\infty$. Como o espaço das funções contínuas $(C(I^3, V), \|\cdot\|_\infty)$ é completo segue que existe h contínua tal que $\lim_{n\to\infty} \|h^n - h\|_\infty = 0$.

Se $s = u$ ou se $u = s$ então $h_{tus} = \lim_{n\to\infty} h_{tus}^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, ou seja, $h \in \mathcal{C}_3$.

Mostraremos que $\|h\|_\mu < \infty$. Sejam $t, u, s \in I$ então

$$\begin{aligned} \frac{|h_{tus}|}{|t-s|^\mu} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|h_{tus}^n|}{|t-s|^\mu} \\ &= \limsup_n \frac{|h_{tus}^n|}{|t-s|^\mu} \\ &\leq \limsup_n \|h^n\|_\mu \end{aligned}$$

Como $\left(\|h^n\|_\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada segue que, tomando o supremo na desigualdade acima, $\|h\|_\mu < \infty$. Para terminarmos vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \|h^n - h\|_\mu = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, para n e m suficientemente grandes temos que

$$\begin{aligned} \frac{|h_{tus}^n - h_{tus}^m|}{|t-s|^\mu} &\leq \sup_{t,u,s \in I} \frac{|h_{tus}^n - h_{tus}^m|}{|t-s|^\mu} \\ &= \|h^n - h^m\|_\mu \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$(\forall t,u,s\in I)$. Tomando $m\to\infty$, resulta que

$$\frac{|h^n_{tus}-h_{tus}|}{|t-s|^{\mu}}<\varepsilon$$

$(\forall t,u,s\in I)$. Logo $\|h^n-h\|_{\mu}<\varepsilon$, como queríamos. □

Proposição 1.3.3. *$\delta:\mathcal{C}_2^{\mu}\to\mathcal{C}_3^{\mu}$ $(\mu>1)$ é injetor e verifica a seguinte desigualdade*

$$\|\delta h\|_{\mathcal{C}_3^{\mu}}\leq 2\,\|h\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}\,,$$

logo é contínuo.

Demonstração. Sejam $h\in\mathcal{C}_2^{\mu}$ e $s<u<t$ em I. Então $|t-s|=|t-u|+|u-s|$, logo

$$\begin{aligned}|t-s|^{\mu} &= (|t-u|+|u-s|)^{\mu}\\ &\geq |t-u|^{\mu}+|u-s|^{\mu}.\end{aligned}$$

Como $\delta h_{tus}=h_{ts}-h_{tu}-h_{us}$ e usando a desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned}|\delta h_{tus}| &\leq |h_{ts}|+|h_{tu}|+|h_{us}|\\ &\leq \|h\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}\left(|t-s|^{\mu}+|t-u|^{\mu}+|u-s|^{\mu}\right)\\ &\leq \|h\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}\left(|t-s|^{\mu}+|t-s|^{\mu}\right),\end{aligned}$$

logo $\|\delta h\|_{\mathcal{C}_3^{\mu}}\leq 2\,\|h\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}$. Portanto $\delta:\mathcal{C}_2^{\mu}\to\mathcal{C}_3^{\mu}$ está bem definido.

Resta mostrar a injetividade. Seja $h\in\mathcal{C}_2^{\mu}$ tal que $\delta h=0$. Como $\mathcal{ZC}_2=\mathcal{BC}_1$ segue que existe $f\in\mathcal{C}_1$ tal que $\delta f=h$. Então $\|f\|_{\mathcal{C}_1^{\mu}}=\|\delta f\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}=\|h\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}}<\infty$, ou seja, f é $\mu-$Hölder contínua com $\mu>1$. Portanto f é constante. Logo $h=\delta f=0$, ou seja δ é injetor. □

Definição 1.3.4 **($C^{\gamma-H\ddot{o}l}$).** *Se $\gamma\in(0,\infty)$ denotamos por $C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}(V,W)$ o espaço das funções $\lfloor\gamma\rfloor$-vezes diferenciáveis sendo que as derivadas de ordem $\lfloor\gamma\rfloor$ são localmente $(\gamma-\lfloor\gamma\rfloor)-$Hölder contínuas. Este espaço é munido com a topologia definida pela seguinte família de seminormas*

$$\|\phi\|_{\gamma,K}:=\|\phi\|_{\infty,K}+\left\|\partial^{\lfloor\gamma\rfloor}\phi\right\|_{(\gamma-\lfloor\gamma\rfloor)-H\ddot{o}l,K}+\sum_{j=1}^{\lfloor\gamma\rfloor}\left\|\partial^{k}\phi\right\|_{\infty,K}$$

onde $K\subset V$ é um compacto. E

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{\infty,K} &:= \sup_{x\in K}|\phi(x)|\\ \|\phi\|_{(\gamma-\lfloor\gamma\rfloor)-H\ddot{o}l,K} &:= \sup_{x,y\in K}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{\gamma-\lfloor\gamma\rfloor}}\end{aligned}$$

Denotamos por $C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}$ o subconjunto de $C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}$ das funções que possuem suporte compacto e por $C^{\gamma-H\ddot{o}l}$ o subconjunto de $C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}$ das funções que satisfazem $\|\phi\|_{\gamma,W} < \infty$.

Observação 1.3.5. *$\lfloor\gamma\rfloor$ é a parte inteira de γ, isto é, $\lfloor\gamma\rfloor$ é o único número inteiro tal que $\lfloor\gamma\rfloor \leq \gamma < \lfloor\gamma\rfloor + 1$.*

A seguir mostraremos alguns resultados que serão úteis nas seções posteriores.

Lema 1.3.6. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ compacto (não precisa ser intervalo), $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(U_1, U_2)$ e $z \in \mathcal{C}_1^{1/p}(I, U_1)$ ($2 \leq p < \gamma \leq 3$ e U_1 e U_2 são espaços de Banach, não necessariamente finito dimensionais). Consideramos os seguintes 2-incrementos*

$$\begin{aligned}(\delta z D\phi \circ z)_{us} &= D\phi(z_u)\,\delta z_{us} \in U_2 \\ \delta\phi \circ z_{us} &= \phi(z_u) - \phi(z_s) \in U_2.\end{aligned}$$

Então

$$\|\delta\phi \circ z - \delta z D\phi \circ z\|_{\frac{\gamma-1}{p}} \leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,K} \|z\|_{1/p}^{\gamma-1},$$

onde K é um compacto que depende de z e de I. Isto é, mostramos que $\delta\phi \circ z - \delta z D\phi \circ z \in \mathcal{C}_2^{(\gamma-1)/p}(I, U_2)$.

Demonstração. Usando a propriedade $|v|_{U_2} = \sup\{\xi v : \xi \in U_2^*, |\xi| = 1\}$, resulta que

$$\begin{aligned}\left|(\delta\phi \circ z - \delta z D\phi \circ z)_{us}\right| &= |\phi(z_u) - \phi(z_s) - D\phi(z_s)\,\delta z_{us}| \\ &= \sup_{\xi \in U_2^*, |\xi|=1} |\xi[\phi(z_u) - \phi(z_s) - D\phi(z_s)\,\delta z_{us}]| \\ &= \sup_{\xi \in U_2^*, |\xi|=1} |\xi\phi(z_u) - \xi\phi(z_s) - \xi D\phi(z_s)\,\delta z_{us}| \\ &= \sup_{\xi \in U_2^*, |\xi|=1} |[\xi \circ \phi(z_u) - \xi \circ \phi(z_s) - \xi D\phi(z_s)\,\delta z_{us}]|. \quad (1.3.1)\end{aligned}$$

Agora aplicando o teorema do valor médio as funções $\xi \circ \phi : U_1 \to \mathbb{R}$, segue que existem z^ξ pertencentes ao segmento $[z_s, z_u] \subset U_1$ tais que

$$\begin{aligned}\xi \circ \phi(z_u) - \xi \circ \phi(z_s) &= D(\xi \circ \phi)\left(z^\xi\right)\delta z_{us} \\ &= \xi D\phi\left(z^\xi\right)\delta z_{us}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\xi \circ \phi(z_u) - \xi \circ \phi(z_s) - \xi D\phi(z_s)\,\delta z_{us} &= \xi D\phi\left(z^\xi\right)\delta z_{us} - \xi D\phi(z_s)\,\delta z_{us} \\ &= \xi\left\{\left(D\phi\left(z^\xi\right) - D\phi(z_s)\right)\delta z_{us}\right\},\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\left|\xi\circ\phi\left(z_u\right)-\xi\circ\phi\left(z_s\right)-\xi D\phi\left(z_s\right)\delta z_{us}\right|\leq\left|\xi\right|\left\{\left|D\phi\left(z^{\xi}\right)-D\phi\left(z_s\right)\right|\left|\delta z_{us}\right|\right. \tag{1.3.2}$$

Agora, uma vez que $z^{\xi}\in[z_s,z_u]$ resulta que $\left|z^{\xi}-z_s\right|\leq\left|z_u-z_s\right|\leq\|z\|_{1/p}\left|u-s\right|^{1/p}$ e portanto

$$\begin{aligned}\left|D\phi\left(z^{\xi}\right)-D\phi\left(z_s\right)\right|\left|\delta z_{us}\right| &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K}\left|z^{\xi}-z_s\right|^{\gamma-2}\|z\|_{1/p}\left|u-s\right|^{1/p}\\ &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K}\|z\|_{1/p}^{\gamma-1}\left|u-s\right|^{\frac{\gamma-1}{p}}\\ &\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,K}\|z\|_{1/p}^{\gamma-1}\left|u-s\right|^{\frac{\gamma-1}{p}}, \end{aligned}\tag{1.3.3}$$

com $K=\overline{co\left(z\left(I\right)\right)}$ (fecho da envoltória convexa de $z\left(I\right)$), o qual é compacto inclusive no caso em que $\dim U_1=\infty$. Substituindo as desigualdades (1.3.2) e (1.3.3) na igualdade (1.3.1) segue que

$$\left|\left(\delta\phi\circ z-\delta zD\phi\circ z\right)_{us}\right|\leq\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,K}\|z\|_{1/p}^{\gamma-1}\left|u-s\right|^{\frac{\gamma-1}{p}},$$

de onde segue a conclusão do lema. □

Proposição 1.3.7 (Interpolação). *Sejam* $0<\frac{1}{q}<\frac{1}{p}\leq 1$ *e* $x\in\mathcal{C}_1\left(I,V\right)$. *Então vale a seguinte desigualdade*

$$\|x\|_{1/q}\leq\|x\|_{1/p}^{p/q}\|x\|_0^{1-\frac{p}{q}}.$$

Demonstração. Seja $u,s\in I$. Como $\frac{p}{q}>0$ e $1-\frac{p}{q}>0$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{\left|x_u-x_s\right|}{\left|u-s\right|^{1/q}} &= \left(\frac{\left|x_u-x_s\right|}{\left|u-s\right|^{1/p}}\right)^{p/q}\left|x_u-x_s\right|^{1-p/q}\\ &\leq \|x\|_{1/p}^{p/q}\|x\|_0^{1-\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Logo a proposição segue. □

Corolário 1.3.8 (Critério de compacidade). *Seja* $K\subset\mathcal{C}_{1,o}^{1/p}\left(I,V\right)$ *(*$1\leq p<q$*) limitado (na métrica* d_p *de* $\mathcal{C}_{1,o}^{1/p}$*) e equicontínuo. Então* K *é relativamente compacto em* $\mathcal{C}_{1,o}^{1/q}$*. Em particular, as bolas na métrica* d_p *são relativamente compactas na topologia de* d_q*.*

Demonstração. Seja $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset K$. Como K é limitado em $\mathcal{C}_{1,o}^{1/p}$ e $x_0^n=o$ (para todo $n\in\mathbb{N}$) é fácil de ver que K é limitado na métrica uniforme d_∞. Ainda mais, K é equicontínuo, logo segue do Teorema do Arzelà–Ascoli que K é relativamente compacto na topologia uniforme, ou seja, existem subsequência (y^n) de (x^n) e $y : I \to V$ contínua tais que $\lim_{n\to\infty} d_\infty(y^n, y) = 0$. Ainda mais, $\|y\|_{1/p} < \infty$, pois

$$
\begin{aligned}
|y_t - y_s| &\leq |y_t^n - y_s^n| + |y_t - y_t^n| + |y_s^n - y_s| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y^n\|_{1/p} |t-s|^{1/p} + 2d_\infty(y^n, y)
\end{aligned}
$$

logo, tomando o limite $n \to \infty$ concluimos que $\|y\|_{1/p} < \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y^n\|_{1/p} < \infty$.

Resta mostrarmos que $\lim_{n\to\infty} d_q(y^n, y) = 0$. Notamos que $d_0(y^n, y) \leq 2d_\infty(y^n, y)$ e portanto usando a proposição anterior com $x = y^n - y$ temos que

$$
\begin{aligned}
d_q(y^n, y) &= \|y^n - y\|_{1/q} \\
&\leq \|y^n - y\|_{1/p}^{p/q} \|y^n - y\|_0^{1-\frac{p}{q}} \\
&\leq 2^{1-\frac{p}{q}} \|y^n - y\|_{1/p}^{p/q} \|y^n - y\|_\infty^{1-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}
$$

Como K é limitado e como $\|y\|_{1/p} < \infty$ segue que $\left\{\|y^n - y\|_{1/p}; n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado. Portanto, segue da desigualdade acima que

$$\lim_{n\to\infty} d_q(y^n, y) = 0.$$

Em particular, as bolas são da forma $B = \left\{x \in \mathcal{C}^{1/p} : \|x - x^0\|_{1/p} \leq r\right\}$, logo limitadas. Também,

$$
\begin{aligned}
|x_t - x_s| &\leq \left|x_t - x_s - x_t^0 + x_s^0\right| + \left|x_t^0 - x_s^0\right| \\
&\leq \left\|x - x^0\right\|_{1/p} (t-s)^{1/p} + \left\|x^0\right\|_{1/p} (t-s)^{1/p}
\end{aligned}
$$

$(\forall x \in B)$, ou seja, são uniformemente equicontínuas. $\square$

O seguinte lema é similar ao conhecido Lema Omega (*Omega Lemma*) de equações diferenciais ordinárias, ver R. Abraham, J. E. Marsden e T. S. Ratiu. [1, p 101].

Lema 1.3.9 (Omega)**.** *Sejam $I = [0, T]$ e $\psi \in C_{loc}^{\gamma-Höl}(U_1, U_2)$ $(0 < \gamma \leq 1$, U_1, U_2 são espaços de Banach e $\dim U_1 < \infty)$. Definimos $\Omega : \mathcal{C}_{1,o}^{1/p}(I, U_1) \to \mathcal{C}_{1,o}^{\alpha\gamma/p}(I, U_2)$ $(1 \leq p$ e $0 < \alpha < 1)$ por*

$$\Omega(x) = \psi \circ x.$$

Então Ω é contínua.

Observação 1.3.10. *A hipótese* $\dim U_1 < \infty$*, pode ser substituída por* $\phi \in C^{\gamma - H\ddot{o}l}$*. Pois* $\|\phi\|_{\gamma - H\ddot{o}l, K} \leq \|\phi\|_{\gamma - H\ddot{o}l, U_1}$ *e portanto a desigualdade (1.3.7), abaixo, implica a continuidade de* Ω*.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathcal{C}_{1,o}^{1/p}(I, U_1)$ e $u, s \in I$.

$$
\begin{aligned}
\left|\delta\left(\Omega\left(x\right)-\Omega\left(y\right)\right)_{us}\right| &= \left|\psi\left(x_u\right)-\psi\left(y_u\right)-\psi\left(x_s\right)+\psi\left(y_s\right)\right| \\
&= \left|\psi\left(x_u\right)-\psi\left(y_u\right)\right|+\left|\psi\left(x_s\right)-\psi\left(y_s\right)\right| \\
&\leq \|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\tilde{K}}\left(\left|x_u-y_u\right|^{\gamma}+\left|x_s-y_s\right|^{\gamma}\right) \\
&\leq 2\|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\tilde{K}}\|x-y\|_{\infty,I}^{\gamma},
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{K} = (x-y)(I)$. Logo

$$
\|\Omega(x)-\Omega(y)\|_0 \leq 2\|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\tilde{K}}\|x-y\|_{\infty,I}^{\gamma}. \tag{1.3.4}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|\Omega(x)-\Omega(y)\|_{\gamma/p} &\leq \|\Omega(x)\|_{\gamma/p}+\|\Omega(y)\|_{\gamma/p} \\
&= \|\psi\circ x\|_{\gamma/p}+\|\psi\circ y\|_{\gamma/p} \\
&\leq \|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\hat{K}}\left(\|x\|_{1/p}^{\gamma-1}+\|y\|_{1/p}^{\gamma-1}\right),
\end{aligned} \tag{1.3.5}
$$

sendo $\hat{K} = x(I) \cup y(I)$. Então, interpolando as desigualdades (1.3.4) e (1.3.5), temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Omega(x)-\Omega(y)\|_{\alpha\gamma/p} &\leq \|\Omega(x)-\Omega(y)\|_{\gamma/p}^{\alpha}\|\Omega(x)-\Omega(y)\|_{0}^{1-\alpha} \\
&\leq \|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\hat{K}}^{\alpha}\left(\|x\|_{1/p}^{\gamma-1}+\|y\|_{1/p}^{\gamma-1}\right)^{\alpha}2^{1-\alpha}\|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,\tilde{K}}^{1-\alpha}\|x-y\|_{\infty,I}^{\gamma(1-\alpha)} \\
&\leq 2^{1-\alpha}\|\psi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,K}\left(\|x\|_{1/p}^{\gamma-1}+\|y\|_{1/p}^{\gamma-1}\right)^{\alpha}\|x-y\|_{\infty,I}^{\gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned} \tag{1.3.6}
$$

Agora, observamos que

$$
x_u - y_u = x_u - y_u + x_0 - y_0,
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\left|x_u-y_u\right| &\leq \|x-y\|_{1/p}(u-0)^{1/p} \\
&\leq \|x-y\|_{1/p}T^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\|x-y\|_{\infty} \leq \|x-y\|_{1/p}T^{1/p}.
$$

Substituindo esta desigualdade em (1.3.6) temos que

$$\|\Omega(x) - \Omega(y)\|_{\alpha\gamma/p} \leq 2^{1-\alpha} T^{\frac{\gamma(1-\alpha)}{p}} \|\psi\|^{\alpha}_{\gamma-H\ddot{o}l,K} \left(\|x\|^{\gamma-1}_{1/p} + \|y\|^{\gamma-1}_{1/p}\right)^{\alpha} \|x-y\|^{\gamma(1-\alpha)}_{1/p}. \quad (1.3.7)$$

Antes de concluirmos a continuidade de Ω é necessário observar que o compacto K na desigualdade acima depende de y. Logo não podemos concluir diretamente a continuidade (isto é, não podemos simplesmente tomar o limite $\lim_{y\to x} \|\Omega(x) - \Omega(y)\|_{\alpha\gamma/p} = 0$). Para contormar este problema, devemos escolher melhor o compacto K, e isto será feito da seguinte maneira. Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{1/p}_{1,o}$ tal que $\lim_n \|x^n - x\|_{1/p} = 0$, devemos encontrar K que não depende de n e contenha $\tilde{K} \cup \hat{K}$, ou seja, que contenha $x^n(I) \cup x(I) \cup (x - x^n)(I)$. Como (x^n) converge a x segue que existe $r > 0$ tal que valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|x\|_{1/p} &\leq r \\ \|x^n - x\|_{1/p} &\leq r \\ \|x^n\|_{1/p} &\leq r, \end{aligned}$$

$(\forall n \in \mathbb{N})$. Logo

$$\begin{aligned} |x_t - o| &\leq rT^{1/p} \\ |x^n_t - o| &\leq rT^{1/p}, \end{aligned}$$

$(\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N})$. Logo, basta tomar K sendo a bola fechada de raio $rT^{1/p}$ e centro o. Deste modo podemos concluir $(x - x^n)(I) \subset K$. Portanto por (1.3.7) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|\Omega(x) - \Omega(x^n)\|_{\alpha\gamma/p} = 0. \quad (1.3.8)$$

□

1.4 Resultados fundamentais

O Teorema 1.4.2 apareceu pela primeira vez no artigo [7] de M. Gubinelli, entretanto, a demonstração apresentada aqui é mais clara e direta, foi publicada em M. Gubinelli e S. Tindel [13]. Já o Teorema 1.4.1, é o análogo discreto do Teorema 1.4.2 e, até onde sabemos, é inédito. Porém, sua demonstração é uma adaptação do resultado fornecido por M. Gubinelli em [13].

O interesse do resultado discreto reside na seguinte idéia inspirada de A. M. Davie, [5], resolver, em algum sentido, a equação diferencial rough (Capítulo 3) em cada partição finita de um intervalo, para depois, por argumentos de densidade, ter uma solução no intervalo. Este é o tema do próximo Capítulo, baseado no artigo A. M. Davie [5].

O fato relevante do Teorema 1.4.1 é que o utilizamos, seguindo as idéias de Davie, para demonstrar o Lema de Davie e, consequentemente, os teoremas de existência e unicidade de solução para equações diferenciais rough. Deste modo, conectando as duas abordagens. A vantagem é que chegamos aos resultados fundamentais da teoria mais rápida e diretamente. Isto não desmerece as literaturas de T. Lyons, [16], e P. Friz, [6], uma vez que estas fornecem ferramentas para tratar um $p-$rough path em geral (isto é, $p \in [1, \infty)$).

Por simplicidade assumiremos ao longo desta seção que V é um espaço de Banach finito dimensional ($\dim V < \infty$). Entretano as demonstrações apresentadas aqui são válidas no caso infinito dimensional desde que V seja separável e reflexivo, ver Observações 1.4.4 e 1.4.5 abaixo.

Teorema 1.4.1 (Aplicação costura Λ discreta)**.** *Sejam $I = \{r_0 < r_1 < \cdots < r_K\}$ e $\mu > 1$. Então existe uma aplicação linear*

$$\Lambda : \mathcal{ZC}_3^{\mu}(I, V) \to \mathcal{C}_2^{\mu}(I, V)$$

tal que

$$\delta\Lambda = id|_{\mathcal{ZC}_3(I,V)} \tag{1.4.1}$$

e

$$\|\Lambda h\|_{\mu} \leq 2^{\mu}\zeta(\mu)\|h\|_{\mu}, \tag{1.4.2}$$

sendo $\zeta(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^{\mu}$ a função zeta de Riemann.

Teorema 1.4.2 (Aplicação costura Λ)**.** *Seja $I = [0, T]$. Então existe uma única aplicação linear*

$$\Lambda = \mathcal{ZC}_3^{1+}(I, V) \to \mathcal{C}_2^{1+}(I, V)$$

tal que

$$\delta\Lambda = id|_{\mathcal{ZC}_3(I,V)}.$$

Além do mais, para todo $\mu > 1$, esta aplicação é linear e contínua de $\mathcal{ZC}_3^{\mu}(I, V)$ para $\mathcal{C}_2^{\mu}(I, V)$ e temos que vale a desigualdade

$$\|\Lambda h\|_{\mu} \leq \tfrac{1}{2^{\mu}-2}\|h\|_{\mu} \quad, \forall h \in \mathcal{ZC}_3^{\mu}(V) \tag{1.4.3}$$

Também Λ *verifica a seguinte propriedade local: Sejam* $J \subset I$*, intervalo, e* $h, \tilde{h} \in \mathcal{ZC}_3^{1+}(I, V)$

$$h|_{J^3} = \tilde{h}\Big|_{J^3} \Rightarrow \Lambda h|_{J^2} = \Lambda \tilde{h}\Big|_{J^2},$$

em outras palavras, $\Lambda^J : \mathcal{ZC}_3^{1+}(J, V) \to \mathcal{C}_2^{1+}(J, V)$ *satisfaz* $\Lambda^J(h|_J) = (\Lambda h)|_J$

Lema 1.4.3. *Se* $s = r_0 < r_1 \leq \cdots \leq r_{m-1} < r_m = t$ *estão em* I*, então existe um índice* l *em* $\{1, \ldots, m-1\}$ *tal que*

$$|r_{l+1} - r_{l-1}| \leq \frac{2}{m-1}|t - s|$$

Demonstração. No caso $m = 2$, tomando $l = 1$ temos que $|r_2 - r_0| = |t - s| \leq \frac{2}{2-1}|t - s|$.

No caso $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} |r_{i+1} - r_{i-1}| &\leq \sum_{i=1}^{m-1} |r_{i+1} - r_i| + |r_i - r_{i-1}| \\ &= |t - r_1| + |r_{m-1} - s| \\ &\leq 2|t - s| \end{aligned}$$

então, pelo menos um dos termos do somatório da esquerda deve ser menor ou igual à $\frac{2}{m-1}|t - s|$. □

Demonstração do Teorema 1.4.1. Seja $h \in \mathcal{ZC}_3^{\mu}(I, V) \subset \mathcal{ZC}_3^{1+}(I, V)$. Durante a demonstração omitiremos a dependência de I e de V nos objetos em questão. Para evitar sub-subíndices, usaremos h_{mk} em vez de $h_{r_m r_k}$.

Dividimos a demonstração em dois passos.

<u>Passo 1</u> - Vamos construir $M \in \mathcal{C}_2^{\mu}$ tal que $\delta M = h$.

Como $\delta h = 0$, pela Proposição 1.2.9 item 3., segue que existe $B \in \mathcal{C}_2$ tal que $\delta B = h$. Definimos

$$M_{mk} := B_{mk} - \sum_{i=k}^{m-1} B_{i,i+1} \text{ para todo } r_m \geq r_k \tag{1.4.4}$$

(no caso da igualdade, $r_m = r_k$, o somatório $\sum_{i=k}^{k-1}$ deve ser entendido como 0). Então

$M \in \mathcal{C}_2$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\delta M_{mlk} &= M_{mk} - M_{ml} - M_{lk} \\
&= B_{mk} - B_{ml} - B_{lk} - \left(\sum_{i=k}^{m-1} B_{i,i+1} - \sum_{i=l}^{m-1} B_{i,i+1} - \sum_{i=k}^{l-1} B_{i,i+1} \right) \\
&= \delta B_{mlk} - 0 \\
&= h_{mlk}
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Resta garantir que $\|M\|_\mu < \infty$.

Segue do Lema 1.4.3, com $s = r_k$ e $t = r_m$, que existe $l_1 \in \{k+1, \ldots, m-1\}$ tal que

$$|r_{l_1+1} - r_{l_1-1}| \leq \frac{2}{m-k-1} |r_m - r_k| . \tag{1.4.6}$$

Seja $\{s_k < \cdots < s_{m-1}\} = \{r_k, \ldots, r_m\} \backslash \{l_1\}$, definindo

$$M^1_{m,k} := B_{m,k} - \sum_{i=k}^{m-2} B_{s_{i+1},s_i}$$

resulta que

$$\begin{aligned}
M^1_{m,k} - M_{m,k} &= B_{l_1+1,l_1-1} - B_{l_1+1,l_1} - B_{l_1,l_1-1} \\
&= \delta B_{l_1+1,l_1,l_1-1} \\
&= h_{l_1+1,l_1,l_1-1}.
\end{aligned}$$

Logo, da identidade anterior, das definições e (1.4.6) temos que

$$\begin{aligned}
\left| M^1_{m,k} - M_{m,k} \right| &\leq \|h\|_\mu |r_{l_1+1} - r_{l_1-1}|^\mu \\
&\leq 2^\mu \|h\|_\mu |r_m - r_k|^\mu \frac{1}{(m-k-1)^\mu}
\end{aligned}$$

por (1.4.6).

Agora, repetindo o processo, escolha $l_2 \in \{k+1, \ldots, m-1\} \backslash \{l_1\}$ tal que $|r_{l_2+1} - r_{l_2-1}| \leq \frac{2}{m-k-2} |r_m - r_k|$ e defina M^2 analogamente a M^1. Vemos que

$$\left| M^2_{m,k} - M^1_{m,k} \right| \leq 2^\mu \|h\|_\mu |r_m - r_k|^\mu \frac{1}{(m-k-2)^\mu}$$

assim por diante, definindo $l_j \in \{k+1, \ldots, m-1\} \backslash \{l_1, \ldots, l_{j-1}\}$ e M^j para $j = 1, \ldots, m-k+1$, temos que

$$\left| M^j_{m,k} - M^{j-1}_{m,k} \right| \leq 2^\mu \|h\|_\mu |r_m - r_k|^\mu \frac{1}{(m-k-j)^\mu} \tag{1.4.7}$$

Portanto, chamando $M^0 := M$ e observando que $M_{m,k}^{m-k+1} = 0$. Segue de (1.4.7) que

$$\begin{aligned}
|M_{m,k}| &= \left| \sum_{j=1}^{m-k+1} M_{m,k}^{j} - M_{m,k}^{j-1} \right| \\
&\leq 2^{\mu} \|h\|_{\mu} |r_m - r_k|^{\mu} \sum_{j=1}^{m-k+1} \frac{1}{(m-k-j)^{\mu}} \\
&\leq 2^{\mu} \|h\|_{\mu} |r_m - r_k|^{\mu} \zeta(\mu).
\end{aligned}$$

Desta maneira provamos que

$$\|M\|_{\mu} \leq 2^{\mu} \zeta(\mu) \|h\|_{\mu} \tag{1.4.8}$$

Passo 2 - Definiremos Λ satisfazendo (1.4.2) e (1.4.1).

Seja $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ base (de Hamel) do espaço $\mathcal{C}_3^{\mu}$. Definimos $H_\alpha := \{B \in \mathcal{C}_2 : \delta B = h_\alpha\}$ para cada $\alpha \in A$. Como cada H_α é não vazio podemos escolher $B^\alpha \in H_\alpha$ para cada α. Assim, definimos $\Lambda(h_\alpha)_{r_m, r_k} := B_{r_m, r_k}^{\alpha} - \sum_{i=k}^{m-1} B_{r_{i+1}, r_i}^{\alpha}$, para $0 \leq r_k \leq r_m \leq r_K$ e cada α. Nos outros vetores de $\mathcal{C}_3^{\mu}$ estendemos Λ^I por linearidade. Logo, pelo passo anterior (mais precisamente por (1.4.4,1.4.5,1.4.8)) e pela linearidade de δ, segue que Λ satisfaz (1.4.2) e (1.4.1). □

Demonstração do Teorema 1.4.2. Seja $h \in \mathcal{ZC}_3^{\mu} \subset \mathcal{ZC}_3^{1+}$ para algum $\mu > 1$. Vamos mostrar que existe um único $M \in \mathcal{C}_2^{1+}$ tal que $\delta M = h$, e então basta definir $\Lambda h := M$. Assim teríamos mostrado a existência e a unicidade da aplicação $\Lambda : \mathcal{ZC}_3^{1+}(V) \to \mathcal{C}_2^{1+}(V)$ que satisfaz $\delta\Lambda = id|_{\mathcal{ZC}_3(V)}$.

Dividimos a demonstração em 4 passos.

Passo 1 - Unicidade do 2−incremento $M \in \mathcal{C}_2^{1+}$ tal que $\delta M = h$.

Isto é trivial, pois δ é injetor da Proposição 1.3.3.

Passo 2 - Vamos construir $M \in \mathcal{C}_2^{\mu}$ tal que $\delta M = h$.

Aqui a técnica é resolver o problema em $\cup_n \mathcal{P}_n$, onde $(\mathcal{P}_n)_n$ é uma sequência arbitrária de partições encaixadas, e depois estender ao fecho da união dos pontos das partições. Para isso, vamos utilizar o Teorema 1.4.1 em cada $\mathcal{C}_2^{\mu}(\mathcal{P}_n)$, $n \geq 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $h^n := h|_{\mathcal{P}_n}$. Então $h^n \in \mathcal{C}_3^\mu(\mathcal{P}_n)$. Note que $\|h^n\|_\mu \leq \|h\|_\mu$. Usando o costureiro discreto, definimos $M^n := \Lambda^{\mathcal{P}_n}(h^n)$, então de (1.4.3) temos

$$\left|M^n_{r_l^n, r_k^n}\right| \leq 2^\mu \zeta(\mu) \|h^n\|_\mu |r_l^n - r_k^n|^\mu \leq c_\mu |r_l^n - r_k^n|^\mu \tag{1.4.9}$$

para todo $r_l^n, r_k^n \in \mathcal{P}_n := \{0 = r_0^n < r_1^n < \cdots < r_{k_n}^n = T\}$, sendo $c_\mu := 2^\mu \zeta(\mu) \|h\|_\mu$.

Como $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_m$ se $n \leq m$, faz sentido considerarmos as sequências $\left(M^m_{r_l^n, r_k^n}\right)_{m \geq n} \subset V$ para cada $r_l^n, r_k^n \in \mathcal{P}_n$ e cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ e para cada $r_l^1, r_k^1 \in \mathcal{P}_1$, temos que a sequência $\left(M^m_{r_l^1, r_k^1}\right)_{m=1}^\infty$, está limitada em V, pois $\left|M^m_{r_l^1, r_k^1}\right| \leq c_\mu |r_l^1 - r_k^1|^\mu$, logo podemos extrair subsequência, de modo que $M^m_{r_l^1, r_k^1}$ convirja, digamos, para $M_{r_l^1, r_k^1} \in V$ quando $m \to \infty$ (ver Observações 1.4.4 e 1.4.5). Como $\mathcal{P}_1$ é finito, existe uma subsequência $(m_i)_{i=1}^\infty$ tal que $\lim_{i\to\infty} M^{m_i}_{r_l^1, r_k^1} = M_{r_l^1, r_k^1}$, $\forall r_l^1, r_k^1 \in \mathcal{P}_1$. Agora para $n = 2$, podemos extrair uma subsequência de $(m_i)_{i=1}^\infty$ de modo que $M^{m_i}_{r_l^2, r_k^2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} M_{r_l^2, r_k^2}$, $\forall r_l^2, r_k^2 \in \mathcal{P}_2 \supset \mathcal{P}_1$. Repetindo sucessivamente o processo de extrair subsequências podemos concluir que existe uma (outra) subsequência $(m_i)_{i=1}^\infty$ tal que $\lim_{i\to\infty} M^{m_i}_{r_l, r_k} = M_{r_l, r_k}$, $\forall r_l, r_k \in \cup_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$.

Note que por (1.4.9), temos $|M_{kl}| \leq c_\mu |r_k - r_l|^\mu$, $\forall r_l, r_k \in \cup_n \mathcal{P}_n$. O que implica que M é uniformemente contínua o que implica que podemos estender M ao fecho $\overline{\cup_n \mathcal{P}_n} = I$, isto é,

$$M \in \mathcal{C}_2^\mu(I) \text{ satisfazendo } |M_{ts}| \leq c_\mu |t - s|^\mu, \forall t, s \in I, \tag{1.4.10}$$

lembramos que $c_\mu = 2^\mu \zeta(\mu) \|h\|_\mu$.

Por fim, dados $t, u, s \in \cup \mathcal{P}_n$

$$\begin{aligned} \delta M_{tus} &= M_{ts} - M_{tu} - M_{us} \\ &= \lim_{m\to\infty} (M^m_{ts} - M^m_{tu} - M^m_{us}) \\ &= \lim_{m\to\infty} h^m_{tus} \\ &= h_{tus} \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

portanto $\delta M = h$ em todo I.

Passo 3 - Unicidade e propriedades de Λ.

Notamos que M construído no passo anterior é único, pois $M \in \mathcal{C}_2^{1+}$ e satisfaz $\delta M = h$. Logo a unicidade de Λ segue do primeiro passo. Isto é, existe uma única função $\Lambda : \mathcal{ZC}_3^{1+} \to \mathcal{C}_2^{1+}$ tal que $\delta\Lambda = id$. Do passo 2, segue-se que δ é sobrejetivo, portanto $\Lambda = \left(\delta|_{\mathcal{C}_2^{1+}}\right)^{-1}$ e isto implica que Λ é linear.

Provaremos a propriedade local de Λ. Dados $J \subset I$, e $h, \tilde{h} \in \mathcal{ZC}_3^{1+}(I)$ tais que $h|_{J^3} = \tilde{h}\Big|_{J^3}$, definimos $g := \Lambda h - \Lambda \tilde{h}$. Logo $\delta g = h - \tilde{h}$, isto implica que $\delta g|_{J^3} = 0$, ou seja, $g|_{J^2} = 0$, pois δ é injetor.

Quanto à restrição $\Lambda : \mathcal{C}_3^\mu \to \mathcal{C}_2^\mu$ para $\mu > 1$, resulta que (1.4.10) garante que Λ está bem definida e é contínua.

Passo 4 - Resta mostrar a desigualdade (1.4.3). Para isto vamos especializar a construção de M numa sequência de partições.

Como na demonstração do Teorema 1.4.1, consideramos $B \in \mathcal{C}_2$ tal que $\delta B = h \in \mathcal{C}_3^\mu$. Fixamos $s, t \in I$ e tais que $s < t$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos para cada $i = 0, \ldots, 2^n$

$$r_i^n := s + \frac{(t-s)}{2^n} i$$

isto é, $\mathcal{P}_n := \{r_i^n; i = 0, \ldots, 2^n\}$ é a partição diádica do intervalo $[s,t]$ com $|\mathcal{P}_n| = 2^{-n}$. Então definimos M^n usando a fórmula (1.4.4) com a partição $\mathcal{P}_n := \{r_i^n\}$. Notamos que $M_{ts}^0 = 0$.

Para simplificar as contas de $M_{ts}^{n+1} - M_{ts}^n$ vale observar que $\{r_i^n\} \subset \{r_i^{n+1}\}$ e que $r_i^n = r_{2i}^{n+1}$. Portanto podemos reescrever

$$M_{ts}^{n+1} = B_{t,s} - \sum_{i=0}^{2^n-1} B_{r_{2i+2}^{n+1}, r_{2i+1}^{n+1}} + B_{r_{2i+1}^{n+1}, r_{2i}^{n+1}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} M_{ts}^{n+1} - M_{ts}^n &= \sum_{i=0}^{2^n-1} -B_{r_{2i+2}^{n+1}, r_{2i+1}^{n+1}} - B_{r_{2i+1}^{n+1}, r_{2i}^{n+1}} + B_{r_{2i+2}^{n+1}, r_{2i}^{n+1}} && (1.4.12) \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} (\delta B)_{r_{2i+2}^{n+1}, r_{2i+1}^{n+1}, r_{2i}^{n+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} h_{r_{2i+2}^{n+1}, r_{2i+1}^{n+1}, r_{2i}^{n+1}} && (1.4.13) \end{aligned}$$

como $h \in \mathcal{C}_3^\mu$ resulta que

$$\begin{aligned} \left|M_{ts}^{n+1} - M_{ts}^n\right| &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \|h\|_\mu \left(\frac{t-s}{2^{n+1}}\right)^\mu \\ &= \|h\|_\mu \frac{(t-s)^\mu}{2^{(n+1)\mu}} . 2^n \\ &= \frac{\|h\|_\mu (t-s)^\mu}{2^\mu} \frac{1}{2^{n(\mu-1)}} \end{aligned}$$

Por fim, somando em n,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left|M_{ts}^{n+1}-M_{ts}^{n}\right| &\leq \frac{\|h\|_{\mu}(t-s)^{\mu}}{2^{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^{n} \\ &= \frac{\|h\|_{\mu}(t-s)^{\mu}}{2^{\mu}-2}.\end{aligned}$$

Logo existe

$$\begin{aligned}M_{ts} \quad : &= \lim_{n\to\infty} M_{ts}^{n} \\ &= M_{ts}^{0}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(M_{ts}^{n+1}-M_{ts}^{n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{ts}^{n+1}-M_{ts}^{n}\end{aligned}$$

satisfazendo $|M|_{ts} \leq \frac{1}{2^{\mu}-2}\|h\|_{\mu}(t-s)^{\mu}$. $\square$

Observação 1.4.4. *No passo 2 do Teorema 1.4.2 usamos o fato que podemos extrair uma subsequência convergente de M_{lk}^{m}, pois esta está contida numa bola de V. Este resultado é, em geral, falso quando* $\dim V=\infty$.

Observação 1.4.5. *Por exemplo, no caso* $\dim V=\infty$, *se V é reflexivo e separável então podemos extrair uma subsequência. Para garantir a cota $|M_{ts}| \leq c_{\mu}|t-s|^{\mu}$ do limite fraco, basta usarmos a seguinte propriedade do limite fraco: $\|x\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|x_{n}\|$ se $w-\lim_{n\to\infty} x_{n}=x$. Existe mais um problema, o limite e a igualdade (1.4.11). Isto pode ser contornado, redefinindo o espaços $\mathcal{C}_{k}^{\mu}(V)$ da seguinte maneira:*

$$\mathcal{C}_{k}^{\mu}(V):=\{h\in\mathcal{C}_{3}: h^{a}=a(h)\in\mathcal{C}_{k}^{\mu}(\mathbb{R}), \forall a\in V'\}.$$

Deste modo a igualdade (1.4.11) é entendida no sentido fraco.

Corolário 1.4.6 (Integral de 2-incrementos)**.** *Seja $h\in\mathcal{C}_{2}$ tal que $\delta h\in\mathcal{C}_{3}^{\mu}$, $(\mu>1)$. Então h pode ser escrito como*

$$h=\delta f+\Lambda\delta h$$

sendo $f\in\mathcal{C}_{1}$ única a menos de constante aditiva. Ainda mais, f satisfaz

$$(\delta f)_{ts}=\lim_{|\pi_{ts}|\to 0}\sum_{r_{i}\in\pi_{ts}} h_{r_{i+1},r_{i}}$$

sendo π_{ts} partições de $[s,t]$.

Demonstração. Como $\delta h \in \mathcal{C}_3^{\mu}$ segue que $R := \Lambda \delta h$ está bem definido. Como $\delta \Lambda = id$ resulta que

$$\begin{aligned} \delta (h - R) &= \delta h - \delta \Lambda \delta h \\ &= \delta h - \delta h \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathcal{ZC}_2 (V) = \mathcal{BC}_1 (V)$, logo existe $f \in \mathcal{C}_1 (V)$ tal que $\delta f = h - R$. Resulta que $h = \delta f + \Lambda \delta h$ e que δf é única.

Seja $\mathcal{P}_{ts} = \{t_i : i = 0, \ldots n + 1\}$ logo

$$h_{t_{i+1},t_i} = \delta f_{t_{i+1},t_i} + R_{t_{i+1},t_i}$$

portanto

$$\sum_{i=0}^{n} h_{t_{i+1},t_i} = \delta f_{ts} + \sum_{i=0}^{n} R_{t_{i+1},t_i}$$

Resta mostrarmos que $\lim_{|\mathcal{P}_{ts}| \to 0} \sum_{i=0}^{n} \left| R_{t_{i+1},t_i} \right| = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \left| R_{t_{i+1},t_i} \right| &\leq \|R\|_{\mu} \sum_{i=0}^{n} |t_{i+1} - t_i|^{\mu} \\ &\leq \|R\|_{\mu} |\pi_{ts}|^{\mu - 1} |t - s|, \end{aligned}$$

portanto segue que $\lim_{|\mathcal{P}_{ts}| \to 0} \sum_{i=0}^{n} \left| R_{t_{i+1},t_i} \right| = 0$. $\square$

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES

Agora vamos ver como a aplicação Λ e a integral de 2-incrementos ajuda na teoria de integração com caminhos pouco regulares e suas integrais iteradas. O propósito desta seção é, inicialmente, fornecer ao leitor uma familiaridade com o operador δ. Em seguida, vamos definir a integral clássica de Young e a integral $\int dx_u \phi(x_u)$ quando $x \in \mathcal{C}_1$ não é suave. Também recuperaremos a definição usual de rough path dada por T. Lyons, bem como a demonstração de alguns resultados de T. Lyons [16].

2.1 Resultados preliminares

O exemplo padrão de 2-incrementos são as integrais. Por exemplo, se $f, g \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, então definimos

$$\mathcal{J}(f)_{ts} := \int_s^t du f_u$$
$$\mathcal{J}(dgf)_{ts} := \int_s^t dg_u f_u$$

Denotaremos por $\mathcal{C}_2^\infty(\mathbb{R})$ a $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(I, \mathbb{R})$. Com estas notações, $\mathcal{J}(f)$ e $\mathcal{J}(dgf)$ estão em $\mathcal{C}_2^\infty(\mathbb{R})$. Também podemos definir a integral de um 2-incremento $h \in \mathcal{C}_2^\infty(\mathbb{R})$

$$\mathcal{J}(h)_{ts} := \int_s^t du h_{us}$$
$$\mathcal{J}(dgh)_{ts} := \int_s^t dg_u h_{us}$$

Desta maneira, como a integral é um 2-incremento, definimos as integrais iteradas de maneira natural

$$\mathcal{J}\left(dg^1 \cdots dg^n f\right) := \mathcal{J}\left(dg^1 \cdots dg^{n-1} \mathcal{J}(dg^n f)\right)$$

sendo $f, g^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Lema 2.1.1. *Sejam $g \in \mathcal{C}_1^\infty$ e $h \in \mathcal{C}_2^\infty$ tal que $\delta h = \sum_i h^{1,i} h^{2,i}$ (soma finita). Então*

$$\delta \mathcal{J}(dgh) = \mathcal{J}(dg)\, h + \sum_i \mathcal{J}\left(dgh^{1,i}\right) h^{2,i}$$

Demonstração. Para $s \leq u \leq t$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{J}(dgh)_{tus} &= \int_s^t dg_r h_{rs} - \int_s^u dg_r h_{rs} - \int_u^t dg_r h_{ru} \\
&= \int_u^t dg_r (h_{rs} - h_{ru}) \\
&= \int_u^t dg_r (\delta h_{rus} + h_{us}) \\
&= \int_u^t dg_r \left(\sum_i h_{ru}^{1,i} h_{us}^{2,i} \right) + \left(\int_u^t dg_r \right) h_{us} \\
&= \sum_i \left(\int_u^t dg_r h_{ru}^{1,i} \right) h_{us}^{2,i} + \mathcal{J}(dg)_{tu} h_{us} \\
&= \sum_i \mathcal{J}\left(dgh^{1,i}\right)_{ru} h_{us}^{2,i} + \mathcal{J}(dg)_{tu} h_{us}
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.2. *Sejam $f, g, g^1, \ldots, g^n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Então*

1. $\mathcal{J}(dg) = \delta g$

2. $\delta \mathcal{J}(dg) = 0$

3. $\delta\mathcal{J}\left(dgf\right)=0$

4. $\delta\mathcal{J}\left(dgdf\right)=\mathcal{J}\left(dg\right)\mathcal{J}\left(df\right)=\delta g\delta f$

5. Relação de Chen:

$$\delta\mathcal{J}\left(dg^1dg^2\cdots dg^n\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{J}\left(dg^1dg^2\dots dg^i\right)\mathcal{J}\left(dg^{i+1}\dots dg^n\right) \tag{2.1.1}$$

Esta relação usualmente aparece como

$$\begin{aligned}\int_s^t dg_{t_1}^1\int_s^{t_1}dg_{t_2}^2\cdots\int_s^{t_{n-1}}dg_{t_n}^n &= \int_u^t dg_{t_1}^1\int_u^{t_1}dg_{t_2}^2\cdots\int_u^{t_{n-1}}dg_{t_n}^n+\\ &+\int_s^u dg_{t_1}^1\int_s^{t_1}dg_{t_2}^2\cdots\int_s^{t_{n-1}}dg_{t_n}^n+\\ +\sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_u^t dg_{t_1}^1\int_s^{t_1}dg_{t_2}^2\cdots\int_s^{t_{i-1}}dg_{t_i}^i\right)&\left(\int_s^u dg_{t_{i+1}}^{i+1}\int_s^{t_{i+1}}dg_{t_{i+2}}^{i+2}\cdots\int_s^{t_{n-1}}dg_{t_n}^n\right)\end{aligned}$$

Demonstração. 1. Para $s\leq t$,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\left(dg\right)_{ts} &= \int_s^t dg_r\\ &= g_t-g_s\\ &= \delta g_{ts}.\end{aligned}$$

2. Pelo item anterior $\mathcal{J}\left(dg\right)=\delta g$, logo $\delta\mathcal{J}\left(dg\right)=\delta\delta g=0$.

3. Para $s\leq u\leq t$,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}\left(dgf\right)_{tus} &= \int_s^t dg_rf_r-\left(\int_s^u dg_rf_r+\int_u^t dg_rf_r\right)\\ &= \int_s^t dg_rf_r-\int_s^t dg_rf_r\\ &= 0.\end{aligned}$$

4. Para $s\leq u\leq t$, como

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\left(dgdf\right)_{ts} &= \int_s^t dg_r\int_s^r df_u\\ &= \int_s^t dg_r\left(f_r-f_s\right)\\ &= \int_s^t dg_rf_r-\left(\int_s^t dg_r\right)f_s\\ &= \mathcal{J}\left(dgf\right)_{ts}-\delta g_{ts}f_s\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}\left(dgdf\right)_{tus} &= \delta\mathcal{J}\left(dgf\right)_{ts}-\delta\left(\delta gf\right)_{tus}\\ &= 0-\delta\delta g_{tus}f_s+\delta g_{tu}\delta f_{us}\\ &= \mathcal{J}\left(dg\right)_{tu}\mathcal{J}\left(df\right)_{us},\end{aligned}$$

pelos itens 1 e 3.

5. Faremos a prova por indução em n. Caso $n=2$, é o item 4. Suponha verdade para $n-1$, isto é,

$$\delta\mathcal{J}\left(dg^2\cdots dg^n\right)=\sum_{i=2}^{n-1}\mathcal{J}\left(dg^2dg^3\dots dg^i\right)\mathcal{J}\left(dg^{i+1}\dots dg^n\right)$$

Pela definição de integral iterada, $\mathcal{J}\left(dg^1\cdots dg^n\right)=\mathcal{J}\left(dg^1\mathcal{J}\left(dg^2\cdots dg^n\right)\right)$, logo usando o lema anterior com $h^{1,i}=\mathcal{J}\left(dg^2dg^3\dots dg^i\right)$, $h^{2,i}=\mathcal{J}\left(dg^{i+1}\dots dg^n\right)$ e $h=\mathcal{J}\left(dg^2\cdots dg^n\right)$, resulta que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}\left(dg^1\cdots dg^n\right) &= \delta\mathcal{J}\left(dg^1h\right)\\ &= \mathcal{J}\left(dg^1\right)h+\sum_{i=2}^{n-1}\mathcal{J}\left(dg^1h^{1,i}\right)h^{2,i}\\ &= \mathcal{J}\left(dg^1\right)\mathcal{J}\left(dg^2\cdots dg^n\right)+\sum_{i=2}^{n-1}\mathcal{J}\left(dg^1h^{1,i}\right)h^{2,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{J}\left(dg^1dg^2\dots dg^i\right)\mathcal{J}\left(dg^{i+1}\dots dg^n\right)\end{aligned}$$

□

2.2 Integral de Young

Originalmente L. C. Young, [20], definiu a seguinte integral

$$\int_0^T dg_uf_u:=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i\in\mathcal{P}}f_{t_i}\left(g_{t_{i+1}}-g_{t_{i-1}}\right)$$

sendo $f\in\mathcal{C}_1^{1/p}\left(I,L\left(V,W\right)\right)$, $g\in\mathcal{C}_1^{1/q}\left(I,W\right)$ com $p,q\geq 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. Esta integral é uma extensão da integral de Riemann-Stieltjes para integradores que não tem variação limitada, ver L. C. Young [20]. Hoje é conhecida como integral de Young e será nossa primeira aplicação do operador Λ.

Podemos introduzí-la no contexto da integração algébrica da seguinte maneira. Sejam f e g funções suaves, então vale

$$\mathcal{J}\left(dgf\right)_{ts} = f_s\left(\delta g_{ts}\right) + \mathcal{J}\left(dgdf\right)_{ts} \tag{2.2.1}$$

Assim, pretendemos estender a integral da esquerda via o lado direito da equação. Para isso é suficiente dar significado ao termo $\mathcal{J}\left(dgdf\right)$ quando f e g não forem suaves. Isto não será feito diretamente. Note que pelo item 4. da Proposição 2.1.2, no caso suave, temos

$$\delta\mathcal{J}\left(dgdf\right) = \delta g\delta f$$

Como o lado direito está bem definido independentemente da regularidade de f e de g, graças a aplicação Λ e a propriedade $\delta\Lambda = id$, é natural definirmos

$$\mathcal{J}\left(dgdf\right) = \Lambda\left(\delta g\delta f\right)$$

e isto faz sentido desde que $\delta g\delta f \in \mathcal{C}_3^{1+}\left(W\right)$ (ver Teorema 1.4.2). Afim de que $\delta g\delta f \in \mathcal{C}_3^{1+}\left(W\right)$, é suficiente que $f \in \mathcal{C}^{1/p}\left(L\left(V,W\right)\right)$ e $g \in \mathcal{C}^{1/q}\left(V\right)$ com $p,q \geq 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$.

Então podemos definir

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\left(dgf\right)_{ts} &:= f_s\left(\delta g_{ts}\right) + \Lambda\left(\delta g\delta f\right)_{ts} \\ &= \left[\delta g f + \Lambda\left(\delta g\delta f\right)\right]_{ts} \end{aligned}$$

Como $\delta g\delta f = -\delta\left(\delta g f\right)$, pela eq. (1.2.1) (ie, Regra de Leibniz) e pelo fato $\delta\delta g = 0$, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\mathcal{J}\left(dgf\right) = \left(id - \Lambda\delta\right)\left(\delta g f\right),$$

aplicando o Corolário 1.4.6, resgatamos a definição original da integral de Young,

$$\mathcal{J}\left(dgf\right)_{ts} = \lim_{|\mathcal{P}\cap[s,t]|\to 0}\sum_{t_i\in\mathcal{P}} f_{t_i}\left(g_{t_{i+1}} - g_{t_{i-1}}\right).$$

Esta integral satisfaz as propriedades de continuidade usuais.

Teorema 2.2.1 (de Young)**.** *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}: \ \mathcal{C}_1^{1/p}\left(I,V\right)\times\mathcal{C}_1^{1/q}\left(I,L\left(V,W\right)\right) & \to & \mathcal{C}_2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(I,W\right) \\ (g,f) & \mapsto & \mathcal{J}\left(dgf\right) \end{array}$$

é bilinear, contínua e satisfaz

$$\left|\int_s^t dg_r\left(f_r-f_s\right)\right|\leq\frac{1}{2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}-2}\left\|g\right\|_{\mathcal{C}^{1/p}}\left\|f\right\|_{\mathcal{C}^{1/q}}\left|t-s\right|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Provaremos a bilinearidade. Como δ é linear e o produto de incrementos é bilinear, resulta que

$$(g,f)\mapsto\delta gf$$

é bilinear. Como Λ também é linear segue que $(id-\Lambda\delta)$ é linear. Logo

$$(g,f)\mapsto\mathcal{J}\left(dgf\right)=\left(id-\Lambda\delta\right)\left(\delta gf\right)$$

é bilinear.

Provaremos a desigualdade. Observamos que

$$\begin{aligned} \int_s^t dg_r\left(f_r-f_s\right) &= -f_s\delta g_{ts}+\int_s^t dg_rf_r \\ &= -f_s\delta g_{ts}+\left(id-\Lambda\delta\right)\left(\delta gf\right)_{ts} \\ &= -\Lambda\delta\left(\delta gf\right)_{ts} \\ &= -\Lambda\left(\delta\delta g-\delta g\delta f\right)_{ts} \\ &= \Lambda\left(\delta g\delta f\right)_{ts}. \end{aligned}$$

Logo segue da desigualdade 1.4.3 da aplicação costura que

$$\begin{aligned} \left|\int_s^t dg_r\left(f_r-f_s\right)\right| &\leq \left|\Lambda\left(\delta g\delta f\right)_{ts}\right| \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}-2}\left\|\delta g\delta f\right\|_{\mathcal{C}_3^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\left|t-s\right|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}-2}\left\|g\right\|_{\mathcal{C}^{1/p}}\left\|f\right\|_{\mathcal{C}^{1/q}}\left|t-s\right|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

A continuidade de $\mathcal{J}$ segue da desigualdade acima. □

2.3 Integração ao longo de caminhos $(1 \leq p < 2)$

Este é o primeiro exemplo (trivial) de *rough path* e é um caso particular da integral de Young.

Definição 2.3.1. *Um p-*Rough Path *$(1 \leq p < 2)$ é um caminho $x \in \mathcal{C}_1^{1/p}(I, V)$.*

A condição $1 \leq p < 2$ aparece naturalmente quando queremos definir $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ ao longo do caminho $x \in \mathcal{C}_1^{1/p}(I, V)$, para $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$ $(1 < \gamma \leq 2)$.

Podemos resolver o problema da integração, $\mathcal{J}(dx\phi(x))$, usando a integral de Young. É sabido que,

$$\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l},\ x \in \mathcal{C}_1^{1/p} \Rightarrow \phi \circ x \in \mathcal{C}^{\frac{\gamma-1}{p}}.$$

Logo

$$\delta x \delta\phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(I, W).$$

Deste modo, a existência da integral $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ é garantida pela seção anterior (com $g = x$ e $f = \phi \circ x$) desde que $\delta x \delta \phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{1+}(I, W)$. Isto é, desde que $\frac{\gamma-1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{\gamma}{p} > 1$. Como $\gamma \in (1, 2]$ segue que $p \in [1, 2)$ (daí, a restrição natural $1 \leq p < 2$). Como $\frac{\gamma}{p} > 1$ e $p \in [1, 2)$ resulta que $p < \gamma \leq 2$.

Portanto a integral

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(dx\phi(x))_{ts} &= (id - \Lambda\delta)(\delta x \phi \circ x)_{ts} && (2.3.1) \\ &= \lim_{|\mathcal{P} \cap [s,t]| \to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi(x_{t_i})\left(x_{t_{i+1}} - x_{t_{i-1}}\right) && (2.3.2) \end{aligned}$$

existe desde que $x \in \mathcal{C}_1^{1/p}(I, V)$ e $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$ $(1 \leq p < \gamma \leq 2)$.

Proposição 2.3.2. *Seja $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$ $(1 \leq p < \gamma \leq 2$ e $\dim V < \infty)$. Então a integral de ϕ ao longo de $x \in \mathcal{C}_{1,o}^{1/p}(I, V)$ depende continuamente de x, ou seja,*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}:\ \mathcal{C}_{1,o}^{1/p}(I, V) &\to \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}(I, W) \\ x &\mapsto \mathcal{J}(dx\phi(x)) \end{aligned}$$

$(p/\gamma < \alpha < 1)$ é contínua.

Demonstração. Sejam x, y tais que $y_0 = x_0$. Pela definição da integral,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(dx\phi(x)) &= (id - \Lambda\delta)(\delta x \phi \circ x) \\ &= \delta x \phi \circ x - \Lambda\delta(\delta x \phi \circ x). \end{aligned}$$

Mostraremos que as aplicações $x \mapsto \delta x \phi \circ x$ e $x \mapsto \Lambda\delta\left(\delta x \phi \circ x\right)$ são contínuas na norma $\left\|\cdot\right\|_{1/p}$. Seja $(x^n) \subset \mathcal{C}^{1/p}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x - x^n\| = 0$.

Primeiramente mostraremos que $x \mapsto \delta x \phi \circ x$ é contínua. Temos que

$$\phi\left(x_s\right)\delta x_{ts} - \phi\left(x_s^n\right)\delta x_{ts}^n = \left[\phi\left(x_s\right) - \phi\left(x_s^n\right)\right]\delta x_{ts} + \phi\left(x_s^n\right)\left(\delta x_{ts} - \delta x_{ts}^n\right). \tag{2.3.3}$$

Por um lado temos que

$$\begin{aligned}
\left|\phi\left(x_s^n\right)\left(\delta x_{ts} - \delta x_{ts}^n\right)\right| &\leq \left|\phi\left(x_s^n\right)\right|\left|\delta x_{ts} - \delta x_{ts}^n\right| \\
&\leq \left|\phi\left(x_s^n\right)\right|\left\|x - x^n\right\|_{1/p}(t-s)^{1/p}
\end{aligned}$$

então basta limitarmos $\left|\phi\left(x_s^n\right)\right| \leq C$ com C independente de s e n, para concluirmos que $\lim_n \left\|\left(\delta x - \delta x^n\right)\phi \circ x^n\right\|_{1/p} = 0$. Para isto, fixamos $a \in (0,1)$ e consideramos a aplicação $\Omega : \mathcal{C}_{1,o}^{1/p} \to \mathcal{C}_{1,o}^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}$ definida por

$$\Omega\left(x\right) = \phi \circ x,$$

que é contínua pelo Lema Omega 1.3.9. Como (x^n) é convergente e Ω é contínua, resulta que $\left\|\Omega\left(x^n\right)\right\|_{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} \leq \tilde{C}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Logo, lembrando que $x_0^n = x_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\phi\left(x_s^n\right)\right| &= \left|\phi\left(x_s^n\right) - \phi\left(x_0^n\right) + \phi\left(x_0\right)\right| \\
&\leq \left\|\phi \circ x^n\right\|_{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}(s-0)^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} + \left|\phi\left(x_0\right)\right| \\
&\leq \left\|\phi \circ x^n\right\|_{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} T^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} + \left|\phi\left(x_0\right)\right| \\
&= \left\|\Omega\left(x^n\right)\right\|_{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} T^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} + \left|\phi\left(x_0\right)\right|. \\
&\leq \tilde{C}T^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} + \left|\phi\left(x_0\right)\right|.
\end{aligned}$$

Portanto tomando $C = \tilde{C}T^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} + \left|\phi\left(x_0\right)\right|$ segue que

$$\begin{aligned}
\left|\phi\left(x_s^n\right)\left(\delta x_{ts} - \delta x_{ts}^n\right)\right| &\leq \left|\phi\left(x_s^n\right)\right|\left\|x - x^n\right\|_{1/p}(t-s)^{1/p} \\
&\leq C\left\|x - x^n\right\|_{1/p}(t-s)^{1/p}
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\lim_n \left\|\left(\delta x - \delta x^n\right)\phi \circ x^n\right\|_{1/p} = 0, \tag{2.3.4}$$

como afirmamos.

Por outro lado

$$\begin{aligned} |[\phi(x_s) - \phi(x_s^n)]\,\delta x_{ts}| &\leq |\phi(x_s) - \phi(x_s^n)|\,|\delta x_{ts}| \\ &= |\Omega(x)_s - \Omega(x^n)_s|\,|\delta x_{ts}| \\ &\leq \|\Omega(x) - \Omega(x^n)\|_\infty \|x\|_{1/p}(t-s)^{1/p}, \end{aligned}$$

logo

$$\|\delta x(\phi \circ x - \phi \circ x^n)\|_{1/p} \leq \|x\|_{1/p}\|\Omega(x) - \Omega(x^n)\|_\infty.$$

Mais uma vez, usando que $x_0^n = x_0$, podemos concluir que

$$\|\Omega(x) - \Omega(x^n)\|_\infty \leq T^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}\|\Omega(x) - \Omega(x^n)\|_{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}$$

pela continuidade de Ω segue que

$$\lim_{n\to\infty}\|\delta x(\phi \circ x - \phi \circ x^n)\|_{1/p} = 0. \tag{2.3.5}$$

Dos limites (2.3.4) e (2.3.5), e da igualdade (2.3.3) concluímos que a aplicação $x \mapsto \delta x\phi \circ x$ é contínua na norma $\|\cdot\|_{1/p}$.

Resta provarmos a continuidade de $x \mapsto \Lambda\delta(\delta x\phi \circ x) = -\Lambda(\delta x\delta\phi(x))$. Seja $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha\frac{\gamma}{p} > 1$. Logo $\Omega(x) = \phi \circ x \in \mathcal{C}_1^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}$ e é contínua. Como $\delta : \mathcal{C}_1^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}} \to \mathcal{C}_2^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}$ é contínua, pois preserva norma, segue que $\delta \circ \Omega : \mathcal{C}_{1,o}^{1/p} \to \mathcal{C}_2^{\alpha\frac{\gamma-1}{p}}$ é contínua. Como $\delta x\delta\phi(x) \in \mathcal{C}_3^{\alpha\gamma/p}$ segue que $\Lambda(\delta x\delta\phi(x))$ está bem definido e $\Lambda : \mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\alpha\gamma/p} \to \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}$ é contínua. □

2.4 Integração ao longo de caminhos ($2 \leq p < 3$)

Começaremos com a definição de rough path para este caso. Em seguida, continuando a discussão da seção anterior, veremos que esta definição é natural quando se procura uma melhor aproximação para a integral $\mathcal{J}(dx\phi(x))$.

Definição 2.4.1. *Um p-Rough Path ($2 \leq p < 3$) é um par $(x, \mathbf{x})$ onde $x \in \mathcal{C}_1^{1/p}(I,V)$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_2^{2/p}(I, V\otimes V)$ que verifica*

$$\delta\mathbf{x} = \delta x\delta x.$$

Em outras palavras, $(x, \mathbf{x})$ satisfaz a relação de Chen, (2.1.1).

Observamos que $\mathcal{J}(dxdx)$ não pode ser definido via integral de Young quando $2 \leq p < 3$, pois $\delta x \delta x \in \mathcal{C}_3^{2/p}$ e $2/p < 1$. Como o 2-incremento $\mathbf{x}$ satisfaz as propriedades que gostaríamos que a integral iterada $\mathcal{J}(dxdx)$ tivesse, definimos $\mathcal{J}(dxdx) := \mathbf{x}$.

Proposição 2.4.2. *Denotamos por $\Omega_{p,o}(I,V)$ o subconjunto dos p-*rough path *$(2 \leq p < 3)$ tais que $x_0 = o$. O conjunto $\Omega_{p,o}(I,V)$ munido da seguinte métrica*

$$d_p(X,Y) = \max\left\{\|x-y\|_{\mathcal{C}^{1/p}}, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}}\right\},$$

$X = (x,\mathbf{x})$,$Y = (y,\mathbf{y}) \in \Omega_p(I,V)$, é um espaço métrico completo.

Demonstração. A completude segue do fato dos espaços $\mathcal{C}_{1,o}^{1/p}$ e $\mathcal{C}_2^{2/p}$ serem completos. □

Observação 2.4.3. *Cuidado, no caso $x \in \mathcal{C}_1^{1/p}$ $(2 \leq p < 3)$, pode existir mais de um 2-incremento em $\mathcal{C}_2^{2/p}$ satisfazendo a relação de Chen com o caminho x. Mais precisamente, suponha que existe $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_2^{2/p}(I, V \otimes V)$ tal que*

$$\delta \mathbf{x} = \delta x \delta x.$$

Então $\mathbf{x}$ não é único.

Demonstração da Observação. Seja $y \in \mathcal{C}_1^{2/p}(I,\mathbb{R})$ não constante. Definindo

$$\mathbf{y}_{ts}^{ab} := \mathbf{x}_{ts}^{ab} + \delta y_{ts}$$

onde x^a e $\mathbf{x}^{ab}$ são as coordenadas de x e $\mathbf{x}$, respectivamente. Resulta que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}_{tus}^{ab} &= \delta \mathbf{x}_{tus}^{ab} + 0 \\ &= \delta x_{tu}^{a} \delta x_{us}^{b} \end{aligned}$$

e que $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_2^{2/p}(I, V \otimes V)$. Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ segue que $\mathbf{x}$ não é único. □

Esta é a má notícia. Vamos ver que para definir a integral $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ quando $x \in \mathcal{C}^{1/p}$ $(2 \leq p < 3)$, é necessário uma aproximação melhor para o integrador, no seguinte sentido. Quando $1 \leq p < 2$, o integrador usado na soma de Rieman (ou equivalentemente, no argumento do operador $id - \Lambda\delta$) foi $\phi(x_{t_i})\,\delta x_{t_{i+1},t_i}$, ver (2.3.1) e (2.3.2). Logo, procurando um melhor integrador, aparece naturalmente a segunda integral iterada de x: $\mathcal{J}(dxdx) \equiv \mathbf{x}$.

A estratégia é a seguinte, a princípio suporemos que ϕ e x são suaves e escreveremos $\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)$ (a qual existe neste caso) em termos da derivada de ϕ e em termos de $\mathcal{J}\left(dxdx\right)$. Depois, substituímos $\mathcal{J}\left(dxdx\right)$ por $\mathbf{x}$ e para os termos que não puderem ser definidos de modo algébrico, usaremos a aplicação Λ para definí-los.

Vamos supor que $x : I \to V$ e $\phi : V \to L\left(V, W\right)$ são suaves. Para entendermos melhor as contas, é conveniente olharmos o problema em coordenadas. Seja $\{e_a : a = 1, \ldots, m\}$ base de V, então

$$
\begin{aligned}
x_t &= \sum_{a=1}^{m} x_t^a e_a \\
\mathcal{J}\left(dxdx\right)_{ts} &= \sum_{a,b=1}^{m} \int_s^t dx_{r_1}^a \int_s^{r_1} dx_{r_2}^b e_a \otimes e_b \\
&= \sum_{a,b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} e_a \otimes e_b \in V^{\otimes 2}
\end{aligned}
$$

Também, como $\phi : V \to L\left(V, W\right)$ segue que $D\phi\left(x\right) \in L\left(V, L\left(V, W\right)\right) = L\left(V^{\otimes 2}, W\right)$. Portanto

$$
\begin{aligned}
D\phi\left(x\right) e_a \otimes e_b &= \partial_b \phi^a\left(x\right), \text{ sendo } \partial_b \phi^a : V \to W \\
\phi\left(x\right) e_a &= \phi^a\left(x\right), \text{ sendo } \phi^a : V \to W
\end{aligned}
$$

Como sempre, denotamos

$$
\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)_{ts} = \int_s^t dx_r \phi\left(x_r\right).
$$

Segue que somando e subtraindo o termo $\phi\left(x_s\right)\left(\delta x_{ts}\right) = \int_s^t dx_r \phi\left(x_s\right)$ do lado esquerdo na igualdade anterior obtemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)_{ts} &= \phi\left(x_s\right)\left(\delta x_{ts}\right) + \int_s^t dx_r \left(\phi\left(x_r\right) - \phi\left(x_s\right)\right) \\
&= \phi\left(x_s\right)\left(\delta x_{ts}\right) + \mathcal{J}\left(dxd\phi \circ x\right)_{ts}. \qquad (2.4.1)
\end{aligned}
$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo em $\phi^a \circ x$ temos que , para $s < r_1$ em I,

$$\begin{aligned}\phi^a(x_{r_1}) &= \phi^a(x_s) + \sum_{b=1}^{m} \int_s^{r_1} \partial_b \phi^a(x_{r_2}) \dot{x}^b_{r_2} dr_2 \\ &= \phi^a(x_s) + \sum_{b=1}^{m} \int_s^{r_1} \partial_b \phi^a(x_{r_2}) dx^b_{r_2} \\ &= \phi^a(x_s) + \sum_{b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^b \partial_b \phi^a \circ x\right)_{r_1 s},\end{aligned}$$

integrando com respeito a $dx^a_{r_1} = \dot{x}^a_{r_1} dr_1$,

$$\mathcal{J}(dx^a \phi^a \circ x)_{ts} = \phi^a(x_s) \mathcal{J}(dx^a)_{ts} + \sum_{b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^a dx^b \partial_b \phi^a \circ x\right)_{ts},$$

somando e subtraindo $\partial_b \phi^a(x_s) \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} = \mathcal{J}\left(dx^a dx^b \partial_b \phi(x_s)\right)_{ts}$ na linha anterior obtemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(dx^a \phi^a \circ x)_{ts} = \phi^a(x_s) \mathcal{J}(dx^a)_{ts} + & \sum_{b=1}^{m} \partial_b \phi^a(x_s) \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} + \\ + & \sum_{b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^a dx^b \partial_b \phi^a \circ x - \partial_b \phi^a(x_s)\right)_{ts}.\end{aligned}$$

Logo da desigualdade anterior e por (2.4.1) temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(dx^a d\phi^a \circ x)_{ts} &= \sum_{b=1}^{m} \partial_b \phi^a(x_s) \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} + \\ &\quad + \sum_{b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^a dx^b \partial_b \phi^a \circ x - \partial_b \phi^a(x_s)\right)_{ts}\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(dx^a d\phi^a \circ x)_{ts} &= \sum_{b=1}^{m} \partial_b \phi^a(x_s) \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} + \\ &\quad + \sum_{b=1}^{m} \mathcal{J}\left(dx^a dx^b d\left(\partial_b \phi^a \circ x\right)\right)_{ts}. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Usando a expressão de $\mathcal{J}(dxdx)$ na base $e_a \otimes e_b$ e usando a linearidade de $D\phi(x_s)(\cdot)$ resulta que

$$D\phi(x_s) \mathcal{J}(dxdx)_{ts} = \sum_{a,b=1}^{m} \partial_b \phi^a(x_s) \mathcal{J}\left(dx^a dx^b\right)_{ts} e_a \otimes e_b,$$

segue que (2.4.2) pode ser reescrita como

$$\mathcal{J}\left(dxd\phi\circ x\right)_{ts}=D\phi\left(x_{s}\right)\mathcal{J}\left(dxdx\right)_{ts}+\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right)_{ts},$$

substituindo esta última igualdade em (2.4.1) resulta que

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)_{ts}=\phi\left(x_{s}\right)\delta x_{ts}+D\phi\left(x_{s}\right)\mathcal{J}\left(dxdx\right)_{ts}+\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right)_{ts},$$

isto é,

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)=\delta x\phi\circ x+\mathcal{J}\left(dxdx\right)D\phi\circ x+\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right).$$

Logo, para podermos definir $\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)$ através da fórmula da direita no caso em que x não é diferenciável, temos o termo problemático $\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right)$. Apenas sabemos como este deve comportar-se sob a ação do operador δ (ver Proposições 2.1.2 e 1.2.10, lembrar que $\delta\left(\delta x\right)=0$) :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right) &= \delta\left(\delta x\phi\circ x\right)+\delta\left(\mathcal{J}\left(dxdx\right)D\phi\circ x\right)+\delta\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right)\\ &= -\delta x\delta\phi\circ x+\delta x\delta xD\phi\circ x-\mathcal{J}\left(dxdx\right)\delta D\phi\circ x+\delta\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right) &= \delta x\delta\phi\circ x-\delta x\delta xD\phi\circ x+\mathcal{J}\left(dxdx\right)\delta D\phi\circ x\\ &= \delta x[\delta\phi\circ x-\delta xD\phi\circ x]+\mathcal{J}\left(dxdx\right)\delta D\phi\circ x.\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

Note que, neste estágio, o lado direito de (2.4.3) está bem definido independentemente da regularidade de x. Vamos mostrar que o lado direito está no domínio de Λ quando $(x,\mathbf{x})$ for um p-rough path $(2\leq p<3)$ e $\phi\in C_{loc}^{2-H\ddot{o}l}$. Consequentemente, definiremos

$$\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi\circ x\right)\right):=\Lambda\left(\delta x[\delta\phi\circ x-\delta xD\phi\circ x]+\mathbf{x}\delta D\phi\circ x\right),$$

o que resolveria nosso problema.

De fato, resta mostrarmos o seguinte resultado.

Lema 2.4.4. *Sejam $(x,\mathbf{x})$ um $p-$rough path a valores em V e $\phi\in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}\left(V,L\left(V,W\right)\right)$ $(2\leq p<\gamma\leq 3)$. Então*

$$\begin{aligned}\delta x[\delta\phi\circ x-\delta xD\phi\circ x] &\in \mathcal{C}_{3}^{\gamma/p}\left(I,W\right)\\ \mathbf{x}\delta D\phi\circ x &\in \mathcal{C}_{3}^{\gamma/p}\left(I,W\right)\end{aligned}$$

Demonstração. Usando o Lema 1.3.6 com $U_1 = V$, $U_2 = L(V, W)$ *e* $z = x$, resulta que

$$\delta\phi \circ x - \delta x D\phi \circ x \in \mathcal{C}_2^{(\gamma-1)/p}(I, L(V, W))$$

e que

$$\|\delta\phi \circ x - \delta x D\phi \circ x\|_{(\gamma-1)/p} \leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,K} \|x\|_{1/p}^{\gamma-1},$$

para algum compacto $K \subset V$. Logo,

$$\delta x[\delta\phi \circ x - \delta x D\phi \circ x] \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(I, W)$$

Agora vamos mostrar que $\mathbf{x}\delta D\phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(I, W)$. Fixamos $s < u < t$ em I, logo

$$\begin{aligned}
\left|(\mathbf{x}\delta D\phi \circ x)_{tus}\right| &= \left|(D\phi(x_u) - D\phi(x_s))(\mathbf{x}_{tu})\right| \\
&\leq \left|D\phi(x_u) - D\phi(x_s)\right| \left|\mathbf{x}_{tu}\right| \\
&\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \left|x_u - x_s\right|^{\gamma-2} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}(I, V^{\otimes 2})} |t-s|^{2/p} \\
&\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}} \|x\|_{\mathcal{C}^{1/p}}^{\gamma-2} |u-s|^{\frac{\gamma-2}{p}} |t-s|^{2/p} \\
&\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}} \|x\|_{\mathcal{C}^{1/p}}^{\gamma-2} |t-s|^{\gamma/p}
\end{aligned}$$

onde $K = x(I)$. Resulta que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\delta D\phi \circ x\|_{\gamma/p} &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}} \|x\|_{\mathcal{C}^{1/p}}^{\gamma-2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Isto é, mostramos que $\mathbf{x}\delta D\phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(I, W)$. □

Agora, podemos definir (desde que estivermos nas hipóteses do lema anterior) a seguinte integral

Proposição 2.4.5 (Existência da Integral)**.** *Sejam* $(x, \mathbf{x})$ *um* $p-$*rough path a valores em* V *e* $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$ *(*$2 \leq p < \gamma \leq 3$*). Então*

$$\mathcal{J}(dx\phi(x)) = \delta x\phi \circ x + \mathbf{x}D\phi \circ x + \Lambda(\delta x[\delta\phi \circ x - \delta x D\phi \circ x] + \mathbf{x}\delta D\phi \circ x)$$

está bem definida e valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(dx\phi(x))_{ts} &= (id - \Lambda\delta)[\delta x\phi \circ x + \mathbf{x}D\phi \circ x]_{ts} &\quad (2.4.4)\\
&= \lim_{|\mathcal{P}\cap[s,t]|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \left[\phi(x_{t_i})\delta x_{t_{i+1}t_i} + D\phi(x_{t_i})\mathbf{x}_{t_{i+1}t_i}\right] &\quad (2.4.5)
\end{aligned}$$

Demonstração. A boa definição de $\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)$ segue do lema anterior. Enquanto que a igualdade (2.4.4) segue de aplicar δ no argumento $\left[\delta x\phi\circ x+\mathbf{x}D\phi\circ x\right]$, usar a linearidade de Λ e as propriedades elementares dos incrementos.

Já a igualdade (2.4.5) é uma consequência imediata do Corolário 1.4.6. Deste modo, podemos interpretar $\phi\left(x_{t_i}\right)\delta x_{t_{i+1}t_i}+D\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}_{t_{i+1}t_i}$ como sendo a versão corrigida do integrando $\phi\left(x_{t_i}\right)\delta x_{t_{i+1}t_i}$, o qual é mais natural. $\square$

Notação 2.4.6. *Quando for necessário, denotaremos* $\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)$ *por*

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)=\mathcal{J}\left(d\left(x,\mathbf{x}\right)\phi\left(x\right)\right)=\int d\left(x,\mathbf{x}\right)\phi\left(x\right)$$

para ressaltar a dependência de $(x,\mathbf{x})$*.*

Proposição 2.4.7 (Continuidade da Integral)**.** *Seja* $\phi\in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}\left(V,L\left(V,W\right)\right)$ *(*$2\leq p<\gamma\leq 3$ *e* $\dim V<\infty$*). Então a integral de* ϕ *ao longo de* $(x,\mathbf{x})$ *depende continuamente de* $(x,\mathbf{x})$*, ou seja,*

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{J}: & \Omega_{p,o}\left(I,V\right) & \to & \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}\left(I,W\right)\\ & (x,\mathbf{x}) & \mapsto & \mathcal{J}\left(d\left(x,\mathbf{x}\right)\phi\right)\end{array}$$

($p<\alpha\gamma\leq 3$*) é contínua.*

Demonstração. Pela definição da integral, eq. (2.4.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right) &= \left(id-\Lambda\delta\right)\left[\delta x\phi\circ x+\mathbf{x}D\phi\circ x\right]\\ &= \delta x\phi\circ x+\mathbf{x}D\phi\circ x-\Lambda\delta\left(\delta x\phi\circ x+\mathbf{x}D\phi\circ x\right).\end{aligned}$$

Vamos mostrar a continuidade das aplicações $x\mapsto\delta x\phi\circ x$ e $(x,\mathbf{x})\mapsto\mathbf{x}D\phi\circ x$. Para isto fixamos $\alpha\in(0,1)$ tal que $2\leq p<\alpha\gamma\leq 3$ (veremos adiante que isto garante que $\delta x\phi\circ x+\mathbf{x}D\phi\circ x$ está no domínio de $\Lambda\delta$). Em especial aqui temos que $\phi\in C^{1-H\ddot{o}l}$, logo pela demonstração da Proposição 2.3.2 sabemos que a aplicação $x\mapsto\delta x\phi\circ x$ é contínua e que

$$\delta x\phi\circ x\in\mathcal{C}_2^{2\alpha/p}.$$

Vamos mostrar que a aplicação $(x,\mathbf{x})\mapsto\mathbf{x}D\phi\circ x$ é contínua. Como $D\phi\in C^{(\gamma-2)-H\ddot{o}l}\left(V,L\left(V^{\otimes 2},W\right)\right)$ e como $x\in\mathcal{C}_{1,o}^{1/2}$, segue que aplicando o Lema 1.3.9 temos que

$$\Omega\left(x\right)=D\phi\circ x\in\mathcal{C}_{1,o}^{\alpha(\gamma-2)/p}.$$

e Ω é contínua.

Agora sejam $s < t$ e $(x, \mathbf{x}), (x^n, \mathbf{x}^n) \in \Omega_{p,o}(I, V)$ tais que $d_p - \lim (x^n, \mathbf{x}^n) = (x, \mathbf{x})$. Temos que vale

$$D\phi(x_s)\mathbf{x}_{ts} - D\phi(x_s^n)\mathbf{x}_{ts}^n = (D\phi(x_s) - D\phi(x_s^n))\mathbf{x}_{ts} + D\phi(x_s^n)(\mathbf{x}_{ts} - \mathbf{x}_{ts}^n).$$

Por um lado podemos majorar $(D\phi(x_s) - D\phi(x_s^n))\mathbf{x}_{ts}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |(D\phi(x_s) - D\phi(x_s^n))\mathbf{x}_{ts}| &\leq |D\phi(x_s) - D\phi(x_s^n)| |\mathbf{x}_{ts}| \\ &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} |x_s - x_s^n|^{\gamma-2} \|\mathbf{x}\|_{2/p} (t-s)^{2/p} \\ &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \|x - x^n\|_\infty \|\mathbf{x}\|_{2/p} (t-s)^{2/p} \\ &\leq \|D\phi\|_{(\gamma-2)-H\ddot{o}l,K} \|x - x^n\|_\infty \|\mathbf{x}\|_{2/p} T^{1/p} (t-s)^{1/p}, \end{aligned}$$

onde K é uma bola fechada de raio suficientemente grande que contém $x(I), x^n(I)$ e $(x - x^n)(I)$ $(\forall n)$. Usando na desigualdade acima que $\|x - x^n\|_\infty \leq \|x - x^n\|_{1/p} T^{1/p}$ implica que vale o seguinte limite.

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}(D\phi \circ x - D\phi \circ x^n)\|_{1/p} = 0.$$

Por outro lado podemos majorar $D\phi(x_s^n)(\mathbf{x}_{ts} - \mathbf{x}_{ts}^n)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |D\phi(x_s^n)(\mathbf{x}_{ts} - \mathbf{x}_{ts}^n)| &\leq |D\phi(x_s^n)| |\mathbf{x}_{ts} - \mathbf{x}_{ts}^n| \\ &\leq \|D\phi\|_{\infty,K} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{2/p} (t-s)^{2/p} \\ &\leq \|D\phi\|_{\infty,K} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{2/p} T^{1/p} (t-s)^{1/p}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n) D\phi \circ x\|_{1/p} = 0.$$

Portanto podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \|D\phi(x_s)\mathbf{x}_{ts} - D\phi(x_s^n)\mathbf{x}_{ts}^n\|_{1/p} = 0,$$

ou seja $(x, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}D\phi \circ x$ é contínua. Observamos que esta continuidade segue fundamentalmente dos seguintes fatos: em primeiro lugar a linearidade de $D\phi(x_s)(\cdot)$ e em segundo que $x \in \mathcal{C}^{1/p}$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^{2/p}$. Portanto com a mesma demonstração podemos concluir que as seguintes aplicações são contínuas (na topologia dada por d_p)

$$(x, \mathbf{x}) \mapsto \delta x \delta x D\phi \circ x \tag{2.4.6}$$

$$(x, \mathbf{x}) \mapsto \delta x \delta \phi \circ x \tag{2.4.7}$$

$$(x, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x} \delta D\phi \circ x. \tag{2.4.8}$$

Resta mostrar que $(x, \mathbf{x}) \mapsto \Lambda\delta\left(\delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x\right)$ é contínua. Aplicando δ temos que

$$\delta\left(\delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x\right) = \delta x\left[-\delta\phi \circ x + \delta x D\phi \circ x\right] + \mathbf{x}\delta D\phi \circ x \tag{2.4.9}$$

Como $\alpha < 1$ temos que $\phi \in C^{(\alpha\gamma-1)-H\ddot{o}l}$ e que $2 \leq p < \alpha\gamma < 3$, logo aplicando o Lema 1.3.6 para $z = x$, resulta que

$$-\delta\phi \circ x + \delta x D\phi \circ x \in \mathcal{C}_2^{\frac{\alpha\gamma-1}{p}}\left(I, W\right),$$

logo

$$\delta x\left[-\delta\phi \circ x + \delta x D\phi \circ x\right] \in \mathcal{C}_3^{\alpha\gamma/p}\left(I, W\right).$$

Pelas eq. (2.4.6) e (2.4.7) e pela linha anterior temos que $x \mapsto \delta x\left[-\delta\phi \circ x + \delta x D\phi \circ x\right] \in \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}$ é contínua. Agora, a eq. (2.4.8) diz que $(x, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}\delta D\phi \circ x$ é contínua. Precisamos mostrar que $\mathbf{x}\delta D\phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{\alpha\gamma/p}$ para aplicarmos Λ na eq. (2.4.9). O Lema 1.3.9 temos que $\Omega\left(x\right) = D\phi \circ x \in \mathcal{C}_1^{\alpha\frac{\gamma-2}{p}}$. Logo $\delta D\phi \circ x \in \mathcal{C}_2^{\alpha\frac{\gamma-2}{p}}$ e portanto $\mathbf{x}\delta D\phi \circ x \in \mathcal{C}_3^{\alpha\gamma/p}$, como queríamos. Então aplicando Λ em (2.4.9) resulta que $(x, \mathbf{x}) \mapsto \Lambda\delta\left(\delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x\right) \in \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}$ é contínua, pois Λ é contínua.

Logo provamos que

$$(x, \mathbf{x}) \mapsto \delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x - \Lambda\delta\left(\delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x\right) \in \mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/p}$$

é contínua, ou seja, a integral depende continuamente do rough path $(x, \mathbf{x})$. $\square$

Observação 2.4.8. *Sabemos que $\mathcal{C}^{1/p} \subset \mathcal{C}^{1/q}$ se $1 \leq p < q$. Uma pergunta natural é se vale, de alguma forma, a seguinte inclusão*

$$\{p - \textit{rough path } (1 \leq p < 2)\} \subset \{p - \textit{rough path } (2 \leq p < 3)\}?$$

Entretanto se nos adiantarmos respondendo (afirmativamente) esta questão, isto nos levaria a vários outros perguntas: por que não escrever as contas com a hipótese $1 \leq p < 3$? Por que fórmulas "diferentes" para as integrais ao longo de x (comparar (2.3.1)e (2.4.4))? Assim, preferimos esclarecer estas questões num contexto mais amplo, na seção seguinte.

2.5 Integrais iteradas múltiplas

É possível construir integrais iteradas, $\mathcal{J}\left(dx \ldots dx\right)$, de um caminho x desde que conheçamos suficientes integrais iteradas de ordem baixa. Isto é, se $x \in \mathcal{C}^{1/p}\left(V\right)$ $(1 \leq p < 2)$ então para definirmos $\mathcal{J}(dx \dots dx)$ é suficiente conhecermos $\mathcal{J}(dx)(= \delta x)$; e se $x \in \mathcal{C}^{1/p}(V)$ $(2 \leq p < 3)$ então para definirmos $\mathcal{J}(dx \dots dx)$ é suficiente conhecermos $\mathcal{J}(dx)$ e $\mathcal{J}(dxdx)(= \mathbf{x})$.

O procedimento é simples. Queremos preservar a relação de Chen (2.1.1). Portanto, observando que quando aplicamos δ numa integral iterada obtemos uma relação em termos de integrais iteradas de ordem inferior. Segue que se esta relação estiver no domínio da aplicação Λ então podemos inverter δ, definindo as integrais de ordem superior e resolvendo nosso problema.

2.5.1 Integrais iteradas de ordem 2:

Para $2 \leq p < 3$ definimos

$$\mathcal{J}(dxdx) := \mathbf{x}.$$

Para $1 \leq p < 2$ definimos

$$\mathcal{J}(dxdx) := \Lambda(\delta x \delta x),$$

pois, desta maneira, $\mathcal{J}(dxdx)$ é o único 2-incremento em $\mathcal{C}_2^{2/p}(V^{\otimes 2})$ tal que $\delta\mathcal{J}(dxdx) = \delta x \delta x$ (ie, $\delta\mathcal{J}(dxdx)_{tus} = \delta x_{tu} \otimes \delta x_{us}$).

Observação 2.5.1. *Devido a unicidade de $\mathcal{J}(dxdx)$ quando $1 \leq p < 2$, temos que as equações (2.3.1) e (2.4.4), que definem $\mathcal{J}(dx\phi(x))$ em cada caso, coincidem se $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}$ $(\gamma > 2p - 1 \geq 1)$. Mais precisamente:*

Proposição 2.5.2. *Sejam $x \in \mathcal{C}^{1/p}([0,T], V)$ $(1 \leq p < 2)$ e $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}(V, L(V,W))$ $(\gamma > 2p - 1)$. Definindo $\mathbf{x} :=\mathcal{J}(dxdx)$, temos que vale a igualdade*

$$\mathcal{J}(dx\phi(x)) = \mathcal{J}(d(x,\mathbf{x})\phi(x)),$$

em outras palavras,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(dx\phi(x)) &= (id - \Lambda\delta)[\delta x \phi \circ x] \\ &= (id - \Lambda\delta)[\delta x \phi \circ x + \mathbf{x} D\phi \circ x] \end{aligned}$$

Demonstração. Das hipóteses e das equações (2.3.2) e (2.4.5) temos que os seguintes limites existem

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi(x_{t_i}) \delta x_{t_{i+1}t_i},$$

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} D\phi(x_{t_i}) \mathbf{x}_{t_{i+1},t_i}.$$

Só resta verificar que $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i\in\mathcal{P}} D\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}_{t_{i+1},t_i} = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\sum\nolimits_{t_i\in\mathcal{P}} D\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}_{t_{i+1},t_i}\right| &\leq \|D\phi\|_{\infty,x([0,T])}\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}}\sum\nolimits_{t_i\in\mathcal{P}}|t_{i+1}-t_i|^{2/p}\\ &\leq \|D\phi\|_{\infty,x([0,T])}\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}}|\mathcal{P}|^{1-\frac{2}{p}}\sum\nolimits_{t_i\in\mathcal{P}}|t_{i+1}-t_i|\\ &= \|D\phi\|_{\infty,x([0,T])}\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{C}_2^{2/p}}|\mathcal{P}|^{1-\frac{2}{p}}T,\end{aligned}$$

como $\frac{2}{p}>1$ temos que

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i\in\mathcal{P}} D\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}_{t_{i+1},t_i} = 0.$$

□

2.5.2 Integrais iteradas de ordem 3:

Seja $(x,\mathbf{x})$ um $p-$rough path $(1\leq p<3)$ podemos definir $\mathcal{J}(dxdxdx)$ como anteriormente. Queremos que seja verdadeira a relação de Chen, então

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}(dxdxdx) &= \mathcal{J}(dx)\,\mathcal{J}(dxdx)+\mathcal{J}(dxdx)\,\mathcal{J}(dx)\\ &= \delta x\mathbf{x}+\mathbf{x}\delta x\end{aligned}$$

e como o lado direito da equação pertence à $\mathcal{C}_3^{3/p}\left(I,V^{\otimes 3}\right)$ e $\frac{3}{p}>1$, resulta que está no domínio de Λ. Definimos então

$$\mathcal{J}(dxdxdx) := \Lambda\left(\delta x\mathbf{x}+\mathbf{x}\delta x\right)$$

O procedimento para definir $\mathcal{J}(dx\ldots dx)$ é análogo.

2.6 Integração ao longo de p-Rough Path, $1\leq p<\infty$

Aqui vamos dar uma idéia das dificuldades de se estudar o caso geral de rough paths e indicar as referências para prosseguir o estudo. Também comentamos as diferenças básicas entre as duas abordagens principais: via os funcionais multiplicativos de T. Lyons e via a integração algébrica de M. Gubinelli.

Definição 2.6.1. *Se $\lfloor p\rfloor = n$, isto é $n\leq p<n+1$ com $n\in\mathbb{N}$, dizemos que $\left(x,\mathbf{x}^2,,\ldots,\mathbf{x}^{\lfloor p\rfloor}\right)$ é p-rough path se cada $\mathbf{x}^k$ satisfaz a relação de Chen, isto é,*

$$\delta\mathbf{x}^k = \sum_{j=1}^{k-1}\mathbf{x}^{k-j}\mathbf{x}^j$$

e $\mathbf{x}^k \in \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right)$ *para todo* k.

Com as ferramentas já desenvolvidas, a única dificuldade em definir a integral $\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right)$ é computacional. O algoritmo é o mesmo: supor ϕ e x diferenciáveis e expandir o termo $\mathcal{J}\left(dxdxd\left(D\phi \circ x\right)\right)$ até sua $n-$ésima ordem, de modo que possamos garantir que quando $\left(x, \mathbf{x}^2, , \ldots, \mathbf{x}^{\lfloor p \rfloor}\right)$ for um p-rough path, o termo $\mathcal{J}\left(dxdx \cdots dxd\left(D^{n-1}\phi \circ x\right)\right)$ estará no domínio de Λ. No final chegaríamos numa expressão do tipo

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right) := \left(id - \Lambda\delta\right)\left[\delta x\phi \circ x + \mathbf{x}^2 D\phi \circ x + \cdots + \mathbf{x}^n D^{n-1}\phi \circ x\right]$$

ou ainda

$$\mathcal{J}\left(dx\phi\left(x\right)\right) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi\left(x_{t_i}\right)\delta x_{t_{i+1}t_i} + \sum_{j=1}^{n} D^j\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}^j_{t_{i+1}t_i}$$

e aqui aparece o novo integrando corrigido $\phi\left(x_{t_i}\right)\delta x_{t_{i+1}t_i} + \sum_{j=1}^{n} D^j\phi\left(x_{t_i}\right)\mathbf{x}^j_{t_{i+1}t_i}$.

Para seguir este método computacional, M. Gubinelli foi além. Ao invés de indexar as integrais iteradas "apenas" nos $\mathbb{N}$, ele utilizar árvores finitas, [11], [8], [13]. Deste modo cada integral $\mathbf{x}^j$ é vista como um galho (*branch*) linear de comprimento j. Ele introduziu os *branched rough paths*. Estes novos objetos se mostraram úteis em alguns casos da KdV [10], da Navier-Stokes [9] e Diagramas de Feynman [13]. Bem como equações de evolução infinito dimensionais nos trabalhos em conjunto com S. Tindel e A. Lejay, [13] e [14].

Já na visão de T. Lyons, P. Friz, para lidar com p-rough path, adota-se uma postura mais geométrica. Através da relação de Chen, cria um grupo dentro da algebra tensorial $T^n\left(V\right)$ truncada no nível n e introduz uma métrica tipo Hölder. A partir daí tem um grupo de Carnot, com ricas propriedades, e então estuda-se todos os objetos que estão no escopo da teoria através de aproximações por geodésicas deste grupo.

As geodésicas são, de certo modo, curvas diferenciáveis por partes tais que suas integrais iteradas até uma certa ordem aproximam (na métrica do grupo) o rough path $\left(x, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n\right)$. Os rough paths que podem ser aproximados por geodésica são chamados de *rough paths geométricos*, T. Lyons [15]. E estes são os objetos fundamentais para esta abordagem. Para uma boa referência para estudar esta abordagem e estes objetos ver Parte 2 do livro de P. K. Friz e N. B. Victoir [6].

2.7 Alguns resultados de T. Lyons [16]

Os teoremas desta seção fornecem as técnicas fundamentais na abordagem de T. Lyons e podem ser encontrados em [16], [17, p 35]. São conhecidos como Teorema da extensão e Teorema do funcional quase multiplicativo (ou Teorema do quase rough path).

Devido a generalidade da aplicação costura, Λ, é possível obtermos demonstrações simples. Apresentaremos aqui as demonstrações fornecidas por M. Gubinelli, [7].

Os resultados demonstrados aqui não serão usados no texto da dissertação nem são importantes para a abordagem que utilizamos (seguindo o autor M. Gubinelli) para a teoria dos rough paths.

Denotamos por $T^{(n)}(V)$ $(n \in \mathbb{N})$ à álgebra tensorial truncada na ordem n. Isto é,

$$T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^{n} V^{\otimes n},$$

sendo $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. $T^{(n)}(V)$ é munido do seguinte produto. Sejam $u = (u^0, \ldots, u^n), v = (v^0, \ldots, v^n) \in T^{(n)}(V)$, definimos $u \otimes v$ por

$$u \otimes v = \left(u^0v^0, u^1v^0 + u^0v^1, \ldots, \sum\nolimits_{i=0}^{k} u^i \otimes v^{k-i}, \ldots\right)$$

Definição 2.7.1. *Um funcional multiplicativo de grau n é um 2-incremento* $Z = (Z^0, Z^1, \ldots, Z^n) \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(n)}(V)\right)$ *tal que*

$$Z^0 = 1$$

e as outras componentes satisfazem a relação de Chen, isto é,

$$\delta Z^k = \sum_{j=1}^{k-1} Z^{k-j} Z^j$$

Exemplo 2.7.2. *Sejam* $\left(x, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{\lfloor p \rfloor}\right)$ *um* $p-$*rough path. Então* $Z = \left(1, \delta x, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{\lfloor p \rfloor}\right)$ *é um funcional multiplicativo de grau* $\lfloor p \rfloor$.

A vantagem de introduzir a coordenada $Z^0 = 1$ é que podemos relacionar a relação de Chen com o produto da álgebra $T^{(n)}(V)$ da seguinte maneira. Sejam $t, u, s \in I$, e $Z = (Z^0, \ldots, Z^n) \in T^{(n)}(V)$ um funcional multiplicativo. Então, segue da relação de Chen que

$$\begin{aligned} Z_{ts}^k &= Z_{tu}^k + Z_{us}^k + \sum_{j=1}^{k-1} Z_{tu}^{k-j} \otimes Z_{us}^j \\ &= Z_{tu}^k \otimes 1 + 1 \otimes Z_{us}^k + \sum_{j=1}^{k-1} Z_{tu}^{k-j} \otimes Z_{us}^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} Z_{tu}^{k-j} \otimes Z_{us}^j, \end{aligned}$$

$(1 \leq k \leq n)$. Logo

$$Z_{ts} = Z_{tu} \otimes Z_{us}$$

Observação 2.7.3. *Na abordagem de T. Lyons, [16], um $p-$rough path é definido como sendo um funcional multiplicativo de grau $\lfloor p \rfloor$ tal que $\left| Z_{ts}^k \right| \leq \frac{\alpha^k |t-s|^{k/p}}{k!}$ $(1 \leq k \leq \lfloor p \rfloor)$, para algum $\alpha > 0$. Entretanto, é desnecessário introduzir este formalismo já que o intuito da dissertação é apenas o caso $1 \leq p < 3$.*

Definição 2.7.4. *Um 2-incremento $Z = (Z^0, \ldots, Z^n) \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(n)}(V)\right)$ é denominado de funcional quase-multiplicativo se existe $R = (R^1, \ldots, R^n) \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(n)}(V)\right)$ tal que $R^k \in \mathcal{C}_2^\mu\left(I, V^{\otimes k}\right)(\mu > 1$ e $k = 1, \ldots, n)$ e verificam*

$$\delta Z^k = \sum_{j=1}^{k-1} Z^{k-j} Z^j + R^k,$$

$(k = 1, \ldots, n)$.

Para as demonstrações, é conveniente introduzirmos multi-índices na relação de Chen.

Notação 2.7.5. *Denotaremos os multi-índices por letras do alfabeto latino com uma barra acima: $\bar{a}$, $\bar{b}$,... Dois multi-índices juntos indicam concatenação. Por exemplo se $\bar{b} = (a_1, a_2)$ e $\bar{c} = (a_3, a_4)$ então $\bar{b}\bar{c}$ significa que (a_1, a_2, a_3, a_4). Vamos utilizá-los junto com o símbolo de somatório da seguinte maneira, para $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ fixo,*

$$\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}},$$

significa que estamos somando para todos $\bar{b}$ e $\bar{c}$ da forma

$$\begin{aligned} \bar{b} &= (a_1, \ldots, a_k), \\ \bar{c} &= (a_k, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

($1 \leq k \leq n-1$).

Exemplo 2.7.6. *A relação de Chen*

$$\delta Z^k = \sum_{j=1}^{k-1} Z^{k-j} Z^j,$$

em coordenadas, é escrita como

$$\delta Z^{\bar{a}} = \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}.$$

Teorema 2.7.7 (Teorema do funcional quase multiplicativo)**.** *Sejam $I = [0,T] \subset \mathbb{R}$ e $p \in [1,\infty)$. Seja $Z = \left(Z^0, \ldots, Z^{\lfloor p \rfloor}\right)$ um funcional quase-multiplicativo de grau $\lfloor p \rfloor$ tal que*

$$\begin{aligned} \delta Z^k - \sum_{j=1}^{k-1} Z^{k-j} Z^j \quad &\in \quad \mathcal{C}_3^{\mu}\left(I, V^{\otimes k}\right) \\ Z^k \quad &\in \quad \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right), \end{aligned}$$

($1 \leq k \leq \lfloor p \rfloor$ e $\mu > 1$). Então existe um único funcional multiplicativo $\tilde{Z} = \left(\tilde{Z}^0, \ldots, \tilde{Z}^{\lfloor p \rfloor}\right) \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(\lfloor p \rfloor)}(V)\right)$ tal que

$$\begin{gathered} \tilde{Z}^k \in \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right), \\ \left\| Z^k - \tilde{Z}^k \right\|_{\mathcal{C}_2^{\mu}} < \infty, \end{gathered}$$

($1 \leq k \leq \lfloor p \rfloor$).

Demonstração. É suficiente mostrarmos que existe um funcional único multiplicativo $\tilde{Z} \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(\lfloor p \rfloor)}(V)\right)$ tal que

$$Z = \tilde{Z} + Q, \tag{2.7.1}$$

para algum $Q \in \mathcal{C}_2\left(I, T^{(\lfloor p \rfloor)}(V)\right)$ tal que $Q^k \in \mathcal{C}_2^{\mu}\left(I, V^{\otimes k}\right)$. Isto resolve nosso problema, pelos seguintes motivos.

1. $\left\| Z^k - \tilde{Z}^k \right\|_{\mu} = \left\| Q^k \right\|_{\mu} < \infty$.

2. $\tilde{Z}^k_{ts} \in \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right)$, pois,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Z}^k_{ts} \right| \quad &\leq \quad \left| Z^k_{ts} \right| + \left| Q^k_{ts} \right| \\ &\leq \quad \left\| \tilde{Z}^k \right\|_{k/p} |t-s|^{k/p} + \left\| Q^k \right\|_{k/p} |t-s|^{k/p}, \end{aligned}$$

e como $\left\| Q^k \right\|_{k/p} \leq T^{\mu - \frac{k}{p}} \left\| Q^k \right\|_{\mu} < \infty$ ($\mu - \frac{k}{p} > 0$) resulta que $\tilde{Z}^k_{ts} \in \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right)$.

Procederemos por indução em $|\bar{a}|$ para demonstrar a existência de $\tilde{Z}$ e de Q, provando a igualdade (2.7.1) coordenada a coordenada. Para $|\bar{a}| = 1$, segue da definição de funcional quase-multiplicativo que

$$\delta Z^{\bar{a}}_{tus} = R^{\bar{a}}_{tus},$$

com $R^{\bar{a}} \in \mathcal{C}^{\mu}_3(I, \mathbb{R})$. Logo segue do Corolário 1.4.6 que a seguinte decomposição é única

$$Z^{\bar{a}} = \delta f + \Lambda \delta Z^{\bar{a}},$$

com $f \in \mathcal{C}_1(I, \mathbb{R})$. Então definindo

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^{\bar{a}} &: = \delta f \\ Q^{\bar{a}} &: = \Lambda \delta Z^{\bar{a}} \in \mathcal{C}^{\mu}_2(I, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

temos que

$$\delta \tilde{Z}^{\bar{a}} = 0,$$

isto é, $\tilde{Z}^{\bar{a}}$ é multiplicativo. Logo $\tilde{Z}^{\bar{a}}$ é o único funcional multiplicativo que satisfaz

$$Z^{\bar{a}} = \tilde{Z}^{\bar{a}} + Q^{|\bar{a}|}$$

com $Q^{\bar{a}} \in \mathcal{C}^{\mu}_2(I, \mathbb{R})$, terminando este caso.

Agora provaremos o passo indutivo. A hipótese de indução diz que existem únicos funcionais multiplicativos $\tilde{Z}^{\bar{a}} \in \mathcal{C}^{|\bar{a}|/p}_2\left(I, V^{\otimes|\bar{a}|}\right)$ $(1 \leq |\bar{a}| \leq k-1)$ tais que satisfazem

$$Z^{\bar{a}} = \tilde{Z}^{\bar{a}} + Q^{\bar{a}},$$

onde $Q^{\bar{a}} \in \mathcal{C}^{\mu}_2\left(I, V^{\otimes|\bar{a}|}\right)$. Pela hipótese de indução e pela definição de funcional quase-multiplicativo segue que, para $|\bar{a}| = k$,

$$\begin{aligned} \delta Z^{\bar{a}} &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} + R^{\bar{a}} \\ &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left(\tilde{Z}^{\bar{b}} + Q^{\bar{b}}\right)\left(\tilde{Z}^{\bar{c}} + Q^{\bar{c}}\right) + R^{\bar{a}} \\ &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{c}} + \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left(Z^{\bar{b}} Q^{\bar{c}} + Q^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} + Q^{\bar{b}} Q^{\bar{c}}\right) + R^{\bar{a}} \\ &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{c}} + \tilde{R}^{\bar{a}}, \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{\bar{a}} &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left(Z^{\bar{b}}Q^{\bar{c}} + Q^{\bar{b}}Z^{\bar{c}} + Q^{\bar{b}}Q^{\bar{c}} \right) + R^{\bar{a}} \\ &= \delta Z^{\bar{a}} - \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}}. \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Mostraremos que $\tilde{R}^{\bar{a}} \in \mathcal{ZC}_3^{\mu}(I,\mathbb{R})$ (domínio de Λ). Cada parcela da equação (2.7.3) está em $\mathcal{C}_3^{\mu}$, logo $\tilde{R}^{\bar{a}} \in \mathcal{C}_3^{\mu}(I,\mathbb{R})$. Também temos que

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^{\bar{a}} &= \delta\left(\delta Z^{\bar{a}} - \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}} \right) \\ &= 0 - \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \delta\left(\tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}} \right) \\ &= -\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \delta\tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}} + \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\delta\tilde{Z}^{\bar{c}} \\ &= -\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}}\sum_{\bar{d}\bar{e}=\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{d}}\tilde{Z}^{\bar{e}}\tilde{Z}^{\bar{c}} + \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}}\sum_{\bar{d}\bar{e}=\bar{c}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{d}}\tilde{Z}^{\bar{e}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{R}^{\bar{a}} \in Ker\delta \cap \mathcal{C}_3^{\mu}(I,\mathbb{R}) = \mathcal{ZC}_3^{\mu}(I,\mathbb{R})$, como queríamos.

Agora, podemos definir

$$Q^{\bar{a}} := \Lambda\tilde{R}^{\bar{a}} \in \mathcal{C}_2^{\mu}(I,\mathbb{R}) \tag{2.7.4}$$

e também

$$\tilde{Z}^{\bar{a}} = Z^{\bar{a}} - Q^{\bar{a}}.$$

Desta forma $\tilde{Z}^{\bar{a}}$ é único. Ainda mais, $\tilde{Z}^{\bar{a}}$ é multiplicativo, pois como $\delta\Lambda = id$ e por (2.7.2) e (2.7.4) temos que

$$\begin{aligned}\delta\tilde{Z}^{\bar{a}} &= \delta Z^{\bar{a}} - \delta Q^{\bar{a}} \\ &= \left(\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}} + \tilde{R}^{\bar{a}} \right) - \delta\Lambda\tilde{R}^{\bar{a}} \\ &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}}\tilde{Z}^{\bar{c}}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.7.8 (Teorema da extensão)**.** *Sejam $p \in [1,\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lfloor p \rfloor \leq n$. Seja Z um funcional multiplicativo de grau n tal que*

$$Z^k \in \mathcal{C}_2^{k/p}\left(I, V^{\otimes k}\right)$$

e

$$\sum_{|\bar{a}|=k} \|Z^{\bar{a}}\|_{k/p} \leq \beta \frac{\alpha^k}{k!}, \tag{2.7.5}$$

$(1 \leq k \leq n)$, onde $\alpha, \beta > 0$. Se β é suficientemente pequeno (ie, satisfaz (2.7.8)) então existe um único $Z : I^2 \to T((V))$ tal que é um funcional multiplicativo, estende Z e satisfaz (2.7.5) para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usaremos indução em k. O passo inicial $k = n$, é verdadeiro pelas hipóteses do teorema. Para a hipótese indutiva, supomos que $k > n$ e que vale

$$\sum_{|\bar{a}|=j} \|Z^{\bar{a}}\|_{j/p} \leq \beta \frac{\alpha^j}{j!},$$

$(1 \leq j \leq k)$. Provaremos que Z pode ser estendido à um funcional de grau $k+1$ de modo que a desigualdade acima ainda seja verdadeira com o mesmo β.

Seja $\bar{a}$ tal que $|\bar{a}| = k+1$. Provaremos que existe um único $Z^{\bar{a}} \in \mathcal{C}_2^{\frac{k+1}{p}}(I, \mathbb{R})$ tal que vale

$$\delta Z^{\bar{a}} = \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}.$$

O fundamental é mostrar que o lado direito pertence a $\mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\frac{k+1}{p}}(I, \mathbb{R})$. Primeiramente, vejamos que $\left\| \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} \right\|_{\frac{k+1}{p}} < \infty$. Da hipótese de indução temos que $Z^{\bar{b}} \in \mathcal{C}_2^{|\bar{b}|/p}(I, \mathbb{R})$ e que $Z^{\bar{c}} \in \mathcal{C}_2^{|\bar{c}|/p}(I, \mathbb{R})$, logo $Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} \in \mathcal{C}_3^{k+1/p}(I, \mathbb{R})$ $(|\bar{b}| + |\bar{c}| = |\bar{a}| = k+1)$. Portanto $\left\| \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} \right\|_{\frac{k+1}{p}} < \infty$. Lembramos $\mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\frac{k+1}{p}} = \mathcal{C}_3^{k+1/p} \cap \ker \delta$, portanto devemos mostrar que $\delta\left(\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right) = 0$. Isto segue, pois $Z^{\bar{b}}$ e $Z^{\bar{c}}$ são multiplicativos pela hipótese de indução. Logo aplicando (1.2.2) da Proposição 1.2.10 (regra de Leibniz) em $Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}$ temos que

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right) &= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \delta\left(Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right) \\
&= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \delta \tilde{Z}^{\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{c}} - \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \tilde{Z}^{\bar{b}} \delta \tilde{Z}^{\bar{c}} \\
&= \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \sum_{\bar{d}\bar{e}=\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{d}} \tilde{Z}^{\bar{e}} \tilde{Z}^{\bar{c}} - \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \sum_{\bar{d}\bar{e}=\bar{c}} \tilde{Z}^{\bar{b}} \tilde{Z}^{\bar{d}} \tilde{Z}^{\bar{e}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, mostramos que $\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} \in \mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\frac{k+1}{p}}$ $(k+1>p)$, ou seja, $\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}} \in \mathcal{Z}\mathcal{C}_3^{\frac{k+1}{p}}$ está no domínio de Λ. Definimos $Z^{\bar{a}}$ via Λ,

$$Z^{\bar{a}} := \Lambda\left(\sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right).$$

Logo, pelas propriedades de Λ, $Z^{\bar{a}}$ é o único 2-incremento em $\mathcal{C}_2^{\frac{k+1}{p}}(I,\mathbb{R})$ que satisfaz

$$\delta Z^{\bar{a}} = \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}},$$

em outras palavras, $\left(Z^0,\ldots,Z^{k+1}\right)$ é o único funcional multiplicativo de grau $k+1$ que estende Z.

Provaremos que $\left(Z^0,\ldots,Z^{k+1}\right)$ satisfaz (2.7.5). Segue da desigualdade de Λ (1.4.3) que

$$\|Z^{\bar{a}}\|_{\frac{k+1}{p}} \leq \frac{1}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left\|Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right\|_{\frac{k+1}{p}},$$

somando em $|\bar{a}| = k+1$temos que

$$\sum_{|\bar{a}|=k+1} \|Z^{\bar{a}}\|_{\frac{k+1}{p}} \leq \frac{1}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{|\bar{a}|=k+1} \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left\|Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right\|_{\frac{k+1}{p}}. \tag{2.7.6}$$

Como

$$\left\|Z^{\bar{b}} Z^{\bar{c}}\right\|_{\frac{k+1}{p}} \leq \left\|Z^{\bar{b}}\right\|_{\bar{b}/p} \|Z^{\bar{c}}\|_{\bar{c}/p}, \tag{2.7.7}$$

substituindo (2.7.7) em (2.7.6) segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\bar{a}|=k+1} \|Z^{\bar{a}}\|_{\frac{k+1}{p}} &\leq \frac{1}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{|\bar{a}|=k+1} \sum_{\bar{b}\bar{c}=\bar{a}} \left\|Z^{\bar{b}}\right\|_{\frac{\bar{b}}{k}} \|Z^{\bar{c}}\|_{\frac{\bar{c}}{k}} \\
&= \frac{1}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\bar{b}|=i} \sum_{|\bar{c}|=k+1-i} \left\|Z^{\bar{b}}\right\|_{\frac{\bar{b}}{k}} \|Z^{\bar{c}}\|_{\frac{\bar{c}}{k}}.
\end{aligned}$$

Logo da desigualdade anterior, usando (2.7.5) para $Z^{\bar{b}}$ e $Z^{\bar{c}}$ $(|\bar{b}| + |\bar{c}| = k+1)$ e, em seguida, usando a fórmula do binômio de Newton segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\bar{a}|=k+1} \|Z^{\bar{a}}\|_{\frac{k+1}{p}} &\leq \frac{1}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{i=1}^{k} \beta \frac{\alpha^{|\bar{b}|}}{i!} \beta \frac{a^{|\bar{c}|}}{(k+1-i)!} \\
&= \frac{\beta^2 \alpha^{k+1}}{2^{(k+1)/p}-2} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{i!} \frac{1}{(k+1-i)!} \\
&= \frac{\beta^2 \alpha^{k+1}}{2^{(k+1)/p}-2} \frac{(1+1)^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Portanto escolhendo β tal que

$$0 < \beta \leq \min_{k>n} \frac{2^{(k+1)/p}-2}{2^{k+1}} \tag{2.7.8}$$

segue que

$$\sum_{|\bar{a}|=k+1} \|Z^{\bar{a}}\|_{\frac{k+1}{p}} \leq \frac{\beta \alpha^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Terminando este passo da indução.

Notamos que β independe de k, logo a majoração acima vale para todo $k > n$, ou seja, é possível estender Z de maneira multiplicativa a qualquer grau. $\square$

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ROUGH

Neste capítulo vamos utilizar o esquema de Euler para provar existência e unicidade de soluções de equações diferenciais da forma

$$dy\,(t) = \phi\,(y\,(t))\,dx\,(t) \tag{3.0.1}$$

onde x não é diferenciável. A. M. Davie, [5], foi o primeiro autor a utilizar o esquema de Euler (modificado) para aproximar discretamente a solução (ou melhor, a aproximação está definida apenas numa partição do intervalo) da equação diferencial (3.0.1), conduzindo a uma demonstração simples e direta para os teoremas de existência e unicidade de soluções (locais no tempo). A demonstração apresentada aqui, desenvolvida por nós, é baseada do artigo A. M. Davie [5].

Nossa demonstração conecta o resultado fundamental de M. Gubinelli, a aplicação costura Λ (Teorema 1.4.2), com o Lema de Davie (Lemas 3.1.9 e 3.2.9). Deste modo temos mais um exemplo da versatilidade da aplicação Λ (o primeiro exemplo é a seção 2.7), agora num contexto discreto.

Vale observar que não entraremos em discussão sobre condições para que a solução seja global no tempo. Para isto, recomendamos o recente *preprint* de M. Gubinelli e A. Lejay [12]. Esse *preprint* é importante na literatura dos rough paths, pois responde questões fundamentais (as quais estavam abertas até então) sobre a diferença entre rough paths geométricos e não-geométricos.

No final deste capítulo, mostraremos a dependência contínua da solução em relação ao integrador. Fato análogo a continuidade das integrais ao longo de caminhos nas seções 2.3 e 2.4 (mais precisamente Proposições 2.3.2 e 2.4.7).

Durante todo o capítulo, V e W são espaços de Banach de dimensão finita.

3.1 O Caso $1 \leq p < \gamma \leq 2$

Denotamos por I o intervalo $[0,T]$. Sejam $x \in \mathcal{C}^{1/p}(I,V)$ $(1 \leq p < 2)$ e $\phi : W \to L(V,W)$ suficientemente regular.

Dado $y_0 \in W$, queremos encontrar $y : [0,T] \to W$ tal que resolve o seguinte problema de Cauchy

$$dy(t) = \phi(y(t))\, dx(t), \quad y(0) = y_0 \ . \tag{3.1.1}$$

Notação 3.1.1. *Seja $\theta : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Usaremos a notação*

$$\theta(\alpha) = o(\alpha) \ \ \textit{quando} \ \alpha \to 0$$

significando que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha} = 0$$

Definição 3.1.2. *Dizemos que $y(t)$ é solução de (3.1.1) em $I = [0,T]$ se $y(0) = y_0$ e existe uma função não-negativa θ em $[0,\infty)$ tal que $\theta(\alpha) = o(\alpha)$ quando $\alpha \to 0$, tais que satisfazem*

$$|y(t) - y(s) - \phi(y(s))(x(t) - x(s))| \leq \theta(|t-s|) \tag{3.1.2}$$

Observação 3.1.3. *Esta definição tem a seguinte interpretação. Fixado $s \in (0,T)$ e dado $y(s)$, significa que o comportamento de $y(t)$, quando t está próximo de s, é dado pelo comportamento de x, pois*

$$y(t) \approx y(s) + \phi(y(s))(x(t) - x(s)),$$

uma vez que t próximo de s implica que $\theta(|t-s|) \approx 0$.

Esta definição não envolve uma noção de integral, entretanto se y satisfaz a desigualdade acima então y é a integral de Young de $\phi(y)$ com respeito ao integrador x. Mais precisamente, suponha que $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-Höl}(W, L(V,W))$ e que $x \in \mathcal{C}^{1/p}(I,V)$ $(1 \leq p < \gamma \leq 2)$, estas são condições suficientes para garantir a existência da integral de Young. Então vale as seguintes afirmações:

- Se $y(t) = y_0 + \int_0^t dx(s)\,\phi(y(s))$ então $y \in \mathcal{C}^{1/p}(I,W)$ e y satisfaz (3.1.2);
- Se y satisfaz (3.1.2) então $y(t) = y_0 + \int_0^t dx(s)\,\phi(y(s))$, onde a integral é no sentido de Young.

Proposição 3.1.4. *Assumimos que $1 \leq p < \gamma \leq 2$. Então y satisfaz (3.1.2) se, e somente se,*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t dx(s)\,\phi(y(s)), \tag{3.1.3}$$

onde a integral é no sentido de Young.

Demonstração. Primeiramente, sejam y e θ como na Definição 3.1.2. Queremos mostrar que y satisfaz (3.1.3). Dado $\varepsilon > 0$ tome α tal que $\frac{\theta(\alpha)}{\alpha} < \varepsilon$. Segue de (3.1.2) que para toda partição $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \cdots < t_K = t\}$ de $[0,t]$ tal que $|\mathcal{P}| < \alpha$, vale

$$\begin{aligned} |y_{k+1} - y_k - \phi(y_k)(x_{k+1} - x_k)| &\leq \theta(t_{k+1} - t_k) \\ &< \varepsilon(t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Somando em k, obtemos

$$\begin{aligned} \left| y_0 - y(t) - \sum_{t_k \in \mathcal{P}} \phi(y_k)(x_{k+1} - x_k) \right| &\leq \varepsilon t \\ &\leq \varepsilon T, \end{aligned}$$

logo, tomando o limite com $|\mathcal{P}|$ indo a zero, temos

$$\left| y_0 - y(t) - \int_0^t dx_u \phi(y_u) \right| \leq \varepsilon T.$$

Assim

$$y(t) = y_0 + \int_0^t dx(u)\,\phi(y(u)),$$

como queríamos.

Seja y tal que $y_t = y_0 + \int_0^t dx_u \phi(y_y)$. Queremos mostrar que y é uma solução no sentido da Definição 3.1.2. É imediato que

$$\begin{aligned} \int_s^t \phi(y_u) - \phi(y_s)\, dx_u &= \int_s^t \phi(y_u)\, dx_u - \phi(y_s)(x_t - x_s) \\ &= y_t - y_s - \phi(y_s)(x_t - x_s), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} |y_t - y_s - \phi(y_s)(x_t - x_s)| &= \left| \int_s^t \phi(y_u) - \phi(y_s)\, dx_u \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{\gamma/p} - 2} \|\phi \circ y\|_{\frac{\gamma-1}{p}} \|x\|_{\frac{1}{p}} (t-s)^{\gamma/p} \end{aligned}$$

onde utilizamos o Teorema de Young 2.2.1 (propriedade de continuidade da integral de Young). Logo y satisfaz (3.1.2) com $\theta(\alpha) := \left(\frac{1}{2^{\gamma/p}-2} \|\phi \circ y\|_{\frac{\gamma-1}{p}} \|x\|_{\frac{1}{p}} \right) \alpha^{\gamma/p}$. $\square$

A seguir introduziremos as *aproximações discretas* a uma solução da equação (3.1.1) (ou *esquema de Euler*): seja $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \cdots < t_K = T\}$ uma partição, definimos $x_k := x(t_k)$ e y_k pela relação de recorrência

$$y_{k+1} := y_k + \phi(y_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{3.1.4}$$

ou equivalentemente

$$y_{k+1} - y_0 = \sum_{i=0}^{k} \phi(y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Observação 3.1.5. *A diferença com o método convencional em equações ordinárias é que aqui não estamos "ligando os pontos" (ou melhor, fazendo interpolação linear com os pontos (x_{t_k}, y_k)) para definir a aproximação y_k em todo $[0, t_K]$. Aqui, temos y_k somente nos pontos da partição. Esta idéia é original de A. M. Davie [5].*

Os resultados principais desta seção serão os seguintes teoremas:

Teorema 3.1.6. *Sejam $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(W, L(V, W))$ $(1 \leq p < \gamma \leq 2)$ e $y_0 \in W$. Então existe $\tau \in [0, T]$ e uma solução y de (3.1.1) em $[0, \tau)$ tal que y é $\frac{1}{p}$-Hölder em cada subintervalo $[0, t] \subset [0, \tau)$. Ainda mais, se $\tau < T$ então a solução explode em τ, ou seja, $|y(t)| \to \infty$ quando $t \to \tau$.*

Teorema 3.1.7. *Sejam* $\phi \in C_{loc}^{\gamma-Höl}(W, L(V,W))$ *(*$1 \leq p < \gamma \leq 2$*) e* $y_0 \in W$*. Então a solução* y *de (3.1.1) dada pelo Teorema 3.1.6 é única no seguinte sentido. Se* $t < \tau$ *e* $\tilde{y}$ *é outra solução de (3.1.1) em* $[0,t]$ *então* $y = \tilde{y}$ *em* $[0,t]$*.*

Mais ainda, se $t < \tau$ *e* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\alpha > 0$ *tal que para toda partição* $\mathcal{P}$ *tal que* $|\mathcal{P}| < \alpha$ *vale*

$$|y_k - y(t_k)| < \varepsilon,$$

onde y_k *é dado por (3.1.4). Em outras palavras,a aproximação discreta (3.1.4) aproxima uniformemente a solução nos pontos da partição* $\mathcal{P}$*.*

Corolário 3.1.8. *Sejam* ϕ*,* p *e* γ *como no teorema anterior. Dadas as condições iniciais* $y_0, \tilde{y}_0 \in W$*, considere* $y, \tilde{y} \in \mathcal{C}^{1/p}([0,t], W)$ *(com* $t < \tau$ *ou com* $t = \tau$ *quando* $\tau = T$*) as únicas soluções da equação (3.1.1) no intervalo* $[0,t]$ *tais que* $y(0) = y_0$ *e* $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$*. Então existe constante* C' *tal que*

$$|y_s - \tilde{y}_s| \leq C' |y_0 - \tilde{y}_0|, \ \forall s \in [0,t].$$

Começaremos analisando o problema discretizado (3.1.4). Seguindo as idéias (e o artigo) de A. M. Davie [5], aqui vamos resolver o análogo discreto dos Teoremas 3.1.6 e 3.1.7. Tal solução discreta é o conteúdo do Lema de Davie 3.1.9 (a seguir). Este resultado foi incorporado e adaptado em artigos e livros, ver por exemplo P. Friz [6], produzindo estimativas muito boas e novas demonstrações para teoremas tipo existência e unicidade de equações diferenciais rough.

Para facilitar a notação desta seção, vamos omitir a variável t. Isto será feito da seguinte maneira: fixamos uma partição do intervalo I, $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T\}$, e definimos $x_0, \ldots, x_K \in V$, $\omega_{lk} \in \mathbb{R}$ para $k, l = 1, \ldots, K$, por $x_k := x_{t_k}$ e $\omega_{lk} := t_l - t_k$. Deste modo, x_k e ω_{lk} satisfazem

$$|x_l - x_k| \leq \|x\|_{1/p} |\omega_{lk}|^{1/p}$$

($\|x\|_{1/p}$ é a constante de Hölder no intervalo I, logo $\|x\|_{1/p,\mathcal{P}} \leq \|x\|_{1/p}$, ou seja, $\|x\|_{1/p}$não depende de $\mathcal{P}$). Também, abusando da notação, vamos dizer que $k, l \in \mathcal{P}$.

Dado $y_0 \in W$, definimos $y_k \in W$, para $k \in \mathcal{P}$, pela fórmula (3.1.4).

Sejam M_{lk} ($k \leq l$) definidos por

$$M_{lk} := y_l - y_k - \phi(y_k)(x_l - x_k). \tag{3.1.5}$$

Trocando $y_l - y_k$ pela soma telescópica $\sum_{i=k}^{l-1} y_{i+1} - y_i$,

$$M_{lk} = -\phi\left(y_l\right)\left(x_k - x_l\right) + \sum_{i=k}^{l-1} \phi\left(y_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

ou ainda, numa notação mais sugestiva,

$$M_{lk} = [\delta x \phi \circ y]_{lk} - \sum_{i=k}^{l-1} [\delta x \phi \circ y]_{i+1,i}.$$

Observamos que $M \in \mathcal{C}_2\left(\mathcal{P}\right).$

Lema 3.1.9 (Lema de Davie)**.** *a) Sejam $\phi \in C_c^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}\left(W, L\left(V,W\right)\right)$ e $E > 0$ tal que $\|x\|_{1/p} \leq E$. Então existem constantes positivas C e D que dependem apenas de γ, p, T, E e $\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}$, tais que*

$$|y_l - y_k| \leq C\omega_{lk}^{1/p} \text{ e } |M_{lk}| \leq D\omega_{lk}^{\gamma/p}$$

para $k \leq l$.

b) Sejam $\phi \in C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}\left(W, L\left(V,W\right)\right)$, $\tilde{y}_0 \in W$ e $\tilde{y}_k$ definido por (3.1.4). Então existe $C' > 0$, dependendo somente de γ, p, T, $\|x\|_{1/p-H\ddot{o}l,I}$ e $\|\phi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,W}$, tal que

$$|\tilde{y}_k - y_k| \leq C' \left|\tilde{y}_0 - y_0\right|$$

Observação 3.1.10. *Vale notar que as constantes não depende da partição nem da norma da partição. Dependem apenas do comprimento do intervalo particionado, $T - 0 = T$.*

Observação 3.1.11. *A parte a), diz precisamente que y é uma solução de (3.1.1) na partição $\mathcal{P}$, pois y satisfaz a definição de solução com $\theta\left(\alpha\right) := M\alpha^{\gamma/p}$. Já a parte b) do lema acima, nos dá dependência Lipschitz da condição inicial.*

Demonstração do Lema 3.1.9 a). Utilizaremos a aplicação Λ discreta. Para isso, é fundamental que $y \in C^{1/p-H\ddot{o}l}\left(\mathcal{P}\right) = \mathcal{C}_1^{1/p}\left(\mathcal{P}\right)$, pois, assumindo isso, segue que $h := \delta x \delta \phi \circ y \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}$ e portanto M estaria escrito na forma

$$M_{mk} = B_{mk} - \sum_{i=k}^{m-1} B_{i+1,i}$$

com $B_{mk} := -\phi(y_k)(x_m - x_k) = [\delta x\phi \circ y]_{mk}$ o qual satisfaz

$$\begin{aligned} \delta B &= \delta[-\delta x\phi \circ y] \\ &= -\delta^2 x\phi \circ y + \delta x\delta\phi \circ y \\ &= \delta x\delta\phi \circ y \\ &= h. \end{aligned}$$

Então pelo costureiro discreto (ver demonstração do Teorema 1.4.1, comparando o incremento M daqui ao M de lá),

$$\Lambda(h) = M$$

e por (1.4.2)

$$|M_{lk}| \leq \tilde{D}\,|t_l - t_k|^{\gamma/p}$$

com

$$\tilde{D} = 2^{\gamma/p}\zeta\left(\frac{\gamma}{p}\right)\|h\|_{\gamma/p,\mathcal{P}}\,.$$

A constante D que vamos construir na demonstração do lema é similar a $\tilde{D}$. A diferença entre elas é que D não vai depender da partição, enquanto $\tilde{D}$, a princípio, depende (pois o termo $\|h\|_{\gamma/p,\mathcal{P}}$ é explícito em $\tilde{D}$). Esta é a ideia.

Mostraremos que $y \in \mathcal{C}_1^{1/p}(\mathcal{P})$. Isto será feito em dois casos. Fixamos $m, k \in \mathcal{P}$ tais que $k \leq m$. Escolha $\varepsilon = \varepsilon\left(\gamma, p, \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,, E\right) > 0$ tal que

$$\tilde{C}\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{p}} \leq 1 \tag{3.1.6}$$

onde

$$\tilde{C} = 2^{\gamma-1+\frac{\gamma}{p}}\zeta\left(\frac{\gamma}{p}\right)\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,\|\phi\|_{\infty,W}^{\gamma-2}\,E^{\gamma-1}$$

note que $\|\phi\|_{\gamma-H\ddot{o}l,W} < \infty$, pois o suporte de ϕ é compacto.

Caso 1: $\omega_{mk} \leq \varepsilon$: Usando indução em $m-k$ mostraremos que:

$$|y_m - y_k| \leq 2E\,\|\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{mk}^{1/p}.$$

Se $m-k=1$ então, pela definição de y, (3.1.4), segue que

$$\begin{aligned} |y_{k+1}-y_k| &= |\delta y_{k+1,k}| \\ &\leq |\phi(y_k)|\,|\delta x_{k+1,k}| \\ &\leq \|\phi\|_{\infty,W}\,\|x\|_{1/p}\,\omega_{mk}^{1/p} \\ &\leq E\,\|\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{mk}^{1/p} \\ &\leq 2E\,\|\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{mk}^{1/p}. \end{aligned}$$

Agora, se $m-k>1$, seja $l \in \mathcal{P}$ tal que $k<l\leq m$. É nesta etapa onde o costureiro discreto Λ é fundamental. Definimos $h \in \mathcal{C}_3(\mathcal{P})$ por

$$\begin{aligned} h_{mlk} &= (\phi(y_l)-\phi(y_k))(x_m-x_l) \\ &= [\delta x \delta\phi \circ y]_{mlk}. \end{aligned}$$

Mostraremos que $h \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(\mathcal{P}\cap[t_k,t_m])$. Para $k<l<m$,

$$\begin{aligned} |h_{mlk}| &= |\phi(y_l)-\phi(y_k)|\,|x_m-x_l| \\ &\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,|y_l-y_k|^{\gamma-1}\,\|x\|_{1/p}\,\omega_{ml}^{1/p} \\ &\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\left(2E\,\|\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{lk}^{1/p}\right)^{\gamma-1}\|x\|_{1/p}\,\omega_{ml}^{1/p} \\ &\leq 2^{\gamma-1}E^{\gamma-1}\,\|x\|_{1/p}\,\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,\|\phi\|_{\infty,W}^{\gamma-1}\,\omega_{lk}^{\frac{\gamma-1}{p}}\,\omega_{ml}^{1/p} \\ &\leq 2^{\gamma-1}E^{\gamma}\,\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,\|\phi\|_{\infty,W}^{\gamma-1}\,\omega_{mk}^{\frac{\gamma}{p}} \end{aligned}$$

onde a 1ª desigualdade segue de ϕ e x serem Hölder, a 2ª segue da hipótese de indução, e a 3ª é trivial, pois $\omega_{ml}=t_m-t_l\leq t_m-t_k=\omega_{mk}$ e também $\|x\|_{1/p}\leq E$.

Como h também satisfaz $\delta h=0$, segue que h está no domínio do costureiro discreto Λ, $\mathcal{ZC}_3^{1+}(\mathcal{P}\cap[t_k,t_m])$. Logo (existe costureiro tal que) $\Lambda(h)=M$, pois $\delta M=h$ (lembrando que Λ satisfaz $\delta\Lambda=id$). Pela desigualdade (1.4.2), temos

$$|M_{mk}| \leq 2^{\gamma/p}\zeta\left(\frac{\gamma}{p}\right)\|h\|_{\mathcal{C}_3^{\gamma/p}(\mathcal{P}\cap[t_k,t_m])}\,\omega_{mk}^{\gamma/p}$$

agora, pela definição de M, (3.1.5), e pelas majorações acima temos

$$\begin{aligned}
|y_m - y_k| &\leq |\phi(y_k)| \, |\delta x_{mk}| + |M_{mk}| \\
&\leq \|\phi\|_{\infty,W} \|x\|_{1/p} \, \omega_{mk}^{1/p} + |M_{mk}| \\
&\leq \|\phi\|_{\infty,W} \|x\|_{1/p} \left(1 + \tilde{C}\omega_{mk}^{\frac{\gamma-1}{p}}\right) \omega_{mk}^{1/p} \\
&\leq E \|\phi\|_{\infty,W} \left(1 + \tilde{C}\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{p}}\right) \omega_{mk}^{1/p} \\
&\leq E \|\phi\|_{\infty,W} (1+1) \, \omega_{mk}^{1/p} \\
&= 2E \|\phi\|_{\infty,W} \|x\|_{1/p} \, \omega_{mk}^{1/p}
\end{aligned}$$

assim terminando a indução.

Caso 2: $\omega_{mk} > \varepsilon$: Para esta parte é importante escolher alguns pontos de $\mathcal{P} \cap [t_k, t_m]$ de maneira "econômica", ver Observação 3.1.12 abaixo.

Construiremos $k := k_0 < k_1 < \cdots < k_r =: m$, $k_u \in \mathcal{P} \cap [t_k, t_m]$ da seguinte maneira: caso $\omega_{k_0+1,k_0} > \varepsilon$ definimos $k_1 := k_0 + 1$ e caso contrário, k_1 é o maior inteiro tal que $k_0 < k_1 \leq m$ satisfazendo $\omega_{k_1 k_0} \leq \varepsilon$ e $\omega_{k_1+1,k_0} > \varepsilon$. Caso $\omega_{k_1+1,k_1} > \varepsilon$ definimos $k_2 := k_1 + 1$ e caso contrário, k_2 é o maior inteiro tal que $k_1 < k_2 \leq m$ satisfazendo $\omega_{k_2 k_1} \leq \varepsilon$ e $\omega_{k_2+1,k_1} > \varepsilon$. Assim, sucessivamente, definimos $k_1, \ldots .k_r = m$.

Um fato bom na escolha dos k_u´s é que a quantidade destes (ie, r) não depende da quantidade de pontos da partição. Mostraremos que

$$r \leq \frac{T}{\varepsilon} + 1.$$

É óbvio que $r \leq m - k$, pois $m - k$ é a quantidade de pontos da partição no intervalo $[t_k, t_m]$. A igualdade $r_{\max} = m - k$ ocorre precisamente quando $\omega_{k_{u+1} k_u} > \varepsilon$, $\forall u$. Como no intervalo $[t_k, t_m]$ cabem no máximo $\left\lfloor \frac{\omega_{mk}}{\varepsilon} \right\rfloor$ subintervalos de comprimento ε, segue que $r_{\max} = m - k = \left\lfloor \frac{\omega_{mk}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Portanto

$$\begin{aligned}
r &\leq \left\lfloor \frac{\omega_{mk}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \\
&\leq \frac{\omega_{mk}}{\varepsilon} + 1 \\
&\leq \frac{T}{\varepsilon} + 1.
\end{aligned}$$

Agora, com os k_u´s construídos, temos que sempre vale

$$\left| y_{k_{u+1}} - y_{k_u} \right| \leq 2E \|\phi\|_{\infty,W} \, \omega_{k_{u+1} k_u}^{1/p}$$

pois, quando $\omega_{k_{u+1}k_u} \leq \varepsilon$ a desigualdade segue do Caso 1, quando $\omega_{k_{u+1}k_u} > \varepsilon$ segue que $k_{u+1} = k_u + 1$ (definição de k_{u+1}) e portanto a desigualdade segue da definição de $y_{k_{u+1}}$.

Somando em u obtemos

$$\begin{aligned}
|y_m - y_k| &\leq 2E \|\phi\|_{\infty,W} \|x\|_{1/p} \sum_{u=0}^{r-1} \omega_{k_{u+1}k_u}^{1/p} \\
&\leq 2E \|\phi\|_{\infty,W} \sum_{u=0}^{r-1} \omega_{mk}^{1/p} \\
&\leq 2E \left(\frac{T}{\varepsilon} + 1\right) \|\phi\|_{\infty,W} \omega_{mk}^{1/p}.
\end{aligned}$$

Portanto $y \in \mathcal{C}_1^{1/p}(\mathcal{P} \cap [t_k, t_m])$, terminando assim o Caso 2.

Finalizando. Como $k, m \in \mathcal{P}$, são arbitrários temos que $y \in \mathcal{C}_1^{1/p}(\mathcal{P})$, e satisfaz

$$|y_m - y_k| \leq C\omega_{mk}^{1/p},$$

com

$$C := 2E \left(\frac{T}{\varepsilon} + 1\right) \|\phi\|_{\infty,W}.$$

Lembrando que ε satisfaz (3.1.6). Logo $h = \delta x \delta\phi \circ y \in \mathcal{ZC}_3^{\gamma/p}(\mathcal{P})$. Pelo costureiro discreto $\Lambda(h) = M$, e portanto

$$|M_{mk}| \leq D\omega_{mk}^{\gamma/p},$$

onde

$$D := 2^{\gamma/p} E\zeta\left(\frac{\gamma}{p}\right) \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W} C^{\gamma-1}$$

terminando assim a parte a) do lema. □

Demonstração do Lema 3.1.9 b). Denotamos por Y_k à função que associa a condição inicial y_0 ao valor y_k definido por (3.1.4), isto é, $Y_k : W \to W$, $y_0 \mapsto Y_k(y_0) := y_k$. Por exemplo, $Y_0 : W \to W$ é o operador identidade $Y_0 = id_W$.

Por hipótese, $\phi \in C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}(W, L(V, W))$, então faz sentido calcularmos a derivada

$$Z_{k+1}(y_0) := DY_k(y_0).$$

Logo de (3.1.4) segue que $Z_k(y_0)$ satisfaz

$$Z_{k+1}(y_0)(\cdot) = Z_k(y_0)(\cdot) + D\phi(y_k) Z_k(y_0)(\cdot)(x_{k+1} - x_k) \tag{3.1.7}$$

para cada y_0 fixo. Queremos utilizar o item a) para estimar $|Z_k(y_0)|$. Para isso, consideramos a seguinte fórmula de recurso:

$$(y_{k+1}, Z_{k+1}(y_0)) = (y_k, Z_k(y_0)) + \Phi(y_k, Z_k(y_0))(x_{k+1} - x_k) \tag{3.1.8}$$

onde $\Phi : W \oplus L(W, W) \to L(V, W \oplus L(V, V))$ é definido por

$$\Phi(w, T)v \ := \ (\phi(w)v, D\phi(w)(T)v).$$

Deste modo $\Phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-Höl}$. Assim podemos aplicar a parte a) do Lema utilizando a relação (3.1.8) com as condições iniciais $(y_0, 0) \in W \oplus L(W, W)$, obtendo

$$|(y_k, Z_k(y_0)) - (y_0, 0)| \leq C\omega_{0,k}^{1/p} \leq CT^{1/p}.$$

Tomando a norma $|\cdot|_{\max} = \max\{|\cdot|_W, |\cdot|_{L(W,W)}\}$ em $W \oplus L(W, W)$, temos

$$|Z_k(y_0) - 0| \leq |(y_k, Z_k(y_0)) - (y_0, 0)|.$$

Logo

$$|Z_k|_{\max} \leq CT^{1/p}$$

Por fim, seja $\tilde{y}$ dado pela relação (3.1.4) com condição inicial $\tilde{y}_0$. Olhando y_k e $\tilde{y}_k$ como funções de suas respectivas condições inicias, podemos aplicar a desigualdade do valor intermediário

$$\begin{aligned} |y_k - \tilde{y}_k| &\leq |Z_k(\hat{y})| \, |y_0 - \tilde{y}_0| \\ &\leq C' \, |y_0 - \tilde{y}_0| \end{aligned}$$

onde $\hat{y}$ é um vetor da forma $\hat{y} = \eta y_0 + (1-\eta)\tilde{y}_0$ para algum $\eta \in [0, 1]$. □

Observação 3.1.12. *Vale observarmos que uma técnica mais padrão, para o caso 2 da parte a), seria escolhermos uma partição que refina $\mathcal{P}$ de modo que possamos garantir que $\omega_{k_{u+1}k_u} \leq \varepsilon$. Isto é ruim, pois é muito importante que possamos controlar as normas de y e M com constantes que não dependam da partição, já que a estratégia que visamos utilizar é a de resolver a equações diferenciais discretamente e depois passar ao fecho da união dos pontos das partições.*

Demonstração do Teorema 3.1.6. Suponhamos primeiramente que $\phi \in C_c^{(\gamma-1)-Höl}(W, L(V, W))$. Tomamos uma seqüência de partições $\{\mathcal{P}_m : m = 1, 2, \dots\}$ de $I = [0, T]$ tais que $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{m+1}$, com $\lim_{m\to\infty} |\mathcal{P}_m| \to 0$. Sejam $y^{(m)}(t_k)$, também denotados por $y_k^{(m)}$, definidos pela relação de recorrência (3.1.4) usando a partição $\mathcal{P}_m$.

Fixamos $t \in \mathcal{P}_1$, então podemos extrair uma subsequência $\left(y^{(m_n)}(t)\right)$ de $\left(y^{(m)}(t)\right)$ de modo que $y^{(m_n)}(t)$ convirja (a princípio) em $[-\infty, \infty]$ quando $n \to \infty$. Denotamos

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y^{(m_n)}(t) \in [-\infty, \infty].$$

Agora para $t \neq \tilde{t} \in \mathcal{P}_1$ podemos extrair uma subsequência $\left(y^{\left(m_{n_k}\right)}(t)\right)$ de $\left(y^{(m_n)}(t)\right)$ de modo que $\left(y^{\left(m_{n_k}\right)}(t)\right)$ e $\left(y^{\left(m_{n_k}\right)}(\tilde{t})\right)$ convirjam em $[-\infty, \infty]$. Como $\cup_m \mathcal{P}_m$ é enumerável, podemos ir extraindo sucessivamente subsequências de modo que

$$y(s) := \lim_{m\to\infty} y^{(m)}(s) \in [-\infty, \infty],$$

para todo $s \in \cup_m \mathcal{P}_m$. Estamos abusando da notação para a subsequência.

Notamos que, pelo Lema 3.1.9 a)

$$\begin{aligned}
\left|y^{(m)}(s)\right| &\leq |y_0| + \left|M_{s,0}^{(m)}\right| + |\phi(y_0)|\,|x_s - x_0| \\
&\leq |y_0| + D\omega_{s,0}^{\gamma/p} + |\phi(y_0)|\,\|x\|_{1/p}\,\omega_{s,0}^{1/p} \\
&\leq |y_0| + DT^{\gamma/p} + |\phi(y_0)|\,\|x\|_{1/p}\,T^{1/p}
\end{aligned}$$

logo $\{y^{(m)}(s)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada e portanto $y(s) \in \mathbb{R}$.

Resulta que podemos passar o limite $m \to \infty$ na desigualdade que o mesmo lema nos fornece

$$\left|y^{(m)}(s) - y^{(m)}(s')\right| \leq C\,|s - s'|^{1/p},$$

obtendo

$$|y^{\mu}(s) - y(s')| \leq C\,|s' - s|^{1/p}$$

para todo $s, s' \in \cup_m \mathcal{P}_m$.

Logo y é uniformemente contínua neste conjunto e, então, estendemos y ao fecho $\overline{\cup_m \mathcal{P}_m} = [0, T]$. Resulta que $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ é tal que $\|y\|_{1/p} \leq C < \infty$.

Resta mostrarmos que y é solução da equação (3.1.1) no sentido de (3.1.2). Novamente do lema,

$$\begin{aligned}
\left|y_{s'}^{(m)} - y_s^{(m)} - \phi\left(y_s^{(m)}\right)(x_{s'} - x_s)\right| &= \left|M_{s',s}^{(m)}\right| \\
&\leq D\,|s' - s|^{\gamma/p}, \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

logo, passando o limite $m \to \infty$ obtemos que y satisfaz (3.1.9) no conjunto $\cup_m \mathcal{P}_m$ com $\theta(\alpha) = D\alpha^{\gamma/p}$. Da densidade de $\cup_m \mathcal{P}_m$ em $[0,T]$ e da continuidade das funções envolvidas resulta que y é solução em $[0,T]$. Terminando este caso.

Caso $\phi \in C^{\gamma-1}_{loc}(W, L(V,W))$: Consideramos $\phi^{(r)} \in C^{\gamma-1}_{c}(W, L(V,W))$ $(r = 1, \dots)$, tais que $\phi^{(r)}(y) = \phi(y)$ quando $|y| \leq r$. Seja r tal que $|y_0| < r$. Seja $y^{(1)}$ uma solução da equação $dy_t = \phi^{(r)}(y_t)\, dx_t$ no intervalo $[0,T]$ (a qual existe pelo caso anterior). Definimos

$$\tau_1 := \max\{t \in [0,T] : \left|y^{(1)}(s)\right| \leq r, \forall s \in [0,t]\}$$

Segue da continuidade de $y^{(1)}$ que existe $t > 0$ tal que $\left|y^{(1)}(s)\right| \leq r, \forall s \in [0,t]$. Logo $\tau_1 > 0$. Notamos que $y^{(1)}$ é solução de $dy_t = \phi(y_t)\, dx_t$ em $[0,\tau_1]$, pois $\phi^{(r)}\left(y^{(1)}_t\right) = \phi\left(y^{(1)}_t\right)$ quando $t \in [0,\tau_1]$

Seja $y^{(2)}$ solução da equação $dy_t = \phi^{(r+1)}(y_t)\, dx_t$ com condição inicial $y^{(2)}(\tau_1) := y^{(1)}(\tau_1)$. Definimos

$$\tau_2 := \max\{t \in [\tau_1,T] : \left|y^{(2)}(s)\right| \leq r+1, \forall s \in [\tau_1,t]\}.$$

Resulta que $\tau_2 > \tau_1$, que $\left|y^{(2)}(s)\right| \leq r+1$ para $s \in [\tau_1,\tau_2]$ (óbvio) e que $y^{(2)}$ é solução de $dy_t = \phi(y_t)\, dx_t$ em $[\tau_1,\tau_2]$. Concatenamos os caminhos $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ denotanto (ainda) por $y^{(2)}$. Segue que $y^{(2)}$ (o caminho concatenado) é solução de $dy_t = \phi^{(r+1)}(y_t)\, dx_t$ em $[0,\tau_2]$ com condição inicial y_0.

Indutivamente, definimos $y^{(i)}$, τ_i, $\forall i \in \mathbb{N}$, de modo que $\tau_{i+1} > \tau_i$, $\left|y^{(i)}(s)\right| \leq r+i$, $\forall s \in [0,\tau_i]$, sendo $y^{(i)}$ solução de $dy_t = f(y_t)\, dx_t$ em $[0,\tau_i]$ e, ainda mais, $y^{(i)}\big|_{[0,\tau_j]} = y^{(j)}$ quando $i > j$.

Então, definimos

$$\tau := \lim_{i\to\infty} \tau_i \in [0,T]$$

e

$$y(t) := y^{(i)}(t) \text{ quando } t \in [0,\tau_i),$$

para todo $t \in [0,\tau)$. Segue do parágrafo anterior que y está bem definido em $[0,\tau)$ e é solução da equação (3.1.1) em cada intervalo fechado contido em $[0,\tau)$.

Resta mostrarmos que quando $\tau < T$ temos que $\lim_{t\to\tau} |y(t)| = \infty$. De fato, dado $L > 0$ tome $i \in \mathbb{N}$ de modo que $L < r+i$, lembrando que r é tal que $|y_0| < r$. Das construções anteriores, temos que quando $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$,

$$|y(t)| = \left|y^{(i+1)}(t)\right| \in [r+i, r+i+1],$$

logo

$$\begin{aligned} |y(t)| &\geq r+i \\ &\geq L \end{aligned}$$

quando $t \in [\tau_i, \tau)$. Portanto $\lim_{t \to \tau} |y(t)| = \infty$. □

Demonstração do Teorema 3.1.7. Sejam y a solução construída no Teorema (3.1.6) e $\tilde{y}$ uma solução de (3.1.1), (veja Definição 3.1.2). Seja $[0,t]$ um intervalo para o qual y e $\tilde{y}$ estejam definidas. Para concluirmos que $y = \tilde{y}$ em $[0,t]$ afirmamos que basta mostrarmos que $y^{(m)}$ do Teorema (3.1.6) converge uniformemente sobre $\cup_m \mathcal{P}_m$ a $\tilde{y}$. Pois, esta afirmação implica que $y^{(m)}$ converge uniformemente sobre $\cup_m \mathcal{P}_m$ a $\tilde{y}$ e a y. Logo $\tilde{y} = y$ em $\cup_m \mathcal{P}_m$. Como $\tilde{y}$ e y são uniformemente contínuas (pois, em particular, são Hölder), segue que $y = \tilde{y}$ no fecho $\overline{\cup_m \mathcal{P}_m} = [0,t]$. Ou seja, $\tilde{y} = y$ e as conclusões deste teorema são satisfeitas.

Provaremos a afirmação, $y^{(m)}$ do Teorema (3.1.6) converge uniformemente sobre $\cup_m \mathcal{P}_m$ a $\tilde{y}$. Sejam r tal que $|\tilde{y}(s)| < r$, para todo $s \in [0,t]$, e $\mathcal{P}_m$, partição de $[0,t]$. Definimos $z_l^{(k)}$, para $t_l, t_k \in \mathcal{P}_m$ $(l \geq k)$ pela relação

$$z_{l+1}^{(k)} = z_l^{(k)} + \phi^{(r)}\left(z_l^{(k)}\right)(x_{l+1} - x_l)$$

com condição inicial

$$z_k^{(k)} := \tilde{y}_k := \tilde{y}(t_k).$$

Como

$$-\tilde{y}_{k+1} + z_{k+1}^{(k)} = -\tilde{y}_{k+1} + \tilde{y}_k + \phi^{(r)}\left(z_k^{(k)}\right)(x_{l+1} - x_l)$$

segue de (3.1.2) que

$$\left|z_{k+1}^{(k)} - \tilde{y}_{k+1}\right| \leq \theta(t_{k+1} - t_k), \tag{3.1.10}$$

pois $z_k^{(k)} = \tilde{y}_k$ e $\phi^{(r)}(\tilde{y}_k) = \phi(\tilde{y}_k)$.

Para $k < l \leq K$, podemos ver $z_l^{(k)}$ como a solução de (3.1.4) calculado no tempo t_l e com condição inicial

$$z_{k+1}^{(k)} = y_k + \phi^{(r)}(y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Logo aplicando o Lema 3.1.9 b) para $\phi^{(r)}$, $z_l^{(k+1)}$ e $z_l^{(k)}$, no lugar de ϕ, $\tilde{y}$ e y, respectivamente, e com tempo inicial t_{k+1}, temos

$$\left|z_l^{(k)} - z_l^{(k+1)}\right| \leq C' \left|z_{k+1}^{(k)} - z_{k+1}^{(k+1)}\right|$$

Segue de (3.1.10) que

$$\begin{aligned} \left| z_l^{(k)} - z_l^{(k+1)} \right| &\leq C' \left| z_{k+1}^{(k)} - \tilde{y}_{k+1} \right| \\ &\leq C'\theta \left(t_{k+1} - t_k \right). \end{aligned}$$

Somando sobre k, obtemos que

$$\left| z_l^{(0)} - \tilde{y}_l \right| \leq C' \sum_k \theta \left(t_{k+1} - t_k \right).$$

Notamos que $z_l^{(0)} = y_l^{(m)}$, onde $y_l^{(m)}$ é definido pela relação (3.1.4) usando a partição $\mathcal{P}_m$.

Agora dado $\varepsilon > 0$ tome $\alpha > 0$ tal que $\theta(\alpha) < \frac{\varepsilon}{C't}\alpha$. Logo, para m suficientemente grande tal que $|\mathcal{P}_m| < \alpha$ (e isto é possível pois C' não depende dos pontos da partição e $|\mathcal{P}_m| \to 0$ quando $m \to \infty$), segue que

$$\left| y_l^{(m)} - \tilde{y}_l \right| = \left| z_l^{(0)} - \tilde{y}_l \right| \leq C' \sum_k \theta \left(t_{k+1} - t_k \right) \leq C' \frac{\varepsilon}{C't} \sum_k t_{k+1} - t_k = \varepsilon.$$

Logo $y^{(m)}$ aproxima a $\tilde{y}$ uniformemente em $\cup_m \mathcal{P}_m$, como queríamos mostrar. □

Demonstração do Corolário 3.1.8. Segue imediatamente do Teorema 3.1.7 e do Lema 3.1.9 b). □

3.2 O Caso $2 \leq p < \gamma \leq 3$

Como nas integrais ao longo de rough paths, aqui também temos problema para $2 \leq p < \gamma \leq 3$. Podemos pensar que a relação de recorrência (3.1.4), não nos fornece uma aproximação suficientemente boa para o problema, sendo necessário introduzirmos termos de maior ordem. Heuristicamente, a relação de recorrência (3.1.4) da seção anterior aproxima localmente a solução y via o comportamento do integrador x:

$$y_t \approx y_k + \phi(y_k)(x_t - x_k), \tag{3.2.1}$$

para t próximo de k. Pensando em expansão de Taylor podemos interpretar (3.2.1) como sendo obtido a partir da equação diferencial rough (3.1.1) aproximando $\phi(y_t)$ por $\phi(y_k)$. Ou seja, essencialmente temos expansão de Taylor de ϕ de ordem zero:

$$\begin{aligned} \phi(y_t) &\approx \phi(y_k + \phi(y_k)(x_t - x_k)) \\ &\approx \phi(y_k). \end{aligned}$$

Seguindo este raciocínio uma aproximação melhor (neste sentido informal) seria incluir a derivada de ϕ da seguinte maneira, através de Taylor de ordem 1 :

$$\begin{aligned} \phi(y_t) &\approx \phi(y_k + \phi(y_k)(x_t - x_k)) \\ &\approx \phi(y_k) + D\phi(y_k)(\phi(y_k)(x_t - x_k)), \end{aligned}$$

para t próximo de k. Portanto para resolvermos a equação diferencial (3.1.1), usando esta aproximação, nós temos que integrar com respeito à $(x - x_k)\,dx$. Entretanto há problemas em interpretar esta integral. Portanto voltamos aos rough paths assumimos o seguinte.

Axioma 3.2.1. *Supomos que existe* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_2^{2/p}(I, V \otimes V)$, *sendo* $I = [0,T]$, *tal que satisfaz* $\delta\mathbf{x}_{tus} = \delta x_{tu} \otimes \delta x_{us}$, $(\forall s, u, t \in I)$. *Ou equivalentemente, valem as seguintes condições:*

1. $\mathbf{x}^{ab}(t,s) = \mathbf{x}^{ab}(t,u) + \mathbf{x}^{ab}(u,s) + (x^a(t) - x^a(u))\left(x^b(u) - x^b(s)\right)$ $(a, b = 1, \ldots, \dim V$ *e* $\forall s, u, t \in I)$.

2. $|\mathbf{x}^{a_1 a_2}(t,s)| \leq C\,|t - s|^{2/p}$

Notamos que se x é uma trajetória do movimento Browniano (cujas trajetórias são $\frac{1}{p}$-Hölder, q.t.p., para $p > 2$) então a integral de Itô e a integral de Stratonovich nos dão exemplo de tais objetos. Vale ressaltar que existem muitas possibilidades de escolha para $\mathbf{x}$, Observação 2.4.3. Diferentes escolhas do objeto $\mathbf{x}$ levam a diferentes interpretações de (3.1.1). Do ponto de vista dos rough paths todas as escolhas são de igual relevância.

Definição 3.2.2. *Dizemos que* y *é solução de (3.1.1) em* $I = [0,T]$ *se* $y(0) = y_0 \in W$ *e existe uma função não-negativa* θ *em* $[0,\infty)$ *tal que* $\theta(\alpha) = o(\alpha)$ *quando* $t \to 0$, *tais que satisfazem*

$$|y_t - y_s - \phi(y_s)(x_t - x_s) - (D\phi \otimes \phi)(y_s)\,\mathbf{x}_{ts}| \leq \theta(|t - s|) \tag{3.2.2}$$

Onde denotamos $y_t := y(t)$ *e* $\mathbf{x}_{ts} := \mathbf{x}(t,s)$.

Observação 3.2.3. $D\phi$ *é a derivada de* ϕ, *o mapa* $D\phi \otimes \phi : W \to L(V \otimes V, W)$ *é definido por* $(D\phi \otimes \phi)(y)\, e_a \otimes e_b := D\phi(y)(\phi(y)\, e_a)\, e_b$ $(\{e_a\}$ *é uma base de* $V)$.

Observação 3.2.4. *A preocupação em fazer* $D\phi \otimes \phi(y) \in L(V \otimes V, W)$ *se deve ao fato das "integrais iteradas",* $\mathbf{x}_{t,s}$ *pertencerem ao espaço* $V \otimes V$ *e do fato da natureza (e definição) dos elementos* $\mathbf{x}_{t,s}$ *não estarem no escopo da teoria dos rough paths. Logo precisa-se de uma maneira natural para definir os funcionais de* $\mathbf{x}_{t,s}$.

Observação 3.2.5. *Como no caso $1 \leq p < 2$, podemos interpretar essa definição da seguinte maneira. Fixado $s \in (0,T)$ e dado $y(s)$, significa que o comportamento de $y(t)$, quando t está próximo de s, é dado pelo comportamento de x e de sua integral iterada $\mathbf{x}$, pois*

$$y_t \approx y_s + \phi(y_s)(x_t - x_s) + (D\phi \otimes \phi)(y_s)\,\mathbf{x}_{ts},$$

uma vez que t próximo de s implica que $\theta(|t-s|) \approx 0$. Daí, a idéia da integral iterada dar uma melhor aproximação.

Lema 3.2.6. *Seja $\phi \in C_c^{(\gamma-1)-Höl}(W, L(V,W))$ ($2 < \gamma < 3$). Então a aplicação $D\phi \otimes \phi : W \to L(V \otimes V, W)$ satisfaz*

$$|D\phi \otimes \phi(y) - D\phi \otimes \phi(\tilde{y})| \leq c\left\{\|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W} + \|\phi\|^2_{(\gamma-1)-Höl,W}\right\}\left(|y-\tilde{y}|^{\gamma-2} + |y-\tilde{y}|\right)$$

($\forall y, \tilde{y} \in W$), onde $c > 0$ e depende das dimensões de V e de W.

Demonstração. Em dimensão finita é suficiente provarmos a desigualdade para as funções coordenadas de ϕ. Ou seja, fixamos $\{e_a\}$ base de V e definimos $\phi^a(y) = \phi^a(y)\,e_a$. Logo $\phi^a \in C_c^{(\gamma-1)-Höl}(W,W)$ e $D\phi^a(y) = D\phi(y)\,e_a$. Notamos que

$$(D\phi \otimes \phi)(y)\,e_a \otimes e_b - (D\phi \otimes \phi)(\tilde{y})\,e_a \otimes e_b = D\phi^b(y)(\phi^a(y)) - D\phi^b(\tilde{y})(\phi^a(\tilde{y})).$$

Sejam $y, \tilde{y} \in K_r = \{y \in W : |y| \leq r\}$. Então

$$\begin{aligned}
\left|D\phi^b(y)(\phi^a(y)) - D\phi^b(\tilde{y})(\phi^a(\tilde{y}))\right| &\leq \left|\left[D\phi^b(y) - D\phi^b(\tilde{y})\right]\phi^a(y)\right| + \left|D\phi^b(\tilde{y})\left[\phi^a(y) - \phi^a(\tilde{y})\right]\right| \\
&\leq \left\|D\phi^b\right\|_{(\gamma-2)-Höl,W}|y-\tilde{y}|^{\gamma-2} + \left\|D\phi^b\right\|_{\infty,W}\|D\phi^a\|_{\infty,W}|y-\tilde{y}| \\
&\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W}|y-\tilde{y}|^{\gamma-2} + \|\phi\|^2_{(\gamma-1)-Höl,W}|y-\tilde{y}| \\
&\leq \left\{\|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W} + \|\phi\|^2_{(\gamma-1)-Höl,W}\right\}\left(|y-\tilde{y}|^{\gamma-2} + |y-\tilde{y}|\right)
\end{aligned}$$

Como $\dim W, \dim V < \infty$ segue que

$$|D\phi \otimes \phi(y) - D\phi \otimes \phi(\tilde{y})| \leq c\left\{\|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W} + \|\phi\|^2_{(\gamma-1)-Höl,W}\right\}\left(|y-\tilde{y}|^{\gamma-2} + |y-\tilde{y}|\right),$$

onde c é uma constante que depende das dimensões de V e W. □

A seguir introduziremos as *aproximações discretas* a uma solução de (3.1.1) (ou *esquema de Euler modificado*) para este caso. Analogamente ao anterior, seja $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \cdots < t_K = T\}$ uma partição, definimos $x_k := x(t_k)$ e y_k pela seguinte relação de recorrência

$$y_{k+1} := y_k + \phi(y_k)\,\delta x_{k+1,k} + D\phi \otimes \phi(y_k)\,\mathbf{x}_{k+1,k} \tag{3.2.3}$$

ou, equivalentemente, y é a solução da equação algébrica

$$\delta y_{k+1,k} := [\delta x \phi \circ y + \mathbf{x} D\phi \otimes \phi \circ y]_{k+1,k}$$

com passo inicial y_0. Lembramos que aqui estamos usando o produto nos espaços de incrementos $\mathcal{C}_1(\mathcal{P})$ e $\mathcal{C}_2(\mathcal{P})$.

A seguir os principais resultados desta seção.

Teorema 3.2.7. *Sejam* $\phi \in C_{loc}^{(\gamma-1)-Höl}(W, L(V, W))$ $(2 \leq p < \gamma \leq 3)$ *e* $y_0 \in W$. *Então existe* τ, *com* $0 < \tau \leq T$ *e uma solução* $y(t)$ *de (3.1.1) para* $0 \leq t < \tau$, *tal que se* $\tau < T$ *então* $|y(t)| \to \infty$ *quando* $t \to \tau$. *Ainda mais,* y *é* $\frac{1}{p}$*-Hölder em cada intervalo* $[0, t] \subset [0, \tau)$.

Teorema 3.2.8. *Sejam* $\phi \in C_{loc}^{\gamma-Höl}(W, L(V, W))$ *e* $y_0 \in W$. *Então a solução* $y(t)$ *de (3.1.1) dada pelo Teorema 3.2.7 é única no seguinte sentido. Se* $t < \tau$ *e* $\tilde{y}$ *é outra solução de (3.1.1) em* $[0, t]$ *então* $y = \tilde{y}$ *em* $[0, t]$.

Mais ainda, se $t < \tau$ *e* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\alpha > 0$ *tal que para toda partição* $\mathcal{P}$ *tal que* $|\mathcal{P}| < \alpha$ *vale*

$$|y_k - y(t_k)| < \varepsilon$$

onde y_k *é dado por (3.2.3). Em outras palavras,a aproximação discreta aproxima uniformemente a solução nos pontos da partição. Além do mais,* y *possui dependência Lipschitz com respeito a condição inicial.*

Começaremos analisando o problema discretizado (3.2.3). Para facilitar a notação desta seção, vamos omitir a variável t. Isto será feito da seguinte maneira: fixamos uma partição do intervalo I, $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T\}$, e definimos $x_0, \ldots, x_K \in V$, $\mathbf{x}_{lk} \in V^{\otimes 2}$ e $\omega_{lk} \in \mathbb{R}$ para $k, l = 1, \ldots, K$, por

$$\begin{aligned} x_k &:= x_{t_k} \\ \mathbf{x}_{lk} &:= \mathbf{x}_{t_l t_k} \\ \omega_{lk} &:= t_l - t_k. \end{aligned}$$

Deste modo, x_k, $\mathbf{x}_{lk}$ e ω_{lk} satisfazem as seguintes desigualdade.

$$|x_l - x_k| \leq \|x\|_{1/p,I} |\omega_{lk}|^{1/p}$$

e

$$|\mathbf{x}_{lk}| \leq \|\mathbf{x}\|_{2/p,I} |\omega_{lk}|^{2/p}.$$

Abusando da notação, diremos $k, l \in \mathcal{P}$.

Dado $y_0 \in W$, defina $y_k \in W$, para $k \in \mathcal{P}$, pela fórmula (3.2.3).

Definidos N_{lk} $(k \leq l)$ por

$$N_{lk} := y_l - y_k - \phi(y_k)(x_l - x_k) - D\phi \otimes \phi(y_k)\mathbf{x}_{lk} \tag{3.2.4}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} N_{lk} &= -\phi(y_k)(x_l - x_k) - D\phi \otimes \phi(y_k)\mathbf{x}_{lk} + \sum_{i=k}^{l-1} \delta y_{i+1,i} \\ &= -[\delta x\phi \circ y + \mathbf{x}D\phi \otimes \phi \circ y]_{lk} + \sum_{i=k}^{l-1} [\delta x\phi \circ y + \mathbf{x}D\phi \otimes \phi \circ y]_{i+1,i}. \end{aligned}$$

Observamos que $N \in \mathcal{C}_2(\mathcal{P})$.

Lema 3.2.9 (Lema de Davie)**.** *a) Sejam $\phi \in C_c^{(\gamma-1)-höl}(W, L(V, W))$ $(2 \leq p < \gamma \leq 3)$ e $B > 0$ tal que $\|x\|_{1/p,I}, \|\mathbf{x}\|_{2/p,I} < B$. Então existem constantes positivas C e D que dependem apenas de γ, p, T, B e $\|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W}$, tais que*

$$|y_l - y_k| \leq C\omega_{lk}^{1/p} \quad e \quad |N_{lk}| \leq D\omega_{lk}^{\gamma/p},$$

para $k \leq l$.

b) Sejam $\phi \in C_c^{\gamma-höl}(W, L(V, W))$ e $\tilde{y}_0 \in W$ e $\tilde{y}_k$ definido por (3.2.3). Então existe $C' > 0$, dependendo somente de γ, p, T, B e $\|\phi\|_{(\gamma-1)-Höl,W}$, tal que

$$|\tilde{y}_k - y_k| \leq C' |\tilde{y}_0 - y_0|$$

Demonstração do Lema 3.2.9 a). Analogamente ao Lema de Davie 3.1.9, o fundamental é mostrarmos que a solução discreta y, está em $y \in \mathcal{C}^{1/p}(\mathcal{P})$. Pois, uma vez mostrado que $y \in \mathcal{C}^{1/p}(\mathcal{P})$, segue que

$$h := \delta[\delta x\phi \circ y + \mathbf{x}\phi \otimes D\phi \circ y] \in \mathcal{C}_3^{\gamma/p}(\mathcal{P}) \tag{3.2.5}$$

e portanto $N = \Lambda^{\mathcal{P}}(h) \in \mathcal{C}_2^{\gamma/p}(\mathcal{P})$. De concluímos que $|N_{mk}| \leq D\omega_{mk}^{\gamma/p}$. Logo, segue facilmente que $|y_l - y_k| \leq C\omega_{lk}^{1/p}$. Esta é a ideia da demonstração.

Tomamos

$$\varepsilon = \varepsilon\left(\gamma, p, \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}, B, T\right) > 0$$

tal que

$$c_{\gamma/p} B_1 \varepsilon^{\frac{\gamma-2}{p}} < B_2 \tag{3.2.6}$$

$$c_{\gamma/p} B_1 \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{p}} < B_3 \tag{3.2.7}$$

onde B_1 depende das constantes do problema (não depende de ε) e é tal que

$$\|h\|_{\mathcal{C}^{\gamma/p}(\mathcal{P}\cap[t_k,t_m])} \leq B_1 \text{ quando } \omega_{mk} < \varepsilon. \tag{3.2.8}$$

As outras constanstes são definidas por

$$\begin{aligned} c_{\gamma/p} &:= 2^{\gamma/p}\zeta\left(\frac{\gamma}{p}\right) \\ B_2 &:= B \|D\phi \otimes \phi\|_{\infty,W} \\ B_3 &:= B\left(\|\phi\|_{\infty,W} + T^{1/p}\|D\phi \otimes \phi\|_{\infty,W}\right). \end{aligned}$$

Notamos que as constantes, $c_{\gamma/p}$, B_2 e B_3 não dependem da partição. Quanto às ε e B_1 ficará claro ao longo da demonstração que elas também não dependem da partição.

Fixamos $m, k \in \mathcal{P}$ tais que $k \leq m$ e denotamos $\mathcal{P}_{mk} = \mathcal{P} \cap [t_k, t_m]$

Caso 1: $\omega_{mk} \leq \varepsilon$: Usando indução em $m - k$ mostraremos que $\|y\|_{1/p,\mathcal{P}_{mk}} \leq 2B_3$ e que $\|\delta y - \delta x \phi \circ y\|_{2/p,\mathcal{P}_{mk}} < 2B_2$. Denotamos por M o 2-incremento

$$M := \delta y - \delta x \phi \circ y.$$

Para $m - k = 1$. Pela definição de y_{k+1} (3.2.3) temos que

$$\begin{aligned} |M_{k+1,k}| &= |\delta y_{k+1,k} - \phi(y_k)\, \delta x_{k+1,k}| \\ &= |D\phi \otimes \phi(y_k)\, \mathbf{x}_{k+1,k}| \\ &\leq \|D\phi \otimes \phi\|_{\infty,W} \|\mathbf{x}\|_{2/p}\, \omega_{k+1,k}^{2/p} \\ &\leq B\|D\phi \otimes \phi\|_{\infty,W}\, \omega_{k+1,k}^{2/p} \\ &= B_2 \omega_{k+1,k}^{2/p} \\ &\leq 2B_2 \omega_{k+1,k}^{2/p}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, também pela definição de y_{k+1} (3.2.3), resulta que

$$\begin{aligned} |\delta y_{k+1,k}| &= \left|\phi\left(y_k\right)\delta x_{k+1,k} + D\phi\otimes\phi\left(y_k\right)\mathbf{x}_{k+1,k}\right| \\ &\leq B\left(\|\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{k+1,k}^{1/p} + \|D\phi\otimes\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{k+1,k}^{2/p}\right) \\ &= B\left(\|\phi\|_{\infty,W} + \|D\phi\otimes\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{k+1,k}^{1/p}\right)\omega_{k+1,k}^{1/p} \\ &\leq B\left(\|\phi\|_{\infty,W} + \|D\phi\otimes\phi\|_{\infty,W}\,T^{1/p}\right)\omega_{k+1,k}^{1/p} \\ &= B_3\omega_{k+1,k}^{1/p} \qquad (3.2.9) \\ &\leq 2B_3\omega_{k+1,k}^{1/p}. \end{aligned}$$

Terminando, assim, o passo inicial.

Faremos um breve comentário sobre como finalizar a indução. A hipótese de indução diz que se $l \in \mathcal{P}$ é tal que $k \leq l < m$ então valem as desigualdades $\|M\|_{2/p,\mathcal{P}_{lk}} \leq 2B_2$ e $\|y\|_{1/p,\mathcal{P}_{lk}} \leq 2B_3$. Para concluirmos o passo indutivo, usaremos a aplicação Λ discreta (Teorema 1.4.1) da seguinte maneira. Mostraremos que vale (3.2.8), portanto (existe Λ tal que) $\Lambda\left(h\right) = N$. Usando (3.2.8) e (1.4.2) temos que

$$\|N\|_{\gamma/p,\mathcal{P}_{mk}} \leq c_{\gamma/p}B_1.$$

Isto terminará a indução pois, para δy_{mk} temos que

$$\begin{aligned} |y_m - y_k| &= \left|N_{mk} + \phi\left(y_k\right)\left(x_m - x_k\right) + D\phi\otimes\phi\left(y_k\right)\mathbf{x}_{mk}\right| \\ &\leq |N_{mk}| + \left|\phi\left(y_k\right)\left(x_m - x_k\right) + D\phi\otimes\phi\left(y_k\right)\mathbf{x}_{mk}\right| \\ &\leq \|N\|_{\gamma/p,\mathcal{P}_{mk}}\,\omega_{mk}^{\gamma/p} + B_3\omega_{mk}^{1/p} \\ &\leq \left(c_{\gamma/p}B_1\omega_{kl}^{\frac{\gamma-1}{p}} + B_3\right)\omega_{mk}^{1/p} \\ &\leq \left(c_{\gamma/p}B_1\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{p}} + B_3\right)\omega_{mk}^{1/p} \\ &\leq \left(B_3 + B_3\right)\omega_{mk}^{1/p} \\ &= 2B_3\omega_{mk}^{1/p}, \end{aligned}$$

sendo que na última desigualdade usamos a definição de ε, ver desigualdade (3.2.7). Para

M_{mk} temos que

$$\begin{aligned} |M_{mk}| &= |N_{mk} + D\phi \otimes \phi(y_k)\,\mathbf{x}_{mk}| \\ &\leq |N_{mk}| + |D\phi \otimes \phi(y_k)\,\mathbf{x}_{mk}| \\ &\leq c_{\gamma/p} B_1 \omega_{mk}^{\gamma/p} + B_2 \omega_{mk}^{2/p} \\ &= \left(c_{\gamma/p} B_1 \omega_{mk}^{\frac{\gamma-2}{p}} + B_2 \right) \omega_{mk}^{2/p} \\ &\leq \left(c_{\gamma/p} B_1 \varepsilon^{\frac{\gamma-2}{p}} + B_2 \right) \omega_{mk}^{2/p} \\ &\leq (B_2 + B_2)\,\omega_{mk}^{2/p} \\ &= 2B_2 \omega_{mk}^{2/p}, \end{aligned}$$

sendo que na última desigualdade usamos a definição de ε, ver desigualdade (3.2.6).

Retomando, para concluirmos o passo indutivo, somente resta mostrar a desigualdade (3.2.8), pois pelos comentários acima, conclui-se que $\|M\|_{2/p,\mathcal{P}_{mk}} \leq 2B_2$ e que $\|y\|_{1/p,\mathcal{P}_{mk}} \leq 2B_3$. Lembrando que

$$h = \delta[\delta x \phi \circ y + \mathbf{x} D\phi \otimes \phi \circ y],$$

aplicando δ nos termos do colchete $[\cdots]$ resulta que

$$\begin{aligned} h &= -\delta x \delta\phi \circ y + \delta \mathbf{x} D\phi \otimes \phi \circ y - \mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y) \\ &= -\delta x \delta\phi \circ y + (\delta x \delta x)\, D\phi \otimes \phi \circ y - \mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y) \\ &= -\delta x\,(\delta\phi \circ y - \delta x D\phi \otimes \phi \circ y) - \mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y). \end{aligned}$$

Logo, para $k \leq l < m$, temos que

$$\begin{aligned} -h_{mlk} &= \left[(\delta\phi \circ y - \delta x D\phi \otimes \phi \circ y)_{lk}\right] \delta x_{ml} + \left[\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)\right]_{mlk} \\ &= \left[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi(y_k)\,(\phi(y_k)\,\delta x_{lk})\right] \delta x_{ml} + \left[\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)\right]_{mlk} \\ &= \left[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi(y_k)\,\delta y_{lk} - D\phi(y_k)\,(-\delta y_{lk} + \phi(y_k)\,\delta x_{lk})\right] \delta x_{ml} + \\ &\quad + \left[\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)\right]_{mlk}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade somamos e subtraimos $-D\phi(y_k)\,\delta y_{lk}$. Reagrupando os termos, e pela definição de M_{lk} segue da última igualdade

$$\begin{aligned} -h_{mlk} &= \left[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi(y_k)\,\delta y_{lk} - D\phi(y_k)\,(-M_{lk})\right] \delta x_{ml} + \left[\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)\right]_{mlk} \\ &= \left\{\left[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi(y_k)\,\delta y_{lk}\right] \delta x_{ml}\right\} + \left\{\left[D\phi(y_k)\,M_{lk}\right] \delta x_{ml}\right\} + \left\{\left[\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)\right]_{mlk}\right\}. \end{aligned}$$

Agora, para majorar h, é suficiente majorar cada um das parcelas $\{\cdots\}$ na soma acima.

Primeiramente vamos majorar $\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y)$. Aplicando o Lema 3.2.6 e usando as desigualdades $\|y\|_{1/p,\mathcal{P}_{lk}} \leq 2B_3$ e $\|\mathbf{x}\|_{2/p} \leq B$, temos que

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{x}\delta(D\phi \otimes \phi \circ y))_{mlk}| &= |[D\phi \otimes \phi\,(y_l) - D\phi \otimes \phi\,(y_k)]\,\mathbf{x}_{ml}| \\
&\leq c\left\{\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W} + \|\phi\|^2_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\right\}\left(|y_l - y_k|^{\gamma-2} + |y_l - y_k|\right)|\mathbf{x}_{ml}| \\
&= B_{1,1}\left(|y_l - y_k|^{\gamma-2} + |y_l - y_k|\right)|\mathbf{x}_{ml}| \\
&\leq B_{1,1}\left(\|y\|^{\gamma-2}_{1/p,\mathcal{P}_{lk}}\,\omega_{lk}^{\frac{\gamma-2}{p}} + \|y\|_{1/p,\mathcal{P}_{lk}}\,\omega_{lk}^{1/p}\right)\|\mathbf{x}\|_{2/p}\,\omega_{ml}^{2/p} \\
&\leq B_{1,1}\left((2B_3)^{\gamma-2} + 2B_3T^{\frac{3-\gamma}{p}}\right)B\omega_{lk}^{\frac{\gamma-2}{p}}\,\omega_{ml}^{2/p} \\
&= B_{1,2}\omega_{lk}^{\frac{\gamma-2}{p}}\,\omega_{ml}^{2/p} \\
&\leq B_{1,2}\omega_{mk}^{\gamma/p}
\end{aligned}$$

as constantes $B_{1,1}$ e $B_{1,2}$ são auxiliares e dependem apenas de $\gamma,\ p,\ T,\ B$ e $\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}$.

Agora vamos majorar $\{[D\phi\,(y_k)\,(M_{lk})]\,\delta x_{ml}\}$. Usando $\|M\|_{2/p,\mathcal{P}_{lk}} < 2B_2$ e $\|x\|_{1/p} \leq B$ temos que,

$$\begin{aligned}
|[D\phi\,(y_k)\,(M_{lk})]\,\delta x_{ml}| &\leq |D\phi\,(y_k)\,(M_{lk})|\,|\delta x_{ml}| \\
&\leq |D\phi\,(y_k)|\,|M_{lk}|\,|\delta x_{ml}| \\
&\leq \|D\phi\|_{\infty,W}\,2B_2\omega_{lk}^{2/p}B\omega_{ml}^{1/p} \\
&= 2BB_2\,\|D\phi\|_{\infty,W}\,\omega_{lk}^{2/p}\omega_{ml}^{1/p} \\
&\leq 2BB_2\,\|D\phi\|_{\infty,W}\,T^{\frac{3-\gamma}{p}}\omega_{km}^{\gamma/p} \\
&= B_{1,3}\omega_{km}^{\gamma/p}.
\end{aligned}$$

Agora vamos majorar $\{[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi\,(y_k)\,\delta y_{lk}]\,\delta x_{ml}\}$. Usando $\|y\|_{2/p,\mathcal{P}_{lk}} < 2B_3$, $\|x\|_{1/p} \leq B$ e o Lema 1.3.6 com $I = \mathcal{P}_{lk}$, $U_1 = W$, $U_2 = L\,(V,W)$ e $z = y$, temos que,

$$\begin{aligned}
|[\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi\,(y_k)\,\delta y_{lk}]\,\delta x_{ml}| &\leq |\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi\,(y_k)\,\delta y_{lk}|\,|\delta x_{ml}| \\
&\leq |\delta\phi \circ y_{lk} - D\phi\,(y_k)\,\delta y_{lk}|\,B\omega_{ml}^{1/p} \\
&\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,\|y\|^{\gamma-1}_{1/p,\mathcal{P}_{lk}}\,B\omega_{ml}^{1/p} \\
&\leq (2B_3)^{\gamma-1}\,B\,\|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,W}\,\omega_{lk}^{\frac{\gamma-1}{p}}\,\omega_{ml}^{1/p} \\
&= B_{1,4}\omega_{lk}^{\frac{\gamma-1}{p}}\,\omega_{ml}^{1/p} \\
&\leq B_{1,4}\omega_{mk}^{\gamma/p}.
\end{aligned}$$

Finalizando, podemos tomar $B_1 := 3\max\{B_{1,2}, B_{1,3}, B_{1,4}\}$ (dependendo apenas. Logo, concluimos que

$$|-h_{mlk}| \leq \left(\frac{B_1}{3} + \frac{B_1}{3} + \frac{B_1}{3}\right)\omega_{mk}^{\gamma/p},$$

ou seja,

$$\|h\|_{\gamma/p,\mathcal{P}_{mk}} \leq B_1$$

como queríamos. Logo podemos concluir a indução, como já comentamos eTerminando, assim, o passo indutivo e, então, este caso. Ou seja, terminamos a indução e este caso.

Caso 2: $\omega_{mk} > \varepsilon$: este caso é inteiramente análogo ao Lema de Davie quando $1 \leq p < \gamma \leq 2$. Da mesma maneira, mostramos que $|y_m - y_k| \leq \left(\frac{T}{\varepsilon} + 1\right) 2B_3\omega_{mk}^{1/p}$. Ou seja, mostramos que

$$|y_m - y_k| \leq C\,|\omega_{mk}|^{1/p}$$

com

$$C = \left(\frac{T}{\varepsilon} + 1\right) 2B_3.$$

Portanto

$$|N_{mk}| \leq D\,|\omega_{mk}|^{\gamma/p}$$

com D obtida da mesma maneira que B_1, apenas trocando $2B_3$ por C. □

Prova do Lema 3.2.9 b). É inteiramente análoga à demonstração do Lema 3.1.9 b). □

Prova do Teorema 3.2.7. É inteiramente análoga à demonstração do Teorema 3.1.6. □

Prova do Teorema 3.2.8. É inteiramente análoga à demonstração do Teorema 3.1.7. □

3.3 Comparação entre integrais e equações diferenciais

É comum na literatura de equações diferenciais ordinárias usar uma teoria de integração para definir e resolver as equações. Apesar de não ser muito usual, estas ideias também funcionam na direção oposta, ou seja, pode-se definir uma integral tendo em mãos uma teoria de soluções para equações diferenciais e resultados de regularidades da solução.

Os teoremas de existência e unicidade que já foram apresentados neste capítulo foram capazes de dar sentido à uma equação diferencial sem falar em integral. Vamos ver que a integral associada as equações diferenciais coincidem com a integral ao longo de path. Deste modo terminamos a comparação por completo entre as abordagens de M. Gubinelli e A. M. Davie, que até então não tinha sido feita diretamente.

Notamos que, a priori, existe uma discrepância entre o integrando corrigido (2.4.5) da Seção 2.4 e o integrando da solução da equação diferencial (3.2.2). A diferença está ligado aos domínios e contradomínios da ϕ, já que numa seção $\phi : V \to L(V, W)$ enquanto na outra $\phi : W \to L(V, W)$. Ficará claro adiante a relação entre os integrandos.

No final, vamos usar a continuidade da integral ao longo de caminhos para obter a dependência continua de x (no caso $1 \leq p < 2$) e de $(x, \mathbf{x})$ (no caso $2 \leq p < 3$). A demonstração apresentada aqui foi desenvolvida por nós e utiliza os resultados já demonstrados. Vale notar que pode-se melhorar a continuidade mostrada aqui. Por exemplo, M. Gubinelli [7], conclui a dependência Lipschitz diretamente da demonstração do teorema de unicidade da solução (tal conclusão é imediata devido ao fato de M. Gubinelli usar argumentos de ponto fixo na demonstração). Para a dependência diferenciável (em algum sentido) ver P. Fritz [6].

3.3.1 Integral de Riemann-Stieltjes via equações diferenciais ordinárias

A teoria clássica de equações diferenciais ordinárias fornece soluções para

$$dy = \phi(y)\, dx$$

sendo x um caminho Lipchitz e ϕ um campo Lipchitz. É possível recuperar a definição da Integral de Riemann–Stieltjes $\int_0^{\cdot} dx_r \phi(x_r)$ da seguinte maneira. Através do sistema de equações

$$\begin{aligned} dz_r &= dx_r \\ dy_r &= \phi(z_r)\, dx_r \\ (z_0, y_0) &= (x_0, 0) \end{aligned}$$

onde $x \in \mathcal{C}^1(I, V)$, $\phi \in C^{1-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$. Sabemos que existe uma única solução $(z, y) : I \to V \oplus W$. Como x é Lipchitz (logo tem variação limitada),

$$\begin{aligned} z_t &= x_0 + \int_0^t dx_t \\ &= x_t \end{aligned}$$

é a única solução para 1ª coordenada. Então

$$y_t = \int_0^t dx_r \phi(z_r) = \int_0^t dx_r \phi(x_r),$$

ou seja, podemos definir $\int_0^t dx_r \phi(x_r)$ como sendo solução de uma equação diferencial.

Este raciocínio funciona com soluções de equações diferenciais rough e integrais ao longo de rough path.

3.3.2 Integral ao longo de caminhos via equações diferenciais

Vamos recuperar $\int_0^{\cdot} d(x, \mathbf{x})_r \phi(x_r)$, via a solução do caso $2 \leq p < \gamma \leq 3$ no sentido de Definição 3.2.2. Este caso é um pouco diferente do anterior, pois como vamos precisar da derivada de ϕ, é necessário trabalhar com campos nos seguintes domínios e contradomínios $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}(V, L(V, W))$ (e não $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}(W, L(V, W))$). Como no caso Lipchitz, a integral aparece como projeção da solução de uma equação diferencial na 2ª coordenada. Mais precisamente, vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} dz_r = dx_r \\ dy_r = \phi(z_r)\, d(x, \mathbf{x})_r \\ (z_0, y_0) = (x_0, 0) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

e pretendemos mostrar que $y_t = \mathcal{J}(d(x, \mathbf{x})\, \phi(x_r))_{t0}$, ver eq. (2.4.5).

É fácil enquadrar este sistema na teoria da seção anterior. Para isso, fixe $\{e_a : a = 1, \ldots, m\}$, base de V, e considere o campo $\Phi : V \oplus W \to L(V, V \oplus W)$ dado por

$$\Phi(z, y)\, e_a := (e_a, \phi^a(z))$$

onde denotamos $\phi^a(z) = \phi(z)\, e_a$.Como $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}$ segue que $\Phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}$, munindo $V \oplus W$ com a norma do máximo. Assim a equação diferencial

$$d(z_r, y_r) = \Phi(z_r, y_r)\, dx_r, \ (z_0, y_0) = (x_0, 0) \tag{3.3.2}$$

é equivalente ao sistema (3.3.1) acima. Segue do Teorema 3.2.8 que existe uma única solução.

Agora devemos mostrar que a projeção na 2ª coordena, $r \longmapsto y_r$, da solução $r \longmapsto (z_r, y_r)$ é uma integral rough ao longo de $(x, \mathbf{x})$. Isto é, mostrar que vale $y_t = \lim_{|\mathcal{P}_{t0}| \to 0} \sum_i \phi(x_{t_i})\, \delta x_{t_{i+1} t_i} + D\phi(x_{t_i})\, \mathbf{x}_{t_{i+1} t_i}$.

Proposição 3.3.1. *Se* $2 \leq p < \gamma \leq 3$ *e* $\phi \in C_{loc}^{\gamma-H\ddot{o}l}(V, L(V,W))$. *Seja* y_t *(*2^a *coordenada da) solução do sistema (3.3.1). Então* y *satisfaz* $y_t = y_0 + \mathcal{J}(d(x,\mathbf{x})\phi(x))_{t0}$.

Demonstração. Como (z_r, y_r) é solução da equação (3.3.2), pela Definição 3.2.2, existe θ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe α tais que $\frac{\theta(\alpha)}{\alpha} < \varepsilon$. Segue de (3.2.2) que para toda partição $\mathcal{P}_{t0}=\{0 = t_0 < \cdots < t_K = t\}$ de $[0,t]$ tal que $|\mathcal{P}_{t0}| < \alpha$, vale

$$\begin{aligned} |\delta(z,y) - \delta x\Phi(z,y) - \mathbf{x}(D\Phi\otimes\Phi)(z,y)|_{k+1,k} &\leq \theta(t_{k+1}-t_k) \\ &< \varepsilon(t_{k+1}-t_k) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Notamos que

$$\delta(z,y)_{k+1,k} = (\delta z_{k+1,k}, \delta y_{k+1,k}). \tag{3.3.4}$$

Também temos que

$$\Phi(z,y)e_b = \left(e_b, \phi^b(z)\right) \tag{3.3.5}$$

de onde segue que

$$\Phi(z,y) = \begin{bmatrix} id_{V\to V} \\ \phi(z) \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

de onde segue que

$$D\Phi(z,y)e_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D\phi^a(z) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

Portanto, por (3.3.6) e (3.3.7) temos que

$$\begin{aligned} D\Phi(z,y)\otimes\Phi(z,y)e_a\otimes e_b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D\phi^a(z) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_b \\ \phi^b(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ D\phi^a(z)e_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ D\phi(z)e_a\otimes e_b \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Agora, substituindo (3.3.4), (3.3.5) e (3.3.8) em (3.3.3) obtemos que a 2ª coordenada de (3.3.3) satisfaz

$$|\delta y_{k+1,k} - \phi(z_k)\delta x_{k+1,k} - D\phi(z)\mathbf{x}_{k+1,k}| < \varepsilon(t_{k+1}-t_k).$$

Como $z = x$, basta somarmos em k na desigualdade anterior para obtermos

$$\left|\delta y_{t0} - \sum_k \left[\phi(x_k)\,\delta x_{k+1,k} + D\phi(x)\,\mathbf{x}_{k+1,k}\right]\right| \le \varepsilon t.$$

Portanto concluímos que

$$y_t - y_0 = y_t = \lim_{|\mathcal{P}_{t0}|\to 0} \sum_k \left[\phi(x_k)\,\delta x_{k+1,k} + D\phi(x)\,\mathbf{x}_{k+1,k}\right] = \mathcal{J}\left(dx\phi(x)\right)_{t0}.$$

□

Observação 3.3.2. *Recuperamos o integrador usual* $\phi(x_k)\,\delta x_{k+1,k} + D\phi(x)\,\mathbf{x}_{k+1,k}$, *o qual aparceu na Proposição 2.4.5 para definir a integral ao londo de* $(x, \mathbf{x})$.

O caso $1 \le p < \gamma \le 2$ é semelhante e mais simples. Outro motivo para não repetir as contas é a Proposição 3.1.4, onde provamos a relação entre a integral de Young e a definição de equação diferencial, ver Definição 3.1.2.

Agora vamos aos teoremas de dependência contínua da solução em relação ao integrador.

Teorema 3.3.3. *($1 \le p < \gamma < 2$). Sejam* $\phi \in C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}(W, L(V, W))$,$(x^n) \subset \mathcal{C}_{1,o}^{1/p}(I, V)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_{1/p} = 0$. *Denotamos por* $y^n \in \mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}(I, W)$ *a única solução de*

$$dy^n = \phi(y^n)\,dx^n.$$

Então existe $y \in \mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}(I, W)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|y^n - y\|_{1/p} = 0$$

e é (a única) solução de

$$dy = \phi(y)\,dx.$$

Demonstração. Para usarmos a continuidade da integral no sentido da Proposição 2.3.2, precisamos considerar a integral ao longo de $z^n = (x^n, y^n) \in \mathcal{C}_{1,(o,y_0)}^{1/p}(I, V \oplus W)$ para um campo adequado Φ. Definimos $\Phi : V \oplus W \to L(V \oplus W, W)$ por

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} \phi(y) & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\Phi(x, y)(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(y)\,\tilde{x}$. Logo $\Phi \in C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}$.

Primeiramente vamos provar que existe $y \in \mathcal{C}_{1,y_0}^{1/q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|y^n - y\|_{1/q} = 0$ $(p < q)$. Pelo Teorema 3.1.7, sabemos que a sequência $(y^{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$, definida pela relação de recorrência

$$y_{k+1}^{n,m} = y_k + \phi\left(y_k^{n,m}\right)\delta x_{k+1,k}^n$$

$(t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}_m)$, converge a y^n uniformemente sobre $\cup\mathcal{P}_m$, onde $(\mathcal{P}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de partições de I encaixadas. Aplicando o Lema de Davie 3.1.9 a) a $y^{n,m}$ com $E = \sup\|x^n\|_{1/p}$ segue que existe uma C (dependo de p, γ, $\|\phi\|_{\gamma-H\ddot{o}l}$, E e $\sup I$) tal que

$$\left|y_l^{n,m} - y_k^{n,m}\right| \leq C\left|t_l - t_k\right|^{1/p},$$

$(\forall t_l, t_k \in \mathcal{P}_m)$. Como $y^{n,m}$ converge a y^n uniformemente sobre $\cup\mathcal{P}_m$ segue da desigualdade anterior que

$$\left|y_l^n - y_k^n\right| \leq C\left|t_l - t_k\right|^{1/p},$$

$(\forall t_l, t_k \in \cup\mathcal{P}_m)$. Como $\overline{\cup\mathcal{P}_m} = I$ segue que

$$\left|y_t^n - y_s^n\right| \leq C\left|t - s\right|^{1/p},$$

$(\forall t, s \in I)$. Ou seja,

$$\|y^n\|_{1/p} \leq C.$$

Logo $\{y^n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto em $\mathcal{C}_{1,y_0}^{1/q}(I, W)$ $(q > p)$, ver Corolário 1.3.8. Logo existe $y \in \mathcal{C}_{1,y_0}^{1/q}(I, W)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|y^n - y\|_{1/q} = 0$.

Portanto temos que $\lim_{n\to\infty}\|z^n - z\|_{1/q} = 0$. Pela continuidade da aplicação $z \mapsto \mathcal{J}(dz\Phi(z)) \in \mathcal{C}^{\alpha\gamma/q}$ $(\frac{p}{\gamma} < \frac{q}{\gamma} < \alpha < 1)$, ver Proposição 2.3.2, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{J}(dz^n\Phi(z^n)) - \mathcal{J}(dz\Phi(z))\|_{\alpha\gamma/q} = 0. \tag{3.3.9}$$

Por outro lado, usando que y^n é solução de $dy^n = \phi(y^n)\,dx^n$ e das definições de Φ e z^n e das integrais (ao longo de rough path e Young) segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(dz^n\Phi(z^n)) &= (id - \Lambda\delta)(\delta z^n\Phi \circ z^n) \\
&= (id - \Lambda\delta)\left(\delta z^n\begin{bmatrix}\phi\circ y^n & 0\end{bmatrix}\right) \\
&= (id - \Lambda\delta)\left(\begin{bmatrix}\delta x^n \\ \delta y^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\circ y^n & 0\end{bmatrix}\right) \\
&= (id - \Lambda\delta)\left[\delta x^n\phi\circ y^n\right] \\
&= \mathcal{J}(dx^n\phi(y^n)) \qquad (3.3.10) \\
&= \delta y^n. \qquad (3.3.11)
\end{aligned}$$

Pelos mesmos motivos temos que

$$\mathcal{J}\left(dz\Phi\left(z\right)\right)=\mathcal{J}\left(dx\phi\left(y\right)\right) \tag{3.3.12}$$

Substituindo (3.3.10) e (3.3.12) no limite (3.3.9) resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\delta y^{n}-\mathcal{J}\left(dx\phi\left(y\right)\right)\right\|_{\mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/q}}=0. \tag{3.3.13}$$

Como a inclusão $\mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/q}\subset\mathcal{C}_2^{1/q}$ é contínua segue que

$$\left\|\cdot\right\|_{1/q}-\lim_{n\to\infty}\delta y^{n}=\mathcal{J}\left(dx\phi\left(y\right)\right).$$

Da unicidade do limite temos que

$$\delta y=\mathcal{J}\left(dx\phi\left(y\right)\right), \tag{3.3.14}$$

ou seja,

$$y_t=y_0+\mathcal{J}\left(dx\phi\left(y\right)\right)_{t0}$$

e isto implica que $y\in\mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}$, uma vez que $x\in\mathcal{C}^{1/p}$. Portanto provamos que y é solução de

$$dy=\phi\left(y\right)dx.$$

Finalizando, segue de (3.3.13) e (3.3.14) que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\|y^{n}-y\right\|_{\mathcal{C}_1^{\alpha\gamma/q}} &= \lim_{n\to\infty}\left\|\delta y^{n}-\delta y\right\|_{\mathcal{C}_2^{\alpha\gamma/q}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como a inclusão $\mathcal{C}_{1,y_0}^{\alpha\gamma/q}\subset\mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}$ é contínua, o teorema está demonstrado. □

Teorema 3.3.4. *($2\leq p<\gamma<3$). Sejam $\phi\in C_c^{\gamma-H\ddot{o}l}\left(W,L\left(V,W\right)\right)$, $\left(x^{n},\mathbf{x}^{n}\right),\left(x,\mathbf{x}\right)\in\Omega_{p,o}\left(I,V\right)$ tal que $\lim_{n\to\infty}d_p\left(\left(x^{n},\mathbf{x}^{n}\right),\left(x,\mathbf{x}\right)\right)=0$. Denotamos por $y^{n}\in\mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}\left(I,W\right)$ a única solução (no sentido da Definição 3.2.2) da equação*

$$\begin{aligned}dy^{n} &= \phi\left(y^{n}\right)dx^{n}.\\ y^{n}\left(0\right) &= y_0\end{aligned}$$

Então existe $y\in\mathcal{C}_{1,y_0}^{1/p}\left(I,W\right)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y^{n}-y\right\|_{1/p}=0$$

e é (a única) solução de

$$dy=\phi\left(y\right)dx.$$

Demonstração. Para usarmos a continuidade da integral no sentido da Proposição 2.4.5 é necessário, analogamente ao teorema anterior, considerar a seqüencia (a qual definiremos precisamente a seguir) $Z^n = ((x^n, \mathbf{x}^n), (y^n, \mathbf{y}^n))$. O primeiro problema é que a solução y^n é um caminho em W e não um p-rough path em W. Para contornar este problema basta estender o domínio da ϕ ao espaço $W \oplus W^{\otimes 2}$ da seguinte maneira. Definimos $\tilde{\phi} : W \oplus W^{\otimes 2} \to L(V, W \oplus W^{\otimes 2})$ por

$$\tilde{\phi}(w_1, w_2) = (\phi(w_1), w_1 \otimes \phi(w_1)).$$

Agora definimos $\mathbf{y}^n_{\cdot,s}$ como sendo a coordena em $W^{\otimes 2}$ da solução da equação

$$d\left(y^n, \mathbf{y}^n_{\cdot,s}\right) = \tilde{\phi}\left(y^n, \mathbf{y}^n_{\cdot,s}\right) dx^n$$

com condição inicial $(y^n_s, 0)$. Como a solução é única pelo Teorema 3.2.7, temos que $\mathbf{y}^n_{t,s}$ está bem definido para todo $t, s \in I$ e $\mathbf{y}^n \in \mathcal{C}_2^{2/p}(I, W^{\otimes 2})$. Também é fácil de verificar que $\delta \mathbf{y}^n = \delta y^n \delta y^n$. Logo construímos $(y^n, \mathbf{y}^n) \in \Omega_{p,\tilde{o}}(I, W)$, onde $\tilde{o} = (y_0, 0)$. Ainda mais, usando Lema de Davie 3.2.9 a) com $B = \sup_n \left\{ \|x^n\|_{1/p}, \|\mathbf{x}^n\|_{2/q} \right\}$ e o Corolário 1.3.8 e argumentando como no teorema anterior podemos extrair uma subsequência de $(y^n, \mathbf{y}^n)$ que converge a $(y, \mathbf{y}) \in \Omega_{q,o}(I, W)$ na métrica d_q $(q > p)$.

Como já mencionamos a idéia é considerar uma seqüencia Z^n de rough paths em $\Omega_{q,o}(I, V \oplus W)$.

Uma observação importante é que tendo em mãos os rough paths $(y^n, \mathbf{y}^n) \in \Omega_{q,o}(I, W)$ e $(x^n, \mathbf{x}^n) \in \Omega_{p,o}(I, V) \subset \Omega_{q,o}(I, V)$ não existe uma maneira canônica de construir um rough path em $Z^n \in \Omega_{q,o}(I, V \oplus W)$ de modo que as coordenadas de Z^n em $W \oplus W^{\otimes 2}$ sejam $(y^n, \mathbf{y}^n)$ e as coordenadas de Z^n em $V \oplus V^{\otimes 2}$ sejam $(x^n, \mathbf{x}^n)$. Isto se deve ao fato de que Z^n possui coordenadas cruzadas em $V \otimes W$ e em $W \otimes V$.

Deste modo resta definirmos Z^n em $V \otimes W$ e em $W \otimes V$. Estas componentes são interpretadas como as integrais cruzadas $\int y^n \otimes dx^n$ e $\int x^n \otimes dy^n$. Estas integrais podem ser definidas via o costureiro Λ da seguinte maneira. Notamos que como y^n é solução, isto é, satisfaz a desigualdade (3.2.2) segue do Teorema 3.2.8 que $\theta(\alpha) = M\alpha^{\gamma/p}$. Logo vale que

$$\delta y^n_{ts} = \phi(y^n_s)\, \delta x^n_{ts} + D\phi \otimes \phi(y^n_s)\, \mathbf{x}^n_{ts} + R^n_{ts}$$

onde

$$R_{ts} := \delta y^n_{ts} - \phi(y^n_s)\, \delta x^n_{ts} - D\phi \otimes \phi(y^n_s)\, \mathbf{x}^n_{ts}$$

e $R \in \mathcal{C}_2^{\gamma/p}$. Portando usando a expressão acima para δy^n, que $\|x^n\|_{1/p} < \infty$ e que$\|R\|_{2/p} \leq \|R\|_{\gamma/p} < \infty$ podemos mostrar que $\delta\left[y^n \delta x^n - \mathbf{x}^n \phi\left(y^n\right)\right]$ está no domínio do costureiro, logo podemos definir

$$\int_s^t y^n \otimes dx^n = (id - \Lambda\delta)\left[y^n \delta x^n - \mathbf{x}^n \phi\left(y^n\right)\right]_{ts} \in W \oplus V.$$

Agora, usando a expressão acima para δy^n e a linearidade de $\otimes$ temos que

$$\begin{aligned}
\left[\delta y^n x^n\right]_{ts} &= x_s^n \otimes \delta y_{ts}^n \\
&= x_s \otimes \phi\left(y_s^n\right) \delta x_{ts}^n + x_s \otimes \left[D\phi \otimes \phi\left(y_s^n\right) \mathbf{x}_{ts}^n\right] + x_s \otimes R_{ts}.
\end{aligned}$$

Portanto desta igualdade podemos concluir que $\delta\left[\delta y^n x^n\right]$ está no domínio de Λ, logo definimos

$$\int_s^t x^n \otimes dy^n = (id - \Lambda\delta)\left[\delta y^n x^n\right] \in V \oplus W.$$

Com estas definições, podemos considerar $Z^n \in \Omega_{q,o}(I, V \oplus W)$. Como no teorema anterior, definimos $\Phi : V \oplus W \oplus (V \oplus W)^{\otimes 2} \to L\left(V \oplus W \oplus (V \oplus W)^{\otimes 2}, W \oplus W^{\otimes 2}\right)$ de maneira adequada (i.e., para garantir que $\mathcal{J}\left(dZ^n \phi\left(Z^n\right)\right) = \left(\mathcal{J}\left(dx^n \phi\left(y^n\right)\right), \mathbf{y}^n\right) = \left(\delta y, \mathbf{y}^n\right)$) e usamos a continuidade de $\mathcal{J} : \Omega_{q,o}(I, V \oplus W) \to \mathcal{C}^{\alpha\gamma/q}\left(I, W \oplus W^{\otimes 2}\right)$ para o campo Φ para obtermos os resultados enunciados no teorema. $\square$

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES À ANÁLISE ESTOCÁSTICA

A teoria de probabilidade fornece exemplos concretos de caminhos não diferenciáveis para os quais a teoria de rough path se aplica. Durante esta seção comentaremos brevemente como aplicar a teoria dos rough paths às integrais de Itô e Stratonovich. Consequentemente, tendo em mãos a teoria de integração estocástica e a relação com a integração ao longo de caminhos, temos aplicações às equações diferenciais estocásticas via equações diferencias (do capítulo anterior).

4.1 Movimento Browniano Enhanced (Melhorado/Aprimorado)

Numa frase, o Movimento Browniano Enhanced é nada mais que o par $\left(B, \int\int dBdB\right)$ (integração estocástica) visto, caminho-a-caminho, como um $p-$rough path ($2 < p < 3$). Este objeto é a maneira natural de olharmos o movimento Browniano como um rough path. O método será descrito nesta seção.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade e seja $B = (B^1, \ldots, B^n)$ um movimento Browniano com valores em $V = \mathbb{R}^n$ (munido com o produto escalar euclidiano). É sabido que B tem trajetórias Hölder contínuas com expoente $\frac{1}{p}$ para todo $p > 2$, então podemos fixar $2 < p < 3$ e escolhermos uma versão de B tal que $B(\omega) \in \mathcal{C}^{1/p}(I, V)$, $\forall \omega \in \Omega$, onde I é um intervalo limitado. Podemos obter $\mathbf{x}$ através de integração estocástica:

$$\mathbf{x}^{ba}_{It\hat{o},ts} = \int_s^t dB^b_r \left(B^a_r - B^a_s\right)$$

onde a integração é entendida no sentido de Itô com respeito a filtração natural $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s; s \le t)$. Das propriedades da integral de Itô, temos

$$\mathbf{x}^{ba}_{It\hat{o},ts} - \mathbf{x}^{ba}_{It\hat{o},us} - \mathbf{x}^{ba}_{It\hat{o},tu} = \left(B^b_t - B^b_u\right)\left(B^a_u - B^a_s\right)$$

o que significa

$$\delta \mathbf{x}_{It\hat{o}} = \delta B \delta B.$$

Para podermos aplicar a teoria de rough path ao longo do par $\mathbf{B}_{It\hat{o}} := (B, \mathbf{x}_{It\hat{o}})$ resta mostrarmos que $\mathbf{x}(\omega) \in \mathcal{C}^{2/p}\left(I, V^{\otimes 2}\right)$, $\forall \omega \in \Omega$. Este é um resultado clássico que pode ser encontrado em D. Strook [19] e sua demonstração baseia-se no Lema de Garsia, Rodemich e Rumsey.

Também podemos introduzir

$$\mathbf{x}^{ab}_{Strat,ts} = \int_s^t \circ dB^b_r \left(B^a_r - B^a_s\right)$$

(integral de Stratonovich). Por resultados conhecidos das integrais estocásticas temos

$$\mathbf{x}^{ab}_{Strat,ts} = \mathbf{x}^{ab}_{It\hat{o},ts} + g^{ab}_{ts} \tag{4.1.1}$$

onde

$$g^{ab}_t = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & \text{se} \quad a = b \\ 0, & \text{se} \quad a \neq b \end{cases}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta\left(\mathbf{x}^{ab}_{Strat}\right)_{tus} &= \delta\left(\mathbf{x}^{ab}_{It\hat{o}}\right)_{tus} + 0 \\ &= \delta B^a_{tu} \delta B^b_{us}. \end{aligned}$$

É claro que também podemos escolher uma versão contínua de $\mathbf{x}_{Strat}$ que pertence a $\mathcal{C}^{2/p}_2$ $(2 < p < 3)$ e satisfaz $\delta \mathbf{x}_{Strat} = \delta B \delta B$. Desta forma, uma vez escolhido $p \in (2,3)$, $\mathbf{B}_{Strat} = (B, \mathbf{x}_{Strat})$ é um $p-$rough path.

Definição 4.1.1. *A versão contínua do par $\mathbf{B}_{It\hat{o}}$ ou do par $\mathbf{B}_{Strat}$ é denominada de movimento Browniano enhanced.*

Observação 4.1.2. *O movimento Browniano não é o único exemplo de processo estocástico que fornece, de maneira natural, um $p-$rough path ($2 < p < 3$). Por exemplo, é sabido que martingales e o movimento Browniano fracionário com expoente $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ cada um têm versão $p-$Hölder, para algum $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.*

Observação 4.1.3. *O adjetivo "enhanced" é usual na literatura e é utilizado, em geral, para qualquer rough path induzido (de maneira natural) dos processos estocásticos. Por exemplo, processos gaussianos enhanced, martingales enhanced, movimento Browniano enhanced, ...*

4.2 Integrais Estocásticas

A conexão entre as integrais estocásticas (de Itô e de Stratonovich) e as integrais ao longo dos p-rough paths ($2 \leq p < 3$) $\mathbf{B}_{It\hat{o}}$ e $\mathbf{B}_{Strat}$ é a seguinte.

Teorema 4.2.1. *Seja $\phi = (\phi_b^a)_{a,b=1,\ldots,\dim V} \in C_c^{(\gamma-1)-H\ddot{o}l}(V, L(V,V))$ ($2 \leq p < \gamma \leq 3$). Então a integral estocástica de Itô*

$$\int_s^t dB_r^b \phi_b^a (B_r)$$

possui uma versão contínua igual a

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B)\right)$$

q.t.p. (integral ao longo de $\mathbf{B}_{It\hat{o}}(\omega)$ no sentido rough, ver Proposição 2.4.5).

Analogamente, a integral estocástica de Stratonovich

$$\int_s^t \circ dB_r^b \phi_b^a (B_r)$$

possui uma versão contínua igual a

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B)\right).$$

A seguinte relação é verdadeira

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B)\right) = \mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B)\right) + \frac{\tilde{g}^{bc}}{2} \int_s^t \partial_c \phi_b^a (B_r)\, dr, \tag{4.2.1}$$

onde $\tilde{g}^{bc} = \begin{cases} 1 & se \quad b = c \\ 0, & se \quad b \neq c \end{cases}$.

Demonstração. Lembramos que a integral de Itô, $\int_s^t dB_r^b \phi_b^a (B_r)$ é o limite em probabilidade das somas discretas

$$S_{\mathcal{P}}^a = \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi_b^a (B_{t_i}) \left(B_{t_{i+1}}^b - B_{t_i}^b \right),$$

onde $\mathcal{P}$ partição de I. Enquanto $\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B)\right)$ é o limite clássico quando $|\mathcal{P}|$ tende a 0 de

$$\tilde{S}_{\mathcal{P}}^a = \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi_b^a (B_{t_i}) \left(B_{t_{i+1}}^b - B_{t_i}^b \right) + \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a \, \mathbf{x}_{It\hat{o};t_{i+1},t_i}^{bc}.$$

Então é suficiente mostrar o limite em probabilidade

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\text{-} \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} R_{\mathcal{P}}^a &= \mathbb{P}\text{-} \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a \, \mathbf{x}_{It\hat{o};t_{i+1},t_i}^{bc} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $D\phi$ é limitado, é suficiente mostrar que $L^2 - \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} R_{\mathcal{P}}^a = 0$. Usando que $R_{\mathcal{P}}^a$ é um martingale discreto, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |R_{\mathcal{P}}|^2 &= \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \mathbb{E} \left| \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a \, \mathbf{x}_{It\hat{o};t_{i+1},t_i}^{bc} \right|^2 \\ &\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,V} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \mathbb{E} \left| \mathbf{x}_{It\hat{o};t_{i+1},t_i}^{bc} \right|^2 \\ &= \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,V} \, \mathbb{E} \left| \mathbf{x}_{It\hat{o};T,0}^{bc} \right|^2 \sum_{t_i \in \mathcal{P}} |t_{i+1} - t_i|^2 \\ &\leq \|\phi\|_{(\gamma-1)-H\ddot{o}l,V} \, \mathbb{E} \left| \mathbf{x}_{It\hat{o};T,0}^{bc} \right|^2 |\mathcal{P}| \, |t - s| . \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \mathbb{E} |R_{\mathcal{P}}|^2 = 0.$$

Portanto mostramos que a integral de Itô e a integral ao longo do rough path $\mathbf{B}_{It\hat{o}}$ coincidem, ou seja, vale q.t.p.

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B)\right) = \int_s^t dB_r^b \phi_b^a (B_r),$$

onde o lado direito é a integral de Itô. Agora, a integral $\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B)\right)$ que é o limite clássico das somas

$$\bar{S}_{\mathcal{P}} = \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi_b^a (B_{t_i}) \left(B_{t_{i+1}}^b - B_{t_i}^b \right) + \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a \, \mathbf{x}_{Strat;t_{i+1},t_i}^{bc},$$

usando a relação (4.1.1) e que $g_{ts}^{bc} = \frac{\tilde{g}^{bc}}{2}(t-s)$ segue que $\bar{S}_{\mathcal{P}}$ é igual a

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\mathcal{P}} &= \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \phi_b^a (B_{t_i}) \left(B_{t_{i+1}}^b - B_{t_i}^b \right) + \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a \mathbf{x}_{It\hat{o};t_{i+1},t_i}^{bc} + \frac{\tilde{g}^{bc}}{2} \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a (t_{i+1} - t_i) \\
&= \tilde{S}_{\mathcal{P}} + \frac{\tilde{g}^{bc}}{2} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} \partial_c \phi (B_{t_i})_b^a (t_{i+1} - t_i) .
\end{aligned}$$

Portanto fazendo $|\mathcal{P}| \to 0$, segue que

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B) \right)_{ts} = \mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B) \right)_{ts} + \frac{\tilde{g}^{bc}}{2} \int_s^t \partial_c \phi_b^a (B_r) \, dr.$$

Já provamos que $\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{It\hat{o}}^b \phi_b^a (B) \right)_{ts} = \int_s^t dB_r^b \phi_b^a (B_r)$. Portanto

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B) \right)_{ts} = \int_s^t dB_r^b \phi_b^a (B_r) + \frac{\tilde{g}^{bc}}{2} \int_s^t \partial_c \phi_b^a (B_r) \, dr.$$

Pela relação entre integral de Itô e integral de Stratonovich, sabemos que o lado direto é igual a $\int_s^t \circ dB_r^b \phi_b^a (B_r)$, ou seja, provamos que

$$\mathcal{J}\left(d\mathbf{B}_{Strat}^b \phi_b^a (B) \right)_{ts} = \int_s^t \circ dB_r^b \phi_b^a (B_r) .$$

$\square$

Concluímos esta seção observando que o teorema acima nos fornece uma interpretação e definição caminho a caminho para estas integrais estocásticas. No entanto, caminho a caminho do movimento Browniano enhanced $\mathbf{B}_{Strat}$ ou $\mathbf{B}_{It\hat{o}}$, e não caminho a caminho do movimento Browniano B.

Uma vez que as integrais coincidem temos, de graça, os teoremas de existência e unicidade (caminho a caminho) para equações diferenciais estocásticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T.S.: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2 edn. Springer (1988)

[2] Chen, K.T.: Integration of paths, geometric invariants and a generalized baker - hausdorff formula. Ann. of Math. **65**(2), 163–178 (1957)

[3] Chen, K.T.: Integration of paths - a faithful representation of paths by non-commutative formal power series. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 395–407 (1958)

[4] Chen, K.T.: Algebras of iterated path integrals and fundamental groups. Trans. Amer. Math. Soc. **156**, 359–379 (1971)

[5] Davie, A.M.: Differential equations driven by rough paths: An approach via discrete approximation. Appl. Math. Res. eXpress **2007** (2008). Art. ID abm009

[6] Friz, P., Victoir, N.: Differential Equations and Rough Path Theory. Cambridge University Press (2009). URL `http://www.statslab.cam.ac.uk/~peter/RoughPathsBook/`. To appear

[7] Gubinelli, M.: Controlling rough paths. J. Func. Anal. **216**(1), 86–140 (2004)

[8] Gubinelli, M.: Ramification of rough paths (2006). URL `http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0610300`

[9] Gubinelli, M.: Rooted trees for 3d navier-stokes equation. Dyn. Partial Differ. Equ. **3**, 161–172 (2006). URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math-ph/0511041

[10] Gubinelli, M.: Rough solutions for the periodic korteweg-de vries equation (2006). URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0610006

[11] Gubinelli, M.: Abstract integration, combinatorics of trees and differential equations (2008). URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0809.1821

[12] Gubinelli, M., Lejay, A.: Global existence for rough differential equations under linear growth conditions (2009). URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0905.2399

[13] Gubinelli, M., Tinde, S.: Rough evolution equations (2008). URL http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0803.0552

[14] Lejay, A., Gubinelli, M., Tindel, S.: Young integrals and spdes. Pot. Anal. **25**, 307–326 (2006)

[15] Lyons, T.: Differential equations driven by rough signals. Rev. Mat. Iberoamericana **14**(2), 215–310 (1998)

[16] Lyons, T., Caruana, M., Lévy, T.: Differential Equations Driven by Rough Paths, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1908. Springer-Verlag (2007)

[17] Lyons, T., Qian, Z.: System Control and Rough Paths. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press (2002)

[18] Ryan, R.A.: Introduction to Tensor Products of Banach Spaces. Springer (2002)

[19] Stroock, D.W.: Probability Theory, an Analytic View, rev. edn. Cambridge University Press (1999)

[20] Young, L.C.: An inequality of holder type, connected with stielties integration. Acta Math. **67**, 251–282 (1936)