Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Métricas de Einstein e estruturas Hermitianas invariantes em variedades bandeira

por

Neiton Pereira da Silva[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros Co-Orientador: Prof. Dr. Nir Cohen

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Métricas de Einstein e estruturas Hermitianas invariantes em variedades bandeira

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Neiton Pereira da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de outubro de 2009.

Prof. Dr. Caio J. C. Negreiros

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Nir Cohen

Co-Orientador

Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros

Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San

Martin

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Prof. Dr. Xia Changyu

Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino

da Silva

Tese apresentada ao Instituto de

Matemática. Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em

 ${\bf Matem\'atica}.$

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Silva, Neiton Pereira da

Si38m Métricas de Einstein e estruturas hermitianas invariantes em variedades bandeira/Neiton Pereira da Silva -- Campinas, [S.P.: s.n.], 2009.

> Orientadores: Caio José Colleti Negreiros; Nir Cohen Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

> 1. Einstein, Variedades de. 2. Variedades complexas. 3. Lie, Grupos semi-simples. 4. Espaços homogêneos . I. Negreiros, Caio José Colleti. II. Cohen, Nir. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Einstein metrics and invariant Hermitian structures on flag manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Einstein manifolds. 2. Complex manifolds. 3. Semisimple Lie groups. 4. Homogeneous spaces.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros (IMECC - UNICAMP)

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC UNICAMP)

Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC – UNICAMP)

Prof. Dr. Xia Changyu (UnB) Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva (IME - USP)

Data da defesa: 30/10/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 30 de outubro de 2009 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

bais Josep Degran
Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS
Jun A. B. Jan Dearter
Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN
Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO
Via Changyn
Prof(a). Dr(a). XIA CHANGYU
Mh Mh alm so u.
Prof(a). Dr(a). MARCOS MARTINS ALEXANDRINO DA SILVA

Aos meus pais, Romilda (em memória) e Albino e à minha esposa, Rosana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado esta oportunidade e me guiado durante todo o meu doutoramento.

Aos meus orientadores e amigos, Caio e Nir, por toda ajuda que me concederam, pelas idéias, correções, paciência, amizade, os valiosos conselhos... Obrigado.

Aos meus pais, Romilda (em memória) e Albino, por tudo que fizeram por mim e pelo apoio que sempre me deram em todas as etapas de minha vida.

À minha esposa Rosana, pelo amor, companherismo e dedicação. Sou grato também aos seus pais.

Aos meus irmãos Fábio e Sandra e aos meus familiares Vera, Lourdes, Carol e Juliana, pelo incentivo.

Aos amigos Alan, Ariosvaldo, Carlinhos, Carolina, Edward, Evandro, Fábio, Germano, José Antônio, Josué, Juan, Leonardo, Lino, Luciana, Rafael, Ricardo, Tiago, Weber e Ximena. Em especial aos amigos e conterrâneos Marcelo e Vinícius cujas amizades eu prezo desde os tempos de graduação.

Aos professores do IMECC/UNICAMP, da FAMAT/UFU e da UnB, em especial aos professores Luíz San Martin, Pedro Catuogno, Geraldo Botelho e Xia Changyu.

Aos membros da banca examinadora da minha tese de doutorado, pelos comentários e sugestões.

Aos funcionários do IMECC, em especial Cidinha, Edinaldo, Fátima e Tânia.

Ao CNPq pelo imprescindível apoio financeiro.

"Todo conhecimento inicia-se na imaginação, no sonho; só depois desce à realidade material e terrena por meio da lógica."

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho encontramos todas as métricas de Einstein invariantes em quatro famílias de variedades bandeira do tipo B_l e C_l . Os nossos resultados são consistentes com a conjectura de Wang e Ziller sobre a finitude das métricas de Einstein. O nosso método para resolver as equações de Einstein é baseado nas simetrias do sistema algébrico.

Obtemos os sistemas algébricos de Einstein para variedades bandeira generalizadas do tipo B_l , C_l e G_2 . Estes sistemas são as condições necessárias e suficientes para métricas invariantes nessas variedades serem Einstein.

Os sistemas algébricos que obtivemos generalizam as equações de Einstein obtidas por Sakane nos casos maximais. As equações nos casos A_l e D_l foram obtidas por Arvanitoyeorgos.

Calculamos o conjunto das t-raízes para as variedades bandeira generalizadas dos grupos de Lie clássicos. Assim estendemos à essas variedades certos resultados sobre estruturas Hermitianas invariantes obtidos por San Martin, Cohen e Negreiros.

ABSTRACT

In this work we find all the invariant Einstein metrics on four families of flag manifolds of type B_l and C_l . Our results are consistent with the finiteness conjecture of Einstein metrics proposed by Wang and Ziller. Our approach for solving the Einstein equations is based on the symmetries of the algebraic system.

We obtain the Einstein algebraic systems for the generalized flag manifolds of type B_l , C_l and G_2 . These systems are necessary and sufficient conditions for invariant metrics on these manifolds to be Einstein.

The algebraic systems that we obtained generalize the Einstein equations obtained by Sakane in the maximal cases. The equations in the cases A_l and D_l were obtained by Arvanitoyeorgos.

We calculate all the t-roots on the generalized flag manifolds of the classical Lie groups. Thus we extend to these manifolds certain results on invariant structures Hermitian obtained by San Martin, Cohen and Negreiros.

In	introdução			
1	Variedades Bandeira			
	1.1	Variedade Riemannianas Homogêneas	5	
	1.2	Variedades Bandeira Generalizadas	6	
	1.3	O Espaço Tangente	9	
	1.4	Variedades Bandeira Generalizadas e grafos de Dinkyn pintados	11	
2	Sub	omódulos irredutíveis	15	
	2.1	T-Raízes	15	
	2.2	Decomposição do espaço tangente	18	
3	Tensores Invariantes em Variedades Bandeiras			
	3.1	Métricas Invariantes	23	
	3.2	Estruturas quase Complexas	25	
	3.3	A forma de Kähler	29	
	3.4	Uma condição necessária para estruturas serem $(1,2)$ -simpléticas	33	
	3.5	O Tensor de Ricci	36	
	3.6	A métrica Kähler-Einstein	38	
	3.7	A métrica normal	39	

SUMÁRIO xvi

4	Equ	ações de Einstein em várias classes de variedades bandeira	41
	4.1	O caso A_l	42
	4.2	O caso B_l	45
	4.3	O caso C_l	55
	4.4	O caso D_l	59
	4.5	O caso G_2	61
J	3 . T		
5	Nov	vas métricas de Einstein	65
	5.1	Variedades bandeira com poucos somandos isotrópicos	65
	5.2	Novas soluções	71
	5.3	Métricas de Einstein e as dimensões dos somandos isotrópicos	77
	5.4	Correspondência entre estruturas de variedades bandeira maximais e general-	
		izadas	82
6	Est	ruturas invariantes (1,1)-simpléticas	87
	6.1	f-Estruturas Invariantes	88
	6.2	Estruturas $(1,1)$ -simpléticas	90
7	Αpέ	èndice	103

INTRODUÇÃO

Uma variedade bandeira é um espaço homogêneo G/K onde G é um grupo de Lie semisimples e compacto e K o centralizador de um toro em G. Esses espaços homogêneos são compactos, simplesmente conexos e admitem uma estrutura Kähler.

As variedades bandeiras também são conhecidas como espaços C-Kählerianos. O estudo desses espaços tem importantes aplicações em física, conforme mencionado em [13].

Existem diversos trabalhos sobre o estudo da geometria das variedades bandeira. Este trabalho discute quais dentre as infinitas estrutura Hermitianas invariantes aquelas que originam métricas de Einstein nesses espaços.

Dada uma variedade Riemanniana (M, g), dizemos que g é Einstein se é proporcional ao tensor de Ricci, isto é, Ric(g) = cg, onde c é uma constante chamada constante de Einstein.

O problema de descrever métricas invariantes Einstein sobre espaços homogêneos apresenta grandes interesses do ponto de vista geométrico, bem como aplicações físicas, conforme mencionado em [11] ou [3]. Ainda existem vários problemas em aberto sobre a existência e classificação das métricas de Einstein homogêneas.

Wang e Ziller em [36], construíram exemplos de espaços homogêneos compactos e simplesmente conexos que não admitem nenhuma métrica de Einstein invariante. Nesse contexto, as variedades bandeira são espaços homogêneos privilegiados pois elas admitem uma métrica invariante Kähler-Einstein, veja Teorema 3.6.1.

Um problema básico que ainda está em aberto é a seguinte conjectura da finitude, proposta por Wang e Ziller, [38]:

Conjectura 0.0.1. Se G/H é um espaço homogêneo cuja representação isotrópica consiste de somandos irredutíveis e inequivalentes dois a dois, então G/H admite, a menos homotetias, apenas um número finito de métricas de Einstein invariantes.

Alguns trabalhos como [6], [32], [20] e [26] apresentam resultados consistentes com essa conjectura para certas famílias de variedades bandeira.

Nesse trabalho classificamos as variedades bandeira dos grupos dos Lie clássicos com até quatro somandos isotrópicos e provamos que essa conjectura é verdadeira para quatro famílias de variedades bandeira. Com o uso da teoria de Lie, as equações de Einstein se reduzem a um sistema algébrico. Resolvendo este sistema encontramos explicitamente todas as métricas de Einstein, a menos de homotetias, nessas variedades bandeira.

Além disso usando teoria de Lie calculamos o sistema algébrico de Einstein para todas as famílias de variedades bandeira do tipo B_l e C_l . Essas equações generalizam as equações dadas em [26] e complementam os trabalhos [1] e [6]. O sistema algébrico de Einstein para a variedade bandeira máximal do tipo G_2 também foi computado nesse trabalho.

Os principais resultados desse trabalho são (veja os Teoremas 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3):

Teorema A: As variedades bandeira $\frac{SO(2n+1)}{U(m)\times SO(2t+1)}$, com n=m+t, m>1 e $t\neq 1$, admitem exatamente, a menos de homotetia, duas métricas invariante Einstein.

Teorema B: As variedades bandeira $\frac{Sp(n)}{U(m)\times Sp(t)}$ com $n=m+t,\ m\geq 1$ e $t\geq 3$ admitem exatamente, a menos de homotetia, duas métricas invariante Einstein.

Teorema C: As variedades bandeira $\frac{SO(2n+1)}{U(1)^2 \times SO(2n-3)}$, $n \geq 5$, admitem exatamente, a menos de homotetias, oito métricas de Einstein invariantes.

Os Teoremas A), B) e uma versão mais fraca do Teorema C (Teorema C' abaixo) juntamente com o esboço de suas demonstrações, foram apresentados pelo autor em Córdoba em agosto de 2008, [34].

Teorema C': As variedades bandeira $\frac{SO(2n+1)}{U(1)^2 \times SO(2n-3)}$, $n \geq 5$, admitem, a menos de homotetias, pelo menos duas métricas de Einstein invariantes não-Kähler.

Independentemente, Arvanitoyeorgos e Chrysikos obtiveram os Teoremas A) e B) em 2008, [9].

Continuando o estudo das métrica de Einstein invariante em variedades bandeira com até quatro somandos isotrópicos, obtivemos em 2008 o seguinte resultado.

Teorema D: As variedades bandeira $\frac{Sp(n)}{U(m)\times U(m)}$, n=2m, admitem exatamente, a menos

de escalar, duas métrica invariante Einstein não-Kähler. (Veja Teorema 5.2.4.)

Esse resultado foi obtido independentemente em abril de 2009 em [10].

Um dos ingredientes essenciais para descrever tensores invariantes sobre variedades bandeira é o uso de t-raízes, afim de decompor o espaço tangente na origem em submódulos irredútiveis e inequivalente da representação adjunta.

Nesse trabalho exibimos o conjunto das t-raízes de todas as variedades bandeira dos grupos de Lie clássicos. Observamos que em geral esse conjunto não é sistema de raízes no sentido clássico. Entretanto obtivemos uma propriedade geral do conjunto das t-raízes, isto é, toda t-raíz pertence a alguma tripla soma zero. Com isso caracterizamos todos os conjuntos de quatro e seis t-raízes (contando as t-raízes positivas e negativas) associados a variedades bandeira do grupos de Lie clássicos ou excepcionais.

Métricas de Einstein podem ser analisadas dentro da teoria geral de estruturas quase Hermitianas. Com base nos trabalhos [28] e [35], Santos [23] conjecturou que as métricas de Einstein invariantes sobre as variedades bandeira maximal do tipo A_l pertencem a apenas duas classes Hermitianas: Kähler ou $W_1 \oplus W_3$.

Nesse trabalho, com base em [28] e [35], obtemos como consequência do uso das t-raízes o seguinte resultado:

Teorema E: As classes de estruturas quase hermitianas invariante sobre variedades bandeira maximal do tipo A_l são as mesmas das variedades bandeira generalizadas do tipo A_l . O mesmo ocorre para as variedades bandeira do tipo C_l .

Este trabalho esta organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos a construção das variedades bandeira como espaços homogêneos, que denotaremos por $\mathbb{F} = G/K$, e a classificação desses espaços por diagramas de Dynkin pintados. Também apresentamos conceitos e resultados básicos sobre a representação adjunta (ou equivalentemente isotrópica) correspondente as variedades bandeira. Esta representação é um homomorfismo de algébras de Lie $ad: \mathfrak{k} \to gl(T_o\mathbb{F})$, onde \mathfrak{k} é a álgebra de Lie de K.

No capítulo 2, apresentamos em detalhes a definição de t-raízes e como elas são usadas para obtermos uma decomposição do espaço tangente em somandos isotrópicos irredutíveis e inequivalentes dois a dois, com base em [33] e [8]. Os somandos isotrópicos são subespaços $\mathfrak{m}_i \subset T_o\mathbb{F}$ do espaço tangente que satisfazem $ad(\mathfrak{k})(\mathfrak{m}_i) \subset \mathfrak{m}_i$.

No capítulo 3, caracterizamos as principais estruturas invariantes sobre variedades bandeira, com o uso de t-raízes. Muitas dessas caracterizações são bem conhecidas, como por exemplo métricas invariantes. Nesse capítulo, apresentamos um estudo das estruturas invariantes (1,2)-simpléticas em termos de t-raízes.

No capítulo 4, obtivemos as equações de Einstein para as variedades bandeira do tipo B_l , C_l e G_2 , usando a teoria de Lie e as expressões do tensor de Ricci dadas em [6] e [26]. Além disso, apresentamos as equações de Einstein para as variedades bandeira do tipo A_l e D_l obtidas em [6].

No capítulo 5, apresentamos explicitamente todas as métricas de Einstein em quatro famílias de variedades bandeira (teoremas A,B,C e D acima). Também classificamos as variedades bandeira dos grupos de Lie clássicos de acordo com o número de somandos isotrópicos irredutíveis e inequivalentes no espaço tangente. Este número determina a quantidade de parâmetros de qualquer tensor invariante sobre esses espaços.

Neste capítulo, usamos a expressão da curvatura escalar dada em [36] e o método dos múltiplicadores de Lagrange. Assim obtivemos uma ligação entre a dimensão dos somandos isotrópicos e os parâmetros de uma métrica de Einstein invariante nas variedades bandeira. Com esse método também concluímos que toda t-raíz pertence a alguma tripla soma zero.

Também apresentamos bijeções entre estruturas invariantes de variedades bandeira maximais e generalizadas do tipo A_l e C_l .

No capítulo 6, mostramos que o critério da propriedade (1,1)-simplética, obtida em [14], estende-se às de t-raízes. Este critério é dado em termos de uma propriedade combinatórica de um grafo de interseção associado com o sistema dado de raízes (resp. t-raízes).

Mostramos que a construção desses grafos para t-raízes é muito simples em várias variedades bandeira generalizadas. Assim estendendo esse critério combinatório às t-raízes, obtivemos vários exemplos em diferentes classes de variedades bandeira generalizadas.

CAPÍTULO 1

VARIEDADES BANDEIRA

Variedades bandeira são espaços homogêneos redutivos cuja estrutura e classificação se derivam da teoria geral de álgebras (e grupos) de Lie simples, veja [18], [1] ou [5]. Dentre elas, as maximais são analisadas em termos de sistemas de raízes e diagramas de Dynkin usuais, enquanto as parciais necessitam da extensão para sistemas de t-raízes e diagramas de Dynkin pintados, [1] ou [5].

1.1 Variedade Riemannianas Homogêneas

Uma variedade Riemanniana M é homogênea se as propriedades geométricas que ocorrem em um ponto de M ocorrem em todos os pontos. Mais precisamente temos:

Definição 1.1.1. Uma variedade Riemanniana (M,g) é homogênea se seu grupo de isometrias I(M,g) age transitivamente, isto é, para cada $p,q \in M$, existe uma isometria f tal que f(p) = q.

O próximo resultado é o bem conhecido.

Teorema 1.1.2. (Myers-Steenrod) O grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana é um grupo de Lie.

Portanto uma variedade Riemanniana homogênea é difeomorfa ao espaço quociente G/K

onde G é um grupo de Lie e K é o subgrupo de isometrias em um ponto, veja por exemplo ([39], teorema 3.62).

Quando um grupo de Lie G age transitivamente em uma variedade M, uma métrica em M é dita G-invariante se para cada $x \in G$, o difeomorfismo $p \mapsto x \cdot p$ $(p \in M)$, é uma isometria.

Consideramos agora M = G/K uma variedade homogênea. Denotamos por \mathfrak{g} e \mathfrak{k} a álgebra de Lie de G e K respectivamente. Tomamos a representação adjunta de G (resp. de \mathfrak{g}), $Ad: G \to GL(\mathfrak{g})$, (resp. $ad: \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$). Um espaço homogêneo G/K é dito redutívo se existe um subespaço \mathfrak{m} , $Ad_G(K)$ -invariante tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.

Como $Ad_G(K)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$, temos que $[\mathfrak{k},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Como veremos nas próximas seções, todas variedades bandeira são espaços homogêneos redutivos.

O espaço T_oM tangente a um espaço homogêneo redutivo M = G/K na origem o = eK, pode ser identificado com \mathfrak{m} , via

$$X \mapsto X^*(o) = \frac{d}{dt} (\exp tX \cdot o) |_{t=0}, X \in \mathfrak{m}.$$

Assim, \mathfrak{m} é identificado com $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, [7].

Para cada $x \in G$, tome L_x o difeomorfismo definido por $L_x(gK) = xgK$. A representação isotrópica de G/K é o homomorfismo de K em $GL(T_oM)$ definido por $k \mapsto (dL_k)_o$.

Observamos que a representação isotrópica de G/K é equivalente a representação adjunta de K em \mathfrak{m} , veja por exemplo [7].

1.2 Variedades Bandeira Generalizadas

Discutiremos agora a teoria de Lie associada às variedades bandeira, as quais constituem uma classe especial de espaços homogêneos redutivos.

Sejam G um grupo de Lie semisimples compacto e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Consideramos para cada $X \in \mathfrak{g}$, a *órbita adjunta* de X, isto é, o conjunto $M_X = Ad(G)X \subset \mathfrak{g}$.

O grupo de Lie G age transitivamente em M_X por $g_1 \cdot Ad(g_2) X = Ad(g_1g_2) X$. Considere $K = K_X = \{g \in G : Ad(g)X = X\}$ o subgrupo de isotropia de X. Então M_X é difeomorfa ao espaço homogêneo $\mathbb{F} = G/K$, onde X corresponde a classe da identidade o = eK.

Se tomarmos $S_X = \overline{\exp \mathbb{R}X}$, então pode-se mostrar que S_X é um toro em G, (ver [22]) e K é o centralizador $C(S_X)$ do toro S_X . Se o toro S_X é maximal em G, então $C(S_X) = S_X$.

Definição 1.2.1. Seja G um grupo de Lie semisimples compacto. Uma variedade bandeira generalizada (ou simplesmente variedade bandeira) é a órbita adjunta de um elemento na algebra de Lie $\mathfrak g$ de G. Esta é a variedade bandeira complexa.

Assim uma variedade bandeira é um espaço homogêneo da forma G/C(S), onde S é um toro em G. Se S for um toro maximal, chamamos este espaço quociente por variedade bandeira maximal.

Exploraremos agora a interrelação de F vista como variedade diferenciável complexa e real.

Denote por $V^{\mathbb{C}}$ a complexificação de um espaço vetorial real V. Sejam $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e Π o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ sendo

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\oplus { extstyle\sum_{lpha\in\Pi}}\mathfrak{g}_{lpha}^{\mathbb{C}}$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} = \left\{ X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : \forall H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, [H, X] = \alpha(H)X \right\}$ denota os correspondentes auto espaços de raízes unidimensional.

Observamos que a forma de Cartan-Killing (X,Y) = tr(ad(X)ad(Y)) de \mathfrak{g} é não degenerada e negativa definida em \mathfrak{g} , pois o grupo de Lie G, associado a \mathfrak{g} , é semisimples e compacto. Cada raíz $\alpha \in \Pi$ determina de maneira única um elemento $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ através da representação de Riez $\alpha(X) = (X, H)$.

Fixamos um sistema simples de raízes Σ de Π e denotamos por Π^+ o conjunto formado pelas raízes positivas associadas. Seja $\Sigma_K \subset \Sigma$ um subsistema simples de raízes, e denotamos por

$$\Pi_K = \left\{ \beta \in \Pi : \beta = \sum_{\alpha_i \in \Sigma_K} k_i \alpha_i \right\}$$

o subsistema das raízes geradas por Σ_K . Também denotamos por

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\left(\Sigma_K\right) = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Pi_K} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$$

a subálgebra de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ associada à escolha de Σ_K . Seja $K^{\mathbb{C}}$ o subgrupo conexo de $G^{\mathbb{C}}$ gerado pela subálgebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Então o espaço homogêneo $\mathbb{F} = G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ é uma variedade bandeira. Na verdade, qualquer variedade bandeira tem essa forma, [3] e [5].

No caso em que $\Sigma_K = \emptyset$, temos $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e $K^{\mathbb{C}}$ é um toro maximal, assim a variedade bandeira $\mathbb{F} = G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ obtida é chamada variedade bandeira maximal.

Observamos que as variedade bandeira $\mathbb{F} = G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ são espaços homogêneos conexos e simplesmente conexos, veja [1].

Chamamos o conjunto de raízes $\Pi_M = \Pi \setminus \Pi_K$ como conjunto das raízes complementares.

Agora fixamos de uma vez por todas, uma base de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a qual é formada por vetores $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \Pi$ e H_{β} , $\beta \in \Sigma$, que satisfazem

$$[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = -H_{\alpha}, \quad (X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -1 \text{ e } [X_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$$
 (1.1)

para todo par $\alpha, \beta \in \Pi$ tal que $\alpha + \beta \in \Pi$. As constantes de estrutura $N_{\alpha,\beta}$ satisfazem

$$N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$$
, $N_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta \notin \Pi$, $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$, $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta}$ se $\alpha + \beta \in \Pi$ e $N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}$ se $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ e $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Fixada tal base, consideremos

$$A_{\alpha} = X_{\alpha} - X_{-\alpha}, \ S_{\alpha} = X_{\alpha} + X_{-\alpha}, \ \alpha \in \Pi^{+}$$
e
$$\mathfrak{g}_{\alpha} = qer_{\mathbb{R}} \left\{ iA_{\alpha}, S_{\alpha} \right\}, \alpha \in \Pi^{+}.$$

Assim a álgebra de Lie $\mathfrak{g}=i\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Pi^+}\mathfrak{g}_{\alpha}$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, onde $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Como a forma real compacta $G\subset G^{\mathbb{C}}$ de $G^{\mathbb{C}}$ age transitivamente em \mathbb{F} , por restrição da ação de $G^{\mathbb{C}}$, podemos escrever $\mathbb{F}=G/K$, onde $K=G\cap K^{\mathbb{C}}$ é o centralizador do toro T correspondente a $\mathfrak{k}=i\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Pi_K}\mathfrak{g}_{\alpha}$.

Exemplo 1.2.2. Uma bandeira maximal em \mathbb{C}^n é uma cadeia crescente

$$x = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1}\}\$$

de subespaços V_i de \mathbb{C}^n com dim $V_i = i$. Denotamos por $\mathbb{F}_A(n)$ o conjunto de todas as bandeiras maximais em \mathbb{C}^n . Onde o subscrito A indica que a classe da álgebra de Lie \mathfrak{g} é do tipo A_l .

O grupo de Lie unitário especial $SU(n) = \{x \in GL(n,\mathbb{C}) : x\overline{x}^t = Id; \det(x) = 1\}$ age transitivamente em $\mathbb{F}_A(n)$ por $g \cdot x = \{gV_1 \subset gV_2 \subset \cdots \subset gV_{n-1}\}$. Considere $e_1, ..., e_n$ a base canônica de \mathbb{C}^n e x^0 a bandeira obtida pelos subespaços V_i^0 gerado sobre \mathbb{C} por $e_1, ..., e_i$. Assim o subgrupo de isotropia de x^0 é $S(U(1) \times \cdots \times U(1))$, isto é, o conjunto das matrizes diagonais em SU(n). Portanto,

$$\mathbb{F}_A(n) = \frac{SU(n)}{S(U(1) \times \cdots \times U(1))}, \quad (U(1) \ n \text{ vezes}).$$

Exemplo 1.2.3. Dado um conjunto de inteiros positivos $\{n_1, ..., n_s\}$ tais que $n_1 + \cdots + n_s = n$, definimos uma bandeira parcial em \mathbb{C}^n como sendo uma cadeia crescente $x = \{V_1 \subset ... \subset V_s\}$ de subespaços V_i de \mathbb{C}^n com dim $V_i = n_1 + \cdots + n_i$. Denotamos por $\mathbb{F}_A(n, n_1, ..., n_s)$ o conjunto de todas as bandeiras parciais.

De forma análoga ao caso anterior, SU(n) age transitivamente em $\mathbb{F}_A(n, n_1, ..., n_s)$ e o subgrupo de isotropia de um ponto fixo é $S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))$

=
$$\{diag(A_1,...,A_s); A_i \in U(n_i); \det(A_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \det(A_s) = 1\}$$
. Portanto,

$$\mathbb{F}_A(n, n_1, ..., n_s) = \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))}.$$

Como casos especiais de variedades bandeiras parciais (ou generalizadas) temos as variedades Grassmannianas $G_{r_k}\mathbb{C}^n$ definidas como o conjunto de todos os k-planos em \mathbb{C}^n . O grupo SU(n) age transitivamente nesta variedade sendo o subgrupo de isotropia associado ao k - plano gerado pelos k primeiros vetores da base canônica, isomorfo a $S(U(k) \times U(n-k))$. Logo $G_{r_k}\mathbb{C}^n = \frac{SU(n)}{S(U(k) \times U(n-k))}$.

Uma propriedade gozada pelas variedades Grasmanniana é que elas são espaços simétricos, ver [18].

Observação 1.2.1. Nos dois exemplos acima o grupo $U(n)(\supset SU(n))$ também age transitivamente. Portanto, temos $\mathbb{F}_A(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \cdots \times U(1)}$ (n vezes) e $\mathbb{F}_A(n, n_1, ..., n_s) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)}$. Em particular, $G_{r_k}\mathbb{C}^n = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$.

1.3 O Espaço Tangente

Seja $\mathbb{F} = G/K$ uma variedade bandeira, onde G é um grupo de Lie conexo, semi-simples e compacto e K é um subgrupo de isotropia. Denotaremos por \mathfrak{g} e \mathfrak{k} a álgebra de Lie de G e K, respectivamente.

Como G é um grupo de Lie semi-simples e compacto, a forma de Cartan Killing (\cdot,\cdot) de $\mathfrak g$ é não degenerada e negativa definida. Isto origina a seguinte decomposição redutiva

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}, \qquad ad(\mathfrak{k}) \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$, com respeito a (\cdot, \cdot) . Assim vemos que \mathbb{F} é um espaço homogêneo redutível.

Agora consideremos a projeção canônica $\pi\colon G\to G/K$ e a sua diferencial na origem $d\pi_e\colon \mathfrak{g}\to T_o\mathbb{F}$. Se $X\in\mathfrak{g}$, então

$$d\pi_{e}(X) = \frac{d}{dt} \left(\pi \circ \exp tX \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\left(\exp tX \right) K \right) \Big|_{t=0}$$

assim, $\ker d\pi_e = \mathfrak{k}$. Além disso pode-se mostrar que $d\pi_e$ é sobrejetora ([7] p.65). Portanto $d\pi_e|_{\mathfrak{m}}$ é um isomorfismo e

$$\mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_o \mathbb{F}.$$

Como o subgrupo de isotropia K é o centralizador de um toro S em G, se T for um toro maximal em G contendo S então $T \subset C(S) = K$. Denotaremos por \mathfrak{h} a álgebra de Lie de T. Sejam Π o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ e

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C} X_{\alpha}$$

sua decomposição em espaços de raízes. Como $T\subset K$ segue-se que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, assim existe um subsistema $\Pi_K\subset\Pi$ tal que

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi_K} \mathbb{C} X_{\alpha}.$$

Então

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Pi_{M}} \mathbb{C}X_{\alpha}$$

com $\Pi_M = \Pi \backslash \Pi_K \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$

O espaço $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ tangente a origem da variedade bandeira (complexa) $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ tem com base o conjunto $\{X_{\alpha}; \alpha \in \Pi_M\}$.

Agora, a álgebra de Lie real \mathfrak{g} é o conjunto dos pontos fixos da involução $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dada por $X_{\alpha} \mapsto -X_{-\alpha}$. Isto implica que $\{S_{\alpha}, iA_{\alpha}\}$ gera $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$.

Como

$$\mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in \Pi_M} \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

temos que $T_o\mathbb{F} = \mathfrak{m}$ é gerado pelos vetores S_α, iA_α com $\alpha \in \Pi_M$. Uma base de \mathfrak{m} , ortonormal com respeito a negativa da forma de Cartan-Killing $-(\cdot, \cdot) = B(\cdot, \cdot)$ é dada pelo seguinte conjunto de pares de vetores

$$\left\{ S_{\alpha}/\sqrt{2}, iA_{\alpha}/\sqrt{2} : \alpha \in \Pi_{M}^{+} \right\} \tag{1.2}$$

pois $(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -1$. Em particular, a dimensão de $T_o \mathbb{F} = \mathfrak{m}$ é sempre par.

Exemplo 1.3.1. Considere a variedade bandeira generalizada $\mathbb{F}(7,3,2,2) = SU(7)/S(U(3) \times U(2) \times U(2))$. O espaço tangente a $\mathbb{F}(7,3,2,2)$ na origem $o = S(U(3) \times U(2) \times U(2))$ se identifica com $su(7)/(s(u(3) \times u(2) \times u(2)))$.

Assim, um elemento X em $T_o\mathbb{F}(7,3,2,2)$, pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * & z_{14} & z_{15} & z_{16} & z_{17} \\ * & * & * & z_{24} & z_{25} & z_{26} & z_{27} \\ * & * & * & z_{34} & z_{35} & z_{36} & z_{37} \\ -\overline{z_{14}} & -\overline{z_{24}} & -\overline{z_{34}} & * & * & z_{46} & z_{47} \\ -\overline{z_{15}} & -\overline{z_{25}} & -\overline{z_{35}} & * & * & z_{56} & z_{57} \\ -\overline{z_{16}} & -\overline{z_{26}} & -\overline{z_{36}} & -\overline{z_{46}} & -\overline{z_{56}} & * & * \\ -\overline{z_{17}} & -\overline{z_{27}} & -\overline{z_{37}} & -\overline{z_{47}} & -\overline{z_{57}} & * & * \end{pmatrix}$$

onde $z_{ij} \in \mathbb{C}$.

1.4 Variedades Bandeira Generalizadas e grafos de Dinkyn pintados

Dizemos que duas variedades bandeiras $\mathbb{F}=G/K$ e $\mathbb{F}'=G/K'$ são equivalentes se existir um automorfismo $\Phi\in Aut(G)$ tal que $\Phi(K)=K'$. Este automorfismo Φ induz um difeomorfismo $\widetilde{\Phi}\colon \mathbb{F}\longrightarrow \mathbb{F}'$ definido por $\widetilde{\Phi}(gK)=\Phi(g)\,K'$, [5].

Usando a teoria de Lie é possível fazer uma classificação completa das variedades bandeira, a menos de isomorfismo, por meio de diagramas de Dynkin pintados, ver [13], [3] ou [1].

Seja Σ uma sistema simples de raízes de Π . Então $\Sigma_K = \Sigma \cap \Pi_K$ é um sistema simples de raízes para Π_K . O par (Π, Π_K) é representado graficamente preenchendo determinados vértices do diagrama de Dynkin do tipo \mathfrak{g} .

Mais precisamente, seja $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$ o diagrama de Dynkin do sistema de raízes Π . Em Γ pintamos de preto os vértices correspondentes a $\Sigma \setminus \Sigma_K$, obtendo assim o diagrama de Dynkin pintado de $\mathbb{F} = G/K$. Nesse diagrama o sistema simples de raízes Σ_K é determinado como o subdiagrama dos vértices em branco.

Exemplo 1.4.1. A variedade bandeira $\mathbb{F} = \frac{SU(5)}{S(U(3) \times U(2))}$, é representada graficamente pelo diagrama:



Observe que o diagrama de Dynkin pintado das variedades bandeira maximal possui todos os vértices pintados de pretos.

Reciprocamente, considere um diagrama de Dynkin Γ de uma álgebra semisimples \mathfrak{g} . Suporemos que em Γ temos um subconjunto de vértices pintados de preto. A subálgebra \mathfrak{k} é então obtida como uma soma direta do tipo

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$$

onde cada vértice pintado de preto em Γ dá origem a uma componente $\mathfrak{u}(1)$ e os vértices pintados de branco junto com as arestas conectadas entre eles produzem o diagrama de Dynkin de \mathfrak{k}' , sendo a parte semisimples de \mathfrak{k} gerada pelos vetores X_{α} , $\alpha \in \Pi_K$, [13].

Exemplo 1.4.2. Pintando o diagrama de Dynkin da álgebra de Lie excepcional $\mathfrak{g}=\mathfrak{e}_8$ da forma



obtemos

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{so}(8)$$

portanto a variedade bandeira correspondente é $\mathbb{F} = \frac{E_8}{U(1)^2 \times SU(3) \times SO(8)}$.

Teorema 1.4.3. ([13],[3] ou [7]) Existe uma bijeção entre variedades bandeira $\mathbb{F} = G/K$ de um grupo de Lie compacto semisimples (a menos de isomorfismo como espaços homogêneos) e diagramas de Dynkin pintados do tipo G (a menos de equivanlência de diagramas).

A técnica básica para estabelecer a equivalência de diferentes diagramas de Dynkin pintados é feita através da ação de determinados elementos do grupo de Weyl de \mathfrak{g} sobre Σ , ver por exemplo, [13].

Usando o teorema anterior podemos classificar todas as variedades bandeira por meio de diagramas de Dynkin pintados. As variedades bandeira $\mathbb{F} = G/K$, onde G é um grupo de

Lie Clássico, são dadas pela seguinte lista, a menos de isomorfismo ([13],[5]):

$$A_l: SU(n)/S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \times U(1)^m).$$

 $(n = \sum n_i + m, \ n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_s > 1, \ s \ge 0, \ m \ge 0).$

$$B_l: SO(2n+1)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_k) \times SO(2l+1) \times U(1)^m$$
.

$$C_l: Sp(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_k) \times Sp(l) \times U(1)^m$$
.

$$D_l: SO(2n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_k) \times SO(2l) \times U(1)^m$$
.

$$(n = \sum n_i + m + l, \ n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_k > 1, \ k, m, l \ge 0, \ l \ne 1).$$

Existem 3 variedades bandeira relacionadas ao grupo excepcional G_2 : a maximal do tipo G_2/T e duas parciais do tipo $G_2/U(2)$. A diferença entre as duas se deve a pintar uma raíz curta ou longa no diagrama de Dynkin.

Para os outros grupos de Lie excepcionais existem exatamente 98 variedades bandeira não isomorfas. A lista completa de todos esses espaços pode ser encontrada em [5].

CAPÍTULO 2

SUBMÓDULOS IRREDUTÍVEIS

Considere a decomposição redutiva $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ associada à variedade bandeira $\mathbb{F} = G/K$ e à decomposição $\Pi = \Pi_K \cup \Pi_M$ do sistema de raízes relativo ao par $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Neste capítulo definiremos t-raízes e descrevemos em detalhes a prova contida em [8] da bijeção entre t-raízes e submódulos inequivalentes e invariantes pela representação adjunta de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, restrita a $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Optamos pela inclusão dessa prova nesta tese devido é a dificuldade, ainda hoje, de acessar essa prova na literatura.

O conceito de t-raízes foi introduzido em [3], embora a correspondência acima foi provada primeiramente em [33], conforme consta em [8].

2.1 T-Raízes

Consideremos a seguinte relação de equivalência \sim no sistema de raízes Π associado ao par $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$:

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha = \beta + \sum n_i \alpha_i, \ \alpha_i \in \Pi_K \ e \ n_i \in \mathbb{Z}.$$
 (2.1)

Assim, Π é decomposto em classes de equivalência

$$\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_s$$

onde Π_0 é a classe de 0. É claro que $\Pi_K \subset \Pi_0$.

Por outro lado, segue-se da definição acima que quaisquer dois elementos de Π_K são equivalentes. Ainda pela definição, todo elemento fora de Π_K não é equivalente a qualquer elemento de Π_K . Logo $\Pi_0 = \Pi_K$. Assim podemos escrever $\Pi = \Pi_K \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_s$.

Sejam $\gamma, \delta \in \Pi$, dizemos que γ e δ são ligados através de Π_K se existe uma sequência $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ de Π , tal que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_k = \delta$ e $\gamma_{i+1} - \gamma_i \in \Pi_K$, com $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Assim obtemos a seguinte relação de equivalência em Π :

$$\gamma \sim \sim \delta \Longleftrightarrow \gamma$$
e δ são ligados através de $\Pi_K.$

Observamos que $\gamma \sim \delta$ implica em $\gamma \sim \delta$. Pois se $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ é uma sequência de Π , tal que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_k = \delta$ e $\gamma_{i+1} - \gamma_i \in \Pi_K$, com $i = 0, 1, \dots, k-1$. Então, $\gamma = \gamma_0 = \gamma_k - (\gamma_k - \gamma_{k-1}) - \dots - (\gamma_1 - \gamma_0)$. Logo $\gamma \sim \delta$.

O próximo resultado afirma que os elementos de qualquer classe $\Pi_n \in \Pi/\sim$ são ligados através de Π_K .

Lema 2.1.1. As relações de equivalência $\sim e \sim \sim em \Pi$ coincidem.

Demonstração. Queremos mostrar que $\gamma, \delta \in \Pi$ e $\gamma \sim \delta$ implica $\gamma \sim \delta$. Para isto, seja μ escolhido tal que $\gamma \sim \mu$ (e, portanto, $\delta \sim \mu$) e (μ, μ) é mínimo (onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno em Π induzido pela forma de Cartan Killing in \mathfrak{g}). É suficiente mostrar que $\gamma \sim \mu$ e $\delta \sim \mu$.

Introduzimos a seguinte definição: se $\gamma \sim \delta$ a distância entre γ e δ é definida por

$$d(\gamma, \delta) = \sum_{i} |n_i| \in \mathbb{N} \text{ onde } \gamma = \delta + \sum_{i} n_i \alpha_i.$$

Por simetria mostraremos apenas que $\gamma \sim \mu$.

Queremos construir uma sequência γ_i com $\gamma_0 = \gamma$ tal que para todo i existe j tal que

$$\gamma_{i+1} - \gamma_i = \pm \alpha_j e d(\gamma_{i+1}, \mu) = d(\gamma_i, \mu) - 1.$$

Por indução, isto claramente implicará que existe I tal que $\gamma_I = \mu$. Assim a demonstração estará completa.

Para provar a indução, usando a minimalidade de μ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que $(\gamma_i, \gamma_i) \ge (\gamma_i, \mu)$, onde a igualdade ocorre se, e somente se $\{\gamma_i, \mu\}$ for linearmente dependente. Como raízes distintas não são proporcionais, temos então a desigualdade estrita,

$$(\gamma_i, \gamma_i - \mu) > 0 \tag{2.2}$$

Agora construímos γ_{i+1} a partir de γ_i . Já que $\gamma_0 \sim \mu$, e por indução, $\gamma_i \sim \mu$, temos

$$\gamma_i = \mu + \sum_j n_j \alpha_j. \tag{2.3}$$

Assim, (2.2) pode ser escrito na forma $\sum_{j}(\gamma_{i}, n_{j}\alpha_{j}) > 0$, implicando que existe um índice j tal que $(\gamma_{i}, n_{j}\alpha_{j}) > 0$, donde $(\gamma_{i}, sgn(n_{j})\alpha_{j}) > 0$. Portanto, $\gamma_{i+1} := \gamma_{i} - sgn(n_{j})\alpha_{j} \in \Pi$, (veja [19], Lema 9.4). Além disso, claramente, $d(\gamma_{i+1}, \mu) = d(\gamma_{i}, \mu) - 1$, completando o passo de indução.

Observação 2.1.1. Considere a decomposição $\Pi = \Pi_K \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_s$ e seja $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \Pi_i} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$. Então como

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\sum_{lpha\in\Pi_{M}}\mathfrak{g}_{lpha}^{\mathbb{C}}$$

segue que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{g}_{1}^{\mathbb{C}}\cdots\oplus\mathfrak{g}_{s}^{\mathbb{C}}.$$

Definiremos agora as t-raízes e mostraremos a sua ligação com a decomposição de Π descrita acima. Seja $Z(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$, o centro da subálgebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Considere a seguinte subálgebra de \mathfrak{h} ,

$$\mathfrak{t}=Z(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})\cap\mathfrak{h}.$$

Lema 2.1.2. ([6]) O conjunto $Z(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{h}$ é igual a $\{X \in \mathfrak{h} : \alpha(X) = 0 \ \forall \alpha \in \Pi_K\}.$

Demonstração. De fato,

$$Z(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{h} = \left\{ X \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \ [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi_K} \mathbb{C} X_{\alpha} \right\} \cap \mathfrak{h}$$
$$= \left\{ X \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \ [X, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = 0 \ \mathrm{e} \ [X, X_{\alpha}] = 0, \forall \alpha \in \Pi_K \right\} \cap \mathfrak{h}.$$

Mas esse conjunto é igual a

$$\left\{X\in\mathfrak{h}^{\mathbb{C}},\alpha(X)X_{\alpha}=0,\forall\alpha\in\Pi_{K}\right\}\cap\mathfrak{h}=\left\{X\in\mathfrak{h};\alpha(X)=0,\forall\alpha\in\Pi_{K}\right\}.$$

Sejam \mathfrak{h}^* e \mathfrak{t}^* os espaços duais de \mathfrak{h} e \mathfrak{t} , respectivamente. Consideremos a restrição $k\colon \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{t}^*$ definida por:

$$k(\alpha) = \alpha|_{\mathfrak{t}}$$
 para todo $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Definimos $\Pi_{\mathfrak{t}} \equiv k(\Pi) = k(\Pi_M)$. Note que $k(\Pi_K) = 0$, pelo Lema anterior. Assim temos a seguinte definição.

Definição 2.1.3. Os elementos de $\Pi_t = k(\Pi_M)$ são chamados de t-raízes.

Em geral Π_t não é um sistema de raízes no sentido clássico, ver [19]. Por exemplo, no caso em que $\mathbb{F} = SO(2n+1)/(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))$, Π_t não é um sistema de raízes, como será visto no capítulo 4. Onde mostramos que para as variedades bandeira do tipo A_l , Π_t é um sistema de raízes do tipo A_s , $s \leq l$. E para variedades bandeira do tipo C_l e D_l , Π_t é um sistema de raízes do tipo C_s , $s \leq l$.

O próximo resultado mostra uma propriedade da relação de equivalência \sim definida em $\Pi.$

Proposição 2.1.4. ([8]) Consideramos a seguinte relação de equivalência \sim definida em Π , conforme equação (2.1). Para $\alpha, \beta \in \Pi$ temos

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha|_{\mathfrak{t}} = \beta|_{\mathfrak{t}}.$$

Demonstração. De fato, usando o Lema 2.1.2 temos $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \beta|_{\mathfrak{t}} \iff (\alpha - \beta)|_{\mathfrak{t}} = 0$, o que é equivalente a $(\alpha - \beta) \in \Pi_K$, isto é, $\alpha - \beta = \sum n_i \alpha_i$, $\alpha_i \in \Pi_K$, $n_i \in \mathbb{Z} \iff \alpha \sim \beta$

Observação 2.1.2. Considere a decomposição $\Pi = \Pi_K \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_s$. Dada uma traíz $\bar{\alpha} = k(\alpha)$, a proposição anterior garante que a imagem inversa $k^{-1}(\bar{\alpha})$ é a classe de equivalência Π_i que contém $\alpha \in \Pi_M$, para algum $1 \le i \le s$.

2.2 Decomposição do espaço tangente

Nesta seção, seguindo [3], apresentamos uma maneira de decompor o espaço tangente $T_o\mathbb{F}$ em \mathfrak{k} -módulos irredutíveis e inequivalentes usando t-raízes.

Lema 2.2.1. ([8]) Se $l^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{1}^{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{s}^{\mathbb{C}}$ é um subespaço $ad(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ -invariante. Então $l^{\mathbb{C}}$ é da forma $\sum_{\alpha' \in \Pi'} \mathbb{C} X_{\alpha'}$ onde Π' é um subconjunto de Π_{M} .

Demonstração. Seja $X \in l^{\mathbb{C}}$, então

$$X = r_1 X_{\alpha_1} + \dots + r_p X_{\alpha_p} \in l^{\mathbb{C}}$$

para certos escalares r_i e autovetores $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$, com $i = 1, \dots, p$.

Como a forma de Cartan Killing de \mathfrak{g} é não degenerada, dados $\alpha, \beta \in \Pi$ existe $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ tal que $\beta(H) = 0$ e $\alpha(H) = 1$. Assim, para α_1 e α_p existe $H_p \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ satisfazendo $\alpha_p(H_p) = 0$ e $\alpha_1(H_p) = 1$. Computando $ad(H_p)(X) = X'$, vemos que

$$X' = r_1 X_{\alpha_1} + r_2 \alpha_2(H_p) X_{\alpha_2} + \dots + r_{p-1} \alpha_{p-1}(H_p) X_{\alpha_{p-1}} \in l^{\mathbb{C}}.$$

Continuando esse processo obtemos que $r_{\alpha_1}X_{\alpha_1} \in l^{\mathbb{C}}$ então $\mathbb{C}X_{\alpha_1} \subset l^{\mathbb{C}}$. Analogamente, prova-se que $\mathbb{C}X_{\alpha_i} \subset l^{\mathbb{C}}$ para $i=2,\ldots,p$.

Teorema 2.2.2. ([3],[8]) Existe uma bijeção entre t-raízes e submódulos irredutíveis $\mathfrak{m}_{\xi}^{\mathbb{C}}$ do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulo $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, dada por

$$\Pi_{\mathfrak{t}}
i \xi \longleftrightarrow \mathfrak{m}_{\xi}^{\mathbb{C}}=igoplus_{k(lpha)=\xi}\mathfrak{g}_{lpha}^{\mathbb{C}}$$

Além disso esses submódulos são inequivalentes como $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulos.

Demonstração. Considere a decomposição $\Pi = \Pi_K \cup \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_s$. Mostraremos que os subespaços $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \Pi_i} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ (i = 1, 2, ..., s) são $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -submódulos invariantes e inequivalentes dois a dois.

Para a invariância, é suficiente mostrar que

$$\left[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_{i}^{\mathbb{C}}\right]\subset\mathfrak{g}_{i}^{\mathbb{C}}$$
 ou equivalentemente

$$(\Pi_K + \Pi_i) \cap \Pi \subset \Pi_i, i \geq 1.$$

Para este fim, tome $\phi \in \Pi_K$, $\alpha \in \Pi_i$ e considere $\phi + \alpha = \gamma \in \Pi$. Então $\gamma - \alpha = \phi \in \Pi_K$, logo $\gamma \sim \alpha$, isto é, $\gamma \in \Pi_i$.

Quanto à irredutibilidade, seja $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ um $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulo com $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{i}^{\mathbb{C}}$, onde a classe correspondente Π_{i} é dada por $\Pi_{i} = \{\mu_{i_{1}}, \dots, \mu_{i_{n_{i}}}\}, i \geq 1$. Como $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ segue que $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ é um $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ -módulo, então pelo Lema 2.2.1 temos

$$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\mu_i \in \Pi'_i} \mathbb{C} X_{\mu_i} \text{ onde } \Pi'_i \subset \Pi_i.$$

Tome agora $\mu_t \in \Pi_i$ e $\mu_i \in \Pi_i' \subset \Pi_i$ pelo Lema 2.1.1, Π_i é Π_K -ligado, isto é, existe um subconjunto $\{\mu_i = \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k = \mu_t\}$ de Π tal que $\delta_{j+1} - \delta_j \in \Pi_K$, para $0 \leq j \leq k-1$. Assim $\delta_1 - \delta_0 = \delta_1 - \mu_i \in \Pi_K$, então $X_{\delta_1 - \mu_i} \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ e $[X_{\delta_1 - \mu_i}, X_{\mu_i}] = X_{\delta_1} \in \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Continuando com esse processo, concluímos que $X_{\delta_k} \in \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$, isto é, $X_{\mu_t} \in \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$, logo $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$.

Finalmente, vemos que os $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ -módulos $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ são inequivalentes dois a dois. De fato, se $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{g}_j^{\mathbb{C}}$, com $i \neq j$, fossem equivalentes como $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulos, em particular eles seriam equivalentes como $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ -módulos. Isto significa que existiria um isomorfismo $T: \mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_j^{\mathbb{C}}$ tal que

$$T(ad(H)X) = ad(H)(TX)$$

para todo $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e todo $X \in \mathfrak{g}_{i}^{\mathbb{C}}$. Em particular, para um autovetor $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{i}^{\mathbb{C}}$ associado a raiz $\alpha \in \Pi_{i}$ obteríamos

$$\alpha(H)TX_{\alpha} = ad(H)(TX_{\alpha}).$$

Isto significaria que o vetor $TX_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{j}^{\mathbb{C}}$ é um autovetor associado a raíz $\alpha \in \Pi_{i}$. Mas isso é um absudo porque as raízes de Π_{i} e Π_{j} são distintas.

Assim, uma decomposição do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulo $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ (= $T_o\mathbb{F}$) em submódulos irredutíveis, é dada por

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\xi \in \Pi_{\mathfrak{t}}} \mathfrak{m}_{\xi}.$$

Para o realificado $\mathfrak{m} = \left(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}\right)^{\tau}$, uma decomposição do \mathfrak{k} -módulo real \mathfrak{m} em submódulos irredutíveis é dada por

$$\mathfrak{m} = \sum_{\xi \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+} \left(\mathfrak{m}_{\xi} + \mathfrak{m}_{-\xi}\right)^{\tau}$$

onde τ denota uma conjugação complexa de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, \mathfrak{n}^{τ} denota o conjunto de pontos fixos de τ em um subespaço vetorial $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e $\Pi^+_{\mathfrak{t}} = k(\Pi^+_M)$.

Exemplo 2.2.3. Considere a variedade bandeira $\mathbb{F} = \frac{SU(7)}{S(U(3)\times U(2)\times U(2))}$. Uma subálgebra de Cartan para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(7)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(7,\mathbb{C})$ é dada pelo conjunto das matrizes da forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \left\{ diag\left(\varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \dots, \varepsilon_{7}\right), \varepsilon_{i} \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{7} \varepsilon_{i} = 0 \right\}.$$

O sistema de raízes do par $(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é formado pelos funcionais $diag(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_7) \mapsto \varepsilon_i - \varepsilon_j$, os quais serão denotados por $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Assim

$$\Pi = \{ \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \le i < j \le 7 \}.$$

A escolha canônica de raízes positivas é dada por

$$\Pi^+ = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \le i < j \le 7 \}.$$

Além do mais, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{s} (\mathfrak{u}(3) \times \mathfrak{u}(2) \times \mathfrak{u}(2))^{\mathbb{C}}$ e o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é dado por

$$\Pi_K = \{ \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \pm (\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \pm (\varepsilon_6 - \varepsilon_7) \}.$$

Então usando a observação 2.1.2, obtemos que a subálgebra t é da forma

$$\mathfrak{t} = \left\{ diag\left(\varepsilon^1, \varepsilon^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^3\right) \in \mathfrak{h} \right\}.$$

Para distinguir raízes e t-raízes, usaremos a letra δ para denotar as t-raízes. Por exemplo, a restrição do funcional $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ a subálgebra \mathfrak{t} será denotado por $\delta_1 - \delta_2$, pois $(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$: $diag(\varepsilon^1, \varepsilon^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^3) \mapsto \varepsilon^1 - \varepsilon^2$. Assim restringindo as raízes de $\Pi_M = \Pi - \Pi_K$ a subálgebra \mathfrak{t} , obtemos

$$\Pi_{\mathfrak{t}} = \left\{ \pm \left(\delta_1 - \delta_2 \right), \pm \left(\delta_2 - \delta_3 \right), \pm \left(\delta_1 - \delta_3 \right) \right\}.$$

Portanto, a decomposição do espaço tangente $T_o\mathbb{F}$ em \mathfrak{k} -submódulos irredutíveis e inequivalentes é dada por

$$T_o\mathbb{F} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{12} \oplus \mathfrak{m}_{23} \oplus \mathfrak{m}_{13}$$

onde

$$\mathfrak{m}_{ij} = \sum_{\alpha \in \Pi_M^+, k(\alpha) = \delta_i - \delta_j} \left\{ \mathbb{R}iA_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha \right\}, \ 1 \le i < j \le 3.$$

CAPÍTULO 3

TENSORES INVARIANTES EM VARIEDADES BANDEIRAS

Neste capítulo daremos a caracterização dos tensores invariantes sobre variedades bandeira usados nesse trabalho.

3.1 Métricas Invariantes

Uma métrica ds^2 sobre uma variedade bandeira $\mathbb{F} = G/K$ é dita G-invariante (ou simplesmente invariante) se para todo $x \in \mathbb{F}$, tivermos:

$$ds^2(dg_xX, dg_xY) = ds^2(X, Y)$$

onde $X, Y \in T_o \mathbb{F}$ e $g \in G$.

È bem sabido que uma métrica invariante sobre uma variedade bandeira \mathbb{F} é completamente determinada por seu valor na origem, isto é, por um produto interno $g(\cdot,\cdot)$ em $\mathfrak{m} = T_o\mathbb{F}$ que é invariante sob a ação adjunta de \mathfrak{k} , ver por exemplo ([21] ou [28]).

Consideremos a base $\{X_{\alpha}; \alpha \in \Pi_M\}$ de $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, usaremos a mesma notação para a extensão de $g(\cdot, \cdot)$ a $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, e denotaremos o escalar $g(X_{\alpha}, X_{\beta})$ por $g_{\alpha,\beta}$. Assim, dados $X = \sum_{\alpha \in \Pi_M} a_{\alpha} X_{\alpha}$ e $Y = \sum_{\alpha \in \Pi_M} b_{\alpha} X_{\alpha}$ em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, temos $g(X, Y) = \sum_{\alpha, \beta \in \Pi_M} a_{\alpha} b_{\beta} g_{\alpha,\beta}$.

Pela $ad(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ -invariância, $g(\cdot, \cdot)$ satisfaz

$$g([K, X], Y) + g(X, [K, Y]) = 0$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ e $K \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Tomando $K = H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, $X = X_{\alpha}$ e $Y = X_{\beta}$, na igualdade acima, obtemos que $g_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$. Além disso, $g_{\alpha} = g\left(X_{\alpha}, X_{-\alpha}\right) = g\left(X_{\alpha}, X_{\alpha}\right) = g\left(X_{\alpha}, X_{\alpha}\right)$

Agora considere a decomposição

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_{1}^{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{2s}^{\mathbb{C}}$$

em $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulos irredutíveis e inequivalentes correspondente às t-raízes $\pm \delta_1, \ldots, \pm \delta_s$. Seja $\Lambda \colon \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ uma aplicação linear tal que $g(X,Y) = -(\Lambda X,Y)$, para todo $X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Então Λ é simétrica em relação à forma de Cartan-Killing. A $ad(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ -invariância de $g(\cdot,\cdot)$ é equivalente a Λ comutar com ad(X) para todo $X \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Então pelo Lema de Schur,

$$\Lambda = \lambda_{\delta_1} Id|_{\mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}}} + \dots + \lambda_{\delta_s} Id|_{\mathfrak{m}_s^{\mathbb{C}}}.$$

Consequentemente, se $\alpha, \beta \in \Pi_M$ são tais que $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \beta|_{\mathfrak{t}} = \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$, então $g_{\alpha} = g_{\beta} = \lambda_{\delta}$ e como $g_{\alpha} = g_{-\alpha} > 0$ segue que $\lambda_{\delta} = \lambda_{-\delta} > 0$, onde $k(\alpha) = \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$. Portanto:

Proposição 3.1.1. ([3],[26]) Qualquer produto interno real $ad(\mathfrak{k})$ -invariante sobre \mathfrak{m} é da forma

$$g(\cdot,\cdot) = -\lambda_{\delta_1}(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_1} - \dots - \lambda_{\delta_s}(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{m}_s \times \mathfrak{m}_s}$$
(3.1)

onde $\delta_i \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+$, $\lambda_{\delta_i} > 0$ para $i = 1, \ldots, s$ $e\left(\cdot, \cdot\right)$ denota a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} .

Assim temos que uma métrica Riemanniana em uma variedade bandeira \mathbb{F} depende exatamente de $|\Pi_t^+|$ parâmetros.

Se $\mathbb{F} = G/K$ e \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie clássica, é conveniente representar Λ por uma matriz (λ_{ij}) de modo que o produto ΛX seja dado pelo produto de Hadamard, isto é, se $X = (x_{ij})$ então $\Lambda X = (\lambda_{ij}) (x_{ij}) = (\lambda_{ij} x_{ij})$, para todo $X \in \mathfrak{m}$.

A simetria de Λ em relação à forma de Cartan-Killing implica em $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$. Escreveremos simplesmente $\Lambda = (\lambda_{ij})$ para denotar a métrica ds^2 sobre a variedade bandeira. Continuaremos denotando por Λ a sua extensão a $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Exemplo 3.1.2. Usando o Exemplo 2.2.3, vemos que qualquer métrica invariante sobre $\mathbb{F} = SU(7)/S(U(3) \times U(2) \times U(2))$ é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_{ij} = \lambda_{\delta_{ij}}, 1 \leq i < j \leq 3.$

3.2 Estruturas quase Complexas

Vamos caracterizar as estruturas quase complexas invariantes (abreviadamente eqci) sobre variedades bandeira \mathbb{F} . Em particular, vamos caracterizar as estruturas complexas invariantes sobre \mathbb{F} .

Uma estrutura quase complexa \mathcal{J}_* sobre \mathbb{F} é um campo de tensores do tipo (1,1) que associa a cada $x \in \mathbb{F}$ a um endomorfismo linear $J_x \colon T_x \mathbb{F} \to T_x \mathbb{F}$ que satisfaz $J_x^2 = -Id$. A estrutura quase complexa \mathcal{J}_* sobre $\mathbb{F} = G/K$ é invariante (G- invariante) se

$$dg_x \circ J_x = J_{qx} \circ dg_x$$

para todo $g \in G$.

Uma eqci é completamente determinada por um endormorfismo linear $J: \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$, satisfazendo $J^2 = -Id$ que comuta com a ação adjunta de K sobre \mathfrak{g} , isto é,

$$Ad(k)J = JAd(k)$$
 para todo $k \in K$

o que é equivalente a

$$ad(L)J = Jad(L)$$
 para todo $L \in \mathfrak{k}$

conforme [21] ou [35].

Denotamos também por J sua complexificação em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Como $J^2=-Id$ seus autovalores são i e -i, e os auto-espaços correspondentes são denotados por

$$T_o^{(1,0)}\mathbb{F} = \left\{ X \in T_o \mathbb{F}^{\mathbb{C}} : JX = iX \right\}$$

$$T_o^{(0,1)}\mathbb{F} = \left\{ X \in T_o \mathbb{F}^{\mathbb{C}} : JX = -iX \right\}.$$

Então

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = T_o \mathbb{F}^{\mathbb{C}} = T_o^{(1,0)} \mathbb{F} \oplus T_o^{(0,1)} \mathbb{F}.$$

Os autovetores com autovalor +i são chamados do tipo (1,0), enquanto os autovetores associados a -i são chamados do tipo (0,1).

Proposição 3.2.1. Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e Π_t o conjunto de t-raízes correspondente. Então qualquer eqci J sobre \mathbb{F} é dada por um conjunto de sinais $\{\varepsilon_{\delta}, \delta \in \Pi_t\}$ onde $\varepsilon_{\delta} = \pm 1$ satisfazendo $\varepsilon_{\delta} = -\varepsilon_{-\delta}$ para todo $\delta \in \Pi_t$. Em particular, J é determinada por exatamente $|\Pi_t^+|$ sinais.

Demonstração. Considere a complexificação de J a $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Pela invariância de J, temos

$$ad(H)JX_{\alpha} = Jad(H)X_{\alpha} = \alpha(H)JX_{\alpha}$$
 para todo $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$,

logo $J(\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ para todo $\alpha \in \Pi$. Os autovalores de J são $\pm i$ e os autovetores em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ são X_{α} , $\alpha \in \Pi$. Portanto $JX_{\alpha} = i\varepsilon_{\alpha}X_{\alpha}$, com $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$.

Além disso, temos

$$iA_{\alpha} = i\left(X_{\alpha} - X_{-\alpha}\right) = -i\left(X_{-\alpha} - X_{\alpha}\right) = -iA_{-\alpha}$$

е

$$S_{\alpha} = (X_{\alpha} + X_{-\alpha}) = S_{-\alpha}.$$

Observamos que $X_{-\alpha} = \frac{1}{2} (i(iA_{\alpha}) + S_{\alpha})$, então

$$i\varepsilon_{-\alpha}\frac{1}{2}\left(i(iA_{\alpha})+S_{\alpha}\right)=i\varepsilon_{-\alpha}X_{-\alpha}=JX_{-\alpha}=\frac{1}{2}\left(iJ(iA_{\alpha})+J(S_{\alpha})\right).$$

Comparando os termos reais e imaginários do lado esquerdo da primeira igualdade e do lado direito da terceira igualdade, obtemos

$$J(iA_{\alpha}) = \varepsilon_{-\alpha}S_{\alpha} \in J(S_{\alpha}) = -\varepsilon_{-\alpha}(iA\alpha),$$

então

$$\varepsilon_{-\alpha}S_{\alpha} = J(iA_{\alpha}) = -J(iA_{-\alpha}) = -\varepsilon_{\alpha}S_{-\alpha}$$

donde $\varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}$ para todo $\alpha \in \Pi$.

Agora consideremos a decomposição

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_{1}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{2}^{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{2s}^{\mathbb{C}}$$

em $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ -módulos irredutíveis e inequivalentes correspondente as t-raízes $\delta_1, -\delta_1, \dots, -\delta_s, \delta_s$. Como

$$\mathfrak{m}_j^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_{\delta_j}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Pi, k(\alpha) = \delta_j} \mathbb{C} X_\alpha$$

segue que $J(\mathfrak{m}_{\delta_j}^{\mathbb{C}})=\mathfrak{m}_{\delta_j}^{\mathbb{C}}$, para todo $\delta_j\in\Pi_{\mathfrak{t}}$. Então, pelo Lema de Schur, temos

$$J = i\varepsilon_1 Id|_{\mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}}} \oplus \cdots \oplus i\varepsilon_s Id|_{\mathfrak{m}_s^{\mathbb{C}}}$$

isto é, se $\alpha, \beta \in \Pi$ são tais que $k(\alpha) = k(\beta) = \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$ então $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta} = \varepsilon_{\delta}$.

Finalmente, dado $\delta \in \Pi_t$ temos

$$\varepsilon_{\delta} = \varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_{-\delta}$$

onde α é qualquer raíz em Π tal que $k(\alpha) = \delta$.

De modo análogo ao caso das métricas invariantes, é conveniente representar J por uma matriz (ε_{ij}) tal que o produto JX é dado pelo produto de Hadamard. Aqui, $\varepsilon_{kj} = \pm i$, se $k \neq j$ e $\varepsilon_{jj} = 0$. Também é comum, com um certo abuso de notação, denotar J simplesmente por $\{\varepsilon_{\delta}\}$, como por exemplo em [28].

Exemplo 3.2.2. Como vimos no exemplo 2.2.3, a variedade bandeira $\mathbb{F} = \frac{SU(7)}{S(U(3) \times U(2) \times U(2))}$ tem exatamente três t-raízes positivas, portanto \mathbb{F} admite no máximo $2^3 = 8$ estruturas quase complexas. Qualquer estrutura quase complexa J pode ser respresentada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & 0 & 0 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $-\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk} = \pm i$ se $1 \le k \ne j \le 3$.

Uma estrutura quase complexa invariante J é uma estrutura complexa invariante ou uma estrutura quase complexa integrável invariante se J é livre de torsão [21], isto é,

$$[JX,JY] = [X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] \text{ para todo } X,Y \in \mathfrak{m}.$$

Isto é equivalente ao tensor de Nijenhuis (invariante) ser nulo. Este tensor é definido por

$$-\frac{1}{2}N(X,Y) = -\left[JX,JY\right] + \left[X,Y\right] + J\left[X,JY\right] + J\left[JX,Y\right] \text{ para todo } X,Y \in \mathfrak{m}.$$

Como $\mathbb{F} = G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ é um espaço homogêneo de um grupo de Lie complexo, \mathbb{F} tem uma estrutura natural de variedade complexa. Fixada uma ordem em $\Pi_{\mathfrak{t}}$, a estrutura quase complexa integrável associada J_c é dada por $\varepsilon_{\delta} = +1$ se $\delta < 0$.

Consideremos o espaço t junto com os hiperplanos

$$\{x \in \mathfrak{t} : \delta(x) = 0\} \ \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}.$$

O complementar da união desses hiperplanos é aberto e denso em \mathfrak{t} . Suas componentes conexas em \mathfrak{t} são chamadas t-câmaras, [3].

Um subconjunto $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de $\Pi_{\mathfrak{t}}$ é uma base de $\Pi_{\mathfrak{t}}$ se toda t-raíz pode ser escrita como uma combinação linear desses elementos com todos os coeficientes do mesmo sinal $(\geq 0 \text{ ou } \leq 0)$. Fixada uma base Σ_K de Π_K , seja Σ uma base de Π tal que $\Sigma_K \subset \Sigma$, definimos $\Sigma_M := \Sigma \setminus \Sigma_K$. O próximo resultado relaciona estruturas complexas invariantes com t-câmaras.

Proposição 3.2.3. ([3] ou [8]) Existe uma bijeção entre:

- (1) Bases $\Sigma = \Sigma_K \cup \Sigma_M$ de Π as quais contém uma base fixada Σ_K do sistema de raízes Π_K .
 - (2) Bases de Π_t .
 - (3) t-câmaras.
 - (4) Ordens parciais em Π_M (ou escolhas de raízes positivas em Π_M).
 - (5) Estruturas complexas invariantes sobre \mathbb{F} .
 - (6) Elementos ω do grupo de Weyl de Π com $\omega \Sigma_K \subset \Sigma$.

Para mais detalhes sobre estruturas complexas invariante sobre variedades bandeira \mathbb{F} , citamos [3] e [8].

3.3 A forma de Kähler

Em [28], San Martin e Negreiros classificaram as estruturas quase Hermitianas sobre variedades bandeira maximal. Em particular, eles mostraram que uma estrutura quase Hermitiana (J, Λ) sobre uma variedade bandeira maximal é quase Kähler se e somente se é Kähler. Silva mostrou, em sua tese de doutorado, que a classe das estruturas quase Kähler coincide com a classe das estruturas Kähler também em variedades bandeira generalizadas, ver [31] ou [35].

Nesta seção, mostramos um critério em termos de t-raízes para uma variedade bandeira quase Hermitiana ser (1,2)-simplética. A vantagem de usar t-raízes é que se \mathbb{F} é uma variedade bandeira generalizada, então o número de t-raízes é significamente menor que o número de raízes complementares. Isso facilita a análise de classificação de estruturas quase Hermitianas.

Seja \mathbb{F} uma variedade bandeira munida de uma métrica invariante g e uma estrutura quase complexa J. Computando g(JX, JY) na base de Weyl escolhida, é fácil ver que g é quase Hermitiana com respeito a J, isto é, g(JX, JY) = g(X, Y).

Denotaremos por $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ a forma de Kähler correspondente:

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY) = -(\Lambda X,JY), \qquad X,Y \in \mathfrak{m}. \tag{3.2}$$

Como é comum, continuaremos denotando por Ω , sua extensão natural a uma 2-forma invariante em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Calculando o valor de Ω na base de Weyl $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_{M}\}$, temos

$$\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}) = -(\Lambda X_{\alpha}, JX_{\beta}) = -i\lambda_{\bar{\alpha}} \varepsilon_{\bar{\beta}} (X_{\alpha}, X_{\beta}) = \begin{cases} -i\varepsilon_{\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}} & \text{se } \beta = -\alpha \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\bar{\alpha}=k(\alpha), \; \bar{\beta}=k(\beta)$ são as t-raízes correspondentes a α e β respectivamente.

Portanto, considerando a decomposição

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{m}_{1}^{\mathbb{C}}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{m}_{2s}^{\mathbb{C}}$$

em submódulos $ad(\mathfrak{k})$ -invariantes irredutíveis e inequivalentes, concluímos que Ω é uma 2-forma dada por

$$\Omega\left(\cdot,\cdot\right) = \sum_{\alpha \in \Pi_{M}} i\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left(\cdot,\cdot\right)|_{\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}} = \sum_{\delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}} \sum_{\substack{\alpha \in \Pi_{M} \\ \bar{\alpha} = \delta}} i\varepsilon_{\delta}\lambda_{\delta}\left(\cdot,\cdot\right)|_{\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}} = \sum_{\delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}^{+}} i\varepsilon_{\delta}\lambda_{\delta}\left(\cdot,\cdot\right)|_{\mathfrak{m}_{\delta}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{m}_{-\delta}^{\mathbb{C}}}.$$

Pela invariância de Ω a diferencial exterior $d\Omega$ é dada por

$$3d\Omega(X,Y,Z) = -\Omega([X,Y],Z) + \Omega([X,Z],Y) - \Omega([Y,Z],X)$$

para todos campos de vetores $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$ em $\mathbb{F},$ veja [21]. O próximo resultado foi obtido em [35].

Proposição 3.3.1. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ então $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ é nulo, exceto quando $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Neste caso

$$d\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}) = -3iN_{\alpha,\beta} \left(\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma}\right).$$

Podemos obter um resultado análogo à proposição anterior usando t-raízes. Para isto precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.3.2. ([4], Lema 4) Sejam ξ, η, ζ t-raízes tais que $\xi + \eta + \zeta = 0$. Então existem raízes $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ com $k(\alpha) = \xi, k(\beta) = \eta, k(\gamma) = \zeta$, e tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Se $\delta, \zeta, \eta \in \Pi_t$ são tais que $\delta + \zeta + \eta = 0$ diremos que a tripla (δ, ζ, η) é uma tripla soma zero de t-raízes.

Proposição 3.3.3. Sejam $\delta, \zeta, \eta \in \Pi_t$ então $d\Omega(\mathfrak{m}_{\delta}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{\zeta}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{\eta}^{\mathbb{C}}) = \{0\}$, exceto quando $\delta + \zeta + \eta = 0$. Neste caso

$$d\Omega(X, Y, Z) = -3iN \left(\varepsilon_{\delta} \lambda_{\delta} + \varepsilon_{\zeta} \lambda_{\zeta} + \varepsilon_{\eta} \lambda_{\eta}\right).$$

onde $N \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e X, Y, Z pertencem a $\mathfrak{m}_{\delta}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{\zeta}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{m}_{\eta}^{\mathbb{C}}$, respectivamente.

Demonstração. Se $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ são tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ então $\delta + \zeta + \eta = 0$, quando $k(\alpha) = \delta, k(\beta) = \zeta$ e $k(\gamma) = \eta$.

Reciprocamente, se $\delta, \zeta, \eta \in \Pi_t$ são tais que $\delta + \zeta + \eta = 0$ então, pelo Lema 3.3.2, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ com $k(\alpha) = \delta, k(\beta) = \zeta, k(\gamma) = \eta$, e tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Assim pela Proposição 3.3.1 e pela caracterização de métricas invariantes e estruturas quase complexas invariantes temos

$$d\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}) = -3iN_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma}\right) = -3iN_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_{\delta}\lambda_{\delta} + \varepsilon_{\zeta}\lambda_{\zeta} + \varepsilon_{\eta}\lambda_{\eta}\right).$$

Observe ainda que se $\alpha', \beta', \gamma' \in \Pi_M$ são tais que $k(\alpha') = \delta, k(\beta') = \zeta, k(\gamma') = \eta$ e $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$ então

$$d\Omega(X_{\alpha'},X_{\beta'},X_{\gamma'}) = -3iN_{\alpha',\beta'}\left(\varepsilon_\delta\lambda_\delta + \varepsilon_\zeta\lambda_\zeta + \varepsilon_\eta\lambda_\eta\right).$$

Uma variedade quase Hermitiana $(M, \Lambda, \{\varepsilon_{\delta}\})$ é dita ser (1,2)-simplética (ou quasi Kähler) se

$$d\Omega\left(X,Y,Z\right) = 0$$

quando um dos vetores X, Y, Z é do tipo (1,0) e os outros dois são do tipo (0,1).

A Proposição 3.3.3 fornece um critério, em termos de triplas soma zero de t-raízes, para uma estrutura (Λ, J) sobre \mathbb{F} ser (1, 2)-simplética.

Definição 3.3.4. Seja $J = \{\varepsilon_{\delta}, \delta \in \Pi_{t}\}$ uma equi sobre \mathbb{F} . Uma tripla soma zero de t-raízes (δ, ζ, η) é dita ser uma $\{0, 3\}$ -tripla de t-raízes se $\varepsilon_{\delta} = \varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\eta}$ e uma $\{1, 2\}$ -tripla de t-raízes caso contrário.

Observação 3.3.1. Originalmente o conceito de (0,3)-triplas e (1,2)-triplas foi discutido no caso de triplas de raízes, veja [28]. Entretanto pela Proposição 3.2.1 segue-se que uma tripla soma zero de raízes (α, β, γ) é uma (0,3)-tripla (resp. (1,2)-tripla) de raízes se e somente se $(k(\alpha), k(\beta), k(\gamma))$ é uma (0,3)-tripla (resp. (1,2)-tripla) de t-raízes.

Neste contexto é natural conjecturar que toda t-raíz é membro de uma tripla soma zero de t-raízes. Esta conjectura será confirmada no capítulo 5.

Proposição 3.3.5. A estrutura quase Hermitiana invariante $(J = \{\varepsilon_{\delta}\}, \Lambda = \{\lambda_{\delta}\}), \delta \in \Pi_{t}$, $\delta \in \{1, 2\}$ -simplética se e somente se

$$\varepsilon_{\delta}\lambda_{\delta} + \varepsilon_{\zeta}\lambda_{\zeta} + \varepsilon_{\eta}\lambda_{\eta} = 0$$

para toda $\{1,2\}$ -tripla de t-raízes (δ,ζ,η) .

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 3.3.3.

Uma métrica invariante Λ é (1,2)-simplética com respeito a J se o par (Λ, J) é (1,2)-simplético. Uma eqci J é (1,2)-admissível se existe Λ tal que o par (Λ, J) é (1,2)-simplético.

Uma variedade quase Hermitiana é dita ser quase Kähler se Ω é simplética, isto é, $d\Omega = 0$. Quando $d\Omega = 0$ e J é integrável dizemos que a variedade é Kähler, [21].

Consideremos o tensor de Nijenhuis (invariante) sobre F, dado por:

$$-\frac{1}{2}N(X,Y) = -\left[JX,JY\right] + \left[X,Y\right] + J\left[X,JY\right] + J\left[JX,Y\right], \qquad X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

Seja $J = \{ \varepsilon_{\delta}, \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}} \}$ uma eqci sobre \mathbb{F} . O tensor de Nijenhuis calculado na base $\{ X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_{M} \}$ de $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ é dado por

$$-\frac{1}{2}N(X_{\alpha}, X_{\beta}) = -\left[JX_{\alpha}, JX_{\beta}\right] + \left[X_{\alpha}, X_{\beta}\right] + J\left[X_{\alpha}, JX_{\beta}\right] + J\left[JX_{\alpha}, X_{\beta}\right]$$

$$= N_{\alpha,\beta}\varepsilon_{k(\alpha)}\varepsilon_{k(\beta)}X_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$$

$$- N_{\alpha,\beta}\varepsilon_{k(\beta)}\varepsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}X_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,\beta}\varepsilon_{k(\alpha)}\varepsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}X_{\alpha+\beta}$$

$$= N_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_{k(\alpha)} + \varepsilon_{k(\beta)}\right)\left(\varepsilon_{k(\beta)} - \varepsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}\right)X_{\alpha+\beta}$$
(3.3)

onde $k(\alpha), k(\beta) \in \Pi_{\mathfrak{t}}$.

Proposição 3.3.6. ([28], [35]) Uma estrutura quase Hermitiana sobre \mathbb{F} é quase Kähler se e somente se é Kähler.

Demonstração. Notamos que um par (Λ, J) quase Kähler não pode admitir $\{0, 3\}$ -triplas de t-raízes. Pois, se admitisse uma $\{0, 3\}$ -tripla (δ, ζ, η) em Π_t , como $d\Omega = 0$, pela Proposição 3.3.3 teríamos a igualdade

$$\lambda_{\delta} + \lambda_{\zeta} + \lambda_{\eta} = 0$$

o que é impossível, já que $\lambda_{\delta}, \lambda_{\zeta}, \lambda_{\eta} > 0$. Assim a equi J admite apenas $\{1, 2\}$ -triplas e nesse caso, por (3.3), é fácil ver que o tensor de Nijenhuis é nulo, logo J é integrável. Portanto o par (Λ, J) é Kähler. A recíproca é imediata.

Agora observamos que pela Proposição 3.2.3 as ecqi sobre \mathbb{F} estão em bijeção com bases de Π_t e portanto em bijeção com as escolhas de t-raízes positivas. A correspondência é dada explicitamente por

$$\delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+ \longleftrightarrow \varepsilon_{\delta} = +1.$$

Assim, pelas Proposições 3.3.3 e 3.3.6 obtemos um critério para uma métrica ser Kähler.

Proposição 3.3.7. ([4],[6]) Dada uma estrutura complexa invariante J sobre \mathbb{F} , uma métrica invariante Λ é Kähler (com respeito a J) se e somente se satisfaz

$$\lambda_{\delta+\eta} = \lambda_{\delta} + \lambda_{\eta} \ para \ todo \ \delta, \eta \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+.$$

3.4 Uma condição necessária para estruturas serem (1, 2)-simpléticas

A Proposição 3.3.5 fornece um critério para estruturas (1, 2)-simpléticas invariantes. Essas estruturas estão intimamente relacionadas com aplicações harmônicas sobre variedades bandeira. No caso das variedades bandeira maximal, Cohen, Negreiros e San Martin mostraram em [29] um critério para estruturas (1,2)-simpléticas invariante baseado em subsistemas de raízes de posto 3.

Nesta seção mostramos que um dos resultados em [29] pode ser estendido às variedades bandeiras generalizadas via o uso de t-raízes.

Sejam G/T uma variedade bandeira maximal e Π o sistema de raízes correspondente a G. Dado um conjunto de quatro raízes $q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ com $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ dizemos que uma tripla de raízes $\{(u+v), w_1, w_2\}$ é extraída de q por u e v se $\{u, v, w_1, w_2\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. É claro que qualquer tal tripa satisfaz $(u+v) + w_1 + w_2 = 0$.

Definição 3.4.1. ([29]) Seja $J = \{\varepsilon_{\alpha}\}$ uma equi sobre uma variedade bandeira maximal G/T. Dizemos que J é livre de cone se a seguinte condição é satisfeita:

Se $q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ é uma quádrupla de raízes que não contém pares de raízes opostas e $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ então o número de $\{0,3\}$ -triplas extraídas de q é diferente de 1.

Uma justificativa para o termo cone na definição acima é dada em [29]. Conforme observado em [29], na definição anterior, a hipótese de q não possuir pares de raízes opostas foi incluída apenas para enfatizar esse fato, sendo essa hipótese redundante. De fato, se por exemplo, $\alpha = -\beta$ então $\delta = -\gamma$, e as possíveis triplas extraídas da quadrupla são $(\beta + \gamma, -\beta, -\gamma)$, $(\beta - \gamma, -\beta, \gamma)$, $(-\beta + \gamma, \beta, -\gamma)$ e $(-\beta - \gamma, \beta, \gamma)$. É fácil ver que nesse conjunto as $\{0,3\}$ -triplas aparecem em pares, independentemente de J.

Teorema 3.4.2. ([29]) Seja G/T uma variedade bandeira maximal. Uma condição necessária para o par (J,Λ) em G/T ser (1,2)-simplético é que J seja livre de cone no sentido da definição anterior.

Estamos interessados em estender este resultado para variedades bandeira generalizadas. Para tanto faremos definições análogas às anteriores com t-raízes no lugar de raízes.

Dada uma quádrupla de t-raízes $q = \{\delta, \zeta, \eta, \tau\}$ com $\delta + \zeta + \eta + \tau = 0$ dizemos que uma tripla $\{(u+v), w_1, w_2\}$ é extraída de q por u e v se $\{u, v, w_1, w_2\} = \{\delta, \zeta, \eta, \tau\}$. É claro que qualquer tal tripla satisfaz $(u+v) + w_1 + w_2 = 0$. A seguir definiremos a condição livre de t-cones em termos dessas triplas de t-raízes.

Definição 3.4.3. Seja $J = \{ \varepsilon_{\delta}, \delta \in \Pi_t \}$ uma eqci sobre uma variedade bandeira \mathbb{F} . Dizemos que J é livre de t-cone se a seguinte condição é satisfeita:

Se $q = \{\delta, \zeta, \eta, \tau\}$ é uma quádrupla de t-raízes que não contém pares de t-raízes opostas e $\delta + \zeta + \eta + \tau = 0$ então o número de $\{0,3\}$ -triplas extraídas de q é diferente de 1.

É claro que as definições 3.4.1 e 3.4.3 coincidem quando \mathbb{F} é uma variedades bandeira maximal, pois neste caso $\Pi_t = \Pi$.

Seja Π_t um conjunto de t-raízes. Consideremos o espaço vetorial E (sobre \mathbb{R}) gerado por Π_t , chamamos l = dimE o posto de Π_t . Se $\Pi_t = \Pi$ é um sistema de raízes, exceto quando o sistema de raízes é G_2 , a propriedade livre de cone é uma condição sobre subsistemas de raízes de posto 3. De fato, como não existem raízes opostas em $\{\delta, \zeta, \eta, \tau\}$ o subespaço V gerado por essas raízes tem dimensão dois ou três. Agora os únicos sistemas de raízes de posto dois são $A_1 \oplus A_1$, A_2 , B_2 e G_2 . Dos quais, apenas em G_2 existem tais quádruplas. Portanto, a interseção $\Pi \cap V$ é um subsistema de raízes de posto 3 quando não estamos no caso de G_2 . Uma discussão sobre a ocorrência da propriedade livre de cone no caso G_2 é apresentada em [29].

Observamos que no caso das variedades bandeira generalizadas quando Π_t não é um sistema de raízes a propriedade livre de t-cone não é necessariamente uma condição sobre um subconjunto de t-raízes de posto 3. Por exemplo, se $\mathbb{F} = \frac{SO(2n+1)}{U(r)\times U(n-r)}$, r>1, conforme veremos no capítulo 5, $\Pi_t = \{\pm \delta_1, \pm \delta_2, \pm (\delta_1 - \delta_2), \pm 2\delta_1, \pm 2\delta_2\}$. Nesse caso, é fácil ver que $(\delta_1, \delta_2, \delta_1 - \delta_2, -2\delta_1)$ é uma quadrupla soma zero de t-raízes de posto 2.

Lema 3.4.4. ([21]) Seja w uma k-forma diferencial invariante sobre uma variedade bandeira G/K. Então

$$dw(X_1, \dots, X_{k+1}) = (k+1) \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

para X_1, \ldots, X_{k+1} na álgebra de Lie $\mathfrak g$ de G. Aqui \widehat{X}_i significa que o vetor X_i foi omitido.

Observamos que um resultado análogo ao anterior vale em espaços homogêneos arbitrários, ver [21]. Usando a Proposição 3.3.1 e o lema anterior, pode-se computar $d^2\Omega$ na base de Weyl $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_M\}$. Mais precisamente, tem-se

Lema 3.4.5. ([29]) $d^2\Omega$ é dada pela soma dos seguintes seis termos

$$d^{2}\Omega\left(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}, X_{\rho}\right) = +N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\rho}\left(\varepsilon_{\alpha+\beta}\lambda_{\alpha+\beta} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma} + \varepsilon_{\rho}\lambda_{\rho}\right)$$

$$-N_{\alpha,\gamma}N_{\beta,\rho}\left(\varepsilon_{\alpha+\gamma}\lambda_{\alpha+\gamma} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta} + \varepsilon_{\rho}\lambda_{\rho}\right)$$

$$+N_{\alpha,\rho}N_{\beta,\gamma}\left(\varepsilon_{\alpha+\rho}\lambda_{\alpha+\rho} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma}\right)$$

$$+N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\rho}\left(\varepsilon_{\beta+\gamma}\lambda_{\beta+\gamma} + \varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\rho}\lambda_{\rho}\right)$$

$$-N_{\beta,\rho}N_{\alpha,\gamma}\left(\varepsilon_{\beta+\rho}\lambda_{\beta+\rho} + \varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma}\right)$$

$$+N_{\gamma,\rho}N_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_{\gamma+\rho}\lambda_{\gamma+\rho} + \varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta}\right).$$

$$(3.4)$$

Esses termos se cancelam entre si, donde $d^2\Omega = 0$.

Denotaremos por $d\Omega^{(i,j)}$ a (i,j) componente de $d\Omega$, por exemplo, $d\Omega^{(2,1)}$ é a soma de todos os valores $d\Omega(X,Y,Z)$, onde os vetores X,Y,Z são tais que um deles é do tipo (0,1) e os outros dois é do tipo (1,0).

Assim, é conveniente usarmos a seguinte notação $d\Omega^{\{0,3\}}=d\Omega^{(0,3)}+d\Omega^{(3,0)}$ e $d\Omega^{\{1,2\}}=d\Omega^{(1,2)}+d\Omega^{(2,1)}$, então

$$d\Omega = d\Omega^{\{0,3\}} + d\Omega^{\{1,2\}}$$

O próximo resultado é uma consequência imediata da Proposição 3.3.3 e da caracterização de métricas invariantes e equi por t-raízes.

Lema 3.4.6. Suponha $d^{(i,j)}\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}) = 0$ e sejam $\delta, \zeta, \eta \in \Pi_{t}$ tais que $k(\alpha) = \delta$, $k(\beta) = \zeta$ e $k(\gamma) = \eta$ então $d^{(i,j)}\Omega(\mathfrak{m}_{\delta}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{\gamma}^{\mathbb{C}}) = 0$.

Agora obtemos uma condição necessária para o par (J, Λ) ser (1, 2)-simplético sobre variedades generalizadas.

Teorema 3.4.7. Uma condição necessária para o par (J, Λ) ser (1, 2)-simplético é que J seja livre de t-cone no sentido da definição 3.4.3.

Demonstração. Seja $q = \{\delta, \zeta, \eta, \tau\}$ uma quadrupla de t-raízes tal que $\delta + \zeta + \eta + \tau = 0$. Observamos que pelo Lema 3.3.2, existem raízes $\alpha, \beta, \gamma, \rho \in \Pi_M$ tais que $k(\alpha) = \delta, k(\beta) = \zeta, k(\gamma) = \eta, k(\rho) = \tau$ e $\alpha + \beta + \gamma + \rho = 0$.

Como (J, Λ) é (1, 2)-simplético, pelo Lema 3.4.6 segue-se que dentre os seis termos em (3.4) aqueles que correspondentes a $\{1, 2\}$ triplas de raízes são zero.

Assim, se fosse possível extrair apenas uma $\{0,3\}$ -tripla (de t-raízes) de q, pela Proposição 3.2.1 concluímos que seria possível extrair também apenas uma $\{0,3\}$ -tripla de raízes da quadrupla $q' = \{\alpha, \beta, \gamma, \rho\}$. Então, nesse caso, $d^2\Omega$ seria diferente de zero, o que contradiz o Lema 3.4.5.

Com relação à recíproca do Teorema anterior, no caso das variedades bandeira maximais temos:

Teorema 3.4.8. ([29], Teoremas 6.4 e 7.1) Seja $\mathbb{F} = G/T$ uma variedade bandeira maximal tal que as raízes de G têm o mesmo comprimento. Se $J = \{\varepsilon_{\alpha}\}$ é livre de cone em \mathbb{F} então J é (1,2)-admissível.

É natural questionar se este resultado estende-se ao caso das variedades bandeira generalizadas. Uma maneira de fazer isso é tentar adaptar a demonstração deste Teorema às t-raízes, mas a dificuldade nesse caso está no fato de que o conjunto das t-raízes não é necessariamente um sistema de raízes no sentido clássico. A recíproca do Teorema 3.4.7 nos outros casos de variedades bandeira maximal também foi analisada em [29].

3.5 O Tensor de Ricci

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão Riemanniana correspondente. Consideremos o tensor curvatura $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$. O tensor de Ricci, denotado por Ric(X,Y), é definido como o traço da aplicação $Z \longmapsto R(X,Z)Y$.

Definição 3.5.1. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é Einstein, se o tensor de Ricci satisfaz a equação:

$$Ric(X, Y) = cg(X, Y)$$

onde X, Y são campos de vetores sobre M. Esta equação é chamada a equação de Einstein.

Se $n \geq 3$ pode-se mostrar, pela primeira identidade de Biachi, que c é constante. Neste caso c é chamada constante de Einstein.

Os espaços homogêneos são especialmente importantes na geometria diferencial, pois neles podemos computar, efetivamente, muitas quantidades geométricas, como por exemplo as curvaturas seccional, de Ricci e escalar.

No caso das variedades bandeira, temos

Proposição 3.5.2. ([2],[6]) Seja $\mathbb{F} = G/K$ uma variedade bandeira. Para $X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ considere os tensores R_X e T_{XY} em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ definidos por

$$T_{XY} = \frac{1}{2}([X, [Y, Z]_{\ell}] + [Y, [X, Z]_{\ell}]), \quad Z \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}};$$

$$-2g(R_XY, Z) = g(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}) + g(Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) + g(Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}), \quad Z \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

Então o tensor de Ricci para uma métrica invariante g é dado por

$$Ric(X,Y) = trR_X R_Y + trT_{XY} \quad X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$
 (3.5)

Computando a expressão (3.5) na base de Weyl $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_M\}$, pode-se mostrar que

Proposição 3.5.3. ([6]) O tensor de Ricci para uma métrica invariante Λ é dado por

$$Ric(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0,$$
 $\alpha, \beta \in \Pi_M, \alpha + \beta \notin \Pi_M,$

$$Ric(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = (\alpha, \alpha) + \sum_{\substack{\phi \in \Pi_K \\ \alpha + \phi \in \Pi}} N_{\alpha, \phi}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta \in \Pi_M \\ \alpha + \beta \in \Pi_M}} \frac{N_{\alpha, \beta}^2}{\lambda_{\alpha + \beta} \lambda_{\beta}} \left(\lambda_{\alpha}^2 - (\lambda_{\alpha + \beta} - \lambda_{\beta})^2\right)$$
(3.6)

Já que $g_{\alpha,\beta} = g(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0$ se $\alpha + \beta \notin \Pi_M$, as equações de Einstein são dadas por $Ric_{\Lambda}(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = cg_{\alpha} = c\lambda_{\alpha}$. Estas equações reduzem-se a sistema algébrico. Como $Ric(\kappa g) = Ric(g)$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) nesse sistema algébrico, temos a liberdade de normalizar as equações colocando c = 1 ou um dos $\lambda_{\alpha} = 1$. Além disso, já sabemos que qualquer métrica invariante Λ depende exatamente de $|\Pi_{\mathfrak{t}}^+|$ parâmetros.

Portanto o problema de encontrar métricas de Einstein invariantes sobre \mathbb{F} reduz-se ao problema de encontrar soluções (positivas) de um sistema algébrico de $\left|\Pi_{\mathfrak{t}}^{+}\right|$ equações e $\left|\Pi_{\mathfrak{t}}^{+}\right|$ incógnitas.

No apêndice apresentamos outra maneira equivalente de obter-se as equações de Einstein em variedades bandeira.

3.6 A métrica Kähler-Einstein

Em [36], Wang e Ziller obtiveram exemplos de espaços homogêneos compactos e simplesmente conexos que não admitem nenhuma métrica invariante Einstein. Nesse sentido, as variedades bandeira são espaços homogêneos privilegiados pois, como veremos adiante, elas admitem uma única métrica invariante Kähler-Einstein, a menos de ação do grupo de Weyl e homotetias.

Seja (M,g,J,Ω) uma variedade Kähler. A forma de Ricci é a 2-forma ρ definida por

$$\rho(X,Y) = Ric(JX,Y).$$

Comparando com a forma de Kähler Ω (veja (3.2)), podemos concluir que g será Einstein se e somente se

$$Ric(JX,Y) = cg(JX,Y), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \quad \text{ou seja}, \quad \rho = c\Omega.$$

Consideramos agora uma variedade bandeira $\mathbb{F} = G/K$ e fixamos uma estrutura complexa invariante J (ou seja, uma escolha de raízes positivas em Π_M , conforme a Proposição 3.2.3). A forma Ricci na origem o = eK, avaliada na base $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_M\}$ é dada por

$$\rho_o(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 2i\langle \delta, \alpha \rangle,$$

onde $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Pi_M^+} \beta$ e \langle , \rangle é o produto interno em $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ induzido pela forma Cartan-Killing em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, veja por exemplo [7] ou [32].

Teorema 3.6.1. (Borel-Hirzebruch, veja [7] ou [26]) Seja \mathbb{F} uma variedade bandeira. Dada uma estrutura complexa invariante J sobre \mathbb{F} , existe uma única métrica Kähler-Einstein invariante Λ_J (a menos de escalar). Esta métrica é dada por

$$\Lambda_J = \left\{ \lambda_{\alpha} = c \cdot \langle \delta, \alpha \rangle : \delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Pi_M^+} \beta \right\}.$$

onde Π_M^+ é a escolha de raízes positivas em Π_M correspondente a J.

Temos ainda um resultado mais geral.

Teorema 3.6.2. (Y. Matsushima, veja [11] 8.95) Todo espaço homogênea Kähler, compacto e simplesmente conexo admite (a menos de homotetia) uma única métrica invariante Kähler-Einstein.

3.7 A métrica normal

Seja $\mathbb{F}=G/K$ uma variedade bandeira. Consideremos a decomposição:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$$

onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_s$ sendo cada \mathfrak{m}_i um submódulo $ad(\mathfrak{k})$ -invariante e irredutível. A métrica normal sobre \mathbb{F} , denotada por g_B é a negativa da forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} , isto é,

$$g_{B}\left(\cdot,\cdot\right)=-\left(\cdot,\cdot\right)|_{\mathfrak{m}_{1}\times\mathfrak{m}_{1}}-\cdots-\left(\cdot,\cdot\right)|_{\mathfrak{m}_{s}\times\mathfrak{m}_{s}}$$

onde (\cdot,\cdot) denota a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} .

Observe que todo espaço homogêneo G/H com G compacto e semi-simples admite a métrica normal, pois o fato de G ser compacto garante que a forma de Cartan-Killing é negativa definida. Wang e Ziller, em [37], caracterizaram todos os espaços homogêneos sobre os quais g_B é Einstein, ou seja, quando a curvatura de Ricci é constante.

Teorema 3.7.1. ([37]) Seja G/H um espaço homogêneo, onde G é um grupo de Lie compacto, conexo e semi-simples e H um subgrupo fechado. Se H é um toro em G, então g_B é Einstein se e somente se o toro é maximal e todas as raízes de G têm o mesmo comprimento com respeito à métrica $-(\cdot,\cdot)$.

Portanto, se $\mathbb{F} = G/K$ é uma variedade bandeira maximal então a métrica g_B é Einstein se e somente se G é SU(n), SO(2n), E_6 , E_7 ou E_8 .

O método adotado por Wang e Ziller em [37] é baseado em considerar o tensor de Ricci como um endomorfismo simétrico em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ e escrever $Ric(g_B)$ em termos do operador de Casimir da representação isotrópica de G/H. Assim o problema foi reduzido a um problema de teoria de Lie.

Mais geralmente, conforme observado em [37], o tensor de Ricci para qualquer métrica invariante g também pode ser representado em termos do operador de Casimir da representação isotrópica. Entretanto, para uma métrica invariante arbitrária g, o operador de Casimir e consequentemente o tensor de Ricci podem não serem positivos definidos.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE EINSTEIN EM VÁRIAS CLASSES DE VARIEDADES BANDEIRA

Neste capítulo computamos as equações algébricas de Einstein nas variedades bandeira do tipo B_l , C_l e G_2 .

Na classe B_l obtivemos as equações de Einstein para o caso

$$\mathbb{F}_B\{n_1, \dots, n_{s+1}\} = \frac{SO(2n+1)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s) \times SO(2n_{s+1}+1)}$$

onde $n = \sum_i n_i$, $n_{s+1} \ge 0$ e $n_{s+1} \ne 1$. Assim as equações no caso $SO(2n+1)/(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))$ foram obtidas como caso particular de $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$.

Já para a classe C_l , computamos o sistema algébrico de Einstein nas seguintes famílias de variedades bandeira

$$\mathbb{F}_{C}(n_{1},\ldots,n_{s}) = \frac{Sp(n)}{U(n_{1}) \times \cdots \times U(n_{s})},$$

com $n_1 + \cdots + n_s = n$ e $s \leq n$. Observamos que o método de obter as equações de Einstein no caso $Sp(n)/(U(n_1) \times \cdots \times U(n_k) \times Sp(l))$ (l > 1) é análogo àquele que descrevemos na seção 4.3.

Em ambos os casos acima usamos a Proposição 3.5.3.

Para o sistema algébrico obtido no caso maximal de G_2 , usamos a expressão do tensor de Ricci dada em [26]. As variedades bandeira generalizada do tipo G_2 foram discutidas em [6].

O sistema de Einstein em outros caso excepcionais foi computado em [20]. Já os casos A_l e D_l foram estudados em [2] e [6].

Os resultados deste capítulo são novos, exceto quando explicitamente mencionado.

4.1 O caso A_l

Como já vimos, as variedades bandeira do tipo A_l são da forma

$$\mathbb{F}_{A}(n_{1},\ldots,n_{s}) = \frac{SU(n)}{S\left(U\left(n_{1}\right)\times\cdots\times U\left(n_{s}\right)\right)}, \quad n = \sum_{i=1}^{s} n_{i}, s \leq n.$$

As equações de Einstein nesta classe de variedades bandeira, foram determinadas em [2] e [6].

Uma subálgebra de Cartan para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ é dada pelo conjunto das matrizes da forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \left\{ diag\left(\varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \dots, \varepsilon_{n}\right), \varepsilon_{i} \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i} = 0 \right\}.$$

O sistema de raízes do par $\left(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ é formado pelos funcionais

$$\Pi = \{ \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \le i < j \le n \}.$$

Aqui estamos denotando o funcional α_{ij} : $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mapsto \varepsilon_i - \varepsilon_j$ por $\varepsilon_i - \varepsilon_j$.

As raízes positivas são dadas por

$$\Pi^+ = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \le i < j \le n \} .$$

No que segue será conveniente usar a notação empregada em [6], isto é, denotamos:

$$\varepsilon_a^i = \varepsilon_{n_1 + \dots + n_{i-1} + a}$$
 com $i = 1, \dots, s$ e $n_0 = 0$.

Logo temos, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{s} (\mathfrak{u}(n_1) \times \cdots \times \mathfrak{u}(n_s))^{\mathbb{C}}$ e o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é dado por

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i \right) : 1 \le a < b \le n_i \right\} \text{ e}$$

$$\Pi_K^+ = \left\{ \varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i : 1 \le a < b \le n_i \right\}.$$

Podemos escrever $\Pi^+ = \Pi_K^+ \cup \Pi_M^+$ onde $\Pi_M^+ = \left\{ \varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j : 1 \le i < j \le s \right\}$.

Usando o Lema 2.1.2, temos

$$\mathfrak{t} = \left\{ diag\left(\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s\right) \right\} \in \mathfrak{h},$$

onde cada $\varepsilon_{n_i}^i$ aparece exatamente n_i vezes, $i = 1, \ldots, s$.

Para distinguir raízes e t-raízes denotaremos por $\delta_i - \delta_j$ a restrição do funcional $(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j)$ a subálgebra \mathfrak{t} . Assim

$$\Pi_{\mathfrak{t}} = \{ \pm (\delta_i - \delta_j) ; 1 \le i \le s \}.$$

Em particular existem $\frac{s(s-1)}{2}$ t-raízes positivas. Portanto,

Proposição 4.1.1. O conjunto Π_t das t-raízes correspondente a $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$ é um sistema de raízes do tipo A_{s-1} .

A seguir escrevemos as equações que uma métrica G-invariante em $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$ deve satisfazer para ser Einstein.

Proposição 4.1.2. ([2]) As equações de Einstein em $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$ se reduzem ao seguinte sistema algébrico

$$n_i + n_j + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{n_l}{\lambda_{il} \lambda_{jl}} (\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2) = \lambda_{ij} \qquad 1 \le i < j \le s$$

$$(4.1)$$

constituído de s(s-1)/2 equações com s(s-1)/2 incógnitas λ_{ij} .

Soluções conhecidas

Agora vamos descrever algumas métricas de Einstein conhecidas sobre as variedades bandeira $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$. Note que de acordo o Teorema 3.6.1, para cada estrutura complexa invariante a métrica Kähler é uma solução do sistema algébrico (4.1).

Outra solução clássica, de acordo com o Teorema 3.7.1, é a métrica normal, a qual é Einstein em $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$ se, e somente se, $n_1=\cdots=n_s$, de acordo com [6] e [32].

No caso, em que s=1, isto é, $n_1=\cdots=n_s=1$ a equação (4.1) sobre

$$\mathbb{F}_{A}(n) = \frac{SU(n)}{S(U(1) \times \cdots \times U(1))},$$

(U(1) n vezes) se reduz a

$$2 + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i,j} \frac{1}{\lambda_{il} \lambda_{jl}} (\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2) = \lambda_{ij}. \tag{4.2}$$

Alguns autores tentaram encontrar novas métricas de Einstein sobre $\mathbb{F}_A(n)$. Dentre essas métricas, mencionamos algumas:

(i) Arvanitoyeorgos em [6], mostrou que em $\mathbb{F}_A(n)$ a métrica dada por

$$\lambda_{1i} = \lambda_{1j} = n - 1, \quad i \neq 1, j \neq 1$$

 $\lambda_{kl} = n + 1, \quad k, l \neq 1.$

é uma solução de (4.2). Esta métrica pode ser representada por

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 0 & a & \cdots & \cdots & a \\ & 0 & b & \cdots & b \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & b \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

onde Λ é simétrica, a=n-1 e b=n+1. Ela reduz o sistema (4.2) em um sistema algébrico de duas equações e duas incógnitas $(a \ e \ b)$, cuja solução é a=n-1 e b=n+1.

Como é sabido o grupo de Weyl das álgebras de Lie do tipo A_l coincide com o grupo das permutações de l + 1 elementos, ver por exemplo [30]. Além disso, as equações de Einstein são invariante pela ação do grupo de Weyl, ver [8] ou [32].

Portanto, aplicando as transposições geradoras, do grupo das permutações, na métrica Λ_A , obtemos n métricas equivalentes a Λ_A , dadas por

$$\lambda_{si} = \lambda_{sj} = n - 1, \quad i \neq s, j \neq s$$

$$\lambda_{kl} = n + 1, \quad k, l \neq s.$$

 $com 1 \le s \le n$.

(ii) Outra classe de métricas de Einstein foi obtida por Senda, (ver [26]), no caso em que n=2m, (m>2). Neste caso foi considerada a seguinte restrição para uma métrica em $\mathbb{F}_A(n)$

$$\lambda_{ij} = a,$$
 se $1 \le i < j \le m;$
 $\lambda_{ij} = b,$ se $i \le m < j;$
 $\lambda_{ij} = c,$ se $m < i < j \le 2m.$

Esta restrição pode ser representada da seguinte forma

Esta escolha reduz as equações de Einstein a um sistema algébrico de três equações e três incógnitas, cuja solução é dada, a menos de multiplicação por escalar, por a=c=m+2 e b=3m-2.

(iii) Ainda nas condições do item anterior, Santos em [32], encontrou uma outra solução (não isométrica a (ii)), dada por a = c = m + 5 e b = 3m - 5 com $m \ge 6$. Ele também mostrou que a métrica invariante

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

é Einstein em $\mathbb{F}(5) = \frac{SU(5)}{S(U(1) \times \cdots \times U(1))}$.

4.2 O caso B_l

Denotaremos as variedades bandeira da classe B_l da seguinte forma:

tipo
$$I: \mathbb{F}_B(n_1, \dots, n_s) := \frac{SO(2n+1)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s)}, \quad n \ge 2 \text{ e } s \le n;$$

tipo II:
$$\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\} := \frac{SO(2n+1)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times SO(2n_{s+1}+1)}, \quad n_{s+1}\geq 2;$$

onde $n = \sum_i n_i$. Note que quando $n_{s+1} = 0$ em $\mathbb{F}_B\{n_1, \dots, n_{s+1}\}$ do tipo II, obtemos $\mathbb{F}_B(n_1, \dots, n_s)$ do tipo I.

Nesta seção, determinamos as equações de Einstein para todas as famílias de variedades bandeira da classe B_l . É razoável esperar que essas equações sejam algebricamente mais complicadas neste caso, já que as álgebras do tipo B_l possuem raízes do tipo $\pm \varepsilon_i$ e $\pm (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$.

Na verdade, ficará evidente que quanto mais tipos de raízes o par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ possuir, mais complicado, algebricamente, será o sistema de Einstein da variedade bandeira G/K. Entretanto, ainda nesses casos, conseguimos encontrar novas soluções quando o número de incógnitas for relativamente pequeno.

O próximo resultado mostra que o número de somandos isotrópicos nas variedades bandeira, da classe B_l , do tipo I e II é o mesmo.

Proposição 4.2.1. O conjunto das t-raízes de ambos espaços $\mathbb{F}_B(n_1,\ldots,n_s)$ e $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$ é dado por

$$\Pi_{\mathfrak{t}} = \{ \pm \delta_i, \pm 2\delta_i, 1 \le i \le s \} \cup \{ \pm (\delta_i \pm \delta_j), 1 \le i < j \le s \}$$

onde δ_i representa a restrição do funcional ε_a^i à subálgebra \mathfrak{t} .

Demonstração. Começamos a análise com o caso $\mathbb{F}_B(n_1,\ldots,n_s)$ do tipo I.

As mátrizes da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n+1)$ tem a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix}$$

com β e γ matrizes $1 \times n$, as demais $n \times n$, com b e c matrizes $n \times n$ anti-simétricas. Uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ é dada por

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \left\{ diag\left(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n\right), \varepsilon_i \in \mathbb{C} \right\}. \tag{4.3}$$

O sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}),\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é dado por

$$\Pi = \{ \pm \varepsilon_i, 1 \le i \le n \} \bigcup \{ \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \le i < j \le n \} \bigcup \{ \pm (\varepsilon_i + \varepsilon_j), 1 \le i \ne j \le n \}$$

onde ε_i denota o funcional $diag(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n) \mapsto \varepsilon_i \in \varepsilon_i - \varepsilon_j$ denota o funcional $diag(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n) \mapsto \varepsilon_i - \varepsilon_j$.

Assim a escolha canônica de raízes positivas fica

$$\Pi^{+} = \{\varepsilon_{i}, 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{\varepsilon_{i} - \varepsilon_{j}, 1 \leq i < j \leq n\} \bigcup \{\varepsilon_{i} + \varepsilon_{j}, 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

O sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(n_s, \mathbb{C}), \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é dado por

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i \right) : 1 \le a < b \le n_i \right\}, \qquad \varepsilon_a^i = \varepsilon_{n_1 + \dots + n_{i-1} + a}.$$

Então

$$\Pi_{M}^{+} = \left\{ \varepsilon_{a}^{i}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq a \leq n_{i} \right\} \bigcup \left\{ \varepsilon_{a}^{i} - \varepsilon_{b}^{j}, 1 \leq i < j \leq s \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{b}^{j}, 1 \leq i \neq j \leq s \right\} \bigcup \left\{ \varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{b}^{i}, 1 \leq a \neq b \leq n_{i} \right\}.$$

O centro de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ como subálgebra de \mathfrak{h} tem a forma

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda & \\ & & -\Lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \right\},\tag{4.4}$$

onde
$$\Lambda = diag\left(\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s\right)$$

sendo que cada $\varepsilon_{n_i}^i$ aparece exatamente n_i vezes, $i=1,\ldots,s$.

Para distinguir raízes e t-raizes, denotamos a restrição $k(\varepsilon_a^i)$ por δ_i , $k(\varepsilon_a^i \pm \varepsilon_b^j)$ por $\delta_i \pm \delta_j$ e $k(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i)$ por $2\delta_i$. (Lembrando que $k(\alpha) = \alpha|_{\mathfrak{t}}$, $\alpha \in \Pi_M$.) Assim

$$\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = k \left(\Pi_M^+ \right) = \{ \delta_i, 2\delta_i : 1 \le i \le s \} \cup \{ \delta_i \pm \delta_j; 1 \le i < j \le s \}.$$

Em particular o número de raízes positivas é $s+\frac{s(s-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}+s=s^2+s$. Note que neste caso $\Pi_{\mathfrak{t}}$ não é um sistema de raízes no sentido clássico.

Para a análise do caso $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$ do tipo II, tomamos a mesma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ dada em (4.3). O sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, com $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n_1,\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(n_s,\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(2n_{s+1}+1,\mathbb{C})$, é dado por

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i \right) : 1 \le i \le s, 1 \le a < b \le n_i \right\} \bigcup \left\{ \pm \varepsilon_a^{s+1}, 1 \le a \le n_{s+1} \right\} \bigcup \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^{s+1} - \varepsilon_b^{s+1} \right) ; 1 \le a < b \le n_{s+1} \right\} \bigcup \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^{s+1} + \varepsilon_b^{s+1} \right) ; 1 \le a < b \le n_{s+1} \right\}.$$

Sendo assim, obtemos Π_M como a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{ \pm \varepsilon_a^i : 1 \le i \le s, \ 1 \le a \le n_i \right\}, \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j \right) : 1 \le i < j \le s + 1 \right\},$$

$$\left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^j \right) : 1 \le i < j \le s + 1 \right\},$$

$$\left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i \right) : 1 \le i \le s, \ 1 \le a < b \le n_i \right\}.$$

A interseção do centro de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ com a subálgebra \mathfrak{h} é constituído pelas matrizes diagonais da forma (4.4), com

$$\Lambda = diag\left(\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, 0, \dots, 0\right)$$

$$(4.5)$$

onde cada $\varepsilon_{n_i}^i$ aparece exatamente n_i vezes, $i=1,\ldots,s$. Restringindo as raízes de Π_M^+ a \mathfrak{t} e usando a notação $\delta_i:=k(\varepsilon_a^i)$ obtemos

$$\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = \{\delta_i, 2\delta_i : 1 \le i \le s\} \cup \{\delta_i \pm \delta_j; 1 \le i < j \le s\}$$

ou seja, como no caso $n_{s+1}=0$. Isto completa a demonstração.

Agora vamos computar as equações algébricas de Einstein para as variedades $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$ do tipo II.

Tomamos $X = diag(0, a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$ e $Y = diag(0, b_1, \dots, b_n, -b_1, \dots, -b_n)$. A forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ é dada por

$$(X,Y) = 2(2n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = tr(XY)(2n-1).$$

Usando a expressão da forma de Cartan-Killing, obtemos os duais das raízes, isto é,

$$H_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda_{\alpha} & \\ & & -\Lambda_{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde Λ_{α} é uma matriz $n \times n$ diagonal e

$$\Lambda_{\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j}} = \frac{1}{2(2n-1)} diag(0, \dots, 1_{i}, \dots, -1_{j}, \dots, 0);$$

$$\Lambda_{\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j}} = \frac{1}{2(2n-1)} diag(0, \dots, 1_{i}, \dots, 1_{j}, \dots, 0);$$

$$\Lambda_{\varepsilon_{i}} = \frac{1}{2(2n-1)} diag(0, \dots, 1_{i}, \dots, 0).$$

Assim temos

$$(\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j) = (\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j) = \frac{1}{2n-1} e (\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

Usando a igualdade

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = (E_{\alpha}, E_{-\alpha}) H_{\alpha}, \tag{4.6}$$

sendo E_{α} o autovetor canônico em $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$, obtemos os elementos $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ tais que $(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -1$ e $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = -H_{\alpha}$. Assim temos

$$E^{ij} := X_{\varepsilon_{i} - \varepsilon_{j}} = \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{\varepsilon_{i} - \varepsilon_{j}}, \qquad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$E^{ji} := X_{\varepsilon_{j} - \varepsilon_{i}} = -\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{\varepsilon_{j} - \varepsilon_{i}}, \qquad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$G^{i} := X_{\varepsilon_{i}} = \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{\varepsilon_{i}}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$$G^{-i} := X_{-\varepsilon_{i}} = -\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{-\varepsilon_{i}}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$$F^{ij} := X_{\varepsilon_{i} + \varepsilon_{j}} = \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{\varepsilon_{i} + \varepsilon_{j}}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

$$F^{-ij} := X_{-(\varepsilon_{i} + \varepsilon_{j})} = -\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} E_{-(\varepsilon_{i} + \varepsilon_{j})}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

$$(4.7)$$

Para usar a Proposição 3.5.3 será conveniente usar a seguinte notação:

$$\begin{split} G_a^i &= X_{\varepsilon_a^i}, \qquad G_{-a}^{-i} = X_{-\varepsilon_a^i}, \qquad 1 \leq i \leq s \\ E_{ab}^{ij} &= X_{\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j}, \qquad \qquad 1 \leq i \neq j \leq s \\ F_{ab}^{ij} &= X_{\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^j}, \quad F_{-ab}^{-ij} &= X_{-\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i\right)}, \quad 1 \leq i < j \leq s \\ F_{ab}^i &= X_{\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i}, \quad F_{-ab}^{-i} &= X_{-\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i\right)}, \quad 1 \leq a \neq b \leq n_i. \end{split}$$

Denotaremos o produto escalar invariante $g = g_{\Lambda}$ avaliado na base $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_M\}$, por:

$$g_{ij} = g\left(E_{ab}^{ij}, E_{ba}^{ji}\right), \ f_{ij} = g\left(F_{ab}^{ij}, F_{-ab}^{-ij}\right), \ 1 \le i < j \le s$$

$$h_i = g\left(G_a^i, G_{-a}^{-i}\right), \ l_i = g\left(F_{ab}^i, F_{-ab}^{-i}\right), \ 1 \le i \le s.$$

$$(4.8)$$

Usando a equação

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$$

concluímos que em $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, o quadrado das constantes estruturais $N_{\alpha,\beta}$ não nulas é dado por

$$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2(2n-1)}. (4.9)$$

Observação 4.2.1. Observamos que as restrições das raízes $\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^{s+1}$, $\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^{s+1}$ e ε_a^i à subálgebra \mathfrak{t} , dada em (4.5), coincidem para $1 \leq i \leq s$. Portanto pela Proposição 3.1.1 temos

$$g_{i(s+1)} = f_{i(s+1)} = h_i, \quad 1 \le i \le s.$$
 (4.10)

Agora obteremos as equações de Einstein para os espaços $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$ do tipo II.

Proposição 4.2.2. Para as famílias de variedades bandeira $\mathbb{F}_B\{n_1,\ldots,n_{s+1}\}$ do tipo II as equações de Einstein são dadas por

$$Ric\left(E_{cd}^{kt}, E_{dc}^{tk}\right) = 2(n_k + n_t) + (1 + 8n_{s+1}) \frac{\left(g_{kt}^2 - (h_t - h_k)^2\right)}{h_k h_t}$$

$$+ \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{g_{ik} g_{it}} \left(g_{kt}^2 - (g_{ik} - g_{it})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{ik} f_{it}} \left(g_{kt}^2 - (f_{ik} - f_{it})^2\right)$$

$$+ \frac{4(n_t - 1)}{f_{kt} l_t} \left(g_{kt}^2 - (f_{kt} - l_t)^2\right) + \frac{4(n_k - 1)}{f_{kt} l_k} \left(g_{kt}^2 - (f_{kt} - l_k)^2\right)$$

$$= g_{kt}, \ 1 \leq k < t \leq s.$$

$$Ric\left(E_{cd}^{k(s+1)}, E_{dc}^{(s+1)k}\right) = 2(2n_{s+1} + n_k) + \frac{(n_k - 1)}{h_k l_k} \left(h_k^2 - (h_k - l_k)^2\right) + \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{h_i f_{ik}} \left(h_k^2 - (h_i - f_{ik})^2\right) + \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{h_i g_{ik}} \left(h_k^2 - (h_i - g_{ik})^2\right) = h_k, \ 1 \leq k \leq s.$$

$$Ric\left(F_{cd}^{kt}, F_{-cd}^{-kt}\right) = 2(n_k + n_t) + (1 + 2n_{s+1}) \frac{\left(f_{kt}^2 - (h_k - h_t)^2\right)}{h_k h_t}$$

$$+ \frac{(n_k - 1)}{l_k g_{kt}} \left(f_{kt}^2 - (l_k - g_{kt})^2\right) + \frac{(n_t - 1)}{l_t g_{kt}} \left(f_{kt}^2 - (l_t - g_{kt})^2\right)$$

$$+ \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{ik} g_{it}} \left(f_{kt}^2 - (f_{ik} - g_{it})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{it} g_{ik}} \left(f_{kt}^2 - (f_{it} - g_{ik})^2\right)$$

$$= f_{kt}, \ 1 \leq k < t \leq s.$$

$$Ric\left(F_{cd}^{k(s+1)}, F_{-cd}^{-k(s+1)}\right) = 2(n_k + 2n_{s+1}) + \frac{(n_k - 1)}{h_k l_k} \left(h_k^2 - (h_k - l_k)^2\right) + \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{h_i g_{ik}} \left(h_k^2 - (h_i - g_{ik})^2\right) + \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{h_i f_{ik}} \left(h_k^2 - (h_i - f_{ik})^2\right) = h_k, \ 1 \leq k \leq s.$$

$$Ric\left(F_{cd}^{k}, F_{-cd}^{-k}\right) = 4(n_{k} - 1) + \frac{\left(1 + 2n_{s+1}\right)l_{k}^{2}}{h_{k}^{2}} + 2\sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{g_{ik}f_{ik}} \left(l_{k}^{2} - \left(g_{ik} - f_{ik}\right)^{2}\right) = l_{k}, \ 1 \leq k \leq s.$$

e

$$Ric\left(G_{c}^{k}, G_{-c}^{-k}\right) = 2(n_{k} + 2n_{s+1}) + \frac{(n_{k} - 1)}{l_{k}h_{k}} \left(h_{k}^{2} - (l_{k} - h_{k})^{2}\right) + \sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{f_{ik}h_{i}} \left(h_{k}^{2} - (f_{ik} - h_{i})^{2}\right) + \sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{g_{ik}h_{i}} \left(h_{k}^{2} - (g_{ik} - h_{i})^{2}\right) = h_{k}, \ 1 \leq k \leq s.$$

Demonstração. Introduzimos a seguinte notação: dado $\alpha \in \Pi_M$, denotamos

$$\Pi_K(\alpha) := \{ \phi \in \Pi_K : \alpha + \phi \in \Pi \}$$

$$\Pi_{M}(\alpha) := \{ \beta \in \Pi_{M} : \alpha + \beta \in \Pi_{M} \}.$$

A estratégia da demonstração é simples: 1) calcular $\Pi_K(\alpha)$ e $\Pi_M(\alpha)$ para cada $\alpha \in \Pi_M$; 2) substituir a soma dos elementos destes conjuntos e as constantes estruturais (4.9) na Proposição 3.5.3, obtendo explicitamente as equações algébricas de Einstein. Como a parte trabalhosa da demonstração é apenas o passo 1), escrevemos explicitamente apenas este passo. Para simplificar o sistema algébrico, a constante c tal que Ric(g) = cg, foi tomada como $c = \frac{1}{4(2n-1)}$.

Assim, para as raízes da forma $\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t,$ com $1 \leq k < t \leq s$ temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t\right) = \left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k, 1 \le a \le n_k, a \ne c\right\} \bigcup \left\{\varepsilon_d^t - \varepsilon_a^t, 1 \le a \le n_t, a \ne d\right\}.$$

 $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t\right)$ pode ser expresso como a união dos seguintes conjuntos:

$$\left\{ \left(\varepsilon_d^t + \varepsilon_a^k \right), -\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_a^k \right) : 1 \le a \le n_k, a \ne c \right\},$$

$$\left\{ \varepsilon_d^t \right\}, \left\{ -\varepsilon_c^k \right\}, \left\{ \left(\varepsilon_d^t + \varepsilon_a^t \right), -\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_a^t \right) : 1 \le a \le n_t, a \ne d \right\},$$

$$\left\{ \left(\varepsilon_d^t \pm \varepsilon_a^i \right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), -\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_a^i \right) : 1 \le i \le s + 1, i \ne k, t \text{ e } 1 \le a \le n_i \right\}.$$

Para as raízes da forma $\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^{s+1} \in \Pi_M$, $1 \le k \le s$, temos que $\Pi_K(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^{s+1})$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{ \left(\varepsilon_d^{s+1} - \varepsilon_a^{s+1}\right), \left(\varepsilon_a^{s+1} + \varepsilon_d^{s+1}\right) : 1 \le a \le n_{s+1}, a \ne d \right\}, \left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k, a \ne c \right\}, \left\{\varepsilon_d^{s+1}\right\}.$$

Já $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k-\varepsilon_d^{s+1}\right)$ é a união dos conjuntos:

$$\left\{ \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), - \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_d^{s+1} - \varepsilon_a^i \right), \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^{s+1} \right) : 1 \le i \le s, i \ne k, 1 \le a \le n_i \right\}, \\
\left\{ - \left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_d^{s+1} \right) : 1 \le a \le n_k, a \ne c \right\}.$$

Para as raízes da forma $\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^t \in \Pi_M$, com $1 \le k < t \le s$, o conjunto $\Pi_K \left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^t \right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{ \varepsilon_a^t - \varepsilon_d^t : 1 \le a \le n_t, a \ne d \right\}, \left\{ \varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k, a \ne c \right\}.$$

No caso de $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k+\varepsilon_d^t\right)$ ele será a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\begin{aligned}
&\left\{-\varepsilon_{d}^{t}\right\}, \left\{-\varepsilon_{c}^{k}\right\}, \left\{\left(\varepsilon_{a}^{k} - \varepsilon_{d}^{t}\right), -\left(\varepsilon_{c}^{k} + \varepsilon_{a}^{k}\right) : 1 \leq a \leq n_{k}, a \neq c\right\}, \\
&\left\{\left(\varepsilon_{a}^{t} - \varepsilon_{c}^{k}\right), -\left(\varepsilon_{d}^{t} + \varepsilon_{a}^{t}\right) : 1 \leq a \leq n_{t}, a \neq d\right\}, \\
&\left\{\left(\varepsilon_{a}^{s+1} - \varepsilon_{d}^{t}\right), \left(\varepsilon_{a}^{s+1} - \varepsilon_{c}^{k}\right), -\left(\varepsilon_{d}^{t} + \varepsilon_{a}^{s+1}\right), -\left(\varepsilon_{c}^{k} + \varepsilon_{a}^{s+1}\right) : 1 \leq a \leq n_{s+1}\right\}, \\
&\left\{\left(\varepsilon_{a}^{i} - \varepsilon_{d}^{t}\right), \left(\varepsilon_{a}^{i} - \varepsilon_{c}^{k}\right), -\left(\varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{d}^{t}\right), -\left(\varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{c}^{k}\right) : 1 \leq i \leq s, i \neq k, t, 1 \leq a \leq n_{i}\right\}.
\end{aligned}$$

Se as raízes forem escritas como $\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^{s+1} \in \Pi_M$, com $1 \le k \le s$, o conjunto $\Pi_K \left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^{s+1} \right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k, a \ne c\right\}, \left\{-\varepsilon_d^{s+1}\right\}, \left\{\left(\varepsilon_a^{s+1} - \varepsilon_d^{s+1}\right), -\left(\varepsilon_a^{s+1} + \varepsilon_d^{s+1}\right) : 1 \le a \le n_{s+1}, a \ne d\right\}.$$

 $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^{s+1}\right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{ \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_d^{s+1} \right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k \right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^{s+1} \right) : 1 \le i \le s, i \ne k, 1 \le a \le n_i \right\}, \\
\left\{ -\left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_d^{s+1} \right) : 1 \le a \le n_k, a \ne c \right\}.$$

Para as raízes da forma $\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k \in \Pi_M$, com $1 \le k \le s$ e $1 \le c < d \le n_k$, temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k\right) = \left\{ \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k\right), \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_d^k\right) : 1 \le a \le n_k, a \ne c, d \right\}.$$

 $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k\right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\left\{-\varepsilon_c^k, -\varepsilon_d^k\right\}, \left\{\left(\varepsilon_a^{s+1} - \varepsilon_c^k\right), \left(\varepsilon_a^{s+1} - \varepsilon_d^k\right), -\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_a^{s+1}\right), -\left(\varepsilon_d^k + \varepsilon_a^{s+1}\right) : 1 \le a \le n_{s+1}\right\}, \\
\left\{\left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k\right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_d^k\right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k\right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^k\right) : 1 \le i \le s, i \ne k, 1 \le a \le n_i\right\}.$$

Finalmente, para as raízes $\varepsilon_c^k \in \Pi_M, 1 \leq k \leq s$, temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k\right) = \left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k, 1 \leq a \leq n_k, a \neq c\right\} \bigcup \left\{\pm\varepsilon_a^{s+1}, 1 \leq a \leq n_{s+1}\right\}$$

e o conjunto das raízes $\beta \in \Pi_M$ tais que $\varepsilon_c^k + \beta \in \Pi_M$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes:

$$\begin{split} \Pi_{M}\left(\varepsilon_{c}^{k}\right) &= \left\{\varepsilon_{a}^{k}, -\left(\varepsilon_{a}^{k} + \varepsilon_{c}^{k}\right) : 1 \leq a \leq n_{k}, a \neq c\right\} \\ &\qquad \bigcup \left\{\pm\varepsilon_{a}^{i}, \left(\varepsilon_{a}^{i} - \varepsilon_{c}^{k}\right), -\left(\varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{c}^{k}\right) : 1 \leq i \leq s, i \neq k, 1 \leq a \leq n_{i}\right\}. \end{split}$$

Isto completa a demonstração.

Observamos que as equações da Proposição 4.2.2 não são simétricas pois n_{s+1} está tratado diferentemente dos demais n_i .

O sistema de Einstein nas variedades $\mathbb{F}_B(n_1,\ldots,n_s)$ do tipo I é mais simétrico do que o anterior.

Proposição 4.2.3. As equações de Einstein nos espaços $\mathbb{F}_B(n_1,\ldots,n_s)$ do tipo I, são dadas por

$$Ric\left(E_{cd}^{kt}, E_{dc}^{tk}\right) = 2\left(n_k + n_t\right) + \frac{\left(g_{kt}^2 - (h_t - h_k)^2\right)}{h_k h_t}$$

$$+ \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{g_{ik} g_{it}} \left(g_{kt}^2 - (g_{ik} - g_{it})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{ik} f_{it}} \left(g_{kt}^2 - (f_{ik} - f_{it})^2\right)$$

$$+ \frac{4\left(n_t - 1\right)}{f_{kt} l_t} \left(g_{kt}^2 - (f_{kt} - l_t)^2\right) + \frac{4\left(n_k - 1\right)}{f_{kt} l_k} \left(g_{kt}^2 - (f_{kt} - l_k)^2\right) = g_{kt}$$

$$Ric\left(F_{cd}^{kt}, F_{-cd}^{-kt}\right) = 2\left(n_k + n_t\right) + \frac{\left(f_{kt}^2 - (h_k - h_t)^2\right)}{h_k h_t}$$
$$+ \frac{\left(n_k - 1\right)}{g_{kt} l_k} \left(f_{kt}^2 - (g_{kt} - l_k)^2\right) + \frac{\left(n_t - 1\right)}{g_{kt} l_t} \left(f_{kt}^2 - (g_{kt} - l_t)^2\right)$$
$$+ \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{f_{ik} g_{it}} \left(f_{kt}^2 - (f_{ik} - g_{it})^2\right) + \sum_{i \neq k}^s \frac{n_i}{f_{it} g_{ik}} \left(f_{kt}^2 - (f_{it} - g_{ik})^2\right) = f_{kt}$$

$$Ric\left(F_{cd}^{k}, F_{-cd}^{-k}\right) = 4\left(n_{k} - 1\right) + \frac{l_{k}^{2}}{h_{k}^{2}} + 2\sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{f_{ik}g_{ik}} \left(l_{k}^{2} - (f_{ik} - g_{ik})^{2}\right) = l_{k}$$

e

$$Ric\left(G_{c}^{k}, G_{-c}^{-k}\right) = 2n_{k} + \sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{f_{ik}h_{i}} \left(h_{k}^{2} - (f_{ik} - h_{i})^{2}\right) + \frac{(n_{k} - 1)\left(h_{k}^{2} - (h_{k} - l_{k})^{2}\right)}{h_{k}l_{k}} + \sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{g_{ik}h_{i}} \left(h_{k}^{2} - (g_{ik} - h_{i})^{2}\right) = h_{k}.$$

Demonstração. Este resultado pode ser demonstrado de maneira equivalente ao anterior. Mas ele também pode ser obtido formalmente por substituição de $n_{s+1} = 0$ na Proposição 4.2.2.

Observamos que a Proposição 4.2.3 aplica-se para variedades bandeira maximal da classe B_l , simplesmente fazendo $n_1 = \cdots = n_s = 1$.

A Proposição 4.2.2 generaliza as equações de Einstein dadas em [26], as quais são somente para variedades bandeira maximal do tipo B_l .

Com o uso de manipulações algébricas em um sistema computacional, Sakane em [26], computou uma base de Gröbner para o sistema algébrico formado pelas equações de Einstein em $SO(5)/U(1)^2$. Com isso, Sakane mostrou que $SO(5)/U(1)^2$ admite exatamente, (a menos de multiplicação por escalar), seis métricas invariantes Einstein, das quais quatro são Kähler.

No capítulo 5 apresentamos novas soluções para certas famílias de variedades bandeira do tipo B_l .

4.3 O caso C_l

Nesta seção descrevemos as equações de Einstein de famílias de variedades bandeira do tipo C_l . Essas equações generalizam as equações de Einstein no caso maximal, obtidas em [26].

Proposição 4.3.1. O conjunto Π_t das t-raízes correspondente a família de variedades bandeira

$$\mathbb{F}_{C}(n_{1},\ldots,n_{s}) = \frac{Sp(n)}{U(n_{1}) \times \cdots \times U(n_{s})},$$

com $n = \sum_i n_i$, é um sistema de raízes do tipo C_s .

Demonstração. Sabemos que uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ é formada pelas matrizes da forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

onde $\Lambda = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \varepsilon_i \in \mathbb{C}).$

Assim o sistema de raízes tem a forma

$$\Pi = \{ \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j), \pm (\varepsilon_i + \varepsilon_j) : 1 \le i < j \le n \} \bigcup \{ \pm 2\varepsilon_i : 1 \le i \le n \}$$

$$(4.12)$$

O sistema de raízes para a subálgebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(n_s, \mathbb{C})$ é dado por

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i \right) : 1 \le a < b \le n_i, 1 \le i \le s \right\}$$

Logo,

$$\Pi_{M} = \left\{ \pm \left(\varepsilon_{a}^{i} - \varepsilon_{b}^{j} \right), \pm \left(\varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{b}^{j} \right) : 1 \leq i < j \leq s \right\} \bigcup \left\{ \pm \left(\varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{b}^{i} \right) : 1 \leq i \leq s, 1 \leq a \leq b \leq n_{i} \right\}.$$

Então,

$$Z\left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)\cap\mathfrak{h}=\begin{pmatrix}\Lambda&0\\0&-\Lambda\end{pmatrix},$$

com

$$\Lambda = diag\left(\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, \varepsilon_{n_2}^2, \dots, \varepsilon_{n_3}^3, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s\right)$$

onde cada $\varepsilon_{n_i}^i$ aparece exatamente n_i vezes, $i=1,\ldots,s$. Portanto restringindo as raízes de Π_M^+ em $Z\left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)\cap\mathfrak{h}$, e usando a notação $\delta_i:=k(\varepsilon_a^i)$, obtemos o conjunto das t-raízes:

$$\Pi_{\mathfrak{t}} = \{ \pm (\delta_i - \delta_j), \pm (\delta_i + \delta_j), 1 \le i < j \le s \} \bigcup \{ \pm 2\delta_i, 1 \le i \le s \}.$$

Note que $(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i)|_{\mathfrak{t}} = 2\varepsilon_a^i|_{\mathfrak{t}}$, $1 \leq i \leq s$. Em particular temos $s(s-1) + s = s^2$ t-raízes positivas.

Agora procedemos no sentido de computar as equações de Einstein para variedades bandeira do tipo C_l . A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sp}(\mathfrak{n})$ é (X,Y)=2(n+1) trXY, $(\alpha,\alpha)=\frac{1}{n+1}$, se $\alpha=\pm 2\varepsilon_i$ e $(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2(n+1)}$ se $\alpha\in\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j):1\leq i< j\leq n\}$.

Denotamos por e(i,j) a matriz $2n \times 2n$ cuja entrada (i,j) é igual a 1 e as demais são nulas. Assim podemos escrever os autovetores como

$$E_{\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j}} = e(i,j) - e(j+n,i+n), E_{\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j}} = e(i,j+n) + e(j,i+n)$$

$$E_{-(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j})} = e(i+n,j) + e(j+n,i); \ 1 \le i \ne j \le n,$$

$$E_{2\varepsilon_{i}} = e(i,i+n), \ E_{-2\varepsilon_{i}} = e(i+n,i); \ 1 \le i \le n.$$

Já os autovetores $X_{\alpha} \in g_{\alpha}$ satisfazendo $(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -1$ e $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = -H_{\alpha}$, são

$$X_{\pm(\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j})} = \pm \frac{1}{2\sqrt{n+1}} E_{\pm(\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j})}, \ X_{\pm(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j})} = \pm \frac{1}{2\sqrt{n+1}} E_{\pm(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j})}, 1 \le i < j \le n;$$
$$X_{\pm 2\varepsilon_{i}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} E_{\pm 2\varepsilon_{i}}, 1 \le i \le n.$$

Considerando as raízes curtas e longa de $\mathfrak{sp}(n)$ pode-se obter os seguintes valores para as constantes estruturais.

Lema 4.3.2. Os quadrados das constantes estruturais em $\mathfrak{sp}(n)$ são dados por

$$N_{(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j}),\pm(\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j})}^{2} = N_{\pm2\varepsilon_{j},(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j})}^{2} = N_{-2\varepsilon_{i},(\varepsilon_{i}\pm\varepsilon_{j})}^{2} = \frac{1}{2(n+1)}; \ i \neq j$$

$$N_{(\varepsilon_{i}-\varepsilon_{j}),\alpha}^{2} = N_{(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{j}),\beta}^{2} = \frac{1}{4(n+1)}$$

$$se \ \alpha \in \{(\varepsilon_{k}-\varepsilon_{i}),(\varepsilon_{j}-\varepsilon_{k}),(\varepsilon_{j}+\varepsilon_{l}),-(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{p}),p \neq i, \ l \neq j, \ k \neq i,j, \ e \ i \neq j\} \ e$$

$$\beta \in \{-(\varepsilon_{i}+\varepsilon_{k}),-(\varepsilon_{j}+\varepsilon_{l}), \ k \neq j, \ l \neq i\}.$$

É conveniente usar a seguinte notação,

$$\begin{split} E_{ab}^{ij} &= X_{\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j}, \ F_{ab}^{ij} &= X_{\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^j}, \ F_{-ab}^{-ij} &= X_{-\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^j\right)}, \ 1 \leq i < j \leq s \\ F_{ab}^i &= X_{\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i}, \ F_{-ab}^{-i} &= X_{-\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i\right)}, 1 \leq a \neq b \leq n_i, \ G_a^i &= X_{2\varepsilon_a^i}, \ G_{-a}^{-i} &= X_{-2\varepsilon_a^i}, \ 1 \leq i \leq s. \end{split}$$

Usaremos a seguinte notação para uma métrica invariante sobre $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$

$$g_{ij} = g_{\Lambda} \left(E_{ab}^{ij}, E_{ba}^{ji} \right), \ f_{ij} = g_{\Lambda} \left(F_{ab}^{ij}, F_{-ab}^{-ij} \right), \ 1 \le i < j \le s$$

 $h_i = g_{\Lambda} \left(G_a^i, G_{-a}^{-i} \right), \ l_i = g_{\Lambda} \left(F_{ab}^i, F_{-ab}^{-i} \right), \ 1 \le i \le s.$

Como $(\varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i)|_{\mathfrak{t}} = 2\varepsilon_a^i|_{\mathfrak{t}}$ temos

$$l_i = h_i, \ 1 \le i \le s$$

de acordo com a Proposição 3.1.1.

Agora obtemos as condições suficientes e necessárias para uma métrica invariante em $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$ ser Einstein.

Proposição 4.3.3. As equações de Einstein sobre $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$ se reduzem ao seguinte sistema algébrico

$$Ric\left(E_{cd}^{kt}, E_{dc}^{tk}\right) = 2(n_k + n_t) + \frac{(n_k + 1)}{h_k f_{kt}} \left(g_{kt}^2 - (h_k - f_{kt})^2\right) + \frac{(n_t + 1)}{h_t f_{kt}} \left(g_{kt}^2 - (h_t - f_{kt})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{g_{ik} g_{it}} \left(g_{kt}^2 - (g_{ik} - g_{it})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{ik} f_{it}} \left(g_{kt}^2 - (f_{ik} - f_{it})^2\right) = g_{kt}, \quad 1 \leq k \neq t \leq s.$$

$$Ric\left(F_{cd}^{kt}, F_{-cd}^{-kt}\right) = 2(n_k + n_t) + \frac{(n_k + 1)}{h_k g_{kt}} \left(f_{kt}^2 - (h_k - g_{kt})^2\right) + \frac{(n_t + 1)}{h_t g_{kt}} \left(f_{kt}^2 - (h_t - g_{kt})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{it} g_{ik}} \left(f_{kt}^2 - (f_{it} - g_{ik})^2\right) + \sum_{i \neq k, t}^s \frac{n_i}{f_{ik} g_{it}} \left(f_{kt}^2 - (f_{ik} - g_{it})^2\right) = f_{kt}, \quad 1 \leq k \neq t \leq s$$

$$Ric\left(G_{c}^{k}, G_{-c}^{-k}\right) = Ric\left(F_{cd}^{k}, F_{-cd}^{-k}\right) = 4(n_{k} + 1) + 2\sum_{i \neq k}^{s} \frac{n_{i}}{f_{ik}g_{ik}} \left(h_{k}^{2} - (f_{ik} - g_{ik})^{2}\right)$$
$$= h_{k}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Demonstração. Para cada raíz $\alpha\in\Pi_{M}^{+},$ usaremos a seguinte notação

$$\Pi_{K}(\alpha) = \{ \phi \in \Pi_{K} : \alpha + \phi \in \Pi \},$$

$$\Pi_{M}(\alpha) = \{ \beta \in \Pi_{M} : \alpha + \beta \in \Pi_{M} \}.$$

Assim, para as raízes da forma $\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t \in \Pi_M^+, \, 1 \leq k < t \leq s,$ temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t\right) = \left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k, a \ne c\right\} \bigcup \left\{\varepsilon_d^t - \varepsilon_a^t : 1 \le a \le n_t, a \ne d\right\}.$$

Além disso, $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^t\right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes

$$\left\{ \left(\varepsilon_d^t - \varepsilon_a^i \right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^t \right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k \right) : 1 \le i \le s, i \ne k, t \in 1 \le a \le n_i \right\}, \\
\left\{ \left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_d^t \right), -\left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_c^k \right) : 1 \le a \le n_k \right\}, \left\{ -\left(\varepsilon_a^t + \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^t + \varepsilon_d^t \right) : 1 \le a \le n_t \right\}.$$

Quando a raíz for da forma $\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^t \in \Pi_M^+, \, 1 \leq k < t \leq s,$ temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^t\right) = \left\{\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k, a \ne c\right\} \cup \left\{\varepsilon_a^t - \varepsilon_d^t : 1 \le a \le n_t, a \ne d\right\}.$$

 $\Pi_M\left(\varepsilon_c^k+\varepsilon_d^t\right)$ é a união dos seguintes conjuntos de raízes

$$\left\{ \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_d^t \right), - \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k \right), - \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^t \right) : 1 \le i \le s, i \ne k, t; 1 \le a \le n_i \right\}, \\
\left\{ \left(\varepsilon_a^t - \varepsilon_c^k \right), - \left(\varepsilon_a^t + \varepsilon_d^t \right) : 1 \le a \le n_t \right\}, \left\{ \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_d^t \right), - \left(\varepsilon_a^k + \varepsilon_c^k \right) : 1 \le a \le n_k \right\}.$$

Para $\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k \in \Pi_M^+$, com $1 \le k \le s$ e $1 \le c < d \le n_k$, temos

$$\Pi_K\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k\right) = \left\{ \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k\right), \left(\varepsilon_a^k - \varepsilon_d^k\right) : 1 \le a \le n_k; a \ne c, d \right\} \cup \left\{ \pm \left(\varepsilon_c^k - \varepsilon_d^k\right) \right\}.$$

$$\Pi_M\left(\varepsilon_c^k + \varepsilon_d^k\right) = \left\{ \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k\right), \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_d^k\right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k\right), -\left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_d^k\right) : 1 \le i \le s; i \ne k \right\}.$$

Para $2\varepsilon_c^k \in \Pi_M^+$, com $1 \le k \le s$, temos

$$\Pi_K \left(2\varepsilon_c^k \right) = \left\{ \varepsilon_a^k - \varepsilon_c^k : 1 \le a \le n_k; a \ne c \right\}.$$

$$\Pi_M \left(2\varepsilon_c^k \right) = \left\{ \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_c^k \right), - \left(\varepsilon_a^i + \varepsilon_c^k \right) : 1 \le i \le s; i \ne k \right\}.$$

Agora, para obter as equações de Einstein basta usar o Lema 4.3.2 e a Proposição (3.5.3). Tomando a constante c tal que Ric(g) = cg igual a $\frac{1}{8(n+1)}$ obtém-se as equações simplificadas como acima.

Quando $n_i=1,$ com $i=1,\ldots,s,$ e s=n, temos as variedades bandeira maximal do tipo $C_l,$ as quais serão denotadas por

$$\mathbb{F}_{C}(n) = \frac{Sp(n)}{U(1) \times \cdots \times U(1)}$$

onde U(1) aparece n vezes. Nesse caso, $\Pi_K = \emptyset$ e portanto $\Pi_M = \Pi$. A Proposição anterior aplica-se naturalmente a esse caso. O caso maximal foi discutido em [26].

4.4 O caso D_l

As equações de Einstein nesse caso foram computadas em [6]. Aqui faremos um breve resumo da descrição dessas equações. Mas antes, observamos que o conjunto das t-raízes nesse caso é um sistema de raízes isomorfo ao sistema das t-raízes das variedades bandeira $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$. Pois ambos são um sistema de raízes do tipo C_s .

A descrição das t-raízes em $\mathbb{F}_D(n_1,\ldots,n_s)$ foi discutido em [6]. Entretanto, registramos o seguinte fato que observamos nessa descrição.

Proposição 4.4.1. Para as variedades bandeira do tipo D_l da forma

$$\mathbb{F}_D(n_1, \cdots, n_s) = \frac{SO(2n)}{U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)},$$

com $n = \sum_{i=1}^{s} n_i$, o conjunto Π_t das t-raízes correspondentes é um sistema de raízes do tipo C_s .

Demonstração. Uma subálgebra de Cartan para $\mathfrak{so}\left(2n\right)^{\mathbb{C}}$ é formada pelas matrizes da forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{ diag (\varepsilon_1, -\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \mathbb{C} \}.$$

O sistema de raízes associado ao par $\left(\mathfrak{so}\left(2n\right)^{\mathbb{C}},\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ é dado por

$$\Pi = \{ \pm (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \le i < j \le n \}.$$

O sistema de raízes para a subálgebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(n_s, \mathbb{C})$ é

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_c^i - \varepsilon_d^i \right) : 1 \le c < d \le n_i \right\},\,$$

então

$$\Pi_{M}^{+} = \left\{ \varepsilon_{a}^{i} \pm \varepsilon_{b}^{j} : 1 \leq i < j \leq s \right\} \cup \left\{ \varepsilon_{a}^{i} + \varepsilon_{b}^{i} : a < b \right\}.$$

O centro de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ como subálgebra de \mathfrak{h} é formado pelas matrizes da forma

$$\mathfrak{t} = \{ diag\left(\varepsilon_{n_1}^1, -\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, -\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, -\varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, -\varepsilon_{n_s}^s \right) \in \mathfrak{h} \}$$

com $\varepsilon_{n_i}^i$ aparecendo exatamente n_i vezes. Restringindo as raízes de Π_M^+ a \mathfrak{t} , e usando a notação $\delta_i := k(\varepsilon_a^i)$, obtemos o conjunto das t-raízes:

$$\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = \{ \delta_i \pm \delta_j, 2\delta_i; 1 \le i < j \le s \}$$

Portanto temos $s(s-1) + s = s^2$ t-raízes positivas.

A forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{so}(2n)$ é dada por $(X,Y)=2(n-1)trXY, (\alpha,\alpha)=\frac{1}{2(n-1)}$, para toda raíz $\alpha\in\Pi$. Os autovetores satisfazendo $(X_{\alpha},X_{-\alpha})=-1$ são dados por

$$E_{ab}^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}E_{\varepsilon_a^i-\varepsilon_b^j}, \ F_{ab}^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}E_{\varepsilon_a^i+\varepsilon_b^j}, \ G_{ab}^i = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}E_{\varepsilon_a^i+\varepsilon_b^i}.$$

As constantes estruturais tem valor absoluto igual a $\frac{1}{2\sqrt{n-1}}$.

A notação para um produto escalar invariante avaliado na base $\{X_{\alpha}, \alpha \in \Pi_M\}$ é dada por

$$g_{ij} = g_{\Lambda} \left(E_{ab}^{ij}, E_{ba}^{ji} \right), \ f_{ij} = g_{\Lambda} \left(F_{ab}^{ij}, F_{ba}^{ji} \right), \ h_i = g_{\Lambda} \left(G_{ab}^i, G_{ba}^i \right), 1 \le i < j \le s.$$

Proposição 4.4.2. ([6]) Para as famílias de variedades bandeira da forma $\mathbb{F}_D(n_1, \dots, n_s)$ as equações de Einstein se reduzem a um sistema de s^2 equações e s^2 incógnitas g_{ij} , f_{ij} , h_i .

$$n_{i} + n_{j} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \neq i,j} \frac{n_{l}}{g_{il}g_{jl}} \left(g_{ij}^{2} - (g_{il} - g_{jl})^{2} \right) + \sum_{l \neq i,j} \frac{n_{l}}{f_{il}f_{jl}} \left(g_{ij}^{2} - (f_{il} - f_{jl})^{2} \right) + \frac{n_{i} - 1}{f_{ij}h_{i}} \left(g_{ij}^{2} - (f_{ij} - h_{i})^{2} \right) + \frac{n_{j} - 1}{f_{ij}h_{j}} \left(g_{ij}^{2} - (f_{ij} - h_{j})^{2} \right) \right\} = g_{ij},$$

$$n_{i} + n_{j} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \neq i,j} \frac{n_{l}}{g_{il}f_{jl}} \left(f_{ij}^{2} - (g_{il} - f_{jl})^{2} \right) + \sum_{l \neq i,j} \frac{n_{l}}{f_{il}g_{jl}} \left(f_{ij}^{2} - (f_{il} - g_{jl})^{2} \right) + \frac{n_{i} - 1}{g_{ij}h_{i}} \left(f_{ij}^{2} - (g_{ij} - h_{i})^{2} \right) + \frac{n_{j} - 1}{g_{ij}h_{j}} \left(f_{ij}^{2} - (g_{ij} - h_{j})^{2} \right) \right\} = f_{ij},$$

$$2 \left(n_{i} - 1 \right) + \sum_{l \neq i} \frac{n_{l}}{g_{il}f_{il}} \left(h_{i}^{2} - (g_{il} - f_{il})^{2} \right) = h_{i}.$$

Quando s=1, temos o espaço $\mathbb{F}=SO(2n)/U(n)$ o qual é isotropicamente irredutível, portanto admite apenas uma métrica Einstein, a menos de multiplicação por escalar ([11], 7.44). Mas quando s=2 e $n_1=n_2$ temos o espaço $SO(2n)/(U(m)\times U(m))$ que admite exatamente quatro métricas Einstein não isométricas, sendo uma delas Kähler, (ver [6], Teo. 9).

4.5 O caso G_2

Nesta seção descreveremos as equações de Einstein na variedade bandeira maximal G_2/T usando um método diferente das seções anteriores. Em [26] Sakane obteve outra expressão para o tensor de Ricci em variedades bandeira maximal. Esta expressão é equivalente àquela obtida em [6], conforme foi mostrado em [32].

Sejam $\mathbb{F}=G/K$ uma variedade bandeira e $T_o\mathbb{F}=\mathfrak{m}$ o espaço tangente a \mathbb{F} na origem o=eK. Considere

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_s \tag{4.13}$$

a decomposição de \mathfrak{m} em $ad(\mathfrak{k})$ -módulos reais, irredutíveis e não equivalentes.

Lembramos que $B(\cdot,\cdot)$ denota a negativa da forma de Cartan-Killing em \mathfrak{m} . Seja $\{e_{\alpha}\}$ uma base de \mathfrak{m} B-ortonormal, adaptada a (4.13), isto é, $e_{\alpha} \in \mathfrak{m}_i$ para algum i, e $\alpha < \beta$ se

i < j. Conforme definido em [37], temos

$$C_{ij}^{k} := \sum ([e_{\alpha}, e_{\beta}], e_{\gamma})^{2}$$

$$(4.14)$$

onde a soma é tomada sobre todos os índices α, β, γ com $e_{\alpha} \in \mathfrak{m}_i, e_{\beta} \in \mathfrak{m}_j$ e $e_{\gamma} \in \mathfrak{m}_k$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, s$.

É fácil ver que $C_{ij}^k \geq 0$ com $C_{ij}^k = 0$ se, e somente se, $B([\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j],\mathfrak{m}_k) = 0$. Este coeficiente C_{ij}^k é independente da base B-ortonormal escolhida para \mathfrak{m}_i , \mathfrak{m}_j e \mathfrak{m}_k . Além disso, C_{ij}^k é simétrico nos índices, conforme [37]. No capítulo 5 mostramos um critério em termos de t-raízes para o coeficiente C_{ij}^k ser não nulo.

Se \mathbb{F} é uma variedade bandeira maximal, então

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{\alpha_s}, \quad \alpha_i \in \Pi^+, \quad i = 1, \dots, s$$

onde $\mathfrak{m}_{\alpha_i} = ger_{\mathbb{R}}\{iA_{\alpha_i}, S_{\alpha_i}\}$. Assim escrevemos $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi^+$, ao invés de $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Uma prova do próximo resultado é dado no apêndice.

Proposição 4.5.1. ([26]) As equações de Einstein de uma métrica G-invariante g_{Λ} sobre a variedade bandeira maximal $\mathbb{F} = G/T$ são dadas por

$$c = \frac{1}{2\lambda_{\alpha}} + \frac{1}{8} \sum_{\beta, \gamma \in \Pi^{+}} \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta} \lambda_{\gamma}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \sum_{\beta, \gamma \in \Pi^{+}} \frac{\lambda_{\gamma}}{\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{bmatrix}$$
(4.15)

onde $g_{\Lambda}(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{m}_{\alpha}} = \lambda_{\alpha}(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{m}_{\alpha}}, \ \alpha \in \Pi^{+} \ e \ c \ \acute{e} \ a \ constante \ de \ Einstein.$

De modo análogo à Proposição 3.5.3, temos a liberdade de tomar uma das incógnitas igual a 1, o que faz com que esse sistema algébrico fique com $|\Pi^+|$ equações e $|\Pi^+|$ incógnitas.

Diferentemente da Proposição 3.5.3, este resultado apresenta cada equação do sistema de Einstein, como uma expressão algébrica homogênea de grau -1.

No apêndice apresentamos uma demonstração do seguinte fato: as únicas triplas de raízes positivas para as quais $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$ é não nulo são as triplas soma zero, para as quais

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \beta \end{bmatrix} = 2 (N_{\alpha,\beta})^2 e \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \beta \end{bmatrix} = 2 (N_{\alpha,-\beta})^2$$
(4.16)

onde $N_{\alpha,\beta}$ são as constantes de estrutura introduzidas na seção 1.2. Além disso, $(N_{\alpha,\beta})^2 = N_{\alpha,\beta}(-N_{-\alpha,-\beta}) = \frac{(p+1)q}{2}(\alpha,\alpha)$, onde p e q são os maiores inteiros positivos tais que $\beta - p\alpha, \beta + q\alpha \in \Pi$, ([30], lema 8.5).

Agora podemos descrever as equações de Einstein sobre $\mathbb{F} = G_2/T$.

Proposição 4.5.2. O sistema de Einstein na variedade bandeira maximal $\mathbb{F} = G_2/T$ para uma métrica invariante é dado pelo sequinte sistema algébrico

$$c = \frac{1}{2\lambda_{1,2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1,3}\lambda_{2,3}} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1,2}\lambda_{1}} + \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1,2}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{1,2}\lambda_{1,3}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{1,2}\lambda_{2,3}} \right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda_{2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}\lambda_{1,2}} + \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{-3}} \right) + \frac{1}{12} \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{-3}\lambda_{1}} - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{2}\lambda_{1}} + \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{2}\lambda_{1,2}} + \frac{\lambda_{-3}}{\lambda_{2}\lambda_{2,3}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2}\lambda_{2,3}} \right)$$

$$- \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{1}}{\lambda_{2}\lambda_{-3}} + \frac{\lambda_{-3}}{\lambda_{2}\lambda_{1}} \right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda_{1}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1,2}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1,3}\lambda_{-3}} \right) + \frac{1}{12} \frac{\lambda_{1}}{\lambda_{-3}\lambda_{2}} - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}\lambda_{1,2}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{-3}}{\lambda_{1}\lambda_{1,3}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{-3}\lambda_{1}} \right)$$

$$- \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}\lambda_{-3}} + \frac{\lambda_{-3}}{\lambda_{1}\lambda_{2}} \right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda_{-3}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{1,3}\lambda_{1,2}} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{-3}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{-3}\lambda_{1,3}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{1,2}} \right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda_{2,3}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{1,3}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{1,3}\lambda_{1,2}} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{-3}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{1,3}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{1,2}} \right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda_{1,2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{1,3}\lambda_{2,2}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{1,3}\lambda_{1,2}} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{-3}} + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{2,3}\lambda_{2}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{1,3}} + \frac{\lambda_{1,3}}{\lambda_{2,3}\lambda_{1,2}} \right)$$

Demonstração. Uma álgebra de Lie do tipo G_2 pode ser vista como sendo a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus (\mathbb{C}^3)^*$, [30]. A subálgebra \mathfrak{h} das matrizes diagonais de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ é uma subálgebra de Cartan em \mathfrak{g} .

Agora considere os funcionais ε_i de \mathfrak{h} definidos por: ε_i : $diag\{a_1, a_2, a_3\} \mapsto a_i$. Uma base para o sistema de raízes relativas ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é dada por $\Sigma = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2\}$.

O conjunto das raízes positivas é dado por $\Pi^+ = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \alpha_2 = \varepsilon_2, \ \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1, \ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varepsilon_3, \ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3\}$. Sabemos que a forma de Cartan-Killing (\cdot, \cdot) é dada por:

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_1) = \frac{1}{4}$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_2) = \frac{1}{12}$$

Para o cálculo dos valores $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi^+$ usamos (4.16). Assim, obtemos:

$$\frac{1}{4} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + 3\alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ (\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) \\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + 3\alpha_2) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + 3\alpha_2) \\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + 3\alpha_2) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} (2\alpha_1 + 3\alpha_2) \\ (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\alpha_1 + 3\alpha_2) \\ (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 + 2\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2)\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $\lambda_{i,j} = \lambda_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ e $\lambda_{\pm i} = \lambda_{\varepsilon_i}$ em (7.6), obtém-se as equações desejadas.

CAPÍTULO 5

NOVAS MÉTRICAS DE EINSTEIN

Neste capítulo classificamos as variedades bandeira, dos grupos de Lie clássicos, de acordo com o número de somandos isotrópicos. Em seguida obtivemos explicitamente todas as métricas de Einstein invariantes, a menos de homotetia, em quatro famílias de variedades bandeira.

Na seção 5.3 relacionamos métricas de Einstein invariantes com a dimensão dos somandos isotrópicos por meio da curvatura escalar de uma métrica invariante em variedades bandeira.

Já na seção 5.4 mostramos que os tensores invariantes sobre variedades bandeira maximais, do tipo A_l e C_l , estão em bijeção com os tensores invariantes sobre variedades bandeira generalizadas, do tipo A_l e C_l . Consequentemente observamos que essas variedades bandeira maximais e generalizadas têm as mesmas estruturas quase Hermitianas invariantes.

Os resultados deste capítulo são novos, exceto quando explicitamente mencionado.

5.1 Variedades bandeira com poucos somandos isotrópicos

Nesta seção usaremos t-raízes para classificar todas as variedades bandeira dos grupos de Lie clássicos, com o número de somandos isotrópicos menor ou igual a quatro. Assim, pelo que foi visto no capítulo 2, os tensores como: f-estruturas, métricas invariante e o Ricci

sobre essas variedades bandeira, são caracterizados com, no máximo, quatro parâmetros.

Lembramos que a quantidade de somandos isotrópicos é igual ao número $\left|\Pi_{\mathfrak{t}}^{+}\right|$.

O próximo resultado estende para as classes B_n e C_n o resultado originalmente obtido em [6] que discutiu os casos A_n e D_n .

Proposição 5.1.1. O número de somandos isotrópicos das variedades bandeira dos grupos de Lie clássicos é determinado pela seguinte tabela.

Tabela 1. O número de somandos isotrópicos das varidades bandeira.

Tipo	G/K	$\left \Pi_{\mathfrak{t}}^{+}\right $
A_n	$\frac{SU(n)}{S(U(n_1)\times\cdots\times U(n_s))}$	$\underline{s(s-1)}$
11	$S(U(n_1) \times \dots \times U(n_s))$ $\sum_{n_i = n, \ n_i \ge 1}$	2

(i)
$$\frac{SO(2n+1)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times U(1)^m} \qquad (s+m)^2 + s$$

$$n\geq 2$$

 $B_n \qquad (ii) \quad \frac{SO(2n+1)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times U(1)^m\times SO(2t+1)} \qquad (s+m)^2 + s$

 $t \ge 2$

$$\frac{Sp(n)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times U(1)^m} \qquad (s+m)^2$$

$$n\geq 3$$

 C_n $(ii) \qquad \frac{Sp(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s) \times U(1)^m \times Sp(t)} \qquad (s+m)^2 + (s+m)$ t > 3

$$(i) \qquad \frac{SO(2n)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times U(1)^m} \qquad (s+m)^2 - m$$

$$D_n \qquad \qquad n\geq 4$$

(ii)
$$\frac{SO(2n)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)\times U(1)^m\times SO(2t)} \qquad (s+m)^2 + s$$

$$t\geq 4$$

 $C_n(ii)$ e $D_n(ii)$ temos $n_i + t + m = n$, com $n_i > 1$ e $m, s \ge 0$.

Demonstração. O cálculo de $|\Pi_{\mathfrak{t}}^+|$ é análogo em todos os casos. Assim apresentamos este cálculo em detalhes apenas para o caso B_n (ii).

Para as variedades bandeira $B_n(ii)$, sabemos que uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ tem a forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Delta & \\ & & -\Delta \end{pmatrix} \right\} \tag{5.1}$$

onde $\Delta = \{ diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \mathbb{C} \}.$

O sistema de raízes de $\mathfrak{so}\left(2n+1,\mathbb{C}\right)$ com respeito a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é

$$\Pi = \{ \pm \varepsilon_i, 1 \le i \le n \} \cup \{ \pm (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), 1 \le i < j \le n \}.$$

Uma base de Π é dada por

$$\Sigma = \{ \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_n \}. \tag{5.2}$$

O sistema de raízes de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{gl}(n_s, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})^m \times \mathfrak{so}(2t+1, \mathbb{C})$ com respeito a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é

$$\Pi_K = \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i \right) : 1 \le i \le s, 1 \le a < b \le n_i \right\}$$

$$\bigcup \left\{ \pm \left(\varepsilon_a^{s+m+1} \pm \varepsilon_b^{s+m+1} \right), \pm \varepsilon_c^{s+m+1} : 1 \le a < b \le t, 1 \le c \le t \right\},$$

onde $\varepsilon_c^{s+m+1} = \varepsilon_{n_1+\dots+n_s+m+c}$, $1 \le c \le t$. Então a subálgebra \mathfrak{t} da forma real \mathfrak{h} é a álgebra de todas as matrizes diagonais da forma (5.1) com

$$\Delta_{\mathfrak{t}} = \left\{ diag(\varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \dots, \varepsilon_{n_s}^s, \varepsilon_{n-t-m+1}, \varepsilon_{n-t-m+2}, \dots, \varepsilon_{n-t}, \ 0, \dots, 0) \in \mathfrak{h} \right\}$$

onde cada $\varepsilon_{n_i}^i$ e 0 aparecem exatamente n_i vezes e tvezes, respectivamente.

O conjunto das raízes complementares positivas, com respeito a Σ , é

$$\begin{split} \Pi_M^+ &= \left\{ \varepsilon_a^i \pm \varepsilon_b^j : 1 \leq i < j \leq s \right\} \bigcup \left\{ \varepsilon_c^i, \varepsilon_a^i + \varepsilon_b^i, \varepsilon_d^{s+1} : a < b, 1 \leq d \leq m \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \varepsilon_a^i \pm \varepsilon_d^{s+1}, \varepsilon_a^i \pm \varepsilon_c^{s+m+1}, \varepsilon_d^{s+1} \pm \varepsilon_c^{s+m+1} \right\} \bigcup \left\{ \varepsilon_c^{s+1} \pm \varepsilon_d^{s+1} : c < d \right\}. \end{split}$$

Portanto pela restrição das raízes de Π_M^+ à subálgebra $\mathfrak t$, obtemos que o conjunto das $\mathfrak t$ -raízes positivas é

$$\Pi_{\mathfrak{t}}^{+} = \{ \delta_i \pm \delta_j : 1 \le i < j \le s \} \cup \{ \delta_i, 2\delta_i, \delta_{n-t-m+k} : 1 \le i \le s, 1 \le k \le m \}$$

$$\cup \{\delta_i \pm \delta_{n-t-m+k}, : 1 \le i \le s, 1 \le k \le m\} \cup \{\delta_{n-t-m+k} \pm \delta_{n-t-m+r} : 1 \le k < r \le m\}.$$

onde δ_i denota a restrição $k(\varepsilon_a^i)$.

Assim, vemos que $\left|\Pi_{\mathfrak{t}}^{+}\right| = 2s\left(s-1\right)/2 + 2s + m + 2sm + 2m\left(m-1\right)/2 = \left(s+m\right)^{2} + s$. Note que $\left(\varepsilon_{a}^{i} \pm \varepsilon_{c}^{s+m+1}\right)|_{\mathfrak{t}} = \delta_{i} = \varepsilon_{a}^{i}|_{\mathfrak{t}} \text{ e } \left(\varepsilon_{d}^{s+1} \pm \varepsilon_{c}^{s+m+1}\right)|_{\mathfrak{t}} = \delta_{n-t-m+k} = \varepsilon_{d}^{s+1}|_{\mathfrak{t}}$.

No caso $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ tomamos $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{diag(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \mathbb{C}, \sum_i \varepsilon_i = 0\}$ como uma subálgebra de Cartan.

Já nos casos $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ tomamos a subálgebra de Cartan como $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \mathbb{C}\}.$

Assim, usando a notação $\delta_i := k(\varepsilon_a^i)$, obtemos:

$$\Pi_{t}^{+} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma\left(\delta_{i} - \delta_{j}\right), \alpha\left(\delta_{i} + \delta_{j}\right), \eta\left(\delta_{n-t-m+k} \pm \delta_{n-t-m+r}\right) : \\ 1 \leq i < j \leq s, 1 \leq r < k \leq m \end{array} \right\}$$

$$\bigcup \left\{ \begin{array}{l} \beta\delta_{i}, \gamma 2\delta_{i}, \mu\delta_{n-t-m+k}, \xi 2\delta_{n-t-m+k}, \psi\left(\delta_{i} + \delta_{n-t-m+k}\right), \\ \zeta\left(\delta_{i} - \delta_{n-t-m+k}\right) : 1 \leq i \leq s, 1 \leq k \leq m \end{array} \right\}$$

onde $\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \xi, \psi, \zeta, \eta$ assume os valores 0 ou 1.

No caso A_n , apenas $\sigma = 1$ e os coeficientes restantes são todos nulos.

Analisando o caso $B_n(i)$, quando s=0, (isto é o caso maximal), então apenas $\mu=\eta=1$. Ainda neste caso, se m=0 então $\sigma=\alpha=\beta=\gamma=1$. E quando $s,m\neq 0$ então apenas $\xi=0$.

No caso $B_n(ii)$, se s=0 então apenas $\eta=\mu=1$. Se m=0 então $\sigma=\alpha=\beta=\gamma=1$.

Para as variedades bandeira do tipo $C_n(i)$, se s=0 então $\xi, \eta=1$. Se m=0 então $\sigma=\alpha=\gamma=1$. Já quando $s,m\neq 0$ então $\beta=\mu=0$.

Para as variedades bandeira do tipo $C_n(ii)$, se s=0 então $\eta=\mu=\xi=1$. Se m=0 então $\sigma=\alpha=\beta=\gamma=1$. E quando $s,m\neq 0$ então todos os coeficientes são iguais a 1.

No caso $D_n(i)$, se s=0 então apenas $\eta=1$. Quando m=0 então $\sigma=\alpha=\gamma=1$. Já quando $s,m\neq 0$ então $\beta=\mu=\xi=0$.

Finalmente, para as variedades bandeira do tipo $D_n(ii)$, se s=0 então $\eta=\mu=1$. Quando m=0 então $\sigma=\alpha=\beta=\gamma=1$. Se $s,m\neq 0$ então apenas $\xi=0$. Isto conclui a demonstração.

Pela Proposição anterior e o Teorema 2.2.2, obtemos

Corolário 5.1.2. Seja $\mathbb{F} = G/K$ uma variedade bandeira de um grupo de Lie clássico, então $T_o\mathbb{F} \equiv \mathfrak{m}$ tem no máximo quatro $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ -submódulos \mathfrak{m}_i (irredutíveis e não-equivalentes) se, e somente se, \mathbb{F} é isomorfa a uma das seguintes variedades bandeira

Tabela 2. Variedades Bandeira com no máximo quatro somandos isotrópicos.

r	$type A_n$	$type B_n$	$type C_n$	type D_n
1	$\frac{SU(n)}{S(U(t)\times U(n-t))}$	$\frac{SO(2n+1)}{U(1)\times SO(2n-1)}$	$rac{Sp(n)}{U(n)}$	$\frac{SO(2n)}{U(n)}$ $\frac{SO(2n)}{U(1)\times SO(2n-2)}$
2	_	$\frac{SO(2n+1)}{U(m)\times SO(2t+1)}$	(***)************	$\frac{SO(2n)}{U(m)\times SO(2t)}$
		$m+t=n, m>1, t\geq 0$ $[34]$	$m+t=n, m \ge 1, t \ge 3$ $[34]$	$m+t=n, m>1, t\geq 3$ $[9]$
3	$\frac{SU(n)}{S(U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3))}$ $\sum n_i = n, n_i \ge 1$	_	_	$\frac{SO(2n)}{U(n-1)\times U(1)}$
	[20], [6] e [26]			[20]
4	_	$\frac{SO(5)}{U(1)\times U(1)}$ $[26]$	$\frac{Sp(n)}{U(m)\times U(t)}$ $m+t=n, m\geq 1, n\geq 3$	$\frac{SO(2n)}{U(n-t)\times U(t)}$ $t>1$ [6]
		$\frac{SO(2n+1)}{U(1)^2 \times SO(2n-3)}$	_	$\frac{SO(2n)}{U(1)^2 \times SO(2n-4)}$
		$n{\ge}4$		$n \ge 6$
		[34]		[8]

onde r é o número de submódulos irredutíveis \mathfrak{m}_i do $ad(\mathfrak{k})$ -módulo \mathfrak{m} .

Na tabela acima, as referência abaixo das variedades bandeira indica os trabalhos que discutiram as métricas de Einstein invariantes nesses espaços.

5.2 Novas soluções

É conhecido que as variedades bandeira da primeira linha da tabela 2 acima, admitem (a menos de homotetia) uma única métrica invariante Einstein, pois esses espaços são isotropicamente irredutíveis, (veja [11] 7.44). Os espaços da segunda linha desta tabela admitem apenas, a menos de homotetia, duas métricas de Einstein invariantes, das quais uma delas é a Kälher-Einstein, conforme [34] e [9].

Em [20], Kimura classificou todas as variedades bandeira com apenas três somandos isotrópicos e determinou o número de métricas invariante Einstein nessas variedades. Em particular, ele mostrou que as variedades bandeira da terceira linha da tabela 2 acima, admitem exatamente, a menos de homotetia, quatro métricas invariante Einstein sendo três delas Kälher-Einstein.

Para a última linha, os espaços $\frac{SO(2n)}{U(m)\times U(m)}$ (isto é, quando n=2t) e $\frac{SO(2n)}{U(1)^2\times SO(2(n-2))}$ admitem exatamente, a menos de homotetia, dez métricas invariante Einstein sendo quatro delas Kälher-Einstein, conforme [6] e [8].

Em [26], usando base de Gröebner, Sakane mostrou que $\frac{SO(5)}{U(1)\times U(1)}$ admite extamente, a menos de homotetias, seis métricas invariante Einstein sendo quatro delas Kälher-Einstein.

Além disso, ele considerou o seguinte problema: Quantas métricas invariante Einstein não-Kälher, a menos de homotetias, uma variedade bandeira admite? Mais geralmente, Wang e Ziller em [38] conjecturaram: $Se\ G/H$ é um espaço homogêneo compacto cuja representação isotrópica consiste de somandos irredutíveis e dois a dois não-equivalentes, então as equações algébricas de Einstein tem apenas um número finito de soluções.

Nesta seção respondemos essas questões para quatro famílias de variedades bandeira.

Os próximos dois Teoremas foram obtidos pelo autor em 2008 e apresentados em [34] e independentemente por Arvanitoyeorgos e Chrysicos em [9].

Teorema 5.2.1. A família de variedades bandeira $\mathbb{F} = \frac{SO(2n+1)}{U(m)\times SO(2t+1)}$, com n=m+t, m>1 e $t\neq 1$, admite exatamente, a menos de homotetia, duas métricas invariante Einstein. Estas

métricas são dadas explicitamente por

(1)
$$h = 2(2n-1)$$
, $l = 4(2n-1)$ e $c = n + t$,

(2)
$$h = n + t$$
, $l = 2(m-1)$ e $c = \frac{(n+t)^2 + (2t+1)(m-1)}{2(2n-1)}$.

sendo a primeira, a métrica Kähler-Einstein.

Demonstração. De fato, pela Proposição (4.2.2) o sistema de Einstein neste caso reduz a

$$Ric(F_{cd}^1, F_{-cd}^{-1}) = \frac{m-1}{2n-1} + \frac{(1+2t)}{4(2n-1)} \frac{l^2}{h^2} = cl,$$

$$Ric(G_c^1, G_{-c}^{-1}) = \frac{n+t}{2(2n-1)} + \frac{1}{4(2n-1)} \frac{(m-1)}{lh} \left(h^2 - (l-h)^2\right) = ch.$$

Fazendo h=1 e substituindo c na segunda linha, obtemos a seguinte equação

$$(n+t) l^2 - (4n-2) l + 4(m-1) = 0$$

cujas raízes são

$$l = 2 e l = \frac{2(m-1)}{n+t}.$$

Com um cálculo análogo a esse, conseguímos

Teorema 5.2.2. A família de variedades bandeira $\mathbb{F} = \frac{Sp(n)}{U(m) \times Sp(t)}$ com n = m + t, $m \ge 1$ e $t \ge 3$ admite exatamente (a menos de homotetia) duas métricas invariante Einstein. Estas métricas são dadas explicitamente por

$$h = 1, \ g = \frac{1}{2}, \ c = \frac{m + 2t + 1}{2(n+1)}$$

$$h = 1, \ g = \frac{1 + 2m + 4t}{4(m+1)}, \ c = \frac{m+1}{2n+2} + \frac{4t(m+1)^2}{(n+1)(1+2m+4t)^2}$$

sendo a primeira, a métrica Kähler-Einstein.

Demonstração. Pela Proposição (3.5.3) as equações de Einstein para este espaço se reduzem a duas equações, dadas por

$$\frac{m+2t+1}{4(n+1)} + \frac{1}{16(n+1)} \frac{(2m+1)}{hg} \left(g^2 - (h-g)^2\right) = cg$$

$$\frac{m+1}{2(n+1)} + \frac{t}{4(n+1)} \frac{h^2}{g^2} = ch.$$

Fazendo h=1 obtemos c na segunda equação. Substituindo c na primeira equação, obtemos uma equação quadrática em g.

Agora iremos discutir o caso $\frac{SO(2n+1)}{U(1)^2 \times SO(2n-3)}$. Em [34] foi mostrado pelo autor que esta variedade admite pelo menos duas métricas de Einstein não Kähler invariante. O resultado abaixo que estende àquele provado em [34] foi também obtido independentemente em [5].

Teorema 5.2.3. A família de variedades bandeira $\mathbb{F}_B \{1, 1, n-2\} = \frac{SO(2n+1)}{U(1)^2 \times SO(2n-3)}, n \geq 5,$ admite exatamente, a menos de homotetias, oito métricas de Einstein invariantes. Estas métricas dadas explicitamente por

(1)
$$-$$
 (2): $z_1 = z_2 = 2\left(2(n-1) \pm \sqrt{\frac{2n-5}{2n-1}}\right), \ x = y = z_2\left(1 \mp \sqrt{\frac{2n-5}{2n-1}}\right)$ (5.3)

(3)
$$-(4)$$
: $z_1 = z_2 = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n-1}$

$$y = \frac{(2n-1)((2n-1)(2n-3) \pm \sqrt{(2n-3)(8n^3 - 36n^2 + 46n - 19)})}{2(n-1)^2}$$

$$x = \frac{(2n-1)((2n-1)(2n-3) \mp \sqrt{(2n-3)(8n^3 - 36n^2 + 46n - 19)})}{2(n-1)^2}$$
 (5.4)

(5)
$$x = 4$$
, $y = 8(n-1)$, $z_1 = 4n-2$, $z_2 = 4n-6$
(6) $x = 8(n-1)$, $y = 4$, $z_1 = 4n-2$, $z_2 = 4n-6$
(7) $x = 8(n-1)$, $y = 4$, $z_1 = 4n-6$, $z_2 = 4n-2$
(8) $x = 4$, $y = 8(n-1)$, $z_1 = 4n-6$, $z_2 = 4n-2$. (5.5)

sendo que as métricas dadas em (5.5) são Kähler-Einstein.

Demonstração. Usando a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ dada em (5.1) e o sistema de raízes Π dado em (5.1) obtemos, neste caso,

$$\Pi_K = \{ \pm (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \pm \varepsilon_k : 3 \le i < j \le n, 3 \le k \le n \}$$

$$\Pi_M^+ = \{ \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \pm \varepsilon_j, \varepsilon_2 \pm \varepsilon_j : 3 \le j \le n \}$$

com respeito a base Σ dada em (5.2). A subálgebra $\mathfrak t$ tem a forma (5.1) com

$$\Delta_{\mathfrak{t}} = \{ diag (\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, \dots, 0) \}$$

onde 0 aparece n-2 vezes. Então restringindo as raízes complementares positivas a \mathfrak{t} , obtem-se $\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = \{\delta_1 \pm \delta_2, \delta_1, \delta_2\}$, onde δ_i denota a restrição do funcional ε_i à subálgebra \mathfrak{t} .

Por conveniência fazemos $V_{\alpha} = \mathbb{R}S_{\alpha} + \mathbb{R}\sqrt{-1}A_{\alpha}$, $\alpha \in \Pi_{M}^{+}$. Qualquer métrica invariante sobre $\mathbb{F}_{B}\{1, 1, n-2\}$ tem a forma

$$\Lambda = x \cdot \mathfrak{m}_1 + y \cdot \mathfrak{m}_2 + z_1 \cdot \mathfrak{m}_3 + z_2 \cdot \mathfrak{m}_4. \tag{5.6}$$

onde $\mathfrak{m}_1 = V_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$, $\mathfrak{m}_2 = V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, $\mathfrak{m}_3 = V_{\varepsilon_1} \oplus \sum_{j=3}^n \left(V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_j} \oplus V_{\varepsilon_1 - \varepsilon_j} \right)$ e $\mathfrak{m}_4 = V_{\varepsilon_2} \oplus \sum_{j=3}^n \left(V_{\varepsilon_2 + \varepsilon_j} \oplus V_{\varepsilon_2 - \varepsilon_j} \right)$. Relembramos que a forma de Cartan-Killing neste caso satisfaz $(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \frac{1}{2n-1}$, $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \frac{1}{2(2n-1)}$ e as constantes de estrutura $N_{\alpha,\beta}$ tem valor absoluto igual a $\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}}$.

Usando a expressão do tensor de Ricci vemos que Λ é uma métrica invariante Einstein se, e somente se,: $f_1 := Ric(X_{\varepsilon_1}, X_{-\varepsilon_1}) - cz_1 = 0$, $f_2 := Ric(X_{\varepsilon_2}, X_{-\varepsilon_2}) - cz_2 = 0$, $f_3 := Ric(X_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, X_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}) - cx = 0$ e $f_4 := Ric(X_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, X_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}) - cy = 0$, onde $f_1 = f_1(x, y, z_1, z_2)$, $f_2 = f_2(x, y, z_1, z_2)$, $f_3 = f_3(x, z_1, z_2)$ e $f_4 = f_4(y, z_1, z_2)$.

Definindo $F := f_1 + f_2$ e $G := f_3 + f_4$, então as equações algébricas de Einstein satisfazem $F(x,y,z_1,z_2) = F(x,y,z_2,z_1)$ e $G(x,y,z_1,z_2) = G(y,x,z_1,z_2)$. Escolhemos c = 1/4(2n-1) e usamos estas simetrias para obter o seguinte sistema equivalente as equações algébricas de Einstein

$$p_{1} = (z_{1} - z_{2}) \left((x+y) \left((z_{1} + z_{2})^{2} - xy \right) - z_{1} z_{2} xy \right) = 0$$

$$p_{2} = 2 (4n - 1) xy z_{1} z_{2} + (x+y) (z_{1} + z_{2}) \left((z_{1} - z_{2})^{2} - xy \right) - (z_{1} + z_{2}) z_{1} z_{2} xy = 0$$

$$p_{3} = (x-y) \left((2n-3) (x+y) - z_{1} z_{2} \right) = 0$$

$$p_{4} = 8z_{1} z_{2} + (2n-3) \left((x+y)^{2} - 2xy - 2 (z_{1} - z_{2})^{2} \right) - (x+y) z_{1} z_{2} = 0$$

$$(5.7)$$

onde $p_1 := 4(2n-1)xyz_1z_2(f_1-f_2), p_2 := 4(2n-1)xyz_1z_2(f_1+f_2), p_3 := 4(2n-1)z_1z_2(f_3-f_4)$ e $p_4 := 4(2n-1)z_1z_2(f_3+f_4).$

Agora resolvemos esse sistema em quatro etapas:

- i) Se x = y e $z_1 = z_2$, então p_2 e p_4 são fatorados facilmente. Assim obtemos as duas métricas de Einstein invariante dadas em (5.3).
- ii) Se $x \neq y$ e $z_1 = z_2$ simplificamos o sistema fatorando p_2 , p_3 e p_4 usando a hipótese que $x \neq y$ e todas as incógnitas são positivas. Assim obtemos as duas soluções dadas em (5.4).
- iii) Se x = y e $z_1 \neq z_2$ pela expressão de p_1 e p_4 vemos que x, z_1 , z_2 devem satisfazer as equações $2((z_1 + z_2)^2 x^2) z_1 z_2 x = 0$ e $4z_1 z_2 + (2n 3) x^2 x z_1 z_2 = 0$ as quais implica na seguinte igualdade

$$2(z_1 + z_2)^2 + (2n - 5)x^2 + 4z_1z_2 = 0$$

o que é impossível, pois $n \ge 4$ and $z_1, z_2, x > 0$. Portanto não existe métrica de Einstein invariante satisfazendo x = y e $z_1 \ne z_2$.

iv) Se $x \neq y$ e $z_1 \neq z_2$ vemos que o sistema (5.7) reduz-se ao seguinte sistema algébrico

$$(x+y)\left((z_1+z_2)^2 - xy\right) - z_1 z_2 xy = 0$$

$$2(4n-1)xyz_1z_2 + (x+y)(z_1+z_2)\left((z_1-z_2)^2 - xy\right) - (z_1+z_2)z_1 z_2 xy = 0$$

$$(2n-3)(x+y) - z_1 z_2 = 0$$

$$8z_1z_2 + (2n-3)\left((x+y)^2 - 2xy - 2(z_1-z_2)^2\right) - (x+y)z_1z_2 = 0$$

o qual pode ser resolvido por substituição. Suas soluções são as métricas Kähler-Einstein invariantes dadas em (5.5).

Continuando o estudo da métricas de Einstein nas variedades bandeira com quatro somandos isotrópicos, na tabela 2, obtivemos o próximo resultado. Continuaremos a explorar as simetrias das equações de Einstein.

Teorema 5.2.4. A família de variedades bandeira $\mathbb{F}_C(m,m) = \frac{Sp(n)}{U(m)\times U(m)}$, n=2m, admite exatamente, a menos de homotetias, seis métrica de Einstein invariante. Estas métricas são

dadas explicitamente por

(1)
$$-$$
 (2) $x = \frac{(2b-1)(3b-2) \pm \sqrt{b((2b-1)(3b-2))}}{2b-1}$, $y = 6b-4-x$
 $z_1 = z_2 = \frac{2b(3b-2)}{2b-1}$ (5.8)

(3)
$$z_1 = 2b$$
, $z_2 = 6b - 4$, $x = 2b - 2$, $y = 4b - 2$

(4)
$$z_1 = 6b - 4$$
, $z_2 = 2b$, $x = 2b - 2$, $y = 4b - 2$

(5)
$$z_1 = 6b - 4$$
, $z_2 = 2b$, $x = 4b - 2$, $y = 2b - 2$

(6)
$$z_1 = 2b, z_2 = 6b - 4, x = 4b - 2, y = 2b - 2$$
 (5.9)

onde b = m + 1. Além disso, as métricas (3) – (6) são Kähler-Einstein.

Demonstração. Tomamos a mesma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ dada em (4.11) e o sistema de raízes associado dado em (4.12). O sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}},\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})\times\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}))$ é dado por

$$\Pi_K = \{ \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j), \pm (\varepsilon_{i+m} - \varepsilon_{j+m}) : 1 \le i < j \le m \}.$$

Assim,

$$\Pi_M = \{ \pm (\varepsilon_i \pm \varepsilon_{j+m}), \pm (\varepsilon_i + \varepsilon_j), \pm (\varepsilon_{i+m} + \varepsilon_{j+m}) : 1 \le i \le j \le m \}.$$

Então, a subálgebra t tem a forma (4.11) com

$$\Lambda_t = diag\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_2\},\$$

onde ε_i aparece m vezes. Assim o conjunto das \mathfrak{t} -raízes é dado por $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm (\delta_1 \pm \delta_2), \pm 2\delta_1, \pm 2\delta_2\}$ onde $\delta_i = \varepsilon_i|_{\mathfrak{t}}$.

Qualquer métrica invariante sobre $\mathbb{F}_{C}(m,m)$ tem a forma (5.6), com

$$\mathfrak{m}_1 = \sum_{i,j=1}^m V_{\varepsilon_i - \varepsilon_{j+m}}, \mathfrak{m}_2 = \sum_{i,j=1}^m V_{\varepsilon_i + \varepsilon_{j+m}}, \mathfrak{m}_3 = \sum_{i,j=1}^m V_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}, \mathfrak{m}_4 = \sum_{i,j=1}^m V_{\varepsilon_{i+m} + \varepsilon_{j+m}}.$$

Relembramos que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ é dada por (X,Y)=2(n+1)trXY. Além disso $(\alpha,\alpha)=\frac{1}{n+1}$, se $\alpha=\pm 2\varepsilon_i$ e $(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2(n+1)}$ se $\alpha=\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$. Usamos o Lema 4.3.2 para obter os valores das constantes de estrutura.

De forma análoga ao caso anterior, escrevemos

$$f_1 := Ric\left(X_{\varepsilon_i - \varepsilon_{j+m}}, X_{\varepsilon_{j+m} - \varepsilon_i}\right) - cx, \ f_2 := Ric\left(X_{\varepsilon_i + \varepsilon_{j+m}}, X_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_{j+m})}\right) - cy,$$

$$f_3 := Ric\left(X_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}, X_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)}\right) - cz_1, \ f_4 := Ric\left(X_{\varepsilon_{i+m} + \varepsilon_{j+m}}, X_{-(\varepsilon_{i+m} + \varepsilon_{j+m})}\right) - cz_2$$

assim Λ é Einstein se, e somente se, $f_i = 0, i = 1, \dots, 4$.

Escolhemos c = 1/4(n+1). Obtemos deste modo o seguinte sistema simplificado equivalente as equações de Einstein

$$p_{1} = (x - y) \left[(bz_{2} + bz_{1}) (x + y)^{2} - z_{1}z_{2} (bz_{1} + bz_{2} + 2xy) \right] = 0$$

$$p_{2} = (x + y) \left[(bz_{2} + bz_{1}) (x - y)^{2} - z_{1}z_{2} (bz_{1} + bz_{2} + 2xy) \right] + 8(n + 1)xyz_{1}z_{2} = 0$$

$$p_{3} = (z_{1} - z_{2}) (m (z_{1} + z_{2}) - xy) = 0$$

$$p_{4} = 4xy (n + 1) - xy (z_{1} + z_{2}) - n (x^{2} + y^{2}) + m (z_{1}^{2} + z_{2}^{2}) = 0$$

$$(5.10)$$

onde b = m + 1, $p_1 := 2xyz_1z_2(f_1 - f_2)$, $p_2 := 2xyz_1z_2(f_1 + f_2)$, $p_3 := xy(f_3 - f_4)$ e $p_4 := xy(f_3 + f_4)$.

De forma análoga ao caso anterior encontramos, em quatro etapas, as soluções do sistema (5.10), as quais são dadas em (5.8) e (5.9).

Os Teoremas acima provam a Conjectura 0.0.1 de Wang e Ziller para as respectivas quatro famílias de variedades bandeira generalizadas.

5.3 Métricas de Einstein e as dimensões dos somandos isotrópicos

Nesta seção queremos ligar repetição dos parâmetros da métrica de Einstein com as dimensões dos somandos isotrópicos \mathfrak{m}_i , denotadas por D_i . Começamos com um exemplo extremo na variedade $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$. A métrica nesta variedade cujos parâmetros são todos iguais a 1 é Einstein somente quando os números $D_{ij}=2n_in_j$ são iguais, ou seja, somente quando $n_1=\ldots=n_s$. Neste caso, esta métrica é a métrica normal. Assim, igualdade na métrica implica igualdade nas dimensões dos somandos.

Mais geralmente, os exemplos citados nas seções anteriores, e outros encontrados em [6], [26] e [32], nos levam a acreditar que toda métrica de Einstein invariante de tipo não Kähler tenha alguns parâmetros repetidos. Enquanto não podemos afirmar esta conjectura, vamos estabelecer algumas ligações entre esta questão e igualdade dos números D_i .

Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e $T_o\mathbb{F} = \mathfrak{m}$ o espaço tangente a \mathbb{F} na origem. Considere a decomposição, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_s$ em $ad(\mathfrak{k})$ -módulos reais irredutíveis não equivalentes.

Seja Λ uma métrica invariante sobre \mathbb{F} e $S(\Lambda)$ a curvatura escalar associada. A curvatura escalar sobre um espaço homogêneo compacto e conexo G/H foi calculada em [36].

No caso das variedades bandeira a expressão de $S(\Lambda)$ se reduz a

$$S(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i} \frac{D_i}{\lambda_i} - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j}$$
(5.11)

onde $D_i = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_i)$ e λ_i são os parâmetros da métrica invariante Λ para $i = 1, \ldots, s$. Os coeficientes C_{ij}^k foram definidos em (4.14).

Consideremos o conjunto das métricas invariante sobre F, com volume unitário, [20]:

$$\mathcal{M} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s : \lambda_1^{D_1} \dots \lambda_s^{D_s} = 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s > 0\}.$$

O próximo resultado é válido em espaços homogêneos mais gerais do que as variedades bandeira. Este resultado mostra a relação entre métricas invariante Einstein e a curvatura escalar.

Teorema 5.3.1. [36] Seja \mathbb{F} uma variedade bandeira. Então os pontos críticos de $S|_{\mathcal{M}}$ são precisamente as métricas invariante Einstein em \mathbb{F} .

A priori, dada uma métrica invariante Λ sobre \mathbb{F} , para calcular $S(\Lambda)$ deve-se computar todos os coeficientes C_{ij}^k . Entretanto, o próximo resultado mostra que esses coeficientes são não nulos apenas nas triplas soma zero de t-raízes.

Lema 5.3.2. Sejam d_i, d_j, d_k t-raízes associadas aos $ad(\mathfrak{k})$ -módulos reais $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j$ e \mathfrak{m}_k , respectivamente. Então $C_{ij}^k \neq 0$ se, e somente se, $d_i + d_j + d_k = 0$.

Demonstração. Considere os elementos X_{α} , $\alpha \in \Pi_{M}$, da base de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ fixada em (1.1). Seja $V_{\alpha} = \mathbb{R}S_{\alpha} + \mathbb{R}\sqrt{-1}A_{\alpha}$, então, conforme observado em (1.2) os vetores $E_{\alpha} = S_{\alpha}/\sqrt{2}$ e $F_{\alpha} = \sqrt{-1}A_{\alpha}/\sqrt{2}$, $\alpha \in \Pi_{M}^{+}$ formam uma base B-ortonormal de V_{α} .

Assim, uma base B-ortonormal de um $ad(\mathfrak{k})$ -módulo $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{d_i}$, com $d_i \in \Pi_{\mathfrak{k}}^+$ é dada por $b_i = \left\{ E_{\alpha}, F_{\alpha} : \alpha|_{\mathfrak{k}} = d_i, \alpha \in \Pi_M^+ \right\}$.

Considere b_i, b_j e b_k bases B-ortonormal de \mathfrak{m}_i , \mathfrak{m}_j e \mathfrak{m}_k respectivamente. Como $\left[\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\beta}^{\mathbb{C}}\right] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}^{\mathbb{C}}$ e $\left(\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\gamma}^{\mathbb{C}}\right) = 0$, exceto quando $\alpha + \beta + \gamma = 0$, concluímos que para todo $e_{\alpha} \in b_i$, $e_{\beta} \in b_j$ e $e_{\gamma} \in b_k$ temos $B\left(\left[e_{\alpha}, e_{\beta}\right], e_{\gamma}\right) = 0$ exceto quando $\alpha + \beta + (-\gamma) = 0$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M^+$.

Portanto, de acordo com (4.14) se $C_{ij}^k \neq 0$ então existe $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M^+$ com $k(\alpha) = d_i$, $k(\beta) = d_j$, $k(\gamma) = d_k$ tais que $\alpha + \beta + (-\gamma) = 0$, logo $d_i + d_j + (-d_k) = \alpha|_{\mathfrak{t}} + \beta|_{\mathfrak{t}} + (-\gamma)|_{\mathfrak{t}} = (\alpha + \beta + (-\gamma))|_{\mathfrak{t}} = 0$.

Reciprocamente, se d_i, d_j, d_k são t-raízes taís que $d_i + d_j + d_k = 0$, então pelo Lema 3.3.2 existem $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ com $\alpha|_{\mathfrak{t}} = d_i$, $\beta|_{\mathfrak{t}} = d_j$, $\gamma|_{\mathfrak{t}} = d_k$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Portanto, $C_{ij}^k \neq 0$.

Lembramos que uma t-raíz d_i pertence a uma tripla soma zero se existem $d_j, d_k \in \Pi_t$ tais que $d_i + d_j + d_k = 0$. Neste caso denotamos por $T(d_i)$ o número de triplas soma zero contendo $d_i \in \Pi_t$.

Proposição 5.3.3. Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e Π_t um conjunto de t-raízes correspondente. Sejam $d_i, d_j, -(d_i + d_j) = d_k \in \Pi_t$ tais que $T(d_i) = T(d_j) = 1$. Se existirem i e j tais que \mathbb{F} admita uma métrica invariante Einstein satisfazendo $\lambda_i = \lambda_j$ então $\dim \mathfrak{m}_i = \dim \mathfrak{m}_j$.

Demonstração. Usando o método do multiplicador de Lagrange, segue-se do Teorema 5.3.1 que uma métrica Λ é Einstein se, e somente se, Λ é solução das s+1 equações de Einstein

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_l} = \xi D_l \lambda_1^{D_1} \cdots \lambda_l^{D_l-1} \cdots \lambda_s^{D_s}, \ 1 \le l \le s \tag{5.12}$$

$$\lambda_1^{D_1} \cdots \lambda_s^{D_s} = 1 \tag{5.13}$$

onde $D_l = dim \mathfrak{m}_l$ e ξ é o multiplicador de Lagrange.

Em particular, Λ deve satisfazer as duas equações do sistema (5.12) relativas a i e j. Como $T(d_i) = T(d_j) = 1$, segue-se da expressão da curvatura escalar (5.11) e pelo Lema 4.14 que a igualdade (5.12), para l = i, se reduz a

$$-\frac{D_i}{2\lambda_i^2} - \frac{1}{4}C_{ij}^k \left(\frac{1}{\lambda_i \lambda_k} - \frac{\lambda_k}{\lambda_i^2 \lambda_j} - \frac{\lambda_j}{\lambda_i^2 \lambda_k}\right) = \xi D_i \lambda_1^{D_1} \cdots \lambda_i^{D_i-1} \cdots \lambda_s^{D_s}. \tag{5.14}$$

Multiplicando esta última equação por λ_i/D_i e usando (5.13), obtemos

$$-\frac{1}{2\lambda_i} - \frac{1}{4D_i} C_{ij}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j \lambda_k} - \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} - \frac{\lambda_j}{\lambda_i \lambda_k} \right) = \xi. \tag{5.15}$$

Analogamente, para l = j, temos

$$-\frac{1}{2\lambda_j} - \frac{1}{4D_j} C_{ij}^k \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i \lambda_k} - \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j \lambda_k} \right) = \xi. \tag{5.16}$$

Portanto se Λ é uma métrica invariante Einstein satisfazendo $\lambda_i = \lambda_j$, pelas equações (5.15) e (5.16), obtemos $D_i = D_j$.

Exemplo 5.3.4. Considere a variedade bandeira $\mathbb{F} = \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))}$. Neste caso, um conjunto de t-raizes positivas é dado por

$$\Pi_{t}^{+} = \{\delta_{12} = (d_1 - d_2), \delta_{23} = (d_2 - d_3), \delta_{13} = (d_1 - d_3)\}.$$

Com uma simples inspeção, vemos que $\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{31} = 0$ e $T(\delta_{12}) = T(\delta_{23}) = 1$. Assim qualquer métrica invariante sobre \mathbb{F} é da forma

$$\Lambda = \lambda_{12}\mathfrak{m}_{12} + \lambda_{23}\mathfrak{m}_{23} + \lambda_{13}\mathfrak{m}_{13}$$

onde \mathfrak{m}_{ij} é o $ad(\mathfrak{k})$ -módulo associado a δ_{ij} e $dim\mathfrak{m}_{ij} = 2n_i n_j$, com $1 \leq i < j \leq 3$.

Portanto, a condição necessária para a métrica normal ser Einstein é $n_1 = n_2 = n_3$.

Observação 5.3.1. Em geral, se \mathbb{F} é uma variedade bandeira que possui um conjunto de t-raízes positivas da forma

$$\Pi_{t}^{+} = \{\delta, \eta, (\delta + \eta)\}, \text{ com } \delta \neq \eta$$

então,
$$\delta + \eta - (\delta + \eta) = 0$$
 e $T(\delta) = T(\eta) = 1$.

Portanto se $dim\mathfrak{m}_{\delta} \neq dim\mathfrak{m}_{\eta}$ então qualquer métrica invariante Einstein sobre \mathbb{F} deve satisfazer $\lambda_{\delta} \neq \lambda_{\eta}$.

Assim das 10 classes de variedades bandeira com apenas três somandos isotrópicos, classificadas por Kimura em [20], podemos aplicar essa observação, pois em cada uma delas temos apenas três t-raízes positivas.

Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e Π_t um conjunto de t-raízes correspondentes. Dada uma t-raíz δ , seja $\alpha \in \Pi_M \subset \Pi$ tal que $k(\alpha) = \delta$. Como Π é um sistema de raízes, sabemos que α pertence a alguma tripla soma zero de raízes, isto é, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ para alguma $\beta, \gamma \in \Pi$. Então $k(\alpha) + k(\beta) + k(\gamma) = 0$.

Entretanto, se $\gamma \in \Pi_K$ não podemos concluir que $\delta \in \Pi_t$ pertence a uma tripla soma zero de t-raízes, pois nesse caso $k(\gamma) = 0$.

O próximo resultado mostra que a existência da métrica invariante Kähler-Einstein sobre F implica que toda t-raíz está em alguma tripla soma zero.

Teorema 5.3.5. Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e Π_t um conjunto de t-raízes correspondentes. Se Π_t contiver mais que uma t-raíz positiva, então toda t-raíz pertence a alguma tripla soma zero.

Demonstração. Considere a métrica Kähler-Einstein Λ correspondente a estrutura complexa canônica sobre \mathbb{F} . Pelo Teorema 5.3.1, Λ satisfaz o sistema algébrico dado em (5.12) e (5.13). Suponhamos que uma t-raíz d_{k_0} não pertence a nenhuma tripla soma zero, logo pelo Lema 5.3.2, temos $C_{ij}^{k_0} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, s$.

Então, a equação (5.12) para $l = k_0$ reduz a

$$-\frac{D_{k_0}}{2\lambda_{k_0}^2} = \xi D_{k_0} \lambda_1^{D_1} \cdots \lambda_{k_0}^{D_{k_0}-1} \cdots \lambda_s^{D_s}$$

donde,

$$\xi = -\frac{1}{2\lambda_{k_0}}. (5.17)$$

Como \mathbb{F} não é isotropicamente irredutível, existe pelo menos uma t-raíz $d_i \neq d_{k_0}$ correspondente a $ad(\mathfrak{k})$ -módulo \mathfrak{m}_i irredutível e não equivalente a \mathfrak{m}_{k_0} . Assim, a equação (5.12) para l=i é dada por

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = -\frac{1}{2\lambda_{k_0}} D_i \lambda_1^{D_1} \cdots \lambda_i^{D_{i-1}} \cdots \lambda_s^{D_s}$$

donde,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = -\frac{D_i}{2\lambda_i \lambda_{k_0}}. (5.18)$$

Por outro lado.

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = -\frac{D_i}{2\lambda_i^2} + f \tag{5.19}$$

onde f é uma função dependo de todos λ_j tais que $d_i \pm d_j \in \Pi_t$, pelo Lema 5.3.2. Então, por (5.18) e (5.19) temos

$$f = \frac{D_i}{2\lambda_i} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{k_0}} \right)$$

o que contradiz o fato de d_{k_0} não pertencer a nenhuma tripla soma zero de t-raízes. \Box

Como consequência, podemos caracterizar alguns conjuntos de t-raízes.

Proposição 5.3.6. Seja \mathbb{F} é uma variedade bandeira com apenas dois somandos isotrópicos irredutíveis e inequivalentes, então o conjunto das t-raízes associado é da forma $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm \zeta, \pm 2\zeta\}$.

Demonstração. Como $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, podemos escrever $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\delta, -\delta, \zeta, -\zeta\}$, onde $\delta, \zeta \in k$ (Π^+). Pelo Teorema 5.3.5, δ pertence a alguma tripla soma zero de t-raízes.

Como as t-raízes são funcionais lineares em \mathfrak{t}^* não nulos, as possibilidades para as triplas soma zero contendo δ são $\delta + \zeta + \zeta = 0$, $\delta + \delta + \zeta = 0$, ou $\delta - \zeta - \zeta = 0$. Agora, usando o Lema 3.3.2, vemos que a primeira e segunda contradiz o fato de δ e ζ pertencer a k (Π^+). Logo, $\delta = 2\zeta$.

Corolário 5.3.7. Se \mathbb{F} é tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ com $dim\mathfrak{m}_1 \neq dim\mathfrak{m}_2$, então qualquer métrica invariante Einstein sobre \mathbb{F} deve satisfazer $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (Isto é, se a métrica normal é Einstein sobre \mathbb{F} então $\dim \mathfrak{m}_1 = \dim \mathfrak{m}_2$.)

Demonstração. De fato, neste caso cada t-raíz pertence a exatamente uma tripla soma zero. Agora o resultado segue da Proposição 5.3.3.

Proposição 5.3.8. Se \mathbb{F} tem apenas três somandos isotrópicos irredutíveis e inequivalentes, então o conjunto das t-raízes associado é da forma $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm \delta, \pm \zeta, \pm (\delta + \zeta)\}$ ou $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm \delta, \pm 2\delta, \pm 4\delta\}$, onde $\delta, \zeta \in \mathfrak{t}^* \setminus \{0\}$.

Demonstração. Como $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$ podemos escrever, $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma\}$ onde $\alpha, \beta, \gamma \in k(\Pi^+)$ são as t-raízes positivas com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{t}^* \setminus \{0\}$. Observamos que não existe tripla soma zero com apenas t-raízes positivas ou tripla contendo duas t-raízes opostas.

Assim vemos que as possíveis triplas soma zero contendo α são $(\alpha, \beta, -\gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, -\gamma)$, $(\alpha, \alpha, -\beta)$, $(\alpha, \alpha, -\gamma)$, $(\alpha, -\beta, -\beta)$, $(\alpha, -\gamma, -\gamma)$. De qualquer uma das três primeiras opções, concluímos que Π_t tem a forma $\Pi_t = \{\pm \delta, \pm \zeta, \pm (\delta + \zeta)\}$.

Para cada uma das quatro últimas possiblidades, concluímos que Π_t tem a forma $\Pi_t = \{\pm \delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta\}$ ou $\Pi_t = \{\pm \delta, \pm 2\delta, \pm 4\delta\}$.

5.4 Correspondência entre estruturas de variedades bandeira maximais e generalizadas

Em [28], Negreiros e San Martin classificaram todas as estruturas quase Hermitianas em variedades bandeira maximal, usando a classificação obtida por Gray e Hervella em [16].

Mais precisamente, eles mostraram que no caso das variedades bandeira maximais as 16 classes de Gray e Hervella colapsam em três classes, sendo que uma delas inclui a métrica normal.

No caso de variedades bandeira generalizadas, Silva [35] mostrou que as 16 classes colapsam em cinco classes. Aqui não entraremos em detalhes das definições das 16 classes.

Nesta seção mostraremos bijeções entre estruturas de certas variedades bandeira maximais e generalizadas. Essas estruturas são métricas invariantes, estruturas quase complexas, estruturas quase Hermitianas e métricas de Einstein.

Tem uma consequência importante a bijeção entre estruturas quase Hermitianas de variedades bandeira maximais e bandeira generalizadas cujo conjunto Π_t é um sistema de raízes. Pois como veremos a seguir, nesse caso, nas variedades bandeira generalizada com essa característica (isto é, Π_t é um sistema de raízes) as classes das estruturas quase Hermitianas são as mesmas que no caso das variedades bandeira maximal.

Teorema 5.4.1. Sejam

$$\mathbb{F}_A(s) = \frac{SU(s)}{S(U(1) \times \dots \times U(1))} \qquad e \qquad \mathbb{F}_A(n_1, \dots, n_s) = \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times \dots \times U(n_s))},$$

com $\sum n_i = n$ e $n_i \geq 1$, variedades bandeira maximal e generalizada do tipo A_l , respectivamente. Sejam Π^+ as raízes positivas de $\mathfrak{sl}(s,\mathbb{C})$ e $\Pi_{\mathfrak{t}}^+$ as t-raízes positivas correspondentes a variedade bandeira generalizada $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$. Então existe uma bijeção

(1) entre métricas invariantes em $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$, dada por

$$\lambda_{\alpha_{ij}} \longleftrightarrow \lambda_{\delta_{ij}}$$
 (5.20)

(2) entre estruturas quase complexas invariante em $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$, dada por

$$\varepsilon_{\alpha_{ij}} \longleftrightarrow \varepsilon_{\delta_{ij}}$$
 (5.21)

(3) estrutura quase Hermitianas invariante em $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$, dada por

$$\left(\left\{\lambda_{\alpha_{ij}}\right\},\left\{\varepsilon_{\alpha_{ij}}\right\}\right)\longleftrightarrow\left(\left\{\lambda_{\delta_{ij}}\right\},\left\{\varepsilon_{\delta_{ij}}\right\}\right)$$

(4) entre métricas invariante Einstein em $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1, \dots, n_s)$, se $n_1 = \dots = n_s = n/s$, dada por ([32])

$$\lambda_{\delta_{ij}} \longleftrightarrow \frac{n}{s} \lambda_{\alpha_{ij}}$$

onde $1 \le i \ne j \le s$, $\alpha_{ij} \in \Pi^+$ $e \delta_{ij} \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+$.

Demonstração. Os itens (1)-(3) são consequencias da Proposição 4.1.1 e da caracterização desses tensores, em termos das t-raízes, dada no capítulo 3. O item (5) é um resultado em [32] e para sua verificação basta usar as equações de Einstein no caso A_l .

A classificação das classes de estruturas quase Hermitiana invariante dada em [28] é baseada em termos combinatórios envolvendo os sistemas de raízes Π e os escalares λ_{α} e ε_{α} .

Assim, como no caso A_l o conjunto Π_t é um sistema de raízes, pela Proposição 4.1.1, o mesmo método usado em [28] para classificar as estruturas quase Hermitiana invariante em $\mathbb{F}_A(n)$ pode ser repetido para classificar essas estruturas sobre $\mathbb{F}_A(n_1,\ldots,n_s)$. Consequentemente,

Teorema 5.4.2. As famílias de variedades bandeira $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1, \ldots, n_s)$ possuem as mesmas classes de estruturas quase Hermitiana invariantes.

Um resultado análogo ocorre para as variedades bandeira maximal e generalizada do tipo C_l , isto é,

$$\mathbb{F}_C(s) = \frac{Sp(s)}{U(1)^s}$$
 e $\mathbb{F}_C(n_1, \dots, n_s) = \frac{Sp(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s)}$,

 $com \sum n_i = n e n_i \ge 1.$

Teorema 5.4.3. Considere as variedades bandeira $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$. Sejam $\Pi^+ = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \beta_{ij} = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \gamma_i = 2\varepsilon_i, 1 \leq i < j \leq s\}$ uma escolha de raízes positivas de $\mathfrak{sp}(s,\mathbb{C})$ e $\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = \{\bar{\alpha}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}, \bar{\gamma}_i, 1 \leq i < j \leq s\}$ as t-raízes positivas correspondentes a $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$. Então existe uma bijeção entre

(1) métricas invariantes sobre $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$, dada por

$$\lambda_{\alpha_{ij}} \longleftrightarrow \lambda_{\bar{\alpha}_{ij}}$$

$$\lambda_{\beta_{ij}} \longleftrightarrow \lambda_{\bar{\beta}_{ij}}$$

$$\lambda_{\gamma_{ii}} \longleftrightarrow \lambda_{\bar{\gamma}_{ii}}$$

$$(5.22)$$

(2) estruturas quase complexas invariante sobre $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$, dada por

$$\varepsilon_{\alpha_{ij}} \longleftrightarrow \varepsilon_{\bar{\alpha}_{ij}}
\varepsilon_{\beta_{ij}} \longleftrightarrow \varepsilon_{\bar{\beta}_{ij}}
\varepsilon_{\gamma_{ij}} \longleftrightarrow \varepsilon_{\bar{\gamma}_{ij}}$$
(5.23)

(3) estrutura quase Hermitianas invariante (Λ, J) sobre $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1, \dots, n_s)$, dada por (5.22) e (5.23);

Demonstração. Segue da Proposição 4.3.1 e da caracterização desses tensores dada no capítulo 3.

Observamos que nesse caso não é possível estabecer uma bijeção entre métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$ via multiplicação por algum escalar.

Pela Proposição 4.3.1, o conjunto das t-raízes de $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$ é um sistema de raízes do tipo C_s , portanto de forma análoga ao caso anterior obtemos

Teorema 5.4.4. As famílias de variedades bandeira $\mathbb{F}_C(s)$ e $\mathbb{F}_C(n_1, \ldots, n_s)$ possuem as mesmas classes de estruturas quase Hermitiana invariantes.

CAPÍTULO 6

ESTRUTURAS INVARIANTES (1,1)-SIMPLÉTICAS

Neste capítulo estudamos f-estruturas invariante nas variedades bandeira. Essas estruturas generalizam as equi J vistas no capítulo 3, pois neste caso o parâmetro ε_{δ} pode assumir os valores ± 1 ou 0.

O estudo das f-estruturas (1,1)-simpléticas em variedades bandeira é motivado por certos resultados sobre aplicações complexas harmônicas com valores em \mathbb{F} , veja [12].

Cohen e Pinzón, em [14], obtiveram uma caracterização combinatória da propriedade (1,1)-simplética, veja o Teorema 6.2.9 abaixo. Entretanto essa caracterização combinatória foi baseada em grafos cujo o número de vértices depende da quantidade de raízes em Π_M . Assim, quanto maior for o número $|\Pi_M|$, mais trabalhoso e complicado é obter novos exemplos.

O nosso objetivo neste capítulo é provar que a caracterização combinatória de Cohen e Pinzón estende-se às t-raízes. Assim obteremos novos exemplos de grafos em variedades bandeira generalizadas cujo o número $|\Pi_M|$ é arbitrariamente grande.

6.1 f-Estruturas Invariantes

Nesta seção caracterizamos as f-estruturas invariantes por meio de t-raízes. Como usamos alguns resultados do capítulo 5 para produzir alguns exemplos, vemos que é mais adequado esta seção estar neste capítulo do que no capítulo 3.

Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma f-estrutura sobre TM é um campo tensorial do tipo (1,1), denotado por \mathcal{F} , tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Evidentemente toda eqci é uma f-estrutura invariante. Uma variedade diferenciável munida de uma f-estrutura é dita uma f-variedade. O conceito de f-estrutura foi introduzido por K. Yano em [40].

Agora vamos apresentar uma caracterização das f-estruturas invariante sobre variedades bandeira por meio de t-raízes.

Definição 6.1.1. Uma f-estrutura \mathcal{F} na variedade bandeira $\mathbb{F} = G/K$ \acute{e} chamada invariante (ou G-invariante) se para cada $x \in G/K$ o endomorfismo $\mathcal{F}_x \colon T_x\mathbb{F} \to T_x\mathbb{F}$ satisfaz $dg_x \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{gx} \circ dg_x$, para todo $g \in G$.

A definição acima diz que dado $x \in \mathcal{F}$ a lei de formação do endomorfismo \mathcal{F}_x pode ser determinada pelo endomorfismo $\mathcal{F}_o \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, onde o = eK denota a origem de \mathbb{F} . Mais precisamente: uma f-estrutura invariante em G/K é completamente determinada por um endomorfismo $\mathcal{F} \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, que comuta com a ação adjunta de K, isto é, $Ad(K)\mathcal{F} = \mathcal{F}Ad(K)$, e satisfaz $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, veja [14].

Como de costume, denotaremos também por \mathcal{F} a sua complexificada, isto é, o endomorfismo $\mathcal{F} \colon \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Este endomorfismo é diagonalizável e seus autovalores são i, 0, -i. Isto implica que os elementos da base de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ são autovetores de \mathcal{F} , pois \mathcal{F} comuta com a ação adjunta de $K^{\mathbb{C}}$ (e portanto com a ação adjunta de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$). Portanto

$$\mathcal{F}(X_{\alpha}) = i\varepsilon_{\alpha}X_{\alpha} \tag{6.1}$$

para todo $\alpha \in \Pi_M$, onde $\varepsilon_{\alpha} \in \{\pm 1, 0\}$ e $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_{\alpha}$. Assim as f-estruturas ficam determinadas pelos valores ε_{α} indexados pelas raízes complementares Π_M . Esta caracterização das f-estruturas foi dada em [14].

O próximo resultado fornece a caracterização das f-estruturas invariantes por meio das \mathfrak{t} -raízes.

Proposição 6.1.2. Sejam \mathbb{F} uma variedade bandeira e Π_t o conjunto das t-raízes correspondente. Uma f-estrutura invariante \mathcal{F} em \mathbb{F} é dada por um conjunto de sinais indexados pelas t-raízes $\{\varepsilon_{\delta}; \delta \in \Pi_t\}$, onde $\varepsilon_{\delta} \in \{+1, 0, -1\}$ $e - \varepsilon_{\delta} = \varepsilon_{-\delta}$.

Demonstração. Considere a decomposição dada pelo conjunto das \mathfrak{t} -raízes $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_{1}^{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{k}^{\mathbb{C}}$$

onde os $ad(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ -submódulos $\mathfrak{m}_{i}^{\mathbb{C}}$, $i=1,\ldots,k$, são irredútiveis e não equivalentes.

Como \mathcal{F} comuta com $ad(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$, pelo lema de Schur segue-se que $\mathcal{F}|_{\mathfrak{m}_{i}^{\mathbb{C}}} = c_{i}Id_{\mathfrak{m}_{i}^{\mathbb{C}}}$, onde $c_{i} \in \mathbb{C}$. Além disso cada $\mathfrak{m}_{i}^{\mathbb{C}}$ é determinado por alguma t-raíz $\delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$, então podemos escrever ε_{δ} no lugar de c_{i} .

Sabemos que a restrição $\mathcal{F}|_{\mathfrak{m}_{i}^{\mathbb{C}}}$ avaliada na base $\{X_{\alpha}; \alpha \in \Pi_{M} \in k(\alpha) = \delta_{i}\}$ é dada por (6.1). Logo, se α e β são raízes em Π_{M} que determinam a mesma t-raíz, isto é, se $k(\alpha) = k(\beta)$, então $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta}$. Portanto, se $\alpha \in \Pi_{M}$ é tal que $k(\alpha) = \delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$ então $-\varepsilon_{\delta} = -\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{-\alpha} = \varepsilon_{-\delta}$, donde obtemos a anti-simetria de ε .

Com um certo abuso de notação, denotaremos uma f-estrutura invariante sobre \mathbb{F} por um conjunto $\{\varepsilon_{\delta}\}$, onde $\varepsilon_{\delta} = -\varepsilon_{-\delta} = +1,0$ ou -1 e $\delta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$. Notamos que no caso em que \mathbb{F} é uma variedade bandeira maximal, temos $\Pi_{\mathfrak{t}} = \Pi$, logo os sinais ε_{δ} são indexados por elementos de Π .

Agora vejamos como a Proposição 6.1.2 nos permite identificar facilmente as f-estruturas invariantes em diferentes classes de variedades bandeira generalizadas.

Observação 6.1.1. Seja \mathbb{F} é uma variedade bandeira isotropicamente irredutível, isto é, $|\Pi_t^+| = 1$. Então pela Proposição 6.1.2, qualquer f-estrutura em \mathbb{F} é dada por

$$\mathcal{F} = i\varepsilon_{\delta} Id_{\mathfrak{m}_{\delta}^{\mathbb{C}}} - i\varepsilon_{\delta} Id_{\mathfrak{m}_{-\delta}^{\mathbb{C}}}$$

onde $\Pi_t = \{\delta, -\delta\}$ e $\varepsilon_\delta \in \{\pm 1, 0\}$. Assim as únicas duas f-estruturas não nulas $\varepsilon_\delta = \pm 1$ em \mathbb{F} são estruturas quase complexas invariantes.

Como exemplo desta observação, destacamos os espaços da primeira linha da tabela 2 no capítulo anterior.

Exemplo 6.1.3. Qualquer f-estrutura invariante em uma variedade bandeira da família $\mathbb{F}_A(n_1, n_2, n_3) = \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_3))}$, é determinada por um conjunto com apenas três sinais $\{\varepsilon_{\delta_{12}}, \varepsilon_{\delta_{23}}, \varepsilon_{\delta_{13}}\}$, onde $\varepsilon_{\delta_{ij}} \in \{\pm 1, 0\}$ e $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j \in \Pi_{\mathfrak{t}}^+$, com $1 \leq i < j \leq 3$.

De fato, basta usar a Proposição anterior observando que neste caso $|\Pi_t| = 6$, conforme a Proposição 4.1.1. Então fixado uma escolha de t-raízes positivas de Π_t^+ , temos $|\Pi_t^+| = 3$.

Exemplo 6.1.4. Consideremos o espaço $\mathbb{F}_C(m,m) = \frac{Sp(n)}{U(m)\times U(m)}$, n=2m. Como vimos na demonstração do Teorema 5.2.4, o conjunto das t-raízes neste caso é dado por $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm (\delta_1 \pm \delta_2), \pm 2\delta_1, \pm 2\delta_2\}$. Portanto qualquer f-estrutura em $\mathbb{F}_C(m,m)$ é determinada por quatro parâmetros $\{\varepsilon_{\delta_1-\delta_2}, \varepsilon_{\delta_1+\delta_2}, \varepsilon_{\delta_1}, \varepsilon_{\delta_2}\}$, onde esses parâmetros podem assumir os valores ± 1 ou 0.

6.2 Estruturas (1,1)-simpléticas

Nesta seção estendemos a caracterização combinatória da propriedade (1,1)-simplética, obtida em [14], para t-raízes. A propriedade (1,1)-simplética de f-estruturas é uma generalização da propriedade (1,2)-simplética de eqci J, vista no capítulo 3.

Considere a derivada $d^{\nabla}\mathcal{F} \colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ em relação a conexão Riemanniana definida por

$$(d^{\nabla}\mathcal{F})(X,Y) = \nabla_X \mathcal{F}Y - \nabla_Y \mathcal{F}X - \mathcal{F}[X,Y]$$

onde a conexão Riemanniana associada à uma métrica invariante Λ é dada por

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + \Lambda^{-1} \left([X, \Lambda Y]_{\mathfrak{m}} - [\Lambda X, Y]_{\mathfrak{m}} \right).$$

A derivada $d^{\nabla} \mathcal{F}$ avaliada na base de Weyl é dada por, [14]:

$$\left(d^{\nabla}\mathcal{F}\right)(X_{\alpha}, X_{\beta}) = \begin{cases}
\frac{i\eta(\alpha, \beta)N_{\alpha, \beta}X_{\alpha+\beta}}{2\lambda_{\alpha+\beta}}, & \alpha + \beta \in \Pi_{M} \\
0, & \text{caso contrário}
\end{cases}$$
(6.2)

onde

$$\eta\left(\alpha,\beta\right) = \varepsilon_{\beta}\left(\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}\right) + \varepsilon_{\alpha}\left(\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}\right) - 2\varepsilon_{\alpha+\beta}\lambda_{\alpha+\beta}.$$

Denotaremos por $\left(d^{\nabla}\mathcal{F}\right)^{+-}$ a restrição de $d^{\nabla}\mathcal{F} \colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ ao subespaço $\mathfrak{m}^{+} \times \mathfrak{m}^{-}$, onde \mathfrak{m}^{\pm} é o autoespaço associado ao autovalor $\pm i$.

A tripla $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ é dita ser (1, 1)-simplética se $\left(d^{\nabla} \mathcal{F}\right)^{+-} = 0$, isto é, se $\left(d^{\nabla} \mathcal{F}\right)(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{m}^+$ e $Y \in \mathfrak{m}^-$.

O par $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ é dito ser (1, 1)-admissível se exite uma métrica invariante Λ tal que a tripla $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ é (1, 1)-simplética.

A forma de Kähler, considerada como uma 2-forma, é definida por $\sigma(X,Y) = -(\Lambda X, \mathcal{F}Y)$. Usando a caracterização de métricas invariante e f-estruturas invariantes, segue-se a forma de Kähler avaliada nos elementos da base de Weyl é dada por

$$\sigma\left(X_{\alpha}, Y_{\beta}\right) = \begin{cases} i\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha}, & \beta = -\alpha, \ \varepsilon_{\alpha} \neq 0, \\ \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Pi_M$. Como no capítulo 3, a derivada exterior $d\sigma$ é dada por

$$d\sigma\left(X_{\alpha},X_{\beta},X_{\gamma}\right)=\left\{ \begin{array}{c} 0,\;\alpha+\beta+\gamma\neq0,\\ \\ 0,\;\varepsilon_{\alpha}=\varepsilon_{\beta}=\varepsilon_{\gamma}=0\\ \\ -\frac{1}{3}iN_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha}+\varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta}+\varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma}\right), \text{caso contrário} \end{array} \right.$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$, ver [14].

Considere $d\sigma^{+--}$ a restrição de $d\sigma$ ao subespaço $\mathfrak{m}^+ \times \mathfrak{m}^- \times \mathfrak{m}^-$, dizemos que a variedade bandeira $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ é (1, 2)-simplética se $d\sigma^{+--} = 0$.

Teorema 6.2.1. ([14]) As seguintes propriedades da variedade bandeira $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ são equivalentes.

- (i) $d\sigma^{+-*}=0$.
- (ii) $d^{\nabla} \mathcal{F}^{+-} = 0$.
- (iii) Para todo $\alpha, \beta \in \Pi_M$ com $\alpha + \beta \in \Pi_M$ e $1 = \varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$, temos

$$\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} = \begin{cases} 0, \ \varepsilon_{\alpha+\beta} = 0 \\ \\ \lambda_{\alpha+\beta}, \ \varepsilon_{\alpha+\beta} = 1. \end{cases}$$

(iv) $\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}\lambda_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}\lambda_{\gamma} = 0$, para toda tripla soma zero $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ com $1 = \varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{\beta}$.

As propriedades (1,1)- e (1,2)-simplética coincidem quando a f-estrutura \mathcal{F} é uma eqci J. Mas quando a f-estrutura \mathcal{F} não é uma eqci, a propriedade (1,2)-simplética é uma condição necessária (mas não suficiente) para a propriedade (1,1)-simplética, ver [14].

Agora vamos discutir o critério combinatório para a propriedade (1,1)-simplética de festruturas. Em particular, este é mais um critério para a propriedade (1,2)-simplética de
equi apresentada no capítulo 3.

O grafo de interseção $\Omega(S)$ associado a uma família $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ de conjuntos é um grafo G sem loops ou arestas múltiplas com conjunto de vértices S, onde S_i e S_j são conectados por uma aresta se e somente se S_i e S_j não são disjuntos. Estas arestas são nomeadas pela interseção entre S_i e S_j .

Em particular, dado um conjunto de raízes complentares Π_M , define-se o grafo de interseção associado com Π_M como o grafo $G(S_{\Pi_M})$, onde S_{Π_M} é o conjunto de todas as triplas soma zero em Π_M (isto é, triplas $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tais que $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ e $\alpha + \beta + \gamma = 0$). Denotaremos este grafo por $G(\Pi_M)$.

É fácil ver que duas triplas soma zero distintas em Π_M são disjuntas ou têm uma única raíz em comum. Assim, as arestas de $G(\Pi_M)$ são nomeadas por raízes de Π_M . Além disso, diferentes arestas podem ser nomeadas pela mesma raiz em Π_M .

Observe que a construção do grafo $G(\Pi_M)$ é muito trabalhosa se a quantidade $|\Pi_M|$ for suficientemente grande. Por exemplo, se $\mathbb{F} = \frac{SU(4)}{S(U(1)\times U(1)\times U(1)\times U(1))}$ então o grafo $G(\Pi_M)$ é um cubo. Mas se $\mathbb{F} = \frac{SU(38)}{S(U(2)\times U(18)\times U(4)\times U(14))}$ então neste caso o grafo $G(\Pi_M)$ é a união de vários cubos, conforme [14].

Agora pelo Teorema 5.3.5 podemos estender a definição de grafos interseção às t-raízes.

Definição 6.2.2. Dado um conjunto Π_t de t-raízes, o grafo de interseção associado a Π_t é definido como sendo o grafo $G := G(S_{\Pi_t})$, onde S_{Π_t} é o conjunto de todas as triplas soma zero em Π_t , isto é, tripla $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tais que $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_t$ e $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Denotaremos este grafo por $G(\Pi_t)$.

De forma análoga, as arestas de $G(\Pi_t)$ são nomeadas por t-raízes. Além disso, diferentes arestas podem ser nomeadas pela mesma t-raíz.

Se \mathbb{F} é maximal então $\Pi_{\mathfrak{t}} = \Pi_{M} = \Pi$, logo os grafos $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ e $G(\Pi_{M})$ coincidem neste caso. É claro que se \mathbb{F} é isotropicamente irredutível, isto é, $|\Pi_{\mathfrak{t}}^{+}| = 1$, então o grafo $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ é trivial, ou seja, sem vértices.

Observação 6.2.1. Segue-se das Proposições 5.3.6 que se $|\Pi_{\mathfrak{t}}^+|=2$, então o grafo $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ é desconexo e contém apenas dois vértices.

Exemplo 6.2.3. Consideremos a família de variedades bandeira $\frac{SO(2n)}{U(n-1)\times U(1)}$, $n\geq 4$. Pela Proposição 5.1.1 o conjunto das t-raízes correspondente é dado por

$$\Pi_{\mathfrak{t}}^+ = \{2\delta_1, (\delta_1 \pm \delta_n)\}\$$

onde $2\delta_1$ é o funcional definido por $diag(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \varepsilon_n) \mapsto 2\varepsilon$ e $\delta_1 \pm \delta_n$: $diag(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \varepsilon_n) \mapsto \varepsilon \pm \varepsilon_n$, com ε aparecendo n-1 vezes. Portanto $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ é desconexo e contém apenas dois vértices: $T = \{2\delta_1, \delta_n - \delta_1, -(\delta_1 + \delta_n)\}$ e -T.

Consideremos as quádruplas $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \phi\}$ soma zero de raízes em Π_M . Isto significa que $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ são raízes distintas em Π_M e $\alpha + \beta + \gamma + \phi = 0$. Diremos que uma quadrupla soma zero Q em Π_M é não simétrica se Q não é da forma $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$.

Somando duas raízes em Q, por exemplo $\alpha+\beta$, obtemos uma tripla soma zero $\{\alpha+\beta,\gamma,\phi\}$, chamada tripla extraída de Q. Observamos que algumas triplas soma zero extraída de Q podem não estar em Π_M .

No caso das t-raízes, uma t-quádrupla $Q = \{\delta, \zeta, \eta, \xi\}$ soma zero de raízes em Π_t é uma quádrupla de t-raízes tal que δ, ζ, η, ξ são t-raízes distintas e $\delta + \zeta + \eta + \xi = 0$. Diremos que uma t-quadrupla soma zero Q em Π_t é não simétrica se Q não é da forma $\{\delta, -\delta, \eta, -\eta\}$.

Colocando Π_t no lugar de Π_M e t-raízes no lugar de raízes, define-se triplas soma zero extraídas de t-quádruplas soma zero não simétricas de t-raízes.

O número exato de triplas extraídas de uma quádrupla soma zero não simétrica de raízes complementares foi analizado em [14].

Lema 6.2.4. ([14]) Toda quádrupla não simétrica soma zero Q no conjunto das raízes complementares Π_M tem exatamente quatro triplas soma zero contidas em Π_M .

O próximo resultado fornece o número exato de triplas extraídas de uma quádrupla soma zero não simétrica Q que estão em Π_t .

Lema 6.2.5. Dada uma t-quádrupla não simétrica soma zero Q em Π_t , podemos extrair de Q exatamente quatro triplas soma zero de t-raízes.

Demonstração. Seja $Q = \{\delta, \zeta, \eta, \rho\}$ uma t-quádrupla não simétrica soma zero de t-raízes. Se $T = \{\delta + \zeta, \eta, \rho\}$ é uma tripla extraída, pelo Lema 3.3.2, existem raízes complementares $\alpha, \gamma, \phi \in \Pi_M$ tais que $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \delta + \zeta, \gamma|_{\mathfrak{t}} = \eta, \phi|_{\mathfrak{t}} = \rho$ e $\alpha + \gamma + \phi = 0$.

Agora observamos que $(\delta + \zeta) - \delta - \zeta = 0$ é também uma tripla soma zero de t-raízes então, usando o Lema 3.3.2 de novo, concluímos que existem raízes α_1 e α_2 em Π_M tais que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 \neq \alpha_2$, pois por hipótese $\delta \neq \zeta$. Além disso, a quádrupla $\{\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \phi\}$ é não simétrica, pois se fosse a t-quádrupla $\{\delta, \zeta, \eta, \rho\}$ também o seria.

Assim, para cada t-quádrupla não simétrica soma zero em $\Pi_{\mathfrak{t}}$ podemos obter uma quádrupla não simétrica soma zero em Π_{M} . Agora o resultado segue do Lema 6.2.4.

Agora vamos apresentar alguns exemplos de grafos $G(\Pi_t)$ em diferentes classes de variedades bandeira generalizadas.

Exemplo 6.2.6. Considere a família de variedades bandeira $\mathbb{F}_A(n_1, n_2, n_3, n_4)$, onde $n_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Sabemos que neste caso o conjunto das t-raízes é dado por

$$\Pi_{t} = \{ \pm (\delta_{i} - \delta_{j}) : 1 \le i < j \le 4 \}.$$

Assim o grafo $G(\Pi_t)$ é dado pelo cubo da figura 1, onde cada aresta desse cubo é nomeada pelas t-raízes $\delta_i - \delta_j$. Neste caso cada face do cubo representa uma quadrupla não simétrica soma zero em Π_t e os vértices do cubo representam as triplas soma zero de t-raízes.

Exemplo 6.2.7. No caso da família de variedades $\mathbb{F}_C(m,m) = \frac{Sp(n)}{U(m)\times U(m)}$, n=2m, já sabemos que $\Pi_{\mathfrak{t}} = \{\pm (\delta_1 \pm \delta_2), \pm 2\delta_1, \pm 2\delta_2\}$. É fácil ver que cada t-raízes da forma $\pm 2\delta_k$ (k=1,2) pertence a uma única tripla soma zero. Assim vemos que o grafo $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ é um quadrado, apresentado na figura 2. Observamos que em qualquer t-quádrupla soma zero aparece t-raízes repetidas. Logo não existe t-quádruplas soma zero não simétricas.

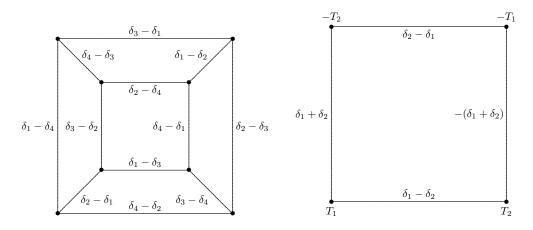


Figura 1. O Grafo $G(\Pi_t)$ para $\frac{SU(n)}{S(U(n_1)\times \cdots \times U(n_4))}$. Figura 2. O Grafo $G(\Pi_t)$ para $\frac{Sp(n)}{U(m)\times U(m)}$, n=2m.

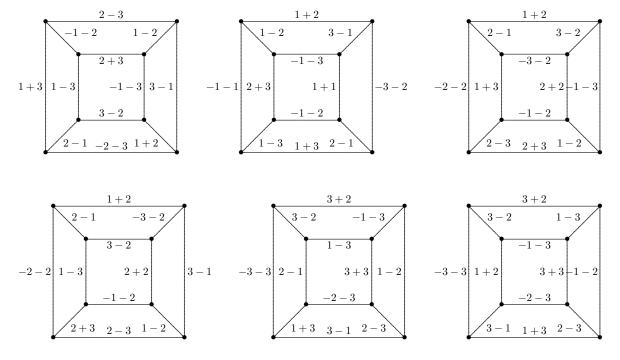


Figura 3. Cubo do grafo $G(\Pi_t)$ para as variedades $\frac{Sp(n)}{U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3)}$, onde $\pm i\pm j$ representa $\pm \delta_i\pm \delta_j$.

i

Exemplo 6.2.8. Consideremos o caso $\mathbb{F}_C(n_1, n_2, n_3) = \frac{Sp(n)}{U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)}$, onde $n = \sum_i n_i$ e $n_i \geq 1$, i = 1, 2, 3. Pela Proposição 5.1.1 o sistema das t-raízes é dado por $\Pi_t^+ = \{\delta_1 \pm \delta_2, \delta_2 \pm \delta_3, \delta_1 \pm \delta_3, 2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3\}$. Neste caso o grafo $G(\Pi_t)$ é a união dos cubos da Figura 3. Observe que quando $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, temos o caso maximal que foi analisado em [14].

Dizemos que um grafo $G(\Pi_M)$ é localmente transitivo com respeito a \mathcal{F} se em todo cubo o número total de vértices com tripla de sinais igual a (+++), (++0) ou (+00) não é 1.

O próximo resultado é um critério combinatório da propriedade (1,1)-simplética de f-estruturas.

Teorema 6.2.9. ([14]) Seja \mathcal{F} uma f-estrutura em uma variedade bandeira \mathbb{F} e $G(\Pi_M)$ o grafo de interseção de raízes em Π_M associado. Então a transitividade local de $G(\Pi_M)$ é uma condição suficiente e necessária para $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ ser (1,1)-admissível.

Agora procedemos no sentido de mostrar que podemos colocar $G(\Pi_t)$ no lugar de $G(\Pi_M)$, no Teorema anterior. Assim a análise combinatória desse critério torna-se simples em várias classes de variedades bandeira generalizadas, como vimos em exemplos anteriores.

De acordo com a Proposição 6.1.2, toda f-estrutura invariante \mathcal{F} sobre uma variedade bandeira \mathbb{F} determina uma tripla de sinais (+, -, 0) em cada vértice do grafo $G(\Pi_t)$ associado. Assim podemos definir de modo análogo a transitividade local no grafo $G(\Pi_t)$.

Definição 6.2.10. Dizemos que um grafo $G(\Pi_t)$ é localmente transitivo com respeito a \mathcal{F} se em todo cubo o número total de vértices com tripla de sinais igual a (+++), (++0) ou (+00) não é 1.

O próximo resultado fornece um critério para um grafo $G(\Pi_M)$ ser localmente transitivo com respeito a \mathcal{F} .

Teorema 6.2.11. Seja $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ uma f-variedade. Consideremos o conjunto Π_M das raízes complementares e o cojunto $\Pi_{\mathfrak{t}}$ das t-raízes. O grafo $G(\Pi_M)$ é localmente transitivo se e somente se $G(\Pi_{\mathfrak{t}})$ também o é.

Demonstração. A aplicação restrição $k \colon \Pi_M \to \Pi_t$ faz cada vértice (α, β, γ) do grafo $G(\Pi_M)$ corresponder ao vértice $(k(\alpha), k(\beta), k(\gamma))$ do grafo $G(\Pi_t)$.

Chamando de V(G) o conjunto dos vértices do grafo G, podemos definir a função

$$k' \colon V(G(\Pi_M)) \longrightarrow V(G(\Pi_{\mathfrak{t}}))$$

dada por $k'(\alpha, \beta, \gamma) = (k(\alpha), k(\beta), k(\gamma)).$

As propriedades de k' são: pela Proposição 6.1.2, k' preserva as triplas de sinais com respeito a \mathcal{F} . Além disso usando os lemas 6.2.4 e 6.2.5 concluímos que k' faz cada cubo de $G(\Pi_M)$ corresponder a um único cubo de $G(\Pi_t)$. Geometricamente k' colapsa vários cubos de $G(\Pi_M)$ em um único cubo de $G(\Pi_t)$. Portanto se um grafo $G(\Pi_M)$ é localmente transitivo então o correspondente grafo $G(\Pi_t)$ também o é.

Reciprocamente, suponhamos que um grafo $G(\Pi_t)$ seja localmente transitivo. Se o grafo $G(\Pi_M)$ não fosse localmente transitivo, existira um cubo C com um único vértice (α, β, γ) cuja a tripla sinais $(\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\beta}, \varepsilon_{\gamma})$ com respeito a \mathcal{F} seria igual a (+++), (++0) ou (+00). Então pelas propriedades de k' concluímos que k'(C) seria um cubo em $G(\Pi_t)$ com um único vertice $(k(\alpha), k(\beta), k(\gamma))$ cuja a tripla de sinais $(\varepsilon_{k(\alpha)}, \varepsilon_{k(\beta)}, \varepsilon_{k(\gamma)})$ com respeito a \mathcal{F} seria igual a (+++), (++0) ou (+00). Assim o grafo $G(\Pi_t)$ não seria localmente transitivo. Isto contradiz a hipótese. Portanto o grafo $G(\Pi_M)$ é localmente transitivo.

As bijeções dadas nos Teoremas 5.4.1 e 5.4.3 aplicam-se também para as f-estruturas invariantes.

Corolário 6.2.12. (a) Existe uma bijeção entre f-estruturas invariante em $\mathbb{F}_A(s)$ e $\mathbb{F}_A(n_1, \ldots, n_s)$, dada por (5.21).

(b) Existe uma bijeção entre f-estruturas invariante em $\mathbb{F}_C(s)$ e em $\mathbb{F}_C(n_1,\ldots,n_s)$, dada por (5.23).

Além disso, essas bijeções preservam a propriedade (1, 1)-simplética.

Demonstração. Segue como consequência da Proposição 6.1.2 e do Teorema anterior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D.V. Alekseevsky, Flag manifolds, in Sbornik Radova, 11 Jugoslav. Seminr. Beograd 6(14) (1997) 3-35.
- [2] D.V. Alekseevsky, Homogeneous Einstein metrics, Differential Geometry and its Applications (Proceedings of Brno Conference), Univ. of J. E. Purkyne-Czechoslavakia, 1987, pp. 1-21.
- [3] D. V. Alekseevsky and A. M. Perelomov, Invariant Kähler-Einstein metrics on compact homogeneous spaces, Funct. Anal. Appl. 20 (1986),171-182.
- [4] D. V. Alekseevsky and A. Arvanitoyeorgos, Riemannian Flag manifolds with homogeneous geodesics, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 3769-3789.
- [5] A.Arvanitoyeorgos, Geometry of Flag Manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol.3, Nos. 5 e 6 (2006) 957-974.
- [6] A. Arvanitoyeorgos, New invariant Eistein metrics on generalized flag manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 981-995.
- [7] A. Arvanitoyeorgos, An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces, STML 22 (Amer. Math. Soc., 2003).
- [8] A. Arvanitoyeorgos, Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds, PhD Thesis, Rochester University (1991).

- [9] A. Arvanitoyeorgos and I. Chrysikos, Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds with two isotropy summands, Preprint.
- [10] A. Arvanitoyeorgos and I. Chrysikos, Invariant Einstein metrics on flag manifolds with four isotropy summands, Preprint.
- [11] A.L. Besse, "Einstein Manifolds", Springer-Verlag 1987.
- [12] M. J. Black, Harmonic Maps Into Homogeneous Spaces, PhD Thesis, Warwick University, 1990.
- [13] M. Bordemann, M. Forger and H. Römer, Homogeneous Kähler manifolds: paving the way towards new supersymmetric sigma models, Commun. Math. Phys. 102 (1986) 605-647.
- [14] N. Cohen, S. Pinzón, An extension of the (1,2)-symplectic property for f-strutures on flag manifolds, Izvestiya:Mathematics 72:3 479-496,2008.
- [15] S. P. Durán, Variedades Bandeira, f-Estruturas e Métricas (1,2)-Simpléticas, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [16] A. Gray, L. M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 35-58.
- [17] M. A. Guest, Geometry of maps between Generalized Flag manifolds, J. Diff. Geo., 25 (1987), 223-247.
- [18] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [19] J. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, 1972.
- [20] M. Kimura, Homogeneous Einstein metrics on certain Kähler C-spaces, Adv. Stud. Pure Math. 18-I (1990) 303–320.
- [21] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Wiley (Intercience), New York, Vol. 1, 1962; Vol. 2, 1969.

- [22] A. W. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, second edition, Birkhauser Boston, 2002.
- [23] C. J. C. Negreiros and E. C. F. Santos, Einstein metrics on flag manifolds, Revista De La Union on Matemática Argentina, Vol. 47, Num. 2, 2006.
- [24] C. J. C. Negreiros, New invariant Einstein geometries, geodesics and harmonic maps on flags. II Latin American Conference on Lie Groups in Geometry, 2008, La Falda -Córdoba - Argentina. www.famaf.unc.edu.ar/claglg08
- [25] J. H. Rawnsley, F-structures, F-twistor spaces and harmonic maps, Geometry seminar 'Luigi Bianchi' II (Pisa 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1164, Springer, Berlin 1985, pp. 85-159
- [26] Y. Sakane, Homogeneous Einstein Metrics on Flag Manifolds, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 4, 1999, 71-87.
- [27] S. Salamon, Harmonic and holomorphic maps, Geometry seminar 'Luigi Bianchi' II (Pisa 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1164, Springer, Berlin 1985, pp.161-224
- [28] L. A. B. San Martin, C. J. C. Negreiros, Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds, Advances in Math., 178, 2003.
- [29] L. A. B. San Martin, N. Cohen and C. J. C. Negreiros, A rank three condition for invariant (1,2)-symplectic, Bull Braz Math Soc, 33, 49-73, 2002.
- [30] L. A. B.San Martin, Álgebras de Lie, Editora da Unicamp, 1999.
- [31] L. A. B.San Martin and R. de C. J. Silva, Invariant nearly-Kähler structures, Geometriae Dedicata, Vol. 121, 1, 2006, p.p. 143-154.
- [32] E. C. F. Santos, Métricas de Einstein em variedades bandeira, Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 2005.
- [33] J. Siebenthal, Sur certains modules dans une algèbre de Lie semisimple, Comment. Math. Helv. 44(1) (1964) 1-44.

- [34] N. P. da Silva, On invariant Einstein metrics for generalized flag manifolds of SO(2n+1) and Sp(n). II Latin American Conference on Lie Groups in Geometry, 2008, La Falda
 Córdoba Argentina. www.famaf.unc.edu.ar/claglq08. Acesso em: 15 set. 2009.
- [35] R. de C. de J. Silva, Estruturas quase Hermitianas invariantes em espaços homogêneos de grupos semi-simples, Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 2003.
- [36] M.Wang and W. Ziller, Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics, Invent. math, 84 (1986), 177-194.
- [37] M.Wang and W. Ziller, On normal homogeneous Einstein metrics, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 18 (1985), 563-633.
- [38] M. Wang and W. Ziller, A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds, Geom. funct. anal. 14 (2004), 681-733.
- [39] F. W. Warner, Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups, In the Editorial Series of I. M. Singer, 1971.
- [40] K. Yano, On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $F^3 + F = 0$. Tensor 14 (1963) 99-109.

CAPÍTULO 7

APÊNDICE

Neste apêndice mostramos as propriedades dos coeficientes $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$ usadas no capítulo 4, quando descrevemos as equações de Einstein no caso G_2 .

Seja M = G/L uma variedade homogênea, onde G é um grupo de Lie conexo, semisimples e compacto e L é um subgrupo de isotropia. Denotamos por \mathfrak{g} e \mathfrak{l} , a álgebra de Lie de G e L, respectivamente. Além disso, denotamos por $B(\cdot,\cdot)$ a forma de Cartan-Killing da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Como G é um grupo de Lie compacto e semi-simples, a negativa da forma de Cartan-Killing, usualmente denotada por $-B(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)$, é um produto interno Ad(L)-invariante ([7], Teorema 2.13).

Tome \mathfrak{m} o complemento ortogonal de \mathfrak{l} em \mathfrak{g} com respeito a (\cdot,\cdot) . Então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m} \ e \ Ad(L)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$
 (7.1)

Seja $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_n$ uma decomposição de \mathfrak{m} em submódulos Ad(L)-irredutíveis \mathfrak{m}_i $(i = 1, \ldots, n)$, mutualmente não equivalentes. Denotamos $d_k = \dim \mathfrak{m}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Seja $\{e_{\delta}\}$ uma base ortonormal, com respeito a (\cdot, \cdot) , adaptada a decomposição de \mathfrak{m} , isto é, $e_{\alpha} \in \mathfrak{m}_i$ para algum i e se i < j, $e_{\alpha} \in \mathfrak{m}_i$ e $e_{\beta} \in \mathfrak{m}_j$ então $\alpha < \beta$. Denotando $A_{\alpha\beta}^{\gamma} = ([e_{\alpha}, e_{\beta}], e_{\gamma})$, temos que $[e_{\alpha}, e_{\beta}] = \sum_{\gamma} A_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma}$ já que $\{e_{\delta}\}$ é uma base (\cdot, \cdot) -ortonormal.

Definimos $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = \sum (A_{\alpha\beta}^{\gamma})^2$, onde a soma é tomada sobre todos os índices α , β , γ com $e_{\alpha} \in \mathfrak{m}_i$, $e_{\beta} \in \mathfrak{m}_j$ e $e_{\gamma} \in \mathfrak{m}_k$.

Como $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ é anti-simétrico nos três índices, segue que $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ é simétrico nos três índices. A notação $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ é devida a Wang-Ziller [36].

Lembramos que uma métrica g, G - invariante em M, é dada por

$$\left\{\lambda_1 \cdot (\cdot, \cdot) \mid_{\mathfrak{p}_1} + \dots + \lambda_n \cdot (\cdot, \cdot) \mid_{\mathfrak{p}_n}; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{7.2}$$

O espaço dos 2-tensores covariantes simétricos G- invariantes, é dado por

$$\{w_1 \cdot (\cdot, \cdot) \mid_{\mathfrak{p}_1} + \dots + w_n \cdot (\cdot, \cdot) \mid_{\mathfrak{p}_n}; w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}\}. \tag{7.3}$$

Como o tensor de Ricci de uma métrica G— invariante em M é um 2-tensor covariante simétrico G— invariante, ele é caracterizado por (7.3).

Proposição 7.0.13. A curvatura de Ricci de (M, \langle, \rangle) , pode ser expressa por :

$$Ric(g)(X,X) = -\frac{1}{2} \sum_{i} \left| [X, X_i]_{\mathfrak{p}} \right|^2 + \frac{1}{2} (X,X)$$
 (7.4)

$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j}\left\langle \left[X_{i},X_{j}\right]_{\mathfrak{p}},X\right\rangle ^{2}\tag{7.5}$$

onde (\cdot, \cdot) é a negativa da forma de Cartan-Killing e $\{X_i\}$ é uma base ortonormal com respeito $a\langle , \rangle$.

Demonstração. Ver [11], Corolário 7.38.

Lema 7.0.14. ([26])As componentes r_k do tensor de Ricci, Ric(g), de uma métrica T -invariante $g = \lambda_1(,)|_{\mathfrak{p}_1} + \cdots + \lambda_n(,)|_{\mathfrak{p}_n}$ em M = G/L são dadas por:

$$r_k = \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4d_k} \sum_{i,j=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} - \frac{1}{2d_k} \sum_{i,j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k \lambda_i} \begin{bmatrix} j \\ ki \end{bmatrix}$$

 $(k=1,\ldots,n).$

Demonstração. Seja $\left\{e_{\delta}^{(k)}\right\}_{\delta=1}^{d_k}$ uma base ortonomal em \mathfrak{m}_k $(k=1,\ldots,n)$, com respeito ao produto interno (,). Defina $X_{\delta}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e_{\delta}^{(k)}$, então $\left\{X_{\delta}^{(k)}\right\}_{\delta=1}^{d_k}$ é uma base ortonormal em \mathfrak{m}_k $(k=1,\ldots,n)$, com respeito a métrica g.

Para usar (7.4), é conveniente calcular alguns termos do lado direito separadamente.

Para calcular o primeiro termo do lado direito em (7.4), lembramos que $\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ X_{\delta}^{(k)} \right\}_{\delta=1}^{d_k}$ é uma base ortonormal com respeito a métrica g em $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_n$. Então

$$\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}}=\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{1}}+\cdots+\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{n}}$$

e como os vetores $\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{i}}$ são dois a dois ortogonais, vemos que

$$\left| \left[X_{\alpha}^{(k)}, X_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}} \right|^{2} = \left| \left[X_{\alpha}^{(k)}, X_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}_{1}} \right|^{2} + \dots + \left| \left[X_{\alpha}^{(k)}, X_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}_{n}} \right|^{2}.$$

Então, o primeiro termo do lado direito em (7.4) é dado por

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{d_{i}}\left|\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}}\right|^{2}=-\frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{d_{i}}\left|\left[X_{\alpha}^{(k)},X_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{j}}\right|^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{k}\lambda_{i}}\sum_{\beta=1}^{d_{i}}\left\langle \left[e_{\alpha}^{(k)},e_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{j}},\left[e_{\alpha}^{(k)},e_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{m}_{j}}\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_k \lambda_i} \sum_{\beta=1}^{d_i} \left(\left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}_j}, \left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}_j} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\lambda_{j}}{\lambda_{k} \lambda_{i}} \sum_{\gamma,\beta} \left(\left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)} \right], e_{\gamma}^{(j)} \right)^{2}$$

onde a penúltima igualdade é devido a expressão da métrica g, isto é, $g = \lambda_1(,)|_{\mathfrak{m}_1} + \cdots + \lambda_n(,)|_{\mathfrak{m}_n}$.

E para a última igualdade, observamos que $\bigcup_{k=1}^n \left\{ e_{\delta}^{(k)} \right\}_{\delta=1}^{d_k}$ é uma base ortonormal com respeito a métrica (\cdot, \cdot) , em \mathfrak{m} , então

$$\left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)}\right]_{\mathfrak{p}_{j}} = \sum_{\gamma=1}^{d_{j}} \left(\left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)}\right], e_{\gamma}^{(j)}\right) e_{\gamma}^{(j)}.$$

O terceiro termo do lado direito em (7.4) é dado por

$$\frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^{n} \sum_{\gamma,\beta} \left\langle \left[X_{\gamma}^{(j)}, X_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}}, X_{\alpha}^{(k)} \right\rangle^{2} = \frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^{n} \sum_{\gamma,\beta} \left\langle \left[X_{\gamma}^{(j)}, X_{\beta}^{(i)} \right]_{\mathfrak{m}_{k}}, X_{\alpha}^{(k)} \right\rangle^{2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^{n} \sum_{\gamma,\beta} \frac{\lambda_k}{\lambda_j \lambda_i} \left(\left[e_{\gamma}^{(j)}, e_{\beta}^{(i)} \right], e_{\alpha}^{(k)} \right)^2.$$

Portanto

$$r_k = Ric(g)(X_{\alpha}^{(k)}, X_{\alpha}^{(k)}) = -\frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_k \lambda_i} \sum_{\gamma,\beta} \left(\left[e_{\alpha}^{(k)}, e_{\beta}^{(i)} \right], e_{\gamma}^{(j)} \right)^2$$

$$+\frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_j \lambda_i} \sum_{\gamma,\beta} \left(\left[e_{\gamma}^{(j)}, e_{\beta}^{(i)} \right], e_{\alpha}^{(k)} \right)^2$$

agora tomando a soma sobre o índice α na igualdade acima e usando a definição de $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$, conseguimos

$$d_k r_k = \sum_{\alpha=1}^{d_k} Ric(g)(X_{\alpha}^{(k)}, X_{\alpha}^{(k)}) = -\frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k \lambda_i} \begin{bmatrix} j \\ ki \end{bmatrix} + \frac{d_k}{2\lambda_k} + \frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^n \begin{bmatrix} k \\ ji \end{bmatrix}.$$

Corolário 7.0.15. As componentes r_{α} do tensor de Ricci Ric(g) de uma métrica G-invariante $g = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_{\alpha}(\cdot, \cdot) \mid_{\mathfrak{m}_{\alpha}} em \ G/T \ s\~{ao} \ dadas \ por$

$$r_{\alpha} = \frac{1}{2\lambda_{\alpha}} + \frac{1}{8} \sum_{\beta,\gamma \in \Pi^{+}} \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta} \lambda_{\gamma}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \sum_{\beta,\gamma \in \Pi^{+}} \frac{\lambda_{\gamma}}{\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Demonstração. Basta aplicar a Lema (7.0.14), observando que $d_{\alpha} = 2, \ \alpha \in \Pi^{+}$.

Os dois próximos resultados mostram como calcular $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi^+$.

Proposição 7.0.16. As únicas triplas de raízes positivas para as quais $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$ é não nulo são

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \beta \end{bmatrix} = 2 (N_{\alpha,\beta})^2 e \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \beta \end{bmatrix} = 2 (N_{\alpha,-\beta})^2.$$

Demonstração. Pela definição e simetria de $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ([S_{\alpha}, S_{\beta}], S_{\gamma})^{2} + ([S_{\alpha}, S_{\beta}], A_{\gamma})^{2} + ([S_{\alpha}, A_{\beta}], S_{\gamma})^{2} + ([S_{\alpha}, A_{\beta}], A_{\gamma})^{2} + ([S_{\alpha}, A_{\beta}], A_{\gamma})^{2} + ([A_{\alpha}, A_{\beta}], A_{$$

Para os colchetes envolvendo A_{α} e S_{β} , se $\alpha \neq \beta$ então usando que $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$, obtemos

$$[A_{\alpha}, A_{\beta}] = N_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} + N_{-\alpha,\beta} A_{\alpha-\beta}$$

$$[S_{\alpha}, S_{\beta}] = N_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta} A_{\alpha-\beta}$$

$$[A_{\alpha}, S_{\beta}] = N_{\alpha,\beta} S_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} S_{\alpha-\beta} .$$

$$(7.7)$$

Note que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Pi^+$.

Usando (7.7), obtemos que os únicos termos não nulos na soma $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$ são

$$([S_{\alpha}, S_{\beta}], A_{\gamma})^{2} = \begin{cases} (-2N_{\alpha, -\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha - \beta \\ (-2N_{\alpha, \beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha + \beta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$([S_{\alpha}, A_{\beta}], S_{\gamma})^{2} = \begin{cases} (-2N_{-\alpha,\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha - \beta \\ (-2N_{\alpha,\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha + \beta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$([A_{\alpha}, S_{\beta}], S_{\gamma})^{2} = \begin{cases} (2N_{\alpha, -\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha - \beta \\ (2N_{\alpha, \beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha + \beta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$([A_{\alpha}, A_{\beta}], A_{\gamma})^{2} = \begin{cases} (2N_{-\alpha,\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha - \beta \\ (2N_{\alpha,\beta})^{2}, \text{ se } \gamma = \alpha + \beta \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, usando o fato que $(N_{-\alpha,\beta})^2 = (N_{\alpha,-\beta})^2$,

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 (N_{\alpha,\beta})^2, \text{ se } \gamma = \alpha + \beta; \\ 2 (N_{\alpha,-\beta})^2, \text{ se } \gamma = \alpha - \beta; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 7.0.17. Sejam α e β raízes e

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha \tag{7.8}$$

 $a \alpha$ - sequência através de β . Então

$$(N_{\alpha,\beta})^2 = N_{\alpha,\beta} (-N_{-\alpha,-\beta}) = \frac{(p+1) q}{2} B(\alpha,\alpha).$$

Demonstração. Ver [30], Lema 8.5.

Observação 7.0.2. $\left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right]$ é invariante pelo grupo de Weyl W, isto é,

$$\begin{bmatrix} w(\gamma) \\ w(\alpha)w(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{bmatrix}, \ \forall \ w \in W.$$

De fato, para raízes $\alpha, \beta \in \Pi$, $B(\alpha, \alpha) = B(\beta, \beta)$ se e somente se $\beta = w(\alpha)$ para algum w do grupo de Weyl W. E $w(\beta) + kw(\alpha) \in \Pi$ se e somente se $\beta + k\alpha \in \Pi$. Agora basta usar a Proposição 7.0.16 e o Lema 7.0.17.