Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Uma Introdução à Teoria das Partições

Cecília Pereira de Andrade†

Mestrado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

† Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Uma Introdução à Teoria das Partições

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Cecília Pereira de Andrade** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de julho de 2009.

Prof. Dr. **José Plínio de Oliveira Santos**
Orientador

Banca examinadora:
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima (UFRPE)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Andrade, Cecília Pereira de
An24i Uma introdução à teoria das partições/Cecília Pereira de Andrade-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Partições (Matemática). 2.Polinômios gaussianos. I. Santos, J. Plínio O. (José Plínio de Oliveira). II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: An introduction to the theory of partitions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partitions (Mathematics). 2. Gaussian polynomials.

Área de concentração: Combinatória

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Emerson Alexandre de Oliveira Lima (UFRPE)
Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Data da defesa: 27/07/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de julho de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof. (a). Dr (a). EMERSON ALEXANDRE DE OLIVEIRA LIMA

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus, por me permitir esta oportunidade de estudar e estar sempre comigo.

A meus pais, Nereu e Maria Eni, por estarem sempre do meu lado, me incetivando a continuar neste caminho que escolhi e dando todo apoio necessário. Amo muito vocês!

Ao meu orientador Plínio, pela amizade e excelente orientação.

Ao meu namorado Leandro, pela paciência e por toda ajuda dedicada.

A todos os meus colegas, que de alguma forma contribuiram para a conclusão deste trabalho.

À minha grande amiga Tatiane, por estar presente em todos os momentos da minha vida.

À minha professora colegial, Marília Gonçalves de Moraes Costa, por ser a minha inspiradora a estar nesta profissão.

Ao meu professor de graduação, Cícero Fernandes de Carvalho, por me incentivar a seguir meus estudos.

À minha madrinha Sensata, por todo amor e cuidado durante esta minha caminhada. Amo você!

A todos os meus amigos e familiares, que sempre torceram pelo meu sucesso.

Resumo

Este trabalho está dividido em duas partes. A primeira refere-se a partições, constando dos principais resultados, algumas representações das partições e uma importante ferramenta que são as funções geradoras. A segunda parte apresenta os polinômios gaussianos e alguns teoremas importantes, bem como as identidades de Rogers-Ramanujan.

Abstract

This work is divided into two parts. The first refers to partitions, consisting of the main results, some representations of the partitions and an important tool that are the generating functions. The second part presents the Gaussian polynomials and some important theorems as well as the identities of Rogers-Ramanujan.

Introdução

Neste trabalho fazemos uma introdução à Teoria das Partições.

No primeiro capítulo, apresentamos as definições bem como os resultados mais importantes. Começamos com provas bijetivas das identidades, mostramos as maneiras que podemos representar uma partição e como achar um limitante para a função $p(n)$. Vamos provar os teoremas de Bressoud e do Número Pentagonal de Euler e por fim introduzimos as funções geradoras e vemos como usar essa ferramenta para provar algumas identidades.

No segundo capítulo, introduzimos os números q-binomiais, também conhecidos como polinômios gaussianos, de duas maneiras diferentes. Provamos algumas identidades e terminamos com as Identidades de Rogers-Ramanujan.

Sumário

Capítulo 1

Euler e Funções Geradoras

Leibniz foi, aparentemente, a primeira pessoa a questionar sobre partições. Em uma carta de 1674 ele perguntou a J. Bernoulli sobre o número de "divulsions"de inteiros. Na terminologia moderna, ele estava fazendo a primeira pergunta sobre o número de partições de inteiros.

Neste capítulo, mostramos como identidades, tais como as de Euler e outras mais, podem ser provadas através de uma bijeção. Embora este método seja elegante e fácil de entender, não foi o método usado por Euler. Ele trabalhou com ferramentas analíticas chamadas funções geradoras, que serão apresentadas na última sessão.

Estudaremos como a Identidade de Euler é generalizada para os Pares de Euler e o Teorema do Número Pentagonal. Estaremos interessados também na representação gráfica de uma partição e como isso pode auxiliar no desenvolvimento da teoria.

Por fim, veremos como estes resultados são vistos em termos de funções geradoras.

1.1 Partições e Provas Bijetivas de Identidades Sobre Partições

Definições 1.1.1. *Uma partição de um inteiro positivo n, conforme [7], é uma sequência não-crescente finita de inteiros positivos* $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ *tal que* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. *Os termos* λ_i *são chamados partes da partição. A função partição* $p(n)$ *é o número de partições de n.*

Por exemplo, $p(4) = 5$ já que existem cinco partições do número quatro:

- 4;
- $3 + 1$;
- $2 + 2$;
- $2 + 1 + 1$;
- $1 + 1 + 1 + 1$.

Nas identidades envolvendo partições, frequentemente estamos interessados no número de partições que satisfazem determinada condição. Denotamos tal número por $p(n|[\text{condição}])$. A primeira identidade é um teorema devido a Euler, e vamos mostra-la conforme em [2].

Teorema 1.1.1. $p(n \mid \textit{partes ímpares}) = p(n \mid \textit{partes distintas})$ *para* $n \geq 1$.

Vamos refletir um pouco sobre como esta identidade pode ser provada. A primeira ideia que poderia surgir seria listar todas as partições de n em partes ímpares, depois as partições de n em partes distintas e ver que o número seria o mesmo. Mas a identidade vale para todo $n \geq 1$. Então este argumento torna-se impossível.

Outra ideia seria encontrar um modo geral de contar as partições, produzindo uma expressão explícita, a mesma para ambos os lados da identidade. Mas isto nem sempre é possível e também não é necessário. Se queremos verificar que o número de objetos de um tipo X é igual a o número de objetos de um tipo Y, então não precisamos efetivamente encontrar os números - é suficiente fazer pares e mostrar que cada objeto do tipo X faz par com um objeto do tipo Y e vice versa. Tal correspondência um a um entre dois conjuntos distintos é chamada uma *bijeção*.

Portanto, para provar a identidade acima, precisamos achar uma bijeção entre as partições em questão. Não é óbvio que exista uma bijeção entre dois conjuntos de partições. Como uma partição inteira de n é só uma coleção de partes cuja soma é n, então uma bijeção entre partições deve ser descrita em termos de operações nas partes. Uma simples operação é dividir uma parte par ao meio. O inverso dessa operação é adicionar duas partes iguais em uma parte duas vezes maior.

Demonstração. A bijeção que procuramos deve ter a propriedade que quando temos uma coleção de partes ímpares, a bijeção retorna uma coleção de partes distintas com a mesma soma. E o inverso também deve acontecer.

Começando com uma partição em partes ímpares, e procurando a bijeção com partições em partes distintas, temos que se as partes são distintas, não existe duas cópias da mesma parte. Portanto, se a saída da bijeção contém duas cópias de uma parte, então algo deve ser feito sobre isso. Como vimos anteriormente, uma estratégia natural a se fazer é adicionar as duas partes em uma parte com o dobro do tamanho. Podemos repetir esse procedimento até todas as partes estarem diferentes, uma vez que o número de partes decresce a cada operação.

Agora, começando com partições em partes distintas e procurando uma bijeção com partições em partes ímpares, podemos fazer o processo inverso. O inverso de adicionar duas partes iguais é a divisão de uma parte par ao meio. Repetindo

este processo obtemos uma coleção de partes ímpares, uma vez que o tamanho de algumas partes decresce a cada operação. □

Exemplos:

a) Começando com uma partição de $n = 13$ em partes ímpares, usando o processo de adicionar partes iguais, chegamos a uma partição de n em partes distintas.

$$\begin{aligned} 3+3+3+1+1+1+1 &\longmapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\longmapsto 6+3+2+2 \\ &\longmapsto 6+3+(2+2) \\ &\longmapsto 6+3+4. \end{aligned}$$

b) Agora começando com uma partição de $n = 13$ em partes distintas e usando o processo de dividir, o resultado será uma partição de n em partes ímpares.

$$\begin{aligned} 6+3+4 &\longmapsto 6+3+(2+2) \\ &\longmapsto 6+3+2+2 \\ &\longmapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\longmapsto 3+3+3+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Pode parecer que existe uma arbitrariedade na ordem que escolhemos para fazer as divisões das partes. Contudo, é claro que dividir uma parte não interfere na divisão de outras partes, de modo que a ordem em que as partes são divididas não afetam o resultado. O mesmo vale para o processo inverso, de adicionar as partes. Note que não é possível aplicar o processo de dividir partindo de partes distintas, pois as partes podem ser ímpares e daí não é possível dividir por dois e obter um número inteiro positivo.

Outras identidades podem ser provadas usando este processo de dividir/ adicionar.

Proposição 1.1.1. *$p(n \mid$ partes pares$) = p(n \mid$ cada parte aparece um número par de vezes$)$ para $n \geq 1$.*

Demonstração. Partindo de uma partição em partes pares, se cada parte aparece um número par de vezes, não há nada o que fazer. Agora, se alguma parte aparece um número ímpar de vezes, usamos o processo de dividir por dois e obtemos uma nova parte, que aparecerá em um número par de vezes. Reciprocamente, partindo de uma partição em que cada parte aparece um número par de vezes, se cada parte for par, não há nada o que fazer. Se existem partes ímpares, elas aparecerão em um número par de vezes, logo podemos adicioná-las e assim obter uma parte par. □

Exemplo: Se $n = 6$:

$$\begin{aligned} 6 &\longmapsto 3+3 \\ 4+2 &\longmapsto 2+2+1+1 \\ 2+2+2 &\longmapsto 1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

1.2 Os Pares de Euler

A técnica de dividir/adicionar para provar a identidade de Euler é versátil. Podemos usá-la para operar em outros conjuntos de partições, digamos A e B, contanto que o processo de divisão leve todas as partições de A em partições de B e o processo de adição leve todas as partições de B em A.

Teorema 1.2.1. *$p(n \mid$ partes de tamanho um$) = p(n \mid$ partes são potências distintas de dois$)$, para qualquer $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja A o conjunto de partições de n em partes de tamanho um. O número de partições de A é $p(n \mid \text{partes em } \{1\}) = 1$, já que a única partição de n satisfazendo a condição é $1 + 1 + \ldots + 1$ de n uns. O processo de adição

irá adicionar pares de um em dois, depois pares de dois em quatro, daí pares de quatro em oito, e assim por diante até todos os pares serem distintos. Consequentemente, o conjunto correspondente B deve ser o conjunto de partições de n em partes distintas em $1, 2, 4, 8, \ldots$ (potências de dois). Agora devemos verificar que o processo de divisão levará toda partição de B em A. Qualquer potência de dois (digamos 2^k) é dividida em um par de potências de dois ($2^{k-1} + 2^{k-1}$). Já que a única potência de dois que é ímpar é $2^0 = 1$, o processo continuará até que todas as partes restantes serem uns.

E como o lado esquerdo da expressão tem o valor um, provamos que todo inteiro positivo tem uma única partição em potências distintas de dois. Isto é chamado de *representação binária de inteiros.* □

Exemplo:

$1 = 2^0 = (1)_2$
$2 = 2^1 = (10)_2$
$3 = 2^1 + 2^0 = (11)_2$
$4 = 2^2 = (100)_2$
$5 = 2^2 + 2^0 = (101)_2$
$6 = 2^2 + 2^1 = (110)_2$

em que $(b_k b_{k-1} \ldots b_0)$ é o número escrito com dígitos binários, que é o modo comum para computadores representarem números.

Usamos o processo dividir/adicionar em diferentes casos. Mas para quais conjuntos N de tamanho das partes podemos obter uma bijeção com partes distintas em algum conjunto M?

Chamaremos tais pares de conjuntos, conforme a notação de [2], de *Pares de Euler*. Podemos obter facilmente novos pares de Euler de outros apenas escolhendo um inteiro positivo c e multiplicando cada parte por c.

Exemplo:

Já sabemos que tomando $N = 1$ e $M = 1, 2, 4, 8, \ldots$ teremos um par de Euler. Então, se multiplicarmos cada parte por três teremos a nova identidade do Par de Euler:

$$p(n \mid \text{partes em } \{3\}) = p(n \mid \text{partes distintas em } \{3, 6, 12, 24, \ldots\}).$$

Vamos agora voltar ao processo de adicionar/dividir. Começando com uma coleção de partes, de tamanhos que pertencem ao conjunto N. Pares de partes iguais são adicionados e readicionados até todas as partes serem distintas. Os passos de adição podem ser posfeitos de uma única forma pela divisão de partes pares se sabemos quando parar a divisão. Queremos parar a divisão quando tivermos somente partes com tamanhos em N. Mas se N contém, digamos, 3 e 6, então não saberemos se devemos parar a divisão no tamanho 6 ou se as partes originais são de tamanho 3.

Exemplo:

$6 + 6 \longrightarrow 12$
$3 + 3 + 3 + 3 \rightarrow 6 + 6 \rightarrow 12.$

Este problema ocorre se, e somente se, existem dois elementos em N tais que o primeiro é uma potência de dois vezes outro. Portanto, o processo adição/divisão prova o seguinte teorema geral para Pares de Euler:

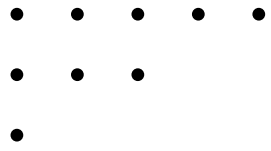
Teorema 1.2.2. *$p(n \mid$ partes em $N) = p(n \mid$ partes distintas em $M)$ para $n \geq 1$ em que N é qualquer conjunto de inteiros tal que nenhum elemento de N é uma potência de dois vezes um elemento de N, e M é o conjunto contendo todos elementos de N e seus múltiplos de potências de dois.*

1.3 Gráficos de Ferrers

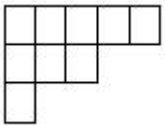
Uma representação gráfica para partições é muito útil e muitos fatos interessantes são melhor explicados graficamente. Os gráficos de Ferrers ou quadros de Ferrers, de acordo com [3], são dois modos similares de representar uma partição graficamente. As partes da partição são mostradas como linhas de pontos ou quadrados, respectivamente, sempre alinhados a esquerda.

Exemplo:

Seja $5 + 3 + 1$ uma partição de $n = 9$. Vamos representar esta partição graficamente. Utizando o gráfico de Ferrers, temos:



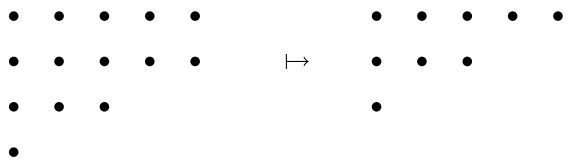
E usando o quadro de Ferrers, que também é conhecido como Diagrama de Young, temos:



Nesta seção, iremos lidar com várias transformações nos gráficos de Ferrers. Se tais transformações são invertíveis, então ela é uma bijeção e pode ser usada para provar algumas identidades.

Como primeiro exemplo de uma transformação que é invertível, tomemos o gráfico de Ferrers e removamos sua primeira linha.

Exemplo:



Teorema 1.3.1. *$p(n \mid$ maior parte é $r) = p(n - r \mid$ todas as partes $\leq r)$.*

Demonstração. Se removermos a primeira linha do gráfico de Ferrers, obteremos um novo gráfico de Ferrers. Suponha que r é o tamanho da linha removida. Então todas as linhas do novo gráfico de Ferrers terão comprimento menor ou igual a r. Inversamente, para qualquer gráfico de Ferrers, podemos acrescentar uma linha de comprimento r no topo e obter um novo gráfico de Ferrrers. Portanto a correspondência está provada. □

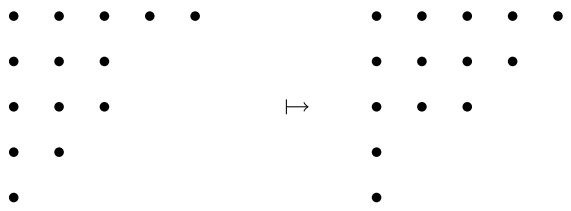
Uma variação desta técnica pode ser feita, removendo a primeira coluna ao invés da primeira linha. Obteremos um novo gráfico de Ferrers no qual nenhuma coluna é maior que a coluna removida. Mas o comprimento da coluna removida é igual ao número de linhas, isto é, o número de partes da partição. Portanto, esta transformação de remover colunas prova a identidade:

$$p(n \mid m \text{ partes}) = p(n - m \mid \text{no máximo } m \text{ partes}).$$

1.4 Partições Conjugadas

Dada uma partição qualquer, podemos obter uma nova partição trocando as linhas com as colunas, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna, se transforma em linha. Esta operação é chamada *conjugação* e a partição resultante desta operação é chamada *partição conjugada*.

Exemplo:



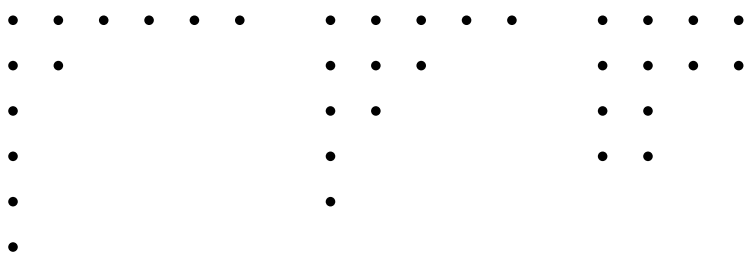
Teorema 1.4.1. *$p(n \mid m$ partes$) = p(n \mid$ a maior parte é $m)$.*

Demonstração. As linhas do primeiro gráfico se tornam as colunas do segundo gráfico através da conjugação e vice-versa. Assim, dada uma partição de n em m partes, ao fazer a conjugação, a partição resultante será uma partição de n em que a maior parte é m. Inversamente, dada uma partição de n cuja maior parte é m, ao fazer a conjugação, teremos uma partição com m partes. Portanto a identidade é verdadeira. □

Definição 1.4.1. *Uma partição é dita auto-conjugada se ela é sua própria partição conjugada.*

Exemplo:

As partições auto-conjugadas de 12 são: $6+2+1+1+1+1, 5+3+2+1+1$ e $4+4+2+2$.



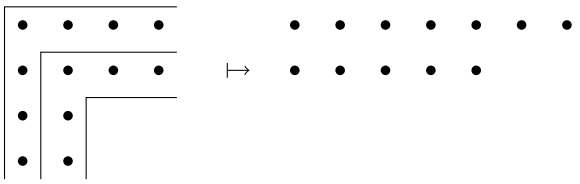
Existe uma transformação natural entre partições auto-conjugadas e partições em partes ímpares distintas.

Teorema 1.4.2. *$p(n \mid$ auto-conjugadas$) = p(n \mid$ partes ímpares distintas$)$.*

Demonstração. Partindo de partições de n auto-conjugadas, tomamos a primeira linha junto com a primeira coluna e fazemos uma nova linha de todos esses pontos. Então tomamos o que sobrou da segunda linha e coluna e fazemos uma nova linha. Já que partições auto-conjugadas são simétricas em relação à diagonal, sempre adicionaremos uma linha com uma coluna de mesmo tamanho - uma vez que elas dividem um ponto, e o resultado é uma linha duas vezes o tamanho da linha original menos um, portanto ímpar.

Inversamente, começando de uma partição em partes ímpares, podemos dobrar cada parte ímpar em um único gancho simétrico, e esses ganchos se encaixam um dentro do outro, formando um gráfico de Ferrers auto-conjugado. Logo, esta bijeção prova a identidade. □

Exemplo:



Agora podemos introduzir uma outra maneira de representar partições, que foi descrita no artigo [11], e é dada através de uma matriz constituída por duas linhas, que tem a interessante propriedade de não só representar a partição dada, como também descrever sua conjugada na segunda linha.

Esta representação deve ficar da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

e satisfazer as relações:

$$\begin{aligned} c_s &= 0, \\ d_s &\neq 0, \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}. \end{aligned}$$

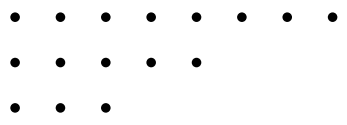
Exemplo:

Seja $p = 8 + 5 + 3$ uma partição do número 16. Logo, usando as restrições acima, obtemos

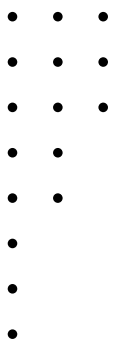
$$8 + 5 + 3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então, a segunda linha nos informa que a partição conjugada possui três números 1, dois números 2 e três números 3, ou seja, a partição conjugada de p é $p' = 3+3+3+2+2+1+1+1$. Note que se quisermos obter a partição dada, basta somarmos as colunas da matriz.

Vejamos isto usando os gráficos de Ferrers. A partição dada é:



Conjugando, temos:



que é a partição conjugada descrita pela segunda linha da matriz.

1.5 Um Limitante superior para $p(n)$

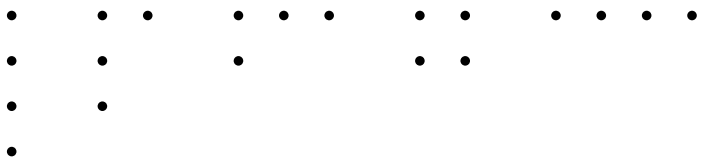
Depois de calcular a função $p(n)$ para diversos valores de n foi observado que esta função é monótona crescente. Nesta seção, veremos que esta conjectura é

verdadeira, e além disso, vamos ver que a função $p(n)$ pode ser majorada usando os números de Fibonacci.

Primeiro vamos provar que $p(n) > p(n-1)$ para todo $n \geq 2$.

Como um exemplo, compare as partições de três:

com as partições de quatro:



Para cada partição de $n-1$, obtemos uma partição de n adicionando um único ponto em uma nova linha no final do gráfico de Ferrers. Inversamente, cada partição de n com um único ponto na última linha origina uma partição de $n-1$ depois que removemos tal ponto. Portanto $p(n-1) = p(n \mid \text{o número um é parte})$ e consequentemente,

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{o número um não é parte}) \text{ para todo } n \geq 2.$$

Portanto $p(n) > p(n-1)$ para todo $n \geq 2$ e concluímos que $p(n)$ é uma função estritamente crescente.

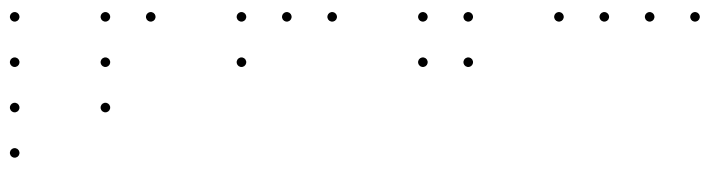
Agora para mostrarmos que esta função possui um limite superior, precisaremos dos famosos números de Fibonacci, definidos em [2]. Estes números foram estudados pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, apelidado "Fibonacci" - filho de Bonaccio.

Definição 1.5.1. *Os números de Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \ldots$, são definidos recursivamente por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.*

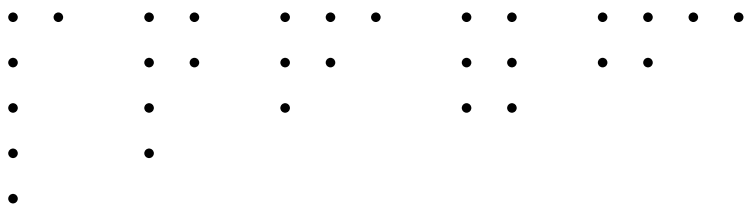
Partindo da equação $p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{o número um não é parte})$ para todo $n \geq 2$, vamos fazer uma comparação com a recorrência para os números de Fibonacci e verificar como $p(n|$ o número um não é parte) se compara com $p(n-2)$.

Primeiro observamos que $p(n-2) = p(n \mid \text{o 2 é parte pelo menos uma vez})$, já que o processo inserir/remover uma parte 2 é uma bijeção entre as partições em questão, pelo mesmo raciocínio usado para verificar a identidade anterior. Depois notamos que podemos transformar qualquer partição com nenhuma parte de tamanho 1 em uma única partição da qual o 2 é parte pelo menos uma vez, cortando a menor parte (que é pelo menos 2) em uma parte de tamanho 2 e zero ou mais partes de tamanho 1.

Por exemplo, para $n = 6$, a primeira bijeção, que é a inserção de uma parte de tamanho 2 em uma partição de $(n-2)$ passa de:

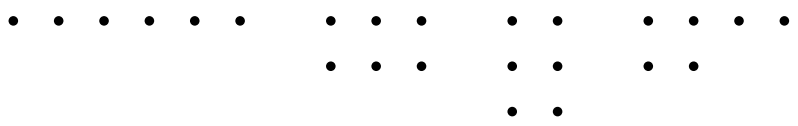


para, respectivamente,



Unir todas partes de tamanho 1 e uma de tamanho 2 em uma nova parte menor é possível para todas as partições, exceto para o segundo gráfico, pois ao unir todas as partes de tamanho 1 com uma de tamanho 2 no segundo gráfico, teremos a última linha maior que a primeira, o que não resulta uma partição.

Isto nos dará as quatro partições de 6 com nenhuma parte de tamanho 1:



O argumento anterior mostra que

$$p(n-2) = p(n \mid \text{o número 1 não é parte}) +$$
$$p(n-2 \mid \text{a menor parte de tamanho diferente de 1} <$$
$$(2 + \text{ o número de partes de tamanho 1})).$$

Note que o último termo é sempre não-negativo. Portanto, combinado com a equação $p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{o número um não é parte})$ para todo $n \geq 2$, implica em uma desigualdade parecida com a de Fibonacci

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \text{ para } n \geq 2.$$

Teorema 1.5.1. *Para todo $n \geq 0$, a função partição $p(n)$ é menor do que ou igual ao $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci, F_{n+1}.*

Demonstração. Temos que $p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$. Portanto a proposição vale para $n = 0$ e $n = 1$.

Suponha que a proposição seja verdadeira para todo $n < k$, para $k \geq 2$ e mostremos que vale para $n = k$. Assim:

$p(k) \leq p(k-1) + p(k-2)$, pela desigualdade anterior ao teorema

$\leq F_k + F_{k-1}$, pela hipótese de indução

$= F_{k+1}$, pela definição de F_k.

Portanto $p(n) \leq F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. □

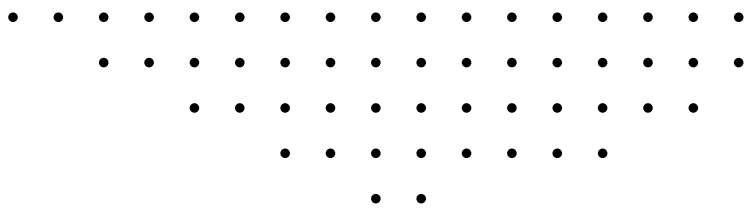
1.6 Bijeção de Bressoud

Uma forma de descrever que os números em um conjunto são distintos é dizer que a diferença entre cada dois números é pelo menos um. Dizemos que as partes são super-distintas se a diferença entre cada duas partes é pelo menos dois. Já que cada partição em partes super-distintas é também uma partição em partes distintas, existe a princípio uma quantidade maior de exemplos do primeiro tipo. Vamos mostrar agora uma prova bijetiva, conforme [5], de uma identidade sobre partes distintas e super-distintas.

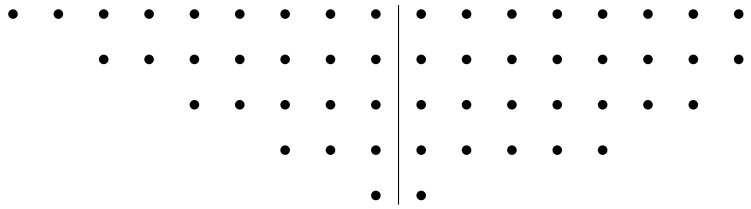
Teorema 1.6.1. $p(n \mid$ *partes super-distintas*$) = p(n \mid$ *partes distintas, cada parte* $< 2.($*o número de partes ímpares*$))$.

Demonstração. A prova bijetiva de Bressoud é a seguinte: tome o gráfico de Ferrers de uma partição em partes super-distintas e ajuste a margem esquerda em uma escada de dois pontos extra por linha. Isto é possível, pois as partes são super-distintas. Desenhe uma barra vertical de tal modo que a última linha tenha um ponto a esquerda desta linha, a próxima linha acima tenha três pontos, e assim por diante.

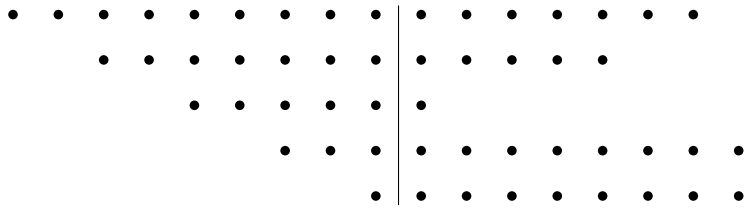
Por exemplo, tomando a partição $17 + 15 + 12 + 8 + 2$ e fazendo o seu gráfico de Ferrers, deslocando dois pontos em cada linha, temos:



Agora colocamos a barra vertical no gráfico, de modo que à esquerda da barra, as linhas do gráfico sejam de tamanho $1, 3, 5, 7$, etc, o que pode ser feito devido à maneira como o gráfico foi deslocado.



À direita da linha, obtemos um novo gráfico de Ferrers. Então, reordenamos as linhas à direita da barra vertical, começando com as linhas ímpares, em ordem decrescente seguidas das linhas pares, também em ordem decrescente.



Agora, lendo as novas linhas como as partes de uma partição transformada, nós temos neste exemplo $16 + 12 + 6 + 11 + 9$ e reordenando do modo usual, $16+12+11+9+6$. Segue da construção que todas as partes são distintas e que a menor parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares. De fato, as partes ímpares terminarão como linhas no final do gráfico. Suponha que sejam k partes ímpares. Então a menor parte par terá, pela construção do gráfico, $2k+1$ pontos à esquerda da barra e pelo menos 1 à direita da barra. Portanto cada parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares.

Este processo é invertível e portanto nos dá uma bijeção entre as duas classes de partições propostas. □

1.7 Teorema do Número Pentagonal de Euler

Euler foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Portanto não é de se surpreender que existem mais de uma identidade com o seu nome. Na verdade,

Legendre foi o primeiro a expressar o resultado de Euler em termos de partições. Este resultado se encontra em vários textos, como em [1, 4].

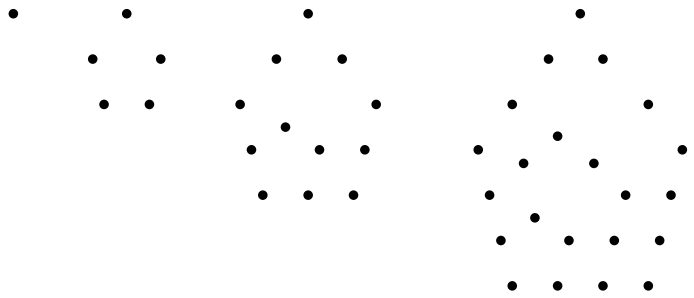
Teorema 1.7.1 (Teorema do número pentagonal de Euler)**.**

$p(n|$*número par de partes distintas*$) = p(n|$*número ímpar de partes distintas*$)+e(n)$

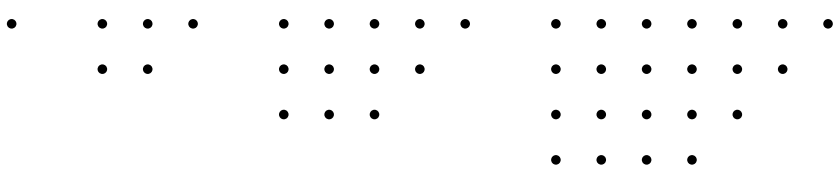
em que

$$e(n) = \begin{cases} -1^j & \textit{se } n = j(3j \pm 1)/2 \textit{ para algum inteiro } j \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

O nome do teorema é um bom ponto de partida para começar nossa discussão. Os números pentagonais são $1, 5, 12, 22, \ldots$, referentes ao número de pontos no pentágono de lado crescente:

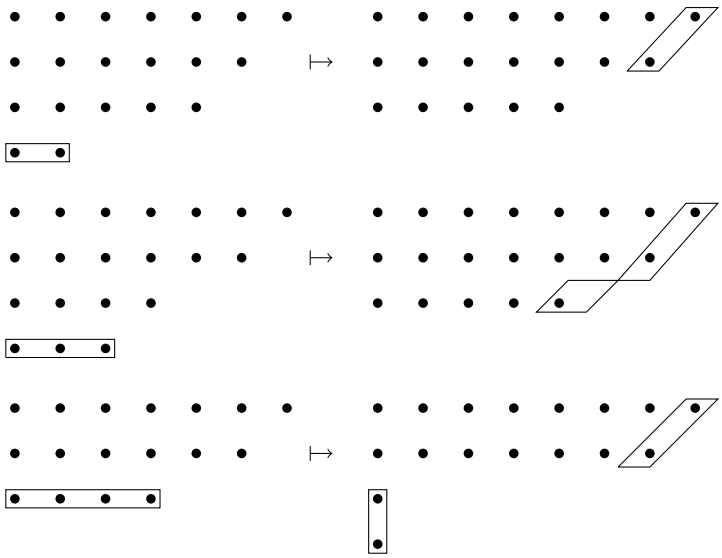


O j-ésimo pentágono consiste do j-ésimo triângulo no topo de um retângulo de base j e altura $j-1$. Portanto, o j-ésimo número pentagonal é $j(j+1)/2+j(j-1)$, que simplificando fica $3(3j+1)/2$. Agora vamos girar os pentágonos no sentido horário e ajustar os pontos do triângulo nas linhas, de forma a obter gráficos de Ferrers:



Observamos que estes são gráficos de Ferrers de certas partições em partes distintas: $1, 3+2, 5+4+3, 7+6+5+4$, etc. Estas partições particulares vão aparecer como casos especiais na seguinte prova do teorema do número pentagonal de Euler. Esta prova bijetiva foi dada por Franklin em 1881.

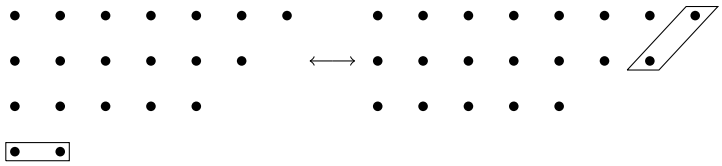
Vamos criar uma bijeção entre partições de algum inteiro n em um número par de partes distintas de um lado e do outro partições de n em um número ímpar de partes distintas. Seria perfeito neste caso uma transformação invertível que muda o número de partes por um, mantendo as partes distintas. Então, como uma primeira ideia, o que acontece se tomarmos a menor parte e distribuir seus pontos nas linhas restantes, um ponto em cada linha, no final? Vejamos alguns exemplos:



A transformação origina uma partição em partes distintas se as linhas são pelo menos tanto quanto o número de pontos na parte removida - como nos primeiros dois exemplos. Mas precisamos de alguma coisa que faça esta transformação invertível, uma vez que os dois primeiros exemplos resultam na mesma partição.

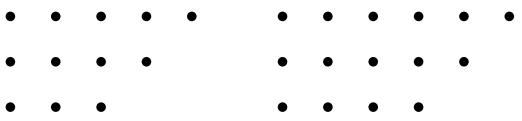
Na direção inversa, tomaremos um ponto das partes maiores e formaremos

uma nova linha menor. Em outras palavras, vamos remover a diagonal mais à direita do gráfico de Ferrers:



Agora precisamos analisar quando devemos remover a última linha ou a diagonal mais à direita. Uma regra que faz mais sentido é mover a diagonal mais à direita se ela é menor que a menor linha, e caso contrário, removemos a menor linha.

Contudo, existe um caso que esta transformação falha ao produzir um gráfico de Ferrers válido, que é quando a menor linha intersecta a diagonal mais à direita, e a linha tem o mesmo número de pontos que a diagonal ou um a mais:



Os gráficos de Ferrers no primeiro caso são os pentágonos de tamanho $j(3j-1)/2$ pontos, considerados no começo da seção. Os pentágonos do segundo caso têm uma coluna extra na sua parte retangular, totalizando $j(3j+1)/2$ pontos. Temos então descrita uma transformação invertível que, exceto para as partições pentagonais, cada partição de n em um número ímpar de partes distintas corresponde a uma partição de n em um número par de partes distintas. Portanto:

$$p(n|\text{número par de partes distintas}) = p(n|\text{número ímpar de partes distintas}) + e(n)$$

em que $e(n) = 0$ exceto para $n = j(3j \pm 1)/2$ para algum inteiro j, que deve ser 1 se o número j de partes é par e -1 se ímpar. Isto prova o teorema.

1.8 Séries formais de potências

Vamos introduzir as séries formais de potências para evitar questões de convergência em séries infinitas. O que faremos é formular a teoria em uma base lógica própria e revelar a ausência de questões de convergência. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12].

Então defina α como sendo uma sequência infinita de números complexos

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Denotemos por P a classe de tais sequências infinitas α, e essas classes são as séries formais de potências. Existem três subconjuntos de P que têm um papel importante:

- P_r: são as sequências α cujas componentes a_j são números reais;
- P_1: são as sequências α com $a_0 = 1$;
- P_0: são as sequências α com $a_0 = 0$.

Embora tenhamos especificado que as componentes a_j nos elementos de P são números complexos, a teoria pode ser desenvolvida com a_j em qualquer domínio integral.

Se $\beta \in P$, digamos $\beta = [b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots]$, definamos a adição por

$$\alpha + \beta = [a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots]$$

e a multiplicação por

$$\alpha\beta = [a_0b_0, a_1b_0 + a_0b_1, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \ldots \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}, \ldots].$$

A definição de igualdade é que $\alpha = \beta$ se e somente se $a_j = b_j$ para todo j, isto é, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Não é difícil ver que o conjunto P é um anel comutativo com unidade. O elemento nulo e o elemento unidade são, respectivamente,

$$z = [0, 0, 0, 0, \ldots] \text{ e } u = [1, 0, 0, 0, \ldots].$$

Dado qualquer $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$, o inverso aditivo de α é

$$-\alpha = [-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \ldots].$$

A propriedade associativa da multiplicação é trivial e daí segue que P é um anel comutativo.

Além disso, $\alpha\beta = z$ se e somente se $\alpha = z$ ou $\beta = z$. Se $\alpha = z$ ou $\beta = z$ é óbvio que $\alpha\beta = z$. Para ver a recíproca, suponha que $\alpha\beta = z$ mas $\alpha \neq z$ e $\beta \neq z$. Seja j o último inteiro não-negativo tal que $a_j \neq 0$, e analogamente seja k o último inteiro não-negativo tal que $b_k \neq 0$. Então a componente na $(j + k + 1)$-ésima posição em $\alpha\beta$ é

$$\sum_{r=0}^{j+k} a_r b_{j+k-r} = a_j b_k \neq 0,$$

que contradiz $\alpha\beta = z$. Segue então que se $\alpha\beta = \alpha\gamma$ e $\alpha \neq z$ então $\beta = \gamma$, e P é um domínio integral. Dado qualquer α em P, existe um inverso multiplicativo correspondete α^{-1} se existe um elemento α^{-1} em P tal que

$$\alpha.\alpha^{-1} = \alpha^{-1}.\alpha = u = [1, 0, 0, 0, \ldots].$$

A partir de agora trataremos todas as séries mencionadas como séries formais de potências.

1.9 Funções Geradoras

A primeira ferramenta usada por Euler para lidar com partições foi o uso de funções geradoras. Nesta seção, vamos usá-las para provar os resultados de Euler.

Suponha que $S = \{n_1, \ldots, n_r\}$ seja um conjunto finito de r inteiros positivos. Para $r = 3$, vemos que:

$$(1+q^{n_1})(1+q^{n_2})(1+q^{n_3}) = 1+q^{n_1}+q^{n_2}+q^{n_3}+q^{n_1+n_2}+q^{n_1+n_3}+q^{n_2+n_3}+q^{n_1+n_2+n_3},$$

em que nos expoentes estão todas as possíveis partições usando elementos distintos de $\{n_1, n_2, n_3\}$.

Para ser mais claro, se $S = \{1, 2, 3\}$, então o polinômio anterior é

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 + q^6.$$

Esta função, que neste caso é um polinômio, é chamada a *função geradora* para partições em elementos distintos de $\{1, 2, 3\}$; o coeficiente de q^n é o número de partições de n. Assim, generalizando o exemplo, se $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ temos:

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{partes distintas em } S)q^n = \prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}) = \prod_{n\in S}(1+q^n).$$

Agora vamos permitir que as partes se repitam em até d vezes. Se $d = 3$ e $S = \{n_1, n_2\}$, temos que:

$$\begin{aligned}
&(1 + q^{n_1} + q^{n_1+n_1} + q^{n_1+n_1+n_1})(1 + q^{n_2} + q^{n_2+n_2} + q^{n_2+n_2+n_2}) \\
&\quad = 1 + q^{n_2} + q^{n_2+n_2} + q^{n_2+n_2+n_2} + q^{n_1} + q^{n_1+n_2} + q^{n_1+n_2+n_2} \\
&\quad +q^{n_1+n_2+n_2+n_2} + q^{n_1+n_1} + q^{n_1+n_1+n_2} + q^{n_1+n_1+n_2+n_2} \\
&\quad +q^{n_1+n_1+n_2+n_2+n_2} + q^{n_1+n_1+n_1} + q^{n_1+n_1+n_1+n_2} + q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2} \\
&\quad +q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2+n_2} \\
&\quad = \sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{partes em } \{n_1, n_2\}, \text{nenhuma parte repetida mais que três vezes})q^n.
\end{aligned}$$

E em geral, se $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$, então:

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{partes em } S, \text{nenhuma parte repetida mais que } d \text{ vezes}) q^n$$
$$= \prod_{i=1}^{r} (1 + q^{n_i} + q^{n_i+n_i} + \ldots + q^{\overbrace{n_i + n_i + \ldots + n_i}^{d \text{ vezes}}})$$
$$= \prod_{i=1}^{r} (1 + q^{n_i} + q^{2n_i} + \ldots + q^{dn_i})$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{(1 - q^{(d+1)n_i})}{(1 - q^{n_i})} = \prod_{n\in S} \frac{1 - q^{(d+1)n}}{(1 - q^n)}$$

em que a penúltima igualdade foi obtida pela aplicação da fórmula para somas geométricas finitas

$$\sum_{j=0}^{N} x^j = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Mas gostaríamos que as partes pudessem aparecer um número arbitrário de vezes, isto é, $d \to \infty$. O argumento anterior ainda é válido, pois estamos considerando séries formias de potências. Logo:

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{partes em } S) q^n = \prod_{i=1}^{r} (1 + q^{n_i} + q^{2n_i} + q^{3n_i} + \ldots)$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - q^{n_i}} = \prod_{n\in S} \frac{1}{1 - q^n}.$$

no qual usamos a soma de uma série geométrica infinita

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1 - x}.$$

Agora, vamos considerar S como um conjunto infinito de inteiros positivos. Observe que os extremos das equações anteriores não fazem referência à finitude de S. Então as mesmas fórmulas são válidas quando S é infinito. Em outras palavras:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes distintas em } S) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes em } S, \text{nenhuma parte repetida mais que d vezes}) q^n =$$
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{(d+1)n}}{(1-q^n)}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes em } S) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}, \quad |q| < 1.$$

Na seção 1.1, provamos que $p(n \mid \text{partes ímpares}) = p(n \mid \text{partes distintas})$ para $n \geq 1$. Vamos ver este resultado à luz de funções geradoras.

Por um lado, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes distintas em } S) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n)$ e por outro, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes ímpares}) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})$. Então:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)$$
$$= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1+q^6)\dots$$
$$= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\left(\frac{1-q^{10}}{1-q^5}\right)\left(\frac{1-q^{12}}{1-q^6}\right)\dots$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}, \text{ (cancelando os fatores comuns do numerador e denominador)}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q^{2n-1})}.$$

Como as funções geradoras são iguais, o resultado é verdadeiro, para todo $n \geq 0$.

Algumas vezes precisaremos mais do que o número que está sendo particionado. Queremos ter a função geradora fornecendo também o número de partes da partição. Para isto, será necessário inserir uma segunda variável, por exemplo z, cujo expoente contará quantas partes são usadas em cada partição. Então, usando o mesmo argumento do início da seção, teremos:

$$(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3})$$
$$= 1+zq^{n_1}+zq^{n_2}+zq^{n_3}+z^2q^{n_1+n_2}+z^2q^{n_1+n_3}+z^2q^{n_2+n_3}+z^3q^{n_1+n_2+n_3}.$$

Este exemplo nos deixa com igualdades análogas às mostradas para uma variável:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n \mid m \text{ partes distintas em } S)z^m q^n = \prod_{n\in S}(1+zq^n) \qquad (1.1)$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n \mid m \text{ partes em } S, \text{nenhuma parte repetida mais que d vezes})z^m q^n =$$

$$\prod_{n\in S}\frac{1-z^{d+1}q^{(d+1)n}}{(1-zq^n)}.$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n \mid m \text{ partes em } S)z^m q^n = \prod_{\in S}\frac{1}{1-zq^n}.$$

Agora também é possível reescrever o teorema do número pentagonal de Euler, em termos de função geradora.

$p(n|\text{número par de partes distintas}) - p(n|\text{número ímpar de partes distintas})$

$$= \begin{cases} (-1)^j & , \text{ se } n = j(3j\pm 1)/2 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se fizermos $z=-1$ em (1.1), o coeficiente resultante de q^n no lado direito é precisamente o lado esquerdo da igualdade do teorema. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(p(n|\text{número par de partes distintas})-p(n|\text{número ímpar de partes distintas}))q^n$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j+1)/2}$$
$$= 1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}(1+q^j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}$$

o que mostra o teorema.

Combinando o teorema do número pentagonal com a função geradora para $p(n)$, nós vemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^m)} \text{ e daí}$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1 \text{ e portanto}$$

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1.$$

Comparando os coeficientes de q^n em ambos os lados desta última identidade, Euler encontrou a seguinte recorrência para $p(n)$:

$$p(0) = 1 \text{ e } p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \ldots = 0, n > 0.$$

Capítulo 2

Polinômios Gaussianos e Identidades de Rogers-Ramanujan

Neste capítulo, usando o que já foi feito sobre partições e funções geradoras, faremos generalizações dos números binomiais, suas várias identidades e também algumas das mais famosas identidades sobre partições, devidas a Rogers-Ramanujan.

2.1 Números binomiais

O número binomial $\binom{n}{j}$ é definido combinatoriamente como o número de maneiras de escolher um subconjunto de j elementos de um conjunto de n elementos. Os números binomiais têm a forma explícita:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j(j-1)(j-2)\dots 1} \text{ para } n \geq j \geq 0.$$

Os números binomiais são usualmente apresentados em uma tabela triangular chamada *Triângulo de Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots &
\end{array}$$

ou com os números correspondentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots &
\end{array}$$

Temos também dois teoremas conhecidos e algumas propriedades referentes a estes números. A demonstração destes resultados pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.1.1 (Binômio de Newton)**.** $(1+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j$.

Teorema 2.1.2. $(1-z)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} z^j$, *para* $|z| < 1$.

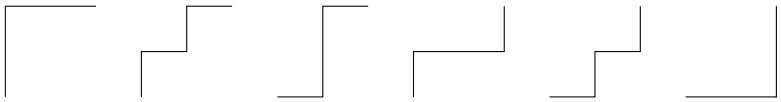
Propriedades:

- Simetria: $\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{n}$;
- Soma das linhas: $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$;

- Soma alternada: $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0,$ para $n \geq 1$;
- Recorrência: $\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}$, para $n > j > 0$, com os valores iniciais $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

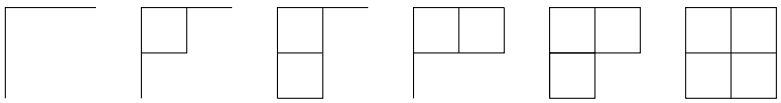
2.2 Números q-binomiais

Consideremos a seguinte questão: Quantos caminhos existem do ponto $(0,0)$ no plano até o ponto $(2,2)$ nos quais os únicos passos são caminhos unitários tanto verticalmente para cima ou horizontalmente para a direita? Neste caso a resposta é seis:



A explicação para a resposta 6 é que $6 = \binom{2+2}{2}$, o número de maneiras de escolher dois passos horizontais do total de quatro passos, os dois restantes sendo verticais. Pelo mesmo argumento, o número de tais caminhos do $(0,0)$ até (N,m) é dado por $\binom{N+m}{m}$.

Agora vamos fazer um refinamento deste resultado inserindo quadrados acima e à esqueda dos caminhos:



Se considerarmos estas $\binom{2+2}{2}$ figuras como gráficos de Ferrers de partições, elas correspondem a seis gráficos de Ferrers que se ajustam em uma caixa 2×2,

isto é, partições em no máximo duas partes, cada parte de tamanho no máximo dois:

$$\emptyset \qquad 1 \qquad 1+1 \qquad 2 \qquad 2+1 \qquad 2+2.$$

Em analogia com a definição combinatorial do número binomial, vamos definir um *número q-binomial*, de acordo com [2], como sendo a função geradora, na variável q para estas $\binom{2+2}{2}$ partições:

$$\left[\begin{array}{c} 2+2 \\ 2 \end{array} \right] = q^0 + q^1 + q^{1+1} + q^2 + q^{2+1} + q^{2+2} = q^0 + q^1 + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

Definição 2.2.1. *Os números q-binomiais são definidos como:*

$$\left[\begin{array}{c} N+m \\ m \end{array} \right] = \sum_{n \geq 0} p(n \mid \textit{número de partes } \leq m, \textit{cada parte } \leq N) q^n.$$

Uma notação também encontrada na literatura é $\left[\begin{array}{c} N+m \\ m \end{array} \right]_q$, mas no texto utilizaremos da maneira como definida anteriormente.

Os números q-binomiais são chamados q-análogos dos números binomiais, o que significa que eles são um refinamento natural tal que para $q = 1$, temos $\binom{N+m}{m}$.

Uma propriedade dos números binomiais que também é válida para os números q-binomiais é a simetria, isto é,

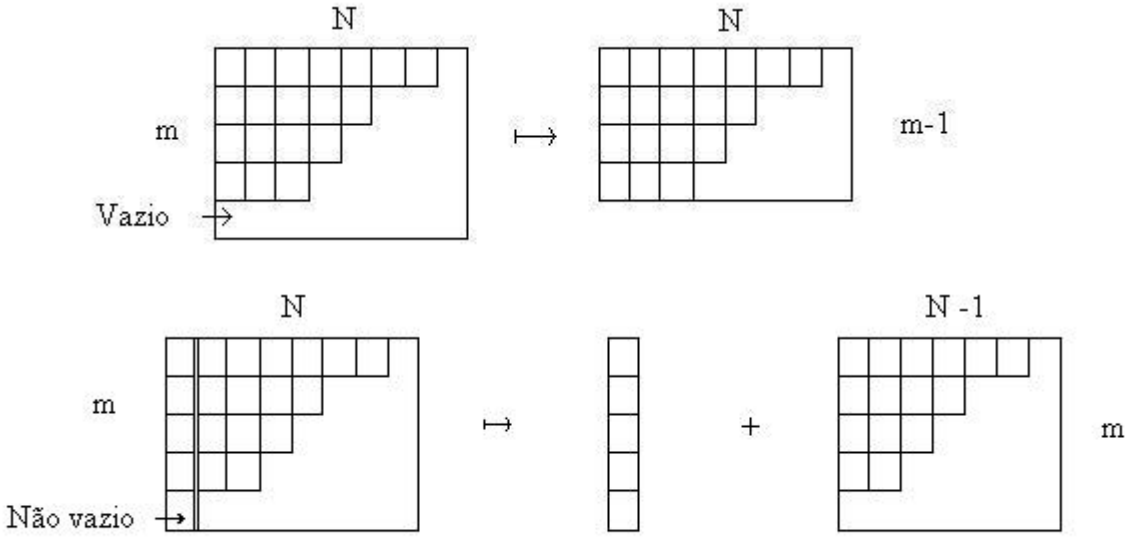
$$\left[\begin{array}{c} N+m \\ m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} N+m \\ N \end{array} \right].$$

A demonstração desta propriedade segue direto da conjugação do gráfico de Ferrers.

Existe uma recorrência para os números binomiais, que podemos escrever como:

$$\binom{N+m}{m} = \binom{N+m-1}{m-1} + \binom{N+m-1}{N-1}.$$

Em termos de gráficos de Ferrers, esta recorrência diz que o conjunto de gráficos que se encaixam em uma caixa $N \times m$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos: gráficos que se encaixam em uma caixa $N \times (m-1)$ e gráficos que não se encaixam. No último caso, estes gráficos de Ferrers têm a primeira coluna de comprimento m e quando removemos a última linha o resultado é um gráfico de Ferrers que se encaixa em uma caixa $(N-1) \times m$.



Redefinindo para partições de n, o mesmo argumento pode ser expresso como:

$p(n \mid \text{número de partes } \leq m, \text{cada parte } \leq N)q^n$
$= p(n \mid \text{número de partes } \leq m-1, \text{cada parte } \leq N)q^n$

$+q^m p(n-m \mid \text{número de partes } \leq m, \text{cada parte } \leq N-1)q^{n-m}.$

Fazendo a somatória sobre n temos a recorrência q-análoga:

$$\left[\begin{array}{c} N+m \\ m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} N+m-1 \\ m-1 \end{array} \right] + q^m \left[\begin{array}{c} N+m-1 \\ N-1 \end{array} \right].$$

Observe que pela conjugação do mesmo argumento, também temos outra recorrência alternativa:

$$\left[\begin{array}{c} N+m \\ m \end{array} \right] = q^N \left[\begin{array}{c} N+m-1 \\ m-1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} N+m-1 \\ N-1 \end{array} \right].$$

Temos também a fórmula explícita para os números binomiais, que será demonstrada em (2.5), na página 40:

$$\binom{N}{m} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)\dots 1} = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

A fórmula análoga para números q-binomiais é:

$$\left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right] = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\dots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)}.$$

E como estamos relacionando os números q-binomiais com os números binomiais, vamos ver os q-análogos para o teorema binomial e para as séries binomiais. Já que os números q-binomiais são funções geradoras para certas partições, a ideia será inserir a variável q no lado esquerdo das expressões para $(1+z)^n$ e $(1-z)^{-n}$ no teorema binomial e nas séries binomiais, respectivamente, e então contar o número de partições.

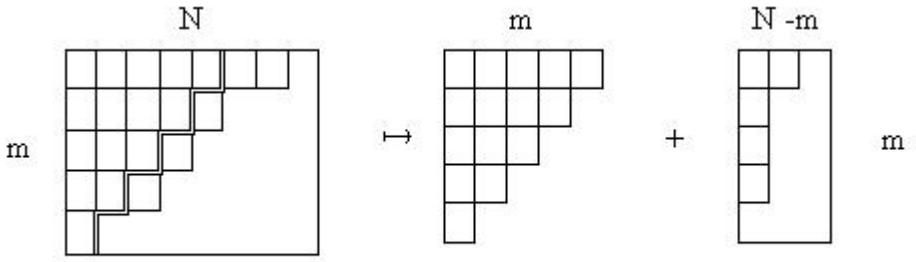
Teorema 2.2.1 (Teorema do número q-binomial)**.**

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)/2} \left[\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right] z^m.$$

Demonstração. Para provar o teorema, parece razoável modelar seu lado esquerdo na fórmula que foi deduzida quando estudamos as funções geradoras, reescrita da seguinte forma.

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p(n \mid m \text{ partes distintas, cada parte } \leq N) z^m q^n.$$

Mas na fórmula anterior, as partições têm m partes distintas, cada parte $\leq N$, ao passo que as partições contadas por $\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$ têm no máximo m partes, não necessariamente distintas, cada uma $\leq N-m$. Contudo, existe uma simples bijeção entre estes dois conjuntos de partições: das partições primeiro descritas, remova i da i-ésima menor parte, para todo i de 1 até m:



Reciprocramente, dada uma partição com no máximo m partes, não necessariamente distintas, cada uma $\leq N-m$, acrescentamos i na i-ésima menor parte, para todo i de 1 até m. Nesta bijeção, removemos/acrescentamos $1+2+\ldots+m = m(m+1)/2$ quadrados, ou seja, o expoente de q será $m(m+1)/2$ e portanto o teorema fica provado.

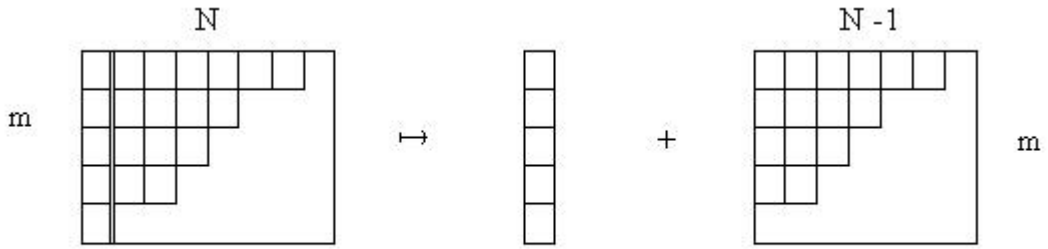
□

Teorema 2.2.2 (Séries q-binomiais)**.** $\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-zq^j} = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix} z^m,$ *para* $|z|<1$ *e* $|q|<1$.

Demonstração. Para as séries q-binomiais, vamos encontrar o mesmo tipo de problema, com uma solução mais simples. Usando a equação:

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-zq^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p(n \mid m \text{ partes, cada parte } \leq N) z^m q^n$$

e modelando seu lado esquerdo, nós transformamos partições com m partes em partições com no máximo m partes. Para isto, removemos a primeira coluna (de tamanho m) do gráfico de Ferrers. Desde que as primeiras partições tenham m partes, cada parte $\leq N$, a partição transformada terá no máximo m partes, cada parte $\leq N-1$. Portanto o teorema fica provado.



□

Vamos ver agora uma outra maneira de introduzir os números q-binomiais, conforme [6], usando a mesma motivação de contar o número de caminhos no primeiro quadrante, partindo do ponto $(0,0)$ até o ponto $(n-k,k)$, utilizando n passos, sendo possível apenas movimentos unitários para a direita e para cima.

Como exemplo, consideremos o caso de dois movimentos, como mostrado a seguir:

No primeiro gráfico, a área sob o caminho é um; no segundo, a área é zero. Vamos então particionar os $\binom{n}{k}$ caminhos de acordo com a área sob a curva. Já que

$$(x+y)^2 = xx + xy + yx + yy$$

nós podemos acompanhar a área reescrevendo cada termo com os x's primeiro e adicionar uma unidade de área sempre que yx é trocado por xy. Vamos usar um parâmetro q para fazer esta contagem, requerendo que

$$yx = qxy.$$

Como queremos que os q's apareçam primeiro, também vamos assumir que

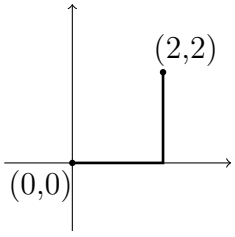
$$yq = qy,\ xq = qx.$$

Por exemplo, trabalhando com $(x+y)^4$, vemos que o coeficiente de x^2y^2 vem de seis caminhos possíveis, cuja função geradora é

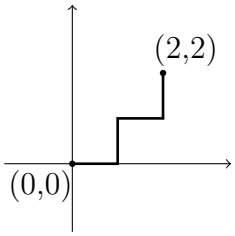
$$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

De fato, os caminhos possíveis e os modos que podem ser reescritos são:

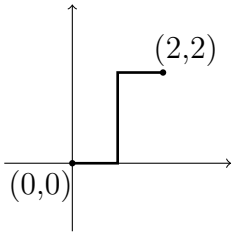
- $xxyy = x^2y^2$, resultando o coeficiente 1.



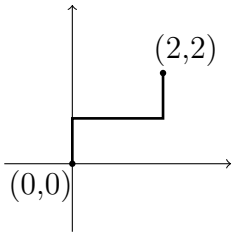
- $xyxy = xqxyy = qx^2y^2$, resultando o coefiente q.



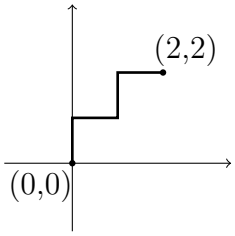
- $xyyx = xyqxy = xqyxy = qxqxyy = q^2x^2y^2$, resultando o coeficiente q^2.



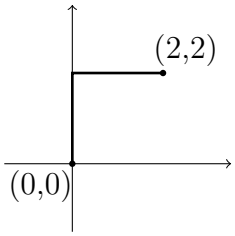
- $yxxy = qxyxy = qxqxyy = q^2x^2y^2$, resultando o coeficiente q^2.



- $yxyx = qxyqxy = qxqyxy = q^2xqxyy = q^3x^2y^2$, resultando o coeficiente q^3.



- $yyxx = yqxyx = qyxqxy = qqxyqxy = q^3xqxyy = q^4x^2y^2$, resultando o coeficiente q^4.



Vamos agora então derivar uma fórmula para estes coeficientes. Relembrando a propriedade do triângulo de Pascal para coeficientes binomiais, temos

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{2.1}$$

Contudo, a equação (2.1) pode vir da igualdade

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y).$$

Vamos usar este método para encontrar os coeficientes q-binomiais $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ que são definidos por

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k, \tag{2.2}$$

em que

$$yx = qxy$$
$$xq = qx$$
$$yq = qy.$$

Primeiro,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$$

nos dá que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right] x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^{n-k} y^k (x+y).$$

Como

$$y^k x = q^k x y^k$$

temos que

$$\left[\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] q^k + \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right]. \tag{2.3}$$

Esta é uma extensão de (2.1). No caso quando $q = 1$ existe somente uma relação do triângulo de Pascal. No q-caso, existe uma segunda. Usando o mesmo argumento

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

resulta que

$$\left[\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] + q^{n+1-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right]. \tag{2.4}$$

As relações (2.3) e (2.4) combinadas resultam em

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right] - q^{n+1-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] q^k + \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right] - q^{n+1-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right].$$

Logo

$$(1-q^k) \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = (1-q^{n+1-k}) \left[\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right]$$

e portanto,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})}{(1-q^k)} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Repetindo este processo recursivamente, chegamos à igualdade:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})\ldots(1-q^n)}{(1-q^k)\ldots(1-q)} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Portanto, chegamos que a fórmula para os números q-binomiais é:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1-k})\ldots(1-q^n)}{(1-q^k)\ldots(1-q)}. \tag{2.5}$$

2.3 Identidades gaussianas polinomiais

Os números q-binomiais também são chamados *polinômios gaussianos*. Eles são polinômios em q pela definição combinatória, e pela fórmula vemos que o grau de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ deve ser $mN - m(m-1)/2 - m(m+1)/2 = mN - m^2 = m(N-m)$. Gauss não foi o primeiro a definir estes polinômios, mas ele provou o teorema a seguir, [2], para estabelecer o sinal da soma Gaussiana.

Teorema 2.3.1 (Fórmula Gaussiana)**.** *Temos:*

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & , \quad \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots(1-q^{n-1}) & , \quad \textit{se } n \textit{ é par.} \end{cases}$$

Demonstração. Se n é ímpar, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} && \text{(substituindo } n\text{por } n-j) \\
&= (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} && \text{(por simetria)} \\
&= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} && \text{(porque } n \text{ é ímpar).}
\end{aligned}$$

Como um polinômio só pode ser igual ao seu negativo se ele for 0, concluímos que se n é ímpar a fórmula é verdadeira.

Agora, se n é par, denotemos o lado esquerdo da fórmula Gaussiana por $f(n)$. Usando a recorrência para números q-binomiais, temos:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \right) \\
&= f(n-1) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} && \text{(pela simetria)} \\
&= f(n-1) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} && \text{(substituindo } j \text{ por } n-j) \\
&= f(n-1) + (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

ao passo que usando a recorrência alternativa temos:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \right) \\
&= -f(n-1) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Somando as duas expressões para $f(n)$, se n é par, segue que:

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(1-(1-q^j)) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(1-q^j) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \text{(pela fórmula Gaussiana, para } n \text{ ímpar)} \\ &= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(1-q^j)\frac{(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})\dots(1-q^{n-j})}{(1-q^j)(1-q^{j-1})(1-q)} \\ &= -(1-q^{n-1})\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= (1-q^{n-1})f(n-2). \end{aligned}$$

Portanto, quando n é par,

$$\begin{aligned} f(n) &= (1-q^{n-1})f(n-2) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})f(n-4) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})\dots(1-q^3)(1-q)f(0) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3})\dots(1-q^3)(1-q) \end{aligned}$$

e a fórmula Gaussiana está provada.

□

Teorema 2.3.2. $\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right]^2 = \left[\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right]$.

Demonstração. Para provar este teorema, primeiro aplicamos o teorema q-binomial duas vezes.

$$\sum_{j=0}^{2n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} 2n \\ j \end{array} \right] = \prod_{j=1}^{2n}(1+zq^j) = \prod_{j=1}^{n}(1+zq^j)\prod_{j=1}^{n}(1+(zq^n)q^j)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] \sum_{k=0}^{n}(zq^n)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right].$$

Agora, comparando o coeficiente de z^n, temos:

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right] q^{\frac{nk+k(k+1)}{2}} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n(n+1)}{2}+k^2} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]^2,$$

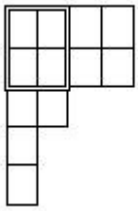
em que usamos a simetria no último passo. Cancelando o termo $q^{n(n+1)/2}$, o teorema fica provado. □

2.4 Quadrado de Durfee e Símbolo de Frobenius

Definição 2.4.1. *Uma dada partição tem um quadrado de Durfee de lado s se a s-ésima parte é $\geq s$ mas a $(s+1)$-ésima parte é $\leq s$.*

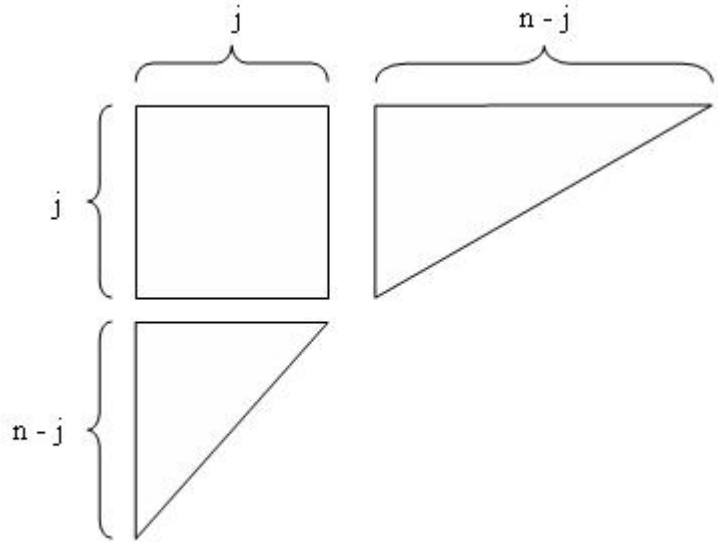
Em outras palavras, chamamos quadrado de Durfee da partição ao maior quadrado possível dentro do gráfico de Ferrers e encaixado no seu canto superior esquerdo.

Exemplo: A partição $4+4+2+1+1$ tem um quadrado de Durfee de lado 2.



Da definição (2.2.1) sabemos que o número q-binomial $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ é a função geradora para todas partições com no máximo n partes, cada parte $\leq n$.

Destas partições, qual é a função geradora para partições com quadrado de Durfee de lado j? Para respondermos esta questão, vamos dar uma demonstração combinatória para o teorema (2.3.2) recorrer a representação genérica do gráfico de Ferrers para estas partições.



A partição gerada pelo quadrado $j \times j$ é contada pelo monômio $q^{j \times j} = q^{j^2}$.

Pela definição de número q-binomial, a parte superior direita é contada por $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$, e a parte inferior esquerda é contada por $\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$.

Portanto, a função geradora para partições em no máximo n partes, cada parte $\leq n$, com quadrado de Durfee de lado j é

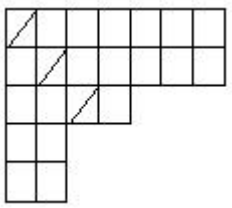
$$q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 .$$

Mas cada partição contada por $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ tem um único quadrado de Durfee com $0 \leq j \leq n$. Portanto,

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

De um gráfico de Ferrers de uma partição, podemos construir uma representação inteiramente geométrica de uma partição que revela imediatamente o tamanho do quadrado de Durfee e a partição conjugada. Esta nova representação é chamada o *símbolo de Frobenius* da partição e é construída como segue.

Consideremos a partição do número 22 dada por $7+7+4+2+2$.



O símbolo consiste de duas linhas de inteiros não negativos decrescente. As linhas são cada uma de tamanho s, em que s é o tamanho do quadrado de Durfee. A j-ésima entrada na primeira coluna consiste do número de quadrados na j-ésima linha do gráfico de Ferrers à direita da diagonal marcada no diagrama. A j-ésima

entrada da segunda linha consiste do números de quadrados na j-ésima coluna do gráfico de Ferrers abaixo da diagonal.

Portanto, o símbolo de Frobenius para a partição $7+7+4+2+2$ é:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e a partir deste símbolo podemos reconstruir a partição original.

Temos agora um problema ligeiramente simples que é gerar partições representadas pelo símbolo de Frobenius. Para isto, vamos examinar o coeficiente de z^0 em :

$$\{(1+(zq)q^0)(1+(zq)q^1)(1+(zq)q^2)(1+(zq)q^3)\ldots\}$$
$$\text{x}\{(1+z^{-1}q^0)(1+z^{-1}q^1)(1+z^{-1}q^2)(1+z^{-1}q^3)\ldots\}. \quad (2.6)$$

Quando abrimos este produto, vemos que para conseguir z^0, precisamos exatamente do mesmo número, digamos s, de segundos termos selecionados de cada produto contido nos parênteses. Um termo típico será:

$$q^s.q^{a_1+a_2+\ldots+a_s}q^{b_1+b_2+\ldots+b_s},$$

em que $a_1 > a_2 > \ldots > a_s \geq 0$ e $b_1 > b_2 > \ldots > b_s \geq 0$. Mas isto corresponde ao símbolo de Frobenius

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_s \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_s \end{pmatrix}$$

relacionado a uma única partição de $s + \sum a_i + \sum b_i$.

Já que existe uma correspondência do símbolo de Frobenius com as partições de n, podemos concluir que o coeficiente de z^0 em (2.6) é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}, \tag{2.7}$$

que é uma identidade já obtida na seção (1.9).

2.5 Identidade do Produto Triplo de Jacobi

Teorema 2.5.1 (Identidade do Produto Triplo de Jacobi)**.**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}), \tag{2.8}$$

para $|q|<1$, $z \neq 0$.

Demonstração. Para provar a identidade do produto triplo de Jacobi, de acordo com [10], definimos

$$J(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}).$$

Podemos expandir $J(z)$ em uma série de Laurent em torno de $z=0$. Então:

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q)z^n. \tag{2.9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J(zq) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-2}) \\ &= (1+z^{-1}q^{-1})\prod_{n=2}^{\infty}(1+zq^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^{n-1}) \\ &= z^{-1}q^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^{n-1}) \\ &= z^{-1}q^{-1}J(z). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de z^n em ambos os lados, temos que:

$$q^n A_n(q) = q^{-1} A_{n+1}(q).$$

Fazendo iterações desta recursão, temos que, para todo n,

$$A_n(q) = q^{\frac{n(n+1)}{2}} A_0(q). \tag{2.10}$$

Mas por (2.7) e (2.10), segue que:

$$A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{2.11}$$

Combinando (2.9), (2.10) e (2.11), deduzimos que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) = J(z) = A_0(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{2.12}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \tag{2.13}$$

que é equivalente à identidade do produto triplo de Jacobi. □

2.6 Identidades de Rogers-Ramanujan

Vamos provar algumas identidades de David Bressoud, que por sua vez resultarão nas identidades de Rogers-Ramanujan.

Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan: O número de partições de n em partes super-distintas é igual ao número de partições de n em partes da forma $5m+1$ e $5m+4$.

Segunda Identidade de Rogers-Ramanujan: O número de partições de n em partes super-distintas, cada parte maior ou igual a dois é igual ao número de partições de n em partes da forma $5m+2$ e $5m+3$.

Seguindo [8] vamos provar as identidades passo a passo. Primeiro consideremos cinco sequências de polinômios:

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$t_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

$$\sigma_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

$$\sigma_n^*(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1+2j \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

e

$$\tau_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+2j \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Vamos provar usando indução matemática que

$$s_n(q) = \sigma_n(q) = \sigma_n^*(q) \tag{2.19}$$

e

$$t_n(q) = \tau_n(q).$$

Após estas igualdades serem provadas, mostraremos que

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} = \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(q)$$
$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

e

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}=\lim_{n\to\infty}t_n(q)=\lim_{n\to\infty}\tau_n(q)$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}.$$

Observe que, para um m fixo, temos:

$$\lim_{N\to\infty}\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{N}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{N-m}(1-q^j)}=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}$$
$$=\frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}s_n(q)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}t_n(q)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}. \tag{2.20}$$

Desta forma estamos tratando polinômios que, no limite quando $n\to\infty$, convergem no lado esquerdo para as identidades de Rogers-Ramanujan.

Vamos provar agora recorrências para $s_n(q)$ e $t_n(q)$. Primeiro,

$$
\begin{aligned}
s_n(q) &= \sum_{j\geq 0} q^{j^2} \left(\left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right] + q^{n-j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right] \right) \\
&= s_{n-1}(q) + q^n \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right] \\
&= s_{n-1}(q) + q^n t_{n-1}(q).
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Depois,

$$
\begin{aligned}
t_n(q) - q^n s_n(q) &= \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] (1-q^{n-j}) \\
&= (1-q^n) \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right] \\
&= (1-q^n) t_{n-1}(q).
\end{aligned}
$$

Agora temos um simples problema de indução para mostrar que (2.18) e (2.19) mais os valores iniciais $s_0(q) = t_0(q) = 1$ definem de modo único $s_n(q)$ e $t_n(q)$ para todo n.

Queremos mostrar que $\sigma_n(q)$ e $\sigma_n^*(q)$ são iguais. De fato:

$$
\begin{aligned}
\sigma^*(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1+2j \end{bmatrix} \\
\sigma_n^*(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \left(\begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix} + q^{n+1+2j} \begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix} \right) \\
&= \sigma_n(q) + q^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+5)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \sum_{j=-\infty}^{-1} (-1)^j q^{j(5j+5)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+1+2j \end{bmatrix} \right) \\
&= \sigma_n(q) + q^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+5)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-2j \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{-j-1} q^{(-j-1)(5(-j))/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-2j \end{bmatrix} \right) \\
&= \sigma_n(q). \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Agora vamos usar tanto (2.16) quanto (2.17) para representar $\sigma_n(q)$. Em particular,

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(q) - \sigma_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix} \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2j \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2j-1 \end{bmatrix} q^{n-2j} \\
&\quad \text{(pela recorrência alternativa)} \\
&= q^n \tau_{n-1}(q). \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\tau_n(q) - q^n\sigma_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \left(\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1-2j \end{bmatrix} - q^{n+2j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix} \right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+1-2j \end{bmatrix} \\
&\quad \text{(pela recorrência alternativa)} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \left(\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} + q^{n+1-2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+1-2j \end{bmatrix} \right) \\
&= \tau_{n-1}(q) \\
&+ q^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{1-j} q^{(1-j)(5(1-j)-3)/2+1-2(1-j)} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix} \\
&= \tau_{n-1}(q) - q^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix} \\
&= (1-q^n)\tau_{n-1}(q). \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Como já comentamos anteriormente, as recorrências (2.20) e (2.21) mais a condição inicial $s_0(q) = t_0(q) = 1$ determinam todos os $s_n(q)$ e $t_n(q)$. Agora acabamos de mostrar em (2.23) e (2.24) que $\sigma_n(q)$ e $\tau_n(q)$ satisfazem precisamente a mesma recorrência. Além disso, $\sigma_0(q) = \tau_0(q) = 1$. Consequentemente, para cada $n \geq 0$,

$$s_n(q) = \sigma_n(q)$$

e

$$t_n(q) = \tau_n(q).$$

Portanto, por (2.14),

$$
\begin{aligned}
1 \;+\; & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} \\
= \; & \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(q) \\
= \; & \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
= \; & \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
& \text{(pelo Teorema (2.5.1) com } q \text{ substituído por } q^5 \text{ e } z \text{ por } -q^{-2}) \\
= \; & \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})}, \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

provando a primeira Identidade de Rogers-Ramanujan.

Agora, por (2.15),

$$
\begin{aligned}
1 \;+\; & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)} \\
= \; & \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q) \\
= \; & \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
= \; & \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
& \text{(pelo Teorema (2.5.1) com } q \text{ substituído por } q^5 \text{ e } z \text{ por } -q^{-1}) \\
= \; & \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-3})(1-q^{5m-2})} \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

provando a segunda Identidade de Rogers-Ramanujan.

Capítulo 3

Conclusão

Neste trabalho foram estudados vários resultados sobre partições, diferentes formas de representá-las e uma importante ferramenta que são as funções geradoras. Também foram definidos o que são os polinômios gaussianos e algumas propriedades destes polinômios. Portanto, esta dissertação fornece uma base para trabalhos futuros na área de partições, possibilitando o conhecimento necessário para desenvolver novos resultados, como novas identidades em partições e provas combinatórias de identidades que possuem somente provas analíticas, entre outros. Também é possível trabalhar na parte computacional, buscando novas conjecturas sobre os polinômios gaussianos bem como outros q-análogos.

Referências Bibliográficas

[1] G.E. Andrews (2007), *Euler's "De Partitio Numerorum"*, Bulletin AMS, 44(4):561-573.

[2] G.E. Andrews, K. Eriksson (2004), " Integer Partition", Cambridge University Press, 2004.

[3] G.E. Andrews (with P. Paule and A. Riese), *MacMahon's dream(submitted)*.

[4] G.E. Andrews, " Partitions", chapter eight in History of Combinatorics, Robin Wilson, ed.

[5] G.E. Andrews (1986), "q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra", Providence, RI: Amer. Math. Soc..

[6] G.E. Andrews, R.Askey, R. Roy (1999), " Special Functions", Cambridge, England: Cambridge University Press.

[7] G.E. Andrews (1976), " The Theory of Partitions", Cambridge, England: Cambridge University Press.

[8] R. Chapman (2002), *A new proof of some identities of Bressoud*, Int. J. Math. and Math. Sciences 32, 627-623, 2002.

[9] Ch. A. Charalambides (2002), " Enumerative Combinatorics", Chapman & Hall/CRC.

[10] S.R. Oliveira (2001), *O Produto Triplo de Jacobi - Aspectos Analítico e Combinatório*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

[11] J.P.O. Santos, P. Mondek, A.C. Ribeiro, *New two line arrays representing partitions* (accepted in Annals of Combinatorics).

[12] N. Ivan (1969), *The American Mathematical Monthly* vol 76, nº8, pp. 871-889, Mathematical Association of America

[13] R.P. Stanley (1997), "Enumerative Combinatorics" vol 1, Cambridge University Press.