UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Parciais Semilineares Envolvendo o Operador de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg

Igor Leite Freire

Tese de Doutorado orientada pelo
Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov
e co-orientada pelo
Prof. Dr. Antonio Carlos Gilli Martins

Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Parciais Semilineares Envolvendo o Operador de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Igor Leite Freire e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2008.

Yu. Bozhkov

Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov - orientador

Martins

Prof. Dr. Antonio Carlos Gilli Martins - co-orientador

Banca Examinadora:

1. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov
2. Dr. Caio José Colletti Negreiros
3. Dr. Waldir Alves Rodrigues Junior
4. Drª. Irene Ignazia Onnis
5. Dr. Paolo Piccione

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8a 162/2005

	Freire, Igor Leite
F883s	Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais semilineares envolvendo o operador de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg / Igor Leite Freire -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2008.
	Orientadores : Yuri Dimitrov Bozhkov; Antônio Carlos Gilli Martins Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Lie, Simetrias de. 2. Noether, Simetrias de. 3. Kohn-Laplace, Operador de. 4. Heisenberg, Grupo de. 5. Leis de conservação. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov. II. Martins, Antônio Carlos Gilli. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Lie point symmetries of semilinear partial differential equations involving the Kohn-Laplace operator on the Heisenberg group.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie point symmetries. 2. Noether symmetries. 3.Kohn-Laplace operator. 4. Heisenberg group. 5. Conservation laws.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Waldir Alves Rodrigues Junior (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis (ICMC-USP)
Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)

Data da defesa: 28/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). YURI DIMITROV BOZHKOV

Prof. (a). Dr (a). IRENE IGNAZIA ONNIS

Prof. (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE

Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof. (a) Dr. (a) WALDIR ALVES RODRIGUES JUNIOR

Quem fez da modéstia uma virtude esperava que todos
passassem a falar de si próprios como se fossem idiotas.
O que é a modéstia senão uma humildade hipócrita,
através da qual um homem pede perdão por ter
as qualidades e os méritos que os outros não têm?

Arthur Schopenhauer

Nunca se queixe, nunca se explique, nunca se desculpe.
Aja ou saia, faça ou vá embora.

Nelson Jobim

O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquenta
e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta.
O que ela quer da gente é coragem.

Guimarães Rosa

Embora o mundo viva me machucando e me ferindo,
nunca mudarei. O mundo não tem forças para me mudar.
Mas, infelizmente, também não tenho forças para mudar o mundo.
Então fica assim, essa eterna queda de braços, sem vencedor.

Resumo

Neste trabalho provamos um teorema que faz a classificação completa dos grupos de simetrias de Lie da equação semilinear de Kohn - Laplace no grupo de Heisenberg tridimensional. Uma vez que tal equação possui estrutura variacional, determinamos quais são suas simetrias de Noether e a partir delas estabelecemos suas respectivas leis de conservação.

Abstract

In this work, we carry out a complete group classification of Lie point symmetries of semilinear Kohn - Laplace equations on the three-dimensional Heisenberg group. Since this equation has variational structure, we determine which of its symmetries are Noether's symmetries. Then we establish their respectives conservation laws.

Aos meus pais,

Antonio Fernando (in memorian)

e Vera Lúcia,

minha avó Vita (in memorian)

e ao meu filho amado, Victor Hugo,

com amor, dedico.

Agradecimentos

O Senhor é meu Pastor, nada me faltará.
Salmo 23, 1.

É..., hora de agradecer...

Talvez seja este o momento mais difícil da tese. Não esquecer pessoas que nos foram importantes, cada uma a seu modo e a seu tempo, muitas das quais sem a ajuda e o apoio seria impossível findar o presente trabalho.

Recordo-me, enquanto escrevo estas linhas, de quando estava escrevendo a página de agradecimentos da minha dissertação de mestrado, há três anos e meio atrás. E me vem ao coração a mesma sensação de angústia causada pelo medo de esquecer alguém. E, como naquela época, cogitei a hipótese de não escrever o agradecimento, pois assim não haveria como magoar alguém, ainda que acidentalmente.

Contudo, arrepender-me-ia deveras em não fazê-lo, embora haja a possibilidade de algum lapso. Prefiro, então, correr este risco. Peço, antecipadamente, desculpas àqueles que eventualmente esqueça de relacionar.

Primeiramente agradeço a Deus. Por tudo. Principalmente pelas dificuldades, sem as quais seria impossível dar o valor que este trabalho merece. E também por me preparar para enfrentar o mundo. E vencê-lo, quando necessário.

Sou eternamente grato aos meus pais, meus irmãos, meu sobrinho, meu avô, à Édina e ao Victor Hugo.

Ao Flávio Cardoso Reis, pela amizade.

À Jesuína, à Teresa Maria e ao Luciano Freire, pela ajuda e apoio, cada um à sua maneira e à sua época.

Ao pessoal que me acompanhou ao longo da minha caminhada universitária, muitos dos quais desde a graduação. Em especial, agradeço à Alice, à Bruna, ao Celso, à Ester, ao Jorge, ao Márcio, ao Ricardo, à Roberta e à Silvia.

Ao Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov agradeço muito pela amizade, orientação, paciência, convivência ao longo dos últimos quatro anos e, principalmente, por me ter lapidado e tornado

um matemático. Não tenho como descrever com palavras sua importância em minha vida.

Ao Prof. Dr. Antonio Carlos Gilli Martins agradeço pela co-orientação, pelas discussões acerca dos problemas da vida universitária, pelo apoio irrestrito e, principalmente, pela amizade.

Ao Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa, pela amizade ao longo desses nove anos de convivência.

À Profª Drª Irene Ignazia Onnis, ao Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa e ao Prof. Dr. Waldir Alves Rodrigues Junior, por terem aceito compor minha banca de qualificação e pelas sugestões aí dadas. Em especial, agradeço à Profª Irene pelas várias discussões e sugestões dadas desde então.

Ao Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros, à Profª Drª Irene Ignazia Onnis, ao Prof. Dr. Paolo Piccione e ao Prof. Dr. Waldir Alves Rodrigues Junior, por terem aceito compor minha banca de defesa e pelas sugestões e/ou correções sugeridas.

Ao Prof. Enzo Mitidieri, da Università di Trieste, Itália, por ter sugerido o tema de pesquisa da tese.

À Unicamp agradeço pelo excelente ambiente de trabalho que me foi disponível desde 1998. Em particular, registro meu especial agradecimento a todos os funcionários, principalmente os que mais diretamente tive contato, como os da secretaria de graduação, Alice, Ester e Júlio; o pessoal da secretaria de pós, Cidinha, Ednaldo e Tânia; à Fátima e à Adriana, da secretaria de departamentos; o pessoal da biblioteca, Crisllene, Osvaldino e Reginaldo. À Crisllene, meu agradecimento especial pelo apoio em alguns momentos difíceis.

Às pessoas que o destino me fez ter aulas, agradeço a todos: aos que de fato foram Professores, por me ensinarem como devo ser. Ao resto, como **não** devo ser.

Ao povo sofrido do Brasil, meu agradecimento e minha promessa de fazer ciência para procurar sempre o engrandecimento e bem-estar do gênero humano, e em especial, para o desenvolvimento de nosso país.

Ao Laboratório Epifisma, por me ter permitido usufruir de seus recursos computacionais, no qual boa parte desta tese foi feita e todos os programas dos apêndices foram rodados.

Finalmente, meu agradecimento à CAPES e à Unicamp, pelo suporte financeiro.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nas décadas finais do século XIX Sophus Lie introduziu a noção de grupos contínuos de transformações, atualmente conhecidos por grupos de Lie, com o objetivo de unificar e estender vários métodos de se obter soluções de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, que culminou com o surgimento de uma nova vertente em Matemática: a Teoria de Lie. O resultado do trabalho de Lie em equações diferenciais é o que hoje chamamos de *simetrias de Lie* de equações diferenciais.

A *Grupo - Análise* constitui-se na utilização da teoria dos Grupos Contínuos de Transformações na resolução de problemas de Análise ou Equações Diferenciais e é um método geralmente conhecido de descrição das simetrias dos modelos matemáticos contínuos. Tal abordagem advém da teoria dos grupos contínuos de transformações desenvolvidos por Lie.

Desde o início, os propósitos de Lie eram os da criação de uma teoria completa sobre a integração de equações diferenciais, mas todo seu trabalho, nos problemas de integração, acabou sendo basicamente esquecido. Supõe-se que isso tenha sido causado pelo fato que seus métodos de integração desenvolvidos até então não consistiam uma ferramenta matemática universal, no sentido que nem todos os sistemas de equações diferenciais possuiam grupos não triviais de transformações.

Um grupo de simetrias de um sistema de equações diferenciais parciais é um grupo de transformações que aplica quaisquer sistema de solução do sistema em outra solução do sistema. Do ponto de vista de Lie, tal grupo depende apenas de parâmetros contínuos e consiste de transformações de pontos agindo no espaço das variáveis independentes e dependentes, ou então, com mais generalidade, transformações de contato (simetrias de contato) agindo no espaço não só das variáveis independentes e dependentes, mas também das primeiras derivadas. Tais simetrias não serão tratadas nesta tese.

No presente trabalho, as aplicações de grupos contínuos às equações diferenciais não farão uso dos aspectos globais da teoria de grupos de Lie. Elas usam grupos de transformações de Lie localmente conexos. Os teoremas fundamentais de Lie (apresentados no Capítulo 2) mostram que tais grupos são completamente caracterizados pelos seus *geradores infinitesimais*, que por sua vez, formam uma *álgebra de Lie* determinada pelas constantes de estrutura.

Os grupos de transformações de Lie e seus geradores infinitesimais podem ser naturalmente *estendidos*, ou *prolongados*, de modo a agirem no espaço das variáveis independentes, dependentes e derivadas parciais das variáveis dependentes, de qualquer ordem, gerando assim um sistema linear homogêneo sobre-determinando de equações diferenciais nos termos dos geradores infinitesimais, as chamadas equações determinantes (*determining equations*).

Se um sistema de equações diferenciais parciais é invariante sob a ação de um grupo de transformações de pontos de Lie, podemos encontrar, construtivamente, soluções especiais, chamadas *soluções invariantes*, que são invariantes sob a ação de algum subgrupo do grupo total admitido pelo sistema. Tais soluções resultam da solução de um sistema de equações diferenciais parciais reduzido, com menos variáveis independentes, sendo uma ferramenta útil no trabalho de se encontrar soluções de uma equação diferencial.

No começo do século XX Noether mostrou a conexão entre as simetrias de uma integral de ação (*simetrias variacionais ou de divergência*) e as leis de conservação para as equações de Euler - Lagrange correspondentes. Tais simetrias deixam as equações de Euler - Lagrange invariantes, fazendo assim uma conexão direta entre a teoria desenvolvida por Lie e a Física.

O enfoque dado por Lie às equações diferenciais foi utilizado por pesquisadores mais voltados às aplicações, uma vez que os modelos usados em Física possuem, via de regra, simetrias básicas descritas por grupos de transformações.

Nos últimos anos diversos trabalhos têm sido feitos utilizando-se a teoria de simetrias de Lie, desde trabalhos notoriamente voltados para a Matemática (vide por exemplo [1, 10, 11, 14, 15, 34, 35, 36, 37, 57, 80]), como trabalhos em Física ([2, 12, 44, 58, 61, 67]).

Mais recentes que a teoria de simetrias de Lie são os chamados *grupos de Heisenberg* H^n. Tais grupos têm suas origens nas regras de comutação da Mecânica Quântica (vide [47] e [81]) e desde a década de 1970 têm sido estudados por pesquisadores de diversas áreas, como por exemplo, a geometria algébrica e diferencial (vide [46, 68, 70, 71, 74]), análise real e complexa (vide [7, 8, 13, 40, 48, 49, 55, 56, 65, 75, 79]) e Física - Matemática (vide [39, 62, 77]). A tais grupos será dedicado posteriormente um capítulo.

O objetivo do presente trabalho é classificar os grupos de simetrias, encontrar as simetrias variacionais e de divergência e estabelecer as leis de conservação associadas às simetrias de Noether da equação semilinear *Kohn - Laplace* no grupo de Heisenberg H^1

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = 0. \tag{1.1}$$

A tese está estruturada da seguinte maneira:

- Ao Capítulo 2 reservamos a teoria básica das simetrias de Lie, cálculo variacional e o Teorema de Noether.

- O Capítulo 3 é dedicado a uma introdução aos grupos de Heisenberg H^n, com ênfase em $n = 1$, onde discutimos algumas propriedades geométricas do mesmo.

- No Capítulo 4 apresentamos um resumo geral de resultados recentes no grupo de Heisenberg na área de Análise.

- No Capítulo 5 enunciamos e provamos o Teorema de Classificação do Grupos de Simetrias de Lie da equação (1.1).

- No Capítulo 6 mostramos quais são as simetrias variacionais e de divergência e as respectivas funções correspondentes da equação (1.1).

- Estabelecemos, no Capítulo 7, via Teorema de Noether, as leis de conservação para as simetrias encontradas no capítulo anterior.

Os resultados originais obtidos são essencialmente os conteúdos dos capítulos 5, 6 e 7, publicados em [31, 27, 32, 50] e apresentados em [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29]. Em particular, destacamos como principais resultados os seguintes teoremas: 27, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 e 41.

Este é um dos primeiros textos escritos em língua portuguesa, ao menos no Brasil, tratando-se de simetrias, não só de Lie, mas também de Noether. Por isto optamos por fazer, no Capítulo 2, uma apresentação um tanto quanto geral da teoria de simetrias, de modo que os resultados lá expostos possam ser utilizados, no futuro, por estudantes que se iniciem nesta área.

Resultados anteriores indicam que o grupo de simetrias de Lie e de Noether coincidem quando o termo não-linear de uma equação diferencial parcial semilinear é do tipo potência, com o expoente crítico de Sobolev, como por exemplo, [14, 15, 35, 36, 57, 80].

Em [35, 36, 57] é estudada a forma radial de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$, como por exemplo, o Problema de Liouville-Gelfand, a Equação de Boltzmann e a Equação de Lane-Emden, com não-linearidade da forma acima mencionada. Para estes casos, o grupo de simetrias de Noether coincide com o grupo de simetrias de Lie.

Em [80], para $n > 1$, Svirshchevskii faz a classificação completa dos grupos de simetrias de equações semilineares envolvendo o operador poli-harmônico. Em [15], Bozhkov mostra, para o operador poli-harmônico e $n > 2$, que todas as simetrias de Lie associadas ao caso crítico são simetrias de Noether.

Tais fatos sugerem uma estreita relação entre os grupos de simetrias de Noether de equações diferenciais parcias e não-linearidades envolvendo o expoente crítico de Sobolev. Em particular, na presente tese é provado que os grupos de simetrias de Lie e de Noether são coincidentes para equações diferenciais parciais da forma

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = 0,$$

onde Δ_{H^1} é o operador de Kohn - Laplace, $f(u) = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}$ e Q é a dimensão homogênea de H^1. O expoente de Stein-Sobolev $\frac{Q+2}{Q-2}$ para o grupo de Heisenberg desempenha um papel semelhante ao conhecido expoente crítico de Sobolev $\frac{n+2}{n-2}$ em $\mathbb{R}^n$.

Até onde sabemos, é a primeira vez que a teoria de simetrias de Lie é aplicada a equações diferenciais em grupos de Lie diferentes do $\mathbb{R}^n$. Além disso, o operador de Kohn - Laplace é um operador subelíptico, fortemente degenerado e não temos conhecimento de nenhum trabalho anterior envolvendo tais operadores e simetrias de Lie. Aliás, esta tese é a resposta à conjectura formulada pelo Prof. Enzo Mitidieri ([69]), da Università di Trieste, Itália, de que a teoria de simetrias de Lie seria aplicável com sucesso a operadores subelípticos e que os grupos de simetrias não seriam triviais.

Capítulo 2

Uma breve introdução à teoria de simetrias de Lie

O objetivo deste capítulo é lançar as bases da teoria de simetrias de Lie, com vista às aplicações que faremos nos capítulos vindouros. Apresentaremos aqui um resumo geral da teoria necessária, embasada principalmente no livro de Bluman e Kumei ([9]). Também utilizamos livros que remontam à época em que a teoria estava em sua infância e valem a pena serem consultados para se ter uma noção de como tudo começou ([41] e [76]). Para um tratamento mais geométrico da teoria, consultar Olver ([73]) ou Ibragimov ([60]).

Aqui, apresentaremos os grupos de transformações de pontos de Lie (*Lie point symmetry*) $(GTPL)$ a um parâmetro (ou uniparamétrico), que são completamente determinados pelas suas transformações infinitesimais.

Usando o gerador infinitesimal de tais grupos, podemos construir vários tipos de invariantes, como por exemplo, pontos, curvas, famílias de curvas, superfícies e famílias de superfícies (invariantes).

Um $(GTPL)$ uniparamétrico agindo no espaço das variáveis independentes e dependentes pode ser naturalmente estendido a um $(GTPL)$ a um parâmetro agindo num espaço que engloba o espaço de derivadas parciais das variáveis dependentes até uma ordem finita fixada, isto é, saímos do espaço das variáveis independentes e dependentes e vamos a um espaço que além dessas, possui todas as derivadas até uma ordem k, chamado espaço estendido, onde k é algum inteiro positivo fixado (que na verdade, será a ordem da equação considerada). Isto é feito requerendo, sob ação do grupo, que as relações das derivadas sejam preservadas.

No Capítulo 5, quando estivermos fazendo os procedimentos descritos aqui, tornar-se-á mais claro, intuitivo e explícito o que está expresso no parágrafo acima.

Assim, tais imposições induzem um único grupo de ação estendido em um espaço estendido. Conseqüentemente os $(GTPL)$ a um parâmetro estendidos também serão completamente caracterizados pelos seus infinitesimais.

Além disso, esses infinitesimais estendidos são determinados a partir dos infinitesimais da ação do grupo no espaço das variáveis independentes e dependentes. Isto nos permite encontrar um algoritmo para determinar as transformações infinitesimais admitidas pela equação diferencial que estejamos considerando.

Como nosso interesse principal é analisar uma equação diferencial parcial, neste capítulo também mostraremos como encontrar as transformações infinitesimais que uma tal equação possa ter, bem como construir soluções invariantes à partir do mesmo.

As transformações infinitesimais de uma equação diferencial induzem campos vetorias, que são as simetrias de Lie. Ao integrarmos tais campos, obtemos o seu fluxo, ou seja, obtemos a órbita da solução da equação considerada que é invariante sob ação daquele campo vetorial.

A noção de soluções invariantes foi descoberta por Lie e podem ser determinadas a partir de uma transformação infinitesimal admitida pela equação de duas maneiras. A primeira é resolvendo-se, pelo método das características, as equações resultantes das condições de invariância para se obter a forma invariante de uma solução. Esta é então determinada pela substituição da forma invariante na equação diferencial parcial dada. A outra maneira é a substituição direta, na qual expressamos uma derivada primeira como uma combinação envolvendo todas as demais na equação original dada, diminuindo assim o número de variáveis independentes em uma unidade.

Por fim, apresentaremos a generalização de um $(GTPL)$ à *Lie - Bäcklund transformations*, que são definidas pelos infinitesimais dependentes de um número finito, porém, não especificado, de derivadas de variáveis dependentes. Mostraremos que uma *Lie - Bäcklund symmetry* advinda de uma integral de ação, isto é, uma *simetria de Noether*, nos leva a uma lei de conservação, expressa pelo *Teorema de Noether*.

2.1 Grupos de transformações de pontos de Lie

No que segue, estaremos trabalhando em uma variedade Riemanniana, (M, g), n dimensional, com coordenadas locais $\{x^1, \cdots, x^n\}$ e munida de uma métrica g. O símbolo $\mathbb{N}$ denotará o conjunto $\{1, 2, 3, \cdots\}$. Utilizaremos ao longo da tese a convenção de soma de Einstein, isto é, índices repetidos são somados.

Iniciamos definindo o que são as transformações de pontos:

Definição 1. *Seja $x = (x^1, \cdots, x^n) \in M$ e $\varepsilon \in I \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto de transformações*

$$\begin{array}{rcl} X: \ M \times I & \to & M \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & x^* := X(x; \varepsilon), \end{array} \tag{2.1}$$

munido de uma lei de composição $\phi : I \times I \to I$, forma um grupo de transformações em M se:

1. *$\forall \varepsilon \in I$, as transformações são um-a-um em M e, em particular, $x^* \in M$.*

2. *(I, ϕ) é um grupo.*

3. *Se e denota o elemento identidade de I, então, para todo $x \in M$*

$$x^* = X(x; e) = x.$$

4. *Se $x^* = X(x; \varepsilon)$ e $x^{**} := X(x^*; \delta)$, então*

$$x^{**} = X(x; \phi(\varepsilon, \delta)).$$

Definição 2. *Se, em adição às propriedades listadas na Definição 1, um grupo de transformações satisfaz:*

1. *I é um conjunto conexo da reta, e sem perda de generalidade, assumiremos que $0 \in I$ é a identidade do grupo,*

2. *X é C^∞ com respeito a $x \in M$ e C^ω com respeito a $\varepsilon \in I$,*

3. *$\phi : I \times I \to I$ é C^ω,*

então dizemos que o grupo de transformações é um grupo de transformações de pontos de Lie ($GTPL$) a um parâmetro.

2.2 Transformações infinitesimais

Considere um grupo de transformações a um parâmetro (2.1) com identidade $e = 0$ e lei de composição ϕ. Fazendo a expansão em série de Taylor em torno da identidade até primeira ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon \left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)\Bigg|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) \\ &= x + \xi(x)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\xi(x) := \left.\dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$. A transformação

$$x \mapsto x + \varepsilon\xi(x)$$

é chamada de transformação infinitesimal do grupo de ($GTPL$), sendo $\xi(x) = (\xi^1(x), \cdots, \xi^n(x))$ chamado de *infinitésimo*.

2.2.1 O Primeiro Teorema Fundamental de Lie

No que segue estaremos supondo que

$$\begin{aligned} X : M \times I \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to M \\ (x, \varepsilon) &\mapsto x^* := X(x; \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.3}$$

é um grupo de transformações uniparamétrico e $\phi : I \times I \to I$ uma lei de composição em I.

Assim,

$$\begin{aligned} X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta\varepsilon)) &= X(x;\phi(\varepsilon,\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta\varepsilon))) \\ &= X(x;\phi(\phi(\varepsilon,\varepsilon^{-1}),\varepsilon+\delta\varepsilon)) \\ &= X(x;\phi(0,\varepsilon+\delta\varepsilon)) \\ &= X(x;\varepsilon+\delta\varepsilon), \end{aligned}$$

que podemos enunciar como:

Lema 1. *Seja $x^* = X(x; \varepsilon)$ um conjunto de transformações. Então vale a seguinte igualdade:*

$$X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta\varepsilon)) = X(x;\varepsilon+\delta\varepsilon),$$

onde $\varepsilon^{-1}, \delta\varepsilon$ denotam, respectivamente, o elemento inverso de ε e um pequeno incremento em ε.

Podemos agora enunciar o

Teorema 1. ***Primeiro Teorema Fundamental de Lie***

Existe uma parametrização $\tau : I \to I$ tal que o grupo (2.1) é equivalente à solução do problema de valor inicial do sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} &\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*), \\ &x^* = x \qquad \text{quando} \quad \tau = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Em particular,

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(t)dt,$$

onde

$$\Gamma(\varepsilon) := \left.\frac{\partial\phi(z,w)}{\partial w}\right|_{(z,w)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} \tag{2.5}$$

e

$$\Gamma(0) = 1.$$

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie nos mostra que as transformações infinitesimais contém as informações essenciais para a determinação de um $(GTPL)$ a um parâmetro, isto é, nos fornece o problema de valor inicial que o fluxo através do ponto $x \in M$ obedece.

Além disso, pelo mesmo teorema, pode-se sempre (re-)parametrizar um dado grupo em termos do parâmetro τ de modo que para valores $\tau^{'}$ e $\tau^{''}$, a lei de composição se torne $\phi(\tau^{'}, \tau^{''}) = \tau^{'} + \tau^{''}$. Além disso, as transformações (2.1) definem um fluxo estacionário dado por (2.4), valendo também a recíproca.

Demonstração. Primeiro, fazendo a expansão em série de Taylor de (2.1) em relação ao último argumento, obtemos:

$$X(x; \varepsilon + \delta\varepsilon) = x^* + \frac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + O(\delta\varepsilon^2). \tag{2.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \delta\varepsilon) &= \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\delta\varepsilon + O(\delta\varepsilon^2) \\ &= \Gamma(\varepsilon)\delta\varepsilon + O(\delta\varepsilon^2), \end{aligned}$$

onde $\Gamma(\varepsilon)$ é definido por (2.5).

Pelo Lema 1,

$$\begin{aligned} X(x; \varepsilon + \delta\varepsilon) &= X(x^*; \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \delta\varepsilon)) \\ &= X(x^*; \Gamma(\varepsilon)\delta\varepsilon + O(\delta\varepsilon^2)) \\ &= X(x^*; 0) + \Gamma(\varepsilon)\delta\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}(x^*; t)\Big|_{t=0} + O(\delta\varepsilon^2) \\ &= x^* + \Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)\delta\varepsilon + O(\delta\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Comparando (2.6) com (2.7), obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(x^*),$$

$$x^*(0) = x.$$

Segue, então, de (2.2), que $\Gamma(0) = 1$. Conseqüentemente, a aplicação

$$\tau(\varepsilon) := \int_0^{\varepsilon} \Gamma(t)dt$$

cumpre (2.4). O Teorema de Existência e Unicidade para um sistema de equações diferenciais nos garante que (2.4) tem solução única. Desde que (2.1) é solução deste problema, completamos a prova do teorema. $\square$

2.2.2 Geradores infinitesimais

Em virtude do Primeiro Teorema Fundamental de Lie, de agora em diante, assumiremos que um $(GTPL)$ é parametrizado de modo que sua lei de composição seja aditiva, isto é, $\phi(a,b) = a+b$, $a^{-1} = -a$ e $\Gamma(\varepsilon) = 1$.

Definição 3. *O gerador infinitesimal do* $(GTPL)$ *de um parâmetro* (2.1) *é o operador diferencial*

$$X = X(x) := \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.8}$$

onde os coeficientes $\xi^i(x)$ *são dados em* (2.2).

Sendo $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto F(x) = F(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}$ uma função diferenciável, temos:

$$XF(x) := \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}.$$

Em particular, note que $\xi(x) = (Xx^1, \cdots, Xx^n) =: X(x)x$ e

$$X(x^*) = \xi^i(x^*)\frac{\partial}{\partial x^{*\,i}}, \tag{2.9}$$

onde x^* é dado em (2.1). Expandindo (2.3) em série de Taylor, obtemos:

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\left(\frac{\partial^k X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^k x^*}{d\varepsilon^k}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{2.10}$$

Se $F(x)$ é qualquer função diferenciável,

$$\frac{dF(x^*)}{d\varepsilon} = \frac{\partial F(x^*)}{\partial x^{*\,i}}\frac{\partial x^{*\,i}}{\partial \varepsilon} = \xi^i(x^*)\frac{\partial F(x^*)}{\partial x^{*\,i}} = X(x^*)F(x^*), \tag{2.11}$$

de onde podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\varepsilon} &= X(x^*)x^*, \\ \frac{d^2x^*}{d\varepsilon^2} &= X(x^*)X(x^*)x^* \\ &= X^2(x^*)x^* \end{aligned} \tag{2.12}$$

e, supondo ser válida a equação para a derivada de ordem k, temos, indutivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}x^*}{d\varepsilon^{k+1}} &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(X^k(x^*)x^*\right) \\ &= X^k(x^*)X(x^*)x^* \\ &= X^{k+1}(x^*)x^*. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Fazendo-se $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^k x^*}{d\varepsilon^k} &= X^k(x)x, \\ &= X^k x \end{aligned} \tag{2.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Conseqüentemente, substituindo (2.14) em (2.10), temos:

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x = e^{\varepsilon X} x. \tag{2.15}$$

Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema 2. *O (GTPL) a um parâmetro* (2.1) *é equivalente a* (2.15)*, onde* $X = X(x)$ *é definido por* (2.8) *e o operador* $X^k := XX^{k-1}$*, com* $k \in \mathbb{N}$*, sendo* $X^0 F(x) := F(x)$*, onde* $F(x)$ *é qualquer função diferenciável de* x*.*

Corolário 1. *Nas hipóteses do Teorema* 2*, vale a seguinte igualdade:*

$$F(x^*) = F(e^{\varepsilon X} x) = e^{\varepsilon X} F(x).$$

Demonstração. Basta aplicar à equação (2.11) o mesmo raciocínio empregado em (2.12)-(2.14). □

2.2.3 Funções invariantes

Definição 4. *Uma função infinitamente diferenciável* $F(x)$ *é uma função invariante do* (GTPL) (2.1) *se, e só se, para qualquer grupo de transformações* (2.1)

$$F(x^*) = F(x).$$

Se $F(x)$ *é uma função invariante por* (2.1)*, então* $F(x)$ *é chamada um invariante de* (2.1) *e é dita ser um invariante por* (2.1)*.*

Podemos provar o seguinte

Teorema 3. *Uma função* $F(x)$ *é invariante por* (2.1) *se, e somente se,*

$$XF(x) = 0.$$

Demonstração. Do Corolário 1, podemos escrever:

$$F(x^*) = e^{\varepsilon X} F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k F(x) = F(x) + \varepsilon X F(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 F(x) + \cdots \tag{2.16}$$

Suponha que F seja invariante por (2.1). Então, de (2.16) resulta que

$$\varepsilon X F(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 F(x) + \cdots = 0$$

para todos os valores de ε. Logo $XF = 0$ e isto conclui a tese.

Reciprocamente, se vale $XF(x) = 0$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $X^n F(x) = 0$. □

Corolário 2. *Para um* $(GTPL)$ (2.1), *a igualdade*

$$F(x^*) = F(x) + \varepsilon \tag{2.17}$$

é verdadeira se, e somente se, $F(x)$ *satisfaz*

$$XF(x) = 1. \tag{2.18}$$

Demonstração. Se a equação (2.18) é verdadeira, segue do Corolário 1 que $F(x^*) = F(x) + \varepsilon$. Reciprocamente, comparando (2.17) com (2.16), concluímos trivialmente (2.18). □

2.2.4 Coordenadas canônicas

Seja $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo, de modo que $x^i \mapsto f(x^i) =: y^i$. Para o grupo de transformações (2.1) o gerador infinitesimal

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

com respeito às coordenadas $x = (x^1, \cdots, x^n)$ transforma-se, pelo homeomorfismo f, no gerador

$$Y = \eta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

com respeito às coordenadas $y = (y^1, \cdots, y^n)$. O infinitésimo com respeito ao novo sistema de coordenadas é

$$\eta(y) = (\eta^1(y), \cdots, \eta^n(y)).$$

Além disso, pela regra da cadeia, temos

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = \underbrace{\xi^i(x) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}}_{\eta^j(y)} \frac{\partial}{\partial y^j} = Y,$$

ou seja,

$$\eta^j(y) = \xi^i(x) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = Xy^j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Ademais,

$$y^* = Y(x^*) = e^{\varepsilon X} Y(x) = e^{\varepsilon X} Y = e^{\varepsilon Y} y.$$

Podemos resumir estes resultados no

Teorema 4. *Sob ação da mudança de coordenadas* $x^i \mapsto y^i$, $i = 1, \cdots, n$, *valem as seguintes igualdades:*

$$\eta(y) = Xy,$$

$$y^* = e^{\varepsilon X} y.$$

Definição 5. *Uma mudança de coordenadas* $x^i \mapsto y^i$ *define um conjunto de coordenadas canônicas para o grupo* (2.1) *se, em termos das novas coordenadas,* (2.1) *se torna*

$$\begin{aligned} y^{*\,i} &= y^i, \qquad i = 1, \cdots, n-1, \\ y^{*\,n} &= y^n + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Teorema 5. *Para todo* $(GTPL)$ (2.1)*, existe um conjunto de coordenadas canônicas* $y = (y^1, \cdots, y^n)$ *tal que* (2.1) *é equivalente a* (2.19)*.*

Demonstração. Segue do Teorema 3 que

$$y^{*\,i} = y^i(x) \Longleftrightarrow Xy^i(x) = 0,$$

$i = 1, \cdots, n-1$. A E.D.P de primeira ordem

$$Xu(x) = \xi^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

possui $n-1$ soluções linearmente independentes. Tais soluções correspondem às constantes que surgem na solução geral do sistema de n E.D.O's

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x).$$

Pelo método das características, temos $n-1$ coordenadas satisfazendo (2.19). Do Corolário 2,

$$y^{*\,n} = y^n(x^*) = y^n + \varepsilon \Longleftrightarrow Xy^n = 1.$$

Além disso, $v = y^n$ é uma solução da E.D.P não homogênea

$$Xv(x) = \xi^i(x) \frac{\partial v}{\partial x^i} = 1$$

e é calculada determinando-se uma solução particular do correspondente sistema de características de $n+1$ E.D.O's de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x).$$

□

Corolário 3. *Nas hipóteses do teorema anterior, o gerador infinitesimal de* (2.1) *é:*

$$Y = \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Demonstração. Da demonstração do teorema anterior, temos que:

$$\begin{aligned} y^{*\,i} &= y^i(x) && \Longleftrightarrow \quad Xy^i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ y^{*\,n} &= y^n(x^*) = y^n + \varepsilon && \Longleftrightarrow \quad Xy^n = 1, \end{aligned}$$

de onde se conclui o resultado desejado. □

2.2.5 Pontos e superfícies invariantes

Definição 6. *Um ponto x e uma superfície $F(x) = 0$ são ditos invariantes pelo $(GTPL)$ (2.1) se, e somente se, $x^* = x$ sob (2.1) e $F(x^*) = 0$ quando $F(x) = 0$.*

Teorema 6.

1. *Um ponto x é um ponto invariante do $(GTPL)$ (2.1) se, e só se,*
$$\xi(x) = 0.$$

2. *Suponha que a superfície $F(x) = 0$ possa ser escrita como $F(x) = x^n - f(x^1, \cdots, x^{n-1}) = 0$. Então $F(x)$ é uma superfície invariante sob (2.1) se, e somente se*
$$XF(x) = 0, \quad \textit{quando} \quad F(x) = 0.$$

Demonstração. A demonstração já está essencialmente feita ao longo do texto que precede o presente teorema. É suficiente apenas juntar as peças.

1. Basta lembrar que $X(x)x = \xi(x)$ e aplicar o Corolário 1 e o Teorema 3 à aplicação identidade.

2. É conseqüência do Teorema 3.

□

2.3 Transformações estendidas ou prolongamentos

A fim de uma melhor compreensão, fixaremos algumas notações: como feito até aqui, $x = (x^1 \cdots, x^n) \in M$ e $u = u(x)$ é uma função infinitamente diferenciável definida em M com valores em algum subconjunto de $\mathbb{R}$.

Para $\forall k \in \mathbb{N}$, $\partial^k u$ denotará o conjunto de todas as $k-$ésimas derivadas de $u(x)$,
$$D_i = \frac{D}{Dx^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{ii_1 \cdots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_n}} + \cdots \tag{2.20}$$
é o operador de derivação total e $u_i := \dfrac{\partial u}{\partial x^i}$, $u_{ij} := \dfrac{\partial u}{\partial x^i \partial x^j}$, etc.

Simbolizaremos por
$$du = \partial u \, dx \tag{2.21}$$
a soma
$$du := u_i dx^i \tag{2.22}$$
e mais geralmente,
$$d\partial^{k-1} u = \partial^k u \, dx \tag{2.23}$$
representará o conjunto de equações
$$du_{i_1 \cdots i_{k-1}} \quad := \quad u_{i_1 \cdots i_{k-1} j} dx^j, \quad i_l = 1, \cdots, n \text{ para } l = 1, \cdots, k-1. \tag{2.24}$$

2.3.1 Transformações estendidas: uma variável dependente e n variáveis independentes

No estudo da invariância de equações diferenciais parciais de ordem k com n variáveis independentes $x = (x^1, \cdots, x^n)$ e uma variável dependente $u = u(x)$, somos levados ao problema de encontrar as extensões das transformações do espaço (x, u) no espaço $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$.

Considere o conjunto de transformações de pontos

$$\begin{aligned} x^+ &= X(x,u), \\ u^+ &= U(x,u), \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde assumimos serem tais transformações injetivas em algum domínio Ω do espaço (x, u) e que $X(x, u), U(x, u)$ sejam ao menos de ordem C^k.

As transformações (2.25) preservam as condições de contato

$$\begin{aligned} du &= \partial u\, dx, \\ \vdots & \quad \vdots \\ d\partial^{k-1}u &= \partial^k u\, dx, \end{aligned}$$

em algum domínio Ω se, e somente se,

$$\begin{aligned} du^+ &= \partial u^+ dx, \\ \vdots & \quad \vdots \\ d\partial^{k-1}u^+ &= \partial^k u^+ dx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

no domínio correspondente Ω^+ do espaço $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$, onde (2.26) tem significado análogo a $(2.21) - (2.24)$.

Segue, de (2.26), que $du^+ = u_j^+ dx^{+\,j}$, e além disso, para $j = 1, \cdots, n$,

$$u_j^+ = U_j(x, u, \partial u).$$

De (2.25), obtemos:

$$\begin{aligned} du^+ &= (D_i U) dx^i, \\ dx^{+j} &= (D_i X^j) dx^i, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$(D_i X^j) u_j^+ = D_i U, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Consideremos a matriz de $n \times n$

$$A := \begin{pmatrix} D_1 X^1 & \dots & D_1 X^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n X^1 & \dots & D_n X^n \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

e assumamos a hipótese de A ser invertível. Então,

$$\begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \\ \vdots \\ u_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{pmatrix}.$$

Mais geralmente, temos:

$$\begin{pmatrix} u_{i_1 \cdots i_{k-1} 1}^+ \\ u_{i_1 \cdots i_{k-1} 2}^+ \\ \vdots \\ u_{i_1 \cdots i_{k-1} n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i_1 \cdots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 \cdots i_{k-1} n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U_{i_1 \cdots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 \cdots i_{k-1}} \end{pmatrix}.$$

Se as transformações (2.25) definem um $(GTPL)$ uniparamétrico

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \varepsilon), \\ u^* &= U(x, u; \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.28}$$

agindo no espaço (x, u), então sua k-ésima extensão no espaço $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$, dada por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \varepsilon), \\ u^* &= U(x, u; \varepsilon), \\ \partial u^* &= \partial^1 U(x, u, \partial u; \varepsilon), \\ \vdots & \quad \vdots \\ \partial^k u^* &= \partial^k U(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u; \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.29}$$

define um $(GTPL)$ a um parâmetro extendido. Segue, de (2.28), que

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$
\begin{pmatrix} u^+_{i_1\cdots i_{k-1}1} \\ u^+_{i_1\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ u^+_{i_1\cdots i_{k-1}n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i_1\cdots i_{k-1}1} \\ U_{i_1\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ U_{i_1\cdots i_{k-1}n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U_{i_1\cdots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1\cdots i_{k-1}} \end{pmatrix}, \qquad (2.31)
$$

onde $\{u^*_i = U_i\}$ são as componentes de $\partial u = \partial U$ e $\{u^*_{i_1\cdots i_{k-1}i} = U_{i_1\cdots i_{k-1}i}\}$ são as componentes de $\partial^k u^* = \partial^k U^*$. Em (2.31), $i_l = 1, \cdots, n$ para $l = 1, \cdots, k-1$, com $k > 1$.

2.3.2 Expressões do prolongamento

O $(GTPL)$

$$
\begin{aligned}
x^{*\,i} &= x^i(x,u;\varepsilon) &&= x^i + \varepsilon \xi^i(x,u) + O(\varepsilon^2), \\
u^* &= U(x,u;\varepsilon) &&= u + \varepsilon \eta(x,u) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

$i = 1, \cdots, n$, agindo no espaço (x,u) tem como gerador infinitesimal

$$
X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}.
$$

A k-ésima extensão de (2.21) é dada por:

$$
\begin{aligned}
x^{*\,i} &= x^i(x,u;\varepsilon) &&= x^i + \varepsilon \xi^i(x,u) + O(\varepsilon^2), \\
u^* &= U(x,u;\varepsilon) &&= u + \varepsilon \eta(x,u) + O(\varepsilon^2), \\
u^*_i &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon) &&= u_i + \varepsilon \eta^{(1)}_i(x,u,\partial u) + O(\varepsilon^2), \qquad (2.32) \\
\vdots & \quad \vdots && \quad \vdots \\
u^*_{i_1\cdots i_k} &= U_{i_1\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u;\varepsilon) &&= u_{i_1\cdots i_k} + \varepsilon \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\cdots,\partial^k u) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

onde $i = 1, 2, \cdots n$ e $i_l = 1, 2, \cdots, n$ e $l = 1, 2, \cdots, k$ com $k \in \mathbb{N}$ tem seu *(k-ésimo estendido) infinitésimo*

$$
(\xi(x,u), \eta(x,u), \eta^{(1)}(x,u,\partial u), \cdots, \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u))
$$

com o correspondente *(k-ésimo estendido) gerador infinitesimal*

$$
\begin{aligned}
X^{(k)} = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}_i(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots \\
+\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}},\ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \qquad (2.33)
$$

Para não carregar a notação, omitiremos a dependência em relação a x, u e ao conjunto de derivadas desta última.

Teorema 7. *Sejam* $\eta_i^{(1)}$ *e* $\eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)}$ *dados por* (2.33)*, com* $i_l = 1, \cdots, n$*,* $l = 1, \cdots, k$ *e* $k > 1$*. Então,*

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= D_i\eta - (D_i\xi^j)u_j, \\ \eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)} &= D_{i_k}\eta_{i_1\cdots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k}\xi^j)u_{i_1\cdots i_{k-1}j}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Demonstração. De (2.27) e (2.32), temos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} D_1(x^1+\varepsilon\xi^1) & \dots & D_1(x^n+\varepsilon\xi^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n(x^1+\varepsilon\xi^1) & \dots & D_n(x^n+\varepsilon\xi^n) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\ &= I + \varepsilon B + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

onde I denota a matriz identidade e

$$B := \begin{pmatrix} D_1\xi^1 & \dots & D_1\xi^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n\xi^1 & \cdots & D_n\xi^n \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Como A é inversível, então

$$A^{-1} = I - \varepsilon B + O(\varepsilon^2). \tag{2.36}$$

De (2.30), (2.29), (2.35) e (2.36), segue que

$$\begin{pmatrix} u_1 + \varepsilon\eta_1^{(1)} \\ u_2 + \varepsilon\eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n + \varepsilon\eta_n^{(1)} \end{pmatrix} = (I - \varepsilon B)\begin{pmatrix} u_1 + \varepsilon D_1\eta \\ u_2 + \varepsilon D_2\eta \\ \vdots \\ u_n + \varepsilon D_n\eta \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

e então,

$$\begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\eta \\ D_2\eta \\ \vdots \\ D_n\eta \end{pmatrix} - B\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

que é equivalente à primeira parte de (2.34). A segunda parte é provada de maneira análoga, a partir das mesmas equações. Assim,

$$\begin{pmatrix} u_{i_1\cdots i_{k-1}1} + \varepsilon\eta_{i_1\cdots i_{k-1}1}^{(k)} \\ u_{i_1\cdots i_{k-1}2} + \varepsilon\eta_{i_1\cdots i_{k-1}2}^{(k)} \\ \vdots \\ u_{i_1\cdots i_{k-1}n} + \varepsilon\eta_{i_1\cdots i_{k-1}n}^{(k)} \end{pmatrix} = (I - \varepsilon B)\begin{pmatrix} u_{i_1\cdots i_{k-1}1} + \varepsilon D_1\eta_{i_1\cdots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ u_{i_1\cdots i_{k-1}2} + \varepsilon D_2\eta_{i_1\cdots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ \vdots \\ u_{i_1\cdots i_{k-1}n} + \varepsilon D_n\eta_{i_1\cdots i_{k-1}}^{(k-1)} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

de onde podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_{k-1}1} \\ \\ \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_{k-1}3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\eta^{(k-1)}_{i_1\cdots i_{k-1}} \\ \\ D_2\eta^{(k-1)}_{i_1\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n\eta^{(k-1)}_{i_1\cdots i_{k-1}} \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

com $i_l = 1, \cdots, n$, para $l = 1, \cdots, k-1$, com $k = 2, 3, \cdots$. $\square$

2.4 Invariância de uma equação diferencial parcial

Sejam $x = (x^1, \cdots, x^n) \in M$ e $u : M \to \mathbb{R}$ diferenciável. Uma E.D.P de ordem k é uma relação F que associa as variáveis independentes $x \in M$, dependentes $u : M \to \mathbb{R}$ e derivadas de u até ordem k, de modo que $F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0$. Seja $N := dim\{x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u\}$. Assim, a função u é solução da E.D.P dada por $F = 0$ se, e somente se,

$$F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0. \tag{2.37}$$

Os conjuntos

$$F^{-1}(\{0\}) := \{(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) : F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0\} \subset \mathbb{R}^N$$

e

$$S_{ol} := \{(x, u) : u \text{ é solução de } F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0\}$$

determinam variedades, sendo este último nada mais que o produto cartesiano de uma variedade $\Omega \subseteq M$ pelo subconjunto $U := \{u(x) : x \in M \text{ e } u \text{ é solução de (2.37)}\} \subseteq \mathbb{R}$. Podemos determinar, em $S_{ol} = \Omega \times U$, os pontos invariantes por um $(GTPL)$ da forma (2.1).

A cada elemento deste grupo corresponderá um campo vetorial $X \in \sec T(\Omega \times U)$[1].

Se denotarmos por $U_1, \cdots, U_{i_1\cdots i_k}$ os respectivos espaços das derivadas $\partial u, \cdots, \partial^k u$, o campo vetorial $X \in \sec T(\Omega \times U)$ induzirá um campo vetorial estendido[2] (ou prolongado)

$$X^{(k)} = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}_i(x, u, \partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}}$$

em $\sec T(\Omega \times U \times U_1 \times \cdots \times U_{i_1\cdots i_k})$.

[1] A expressão $X \in \sec T(\Omega \times U)$ significa que o campo vetorial X é uma seção do fibrado tangente $T(\Omega \times U)$.

[2] *A priori*, todos os coeficientes do campo estendido deveriam depender de $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$. Entretanto, os resultados obtidos na Seção 2.3.2 nos asseguram que não é este o nosso caso.

Por exemplo, nesta tese aplicaremos os métodos que estamos apresentando neste capítulo à equação

$$F(p) := u_{xx} + u_{yy} + 4(x^2 + y^2)u_{tt} + 4yu_{xt} - 4xu_{yt} + f(u) = 0,$$

onde $p = (x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{xy}, u_{xt}, u_{yy}, u_{yt}, u_{tt}) \in \mathbb{R}^{13}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Neste caso, com a notação utilizada acima, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 = M,\ k = 2,\ U_1 = \{0\},\ U_2 = \mathbb{R}^6$ e $S_{ol} \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^4$.

Em S_{ol} os geradores são da forma

$$S = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

que por sua vez induzem, em $F^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^{13}$, o campo vetorial

$$\begin{aligned}\hat{S} \ &= \ \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_y^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_y} + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t}\\ &+\eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{yy}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta_{xt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta_{yt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \eta_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta_{xy}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}.\end{aligned}$$

O espaço estendido $M \times U \times U_1 \times \cdots \times U_{i_1 \cdots i_k}$ é chamado espaço de jatos (*jet space*, vide Olver [73], pag. 98).

O objetivo desta seção é determinar as condições de invariância de uma equação diferencial. Para tanto, iniciamos com a

Definição 7. *O* $(GTPL)$ *a um parâmetro*

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \varepsilon),\\ u^* &= U(x, u; \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.38}$$

deixa a E.D.P (2.37) *invariante se, e só se, suas* k *- ésimas extensões, definidas em* (2.32) *deixam invariantes a superfície* (2.37).

Definição 8. *Seja*

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.39}$$

o gerador infinitesimal de (2.38). *O campo* X *é admitido pela E.D.P* (2.37) *se seu* k *- ésimo gerador infinitesimal estendido*

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots\\ &+\eta_{i_1 \cdots i_k}^{(k)}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_k}},\ k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

satisfaz a equação

$$X^{(k)}F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)=0,\quad \textit{quando}\quad F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)=0. \tag{2.41}$$

Neste caso, a transformação infinitesimal que corresponde ao campo expresso em (2.39) *é chamada simetria de Lie da E.D.P e, por abuso de linguagem, identificaremos a transformação infinitesimal com o seu respectivo gerador infinitesimal, chamado-o também de simetria de Lie da E.D.P* (2.37)*.*

A condição de invariância (2.41), ao ser aplicada concretamente em uma E.D.P, nos conduzirá a um sistema linear de E.D.Ps envolvendo os coeficientes $\xi^i(x,u)$, $\eta(x,u)$ da simetria (2.39). A solução deste sistema, no qual surgem constantes arbitrárias, ao serem substituídas em (2.39), nos dará uma combinação linear de todas as simetrias de deixam a E.D.P $F=0$ invariante. Vide o exemplo dado pela equação (2.50) na próxima subseção ou a aplicação concreta da teoria no Capítulo 5.

Teorema 8. ***Critério para invariância de uma E.D.P***

Sejam X e $X^{(k)}$ dados, respectivamente, em (2.39) *e* (2.40)*. Então* (2.38) *é admitido pela E.D.P se, e somente se,*

$$X^{(k)}F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)=0,\quad \textit{quando}\quad F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)=0. \tag{2.42}$$

A prova é simples, mas a notação é muito carregada. A fim de não ficar desagradável a leitura, façamos as seguintes convenções:

1. $\xi\dfrac{\partial}{\partial x}$ denotará $\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$;
2. $\eta^{(l)}\dfrac{\partial}{\partial u_l}$ denotará $\eta^{(l)}_{i_1\cdots i_l}\dfrac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}}$, $1\le l\le k$;
3. u_l denotará $u_{i_1\cdots i_l}$, $1\le l\le k$, valendo a mesma convenção para η;
4. F^* denotará F nos pontos (2.38).

Demonstração. Suponha que F seja invariante sob (2.38). Então,

$$\begin{aligned}
F^* &= F(x+\varepsilon\xi+O(\varepsilon^2),u+\varepsilon\eta+O(\varepsilon^2),\cdots,u_k+\varepsilon\eta_k+O(\varepsilon^2))\\
&= F+\varepsilon\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial u}+\cdots+\eta^{(k)}\frac{\partial F}{\partial u_k}+O(\varepsilon^2)\right)\\
&= F+\varepsilon X^{(k)}F+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

de onde vemos que (2.42) é verdadeira se, e somente se, é invariante, encerrando, assim, a demonstração. □

2.4.1 Soluções invariantes

Considere uma E.D.P de ordem k, com $k > 1$, que admite um $(GTPL)$ a um parâmetro com gerador infinitesimal (2.39). Assumamos que $\xi(x,u) = (\xi^1, \cdots, \xi^n) \neq 0$.

Definição 9. *A função $u = \phi(x)$ é uma solução invariante de* (2.37) *correspondendo a* (2.39) *admitida pela E.D.P* (2.37) *se, e somente se*

1. *$u = \phi(x)$ é uma superfície invariante de* (2.39).
2. *$u = \phi(x)$ é solução de* (2.37).

Ou, de maneira equivalente, $u = \phi(x)$ é uma solução invariante de (2.37) em relação a (2.39) se, e só se $u = \phi(x)$ satisfaz

1. $X(u - \phi(x)) = 0$ quando $u = \phi(x)$, isto é,
$$\xi^i(x,\phi(x))\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} = \eta(x,\phi(x)), \tag{2.43}$$
2. F=0 para $u_j = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^j}$, $j \in \{1, \cdots, k\}$.

As soluções invariantes podem ser encontradas de duas maneiras:

- ***Método da Forma Invariante:*** Resolvemos a condição da superfície ser invariante (equação 2.42), resolvendo as equações características
$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x,u)} = \cdots = \frac{du}{\eta(x,u)} \tag{2.44}$$
quando $u = \phi(x)$.

  Se $(v_1(x,u), v_2(x,u), \cdots, v_{n-1}(x,u), v(x,u))$ são n invariantes independentes de (2.44) com $v_u \neq 0$, então a solução $u = \phi(x)$ é dada implicitamente pela forma invariante
$$v(x,u) = \psi(v_1, \cdots, v_{n-1}),$$
onde ψ é uma função arbitrária de $v_1, \cdots, v_{n-1}$.

- ***Método da Substituição Direta:*** Suponha que $\xi_n \neq 0$. Assim
$$u_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi^i}{\xi^n} u_i + \frac{\eta}{\xi^n}.$$

  Quando encontramos soluções invariantes da E.D.P (2.37), qualquer termo envolvendo derivadas de u com respeito a x^n pode ser expresso em termos de x, u e derivadas de u

com respeito a $x^1, \cdots, x^{n-1}$. Consequentemente obtemos uma nova equação diferencial (parcial) com variável dependente u e variáveis independentes $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ e parâmetro x^n. Qualquer solução desta nova equação diferencial define uma solução invariante da E.D.P (2.37). No caso particular em que $n = 2$, este método nos fornece uma equação diferencial ordinária.

2.4.2 Equações determinantes para transformações infinitesimais de uma E.D.P de ordem k

Seja F uma E.D.P (2.37) e suponha que possamos escrevê-la como

$$F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) \;=\; u_{i_1\cdots i_k} \;-\; f(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) \;=\; 0, \tag{2.45}$$

onde f não depende de $u_{i_1\cdots i_l}$ e $k > 1$. Então F admite o gerador infinitesimal (2.39) com a k - ésima extensão (2.40) se, e somente se

$$\eta_{i_1\cdots i_l} = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \cdots + \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial f}{\partial u_{i_1\cdots i_k}} \tag{2.46}$$

quando $u_{i_1\cdots i_l} - f(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0$.

Do Teorema 7 segue que os coeficientes $\eta^{(p)}_{i_1\cdots i_p}$ são lineares com relação às componentes de $\partial^p u$, se $p > 1$, e são polinômios nas compontentes de $\partial^j u$, $1 \leq j \leq p$, cujos coeficientes são lineares em $(\xi(x, u), \eta(x, u))$ e nas suas derivadas parciais com respeito a (x, u) até ordem p. Isto é resumido no

Lema 2. *Existe uma função polinomial $h(x, u, \partial u, \cdots, \partial^{k-1} u)$, em $\partial u, \cdots, \partial^{k-1} u$, tal que*

$$\begin{aligned} \eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k} &= h(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) - \xi^j_u u_j u_{i_1\cdots i_k} - \xi^j_u u_{i_1} u_{j i_2\cdots i_k} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k} u_{i_1\cdots i_{k-1} j} \\ &\quad + \eta_u u_{i_1\cdots i_k} + \eta_{uu}(u_{i_1} u_{i_2\cdots i_{k-1}} + u_{i_2} u_{i_1 i_3\cdots i_{k-1}} + \cdots + u_{i_k} u_{i_1\cdots i_{k-1}}). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Demonstração. Uma vez que

$$\eta^{(1)}_i = D_i \eta - (D_i \xi^j) u_j = \eta_i + \eta_u u_i - \xi^j_i u_j - \xi^j_u u_j u_i,$$

então,

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}_{kl} &= \eta_{kl} + \eta_{lu} u_k - \xi^j_{kl} u_j + \eta_{ku} u_l - \xi^j_{lu} u_j u_k - \xi^j_{ku} u_j u_l - \xi^j_{uu} u_j u_k u_l - \xi^j_k u_{lj} \\ &\quad - \xi^j_l u_{jk} - \xi^j_u u_j u_{lk} - \xi^j_u u_k u_{jl} - \xi^j_u u_l u_{kj} + \eta_u u_{kl} + \eta_{uu} u_k u_l \end{aligned} \tag{2.48}$$

satisfaz claramente a tese a tese do corolário. Suponha que $2 \leq k \in M$. Logo,

$$\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k} = D_{i_k}\eta^{(k-1)}_{i_1\cdots i_{k-1}} - (D_{i_k}\xi^l)u_{i_1\cdots i_{k-1}l}.$$

Conseqüentemente, existe uma função $h = h(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$ tal que

$$\begin{aligned}\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k} &= h(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u) - \xi^j_u u_j u_{i_1\cdots i_k} - \xi^j_u u_{i_1}u_{ji_2\cdots i_k} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}j}\\ &\quad +\eta_u u_{i_1\cdots i_{k-1}} + \eta_{uu}(u_{i_1}u_{i_2\cdots i_{k-1}} + u_{i_2}u_{i_1i_3\cdots i_{k-1}} + \cdots + u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}}).\end{aligned}$$

Assim, calculando $\eta^{(k+1)}_{i_1\cdots i_k i_{k+1}}$, obtemos, explicitamente:

$$\begin{aligned}\eta^{(k+1)}_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} &= (D_{i_{k+1}}h) - (D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_j u_{i_1\cdots i_k} - (D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_{i_1}u_{ji_2\cdots i_k} - \cdots\\ &\quad -(D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}j} - \xi^j_{i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k j} - \xi^j_u u_{ji_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k}\\ &\quad -\xi^j_u u_{i_1 i_{k+1}}u_{ji_2\cdots i_k} - \xi^j_u u_{i_2 i_{k+1}}u_{i_1 j i_3\cdots i_k} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_{k-1}j}\\ &\quad -\eta_{i_{k+1}u}u_{i_1\cdots i_k} + \eta_{uu}(u_{i_1i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k} + \cdots + u_{i_k i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k})\\ &\quad -\xi^j_u u_j u_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} - \xi^j_u u_{i_1}u_{ji_2\cdots i_k i_{k+1}} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}ji_{k+1}}\\ &\quad -\xi^j_u u_{i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k j} + \eta_u u_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} + \eta_{uu}(u_{i_1}u_{i_2\cdots i_k i_{k+1}} + \cdots + u_{i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k})\end{aligned} \tag{2.49}$$

Seja

$$\begin{aligned}\tilde{h}(x,u,\partial u,\cdots\partial^{k+1}u) &:= (D_{i_{k+1}}h) - (D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_j u_{i_1\cdots i_k} - (D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_{i_1}u_{ji_2\cdots i_k} - \cdots\\ &\quad -(D_{i_{k+1}}\xi^j_u)u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}j} - \xi^j_{i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k j} - \xi^j_u u_{ji_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k}\\ &\quad -\xi^j_u u_{i_1i_{k+1}}u_{ji_2\cdots i_k} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_{k-1}j} - \eta_{i_{k+1}u}u_{i_1\cdots i_k}\\ &\quad +\eta_{uu}(u_{i_1i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k} + \cdots + u_{i_k i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k}).\end{aligned}$$

Então, concluímos que a equação (2.49) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\eta^{(k+1)}_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} &= \tilde{h} - \xi^j_u u_j u_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} - \xi^j_u u_{i_1}u_{ji_2\cdots i_k i_{k+1}} - \cdots - \xi^j_u u_{i_k}u_{i_1\cdots i_{k-1}ji_{k+1}}\\ &\quad -\xi^j_u u_{i_{k+1}}u_{i_1\cdots i_k j} + \eta_u u_{i_1\cdots i_k i_{k+1}} + \eta_{uu}(u_{i_1}u_{i_2\cdots i_k i_{k+1}} + \cdots + u_{i_{k+1}}u_{i_2\cdots i_k}),\end{aligned}$$

provando o Lema. □

Da demonstração do Lema 2, decorre que se f, em (2.45), é um polinômio em relação às componentes de $\partial^j u$, $1 \leq j \leq p$, então (2.46) é uma equação polinomial nas componentes $\partial^j u$,

$1 \leq j \leq p$, cujos componentes são lineares em $(\xi(x,u), \eta(x,u))$ e nas suas derivadas parciais até ordem k. Assim, utilizando (2.45) para eliminar $u_{i_1 \cdots i_l}$ em (2.46), uma vez que, em geral, há mais do que $(n+1)$ equações, a equação polinomial resultante nas componentes de $\partial^j u$, $1 \leq j \leq p$, deve ser verdadeira para valores arbitrários de tais componentes.

Como conseqüência, cada coeficiente do polinômio deve ser nulo, resultando assim num sistema linear homogêneo de E.D.Ps para as $n+1$ funções $(\xi(x,u), \eta(x,u))$. Tal sistema é chamado o conjunto de *equações determinantes* (*determining equations*) do gerador infinitesimal X admitido por (2.45). O conjunto das equações determinantes forma um sistema sobre-determinado de equações, uma vez que, em geral, há mais do que $n+1$ equações. Pode acontecer que sua única solução seja trivial $(\xi, \eta) = (0,0)$, ou então, no caso não trivial, temos as seguintes duas possibilidades:

- Se a solução geral das equações determinantes contiver um número finito, digamos m, de constantes essenciais arbitrárias, então ele corresponde a um $(GTPL)$ a m-parâmetros admitido por (2.45).

- Se a solução não puder ser expressa em termos de um número finito de constantes essenciais, então as equações determinantes correspondem a um $(GTPL)$ de infinitos parâmetros admitido por (2.45) ou contém funções arbitrárias de x e u.

O seguinte exemplo ilustra os dois casos acima mencionados, cujos detalhes e cálculos podem ser conferidos no Capítulo 5.

Se $f(u) = e^u$, a solução geral das equações determinantes da equação

$$u_{xx} + u_{yy} + 4(x^2+y^2)u_{tt} + 4yu_{xt} - 4xu_{yt} + f(u) = 0 \tag{2.50}$$

é:

$$\begin{cases} \xi &= a_1 y + a_2 + a_5 x, \\ \phi &= -a_1 x + a_3 + a_5 y, \\ \tau &= 2a_3 x - 2a_2 y + a_4 + 2a_5 t, \\ \eta &= -2a_5, \end{cases}$$

onde a simetria, neste caso, é dada pelo seguinte campo vetorial

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Neste caso, temos 5 constantes arbitrárias, que corresponderão a um grupo de 5-parâmetros, pois

$$X = a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$+a_4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_5\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

é a simetria resultante e os campos entre parênteses formam uma álgebra de Lie de dimensão 5.

Contudo, se tomarmos $f(u) = u$ em (2.50), os coeficientes da simetria serão

$$\begin{cases} \xi = a_1 y + a_2, \\ \phi = -a_1 x + a_3, \\ \tau = 2a_3 x - 2a_2 y + a_4, \\ \eta = a_5 u + \beta(x, y, t), \end{cases}$$

onde β é uma função satisfazendo a própria equação, isto é

$$\Delta_{H^1}\beta + \beta = 0$$

e a simetria X será

$$X = a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$+a_4\frac{\partial}{\partial t} + a_5 u\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial u},$$

que possui 5 constantes arbitrárias, e estas constantes determinarão um grupo a 5-parâmetros, mas possui uma simetria cujo coeficiente é uma função que satisfaz a própria equação, e esta simetria está associada a um grupo de dimensão infinita. Este último fato reflete a linearidade da equação diferencial.

Agora apresentaremos alguns resultados que simplificam significativamente o processo de se obter as equações determinantes. Antes, precisamos definir o que é uma equação diferencial parcial semilinear.

Definição 10. *Seja $u : M \to \mathbb{R}$ de classe ao menos $C^k(M)$ e*

$$L_p := A^{i_1\cdots i_p}(x)\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}},\ 1 \le p \le k,$$

onde os coeficientes $A^{i_1\cdots i_p}(x)$ são simétricos com respeito a seus índices.

Uma equação diferencial $F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = 0$ é dita ser uma equação diferencial parcial semilinear de ordem k se existe uma função $h = h(x, u, \partial u, \cdots \partial^{k-1}u)$ e um operador L_k tal que

$$F := L_k u + h(x, u, \partial u, \cdots \partial^{k-1}u) = 0.$$

O teorema seguinte pode ser provado para equações de ordem $k \geq 1$. Para $k \geq 3$ a demonstração, além de técnica, é muito tediosa. A prova para os casos semilineares pode ser encontrada em [53] e Bluman ([10]) para o caso quaselinear em que os coeficientes da equação possuem dependência da variável dependente[3].

Teorema 9. *Suponha que uma E.D.P semilinear de segunda ordem*

$$A^{ij}(x)u_{ij} + h(x, u, \partial u) = 0$$

admita um $(GTPL)$ com gerador infinitesimal (2.39)*. Então $\xi^i(x, u)$, $i = 1, \cdots, n$, independe de u.*

Demonstração. Seja

$$F := A^{ij}(x)u_{ij} + h(x, u, \partial u)$$

e $X^{(2)}$ a extensão de segunda ordem da simetria X. Então,

$$X^{(2)} = \xi^k(x, u)\frac{\partial}{\partial x^k} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_k^{(1)}(x, u, \partial u)\frac{\partial}{\partial u_k} + \eta_{kl}^{(2)}(x, u, \partial u, \partial^2 u)\frac{\partial}{\partial u_{kl}},$$

e os coeficientes no espaço de jatos são dados por (vide Teorema 7)

$$\begin{aligned}
\eta_k^{(1)} &= \eta_k + \eta_u u_k - \xi_k^j u_j - \xi_u^j u_j u_k, \\
\eta_{kl}^{(2)} &= \eta_{kl} + \eta_{lu} u_k - \xi_{kl}^j u_j + \eta_{ku} u_l + \eta_{uu} u_k u_l - \xi_{lu}^j u_j u_k - \xi_{ku}^j u_j u_l - \xi_{uu}^j u_j u_k u_l \\
&\quad + \eta_u u_{kl} - \xi_k^j u_{lj} - \xi_l^j u_{kj} - \xi_u^j u_{lj} u_k - \xi_u^j u_{lk} u_j - \xi_u^j u_l u_{kj}.
\end{aligned}$$

Desta forma, definindo $F_k := \frac{\partial F}{\partial x^k}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
X^{(2)}F &= \xi^k F_k + \eta F_u + \eta_k F_{u_k} + A^{kl}\eta_{kl} + (u_k \eta_u - \xi_k^j u_j)F_{u_k} + A^{kl}\eta_{kl}u_k - A^{kl}\xi_{kl}^j u_j \\
&\quad + A^{kl}\eta_{ku}u_l - A^{kl}\xi_{lu}^j u_j u_k + A^{kl}\eta_{uu}u_k u_l - A^{kl}\xi_{ku}^j u_j u_l - A^{kl}\xi_{uu}^j u_j u_k u_l \\
&\quad + A^{kl}\eta_u u_{kl} - A^{kl}\xi_k^j u_{lj} - A^{kl}\xi_l^j u_{kj} - A^{kl}\xi_u^j u_{lj}u_k - A^{kl}\xi_u^j u_{lk}u_j - A^{kl}\xi_u^j u_l u_{jk}.
\end{aligned}$$

[3] Uma E.D.P de ordem k é dita ser quaselinear se ela pode ser escrita na forma $A^{i_1\cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^{k-1}u)u_{i_1\cdots i_k} + h(x, u, \partial u, \cdots, \partial^{k-1}u) = 0$. No caso particular do artigo de Bluman, os coeficientes são da forma $A^{i_1\cdots i_k}(x, u)$. Para a classificação de E.D.Ps quanto à sua (não-)linearidade, consulte [45].

Há duas maneiras equivalentes de determinarmos os coeficientes de uma simetria. Aqui, seguiremos o critério de Ibragimov ([60]) e Olver ([73]). No Capítulo 5 utilizaremos o método de Bluman e Kumei ([9]).

Assim, a condição de simetria é

$$X^{(2)}F = \lambda(x,u)F, \tag{2.51}$$

para alguma função $\lambda = \lambda(x,u)$.

Como F é uma função linear nas derivadas segundas da função u, a condição de simetria implica que os termos envolvendo produtos das derivadas primeiras e segundas de u deve ser identicamente nulo. Logo,

$$A^{kl}(\xi^j_u u_{lj}u_k + \xi^j_u u_{lk}u_j + \xi^j_u u_l u_{jk}) = 0. \tag{2.52}$$

Utilizando o fato que

$$\begin{aligned} u_k &= \delta^p_k u_p, & u_{lj} &= \delta^r_l \delta^s_j u_{rs},\\ u_j &= \delta^p_j u_p, & u_{lk} &= \delta^r_l \delta^s_k u_{rs},\\ u_l &= \delta^p_l u_p, & u_{lj} &= \delta^r_j \delta^s_k u_{rs}, \end{aligned}$$

e substituindo em (2.52), chegamos à seguinte relação:

$$(A^{kl}\xi^j_u\delta^p_k\delta^r_l\delta^s_j + A^{kl}\xi^j_u\delta^p_j\delta^r_l\delta^s_k + A^{kl}\xi^j_u\delta^p_l\delta^r_j\delta^s_k)u_p u_{rs} = 0.$$

Como o conjunto $\{u_j u_{kl}\}$ é linearmente independente, a seguinte igualdade necessariamente é satisfeita:

$$A^{kl}\xi^j_u\delta^p_k\delta^r_l\delta^s_j + A^{kl}\xi^j_u\delta^p_j\delta^r_l\delta^s_k + A^{kl}\xi^j_u\delta^p_l\delta^r_j\delta^s_k = 0. \tag{2.53}$$

Tomando $p = r = s$, concluímos que

$$A^{pp}\xi^p_u = 0.$$

Sejam N_1 e N_2 os conjuntos de índices tais que $A^{pp} \neq 0$ e $A^{pp} = 0$, respectivamente. Assim, para todo $i \in N_1$, $\xi^p_u = 0$ e portanto, $\xi^i = \xi^i(x)$.

Suponha que $N_2 \neq \emptyset$. Então existe $n_0 \in N_2$. Nosso objetivo aqui é mostrar que $\xi^{n_0}_u = 0$, para todo $n_0 \in N_2$. Tomando $p \neq k$, $p \neq j$ e escolhendo $s = n_0$ em (2.53), obtemos

$$A^{n_0 p}\xi^r_u = 0.$$

Por hipótese, fixado n_0, existe p_0 tal que $A^{n_0 p_0} \neq 0$. Logo, escolhendo $p = p_0$, concluímos que $\xi^r_u = 0$ para todo r.

□

Teorema 10. *Nas hipóteses do Teorema* 9*, se*

$$h = b^j(x)u_j + f(x,u),$$

então η é linear em u.

Demonstração. Decorre do Teorema 9 que

$$X^{(2)}F = \xi^k F_k + \eta F_u + \eta_k F_{u_k} + A^{kl}\eta_{kl} + (u_k\eta_u - \xi_k^j u_j)F_{u_k} + A^{kl}\eta_{kl}u_k - A^{kl}\xi_{kl}^j u_j$$

$$+A^{kl}\eta_{ku}u_l + A^{kl}\eta_u u_{kl} - A^{kl}\xi_k^j u_{lj} - A^{kl}\xi_l^j u_{kj} + A^{kl}\eta_{uu}u_k u_l.$$

Como a equação é linear nas derivadas primeiras e segundas de u, a condição (2.51) implica que os coeficientes de $u_k u_l$ devem ser nulos. Logo, $A^{kl}\eta_{uu} = 0$. Então, $\eta_{uu} = 0$. □

2.5 O Teorema de Noether e simetrias

Nesta seção apresentaremos uma aplicação da teoria de simetrias a problemas físicos, mais especificamente, estaremos interessados na construção de leis de conservação.

Uma *lei de conservação* num sistema físico, que tenha variáveis independentes t, x, y, z (que naturalmente pensamos como sendo o tempo e as três variáveis espaciais) e variáveis dependentes descritas por uma função de estado $u(t,x,y,z) = (u^1(t,x,y,z), \cdots, u^m(t,x,y,z))$ é uma equação da forma

$$Div(f) = D_t f^1 + D_x f^2 + D_y f^3 + D_z f^4 = 0,$$

onde a função vetorial $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ pode depender de t, x, y, z, u e das derivadas de u até ordem k, para algum $k \in \mathbb{N}$, e $D_t,\ D_x,\ D_y,\ D_z$ são os operadores de derivação total de u com respeito a t, x, y, z, respectivamente.

O sentido físico de uma lei de conservação é o seguinte: a taxa de variação da função f^1 dentro de qualquer domínio Ω limitado no espaço é igual ao fluxo de (f^2, f^3, f^4) através da fronteira $\partial\Omega$. Do ponto de vista matemático, leis de conservação fornecem uma base para obtenção de estimativas, *a priori*, de existência de soluções do sistema.

De um modo geral, construir leis de conservação para um sistema físico pode ser uma tarefa não-trivial. Contudo, para sistemas que surjam de uma formulação Lagrangeana, existe um teorema fundamental, devido a Emmy Noether, que prova que para toda transformação infinitesimal admitida por uma integral de ação de um sistema Lagrangeano, podemos encontrar, construtivamente, suas leis de conservação.

Dada uma função, denominada Lagrangeana do sistema,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) \tag{2.54}$$

definida num domínio $\Omega \subseteq (M, g)$[4], o problema de se encontrar funções $u(x)$ que correspondam a um valor extremo da integral

$$J[u] := \int_\Omega \mathcal{L}\sqrt{g}dV. \tag{2.55}$$

[4]Por abuso de linguagem, utilizaremos g para denotarmos tanto a métrica quanto seu respectivo determinante.

é chamado um *problema variacional* e a integral $J[u]$ acima é chamada *integral de ação*. Denotaremos por $dV = \sqrt{g}dx$ e por dS as medidas de Lebesgue de uma região $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sua fronteira $\partial\Omega$, respectivamente.

O trabalho original de Noether considerava transformações da forma

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi(x, u, \partial u, \cdots, \partial^p u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x, u, \partial u, \cdots, \partial^p u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.56}$$

que deixam a integral de ação invariante para alguma região arbitrária Ω. Neste trabalho, Noether estabeleceu uma relação explícita entre os infinitesimais ξ, η e o fluxo conservado.

2.5.1 Equações de Euler - Lagrange

Seja $\mathcal{L}$ a Lagrangeana dada por (2.54) e considere uma perturbação na função $u : u(x) \to u(x) + \varepsilon v(x)$. Assumindo que $\mathcal{L}$ seja uma função C^∞, então, a correspondente perturbação na Lagrangeana é

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &:= \mathcal{L}(x, u + \varepsilon v, \partial u + \varepsilon\partial v, \cdots, \partial^k u + \varepsilon\partial^k v) - \mathcal{L}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}v_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}}v_{ij} + \cdots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i_1\cdots i_k}}v_{i_1\cdots i_k}\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Definição 11. *O operador*

$$E := \frac{\partial}{\partial u} - D_i\frac{\partial}{\partial u_i} + D_iD_j\frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \cdots + (-1)^k D_{i_1}\cdots D_{i_k}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}}$$

é chamado operador de Euler.

Seja

$$\begin{aligned} W^i[u, v] &:= v\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} + \cdots + (-1)^{k-1}D_{i_1}\cdots D_{i_{k-1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_1\cdots i_{k-1}}}\right) \\ &\quad + (D_{i_1}v)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i_1 i}} + \cdots + (-1)^{k-2}D_{i_2}\cdots D_{i_{k-1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i_1 i i_2\cdots i_{k-1}}}\right) \\ &\quad + \cdots + (D_{i_1}\cdots D_{i_{k-1}}v)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i_1\cdots i_{k-1}i}}. \end{aligned}$$

Determinemos agora as condições a serem satisfeitas pela função $u(x)$ para serem extremos funcionais. Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta J[u] \;:=\; J[u+\varepsilon v] - J[u] &= \int_\Omega \delta \mathcal{L} dV \\
&= \varepsilon \int_\Omega \big(E(\mathcal{L})v + D_i W^i[u,v]\big)\, dV + O(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon \left(\int_\Omega E(\mathcal{L}) v dV + \int_{\partial\Omega} W^i[u,v] N_i dS \right) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

onde $E(\mathcal{L})$ é operador de Euler agindo na função $\mathcal{L}$, $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω e $N = (N_1, \cdots, N_n)$ é a normal unitária externa à mesma. A fim de que a função $u(x)$ seja um extremo do funcional $J[u]$, o coeficiente linear de ε deve ser nulo. Como a função $v(x)$ não altera as condições de contorno impostas a $u(x)$, podemos, sem perda de generalidade, assumir que $v(x)$ e suas derivadas em $W^i[u,v]$ anulam-se em $\partial\Omega$. Então a integral de superfície em

$$J'[u]v := \frac{d}{d\varepsilon} J[u+\varepsilon v]\bigg|_{s=0} = \int_\Omega E(\mathcal{L}) v dV + \int_{\partial\Omega} W^i[u,v] N_i dS = 0$$

também se anula, pois as funções $W^i[u,v]$ são lineares em v e em suas derivadas. Por conseqüência, o termo de volume deve se anular também para toda função $v(x)$ satisfazendo as condições de contorno homogêneas. Uma vez que o comportamento de $v(x)$ é arbitrário no interior de Ω, concluímos, pelo Lema de Lagrange[5], que um extremo $u(x)$ satisfaz:

$$E(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} + D_i D_j \frac{\partial L}{\partial u_{ij}} + \cdots + (-1)^k D_{i_1} \cdots D_{i_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i_1 \cdots i_k}} = 0. \tag{2.57}$$

A equação (2.57) é chamada *Equação de Euler - Lagrange* para o extremo $u(x)$ do funcional $J[u]$. Formalmente, demonstramos o

Teorema 11. *A fim de que uma função diferenciável $u(x)$ seja um extremo da integral de ação* (2.55)*, é necessário e suficiente que ela satisfaça a equação de Euler - Lagrange* (2.57).

[5]O Lema de Lagrange afirma que se f é uma função contínua num subconjunto compacto Ω e se, para toda função η de classe $C^1(\Omega)$ tais que $\eta|_{\partial\Omega} = 0$ e

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)dx = 0,$$

então $f(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

2.5.2 Simetrias variacionais, de divergência e leis de conservação

Nesta seção trataremos das simetrias variacionais e de divergência, e depois apresentaremos um algoritmo para calcular as leis de conservação de tais simetrias.

A seguinte igualdade é chamada *Identidade de Noether* (vide [37] ou [60], página 315):

$$X^{(k)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D_i\xi^i = E(\mathcal{L})(\eta - u_j\xi^j) + D_i\left(\xi^i\mathcal{L} + W^i[u, \eta - u_j\xi^j]\right).$$

Decorre, desta identidade, o seguinte teorema [72].

Teorema 12. *Teorema de Noether*

Sejam $X^{(k)}$ a k - ésima extensão do gerador

$$X = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.58}$$

e

$$B = (B^1, \cdots, B^n),\ B^i = B^i(x, u, \partial u, \cdots, \partial^l u),\ 1 \leq i \leq n,\ l \in \mathbb{N}.$$

Suponha que o campo vetorial B satisfaça a equação

$$X^{(k)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D_i\xi^i = D_iB^i$$

para $u(x)$ arbitrária. Então, para qualquer solução $u(x)$ das equações de Euler - Lagrange, temos a seguinte lei de conservação:

$$D_i\left(\xi^i\mathcal{L} + W^i[u, \eta - u_j\xi^j] - B^i\right) = 0.$$

Para estabelecer conceitos e fixar notações, seguem as definições:

Definição 12. *A divergência de um campo vetorial $B = (B^1, \cdots, B^n)$ é definida como sendo*

$$Div(B) := D_iB^i.$$

Definição 13. *Uma transformação do tipo (2.56), com gerador infinitesimal (2.58) é uma simetria de divergência da integral de ação $J[u]$ se, para toda função $u(x)$, existe algum campo vetorial*

$$A(x, u, \partial u, \cdots, \partial^r u) = (A^1, \cdots, A^n)$$

dependendo de x, u e suas derivadas de ordem finita r, para algum $r \in \mathbb{N}$, tal que

$$X^{(k)}\mathcal{L} + \mathcal{L}D_i\xi^i = Div(A).$$

No caso particular em que $A = 0$, dizemos que o campo X é uma simetria variacional.

Definição 14. *Se X é uma simetria de divergência, então dizemos que X é uma simetria de Noether.*

Capítulo 3

Álgebras e Grupos de Heisenberg

O objetivo deste capítulo é fazer uma breve introdução aos Grupos de Heisenberg. Tais grupos têm suas raízes na álgebra de operadores oriundos da Mecânica Quântica, a partir da formulação matricial da mesma pelo físico alemão Werner Karl Heisenberg em 1925, e têm sido amplamente estudados por diversas áreas desde a década de 1970.

Em particular, o grupo de Heisenberg tridimensional H^1 é, por si só, uma estrutura bastante rica. Simultaneamente é uma das oito geometrias de Thurston[1] e o exemplo mais simples de uma estrutura geométrica mais geral, chamada *Grupos de Carnot*.

3.1 Origens físicas

A álgebra de Lie de Heisenberg (vide a próxima seção para a definição de álgebras de Lie ou [66]) tem esse nome porque as equações de estrutura são as relações de comutação canônicas de Heisenberg na Mecânica Quântica. Tais relações, todavia, são versões quantizadas dos parênteses de Poisson para coordenadas canônicas na Mecânica Hamiltoniana.

O estado de um sistema clássico é descrito, na Mecânica Hamiltoniana, por n coordenadas $q_1, \cdots, q_n$ e n momentos $p_1, \cdots, p_n$. As $2n$ variáveis constituem as variáveis canônicas do sistema. Outras importantes funções na Física, tais como energia e momentum, são funções das variáveis canônicas e são chamados observáveis. Tais funções constituem uma álgebra de Lie de dimensão infinita com respeito aos parênteses de Poisson

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

[1] A recente demonstração da celebrada *conjectura de Poincaré* por Perelman tem atraído ainda mais a atenção da comunidade matemática a tais geometrias ([38]).

As equações de movimento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\},$$

são chamadas as *equações de Hamilton*, onde H é a Hamiltoniana do sistema.

Mais geralmente, a evolução temporal de um observável é dada pela equação

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

e neste caso, para descrevermos o comportamento da partícula, teremos $2n + 1$ variáveis, a saber, $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t)$.

A descrição, do ponto de vista da Mecânica Quântica, do mesmo sistema, é feita encontrando-se uma álgebra de operadores hermitianos num espaço de Hilbert cujo produto de Lie é dado por um colchete (de Lie), como dito na Mecânica Quântica, um comutador dos observáveis.

Isto é feito de modo que se A e B são dois operadores correspondentes às funções clássicas a e b, então $[A, B]$ é um operador que corresponde à função clássica $i\hbar\{a, b\}$, onde $\hbar = h/2\pi$ e h é a constante de Planck. Em particular, o conjunto das variáveis canônicas q_i, p_j satisfazem $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ e $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o símbolo de Kroenecker. Na Mecânica Quântica os respectivos operadores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[Q_i, Q_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{I}, \tag{3.1}$$

onde $\mathbb{I}$ denota o operador identidade.

No caso particular de uma partícula, os operadores Q_1, Q_2 e Q_3 são chamados, respectivamente, de X, Y e Z, e correspondem à multiplicação pelas componentes que representam. Por exemplo, se $|\psi\rangle$ é um *ket* (um vetor no espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável associadas à distribuição de probabilidade de uma partícula em um sistema quântico), então $X|\psi\rangle = x|\psi\rangle$, sendo o cálculo para os operadores Y e Z análogos, e os operadores momento são equivalentes a $P_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $P_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$ e $P_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$.

Embora tenhamos mostrado a relação entre os observáveis clássicos a, b e seus análogos na Mecânica Quântica A, B, há uma grande diferença na maneira de interpretá-los.

Na Mecânica Clássica os valores de todos os observáveis são completamente determinados, mas no mundo quântico isto não é verdade pois, em um dado estado, os observáveis têm apenas uma distribuição de probabilidade para seus valores, que eventualmente eles podem assumir num determinado ponto. O *Princípio de Incerteza de Heisenberg* traduz bastante bem essa diferença.

Enquanto que na Mecânica Newtoniana, saber a velocidade e a posição de uma partícula em um dado instante, digamos $t_0 = 0$, é suficiente para descrever toda a sua trajetória e momento, em qualquer tempo $t \geq t_0$, na Mecânica Quântica isso é vetado pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg, que nos permite obter informação sobre apenas um dos observáveis, em detrimento do outro.

Para maiores detalhes sobre Mecânica Quântica e grupos de Lie, consultar ([47, 81] e [78]), respectivamente.

3.2 Identificando $\mathbb{R}^{2n+1}$ com o Grupo de Heisenberg

Nesta seção muniremos os espaços euclidianos de dimensão ímpar superior a 1 com uma lei de composição de modo a torná-los grupos de Lie, mais especificamente, Grupos de Heisenberg.

Uma álgebra de Lie n dimensional $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial[2] real de dimensão n munido de uma operação bilinear, antissimétrica

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

chamado colchete de Lie[3], satisfazendo a Identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável M com uma lei de composição

$$\begin{array}{rccc} \phi: & M \times M & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & \phi(x, y^{-1}), \end{array}$$

diferenciável em todos os pontos, onde a inversão $y \mapsto y^{-1}$ também é diferenciável.

Considere $\mathbb{R}^{2n+1}$ com as coordenadas

$$(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n, t) = (x, y, t)$$

e defina em $\mathbb{R}^{2n+1}$ o seguinte colchete de Lie

$$[(x, y, t), (x', y', t')] := (0, 0, [(x, y), (x', y')]), \tag{3.2}$$

onde

$$[(x, y), (x', y')] := 2(x \cdot y' - y \cdot x').$$

É fácil ver que $(\mathbb{R}^{2n+1}, [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie. Isto nos motiva à seguinte definição:

[2]Trabalharemos apenas com espaços vetoriais sobre o corpo dos reais.

[3]Na Física, em geral, esta operação é chamada comutador de X e Y.

Definição 15. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *e o colchete de Lie dado por* (3.2). *A álgebra de Heisenberg é definida como sendo* $\mathfrak{h}_n := (\mathbb{R}^{2n+1}, [\ ,\ ])$.

Sejam $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n,\ T$ uma base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ e $[\ ,\ ]$ um colchete tal que as constantes de estrutura da álgebra de Lie sejam determinadas pelas relações

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [X_i, T] = [Y_j, T] = 0, \qquad [X_i, Y_j] = 4\delta_{ij}T. \tag{3.3}$$

Dado $(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, defina a matriz $m(x, y, t) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ como

$$m(x,y,t) := \begin{pmatrix} 0 & 2x^1 & \dots & 2x^n & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2y^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2y^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo bastante simples mostra que

$$m(x, y, t)m(x', y', t') = m(0, 0, 4x \cdot y'),$$

e, se definirmos

$$M(x, y, t) := I + m(x, y, t),$$

onde I denota a matriz identidade, então

$$M(x, y, t)M(x', y', t') = M(x + x', y + y', t + t' + 4x \cdot y'). \tag{3.4}$$

Além disso, tomando o comutador

$$[m(x, y, t), m(x', y', t')] = m(0, 0, 4(x \cdot y' - y \cdot x')), \tag{3.5}$$

a correspondência $(x, y, t) =: X \mapsto M(X)$ é um isomorfismo[4] entre $\mathfrak{h}_n$ e $\{m(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$, cujo correspondente grupo de Lie pode ser obtido a partir da aplicação exponencial. Decorre, de (3.5), que

$$m(x, y, t)^2 = m(0, 0, 4x \cdot y) \quad e \quad m(x, y, t)^k = 0 \quad \text{para } k > 2.$$

[4]Ou, mais formalmente, uma representação fiel de $\mathfrak{h}_n$ em $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Então

$$e^{m(x,y,t)} = I + m(x,y,t) + \frac{1}{2}m(0,0,4x\cdot y) = M(x,y,t+2x\cdot y). \tag{3.6}$$

Conseqüentemente, a aplicação exponencial é uma bijeção entre $\{m(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$ e $\{M(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$ e forma um grupo com a lei de composição dada em (3.4). É imediato que

$$e^{m(x,y,t)}e^{m(x',y',t')} = e^{m(x+x',y+y',t+t'+2(x\cdot y'-y\cdot x'))}.$$

Identificando cada $X \in \mathbb{R}^{2n+1}$ com a matriz $e^{m(X)}$, podemos fazer de $\mathbb{R}^{2n+1}$ um grupo, como se vê na seguinte

Definição 16. *Considere a lei de composição* $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ *definida por*

$$\phi((x,y,t),(x',y',t')) := (x+x', y+y', t+t'+2(x'\cdot y - y'\cdot x)). \tag{3.7}$$

Então $(\mathbb{R}^{2n+1}, \phi) =: H^n$ *é um grupo, chamado Grupo de Heisenberg, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

É fácil ver que o inverso de (x,y,t) com respeito à lei de composição (3.7) é o elemento $(-x,-y,-t)$.

3.3 Dilatações e homogeneidade

Nesta seção nos preocuparemos em apresentar as definições de dilatação e homogeneidade no grupo de Heisenberg, a partir das quais será possível calcular a dimensão homogênea de H^n, que necessitaremos mais adiante. Para maiores detalhes acerca deste tópico, consultar [13] e [64].

Definição 17. *A série central descendente de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é definida indutivamente como sendo*

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1],$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{g}^k := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}],$$

onde $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] := \{[X,Y],\ X,Y \in \mathfrak{g}\}$ *e os demais são definidos de maneira análoga.*

Definição 18. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, ou seja, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{g}^k = 0$. *Neste caso, a álgebra é dita ser nilpotente de ordem* $n := \min_{k\in\mathbb{N}}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{g}^k = 0\}$.

Definição 19. *Uma família de dilatações em uma álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{Nil}$*, com grupo associado Nil, é um grupo uniparamétrico de automorfismos da álgebra, determinada por*

$$\delta_\lambda(X_j) = \lambda^{a_j} X_j,$$

onde $X_j \in \mathfrak{Nil}$ *e* $a_j \in \mathbb{R}$*. O grupo Nil munido com as dilatações é chamado de grupo homogêneo.*

Definição 20. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita ser graduada se ela possui uma decomposição*

$$\mathfrak{g} = \sum_{j=1}^{r} \oplus \mathfrak{g}^j$$

com a seguinte propriedade: $[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^{j+k}$*, se* $j + k \leq r$*.*

Teorema 13. *A álgebra de Heisenberg* $\mathfrak{h}_n$ *é uma álgebra graduada da forma* $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$*, com* $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$*.*

Demonstração. Seja

$$\mathfrak{g}^1 := \{X_i,\ Y_i,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Pela definição das regras de comutação em H^n (equação (3.3)), é fácil ver que $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] = \{T\}$. Definindo $\mathfrak{g}^2 := \{T\}$, vemos que

$$\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}^2 = \{0\}, \text{ e } \mathfrak{g}^1 \cup \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{h}_n,$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 21. *Sejam* $(\mathbb{R}^n, \phi)$ *um grupo de Lie e* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie associada. Considere* $\mathbb{R}^n$ *munido de uma estrutura homogênea determinada por uma família de automorfismos de grupos de Lie* $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ *da forma*

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \cdots, \lambda^r x^{(r)}), \tag{3.8}$$

onde $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$*,* $1 \leq i \leq r$ *e* $n_1 + \cdots + n_r = n$*. Para* $i = 1, \cdots, n_1$*, defina* X_i *como os únicos campos vetoriais na álgebra que na origem coincidem com a base canônica de* $\mathbb{R}^{n_1}$*. Suponha que a álgebra gerada pelos campos* $X_1, \cdots, X_{n_1}$ *seja a mesma de* $\mathfrak{g}$*.*

A terna $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^n, \phi, \delta_\lambda)$ *é chamada Grupo de Carnot (homogêneo). Dizemos que* $\mathbb{G}$ *é nilpotente de ordem* r *e possui* $m := n_1$ *geradores.*

Definição 22. *Definimos o espaço linear-homogêneo*[5] *do grupo* $(\mathbb{R}^n, \phi)$ *como sendo o espaço gerado pelos campos* $X_1, \cdots, X_{n_1}$*.*

Definição 23. *Seja* A *a matriz Jacobiana de* (3.8)*. O número*

$$Q := \mathit{traço}\left(\left.\frac{dA}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} \right) = \sum_{j=1}^{r} j n_j \tag{3.9}$$

é chamado dimensão homogênea de $\mathbb{G}$*.*

[5] *Esta definição é de nossa autoria.*

No caso particular do grupo de Heisenberg H^n, $n_1 = 2n,\ n_2 = 1,\ r = 2$ e então, $Q = 2n+2$.

Definição 24. *Uma função $N : H \to H$ satisfazendo*

1. $N(x) \geq 0$ *e* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $x \mapsto N(x)$ *é contínua e diferenciável em* $H \setminus \{0\}$,
3. $N(\delta_\lambda(x)) = \lambda N(x)$,

é chamada função norma homogênea de um grupo homogêneo H.

Definição 25. *A distância entre dois pontos $P = (x, y, t),\ P_0 \in H^n$, definida por*

$$d(P, P_0) = d(\phi(P_0^{-1}, P), 0), \tag{3.10}$$

onde

$$d(P, 0) := \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)^2 + t^2 \right)^{\frac{1}{4}},$$

é chamada distância homogênea do grupo de Heisenberg.

Do ponto de vista topológico, a definição de distância acima nos mostra que a topologia do Grupo de Heisenberg é a mesma de $\mathbb{R}^n$. Como conseqüência desta, tornaremos H^n um espaço normado, através do próximo

Teorema 14. *Seja d a função dada em* (3.10) *e defina $N(x) := d(x, 0)$. Então N é uma norma homogênea no grupo de Heisenberg H^n.*

Demonstração. Segue imediatamente das definições. □

3.4 Campos invariantes à esquerda

Da lei de composição (3.7) decorre que as translações invariantes à esquerda no grupo de Heisenberg são

$$L_{(x,y,t)}(x', y', t) = \phi((x, y, t), (x,', y', t')).$$

Logo, uma base para a álgebra de Lie dos campos vetoriais invariantes à esquerda em H^n é dada por

$$\begin{aligned}
X_j &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (se_j, 0, 0))\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial x^j} + 2y^j \frac{\partial}{\partial t}, \\
Y_j &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (0, se_{n+j}, 0))\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial y^j} - 2x^j \frac{\partial}{\partial t}, \\
T &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (0, 0, s))\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $1 \leq \ i, j \leq n, \ e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n+1}$ são os versores canônicos de $\mathbb{R}^{2n+1}$ e os colchetes de Lie são, para todos $1 \leq j, k \leq n$,

$$[X_j, X_k] = [Y_j, Y_k] = [X_j, T] = [Y_j, T] = 0 \quad \text{e} \quad [X_j, Y_k] = -4\delta_{jk}T. \tag{3.12}$$

3.5 A geometria do Grupo de Heisenberg

Nesta seção apresentaremos os principais fatos, do ponto de vista da geometria, relacionados ao grupo de Heisenberg H^n. Como conseqüência imediata dos campos invariantes à esquerda temos:

Teorema 15. *Os campos vetorias invariantes à esquerda* (3.11) *determinam a seguinte métrica no grupo de Heisenberg H^n:*

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + 4y_iy_j, && 1 \leq i, j \leq n, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + 4x_ix_j, && n \leq i, j \leq 2n, \\ g_{ij} &= -4x_iy_j, && 1 \leq i \leq n, \ n \leq j \leq 2n, \\ g_{2n+1\ 2n+1} &= 1, \end{aligned}$$

cuja representação matricial é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4y_1^2 & 4y_1y_2 & \cdots & 4y_1y_n & -4x_1y_1 & -4x_1y_2 & -4x_1y_n & -2y_1 \\ 4y_1y_2 & 1+4y_2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -4x_2y_n & -2y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4y_1y_n & \cdots & \cdots & 1+4y_n^2 & \cdots & \cdots & -4x_ny_n & -2y_n \\ -4x_1y_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1+4x_1^2 & \cdots & 4x_1x_n & 2x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -4x_ny_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1+4x_n^2 & 2x_n \\ -2y_1 & -2y_2 & \cdots & 2y_n & 2x_1 & \cdots & 2x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

No caso particular em que $n = 1$, obtemos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (2ydx - 2xdy + dt)^2 \tag{3.13}$$

e a matriz associada é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4y^2 & -4xy & -2y \\ -4xy & 1+4x^2 & 2x \\ -2y & 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Basta notar que a identidade no grupo de Heisenberg é a origem e que nesse ponto o produto interno coincide com o do $\mathbb{R}^{2n+1}$. Tomando o produto interno dos campos (3.11) na origem obtemos o resultado desejado. $\square$

Sejam $\{\Gamma^i_{jk}\}$, $1 \leq i, j, k \leq 3$, uma família de funções com três índices e a partir desta família, para cada índice superior fixado i, considere a matriz 3×3 definida por $\Gamma^i := (\Gamma^i_{jk})$.

Teorema 16. *Os símbolos de Christoffel de (H^1, g), são:*

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 4y & 0 \\ 4y & -8x & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -8y & 4x & 2 \\ 4x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 16xy & -8(x^2-y^2) & -4x \\ -8(x^2-y^2) & -16xy & -4y \\ -4x & -4y & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Basta substituir os valores de g_{ij} e g^{ij}, onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, na expressão para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right).$$

$\square$

Teorema 17. *A curvatura seccional de (H^n, g) não é constante.*

Demonstração. Decorre imediatamente do fato que

$$\begin{aligned} K(X_i, Y_j) &= -\frac{3}{4}, \\ K(X_i, T) &= K(Y_i, T) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 26. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n dimensional e $p \in M$. Um campo vetorial*

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$$

é uma isometria infinitesimal se a derivada de Lie da métrica se anula, isto é,

$$\mathcal{L}_X g_{ij} := \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + g_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = 0. \tag{3.14}$$

Neste caso o campo X é chamado campo de Killing da variedade M.

Teorema 18. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ conexa. Então a dimensão do seu grupo de isometrias não excede $\dfrac{n(n+1)}{2}$ e esse valor é atingido se, e somente se, a curvatura seccional de M for constante.*

Demonstração. Consulte [83]. □

Teorema 19. *Nas hipóteses do teorema precedente, a dimensão do grupo de isometrias não pode ser*

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Demonstração. Consulte [54, 74]. □

Teorema 20. *Seja (H^1, g) o grupo de Heisenberg. Então a álgebra de Lie das isometrias infinite-simais é gerada pelos seguintes campos vetoriais:*

$$T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad R := y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} := \frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{Y} := \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.15}$$

que correspondem, respectivamente, a uma translação em t, uma rotação no plano x-y e os geradores da multiplicação à direita em H^1.

Demonstração. Primeiro, note que os campos $T, R, \tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são linearmente independentes. Pelos Teoremas 18 e 19, o grupo de isometrias de H^1 tem dimensão $n \leq 4$. Como os campos (3.15) satisfazem a equação (3.14) para a métrica do Grupo de Heisenberg tridimensional, então $T, R, \tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são campos de Killing de H^1. Pela maximalidade, concluímos a demonstração do teorema. □

Terminamos este capítulo observando que não há uma uniformização na maneira de se expressar os campos vetoriais (3.11). É possível encontrar expressões do tipo

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2} y^j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, \cdots, n, \\ Y_j &= \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{1}{2} x^j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{3.16}$$

como, por exemplo, em ([5, 46, 68] e [74]), bem como as mesmas expressões dadas em (3.11) em ([4, 55] e [65]). Ni ([70] e [71]) ainda fornece uma maneira mais geral, que engloba as duas acima mencionadas.

Essencialmente, o fator modificado na última parte do membro direito das definições dos campos vetoriais mudam apenas a constante de estrutura do comutador de X_i, Y_j. Tomando por exemplo (3.16), teremos $[X_i, Y_j] = -\delta_{ij}\dfrac{\partial}{\partial t}$. Tais diferenças se devem ao fato de que é possível munir o grupo de Heisenberg com diferentes leis de composição, de modo que os campos vetoriais no espaço linear-homogêneo se alterarão, conforme acima-mencionado. Nesta tese trabalharemos unicamente com a lei de composição dada pela equação (3.7).

Capítulo 4

Alguns resultados envolvendo o operador de Kohn - Laplace

O propósito do presente capítulo é apresentar alguns resultados, do ponto de vista da Análise, relacionados ao operador de Kohn - Laplace e à sua respectiva equação semilinear. Muitos deles garantem a existência de soluções das equações cujos grupos de simetrias serão calculados no próximo capítulo.

O capítulo está estruturado da seguinte forma: primeiramente enunciaremos alguns resultados de Análise que necessitaremos tanto neste capítulo quanto no seguinte como, por exemplo, o expoente crítico de Sobolev. Em seguida apresentaremos formalmente o operador de Kohn - Laplace e algumas de suas propriedades. Finalmente mostraremos resultados, muitos dos quais recentes, envolvendo a equação semilinear de Kohn - Laplace, que é o objetivo principal da tese.

4.1 O Teorema de Sobolev

Nesta seção apresentaremos os espaços de Sobolev em uma variedade Riemanniana de dimensão n.

Definição 27. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n dimensional e $\varphi \in C^k(M),\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Defina*

$$|\nabla^k\varphi|^2 := \nabla^{\alpha_1}\nabla^{\alpha_2}\cdots\nabla^{\alpha_k}\varphi\nabla_{\alpha_1}\nabla_{\alpha_2}\cdots\nabla_{\alpha_k}\varphi.$$

Em particular, $|\nabla^0\varphi| = |\varphi|,\ |\nabla^1\varphi| = \|\nabla\varphi\|^2 = \nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi$. O símbolo $\nabla^k\varphi$ significará qualquer derivada covariante de ordem k de φ.

Definição 28. *Seja*

$$C_k^p(M) := \{\varphi \in C^\infty(M) \text{ tal que } |\nabla^l\varphi| \in L^p(M),\ \forall\, l \in \{0,\cdots,k\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}.$$

O espaço de Sobolev $S_k^p(M)$ é o completamento de $C_k^p(M)$ com respeito à norma

$$\|\varphi\|_{S_k^p(M)} := \sum_{l=0}^{k} \|\nabla^l \varphi\|_p.$$

Teorema 21. `Teorema do Mergulho de Sobolev`

Sejam $k,\ l \in \mathbb{N},\ k > l,\ p, q \in \mathbb{R}$ com $1 \leq q < p$ satisfazendo a relação

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}.$$

Então

$$S_k^q(M) \subset S_l^p(M)$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} id: & S_k^q(M) & \hookrightarrow & S_l^p(M) \\ & & & \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array} \tag{4.1}$$

é contínua.

Se $\frac{k-r}{n} > 1$, então $S_k^q(M) \subset C_B^r(M)$ e a aplicação identidade é contínua, onde $r \in \mathbb{N}$ e $C_B^r(M)$ é o espaço das funções $C^r(M)$ limitadas cujas derivadas de ordem $l \leq r$ também são limitadas em relação à norma

$$\|u\|_{C^r(M)} := \max_{0 \leq l \leq r} sup|\nabla^l u|.$$

Se $\frac{(k-r-\alpha)}{n} \geq \frac{1}{q}$, então $S_k^q(M) \subset C^{r+\alpha}(M)$, $\alpha \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $C^{r+\alpha}(M)$ é o espaço de Hölder. Além disso, a aplicação identidade (4.1) é contínua. A norma de $C^{r+\alpha}(M)$ é:

$$\|u\|_{C^{r+\alpha}(\overline{M})} := \sup_{x\in M} |u| + \sup_{x \in M,\, p \neq q} \frac{|u(p) - u(q)|}{d(p,q)^\alpha}.$$

Demonstração. Consulte Aubin [3]. □

Definição 29. *Seja B um espaço de Hausdorff compacto e $C(B)$ o espaço de Banach das funções contínuas sobre B com a norma da convergência uniforme. Um subconjunto $A \subseteq C(B)$ é dito ser pré-compacto ($\overline{A}$ é compacto) se, e somente se, ele é limitado e equicontínuo[1].*

Definição 30. *Sejam N_1 e N_2 espaços normados. Uma aplicação $f : N_1 \to N_2$, não necessariamente linear, é dita ser compacta se f é contínua e aplica subconjuntos limitados $\Omega \subseteq N_1$ em subconjuntos pré-compactos de N_2.*

[1] *Isto é, dado $\varepsilon > 0$ e $x \in B$, existe uma vizinhança $U_x \ni x$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, para todo $y \in U_x$ e toda $f \in A$.*

Definição 31. *Seja M uma variedade n dimensional e Q sua dimensão homogênea. O número*

$$N := \begin{cases} \dfrac{Q+2}{Q-2}, & se\ n \geq 3, \\ \\ \infty, & outros\ casos, \end{cases} \tag{4.2}$$

é chamado de expoente crítico de Sobolev[2].

O expoente crítico surge naturalmente, por exemplo, em *Identidades de Pokhozhaev*, que são identidades utilizadas para mostrar a existência ou não de soluções de E.D.P's[3].

Decorre do Teorema 21 e da Definição 30 que o mergulho $S_0^q(M) = L^q(M) \hookrightarrow S_0^p(M) = L^p(M)$ não é compacto para todos os valores possíveis para p e q. Na verdade, ele é compacto para $p < N$, onde N é o expoente crítico de Sobolev.

Em particular, a versão para H^n do teorema do mergulho de Sobolev é a seguinte:

Teorema 22. ***Teorema do Mergulho de Folland-Stein*** ([*49*], [*65*]).

Sejam $\Omega \subseteq H^n$ um domínio limitado, $Q := 2n+2$, $1 < p, q < \infty$ e $k \geq 1$. Se

$$q \leq \frac{Qp}{Q-kp},$$

então $S_k^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{S_k^p(\Omega)}.$$

O mergulho é compacto quando

$$q < \frac{Qp}{Q-kp}.$$

Para $k > Q/p$, $S_k^p(\Omega) \subseteq C^{r+\alpha}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{r+\alpha}(\Omega)} \leq C\|u\|_{S_k^p(\Omega)}.$$

Quando $\Omega \subseteq H^n$ é um domínio ilimitado, existe um mergulho contínuo de $S_k^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $p \leq q \leq \frac{Qp}{Q-kp}$.

---

[2] *Esta definição para o expoente crítico difere da dos textos usuais, como por exemplo,* [*59*]. *Em geral, o expoente crítico é definido, em uma variedade Riemannina n dimensional, $n \geq 3$, como sendo o número $\frac{n+2}{n-2}$. A diferença das definições se deve ao seguinte fato: na maior parte das variedades, a dimensão da variedade coincide com sua dimensão homogênea* (*vide Definição* 23). *Para estes casos, são equivalentes. No Grupo de Heisenberg de dimensão $2n+1$ e, mais geralmente, para Grupos de Carnot* (*vide Definição* 21), *a dimensão da variedade não é coincidente com sua dimensão homogênea. Note que esta definição de expoente crítico é mais geral que as usuais.*

[3] No caso do $\mathbb{R}^n$, elas foram provadas entre 1965 e 1970 pelo matemático russo *Stanislav Ivanovich Pokhozhaev*, que obteve seu doutoramento sob supervisão de *Lev Vasilyevich Ovsyannikov*, este, por sua vez, o responsável pela ressurreição da teoria de simetrias de Lie. Para maiores detalhes acerca de Pokhozhaev, consulte [6].

No caso do grupo de Heinseberg, o equivalente a identidades de Pokhozhaev foi obtido por *Nicola Garofalo e Ermanno Lanconelli* (vide [56]).

4.2 O operador de Kohn - Laplace

Doravante, seja $f(u)$ uma função diferenciável. Denotaremos por $F(u)$ uma primitiva de $f(u)$, isto é, $F'(u) = f(u)$.

Definição 32. *Seja $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O campo*

$$\nabla_{H^n}\phi = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)\phi := (X_1\phi, \cdots, X_n\phi, Y_1\phi, \cdots, Y_n\phi) \tag{4.3}$$

é o campo gradiente[4] *no espaço linear-homogêneo do Grupo de Heisenberg H^n.*

Definição 33. *O operador*

$$\Delta_{H^n} = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2)$$

é chamado operador de Kohn - Laplace no grupo de Heisenberg H^n.

Teorema 23. *Suponha que $Z_1, \cdots, Z_n$ geram uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com grupo de Lie associado G, e seja L um operador diferencial invariante à esquerda sobre G definido por*

$$L := \sum_{j=1}^{n} Z_j^2 + \frac{i}{2}\sum_{jk} b_{jk}[Z_j, Z_k],$$

onde $b := (b_{jk})$ é uma matriz real antissimétrica. Então L é hipoelíptico se $\|b\| < 1$.

Demonstração. Consulte [64]. □

Assim, decorre do Teorema 23 e da Definição 33 que o operador de Kohn - Laplace é um operador hipoelíptico.

Definição 34. *Seja $\mathbb{G}$ um Grupo de Carnot de dimensão n e $X_1, \cdots, X_m$, $m < n$, uma base para o seu espaço linear-homogêneo. O operador*

$$\Delta_{\mathbb{G}} := \sum_{i=1}^{m} X_i^2$$

é chamado sublaplaciano.

[4] *Somos da opinião que o campo gradiente de um espaço é formado por todos os campos vetoriais que geram sua álgebra de Lie. Assim, o campo gradiente do Grupo de Heisenberg é, a nosso ver, dado por $\nabla_{H^n}\phi = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, T)\phi := (X_1\phi, \cdots, X_n\phi, Y_1\phi, \cdots, Y_n\phi, T\phi)$. Todavia, diversos autores (veja por exemplo [7] e [63]) definem o campo gradiente em H^n como dado pela equação (4.3), definição esta que discordamos e, por isto, optamos por propor uma definição alternativa. Embora Citti e Uguzzoni (vide [40]) definam (4.3) como sendo o gradiente subelíptico (que faz mais sentido do que gradiente em H^n), tal definição é fortemente influênciada pelo fato do operador de Kohn - Laplace ser subelíptico e deixa o aspecto geométrico da definição em segundo plano.*

Em síntese, pela Definição 34, um sublaplaciano em um Grupo de Carnot é um operador obtido pela soma dos quadrados dos campos vetoriais que geram seu espaço linear-homogêneo. O operador de Kohn-Laplace é dito ser um operador subelíptico por se tratar de um sublaplaciano, e além do mais, hipoelíptico. Para maiores detalhes envolvendo sublaplacianos, consulte [43].

Definição 35. *A equação semilinear*

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0,$$

onde

$$\Delta_{H^n} u := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i\,2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^{i\,2}} + 4(x^{i\,2} + y^{i\,2}) u_{tt} + 4y^i \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\, \partial t} - 4x^i \frac{\partial^2 u}{\partial y^i\, \partial t} \right)$$

é chamada equação semilinear de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg.

A equação semilinear de Kohn - Laplace possui estrutura variacional e é obtida (formalmente) da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \|\nabla_{H^1} \phi\|^2 - F(u)$$

via equação de Euler - Lagrange, onde

$$\|\nabla_{H^1} \phi\|^2 := \sum_{i=0}^{n} [(X_i u)^2 + (Y_i u)^2].$$

Em verdade, vale o seguinte

Teorema 24. *Sejam $u : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\mathcal{L}$ a correspondente Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [(X_i u)^2 + (Y_i u)^2] - F(u). \tag{4.4}$$

A equação de Euler - Lagrange (2.57) *é equivalente à equação semilinear de Kohn - Laplace.*

Demonstração. Note que a função $\mathcal{L}$ pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2 + 4y_i u_{x_i} u_t - 4x_i u_{y_i} u_t + 4(x_i^2 + y_i^2) u_t^2] - F(u). \tag{4.5}$$

Derivando $\mathcal{L}$ em relação a u_{x_i}, u_{y_i}, t e renomeando os operadores dados em (2.20) pelos argumentos x_i, y_i, t, $i = 1, \cdots, n$, para não causar confusão, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} &= X_i u, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{y_i}} &= Y_i u, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= 2y_i X_i u - 2x_i Y_i u, \\
D_{x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} &= u_{x_i x_j} \delta_{ij}, \\
D_{y_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{y_i}} &= u_{y_i y_j} \delta_{ij}, \\
D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= 2y_i u_{t x_i} - 2x_i u_{t y_i}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= -f(u).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (2.57), obtemos

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0.$$

□

Duas funções diferenciáveis $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ que satisfaçam as equações

$$\begin{aligned}
u_{x_i} &= v_{y_i} \\
u_{y_i} &= -v_{x_i}
\end{aligned}$$

são chamadas conjugadas harmônicas e satisfazem a equação de Laplace $2n$ - dimensional. Nossa intenção aqui é mostrar que no Grupo de Heisenberg H^n também existem funções que cumprem condições similares e que no caso particular de elas não dependerem do último argumento, ou seja, quando ocorre um mergulho de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n+1}$, tais condições se tornam as condições de Cauchy - Riemann.

Definição 36. *Duas funções $\phi, \psi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ cumprem as condições de Cauchy - Riemann no Grupo de Heisenberg H^n se elas satisfazem o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{aligned}
X_i \phi &= Y_i \psi, \quad i = 1, \cdots, n, \\
Y_i \phi &= -X_i \psi, \quad i = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Teorema 25. *Suponha que ψ e ϕ satisfaçam* (4.7). *Então elas satisfazem o sistema*

$$\begin{aligned} \Delta_{H^n}\phi &= -4n\psi_t \\ \Delta_{H^n}\psi &= 4n\phi_t. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Demonstração. Aplicando X_i e Y_i, $i = 1, \cdots, n$ à equação (4.7) e utilizando (3.12), obtemos

$$(X_i^2 + Y_i^2)\phi = [X_i, Y_i]\psi = -4\psi_t.$$

Somando os índices, conclui-se que

$$\Delta_{H^n}\phi = -4n\psi_t.$$

A outra equação é obtida de modo análogo. □

4.3 Resultados de existência e de não-existência

Seja $\Omega \subset H^n$ um domínio limitado. A importância do Teorema do Mergulho de Sobolev[5] no estudo de E.D.Ps lineares se deve ao seguinte fato: seja L um operador linear e $f \in C^k(\Omega)$. O problema de se encontrar uma função $u \in C^{k+n}(\Omega)$, onde $n :=$*ordem da derivada mais alta de Lu*, tal que

$$Lu = f(u),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

equivale a interpretar o operador L como sendo um operador entre espaços de funções, mais formalmente, $L : C^{k+n} \to C^k$, e encontrar um operador $L^+ : C^k \to C^{k+n}$ de modo que $L^+ f = u$. Uma vez que o operador de Kohn - Laplace é um operador diferencial de segunda ordem,

$$\Delta_{H^n} : C^{k+2}(\Omega) \ni u \mapsto \Delta_{H^n} u + f(u) = 0 \in C^k,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

é uma aplicação contínua entre os espaços de funções, mas sua imagem não é fechada em $C^k(\overline{\Omega})$. Em particular, se $f \in C^0(\overline{\Omega})$, a solução da equação

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

em geral não é $C^2(\overline{\Omega})$.

[5] Um pequeno texto sobre o expoente crítico de Sobolev e a questão do mergulho compacto pode ser encontrado em [42].

O mergulho $S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, $p < N$, é compacto pelo Teorema do Mergulho de Sobolev. No caso crítico $p = N = \frac{Q+2}{Q-2}$, esse mergulho é apenas contínuo e a compacidade é perdida. Tal expoente delimita, então, a existência e a não-existência de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta_{H^n} u + u^{\frac{Q+2}{Q-2}} & = & 0, \\ \\ u > 0 & \text{em} & \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Tais expoentes podem ser vistos como números que dividem a existência e a não-existência de soluções para diversas equações diferenciais parciais semilineares e sistemas envolvendo não-linearidades da forma de potência. Vide [37].

Como $\frac{Q+2}{Q-2}$ é o expoente crítico, a existência de soluções de (4.9) depende estritamente da geometria da região Ω e do operador de Kohn - Laplace. Em [40], Citti e Uguzzoni provam a existência de soluções exigindo que a região Ω, limitada e conexa, possua grupo de homologia não-trivial.

Se Ω é *H-estrelado*, Garofalo e Lanconelli provaram em [56] que tal problema não possui soluções. Neste mesmo trabalho, mostraram um exemplo de solução de (4.9) num domínio não-contrátil

$$\Omega := \{(x, y, t) \text{ tal que } r < \|x\|^2 + \|y\|^2 < R,\ 0 < t < T\},$$

onde r, R e T são constantes positivas. Sempre neste trabalho, Garofalo e Lanconelli estabeleceram identidades de Pokhozhaev[6] para o grupo de Heisenberg e demonstraram resultados acerca da existência, não-existência e regularidade da equação

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0 \tag{4.10}$$

em um domínio D, não necessariamente limitado, sujeita à condição que $u|_{\partial D} = 0$. Neste trabalho é mostrado a existência de soluções fracas quando $f(u)$, para valores assintóticos de u, é da ordem de $|u|^{\frac{Q+2}{Q-2}}$, isto é,

$$f(u) = o(|u|^{\frac{Q+2}{Q-2}}) \text{ quando } u \to \infty,$$

desde que $\mu(D \cap B_1(x_0, y_0, t_0)) \to 0$ quando $d((x_0, y_0, t_0), (0, 0, 0)) \to \infty$, onde μ é a medida de Lebesgue de H^n e

$$B_r(x_0, y_0, t_0) := \{(x, y, t) \in H^n \text{ tal que } d((x, y, t), (x_0, y_0, t_0)) < r\}$$

[6]Vide seção 4.1.

é uma bola induzida pela norma homogênea em H^n.

Nessa linha, Biagini [7] prova a existência de soluções não-negativas, clássicas e não triviais u, desde que a função $f(u)$ satisfaça as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$, $f'(u)$ é localmente Hölder-contínua e $f'(0) < 0$.

2. Existe $q > 2$, $q - 1 < 1 + \frac{2}{n}$ tal que

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{|f(s)|}{s^{p-1}} = 0.$$

3. Existe $\xi > 0$ tal que $F(\xi) := \int_0^\xi f(s)ds > 0$.

Birindelli *et all* [8] demonstram a existência de soluções u do problema

$$\begin{cases} u > 0, \\ \\ \Delta_{H^n} u + f(x, u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

impondo restrições ao domínio $\Omega \subset H^n$, como por exemplo a limitação do mesmo e exigindo que o termo não-linear cumpra as seguintes condições: $f(\xi, 0) = f_u(\xi, 0) = 0$. Em particular, soluções do problema (4.11) com $f(u) = u^p$ são garantidas nesse resultado, exceto o caso $p = 2$, cuja inexistência de soluções para este caso foi demonstrada em [75].

A imposição de que Ω seja limitado se faz necessária para que consigamos garantir a existência de soluções não-nulas da equação (4.10) com $f(u) = u^p$, uma vez que se permitirmos que Ω seja ilimitado e conexo, então u é necessariamente nula, devido ao seguinte resultado de Lanconelli e Uguzzoni [63]:

Teorema 26. *Se u é uma solução fraca não-negativa do problema*

$$\begin{cases} \Delta_{H^n} u + u^p = 0 \ \text{em } \Omega, \\ \\ u \in S_0^1(\Omega). \end{cases}$$

- *Se $m > \frac{Q^*}{2}$ e $u^{p-1} \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$, então $u \equiv 0$.*

- *Se $1 < m \leq \frac{Q^*}{2}$ e $u^{p-1} \in L^{\frac{Q}{2}-}(\Omega)$, então $u \equiv 0$.*

No teorema acima, $v \in L^{q-}$ se existe $p < q$ tal que $v \in L^p(\Omega)$ e $Q^* := \frac{2Q}{Q-2}$ é o expoente de Sobolev. A relação entre o expoente de Sobolev Q^* e o expoente crítico de Sobolev N é a seguinte: $Q^* = N - 1$.

Capítulo 5

Classificação dos grupos de simetrias de Lie da equação semilinear de Kohn - Laplace em H^1

A partir deste capítulo, tudo o que se segue na presente tese são resultados originais.

Neste capítulo, faremos a classificação dos grupos de simetrias de Lie da equação de Kohn - Laplace utilizando a teoria exposta no Capítulo 2. Este é o resultado central da tese, que foi apresentado em [24], comunicado em [16, 17, 19, 21, 22, 28] e publicado em [31].

Além disso, apresentaremos também, como corolários imediatos, as álgebras de Lie das simetrias encontradas. Essas álgebras foram parcialmente apresentadas em [26] e em [50].

Este é o primeiro exemplo em que a teoria de simetrias de Lie é aplicável a equações envolvendo operadores subelípticos e é a resposta positiva à conjectura do Prof. Enzo Mitidieri de que os grupos de simetrias de Lie encontrados não seriam triviais ([69]).

5.1 O Teorema de classificação dos grupos de simetrias de Lie da equação semilinear de Kohn - Laplace em H^1

O resultado principal desta tese é o seguinte:

Teorema 27. *Teorema de Classificação dos Grupos de Simetrias de Lie da Equação de Kohn - Laplace*

O maior grupo de simetrias de Lie da equação semilinear de Kohn - Laplace

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = u_{xx} + u_{yy} + 4(x^2 + y^2)u_{tt} + 4yu_{xt} - 4xu_{yt} + f(u) = 0, \tag{5.1}$$

com $f(u)$ arbitrária, é determinado pelos campos de Killing do grupo de Heisenberg (H^1, g) dados em (3.15)*, isto é,*

$$T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad R := y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} := \frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{Y} := \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.2}$$

Para algumas escolhas específicas da função $f(u)$, o grupo de simetrias pode ser estendido, de modo que além dos operadores dados em (5.2)*, teremos outros adicionais, os quais escrevemos abaixo.*

1. *Se $f(u) = 0$, então*

$$V_1 = (xt - x^2y - y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (yt + x^3 + xy^2)\frac{\partial}{\partial y} + (t^2 - (x^2+y^2)^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_2 = (t - 4xy)\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - (2yt + 2x^3 + 2xy^2)\frac{\partial}{\partial t} + 2yu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_3 = (x^2 - 3y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (t + 4xy)\frac{\partial}{\partial y} + (2xt - 2x^2y - 2y^3)\frac{\partial}{\partial t} - 2xu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad U = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad W_\beta = \beta(x,y,t)\frac{\partial}{\partial u},$$

   onde $\Delta_{H^1}\beta = 0$.

2. *Se $f(u) = c =$ constante, então este caso se reduz ao anterior através da mudança $u = v - cx^2/2$.*

3. *Se $f(u) = ku$, onde k é uma constante, então*

$$U = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad W_\beta = \beta(x,y,t)\frac{\partial}{\partial u},$$

   onde $\Delta_{H^1}\beta + k\beta = 0$.

4. *Se $f(u) = ku^p$, com $p \neq 0$, $p \neq 1$, temos o gerador das dilatações*

$$D_p = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{1-p}u\frac{\partial}{\partial u}.$$

5. *No caso em que $f(u) = ku^3$, os geradores adicionais são V_1, V_2, V_3 e*

$$D_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}.$$

6. Se $f(u) = ke^u$, então o operador

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}$$

gera um sub-grupo do grupo de simetrias de pontos de Lie de (5.1)*.*

Os passos a serem seguidos na demonstração do teorema são:

- Primeiro encontraremos as equações determinantes de (5.1). Veja Seção 5.2.
- Encontradas estas, que serão um sistema sobre-determinado, extrairemos as equações linearmente independentes. Veja Seção 5.2.
- Em seguida, a partir do sistema linearmente independente, obteremos resultados que nos auxiliarão na demonstração do teorema principal. Veja Seção 5.3.
- Finalmente, resolveremos o sistema de equações determinantes das simetrias de Lie. Cada função listada gerará um sistema a ser resolvido. Ao todo, serão 6 casos a serem tratados. Veja Seções 5.4 - 5.9.

5.2 As equações determinantes

Aqui, nosso ponto de partida serão os Teoremas 8, 9 e 10, do Capítulo 2.

Considere o gerador infinitesimal

$$S := \xi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial y} + \tau(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.3}$$

Pelo Teorema 9, como a equação (5.1) é semilinear, ξ, ϕ e τ independem de u. Pelo Teorema 10, conluímos que η é linear em u, ou seja, existem funções $\alpha = \alpha(x,y,t)$ e $\beta = \beta(x,y,t)$ de modo que $\eta(x,y,t,u) = \alpha(x,y,t)u + \beta(x,y,t)$. Seja

$$H := \Delta_{H^1}u + f(u). \tag{5.4}$$

Pelo Teorema 8, a equação (5.1) admite a simetria (5.3) se, e somente se,

$$\hat{S}H = 0$$

quando $H = 0$ e $\hat{S}$ é o gerador infinitesimal estendido de ordem 2 de S, cuja expressão é

$$\begin{aligned} \hat{S} \;\; = \;\; & \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_y^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_y} + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ & + \eta_{yy}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta_{xt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta_{yt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \eta_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta_{xy}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}. \end{aligned}$$

As expressões para os coeficinetes são:

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= D_x\eta - (D_x\xi)u_x - (D_x\phi)u_y - (D_x\tau)u_t, \\
\eta_y^{(1)} &= D_y\eta - (D_y\xi)u_x - (D_y\phi)u_y - (D_y\tau)u_t, \\
\eta_t^{(1)} &= D_t\eta - (D_t\xi)u_x - (D_t\phi)u_y - (D_t\tau)u_t, \\
\eta_{xx}^{(2)} &= D_x\eta_x^{(1)} - (D_x\xi)u_{xx} - (D_x\phi)u_{xy} - (D_x\tau)u_{xt}, \\
\eta_{yy}^{(2)} &= D_y\eta_y^{(1)} - (D_y\xi)u_{xy} - (D_y\phi)u_{yy} - (D_y\tau)u_{yt}, \\
\eta_{tt}^{(2)} &= D_{tt}\eta_t^{(1)} - (D_t\xi)u_{xt} - (D_t\phi)u_{yt} - (D_t\tau)u_{tt}, \\
\eta_{xt}^{(2)} &= D_t\eta_x^{(1)} - (D_t\xi)u_{xx} - (D_t\phi)u_{xy} - (D_t\tau)u_{xt}, \\
\eta_{yt}^{(2)} &= D_t\eta_y^{(1)} - (D_t\xi)u_{xy} - (D_t\phi)u_{yy} - (D_t\tau)u_{yt}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Substituindo ξ, ϕ, τ e η em (5.5), obtemos:

$$\eta_x^{(1)} = \beta_x + \alpha_x u + (\alpha - \xi_x)u_x - \phi_x u_y - \tau_x u_t, \tag{5.6}$$

$$\eta_y^{(1)} = \beta_y + \alpha_y u - \xi_y u_x + (\alpha - \phi_y)u_y - \tau_y u_t, \tag{5.7}$$

$$\eta_t^{(1)} = \beta_t + \alpha_t u - \xi_t u_x - \phi_t u_y + (\alpha - \tau_t)u_t, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{xx}^{(2)} &= \beta_{xx} + \alpha_{xx}u + (2\alpha_x - \xi_{xx})u_x - \phi_{xx}u_y - \tau_{xx}u_t \\
&\quad +(\alpha - 2\xi_x)u_{xx} - 2\phi_x u_{xy} - 2\tau_x u_{xt},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{yy}^{(2)} &= \beta_{yy} + \alpha_{yy}u - \xi_{yy}u_x + (2\alpha_y - \phi_{yy})u_y - \tau_{yy}u_t \\
&\quad -2\xi_y u_{xy} + (\alpha - 2\phi_y)u_{yy} - 2\tau_y u_{yt},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{tt}^{(2)} &= \beta_{tt} + \alpha_{tt}u - \xi_{tt}u_x - \phi_{tt}u_y + (2\alpha_t - \tau_{tt})u_t \\
&\quad -2\xi_t u_{xt} - 2\phi_t u_{yt} + (\alpha - 2\tau_t)u_{tt},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{xt}^{(2)} &= \beta_{xt} + \alpha_{xt}u + (\alpha_t - \xi_{xt})u_x - \phi_{xt}u_y + (\alpha_x - \tau_{xt})u_t \\
&\quad -\xi_t u_{xx} - \phi_t u_{xy} - \phi_x u_{yt} + (\alpha - \xi_x - \tau_t)u_{xt} - \tau_x u_{tt},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\eta^{(2)}_{yt} = \beta_{yt} + \alpha_{yt}u - \xi_{yt}u_x + (\alpha_t - \phi_{yt})u_y + (\alpha_y - \tau_{yt})u_t$$
$$-\xi_y u_{xt} - \xi_t u_{xy} - \phi_t u_{yy} + (\alpha - \phi_y - \tau_t)u_{yt} - \tau_y u_{tt}. \tag{5.13}$$

Substituindo (5.6) – (5.13) na expressão para $\hat{S}$ e aplicando o resultado na condição de simetria $\hat{S}H = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&(\alpha u + \beta)f^{'}(u) + \Delta_{H^1}\beta + (\Delta_{H^1}\alpha)u + [2\alpha_x + 4y\alpha_t - \Delta_{H^1}\xi]u_x \\
&+[2\alpha_y - 4x\alpha_t - \Delta_{H^1}\phi]u_y + [8(x^2+y^2)\alpha_t + 4y\alpha_x - 4x\alpha_y - \Delta_{H^1}\tau]u_t \\
&+[-2\phi_x - 2\xi_y - 4y\phi_t + 4x\xi_t]u_{xy} + [\alpha - 2\xi_x - 4y\xi_t]u_{xx} + [\alpha - 2\phi_y + 4x\phi_t]u_{yy} \\
&+[8x\xi + 8y\phi + 4(x^2+y^2)(\alpha - 2\tau_t) - 4y\tau_x + 4x\tau_y]u_{tt} \\
&+[4\phi - 2\tau_x - 8(x^2+y^2)\xi_t + 4y(\alpha - \xi_x - \tau_t) + 4x\xi_y]u_{xt} \\
&+[-4\xi - 2\tau_y - 8(x^2+y^2)\phi_t - 4y\phi_x - 4x(\alpha - \phi_y - \tau_t)]u_{yt} = 0,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

quando $H = 0$. Isolando a segunda derivada parcial em relação a x em (5.1), obtemos

$$u_{xx} = -u_{yy} - 4(x^2+y^2)u_{tt} + 4xu_{yt} - 4yu_{xt} - f(u)$$

e substituindo esta expressão em (5.14), obtemos a seguinte identidade, para todos os valores de $x, y, t, u_x, u_y, u_t, u_{xy}, u_{yy}, u_{xt}, u_{yt}, u_{tt}$,

$$\begin{aligned}
&\alpha u f^{'}(u) + \beta f^{'}(u) + (\Delta_{H^1}\alpha)u + \Delta_{H^1}\beta + [4y\xi_t + 2\xi_x - \alpha]f(u) \\
&(+\Delta_{H^1}\xi - 2X\alpha)\,u_x - (\Delta_{H^1}\phi - 2Y\alpha)\,u_y - (\Delta_{H^1}\tau - 4yX\alpha + 4xY\alpha)\,u_t \\
&+[4y\xi_x + 4x\xi_y + 8(y^2-x^2)\xi_t + 4\phi - 2\tau_x - 4y\tau_t]\,u_{xt} \\
&-(\xi_y - 2x\xi_t + \phi_x + 2y\phi_t)\,u_{xy} + (\xi_x + 2y\xi_t - \phi_y + 2x\phi_t)\,u_{yy} \\
&-[4x\xi_x + 8xy\xi_t + 2\xi + 2y\phi_x - 2x\phi_y + 4(x^2+y^2)\phi_t + \tau_y - 2x\tau_t]\,u_{yt} \\
&-4\,[2(x^2+y^2)\xi_x + 4y(x^2+y^2)\xi_t + 2x\xi + 2y\phi - y\tau_x + x\tau_y - 2(x^2+y^2)\tau_t]\,u_{tt} = 0.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

E assim, sendo uma identidade, cada coeficiente dos termos $1, u_x, u_y, u_t, u_{xy}, u_{yy}, u_{xt}, u_{yt}, u_{tt}$, deve ser identicamente nulo, fornecendo-nos o seguinte sistema sobre-determinado de equações:

$$\xi_x + 2y\xi_t - \phi_y + 2x\phi_t = 0, \tag{5.16}$$

$$\xi_y - 2x\xi_t + \phi_x + 2y\phi_t = 0, \tag{5.17}$$

$$\Delta_{H^1}\xi = 2X\alpha, \tag{5.18}$$

$$\Delta_{H^1}\phi = 2Y\alpha, \tag{5.19}$$

$$\Delta_{H^1}\tau = 4yX\alpha - 4xY\alpha, \tag{5.20}$$

$$\alpha u f^{'}(u) + \beta f^{'}(u) + (\Delta_{H^1}\alpha)u + \Delta_{H^1}\beta + [4y\xi_t + 2\xi_x - \alpha]f(u) = 0, \tag{5.21}$$

$$2y\xi_x + 2x\xi_y + 4(y^2 - x^2)\xi_t + 2\phi - \tau_x - 2y\tau_t = 0, \tag{5.22}$$

$$4x\xi_x + 8xy\xi_t + 2\xi + 2y\phi_x - 2x\phi_y + 4(x^2 + y^2)\phi_t + \tau_y - 2x\tau_t = 0, \tag{5.23}$$

$$2(x^2 + y^2)\xi_x + 4y(x^2 + y^2)\xi_t + 2x\xi + 2y\phi - y\tau_x + x\tau_y - 2(x^2 + y^2)\tau_t = 0. \tag{5.24}$$

Multiplicando as equações (5.16), (5.17), (5.22) e (5.23), respectivamente, por $-x$, $-y$, y e x, obtemos (5.24), ou seja, simbolicamente, temos (5.24)=y.(5.22)+ x.(5.23)- x.(5.16)-y.(5.17).

Aplicando, respectivamente, os operadores X e Y em (5.23) e (5.22) e utilizando-se de (5.16) e (5.17), podemos verificar que (5.24)=X(5.23)+Y(5.22), e assim, o sistema de equações determinantes independentes é:

$$X\xi - Y\phi = 0, \tag{5.25}$$

$$Y\xi + X\phi = 0, \tag{5.26}$$

$$\Delta_{H^1}\xi = 2X\alpha, \tag{5.27}$$

$$\Delta_{H^1}\phi = 2Y\alpha, \tag{5.28}$$

$$\alpha u f^{'}(u) + \beta f^{'}(u) + (\Delta_{H^1}\alpha)u + \Delta_{H^1}\beta + (2X\xi - \alpha)f(u) = 0, \tag{5.29}$$

$$X\tau = 2yX\xi + 2xY\xi + 2\phi, \tag{5.30}$$

$$Y\tau = -2xX\xi + 2yY\xi - 2\xi. \tag{5.31}$$

Note que (5.25) - (5.26) são as condições de Cauchy - Riemann no grupo de Heisenberg.

Outra observação que vale a pena ser feita, e que será utilizada na demonstração do Teorema 27, é o fato de que à excessão da equação (5.29), todas as outras equações não se alteram, independentemente da função que estejamos trabalhando, ao passo que de (5.29) surgirão condições novas conforme for a função $f(u)$.

5.3 Conseqüências das equações determinantes

Nesta seção, exploraremos alguns resultados advindos das equações determinantes, que nos serão úteis na prova do Teorema 27. Um primeiro corolário delas já foi expresso no Teorema 25, tomando-se $n = 1$. Formalmente, temos o

Corolário 4. *Suponha que ψ e ϕ satisfaçam* (5.25) *e* (5.26)*. Então elas satisfazem o sistema*

$$\begin{cases} \Delta_{H^1}\phi &=& -4\psi_t, \\ \\ \Delta_{H^1}\psi &=& 4\phi_t. \end{cases} \tag{5.32}$$

Como conseqüência direta dele, temos o

Corolário 5. *Se α, ξ e ϕ satisfazem* (5.25) $-$ (5.28)*, então*

$$X\alpha = -2\phi_t, \tag{5.33}$$

$$Y\alpha = 2\xi_t. \tag{5.34}$$

Teorema 28. *Se ξ, ϕ e τ satisfazem* (5.25), (5.26), (5.30) *e* (5.31)*, então*

$$\tau_t = 2y\xi_t - 2x\phi_t + 2X\xi. \tag{5.35}$$

Demonstração. Aplicando o operador X à equação (5.31), o operador Y à equação (5.30), encontramos

$$XY\tau = -2X\xi - 2xX^2\xi + 2yXY\xi - 2X\xi,$$

$$YX\tau = 2X\xi + 2yYX\xi + 2xY^2\xi + 2Y\phi.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e lembrando-se da definição de comutador, obtemos

$$[X, Y]\tau = -8X\xi + 2y[X, Y]\xi - 2x\Delta_{H^1}\xi$$

que, pelas equações (3.12), (5.25), (5.26) e (5.33) chegamos a (5.35), que é o resultado desejado. □

Teorema 29. *Se α, ξ e ϕ satisfazem o Corolário* 5*, então*

$$\alpha_t = -(X\xi)_t. \tag{5.36}$$

Demonstração. Aplicando X a (5.34) e Y a (5.33), subtraindo uma da outra e invocando (3.12), obtemos (5.36). □

5.4 As simetrias de Lie para $f(u)$ arbitrária

Começa, agora, a prova do Teorema 27. Como a função $f(u)$ é arbitrária, não há nenhuma relação entre a função f e sua derivada f'. Neste caso $\alpha = \beta = 0$ por (5.29). Decorre, então, de (5.27) e (5.28) que

$$\Delta_{H^1}\xi = \Delta_{H^1}\phi = 0. \tag{5.37}$$

Como conseqüência das equações (5.37) e do Corolário 4, segue que ξ e ϕ independem de t, ou seja

$$\xi_t = \phi_t = 0$$

e então, $\xi = \xi(x, y)$ e $\phi = \phi(x, y)$. Assim, é conseqüência de (5.26) e (5.27) que ξ e ϕ satisfazem as condições de Cauchy - Riemann em $\mathbb{R}^2$ e por (5.29),

$$2X\xi - \alpha = 0,$$

de onde concluímos ser $\xi = \xi(y)$, pois $\alpha = 0$. Então, pelas condições de Cauchy - Riemann, $\phi = \phi(x)$ e por (5.1) o operador de Kohn - Laplace se torna o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^2$, decorrendo que

$$\Delta\xi = \frac{d^2\xi}{dy^2} = 0, \tag{5.38}$$

$$\Delta\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0. \tag{5.39}$$

Portanto, concluímos que ξ e ϕ são funções lineares de y e x, respectivamente, ou seja

$$\xi = a_1 y + a_2,$$

$$\phi = Ax + a_3,$$

onde A, a_1, a_2, a_3 são constantes arbitrárias. Decorre imediatamente de (5.26) que $A = -a_1$, ou seja

$$\phi = -a_1 x + a_3.$$

Substituindo ϕ em (5.30) e (5.31), concluímos que

$$X\tau - 2a_3 = 0,$$

$$Y\tau + 2a_2 = 0.$$

Aplicando, na primeira equação acima, o operador X e na segunda Y, subtraindo os resultados e utilizando (3.12), concluímos que

$$\tau_t = 0,$$

de onde temos $\tau = \tau(x, y)$. Conseqüentemente

$$\tau_x - 2a_3 = 0$$

e

$$\tau_y + 2a_2 = 0.$$

Fazendo a integração, obtemos $\tau = 2a_3 x - 2a_2 y + a_4$, onde a_4 é outra constante arbitrária. Assim, os infinitesimais para o caso f arbitrária são

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi & = & a_1 y + a_2, \\ \phi & = & -a_1 x + a_3, \\ \tau & = & 2a_3 x - 2a_2 y + a_4, \\ \eta & = & 0. \end{array}\right. \tag{5.40}$$

Substituindo (5.40) em (5.3), obtemos a seguinte combinação linear

$$S = a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_4\frac{\partial}{\partial t},$$

ou seja, S é combinação linear dos campos de Killing de (H^1, g).

Corolário 6. *A álgebra de Lie das simetrias da equação* (5.1) *para* $f(u)$ *arbitrária é dada pela seguinte tabela:*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R
T	0	0	0	0
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	$-\tilde{Y}$
$\tilde{Y}$	0	$-4T$	0	$\tilde{X}$
R	0	$\tilde{Y}$	$-\tilde{X}$	0

Tabela 5.1: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u)$ *arbitrária.*

5.5 As simetrias de Lie para o caso exponencial

Neste caso, substituindo $f(u) = ke^u$ em (5.29), obtemos:

$$\alpha kue^u + \beta ke^u + (\Delta_{H^1}\alpha)u + (\Delta_{H^1}\beta) + [2X\xi - \alpha]ke^u = 0.$$

Decorre imediatamente que

$$\alpha = 0 \tag{5.41}$$

e

$$\beta + 2X\xi - \alpha = 0. \tag{5.42}$$

Como conseqüência do Corolário 5, $\xi = \xi(x,y)$, $\phi = \phi(x,y)$ e então, de (5.42), $\beta = \beta(x,y)$. Além disso, pela mesma equação, temos a seguinte relação entre β e ξ

$$\beta + 2\xi_x = 0. \tag{5.43}$$

Decorre do Teorema 28 e do Corolário 5 que

$$\tau_t = 2\xi_x$$

ou seja, τ é uma função linear de t e então

$$\tau = 2\ t\xi_x + h(x,y), \tag{5.44}$$

para alguma função $h(x,y)$.

Aplicando o operador X em (5.44) obtemos:

$$X\tau = 2t\ \xi_{xx} + h_x + 4y\xi_x \tag{5.45}$$

e devido ao fato de ξ e ϕ serem independentes de t, decorre de (5.30) que o seu membro direito é apenas função de x e y, e então, o coeficiente do termo linear em t de (5.45) deve ser nulo, ou seja

$$\xi_{xx} = 0. \tag{5.46}$$

Pelo mesmo raciocínio, aplicando o operador Y em (5.44), teremos, por (5.30) que o membro direito depende somente de x e y ao passo que o membro esquerdo é linear em t. Assim, para a igualdade ser satisfeita, devemos ter

$$\xi_{xy} = 0. \tag{5.47}$$

De (5.46), (5.27) e (5.41) concluímos que

$$\xi_{yy} = 0. \tag{5.48}$$

Logo, a solução de (5.46), (5.47) e (5.48) é:

$$\xi = a_5 x + a_1 y + a_2,$$

e pelas condições (5.25), (5.26) obtemos

$$\phi = -a_1 x + a_5 y + a_3,$$

onde a_1, a_2, a_3 e a_5 são constantes.

Para terminarmos, falta apenas calcular τ. Para isso, substituindo os valores de ξ e ϕ acima determinados e a equação (5.44) em (5.30), encontramos:

$$h_x + 4y\xi_x = 2a_5y + 2a_1x - 2a_1x + 2a_5y + 2a_3,$$

que simplificando e integrando em relação ao primeiro argumento nos fornece:

$$h(x, y) = 2a_3x + g(y). \tag{5.49}$$

Fazendo o mesmo raciocínio na equação (5.31) e utilizando-se a equação (5.44), temos:

$$g'(y) - 4a_5x = -2a_5x + 2a_1y - 2a_5x - 2a_1y - 2a_2,$$

que, simplificada e integrada, nos fornece:

$$g(y) = -2a_2y + a_4,$$

onde a_4 é outra constante. Concluímos então que

$$\tau = 2a_3x - 2a_2y + a_4 + 2a_5t.$$

Decorre de (5.43) que $\beta = -2a_5$, e então, os infinitesimais são:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi & = & a_1y + a_2 + a_5x, \\ \phi & = & -a_1x + a_3 + a_5y, \\ \tau & = & 2a_3x - 2a_2y + a_4 + 2a_5t, \\ \eta & = & -2a_5. \end{array}\right. \tag{5.50}$$

Substituindo (5.50) em (5.3), obtemos a seguinte combinação linear:

$$\begin{aligned} S \;=\; & a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ & + a_4\frac{\partial}{\partial t} + a_5\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}\right). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Corolário 7. *A álgebra de Lie das simetrias da equação* (5.1) *com não-linearidade exponencial é dada pela tabela* 7*:*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R	E
T	0	0	0	0	$2T$
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	-$\tilde{Y}$	$\tilde{X}$
$\tilde{Y}$	0	-$4T$	0	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$
R	0	$\tilde{Y}$	-$\tilde{X}$	0	0
E	-$2T$	-$\tilde{X}$	-$\tilde{Y}$	0	0

Tabela 5.2: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u) = ke^u$.

5.6 As simetrias de Lie para o caso $f(u) = ku^p$, com $p \neq 0, 1, 2, 3$

Nesta seção provaremos a parte do Teorema 27 com não-linearidades do tipo potência, ou seja, $f(u) = ku^p$. Contudo, faremos a seguinte restrição: aqui, não analizaremos os casos $p = 0$, $p = 1$, $p = 3$ e $p = 2$. Os três primeiros serão tratados separadamente. O último não será considerado na presente tese devido a um resultado de não-existência de soluções da equação de Kohn - Laplace provado por Pokhozhaev e Veron ([75]). O caso $p = 0$ será demonstrado quando tratarmos do caso em que $f(u) = 0$, enquanto que o caso linear e cúbico serão feitos nas Seções 5.9 e 5.7, respectivamente.

Pela equação (5.29), temos

$$k(\alpha p + [2X\xi - \alpha])u^p + kp\beta u^{p-1} + (\Delta_{H^1}\alpha)u + (\Delta_{H^1}\beta) = 0.$$

Segue imediatamente que

$$\beta = 0, \tag{5.52}$$

$$\alpha = \frac{2}{1-p}X\xi \tag{5.53}$$

e além disso,

$$\Delta_{H^1}\alpha = 0. \tag{5.54}$$

Por (5.36) e (5.53), concluímos que

$$(p-3)\alpha_t = 0.$$

Logo, como $p \neq 3$, α independe de t.

As seguintes equações decorrem das regras de comutação entre os operadores X, Y, T, das equações (5.33) e (5.34) e do fato de α ser independente da terceira variável:

$$\alpha_{xy} = 0,$$

$$\alpha_{yy} - \alpha_{xx} = 0,$$

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0.$$

Logo, a função α é linear em x e y, ou seja

$$\alpha = ax + by + c, \tag{5.55}$$

onde a, b e c são constantes arbitrárias.

Aplicando o operador Y à segunda equação do Corolário 5, concluímos que $(Y\xi)_t = 0$. Substituindo (5.55) na equação (5.53) e isolando $X\xi$, decorre, do Teorema 28, que

$$\tau_t = (2-p)ax + (2-p)by + (1-p)c. \tag{5.56}$$

Novamente, pelas regras de comutação entre os operadores, derivando ambos os membros das Eqs. (5.30) e (5.31) em relação a t, obtemos, respectivamente:

$$X\tau_t = -a, \tag{5.57}$$

$$Y\tau_t = -b. \tag{5.58}$$

Aplicando os operadores X e Y à equação (5.56), respectivamente, e comparando os resultados com as equações (5.57) e (5.58), é trivial concluir que $a = b = 0$. Logo, $\alpha = c$ e é conseqüência imediata do Corolário 5 que $\xi = \xi(x, y)$ e $\phi = \phi(x, y)$.

Segue então de (5.53) que

$$\xi = \frac{1-p}{2}cx + g(y).$$

É conseqüência das condições (5.25) e (5.26) que ξ e ϕ são harmônicas. Como resultado imediato disto, temos que

$$g(y) = k_1 y + k_2,$$

ou seja,

$$\xi = \frac{1-p}{2}cx + k_1 y + k_2.$$

Novamente, por (5.25) e (5.26), obtemos

$$\phi = \frac{1-p}{2}cy - k_1 x + k_3.$$

Chamando $a_1 = \frac{1-p}{2}c$, $a_2 = k_2$ e $a_5 = k_1$, temos:

$$\xi = a_1 y + a_2 + a_5 x, \tag{5.59}$$

$$\phi = -a_1 x + a_3 + a_5 y. \tag{5.60}$$

Para determinarmos τ note, primeiramente, que de (5.56) e do fato de a e b serem nulas,

$$\tau = 2a_5t + h(x,y), \tag{5.61}$$

para alguma função $h(x,y)$. Substituindo (5.61), (5.59) e (5.60) em (5.30), obtemos:

$$\tau = 2a_5t + 2a_3x + h_1(y),$$

para alguma função $h_1(y)$. Da expressão acima e de (5.61), (5.59) e (5.31), concluímos que $h_1(y) = -2a_2y + a_4$, onde a_4 é uma constante. Assim, os infinitésimos são:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi &=& a_1y + a_2 + a_5x, \\ \phi &=& -a_1x + a_3 + a_5y, \\ \tau &=& 2a_3x - 2a_2y + a_4 + 2a_5t, \\ \eta &=& \dfrac{2}{1-p}a_5u. \end{array}\right. \tag{5.62}$$

Substituindo (5.62) em (5.3), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &\quad + a_4\frac{\partial}{\partial t} + a_5\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{1-p}u\frac{\partial}{\partial u}\right). \end{aligned} \tag{5.63}$$

Corolário 8. *A álgebra de Lie das simetrias da equação* (5.1) *com* $f(u) = ku^p$ *é*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R	D_p
T	0	0	0	0	$2T$
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	-$\tilde{Y}$	$\tilde{X}$
$\tilde{Y}$	0	- $4T$	0	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$
R	0	$\tilde{Y}$	-$\tilde{X}$	0	0
D_p	-$2T$	-$\tilde{X}$	-$\tilde{Y}$	0	0

Tabela 5.3: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u) = ku^p$, $p \neq 3$.

5.7 As simetrias de Lie para o caso $f(u) = ku^3$

Neste caso, substituindo $f(u) = ku^3$ na equação (5.29), obtemos:

$$2(X\xi + \alpha)ku^3 + 3k\beta u^2 + (\Delta_{H^1}\alpha)u + \Delta_{H^1}\beta = 0. \tag{5.64}$$

Imediatamente vemos que $\beta = 0$ e, além disso, temos as seguintes equações:

$$\alpha = -X\xi \tag{5.65}$$

e

$$\Delta_{H^1}\alpha = 0. \tag{5.66}$$

Aplicando o operador X à equação (5.33), Y à equação (5.34) e adicionando, obtemos:

$$\Delta_{H^1}\alpha + 2X\phi_t - 2Y\xi_t = 0.$$

Por (5.66), (5.65) e utilizando as regras de comutação, concluímos que

$$Y\xi_t = 0 \tag{5.67}$$

e

$$X\phi_t = 0. \tag{5.68}$$

Logo, existe uma função $\varphi = \varphi(x, y)$ tal que

$$Y\xi = \varphi \tag{5.69}$$

e, necessariamente,

$$X\phi = -\varphi. \tag{5.70}$$

De (5.65), concluímos que

$$X\xi = -\alpha, \tag{5.71}$$

$$Y\phi = -\alpha. \tag{5.72}$$

Então, por (5.27), (5.71) e (5.72):

$$2X\alpha = \Delta_{H^1}\xi = X^2\xi + Y^2\xi = X(-\alpha) + Y\varphi = -X\alpha + \varphi_y,$$

ou seja,

$$3X\alpha = \varphi_y.$$

Então, de (5.33), existe uma função $B_2 = B_2(x, y)$ tal que

$$\phi = -\frac{1}{6}\varphi_y\, t + B_2(x, y). \tag{5.73}$$

Analogamente

$$\xi = -\frac{1}{6}\varphi_x\, t + B_1(x, y). \tag{5.74}$$

Como conseqüência de (5.74) e (5.67), temos:

$$\varphi_{xy} = 0. \tag{5.75}$$

Por outro lado, de (5.25), (5.74) e (5.73), concluímos:

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0. \tag{5.76}$$

De (5.75) segue que existem funções $h(x)$ e $H(y)$ tais que $\varphi = h(x) + H(y)$. Pela equação (5.76), decorre que tais equações obedecem à seguinte E.D.P:

$$h''(x) - H''(y) = 0.$$

Logo, as funções $h(x)$ e $H(y)$ são:

$$h(x) = \frac{k_1}{2}x^2 + k_2 x + \tilde{k_1} \tag{5.77}$$

e

$$H(y) = \frac{k_1}{2}y^2 + k_3 y + \tilde{k_2}. \tag{5.78}$$

Chamando $k_4 = \tilde{k_1} + \tilde{k_2}$, temos que

$$\varphi = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_1}{2}y^2 + k_2 x + k_3 y + k_4, \tag{5.79}$$

onde $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ são constantes arbitrárias. Logo,

$$\xi = -\frac{1}{6}(k_1 x + k_2)\, t + B_1(x,y), \tag{5.80}$$

$$\phi = -\frac{1}{6}(k_1 y + k_3)\, t + B_2(x,y). \tag{5.81}$$

Substituindo ξ de (5.80) e φ de (5.79) em (5.69), obtemos

$$B_{1y}(x,y) = \frac{1}{6}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_1 y^2 + \frac{2}{3}k_2 x + k_3 y + k_4$$

que, após a integração, nos fornece:

$$B_1 = \frac{1}{6}k_1 x^2 y + \frac{1}{6}k_1 y^3 + \frac{2}{3}k_2 xy + \frac{k_3}{2}y^2 + k_4 y + h_1(x), \tag{5.82}$$

para alguma função $h_1 = h_1(x)$.

Analogamente, substituindo ϕ de (5.81) e φ de (5.79) em (5.70), temos:

$$B_2 = -\frac{1}{6}k_1 x^3 - \frac{1}{6}k_1 xy^2 - \frac{k_2}{2}x^2 - \frac{2}{3}k_3 xy - k_4 x + h_2(y), \tag{5.83}$$

para alguma função $h_2 = h_2(y)$.

Assim, substituindo

$$\xi = -\frac{1}{6}(k_1 x + k_2)\ t + \frac{1}{6}k_1 x^2 y + \frac{1}{6}k_1 y^3 + \frac{2}{3}k_2 xy + \frac{k_3}{2}y^2 + k_4 y + h_1(x)$$

e

$$\phi = -\frac{1}{6}(k_1 y + k_3)\ t - \frac{1}{6}k_1 x^3 - \frac{1}{6}k_1 x y^2 - \frac{k_2}{2}x^2 - \frac{2}{3}k_3 xy - k_4 x + h_2(y)$$

em (5.25), obtemos:

$$h_1{}'(x) + \frac{1}{3}k_3 x = h_2{}'(y) - \frac{1}{3}k_3 y,$$

de modo que, após a integração, encontramos as funções h_1 e h_2, e por conseqüência, os geradores infinitesimais ξ e ϕ, além da função α. Resumindo, calculamos:

$$\begin{aligned}
\xi &= -\frac{1}{6}(k_1 x + k_2)\ t + \frac{1}{6}k_1 x^2 y + \frac{1}{6}k_1 y^3 + \frac{2}{3}k_2 xy - \frac{1}{6}k_3 x^2 + \frac{1}{2}k_3 y^2 \\
&\quad + k_4 y + k_5 x + k_6, \\
\phi &= -\frac{1}{6}(k_1 y + k_3)\ t - \frac{1}{6}k_1 x^3 - \frac{1}{6}k_1 x y^2 - \frac{k_2}{2}x^2 - \frac{2}{3}k_3 xy + \frac{1}{6}k_2 y^2 \\
&\quad - k_4 x + k_5 y + k_7, \\
\alpha &= \frac{1}{6}k_1 t - \frac{1}{3}k_2 y + \frac{1}{3}k_3 x - k_5.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Resta-nos encontrar o infinitésimo τ. Substituindo (5.84) em (5.35), encontramos a seguinte expressão para a derivada de τ em relação a t:

$$\tau_t = -\frac{1}{3}k_1 t + \frac{1}{3}k_2 y - \frac{1}{3}k_3 x + 2k_5,$$

que após a sua integração, nos fornece:

$$\tau = -\frac{1}{6}k_1 t^2 + (\frac{1}{3}k_2 y - \frac{1}{3}k_3 x + 2k_5)t + N(x, y), \tag{5.85}$$

para alguma função $N = N(x, y)$. Assim, nosso problema se reduz simplesmente a encontrar essa função.

Substituindo (5.84) e (5.85) nas equações (5.30) e (5.31), obtemos, respectivamente:

$$N_x = \frac{2}{3}k_1 x^3 + \frac{2}{3}k_1 x y^2 + k_2 x^2 + \frac{2}{3}k_3 xy + \frac{1}{3}k_2 y^2 + 2k_7, \tag{5.86}$$

$$N_y = \frac{2}{3}k_1y^3 + \frac{2}{3}k_1x^2y + k_3y^2 + \frac{2}{3}k_2xy + \frac{1}{3}k_3x^2 - 2k_6. \tag{5.87}$$

Integrando (5.87) em relação a y, concluímos que existe uma função $g(x)$ tal que

$$N(x,y) = \frac{1}{6}k_1y^4 + \frac{1}{3}k_1x^2y^2 + \frac{1}{3}k_3y^3 + \frac{1}{3}k_3x^2y + \frac{1}{3}k_2xy^2 - 2k_6 + g(x),$$

e derivando N em relação a x e substituindo o resultado em (5.86), obtemos a seguinte E.D.O para $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{2}{3}k_1x^3 + k_2x^2 + 2k_7,$$

ou seja,

$$g(x) = \frac{1}{6}k_1x^4 + \frac{1}{3}k_2x^3 + 2k_7x + k_8. \tag{5.88}$$

Chamando $a_1 = -\frac{1}{6}k_1,\ a_2 = -\frac{1}{6}k_2,\ a_3 = -\frac{1}{6}k_3,\ a_4 = k_5,\ a_5 = k_4,\ a_6 = k_6,\ a_7 = k_7$ e $a_8 = k_8$, temos os seguintes infinitesimais:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi & = & a_1(xt - x^2y - y^3) + a_2(t - 4xy) + a_3(x^2 - 3y^2) + a_4x + a_5y + a_6, \\ \\ \phi & = & a_1(yt + x^3 + xy^2) + a_2(3x^2 - y^2) + a_3(t + 4xy) + a_4y - a_5x + a_7, \\ \\ \tau & = & a_1[t^2 - (x^2+y^2)^2] + a_2(-2yt - 2x^3 - 2xy^2) + a_3(2xt - 2x^2y - 2y^3) \\ \\ & & +2a_4t + 2a_7x - 2a_6y + a_8, \\ \\ \eta & = & -a_1tu + 2a_2yu - 2a_3xu - a_4u. \end{array}\right. \tag{5.89}$$

Substituindo (5.89) em (5.3), encontramos a seguinte expressão para o gerador infinitesimal:

$$\begin{aligned} S \;=\; & a_1\left[(xt - x^2y - y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (yt + x^3 + xy^2)\frac{\partial}{\partial y} + (t^2 - (x^2+y^2)^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}\right] \\ & +a_2\left[(t - 4xy)\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - (2yt + 2x^3 + 2xy^2)\frac{\partial}{\partial t} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\right] \\ & +a_3\left[(x^2 - 3y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (t + 4xy)\frac{\partial}{\partial y} + (2xt - 2x^2y - 2y^3)\frac{\partial}{\partial t} - 2xu\frac{\partial}{\partial u}\right] \\ & +a_4\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\right) + a_5\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_6\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ & +a_7\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_8\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5.90}$$

Corolário 9. *A álgebra de Lie das simetrias da equação de Kohn - Laplace crítica é dada pela seguinte tabela*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R	V_1	V_2	V_3	D_3
T	0	0	0	0	D_3	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$2T$
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	-$\tilde{Y}$	V_2	-6R	2Z	$\tilde{X}$
$\tilde{Y}$	0	-4T	0	$\tilde{X}$	V_3	-2Z	-6R	$\tilde{Y}$
R	0	$\tilde{Y}$	-$\tilde{X}$	0	0	V_3	V_2	0
V_1	-D_3	-V_2	-V_3	0	0	0	0	-2V_1
V_2	-$\tilde{X}$	6R	2D_3	-V_3	0	0	4V_1	-V_2
V_3	$-\tilde{Y}$	-2D_3	6R	-V_2	*0*	-4V_1	0	-V_3
D_3	-2T	-$\tilde{X}$	-$\tilde{Y}$	0	2V_1	V_2	V_3	0

Tabela 5.4: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u) = ku^3$.

5.8 As simetrias de Lie para o caso em que f é nula

De todos os casos, este é o que possui mais simetrias[1]: 10, ao todo. Surge aqui o primeiro grupo infinito de simetrias, como veremos mais adiante. Veja (5.119).

Como feito anteriormente, substituindo $f(u) = 0$ em (5.29), conclui-se trivialmente que

$$\Delta_{H^1}\beta = 0,$$

$$\Delta_{H^1}\alpha = 0$$

e, mais uma vez, aplicando o operador X à equação (5.33), Y à equação (5.34) e adicionando, concluímos que

$$\Delta_{H^1}\alpha + 2X\phi_t - 2Y\xi_t = 0.$$

Pelas condições (5.25), (5.26) e as regras de comutação, existe uma função $\varphi = \varphi(x, y)$ tal que

$$Y\xi = \varphi \tag{5.91}$$

e

$$X\phi = -\varphi. \tag{5.92}$$

[1] Na verdade, podemos representar esta álgebra de dimensão infinita por 10 campos vetoriais, daí o abuso de linguagem em dizer que temos 10 simetrias. De fato, neste caso, temos uma subálgebra finita de dimensão 9 e uma subálgebra infinita dada pelo campo $\beta\frac{\partial}{\partial u}$, onde β é solução da equação de Kohn - Laplace homogênea.

Ademais, pelo Teorema 29, concluímos a existência de outra função $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$\alpha = -X\xi + \psi, \tag{5.93}$$

ou seja,

$$X\xi = -\alpha + \psi. \tag{5.94}$$

Substituindo em (5.27) as equações (5.94) e (5.91), temos:

$$2X\alpha = X^2\xi + Y^2\xi = -X\alpha + \psi_x + \varphi_y,$$

e, conseqüentemente,

$$3X\alpha = \psi_x + \varphi_y.$$

De modo análogo, podemos facilmente concluir que

$$3Y\alpha = -\varphi_x + \psi_y.$$

Pelo Corolário 5, existem funções $A = A(x, y)$ e $B = B(x, y)$, de modo que, após a integração em relação a t, tenhamos:

$$\xi = \frac{1}{6}(-\varphi_x + \psi_y)t + A(x, y), \tag{5.95}$$

$$\phi = -\frac{1}{6}(\varphi_y + \psi_x)t + B(x, y). \tag{5.96}$$

Aplicando o operador Y em (5.95), obtemos a seguinte equação:

$$Y\xi = -\frac{1}{6}(\varphi_{xy} - \psi_{yy})t + A_y + \frac{1}{3}x(\varphi_x - \psi_y).$$

Mas (5.91) implica que $Y\xi$ independe de t, de onde concluímos que o coeficiente da presente variável deve ser nulo, ou seja, as funções φ e ψ satisfazem à seguinte equação:

$$\psi_{yy} = \varphi_{xy}. \tag{5.97}$$

Aplicando o operador X em (5.96), utilizando a equação (5.92) e o mesmo argumento empregado para obtermos (5.97), concluímos que

$$\psi_{xx} = -\varphi_{xy}. \tag{5.98}$$

Finalmente, da condição (5.25), obtemos:

$$\varphi_{yy} - \varphi_{xx} + 2\psi_{xy} = 0. \tag{5.99}$$

Integrando (5.97) e (5.98), temos

$$\psi_y = \varphi_x + h_1(x), \tag{5.100}$$

$$\psi_x = -\varphi_y + h_2(y), \tag{5.101}$$

para algumas funções $h_1 = h_1(x)$ e $h_2 = h_2(y)$. Diferenciando (5.100) com relação a x e (5.101) com respeito a y e igualando os resultados, obtemos:

$$\varphi_{xx} + h_1'(x) = -\varphi_{yy} + h_2'(y).$$

Isolando φ_{xx} na expressão anterior, derivando (5.101) em relação a y e substituindo estes resultados em (5.99), conclui-se com facilidade que

$$h_1'(x) + h_2'(y) = 0.$$

Logo, $h_1(x) = k_1 x + k_2$ e $h_2(y) = -k_1 y + k_3$ para algumas constantes $k_1,\ k_2,\ k_3$. Chamando $a_1 = \frac{1}{6}k_1,\ a_2 = \frac{1}{6}k_2,\ a_3 = -\frac{1}{6}k_3$ e utilizando (5.100) e (5.101), obtemos

$$\xi = (a_1 x + a_2)t + A(x, y), \tag{5.102}$$

$$\phi = (a_1 y + a_3)t + B(x, y). \tag{5.103}$$

Concluímos de (5.36) que

$$\alpha_t = -a_1,$$

e, então, existe uma função $g = g(x, y)$ de modo a se ter

$$\alpha = -a_1 t + g(x, y). \tag{5.104}$$

Substituindo (5.102), (5.103), (5.104) em (5.33), concluímos que existe uma função $\lambda = \lambda(y)$ tal que

$$g(x, y) = -2a_3 x + \lambda(y)$$

e, então, utilizando esta expressão para g em (5.104) e substituindo tal equação juntamente com (5.102) e (5.103) em (5.34), encontramos que

$$\lambda(y) = 2a_2 y + a_9$$

ou seja,

$$\alpha = -a_1 t - 2a_3 x + 2a_2 y + a_9, \tag{5.105}$$

onde a_9 é uma constante e $a_1,\ a_2,\ a_3$ são as mesmas de (5.102).

Pelo Teorema 28 e das equações (5.102) e (5.103) decorre que τ é um polinômio quadrático na variável t:

$$\tau = a_1t^2 + (2A_x + 4a_1xy + 6a_2y - 2a_3x)t + N(x, y), \tag{5.106}$$

para alguma função $N = N(x, y)$. Substituindo ξ de (5.102), ϕ de (5.103) e τ de (5.106) na equação determinante (5.30) e igualando os coeficientes da variável t, encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$A_{xx} = -2a_1y + 2a_3, \tag{5.107}$$

$$N_x = -2A_xy + 2A_yx + 2B - 4a_1xy^2 - 4a_1x^3 - 4a_2x^2 - 12a_2y^2 + 4a_3xy + 4a_2y^2. \tag{5.108}$$

Da mesma maneira, empregando-se (5.31), somos conduzidos a

$$A_{xy} = -2a_1x - 4a_2, \tag{5.109}$$

$$N_y = 2A_xx + 2A_yy + 8a_2xy - 4a_3x^2 - 4a_2xy - 2A. \tag{5.110}$$

Das equações (5.27), (5.102) e (5.103), segue que A satisfaz

$$A_{xx} + A_{yy} = -4a_3 - 8a_1y. \tag{5.111}$$

Decorre da equação (5.107) a existência de funções $\sigma = \sigma(y)$ e $\delta = \delta(y)$ tais que

$$A = a_3x^2 - a_1x^2y + \sigma(y)x + \delta(y)$$

que, pela equação (5.109), nos diz que σ é uma função linear de y. Finalmente utilizando a equação (5.111), concluímos que a função δ é um polinômio de terceiro grau em y, o que nos dá a seguinte expressão para a função A:

$$A = -a_1y^3 - a_1x^2y + a_3x^2 - 3a_3y^2 - 4a_2xy + a_4x + a_5y + a_6, \tag{5.112}$$

onde $a_5,\ a_6$ são constantes.

Resta-nos agora o problema de encontrar a função B. Para tanto, utilizaremos as equações (5.25) e (5.26). Substituindo ξ de (5.102) com A dada em (5.112) e ϕ de (5.103) na equação (5.25), obtemos, após integração na variável y:

$$B = 4a_3xy - a_2y^2 + a_1xy^2 + a_4y + \gamma(x), \tag{5.113}$$

onde $\gamma = \gamma(x)$ é alguma função de x. Empregando o raciocínio anterior e utilizando a equação (5.26), encontramos a seguinte expressão para a função γ:

$$\gamma(x) = a_1x^3 + 3a_2x^2 - a_5x + a_7,$$

onde a_7 é uma constante. Assim, determinamos a função

$$B = a_1xy^2 + a_1x^3 + 4a_3xy + 3a_2x^2 - a_5x - a_2y^2 + a_4y + a_7 \tag{5.114}$$

e por conseqüência, ξ, ϕ e η.

Para determinarmos τ, utilizaremos as equações (5.30) e (5.31). Desta, concluímos que a função N_y satisfaz

$$N_y = -4a_1x^2y - 4a_1y^3 - 2a_3x^2 - 4a_2xy - 6a_3y^2 - 2a_6, \tag{5.115}$$

ao passo que daquela, obtemos:

$$N_x = -4a_1x^3 - 4a_1xy^2 - 6a_2x^2 - 4a_3xy - 2a_2y^2 + 2a_7. \tag{5.116}$$

Após integrar (5.116) em relação à variável x, concluímos que existe $h = h(y)$ tal que

$$N(x,y) = -a_1x^4 - 2a_1x^2y^2 - 2a_2x^3 - 2a_3x^2y - 2a_2xy^2 + 2a_7x + h(y).$$

Derivando esta última em relação a y, substituindo o resultado em (5.115) e integrando em relação a y, encontramos a função

$$h(y) = -a_1y^4 - 2a_3y^3 - 2a_6y + a_8.$$

Conseqüentemente,

$$N(x,y) = -a_1(x^2+y^2)^2 - a_2(2x^3 + 2xy^2) - a_3(2y^3 + 2x^2y) + 2a_7x - 2a_6y + a_8.$$

Assim, nossos infinitésimos são:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi &=& a_1(xt - x^2y - y^3) + a_2(t - 4xy) + a_3(x^2 - 3y^2) + a_4x + a_5y + a_6, \\ \phi &=& a_1(yt + x^3 + xy^2) + a_2(3x^2 - y^2) + a_3(t + 4xy) + a_4y - a_5x + a_7, \\ \tau &=& a_1[t^2 - (x^2+y^2)^2] + a_2(-2yt - 2x^3 - 2xy^2) + a_3(2xt - 2x^2y - 2y^3) \\ & & +2a_4t + 2a_7x - 2a_6y + a_8, \\ \eta &=& -a_1tu + 2a_2yu - 2a_3xu + a_9u + \beta(x,y,t), \end{array}\right. \tag{5.117}$$

onde

$$\Delta_{H^1}\beta = 0 \tag{5.118}$$

e $a_i,\ i = 1, \cdots, 9$, são constantes.

Substituindo (5.117) em (5.3), obtemos a seguinte combinação linear:

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & a_1\left[(xt - x^2y - y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (yt + x^3 + xy^2)\frac{\partial}{\partial y} + (t^2 - (x^2+y^2)^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}\right] \\
& + a_2\left[(t - 4xy)\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - (2yt + 2x^3 + 2xy^2)\frac{\partial}{\partial t} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\right] \\
& + a_3\left[(x^2 - 3y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (t + 4xy)\frac{\partial}{\partial y} + (2xt - 2x^2y - 2y^3)\frac{\partial}{\partial t} - 2xu\frac{\partial}{\partial u}\right] \qquad (5.119) \\
& + a_4\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\right) + a_5\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_6\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
& + a_7\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_8\frac{\partial}{\partial t} + a_9 u\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned}
$$

onde β é qualquer função que satisfaça a equação de Kohn - Laplace homogênea. A simetria $W_\beta = \beta\frac{\partial}{\partial u}$ gera a subálgebra de dimensão infinita.

Corolário 10. *A álgebra de Lie das simetrias da equação de Kohn - Laplace homogênea é dada pela seguinte tabela*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R	V_1	V_2	V_3	Z	U	W_β
T	0	0	0	0	$Z-U$	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$2T$	0	$W_{T\beta}$
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	-$\tilde{Y}$	V_2	-6R	$2Z-2U$	$\tilde{X}$	0	$W_{\tilde{X}\beta}$
$\tilde{Y}$	0	-4T	0	$\tilde{X}$	V_3	$-2Z+2U$	-6R	$\tilde{Y}$	0	$W_{\tilde{Y}\beta}$
R	0	$\tilde{Y}$	-$\tilde{X}$	0	0	V_3	-V_2	0	0	$W_{R\beta}$
V_1	$-Z+U$	-V_2	-V_3	0	0	0	0	-2V_1	0	$W_{V_1\beta}$
V_2	-$\tilde{X}$	6R	$2Z-2U$	-V_3	0	0	4V_1	-V_2	0	$W_{V_2\beta}$
V_3	-$\tilde{Y}$	$-2Z+2U$	6R	V_2	0	-4V_1	0	-V_3	0	$W_{V_3\beta}$
Z	-2T	-$\tilde{X}$	-$\tilde{Y}$	0	2V_1	V_2	V_3	0	0	$W_{Z\beta}$
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W_β	-$W_{T\beta}$	-$W_{\tilde{X}\beta}$	-$W_{\tilde{Y}\beta}$	-$W_{R\beta}$	-$W_{V_1\beta}$	-$W_{V_2\beta}$	-$W_{V_3\beta}$	-$W_{Z\beta}$	0	0

Tabela 5.5: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u) = 0$.

5.9 As simetrias de Lie para o caso em que f é linear

Esta é a última etapa para concluirmos a demonstração do presente teorema. É imediato, após substituirmos $f(u) = ku$, $k \neq 0$, em (5.29) que

$$\Delta_{H^1}\beta + k\beta = 0 \tag{5.120}$$

e

$$\Delta_{H^1}\alpha = -2kX\xi. \tag{5.121}$$

Aplicando o operador X em (5.33) e Y em (5.34) e adicionando os resultados obtemos, após utilizarmos (5.26) e as regras de comutação:

$$\Delta_{H^1}\alpha = 2Y\xi_t - 2X\phi_t = 4Y\xi_t. \tag{5.122}$$

Decorre imediatamente de (5.121) e (5.122) que

$$Y\xi_t = -\frac{1}{2}kX\xi. \tag{5.123}$$

Além disso, de (5.26):

$$X\phi_t = \frac{1}{2}kX\xi. \tag{5.124}$$

Diferenciando (5.27) em relação a t e utilizando o resultado do Teorema 18 juntamente com a equação (5.123), obtemos

$$2X\alpha_t = \Delta_{H^1}\xi_t = X(X\xi_t) + Y(Y\xi_t) = X(-\alpha_t) - kY(X\xi_t)/2,$$

ou, equivalentemente,

$$3(X\alpha)_t = -\frac{1}{2}kYX\xi. \tag{5.125}$$

É imediato do Teorema 29 a existência de uma função $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$X\xi = -\alpha + \psi. \tag{5.126}$$

De (5.125) e (5.126)

$$3X\alpha_t = -\frac{1}{2}k\psi_y + \frac{1}{2}kY\alpha. \tag{5.127}$$

Analogamente, diferenciando em relação a t a equação (5.19), empregando-se as equações (5.25) e (5.36), obtemos

$$3Y\alpha_t = \frac{1}{2}k\psi_x - \frac{1}{2}kX\alpha. \tag{5.128}$$

Aplicando X à equação (5.127), Y à equação (5.128) e adicionando:

$$3(X^2+Y^2)\alpha_t = k(XY-YX)\alpha/2 = k[X,Y]\alpha/2 = -2k\alpha_t,$$

ou seja,

$$3\Delta_{H^1}\alpha_t = -2k\alpha_t. \tag{5.129}$$

Por outro lado, diferenciando a equação (5.121) com respeito a t e utilizando a equação (5.36), obtemos

$$\Delta_{H^1}\alpha_t = 2k\alpha_t. \tag{5.130}$$

Por hipótese, k é não nulo, logo, de (5.129) e (5.130) concluímos que α independe de t, ou seja, $\alpha = \alpha(x,y)$. Decorre do Corolário 5 que existem funções $A = A(x,y)$ e $B = B(x,y)$ tais que

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha_y t + A(x,y) \tag{5.131}$$

e

$$\phi = -\frac{1}{2}\alpha_x t + B(x,y). \tag{5.132}$$

Como $\alpha_t = 0$, de (5.131) e (5.36) temos:

$$\alpha_{xy} = 0. \tag{5.133}$$

De (5.26), (5.131) e (5.132)

$$\alpha_{yy} - \alpha_{xx} = 0. \tag{5.134}$$

Resolvendo as equações (5.133) e (5.134), encontramos a seguinte solução:

$$\alpha = k_1x^2 + k_1y^2 + 2k_3x + 2k_2y + k_4, \tag{5.135}$$

onde $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ são constantes. Como conseqüência imediata, temos as seguintes expressões para as funções ξ e ϕ:

$$\xi = (k_1y + k_2)t + A(x,y), \tag{5.136}$$

$$\phi = -(k_1x + k_3)t + B(x,y). \tag{5.137}$$

Substituindo (5.136) e (5.137) em (5.35), encontramos, após a integração em relação a t:

$$\tau = (2k_1x^2 + 6k_1y^2 + 2k_3x + 6k_2y + 2A_x)t + N(x,y), \tag{5.138}$$

onde $N = N(x,y)$ é uma função a ser determinada. Substituindo (5.136), (5.137) e (5.138) em (5.30), obtemos uma identidade linear em t. Igualando os respectivos coeficientes, encontramos

$$A_{xx} = -2k_1x - 2k_3, \tag{5.139}$$

$$N_x = -2yA_x + 2xA_y + 2B - 8k_1y^3 - 8k_1x^2y - 4k_2x^2 - 8k_2y^2 - 4k_3xy. \tag{5.140}$$

Procendendo da mesma maneira, após substituirmos (5.136), (5.137) e (5.138) em (5.31), obtemos

$$A_{xy} = -6k_1y - 4k_2 \tag{5.141}$$

e

$$N_y = 2xA_x + 2yA_y - 2A + 4k_1xy^2 + 4k_1x^3 + 4k_3x^2 + 4k_2xy. \tag{5.142}$$

Substituindo (5.136) e (5.135) em (5.121), encontramos

$$4k_1 = -2kA_x - 4k(k_1y^2 + k_2y). \tag{5.143}$$

É fácil ver, após diferenciar (5.143) em relação a x, que

$$A_{xx} = 0, \tag{5.144}$$

pois $k \neq 0$. Então, comparando (5.144) com (5.139), vê-se facilmente que $k_1 = k_3 = 0$. Pela equação (5.143), concluímos que $A_{xy} = -2k_2$, e então, substituindo este resultado na equação (5.141), necessariamente $k_2 = 0$. Logo, temos que

$$\xi = A(y), \quad \phi = B(x,y), \quad \tau = N(x,y), \quad \alpha = k_4.$$

Assim, as equações (5.25) e (5.26) tornam-se as condições usuais de Cauchy - Riemann. De (5.25) concluímos que $B = B(x)$. Assim, desde que $\alpha = k_4$, decorre das equações (5.18) e (5.19) que ξ e ϕ são funções lineares de y e x, respectivamente. Da equação determinante (5.27), concluímos que

$$\xi = a_1y + a_2 \tag{5.145}$$

e então,

$$\phi = -a_1x + a_3. \tag{5.146}$$

Substituindo (5.145) e (5.146) em (5.140), concluímos existir $g = g(y)$ tal que

$$N = 2a_3x + g(y).$$

Substituindo a última equação juntamente com (5.145) e (5.146) em (5.142), encontramos

$$g(y) = 2a_2y + a_4,$$

determinando assim a função N. Logo,

$$\begin{cases} \xi &= a_1 y + a_2, \\ \phi &= -a_1 x + a_3, \\ \tau &= 2a_3 x - 2a_2 y + a_4, \\ \eta &= a_5 u + \beta(x,y,t), \end{cases} \tag{5.147}$$

com

$$\Delta_{H^1}\beta + k\beta = 0. \tag{5.148}$$

Desta maneira, nosso gerador (5.3) é:

$$\begin{aligned} S &= a_1\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_3\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &\quad + a_4\frac{\partial}{\partial t} + a_5 u\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

onde β é qualquer solução de (5.148).

Encerramos assim a demonstração do Teorema 27.

Corolário 11. *A álgebra de Lie das simetrias da equação de Kohn - Laplace linear é dada pela seguinte tabela*

	T	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	R	U	W_β
T	0	0	0	0	0	$W_{T\beta}$
$\tilde{X}$	0	0	$4T$	$-\tilde{Y}$	0	$W_{\tilde{X}\beta}$
$\tilde{Y}$	0	$-4T$	0	$\tilde{X}$	0	$W_{\tilde{Y}\beta}$
R	0	$\tilde{Y}$	$-\tilde{X}$	0	0	$W_{R\beta}$
U	0	0	0	0	0	0
W_β	$-W_{T\beta}$	$-W_{\tilde{X}\beta}$	$-W_{\tilde{Y}\beta}$	$-W_{R\beta}$	0	0

Tabela 5.6: Álgebra de Lie da equação (5.1) *com* $f(u) = ku$.

Capítulo 6

Simetrias de Noether da equação semilinear de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg H^1

Neste capítulo estudaremos as simetrias variacionais e de divergência da equação semilinear de Kohn - Laplace em H^1.

O primeiro fato importante a ser apresentado neste capítulo é que, para toda função $f(u)$, o grupo $G_f := \{T, R, \tilde{X}, \tilde{Y}\}$ (veja (5.2)) será sempre um grupo de simetrias de Noether. Conseqüentemente, a cada uma dessas simetrias existe um campo vetorial cuja divergência é nula, fornecendo-nos assim uma *lei de conservação*.

Para os casos exponencial e os de não-linearidade do tipo potência, apenas o grupo G_f será um grupo de simetrias de Noether, retornando, assim, ao caso geral.

A excessão a essa regra ocorrerá quando a não-linearidade do tipo potência for cúbica.

Para tal equação, o grupo de simetrias de Lie será uma simetria variacional se, e somente se, $p = 3$, e além disso, para este caso, qualquer simetria é uma simetria de divergência, tornando este caso não-linear o mais rico em simetrias de Noether, e ademais, maximal. Por maximal entendemos o grupo que possui o maior número de simetrias que podem expressar leis de conservação em relação ao grupo de simetrias de Lie.

Para $f(u) = 0$, o grupo de simetrias de Noether, além dos campos de Killing de (H^1, g), é constituído pelas simetrias V_1, V_2, V_3 e W_β, onde β satisfaz a equação (5.1) homogênea. Embora infinito, este grupo de simetrias não é maximal, visto que nem todas as simetrias de Lie são simetrias de Noether.

Quando $f(u) = ku$, $k \neq 0$, o grupo de simetrias de Noether é também um grupo infinito e não maximal.

As respectivas leis de conservação para tais simetrias serão apresentadas no próximo capítulo.

Os resultados aqui mostrados foram parcialmente apresentados em [25, 50], comunicados em [18, 20, 23, 29] e publicados em [27, 51].

6.1 Simetrias de Noether para o caso geral e exponencial

Esta sessão resume-se apenas ao fato de se mostrar que para qualquer que seja $f(u)$, cada elemento do grupo G_f será sempre uma simetria variacional da equação

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = 0. \tag{6.1}$$

Como outrora, suporemos que $F'(u) = f(u)$.

Demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 30. *O grupo G_f é um grupo de simetrias de Noether independentemente da função $f(u)$ em* (6.1).

Além disso, o caso exponencial se reduz, do ponto de vista das simetrias da Lagrangeana, ao caso geral através do

Teorema 31. *O grupo de simetrias de Noether de* (6.1) *com $f(u) = e^u$ é o grupo de isometrias.*

O Teorema 31 é conseqüência do Teorema 30 e do seguinte

Lema 3. *A simetria*
$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}$$
não é uma simetria de Noether.

Demonstração. A prova é direta, porém há dois passos a serem seguidos. Primeiro, calcularemos a extensão de primeira ordem $E^{(1)}$ da simetria E. Após isto, verificaremos que não existe nenhum campo vetorial $B = (B_1, B_2, B_3)$, onde as funções componentes dependem de $x,\ y,\ t,\ u$ e derivadas de u até uma ordem finita, de modo a satisfazer a equação

$$E^{(1)}\mathcal{L} + 4\mathcal{L} = Div(B).$$

1. Cálculo da extensão de E.

   Neste caso, $(\xi, \phi, \tau, \eta) = (x, y, 2t, -2)$. Logo, $D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 4$ e $(\eta_x^{(1)}, \eta_y^{(1)}, \eta_t^{(1)}) = (-u_x, -u_y, -2u_t)$, fornecendo-nos a seguinte extensão de primeira ordem:

   $$E^{(1)} = E - u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - u_y\frac{\partial}{\partial u_y} - 2u_t\frac{\partial}{\partial u_t}.$$

Assim,

$$E^{(1)}\mathcal{L} + (D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)\mathcal{L} = u_x^2 + u_y^2 + 4(x^2+y^2)u_t^2 + 4yu_xu_t - 4xu_yu_t - 2e^u, \tag{6.2}$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + 2(x^2+y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t - e^u.$$

2. Inexistência do campo vetorial B.

   A inexistência de um campo vetorial cuja divergência seja o membro direito de (6.2) é assegurada pelo resultado abaixo, que é mais forte do que precisamos e nos será útil em outros casos.

   Teorema 32. *Seja $u = u(x,y,t)$. Se um campo vetorial $V = (A,B,C)$ é função de x, y, t, u e derivadas de u até ordem m, sua divergência necessariamente depende das derivadas de ordem $(m+1)$ de u com respeito a x, y e t.*

   Demonstração. Faremos a demonstração tomando-se $m=1$, que é o caso que nos interessa. Tomando a divergência de V, encontramos:

$$\begin{aligned} Div(V) &= A_x + B_y + C_t + u_xA_u + u_{xx}A_{u_x} + u_{xy}A_{u_y} + u_{xt}A_{u_t} \\ &\quad + u_yB_u + u_{xy}B_{u_x} + u_{yy}B_{u_y} + u_{yt}B_{u_t} \\ &\quad + u_tC_u + u_{xt}C_{u_x} + u_{yt}C_{u_y} + u_{tt}C_{u_t}, \end{aligned}$$

   de onde conclui-se imediatamente a dependência desejada. □

   Corolário 12. *Se a divergência de um campo vetorial não depende das derivadas parciais segundas de u com relação a x, y e t, então ele independe de u_x, u_y e u_t.*

Isso encerra a demonstração do Lema 3. □

Demonstração. (Do Teorema 30). Embora não seja difícil, a demonstração é bastante longa e tediosa. Será feita da seguinte maneira:

1. Encontraremos as extensões de primeira ordem das simetrias T, R, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$.

2. Faremos a demonstração para cada uma delas.

1. Extensões.

(a) Cálculo da extensão do operador T.

Os coeficientes da simetria T são: $\xi = \phi = \eta = 0$ e $\phi = 1$. Decorre então que:

$$\eta_i^{(1)} = 0,\ i = x,\ y,\ t,$$

de onde concluímos que

$$T^{(1)} = T.$$

(b) Cálculo da extensão do operador R.

As componentes do operador R são: $(\xi, \phi, \tau, \eta) = (y, -x, 0, 0)$, de onde concluímos que

$$\begin{array}{lll} D_x\xi = 0, & D_y\xi = 1, & D_t\xi = 0, \\ \\ D_x\phi = -1, & D_y\phi = 0, & D_t\phi = 0, \\ \\ D_x\tau = 0, & D_y\tau = 0, & D_t\tau = 0, \\ \\ D_x\eta = 0, & D_y\eta = 0, & D\eta = 0 \end{array}$$

e então

$$\eta_x^{(1)} = u_y, \quad \eta_y^{(1)} = -u_x, \quad \eta_t^{(1)} = 0.$$

Portanto,

$$R^{(1)} = R + u_y \frac{\partial}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial}{\partial u_y}.$$

(c) Cálculo da extensão do operador $\tilde{X}$.

Neste caso, $(\xi, \phi, \tau, \eta) = (1, 0, -2y, 0)$ sendo então que

$$\begin{array}{lll} D_x\xi = 0, & D_y\xi = 0, & D_t\xi = 0, \\ \\ D_x\phi = 0, & D_y\phi = 0, & D_t\phi = 0, \\ \\ D_x\tau = 0, & D_y\tau = -2, & D_t\tau = 0, \\ \\ D_x\eta = 0, & D_y\eta = 0, & D_t\eta = 0. \end{array}$$

Assim,

$$\eta_x^{(1)} = 0, \quad \eta_y^{(1)} = 2u_t, \quad \eta_t^{(1)} = 0.$$

Desta forma, a primeira extensão é:

$$\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X} + 2u_t \frac{\partial}{\partial u_y}.$$

(d) Cálculo da extensão do operador $\tilde{Y}$.
As componentes são: $(\xi, \phi, \tau, \eta) = (0, 1, 2x, 0,)$ e então,

$$D_x\xi = 0, \quad D_y\xi = 0, \quad D_t\xi = 0,$$

$$D_x\phi = 0, \quad D_y\phi = 0, \quad D_t\phi = 0,$$

$$D_x\tau = 2, \quad D_y\tau = 0, \quad D_t\tau = 0,$$

$$D_x\eta = 0, \quad D_y\eta = 0, \quad D_t\eta = 0$$

e

$$\eta_x^{(1)} = -2u_t, \quad \eta_y^{(1)} = 0, \quad \eta_t^{(1)} = 0,$$

fornecendo a seguinte extensão:

$$\tilde{Y}^{(1)} = \tilde{Y} - 2u_t\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Corolário 13. *A divergência de qualquer campo do grupo G_f é nula.*

2. (a) Demonstração do teorema para o operador T.
Desde que a divergência da simetria T é nula,

$$\frac{\partial}{\partial t}(Xu) = \frac{\partial}{\partial t}(Yu) = 0$$

e

$$\begin{aligned} T^{(1)}\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(Xu)^2 + \frac{1}{2}(Yu)^2 - F(u)\right] \\ &= (Xu)\frac{\partial}{\partial t}(Xu) + Yu\frac{\partial}{\partial t}(Yu) = 0, \end{aligned}$$

decorre imediatamente que

$$T^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}Div(T) = 0.$$

(b) Demonstração do teorema para o operador R.
Desde que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}Xu = \frac{\partial}{\partial x^i}Yu = 0, \quad i = 1,\ 2, \ \ (x^1, x^2) = (x, y)$$

e utilizando-se as duas primeiras parcelas da equação (4.6), temos:

$$R^{(1)}\mathcal{L} = XuYu - XuYu = 0.$$

Conseqüentemente, pelo Corolário 13,

$$R^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}Div(R) = 0.$$

(c) Demonstração do teorema para os operadores $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$.
Decorre, de (4.6), que:

$$\tilde{X}^{(1)}\mathcal{L} = Xu \cdot 0 + Yu \cdot (-2u_t + 2u_t) = 0.$$

Novamente, pelo Corolário 13, obtemos

$$\tilde{X}^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}Div(\tilde{X}) = 0.$$

No caso do operador $\tilde{Y}$,

$$\tilde{Y}^{(1)}\mathcal{L} = Xu \cdot (2u_t - 2u_t) + Yu \cdot 0 = 0.$$

O mesmo argumento utilizado para o operador $\tilde{X}$ prova que

$$\tilde{Y}^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}Div(\tilde{Y}) = 0,$$

o que encerra nossa demonstração. □

6.2 Simetrias de Noether para o caso linear

Seja $G_l := \left\{T,\ R,\ \tilde{X},\ \tilde{Y}, U,\ W_\beta\right\}$ o grupo de simetrias de Lie da equação

$$\Delta_{H^1} u + u = 0. \tag{6.3}$$

Lema 4. *A simetria*

$$U = u\frac{\partial}{\partial u}$$

não é uma simetria de Noether.

Demonstração. Esta demonstração é direta e, como nos casos anteriores, consiste de dois passos. O primeiro é o cálculo da extensão de primeira ordem da simetria U, o segundo é mostrar a inexistência de campos vetoriais tais que a equação

$$U^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = Div(B)$$

não seja cumprida, para qualquer campo vetorial B.

1. Extensão da primeira ordem da simetria U.

   Neste caso, $\eta = u,\ \xi = \phi = \tau = 0$. Assim,

   $$D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 0$$

   e

   $$\eta_x^{(1)} = u_x,\ \eta_y^{(1)} = u_y,\ \eta_t^{(1)} = u_t.$$

Logo, a extensão $U^{(1)}$ é dada por

$$U^{(1)} = u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} + u_y\frac{\partial}{\partial u_t} + u_t\frac{\partial}{\partial u_t}. \tag{6.4}$$

Aplicando o operador dado em (6.4) à Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + 2(x^2+y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t - \frac{1}{2}u^2 \tag{6.5}$$

encontramos:

$$U^{(1)}\mathcal{L} = -u^2 + u_x^2 + u_y^2 + 4(x^2+y^2)u_t^2 + 4yu_xu_t - 4xu_yu_t = 2\mathcal{L}.$$

2. A inexistência de um campo cuja divergência seja proporcional à Lagrangeana vem do Teorema 32 e do Corolário 12.

□

Lema 5. *A simetria W_β é uma simetria de Noether.*

Demonstração. Como $\beta = \beta(x,y,t)$ a extensão de primeira ordem da simetria W_β é

$$W_\beta^{(1)} = \beta\frac{\partial}{\partial u} + \beta_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \beta_y\frac{\partial}{\partial u_y} + \beta_t\frac{\partial}{\partial u_t}. \tag{6.6}$$

De (6.6) e (6.5), temos

$$\begin{aligned} W_\beta^{(1)}\mathcal{L} &= -\beta u + (u_x + 2yu_t)\beta_x + (u_y - 2xu_t)\beta_y + (4(x^2+y^2)u_t + 2yu_x - 2xu_y)\beta_t \\ &= Div((\beta_x + 2y\beta_t)u, (\beta_y - 2x\beta_t)u, (2y\beta_x - 2x\beta_y + 4(x^2+y^2)\beta_t)u). \end{aligned}$$

Logo, W_β é uma simetria de Noether. □

Corolário 14. *A simetria W_β é uma simetria variacional se, e somente se, $\beta = 0$.*

Teorema 33. *O grupo de simetrias de Noether da equação* (6.3) *é o grupo $G_f \cup \{W_\beta\}$.*

Demonstração. É conseqüência do Teorema 32, do Corolário 12 e dos Lemas 4 e 5. □

6.3 Simetrias de Noether para os casos do tipo potência

Nesta sessão mostraremos que, à excessão do caso crítico, as únicas simetrias de Noether são variacionais, e ademais, correspondem ao grupo de G_f. Quando $f(u) = u^3$, todo o grupo de simetrias de Lie é um grupo de simetrias de Noether.

6.3.1 As simetrias variacionais

Seja G_p o grupo de simetrias de Lie[1] quando $f(u) = u^p$ em (6.1), isto é, $G_p = \{T,\ R,\ \tilde{X},\ \tilde{Y},\ D_p\}$.

Nosso objetivo na presente seção é provar o

Teorema 34. *Simetrias variacionais da equação de Kohn - Laplace crítica*

O grupo de simetrias de Lie G_p da equação de Kohn - Laplace (6.1), *com $f(u) = u^p$, é um grupo de simetria variacional se, e somente se, $p = 3$.*

Demonstração. Para as simetrias $T,\ R,\ \tilde{X},\ \tilde{Y}$ a demonstração se encontra no Teorema 30.

Para a simetria D_p, primeiro encontraremos sua extensão de primeira ordem. Para tanto, temos que:

$$\xi = x, \quad \phi = y, \quad \tau = 2t, \quad \eta = \frac{2}{1-p}u$$

e então,

$$\begin{array}{lll} D_x\xi = 1, & D_y\xi = 0, & D_t\xi = 0, \\ D_x\phi = 0, & D_y\phi = 1, & D_t\phi = 0, \\ D_x\tau = 0, & D_y\tau = 0, & D_t\tau = 2, \end{array}$$

$$D_x\eta = \frac{2}{1-p}u_x, \quad D_y\eta = \frac{2}{1-p}u_y, \quad D_t\eta = \frac{2}{1-p}u_t$$

e

$$\eta_x^{(1)} = \frac{1+p}{1-p}u_x, \quad \eta_y^{(1)} = \frac{1+p}{1-p}u_y, \quad \eta_t^{(1)} = \frac{2p}{1-p}u_t,$$

fornecendo-nos a seguinte extensão:

$$D_p^{(1)} = D_p + \frac{1+p}{1-p}u_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{1+p}{1-p}u_y\frac{\partial}{\partial u_y} + \frac{2p}{1-p}u_t\frac{\partial}{\partial u_t}. \tag{6.7}$$

Além disso, a divergência da simetria D_p é

$$Div(D_p) = D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 4. \tag{6.8}$$

Das duas primeiras parcelas de (4.6) podemos escrever:

$$\begin{aligned} D_p^{(1)}\mathcal{L} &= Xu\left(2yu_t + \frac{1+p}{1-p}u_x + \frac{4p}{1-p}yu_t\right) \\ &\quad + Yu\left(-2xu_t + \frac{1+p}{1-p}u_y - \frac{4p}{1-p}xu_t\right) - \frac{2}{1-p}uf(u) \\ &= \left(\frac{1+p}{1-p}\right)\left[(Xu)^2 + (Yu)^2\right] - \frac{2}{1-p}uf(u). \end{aligned} \tag{6.9}$$

[1] De fato, se $p = 3$, o grupo G_3 assim definido será um subgrupo do grupo de simetrias. Nosso objetivo aqui é mostrar que este subgrupo é um subgrupo cujas simetrias são todas variacionais.

Somando o resultado da equação (6.9) com o produto da equação (6.8) pela Lagrangeana e levando-se em conta que $f(u) = u^p$, obtemos:

$$D_p^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$$

$$= \frac{3-p}{1-p}\left[u_x^2 + u_y^2 + 4(x^2+y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t\right] + \frac{2(3-p)}{p^2-1}u^{p+1},$$

de onde se conclui que D_p é simetria variacional se, e somente se, $p = 3$, encerrando assim a demonstração do Teorema 34. □

6.3.2 As simetrias de divergência

O seguinte teorema caracteriza as demais simetrias da equação de Kohn - Laplace crítica.

Teorema 35. *Simetrias de divergência da equação de Kohn - Laplace crítica*

Toda simetria de Lie da equação semilinear de Kohn - Laplace com expoente crítico

$$\Delta_{H^1}u + u^3 = 0 \tag{6.10}$$

é uma simetria de divergência.

Pelo Teorema de Classificação dos Grupos de Simetrias de Lie da Equação de Kohn - Laplace, o grupo de simetrias da equação (6.10) é formado pelos campos $T,\ R,\ \tilde{X},\ \tilde{Y}$, pela dilatação D_3 e pelas simetrias $V_1,\ V_2$ e V_3. Provamos na seção precedente que as cinco primeiras simetrias são variacionais, e então, por definição, são simetrias de divergência. Resta-nos agora provar o teorema para os três últimos casos: V_1, V_2 e V_3. O objetivo se resume a mostrar que os campos satisfazem a seguinte equação:

$$W^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t)\tau = Div(V), \tag{6.11}$$

onde W denota qualquer uma das simetrias $V_1,\ V_2,\ V_3$ e V é algum campo vetorial dependendo de $x,\ y,\ t,\ u$ e derivadas de u até alguma ordem finita.

Procederemos aqui como no Teorema 34, ou seja, calcularemos as extensões de cada simetria e depois provaremos o teorema para cada uma delas.

Demonstração. 1. Cálculo da extensão da simetria V_1.

Os coeficientes da simetria V_1 são:

$$\xi = tx - x^2y - y^3, \quad \phi = ty + x^3 + xy^2, \quad \tau = t^2 - (x^2+y^2)^2, \quad \eta = -tu,$$

e então

$$
\begin{array}{lll}
D_x\xi = t - 2xy, & D_y\xi = -(x^2+3y^2), & D_t\xi = x,\\
D_x\phi = 3x^2+y^2, & D_y\phi = t+2xy, & D_t\phi = y,\\
D_x\tau = -4x(x^2+y^2), & D_y\tau = -4y(x^2+y^2), & D_t\tau = 2t,\\
D_x\eta = -tu_x, & D_y\eta = -tu_y, & D_t\eta = -tu_t - u.
\end{array}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= 2(xy-t)u_x - (3x^2+y^2)u_y + 4x(x^2+y^2)u_t,\\
\eta_y^{(1)} &= (x^2+3y^2)u_x - 2(t+xy)u_y + 4y(x^2+y^2)u_t, \qquad (6.12)\\
\eta_t^{(1)} &= -u - xu_x - yu_y - 3tu_t,
\end{aligned}
$$

fornecendo-nos o seguinte gerador estendido:

$$
\begin{aligned}
V_1^{(1)} &= V_1 + \left[2(xy-t)u_x - (3x^2+y^2)u_y + 4x(x^2+y^2)u_t\right]\frac{\partial}{\partial u_x}\\
&\quad + \left[(x^2+3y^2)u_x - 2(t+xy)u_y + 4y(x^2+y^2)u_t\right]\frac{\partial}{\partial u_y} \qquad (6.13)\\
&\quad + \left[-u - xu_x - yu_y - 3tu_t\right]\frac{\partial}{\partial u_t}.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 4t. \qquad (6.14)$$

2. Cálculo da extensão da simetria V_2.

   Os coeficientes da simetria V_2 são:

$$\xi = t - 4xy, \quad \phi = 3x^2 - y^2, \quad \tau = -(2yt + 2x^3 + 2xy^2), \quad \eta = 2yu,$$

   logo,

$$
\begin{array}{lll}
D_x\xi = -4y, & D_y\xi = -4x, & D_t\xi = 1,\\
D_x\phi = 6x, & D_y\phi = -2y, & D_t\phi = 0,\\
D_x\tau = -(6x^2+2y^2), & D_y\tau = -(2t+4xy), & D_t\tau = -2y,\\
D_x\eta = 2yu_x, & D_y\eta = 2u + 2yu_y, & D_t\eta = 2yu_t,
\end{array}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= 6yu_x - 6xu_y + (6x^2 + 2y^2)u_t, \\
\eta_y^{(1)} &= 2u + 4xu_x + 4yu_y + 2(t + 2xy)u_t, \qquad (6.15) \\
\eta_t^{(1)} &= -u_x + 4yu_t
\end{aligned}
$$

e

$$
D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = -8y. \qquad (6.16)
$$

Além disso, o gerador estendido neste caso é

$$
\begin{aligned}
V_2^{(1)} &= V_2 + \left[6yu_x - 6xu_y + (6x^2 + 2y^2)u_t\right] \frac{\partial}{\partial u_x} \\
&\quad + (2u + 4xu_x + 4yu_y + 4xyu_t) \frac{\partial}{\partial u_y} \qquad (6.17) \\
&\quad + (-u_x + 4yu_t) \frac{\partial}{\partial u_t}.
\end{aligned}
$$

3. Cálculo da extensão da simetria V_3.

   Os coeficientes da simetria V_3 são:

$$
\xi = x^2 - 3y^2, \quad \phi = t + 4xy, \quad \tau = 2xt - 2x^2y - 2y^3, \quad \eta = -2xu
$$

e então

$$
\begin{array}{lll}
D_x\xi = 2x, & D_y\xi = -6y, & D_t\xi = 0, \\
D_x\phi = 4y, & D_y\phi = 4x, & D_t\phi = 1, \\
D_x\tau = 2t - 4xy, & D_y\tau = -(2x^2 + 6y^2), & D_t\tau = 2x, \\
D_x\eta = -2u - 2xu_x, & D_y\eta = -2xu_y, & D_t\eta = -2xu_t.
\end{array}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= -2u - 4xu_x - 4yu_y - 2(t - 2xy)u_t, \\
\eta_y^{(1)} &= 6yu_x - 6xu_y + 2(x^2 + 3y^2)u_t, \qquad (6.18) \\
\eta_t^{(1)} &= -u_y - 4xu_t,
\end{aligned}
$$

e

$$
D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 8x. \qquad (6.19)
$$

Assim, o gerador extendido encontrado é

$$\begin{aligned} V_3^{(1)} &= V_2 + [-2u - 4xu_x - 4yu_y - 2(t-2xy)u_t]\,\frac{\partial}{\partial u_x} \\ &+ \left[6yu_x - 6xu_y + 2(x^2+3y^2)u_t\right]\frac{\partial}{\partial u_y} \\ &- (u_y + 4xu_t)\,\frac{\partial}{\partial u_t}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

4. Resultados auxiliares.

   Aqui apresentaremos alguns resultados simples que nos auxiliarão nas demonstrações do Teorema 35. Primeiramente, temos o

   Lema 6. *Seja $\mathcal{L}$ a Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + 2(x^2+y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t - F(u).$$

   Em adição às equações listadas em (4.6)*, valem as seguintes:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -2u_tYu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2u_tXu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

   Demonstração. Imediata. □

   Lema 7. *As extensões* (6.12) *são equivalentes a*

$$\begin{aligned} \eta_x^{(1)} &= 2(xy-t)Xu - (3x^2+y^2)Yu + (4ty - 2xy^2 - 2x^3)u_t, \\ \eta_y^{(1)} &= (x^2+3y^2)Xu - 2(t+xy)Yu + (-2x^2y - 2y^3 - 4tx)u_t, \\ \eta_t^{(1)} &= -u - xXu - yYu - 3tu_t. \end{aligned} \tag{6.22}$$

   Demonstração. Por definição, $Xu = u_x + 2yu_t$. Então, isolando u_x, encontramos:

$$u_x = Xu - 2yu_t. \tag{6.23}$$

   Analogamente,

$$u_y = Yu + 2xu_t. \tag{6.24}$$

   Substituindo (6.23) e (6.24) em (6.12), obtemos (6.22). □

Os dois lemas que se seguem são demonstrados de maneira análoga ao Lema 7. Por isso, apresentamos apenas os enunciados.

Lema 8. *As extensões* (6.15) *são equivalentes a*

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= 6yXu - 6xYu - (6x^2 + 10y^2)u_t, \\
\eta_y^{(1)} &= 2u + 4xXu + 4yYu + (2t + 4xy)u_t, \\
\eta_t^{(1)} &= -Xu - 6yu_t.
\end{aligned}$$

Lema 9. *As extensões* (6.18) *são equivalentes a*

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= -2u - 4xXu - 4yYu - (2t - 4xy)u_t, \\
\eta_y^{(1)} &= 6yXu - 6xYu - (10x^2 + 6y^2)u_t, \\
\eta_t^{(1)} &= -Yu - 6yu_t.
\end{aligned}$$

5. Demonstração do Teorema 35 para a simetria V_1.

Primeiramente, defina o operador

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1 := &\left[2(xy - t)u_x - (3x^2 + y^2)u_y + 4x(x^2 + y^2)u_t\right] \frac{\partial}{\partial u_x} \\
&+ \left[(x^2 + 3y^2)u_x - 2(t + xy)u_y + 4y(x^2 + y^2)u_t\right] \frac{\partial}{\partial u_y} \\
&+ \left[-u - xu_x - yu_y - 3tu_t\right] \frac{\partial}{\partial u_t}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 7 e as duas primeiras parcelas da equação (4.6), temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1\mathcal{L} = &-u(2yXu - 2xYu) - 2t(Xu)^2 - 2t(Yu)^2 \\
&-2(yt + xy^2 + x^3)u_tXu + 2(xt - x^2y - y^3)u_tYu.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Pelo Lema 6,

$$V_1\mathcal{L} = 2u_t(yt + xy^2 + x^3)Xu - 2u_t(xt - x^2y - y^3)Yu + tu^4. \tag{6.26}$$

Note agora que, por construção (veja (6.13)),

$$V_1^{(1)} = V_1 + \tilde{V}_1. \tag{6.27}$$

Assim, de (6.11) com $W = V_1$, (6.27), (6.26), (6.25) e (6.14), obtemos

$$V_1^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = 2xuu_y - 2yuu_x - 4(x^2+y^2)uu_t. \tag{6.28}$$

Seja

$$A = (A_1, A_2, A_3) := (-yu^2, xu^2, -2(x^2+y^2)u^2).$$

Tomando a divergência do campo vetorial A é fácil ver que ela é igual ao membro direito de (6.28). Por conseqüência, chegamos à seguinte igualdade:

$$V_1^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = Div(A),$$

que mostra ser V_1 uma simetria de divergência.

6. Demonstração do Teorema 35 para a simetria V_2.

   A demonstração para a simetria V_2 é análoga à feita na subseção precedente. Assim, definindo

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 \quad = \quad & \left[6yu_x - 6xu_y + (6x^2+2y^2)u_t\right]\frac{\partial}{\partial u_x} \\ & + (2u + 4xu_x + 4yu_y + 4xyu_t)\frac{\partial}{\partial u_y} \\ & + (-u_x + 4yu_t)\frac{\partial}{\partial u_t},\end{aligned}$$

   pelo Lema 8 e as duas primeiras parcelas de (4.6), encontramos

$$\tilde{V}_2\mathcal{L} = 4y(Xu)^2 + 4y(Yu)^2 - 2(3x^2-y^2)u_tXu + 2(t-4xy)u_t(Yu) + 2uYu. \tag{6.29}$$

   Aplicando a simetria V_2 à Lagrangeana $\mathcal{L}$, obtemos

$$V_2\mathcal{L} = -2(t-4xy)u_tYu + 2(3x^2-y^2)u_tXu - 2yu^4. \tag{6.30}$$

   É claro que substituindo $W = V_2$ em (6.11) e de (6.30), (6.29), (6.16) e (6.17), obtemos

$$V_2^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = 2xuu_y - 4xuu_t.$$

   Uma verificação direta mostra que o membro direito da equação acima é a divergência do campo $B = (0, u^2, -2xu^2)$.

7. Demonstração do Teorema 35 para a simetria V_3.

   Neste caso, dos Lemas 2 e 4 e das duas primeiras parcelas de (4.6), obtemos

$$\tilde{V}_3\mathcal{L} = -2uXu - 4x(Xu)^2 - 4x(Yu)^2 - 2(t+4xy)u_tXu + 2(x^2-3y^2)u_tYu$$

e

$$V_3\mathcal{L} = -2(x^2 - 3y^2)u_t Y u + 2(t + 4xy)u_t X u + 2xu^4.$$

Assim, pelas equações (6.19) e (6.20) e pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, obtemos

$$V_3^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = -2uu_x - 4yuu_t,$$

que é equivalente a

$$V_3^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = Div(C),$$

onde $C = (-u^2, 0, -2yu^2)$, completando assim a demonstração do teorema.

□

6.4 Simetrias de Noether para o caso homogêneo

Nesta seção mostraremos quais são as simetrias de Noether da equação de Kohn - Laplace homogênea

$$\Delta_{H^1} u = 0. \tag{6.31}$$

O resultado a seguir terá sua demonstração omitida por ser praticamente uma cópia do que foi feito anteriormente, no Lemas 4 e 5.

Lema 10. *A simetria U não é uma simetria de Noether. A simetria W_β é uma simetria de Noether.*

Lema 11. *A simetria*

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

não é uma simetria de Noether.

Demonstração. Neste caso, a Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + 2(x^2 + y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t. \tag{6.32}$$

Como $(\xi, \phi, \tau, \eta) = (x, y, 2t, 0)$, então $(\eta_x, \eta_y, \eta_t) = (u_x, u_y, u_t)$. Logo,

$$Z^{(1)} = Z + u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}. \tag{6.33}$$

Desde que $D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau = 4$, decorre de (6.33) e (6.32) que

$$Z^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau) = 2\mathcal{L}. \tag{6.34}$$

É imediato, pelo Teorema 32, que não existe nenhum campo vetorial cuja divergência seja o membro direito de (6.34).

Teorema 36. *As simetrias*

$$V_1 = (xt - x^2y - y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (yt + x^3 + xy^2)\frac{\partial}{\partial y} + (t^2 - (x^2+y^2)^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_2 = (t - 4xy)\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - (2yt + 2x^3 + 2xy^2)\frac{\partial}{\partial t} + 2yu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_3 = (x^2 - 3y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (t + 4xy)\frac{\partial}{\partial y} + (2xt - 2x^2y - 2y^3)\frac{\partial}{\partial t} - 2xu\frac{\partial}{\partial u},$$

são simetrias de divergência da equação (6.31).

Demonstração. A demonstração é a mesma do Teorema 35. □

Assim, é conseqüência imediata dos Lemas 10, 11 e dos Teoremas 30 e 36 o seguinte:

Teorema 37. *O grupo de simetrias de Noether da equação* (6.31) *é gerado pelo grupo G_f e pelas simetrias V_1, V_2, V_3 e W_β.*

□

Capítulo 7

Leis de conservação da equação semilinear de Kohn - Laplace no grupo de Heisenberg H^1

Neste capítulo faremos uso do Teorema de Noether (Teorema 12) para determinar as leis de conservação associadas às simetrias de Noether, encontradas no capítulo anterior.

Como visto antes, o grupo $G_f = \{T,\ R,\ \tilde{X},\ \tilde{Y}\}$ é um grupo de simetrias variacionais, logo, cada elemento do grupo admite uma lei de conservação.

Pelos resultados do capítulo anterior, o caso geral, exponencial, linear e potência, exceto a crítica, admitem apenas o grupo G_f como grupo de simetrias variacionais. Assim sendo, as respectivas leis de conservação são essencialmente as mesmas, salvo termos dependentes da função

$$f(u) := F'(u).$$

Os casos crítico e $f(u) = 0$ são os casos com o maior número de simetrias. Para $f(u) = u^3$, o grupo de simetrias de Noether coincide com o grupo de simetrias de Lie. Portanto, teremos oito leis de conservação associadas a este caso, o que faz este grupo ser maximal.

Para o caso homogêneo, embora tenhamos também oito leis de conservação[1], este não é um grupo maximal, visto que o número total de simetrias de Lie para este caso é dez.

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira:

- Na Seção 7.1 apresentaremos as leis de conservação associadas à equação

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = 0$$

[1] Novamente cometemos abuso de linguagem, uma vez que este grupo é de dimensão infinita. Embora a subálgebra de dimensão infinita seja uma álgebra cujas simetrias são todas simetrias de Noether, duas das simetrias da subálgebra de dimensão 9 não são simetrias de divergência, o que faz com que este grupo não seja maximal.

para qualquer função $f(u)$. Em particular, as leis de conservação das funções exponencial e potência u^p, com $p \neq 3$, são dadas por essas leis.

- Na Seção 7.2 apresentaremos as leis de conservação associadas à equação de Kohn - Laplace homogênea.

- Na Seção 7.3 apresentaremos as leis de conservação associadas ao caso crítico de Sobolev.

As demonstrações dos teoremas apresentados neste capítulo são obtidas por substituição direta no algoritmo do Teorema de Noether. Este é um trabalho extremamente enfadonho e tedioso. Para encontrá-las fizemos uso de um programa feito no *Mathematica*. Os programas, que na verdade, são as demonstrações dos teoremas, estão nos apêndices da tese.

Os resultados deste capítulo foram apresentados em [26, 50], comunicados em [18, 20, 28] e publicados em [32, 51].

7.1 O caso geral

Nesta sessão mostraremos quais campos vetoriais são conservados através do Teorema de Noether. Nosso objetivo principal aqui é o

Teorema 38. *Leis de conservação para a equação de Kohn - Laplace com $f(u)$ arbitrária*

Seja $\mathbb{R} \ni u \mapsto F(u) \in \mathbb{R}$ uma função diferenciável, arbitrária e

$$f(u) := F'(u). \tag{7.1}$$

As leis de conservação para as simetrias de Noether da equação

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = 0,$$

para qualquer $f(u)$ são:

1. *Para a simetria T, a lei de conservação é $Div(\tau) = 0$, onde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ e*

$$\tau_1 = -2yu_t^2 - u_x u_t,$$

$$\tau_2 = 2xu_t^2 - u_y u_t,$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 - 2(x^2 + y^2)u_t^2 - F(u).$$

2. Para a simetria R, a lei de conservação é $Div(\sigma) = 0$, onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}yu_x^2 + \frac{1}{2}yu_y^2 + 2y(x^2+y^2)u_t^2 + xu_xu_y - yF(u),$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}xu_x^2 - \frac{1}{2}xu_y^2 - 2x(x^2+y^2)u_t^2 - yu_xu_y + xF(u),$$

$$\sigma_3 = -2y^2u_x^2 - 2x^2u_y^2 + 4xyu_xu_y - 4y(x^2+y^2)u_xu_t + 4x(x^2+y^2)u_yu_t.$$

3. Para a simetria $\tilde{X}$, a lei de conservação é $Div(\chi) = 0$, onde $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ e

$$\chi_1 = -\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + 2(x^2+3y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t - F(u),$$

$$\chi_2 = -4xyu_t^2 - u_xu_y + 2xu_xu_t + 2yu_yu_t,$$

$$\chi_3 = -3yu_x^2 - yu_y^2 + 4y(x^2+y^2)u_t^2 + 2xu_xu_y - 4(x^2+y^2)u_xu_t + 2yF(u).$$

4. Para a simetria $\tilde{Y}$, a lei de conservação é $Div(\upsilon) = 0$, onde $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ e

$$\upsilon_1 = -4xyu_t^2 - u_xu_y - 2xu_xu_t - 2yu_yu_t,$$

$$\upsilon_2 = \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2 + 2(3x^2+y^2)u_t^2 + 2yu_xu_t - 2xu_yu_t - F(u),$$

$$\upsilon_3 = xu_x^2 + 3xu_y^2 - 4x(x^2+y^2)u_t^2 - 2yu_xu_y - 4(x^2+y^2)u_yu_t - 2xF(u).$$

Demonstração. Vide apêndices A-D. □

7.2 O caso homogêneo

O objetivo desta seção é apresentar o

Teorema 39. *Leis de conservação para a equação de Kohn - Laplace homogênea*

As leis de conservação para as simetrias de Noether da equação

$$\Delta_{H^1} u = 0$$

são:

1. Para as simetrias T, R, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, as leis de conservação são as mesmas do Teorema 38 com $f(u) = 0$ em (7.1).

2. Para a simetria V_1, a lei de conservação é $Div(A) = 0$, onde $A = (A_1, A_2, A_3)$ e

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{2}(tx - x^2y - y^3)u_x^2 + \frac{1}{2}(tx - x^2y - y^3)u_y^2 + 2t(x^3 + xy^2 - ty)u_t^2 \\
&\quad -(x^3 + xy^2 + ty)u_xu_y - [t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_xu_t - 2t(x^2 + y^2)u_yu_t \\
&\quad -tuu_x - 2tyuu_t + yu^2, \\
A_2 &= \frac{1}{2}(x^3 + ty + xy^2)u_x^2 - \frac{1}{2}(x^3 + ty + xy^2)u_y^2 + 2t(x^2y + y^3 + tx)u_t^2 \\
&\quad -(tx - x^2y - y^3)u_xu_y + 2t(x^2 + y^2)u_xu_t - [t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_yu_t \\
&\quad -tuu_y + 2txuu_t - xu^2, \\
A_3 &= +\frac{1}{2}(t^2 - x^4 - 4txy + 2x^2y^2 + 3y^4)u_x^2 + \frac{1}{2}(t^2 + 3x^4 + 4txy + 2x^2y^2 - y^4)u_y^2 \\
&\quad -2(x^2 + y^2)[t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_t^2 + 2[t(x^2 - y^2) - 2xy(x^2 + y^2)]u_xu_y \\
&\quad -4(x^2 + y^2)(tx - x^2y - y^3)u_xu_t - 4(x^2 + y^2)(x^3 + ty + xy^2)u_yu_t \\
&\quad -2tyuu_x + 2txuu_y - 4t(x^2 + y^2)uu_t + 2(x^2 + y^2)u^2.
\end{aligned}
$$

3. Para a simetria V_2, a lei de conservação é $Div(B) = 0$, onde $B = (B_1, B_2, B_3)$ e

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}(t - 4xy)u_x^2 + \frac{1}{2}(t - 4xy)u_y^2 + [2t(x^2 + 3y^2) - 4xy(x^2 + y^2)]u_t^2 \\
&\quad -(3x^2 - y^2)u_xu_y + 2(x^3 + ty + xy^2)u_xu_t - 2(tx - x^2y - y^3)u_yu_t \\
&\quad +2yuu_x + 4y^2uu_t, \\
B_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - y^2)u_x^2 - \frac{1}{2}(3x^2 - y^2)u_y^2 + 2(x^4 - 2txy - y^4)u_t^2 - (t - 4xy)u_xu_y \\
&\quad +2(tx - x^2y - y^3)u_xu_t + 2(x^3 + ty + xy^2)u_yu_t + 2yuu_y - 4xyuu_t - u^2, \\
B_3 &= (7xy^2 - x^3 - 3ty)u_x^2 + (5x^3 - 3xy^2 - ty)u_y^2 + 4(x^2 + y^2)(x^3 + ty + xy^2)u_t^2 \\
&\quad +2(tx - 7x^2y + y^3)u_xu_y - 4(t - 4xy)(x^2 + y^2)u_xu_t - 4(3x^4 + 2x^2y^2 - y^4)u_yu_t \\
&\quad +2xu^2 + 4y^2uu_x - 4xyuu_y + 8y(x^2 + y^2)uu_t.
\end{aligned}
$$

4. Para a simetria V_3, a lei de conservação é $Div(C) = 0$, onde $C = (C_1, C_2, C_3)$ e

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 3y^2)u_x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 3y^2)u_y^2 + (2x^4 - 8txy - 4y^4)u_t^2 \\
&\quad -(t + 4xy)u_x u_y + (2tx - 2x^2 y + 2y^3)u_x u_t - (2x^3 + 2ty + 2xy^2)u_y u_t \\
&\quad -4xyuu_t - 4xuu_x + u^2, \\
C_2 &= \frac{1}{2}(t + 4xy)u_x^2 - \frac{1}{2}(t + 4xy)u_y^2 + (6tx^2 + 4x^3 y + 4ty^2 + 4xy^3)u_t^2 \\
&\quad -(x^2 + 3y^2)u_x u_y + 2(x^3 + ty + xy^2)u_x u_t - 2(tx - x^2 y - y^3)u_y u_t \\
&\quad 2xu_y u + 4x^2 u_t u, \\
C_3 &= (tx - 3x^2 y + 5y^3)u_x^2 + (3tx + 7x^2 y - y^3)u_y^2 \\
&\quad (-4tx^3 + x^4 y - 4txy^2 + 8x^2 y^3 + y^5)u_t^2 + 2(x^3 - ty - 7xy^2)u_x u_y \\
&\quad -2(2x^4 - 4x^2 y^2 - 6y^4)u_x u_t - 4(x^2 + y^2)(t + 4xy)u_y u_t \\
&\quad -8x^3 uu_t - 8xy^2 uu_t - 4x^2 uu_y - 8xyuu_x + 2yu^2.
\end{aligned}
$$

5. Para a simetria W_β, a lei de conservação é $Div(W) = 0$, onde $W = (W_1, W_2, W_3)$ e

$$
\begin{aligned}
&W_1 = \beta(u_x + 2yu_t) - u(\beta_x + 2y\beta_t), \\
&W_2 = \beta(u_y - 2xu_t) - u(\beta_y - 2x\beta_t), \qquad (7.2) \\
&W_3 = \beta[-2xu_y + 2yu_x + 4(x^2 + y^2)u_t] + 2u[x\beta_y - y\beta_x - 2(x^2 + y^2)\beta_t].
\end{aligned}
$$

Demonstração. Vide apêndices E-H. □

7.3 O caso linear

O resultado dessa seção é o

Teorema 40. *Leis de conservação para a equação de Kohn - Laplace com $f(u) = u$*

As leis de conservação para as simetrias de Noether da equação

$$\Delta_{H^1} u + u = 0,$$

são:

1. *Para as simetrias T, R, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, as leis de conservação são as mesmas do Teorema* 38 *com $f(u) = 0$ em* (7.1).

2. *Para a simetria W_β, a lei de conservação é $Div(W) = 0$, onde W é o mesmo campo vetorial dado em* (7.2).

Demonstração. Vide apêndice I. □

7.4 O caso crítico

Considere a equação semilinear de Kohn - Laplace com não-linearidade do tipo potência com o expoente crítico de Sobolev. As leis de conservação associadas a esta equação são dadas no

Teorema 41. *Leis de conservação da equação de Kohn - Laplace crítica*

Seja $f(u) = u^3$ em (7.1).

1. *Para as simetrias T, R, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, as leis de conservação são as mesmas do Teorema* 38.

2. *Para a simetria D_3, a lei de conservação é $Div(\zeta) = 0$, onde $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ e*

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= -\frac{1}{2}xu_x^2 + \frac{1}{2}xu_y^2 + 2(x^3 - 2ty + xy^2)u_t^2 - yu_xu_y - 2tu_xu_t \\
&\quad -2(x^2 + y^2)u_yu_t - uu_x - 2yuu_t - \frac{1}{4}xu^4, \\
\zeta_2 &= \frac{1}{2}yu_x^2 - \frac{1}{2}yu_y^2 + 2(2tx + x^2y + y^3)u_t^2 - xu_xu_y + 2(x^2 + y^2)u_xu_t \\
&\quad -2tu_yu_t - uu_y + 2xuu_t - \frac{1}{4}yu^4, \\
\zeta_3 &= (t - 2xy)u_x^2 + (t + 2xy)u_y^2 - 4t(x^2 + y^2)u_t^2 + 2(x^2 - y^2)u_xu_y - 4x(x^2 + y^2)u_xu_t \\
&\quad -4y(x^2 + y^2)u_yu_t + 2xuu_y - 2yuu_x - 4(x^2 + y^2)uu_t - \frac{1}{2}tu^4.
\end{aligned}
$$

3. Para a simetria V_1, a lei de conservação é $Div(A) = 0$, onde $A = (A_1, A_2, A_3)$ e

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{2}(tx - x^2y - y^3)u_x^2 + \frac{1}{2}(tx - x^2y - y^3)u_y^2 + 2t(x^3 + xy^2 - ty)u_t^2 \\
&\quad -(x^3 + xy^2 + ty)u_xu_y - [t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_xu_t - 2t(x^2 + y^2)u_yu_t \\
&\quad -tuu_x - 2tyuu_t + yu^2 - \frac{1}{4}(tx - x^2y - y^3)u^4, \\
A_2 &= \frac{1}{2}(x^3 + ty + xy^2)u_x^2 - \frac{1}{2}(x^3 + ty + xy^2)u_y^2 + 2t(x^2y + y^3 + tx)u_t^2 \\
&\quad -(tx - x^2y - y^3)u_xu_y + 2t(x^2 + y^2)u_xu_t - [t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_yu_t \\
&\quad -tuu_y + 2txuu_t - xu^2 - \frac{1}{4}(x^3 + ty + xy^2)u^4, \\
A_3 &= +\frac{1}{2}(t^2 - x^4 - 4txy + 2x^2y^2 + 3y^4)u_x^2 + \frac{1}{2}(t^2 + 3x^4 + 4txy + 2x^2y^2 - y^4)u_y^2 \\
&\quad -2(x^2 + y^2)[t^2 - (x^2 + y^2)^2]u_t^2 + 2[t(x^2 - y^2) - 2xy(x^2 + y^2)]u_xu_y \\
&\quad -4(x^2 + y^2)(tx - x^2y - y^3)u_xu_t - 4(x^2 + y^2)(x^3 + ty + xy^2)u_yu_t \\
&\quad -2tyuu_x + 2txuu_y - 4t(x^2 + y^2)uu_t + 2(x^2 + y^2)u^2 - \frac{1}{4}[t^2 - (x^2 + y^2)^2]u^4.
\end{aligned}
$$

4. Para a simetria V_2, a lei de conservação é $Div(B) = 0$, onde $B = (B_1, B_2, B_3)$ e

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}(t - 4xy)u_x^2 + \frac{1}{2}(t - 4xy)u_y^2 + [2t(x^2 + 3y^2) - 4xy(x^2 + y^2)]u_t^2 \\
&\quad -(3x^2 - y^2)u_xu_y + 2(x^3 + ty + xy^2)u_xu_t - 2(tx - x^2y - y^3)u_yu_t \\
&\quad +2yuu_x + 4y^2uu_t - \frac{1}{4}(t - 4xy)u^4, \\
B_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - y^2)u_x^2 - \frac{1}{2}(3x^2 - y^2)u_y^2 + 2(x^4 - 2txy - y^4)u_t^2 - (t - 4xy)u_xu_y \\
&\quad +2(tx - x^2y - y^3)u_xu_t + 2(x^3 + ty + xy^2)u_yu_t + 2yuu_y - 4xyuu_t - u^2 \\
&\quad -\frac{1}{4}(3x^2 - y^2)u^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_3 &= (7xy^2 - x^3 - 3ty)u_x^2 + (5x^3 - 3xy^2 - ty)u_y^2 + 4(x^2+y^2)(x^3+ty+xy^2)u_t^2 \\
&+2(tx - 7x^2y + y^3)u_xu_y - 4(t-4xy)(x^2+y^2)u_xu_t - 4(3x^4+2x^2y^2-y^4)u_yu_t \\
&+2xu^2 + 4y^2uu_x - 4xyuu_y + 8y(x^2+y^2)uu_t + \frac{1}{2}(x^3+ty+xy^2)u^4.
\end{aligned}
$$

5. Para a simetria V_3, a lei de conservação é $Div(C) = 0$, onde $C = (C_1, C_2, C_3)$ e

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2}(x^2y - tx + y^3)u_x^2 + \frac{1}{2}(tx - x^2y - y^3)u_y^2 + 2t(x^3 - ty + xy^2)u_t^2 \\
&-(x^3+ty+xy^2)u_xu_y - [t^2 - (x^2+y^2)^2]u_xu_t - 2t(x^2+y^2)u_yu_t \\
&-tuu_x - 2tyuu_t - \frac{1}{4}(tx - x^2y - y^3)u^4, \\
C_2 &= \frac{1}{2}(x^3+ty+xy^2)u_x^2 - \frac{1}{2}(x^3+ty+xy^2)u_y^2 + 2t(tx + x^2y + y^3)u_t^2 \\
&-(tx - x^2y - y^3)u_xu_y + 2t(x^2+y^2)u_xu_t - [t^2 - (x^2+y^2)^2]u_yu_t \\
&-u^2 - tuu_y + 2txuu_t - \frac{1}{4}(x^3+ty+xy^2)u^4, \\
C_3 &= \frac{1}{2}(t^2 - x^4 - 4txy + 2x^2y^2 + 3y^4)u_x^2 + \frac{1}{2}(t^2 + 3x^4 + 4txy + 2x^2y^2 - y^4)u_y^2 \\
&-2(x^2+y^2)[t^2 - (x^2+y^2)^2]u_t^2 + 2[t(x^2-y^2) - 2xy(x^2+y^2)]u_xu_y \\
&+4(x^2+y^2)(x^2y - tx + y^3)u_xu_t - 4(x^2+y^2)(x^3+ty+xy^2)u_yu_t \\
&+2txuu_y - 2tyuu_x - 4t(x^2+y^2)uu_t + 2yu^2 - \frac{1}{4}[t^2 - (x^2+y^2)^2]u^4.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Vide apêndices J-M. □

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho aplicamos com sucesso a teoria de simetrias de Lie ao operador subelíptico de Kohn - Laplace, oriundo de um grupo de Lie de curvatura seccional não-constante. Além disso, como o grupo de Heisenberg é um caso especial de grupos de Carnot, o presente trabalho torna-se o primeiro a fazer uma classificação completa dos grupos de simetrias de Lie e de Noether nesse tipo de geometria.

Com a prova da conjectura de Poincaré, as geometrias tridimensionais de Thurston tornaram-se, no momento, um objeto de grande interesse matemático. Assim sendo, para o futuro próximo, pretendemos obter as soluções invariantes da equação de Kohn - Laplace em H^1, iniciar a grupo-análise completa de equações diferenciais parciais semilineares envolvendo o operador de Laplace - Beltrami das geometrias tridimensionais de Thurston ([82]) e também de equações diferencias parciais semilineares envolvendo o operador de Greiner, do qual o operador de Kohn - Laplace é um caso particular.

Para as geometrias bidimensionais, a grupo-análise completa dos três modelos possíveis com curvatura constante - o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ e a esfera S^2 - está praticamente terminada e brevemente será submetida à publicação, [30, 33].

Apêndice A

Lei de conservação da simetria T com $f(u)$ arbitrária

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria T*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \beta]$
$v = u$;
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\verb|^|\{2\} + q\verb|^|\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\verb|^|\{2\} + y\verb|^|\{2\})r\verb|^|\{2\}) - F[v]$;
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria T*)
$\xi = 0$;
$\phi = 0$;
$\tau = 1$;
$\eta = 0$;
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $T^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = 0$;
$\mathrm{A2} = 0$;
$\mathrm{A3} = 0$;
(*Componentes do campo vetorial W*)
$\mathrm{W1} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]]$;
$\mathrm{W2} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]]$;
$\mathrm{W3} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]]$;
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
$\mathrm{B1} = \mathrm{Simplify}[\mathrm{Expand}[\xi L + \mathrm{W1} - \mathrm{A1}]]$;
$\mathrm{B2} = \mathrm{Simplify}[\mathrm{Expand}[\phi L + \mathrm{W2} - \mathrm{A2}]]$;

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{-2y\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{-1\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, $F[v]$]
$\{0\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\{2x\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{-1\}$
Coefficient[B2, $F[v]$]
$\{0\}$
Coefficient[B3, p^{2}]
$\{\frac{1}{2}\}$
Coefficient[B3, q^{2}]
$\{\frac{1}{2}\}$
Coefficient[B3, r^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(-4x^2-4y^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\{0\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\{0\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\{0\}$

Coefficient[B3, *F*[*v*]]

$\{-1\}$

Apêndice B

Lei de conservação da simetria R com $f(u)$ arbitrária

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria R*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \beta]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\}) - F[v];$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}$$er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria R*)
$\xi = y;$
$\phi = -x;$
$\tau = 0;$
$\eta = 0;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $R^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = 0;$
$\mathrm{A2} = 0;$
$\mathrm{A3} = 0;$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand$[\xi L + \mathrm{W1} - \mathrm{A1}]];$
B2 = Simplify[Expand$[\phi L + \mathrm{W2} - \mathrm{A2}]];$

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{-\frac{y}{2}\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{y}{2}\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^2y+4y^3\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{x\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, $F[v]$]
$\{-y\}$
(*Segunda componente*)
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{-\frac{x}{2}\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{x}{2}\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-4x^3-4xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-y\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, $F[v]$]
$\{x\}$
(*Terceira componente*)
Coefficient[B3, p^{2}]
$\{-2y^2\}$
Coefficient[B3, q^{2}]

$\{-2x^2\}$

Coefficient[B3, *r*^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\{4xy\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\{-4y\,(x^2+y^2)\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\{4x\,(x^2+y^2)\}$

Coefficient[B3, *F*[*v*]]

$\{0\}$

Apêndice C

Lei de conservação da simetria $\tilde{X}$ com $f(u)$ arbitrária

```
(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria X̃*)
(*Begining of the program*)
Clear[u, v, x, y, t, p, q, r, L, ξ, φ, τ, η, A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3, β]
v = u;
(*Lagrangeana*)
L = (1/2) * (p^{2} + q^{2} + 4ypr − 4xqr + 4(x^{2} + y^{2})r^{2}) − F[v];
(*Aqui, p:=u_{x}, q:=u_{y}er:=u_{t}*)
(*Coeficientes da Simetria X̃*)
ξ = 1;
φ = 0;
τ = −2y;
η = 0;
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a X̃^(1) + ℒ(D_x ξ + D_y φ + D_t τ)*)
A1 = 0;
A2 = 0;
A3 = 0;
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify[(η − ξp − φq − τr)D[L, p]];
W2 = Simplify[(η − ξp − φq − τr)D[L, q]];
W3 = Simplify[(η − ξp − φq − τr)D[L, r]];
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[φL + W2 − A2]];
```

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^2+12y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{2y\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{-2x\}$
Coefficient[B1, $F[v]$]
$\{-1\}$
(*Segunda componente*)
Coefficient[B2, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\{-4xy\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-1\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{2x\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{2y\}$
Coefficient[B2, $F[v]$]
$\{0\}$
(*Terceira componente*)
Coefficient[B3, p^{2}]
$\{-3y\}$
Coefficient[B3, q^{2}]

$\{-y\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{r}$^{2}]

$\{4x^2y + 4y^3\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{pq}$]

$\{2x\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{pr}$]

$\{2\,(-2x^2 - 2y^2)\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{qr}$]

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{F}$[$\boldsymbol{v}$]]

$\{2y\}$

Apêndice D

Lei de conservação da simetria $\tilde{Y}$ com $f(u)$ arbitrária

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria $\tilde{Y}$*)
(*Begining of the program*)
Clear[$u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta$, A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3, β]
$v = u$;
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\}) - F[v]$;
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}$$er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria $\tilde{Y}$*)
$\xi = 0$;
$\phi = 1$;
$\tau = 2x$;
$\eta = 0$;
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $\tilde{Y}^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
A1 = 0;
A2 = 0;
A3 = 0;
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]$];
W2 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]$];
W3 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]$];
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[ϕL + W2 − A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{-4xy\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{-1\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{-2x\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{-2y\}$
Coefficient[B1, $F[v]$]
$\{0\}$
(*Segunda componente*)
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(12x^2+4y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{2y\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{-2x\}$
Coefficient[B2, $F[v]$]
$\{-1\}$
(*Terceira componente*)
Coefficient[B3, p^{2}]
$\{x\}$
Coefficient[B3, q^{2}]

$\{3x\}$

Coefficient[B3, *r*^{2}]

$\{-4x^3 - 4xy^2\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\{-2y\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\{0\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\{-4x^2 - 4y^2\}$

Coefficient[B3, *F*[*v*]]

$\{-2x\}$

Apêndice E

Lei de conservação da simetria V_1 com $f(u) = 0$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_1*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\char`^\{2\} + q\char`^\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\char`^\{2\} + y\char`^\{2\})r\char`^\{2\});$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_1*)
$\xi = xt - x\char`^\{2\}y - y\char`^\{3\};$
$\phi = yt + x\char`^\{3\} + xy\char`^\{2\};$
$\tau = t\char`^\{2\} - (x\char`^\{2\} + y\char`^\{2\})\char`^\{2\};$
$\eta = -tv;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_1^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = -yv\char`^\{2\};$
$\mathrm{A2} = xv\char`^\{2\};$
$\mathrm{A3} = -2(x\char`^\{2\} + y\char`^\{2\})v\char`^\{2\};$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[ϕL + W2 − A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-tx+x^2y+y^3\right)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(tx-x^2y-y^3\right)\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4tx^3-4t^2y+4txy^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\left\{-ty-x\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, pr]
$\left\{-t^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right\}$
Coefficient[B1, qr]
$\left\{-2t\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{\frac{1}{2}(-2pt-4rty)\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{y\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\{0\}$
(*Segunda componente*)
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(x^3+ty+xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-x^3-ty-xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4t^2x+4tx^2y+4ty^3\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\left\{-tx+y\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, pr]
$\left\{2t\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, qr]
$\left\{-t^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right\}$
Coefficient[B2, v]
$\left\{\frac{1}{2}(-2qt+4rtx)\right\}$

Coefficient[B2, v^{2}]

$\{-x\}$

Coefficient[B2, v^{4}]

$\{0\}$

(*Terceira componente*)

Coefficient[B3, p^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(t^2-x^4-4txy+2x^2y^2+3y^4\right)\right\}$

Coefficient[B3, q^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(t^2+3x^4+4txy+2x^2y^2-y^4\right)\right\}$

Coefficient[B3, r^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(-4t^2x^2+4x^6-4t^2y^2+12x^4y^2+12x^2y^4+4y^6\right)\right\}$

Coefficient[B3, pq]

$\{2\left(t\left(x^2-y^2\right)-2xy\left(x^2+y^2\right)\right)\}$

Coefficient[B3, pr]

$\{4\left(x^2+y^2\right)\left(-tx+x^2y+y^3\right)\}$

Coefficient[B3, qr]

$\left\{2\left(-2ty\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, v]

$\left\{\frac{1}{2}\left(4qtx-8rtx^2-4pty-8rty^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, v^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^2+4y^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, v^{4}]

$\{0\}$

Apêndice F

Lei de conservação da simetria V_2 com $f(u) = 0$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_2*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta,$ A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3$]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\});$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_2*)
$\xi = t - 4xy;$
$\phi = 3x\text{^}\{2\} - y\text{^}\{2\};$
$\tau = -(2yt + 2x\text{^}\{3\} + 2xy\text{^}\{2\});$
$\eta = 2yv;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_2^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
A1 $= 0;$
A2 $= v\text{^}\{2\};$
A3 $= -2xv\text{^}\{2\};$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand$[\xi L +$ W1 $-$ A1]];
B2 = Simplify[Expand$[\phi L +$ W2 $-$ A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}(-t+4xy)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{t}{2}-2xy\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{2tx^2-4x^3y+6ty^2-4xy^3\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{-3x^2+y^2\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{2\left(x^3+ty+xy^2\right)\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{2\left(-tx+x^2y+y^3\right)\}$
Coefficient[B1, v]
$\{2py+4ry^2\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\{0\}$

(*Segunda componente*)
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(3x^2-y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-3x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^4-8txy-4y^4\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-t+4xy\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{-2\left(-tx+x^2y+y^3\right)\}$
Coefficient[B2, qr]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^3+4ty+4xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, v]

$\{2(q-2rx)y\}$

Coefficient[B2, v^{2}]

$\{-1\}$

Coefficient[B2, v^{4}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, p^{2}]

$\{-x^3-3ty+7xy^2\}$

Coefficient[B3, q^{2}]

$\{5x^3-ty-3xy^2\}$

Coefficient[B3, r^{2}]

$\{4x^5+4tx^2y+8x^3y^2+4ty^3+4xy^4\}$

Coefficient[B3, pq]

$\{2\left(tx-7x^2y+y^3\right)\}$

Coefficient[B3, pr]

$\{-4(t-4xy)\left(x^2+y^2\right)\}$

Coefficient[B3, qr]

$\{-12x^4-8x^2y^2+4y^4\}$

Coefficient[B3, v]

$\{-4qxy+8rx^2y+4py^2+8ry^3\}$

Coefficient[B3, v^{2}]

$\{2x\}$

Coefficient[B3, v^{4}]

$\{0\}$

Apêndice G

Lei de conservação da simetria V_3 com $f(u) = 0$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_3*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\hat{}\{2\} + q\hat{}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\hat{}\{2\} + y\hat{}\{2\})r\hat{}\{2\});$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_3*)
$\xi = x\hat{}\{2\} - 3y\hat{}\{2\};$
$\phi = t + 4xy;$
$\tau = 2xt - 2x\hat{}\{2\}y - 2y\hat{}\{3\};$
$\eta = -2xv;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_3^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = -v\hat{}\{2\};$
$\mathrm{A2} = 0;$
$\mathrm{A3} = -2yv\hat{}\{2\};$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand$[\xi L + \mathrm{W1} - \mathrm{A1}]];$
B2 = Simplify[Expand$[\phi L + \mathrm{W2} - \mathrm{A2}]];$

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-x^2+3y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-3y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(4x^4-8txy-4y^4\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{-t-4xy\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{-2tx+2x^2y+2y^3\}$
Coefficient[B1, qr]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-4x^3-4ty-4xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{\frac{1}{2}(-4px-8rxy)\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{1\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}(t+4xy)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}(-t-4xy)\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(12tx^2+8x^3y+4ty^2+8xy^3\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-x^2+3y^2\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{2\left(x^3+ty+xy^2\right)\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{-2\left(tx-y\left(x^2+y^2\right)\right)\}$
Coefficient[B2, v]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-4qx+8rx^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B2, v^{4}]

$\{0\}$

(*Terceira componente*)

Coefficient[B3, p^{2}]

$\{tx - 3x^2y + 5y^3\}$

Coefficient[B3, q^{2}]

$\{3tx + 7x^2y - y^3\}$

Coefficient[B3, r^{2}]

$\{-4tx^3 + 4x^4y - 4txy^2 + 8x^2y^3 + 4y^5\}$

Coefficient[B3, pq]

$\{2\left(x^3 - ty - 7xy^2\right)\}$

Coefficient[B3, pr]

$\{2\left(-2x^4 + 4x^2y^2 + 6y^4\right)\}$

Coefficient[B3, qr]

$\{-4(t + 4xy)\left(x^2 + y^2\right)\}$

Coefficient[B3, v]

$\{4qx^2 - 8rx^3 - 4pxy - 8rxy^2\}$

Coefficient[B3, v^{2}]

$\{2y\}$

Coefficient[B3, v^{4}]

$\{0\}$

Apêndice H

Lei de conservação da simetria W_β com $f(u) = 0$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria W_β*)
(*Begining of the program*)
Clear[$u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta$, A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3, β]
$v = u$;
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\})$;
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria W_β*)
$\xi = 0$;
$\phi = 0$;
$\tau = 0$;
$\eta = \beta[x, y, t]$;
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $W_\beta^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
A1 = $(D[\eta, x] + 2yD[\eta, y])v$;
A2 = $(D[\eta, y] - 2xD[\eta, t])v$;
A3 = $(2yD[\eta, x] - 2x\ D[\eta, y] + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})D[\eta, t])v$;
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]$];
W2 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]$];
W3 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]$];
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[ϕL + W2 − A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{-2y\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]-\beta^{(1,0,0)}[x,y,t]\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, v]
$\left\{2x\beta^{(0,0,1)}[x,y,t]-\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]\right\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B2, v^{4}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, p^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, q^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, r^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, pq]

$\{0\}$

Coefficient[B3, pr]

$\{0\}$

Coefficient[B3, qr]

$\{0\}$

Coefficient[B3, v]

$\left\{2\left(-2\left(x^2+y^2\right)\beta^{(0,0,1)}[x,y,t]+x\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]-y\beta^{(1,0,0)}[x,y,t]\right)\right\}$

Coefficient[B3, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, v^{4}]

$\{0\}$

Apêndice I

Lei de conservação da simetria W_β com $f(u) = u$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria W_β*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta,$ A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3, $\beta]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\}) - v\text{^}\{2\}/2;$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria W_β*)
$\xi = 0;$
$\phi = 0;$
$\tau = 0;$
$\eta = \beta[x, y, t];$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $W_\beta^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
A1 $= (D[\eta, x] + 2yD[\eta, y])v;$
A2 $= (D[\eta, y] - 2xD[\eta, t])v;$
A3 $= (2yD[\eta, x] - 2x\ D[\eta, y] + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})D[\eta, t])v;$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[$\xi L +$ W1 $-$ A1]];
B2 = Simplify[Expand[$\phi L +$ W2 $-$ A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{-2y\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]-\beta^{(1,0,0)}[x,y,t]\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{0\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{0\}$
Coefficient[B2, v]
$\left\{2x\beta^{(0,0,1)}[x,y,t]-\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]\right\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B2, $\boldsymbol{v}$**^{4}]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{p}$**^{2}]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{q}$**^{2}]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{r}$**^{2}]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{pq}$**]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{pr}$**]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{qr}$**]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{v}$**]**

$\left\{2\left(-2\left(x^2+y^2\right)\beta^{(0,0,1)}[x,y,t]+x\beta^{(0,1,0)}[x,y,t]-y\beta^{(1,0,0)}[x,y,t]\right)\right\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{v}$**^{2}]**

$\{0\}$

Coefficient[B3, $\boldsymbol{v}$**^{4}]**

$\{0\}$

Apêndice J

Lei de conservação da simetria D_3 com $f(u) = u^3$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria D_3*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\hat{}\{2\} + q\hat{}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\hat{}\{2\} + y\hat{}\{2\})r\hat{}\{2\}) - v\hat{}\{4\}/4;$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria D_3*)
$\xi = x;$
$\phi = y;$
$\tau = 2t;$
$\eta = -v;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $D_3^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = 0;$
$\mathrm{A2} = 0;$
$\mathrm{A3} = 0;$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
W2 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
W3 = Simplify$[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand$[\xi L + \mathrm{W1} - \mathrm{A1}]];$
B2 = Simplify[Expand$[\phi L + \mathrm{W2} - \mathrm{A2}]];$

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, *p*^{2}]
$\left\{-\frac{x}{2}\right\}$
Coefficient[B1, *q*^{2}]
$\left\{\frac{x}{2}\right\}$
Coefficient[B1, *r*^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8x^3 - 16ty + 8xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, *pq*]
$\{-y\}$
Coefficient[B1, *pr*]
$\{-2t\}$
Coefficient[B1, *qr*]
$\{-2\left(x^2 + y^2\right)\}$
Coefficient[B1, *v*]
$\left\{\frac{1}{4}(-4p - 8ry)\right\}$
Coefficient[B1, *v*^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, *v*^{4}]
$\left\{-\frac{x}{4}\right\}$
Coefficient[B2, *p*^{2}]
$\left\{\frac{y}{2}\right\}$
Coefficient[B2, *q*^{2}]
$\left\{-\frac{y}{2}\right\}$
Coefficient[B2, *r*^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(16tx + 8x^2y + 8y^3\right)\right\}$
Coefficient[B2, *pq*]
$\{-x\}$
Coefficient[B2, *pr*]
$\{2\left(x^2 + y^2\right)\}$
Coefficient[B2, *qr*]
$\{-2t\}$
Coefficient[B2, *v*]
$\left\{\frac{1}{4}(-4q + 8rx)\right\}$
Coefficient[B2, *v*^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B2, v^{4}]

$\left\{-\frac{y}{4}\right\}$

(*Terceira componente*)

Coefficient[B3, p^{2}]

$\{t - 2xy\}$

Coefficient[B3, q^{2}]

$\{t + 2xy\}$

Coefficient[B3, r^{2}]

$\{-4tx^2 - 4ty^2\}$

Coefficient[B3, pq]

$\{-2\left(-x^2 + y^2\right)\}$

Coefficient[B3, pr]

$\{-4x\left(x^2 + y^2\right)\}$

Coefficient[B3, qr]

$\{-4x^2y - 4y^3\}$

Coefficient[B3, v]

$\{2qx - 4rx^2 - 2py - 4ry^2\}$

Coefficient[B3, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B3, v^{4}]

$\left\{-\frac{t}{2}\right\}$

Apêndice K

Lei de conservação da simetria V_1 com $f(u) = u^3$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_1*)
(*Begining of the program*)
Clear$[u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{W1}, \mathrm{W2}, \mathrm{W3}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}]$
$v = u;$
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\text{^}\{2\} + q\text{^}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})r\text{^}\{2\}) - v\text{^}\{4\}/4;$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_1*)
$\xi = xt - x\text{^}\{2\}y - y\text{^}\{3\};$
$\phi = yt + x\text{^}\{3\} + xy\text{^}\{2\};$
$\tau = t\text{^}\{2\} - (x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})\text{^}\{2\};$
$\eta = -tv;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_1^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = -yv\text{^}\{2\};$
$\mathrm{A2} = xu\text{^}\{2\};$
$\mathrm{A3} = -2(x\text{^}\{2\} + y\text{^}\{2\})v\text{^}\{2\};$
(*Componentes do campo vetorial W*)
$\mathrm{W1} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]];$
$\mathrm{W2} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]];$
$\mathrm{W3} = \mathrm{Simplify}[(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]];$
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
$\mathrm{B1} = \mathrm{Simplify}[\mathrm{Expand}[\xi L + \mathrm{W1} - \mathrm{A1}]];$
$\mathrm{B2} = \mathrm{Simplify}[\mathrm{Expand}[\phi L + \mathrm{W2} - \mathrm{A2}]];$

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-tx+x^2y+y^3\right)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(2tx-2x^2y-2y^3\right)\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8tx^3-8t^2y+8txy^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\left\{-ty-x\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, pr]
$\left\{-t^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right\}$
Coefficient[B1, qr]
$\left\{-2t\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{\frac{1}{4}(-4pt-8rty)\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{y\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(-tx+x^2y+y^3\right)\right\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(2x^3+2ty+2xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-x^3-ty-xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8t^2x+8tx^2y+8ty^3\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\left\{-tx+y\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, pr]
$\left\{2t\left(x^2+y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, qr]
$\left\{-t^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right\}$
Coefficient[B2, v]
$\left\{\frac{1}{4}(-4qt+8rtx)\right\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{-x\}$

Coefficient[B2, *v*^{4}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(-x^3-ty-xy^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *p*^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(t^2-x^4-4txy+2x^2y^2+3y^4\right)\right\}$

Coefficient[B3, *q*^{2}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(2t^2+6x^4+8txy+4x^2y^2-2y^4\right)\right\}$

Coefficient[B3, *r*^{2}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(-8t^2x^2+8x^6-8t^2y^2+24x^4y^2+24x^2y^4+8y^6\right)\right\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\left\{2\left(t\left(x^2-y^2\right)-2xy\left(x^2+y^2\right)\right)\right\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\left\{4\left(x^2+y^2\right)\left(-tx+x^2y+y^3\right)\right\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\left\{2\left(-2ty\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *v*]

$\left\{\frac{1}{4}\left(8qtx-16rtx^2-8pty-16rty^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *v*^{2}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(8x^2+8y^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *v*^{4}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(-t^2+x^4+2x^2y^2+y^4\right)\right\}$

Apêndice L

Lei de conservação da simetria V_2 com $f(u) = u^3$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_2*)
(*Begining of the program*)
Clear[$u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta$, A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3]
$v = u$;
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\hat{}\{2\} + q\hat{}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\hat{}\{2\} + y\hat{}\{2\})r\hat{}\{2\}) - v\hat{}\{4\}/4$;
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_2*)
$\xi = t - 4xy$;
$\phi = 3x\hat{}\{2\} - y\hat{}\{2\}$;
$\tau = -(2yt + 2x\hat{}\{3\} + 2xy\hat{}\{2\})$;
$\eta = 2yv$;
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_2^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
A1 $= 0$;
A2 $= v\hat{}\{2\}$;
A3 $= -2xv\hat{}\{2\}$;
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]$];
W2 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]$];
W3 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]$];
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[ϕL + W2 − A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}(-t+4xy)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{t}{2}-2xy\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\{2tx^2-4x^3y+6ty^2-4xy^3\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{-3x^2+y^2\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{2\left(x^3+ty+xy^2\right)\}$
Coefficient[B1, qr]
$\{2\left(-tx+x^2y+y^3\right)\}$
Coefficient[B1, v]
$\{2py+4ry^2\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{0\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\left\{-\frac{t}{4}+xy\right\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(6x^2-2y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(-6x^2+2y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8x^4-16txy-8y^4\right)\right\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-t+4xy\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{-2\left(-tx+x^2y+y^3\right)\}$
Coefficient[B2, qr]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8x^3+8ty+8xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, v]
$\{2(q-2rx)y\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{-1\}$

Coefficient[B2, *v*^{4}]

$\left\{\frac{1}{4}\left(-3x^2+y^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *p*^{2}]

$\{-x^3-3ty+7xy^2\}$

Coefficient[B3, *q*^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(10x^3-2ty-6xy^2\right)\right\}$

Coefficient[B3, *r*^{2}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(8x^5+8tx^2y+16x^3y^2+8ty^3+8xy^4\right)\right\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\{2\left(tx-7x^2y+y^3\right)\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\{-4(t-4xy)\left(x^2+y^2\right)\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\{-4\left(3x^4+2x^2y^2-y^4\right)\}$

Coefficient[B3, *v*]

$\left\{\frac{1}{2}\left(-8qxy+16rx^2y+8py^2+16ry^3\right)\right\}$

Coefficient[B3, *v*^{2}]

$\{2x\}$

Coefficient[B3, *v*^{4}]

$\left\{\frac{1}{2}\left(x^3+ty+xy^2\right)\right\}$

Apêndice M

Lei de conservação da simetria V_3 com $f(u) = u^3$

(*Este programa calcula as leis de conservação da simetria V_3*)
(*Begining of the program*)
Clear[$u, v, x, y, t, p, q, r, L, \xi, \phi, \tau, \eta$, A1, A2, A3, W1, W2, W3, B1, B2, B3]
$v = u$;
(*Lagrangeana*)
$L = (1/2) * (p\hat{}\{2\} + q\hat{}\{2\} + 4ypr - 4xqr + 4(x\hat{}\{2\} + y\hat{}\{2\})r\hat{}\{2\}) - v\hat{}\{4\}/4;$
(*Aqui, p:=u_$\{x\}$, q:=u_$\{y\}er$:=u_$\{t\}$*)
(*Coeficientes da Simetria V_3*)
$\xi = x\hat{}\{2\} - 3y\hat{}\{2\};$
$\phi = t + 4xy;$
$\tau = 2xt - 2x\hat{}\{2\}y - 2y\hat{}\{3\};$
$\eta = -2xv;$
(*Componentes do campo vetorial cuja divergência é igual a $V_3^{(1)} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\phi + D_t\tau)$*)
$\mathrm{A1} = -v\hat{}\{2\};$
$\mathrm{A2} = 0;$
$\mathrm{A3} = -2yv\hat{}\{2\};$
(*Componentes do campo vetorial W*)
W1 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, p]$];
W2 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, q]$];
W3 = Simplify[$(\eta - \xi p - \phi q - \tau r)D[L, r]$];
(*Componentes do campo vetorial que fornece a lei de conservação*)
B1 = Simplify[Expand[ξL + W1 − A1]];
B2 = Simplify[Expand[ϕL + W2 − A2]];

B3 = Simplify[Expand[τL + W3 − A3]];
(*Coeficientes das componentes do campo W*)
(*Primeira componente*)
Coefficient[B1, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}\left(-x^2+3y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, q^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(2x^2-6y^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, r^{2}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(8x^4-16txy-8y^4\right)\right\}$
Coefficient[B1, pq]
$\{-t-4xy\}$
Coefficient[B1, pr]
$\{-2tx+2x^2y+2y^3\}$
Coefficient[B1, qr]
$\left\{\frac{1}{4}\left(-8x^3-8ty-8xy^2\right)\right\}$
Coefficient[B1, v]
$\left\{\frac{1}{4}(-8px-16rxy)\right\}$
Coefficient[B1, v^{2}]
$\{1\}$
Coefficient[B1, v^{4}]
$\left\{\frac{1}{4}\left(-x^2+3y^2\right)\right\}$
Coefficient[B2, p^{2}]
$\left\{\frac{1}{2}(t+4xy)\right\}$
Coefficient[B2, q^{2}]
$\left\{-\frac{t}{2}-2xy\right\}$
Coefficient[B2, r^{2}]
$\{6tx^2+4x^3y+2ty^2+4xy^3\}$
Coefficient[B2, pq]
$\{-x^2+3y^2\}$
Coefficient[B2, pr]
$\{2\left(x^3+ty+xy^2\right)\}$
Coefficient[B2, qr]
$\{-2\left(tx-y\left(x^2+y^2\right)\right)\}$
Coefficient[B2, v]
$\{-2qx+4rx^2\}$
Coefficient[B2, v^{2}]

$\{0\}$

Coefficient[B2, *v*^{4}]

$\left\{-\frac{t}{4} - xy\right\}$

(*Terceira componente*)

Coefficient[B3, *p*^{2}]

$\{tx - 3x^2y + 5y^3\}$

Coefficient[B3, *q*^{2}]

$\{3tx + 7x^2y - y^3\}$

Coefficient[B3, *r*^{2}]

$\{-4tx^3 + 4x^4y - 4txy^2 + 8x^2y^3 + 4y^5\}$

Coefficient[B3, *pq*]

$\{2\left(x^3 - ty - 7xy^2\right)\}$

Coefficient[B3, *pr*]

$\{2\left(-2x^4 + 4x^2y^2 + 6y^4\right)\}$

Coefficient[B3, *qr*]

$\{-4(t + 4xy)\left(x^2 + y^2\right)\}$

Coefficient[B3, *v*]

$\{4qx^2 - 8rx^3 - 4pxy - 8rxy^2\}$

Coefficient[B3, *v*^{2}]

$\{2y\}$

Coefficient[B3, *v*^{4}]

$\left\{-\frac{tx}{2} + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{2}\right\}$

Bibliografia

[1] S. Anco and G. Bluman, Integranting factors and first integrals for ordinary differential equations, Euro. J. Appl. Math., vol. 9, 245–259, (1998).

[2] S. Anco and G. Bluman, Direct construction of conservation laws from fields equations, Phys. Rev. Letters, vol. 78, 2869–2873, (1997).

[3] T. Aubin, *Some Nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer - Verlag, (1998).

[4] R. Beals, Geometry and PDE on the Heisenberg group: a case study, Geometrical study of differential equations, Contemporary Mathematics, 285, Amer. Math. Soc., Providence, 21–27, (2001).

[5] R. Beals and P. Greiner, *Calculus on Heisenberg manifolds*. Annals of Mathematics Studies, n^o 119, Princeton University Press, (1988).

[6] O. V. Besov, A. M. Il'in, V. A. Il'in, L. D. Kudryavtsev, E. Mitidieri, S. M. Nikol'skii, L. V. Ovsyannikov, A. Tesei and L. Veron, Stanislav Ivanovich Pokhozhaev (A tribute in honor of his seventieth birthday), Diff. Equat./Diff. Uravn., vol. 41, 1659–1663, (2005).

[7] S. Biagini, Positive solutions for a semilinear equation on the Heisenberg group, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 9, 883–900, (1995).

[8] I. Birindelli, I. C. Dolcetta and A. Curtì, Indefinite Semi-linear Equations on the Heisenberg Group: A Priori Bounds and Existence, Comm. Part. Diff. Equ., vol. 23 (7-8), 1123–1157, (1998).

[9] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and differential equations*. Applied Mathematical Sciences 81, Springer, (1989).

[10] G.W. Bluman, Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation, J. Math. Anal. Appl. 145, 52–62, (1990).

[11] G. Bluman, Temuerchaolu and S. Anco, New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law, J. Math. Anal. Appl., vol. 322, 233–250, (2005).

[12] G. Bluman and Temuerchaolu, Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations, J. Math. Phys, vol. 46, (2005).

[13] A. Bonfiglioli and F. Uguzzoni, Nonlinear Liouville theorems for some critical problems on H-type groups, J. Func. Annal., 207, 161–215, (2004).

[14] Y. D. Bozhkov, Noether symmetries and critical exponents, SIGMA, vol.1, Paper 022, 12 pp., (2005)(electronic).

[15] Y. D. Bozhkov, Divergence symmetries of semilinear polyharmonic equations involving critical nonlinearities, J. Diff. Equ., 225, 666–684, (2006).

[16] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Group classification of semilinear Kohn-Laplace equations, I Congresso Latino-Americano de Grupos de Lie em Geometria, Imecc - Unicamp, Campinas - SP, (2006).

[17] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Equações de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg, I: cálculo de suas simetrias, XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Imecc - Unicamp, Campinas - SP, (2006).

[18] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Equações de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg, II: Leis de conservação, XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Imecc - Unicamp, Campinas - SP, (2006).

[19] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Classificação do grupo de simetrias da equação semi-linear de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg H1, Foz 2006 - Congresso de Matemática e suas Aplicações, Foz do Iguaçu - PR, (2006).

[20] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Simetrias e leis de conservação da equação semi-linear de Kohn-Laplace com expoente crítico no grupo de Heisenberg H1, Foz 2006 - Congresso de Matemática e suas Aplicações, Foz do Iguaçu - PR, (2006).

[21] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Partial differential equations involving the Kohn - Laplace operator on Heisenberg group: Lie point symmetries, Workshop on Differential Geometry and PDE, UFSM, Santa Maria - RS, (2006).

[22] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Simetrias de Lie de equações semilineares de Kohn - Laplace no grupo de Heisenberg, 64º Seminário Brasileiro de Análise, USP, São Paulo - SP, (2006).

[23] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, Simetrias de Noether de equações de Kohn - Laplace envolvendo expoentes críticos, 64º Seminário Brasileiro de Análise, USP, São Paulo - SP, (2006).

[24] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Group classification of semilinear Kohn-Laplace equations, Quaderni Matematici, nº 570, Università di Trieste, (2006).

[25] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Divergence symmetries of critical Kohn-Laplace equations on Heisenberg groups, Quaderni Matematici, nº 571, Università di Trieste, (2006).

[26] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Conservation laws for critical Kohn-Laplace equations on the Heisenberg group, Relatório de Pesquisa 04/07, Imecc - Unicamp, (2007).

[27] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Divergence symmetries of critical Kohn-Laplace equations on Heisenberg groups, Differ. Equ./Diff. Uravn., (2007) - no prelo.

[28] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Grupo-Análise da equação de Kohn - Laplace, II Encontro Científico dos Pós-Graduandos do IMECC, Imecc - Unicamp, Campinas, (2007).

[29] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Conservation laws for critical Kohn-Laplace equations on the Heisenberg group, 65º Seminário Brasileiro de Análise, UFSJ, São João del Rey - MG, (2007).

[30] Y. D. Bozhkov, I. L. Freire and I. I. Onnis, Group analysis of nonlinear Poisson equations on the hyperbolic plane, 66º Seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, São Paulo - SP, (2007).

[31] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Group classification of semilinear Kohn-Laplace equations, Nonlinear Anal., vol. 68, 2552–2568, (2008).

[32] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Conservation laws for critical Kohn-Laplace equations on the Heisenberg group, J. Nonlinear Math. Phys., vol. 15, 1–13, (2008).

[33] Y. D. Bozhkov, I. L. Freire and I. I. Onnis, Group analysis of nonlinear Poisson equations on two-dimensional Riemannian manifolds of constant curvature, - in preparation, (2008).

[34] Y. D. Bozhkov and A. C. Gilli Martins, On the symmetry group of a differential equation and the Liouville-Gelfand problem, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste XXXIX, 103–120, (2002).

[35] Y. D. Bozhkov and A. C. Gilli Martins, Lie point symmetries and exact solutions of quasilinear differential equations with critical exponents, Nonlinear Anal. 57, 773–793, (2004).

[36] Y. D. Bozhkov and A. C. Gilli Martins, Lie point symmetries of the Lane-Emden system, J. Math. Anal. Appl., 334–344, (2004).

[37] Y. D. Bozhkov and E. Mitidieri, Lie symmetries and criticality of semilinear differential systems, SIGMA, vol. 3, Paper 53, 17 pp., (2007) (electronic).

[38] H. D. Cao and X. P. Zhu, A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, Asian J. Math., 10, 165-492, (2006).

[39] E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace and M. Tarlini, The quantum Heisenberg Group $H(1)_q$, J. Math. Phys., vol. 32, 1155–1158, (1991).

[40] G. Citti, and F. Uguzzoni, Critical semilinear equations on the Heisenberg group: the effect of the topology of the domain, Nonlinear Anal., vol. 46, 399–417, (2001).

[41] A. Cohen, *An introduction to the Lie theory of one-parameter groups*, D. C. Heath and Co., Publishers, (1911).

[42] T. Dlotko, *Short course: Sobolev spaces* . Estas notas estão disponíveis no endereço eletrônico http://www.icmc.sc.usp.br/%7Eandcarva/sobolew.pdf

[43] I. C. Dolcetta and A. Cutrì, On the Liouville property for sub-laplacians, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. 4, 239–256, (1998).

[44] R. F. Egorov, I. G. Bostrem and A. S. Ovchinnikov, The variational symmetries and conservations laws in classical theory of Heisenberg (anti)ferromagnet, Phys. Letters A, vol. 292, 325–334, (2002).

[45] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduates Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, (1991).

[46] C. B. Figueroa, *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg*, Tese de doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (1996).

[47] V. A. Fock, *Princípios de mecânica quântica*, Editora Mir, Moscou, (1986).

[48] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space.* Annals of Mathematics Studies, nº 122, Princeton University Press, (1989).

[49] G. B. Folland, E. M. Stein, Estimatives for the $\overline{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, Commun. Pure Appl. Math., vol. 27, 429–522 (1974).

[50] I. L. Freire, Noether symmetries and conservations laws for non-critical Kohn - Laplace equations on three-dimensional Heisenberg Group, Relatório de Pesquisa 04/07, Imecc - Unicamp, arXiv:0706.1745v1, (2007).

[51] I. L. Freire, Noether symmetries and conservations laws for non-critical semilinear Kohn - Laplace equations on three-dimensional Heisenberg group, Hadronic J., vol. 30, 299–313, (2007).

[52] I. L. Freire, Grupos de Heisenberg: da geometria ao operador de Kohn - Laplace, Relatório de Pesquisa 23/07, Imecc - Unicamp, (2007).

[53] I. L. Freire and A. C. Gilli Martins, Symmetry coefficients of semilinear partial differential equations, Relatório de Pesquisa 03/08, Imecc - Unicamp, (2008).

[54] G. Fubini, Sugli sapazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti, Ann. di Matem. Tomo 8, serie III, 39–82, (1903).

[55] N. Garofalo and E. Lanconelli, Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation, Ann. Inst. Fourier, vol. 40, 313–356, (1990).

[56] N. Garofalo and E. Lanconelli, Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group, Indiana Univ. Math. J., 41, 71–98, (1992).

[57] A. C. Gilli Martins, *Simetrias de Lie e soluções exatas de equações diferenciais quaselineares*, Tese de doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2002).

[58] F. Haas and J. Goedert, Lie symmetries for two-dimensional charged-particle motion, J. Phys. A: Math. Gen., vol. 33, 4661–4677, (2000).

[59] E. Hebey, Variational methods and elliptic equations in Riemannian geometry, Lecture Notes, Workshop on recent trends in nonlinear variational problems, ICTP, Trieste, Italy, (2003).

[60] N. H. Ibragimov, Transformation groups applied to mathematical physics, Translated from the Russian Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, (1985).

[61] A. Kara and F. Mahomed, Relationship between symmetries and conservations laws, Int. J. Theor. Phys., vol. 39, 23–40, (2000).

[62] P. Kosinski, P. Maslanka and K. Przanowski, Differential calculus on the quantum Heisenberg Group, J. Phys. A: Math. Gen., vol. 29, 5693–5698, (1996).

[63] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, Non-existence results for semilinear Kohn-Laplace equations in unbounded domains, Comm. Part. Diff. Equ., vol. 25, 1703–1740, (2000).

[64] L. P. Rothschild and E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math., vol. 137, 247–320, (1976).

[65] S. Maad, Infinitely many solutions of a semilinear problem for the Heisenberg Laplacian on the Heisenberg group, Manuscripta Math., vol. 116, 357–384, (2005).

[66] L. A. B. S. Martin, *Álgebras de lie*, Editora da Unicamp, Campinas, (1999)

[67] A. S. Martins, Simetrias e leis de conservação na Mecânica Clássica, Rev. Bras. Ens. Fis., vol. 21, 33–39, (1999).

[68] F. Mercuri, S. Montaldo and P. Piu, A Weierstrass representation formula for minimal surfaces in H_3 and $H^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. Sin., vol. 26, 1603–1612, (2005).

[69] E. Mitidieri, Comunicação particular a Yuri Bozhkov, junho de (2003).

[70] Y. Ni, Geodesics in manifold with Heisenberg group as a boundary, Canad. J. Math., vol. 56, 566–589, (2004).

[71] Y. Ni, The heat kernel and Green's function on a manifold with Heisenberg group as boundary, Canad. J. Math., vol. 56, 590–611, (2004).

[72] E. Noether, Invariante variationsprobleme, Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., n° 2, 235–257 (1918). (English translation in: Transport Theory and Statistical Physics 1(3), 1971, 186-207.)

[73] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations.* GMT 107, Springer, New York, (1986).

[74] I. I. Onnis, *Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais*, Tese de doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2005).

[75] S. I. Pohozaev and L. Veron, Nonexistence results of solutions of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group, Manuscripta Math. vol. 102, 85–99, (2000).

[76] J. M. Page, *Ordinary differential equations.* Macmillan and Co., Limited, New York, (1897).

[77] M. A. Rieffel, Deformation quantization of Heisenberg manifolds, Commun. Math. Phys., vol. 122, 531–562, (1989).

[78] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry and mechanics*, Applied Mathematical Sciences, Springer - Verlag, New York, (1986).

[79] S. Semmes, An introduction to Heisenberg groups in analysis and geometry, Notices of the American Mathematical Society, vol. 50, 640–646, (2003).

[80] S. R. Svirshchevskii, Group classification and invariant solutions of nonlinear polyharmonic equations, Differ. Equ./Diff. Uravn., vol. 29, 1538–1547, (1993).

[81] C. C. Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum mechanics*, Wiley - Interscience publications, (1977).

[82] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Vol. 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1997).

[83] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland publishing Co., (1955).

Índice