



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DANILO ANDRES GARCIA HERNANDEZ

**GEOMETRIA QUASE-RIEMANNIANA
SOBRE GRUPOS DE LIE**

Campinas

2018

Danilo Andres Garcia Hernandez

GEOMETRIA QUASE-RIEMANNIANA SOBRE GRUPOS DE LIE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Adriano Joao da Silva

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Danilo Andres Garcia Hernandez e orientada pelo Prof. Dr. Adriano Joao da Silva.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FUNCAMP, 3007/16

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Márcia Pillon D'Aloia - CRB 8/5180

G164g Garcia Hernandez, Danilo Andres, 1989-
Geometria quase-riemanniana sobre grupos de Lie / Danilo Andres Garcia Hernandez. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Adriano Joao da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Álgebra de. 2. Geometria riemanniana. 3. Lie, Grupos de. 4. Geometria simplética. I. Silva, Adriano Joao da, 1985-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Almost-riemannian geometry on Lie groups

Palavras-chave em inglês:

Riemannian geometry

Lie algebras

Lie groups

Symplectic geometry

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Adriano Joao da Silva [Orientador]

Luiz Antonio Barrera San Martin

Alexandre José Santana

Data de defesa: 17-08-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 17 de agosto de 2018 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ADRIANO JOAO DA SILVA

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Aos meus pais Esteban e Luz Myriam

Agradecimentos

A Deus pela vida por mais esta conquista e permitir-me chegar a concluir o Mestrado em Matemática.

Agradeço ao Professor Dr. Adriano João da Silva, pela orientação neste trabalho, pelo conhecimento compartilhado, pela paciência e pela amizade.

À minha família por acreditarem em mim e sempre me apoiarem.

Aos professores membros da Banca Examinadora por terem aceitado o convite para avaliar este trabalho.

Aos professores e funcionários do IMECC.

Também estou profundamente agradecido em geral ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, pela contribuição na minha formação matemática.

Finalmente agradeço a FAEPEX/FUNCAMP pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho mostraremos que uma estrutura quase riemanniana (ARS) sobre uma variedade diferenciável de dimensão n pode ser definida, ao menos localmente, por um conjunto de n campos vetoriais, que se degeneram em algum conjunto singular, este conjunto é chamado de locus singular. Em especial definiremos um ARS sobre um grupo de Lie de dimensão n , como sendo n campos vetoriais invariantes à esquerda ou campos vetoriais afins com posto igual a n num subconjunto próprio aberto e denso o qual satisfaz a condição do posto de Lie. A partir disso estudaremos o locus singular, o qual é o conjunto de pontos onde os campos vetoriais deixam de ser independentes, o locus singular de fato é um conjunto analítico, mas em geral não é uma subvariedade nem subgrupo, então estabeleceremos condições suficientes para que o locus singular torne-se uma subvariedade ou um subgrupo. Calcularemos as equações Hamiltonianas do PMP, e com isso obteremos uma caracterização completa de anormais.

Por fim, faremos uma contribuição no estudo dos ARS simples, ao estudar o locus singular dos grupos de Lie solúvel não nilpotente de dimensão baixa.

Palavras-chave: Estrutura quase Riemanniana, locus singular, grupo de Lie, condição do posto de Lie.

Abstract

In this work we present an almost-Riemannian structure (ARS in short) on a n -dimensional differential manifold can be defined, at least locally, by a set of n vector fields, that degenerate on some singular set, this set is called the singular locus, we define an ARS on a n -dimensional Lie group by n left-invariant or affine vector fields the rank of which is equal to n on a proper open and dense subset and that satisfy the rank condition, we study the singular locus, that is the set of points where the vector fields fail to be independent, in fact it is an analytic set, but not a subgroup, not even a submanifold in general, then we establish sufficient conditions for the singular locus to be a submanifold or a subgroup. We compute The Hamiltonian equations of the PMP, and with it we get a complete characterization of the abnormality.

In the section 6 we do a contribution to study of simple ARS, because we start to study the singular locus of nonnilpotent solvable low-dimensional Lie groups

Keywords: Almost-Riemannian structure, singular locus, Lie group, rank condition.

Lista de símbolos

G	Grupo de Lie conexo
q.t.p	Quase todo ponto
s.p.g	Sem perda de generalidade
suave	De classe C^∞
\mathfrak{g}	Álgebra de Lie do grupo G
L_g	Traslação à esquerda
R_g	Traslação à direita
PMP	Princípio do Máximo de Pontriagyn
\mathcal{X}_g	Campo linear
$(TL_g)_h$	Representa a diferencial de L_g em h
$F_g = (TL_{g^{-1}})_g \mathcal{X}_g$	Representa a aplicação associada ao campo linear, ou $F(g)$
Y_g	Representa $TL_g Y$ para $Y \in \mathfrak{g}$
$V^\omega(G)$	Conjunto de campos vectoriais analíticos sobre G
\mathcal{I}	Representa o difeomorfismo $\mathcal{I} : G \rightarrow G$ dado por $\mathcal{I}(g) = g^{-1}$.
$\mathcal{D}^1 \mathfrak{g}$	Representa $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}$
$\text{Vec}(G)$	Campos vectoriais suaves em G
$\langle \lambda, X \rangle$	Representa $\lambda(X)$

Sumário

	Introdução	12
1	PRELIMINARES	14
1.1	Definições básicas	14
1.1.1	Campos vetoriais lineares e afins	14
1.1.2	Teoria de controle	15
1.1.3	Estruturas quase-Riemanniana (ARS)	16
1.1.4	ARS simples	18
2	O LOCUS SINGULAR	20
2.1	Introdução	20
2.2	Condições suficientes para que \mathcal{Z} torne-se uma subvariedade	23
2.3	Condições suficientes para o locus singular seja um subgrupo	24
2.4	Condições Necessárias para o locus singular ser um subgrupo	29
3	EXEMPLOS DE LOCUS SINGULAR	32
3.1	Grupos Abelianos	32
3.2	O grupo afim 2D	34
3.3	O grupo de Heisenberg	38
3.4	O grupo Linear especial $SL(2; \mathbb{R})$	48
4	EQUAÇÕES HAMILTONIANAS	52
4.1	A estrutura canônica simplética de T^*G	52
4.2	Cálculo dos campos vetoriais Hamiltonianos	54
4.3	Campos vetoriais lineares e invariantes à esquerda	55
4.4	Equação Hamiltoniana para um ARS simples	56
5	ANORMAIS EXTREMAIS	59
6	LOCUS SINGULAR NO GRUPO SIMPLEMENTE CONEXO ASSOCIADO À ÁLGEBRA DE LIE DOS MOVIMENTOS PRÓPRIOS	64
	REFERÊNCIAS	69

	APÊNDICES	71
	APÊNDICE A – TÓPICOS DE GEOMETRIA SIMPLÉTICA	72
A.1	Variedades simpléticas	72
A.2	Fibrado Cotangente	73
A.3	Princípio do Máximo de Pontryagin sobre variedades suaves	73
A.4	Problema de Controle ótimo	74
A.4.1	Enunciado Do problema	74
A.4.2	Enunciado geométrico de PMP	76
A.4.3	Enunciado Geométrico para PMP para tempo livre	77
A.4.4	PMP para problemas de controle ótimo	77
A.5	Grupos de Lie e recobrimento universal	81

Introdução

Este trabalho foi baseado no artigo [5] no qual os autores analisam estruturas quase-Riemanniana sobre grupos de Lie.

Uma estrutura quase-Riemanniana, (**ARS**) sobre uma variedade n – dimensional pode ser definida, ao menos localmente, como um conjunto de n campos vetoriais considerados como uma estrutura ortonormal que se degeneram sobre algum conjunto singular. Naturalmente definimos uma **ARS** simples sobre um grupo de Lie n – dimensional como sendo $n - 1$ campos vetoriais invariantes à esquerda ou campos vetoriais afins com posto igual a n sobre um subconjunto aberto e denso que satisfazem a condição do posto da álgebra de Lie. Esta geometria apareceu como uma parte da geometria subriemanniana, e recentemente despertou interesse como é mostrado nos artigos, [2, 7, 8].

ARSs são considerados como uma generalização da geometria Riemanniana que surge naturalmente em tópicos da teoria de controle. Por exemplo sejam X e Y dois campos vetoriais suaves em uma variedade M de dimensão 2. Se X e Y são linearmente independentes eles definem uma métrica Riemanniana sobre M , a métrica para o qual eles são ortonormais e portanto dão a M uma estrutura de espaço métrico. Se X e Y chegam a ser linearmente dependentes em algum subconjunto de M , então a métrica Riemanniana correspondente tem singularidades, mas sob algumas condições a estrutura da métrica é ainda bem definida. Estruturas métricas que podem ser definidas localmente deste jeito são denominadas estruturas quase Riemannianas.

Se o par X, Y é Lie bracket generating, i.e., se

$$\text{span} \{X(q), Y(q), [X, Y](q), [X, [X, Y]](q), \dots\} = T_q M$$

então o sistema de controle

$$\dot{q} = uX(q) + vY(q) \quad u^2 + v^2 \leq 1 \quad q \in M, \quad (1)$$

é completamente controlável e a função do tempo mínimo define uma distância continua d sobre M . Quando X e Y são linearmente independentes em todo o espaço (neste caso M é paralelizável) tal distância é Riemanniana e corresponde à métrica para o qual $\{X, Y\}$ é uma estrutura ortonormal móvel.

A ideia é estudar a geometria obtida começando-se de um par de campos vetoriais que podem ser colineares. Mais geralmente se X e Y são paralelos em um conjunto $\mathcal{Z} \subset M$ (qual é denominado locus singular) e sob algumas condições este se tornará uma subvariedade mergulhada de M de dimensão 1.

Estruturas métricas que podem ser definidas localmente por um par de campos vetoriais

$\{X, Y\}$ através de (1) são chamadas estruturas quase Riemannianas.

Daremos um exemplo de ARS simples, denominado "O plano de Grushin" sobre o grupo de Lie abeliano \mathbb{R}^2 .

Estudaremos o locus singular, o qual é um conjunto analítico mas não é um subgrupo nem uma subvariedade em geral. Estabeleceremos assim condições suficientes para que o locus singular seja uma subvariedade ou subgrupo de Lie. Além disso, propriedades do locus singular, no grupo de Heisenberg serão estudadas.

Por outro lado consideraremos a equação hamiltoniana de PMP, (o Princípio do Máximo de Pontriagyn) o qual permite obter uma caracterização completa de anormais.

Além disso faremos uma contribuição na seção 6 no estudo dos ARS simples, ao estudar o locus singular dos grupos de Lie solúveis não nilpotentes de dimensão baixa.

1 Preliminares

O objetivo deste capítulo inicial é expor os conceitos e fatos básicos que serão necessários ao desenvolvimento de todo o trabalho. Admitiremos já conhecidos os conceitos e resultados básicos sobre grupos de Lie e álgebras de Lie. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [5, 6, 12, 13, 16, 20, 21, 23]

1.1 Definições básicas

1.1.1 Campos vetoriais lineares e afins

Nesta seção introduziremos os conceitos de campos vetoriais lineares e afins, assim como as suas principais propriedades.

Seja G um grupo de Lie conexo e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, identificada com o conjunto de campos vetoriais invariantes à esquerda. Um campo vetorial sobre G é dito ser **linear** se seu fluxo é um subgrupo a um parâmetro do grupo dos automorfismos de G , i.e., para todo $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_t(gh) = \varphi_t(g)\varphi_t(h)$.

Note que um campo vetorial linear é completo, pois pela definição de subgrupo a um parâmetro suas curvas integrais estão definidas em todo \mathbb{R} . Denotamos o fluxo de um campo vetorial linear \mathcal{X} por $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Definição 1.1.1. Seja G um grupo de Lie conexo e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. O normalizador de \mathfrak{g} em $V^\omega(G)$ é por definição

$$\mathfrak{N} := \text{norm}_{V^\omega(G)} \mathfrak{g} = \{F \in V^\omega(G); \forall Y \in \mathfrak{g} \quad [F, Y] \in \mathfrak{g}\}.$$

Um campo vetorial sobre G é dito afim se pertence a \mathfrak{N} .

O seguinte teorema relaciona o normalizador com campos lineares, sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Teorema 1.1.2. Caracterização de campos vetoriais lineares.

Seja \mathcal{X} um campo vetorial sobre um grupo de Lie conexo. As seguintes condições são equivalentes:

1. \mathcal{X} é linear
2. \mathcal{X} pertence ao normalizador de \mathfrak{g} na álgebra de campos vetoriais analíticos de G , ou seja

$$\forall Y \in \mathfrak{g}; [\mathcal{X}, Y] \in \mathfrak{g}, \tag{1.1}$$

e satisfaz $\mathcal{X}(e) = 0$

3. \mathcal{X} verifica que

$$\forall g, h \in G \quad \mathcal{X}_{gh} = (TL_g)_h \mathcal{X}_h + (TR_h)_g \mathcal{X}_g. \quad (1.2)$$

De acordo com (2) podemos associar a um campo linear \mathcal{X} dado, a derivação D de \mathfrak{g} definida por:

$$DY = -[\mathcal{X}, Y] \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

O sinal de menos nesta definição vem da fórmula $[A, b](x) = -Ab$ em \mathbb{R}^n . Isso também permite evitar o sinal menos na seguinte fórmula:

$$\varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Para o caso particular em que a derivação é interna, ou seja $D = \text{ad}(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$.

O campo vetorial linear pode ser escrito como $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*X$.

Portanto \mathcal{X} é a soma de um campo invariante à esquerda X e um campo invariante à direita \mathcal{I}_*X .

O fluxo de tal campo vetorial é dado por

$$\varphi_t(g) = \exp(tX)g \exp(-tX). \quad (1.4)$$

O próximo resultado nos mostra um pouco da importância de campos vetoriais lineares. Sua prova pode ser encontrada em [13]

Teorema 1.1.3. *Um campo vetorial afim pode ser unicamente decomposto como a soma*

$$F = \mathcal{X} + Z,$$

onde \mathcal{X} é linear e Z é invariante à direita

1.1.2 Teoria de controle

Nesta seção alguns tópicos de teoria de controle serão expostos.

Seja $\Gamma = \{g_i; i \in I\}$ uma família \mathcal{C}^k de campos vetoriais sobre uma variedade conexa M de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, e denotemos por (γ_t^i) o fluxo local de g_i .

A órbita de Γ através de um ponto $p \in M$ é o conjunto de pontos q para o qual existem campos vetoriais $g_{i_1}, \dots, g_{i_r} \in \Gamma$, e números reais t_1, \dots, t_r tais que

$$\gamma_{t_r}^{i_r} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{i_1}(p) = q$$

Teorema 1.1.4. Teorema da Órbita, Teorema de Sussman

A órbita de Γ através de cada ponto $p \in M$ é uma subvariedade conexa de M .

Esta família de campos vetoriais é dita transitiva se a órbita através de cada ponto p de M é igual a M , ou seja M é a única órbita de Γ . Seja $V^k(M)$ o espaço de campos vetoriais

\mathcal{C}^k sobre M . Tal conjunto não é uma álgebra de Lie se $k < +\infty$. No caso onde $k = \infty$ o subespaço de $V^k(M)$ gerado por estes colchetes de Lie é uma álgebra de Lie e será dito que a família Γ gera a álgebra de Lie. Denotaremos tal álgebra de Lie por $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Assumindo que Γ gera uma álgebra de Lie, o posto de Lie de Γ em cada ponto $p \in M$ é por definição a dimensão do subespaço de T_pM , gerado pelos vetores $\gamma(p)$, $\gamma \in \mathcal{L}(\Gamma)$.

Definição 1.1.5. Condição do posto da álgebra de Lie

Dizemos que a família Γ satisfaz a condição do posto de Lie se $\mathcal{L}(\Gamma)$ tem posto máximo. Sejam X_1, X_2, \dots, X_m campos vetoriais suaves sobre uma variedade suave M de dimensão n . Por definição a condição de posto de a álgebra de Lie em um ponto $p_0 \in M$ é a propriedade a qual $T_{p_0}M = \text{Span}\{X(p_0) : X \in \text{Lie}(X_1, X_2, \dots, X_m)\}$ onde $\text{Lie}(X_1, X_2, \dots, X_m)$ denota a álgebra de Lie dos campos vetoriais suaves gerados por X_1, X_2, \dots, X_m

A condição do posto da álgebra de Lie afirma que a família Γ é transitiva sempre que seu posto seja máximo, ou seja igual á dimensão de M em cada ponto.

Esta condição tem um papel importante no estudo de propriedades de controlabilidade de sistemas de controle. Em outras palavras a condição do posto da álgebra de Lie pede que os campos de vetores do seu sistema gere em cada ponto da variedade, uma algebra de Lie de mesma dimensão do espaço tangente nesse ponto.

1.1.3 Estruturas quase-Riemanniana (ARS)

Apresentaremos as definições de ARS e ARS simples. Para um tratamento mais completo o leitor pode consultar [1].

Definição 1.1.6. Uma estrutura quase Riemanniana sobre uma variedade suave M de dimensão n é uma tripla $(E, f, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ onde:

1. E é um fibrado vetorial sobre M de posto n ,
2. $f : E \rightarrow TM$ é um morfismo de fibrados vetoriais,
3. $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um fibrado Euclideano, ie., $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ é um produto interno sobre a fibra E_q de E variando suavemente com relação a q , satisfazendo:
 - a) O conjunto de pontos $q \in M$ tal que a restrição de f a E_q é sobrejetora é um subconjunto aberto e denso de M ,
 - b) O modulo $\bar{\Xi}$ de campos vetoriais sobre M , definido como a imagem de f dos módulos das seções suaves de E , satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie. Considerando $S(E) = \{\sigma : M \rightarrow E, \text{suaves} \mid \pi \circ \sigma = id\}$, onde π é a projeção do fibrado vetorial, é um módulo sobre o anel das funções $\mathcal{C}^\infty(M)$, então o item

3b) nos diz que os campos vetoriais $f \circ \sigma$ satisfazem a condição do posto da álgebra de Lie,

Observação 1.1.7.

1. O conjunto de pontos de M onde o posto de $f(E_q) = \Xi_q$ é menor que n é chamado de locus singular da ARS e será denotado por \mathcal{Z} . Se $M \setminus \mathcal{Z}$ não é próprio, ou seja \mathcal{Z} poderia ser vazio, então a estrutura poderia ser Riemanniana.
2. Esta estrutura é trivializável se $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é isomorfo ao fibrado Euclideano trivial $M \times \mathbb{R}^n$. Neste caso poderíamos escolher uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) sobre \mathbb{R}^n e definir n campos vetoriais sobre M por $f_i(q) = f(q, e_i)$, $i = 1, \dots, n$. O conjunto (f_1, \dots, f_n) é uma estrutura ortogonal sobre $M \setminus \mathcal{Z}$

Norma

A norma quase Riemanniana sobre Ξ_q é definida por

$$\|v\|_q = \min\{\|u\|; u \in E_q \text{ e } f(u) = v\}.$$

Note que a linearidade de f sobre as fibras, garante que o mínimo está bem definido. No caso trivializável temos:

$$\|v\| = \min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}; u_1 f_1(q) + \dots + u_n f_n(q) = v. \right\}$$

Curvas admissíveis

Uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é dita ser admissível se é Lipschitz contínua, (com respeito a estrutura diferencial de M), e se existe uma função mensurável limitada $u : [0, T] \rightarrow E$ tal que $\dot{\gamma}(t) = f(u(t))$ para $t \in [0, T]$, q.t.p.

Seu comprimento é:

$$l(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

No caso trivializável, assumindo que $\|u\|$ realiza o mínimo de $\|\dot{\gamma}(t)\|$, temos

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(t)} dt.$$

A distância quase Riemanniana é definida como o ínfimo dos comprimentos de curvas admissíveis. É um fato bem conhecido que esta distância é finita e contínua na topologia da variedade. Dados $p, q \in M$ e escrevendo a distância como,

$$d(p, q) = \inf \{l(\gamma) \text{ onde } \gamma \text{ é uma curva admissível tal que } \gamma(0) = p, \gamma(T) = q\}$$

segue, pela condição do posto da álgebra de Lie, que temos transitividade e portanto a distância está bem definida.

1.1.4 ARS simples

Definição 1.1.8. Uma ARS simples é uma ARS definido sobre um grupo de Lie conexo G por um conjunto de n campos vetoriais da forma

$$\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$$

onde

- (i) \mathcal{X} é linear
- (ii) Y_1, \dots, Y_{n-1} são campos vetoriais invariantes á esquerda, linearmente independentes
- (iii) $n = \dim G$ e o posto de $\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ é total sobre um subconjunto de G
- (iv) O conjunto $\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie.

O conjunto onde o posto de $\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ **não** é total será denominado o locus singular e será detonado por \mathcal{Z} .

Observação 1.1.9.

1. O conjunto $\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ define um ARS pois como G é um grupo de Lie, então está de acordo com a observação 1.1.7.
2. O locus singular \mathcal{Z} é um subconjunto analítico de G , como veremos à frente, pois coincide com o conjunto de zeros de uma função analítica. Pelo item (iii), \mathcal{Z} não é igual a G e por analiticidade seu interior é vazio. Por outro lado como $\mathcal{X}(e) = 0$ segue que tal conjunto não é vazio. Finalmente $G \setminus \mathcal{Z}$ é um subconjunto aberto, denso e próprio de G .
3. A condição do posto implica que

$$\mathcal{L}\mathcal{A}\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\} = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathfrak{g}$$

Condições necessárias para a condição do posto de Lie

Denotemos por Δ o subespaço vetorial de \mathfrak{g} gerado por Y_1, \dots, Y_{n-1} , e seja D a derivação associada a \mathcal{X} ;

Se $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ e $D(\Delta) \subset \Delta$, então a álgebra de Lie gerada por $\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ é igual a Δ . Mas o posto dessa álgebra de Lie não é total sobre \mathcal{Z} .

Conseqüentemente a condição do posto de Lie implica que pelo menos uma das seguintes condições é cumprida:

- (i) $[\Delta, \Delta] \not\subseteq \Delta$
- (ii) $D(\Delta) \not\subseteq \Delta$.

Exemplo 1.1.10. O plano de Grushin ¹

Um exemplo de ARS é fornecido pelo plano de Grushin onde a variedade é $M = \mathbb{R}^2$, que é um grupo de Lie abeliano.

Consideremos o par de campos vetoriais dados como $\mathcal{X}(x, y) = (0, x)$, e $Y(x, y) = (1, 0)$, onde temos o sistema de controle correspondente $\dot{z} = v\mathcal{X} + uY$. Em coordenadas tal sistema pode ser espresso como

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = vx. \end{cases} \quad (1.5)$$

Sendo \mathcal{X} linear e Y invariante, o plano de Grushin é uma ARS simples. O locus singular é o eixo y , ou seja $x = 0$.

Para ir de acordo como foi formulado inicialmente consideremos, sem perda de generalidade, os geradores como $X(x, y) = (1, 0)$, e $Y(x, y) = (0, x)$.

Da definição inicial de ARS, $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $f((x, y), (a, b)) = ((x, y), (a, xb))$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a estrutura euclideana canônica sobre \mathbb{R}^2 . Neste caso uma estrutura ortonormal global é dada por $X(x, y) = \partial_x$, $Y(x, y) = x\partial_y$. Onde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

¹ Este exemplo foi nomeado após Grushin quem estudou em [10, 11]. As propriedades analíticas do operador $\partial_x^2 + x^2\partial_y^2$ e de suas generalizações multidimensionais. O modelo foi originalmente introduzido no contexto da teoria de operadores hypoelípticos.

2 O Locus Singular

2.1 Introdução

Nesta seção vamos estudar as propriedades do locus singular \mathcal{Z} de uma ARS simples determinado pela estrutura ortonormal $\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$. Não consideraremos aqui a métrica, e ao invés disso consideraremos o subespaço Δ de \mathfrak{g} gerado pelos campos vetoriais Y_1, \dots, Y_{n-1} . No caso de um grupo simplesmente conexo abeliano, ou seja quando $G = \mathbb{R}^n$, o locus singular é um subespaço de $G = \mathbb{R}^n$ de codimensão 1.

Seguidamente se analisará quando \mathcal{Z} é um subgrupo ou uma variedade diferenciável, o que em geral não ocorre, como veremos no caso do grupo de Heisenberg.

Por definição

$$\mathcal{Z} = \{g \in G : \text{posto}(\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}) = n - 1\}.$$

O hiperplano Δ pode ser definido como o núcleo de uma 1-forma ω ao qual pode ser associada uma 1-forma invariante à esquerda igualmente denotada por ω .

Considerando a aplicação $F : G \rightarrow \mathfrak{g}$, definida por $F(g) = (TL_{g^{-1}})_g \mathcal{X}_g$, e utilizando ω e F , podemos definir o locus singular da seguinte forma

$$g \in \mathcal{Z} \iff \mathcal{X}_g \in \Delta_g \iff F_g \in \Delta \iff \langle \omega, F_g \rangle = 0.$$

Denotemos por ψ a função analítica $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(g) = \langle \omega, F_g \rangle$.

A seguir apresentamos dois lemas sobre as propriedades analíticas de F .

Lema 2.1.1. *Seja \mathcal{X} um campo vetorial sobre um grupo de Lie conexo G e $F(g) = (TL_{g^{-1}})_g \mathcal{X}_g$. Então para todo $g \in G$, $Y \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$, tem-se:*

1.
$$\left. \frac{d[F(\exp tY)]}{dt} \right|_{t=0} = DY. \tag{2.1}$$

2.
$$F(g \exp tY) = F(\exp tY) + e^{-t \text{ad}(Y)} F(g), \tag{2.2}$$

$$T_g F = (D + \text{ad}(F_g)) \circ TL_{g^{-1}}. \tag{2.3}$$

Demonstração. 1. Denotando por $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo do campo \mathcal{X} , usando a fórmula 1.3 temos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d[F(\exp tY)]}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [TL_{(\exp(tY))^{-1}} \mathcal{X}_{\exp(tY)}] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{s=0} [\exp(-tY) \varphi_s(\exp(tY))] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\exp(-tY) \exp(te^{sD}Y)] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{s=0} [-Y + e^{sD}Y] \\ &= DY. \end{aligned}$$

2. Seja $Y \in \mathfrak{g}$ usando a fórmula 1.2 temos,

$$\begin{aligned} F(g \exp(tY)) &= TL_{(g \exp(tY))^{-1}} \mathcal{X}_{g \exp(tY)} \\ &= TL_{\exp(-tY)} TL_{g^{-1}} (TL_g \mathcal{X}_{\exp(tY)} + TR_{\exp(tY)} \mathcal{X}_g) \\ &= F(\exp(tY)) + \text{Ad}(\exp(-tY)) F(g) \\ &= F(\exp(tY)) + e^{-t \text{ad}(Y)} F(g), \end{aligned}$$

obtendo a fórmula 2.2.

Derivando esta fórmula em $t = 0$ obtemos a fórmula 2.3 como segue,

$$\begin{aligned} T_g F(Y_g) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(g \exp(tY)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F(\exp(tY)) + e^{-t \text{ad}(Y)} F(g)) \\ &= DY - \text{ad}(Y) F(g) \\ &= DY + \text{ad}(F(g)) Y. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.2. Para todo $g \in G$, $Y \in \mathfrak{g}$, $e t \in \mathbb{R}$

$$\forall k \geq 0 \quad \frac{d^k}{dt^k} F(g \exp tY) = (-1)^{k-1} (\text{ad}(Y))^{k-1} DY + (-1)^k (\text{ad}(Y))^k F(g \exp tY) \quad (2.4)$$

$$F(\exp tY) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k!} \text{ad}^{(k-1)}(Y) DY, \quad (2.5)$$

Demonstração. Pela fórmula 2.3 obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(g \exp(tY)) &= T_{g \exp(tY)} F.Y_{g \exp(tY)} \\ &= DY - \text{ad}(Y) F(g \exp(tY)), \end{aligned}$$

obtendo a fórmula para $k = 1$. Por indução obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} F(g \exp(tY)) &= (-1)^k (\text{ad}(Y))^k (DY - \text{ad}(Y)F(g \exp tY)) \\ &= (-1)^k (\text{ad}(Y))^k DY + (-1)^{k+1} (\text{ad}(Y))^{k+1} F(g \exp tY). \end{aligned}$$

Agora para a fórmula 2.5 temos $F(\exp(0Y)) = F(e) = 0$ e para $k \geq 1$ aplicando as fórmulas anteriores a $g = e$ e $t = 0$ obtemos $\left. \frac{d^k}{dt^k} \right|_{t=0} F(\exp tY) = (-1)^{k-1} (\text{ad}(Y))^{k-1} DY$, segue por analiticidade que $F(\exp tY) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k!} (\text{ad}(Y))^{k-1} DY$. \square

Note que pelo Lema 2.1.1, F tem expansão em série de potências em pontos exponenciais, além disso ω é linear e G é conexo daí segue que ψ é analítica.

Com esta notação então o locus singular torna-se o conjunto de zeros de ψ .

2.2 Condições suficientes para que \mathcal{Z} torne-se uma subvariedade

Nesta seção mostraremos que \mathcal{Z} é uma subvariedade (mergulhada e analítica) sempre que Δ seja uma subálgebra de \mathfrak{g} . Para fazer isso necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.2.1. *Suponhamos que Δ é uma subálgebra de \mathfrak{g} . Então \mathfrak{g} pode ser decomposta como*

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}Y_n \oplus W \oplus \mathbb{R}\xi, \quad (2.6)$$

onde

1. W é uma subálgebra de dimensão $n - 2$;
2. $\Delta = W \oplus \mathbb{R}\xi$;
3. $D^{-1}(\Delta) = \mathbb{R}Y_n \oplus W$;
4. $\langle \omega, Y_n \rangle = 1$ e $D\xi = Y_n \pmod{\Delta}$.

Demonstração. Como Δ é uma subálgebra, a condição do posto implica que $D^*\omega$ é uma 1-forma não nula tal que $D^*\omega \neq \omega$, onde $D^*\omega = \omega \circ D$. De fato se $D^*\omega = 0$ então para todo $Y = DX$ com $X \in \Delta$, temos $\omega(D(X)) = 0$, daí $Y = D(X) \in \Delta$. Por outro lado se $D^*\omega = \omega$ então $\omega \circ D = \omega$, logo $\omega(D(X)) = \omega(X) = 0$ assim $Y = D(X) \in \Delta$. Em ambos casos $D\Delta \subset \Delta$ contradizendo a condição do posto da álgebra de Lie ser satisfeita, uma vez que Δ é subálgebra.

Por conseguinte $D^{-1}\Delta = \ker(D^*\omega)$ é um subespaço de \mathfrak{g} de dimensão $n - 1$ diferente de Δ , e $W = \Delta \cap D^{-1}\Delta$ é um subespaço de \mathfrak{g} de dimensão $n - 2$ o qual é também uma subálgebra.

Com efeito sejam $X_1, X_2 \in W$, como Δ é uma subálgebra então $[X_1, X_2] \in \Delta$. Pela definição de W , $DX_1 \in \Delta$ e $DX_2 \in \Delta$ donde $D[X_1, X_2] = [DX_1, X_2] + [X_1, DX_2] \in \Delta$. Portanto, $[X_1, X_2] \in D^{-1}\Delta$ implicando $[X_1, X_2] \in W$.

Seja $Y_n \in \mathfrak{g}$ tal que $D^{-1}(\Delta) = \mathbb{R}Y_n \oplus W$. Como $Y_n \notin \Delta$ e $\langle \omega, Y_n \rangle \neq 0$, podemos supor sem perda de generalidade $\langle \omega, Y_n \rangle = 1$. Como $D\Delta \not\subset \Delta$ existe $\xi \in \Delta$ tal que $D\xi \notin \Delta$, e $D\xi = aY_n \pmod{\Delta}$ com $a \neq 0$. Salvo modificação de ξ podemos escolher $a = 1$, concluindo a demonstração. \square

Corolário 2.2.2. *Seja \mathcal{X} um campo vetorial linear sobre um grupo de Lie conexo G , e considere $F : G \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $F(g) = (TL_{g^{-1}})_g \mathcal{X}_g$. Seja ω uma 1-forma invariante à esquerda sobre G e ψ uma função de valor real definida em G por $\psi(g) = \langle \omega, F(g) \rangle$. Então*

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad T_g\psi \cdot Y_g = \langle \omega, DY + \text{ad}(F_g)Y \rangle.$$

A fórmula acima também pode ser escrita como $T_g\psi \circ TL_g = (D + \text{ad}(F_g))^*\omega$.

A demonstração do Corolário 2.2.2 segue da fórmula 2.3

Teorema 2.2.3. *Se Δ é uma subálgebra de \mathfrak{g} então o locus singular \mathcal{Z} é uma subvariedade mergulhada e analítica de G de codimensão 1. Seu espaço tangente na identidade é $\ker(D^*\omega) = D^{-1}\Delta$.*

Demonstração. Como $\psi : G \mapsto \mathbb{R}$ é analítica, é suficiente mostrar que seu diferencial não se anula em \mathcal{Z} . Pelo Corolário 2.2.2 temos que

$$T_g\psi Y_g = \langle \omega, DY + [F_g, Y] \rangle \quad \forall g \in G, \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Como $\xi \in \Delta$ e $F_g \in \Delta$, se $g \in \mathcal{Z}$ temos que $[F_g, \xi] \in \Delta$ para todo $g \in \mathcal{Z}$, pois Δ é subálgebra.

Por outro lado como $D\xi \notin \Delta$ segue que

$$\begin{aligned} \forall g \in \Delta \quad T_g\psi.\xi_g &= \langle \omega, D\xi + [F_g, \xi] \rangle \\ &= \langle \omega, D\xi \rangle + \langle \omega, [F_g, \xi] \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Disso segue que ψ é uma submersão em todos os pontos de \mathcal{Z} e portanto \mathcal{Z} é uma subvariedade de G de codimensão 1. Além disso $F_e = 0$ e

$$T_e\psi Y = \langle \omega, DY \rangle = \langle D^*\omega, Y \rangle \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

□

Observação 2.2.4. A fórmula anterior é ainda válida para todo ponto onde F se anula, ou seja sobre o conjunto de singularidades de \mathcal{X} .

2.3 Condições suficientes para o locus singular seja um subgrupo

Antes de estabelecer as condições para que \mathcal{Z} seja um subgrupo provaremos um lema essencial para a demonstração das seguintes proposições.

Lema 2.3.1. *O locus singular \mathcal{Z} é um subgrupo de G se, e somente se*

$$\forall g, h \in \mathcal{Z} \quad \langle \omega, \text{Ad}(h)F_g \rangle = 0, \tag{2.7}$$

isto é se, e somente se para todo $g, h \in \mathcal{Z}$ $\text{Ad}(h)F_g \in \Delta$.

Demonstração. Sejam $g, h \in \mathcal{Z}$. Então por (1.2),

$$\begin{aligned} F(hg) &= TL_{(hg)^{-1}}\mathcal{X}_{hg} \\ &= TL_{g^{-1}}TL_{(h)^{-1}}(TL_h\mathcal{X}_g + TR_g\mathcal{X}_h) \\ &= F(g) + \text{Ad}(g^{-1})F(h). \end{aligned}$$

Assumindo que $g, h \in \mathcal{Z}$, temos que $F(g)$ e $F(h)$ pertencem a Δ . Logo

$$h, g \in \mathcal{Z} \iff F(gh) \in \Delta \iff \text{Ad}(g^{-1})F(h) \in \Delta.$$

analogamente obtemos, $0 = F(gg^{-1}) = F(g^{-1}) + \text{Ad}(g)F(g)$, assim $F(g^{-1}) = -\text{Ad}(g)F(g)$, e $g^{-1} \in \mathcal{Z}$ se, e somente se, $\text{Ad}(g)F(g) \in \Delta$. Finalmente vemos que \mathcal{Z} é um subgrupo de G se, e somente se (2.7) é satisfeita. \square

Proposição 2.3.2. *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) Δ é um ideal de \mathfrak{g} ,
- (ii) a álgebra derivada $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ esta contida em Δ ,
- (iii) a 1-forma ω invariante à esquerda é fechada.

Quando estas condições são satisfeitas o locus singular \mathcal{Z} é um subgrupo de Lie de G , com álgebra de Lie \mathfrak{z} , e tem-se $\mathfrak{z} = \ker(D^*\omega) = D^{-1}\Delta$.

Demonstração. Para \mathcal{Z} ser um subgrupo de Lie é suficiente provar que é um subgrupo abstrato, pois sendo um subconjunto fechado é um subgrupo de Lie pelo Teorema de subgrupo fechado de Cartan, veja [21].

Começamos provando (ii) \Leftrightarrow (iii).

Para uma 1-forma ω invariante à esquerda, a fórmula de Maurer-Cartan, (veja [22], página 394), afirma que,

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

Portanto $d\omega$ se anula em e , e portanto se anula em todo o espaço, pois a forma é invariante à esquerda, se, e somente se, a álgebra derivada $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ está contida no núcleo de ω .

Agora vamos provar (i) \Leftrightarrow (ii).

Seja $Z \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \Delta + \mathbb{R}Z$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1\mathfrak{g} &= [\Delta + \mathbb{R}Z, \Delta + \mathbb{R}Z] \\ &= [\Delta, \Delta] + [\Delta, \mathbb{R}Z] + [\mathbb{R}Z, \Delta] + [\mathbb{R}Z, \mathbb{R}Z] \\ &= [\Delta, \Delta] + [\Delta, \mathbb{R}Z] + [\mathbb{R}Z, \Delta] + 0 \\ &= [\Delta, \Delta] + [\Delta, Z], \quad \text{representado } \mathbb{R}Z \text{ por } Z. \end{aligned}$$

Portanto se Δ é um ideal de \mathfrak{g} então $[\Delta, Z] \in \Delta$ como Δ é subálgebra $[\Delta, \Delta] \in \Delta$ logo $\mathcal{D}^1\mathfrak{g} \subset \Delta$.

Reciprocamente se Δ não é um ideal de \mathfrak{g} então ou Δ não é uma subálgebra, i.e., $[\Delta, \Delta] \not\subset \Delta$, ou $[\Delta, Z]$ não está contido em Δ . Em ambos casos $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ não está contida em Δ .

Sob as condições acima, provemos que \mathcal{Z} é subgrupo abstrato. Suponhamos que Δ é

um ideal de \mathfrak{g} e sejam $g, h \in \mathcal{Z}$. Sendo G conexo, existem $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) &= \text{Ad}(\exp(X_1) \cdots \exp(X_k)) \\ &= \text{Ad}(\exp(X_1)) \cdots \text{Ad}(\exp(X_k)) \\ &= e^{\text{ad}(X_1)} \cdots e^{\text{ad}(X_k)}. \end{aligned}$$

Cada um dos fatores $e^{\text{ad}(X_i)}$ envia Δ em Δ .

De fato para qualquer $Y \in \Delta$

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(X_i)}Y &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (\text{ad}(X_i))^j Y \\ &= Y + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\text{ad}(X_i))^j Y \\ &= Y \pmod{\mathcal{D}^1 \mathfrak{g}} \end{aligned}$$

e $e^{\text{ad}(X_i)}Y \in \Delta$ se, e somente se, $Y \in \Delta$. Isto mostra que $\text{Ad}(g)$ envia Δ em Δ e como $h \in \mathcal{Z}$ então $F(h) \in \Delta$, segue que $\text{Ad}(g)F(h) \in \Delta$. Pelo Lema (2.3.1), o locus singular \mathcal{Z} é portanto um subgrupo de G .

A álgebra de Lie de \mathcal{Z} é seu espaço tangente em e .

A condição $\mathcal{D}^1 \mathfrak{g} \subset \Delta$ implica que Δ é um ideal e portanto uma subálgebra e pelo Teorema (2.2.3) segue que $\mathfrak{z} = T_e \mathcal{Z} = \ker(D^* \omega)$. \square

Teorema 2.3.3. *Se a álgebra de Lie \mathfrak{g} é solúvel, e Δ é uma subálgebra de \mathfrak{g} , então o locus singular \mathcal{Z} é um subgrupo de Lie de G de codimensão um, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{z} = D^{-1} \Delta$.*

Demonstração. Segundo o Lema (2.2.1) e o Teorema (2.2.3) o locus singular \mathcal{Z} é uma subvariedade de G de codimensão um cujo espaço tangente na identidade é $\mathfrak{z} = D^{-1} \Delta$. Assim é suficiente provar que \mathcal{Z} é um subgrupo. Para isso usaremos o Lema (2.3.1).

1. Para começar seja δ uma subálgebra de codimensão um de uma álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{h} . Provemos que δ é um ideal de \mathfrak{h} .

Com efeito, se $Z \in \mathfrak{h}$ é tal que $\mathfrak{h} = \delta + \mathbb{R}Z$, então a álgebra derivada de \mathfrak{h} é $\mathcal{D}^1 \mathfrak{h} = [\delta, \delta] + [\delta, Z]$.

Se por contradição assumimos que δ não é um ideal de \mathfrak{h} então δ é uma subálgebra mas não um ideal de \mathfrak{h} temos $[\delta, \delta] \subset \delta$ e $\mathcal{D}^1 \mathfrak{h} \not\subset \delta$, e portanto $[\delta, Z]$ não esta contida em δ . Logo existe $X \in \delta$ tal que $[X, Z] = \text{ad}(X)Z = aZ \pmod{\delta}$, para algum número real $a \neq 0$. (Note que $Z \notin \delta$ e $[X, Z] \notin \delta$).

Escolhendo s.p.g. $a = 1$ segue que $\text{ad}(X)Z = Z \pmod{\delta}$, compondo sucessivamente com $\text{ad}(X)$ obtemos

$$\forall k \geq 1 \quad \text{ad}^k(X)Z = Z \pmod{\delta},$$

e pelo Teorema de Engel não é ad-nilpotente logo \mathfrak{h} é não nilpotente, contradizendo a hipótese.

2. Sejam \mathfrak{g} e Δ dados. Se Δ é um ideal de \mathfrak{g} então o resultado segue da proposição (2.3.2).

Caso contrário $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ não está contida em Δ logo existe $Z \in \mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ com $Z \notin \Delta$ tal que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Z \oplus \Delta$. Além disso a condição de posto de Lie implica que $D(\Delta) \not\subseteq \Delta$.

3. Seja η o maior ideal nilpotente de \mathfrak{g} . (Veja [9]) Temos que para qualquer derivação D da álgebra solúvel \mathfrak{g} , $D(\mathfrak{g}) \subset \eta$. Além disso, sendo $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ ideal nilpotente de \mathfrak{g} ele está contido em η , e pelo item 2, $Z \in \eta$, donde $\mathfrak{g} = \eta + \Delta$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{g}) &= \dim(\eta + \Delta) \\ &= \dim(\eta) + \dim(\Delta) - \dim(\eta \cap \Delta), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \dim(\eta \cap \Delta) &= \dim(\eta) + \dim(\Delta) - \dim(\mathfrak{g}) \\ &= \dim(\eta) + n - 1 + n \\ &= \dim(\eta) - 1, \end{aligned}$$

daí segue que $\eta \cap \Delta$ é uma subálgebra de codimensão um em η .

Como η é nilpotente temos, pelo item 1, que $\eta \cap \Delta$ é um ideal de η .

Vale ainda que $\eta \cap \Delta$ é um ideal de \mathfrak{g} . De fato, dado $Y \in \mathfrak{g}$, pode-se escrever $Y = X + aZ$ onde $X \in \Delta$ e $a \in \mathbb{R}$.

Queremos provar que para qualquer $V \in \eta \cap \Delta$ temos $[X + aZ, V] \in \eta \cap \Delta$, analisando separadamente cada colchete em $[X, V] + [aZ, V]$, como $Z \in \eta$ e $\eta \cap \Delta$ é um ideal de η temos que $\text{ad}(Z)$ envia $\eta \cap \Delta$ em $\eta \cap \Delta$, igualmente tem-se o mesmo para $\text{ad}(X)$, pois X pertence á álgebra Δ e η é um ideal de \mathfrak{g} .

Finalmente $\eta \cap \Delta$ é invariante para todas as derivações internas, portanto é um ideal de \mathfrak{g} .

4. Mostraremos que $D^{-1}\Delta$ é uma subálgebra. Para isso sejam $X_1, X_2 \in D^{-1}\Delta$ e vejamos que $[X_1, X_2] \in D^{-1}\Delta$, ou seja vejamos que $D[X_1, X_2] \in \Delta$.

Primeiramente temos que $D(D^{-1}\Delta) \subset D(\mathfrak{g}) \subset \eta$ e $D(D^{-1}\Delta) \subset \Delta$ por definição, segue que $D(D^{-1}\Delta) \subset \eta \cap \Delta$.

Assim para todo $X_1, X_2 \in D^{-1}\Delta$ temos que $DX_i \in \eta \cap \Delta$, logo $[DX_i, X_j] \in \eta \cap \Delta$ para $i, j = 1, 2$. Consequentemente

$$D[X_1, X_2] = [DX_1, X_2] + [X_1, DX_2] \in \eta \cap \Delta,$$

e $[X_1, X_2] \in D^{-1}\Delta$, concluindo a demonstração.

5. Provaremos que $F(g) \in \eta$ para todo $g \in G$. Primeiramente

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad F(\exp tY) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k!} \text{ad}^{k-1}(Y)DY \in \eta,$$

pois DY pertence ao ideal η . Além disso

$$F(g \exp tY) = F(\exp tY) + e^{-t \operatorname{ad}(Y)} F(g) \in \eta$$

pertence sempre que $F(\exp tY)$ e $F(g)$, ambos, pertencem a η .

Como G é conexo temos que para todo $g \in G$ existem $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(Y_1) \cdots \exp(Y_k)$ e o resultado é obtido por indução.

6. Para finalizar a prova do teorema sejam $g, h \in \mathcal{Z}$. Temos que $F(g)$ pertence ao ideal $\eta \cap \Delta$, e $h = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k)$ para $X_1 \cdots X_k \in \mathfrak{g}$, logo

$$\operatorname{Ad}(h) = e^{\operatorname{ad}(X_1)} \cdots e^{\operatorname{ad}(X_k)}$$

e $\operatorname{Ad}(h)F(g)$ pertence a $\eta \cap \Delta$. Portanto pelo Lema 2.3.1 o locus singular \mathcal{Z} é um subgrupo de G .

□

Observação 2.3.4.

1. O passo 1 da demonstração acima nos diz que se \mathfrak{g} é nilpotente, então Δ é um ideal sempre que seja uma subálgebra. No caso solúvel podemos exibir exemplos onde Δ é uma subálgebra mas não é um ideal. (Veja o exemplo 3.2 a frente)
2. O mesmo vale no caso de grupos de Lie semisimples já que uma subálgebra de codimensão um não pode ser um ideal. Mas, além do fato de subálgebras de codimensão um não serem muito comuns em álgebras de Lie semisimples, essa condição não é suficiente neste caso para que \mathcal{Z} seja um subgrupo. (Veja o exemplo 3.4 sobre o grupo $SL(2; \mathbb{R})$).

O próximo resultado garante que \mathcal{Z} é um subgrupo. Quando \mathcal{Z} é igual ao conjunto de singularidades de \mathcal{X} .

Proposição 2.3.5. *Se \mathcal{Z} é igual ao conjunto $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}$ de singularidades de \mathcal{X} então este é um subgrupo de Lie fechado de G cuja álgebra de Lie é igual a $\ker(D)$*

Demonstração. O conjunto $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}$ é um subgrupo fechado de G , desde que

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{X}} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \{g \in G; \varphi_t(g) = g\},$$

onde $(\varphi)_{t \in \mathbb{R}}$ representa o fluxo de \mathcal{X} . Como provamos que \mathcal{Z} é um subgrupo fechado de G para provar que $\operatorname{Lie} \mathcal{Z} = \ker(D)$, usamos a seguinte relação, para H subgrupo fechado de G com álgebra de Lie \mathfrak{g} calculamos a álgebra de Lie de H , $\operatorname{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ como

$$\text{Lie}(H) = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R} \exp(sY) \in \mathcal{Z}_X &\iff \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(sY) = \varphi_t(\exp(sY)) = \exp(e^{tD}sY) \\ &\iff \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(sY) = \exp(e^{tD}sY), \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y = e^{tD}Y \\ &\iff DY = 0. \end{aligned}$$

O que mostra que a álgebra de Lie de \mathcal{Z}_X é o núcleo de D . □

2.4 Condições Necessárias para o locus singular ser um subgrupo

Quando a 1-forma $D^*\omega$ não se anula, o locus singular é localmente, ao redor da identidade, uma subvariedade, cujo espaço tangente em e é $T_e\mathcal{Z} = \ker(D^*\omega) = D^{-1}\Delta$.

Poderíamos esperar que \mathcal{Z} seja um subgrupo se $D^{-1}\Delta$ é uma subálgebra, mas esta afirmação não é verdadeira, nem ao menos localmente, mesmo se $D^{-1}\Delta$ é um ideal de \mathfrak{g} . (Veja os exemplos da seção 3, em particular o exemplo 3.3.1)

A fim de estabelecer uma condição necessária para que \mathcal{Z} seja um subgrupo, e uma condição localmente suficiente, usaremos a seguinte condição algébrica forte.

Uma subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , satisfaz a condição (HZ) se

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, \forall m \geq 0, \forall Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{h}, \langle \omega, \text{ad}(Z_1) \cdots \text{ad}(Z_m)DY \rangle = 0.$$

Proposição 2.4.1. *Se \mathcal{Z} é um grupo então \mathcal{Z} é um subgrupo de Lie de G cuja álgebra de Lie \mathfrak{z} satisfaz a condição (HZ) .*

Demonstração. O conjunto \mathcal{Z} sendo um subconjunto fechado é um grupo de Lie sempre que seja um grupo. Provemos que a álgebra de Lie \mathfrak{z} satisfaz a condição (HZ) .

Com efeito, sejam $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ logo o ponto $\exp(t_1Z_1) \cdots \exp(t_mZ_m)$ pertence a \mathcal{Z} , e como

$$\text{Ad}(\exp(t_1Z_1) \cdots \exp(t_mZ_m)) = e^{t_1 \text{ad}(Z_1)} \cdots e^{t_m \text{ad}(Z_m)},$$

utilizando o Lema 2.3.1, temos que para todo $g \in \mathcal{Z}$

$$\langle \omega, e^{t_1 \text{ad}(Z_1)} \cdots e^{t_m \text{ad}(Z_m)} F(g) \rangle = 0.$$

Derivando esta igualdade em $t_1 = 0$, depois em $t_2 = 0$ e assim sucessivamente até chegar a $t_m = 0$ e usando a linearidade de $\text{ad}(Z_i)$, segue que

$$\langle \omega, \text{ad}(Z_1) \cdots \text{ad}(Z_m) F(g) \rangle = 0.$$

Por fim, seja $g = \exp(tY)$, onde $Y \in \mathfrak{z}$. Pela fórmula (2.1), temos que

$$\left. \frac{d[F(\exp tY)]}{dt} \right|_{t=0} = DY,$$

daí segue que

$$\langle \omega, \text{ad}(Z_1) \cdots \text{ad}(Z_m)DY \rangle = 0$$

□

Observação 2.4.2.

1. A Proposição 2.4.1 é um resultado local: ela é satisfeita sempre que \mathcal{Z} seja localmente, numa vizinhança da identidade, igual a algum subgrupo de G
2. As derivadas sucessivas de $F(\exp(tY))$ não fornecem mais informação pois alguns dos Z_i podem ser escolhidos igual a Y
3. A condição (HZ) é satisfeita trivialmente só se Δ é um ideal.

A fim de indagar o inverso da Proposição 2.4.1 consideraremos a subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , assumindo que satisfaz a condição (HZ) , e associaremos a \mathfrak{h} o seguinte subespaço de Δ :

$$\delta_{\mathfrak{h}} = \{X \in \Delta; \forall m \geq 0, \forall Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{h} \quad \text{ad}(Z_1) \cdots \text{ad}(Z_m)X \in \Delta\}.$$

Notemos que $\delta_{\mathfrak{h}}$ depende de \mathfrak{h} e pela condição (HZ) , temos que $D\mathfrak{h} \subset \delta_{\mathfrak{h}}$. Também temos que $\delta_{\mathfrak{h}}$ é $\text{ad}(Z)$ – invariante para todo $Z \in \mathfrak{h}$.

Lema 2.4.3. *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de \mathfrak{g} que satisfaz a condição (HZ) , e seja H o subgrupo conexo gerado por \mathfrak{h} , este grupo é representado por $H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$.*

1. O subgrupo de Lie H está contido em \mathcal{Z} .
2. Seja $g \in \mathcal{Z}$. Se $F(g) \in \delta_{\mathfrak{h}}$, então gH esta contido em \mathcal{Z} .

Demonstração. 1. Seja $Y \in \mathfrak{h}$ e $k \geq 1$. A condição (HZ) com $m = k - 1$ e $Z_i = Y$ para $i = 1, \dots, k - 1$ é dada por:

$$\text{ad}^{k-1}(Y)DY \in \delta_{\mathfrak{h}} \subset \Delta.$$

Logo para todo $t \in \mathbb{R}$

$$F(\exp tY) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k!} \text{ad}^{k-1}(Y)DY \in \delta_{\mathfrak{h}} \subset \Delta,$$

e $\exp(tY)$ pertence a \mathcal{Z} para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Seja $g \in \mathcal{Z}$ tal que $F(g) \in \delta_{\mathfrak{h}}$, Para todo $Y \in \mathfrak{h}$ temos

$$\begin{aligned} \langle \omega, F(g \exp tY) \rangle &= \langle \omega, F(\exp tY) + e^{-t \operatorname{ad}(Y)} F(g) \rangle \\ &= \langle \omega, F(\exp tY) \rangle + \sum_{k \geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} \langle \omega, \operatorname{ad}^k(Y) F(g) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $F(\exp(tY)) \in \Delta$ pelo item 1, e $\operatorname{ad}^k(Y)F(g)$ pertence a Δ pois $F(g)$ pertence a $\delta_{\mathfrak{h}}$. Note que $F(g \exp tY)$ pertence a $\delta_{\mathfrak{h}}$, pois $\delta_{\mathfrak{h}}$ é $\operatorname{ad}(Z)$ – invariante para todo $Z \in \mathfrak{h}$.

3. Sejam Z_1, \dots, Z_m em \mathfrak{h} e t_1, \dots , em \mathbb{R} .

Pelo Item 2 obtemos por indução que $F(\exp(t_k Z_k) \cdots \exp(t_1 Z_1))$ pertencem a $\delta_{\mathfrak{h}}$, para $k = 1, \dots, m$, mostrando que $H \subset \mathcal{Z}$

4. Para concluir, seja $g \in \mathcal{Z}$ tal que $F(g) \in \delta_{\mathfrak{h}}$. Temos que $gH \subset \mathcal{Z}$ pelo mesmo raciocínio seguido no item 3.

□

Corolário 2.4.4. *Se $D^*\omega$ não é zero e se $\mathfrak{z} = \ker(D^*\omega)$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} que satisfaz a condição (HZ), então o subgrupo conexo $Gr(\mathfrak{z})$ gerado por \mathfrak{z} esta contido em \mathcal{Z} .*

Além disso existe uma vizinhança V da identidade tal que:

$$\mathcal{Z} \cap V = Gr(\mathfrak{z}) \cap V.$$

Demonstração. A primeira parte se tem pelo Lema 2.4.3. Para a segunda parte a condição $D^*\omega \neq 0$ implica que \mathcal{Z} é localmente, numa vizinhança V de e , uma subvariedade de dimensão $n - 1$.

Note que $\mathcal{Z} = \{\psi = 0\}$ e $T_e\psi = D^*\omega$. Tem se que $Gr(\mathfrak{z}) \subset \mathcal{Z}$ logo $Gr(\mathfrak{z}) \cap V \subset \mathcal{Z} \cap V$, para a outra inclusão podemos diminuir V , pois $T_e(\mathcal{Z} \cap V) = \mathfrak{z} = T_e(Gr(\mathfrak{z}))$

□

O exemplo 3.3.1 sobre o grupo de Heisenberg, na seção 3.3, mostrará que as suposições do Corolario 2.4.4 não são suficientes para saber o que acontece fora da identidade: eles não implicam que ψ seja regular em \mathcal{Z} nem que $F(g) \in \delta$ para todos os pontos $g \in \mathcal{Z}$, mesmo na componente conexa de \mathcal{Z} .

3 Exemplos de locus singular

3.1 Grupos Abelianos

Consideremos o par (A, Δ) onde A é um matriz de ordem n e $\Delta = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, onde os e_i são linearmente independentes .

Lembre que os campos vetoriais invariantes em \mathbb{R}^n são constantes. Temos que a matriz A determina o campo vetorial linear $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow Ax \in \mathbb{R}^n$.

Pela definição

$$\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \in \Delta\}.$$

Consideremos um vetor e_n tal que $\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\} = \mathbb{R}^n$.

Então para algumas formas lineares a_1, \dots, a_n temos que

$$Ax = \sum_{j=1}^n a_j(x)e_j \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Vamos provar que um campo linear em \mathbb{R}^n pode se escrever na forma da equação 3.1.

De fato seja \mathcal{F} um campo afim em \mathbb{R}^n e considere $\mathcal{F}(x) = Ax + X$ onde A é uma matriz $n \times n$ e $X \in \mathfrak{g}$, (tal decomposição é garantida pelo Teorema 1.1.3). Seja $Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}, Y]_x &= [A + X, Y]_x \\ &= [A, Y]_x + [X, Y]_x \\ &= -AY \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

Suponhamos que $\mathcal{F}(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, e $Y(x) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $b_i \in \mathbb{R}$. Disso,

$$[\mathcal{F}, Y]_x = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{g}, \quad (3.2)$$

onde $c_j \in \mathbb{R}$.

Da definição do colchete temos que

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}, Y]_x(f) &= \mathcal{F}_x(Yf) - Y_x(\mathcal{F}f) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$[\mathcal{F}, Y]_x(f) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

e como pela regra de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}, Y]_x(f) &= \sum_{j=1}^n a_j(x) \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Comparando com a equação 3.2 chegamos a

$$c_j = \sum_{i=1}^n -b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i},$$

e como \mathcal{F} pertence ao normalizador de \mathbb{R}^n as aplicações c_j devem ser constantes. Sendo cada b_i também constante devemos ter

$$a_j(x) = (a_{j1}x_1 + b_{j1}, \dots, a_{jn}x_n + b_{jn}).$$

Daí para que \mathcal{F} seja linear devemos ter $\mathcal{F}(0) = 0$, logo o campo linear em \mathbb{R}^n determinado por A é dado por

$$\mathcal{X}(x) = Ax = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde cada a_j é linear em \mathbb{R}^n e assim um polinômio. $a_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i + b_{ji}$

Calculemos agora o locus singular.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \in \Delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_j(x) e_j \in \Delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_n(x) = 0\} \\ &= \ker(a_n). \end{aligned}$$

Além disso como $a_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ são formas lineares o Teorema de núcleo e imagem garante que

$$\begin{aligned} \dim(\ker(a_n)) + \dim \text{Im}(a_n) &= \dim(\mathbb{R}^n) \\ \dim(\ker(a_n)) + 1 &= n, \end{aligned}$$

conclui-se $\dim(\ker(a_n)) = n - 1$ e portanto $\mathcal{Z} = \ker(a_n)$ é um subespaço de codimensão 1.

3.2 O grupo afim 2D

Seja G a componente conexa da identidade do grupo afim de dimensão dois:

$$G = \text{Aff}_+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}.$$

Alternativamente este grupo pode ser identificado com o produto semi-direto

$$\text{Aff}_+(2) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \text{com } e = (1, 0)$$

e produto $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$.

Sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(2)$ é a álgebra de Lie solúvel gerada por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $[X, Y] = XY - YX = Y$.

Os campos vetoriais invariantes à esquerda são gerados por

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} = gX = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y(x, y) = x \frac{\partial}{\partial y} = gY = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ onde } g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos calcular o campo linear.

Primeiramente consideremos a matriz da derivação $D : \mathfrak{aff}(2)_+ \mapsto \mathfrak{aff}(2)_+$, na base $\{X, Y\}$

$$D = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$DX = cX + aY,$$

$$DY = dX + bY,$$

logo

$$\begin{aligned} dX + bY &= DY \\ &= D[X, Y] \\ &= [DX, Y] + [X, DY] \\ &= [cX + aY, Y] + [X, dX + bY] \\ &= [cX, Y] + [aY, Y] + [X, dX] + [X, bY] \\ &= c[X, Y] + b[X, Y] \\ &= cY + bY \\ &= (c + b)Y, \end{aligned}$$

logo $c + b = b$ e $d = 0$, donde $c = d = 0$ e portanto

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{\partial}{\partial x} = X(1, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial y} = Y(0, 1)$ obtemos

$$\begin{aligned} DX &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \\ &= aY \\ &= a \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DY &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= bY \\ &= b \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Por outro lado escrevendo o campo linear como

$$\mathcal{X}(x, y) = f_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + f_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Denote por Z_1 o campo invariante à esquerda tal que $Z_1(1, 0) = DX$ e $Z_2(1, 0) = DY$. Assim $Z_1(g) = ax \frac{\partial}{\partial y}$ e $Z_2(g) = bx \frac{\partial}{\partial y}$, onde $g = (x, y)$, temos por unicidade que

$$\begin{aligned} Z_1(g) &= -[\mathcal{X}, X]_g \\ &= \left[f_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + f_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ &= - \left[f_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) - x \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] - \left[f_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) - x \frac{\partial}{\partial x} \left(f_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \\ &= - f_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) - f_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(f_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= - f_1 \frac{\partial}{\partial x} - f_1 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + x f_1 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - f_2 x \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + x \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + x f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &= - f_1 \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-f_1 + x \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(x \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Além disso

$$Z_2(g) = -[\mathcal{X}, Y]_g = -f_1 \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

e, combinando as expressões para $Z_1(g)$ e para $Z_2(g)$, obtemos as seguintes relações:

$$f_1 - x \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

$$x \frac{\partial f_2}{\partial x} = ax \quad (3.4)$$

$$x \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$f_1 - x \frac{\partial f_2}{\partial y} = -bx. \quad (3.6)$$

Diferenciando a equação 3.3 em relação a y resulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - x \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0, \quad (3.7)$$

e como $x > 0$ segue da equação 3.5 que $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ portanto f_1 não depende de y .

Novamente utilizando que $x > 0$, obtemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - x \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0.$$

Integrando em relação a x , (pois f_1 não depende de y), vale

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow f_1(x, y) = k_1 x + k_2.$$

Por outro lado, usando a equação 3.4 e integrando obtemos

$$f_2 = ax + g(y). \quad (3.8)$$

Derivando em relação a y , a equação 3.8, e

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} g(y). \quad (3.9)$$

Utilizando 3.6 e 3.9 obtemos $x \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y} g(y)$. Além disso como $f_1 = k_1 x + k_2$, temos $f_1 + bx = k_1 x + k_2 + bx$, e portanto

$$\begin{aligned} f_1 + bx &= k_1 x + k_2 + bx \\ &= x \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} g(y). \end{aligned}$$

Logo derivando em relação a x , $k_1 + b = \frac{\partial}{\partial y}g(y)$, implicando $g(y) = (k_1 + b)y + k_3$, donde

$$f_2(x, y) = ax + (k_1 + b)y + k_3. \quad (3.10)$$

Agora da expressão de $Z_1(g) = \left(-f_1 + x \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(x \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y}$, substituindo f_1 e f_2 obtemos

$$\begin{aligned} Z_1(g) &= -(k_1x + k_2) \frac{\partial}{\partial x} + k_1x \frac{\partial}{\partial x} + ax \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -k_2 \frac{\partial}{\partial x} + ax \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Como $Z_1(g) = ax \frac{\partial}{\partial y}$, temos

$$-k_2 \frac{\partial}{\partial x} + ax \frac{\partial}{\partial y} = ax \frac{\partial}{\partial y},$$

implicando que $k_2 = 0$.

Além disso, como $\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(1, 0) = 0$ segue que

$f_1(e) = f_1(1, 0) = k_1(1) = 0$ logo $k_1 = 0$ e portanto $f_1 = 0$.

Também temos $f_2(e) = a(1) + b(0) + k_3 = 0$ daí que $k_3 = -a$.

Finalmente temos que

$$\mathcal{X}(x, y) = (a(x - 1) + by) \frac{\partial}{\partial y},$$

e este é o campo linear polinomial do grupo afim solúvel de dimensão 2.

Em notação matricial temos.

$$\mathcal{X}_g = \begin{pmatrix} 0 & a(x - 1) + by \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos o ARS simples definido por \mathcal{X} e $Y_1 = \alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha x & \beta x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Afim de que \mathcal{X} e Y_1 sejam linearmente independentes sobre algum subconjunto, a constante α deve ser não nula.

Neste caso temos $\Delta = \text{span}\{Y_1\}$, e $DY_1 = a\alpha Y + b\beta Y$, donde $DY_1 = (a\alpha + b\beta)Y$.

Com isso e pelo fato de que Δ é uma subálgebra (pois tem dimensão um), a condição do posto de Lie é equivalente a $a\alpha + b\beta \neq 0$, pois se $a\alpha + b\beta = 0$ teríamos $D(\Delta) \subset \Delta$, contradizendo a condição do posto de Lie.

Como $x > 0$ e $\alpha \neq 0$, a primeira componente de Y_1 , nunca se anula, e portanto

$$\mathcal{Z} = \{g \in G; \mathcal{X}_g = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; a(x - 1) + by = 0\}.$$

Logo \mathcal{Z} é o conjunto de singularidades do campo linear \mathcal{X} e pela Proposição 2.3.5, \mathcal{Z} é um subgrupo de Lie fechado de G .

O acima está de acordo com o Teorema 2.3.3, pois sendo $Aff_+(2)$ solúvel, \mathcal{Z} deve ser subgrupo.

3.3 O grupo de Heisenberg

Seja G o grupo de Lie simplesmente conexo de Heisenberg de dimensão três

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sua álgebra de Lie \mathfrak{g} é a álgebra gerada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $[X, Y] = XY - YX = Z$ e os outros colchetes se anulam.

Como campos vetoriais invariantes à esquerda podem ser escritos naturalmente em coordenadas como:

$$X_g = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_g = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z_g = \frac{\partial}{\partial z},$$

onde $g = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, é identificado com (x, y, z) .

Vamos calcular a matriz da derivação $D : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ associada ao campo linear \mathcal{X} . Ponhamos

$$D = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix},$$

então

$$DX = aX + bY + cZ$$

$$DY = dX + eY + fZ$$

$$DZ = gX + hY + iZ, \tag{3.11}$$

como D é derivação segue que

$$\begin{aligned} DZ &= D[X, Y] \\ &= [DX, Y] + [X, DY] \\ &= [aX + bY + cZ, Y] + [X, dX + eY + fZ] \\ &= [aX, Y] + [cZ, Y] + [X, eY] + [X, fZ] \\ &= aZ + eZ \\ &= (a + e)Z, \end{aligned}$$

assim

$$DZ = (a + e)Z, \quad (3.12)$$

igualando a equação 3.11 e 3.12 resulta $g = h = 0$ e $a + e = i$, logo obtemos a matriz

$$D = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a + e \end{pmatrix}.$$

Agora vamos a calcular o campo linear.

Cada derivação D está associado um único campo linear \mathcal{X} dado por

$$\mathcal{X}(g) = f_1(g) \frac{\partial}{\partial x} + f_2(g) \frac{\partial}{\partial y} + f_3(g) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Como no exemplo anterior denotemos por Z_1 , Z_2 e Z_3 os campos invariantes à esquerda tal que $Z_1(1, 0) = DX$, $Z_2(1, 0) = DY$ e $Z_3(1, 0) = DZ$. Logo

$$\begin{aligned} Z_1(g) &= -[\mathcal{X}, X]_g \\ &= -\left[f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ &= -\left[f_1 \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] - \left[f_2 \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right] - \left[f_3 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ &= -\left(f_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) - \left(f_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad - \left(f_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ Z_2(g) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + x \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + x \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - f_1 + x \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \\ Z_3(g) &= \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Note que das expressões iniciais para DX , DY e DZ substituindo X_g , Y_g e Z_g obtemos

$$\begin{aligned} (DX)_g &= a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + (bx + c) \frac{\partial}{\partial z}, \\ (DY)_g &= d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + (ex + f) \frac{\partial}{\partial z}, \\ (DZ)_g &= (a + e) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Logo igualando as equações para $(DX)_g$, $(DY)_g$ e $(DX)_g$ obtemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + x \frac{\partial f_1}{\partial z} = d \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = b \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + x \frac{\partial f_2}{\partial z} = e \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = c + bx \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} - f_1 + x \frac{\partial f_3}{\partial z} = f + ex \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = a + e. \quad (3.21)$$

Das equações 3.13, 3.14, e 3.15 segue que

$$f_1(x, y, z) = ax + dy + k_1.$$

Analogamente, das equações 3.16, 3.17 e 3.18 resulta,

$$f_2(x, y, z) = bx + ey + k_2.$$

Finalmente das equações 3.19, 3.20 e 3.21, temos

$$f_3(x, y, z) = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}dy^2 + cx + (f + k_2)y + (a + e)z + k_3.$$

Como o campo linear satisfaz $\mathcal{X}(e) = 0$, obtemos a forma de um campo linear

$$\mathcal{X}(x, y, z) = (ax + dy) \frac{\partial}{\partial x} + (bx + ey) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}dy^2 + cx + fy + (a + e)z \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Consideremos

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & a + d \end{pmatrix},$$

e o campo vetorial linear associado é dado por

$$\mathcal{X}(g) = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y} + \left(ex + fy + (a + d)z + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Consideremos agora um ARS simples sobre o grupo de Heisenberg, definido por um subespaço Δ de dimensão dois e uma derivação D .

Encontramos dois comportamentos diferentes dependendo se Δ é uma subálgebra ou não.

1. Δ é uma subálgebra:

Pelo Teorema 2.3.3 o locus singular \mathcal{Z} é um subgrupo de G . A menos um automorfismo de \mathfrak{g} podemos assumir que $\Delta = \text{span}\{X, Z\}$.

Com efeito analisemos os seguintes fatos:

- a) As subálgebras $\text{span}\{X, Z\}$ e $\text{span}\{Y, Z\}$ são isomorfas.

Definamos $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ por

$$\rho(X) = Y, \rho(Y) = X \quad \text{e} \quad \rho(Z) = -Z.$$

Verifiquemos que ρ é um isomorfismo. Para isso é suficiente mostrar que ρ preserva o colchete de uma base, sendo Z central e $\rho(Z) = -Z$ é suficiente mostrar que $\rho[X, Y] = [\rho(X), \rho(Y)]$. Disso $\rho[X, Y] = \rho(Z) = -Z$ e $[\rho X, \rho Y] = [Y, X] = -[X, Y] = -Z$.

- b) Toda subálgebra de dimensão dois do grupo nilpotente de Heisenberg contém Z e provemos também que qualquer subálgebra nilpotente de dimensão dois do grupo de Heisenberg é isomorfa a uma subálgebra $\text{span}\{Y, Z\}$ ou $\text{span}\{X, Z\}$. Notemos que toda subálgebra de um grupo nilpotente é nilpotente.

Seja $\mathfrak{h} = \text{span}\{A, B\}$, onde $A = aX + bY + cZ$ e $B = dX + eY + fZ$, agora fazemos uma mudança de base tomando $B' = dA - aB$, temos que se $B' = 0$ então $a = d = 0$ pois $\{A, B\}$ são linearmente independentes, logo \mathfrak{h} é uma subálgebra isomorfa a $\text{span}\{Y, Z\}$.

Se $B' \neq 0$ temos uma nova base $\{A, B'\}$ com $A = aX + bY + cZ$ e $B' = d'Y + e'Z$, obtemos $[A, B'] = ad'Z$ isto implica $ad' = 0$, logo se for $a = 0$, $\mathfrak{h} = \text{span}\{Y, Z\}$, e se for $d' = 0$ então $\mathfrak{h} = \text{span}\{A, Z\}$.

Agora tomando uma nova base de \mathfrak{h} com $A' = a'X + b'Y$ e considerando $\mathfrak{h} = \text{span}\{A', Z\}$, com $a' \neq 0$ e definamos ρ pela seguinte correspondência $\rho(A') = a'X$, se $a' = 0$ então $\mathfrak{h} = \text{span}\{Y, Z\}$, $\rho(Y) = Y$ e $\rho(Z) = Z$ logo $\rho[A', Y] = \rho(a'Z) = a'Z$, e $[\rho(A'), \rho(Y)] = [a'X, Y] = a'Z$, novamente os outros colchetes satisfazem as relações pois Z está no centro de \mathfrak{g} e portanto \mathfrak{h} é isomorfo a $\text{span}\{X, Z\}$.

Voltando ao exemplo, a condição do posto de Lie é satisfeita se, e somente se, $c \neq 0$, pois caso contrário $D(\Delta) \subset \Delta$.

Um caso particular é quando \mathcal{Z} é exatamente o conjunto de singularidades de \mathcal{X} .

Um exemplo é obtido por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mas podem ser encontrados outros exemplos.

Aqui o campo vetorial linear é dado por

$$\mathcal{X}_g = x \frac{\partial}{\partial y} + \left(ex + \frac{1}{2}x^2 \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para calcular \mathcal{Z} temos da definição que $g \in \mathcal{Z}$ se, e somente se $\mathcal{X}_g \in \Delta_g$.

Logo, se $\mathcal{X}_g = m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial z}$, $m, n \in \mathbb{R}$, igualando cada componente obtemos

$$\mathcal{Z} = \{\mathcal{X} = 0\} = \{x = 0\}.$$

2. Δ não é uma subálgebra.

Podemos assumir sem perda de generalidade que $\Delta = \text{span}\{X, Y\}$, pois como no caso anterior estabelecemos uma correspondencia entre as que não são subálgebras.

Então o ARS é bem definido para qualquer derivação diferente de zero. De fato se $D \neq 0$ a condição do posto de Lie é satisfeita.

Para calcular \mathcal{Z} usamos que $g \in \mathcal{Z}$ se, e somente se $\mathcal{X}_g \in \Delta_g$, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_g &= mX_g + nY_g \\ &= m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} + nx \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes temos

$$m = ax + by$$

$$n = cx + dy$$

$$nx = ex + fy + (a + d)z + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2,$$

logo $nx = cx^2 + dxy$, daí $cx^2 + dxy = ex + fy + (a + d)z + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2$ assim

$ex + fy + (a + d)z - \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 - dxy = 0$, portanto

$$\mathcal{Z} = \left\{ ex + fy + (a + d)z - \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 - dxy = 0 \right\} \quad (3.22)$$

e \mathcal{Z} é igual a \mathbb{R}^3 se, e somente se, todas as entradas de D se anulam.

Temos que o locus definido por estas formas quadráticas não precisam ser subgrupos nem mesmo subvariedades.

Mostraremos alguns exemplos particulares.

Exemplo 3.3.1. Consideremos D da seguinte forma:

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na base $\{X, Y, Z\}$ temos $\omega = (0, 0, 1)$ e $D^*\omega = (0, 1, 0)$.

A 1-forma $D^*\omega$ não se anula, e seu núcleo, o qual também é o espaço tangente a \mathcal{Z} na origem, é a subálgebra $\mathfrak{z} = D^{-1}\Delta$,

donde $D^{-1}\Delta = \text{span}\{X, Z\}$. De fato temos pela definição que

$D^{-1}\Delta = \{W \in \mathfrak{g} : DW \in \Delta\}$, seja

$$W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \quad (3.23)$$

logo

$$\begin{aligned} DW &= \alpha DX + \beta DY + \gamma DZ \\ &= \alpha(aX + cY) + \beta(bX - aY + Z) + \gamma 0 \\ &= (\alpha a + \beta b)X + (\alpha c - \beta a)Y + \beta Z, \end{aligned}$$

então $DW \in \Delta$ se $\beta = 0$, daí fazendo $\beta = 0$ em 3.23 temos que $W \in \text{span}\{X, Z\}$, concluindo-se que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{X, Z\}$.

Também este fato não é suficiente para \mathcal{Z} ser um subgrupo, mesmo localmente.

(i) Se $c \neq 0$ a condição (HZ) não é satisfeita.

De fato se $Y \in \mathfrak{z}$ e $Z_1 \in \mathfrak{z}$ então existem $s_1, s_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $Y = s_1X + s_2Z$ e $Z_1 = m_1X + m_2Z$ logo

$$\begin{aligned} DY &= D(s_1X) + D(s_2Z) \\ &= s_1(aX + cY) + 0 \\ &= s_1aX + s_1cY, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_1)DY &= [m_1X + m_2Z, s_1aX + s_1cY] \\ &= [m_1X, s_1cY] \\ &= m_1s_1cZ \notin \Delta = \text{span}\{X, Y\}, \end{aligned}$$

então a condição (HZ) não pode ser satisfeita se $c \neq 0$.

Para calcular \mathcal{Z} neste caso temos que

$$\mathcal{X}(g) = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx - ay)\frac{\partial}{\partial y} + \left(y + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2\right)\frac{\partial}{\partial z} \quad (3.24)$$

comparando os coeficientes com $\mathcal{X}_g = m\frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y} + nx\frac{\partial}{\partial z}$ temos $cx - ay = n$ e $y + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 = nx$, daí $cx^2 - axy = nx = y + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2$, portanto

$$\mathcal{Z} = \left\{y - \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 + axy = 0\right\} \quad (3.25)$$

e isto não é um subgrupo local ao redor da origem. De fato se $g = (x, y, z) \in \mathcal{Z}$ então $-\frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 + axy = -y$ mas se for $g^{-1} \in \mathcal{Z}$ com $g^{-1} = (-x, -y, -z + xy)$, então $-\frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 + axy = y$, logo $-y = y$ que é uma contradição se $y \neq 0$. Portanto \mathcal{Z} não é um subgrupo

- (ii) Se $c = 0$ então \mathfrak{z} satisfaz a condição (HZ). De fato pelo feito acima temos que para Z_1 $\text{ad}(Z_1)DY = m_1s_1cZ = 0 \in \Delta = \text{span}\{X, Y\}$. Logo para todo $m \geq 0$ e $Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{z}$ teríamos que $\text{ad}(Z_1) \cdots \text{ad}(Z_m)DY \in \Delta$.

Pelo Corolario 2.4.4 temos que \mathcal{Z} contém o grupo gerado por \mathfrak{z} , isto é, $Gr(\mathfrak{z})$. Donde $Gr(\mathfrak{z}) = \{y = 0\}$.

De fato como $Gr(\mathfrak{z}) = \langle \exp(\mathfrak{z}) \rangle$ usando $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ e tomando $W_1 \in \mathfrak{z}$ então

$$W_1 = \alpha X + \beta Z, \text{ logo } W_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ notemos que } W_1^n = 0 \text{ para } n \geq 2, \text{ logo}$$

$$\exp(W_1) = \text{Id} + W_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ agora tomando } W_2 \in \mathfrak{z} \text{ com } W_2 = \alpha' X + \beta' Z$$

temos que

$$\exp(W_1) \cdot \exp(W_2) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha' & \beta + \beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

em geral para W_1, \dots, W_m temos que um elemento $V \in Gr(\mathfrak{z})$

com $V = \exp(W_1) \cdots \exp(W_m)$ tem a forma $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e portanto

$$Gr(\mathfrak{z}) = \{g = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

Também fazendo $c = 0$ em 3.25 obtemos

$$\mathcal{Z} = \{y + \frac{1}{2}by^2 + axy = 0\} = \left\{y \left(1 + \frac{1}{2}by + ax\right) = 0\right\},$$

e \mathcal{Z} se reduz a $\{y = 0\}$ com outro plano o qual pode ser interceptado (se $a \neq 0$) ou ser paralelo a este se $a = 0$, (veja Figuras 2a e 2b.)

Considerando o caso $a = 1$.

Nos pontos $g = (-1, 0, z)$, que pertencem a $Gr(\mathfrak{z})$, a função ψ é singular, ou seja, $T_g\psi$ se anula.

De fato lembrando que $T_g\psi = (\omega \circ (D + \text{ad}(F_g))) \circ TL_{g^{-1}}$, além disso para

$g = (-1, 0, z)$ obtemos $g^{-1} = (1, 0, -z)$. Como $a = 0$ e $c = 0$ então $D = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

neste caso como o grupo é de matrizes para $g^{-1} = (1, 0, -z)$ resulta

$$TL_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De 3.24 obtemos $\mathcal{X}(-1, 0, -z) = -\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, conseqüentemente

$$F_g = (TL_{g^{-1}})_g \mathcal{X}_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -X.$$

Agora calculamos $\text{ad}(F_g)$ como segue,

$$\text{ad}(F_g)(X) = -[X, X] = 0 = 0X + 0Y + 0Z$$

$$\text{ad}(F_g)(Y) = -[X, Y] = -Z = 0X + 0Y + (-1)Z$$

$$\text{ad}(F_g)(Z) = 0.$$

Logo $\text{ad}(F_g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, notemos que de

$$D + \text{ad}(F_g) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\omega \circ (D + \text{ad}(F_g)) = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

resulta

$$T_{(-1,0,z)}\psi = (\omega \circ (D + \text{ad}(F_g))) \circ TL_{g^{-1}} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0).$$

Nos pontos $g = \left(-1 - \frac{1}{2}by, y, z\right)$ com $y \neq 0$ temos que a traslações por g de um grupo conexo gerado por \mathfrak{z} , $gGr(\mathfrak{z})$, não esta contido em \mathcal{Z} . De fato tomando

$V \in Gr(\mathfrak{3})$ com $V = \begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ então

$$gV = \begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{1}{2}by & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' - 1 - \frac{1}{2}by & z' + z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e neste caso $a = 1$ então $\mathcal{Z} = \left\{ y \left(1 + \frac{1}{2}by + x \right) = 0 \right\}$, logo de \mathcal{Z} temos que ou $y = 0$ ou $1 + \frac{1}{2}by + x = 0$, mas para este g dado $y \neq 0$ assim substituindo gV na expressão $1 + \frac{1}{2}by + x$ obtemos

$$1 + \frac{1}{2}b(y) + \left(x' - 1 - \frac{1}{2}by \right) = x',$$

e para $x' \neq 0$ temos uma contradição se $gV \in \mathcal{Z}$. Portanto gV não pertence a \mathcal{Z} .

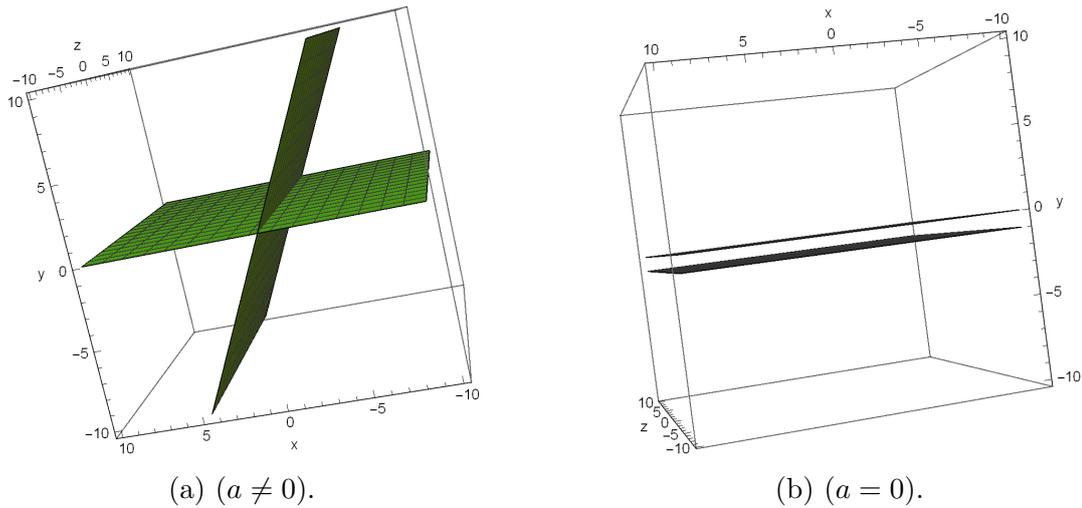


Figura 1 – Exemplo 3.3.1

Exemplo 3.3.2. O caso degenerado

Consideremos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com } b > 0 \text{ e } c < 0. \quad (3.26)$$

Aqui $D^{-1}\Delta = \mathfrak{g}$, pois temos pela definição $D^{-1} = \{W \in \mathfrak{g} : DW \in \Delta\}$, seja $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$, logo

$$\begin{aligned} DW &= \alpha DX + \beta DY + \gamma DZ \\ &= \alpha(cY) + \beta(bY) + 0 \\ &= \alpha cY + \beta bY \in \Delta, \end{aligned}$$

segue que não temos restrições para W , portanto $D^{-1}\Delta = \mathfrak{g}$.

Também a condição (HZ) não é satisfeita. De fato para $Y, Z_1 \in \mathfrak{z} = \mathfrak{g}$ temos que $Y = a_1X + b_1Y + c_1Z$ e $Z_1 = a_2X + b_2Y + c_2Z$, logo

$$\begin{aligned} DY = Y &= a_1DX + b_1DY + c_1DZ \\ &= a_1(cY) + b_1(bX) + c_10 \\ &= a_1cY + b_1bX, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_1)DY &= [a_2X + b_2Y + c_2Z, a_1cY + b_1bX] \\ &= a_2a_1cZ - b_2b_1bZ \\ &= (a_2a_1c - b_2b_1b)Z, \end{aligned}$$

segue que $\text{ad}(Z_1)DY \notin \Delta$ se $c \neq 0$ e $b \neq 0$.

Então de 3.22 e usando 3.26 temos que

$$\mathcal{Z} = \left\{ -\frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 = 0 \right\},$$

logo se $b > 0$ e $c < 0$, tanto como $-\frac{1}{2}cx^2$ e $\frac{1}{2}by^2$ são positivos, assim $x = y = 0$, implicando que $\mathcal{Z} = \{g = (x, y, z) : x = y = 0\}$, portanto \mathcal{Z} é o subgrupo de codimensão dois .

Se b e c são ambos positivos, (ou ambos negativos), então $\mathcal{Z} = \{\sqrt{b}y = \pm\sqrt{c}x\}$ é a união de dois planos secantes.

Se $b \neq 0$ e $c = 0$, então \mathcal{Z} é o subgrupo de codimensão 1, $\mathcal{Z} = \{g = (x, y, z) : y = 0\}$.

Exemplo 3.3.3. O caso tangencial

Seja

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a+d \end{pmatrix} \quad \text{com } a+d \neq 0.$$

As 1-formas $\omega = (0, 0, 1)$ e $D^*\omega = (0, 0, a+d)$ definem o mesmo subespaço $\Delta = D^{-1}\Delta$ de \mathfrak{g} . Provemos que $\Delta = D^{-1}\Delta$. De fato, temos pela definição que $D^{-1}\Delta = \{W \in \mathfrak{g} : DW \in \Delta\}$. Logo para $W = a_1X + b_1Y + c_1Z$ temos que $DW = a_1(aX + cY) + b_1(bX + dY) + c_1(a+d)Z$, então $DW \in \Delta$ se $c_1(a+d) = 0$ mas $a+d \neq 0$ implicando que $c_1 = 0$, segue que $W = a_1X + b_1Y$ assim $W \in \Delta$, e portanto $\Delta = D^{-1}\Delta$.

Como $T_e\psi = D^*\omega$ não se anula, o locus singular é uma subvariedade numa vizinhança de e , e e é um ponto tangencial, isto é, $\Delta = T_e\mathcal{Z}$.

Ao contrário do caso genérico, (veja [7]), os pontos tangenciais não necessariamente são isolados.

Consideremos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Logo de 3.22 e usando 3.27 temos que $\mathcal{Z} = \{z - x^2 - xy = 0\}$, assim O locus singular é

$$\mathcal{Z} = \{z = x^2 + xy\},$$

e Δ é tangente a \mathcal{Z} ao redor da parábola $\{z = -x^2\}$ contida no plano $\{y = -2x\}$.

Podemos notar pelos exemplos acima que o número de componentes conexas de $G \setminus \mathcal{Z}$ varia de 1 a 4.

3.4 O grupo Linear especial $SL(2; \mathbb{R})$

Exemplo 3.4.1. Seja $G = SL(2; \mathbb{R})$ o grupo de Lie de matrizes de orden 2 com determinante 1. Sua álgebra de lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ é o conjunto de matrizes com traço zero.

A base usual de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ é dada por:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e satisfaz

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Considerando um ARS simples definido por $\Delta = \text{span}\{H, X\}$ e a derivação $D = -\text{ad}(Y)$. temos que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{X, Y\}$ não é uma subálgebra.

Provaremos que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{X, Y\}$.

Com efeito temos por definição que $D^{-1}\Delta = \{W \in \mathfrak{g} : DW \in \Delta\}$ e seja $W = a_1H + b_1X + c_1Y$ logo

$$\begin{aligned} DW &= a_1DH + b_1DX + c_1DY \\ &= a_1(-\text{ad}(Y)H) + b_1(-\text{ad}(Y)X) + c_1(-\text{ad}(Y)Y) \\ &= a_1(-[Y, H]) + b_1(-[Y, X]) + c_1(-[Y, Y]) \\ &= a_1(-2Y) + b_1(H), \end{aligned}$$

logo $DW \in \Delta$ se $a_1 = 0$, daí $W = b_1X + c_1Y$ consequentemente $D^{-1}\Delta = \text{span}\{X, Y\}$.

Segue que o locus singular não é um subgrupo de codimensão um de $SL(2; \mathbb{R})$ apesar de Δ ser uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$. Isto mostra que o Teorema 2.3.3 não se aplica em grupos gerais.

O campo vetorial associado a $D = -\text{ad}(Y)$ é $\mathcal{X}_g = gY - Yg = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$, pois D é

interna, (veja 1.4).

Os vetores \mathcal{X}_g, H_g, X_g são linearmente dependentes se, e somente se, $a = \pm 1$.

Com efeito, para $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$H_g = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \text{ e } X_g = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

logo fazendo as seguintes identificações

$$\mathcal{X}_g = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d-a \\ -b \end{pmatrix}, H_g = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \\ -d \end{pmatrix} \text{ e } X_g = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ d-a & c & 0 \\ -b & -d & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ d-a & c & 0 \\ 0 & -d+a & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & a(d-a) - bc & 0 \\ 0 & a-d & c \end{pmatrix} \\ \approx \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & a(d-a) - bc & 0 \\ 0 & 0 & a(a-d) + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix},$$

onde a igualdade da última matriz é satisfeita pois $a(a-d) + bc = a^2 - (ad - bc) = a^2 - 1$.

Conseqüentemente os vetores \mathcal{X}_g, H_g, X_g são linearmente dependentes se, e somente se, $a^2 - 1 = 0$, ou seja, $a = \pm 1$.

Em consequência

$$\mathcal{Z} = \{a = \pm 1\}.$$

Assim o locus singular \mathcal{Z} é uma subvariedade de $SL(2; \mathbb{R})$, mas não é um subgrupo nem um conjunto conexo.

Observamos que o ARS é bem definido, pois $\mathcal{Z} \neq G$ e para que a condição do posto de Lie seja satisfeita, precisamos verificar que $D\Delta \not\subseteq \Delta$.

Com efeito se $W \in \Delta$ então $W = \alpha H + \beta X$ logo

$$\begin{aligned} DW &= \alpha DH + \beta DX \\ &= \alpha (-\text{ad}(Y)H) + \beta (-\text{ad}(Y)X) \\ &= \alpha (-[Y, H]) + \beta (-[Y, X]) \\ &= \alpha (-2Y) + \beta (H), \end{aligned}$$

segue que $DW \notin \Delta$. Portanto $D\Delta \not\subseteq \Delta$.

Exemplo 3.4.2. Outro exemplo pode ser obtido alternando os papéis de Δ e $D^{-1}\Delta$. Mais precisamente seja $\Delta = \text{span}\{X, Y\}$ que não é uma subálgebra e $D = -\text{ad}(X)$.

Segue que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{H, X\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ que satisfaz a condição (HZ) , logo o locus singular contém o grupo conexo gerado por $D^{-1}\Delta$.

Provaremos que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{H, X\}$.

De fato, temos pela definição que $D^{-1}\Delta = \{W \in \mathfrak{g} : DW \in \Delta\}$, seja $W = \alpha X + \beta Y + \gamma H$, logo

$$\begin{aligned} DW &= \alpha DX + \beta DY + \gamma DH \\ &= \alpha(-\text{ad}(X)X) + \beta(-\text{ad}(X)Y) + \gamma(-\text{ad}(X)H) \\ &= \alpha 0 + \beta(-H) + \gamma(2X) \\ &= -\beta H + 2\beta X, \end{aligned}$$

então $DW \in \Delta$ se $\beta = 0$ logo $W = \alpha X + \gamma H$ daí que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{H, X\}$

Agora provaremos que $D^{-1}\Delta = \text{span}\{H, X\}$ satisfaz a condição (HZ) .

De fato, sejam $Y_1, Z_1 \in D^{-1}\Delta$ logo $Y_1 = a_1 H + b_1 X$ e $Z_1 = a_2 H + b_2 X$, então

$$\begin{aligned} DY_1 &= a_1(-\text{ad}(X)H) + b_1(-\text{ad}(X)X) \\ &= a_1(2X), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_1)DY_1 &= [a_2 H + b_2 X, 2a_1 X] \\ &= [a_2 H, 2a_1 X] \\ &= 2a_1 a_2 (2X) \\ &= 4a_1 a_2 X \in D^{-1}\Delta, \end{aligned}$$

note que se escolhermos outro $Z_2 \in D^{-1}\Delta$ e calculamos $\text{ad}(Z_2)\text{ad}(Z_1)DY_1$ obtemos um elemento da forma $a'X$ o qual pertence a $D^{-1}\Delta$, e assim por diante, portanto a condição (HZ) é satisfeita.

O campo vetorial associado a $D = -\text{ad}(X)$ é $\mathcal{X}_g = gX - Xg = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$, e os vetores \mathcal{X}_g, Y_g e X_g são linearmente dependentes se, e somente se $cd = 0$.

Em consequência o locus singular é dado por $\mathcal{Z} = \{cd = 0\}$, que tem três componentes conexas:

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}; a > 0 \right\}, \quad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}; a < 0 \right\}, \quad C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; bc = -1 \right\}.$$

De fato, observemos que

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ com } ad - cb = 1 \text{ e } cd = 0, \right\}$$

como $cd = 0$ tem-se que $c = 0$ ou $d = 0$, se $d = 0$, de $ad - cb = 1$ segue que $cb = -1$ assim temos elementos da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $cb = -1$, agora se $c = 0$ então de $ad - cb = 1$

obtem-se que $ad = 1$, assim tomando $d = \frac{1}{a}$ com $a \neq 0$ obtemos as outras componentes de \mathcal{Z} .

Além disso, C_1 é um subgrupo conexo, $C_1 \cup C_2$ não é um subconjunto conexo, e $\mathcal{Z} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ não é um subgrupo de $SL(2; \mathbb{R})$.

4 Equações Hamiltonianas

O propósito desta seção é estabelecer as equações Hamiltonianas para o Princípio do Máximo de Pontriagyn (PMP) aplicadas a ARS sobre grupos de Lie. (veja [3, 19]). Seguimos as mesmas linhas como no caso invariante, mas aqui o Hamiltoniano depende do ponto g o que implica mais complicações.

4.1 A estrutura canônica simplética de T^*G

O fibrado cotangente T^*G que é uma variedade simplética e é identificado com $\mathfrak{g}^* \times G$, mediante a seguinte correspondencia.

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g}^* \times G &\rightarrow T^*G \\ (\lambda, g) &\longrightarrow \bar{\lambda}_g = \lambda \circ TL_{g^{-1}} \in T^*G. \end{aligned}$$

Assim a igualdade $\langle \bar{\lambda}_g, Y_g \rangle = \langle \lambda, Y \rangle$ é válida para todo $Y \in \mathfrak{g}$, pois

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_g, Y_g \rangle &= (\lambda \circ TL_{g^{-1}})(TL_g Y) \\ &= \lambda(Y) \\ &= \langle \lambda, Y \rangle. \end{aligned}$$

A projeção de T^*G a G , $\pi : T^*G \mapsto G$ mapea um covetor $\lambda \in T_q^*G$ ao ponto base $\pi(\lambda) = q \in G$. A 1-forma tautológica $s \in \Lambda^1(T^*G) = T^*G$ (ou a 1-forma de Liouville), é definida como segue: Tome qualquer covetor $\lambda \in T^*G$ e qualquer vetor tangente $\xi \in T_\lambda(T^*G)$, então

$$\langle s_\lambda, \xi \rangle = \langle \lambda, (d\pi)_\lambda \xi \rangle,$$

isto é $s_\lambda = \lambda \circ (d\pi)_\lambda$.

Podemos definir uma forma simplética $\sigma \in \Lambda^2(T^*G)$ como a diferencial $\sigma = ds$.

Qualquer função $h \in C^\infty(T^*G)$ é chamada Hamiltoniano. O campo vetorial Hamiltoniano correspondente à função Hamiltoniana h é definido como um campo vetorial $\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$ que satisfaz

$$dh = -i_{\vec{h}}\sigma = -i_{\vec{h}}ds \quad \text{onde} \quad i_V\sigma = \sigma(V, \cdot).$$

Agora vamos a exprimir a 2-forma simplética e o Hamiltoniano para a trivialização do fibrado cotangente dado por $\mathfrak{g}^* \times G$. Para a 1-forma tautológica $s \in \Lambda^1(T^*G)$ seu pullback por ϕ é a 1-forma ϕ^*s definida sobre $\mathfrak{g}^* \times G$ como

$$\langle (\phi^*s)_{(\lambda, g)}, (\xi, X_g) \rangle = \langle \lambda, X \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad (4.1)$$

onde $(\lambda, g) \in \mathfrak{g}^* \times G$ e o vetor tangente $(\xi, X_g) \in T_{(\lambda, g)}(\mathfrak{g}^* \times G) \equiv \mathfrak{g}^* \times T_g G$, e $T_{(\lambda, g)}(\mathfrak{g}^* \times G)$ é o espaço tangente de $\mathfrak{g}^* \times G$ no ponto (λ, g) identificado com $\mathfrak{g}^* \times T_g G$. Notemos que 4.1 segue do seguinte; da definição de ϕ temos $(\pi \circ \phi)(\lambda, g) = \pi(\bar{\lambda}_g) = g$ então $\pi \circ \phi(\lambda + s\xi, X_s(g)) = X_s(g)$, lembrando que $X_s(g) = ge^{tX}$ se X for campo invariante à esquerda, logo

$$\begin{aligned} \langle (\phi^* s)_{(\lambda, g)}, (\xi, X_g) \rangle &= s_{\phi(\lambda, g)} \left((d\phi)_{(\lambda, g)} (\xi, X_g) \right) \\ &= \bar{\lambda}_g \left((d\pi)_{\bar{\lambda}_g} (d\phi)_{(\lambda, g)} (\xi, X_g) \right) \\ &= \bar{\lambda}_g \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \pi \circ \phi(\lambda + s\xi, X_s(g)) \right) \\ &= \bar{\lambda}_g \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X_s(g) \right) \\ &= \bar{\lambda}_g (X_g) \\ &= \lambda(X) \\ &= \langle \lambda, X \rangle. \end{aligned}$$

A 2-forma simplética $d(\phi^* s) = \phi^* ds \in \Lambda^2(\mathfrak{g}^* \times G)$ é caracterizada por

$$\phi^* ds_{(\lambda, g)}((\xi, X_g), (\eta, Y_g)) = \langle \xi, Y \rangle - \langle \eta, X \rangle - \langle \lambda, [X, Y] \rangle.$$

De fato usando a seguinte fórmula para a derivada de uma 1-forma

$$d\omega(X, Y) = X\langle \omega, Y \rangle - Y\langle \omega, X \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle.$$

Onde $X\langle \omega, Y \rangle = X\omega(Y)$ é a derivada de Lie de funções. Considerando f dada por $f(p) = \omega_p(Y(p))$, temos $(\mathcal{L}_X f)(p) = (df)_p X(p)$ e como $d(\phi^* s) = \phi^* ds$ obtemos

$$\begin{aligned} d\phi^* s_{(\lambda, g)}((\xi, X_g), (\eta, Y_g)) &= (\xi, X_g)\langle \phi^* s_{(\lambda, g)}, (\eta, Y_g) \rangle - (\eta, Y_g)\langle \phi^* s_{(\lambda, g)}, (\xi, X_g) \rangle \\ &\quad - \langle \phi^* s_{(\lambda, g)}, [(\xi, X_g), (\eta, Y_g)] \rangle \\ &\text{de (4.1)} = (\xi, X_g)\langle \lambda, Y \rangle - (\eta, Y_g)\langle \lambda, X \rangle - \langle \lambda, [X, Y] \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, se $f(\lambda, g) = \langle \lambda, Y \rangle$, temos que

$$(\xi, X_g)\langle \lambda, Y \rangle = (df)_{(\lambda, g)}(\xi, X_g) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{(\lambda, g)}, \xi \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial g} \right)_{(\lambda, g)}, X_g \right\rangle.$$

Notemos que

$$\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial g} \right)_{(\lambda, g)}, X_g \right\rangle = 0$$

pois f não depende de g e, para g fixo, a aplicação $\lambda \rightarrow f(\lambda, g)$ é linear e portanto

$$\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{(\lambda, g)}, \xi \right\rangle = f(\xi, g) = \langle \xi, Y \rangle.$$

Assim,

$$\langle \xi, X_g \rangle \langle \lambda, Y \rangle = \langle \xi, Y \rangle.$$

Analogamente

$$\langle \eta, Y_g \rangle \langle \lambda, X \rangle = \langle \eta, X \rangle$$

e portanto

$$d\phi^* s_{(\lambda, g)}((\xi, X_g), (\eta, Y_g)) = \langle \xi, Y \rangle - \langle \eta, X \rangle - \langle \lambda, [X, Y] \rangle.$$

Definimos o campo vetorial Hamiltoniano em $\text{Vec}(\mathfrak{g}^* \times G)$ como segue: seja $H = h \circ \phi$, assim $H : \mathfrak{g}^* \times G \mapsto \mathbb{R}$ e $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^* \times G)$ é um Hamiltoniano. Logo o campo vetorial Hamiltoniano associado a H é o campo $\vec{H} \in \text{Vec}(\mathfrak{g}^* \times G)$ definido por $\vec{h} = \phi_* \vec{H}$ e consequentemente temos a seguinte relação

$$dH = -i_{\vec{H}} \phi^* ds.$$

Observamos que todo Hamiltoniano é dessa forma, pois ϕ é difeomorfismo.

4.2 Cálculo dos campos vetoriais Hamiltonianos

Seja H um Hamiltoniano sobre $\mathfrak{g}^* \times G$, e \vec{H} o campo vetorial Hamiltoniano associado no ponto (λ, g) , consideremos \vec{H} dado por $\vec{H}_{(\lambda, g)} = (\xi, X)$, onde $\xi = \xi(\lambda, g) \in \mathfrak{g}^*$, $X = X(\lambda, g)$ logo para todo $(\eta, Y_g) \in \mathfrak{g}^* \times T_g G$ a diferencial de H é dada por

$$(dH)_{(\lambda, g)}(\eta, Y_g) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g), \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial g}(\lambda, g), Y_g \right\rangle. \quad (4.2)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (dH)_{(\lambda, g)}(\eta, Y_g) &= -i_{\vec{H}}(\phi^* ds)_{(\lambda, g)}(\eta, Y_g) \\ &= -(\phi^* \sigma)_{(\lambda, g)}((\xi, X)(\eta, Y_g)) \\ &= -\langle \xi, Y \rangle + \langle \eta, TL_{g^{-1}}X \rangle + \langle \lambda, [TL_{g^{-1}}X, Y] \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Obtendo-se as seguintes relações para dH

1. Fazendo $Y = 0$ em 4.2 e 4.3 e igualando, obtemos $\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g), \eta \right\rangle = \langle \eta, TL_{g^{-1}}X \rangle$ portanto $TL_{g^{-1}}X = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) \in (\mathfrak{g}^*)^* \equiv \mathfrak{g}$, (veja a observação A.1.1)

2. Fazendo $\eta = 0$ em 4.2 e 4.3, e igualando, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial g}, Y_g \right\rangle = -\langle \xi, Y \rangle + \langle \lambda, [TL_{g^{-1}}X, Y] \rangle, \quad (4.4)$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle \xi, Y \rangle &= \langle \lambda, [TL_{g^{-1}}X, Y] \rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial g}, Y_g \right\rangle \\
&= \langle \lambda, \text{ad}(TL_{g^{-1}}X)(Y) \rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial g}, TL_g Y \right\rangle \\
&= \langle (\text{ad}(TL_{g^{-1}}X))^* \lambda, Y \rangle - \left\langle (TL_g)^* \frac{\partial H}{\partial g}, Y \right\rangle \\
&= \left\langle (\text{ad}(TL_{g^{-1}}X))^* \lambda - (TL_g)^* \frac{\partial H}{\partial g}, Y \right\rangle
\end{aligned}$$

obtemdo

$$\xi = (\text{ad}((TL_{g^{-1}}X)))^* \lambda - (TL_g)^* \frac{\partial H}{\partial g}. \quad (4.5)$$

Agora escrevendo o campo \vec{H} como

$$\vec{H}_{(\lambda, g)} = (\xi, X) = \xi \frac{\partial}{\partial \lambda} + X \frac{\partial}{\partial g},$$

e substituindo os valores de ξ e X temos que

$$\vec{H}_{(\lambda, g)} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) \right)_g \frac{\partial}{\partial g} + \left(\left(\text{ad} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) \right) \right)^* \lambda - (TL_g)^* \frac{\partial H}{\partial g} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

Onde $\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) \right)_g = TL_g \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g)$

4.3 Campos vetoriais lineares e invariantes à esquerda

Como o Hamiltoniano associado ao campo vetorial invariante à esquerda Y dado por $H(\lambda, g) = \langle \lambda, Y \rangle$, não depende de g , temos que $\frac{\partial H}{\partial g}(\lambda, g) = 0$. Além disso para g fixo a aplicação $\lambda \rightarrow H(\lambda, g)$ é linear e portanto $\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g), \zeta \right\rangle = H(\zeta, g) = \langle \zeta, Y \rangle$, com $\zeta \in \mathfrak{g}^*$, donde $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) = Y$. Assim $\xi = (\text{ad}(Y))^* \lambda$, e o campo vetorial Hamiltoniano é dado por

$$\vec{H}_{(\lambda, g)} = (\text{ad}(Y))^* \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + Y_g \frac{\partial}{\partial g}.$$

A equação Hamiltoniana correspondente é então

$$\begin{cases} \dot{g} &= Y_g \\ \dot{\lambda} &= (\text{ad}(Y))^* \lambda. \end{cases}$$

Considerando um campo vetorial linear \mathcal{X} , com a derivação associada $D = -\text{ad}(\mathcal{X})$, definimos o Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
H(\lambda, g) &= \langle \lambda_g, \mathcal{X}_g \rangle \\
&= \langle \lambda, TL_{g^{-1}} \mathcal{X}_g \rangle \\
&= \langle \lambda, F_g \rangle.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.2.2 temos que para $\psi = \langle \omega, F_g \rangle$ se tem $T_g \psi Y_g = \langle \omega, DY + \text{ad}(F_g)Y \rangle$. Considerando $H(\lambda, g) = \langle \lambda, F_g \rangle$ ao invés de $\psi = \langle \omega, F_g \rangle$, temos para todo $Y \in \mathfrak{g}$ que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial g} \right)_g Y_g &= \langle \lambda, DY + \text{ad}(F_g)Y \rangle, \\ &= \langle \lambda, (D + \text{ad}(F_g))Y \rangle, \\ &= \langle (D + \text{ad}(F_g))^* \lambda, Y \rangle. \end{aligned}$$

Então

$$\left(\frac{\partial H}{\partial g} \right)_g (\lambda, g) = ((D + \text{ad}(F_g))^* \lambda) T L_{g^{-1}}.$$

Por outro lado temos que $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) = F_g$, logo

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\left(\text{ad} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g) \right) \right)^* \lambda - (T L_g)^* \frac{\partial H}{\partial g}(\lambda, g) \right) \\ &= (\text{ad}(F_g))^* \lambda - ((D + \text{ad}(F_g))^* \lambda) T L_{g^{-1}} T L_g \\ &= (\text{ad}(F_g))^* \lambda - (D + \text{ad}(F_g))^* \lambda \\ &= -D^* \lambda. \end{aligned}$$

Portanto as equações Hamiltonianas de $H(\lambda, g) = \langle \lambda, F_g \rangle$ são

$$\begin{cases} \dot{g} = \mathcal{X}_g \\ \dot{\lambda} = -D^* \lambda. \end{cases} \quad (4.6)$$

Observação 4.3.1. Notemos que as equações dadas em 4.6 são diferentes as calculadas no artigo [5]. Em [5] os autores não utilizam o termo $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, g)$ na expressão do campo vetorial Hamiltoniano.

Observação 4.3.2. (O caso interno):

Se a derivação é interna, ou seja $D = \text{ad}(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$, a segunda equação de 4.6 se escreve como

$$\dot{\lambda} = -(\text{ad}(X))^* \lambda,$$

e as equações Hamiltonianas nesse caso são

$$\begin{cases} \dot{g} = \mathcal{X}_g \\ \dot{\lambda} = -(\text{ad}(X))^* \lambda. \end{cases}$$

4.4 Equação Hamiltoniana para um ARS simples

Para um ARS definido por $\{\mathcal{X}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$, consideremos o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\nu(\lambda, g, v, u_1, \dots, u_{n-1}) = \left\langle \lambda, v\mathcal{X} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j \right\rangle - \frac{1}{2}\nu \left(v^2 + \sum_{j=1}^{n-1} u_j^2 \right) \quad (4.7)$$

Notemos que $\left\langle \lambda, v\mathcal{X} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j \right\rangle = v\langle \lambda, \mathcal{X} \rangle + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle \lambda, Y_j \rangle$ e, como no cálculo do campo vetorial Hamiltoniano precisamos das derivadas do H_ν com respeito a λ e g , o termo $\left\langle \lambda, v\mathcal{X} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j \right\rangle$ é expresso como soma de termos que envolvem um campo linear e campos invariantes. Além disso, como o campo vetorial Hamiltoniano é linear com respeito as funções avaliadas no campo, temos usando os cálculos acima para campos lineares e invariantes resulta que as equações associadas são

$$\begin{cases} \dot{g} = v\mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j(g) \\ \dot{\lambda} = -vD^*\lambda + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \text{ad}(Y_j)^*\lambda. \end{cases} \quad (4.8)$$

Em particular as equações de extremal normal são obtidas pela aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, (veja ([1, 3, 15, 18]),) com $\nu = 1$.

Iremos agora a calcular os pontos críticos de \mathcal{H}_1 para fazer a maximização. Como

$$\mathcal{H}_1(\lambda, g, v, u_1, \dots, u_{n-1}) = v\langle \lambda, \mathcal{X} \rangle + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle \lambda, Y_j \rangle - \frac{1}{2} \left(v^2 + \sum_{j=1}^{n-1} u_j^2 \right), \quad (4.9)$$

temos $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v} = \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle - v$ e igualando a zero resulta $v = \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle$. por outro lado, como $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial u_j} = \langle \lambda, Y_j \rangle - u_j$, igualando a zero tem-se $u_j = \langle \lambda, Y_j \rangle$.

Assim no ponto $(v, u_j) = (\langle \lambda, \mathcal{X} \rangle, \langle \lambda, Y_j \rangle)$ temos um máximo relativo. De fato usando o teste das derivadas parciais de segunda ordem temos que $(\mathcal{H}_1)_{vv} = -1$, $(\mathcal{H}_1)_{u_j u_j} = -1$, $(\mathcal{H}_1)_{u_j v} = 0$ o que implica $(\mathcal{H}_1)_{vv} (\mathcal{H}_1)_{u_j u_j} - (\mathcal{H}_1)_{u_j v}^2 = 1 > 0$ e como $(\mathcal{H}_1)_{vv} = -1 < 0$, o teste das derivadas parciais de segunda ordem garante a existência de um máximo relativo em $v = \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle$ e $u_j = \langle \lambda, Y_j \rangle$.

Para calcular o Hamiltoniano maximizado substituímos os valores de $v = \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle$ e $u_j = \langle \lambda, Y_j \rangle$ em 4.9 obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\lambda, g) &= \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle + \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle \langle \lambda, Y_j \rangle - \frac{1}{2} \left(\langle \lambda, \mathcal{X} \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle^2 \right) \\ &= \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle^2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente o Hamiltoniano maximizado é dado por

$$H_1(\lambda, g) = \frac{1}{2} \langle \lambda, \mathcal{X} \rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \lambda, Y_j \rangle^2.$$

O caso de extremal anormal será tratado na seção 5.

Observação 4.4.1. Se G é semisimples então todas as derivações são internas donde $D = \text{ad}(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$. Logo a segunda equação em 4.8 torna-se

$$\dot{\lambda} = \text{ad} \left(-vX + \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j \right)^* \lambda$$

5 Anormais extremais

Seja $(\lambda(t), g(t))$, $t \in [0, T]$ um anormal extremal. Temos o seguinte

- (i) $\lambda(t)$ não se anula,
- (ii) $\langle \lambda(t), Y_i \rangle = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$,
- (iii) $\langle \lambda(t) \circ TL_{g(t)^{-1}}, \mathcal{X}_{g(t)} \rangle = \langle \lambda(t), F_{g(t)} \rangle = 0$.

Aqui usamos em (ii) e (iii) os Hamiltonianos $H(\lambda, g) = \langle \lambda, Y \rangle$ e $H(\lambda, g) = \langle \lambda, F_g \rangle$ respectivamente e consideramos o tempo livre no PMP.

Como a 1-forma $\lambda(t)$ não é zero, mas se anula sobre os Y_1, \dots, Y_{n-1} , temos que se $\eta \in \Delta$ então $\langle \lambda(t), \eta \rangle = 0$. Como $\Delta = \ker \omega$ obtemos

$$\eta \in \ker \omega \Rightarrow \eta \in \ker \lambda(t),$$

ou seja, $\ker \omega = \ker \lambda(t)$. Assim $\lambda(t)$ é proporcional a ω e como $\lambda(t)$ é uma curva lipschitziana temos

$$\lambda(t) = p(t)\omega \tag{5.1}$$

onde $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua e não nula. Notemos que por (iii) $g(t)$ pertence aos zeros da função $\tilde{\psi}(g) = \langle \lambda(t), F_g \rangle$. Vejamos que $g(t)$ pertence aos zeros da função $\psi(g) = \langle \omega, F_g \rangle$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda(t), F_{g(t)} \rangle \\ &= \langle p(t)\omega, F_{g(t)} \rangle \\ &= p(t)\langle \omega, F_{g(t)} \rangle \end{aligned}$$

e como p não se anula, temos $\langle \omega, F_{g(t)} \rangle = 0$. Assim $g(t)$ pertence aos zeros da função $\psi(g) = \langle \omega, F_g \rangle$ e por definição $g(t) \in \mathcal{Z}$ para todo $t \in [0, T]$.

Consequentemente o campo vetorial linear \mathcal{X} é combinação linear dos Y_1, \dots, Y_{n-1} ao longo da curva $g(t)$ e podemos assumir que o controle v se anula como no PMP. Isto pode modificar a otimalidade do controle associado, mas não a geometria da curva.

Como $v = 0$, as equações Hamiltonianas vem dadas por:

$$\begin{cases} \dot{g} &= \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j \\ \dot{\lambda} &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j \operatorname{ad}(Y_j) \right)^* \lambda. \end{cases} \tag{5.2}$$

Substituindo 5.1 na segunda equação de 5.2 resulta que a equação diferencial ordinária satisfeita por λ torna-se

$$\dot{p}(t)\omega = p(t) \left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j \operatorname{ad}(Y_j) \right)^* \omega. \quad (5.3)$$

Essa igualdade entre 1-formas é equivalente à existência, para $t \in ([0, T])$ q.t.p, de um numero real $c(t)$ tal que

1. $\left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j \operatorname{ad}(Y_j) \right)^* \omega = c(t)\omega,$
2. $\dot{p}(t) = c(t)p(t).$

O anterior decorre do seguinte: seja $Z \in \mathfrak{g}$ e considere $Z = \sum_{j=1}^n c_j Y_j$, com $c_j \in \mathbb{R}$. Escrevendo $W = \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j$ a equação 5.3 se exprime como

$$\dot{p}(t)\omega = p(t)\omega \operatorname{ad}(W). \quad (5.4)$$

Além disso, $\operatorname{ad}(W)Y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} Y_i$ e temos o seguinte

$$\begin{aligned} \dot{p}(t)\omega(Z) &= \dot{p}(t)\omega c_n Y_n \\ &= \dot{p}(t)c_n \omega Y_n \\ &= \dot{p}(t)c_n, \end{aligned}$$

assim

$$\dot{p}(t)\omega(Z) = \dot{p}(t)c_n. \quad (5.5)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} p(t)\omega(\operatorname{ad}(W)Z) &= p(t)\omega \left(\sum_{j=1}^n c_j \operatorname{ad}(W)Y_j \right) \\ &= p(t)\omega \left(\sum_{j=1, i=1}^n c_j \alpha_{ij} Y_i \right) \\ &= p(t) \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{nj}. \end{aligned}$$

Por 5.3 temos que se $c_n = 0$ então $\sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_{nj} = 0$, pois $p(t) \neq 0$. Assim

$$p(t)\omega(\operatorname{ad}(W)Z) = p(t)c_n \alpha_{nn} = p(t)c_n c(t), \quad \text{com } c(t) = \alpha_{nn}. \quad (5.6)$$

Igualando 5.5 e 5.6 resulta $\dot{p}(t)c_n = c(t)p(t)c_n$ donde $\dot{p}(t) = c(t)p(t)$.

Também, obtemos dos cálculos anteriores que

$$\text{ad}(W)^* \omega(Z) = c(t)c_n = c(t)\omega(Z),$$

e portanto $\text{ad}(W)^* \omega = c(t)\omega$.

Seja $Y_n \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle \omega, Y_n \rangle = \omega(Y_n) = 1$, e seja $Y \in \Delta$. Como $Y \in \Delta$ escrevemos s.p.g

$$Y = \sum_{j=1}^{n-1} u_j Y_j. \text{ Logo } \text{ad}(Y) = \sum_{j=1}^{n-1} u_j \text{ad}(Y_j) \text{ e a equação 2 torna-se } \text{ad}(Y)^* \omega = c\omega.$$

Temos então o seguinte

$$\begin{aligned} \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \text{ad}(Y)^* \omega = c\omega &\iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{g} \langle \omega, \text{ad}(Y)X \rangle = c\langle \omega, X \rangle, \\ &\iff \langle \omega, \text{ad}(Y)Y_i \rangle = c\langle \omega, Y_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \text{ e} \\ &\langle \omega, \text{ad}(Y)Y_n \rangle = c\langle \omega, Y_n \rangle = c \\ &\iff \text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta. \end{aligned}$$

Seja $Y(t) = \sum u_i(t)Y_i$. Como $g(t)$ é uma curva anormal, $Y(t)$ pertence a Δ por definição, e satisfaz $\text{ad}(Y(t))\Delta \subset \Delta$ para $t \in [0, T]$. q.t.p. Em outras palavras $Y(t)$ satisfaz

$$Y(t) \in \Delta \cap \mathcal{N}(\Delta) \quad t \in [0, T], \text{ q.t.p.} \quad (5.7)$$

Onde $\mathcal{N}(\Delta) = \text{norm}_{\mathfrak{g}} \Delta = \{F \in \mathfrak{g} : [F, Y] \in \Delta \quad \forall Y \in \Delta\}$ é o normalizador de Δ em \mathfrak{g} .

Além disso

$$c(t) = \langle \omega, \text{ad}(Y(t))Y_n \rangle,$$

é mensurável e essencialmente limitada sempre que $t \mapsto Y(t)$ seja mensurável e essencialmente limitada. (Da teoria de controle assumimos os controles u_j mensurável e essencialmente limitados)

Agora observamos a outra condição, i.e., $g(t)$ pertence a \mathcal{Z} . Lembrando que para todo $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} T_g \psi T L_g Y &= \langle \omega, (D + \text{ad}(F_g)) Y \rangle, \\ &= \langle \omega, DY \rangle + \langle \omega, \text{ad}(F_g) Y \rangle. \end{aligned}$$

Temos para $Y \in \Delta \cap \mathcal{N}(\Delta)$ e $g \in \mathcal{Z}$ que

$$T_g \psi T L_g Y = \langle \omega, DY \rangle.$$

Com efeito $\langle \omega, \text{ad}(F(g))Y \rangle = -\langle \omega, \text{ad}(Y)F(g) \rangle$, e como $F_g \in \Delta$ por definição e $\text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta$, obtemos $\langle \omega, \text{ad}(Y)F(g) \rangle = 0$.

Portanto $T_g \psi T L_g Y = \langle \omega, DY \rangle$. Assim uma curva $g(t)$ satisfazendo 5.7 e $g(0) \in \mathcal{Z}$, esta contida em \mathcal{Z} se, e somente se, $\langle \omega, D\dot{g}(t) \rangle = 0$, para quase todo ponto, isto decorre do

seguinte.

$\frac{d}{dt}\psi(g(t)) = (d\psi)_{g(t)}\dot{g}(t) = \langle \omega, D\dot{g}(t) \rangle = 0$, logo $\psi(g(t)) = cte$. De $g(0) \in \mathcal{Z}$ e $g(0) = \psi(g(0)) = 0$ obtemos $\psi(g(t)) = g(0) = 0$, assim $g(t) \in \mathcal{Z}$. Logo $D\dot{g}(t) \in \ker \omega = \Delta$ obtendo $\dot{g}(t) \in D^{-1}\Delta$. Assim o anterior é equivalente a $\dot{g}(t) \in D^{-1}\Delta$ em quase todo ponto. Reciprocamente seja $g(t)$ uma curva absolutamente contínua definida em $[0, T]$ tal que $\dot{g}(t) = \frac{d}{dt}g(t)$ pertence a

$$\mathfrak{a} = \Delta \cap \mathcal{N}(\Delta) \cap D^{-1}\Delta, \quad t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

Então $g(t)$ é a projeção de um extremal anormal $(\lambda(t), g(t))$.

O covetor $\lambda(t)$ é igual a $p(t)\omega$, onde $p(t)$ é a solução da equação linear $\dot{p} = c(t)p$, com $p(0) \neq 0$ e $c(t) = \langle \omega, \text{ad}(\dot{g}(t))Y_n \rangle$.

Com todo o anterior estabeleceremos o seguinte Teorema.

Teorema 5.0.1. *O subespaço vetorial \mathfrak{a} de \mathfrak{g} definido por*

$$\mathfrak{a} = \Delta \cap \mathcal{N}(\Delta) \cap D^{-1}\Delta,$$

é uma subálgebra de \mathfrak{g} .

O seu subgrupo conexo associado $A =: \langle \exp(\mathfrak{a}) \rangle$, é tal que para todo $g \in \mathcal{Z}$ a classe lateral gA esta contida no locus singular.

As projeções dos anormais extremais estão contidos em \mathcal{Z} e para $g \in \mathcal{Z}$ as curvas anormais começando desde g são todas as curvas absolutamente contínuas contidas na classe lateral gA .

Além disso o covetor $\lambda(t)$ é, a menos de uma constante, igual a $p(t)\omega$ onde $p(0) \neq 0$ e

$$\dot{p}(t) = \langle \omega, \text{ad}(\dot{g}(t))Y_n \rangle p(t),$$

para $\langle \omega, Y_n \rangle = 1$

Demonstração. Pelo feito anteriormente é suficiente provar que \mathfrak{a} é uma subálgebra, e que gA esta contido em \mathcal{Z} sempre que $g \in \mathcal{Z}$.

Um elemento Y de \mathfrak{g} pertence a \mathfrak{a} se, e somente se,

- (i) $Y \in \Delta$
- (ii) $\text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta$
- (iii) $DY \in \Delta$.

Seja $Y, Z \in \mathfrak{a}$. Pelo item (ii) obtemos $[Y, Z] = \text{ad}(Y)Z \in \Delta$, pois $Z \in \Delta$ de (i) logo como $Z \in \mathfrak{a}$ e por (ii) temos que $\text{ad}(Z)\Delta \subset \Delta$ logo $\text{ad}(Y)\text{ad}(Z)\Delta \subset \text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta$

com isso temos $\text{ad}([Y, Z])\Delta \subset \Delta$.

De fato, seja $m \in \text{ad}([Y, Z])\Delta$, logo $m = \text{ad}([Y, Z])A$ para $A \in \Delta$, então

$$\begin{aligned} m &= \text{ad}([Y, Z])A \\ &= [[Y, Z], A] \\ &= -\text{ad}(A)[Y, Z] \\ &= -[\text{ad}(A)Y, Z] - [Y, \text{ad}(A)Z], \end{aligned}$$

como $\text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta$ e $\text{ad}(Z)\Delta \subset \Delta$ temos

$$-[[A, Y], Z] - [Y, [A, Z]] \subset \text{ad}(Z)\Delta + \text{ad}(Y)\Delta \subset \Delta + \Delta = \Delta.$$

Portanto $\text{ad}([Y, Z])\Delta \subset \Delta$.

Para finalizar $D[Y, Z] = [DY, Z] + [Y, DZ] \in \Delta$ pois DY e DZ pertencem a Δ e por (ii) tanto $\text{ad}(Z)$ como $\text{ad}(Y)$ enviam Δ em Δ , daí que $[Y, Z]$ pertence a \mathfrak{a} concluindo que \mathfrak{a} é uma subálgebra de \mathfrak{g} .

Para provar a segunda parte, seja $g \in \mathcal{Z}$. Temos que $g \exp(tY)$ com $Y \in \mathfrak{a}$, satisfaz as condições discutidas antes da afirmação do teorema e portanto $g \exp(tY)$ é uma curva anormal que está contida em \mathcal{Z} , donde $gA \subset \mathcal{Z}$ \square

Observação 5.0.2.

1. A dimensão de \mathfrak{a} é no máximo $n - 2$. De fato \mathfrak{a} está contida em Δ e sua dimensão não pode exceder $n - 1$. Se supoñemos que a dimensão de \mathfrak{a} é $n - 1$ então Δ seria uma subálgebra, (pois estaria contido em $\mathcal{N}(\Delta)$), ainda mais estaria contida em $D^{-1}\Delta$, e portanto invariante para D . Mas se Δ é uma subálgebra D -invariante então a condição do posto da álgebra de Lie não é satisfeita, por conseguinte $\dim(\mathfrak{a}) \leq n - 2$. Por outro lado a dimensão é igual a $n - 2$ sempre que Δ seja uma subálgebra pois neste caso $\mathfrak{a} = \Delta \cap D^{-1}\Delta$, já que $\mathcal{N}(\Delta) = \Delta$ e Δ não pode estar contida em $D^{-1}\Delta$ o qual é um subespaço de \mathfrak{g} de codimensão um diferente de Δ .
2. Se F_g nunca pertence à subálgebra \mathfrak{a} (para nenhum $g \in \mathcal{Z}$ ou no mínimo nenhum $h \in gA$) então os controles associados aos anormais extremais são unicamente definidos e não envolvem campos vetoriais lineares. Por conseguinte as curvas anormais são translações à direita por g das geodésicas de A pela métrica invariante à esquerda induzida pelo ARS.

6 Locus singular no grupo simplesmente conexo associado à álgebra de Lie dos movimentos próprios

Nesta seção daremos uma contribuição ao estudo dos ARS simples em grupos de Lie conexos solúveis não nilpotentes de dimensão baixa, afim de estabelecer estudos futuros. Nosso interesse é estudar o locus singular no grupo conexo e simplesmente conexo associado à álgebra de Lie dos movimentos próprios, a qual faz parte da classificação das álgebras de Lie solúveis não nilpotentes de dimensão menor e igual a três.

Segundo o Teorema A.5.1 a classificação dos grupos de Lie G de uma dada dimensão se reduz à classificação dos grupos de Lie simplesmente conexos com mesma dimensão e de seus subgrupos discretos e centrais. Já a classificação dos grupos simplesmente conexos é feita via classificação de sua álgebra de Lie correspondentes. Disso, utilizando a classificação presente em [4] e [17] tem-se cinco possíveis classes de álgebras de Lie solúveis não nilpotentes de dimensão três e dessas estudaremos a dada pelo produto semidireto $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times_{\theta} \mathbb{R}^2$, onde $\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Notemos que associada a \mathfrak{g} temos os grupos $G_n := \tilde{G}/D_n$ onde

$$D_n = \{(2nk\pi, 0) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

é o subgrupo discreto central e \tilde{G} o grupo de Lie simplesmente conexo associado a \mathfrak{g} ; o grupo G_1 é o grupo de movimentos próprios de \mathbb{R}^2 , (a componente conexa do grupo dos movimentos próprios de \mathbb{R}^2) e G_n seu recobrimento de n -folha.

Para \mathfrak{g} associamos o grupo de Lie simplesmente conexo $\tilde{G} = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ donde $\rho : \mathbb{R} \mapsto \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ é o automorfismo dado por

$$\rho(t) = \rho_t = e^{t\theta} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

e o produto em \tilde{G} é definido como $(t_1, v_1)(t_2, v_2) = (t_1 + t_2, v_1 + \rho_{t_1}v_2)$.

A seguir apresentaremos alguns resultados que serão utilizados adiante no estudo do locus singular. As demonstrações dos mesmos podem ser encontrados em [4] e [14].

Para $s \in \mathbb{R}$ definimos $\Lambda_s := (\rho_s - 1)\theta^{-1}$. Tal transformação satisfaz as seguintes propriedades, para $t, s \in \mathbb{R}$ temos

1. $\Lambda_{t+s} = \Lambda_t + \rho_t\Lambda_s$
2. $\Lambda_0 = 0$

3. $\frac{d}{dt}\Lambda_t = \rho_t$
4. $\rho_{-t}\Lambda_t = -\Lambda_{-t}$.
5. $\rho_s\Lambda_t = \Lambda_t\rho_s$
6. $\rho_s - \theta\Lambda_s = 1$.

Então para \tilde{G} escrevemos as translações e a exponencial, sua demonstração pode ser encontrada em [4]

Proposição 6.0.1. *Se $\tilde{G} = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ então*

$$\begin{aligned} (dL_{(\tau_1, v_1)})_{(\tau_2, v_2)}(s, w) &= (s, \rho_{\tau_1} w), \\ (dR_{(\tau_1, v_1)})_{(\tau_2, v_2)}(s, w) &= (s, w + s\theta\rho_{\tau_2} v_1) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\exp(s, w) = \begin{cases} (0, w) & \text{se } s = 0 \\ \left(s, \frac{1}{s}\Lambda_s w\right) & \text{se } s \neq 0. \end{cases}$$

Seja \mathcal{X} um campo vetorial sobre \tilde{G} e denotemos D sua derivação associada. Como $D(\mathbb{R} \times_{\theta} \mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ temos bem definido uma aplicação linear $D^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $D(0, v) = (0, D^*v)$ para $v \in \mathbb{R}^2$. Além disso, D^* satisfaz $D^*\theta = \theta D^*$ e como consequência $D^*\rho_t = \rho_t D^*$. De fato é suficiente provar que $D^*\theta v = \theta D^*v$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Temos o seguinte,

$$\begin{aligned} (0, D^*\theta v) &= D(0, \theta v) \\ &= D[(1, 0), (0, v)] \\ &= [D(1, 0), (0, v)] + [(1, 0), D(0, v)] \\ &= (0, \theta D^*v). \end{aligned}$$

Note ainda que, como $[D^*, \theta] = 0$ necessariamente $D^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Se \mathcal{X} é o campo linear sobre \tilde{G} com D a derivação associada então

$$\mathcal{X}(t, v) = (0, D^*v + \Lambda_t \xi) \text{ onde } (0, \xi) = D(1, 0).$$

Agora temos fatos sobre isometrias dos ARSs o qual são estabelecidos em [14].

A norma Quase-riemanniana sobre $T_g G$ é definida por

$$\|X\| = \min \left\{ \sqrt{v^2 + \sum_{i=1}^n u_i^2}; v\mathcal{X}_g + u_1 Y_1(g) + \cdots + u_{n-1} Y_{n-1}(g) = X, \right\}$$

para $X \in T_g G$, é infinito se o ponto g pertence ao locus singular e X não pertence a Δ_g

Definição 6.0.2. Sejam Σ_1 e Σ_2 dois ARS sobre um grupo de Lie G , uma isometria ϕ de Σ_1 sobre Σ_2 é um difeomorfismo de G compatível com a norma, ou seja

$$\|T_g\phi X\|_{\Sigma_1} = \|X\|_{\Sigma_2} \quad \forall g \in G, \quad \forall X \in T_gG,$$

onde $\|\cdot\|_{\Sigma_1}$ e $\|\cdot\|_{\Sigma_2}$ representam a norma associada a Σ_1 em T_gG e em $T_{\phi(g)}G$ respectivamente.

Seguindo [14], todo difeomorfismo de G que fixa a identidade e conjugue campos lineares e invariantes é uma isometria. Em particular, todo automorfismo de G é uma isometria de ARSs.

Agora vamos apresentar o principal resultado desta seção.

Teorema 6.0.3. *O locus de qualquer ARS simples é isométrico ao locus do ARS gerado pelo referencial $\Sigma = \{\mathcal{X}, (1, 0), (0, e_1)\}$ para algum campo linear \mathcal{X} ;*

Demonstração. Seja

$$\Sigma_1 = \{\mathcal{X}, (a_1, v_1), (a_2, v_2)\}$$

um referencial qualquer, temos que a prova decorre dos fatos sobre isometrias de ARSs dados em [14] e dos seguintes fatos.

Consirando o referencial $\Sigma_2 = \{\alpha\mathcal{X}, \beta(a_1, v_1), \gamma(a_2, v_2)\}$ então o locus singular de Σ_1 e Σ_2 coincidem. De fato seja $(t, v) \in \mathcal{Z}_1$ logo $\mathcal{X}(t, v) = A(a_1 + \rho_t v_1) + B(a_2, \rho_t v_2)$ onde $A^2 + B^2 \neq 0$ então $\alpha\mathcal{X}(t, v) = \alpha\beta^{-1}A(\beta(a_1 + \rho_t v_1)) + \alpha\gamma^{-1}B(\gamma(a_2, \rho_t v_2))$, assim $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2$ de forma analoga obtemos $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1$.

Agora pela definição de locus singular podemos escolher $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$ e também $v_1 \neq 0$ ou $v_2 \neq 0$ pois, se em ambos casos são zero, então não será possível encontrar um conjunto onde sejam LI.

Disso é suficiente considerar o referencial dado por $\Sigma = \{\mathcal{X}, (1, v_1), (a_2, v_2)\}$ com $\|v_2\| = 1$. Defina o difeomorfismo $\phi(t, v) = (t, A(v - \Lambda_t v_1))$ onde A é uma rotação que leva v_2 em e_1 e satisfaz $\phi_*(1, a_1) = (1, 0)$, e $\phi_*(a_2, v_2) = (a_2, e_1)$. É pra provar isso, escrevendo $\tilde{\mathcal{X}} = \phi_*\mathcal{X}$ obtemos que o locus do referencial

$$\Sigma_\phi = \{\tilde{\mathcal{X}}, (1, 0), (a_2, e_1)\}$$

é igual ao locus do referencial $\{\tilde{\mathcal{X}}, (1, 0), (0, e_1)\}$, pois $\mathcal{X}(t, v) = (0, D^*v + \Lambda_t \xi)$ só depende da segunda componente. □

Agora mostramos que \mathcal{Z} é subvariedade.

Proposição 6.0.4. *Considerando o referencial $\Sigma = \{\mathcal{X}, (1, 0), (0, e_1)\}$. O locus singular \mathcal{Z} é uma subvariedade.*

Demonstração. Notemos que $(t, v) \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \{D^*v + \Lambda_t\xi, \rho_t e_1\}$ são LD, assim devemos ter $\langle D^*v + \Lambda_t\xi, \rho_t e_2 \rangle = 0$ logo definindo $f(t, v) = \langle D^*v + \Lambda_t\xi, \rho_t e_2 \rangle$, considerando os seguintes casos donde $\det D^* \neq 0$ e $\det D^* = 0$.

Para $\det D^* \neq 0$ o que é equivalente a $D^* \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, v) &= \langle \rho_t \xi, \rho_t e_2 \rangle + \langle D^*v + \Lambda_t \xi, \theta \rho_t e_2 \rangle \\ &= \langle \xi, e_2 \rangle + \langle D^*v + \Lambda_t \xi, \theta \rho_t e_2 \rangle. \end{aligned}$$

e como $\frac{\partial f}{\partial v}(t, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é linear então $\frac{\partial f}{\partial v}(t, v)(w) = \langle Dw, \rho_t e_2 \rangle \neq 0$ pois é possível encontrar $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle Dw, \rho_t e_2 \rangle \neq 0$, de fato é suficiente considerar $w = D^{-1}\rho_t e_2$, e neste caso \mathcal{Z} é a imagem inversa de um valor regular.

Agora se $D^* = 0$ então $f(t, v) = \langle \Lambda_t \xi, \rho_t e_2 \rangle$, e temos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_t \xi, \rho_t e_2 \rangle &= \langle \rho_{-t} \Lambda_t \xi, e_2 \rangle \\ &= \langle -\Lambda_{-t} \xi, e_2 \rangle \\ &= \langle -(\rho_{-t} - 1)\theta^{-1} \xi, e_2 \rangle \\ &= \langle -\rho_{-t} \theta^{-1} \xi + \theta^{-1} \xi, e_2 \rangle \\ &= \langle -\rho_{-t} \theta^{-1} \xi, e_2 \rangle + \langle \theta^{-1} \xi, e_2 \rangle \\ &= \langle -\rho_{-t} \xi, \theta e_2 \rangle + \langle \xi, \theta e_2 \rangle \\ &= \langle -\rho_{-t} \xi, -e_1 \rangle + \langle \xi, -e_1 \rangle \\ &= \langle \rho_{-t} \xi, e_1 \rangle - \langle \xi, e_1 \rangle, \end{aligned}$$

Notemos que o ângulo θ_t entre $\rho_{-t}\xi$ e e_1 é dado por $\theta_{-t} = \theta - t$ onde θ é o ângulo entre ξ e e_1 , segue que

$$\begin{aligned} \langle \rho_{-t} \xi, e_1 \rangle - \langle \xi, e_1 \rangle &= \|\rho_{-t} \xi\| \|e_1\| \cos \theta_t - \|\xi\| \|e_1\| \cos \theta \\ &= \|\xi\| (\cos(\theta - t) - \cos \theta). \end{aligned}$$

Portanto $(t, v) \in \mathcal{Z}$ se, e somente se, $\cos(\theta - t) = \cos(\theta)$ se, e somente se

$$t \in \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2(k\pi + \theta) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

e escrevendo $\Gamma = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2(k\pi + \theta) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ temos que $\mathcal{Z} = \Gamma \times \mathbb{R}^2$, assim pela expressão de \mathcal{Z} tem-se que \mathcal{Z} é subvariedade. Além disso observamos neste caso que \mathcal{Z} tem infinitas componentes conexas □

Explicitamos \mathcal{Z} da seguinte maneira.

Proposição 6.0.5. *Para o referencial $\Sigma = \{ \mathcal{X}, (1, 0), (0, e_1) \}$ o locus singular é dado por*

$$\mathcal{Z} = \{(t, v); (\mu y - \lambda x) \sin t + (\mu x + \lambda y) \cos t + a(1 - 2 \cos^2 t) + b \sin t + a \cos t = 0\}$$

Demonstração. Considerando $D^* = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ e $\xi = (a, b)$, temos

$$\Lambda_t = (\rho_t - 1)\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t - 1 & \sin t \\ \sin t & -\cos t - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t - 1 \\ 1 - \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{aligned} D^*v + \Lambda_t\xi &= \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t - 1 \\ 1 - \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= (\lambda x - \mu y - a \sin t + b(\cos t - 1), \mu x + \lambda y + a(1 - \cos t) + b \sin t). \end{aligned}$$

Disso obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{(t, v); \mathcal{X}(t, v) \in \Delta_{(t,v)}\} \\ &= \{(t, v); D^*v + \Lambda_t\xi = \rho_t e_1\} \\ &= \{(t, v); \langle D^*v + \Lambda_t\xi, \rho_t e_2 \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

e como $\rho_t e_2 = (-\sin t, \cos t)$, então realizando o produto interior e com alguns cálculos simples obtemos

$$\mathcal{Z} = \{(t, v); (\mu y - \lambda x) \sin t + (\mu x + \lambda y) \cos t + a(1 - 2 \cos^2 t) + b \sin t + a \cos t = 0\}.$$

□

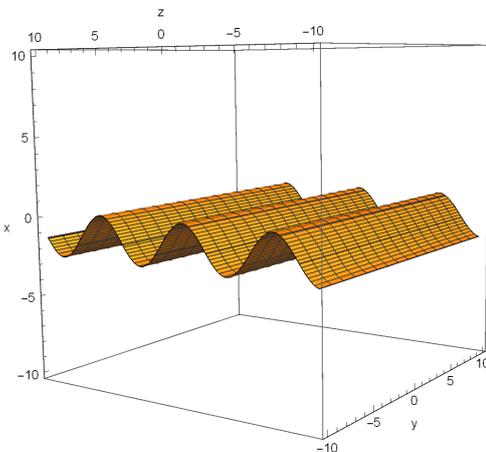
Agora obtemos os desenhos para o locus singular nos casos particulares quando $D^* \neq 0$,

$$(y - x) \sin(t) + (x + y) \cos(t) + (1 - 2 \cos^2(t)) + \sin t + \cos t = 0$$

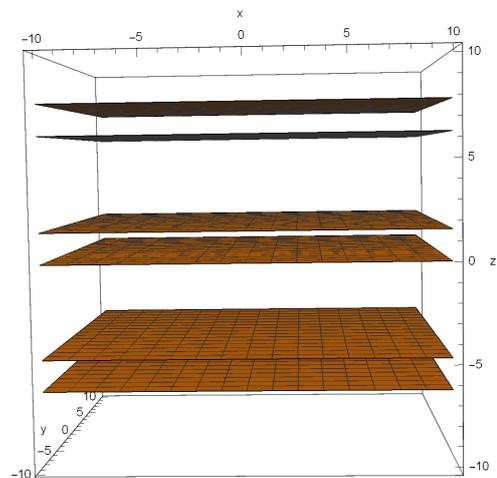
e $D^* = 0$ em

$$(\cos t - 1) + \sin t = 0$$

como segue



(a) $(y - x) \sin(t) + (x + y) \cos(t) + (1 - 2 \cos^2(t)) + \sin t + \cos t = 0$.



(b) $(\cos t - 1) + \sin t = 0$.

Figura 2 – Locus singular

Referências

- [1] A. A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain. Introduction to riemannian and sub-riemannian geometry. 2012.
- [2] A. A. Agrachev, U. Boscain, and M. Sigalotti. A gauss-bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds. *arXiv preprint math/0609566*, 2006.
- [3] A. A. Agrachev and Y. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] V. Ayala and A. Da Silva. On the characterization of the controllability property for linear control systems on nonnilpotent, solvable three-dimensional lie groups. *arXiv preprint arXiv:1804.09563*, 2018.
- [5] V. Ayala and P. Jouan. Almost-Riemannian geometry on Lie groups. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(5):2919–2947, 2016.
- [6] V. Ayala and J. Tirao. Linear control systems on Lie groups and controllability. In *Proceedings of symposia in pure mathematics*, volume 64, pages 47–64. American Mathematical Society, 1999.
- [7] U. Boscain, G. Charlot, M. Gaye, and P. Mason. Local properties of almost-Riemannian structures in dimension 3. *arXiv preprint arXiv:1407.0610*, 2014.
- [8] U. Boscain, G. Charlot, and R. Ghezzi. Normal forms and invariants for 2-dimensional almost-Riemannian structures. *Differential Geometry and its Applications*, 31(1):41–62, 2013.
- [9] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie: Chapitre 1*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [10] V. Grushin. Grushin. *A certain class of hypoelliptic operators*, pages 458–476.
- [11] V. Grushin. On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 13(2):155, 1971.
- [12] S. Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces*, volume 341. American Mathematical Soc., 2001.
- [13] P. Jouan. Equivalence of control systems with linear systems on Lie groups and homogeneous spaces. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16(4):956–973, 2010.

-
- [14] P. Jouan, Z. Guilherme, and V. Ayala. Isometries of almost-riemannian structures on lie groups. *arXiv preprint arXiv:1706.00649*, 2017.
- [15] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*, volume 52. Cambridge university press, 1997.
- [16] A. W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] A. Onishchik and E. Vinberg. *Lie groups and Lie algebras III- Structure of Lie groups and Lie algebras*, volume 41 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [18] L. S. Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. CRC Press, 1987.
- [19] Y. L. Sachkov. Control theory on Lie groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 156(3):381, 2009.
- [20] L. A. B. San Martin. *Algebras de Lie*. Editora Unicamp, 2010.
- [21] L. A. B. San Martin. *Grupos de Lie*. Editora Unicamp, 2017.
- [22] M. Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry. 1, 1999.
- [23] T. Takasu. Generalized Riemannian Geometry. i. 1957.

Apêndices

APÊNDICE A – Tópicos de Geometria simplética

A.1 Variedades simpléticas

Uma forma simplética ω num espaço vetorial de dimensão finita V é uma forma bilinear anti-simétrica não degenerada, isto é, para qualquer $x \in V$ existe $y \in V$ tal que $\omega(x, y) \neq 0$. Listamos algumas propriedades algébricas de um espaço vetorial com uma forma simplética

1. A propriedade de ω ser não degenerada é equivalente ao fato de que a aplicação linear $i : V \mapsto V^*$, dada por $i_X \omega = \omega(X, \cdot)$ é um isomorfismo.
2. Pode-se escrever ω na seguinte forma canônica.

Se $\dim V = 2n$ então existe uma base $B = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ tal que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j)$;

A matriz de ω em relação a essa base é dada por

$$[\omega]_B = J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_{n \times n} \\ \text{Id}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por essa matriz segue que se $\{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n\}$ é a base dual de B , então $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$

Uma forma simplética numa variedade diferenciável M é uma 2-forma diferencial ω fechada ($d\omega = 0$) e não degenerada, isto é, para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$ existe $w \in T_x M$ tal que $\omega_x(v, w) \neq 0$.

Para cada $x \in M$ a forma bilinear ω_x é uma forma simplética no espaço vetorial $T_x M$.

A existência de uma forma simplética em M acarreta que $\dim M$ é par.

Uma Variedade M munida de uma forma simplética é chamada de **variedade simplética**.

Um exemplo importante de variedade simplética é o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável T^*M .

Observação A.1.1. Notação.

Para $f \in V^*$, $v \in V$, onde V é um espaço vetorial, escrevemos $f(v) \in \mathbb{R}$ mais também usamos a notação $\langle f, v \rangle$. Notemos que como V^* é um espaço vetorial também tem seu espaço dual $(V^*)^*$ e considerando a dimensão de V finita então $(V^*)^* \cong V$. De fato se $w \in (V^*)^*$ identificamos w com $v \in V$ sempre que $\langle w, f \rangle = \langle f, v \rangle$ para todo $f \in V^*$. Então sob esta identificação a ordem dos argumentos é irrelevante, isto é, $\langle f, v \rangle = \langle v, f \rangle$.

A.2 Fibrado Cotangente

Seja M uma variedade suave de dimensão n e q um ponto em M . O espaço tangente T_qM tem o espaço dual, o espaço cotangente $(T_qM)^*$. A união disjunta de todos os espaços cotangentes é o fibrado cotangente $T^*M = \bigcup_{q \in M} T_q^*M$, que é uma variedade suave de dimensão $2n$. A fim de construir coordenadas locais sobre T^*M , tomemos qualquer coordenadas locais x_1, \dots, x_n sobre M . Então dx_{1q}, \dots, dx_{nq} são uma base de formas lineares em T_q^*M , e qualquer covetor $\lambda \in T_q^*M$ é decomposto como $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dx_{iq}$. A $2n$ -tupla $(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ fornecem coordenadas locais, denominadas coordenadas canônicas sobre o fibrado cotangente T^*M .

Note que em geral o fibrado cotangente T^*M de uma variedade suave M não é trivial, i.é, não pode ser representado como o produto direto $M \times V$ onde V é um espaço vetorial. Mas o fibrado cotangente T^*G de um grupo de Lie tem uma trivialização natural. Aplicaremos esta trivialização a fim de escrever o sistema Hamiltoniano do principio de máximo de Pontryagin para problemas de controle ótimo sobre grupos de Lie. Para isso consideremos V um espaço vetorial com $\dim V = \dim M = n$

Definição A.2.1. Uma *trivialização* do fibrado cotangente T^*M é um difeomorfismo $\phi : M \times V \mapsto T^*M$ tal que:

1. $\phi(e, q) \in T_q^*M$; $e \in V, q \in M$
2. $\phi(\cdot, q) : V \mapsto T_q^*M$ é um isomorfismo linear para qualquer $q \in M$.

Em qualquer ponto (q, e) do fibrado cotangente trivializado $V \times E \cong T^*M$ temos as seguintes identificações para o fibrado tangente e cotangente

$$\begin{aligned} T_{(q,e)}(M \times V) &\cong T_qM \oplus T_eV \cong T_qM \times V, \\ T_{(q,e)}^*(M \times V) &\cong T_q^*M \oplus T_e^*V \cong T_q^*M \times V^*. \end{aligned}$$

Respectivamente qualquer vetor tangente e cotangente pode ser decomposto em suas partes vertical e horizontal como segue

$$\begin{aligned} X &= X_v + X_h, \quad X \in T_{(q,e)}(M \times V), \quad X_v \in V, \quad X_h \in T_qM \\ \lambda &= \lambda_v + \lambda_h, \quad \lambda \in T_{(q,e)}^*(M \times V), \quad \lambda_v \in V^*, \quad \lambda_h \in T_q^*M. \end{aligned}$$

A.3 Principio do Máximo de Pontryagin sobre variedades suaves

Consideremos o problema de controle ótimo da forma

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{A.1}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1 \quad \text{fixo ou livre} \quad (\text{A.2})$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (\text{A.3})$$

onde M é uma variedade suave, $f(q, u)$ e $\varphi(q, u)$ são suaves, e os controles admissíveis $u(t)$ são mensuráveis e localmente limitados. Seja $\lambda \in T^*M$ um covetor, $\nu \in \mathbb{R}$ um parâmetro e $u \in U$ um parâmetro de controle e considere a família de Hamiltonianos

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f \rangle + \nu \varphi. \quad (\text{A.4})$$

Teorema A.3.1. Princípio do Máximo de Pontryagin-PMP *Seja $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ um controle ótimo no problema A.1-A.3 com tempo fixo t_1 .*

*Então existe uma curva lipschitziana $\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^*M$, $t \in [0, t_1]$, e um número $\nu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) \quad (\text{A.5})$$

$$h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u^\nu(\lambda_t) \quad (\text{A.6})$$

$$\lambda_t \neq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad (\text{A.7})$$

$$\nu \leq 0 \quad (\text{A.8})$$

Observação A.3.2. Para o problema A.1-A.3 com a condição final de tempo livre t_1 , condições necessárias de otimalidade se expresam com A.5-A.8 mais a igualdade adicional $h_{\tilde{u}(t)}^\nu \equiv 0$

A.4 Problema de Controle ótimo

A.4.1 Enunciado Do problema

Considere um sistema de controle da forma

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.9})$$

onde M é uma variedade suave, e U é um subconjunto arbitrário de \mathbb{R}^m . Para o lado direito do sistema de controle suporemos que:

(i)

$$q \mapsto f_u(q) \text{ é um campo vetorial suave sobre } M \text{ para qualquer fixo } u \in U, \quad (\text{A.10})$$

(ii)

$$(q, u) \rightarrow f_u(q) \text{ e uma aplicação contínua em } M \times \bar{U}, \quad (\text{A.11})$$

(iii)

$$(q, u) \rightarrow \frac{\partial f_u}{\partial q}(q) \text{ é uma aplicação contínua em } M \times \bar{U}. \quad (\text{A.12})$$

Controles admissíveis são aplicações mensuráveis, localmente limitadas

$$u : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in U.$$

Substituindo tal controle $u = u(t)$ como parâmetro de controle no sistema A.9, obtemos uma EDO não autônoma $\dot{q} = f_u(q)$. Para um ponto $q_0 \in M$ o problema de Cauchy

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q(0) = q_0, \quad (\text{A.13})$$

tem portanto solução única. Fixemos o ponto inicial q_0 e denotemos por $q_u(t)$ a solução correspondente do problema A.14 .

A fim de se comparar controles admissíveis no intervalo $[0, t_1]$, introduzimos o funcional de custo

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt, \quad (\text{A.14})$$

onde $\varphi : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as mesmas condições de regularidade que o lado direito de f . Dados $q_0, q_1 \in M$, consideramos o seguinte problema de controle:

Problema

Minimizar o funcional J entre todos os controles admissíveis $u = u(t)$, $t \in [0, t_1]$ para o qual a solução correspondente $q_u(t)$ do problema de Cauchy A.14 satisfaz a condição de fronteira

$$q_u(t_1) = q_1, \quad (\text{A.15})$$

esse problema também pode ser escrito como

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.16})$$

$$q(0) = q_0; \quad q(t_1) = q_1 \quad (\text{A.17})$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (\text{A.18})$$

Estudaremos dois tipos de problemas, com tempo final fixo e tempo final livre.

Definição A.4.1. Conjunto atingível

Fixado um ponto inicial $q_0 \in M$, o conjunto atingível a partir de q_0 do sistema de controle A.9 é definido como

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) = \{q_u(t), \text{ onde } u : [0, t] \rightarrow U \text{ é um controle mensurável, localmente limitado}\}$$

A.4.2 Enunciado geométrico de PMP

Consideremos o problema de controle ótimo dado em A.9 para um sistema de controle

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.19})$$

com condição inicial

$$q(0) = q_0. \quad (\text{A.20})$$

Definamos a seguinte família de Hamiltonianos

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle, \quad \lambda \in T_q^*M, \quad q \in M, \quad u \in U.$$

Fixado um instante arbitrário $t_1 > 0$, temos o seguinte:

Teorema A.4.2. *Seja $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ um controle admissível e $\tilde{q}(t) = q_{\tilde{u}}(t)$ a solução correspondente do problema de Cauchy A.19-A.20. Se*

$$\tilde{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1),$$

então existe uma curva lipschitziana no fibrado cotangente

$$\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^*M, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

tal que

$$\lambda_t \neq 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) \quad (\text{A.22})$$

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t) \quad (\text{A.23})$$

$t \in [0, t_1]$ q.t.p.

Se $u(t)$ é um controle admissível e λ_t uma curva Lipschitziana em T^*M tal que as condições A.21- A.23 são satisfeitas, então o par $(u(t), \lambda_t)$ é dito satisfazer o PMP. Neste caso a curva λ_t é chamada *extremal*, e sua projeção $\tilde{q}(t) = \pi(\lambda_t)$ é chamada de *trajetória extremal*. Se o par $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ satisfaz PMP, então

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \text{constante}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (\text{A.24})$$

O sistema hamiltoniano do PMP

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}(\lambda_t) \quad (\text{A.25})$$

é uma extensão do sistema de controle inicial A.19 ao fibrado cotangente .

De fato, em coordenadas canônicas $\lambda = (\xi, x) \in T^*M$, o sistema Hamiltoniano fornece

$$\dot{x} = \frac{\partial h_{u(t)}}{\partial \xi} = f_{u(t)}(x),$$

ou seja as soluções λ_t de A.25 são levantamentos de Hamiltonianos das soluções $q(t)$ para A.19:

$$\pi(\lambda_t) = q_u(t).$$

Proposição A.4.3. *Suponhamos que o Hamiltoniano maximizado do PMP*

$$H(\lambda) = \max_{u \in U} h_u(\lambda), \quad \lambda \in T^*M,$$

*é definido e C^2 -suave, sobre $T^*M \setminus \{\lambda = 0\}$.*

Se o par $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$, $t \in [0, t_1]$, satisfaz o PMP, então

$$\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (\text{A.26})$$

Reciprocamente, se uma curva Lipschitziana $\lambda_t \neq 0$ é uma solução do sistema Hamiltoniano A.26, então podemos escolher um controle admissível $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ tal que o par $(\tilde{u}(t), \lambda_t)$ satisfaz PMP.

A.4.3 Enunciado Geométrico para PMP para tempo livre

Teorema A.4.4. *Seja \tilde{u} um controle admissível para o sistema de controle A.19 tal que*

$$\tilde{q}(t_1) \in \partial \left(\bigcup_{|t-t_1| < \varepsilon} \mathcal{A}_{q_0}(t) \right)$$

para algum $t_1 > 0$ e $\varepsilon \in (0, t_1)$. Então existe uma curva Lipschitziana

$$\lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^*M, \quad \lambda_t \neq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

tal que

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t)$$

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t) \quad (\text{A.27})$$

$$h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) = 0,$$

$t \in [0, t_1]$ q.t.p.

A.4.4 PMP para problemas de controle ótimo

Agora aplicamos o PMP na sua forma geométrica para problemas de controle ótimo começando com problemas com tempo fixo.

Para um sistema de controle

$$\dot{q} = f_u(q) \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (\text{A.28})$$

com as condições de fronteira

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (\text{A.29})$$

onde $q_0, q_1 \in M$ e $t_1 > 0$ são fixados, e o funcional de custo

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt. \quad (\text{A.30})$$

Consideramos o problema de controle ótimo

$$J(u) \rightarrow \min. \quad (\text{A.31})$$

Transformamos o problema, extendendo-se o espaço de estado,

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times M,$$

e definindo o campo vetorial estendido $\hat{f}_u \in \text{Vec}(\mathbb{R} \times M)$

$$\hat{f}_u(\hat{q}) = \begin{pmatrix} \varphi(q, u) \\ f_u(q) \end{pmatrix},$$

e temos o novo sistema de controle

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{f}_u(\hat{q}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = \varphi(q, u) \\ \dot{q} = f_u(q), \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

com as condições de fronteira

$$\hat{q}(0) = \hat{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}(t_1) = \begin{pmatrix} J(u) \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

Se o controle \tilde{u} é ótimo para o problema [A.28-A.31](#), então a trajetória $\hat{q}_{\tilde{u}}(t)$ do sistema estendido [A.32](#) começando em \hat{q}_0 satisfaz a condição

$$\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \hat{\mathcal{A}}_{\hat{q}_0}(t_1),$$

onde $\hat{\mathcal{A}}_{\hat{q}_0}(t_1)$ é o conjunto atingível do sistema [\(A.32\)](#). Note que a forma geométrica do PMP aplicado ao sistema estendido [\(A.32\)](#) não distingue entre mínimo e máximo do custo $J(u)$. A fim de se ter condições válidas para o mínimo, introduzimos um novo parâmetro de controle v e consideremos um novo sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{y} = \varphi(q, u) + v \\ \dot{q} = f_u(q), \end{cases} \quad v \geq 0, \quad u \in U. \quad (\text{A.33})$$

A trajetória do sistema [\(A.33\)](#) correspondente aos controles $\tilde{v}(t) \equiv 0$, $\tilde{u}(t)$ torna-se a fronteira do conjunto atingível deste sistema para $t = t_1$. Aplicando o Teorema [A.4.2](#) ao sistema [\(A.33\)](#) obtemos, utilizando o fato de que

$$\begin{aligned} T_{(y,q)}(\mathbb{R} \times M) &= \mathbb{R} \oplus T_q M, \\ T_{(y,q)}^*(\mathbb{R} \times M) &= \mathbb{R} \oplus T_q^* M, \end{aligned}$$

que a função Hamiltoniana para o sistema (A.33) tem a forma

$$\widehat{h}_{(v,u)}(\nu, \lambda) = \langle \lambda, f_u(\pi(\lambda)) \rangle + \nu(\varphi(\pi(\lambda), u) + v),$$

onde $\pi : T^*M \rightarrow M$ é a projeção

e o sistema Hamiltoniano do PMP é

$$\begin{cases} \dot{\nu} = \frac{\partial \widehat{h}}{\partial u} = 0 \\ \dot{y} = \varphi(q, u) + v, \\ \dot{\lambda} = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\nu, \lambda). \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Onde $\vec{h}_u(\nu, \lambda)$ é o campo vetorial Hamiltoniano associado à função Hamiltoniana

$$h_u(\nu, \lambda) = \langle \lambda, f_u(\pi(\lambda)) \rangle + \nu\varphi(\pi(\lambda), u).$$

A primeira equação de (A.34) significa que

$$\nu = \text{constante}$$

ao longo da trajetória de referência. A condição de maximalidade tem a forma

$$\langle \lambda_t, f_{\tilde{u}(t)} \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U, v \geq 0} (\langle \lambda_t, f_u \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), u) + \nu v).$$

Como o máximo anterior é atingido devemos ter

$$\nu \leq 0,$$

e assim podemos escolher $v = 0$ do lado direito da condição de maximalidade

$$\langle \lambda_t, f_{\tilde{u}(t)} \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U} (\langle \lambda_t, f_u \rangle + \nu\varphi(\tilde{q}(t), u)).$$

Teorema A.4.5. *Seja $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ um controle ótimo para o problema A.28-A.31,*

$$J(\tilde{u}) = \min\{J(u) ; q_u(t_1) = q_1\}.$$

Definimos a função Hamiltoniana

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle + \nu\varphi, \quad \lambda \in T_q^*M, \quad u \in U, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Então existe um par não trivial,

$$(\nu, \lambda_t) \neq (0, 0) \quad \nu \in \mathbb{R} \quad \lambda_t \in T_{\tilde{q}(t)}^*M,$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t),$$

$$h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u^\nu(\lambda_t) \quad \forall t \in [0, t_1] \quad q.t.p,$$

$$\nu \leq 0.$$

Observação A.4.6.

1. Se temos o problema de maximização em vez do problema de minimização (A.31) então a desigualdade anterior torna-se

$$\nu \geq 0.$$

2. Para o problema com tempo livre : A.28- A.31, condições necessárias de óptimalidade do PMP são as mesmas do Teorema A.4.5 mais a propriedade adicional $h_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0$.

Temos duas possibilidades distintas para o parâmetro constante ν no Teorema A.4.5:

1. se $\nu \neq 0$ então a curva λ_t é chamada de **extremal normal**. Como o par (ν, λ_t) pode ser multiplicado por um número positivo, podemos normalizar $\nu < 0$ e assumir que $\nu = -1$ no caso normal.
2. Se $\nu = 0$, então λ_t é chamado de **extremal anormal**.

Assim podemos sempre assumir que $\nu = -1$ ou $\nu = 0$.

Agora consideremos o problema de controle ótimo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q_0, q_1 \text{ fixados,} \\ t_1 &= \int_0^{t_1} 1 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Para o problema de tempo ótimo, o PMP toma a seguinte forma:

Corolário A.4.7. *Seja um controle admissível $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ um tempo ótimo. Definamos a função Hamiltoniana*

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle, \quad \lambda \in T_q^* M, \quad u \in U.$$

Então existe uma curva Lipschitziana

$$\lambda_t \in T^* M, \quad \lambda_t \neq 0, \quad t \in [0, t_1],$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas para quase todo $t \in [0, t_1]$:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t), \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &= \max_{u \in U} h_u(\lambda_t,) \\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda_t) &\geq 0. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Um caminho em G é dito horizontal se é localmente retificável (por exemplo diferenciável por partes) e se sua derivada pertence á distribuição no fibrado tangente sempre que este definida.

Definição A.4.8. Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ é chamado geodésica minimizante se é o caminho horizontal mais curto que une seus pontos de extremidade.

Definição A.4.9. Um caminho $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ é chamado geodésica se é localmente uma geodésica minimizante, em outras palavras cada $t_0 \in I$ está contido em um subintervalo fechado $I_1 \subset I$ tal que γ restrita a I_1 é uma geodésica minimizante. Se além disso, $d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) = |t_2 - t_1|$ sempre que $|t_2 - t_1|$ é suficientemente pequeno então dizemos que γ é uma geodésica de velocidade unitaria.

A.5 Grupos de Lie e recobrimento universal

O seguinte Teorema é utilizado na secção do grupo solúvel não nilpotente . Para mais detalhes com a demonstração o leitor pode consultar [20, 21].

Teorema A.5.1. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real com $\dim \mathfrak{g} < \infty$. Então*

1. *Existe um único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\tilde{G}(\mathfrak{g})$ com álgebra de Lie \mathfrak{g} .*
2. *Se G é grupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} então $G \cong \tilde{G}(\mathfrak{g})/\Gamma$, onde $\Gamma \subset \tilde{G}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo discreto central, isto é, Γ está contido no centro $\mathbb{Z}(\tilde{G}(\mathfrak{g}))$ de $\tilde{G}(\mathfrak{g})$. Nesse caso Γ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(G)$.*

Por esse teorema pode-se classificar os grupos de Lie conexos a partir de uma classificação (a menos de isomorfismo) das álgebras de Lie reais e de uma descrição dos centros $\mathbb{Z}(\tilde{G}(\mathfrak{g}))$ dos grupos simplesmente conexos $\tilde{G}(\mathfrak{g})$.