



CECÍLIA PEREIRA DE ANDRADE

**SOBRE NOVOS RESULTADOS NA TEORIA DAS
PARTIÇÕES**

CAMPINAS

2013



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Cecília Pereira de Andrade

Sobre novos resultados na teoria das partições

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática aplicada.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA CECÍLIA PEREIRA DE ANDRADE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, which appears to read "José Plínio de Oliveira Santos", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

Campinas

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

An24s Andrade, Cecília Pereira de, 1983-
Sobre novos resultados na teoria das partições / Cecília Pereira de Andrade. –
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Análise combinatória. 3. Teoria dos números. I.
Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On new results in the theory of partitions

Palavras-chave em inglês:

Partitions (Mathematics)

Combinatorial analysis

Number theory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Robson da Silva

Sueli Irene Rodrigues Costa

Marcelo Firer

Data de defesa: 11-12-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 11 de dezembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof(a). Dr(a). MARCELO FIRER



Prof(a). Dr(a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE



Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

ABSTRACT

This work was based on a new way to represent combinatorially the coefficients of several important series by two-line array. The results presented in this work were obtained by the use of this new representation. We describe interpretations of unrestricted partitions and the corresponding bijection between the two respective sets. We also obtain some results for Mock Theta Functions and relate some distinct Mock Theta Functions.

Resumo

Este trabalho foi baseado em uma nova maneira de representar, combinatoriamente, os coeficientes de várias importantes séries por meio de matrizes de duas linhas. Os resultados que apresentamos neste trabalho foram obtidos por meio do uso desta nova representação. Descrevemos interpretações para partições irrestritas e a correspondente bijeção entre os dois respectivos conjuntos. Também obtemos resultados para algumas Mock Theta Functions e relacionamos algumas Mock Theta Functions distintas.

SUMÁRIO

Abstract	vii
Agradecimentos	xi
Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Partições Irrestritas	5
2.1 Primeira Caracterização	5
2.2 Segunda Caracterização	20
3 Mock Theta Functions	37
3.1 Mock Theta Function $\psi(q)$	37
3.2 Mock Theta Function $\chi(q)$	41
3.3 Mock Theta Function $q\omega(q)$	44
3.3.1 Conjecturas	49
3.4 Mock Theta Function $\nu(q)$	52
3.4.1 Conjectura	57
3.5 Mock Theta Function $f_0(q)$	57
3.6 Mock Theta Function $f_1(q)$	68

3.6.1	Conjectura	73
3.7	Mock Theta Function $\gamma(q)$	73
3.8	Mock Theta Function $S_0(q)$	76
3.8.1	Conjectura	78
3.9	Mock Theta Function $S_1(q)$	79
3.10	Mock Theta Function $f(q)$	82
3.11	Mock Theta Function $\Phi(q)$	87
3.12	Mock Theta Function $\rho(q)$	89
3.12.1	Conjectura	93
3.13	Mock Theta Function $\sigma(q)$	93
3.13.1	Conjectura	96
3.14	Mock Theta Function $U_0(q)$	96
3.15	Mock Theta Function $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$	98
3.16	Mock Theta Function $\phi(q)$	101
3.16.1	Conjecturas	106
Considerações Finais		109
Referências		112

AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Deus por me dar forças e me permitir correr atrás dos meus sonhos.

Aos meus pais, Nereu e Maria Eni, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todos os momentos. Amo muito vocês.

À toda minha família, por mesmo de longe, sempre estarem presentes e torcendo por mim.

Ao meu orientador Plínio, por todo o suporte para que este trabalho chegasse ao fim.

Aos professores Aurélio, Laécio e Moretti, pela amizade e acima de tudo, pelo apoio em todos os momentos em que precisei.

Às minhas amigas e colaboradoras, Elen e Kênia, pela amizade e colaboração neste trabalho.

Aos meus amigos, Chris e Bruno, pela amizade e apoio sempre. Vocês me ajudaram muito a chegar até aqui.

Aos meus amigos e colegas do lab. Em algum momento, cada um de vocês contribuíram para que eu conseguisse chegar ao fim, seja com uma ideia, um sorriso ou um abraço, tem um pouquinho de cada um de vocês aqui.

Aos meus amigos, que mesmo eu não estando presente, não desistiram da nossa amizade.

À CAPES e CNPQ, pelo auxílio financeiro.

INTRODUÇÃO

Em [8], Santos et al introduziu uma nova maneira de representar, combinatoriamente, os coeficientes de várias importantes séries por meio de conjuntos compostos por certas combinações lineares de dois parâmetros. Posteriormente verificou-se que os elementos destes conjuntos poderiam ser vistos como matrizes de duas linhas. Interessantes aplicações desta nova forma de representação foram obtidas em [5], [6] e [7].

Os resultados que apresentamos neste trabalho foram obtidos por meio do uso desta nova representação.

No primeiro capítulo estão algumas definições e resultados conhecidos que serão usados ao longo do texto. No Capítulo 2 descrevemos uma interpretação para partições irrestritas dada em [8] e a correspondente bijeção entre os dois respectivos conjuntos. No último capítulo, obtemos resultados para algumas Mock Theta Functions, por um processo semelhante ao utilizado no Capítulo 2, e também relacionamos algumas Mock Theta Functions distintas.

PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do texto.

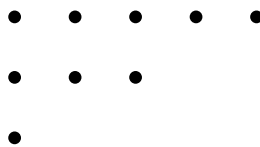
Definição 1.0.1. *Uma partição de um inteiro positivo n [3] é uma sequência não-crescente de inteiros positivos $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Os termos λ_i são chamados partes da partição. A função partição $p(n)$ é o número de partições de n .*

Exemplo 1.0.1. $p(4) = 5$ já que existem cinco partições do número quatro:

4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1 e 1 + 1 + 1 + 1.

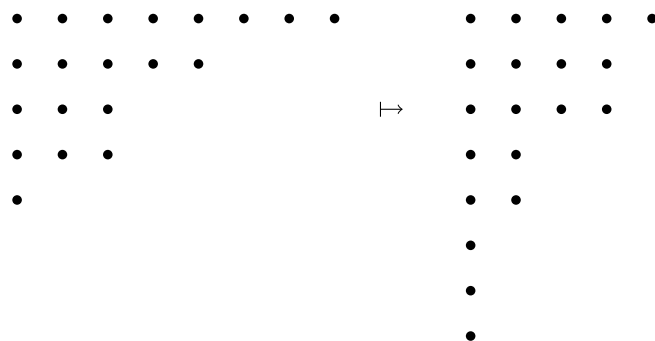
O gráfico de Ferrers é um modo de representar uma partição graficamente. As partes da partição são mostradas como linhas de pontos, sempre alinhados a esquerda. Muitos fatos interessantes são melhores explicados graficamente.

Exemplo 1.0.2. *Seja $5 + 3 + 1$ uma partição de $n = 9$. Vamos representar esta partição graficamente. Utilizando o gráfico de Ferrers, temos:*



Dada uma partição qualquer, podemos obter uma nova partição trocando as linhas com as colunas, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna, se transforma em linha. Esta operação é chamada *conjugação* e as partições são ditas conjugadas.

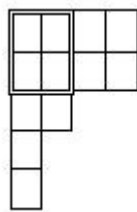
Exemplo 1.0.3. *Considere a partição $8 + 5 + 3 + 3 + 1$. Usando os gráficos de Ferrers, temos que sua partição conjugada é $5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$.*



Definição 1.0.2. *Uma dada partição tem um quadrado de Durfee de lado s se a s -ésima parte é $\geq s$ mas a $(s + 1)$ -ésima parte é $< s$.*

Em outras palavras, chamamos quadrado de Durfee da partição ao maior quadrado possível dentro do gráfico de Ferrers e encaixado no seu canto superior esquerdo.

Exemplo 1.0.4. *A partição $4 + 4 + 2 + 1 + 1$ tem um quadrado de Durfee de lado 2.*



A função geradora para partições irrestritas, [2], é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^k} \right).$$

PARTIÇÕES IRRESTRITAS

Em Santos et al, [8], foram dadas três interpretações para partições irrestritas, através de uma matriz constituída por duas linhas, satisfazendo determinadas restrições. Usando duas destas representações, descrevemos uma nova classe de matrizes e utilizando esta nova estatística, foi possível conjecturar e demonstrar alguns resultados.

2.1 Primeira Caracterização

Teorema 2.1.1. *O número de partições irrestritas de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned} c_s &= 0, \quad d_s \neq 0, \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Existem 3 conjuntos diferentes de restrições que caracterizam partições irrestritas. Uma bijeção entre as matrizes que satisfazem o primeiro conjunto de restrições é dada em Brietzke et al [5]. Mostraremos esta bijeção em um exemplo.

Primeira Bijeção: O número k de colunas da matriz corresponde ao número de partes da partição.

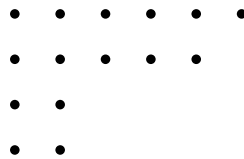
Considere a partição $\lambda = 6 + 5 + 2 + 2$ de 15. Vamos associar a λ uma matriz A , 2×4 , da forma dada no Teorema (2.1.1) de tal modo que a soma das entradas em cada coluna de A sejam as partes de λ . Não temos escolha para a quarta coluna, a não ser escolher $c_4 = 0$ e $d_4 = 2$. Como c_3 deve ser 2 e a soma da terceira coluna deve ser 2, devemos ter $d_3 = 0$. Pelo mesmo argumento, devemos ter $c_2 = 2$ e $d_2 = 3$. Também, $c_1 = 5$ e $d_1 = 1$. A representação é, portanto,

$$\lambda = 6 + 5 + 2 + 2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

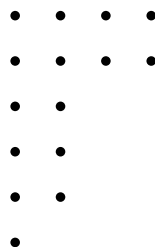
Para ir da matriz para a partição, temos somente que somar as entradas em cada coluna.

Essa representação tem a interessante propriedade de, não só representar a partição dada, como também descrever sua conjugada na segunda linha. No exemplo, a segunda linha $(1, 3, 0, 2)$ indica que λ' contém uma parte 1, três partes 2, nenhuma parte 3 e duas partes 4.

Vejamos isto usando os gráficos de Ferrers. O gráfico de $\lambda = 6 + 5 + 2 + 2$ é:



Conjugando, temos $\lambda' = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1$:



Observe que o número de partes iguais a 1 na partição conjugada é a diferença entre o número de pontos das duas primeiras colunas, que corresponde à diferença entre as duas primeiras partes na partição original. Vamos olhar para a matriz (2.1) e as restrições (2.2), com $s = 4$.

Para $t = 1$, temos $c_1 = c_2 + d_2$ e então:

$$(c_1 + d_1) - (c_2 + d_2) = c_2 + d_2 + d_1 - c_2 - d_2 = d_1.$$

O número de partes iguais a 2 na partição conjugada é a diferença entre o número de pontos das segunda e terceira colunas da partição conjugada, que corresponde à diferença entre a segunda e terceira partes da partição original, ou seja, para $t = 2$ em (2.2), temos $c_2 = c_3 + d_3$ e então:

$$(c_2 + d_2) - (c_3 + d_3) = c_3 + d_3 + d_2 - c_3 - d_3 = d_2.$$

O número de partes iguais a 3 na partição conjugada é a diferença entre o número de pontos das terceira e quarta colunas da partição conjugada, que corresponde à diferença entre a terceira e quarta partes da partição original, ou seja, para $t = 3$ em (2.2), temos $c_3 = c_4 + d_4$ e então:

$$(c_3 + d_3) - (c_4 + d_4) = c_4 + d_4 + d_3 - c_4 - d_4 = d_3.$$

Por fim, o número de partes iguais a 4 na partição conjugada é a quarta coluna da partição conjugada, que é a última linha da partição original, igual a d_4 .

Baseado nas observações acima, é possível perceber que a segunda linha nos informa que a partição conjugada possui 1 parte igual a 1, três partes iguais a 2 nenhuma parte igual a 3 e 2 partes iguais a 4, ou seja, a partição conjugada de λ é

$$\lambda' = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1.$$

De modo geral, d_1 é o número de partes iguais a 1 na partição conjugada, d_2 é o número de partes iguais a 2 e assim por diante.

Para cada matriz do tipo (2.1) vamos associar uma outra matriz (2×1) que será formada somando-se as linhas da matriz. Calculamos todas as matrizes de um dado n , somamos as linhas de tais matrizes, contamos o número de matrizes segundo a soma na segunda linha e colocamos em uma tabela, obedecendo a ordem crescente na segunda linha, da direita para a esquerda. Para fazer isso, utilizamos o software Matlab R2012b. E depois, utilizamos o software Maple 15 para conferência dos resultados.

Por exemplo, para $n = 5$ temos as seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vamos contar estas matrizes de acordo com a soma na segunda linha. Temos 1 matriz com soma igual a 1 na segunda linha, 2 matrizes com soma igual a 2, 2 matriz com soma igual a 3, 1 matriz com soma igual a 4 e 1 matriz com soma igual a 5. Fazendo isto para cada n , organizamos os valores obedecendo a ordem crescente da soma na segunda linha e alinhando da direita para a esquerda obtemos a seguinte tabela.

Sheet1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
1	1																															
2	1	1																														
3	1	1	1																													
4	1	1	1	1																												
5	1	1	1	1	1																											
6	1	1	1	1	1	1																										
7	1	1	1	1	1	1	1																									
8	1	1	1	1	1	1	1	1																								
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1																							
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																						
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																					
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																				
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																			
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																		
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1														
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1													
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1												
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1											
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1									
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Figura 2.1: Tabela para partições irrestritas - 1ª caracterização.

Notação: Usaremos a notação $\left\{ \begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix} \right\}$ para representar matrizes cuja soma na primeira linha é igual a j e a soma na segunda linha é igual a $n-j$. E, $\# \left\{ \begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix} \right\}$ para representar a cardinalidade de tais matrizes.

Devido ao fato de que a segunda linha da matriz em (2.1) descreve a partição conjugada associada, temos que o número que aparece na segunda linha de $\left\{ \begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix} \right\}$ após a soma é exatamente o número de partes da partição conjugada $(d_1 + d_2 + \dots + d_s)$.

Por exemplo, olhando na linha 5, da esquerda para a direita, temos:

- 1, que é o número de partições de 5 em exatamente 5 partes.
- 1, que é o número de partições de 5 em exatamente 4 partes.
- 2, que é o número de partições de 5 em exatamente 3 partes.
- 2, que é o número de partições de 5 em exatamente 2 partes.
- 1, que é o número de partições de 5 em exatamente 1 partes.

Notação: Chamaremos $p(n, k)$ o número de partições de n em exatamente k partes.

Ao construir a tabela, observamos que até certo ponto na linha, da esquerda para a direita, os números vão se repetindo de acordo com o que estava na linha anterior e a cada duas linhas aumenta um valor à sequência (valores em vermelho), que é a sequência do número de partições irrestritas de n :

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, \dots$$

Olhando para a linha 10 e coluna 5 (observe que as colunas são numeradas a partir de 0) temos, da direita para a esquerda, $p(10, 5) = 7$. Olhando da esquerda para a direita este número é $p(5) = 7$. Na linha 14, coluna 7, temos por um lado $p(14, 7) = 15$ e por outro lado, temos $p(7) = 15$. Baseado nestas observações a tabela nos sugere que para todo $n \geq 1$, $p(2n, n) = p(n)$.

Exemplo 2.1.1. Considere $n = 5$. Queremos verificar que $p(10, 5) = p(5)$.

Tome as partições de 5 e para chegar nas partições de 10, fazemos uma operação de soma no seguinte sentido: adicionaremos a partição composta de 5 partes iguais a 1, alinhando as partes à esquerda e somando parte a parte. Logo, teremos:

$$(5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 6 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$(4 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5 + 2 + 1 + 1 + 1,$$

$$(3 + 2) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 4 + 3 + 1 + 1 + 1$$

$$(3 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 4 + 2 + 2 + 1 + 1,$$

$$(2 + 2 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1,$$

$$(2 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 + 2 + 2 + 2 + 1,$$

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2,$$

que são todas as partições de 10 com exatamente 5 partes.

Reciprocamente, dada uma partição de 10 em cinco partes, basta subtrair 1 de cada parte, de modo análogo ao feito para a soma, para chegarmos a uma partição de 5.

$$6 + 1 + 1 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5,$$

$$5 + 2 + 1 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 4 + 1,$$

$$4 + 3 + 1 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 + 2,$$

$$4 + 2 + 2 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 + 1 + 1,$$

$$3 + 3 + 2 + 1 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 2 + 2 + 1,$$

$$3 + 2 + 2 + 2 + 1 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 2 + 1 + 1 + 1,$$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Mostramos no próximo teorema que este fato, embora simples, observado neste início da tabela, na realidade ocorre sempre.

Teorema 2.1.2. Para todo $n \geq 1$, $p(2n, n) = p(n)$.

Demonstração. Dada uma partição de $2n$, em exatamente n partes, subtraímos 1 de cada parte, conforme feito no exemplo anterior. Então, obtemos uma partição de n .

Inversamente, dada uma partição de n , somamos a partição constituída de n partes iguais a 1, como no exemplo, obtendo uma partição de $2n$ em exatamente n partes. \square

Olhando para a coluna 7 da tabela, vemos que a partir da linha 14, os valores continuam iguais. E isto se repete para cada coluna, para todos os valores que satisfazem a sequência do número de

partições irrestritas. Dado que estamos no ponto $(2n, n)$, percorrer esta coluna significa computar os valores $p(2n + i, n + i)$, para $i \geq 0$. Como foi observado que o valor da coluna se mantém inalterado, a tabela nos sugere que $p(2n + i, n + i) = p(n)$.

Veja por exemplo a linha 14, coluna 7, se descermos nessa coluna teremos:

$$p(14, 7) = p(15, 8) = p(16, 9) = p(17, 10) = \dots = 15.$$

Isto vale em geral, como mostramos no próximo teorema.

Teorema 2.1.3. *Para todo $n \geq 1$ e $i \geq 0$, $p(2n + i, n + i) = p(n)$.*

Demonstração. Dada uma partição de $2n + i$, em exatamente $n + i$ partes, subtraímos a partição composta por $n + i$ partes iguais a 1, como foi feito no Exemplo (2.1.1). Então, obtemos uma partição de n .

Inversamente, dada uma partição de n , somamos a partição constituída de $n + i$ partes iguais a 1, como feito no Exemplo (2.1.1), obtendo uma partição de $2n + i$ em exatamente $n + i$ partes. \square

A partir do ponto em que, na linha, a sequência para de representar o número de partições irrestritas de n , é possível observar outra relação. Olhando para a linha 16 e coluna 10, temos $p(16, 6) = 35$. Se olharmos para a linha 15 e coluna 10, temos $p(15, 5) = 30$. Fazendo a diferença, obtemos $p(16, 6) - p(15, 5) = 35 - 30 = 5$, que é o valor de $p(4)$. Olhando na linha 18, coluna 11, temos $p(18, 7) = 49$. Se olharmos para a linha 17, coluna 11, temos $p(17, 6) = 44$. Fazendo a diferença, obtemos $p(18, 7) - p(17, 6) = 49 - 44 = 5$, que é o valor de $p(4)$. Observações como estas nos levaram ao resultado provado no teorema seguinte.

Teorema 2.1.4. *Para todo $n \geq k$, $p(k + 2n, n) - p(k + 2n - 1, n - 1) = p(k)$.*

Demonstração. Vamos considerar a equação $p(k + 2n, n) = p(k + 2n - 1, n - 1) + p(k)$.

Dadas as partições de $k + 2n - 1$ em exatamente $n - 1$ partes, ao acrescentarmos uma parte igual a 1, escrevemos todas as partições de $k + 2n$, com n partes, sendo que a partição possui menor parte igual a 1. Ficam faltando as partições de $k + 2n$ com n partes que não têm parte 1. Para isto, basta tomar todas as partições de k e somar a partição $2 + 2 + \dots + 2$, em que o número de partes iguais a 2 é igual a n , cuja soma seja menor do que $k + 2n$. Assim, teremos todas as partições de $k + 2n$ que não possuem parte 1, o que conclui a primeira parte.

Reciprocamente, dadas as partições de $k + 2n$ que possuem parte igual a 1, retiramos esta parte e teremos as partições de $k + 2n - 1$ em exatamente $n - 1$ partes. As partições que não possuem parte igual a 1, retiramos a partição $2 + 2 + \dots + 2$, sendo que o número de partes iguais a 2 é o maior possível que seja menor do que $k + 2n$ e portanto obteremos $p(k)$. \square

Exemplo 2.1.2. Tomando $n = 4$ e $k = 3$, teremos a relação $p(11, 4) = p(10, 3) + p(3)$.

Dadas as partições de 10 em exatamente 3 partes, vamos acrescentar uma parte igual a 1 e teremos as partições de 11 em 4 partes, com uma parte igual a 1.

$$8 + 1 + 1 + 1 = (8 + 1 + 1) + 1$$

$$7 + 2 + 1 + 1 = (7 + 2 + 1) + 1$$

$$6 + 3 + 1 + 1 = (6 + 3 + 1) + 1.$$

$$5 + 4 + 1 + 1 = (5 + 4 + 1) + 1.$$

$$6 + 2 + 2 + 1 = (6 + 2 + 2) + 1.$$

$$5 + 3 + 2 + 1 = (5 + 3 + 2) + 1.$$

$$4 + 4 + 2 + 1 = (4 + 4 + 2) + 1.$$

$$4 + 3 + 3 + 1 = (4 + 3 + 3) + 1.$$

Ficam faltando as partições de 11 em exatamente 4 partes que não possuem parte igual a 1.

Para obtê-las, vamos somar $2 + 2 + 2 + 2$ à todas as partições de 3.

$$5 + 2 + 2 + 2 = 3 + (2 + 2 + 2 + 2)$$

$$4 + 3 + 2 + 2 = (2 + 1) + (2 + 2 + 2 + 2)$$

$$3 + 3 + 3 + 2 = (1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 2 + 2) .$$

Inversamente, dadas as partições de 11 em exatamente 4 partes, primeiramente olhamos as que possuem parte igual a 1. Destas, subtraímos uma parte igual a 1, obtendo as partições de 10 em exatamente 3 partes.

$$8 + 1 + 1 = (8 + 1 + 1 + 1) - 1$$

$$7 + 2 + 1 = 7 + 2 + 1 + 1 - 1$$

$$6 + 3 + 1 = 6 + 3 + 1 + 1 - 1.$$

$$5 + 4 + 1 = 5 + 4 + 1 + 1 - 1.$$

$$6 + 2 + 2 = 6 + 2 + 2 + 1 - 1.$$

$$5 + 3 + 2 = 5 + 3 + 2 + 1 - 1.$$

$$4 + 4 + 2 = 4 + 4 + 2 + 1 - 1.$$

$$4 + 3 + 3 = 4 + 3 + 3 + 1 - 1.$$

Agora, das partições que não possuem parte igual a 1, subtraímos $2+2+2+2$ de cada partição, obtendo as partições de 3.

$$3 = 5 + 3 + 2 + 2 - (2 + 2 + 2 + 2)$$

$$2 + 1 = 4 + 3 + 2 + 2 - (2 + 2 + 2 + 2)$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 3 + 3 + 2 - (2 + 2 + 2 + 2) .$$

Continuando a observar a tabela, percebemos outro padrão. Olhando para a linha 8 e coluna 4, temos o número $p(8, 4) = 5$. Na linha 5 e coluna 4 temos o número $p(5, 1) = 1$. Ao computar a diferença $p(8, 4) - p(5, 1) = 5 - 1 = 4$, que pode ser escrito como $p(0) + p(1) + p(2)$. Agora, olhando para a linha 12 e coluna 6, temos o número $p(12, 6) = 11$. Na linha 8 e coluna 6 temos o número $p(8, 2) = 4$. Ao computar a diferença $p(12, 6) - p(8, 2) = 11 - 4 = 7$, que pode ser escrito como $p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$. Continuando a fazer diferenças assim, conseguimos conjecturar e demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.1.5. *Para todo $n \geq 1$, temos que*

$$p(2n, n) - p(2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p(i).$$

Demonstração. Vamos mostrar que

$$p(2n, n) = p(2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p(i).$$

Olhando para o lado direito da igualdade, na primeira parcela, considere as partições de $2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ em $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ partes. Acrescentando $n - (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ partes iguais a 1 obtemos uma partição de $2n$ em n partes.

Na segunda parcela da soma, considere as partições de i , com $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Para cada i , vamos associá-las às partições de $2n$ com exatamente i partes iguais a 1, acrescentando $2n - i = n + r$, $r \leq n$, parcelas iguais a 1, de forma que teremos uma linha com n parcelas iguais a 1 e uma linha com r parcelas iguais a 1. A operação será da seguinte forma: a primeira linha será formada pela partição dada. A próxima linha será formada por n parcelas iguais a 1 e a última linha será composta de r parcelas iguais a 1. Alinhamos as linhas à esquerda e somamos coluna a coluna.

Observe que $n - r = i$, que pela operação descrita garante i partes iguais a 1.

Exemplo 2.1.3. Para $n = 6$ temos, para a primeira parcela, as partições de 8 em 2 partes, que serão associadas às partições de 12 em exatamente 6 partes, acrescentando 4 partes iguais a 1. Ou seja:

$$7 + 1 \leftrightarrow 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$6 + 2 \leftrightarrow 6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$5 + 3 \leftrightarrow 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$4 + 4 \leftrightarrow 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Na segunda parcela, temos $p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$, que será associado da seguinte forma:

- $i = 0$, então teremos que acrescentar 12 partes iguais a 1 de forma que a partição tenha exatamente 6 partes:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ \hline 2 \ +2 \ +2 \ +2 \ +2 \ +2 \end{array}$$

- $i = 1$, então teremos que acrescentar 11 partes iguais a 1 de forma que a partição tenha exatamente 6 partes:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ \hline 3 \ +2 \ +2 \ +2 \ +2 \ +1 \end{array}$$

- $i = 2$, então teremos que acrescentar 10 partes iguais a 1 de forma que a partição tenha exatamente 6 partes:

$$\begin{array}{r} 1 \ +1 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ 1 \ +1 \ +1 \ +1 \\ \hline 3 \ +3 \ +2 \ +2 \ +1 \ +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2 \\
1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \ +1 \\
\hline
4 \ +2 \ +2 \ +2 \ +1 \ +1
\end{array}$$

- $i = 3$, então teremos que acrescentar 9 partes iguais a 1 de forma que a partição tenha exatamente 6 partes:

$$\begin{array}{r}
1 \ +1 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \\
\hline
3 \ +3 \ +3 \ +1 \ +1 \ +1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \\
\hline
4 \ +3 \ +2 \ +1 \ +1 \ +1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3 \\
1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \ +1 \\
1 \ +1 \ +1 \\
\hline
5 \ +2 \ +2 \ +1 \ +1 \ +1
\end{array}$$

Reciprocamente, considere as partições de $2n$ em n partes.

Se a partição possui $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ partes iguais a 1, vamos associá-la a uma partição de $2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ em $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ partes, retirando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ parcelas iguais a 1.

Se a partição possui i partes iguais a 1, ela será associada a uma partição de i , retirando $2n - i = n + r$, $r \leq n$ parcelas iguais a 1, de forma que teremos 1 linha com n parcelas iguais a 1 e uma linha com r parcelas iguais a 1. A operação será da seguinte forma: a primeira linha será formada pela partição dada. A próxima linha será formada por n parcelas iguais a 1 e a última linha será composta de r parcelas iguais a 1. Alinhamos as linhas à esquerda e subtraímos as últimas 2 linhas, coluna a coluna, da partição dada.

Exemplo 2.1.4. Tomando $n = 6$, vamos pegar as partições com 4 partes iguais a 1 e vamos associá-la às partições de 8, com 2 partes, retirando as 4 partes iguais a 1.

$$7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \leftrightarrow 7 + 1;$$

$$6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \leftrightarrow 6 + 2;$$

$$5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \leftrightarrow 5 + 3;$$

$$4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \leftrightarrow 4 + 4.$$

No segundo caso, as partições restantes serão associadas da seguinte forma:

- $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ está associada à partição de zero, pois não possui parte igual a 1. Assim, teremos que retirar $12 - 0 = 12$ partes iguais a 1.

$$\begin{array}{r} 2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \end{array}$$

- $3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$ está associada à partição de 1, pois possui uma parte igual a 1. Assim, teremos que retirar $12 - 1 = 11$ partes iguais a 1.

$$\begin{array}{r} 3 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 1 \end{array}$$

- $3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ está associada à partição de 2, pois possui duas partes iguais a 1. Assim,

$$\begin{array}{r} 3 \quad +3 \quad +2 \quad +2 \quad +1 \quad +1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 1 \quad +1 \end{array}$$

teremos que retirar $12 - 2 = 10$ partes iguais a 1.

- $4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ está associada à partição de 2, pois possui duas partes iguais a 1. Assim,

$$\begin{array}{r} 4 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +1 \quad +1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 2 \end{array}$$

teremos que retirar $12 - 0 = 10$ partes iguais a 1.

- $3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1$ está associada à partição de 3, pois possui três partes iguais a 1. Assim, teremos que retirar $12 - 3 = 9$ partes iguais a 1.

$$\begin{array}{cccccc}
3 & +3 & +3 & +1 & +1 & +1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}$$

- $4+3+2+1+1+1$ está associada à partição de 3, pois possui três partes iguais a 1. Assim, teremos que retirar $12 - 3 = 9$ partes iguais a 1.

$$\begin{array}{cccccc}
4 & +3 & +2 & +1 & +1 & +1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
2 & +1 & & & &
\end{array}$$

- $5+2+2+1+1+1$ está associada à partição de 3, pois possui três partes iguais a 1. Assim, teremos que retirar $12 - 3 = 9$ partes iguais a 1.

$$\begin{array}{cccccc}
5 & +2 & +2 & +1 & +1 & +1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
3 & & & & &
\end{array}$$

Portanto temos uma bijeção entre as partições de $2n$ em n partes e as partições de $2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ em $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ partes somadas com as partições de i , $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ou ainda,

$$p(2n, n) = p(2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p(i).$$

□

Observando novamente a tabela, vemos que na linha 4 e coluna 1 temos $p(4, 3) = 1$ e na linha 3 e coluna 1 temos $p(3, 2) = 1$. Também temos na linha 4 e coluna 0 temos $p(4, 4) = 1$ e na linha 3 e coluna 0 temos $p(3, 3) = 1$. Mas se olharmos para os valores restantes nas respectivas linhas, temos na linha 4 e coluna 2 o valor $p(4, 2) = 2$ e na linha 3 e coluna 2 temos $p(3, 1) = 1$ e por fim na linha 4 e coluna 3 temos $p(4, 1) = 1$ e na linha 3 e coluna 3 não temos nenhum valor. Então, temos que $p(4, 3) = p(3, 2)$, $p(4, 4) = p(3, 3)$, $p(4, 1) \geq p(3, 0)$ e $p(4, 2) \geq p(3, 1)$ Portanto, fazendo considerações assim, conseguimos a seguinte conjectura.

Corolário 2.1.1. Para $n \geq 1$,

$$p(n) = p(4n, 2n) - p(3n - 1, n - 1) - p(4n - 4, 2n - 2) + p(3n - 4, n - 2).$$

Continuando as observações na tabela, vamos olhar a linha 6 e comparar com a linha 5. Observamos que $p(6, 6) = p(5, 5)$, $p(6, 5) = p(5, 4)$, $p(6, 4) = p(5, 3)$ e $p(6, 3) > p(5, 2)$. Também vemos que $p(6, 2) \geq p(5, 1)$ e $p(6, 1) \geq p(5, 0)$, pois este último não está definido. Logo, podemos mostrar o seguinte resultado.

Demonstração. Basta tomar a diferença $p(4n, 2n) - p(4n - 4, 2n - 2)$ no Teorema (2.1.5). □

Teorema 2.1.6. Sejam n um inteiro positivo e $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Então,

1. $p(n, j) = p(n - 1, j - 1)$ para $k \leq j \leq n$.
2. $p(n, j) > p(n - 1, j - 1)$ para $1 \leq j < k$.

Demonstração.

1. Como $k \leq j \leq n$, cada partição com exatamente j partes possui 1 como menor parte. De fato, se toda parte fosse maior do que 1, o número particionado seria maior do que ou igual a $2j \geq 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) = n + 2$ (caso n par) ou $3 + 2(j - 1) \geq 3(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = n + 2$ (caso ímpar), o que seria um absurdo. Agora, uma partição de n em j partes é transformada em uma de $n - 1$ em $j - 1$ partes e vice-versa, removendo-se uma parte 1 ou acrescentando uma parte 1, respectivamente. Logo, $p(n, j) = p(n - 1, j - 1)$.
2. Sendo $1 \leq j < k$, as partições enumeradas por $p(n, j)$ têm menor parte não necessariamente iguais a 1. Então, $p(n, j) > p(n - 1, j - 1)$ para $1 \leq j < k$.

□

Teorema 2.1.7. Sejam n um inteiro positivo e $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Então,

$$p(n) - p(n - 1) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [p(n, i) - p(n - 1, i - 1)].$$

Demonstração. Reescrevemos a igualdade como

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n, 1) + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [p(n, i) - p(n-1, i-1)] \\ &= p(n-1) + p(n, 1) + p(n, 2) - p(n-1, 1) + \cdots + p(n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - p(n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1). \end{aligned}$$

Iniciamos com as partições de $n-1$, cujo total é $p(n-1)$, e vamos obter o número de partições de n . Acrescentando uma parte 1 às partições de $n-1$ obtemos partições de n com menor parte igual a 1. Agora acrescentamos a partição de n com uma única parte, o que corresponde a $p(n, 1) = 1$.

Precisamos agora acrescentar as partições de n com mais do que uma parte e cuja menor parte é maior do que 1. Com 2 partes temos $p(n, 2) - p(n-1, 1)$ partições, com 3 partes temos $p(n, 3) - p(n-1, 2)$, ..., com $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ partes temos $p(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - p(n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$. Note que, pela identidade anterior, as partições de n com mais do que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ partes têm menor parte 1.

Somando todas essas contribuições temos

$$p(n) = p(n-1) + p(n, 1) + p(n, 2) - p(n-1, 1) + \cdots + p(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - p(n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1).$$

□

2.2 Segunda Caracterização

Outra maneira de representar partições irrestritas, descrito em Brietzke et al [5], é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.2.1. *O número de partições irrestritas de um inteiro positivo n é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

em que:

$$\begin{aligned} c_s &\neq 0, \\ c_t &\geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad \forall t < k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demonstração. A prova deste teorema é bijetiva e associa, a cada $k \geq 1$ fixado, uma partição irrestrita de n com quadrado de Durfee de lado k a uma matriz com as restrições (2.4), contendo exatamente k colunas de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1 abaixo do quadrado de Durfee, d_2 é o número de partes iguais a 2 abaixo do quadrado de Durfee e assim por diante.

Por exemplo, uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ (suponha $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$) com quadrado de Durfee de lado 3 é completamente caracterizada, uma vez que for declarado quantas vezes cada um dos números 1, 2 e 3 aparece como parte de λ , e se também forem conhecidas as três maiores partes λ_1, λ_2 e λ_3 de λ . Deve ser associada à partição λ uma matriz 2×3 que nos diz esses seis números. Seja

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

uma matriz. Por (2.4) é possível escrever

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 + j_3, \\ c_2 &= 3 + j_2 + j_3 + d_3 \\ c_1 &= 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

com $j_1, j_2, j_3 \geq 0$. Portanto, a matriz (2.5) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3 & 3 + j_2 + j_3 + d_3 & 1 + j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

ou, ainda, como a soma

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da discussão anterior, segue que a partição λ pode ser caracterizada pelos números

$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 2 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ , não contando aqui eventuais partes iguais a 3 contidas no quadrado de Durfee.

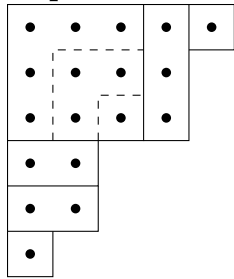
$j_1 \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2$, i.e., o número de vezes que 1 é uma parte da partição conjugada λ'

$j_2 \rightarrow \lambda_2 - \lambda_3$, i.e., o número de vezes que 2 é uma parte de λ'

$j_3 \rightarrow \lambda_3 - 3$, i.e., o número de unidades que λ_3 excede o lado do quadrado de Durfee.

Observe que as primeiras três partes são completamente determinadas: $\lambda_3 = 3 + j_3$, $\lambda_2 = 3 + j_2 + j_3$ e $\lambda_1 = 3 + j_1 + j_2 + j_3$. □

Exemplo 2.2.1. Considere a partição $\lambda = 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1$ de $n = 18$.



É feita a decomposição do gráfico de Ferrers de λ como mostrado na figura, considerando o tamanho do quadrado de Durfee e o número de vezes que 1, 2 e 3 são partes de λ e da partição conjugada λ' . No exemplo, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = 0$ e $j_3 = 1$. Esta decomposição sugere a soma das matrizes abaixo:

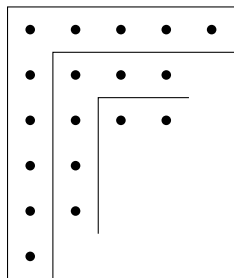
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ do quadrado de Durfee,}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ pois 1 aparece uma vez e 2 aparece duas vezes como parte de λ e

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ desde que 3 aparece duas vezes como parte de λ' , mas aparece somente uma vez fora do quadrado de Durfee e 1 é parte de λ' somente uma vez.

Portanto, a matriz correspondente à partição λ é

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$



Existe um caminho fácil de obter a matriz que representa a partição. Não é necessário escrever primeiro a soma das matrizes como feito acima. Na verdade, no exemplo, note que a soma das colunas, 10, 6 e 2 são o tamanho dos ganchos mostrados na figura ao lado.

Na segunda linha, as entradas 1 e 2 indicam o deslocamento vertical do gancho correspondente com respeito ao anterior, e 0 indica o deslocamento vertical do último gancho com respeito ao final

do quadrado de Durfee.

A matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde ao quadrado de Durfee. Note que as entradas 5, 3 e 1 na primeira linha são precisamente o número de elementos que cada gancho tem em comum com o quadrado de Durfee.

Novamente, calculamos todas as matrizes para um dado n , usando um processo semelhante ao descrito para a montagem da primeira tabela. Na tabela a seguir são representados os coeficientes relativos à representação acima.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39			
1	1																																									
2	1	1																																								
3	1	1	1																																							
4	1	1	1	1																																						
5	1	1	1	1	1																																					
6	1	1	1	1	1	1																																				
7	1	1	1	1	1	1	1																																			
8	1	1	1	1	1	1	1	1																																		
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1																																	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																																
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																															
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																														
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																													
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																												
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																											
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																										
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																									
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																								
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																						
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																					
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																				
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																			
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																		
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																	
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1														
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1													
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1												
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1											
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1									
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1								
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 2.2: Tabela para partições irrestritas - 2ª caracterização

Olhando para cada linha temos que, após fazer a soma, a segunda linha da matriz nos diz o número de partes abaixo do quadrado de Durfee. Por exemplo, olhando para a linha 5, da direita para a esquerda, temos:

- 2, que é o número de partições de 5 com 0 partes abaixo do quadrado de Durfee.
- 2, que é o número de partições de 5 com 1 parte abaixo do quadrado de Durfee.
- 1, que é o número de partições de 5 com 2 partes abaixo do quadrado de Durfee.
- 1, que é o número de partições de 5 com 3 partes abaixo do quadrado de Durfee.
- 1, que é o número de partições de 5 com 4 partes abaixo do quadrado de Durfee.

Uma simples observação desta tabela nos leva a algumas conjecturas. A primeira diz respeito a diagonal em amarelo.

Proposição 2.2.1. *A primeira entrada à esquerda na n -ésima linha é o número de partições de n em que as partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.*

Demonstração. A primeira entrada na n -ésima linha é o número de partições do tipo $n = c_1 + c_2 + \dots + c_k$, para todo $1 \leq j \leq k$, com $c_k \neq 0, c_t \geq 2 + c_{t+1}, t < k$, ou seja, as partições de n em partes distintas da forma $c_1 + c_2 + \dots + c_s$, em que $c_i - c_{i+1} \geq 2$. Portanto, pela Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan [3], segue o resultado. \square

Antes de apresentarmos sobre a segunda conjectura, precisamos de uma definição.

Definição 2.2.1. *Dada uma partição λ , seja $l(\lambda)$ a maior parte de p , $w(\lambda)$ o número de 1's em λ e $m(\lambda)$ o número de partes maiores do que $w(\lambda)$. Define-se [4] *crank* de uma partição λ ao número dado por $l(\lambda)$ se $w(\lambda) = 0$, ou $m(\lambda) - w(\lambda)$ caso contrário. Dado n denotemos por $cp(n)$ o número de partições com *crank* positivo.*

Observando cada linha, percebemos que até certo ponto, os valores repetem os da linha anterior até um determinado ponto e que a cada duas linhas é acrescentado um valor novo à sequência (a parte azul da tabela). Esta é a sequência (veja [11]) que retrata, para cada n , o número de partições com *crank* positivo. Para provar tal resultado são necessários os próximos lemas que caracterizam o *crank* positivo de uma partição através do tamanho do seu quadrado de Durfee.

Lema 2.2.1. *Seja n inteiro positivo e λ uma partição de n com quadrado de Durfee de lado $k \geq 1$. A partição λ tem *crank* positivo se, e somente se, o número de partes iguais a 1 em λ é menor do que k .*

Demonstração. Seja λ uma partição do inteiro positivo n , com quadrado de Durfee de lado $k \geq 1$ e *crank* positivo. Considere $w(\lambda)$ o número de partes iguais a 1 de λ e $m(\lambda)$ o número de partes de λ maiores do que $w(\lambda)$.

Suponhamos, que o número de partes iguais a 1 seja maior do que ou igual a k , ou seja, $w(\lambda) \geq k$. Como o tamanho do quadrado de Durfee é k então λ possui, no máximo, k partes maiores do que k . Assim teremos $m(\lambda) \leq k$, o que implica que o *crank* de λ será dado por $m(\lambda) - w(\lambda) \leq k - k = 0$, o que é um absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que o número de partes iguais a 1 em λ é menor do que k . Então $w(\lambda) < k$. Como o tamanho do quadrado de Durfee é k , teremos $m(\lambda) \geq k$, o que implica o que *crank* de λ será dado por $m(\lambda) - w(\lambda) > k - k = 0$, e portanto λ tem *crank* positivo. \square

Lema 2.2.2. *Seja n inteiro positivo e λ uma partição de n com *crank* positivo e quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Então λ tem um número menor do que $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee.*

Demonstração. Considere n , um inteiro positivo, e λ uma partição de n com *crank* positivo e quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Se $k = 1$ nada temos a fazer pois para que λ tenha *crank* positivo, a mesma deve ter somente uma parte; ou seja; nenhuma parte abaixo do quadrado de Durfee.

Considere $k \geq 2$. Como $n - k^2 \leq n - 2^2 = n - 4$, além do quadrado de Durfee de tamanho k , resta um número menor do que ou igual a $n - 4$ de pontos na partição λ de n . Observemos que mesmo que todas as partes restantes de λ fossem tomadas iguais a 1, ainda assim teríamos um número menor do que $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee, uma vez que a igualdade somente poderia ocorrer no caso de $k = 2$, e pelo Lema (2.2.1), tem-se, no máximo, uma parte igual a 1.

Portanto, o número de partes de λ , abaixo do quadrado de Durfee, é menor do que $n - 4$. \square

Usando o Lema (2.2.1) e a notação $(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{n-1})$, a função geradora para as partições de n com *crank* positivo é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q+\dots+q^{n-1})q^{n^2}}{(q^2;q)_{n-1}(q;q)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \cdot \frac{q^{n^2}}{(q^2;q)_{n-1}(q;q)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^n)q^{n^2}}{(1-q)\dots(1-q^n)(q;q)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_{n-1}(q;q)_n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos a função geradora para as partições em que o coeficiente $t^m q^n$ representa o número de partições de n com m partes abaixo do quadrado de Durfee:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n(tq;q)_n}.$$

Lema 2.2.3. *Sejam n inteiro positivo, λ uma partição de n com crank positivo e quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Se quebrarmos as partes iguais a k abaixo do quadrado de Durfee em partes de tamanho 1 obtendo uma nova partição λ' de n , então λ' tem um número menor do que ou igual a $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee.*

Demonstração. De fato, considere n um inteiro positivo e λ uma partição de n com crank positivo, quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$, j partes abaixo do quadrado de Durfee de tamanho k e p o número de partes abaixo do quadrado de Durfee maiores do que ou iguais a 2 e menores do que ou iguais a k .

Para $k = 1$ nada temos a fazer pois se λ tem crank positivo e quadrado de Durfee de tamanho 1 não é possível haver partes iguais a 1 abaixo do quadrado de Durfee. Suponha, então, $k \geq 2$.

Suponha que quebramos as j partes de λ iguais a k abaixo do quadrado de Durfee em partes de tamanho 1, obtendo uma nova partição λ' de n . Então $w(\lambda') = jk + w(\lambda)$. Sabemos, pelo Lema (2.2.2), que $w(\lambda) + j + p \geq n - 4$. Temos que mostrar que $w(\lambda) + jk + p = w(\lambda') + p \leq n - 4$.

Mas
$$n \geq k^2 + jk + w(\lambda) + p = k^2 + jk + w(\lambda') - jk + p.$$

Como $k \geq 2$,
$$n \geq k^2 + w(\lambda') + p \geq 4 + w(\lambda') + p,$$

e portanto
$$n - 4 \geq +w(\lambda') + p,$$

seguindo o resultado. □

Baseado no lema anterior, foi possível encontrar uma prova bijetiva para o seguinte teorema.

Teorema 2.2.2. *O número de partições de um inteiro positivo n com crank positivo (negativo) é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$c_k \neq 0,$$

$$c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, t < k$$

$$\sum_{i=1}^k c_i + d_i = 2n - 4;$$

$$\sum_{i=1}^k c_i = n;$$

$$\sum_{i=1}^k d_i = n - 4.$$

Demonstração. Seja n inteiro positivo e λ uma partição de n com crank positivo e quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Os Lemas (2.2.1), (2.2.2) garantem que é possível introduzir $n - 4$ pontos a esta partição λ de modo a se chegar à uma partição de $2n - 4$ com $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee de tamanho k .

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º Caso: Todas as partes abaixo do quadrado de Durfee são menores do que k .

Deslocamos as partes abaixo do quadrado de Durfee uma posição para a direita e completamos com uma coluna de tamanho $n - 4$.

2º Caso: A partição possui partes de tamanho k abaixo do quadrado de Durfee.

Neste caso, tomamos todas as partes de tamanho k e transformamos em partes de tamanho 1. Feito isso, pelo Lema(2.2.3), procedemos como no caso anterior.

Desta forma construímos uma partição de $2n - 4$ que, pelo Corolário C de [5], tem associada uma matriz de duas linhas da forma dada uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned}
 c_k &\neq 0, \\
 c_t &\geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, t < k \\
 \sum_{i=1}^k c_i + d_i &= 2n - 4.
 \end{aligned}$$

Observemos que como as partições de n assumem um número menor do que $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee sempre é possível colocar os $n - 4$ pontos e ter a restrição

$$\sum_{i=1}^k d_i = n - 4.$$

estabelecida.

Reciprocamente, vamos associar à partição de $2n - 4$ com exatamente $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee de tamanho k , a partição de n também com quadrado de Durfee de tamanho k retirando $n - 4$ pontos, um ponto de cada parte abaixo do quadrado de Durfee na representação de Ferrers da partição de $2n - 4$.

Caso reste um número maior do que ou a igual a k partes iguais a 1, rearranjamos as partes 1 em partes de tamanho k até restar menos do que k partes de tamanho 1. Pelo Lema (2.2.1), a partição de n resultante terá crank positivo.

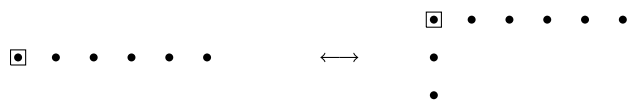
Observemos que a operação é bijetiva e não gera ambiguidade pois para que duas partições de $2n - 4$ gerassem a mesma partição de n , elas já deveriam ser iguais uma vez que é retirada a primeira coluna abaixo do quadrado de Durfee, o que não altera a estrutura das partes. \square

Exemplo 2.2.2. Para $j = 6$, pelo teorema, temos que dada uma partição de 6 com crank positivo, é possível associá-la a uma partição de $6 + 2 = 8$, com 2 partes abaixo do quadrado de Durfee.

Partições de 6 com crank positivo

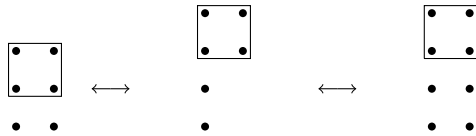
Partições de 6 com 2 partes abaixo do quadrado de Durfee

1º Caso





2º Caso



Olhando para a linha 8 e coluna 6 da tabela, temos 2 partes abaixo do quadrado de Durfee. Continuando nesta coluna, vemos que o número 5 se repete. Logo,

$$\begin{aligned}
 5 &= p(8|2 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}) \\
 &= p(9|3 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}) \\
 &= p(10|4 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Isso acontece para todos os valores que satisfazem a sequência do número de partições com *crank* positivo.

Dado que temos $p(2j - 4|j - 4 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee})$, percorrer esta coluna significa computar os valores de

$$p(j + 4|k \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}),$$

para $k \geq j - 4$. Como observado que o valor da coluna se mantém inalterado, a tabela nos sugere $p(2j - 4|j - 4 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}) = p(j + 4|k \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee})$.

Corolário 2.2.1. *Fixado j , temos $p(2j - 4|j - 4 \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee}) = p(j + 4|k \text{ partes abaixo do quadrado de Durfee})$ para $k \geq j - 4$.*

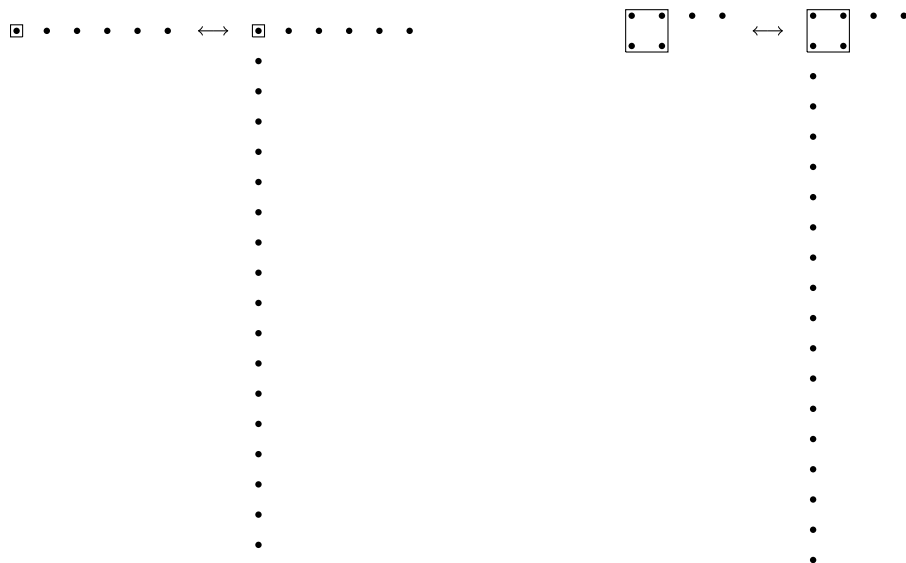
Demonstração. Segue do teorema, observando que temos a bijeção entre as matrizes da classe dada pela soma (subtração) em uma unidade no termo d_1 . □

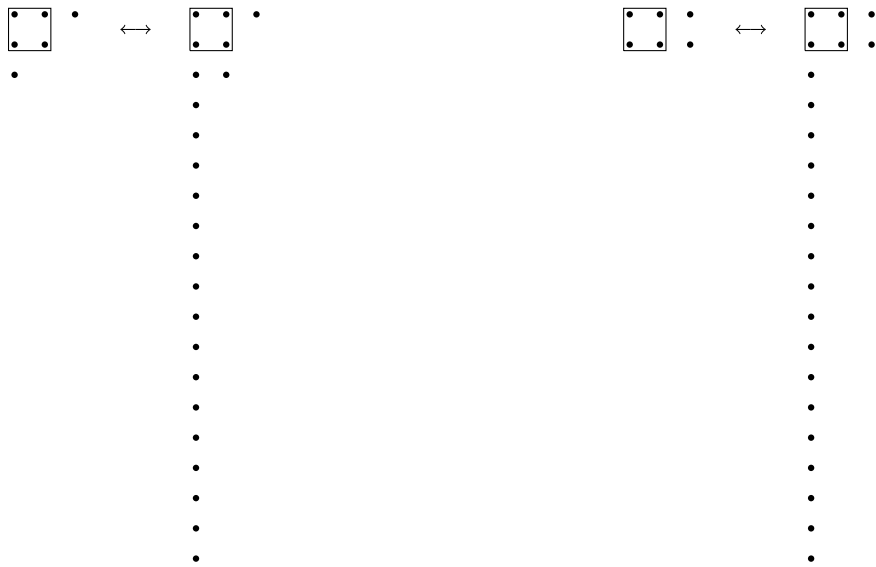
Exemplo 2.2.3. *Olhando para a linha 23 e coluna 6, encontramos o valor 5. Esse valor corresponde a:*

- *partições de 6 com crank positivo;*
- *partições de 23 com 17 partes abaixo do quadrado de Durfee;*
- *Pelo Teorema (2.2.2), partições de 8 com 2 partes abaixo do quadrado de Durfee.*

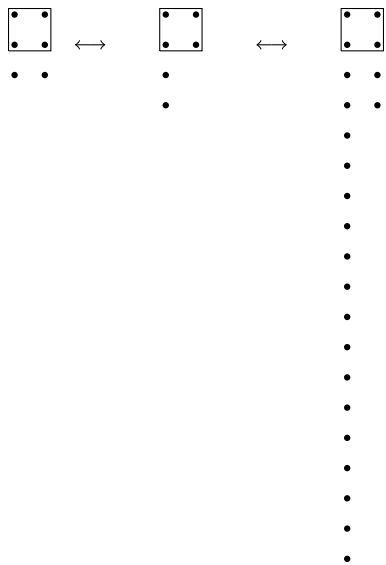
É possível construir uma bijeção direta entre partições de j com crank positivo e partições de n com $n - j$ partes abaixo do quadrado de Durfee ($n - j > j - 4$). Procedemos como no teorema, colocando e/ou tirando $n - j$ partes. Para o primeiro caso, a primeira e terceira colunas, temos as partições de 6 com crank positivo e na segunda e quarta colunas, partições de 23 com 17 partes abaixo do quadrado de Durfee. No segundo caso, a primeira coluna é a partição de 6, com crank positivo, a segunda coluna é o passo intermediário, em que transformamos a parte de tamanho k em k partes de tamanho 1 e a última coluna é a partição de 23 com 17 partes abaixo do quadrado de Durfee.

1º Caso





2º Caso



No que segue, $q_j(n)$ denota o número de partições de n com exatamente j partes abaixo do quadrado de Durfee.

Teorema 2.2.3. *Sejam n um inteiro positivo e $k = \begin{cases} \frac{n-5}{2}, & n \text{ ímpar} \\ \frac{n-4}{2}, & n \text{ par} \end{cases}$. Então,*

1. $q_j(n) = q_{j-1}(n-1)$ para todo $k < j \leq n-1$.
2. $q_j(n) > q_{j-1}(n-1)$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Demonstração.

1. Primeiramente observemos que se $k < j \leq n-1$ então cada partição enumerada por $q_j(n)$ possui menor parte igual a 1. De fato, se fosse maior do que 1 a menor parte, então abaixo do quadrado de Durfee teríamos ao menos $2j$ pontos no diagrama de Ferrers e, além disso, no quadrado de Durfee teríamos no mínimo $4 = 2^2$ pontos se n for par, e $5 = 3 + 2$, se n for ímpar. Logo, como $j > k$, o número particionado seria maior do que n , pois $5 + 2j > 5 + 2k = 5 + 2\frac{n-5}{2} = n$ (caso n ímpar) e $4 + 2j > 4 + 2k = 4 + 2\frac{n-4}{2} = n$ (caso n par).

Agora que sabemos que todas as partições enumeradas por $q_j(n)$ têm menor parte igual a 1, basta removermos tal parte para obter uma partição de $n-1$ com exatamente $j-1$ partes abaixo do quadrado de Durfee. Reciprocamente, dada uma partição de $n-1$ com $j-1$ partes abaixo do quadrado de Durfee, acrescentando-se uma parte 1 obtemos uma partição de n com j partes abaixo do quadrado de Durfee.

2. Como $1 \leq j \leq k$ a menor parte de uma partição enumerada por $q_j(n)$ não necessariamente é igual a 1. Além disso, adicionando-se uma parte 1 a cada partição enumerada por $q_{j-1}(n-1)$ obtemos uma partição de n com exatamente j partes abaixo do quadrado de Durfee.

□

Teorema 2.2.4. *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n) - p(n-1) = q_0(n) + \sum_{i=1}^k [q_i(n) - q_{i-1}(n-1)],$$

$$\text{onde } k = \begin{cases} \frac{n-5}{2}, & n \text{ ímpar} \\ \frac{n-4}{2}, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Demonstração. Começamos com o número de partições de $n-1$, $p(n-1)$, e vamos obter $p(n)$ somando certos números de partições. Acrescentando uma parte 1 em cada uma dessas partições, obtemos partições de n com pelo menos uma parte abaixo do quadrado de Durfee. Note que as partições assim obtidas têm 1 como menor parte. Depois, devemos acrescentar aquelas partições

de n com nenhuma parte abaixo do quadrado de Durfee, cujo total é $q_0(n)$. Devemos agora acrescentar o número de partições de n com exatamente j partes abaixo do quadrado de Durfee, sendo a menor parte maior do que 1. Pela identidade anterior temos que $1 \leq j \leq k$.

Note que existem $q_j(n)$ partições de n com exatamente j partes abaixo do quadrado de Durfee. No entanto, devemos desconsiderar aquelas já contadas por $p(n-1)$, que foram obtidas ao acrescentarmos uma parte 1. Assim, o total de partições de n com exatamente j partes abaixo do quadrado de Durfee, todas maiores do que 1, é igual a $q_n(j) - q_{n-1}(j-1)$. Portanto,

$$p(n) - p(n-1) = q_0(n) + \sum_{i=1}^k [q_i(n) - q_{i-1}(n-1)],$$

□

Exemplo 2.2.4. $n = 9, k = 2$ e $p(9) = p(8) + q_0(9) + q_1(9) - q_0(8) + q_2(9) - q_1(8)$.

j	$q_j(n)$	$j-1$	$q_{j-1}(n-1)$
0	9, 7 + 2, 6 + 3, 5 + 4, 3 + 3 + 3		
1	8 + 1, 6 + 2 + 1, 5 + 3 + 1, 5 + 2 + 2, 4 + 4 + 1, 4 + 3 + 2	0	8, 6 + 2, 5 + 3, 4 + 4
2	7 + 1 + 1, 5 + 2 + 1 + 1, 4 + 3 + 1 + 1, 4 + 2 + 2 + 1, 3 + 3 + 2 + 1, 3 + 2 + 2 + 2	1	7 + 1, 5 + 2 + 1, 4 + 3 + 1, 4 + 2 + 2, 3 + 3 + 2
3	6 + 1 + 1 + 1, 4 + 2 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 1 + 1 + 1, 3 + 2 + 2 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 2 + 1	2	6 + 1 + 1, 4 + 2 + 1 + 1, 3 + 3 + 1 + 1, 3 + 2 + 2 + 1, 2 + 2 + 2 + 2, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
4	5 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1	3	5 + 1 + 1 + 1, 3 + 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1 + 1
5	4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	4	4 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1
6	3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	5	3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
7	2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	6	2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
8	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	7	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Voltando à tabela (2.2) pode-se observar que a partir de um certo ponto os números não pertencem à sequência de partições com *crank* positivo.

Pela construção da tabela, o número correspondente à linha n e coluna j é o número de matrizes

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$c_k \neq 0,$$

$$c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad t < k$$

$$\sum_{i=1}^k c_i + d_i = n$$

$$\sum_{i=1}^k d_i = j.$$

Observamos na mesma que os elementos da linha n e coluna j podem ser vistos como partições com *crank* positivo até a coluna $j = \lfloor n/2 + 2 \rfloor$. A partir dessa coluna, o número de elementos listados pela tabela é menor do que o número de partições com *crank* positivo. Ou seja, algumas das partições com *crank* positivo de j não podem mais serem associadas a partições contadas pela tabela.

Por exemplo, olhando para a linha 14 e coluna 10, o valor 17 corresponde ao número de matrizes que estão associadas à partição de 14 com 4 partes abaixo do quadrado de Durfee, e o total de partições de 10 com *crank* positivo é igual a 19.

Olhando para as partições de 10 com *crank* positivo, pegando como exemplo as partições $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ e $3 + 2 + 2 + 2 + 1$, é possível perceber que elas não podem ser transformadas pelo mesmo tipo de bijeção apresentada no teorema, pois as 4 partes que precisam ser completadas não cabem abaixo do quadrado de Durfee.

Seguindo este raciocínio foi possível encontrar um teste para saber se a partição dada pode ou não ser associada ao número de partições com *crank* positivo.

Proposição 2.2.2. *Seja n um inteiro positivo e λ um partição de n , com quadrado de Durfee de tamanho k . Sejam d o número de partes abaixo do quadrado de Durfee, y_i o número de pontos na coluna i abaixo do quadrado de Durfee e x_i o número de pontos que serão acrescentados na coluna i seguindo o método descrito pelo Teorema (2.2.2), para $1 \leq i \leq k$. Então $\sum_{i=1}^k y_i \leq (k-1)d$.*

Demonstração. Temos, por hipótese, que $y_1 + x_1 = d$ e $y_i + x_i \leq d$, para $2 \leq i \leq k$. Assim, obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + x_1 = d \\ y_2 + x_2 \leq d \\ \vdots \\ y_{k-1} + x_{k-1} \leq d \\ y_k + x_k \leq d. \end{array} \right.$$

Somando as desigualdades obtemos a desigualdade $\sum_{i=1}^k y_i \leq (k-1)d$. □

Portanto, se $\sum_{i=1}^k y_i > (k-1)d$, a partição descrita no Lema (2.2.2) não é contada.

Observação: É possível observar algumas cores na tabela. Cada cor representa alguma observação que ainda não foi possível demonstrar.

- As células marcadas em verde, logo acima da parte azul, significam que a primeira célula acima da parte azul difere em uma unidade a menos do que o valor da sequência do crank positivo e a segunda célula acima, em verde, difere em duas unidades.
- As células marcadas em lilás, logo acima das verdes, apresentam uma diferença de 4 unidades em relação à sequência do crank positivo.
- As células marcadas em laranja, logo acima das de cor lilás, diferem em 6 unidades

E a cada coluna, vão aparecendo novos valores, em que a diferença vai aumentando e que possibilitam observações deste tipo, mas que ainda não foram demonstradas.

CAPÍTULO 3

MOCK THETA FUNCTIONS

Neste capítulo, usando um processo semelhante ao do capítulo anterior para construir todas as tabelas, apresentamos resultados para as Mock Theta Functions $\psi(q)$, $\chi(q)$, $q\omega(q)$, $\nu(q)$, $f_0(q)$, $f_1(q)$, $\gamma(q)$, $S_0(q)$, $S_1(q)$, $f(q)$, $\Phi(q)$, $\rho(q)$, $\sigma(q)$, $U_0(q)$, $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$ e $\phi(q)$, cujas representações como matrizes de duas linhas que vamos usar podem ser encontradas em [7].

3.1 Mock Theta Function $\psi(q)$

A função geradora para $\psi(q)$ é

$$\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q^2)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad c_s = 1.$$

Dado n , quando calculamos todas as matrizes de duas linhas que representam cada função, é possível observar que, para gerá-las, é suficiente calcular todas as partições possíveis, em partes ímpares distintas, para todo $m \geq n$, colocá-las na primeira linha e para fazer a segunda linha, basta

completar seguindo as restrições que caracterizam a matriz. Então, considerando que a primeira linha da matriz, após somada, nos fornece o valor de m , podemos montar a tabela correspondente à Mock Theta Function $\psi(q)$.

Baseado nestas observações, vemos que até certo ponto da linha, os valores vão se repetindo e a cada três linhas, dois novos valores são acrescentados nesta sequência (sequência em laranja). Então podemos conjecturar o seguinte.

Teorema 3.1.1. *Para todo $n \geq 7$, o número de partições de m em partes ímpares distintas tendo 1 como parte é igual ao número de matrizes cuja soma é $\begin{Bmatrix} m \\ n-m \end{Bmatrix}$, para $1 \leq m \leq \left(2 \left\lfloor \frac{n-7}{3} \right\rfloor + 7\right)$.*

Demonstração. Considere $m = c_1 + c_2 + \dots + c_s$. Dada uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= 1, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t \end{aligned} \quad (3.2)$$

podemos associar a partição $c_1 + c_2 + \dots + c_s$ de m em partes ímpares menores do que ou iguais a $2m + 1$ de $n - m$. Reciprocamente, dada uma partição $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$ em partes ímpares menores do que ou iguais a $2m + 1$, em ordem não-crescente, podemos construir a matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_j & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_j & d_{j+1} \end{pmatrix}$$

em que $d_{j+1} = \frac{\lambda_j - 3}{2}$, $d_{i+1} = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{2}$ e $d_1 = m - \sum_{h=2}^{j+1} d_h$. □

Observando apenas a diagonal mais a direita, vemos que só aparece o valor 1 para valores de n que são quadrados perfeitos. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. *O número de matrizes em que $m = n$ é igual a*

$$\begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é quadrado perfeito} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Pela restrição da matriz $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Logo, quando temos $\sum d_i = 0$, aparecem todos os ímpares primeira linha da matriz. Como $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$, só teremos o valor 1 para n quadrado perfeito. □

3.2 Mock Theta Function $\chi(q)$

A função geradora para $\chi(q)$ é

$$\chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{n^2}}{(-q^3; q^3)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad i_t \in \{2, 3\}, \quad 3|d_t, \quad c_s \in \{1, 2\}.$$

O peso associado é $(-1)^{\frac{1}{3} \sum_{t=1}^s d_t}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $\chi(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1																													
2	0	1																												
3	0	0	0																											
4	-1	0	0	1																										
5	0	-1	0	0	1																									
6	0	0	0	0	0	1																								
7	1	0	0	-1	0	0	1																							
8	0	1	0	0	-1	0	0	0																						
9	0	0	0	0	0	-1	0	0	1																					
10	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	1																				
11	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1																			
12	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	0	0	2																		
13	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-2	0	0	1																	
14	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1																
15	0	0	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-3	0	0	1															
16	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	3	0	0	-2	0	0	1														
17	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-2	0	0	1													
18	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	0	0	4	0	0	-4	0	0	1												
19	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0	2											
20	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	2	0	0	-3	0	0	2										
21	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	0	-4	0	0	5	0	0	-4	0	0	2									
22	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	3	0	0	-4	0	0	4	0	0	-4	0	0	2								
23	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-3	0	0	4	0	0	-4	0	0	2							
24	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	0	0	4	0	0	-6	0	0	7	0	0	-4	0	0	1						
25	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-3	0	0	4	0	0	-5	0	0	6	0	0	-5	0	0	2					
26	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	3	0	0	-4	0	0	6	0	0	-5	0	0	2				
27	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	0	-4	0	0	6	0	0	-8	0	0	8	0	0	-4	0	0	1			
28	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	3	0	0	-4	0	0	6	0	0	-7	0	0	8	0	0	-7	0	0	2		
29	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-3	0	0	5	0	0	-7	0	0	8	0	0	-7	0	0	2	
30	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	0	0	4	0	0	-6	0	0	9	0	0	-11	0	0	8	0	0	-5	0	0	3

Figura 3.2: Tabela para $\chi(q)$

Observe que aparecem sinais negativos na tabela. Isto ocorre pelo fato de que a caracterização da função possui um peso, que gera um sinal para cada matriz, e aqui ele é considerado. Os dois lemas seguintes, embora simples, nos foram sugeridos pela tabela acima. Observamos que existem diagonais com valores iguais a 0.

Lema 3.2.1. *Dado $n > 0$, o número de matrizes cuja soma é do tipo $\left\{ \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix} \right\}, 0 \leq k \leq n-1$, $k \equiv 1, 2 \pmod{3}$, e é da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \\ i_t &\in \{2, 3\} \\ 3 &| d_t \\ \sum d_t &= k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

é igual a 0.

Demonstração. De fato, para que exista matriz na forma (3.3), devemos ter $3|d_t$, para todo $1 \leq t \leq s$, e portanto $\sum d_t = k \equiv 0 \pmod{3}$, seguindo o resultado. \square

Lema 3.2.2. *Dado $n > 0$, o número de matrizes cuja soma é do tipo $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ n-3 \end{matrix} \right\}$, e é da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \\ i_t &\in \{2, 3\} \\ 3 &| d_t \\ \sum d_t &= n-3, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

é igual a 0.

Demonstração. A afirmação segue pelas restrições (3.6) da matriz uma vez que temos somente as possibilidades:

- $\sum c_t = 1$, com matrizes cuja soma é da forma $\begin{Bmatrix} 1 \\ n-1 \end{Bmatrix}$,
- $\sum c_t = 2$, com matrizes cuja soma é da forma $\begin{Bmatrix} 2 \\ n-2 \end{Bmatrix}$,

e nos demais casos $\sum c_t > 3$, pois $c_t = i_t + c_{t+1} + d_{t+1}$, com $i_t \in \{2, 3\}$. □

3.3 Mock Theta Function $q\omega(q)$

A função geradora para $q\omega(q)$ é

$$q\omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)+1}}{(q; q^2)_{n+1}^2}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad c_s = 1.$$

Considere a tabela da Mock Theta Function $q\omega(q)$, construída levando em consideração a quantidade de matrizes de determinada soma.

Observamos que na tabela, até determinado ponto, os valores vão satisfazendo uma sequência, que de acordo com Sloane [11], é a sequência do número de partições em partes ímpares (sequência em azul). Quando calculamos todas essas matrizes, observamos que a primeira linha de cada matriz é constituída de partições em partes ímpares e a segunda linha é completada, segundo a restrição. Baseado nestas observações, temos o seguinte resultado.

Lema 3.3.1. *Dado $n > 0$, o número de matrizes cuja soma é $\left\{ \begin{matrix} n-j \\ j \end{matrix} \right\}$, $j \geq 1$, e é da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= 1, \\ c_t &= c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ \sum d_i &= j, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

é igual ao coeficiente de x^{n-j} na expansão de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots(1-x^{2j+1})}.$$

Ou ainda, fixado $j \geq 1$, seja $P_{2j+1}(k)$ o número de partições de k em partes ímpares menores que do que ou iguais a $2j+1$, então

$$P_{2j+1}(n - (j+1)) = \text{ao número de matrizes cuja soma é } \left\{ \begin{matrix} n-j \\ j \end{matrix} \right\}, n > j.$$

Demonstração. De fato, dada uma matriz da forma (3.7) podemos associar a partição $c_1 + c_2 + \dots + c_{s-1}$ em partes ímpares menores do que ou iguais a $2j+1$ de $n - (j+1)$. Reciprocamente, dada uma partição $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$ em partes ímpares menores do que ou iguais a $2j+1$, em ordem não-crescente, podemos construir a matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_j & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_j & d_{j+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{em que } d_{j+1} = \frac{\lambda_j - 1}{2}, d_{i+1} = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{2} \text{ e } d_1 = j - \sum_{h=2}^{j+1} d_h. \quad \square$$

Exemplo 3.3.1. $j = 6$ e $n = 20$

$$18 = \#\left\{\begin{matrix} 14 \\ 6 \end{matrix}\right\} = p_{13}(20 - 7).$$

Exemplo 3.3.2. $j = 5$ e $n = 19$

$$17 = \#\left\{\begin{matrix} 14 \\ 5 \end{matrix}\right\} = p_{11}(19 - (5 + 1)).$$

Proposição 3.3.1. Dado $m \geq 1$, considere $p_d(m)$ o número de partições de m em partes distintas. Então

$$p_d(m) = \#\left\{\begin{matrix} m + 1 \\ w \end{matrix}\right\}, \text{ com } w \geq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Considere $m \geq 1$, para cada partição de m em partes distintas existe uma partição $c_1 + c_2 + \dots + c_{s-1}$ em partes ímpares correspondente. Como demonstrado no Lema (3.3.1) esta partição pode ser associada à matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

com $\sum_{i=1}^s d_i = w, w \geq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$.

Do mesmo modo, dada uma matriz cuja soma é $\left\{\begin{matrix} m + 1 \\ w \end{matrix}\right\}$, ela pode ser associada, pelo Lema (3.3.1), a uma partição de m em partes ímpares menores do que ou iguais a $2w + 1$.

Se m é ímpar então $\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \frac{m-1}{2}$ e portanto $2w + 1 \geq m$. Caso contrário, teremos $\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \frac{m-2}{2}$ e então $2w + 1 \geq m - 1$, e como m é par, segue em ambos os casos, que temos partições em partes ímpares irrestritas. Mas como para cada partição de m em partes ímpares temos uma partição em partes distintas segue o resultado. \square

Observando a sequência marcada em verde, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. Dado $n > 1$, o número de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= 1, \\ c_t &= c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ \sum d_i &= 1, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

é igual a $\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$.

Demonstração. Considere s o número de colunas da matriz. Sabendo que $\sum d_i = 1$ e d_i é um inteiro positivo, para algum $0 \leq j \leq s$, teremos $d_j = 1$ e $d_i = 0, i \neq j$. Assim, como $c_s = 1$ então $c_i = 1$ para todo $j \leq i \leq s$ e $c_i = 3$ para todo $1 \leq i \leq j - 1$.

Para $s = 3, n = 6, j = 2$, temos a possibilidade:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que: $\#\left\{ \begin{smallmatrix} 3k \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = k$, ou ainda, o número de matrizes com as restrições (3.12) e com a soma dos c'_i s sendo múltipla de 3 é igual a k .

De fato, observemos primeiramente que como $c_s = 1$ e $\sum c_i$ é múltipla de 3, teremos que pelo menos $c_{s-2} = c_{s-1} = c_s = 1$, podendo existir mais entradas $c'_i = 1$, com $i < s - 2$. Então as matrizes podem ser construídas da seguinte forma:

- todos os c'_i s iguais a 1;
- $c_1 = 3$ e $c_i = 1$ para $2 \leq i \leq s$;
- $c_1 = c_2 = 3$ e $c_i = 1$ para $3 \leq i \leq s$;
- ⋮
- $c_1 = c_2 = \dots = c_{s-3} = 3$ e $c_{s-2} = c_{s-1} = c_s = 1$.

Ou seja, existem k matrizes satisfazendo as condições descritas na afirmação.

Exemplo 3.3.3. Tome $k = 3$, então $\#\left\{ \begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 3$. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, temos que:

- $\# \begin{Bmatrix} 3k-1 \\ 1 \end{Bmatrix} = k$. Neste caso, colocamos $c_{s-1} = c_s = 1$ e procedemos como o caso anterior.
- $\# \begin{Bmatrix} 3k-2 \\ 1 \end{Bmatrix} = k$. Neste caso, colocamos $c_s = 1$ e também procedemos como o primeiro caso.

Para as matrizes cujas somas são apresentadas acima, n é escrito como $3k + 1$, $3k$ ou $3k + 2$, respectivamente. Logo $n + 1$ é da forma $n + 1 = 3k$, $n + 1 = 3k + 2$ ou $n + 1 = 3k + 1$. Portanto, $\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor = k$. □

3.3.1 Conjecturas

Baseado nas observações feitas na tabela, vemos que em cada linha, existe um valor máximo e depois disso, a sequência não oscila. É a sequência marcada em amarelo, na tabela. A partir disso, conseguimos uma conjectura, que aqui deixamos registrada.

Definição 3.3.1. A sequência $\{x_1, \dots, x_n\}$ é unimodal se existe um t tal que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_t \text{ e } x_t \geq x_{t+1} \geq \dots \geq x_n.$$

Teorema 3.3.2. Considere a sequência dada por $x_i = \# \begin{Bmatrix} i \\ n-i \end{Bmatrix}$, $n \geq 10$, como definida no Lema (3.3.1). Então, para $t = n - (\lfloor \frac{n-10}{7} \rfloor + 3) = n - (\lfloor \frac{n+11}{7} \rfloor)$, a sequência x_1, x_2, \dots, x_n é unimodal.

Demonstração. A sequência x_i , para $1 \leq i \leq 5$ é construída da seguinte forma:

- Para todo $n \geq 10$, $x_1 = 1$, com a única matriz associada e soma

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ n-1 \end{Bmatrix};$$

- Para todo $n \geq 10$, $x_2 = 1$, com a única matriz associada e soma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix};$$

- Para todo $n \geq 10$, $x_3 = 1$, com a única matriz associada e soma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n-3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- Para todo $n \geq 10$, $x_4 = 2$, com as matrizes associadas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n-4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ n-5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para todo $n \geq 10$, $x_5 = 2$, com as matrizes associadas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n-5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ n-6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que isso se deve ao fato das restrições matriciais $c_s = 1$ e $c_t = c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $t < s$.

Além disso, caso $d_1 \geq 1$, ($d_1 \geq (n - (n-1))$), para todas as matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} i \\ n-i \end{matrix} \right\}$, obtemos matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} i+1 \\ n-(i+1) \end{matrix} \right\}$ apenas adicionando a coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à direita e retirando 1 de d_1 . Esta operação não mexe com o restante da matriz e altera apenas a soma, ou seja, a matriz seja contada em outra coluna da tabela. De modo bijetivo, sempre que tivermos uma matriz cuja primeira coluna é $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ podemos retirá-la pois $c_s = c_{s-1} = 1$ e adicionar 1 ao d_1 , fazendo com que a mesma mude o valor da soma. Logo segue que, nessas condições, $x_i \leq x_{i+1}$. Isto significa que o número de matrizes com soma na primeira linha igual a x_i é menor do que ou igual ao número de matrizes com soma na primeira linha igual a x_{i+1} . \square

Exemplo 3.3.4. Seja $n = 10$. Temos $x_6 = \#\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 3$. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e portanto obtemos as matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a o número de matrizes cuja soma é $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ poderá ser maior do que 3 matrizes e portanto segue que $x_6 \leq x_7$.

Agora, tome por exemplo matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, que tem cardinalidade 4 e cujas matrizes são

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que não podemos aplicar a operação descrita na matriz $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então não temos uma matriz deste tipo com soma $\left\{ \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ e, além disso, nenhuma matriz com essa soma pode ser associada, pela operação inversa, a $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Conjectura 1: Afirmamos que dado $n \geq 10$, para

$$t = n - \left(\left\lfloor \frac{n-10}{7} \right\rfloor + 3 \right) = n - \left(\left\lfloor \frac{n+11}{7} \right\rfloor \right),$$

as matrizes cujos representantes têm soma $\left\{ \begin{matrix} t \\ n-t \end{matrix} \right\}$ possui matrizes com $d_1 = 0$ e/ou $d_1 = 1$.

As próximas conjecturas foram obtidas por [11].

Observando a sequência marcada em vermelho, temos a seguinte conjectura.

Conjectura 2: Dado $n > 1$, o número de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= 1, \\ c_t &= c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ \sum d_i &= 2, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \tag{3.12}$$

é igual ao número de partições de n em partes ímpares menores do que ou iguais a 5.

3.4 Mock Theta Function $\nu(q)$

A função geradora para $\nu(q)$ é

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q; q^2)_{n+1}}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad c_s = 0.$$

O peso associado é $(-1)^n$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $\nu(q)$.

Observamos que aparecem sinais negativos na tabela. Isto ocorre pois a caracterização possui um peso, que gera um sinal para cada matriz. Aqui, este sinal foi considerado.

Quando calculamos todas as matrizes de um dado n , observamos que na primeira linha aparecem partições em partes pares, em que todo inteiro par, de 2 até a maior parte possível, aparece. Baseado nesta construção, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1. *O número de partições de um inteiro positivo n , em que todo inteiro par, de 2 até a maior parte, aparece como parte exatamente uma vez e as partes ímpares são menores do que ou iguais a 1 mais a maior parte par, é igual ao número de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 0, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad t < k \\ n &= \sum_{i=1}^k c_i + d_i; \end{aligned} \tag{3.13}$$

com k sendo o número de partes pares na partição de n .

Demonstração. A prova deste teorema segue de modo análogo ao Corolário C em [5]. É suficiente construir uma bijeção do conjunto de partições de n com as restrições descritas no Teorema (3.4.1) e o conjunto de matrizes da forma (3.13).

Associa-se uma partição de n na qual todo inteiro par, de 2 até a maior parte, aparece como parte exatamente uma vez, com k partes pares; a uma matriz com as restrições (3.13), com $k + 1$ colunas, de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1, d_2 é o número de partes iguais a 3 e assim por diante.

Por exemplo, considere uma partição de n , λ , com 3 partes pares 2, 4 e 6, cada uma aparecendo apenas uma vez. Tal partição é completamente caracterizada uma vez que for declarado quantas vezes cada uma de suas partes ímpares 1, 3, 5 e 7, aparece em λ . Seja

$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 5 é uma parte de λ ,

$d_4 \rightarrow$ o número de vezes que 7 é uma parte de λ .

Então teremos a matriz associada dada por

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + d_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d_4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} 6 + 2d_2 + 2d_3 + 2d_4 & 4 + 2d_3 + 2d_4 & 2 + 2d_4 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

matriz nas restrições (3.13), com $1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
e $7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observemos que se a maior parte é 6 então d_4 deverá ser zero. Reciprocamente, dada a matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

com as restrições (3.13), é possível escrever

$$\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= 2 + 2d_4 \\ c_2 &= 4 + 2d_3 + 2d_4. \\ c_1 &= 6 + 2d_2 + 2d_3 + 2d_4. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 6 + 2d_2 + 2d_3 + 2d_4 & 4 + 2d_3 + 2d_4 & 2 + 2d_4 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

igual a soma

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 2d_3 & 2d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_4 & 2d_4 & 2d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Disto segue que a partição λ associada tem partes pares 2, 4 e 6 aparecendo apenas uma vez e pode ser caracterizada pelos números

$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 5 é uma parte de λ

$d_4 \rightarrow$ o número de vezes que 7 é uma parte de λ ,

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.4.1. Dada a matriz $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

correspondente a partição $4 + 3 + 2 + 1$.

Observação: O Teorema (3.4.1) pode ser reescrito da forma: O número de partições de um inteiro positivo n , com maior parte $k < n$, em que todo inteiro par de 2 até k , aparece como parte exatamente duas vezes, e todo inteiro ímpar de 1 até $k - 1$, aparece como parte pelo menos duas vezes é igual ao número de matrizes da forma (3.13).

Teorema 3.4.2. Dado um inteiro positivo n , o número de partições de m , $1 \leq m \leq n$, em partes pares distintas com parte 0 é igual ao número de matrizes cuja soma é $\binom{m}{n-m}$.

Demonstração. De fato, dada uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_k \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_k &= 0, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ m &= \sum c_t \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

podemos associar a partição $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 2(d_2 + \dots + d_k + 1) + \dots + 2(d_k + 1) + 0$ de m em partes pares distintas, com 0 como parte, de m . Reciprocamente, dada uma partição $\lambda_1 + \dots + \lambda_j + 0$

em j partes pares distintas de m , em ordem não-crescente, podemos determinar d_2, \dots, d_j inteiros positivos através do sistema possível e determinado

$$\begin{cases} \lambda_j = 2 + 2d_j \\ \lambda_{j-1} = 2 + 2d_j + 2d_{j-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 = 2 + 2d_2 + \dots + 2d_j + 2d_{j-1} \end{cases}$$

e $d_1 = n - \left(\sum_{i=1}^j \lambda_i + \sum_{l=2}^j d_l \right)$.

Assim, teremos a matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_j & 0 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_j & d_{j+1} \end{pmatrix}$$

com as restrições (3.19). □

Observação: Através dos Teoremas (3.4.1) e (3.4.2) segue que existe uma relação biunívoca entre as partições de um inteiro positivo n , em que todo inteiro par, de 2 até a maior parte, aparece como parte exatamente uma vez, e as partições de m , $1 \leq m \leq n$, em partes pares distintas com parte 0.

3.4.1 Conjectura

Observando a sequência em lilás, na tabela, e usando [?], temos a seguinte conjectura.

Conjectura: Para todo n , o número de partições de n com partes do tipo $4k+2$ é igual ao número de matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \right\}$, para $0 \leq m \leq 2 \left(\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor + 1 \right)$.

3.5 Mock Theta Function $f_0(q)$

A função geradora para $f_0(q)$ é

$$f_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad c_s = 1.$$

O peso associado é $(-1)^{\sum_{i=1}^s d_i}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $f_0(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
1	1																																									
2	-1	0																																								
3	1	0	0																																							
4	-1	0	0	1																																						
5	1	0	0	-1	0																																					
6	-1	0	0	1	-1	0																																				
7	1	0	0	-1	1	0	0																																			
8	-1	0	0	1	-1	1	0	0																																		
9	1	0	0	-1	1	-1	0	0	1																																	
10	-1	0	0	1	-1	1	-1	0	-1	0																																
11	1	0	0	-1	1	-1	1	0	1	-1	0																															
12	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0																														
13	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2	0	0																													
14	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	1	-2	1	0	0																												
15	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-1	2	-2	1	0	0																											
16	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-2	2	-2	0	0	1																										
17	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	2	-2	3	-1	0	-1	0																									
18	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	2	-3	2	-1	1	-1	0																								
19	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-2	3	-3	2	-1	1	-1	0																							
20	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-3	3	-3	2	-1	2	-1	0																						
21	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	3	-3	4	-3	2	-2	2	0	0																					
22	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	3	-4	4	-3	2	-3	2	0	0																				
23	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-3	4	-5	4	-3	3	-3	1	0	0																			
24	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-4	5	-5	4	-4	4	-3	1	0	0																		
25	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	4	-5	6	-5	5	-4	4	-3	0	0	1																	
26	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-6	5	-5	5	-2	0	-1	0																
27	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-7	7	-6	6	-6	4	-1	1	-1	0															
28	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-6	7	-8	7	-7	7	-6	4	-2	1	-1	0														
29	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	6	-7	9	-8	8	-8	7	-6	4	-1	2	-1	0													
30	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	7	-9	9	-9	9	-9	8	-7	3	-2	2	-1	0												
31	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-7	9	-10	10	-10	10	-9	9	-6	3	-3	3	0	0											
32	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-9	10	-11	11	-11	11	-11	9	-6	4	-4	2	0	0										
33	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	9	-10	12	-12	12	-12	13	-11	9	-6	5	-4	2	0	0									
34	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	10	-12	13	-13	13	-15	13	-12	10	-7	5	-5	1	0	0								
35	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-10	12	-14	14	-14	16	-15	14	-13	10	-7	7	-4	1	0	0							
36	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	11	-12	14	-15	15	-17	17	-17	16	-14	10	-9	7	-4	0	0	1						
37	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-11	12	-14	16	-16	18	-18	19	-18	17	-14	12	-9	8	-3	0	-1	0					
38	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	11	-13	14	-16	17	-19	19	-21	21	-20	18	-16	12	-11	7	-2	1	-1	0				
39	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-11	13	-14	16	-18	20	-20	22	-23	23	-21	20	-16	14	-11	7	-2	1	-1	0			
40	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	7	-8	-10	11	-13	15	-16	18	-21	21	-23	25	-26	24	-24	21	-18	15	-12	6	-2	2	-1	0		

Figura 3.5: Tabela para $f_0(q)$

Observe que aparecem valores negativos na tabela. Isto ocorre devido ao peso da função, que gera um sinal para cada matriz. E ao gerar a tabela, este sinal é considerado.

Quando calculamos todas as matrizes possíveis e fazemos seu gráfico de Ferrers, observamos que cada partição não possui pontos à direita do quadrado de Durfee, e além disso, para cada inteiro $2n - 4$, existem exatamente $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee. Isto nos sugere o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1. *O número de partições de um inteiro positivo $2n - 4$ que não possuem pontos à direita do quadrado de Durfee e possuem exatamente $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 1, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad t < k \\ \sum_{i=1}^k c_i + d_i &= 2n - 4; \\ \sum_{i=1}^k c_i &= n; \\ \sum_{i=1}^k d_i &= n - 4. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Demonstração. A prova deste teorema segue de modo análogo ao Corolário C em [5]. É suficiente construir uma bijeção do conjunto de partições de $2n - 4$ com as restrições descritas no Teorema (3.5.1) e o conjunto de matrizes da forma (3.20), em que associa a cada $k \geq 1$ fixado, uma partição de $2n - 4$ com nenhum ponto à direita do quadrado de Durfee de lado k a uma matriz com as restrições (3.20), contendo exatamente k colunas de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1 abaixo do quadrado de Durfee, d_2 é o número de partes iguais a 2 abaixo do quadrado de Durfee e assim por diante.

Por exemplo, uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ (suponha $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$) com quadrado de Durfee de lado 3 é completamente caracterizada, uma vez que for declarado quantas vezes cada um dos números 1, 2 e 3 aparece como parte de λ . Seja

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

uma matriz. Por (3.20) é possível escrever

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 \\ c_2 &= 3 + d_3 \\ c_1 &= 5 + d_2 + d_3, \end{aligned} \tag{3.22}$$

Portanto, a matriz (3.21) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 5 + d_2 + d_3 & 3 + d_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

ou, ainda, como a soma

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Da discussão anterior, segue que a partição λ pode ser caracterizada pelos números

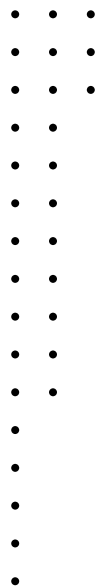
$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 2 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ . □

Exemplo 3.5.1. Dada a matriz $\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, podemos associá-la ao gráfico de Ferrers com quadrado de Durfee de tamanho 3 e tendo 8 partes de tamanho 2 e 5 partes de tamanho 1.

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$



Observamos que até um certo ponto os valores vão se repetindo de uma linha para outra na tabela e a cada duas linhas um valor é acrescentado nesta sequência (sequência em azul). De acordo com Sloane [11], esta é a sequência das partições balanceadas de n .

Definição 3.5.1. Uma **partição balanceada** de um inteiro positivo n é aquela em que a última parte é igual ao número de partes.

Lema 3.5.1. Seja n inteiro positivo e λ uma partição de n balanceada com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Então a partição conjugada de λ tem um número menor do que ou igual a $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee.

Demonstração. Considere n um inteiro positivo, e λ uma partição balanceada de n , com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$.

Se $k = 1$ nada temos a fazer, pois somente para $n = 1$ é possível ter uma partição balanceada.

Considere $k \geq 2$. Como $n - k^2 \leq n - 2^2 = n - 4$, além do quadrado de Durfee de tamanho k^2 , resta um número menor do que ou igual a $n - 4$ de pontos na partição conjugada de λ . \square

Baseado na observação e no lema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5.2. O número de **partições balanceadas** de um inteiro positivo $n \geq 7$ é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$c_k = 1,$$

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, t < k$$

$$\sum_{i=1}^k c_i + d_i = 2n - 4;$$

$$\sum_{i=1}^k c_i = n;$$

$$\sum_{i=1}^k d_i = n - 4.$$

Demonstração. Seja $n \geq 7$ inteiro positivo e λ uma partição balanceada de n com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Então conjugamos a partição λ , deslocamos as partes abaixo do quadrado de Durfee uma posição para a direita e completamos com uma coluna de tamanho $n - 4$. Observe que é possível completar, pois o Lema (3.5.1) garante que existe um número menor do que $n - 4$ partes abaixo do quadrado de Durfee e nenhuma dessas partes é igual ao tamanho do quadrado, pela definição de partição balanceada. Desta forma construímos uma partição de $2n - 4$, sem pontos à direita do quadrado de Durfee, que pelo Teorema (3.5.1) está associada a uma matriz do tipo (3.20).

Reciprocamente, dada uma matriz da forma (3.20), podemos associar a partição de $2n - 4$ com exatamente $n - 4$ partes abaixo e sem nenhum ponto à direita do quadrado de Durfee, a uma partição de n também com quadrado de Durfee de tamanho k . Primeiro tiram-se $n - 4$ pontos, um ponto de cada parte abaixo do quadrado de Durfee na representação de Ferrers da partição de $2n - 4$ e depois conjuga-se a partição. Portanto o número de partes é exatamente o tamanho do quadrado de Durfee e é igual à menor parte, o que resulta numa partição balanceada de n . \square

Observação: Nas restrições da matriz, é associado o sinal $(-1)^{\sum_{t=1}^k d_t}$. Este sinal não interfere na bijeção, pois não mexemos no sinal da matriz. Ele permanece o mesmo.

Exemplo 3.5.2. Para $n = 17$, pelo teorema, temos que dada uma partição balanceada de 17, é possível associá-la a uma partição de $2n - 4 = 30$, com 13 partes abaixo do quadrado de Durfee.

Portanto, temos as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

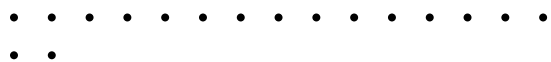
e vamos associá-las com as partições balanceadas de 17:

$$15 + 2, 11 + 3 + 3, 10 + 4 + 3, 9 + 5 + 3, 8 + 6 + 3, 7 + 7 + 3 \text{ e } 5 + 4 + 4 + 4.$$

Partições balanceadas de 17

Partições de 30 com 13 partes

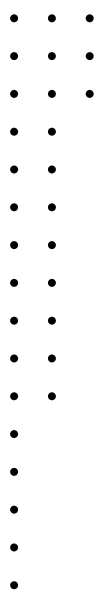
abaixo do Quadrado de Durfee

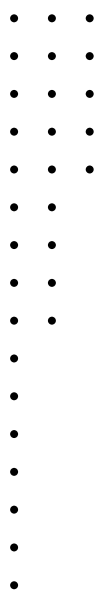
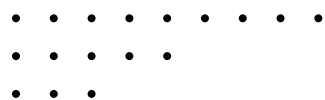
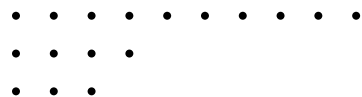


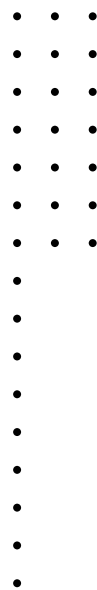
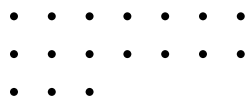
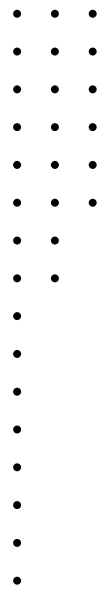
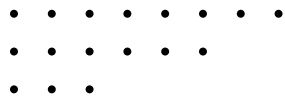
\longleftrightarrow

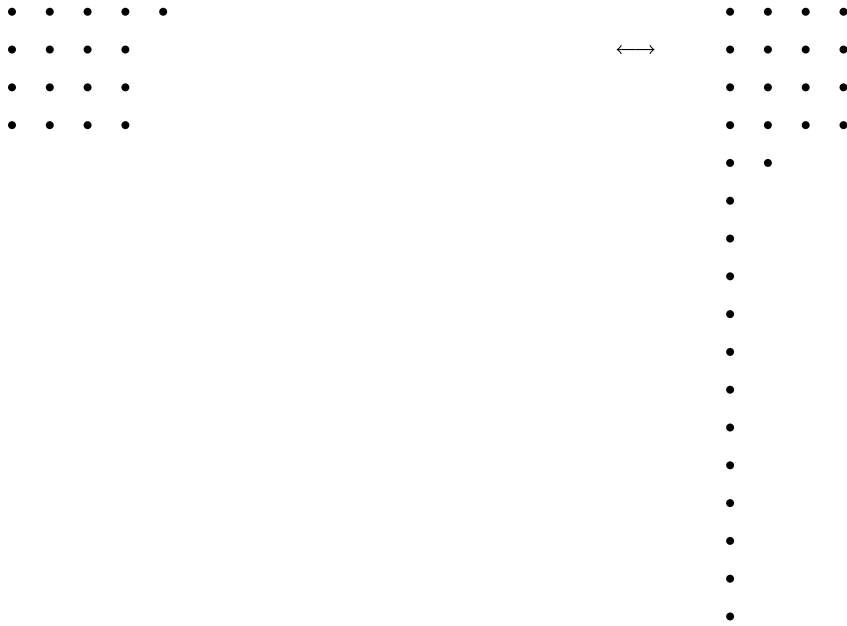


\longleftrightarrow









No que segue, $q(n, i)$ denota o número de partições de n com exatamente i partes abaixo do quadrado de Durfee e cuja maior parte, λ_1 , aparece no mínimo λ_1 vezes.

Teorema 3.5.3. *Seja n um inteiro positivo. Se $\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor < i \leq n-1$, então*

$$q(n, i) = \begin{cases} q(n-1, i-1), & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ q(n-1, i-1), & \text{se } n \text{ é par e } i \neq \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 \\ 1 + q(n-1, i-1), & \text{se } n \text{ é par e } i = \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente consideremos o caso n ímpar. É claro que $q(n-1, i-1) \leq q(n, i)$, pois basta acrescentar uma parte 1 às partições enumeradas por $q(n-1, i-1)$ para obter uma partição enumerada por $q(n, i)$. Verifiquemos agora que $q(n-1, i-1) \geq q(n, i)$. Para tanto, notemos que cada partição contada por $q(n, i)$, para $\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor < i \leq n-1$, possui ao menos uma parte 1. De fato, se todas as partes fossem maiores do que 1, então $n \geq 2i + s^2$, para algum ímpar $s > 1$ (s é a maior parte da partição) e, então, $n \geq 2i + s^2 \geq 2i + 3^2 > 2 \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 9 = n$, o que seria um absurdo. Logo, removendo uma parte 1 de cada partição, obtemos uma partição contada por $q(n-1, i-1)$. Assim fica estabelecido que $q(n-1, i-1) \geq q(n, i)$ e, portanto, $q(n-1, i-1) = q(n, i)$.

Suponhamos agora n par. Claramente, como no caso anterior, $q(n-1, i-1) \leq q(n, i)$. Vamos mostrar agora que para $\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor < i \leq n-1$, com $i \neq \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 = \frac{n-4}{2}$, todas as partições contadas por $q(n, i)$ têm ao menos uma parte 1, enquanto, para $i = \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 = \frac{n-4}{2}$ existe exatamente uma partição de n que não possui parte 1. Feito isto, conclui-se, similarmente ao caso anterior, que $q(n, i) \leq q(n-1, i-1)$ removendo-se uma parte 1.

Seja $\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor < i \leq n-1$ e $i \neq \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 = \frac{n-4}{2}$. Logo $i = \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + j = \frac{n}{2} - 5 + j$, donde $2i = n - 10 + 2j$. Logo $n \geq 2i + s^2 = n - 10 + 2j + s^2$, isto é, $s^2 = 10 - 2j$, para algum inteiro s par. Mas a única escolha para j de modo a termos um quadrado perfeito em $10 - 2j$ é $j = 3$, o que não é possível, pois neste caso teríamos $i = \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3$. Então, neste caso, todas as partições enumeradas por $q(n, i)$ têm ao menos uma parte 1.

Suponhamos agora $i = \lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor + 3 = \frac{n-4}{2}$, isto é, $2i = n - 4$. Logo, $n = 2^2 + 2i$. Assim, vemos que existe uma partição de n onde a maior parte s aparece ao menos s vezes e com exatamente i partes maiores do que 1 abaixo do quadrado de Durfee, qual seja, $n = 2 + \dots + 2$. \square

Teorema 3.5.4. *Seja n um inteiro positivo. Se $p^*(n) = p(n|\text{maior parte}, \lambda_1, \text{aparece no mínimo } \lambda_1 \text{ vezes})$, então,*

$$p^*(n) - p^*(n-1) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor} [q(n, i) - q(n-1, i-1)], & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-9}{2} \rfloor} [q(n, i) - q(n-1, i-1)], & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. É claro que se acrescentarmos uma parte 1 às partições enumeradas por $p^*(n-1)$ vamos obter partições de n contadas por $p^*(n)$. As demais partições de n com maior parte, λ_1 , aparecendo ao mesmo λ_1 vezes e exatamente i partes abaixo do quadrado de Durfee são enumeradas por $q(n, i) - q(n-1, i-1)$, pois devemos retirar de $q(n, i)$ o total, $q(n-1, i-1)$, daquelas partições que têm 1 como menor parte, uma vez que estas já foram obtidas anteriormente. Logo,

$$p^*(n) = p^*(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} [q(n, i) - q(n-1, i-1)].$$

O resultado segue pela Identidade 6 acima. \square

3.6 Mock Theta Function $f_1(q)$

A função geradora para $f_1(q)$ é

$$f_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(-q; q)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad c_s = 2.$$

O peso associado é $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $f_1(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40								
1	0																																															
2	0	1																																														
3	0	-1	0																																													
4	0	1	0	0																																												
5	0	-1	0	0	0																																											
6	0	1	0	0	0	1																																										
7	0	-1	0	0	0	-1	0																																									
8	0	1	0	0	0	1	-1	0																																								
9	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0																																							
10	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0																																						
11	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0																																					
12	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	1																																				
13	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	0	0	-1	0																																			
14	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	0																																		
15	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	0																																	
16	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2	0	0																																
17	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-2	1	0	0																													
18	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-1	2	-2	1	0	0																														
19	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	1	-2	2	-2	0	0	0																													
20	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	2	-2	3	-1	0	0	1																												
21	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	-2	3	-3	2	-1	0	-1	0																											
22	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-2	3	-3	2	0	1	-1	0																										
23	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	2	-3	3	-3	1	-1	1	-1	0																									
24	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	3	-3	4	-2	2	-1	2	-1	0																								
25	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-3	3	-4	3	-3	1	-2	2	0	0																							
26	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-3	4	-4	4	-2	2	-3	2	0	0																						
27	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	-3	-4	3	-4	4	-5	3	-3	3	-3	1	0	0																					
28	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	4	-4	6	-4	4	-3	4	-3	1	0	0																				
29	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-4	6	-5	-5	4	-4	4	-3	0	0	0																				
30	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-4	6	-6	6	-5	5	-5	5	-2	0	0	1																		
31	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	-2	-3	-3	-4	-5	4	-6	6	-7	6	-6	5	-6	4	-1	0	-1	0																		
32	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	2	3	3	4	-4	5	-5	6	-6	8	-7	7	-6	7	-6	4	-1	1	-1	0																
33	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	-2	-3	-3	-4	4	-5	5	-6	6	-8	8	-8	7	-8	7	-6	3	-1	1	-1	0															
34	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	2	3	3	4	-4	5	-5	6	-6	8	-9	9	-8	9	-8	8	-6	3	-1	2	-1	0														
35	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	-2	-3	-3	-4	4	-5	5	-7	6	-8	9	-10	9	-9	8	-6	2	-2	2	-1	0															
36	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	2	3	3	4	-4	5	-5	7	-7	8	-9	11	-10	11	-10	11	-10	9	-5	3	-3	3	0	0												
37	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	-2	-3	-3	-4	4	-5	5	-7	7	-8	9	-11	11	-12	11	-12	11	-11	8	-5	3	-4	2	0	0											
38	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	2	3	3	4	-4	5	-5	7	-7	8	-9	11	-12	13	-12	13	-13	13	-11	9	-5	5	-4	2	0	0										
39	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-2	-2	-3	-3	-4	4	-5	5	-7	7	-9	9	-11	12	-14	13	-14	14	-15	13	-12	8	-6	5	-5	1	0	0									
40	0	1	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	2	3	3	4	-4	5	-5	7	-7	9	-10	11	-12	15	-14	15	-15	17	-15	15	-12	9	-7	7	-4	1	0	0								

Figura 3.6: Tabela para $f_1(q)$

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao peso da função, que gera um sinal para cada matriz. Aqui, este sinal foi considerado.

Quando calculamos todas as partições de um dado n e fazemos seu gráfico de Ferrers, observamos que todo valor de n , de 1 até a maior parte, aparece pelo menos uma vez. Isto nos sugere então o seguinte resultado.

Teorema 3.6.1. *O número de partições de um inteiro positivo n , com maior parte $k < n$, em que todo inteiro de 1 até k aparece como parte pelo menos duas vezes é igual ao número de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 2, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad t < k \\ \sum_{i=1}^k c_i + d_i &= n; \end{aligned} \tag{3.24}$$

Demonstração. A prova deste teorema segue de modo análogo ao Corolário C em [5]. É suficiente construir uma bijeção do conjunto de partições de n com as restrições descritas no Teorema (3.6.1) e o conjunto de matrizes da forma (3.24), em que associa a cada $k \geq 1$ fixado, uma partição de n com todos os inteiros de 1 até k aparecendo como parte pelo menos duas vezes a uma matriz com as restrições (3.24), contendo exatamente k colunas de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1 além das duas obrigatórias, d_2 é o número de partes iguais a 2 além das duas obrigatórias e assim por diante.

Por exemplo, considere uma partição de n , λ , com maior parte igual 3, em que as partes 1, 2 e 3 aparecem pelo menos duas vezes. Tal partição é completamente caracterizada uma vez que for declarado quantas vezes cada uma das partes 1, 2 e 3 aparecem em λ . Sejam

- $d_1 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 1 é uma parte de λ
- $d_2 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 2 é uma parte de λ
- $d_3 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 3 é uma parte de λ .

Então teremos a matriz associada dada por

$$\begin{pmatrix} 3 + 3 & 2 + 2 & 1 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} 6 + d_2 + d_3 & 4 + d_3 & 2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

matriz nas restrições (3.24), com $1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Reciprocamente, dada a matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

com as restrições (3.24) e $k = 3$ colunas, é possível escrever

$$\begin{aligned} c_3 &= 2 \\ c_2 &= 4 + d_3 \\ c_1 &= 6 + d_2 + d_3. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Assim temos que

$$\begin{pmatrix} 6 + d_2 + d_3 & 4 + d_3 & 2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

igual a soma

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Disto segue que a partição λ associada tem como maior parte $k = 3$ e pode ser caracterizada pelos números

$d_1 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 2 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes, menos 2, que 3 é uma parte de λ ,

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.6.1. Dada a matriz $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, temos

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

correspondente a partição $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Lema 3.6.1. *O número de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 2, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad t < k \\ n &= \sum_{i=1}^k c_i; \end{aligned} \tag{3.29}$$

é igual ao número de matrizes com soma

$$\begin{cases} n \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par obtido pela soma de } k \text{ pares consecutivos anteriores a ele} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Pelas restrições (3.29) segue que para existir matriz, n deve ser escrito na forma $2 + 4 + 6 + \dots + 2k$, $k < n$. E portanto segue o resultado. \square

3.6.1 Conjectura

Utilizando [11], temos.

Conjectura: Para $m \geq 0$, $\# \left\{ \begin{matrix} m+6 \\ m \end{matrix} \right\}$ é igual ao número de partições de $m + 10$ com partes maiores ou iguais a 8.

3.7 Mock Theta Function $\gamma(q)$

A função geradora para $\gamma(q)$ é

$$\gamma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q; q)_n q^{n^2}}{(q^3; q^3)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad i_t \in \{2, 3\}, \quad 3|d_t, \quad c_s \in \{1, 2\}.$$

O peso associado é $(-1)^{1+c_1+\sum_{i=2}^s d_i}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $\gamma(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40				
1	1																																											
2	0	-1																																										
3	0	0	0																																									
4	1	0	0	1																																								
5	0	-1	0	0	-1																																							
6	0	0	0	0	0	-1																																						
7	1	0	0	1	0	0	1																																					
8	0	-1	0	0	-1	0	0	0																																				
9	0	0	0	0	0	-1	0	0	1																																			
10	1	0	0	1	0	0	2	0	0	-1																																		
11	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1																																	
12	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0																																
13	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1																															
14	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1																														
15	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1																													
16	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	1																													
17	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1																											
18	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1																										
19	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0																									
20	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0																								
21	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	0	0	2																								
22	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0																							
23	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0																						
24	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1																			
25	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0																			
26	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0																	
27	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1																		
28	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0																	
29	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-3	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0																
30	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	1															
31	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	3	0	0	0	0	0	1																
32	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-3	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	0	0	1													
33	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	0	-2	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1												
34	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	3	0	0	1	0	0	4	0	0	2	0	0	1	0	0	-1										
35	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-3	0	0	-2	0	0	-3	0	0	-2	0	0	-2	0	0	1	0	0	-1									
36	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	0	1									
37	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	4	0	0	3	0	0	2	0	0	0	0	-1								
38	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-3	0	0	-2	0	0	-3	0	0	-2	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
39	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1		

Figura 3.7: Tabela para $\gamma(q)$

Observamos que aparecem valores negativos na tabela. Isto ocorre devido ao peso da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado. Notamos também que na tabela existem diagonais com valores igual a 0 (sequência em rosa). Tais diagonais podem ser caracterizadas como segue.

Lema 3.7.1. *Dado $n > 0$, o número de matrizes com soma $\binom{n-k}{k}$, $0 \leq k \leq n-1$, $k \equiv 1, 2 \pmod{3}$, e da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \\ i_t &\in \{2, 3\} \\ 3 &| d_t \\ \sum d_t &= k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.31)$$

é igual a 0.

Demonstração. De fato, para que exista matriz na forma (3.31); devemos ter $3|d_t$, para todo $1 \leq t \leq s$, e portanto $\sum d_t = k \equiv 0 \pmod{3}$, seguindo o resultado. \square

Lema 3.7.2. *Dado $n > 0$, o número de matrizes com soma $\binom{3}{n-3}$, e da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \\ i_t &\in \{2, 3\} \\ 3 &| d_t \\ \sum d_t &= n-3, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.33)$$

é igual a 0.

Demonstração. A afirmação segue pelas restrições (3.33) da matriz uma vez que temos somente as possibilidades:

- $\sum c_t = 1$, com matrizes da forma $\begin{Bmatrix} 1 \\ n-1 \end{Bmatrix}$,
- $\sum c_t = 2$, com matrizes da forma $\begin{Bmatrix} 2 \\ n-2 \end{Bmatrix}$,

e nos demais casos $\sum c_t > 3$, pois $c_t = i_t + c_{t+1} + d_{t+1}$, com $i_t \in \{2, 3\}$. \square

Observação: Temos que a caracterização de $\gamma(q)$ e $\chi(q)$ são iguais a menos de sinal. Para as matrizes geradas por $\gamma(q)$ temos associado o sinal $(-1)^{1+c_1+\sum_{i=2}^s d_i}$, e para $\chi(q)$ temos o sinal $(-1)^{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^s d_i}$.

Para as matrizes com soma $\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix}$, teremos $d_t = 0$ para todo t e, portanto, as matrizes dessa forma na caracterização de $\chi(q)$ têm sinal atribuído positivo e não se cancelam. Diferentemente das matrizes dessa forma na caracterização de $\gamma(q)$ que têm o sinal $(-1)^{1+c_1}$, e portanto são as matrizes de $\chi(q)$ que se cancelam ou se somam.

3.8 Mock Theta Function $S_0(q)$

A função geradora para $S_0(q)$ é

$$S_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q; q^2)_n}{(-q^2; q^2)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$\begin{aligned} c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos pares;} \\ c_s &\in \{1, 2\} \\ 2 & \mid d_t \end{aligned}$$

O peso associado é $(-1)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^s d_i}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $S_0(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
1	1																																										
2	0	1																																									
3	-1	0	1																																								
4	0	-1	0	1																																							
5	1	0	0	0	1																																						
6	0	1	0	-1	0	1																																					
7	-1	0	0	0	-1	0	1																																				
8	0	-1	0	1	0	-1	0	1																																			
9	1	0	0	0	1	0	-2	0	1																																		
10	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1																																	
11	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	0																																
12	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	1																															
13	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-1	0	1																														
14	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-2	0	1																													
15	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	2	0	-2	0	1																												
16	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-3	0	1																											
17	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	3	0	-2	0	2																										
18	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	4	0	-3	0	1																									
19	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-4	0	3	0	-4	0	1																								
20	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-5	0	5	0	-3	0	1																							
21	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-4	0	6	0	-4	0	1																						
22	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-4	0	5	0	-6	0	6	0	-3	0	1																					
23	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	5	0	-7	0	6	0	-4	0	1																				
24	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	7	0	-8	0	6	0	-4	0	2																			
25	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	8	0	-8	0	8	0	-4	0	2																		
26	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-7	0	9	0	-9	0	7	0	-4	0	2																	
27	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-9	0	9	0	-11	0	8	0	-5	0	1																
28	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	8	0	-10	0	11	0	-11	0	8	0	-6	0	2															
29	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	10	0	-10	0	13	0	-12	0	10	0	-5	0	2														
30	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-8	0	10	0	-12	0	14	0	-12	0	10	0	-7	0	1													
31	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-10	0	11	0	-14	0	15	0	-15	0	10	0	-6	0	2												
32	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	8	0	-11	0	13	0	-16	0	16	0	-15	0	13	0	-7	0	2											
33	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	10	0	-12	0	15	0	-17	0	20	0	-16	0	13	0	-7	0	2										
34	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-8	0	11	0	-13	0	17	0	-19	0	20	0	-18	0	14	0	-7	0	2									
35	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-10	0	12	0	-16	0	18	0	-23	0	21	0	-20	0	14	0	-8	0	2								
36	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	8	0	-11	0	14	0	-18	0	21	0	24	0	24	0	-22	0	17	0	-8	0	2							
37	1	0	0	0	1	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	10	0	-12	0	17	0	-19	0	25	0	-26	0	27	0	-23	0	17	0	-8	0	3						
38	0	1	0	-1	0	1	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-8	0	11	0	-14	0	18	0	-22	0	27	0	-29	0	28	0	-26	0	18	0	-8	0	2					
39	-1	0	0	0	-1	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-10	0	12	0	-17	0	20	0	-26	0	29	0	-33	0	31	0	-27	0	18	0	-10	0	2				
40	0	-1	0	1	0	-1	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	8	0	-11	0	14	0	-19	0	23	0	-29	0	33	0	-35	0	35	0	-31	0	20	0	-9	0	3			

Figura 3.8: Tabela para $S_0(q)$

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao sinal da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado.

Lema 3.8.1. *Dado um inteiro $n > 0$, o número de matrizes com soma $\binom{n-k}{k}$, $0 \leq k \leq n-1$, k ímpar, de e da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos pares;} \\ 2|d_t \\ \sum d_t &= k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t \end{aligned} \quad (3.35)$$

é igual a 0.

Demonstração. De fato, como $2|d_t$, para todo $1 \leq t \leq s$, segue que d_t é par e portanto $\sum d_t = k$ deve ser par para que exista matriz da forma (3.35), seguindo o resultado. \square

3.8.1 Conjectura

Baseado na tabela e utilizando [11], temos a conjectura.

Conjectura: Dado $n > 0$, o número de matrizes com soma $\binom{n}{0}$, e da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned}
c_s &= \{1, 2\} \\
c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos ímpares;} \\
c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ um ímpar e outro par;} \\
c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos pares;} \\
2 &| d_t \\
\sum d_i &= 0, \\
n &= \sum c_t.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

é igual ao coeficiente da expansão da Mock Theta Function $\phi_0(q)$, ou ainda, é igual ao número de partições de n em partes ímpares tal que cada parte ocorre até duas vezes e se k ocorre como parte então todos os inteiros ímpares positivos menores do que k ocorrem também.

3.9 Mock Theta Function $S_1(q)$

A função geradora para $S_1(q)$ é

$$S_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)} (-q; q^2)_n}{(-q^2; q^2)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$\begin{aligned}
c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos ímpares;} \\
c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são um ímpar e outro par;} \\
c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos pares;} \\
c_s &\in \{1, 2\}, d_s \geq 2 \\
2 &| d_t
\end{aligned}$$

O peso associado é $(-1)^{1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^s d_i}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $S_1(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40														
1	0																																																					
2	0	0																																																				
3	1	0	0																																																			
4	0	1	0	0																																																		
5	-1	0	0	0	0																																																	
6	0	-1	0	0	0	0																																																
7	1	0	0	0	0	0	0																																															
8	0	1	0	0	0	1	0	0																																														
9	-1	0	0	0	0	0	1	0	0																																													
10	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0																																												
11	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0																																											
12	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0																																										
13	-1	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	0	0	0																																									
14	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0																																								
15	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-1	0	1	0	0																																							
16	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-1	0	1	0	0																																						
17	-1	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	0	-1	0	0	0	0																																					
18	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	1	0	-1	0	1	0	0																																				
19	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	2	0	-1	0	1	0	0																																			
20	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	1	0	0																																		
21	-1	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	1	0	-2	0	1	0	0																																		
22	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-3	0	0	0	0																																
23	1	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-2	0	3	0	0	0	0	0	1	0	0																														
24	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	4	0	-2	0	2	0	0																														
25	-1	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	3	0	-3	0	3	0	0	-3	0	1	0	0																												
26	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	3	0	-4	0	4	0	-3	0	0	0	0																												
27	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	4	0	-4	0	5	0	-3	0	1	0	0																											
28	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-4	0	5	0	-5	0	6	0	-2	0	1	0	0	0																									
29	-1	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	4	0	-6	0	5	0	-3	0	1	0	0																									
30	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	4	0	-5	0	5	0	-8	0	4	0	-3	0	1	0	0																								
31	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-5	0	7	0	-7	0	6	0	-3	0	1	0	0																							
32	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-6	0	9	0	-7	0	6	0	-3	0	2	0	0																						
33	-1	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-7	0	8	0	-9	0	6	0	-4	0	1	0	0																					
34	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	6	0	-9	0	9	0	-9	0	5	0	-4	0	1	0	0																				
35	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	8	0	-9	0	11	0	-9	0	7	0	-4	0	2	0	0																			
36	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-7	0	10	0	-10	0	12	0	-9	0	8	0	-5	0	2	0	0																		
37	-1	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	3	0	-5	0	6	0	-9	0	9	0	-12	0	12	0	-11	0	8	0	-5	0	1	0	0																	
38	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	-2	0	2	0	-3	0	4	0	-6	0	7	0	-10	0	10	0	-14	0	12	0	-11	0	8	0	-6	0	1	0	0																
39	1	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	5	0	-6	0	9	0	-10	0	13	0	-14	0	15	0	-12	0	10	0	-5	0	2	0	0															
40	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-4	0	6	0	-7	0	11	0	-11	0	15	0	-15	0	16	0	-12	0	12	0	-6	0	2	0	0														

Figura 3.9: Tabela para $S_1(q)$

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao sinal da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado.

Lema 3.9.1. *Dado um inteiro $n > 0$, o número de matrizes com soma $\left\{ \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix} \right\}, k = 0, 1$ e da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos pares;} \\ 2|d_t, \quad d_t &\geq 2 \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.39)$$

é igual a 0.

Demonstração. De fato, como $d_t \geq 2$ então toda matriz satisfazendo o conjunto de restrições (3.39) tem $\sum d_t \neq 0$ e $\sum d_t \neq 1$. \square

Lema 3.9.2. *Dado um inteiro $n > 0$, os números $\# \left\{ \begin{matrix} 3 \\ n-3 \end{matrix} \right\}, \# \left\{ \begin{matrix} 4 \\ n-4 \end{matrix} \right\}$ e $\# \left\{ \begin{matrix} 5 \\ n-5 \end{matrix} \right\}$ de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos pares;} \\ 2|d_t, \quad d_t &\geq 2 \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.41)$$

são iguais a 0.

Demonstração. Segue diretamente das restrições da matriz, uma vez que $d_t \geq 2$. \square

Lema 3.9.3. Dado um inteiro $n > 0$, o número $\#\left\{\begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix}\right\}, 0 \leq k \leq n-1, k \text{ ímpar}$, de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

com as restrições:

$$\begin{aligned} c_s &= \{1, 2\} \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ ambos pares;} \\ 2|d_t, \quad d_t &\geq 2 \\ \sum d_t &= k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t \end{aligned} \quad (3.43)$$

é igual a 0.

Demonstração. De fato, como $2|d_t$, para todo $1 \leq t \leq s$, segue que d_t é par e portanto $\sum d_t = k$ deve ser par para que exista matriz da forma (3.43), seguindo o resultado. \square

3.10 Mock Theta Function $f(q)$

A função geradora para $f(q)$ é

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad c_s \geq 1.$$

O peso associado é $(-1)^{d_1 - c_1 + 1}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $f(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
1	1																																										
2	-1	-1																																									
3	1	1	1																																								
4	-1	-1	-1	0																																							
5	1	1	1	0	0																																						
6	-1	-1	-1	0	-1	-1																																					
7	1	1	1	0	1	2	1																																				
8	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0																																			
9	1	1	1	0	1	1	0	0	1																																		
10	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-2																																	
11	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	1																																
12	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-1																																
13	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	2	2																														
14	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-2	-2	-2																													
15	1	1	1	0	1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2																												
16	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-2	-3	-3	-1																											
17	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	1	1	2	3	3	1	1																										
18	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-2	-2	-1	-3	-3	-3	-1	-2	-3																									
19	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	2	3	3	3	2	4	4	2																								
20	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-3	-2	-4	-4	-2	-1																							
21	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	2	2	3	2	4	3	2	3	3																						
22	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-2	-4	-4	-4	-4	-3																						
23	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	3	4	2	4	4	5	5	4	3	2																				
24	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-4	-5	-4	-4	-4	-2																					
25	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	3	1	4	4	5	4	5	5	4	3	3																		
26	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-4	-5	-4	-6	-6	-5	-3	-4	-4																	
27	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	2	5	4	5	4	7	6	5	5	6	5	3																
28	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	-5	-4	-7	-6	-6	-5	-7	-5	-4	-3															
29	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	4	3	5	4	7	5	6	6	7	6	5	4															
30	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	-6	-4	-7	-5	-7	-6	-8	-7	-8	-6	-5	-5													
31	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	5	4	6	4	7	5	8	7	9	8	8	7	6	7	5												
32	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	-6	-3	-7	-5	-8	-6	-9	-8	-9	-6	-8	-9	-6	-3											
33	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	5	3	5	3	7	5	8	5	9	8	9	8	9	10	6	4	5										
34	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	-6	-3	-8	-5	-8	-5	-10	-9	-11	-8	-11	-10	-8	-7	-8	-7									
35	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	5	3	6	4	8	5	8	5	11	9	11	9	11	11	9	11	11	7	5								
36	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	-6	-3	-8	-4	-8	-5	-11	-8	-11	-8	-12	-11	-12	-10	-11	-9	-7	-5							
37	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	5	3	-6	3	7	4	8	5	11	7	11	9	13	12	12	12	11	11	11	8	6						
38	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	6	-3	-8	-4	-9	-5	-11	-7	-12	-9	-14	-12	-14	-11	-14	-14	-14	-10	-7	-7					
39	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	4	1	5	3	-6	3	8	5	9	5	11	7	13	9	14	12	14	13	15	16	14	12	12	10	7				
40	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-2	-1	-2	-1	-3	-2	-4	-1	-5	-3	6	-3	-8	-4	-9	-4	-11	-7	-13	-8	-14	-12	-16	-12	-17	-15	-16	-13	-15	-14	-9	-6			

Figura 3.10: Tabela para $f'(q)$

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao sinal da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado.

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.10.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $f(q)$ em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $f_0(q)$.*

Observação: O sinal da função não interfere na bijeção.

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta function $f_0(q)$, somamos cada coluna, colocamos o resultado na posição c_i correspondente e fazemos os d'_i s iguais a zero para obter uma matriz da Mock Theta function $f(q)$, com os d'_i s iguais a zero.

Reciprocamente, dada uma matriz da Mock Theta function $f(q)$ com os d'_i s iguais a zero, montamos uma matriz de $f_0(q)$ seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $c_s = 1$. \square

Exemplo 3.10.1. *Considere $n = 10$. Vamos começar com as matrizes de $f_0(q)$ e chegar nas matrizes de $f(q)$, apenas somando as colunas, colocando a soma no c_i correspondente e fazendo $d_i = 0$.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $f(q)$ e seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $c_s = 1$, chegamos nas matrizes de $f_0(q)$.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}; \text{ como } c_1 = 1, \text{ temos que } d_1 = 10 - 1 = 9.$$

$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; como $c_2 = 1$, temos que $d_2 = 1 - 1 = 0$; logo $c_1 = 1 + 0 + 2 = 3$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 9 - 3 = 6$.

$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; como $c_2 = 1$, temos que $d_2 = 2 - 1 = 1$; logo $c_1 = 1 + 1 + 2 = 4$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 8 - 4 = 4$.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; como $c_2 = 1$, temos que $d_2 = 3 - 1 = 2$; logo $c_1 = 1 + 2 + 2 = 5$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 7 - 5 = 2$.

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; como $c_2 = 1$, temos que $d_2 = 4 - 1 = 3$; logo $c_1 = 1 + 3 + 2 = 6$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 6 - 6 = 0$.

$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; como $c_3 = 1$, temos que $d_3 = 1 - 1 = 0$; logo $c_2 = 1 + 0 + 2 = 3$, pela restrição e daí temos que $d_2 = 3 - 3 = 0$. Repetindo o processo, $c_1 = 3 + 0 + 2 = 5$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 6 - 5 = 1$.

Uma interpretação combinatória para $f(q)$ pode ser encontrada em [10], em termos do rank de uma partição.

Definição 3.10.1. O **rank** de uma partição λ , denotado por $r(\lambda)$, é definido como a maior parte menos o número de partes.

Observação: Assumimos que o rank da partição vazia é zero.

Assim, sendo P o conjunto de partições, a Mock Theta Function $f(q)$ pode ser escrita como

$$f(q) = 1 + \sum_{\lambda \in P} (-1)^{r(\lambda)} q^{|\lambda|}. \quad (3.44)$$

Teorema 3.10.2. *O coeficiente de q^n em (3.44) é igual ao número de matrizes de duas linhas de n , satisfazendo a restrição*

$$c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad c_s \geq 1, \quad \sum d_t + \sum c_t = n, \quad \text{e peso } (-1)^{d_1 - c_1 + 1}.$$

Demonstração. Para mostrar esse resultado, precisamos apenas mostrar que a paridade do rank é a mesma que a das matrizes geradas pela restrição. Dada uma matriz satisfazendo as restrições acima, ela pode ser decomposta como no Teorema (2.2.1), onde acrescentamos variáveis de folga j_1, j_2, \dots , em que j_1 representa o número de partes iguais a 1 na partição conjugada, j_2 representa o número de partes iguais a 2 na partição conjugada, e assim por diante.

Vamos ver como o sinal dessas matrizes se relaciona com o rank. Para $n = 3$, a matriz pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

Acrescentando as variáveis de folga e usando a restrição, temos que:

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 + j_3, \\ c_2 &= 3 + j_2 + j_3 + d_3, \\ c_1 &= 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3, \end{aligned} \quad (3.46)$$

com $j_1, j_2, j_3 \geq 0$. Assim, a matriz obtida é:

$$\begin{pmatrix} 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3 & 3 + j_2 + j_3 + d_3 & 1 + j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

O sinal desta matriz é dado por $(-1)^{d_1 - c_1 + 1} = (-1)^{d_1 - (5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3) + 1}$.

Observe que $3 + j_1 + j_2 + j_3$ é a maior parte da partição e $2 + 1 + d_1 + d_2 + d_3$ é o número de partes da partição. Logo, $r(\lambda) = j_1 + j_2 + j_3 - (d_1 + d_2 + d_3)$. Temos que o inteiro que aparece em c_3 é sempre ímpar, logo a diferença entre esse ímpar e 1 é um número par. Agora, $(d_1 - j_1 - j_2 - j_3 - d_2 - d_3)$ tem a mesma paridade que $(j_1 + j_2 + j_3 - (d_1 + d_2 + d_3))$. Portanto, a paridade do peso da matriz é igual à paridade do rank. Note que é necessário acrescentar o 1 no peso, pois o primeiro ponto do gráfico de Ferrers é contado na maior parte e também no número de partes.

Logo, o coeficiente de $1 + \sum_{\lambda \in P} (-1)^{r(\lambda)} q^{|\lambda|}$ é igual ao número de matrizes dadas pela restrição anterior. \square

Observação: Notamos que no começo de cada linha os valores se repetem até um certo ponto, e a cada duas linhas um valor é acrescentado à sequência (sequência em azul). Esta sequência não foi localizada em [11] e por isto ainda não temos nenhum resultado sobre ela.

3.11 Mock Theta Function $\Phi(q)$

A função geradora para $\Phi(q)$ é

$$\Phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q; q^2)_n q^{n^2}}{(-q; q)_{2n}}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad i_t \in \{1, 2\} \text{ se } t \text{ é ímpar;}$$

$$c_t = c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } t \text{ é par,}$$

$$c_s = 0 \text{ e } s \text{ par.}$$

O peso associado é $(-1)^{c_1+d_1}$.

Consideremos a tabela da Mock Theta Function $\Phi(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
1	-1																																										
2	1	1																																									
3	-1	0	0																																								
4	1	0	-1	1																																							
5	-1	0	0	-1	-1																																						
6	1	0	0	2	0	0																																					
7	-1	0	0	-1	0	0	-1																																				
8	1	0	0	1	-1	1	1	1																																			
9	-1	0	0	-1	0	-1	-1	1	-1																																		
10	1	0	0	1	0	2	0	0	1	1																																	
11	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	-3	0	0																																
12	1	0	0	1	0	1	-1	1	2	0	-1	1																															
13	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-2	1	-2	-1	-1																														
14	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	0	1																													
15	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	-3	1	-1	-1	-1																												
16	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	3	-1	1																											
17	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-2	1	-4	-1	0	-1	-2																										
18	1	0	0	1	0	1	0	1	1	2	1	0	3	1	-1	4	1	1																									
19	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	0	-4	1	-2	-3	-1	1	-1																								
20	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	3	0	2	4	-2	3	1	1																						
21	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-3	1	-4	-1	-1	-3	-3	1	-1																						
22	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	0	3	2	1	6	-1	2	1	1																					
23	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	0	-4	0	-4	-3	0	-2	-5	0	-1																				
24	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	3	-2	7	1	1	0	2																			
25	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-3	0	-5	-1	-2	-5	-2	0	-5	0	-2																		
26	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1	4	2	2	7	-2	6	3	2	1	2																		
27	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-1	-5	0	-4	-3	-1	-5	-4	2	-6	-1	-1																	
28	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	1	2	4	1	3	4	0	9	-2	4	5	3	-1	2															
29	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-4	0	-5	-2	-4	-6	-1	-4	-9	3	-4	-2	-2														
30	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	3	3	1	4	3	3	7	-2	10	3	2	4	6	-1	1													
31	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-3	-1	-5	-1	-5	-4	-2	-7	-4	-1	-11	1	-3	-1	-2												
32	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	4	2	4	5	1	10	-1	9	5	2	2	7	0	2												
33	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-3	-2	-4	-1	-6	-3	-4	-6	-3	-7	-7	2	-13	-2	-3	0	-2										
34	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	2	3	3	3	2	5	4	3	8	1	12	0	7	9	4	0	8	1	2									
35	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-3	-2	-3	-2	-6	-2	-5	-5	-5	-8	-3	-6	-13	4	-11	-4	-4	0	-2								
36	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	3	2	2	3	2	3	5	3	4	6	3	10	-1	13	4	4	9	8	-2	8	0	2						
37	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-3	-2	-3	-3	-5	-2	-6	-4	-6	-7	-4	-10	-7	-2	-17	3	-10	-6	-5	0	-3						
38	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	4	4	3	5	5	5	9	2	14	1	12	9	4	9	13	-3	8	2	2					
39	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-3	-2	-3	-3	-4	-3	-6	-3	-7	-6	-5	-9	-5	-9	-12	1	-21	0	-6	-7	-8	1	-2					
40	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	3	4	5	4	6	7	3	12	2	15	3	10	13	5	4	18	-2	6	1	3			

Figura 3.11: Tabela para $\Phi(q)$

Observamos que existem valores negativos na tabela. Isto ocorre devido ao peso da função, que gera um sinal para cada matriz e este sinal é considerado.

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.11.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $\Phi(q)$ em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $\Phi_0(q)$.*

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta Function $\Phi(q)$, com os $d'_i s = 0$ primeiro somamos os $c'_i s$, dois a dois, obtendo uma matriz com a metade do número de colunas. Isto pode ser feito pois o número de colunas é sempre par. Depois disso, construímos uma matriz da Mock Theta Function $\Phi_0(q)$, apenas observando a sua restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$. Reciprocamente, pegamos uma matriz da Mock Theta Function $\Phi_0(q)$ e somamos os valores em cada coluna, para obter os $d'_i s = 0$. Depois disso, fazemos uma divisão nos $c'_i s$, de forma que, para cada valor de n , $c_i = \begin{cases} \frac{c_i}{2} + 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ \lceil \frac{c_i}{2} \rceil + \lceil \frac{c_i}{2} \rceil, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$ $1 \leq i \leq s - 2$ e como o $c_s = 0$, já obtemos o c_{s-1} como o próprio número resultante da soma. Assim obtemos uma matriz da Mock Theta Function $\Phi(q)$. □

Exemplo 3.11.1. *Considere $n = 10$. Vamos começar com as matrizes de $\Phi(q)$ e chegar nas matrizes de $\Phi_0(q)$, somando os $c'_i s$ dois a dois e depois usando a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$.*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $\Phi_0(q)$, somamos suas colunas, para obter os $d'_i s = 0$ e efetuamos a divisão dos $c'_i s$ como na demonstração.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Observe que } 6 = 4 + 2, 3 = 2 + 1 \text{ e como } c_6 = 0, \text{ segue que } c_5 = 1.$$

3.12 Mock Theta Function $\rho(q)$

A função geradora para $\rho(q)$ é

$$\rho(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q; q^2)_{n+1}}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad i_t \in \{1, 2\}, \quad c_s = 0.$$

Consideremos a tabela da Mock Theta Function $\rho(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41											
1	1																																																			
2	1	1																																																		
3	1	1	1																																																	
4	1	1	1	1																																																
5	1	1	1	1	2	1																																														
6	1	1	1	1	2	2	1																																													
7	1	1	1	1	2	2	2	2																																												
8	1	1	1	1	2	2	2	3	3	1																																										
9	1	1	1	1	2	2	3	4	3	1																																										
10	1	1	1	1	2	2	3	4	4	4	2																																									
11	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5	4	2																																								
12	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	6	5	2																																							
13	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	5	2																																						
14	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	8	6	2																																					
15	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	10	10	7	2																																				
16	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	11	13	11	7	3																																			
17	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	14	14	13	9	3																																		
18	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17	15	9	3																																	
19	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	17	20	20	16	10	3																																
20	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	21	23	23	19	11	3																															
21	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	25	27	26	21	12	4																														
22	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	26	30	31	30	24	13	4																													
23	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	31	34	37	34	26	15	4																												
24	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	36	41	42	38	30	16	4																											
25	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	37	44	47	48	45	32	17	5																										
26	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	45	50	55	56	49	36	19	5																									
27	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	52	59	64	63	56	40	20	5																								
28	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	53	62	69	73	72	62	44	22	6																							
29	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	63	72	80	84	81	70	48	23	6																						
30	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	74	84	92	96	93	77	53	26	6																					
31	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	75	87	97	106	110	103	87	59	27	7																				
32	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	88	100	113	122	124	118	96	63	30	7																			
33	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	102	117	130	139	142	131	106	70	32	7																		
34	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	103	120	135	149	160	159	147	118	75	34	8																	
35	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	121	138	156	172	181	181	164	129	83	37	8																
36	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	140	160	180	196	206	203	183	143	89	39	9															
37	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	141	163	185	206	224	233	229	203	157	97	42	10														
38	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	164	188	213	236	255	264	255	226	173	105	45	10													
39	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	165	190	217	244	270	290	296	287	250	188	115	48	10												
40	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	165	191	220	249	280	308	327	336	319	276	208	123	51	11											
41	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	165	192	221	252	287	320	349	372	375	356	307	225	133	55	11										

Figura 3.12: Tabela para $\rho(q)$

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.12.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $\rho(q)$ em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $\psi_1(q)$.*

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta function $\psi_1(q)$, primeiro acrescentamos uma coluna de zeros, à direita da matriz, pois na restrição da ρ temos que ter $c_s = 0$, depois somamos cada coluna, colocamos o resultado na posição c_i correspondente e fazemos os d'_i s iguais a zero para obter uma matriz da Mock Theta function $\rho(q)$, com os d'_i s iguais a zero.

Reciprocamente, dada uma matriz da Mock Theta function $\rho(q)$ com os d'_i s iguais a zero, primeiro excluimos a última coluna e depois montamos uma matriz de $\psi_1(q)$ seguindo a restrição $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $c_s = 1$, $d_t \in \{0, 1\}$. \square

Exemplo 3.12.1. *Considere $n = 16$. Vamos começar com as matrizes de $\psi_1(q)$ e chegar nas matrizes de $\rho(q)$, apenas acrescentando uma coluna de zeros, somando as colunas, colocando a soma no c_i correspondente e fazendo $d_i = 0$.*

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $\rho(q)$ com os d'_i s iguais a zero, retiramos a última coluna e seguindo a restrição $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $c_s = 1$, $d_t \in \{0, 1\}$, chegamos nas matrizes de $\psi_1(q)$.

$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; como $c_5 = 1$, temos que $d_5 = 1 - 1 = 0$; logo $c_4 = 1 + 0 + 1 = 2$, pela restrição e daí temos que $d_4 = 3 - 3 = 0$. Repetindo o processo, $c_3 = 2 + 0 + 1 = 3$, pela restrição e daí temos que $d_3 = 3 - 3 = 0$. Seguindo o mesmo raciocínio, $c_2 = 3 + 0 + 1 = 4$, pela restrição e daí temos que $d_2 = 4 - 4 = 0$. Por fim, $c_1 = 4 + 0 + 1 = 5$, pela restrição e daí temos que $d_1 = 6 - 5 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3.12.1 Conjectura

De acordo com [11], temos a conjectura (sequência em lilás).

Conjectura: Dado $m \geq 5$, considere $p_d(m)$ o número de partições de m em partes distintas.

Então

$$p_d(m) = \#\left\{ \begin{matrix} m \\ w \end{matrix} \right\}, \text{ com } w \geq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor.$$

3.13 Mock Theta Function $\sigma(q)$

A função geradora para $\sigma(q)$ é

$$\sigma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\binom{n+2}{2}}}{(q; q^2)_{n+1}}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad i_t \in \{1, 2\}, \quad c_s = 1.$$

Consider a tabela da Mock Theta Function $\sigma(q)$.

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.13.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $\sigma(q)$, em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $\psi_0(q)$.*

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta function $\psi_0(q)$, somamos cada coluna, colocamos o resultado na posição c_i correspondente e fazemos os d'_i s iguais a zero para obter uma matriz da Mock Theta function $\sigma(q)$, com os d'_i s iguais a zero.

Reciprocamente, dada uma matriz da Mock Theta function $\sigma(q)$ com os d'_i s iguais a zero, montamos uma matriz de $\psi_0(q)$ seguindo a restrição $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s = 1$ e $d_s = 0$. □

Exemplo 3.13.1. *Considere $n = 15$. Vamos começar com as matrizes de $\psi_0(q)$ e chegar nas matrizes de $\sigma(q)$, apenas somando as colunas, colocando a soma no c_i correspondente e fazendo $d_i = 0$.*

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $\sigma(q)$ e seguindo a restrição $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s = 1$ e $d_s = 0$, chegamos nas matrizes de $\psi_0(q)$.

$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; temos $c_5 = 1$ e $d_5 = 0$, pela restrição, logo $c_4 = 1 + 1 + 0 = 2$, pela restrição e daí temos que $d_4 = 2 - 2 = 0$. Repetindo o processo, $c_3 = 1 + 2 + 0 = 3$, pela restrição e daí temos que $d_3 = 3 - 3 = 0$. Novamente, $c_2 = 1 + 3 + 0 = 4$ e $d_2 = 4 - 4 = 1$. Por fim, $c_1 = 1 + 4 + 0 = 5$ e $d_1 = 5 - 5 = 0$.

$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; temos $c_4 = 1$ e $d_4 = 0$, pela restrição, logo $c_3 = 1 + 1 + 0 = 2$, pela restrição e daí temos que $d_3 = 3 - 2 = 1$. Repetindo o processo, $c_2 = 1 + 2 + 1 = 4$, pela restrição e daí temos que $d_2 = 5 - 4 = 1$. Por fim, $c_1 = 1 + 4 + 1 = 6$ e $d_1 = 6 - 6 = 0$.

3.13.1 Conjectura

De acordo com [11], temos a conjectura (sequência em rosa).

Conjectura: Dado $m \geq 6$, considere $p_D(m)$ o número de partições de m em partes distintas maiores do que ou iguais a 2. Então

$$p_D(m) = \#\left\{ \begin{matrix} m \\ w \end{matrix} \right\}, \text{ com } w \geq \lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor.$$

3.14 Mock Theta Function $U_0(q)$

A função geradora para $U_0(q)$ é

$$U_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} (-q; q^2)_n}{(-q^4; q^4)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$\begin{aligned} c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos ímpares;} \\ c_t &= 3 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são um ímpar e outro par;} \\ c_t &= 4 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos pares;} \\ c_s &\in \{1, 2\} \\ 4 &\mid d_t \end{aligned}$$

O peso associado é $(-1)^{\frac{1}{4} \sum_{t=1}^s d_t}$.

Consider a tabela da Mock Theta Function $U_0(q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40										
1	1																																																	
2	0	1																																																
3	0	0	0																																															
4	0	0	0	1																																														
5	-1	0	0	0	1																																													
6	0	-1	0	0	0	0																																												
7	0	0	0	0	0	0	1																																											
8	0	0	0	-1	0	0	0	1																																										
9	1	0	0	0	-1	0	0	0	1																																									
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1																																								
11	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0																																							
12	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	1																																						
13	-1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	1																																					
14	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1																																				
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1																																			
16	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	1																																		
17	1	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	2																																	
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	1																																
19	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1																															
20	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-2	0	0	0	1																														
21	-1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	8	0	0	0	-4	0	0	0	1																													
22	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	1																													
23	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	1																												
24	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	3	0	0	0	-3	0	0	0	2																										
25	1	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	5	0	0	0	-4	0	0	0	2																									
26	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	4	0	0	0	-3	0	0	0	2																									
27	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-2	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	1																								
28	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-4	0	0	0	4	0	0	0	-4	0	0	0	2																						
29	-1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	6	0	0	0	-5	0	0	0	2																					
30	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-4	0	0	0	5	0	0	0	-4	0	0	0	1																				
31	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	-3	0	0	0	2																			
32	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	-5	0	0	0	6	0	0	0	-6	0	0	0	2																		
33	1	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	6	0	0	0	-7	0	0	0	9	0	0	0	-6	0	0	0	2																		
34	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	4	0	0	0	-6	0	0	0	7	0	0	0	-4	0	0	0	2																
35	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-4	0	0	0	5	0	0	0	-5	0	0	0	2																
36	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-4	0	0	0	6	0	0	0	-7	0	0	0	9	0	0	0	-7	0	0	0	2														
37	-1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	8	0	0	0	-11	0	0	0	10	0	0	0	-7	0	0	0	3													
38	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-4	0	0	0	6	0	0	0	-9	0	0	0	7	0	0	0	-6	0	0	0	2													
39	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	5	0	0	0	-6	0	0	0	8	0	0	0	-6	0	0	0	2												
40	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	-6	0	0	0	8	0	0	0	-11	0	0	0	12	0	0	0	-8	0	0	0	2										

Figura 3.14: Tabela para $U_0(q)$

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao sinal da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado.

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.14.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $U_0(q)$ em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $\Phi_0(q)$.*

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta function $\Phi_0(q)$, somamos cada coluna, colocamos o resultado na posição c_i correspondente e fazemos os d_i 's iguais a zero para obter uma matriz da Mock Theta function $U_0(q)$, com os d_i 's iguais a zero.

Reciprocamente, dada uma matriz da Mock Theta function $U_0(q)$ com os d_i 's iguais a zero, montamos uma matriz de $\Phi_0(q)$ seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$. \square

Exemplo 3.14.1. *Considere $n = 15$. Vamos começar com as matrizes de $\Phi_0(q)$ e chegar nas matrizes de $U_0(q)$, apenas somando as colunas, colocando a soma no c_i correspondente e fazendo $d_i = 0$.*

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $U_0(q)$ e seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$. chegamos nas matrizes de $\Phi_0(q)$.

$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *Note que temos o $c_3 = 2$ satisfaz a restrição, mas se usarmos a restrição para gerar a matriz, vemos que a construção é diferente da que temos. Portanto, temos $c_3 = 1$ e daí $d_3 = 2 - 1 = 1$, pela restrição, logo $c_2 = 2 + 1 + 2 * 2 = 5$, pela restrição e daí temos que $d_2 = 5 - 5 = 0$. Por fim, $c_1 = 2 + 5 + 2 * 0 = 7$ e $d_1 = 8 - 7 = 1$.*

3.15 Mock Theta Function $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$

A função geradora para $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$ é

$$\frac{1}{2}(1 + V_0(q)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)^2} (-q; q^2)_n}{(q; q^2)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos ímpares;}$$

$$c_t = 3 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são um ímpar e outro par;}$$

$$c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \text{ se } c_t, c_{t+1} \text{ são ambos pares;}$$

$$c_s \in \{1, 2\}$$

Calculamos todas as matrizes de um dado n e montamos a tabela.

Quando procuramos o significado da sequência composta pelo último número de cada linha em [11], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.15.1. *O número de matrizes de duas linhas que representam $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$ em que a soma da segunda linha é 0 é igual ao coeficiente da Mock Theta Function $\Phi_0(q)$.*

Demonstração. Dada uma matriz da Mock Theta function $\Phi_0(q)$, somamos cada coluna, colocamos o resultado na posição c_i correspondente e fazemos os d'_i s iguais a zero para obter uma matriz da Mock Theta function $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$, com os d'_i s iguais a zero.

Reciprocamente, dada uma matriz da Mock Theta function $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$ com os d'_i s iguais a zero, montamos uma matriz de $\Phi_0(q)$ seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$. □

Exemplo 3.15.1. *Considere $n = 15$. Vamos começar com as matrizes de $\Phi_0(q)$ e chegar nas matrizes de $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$, apenas somando as colunas, colocando a soma no c_i correspondente e fazendo $d_i = 0$.*

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Reciprocamente, pegamos as matrizes de $\frac{1}{2}(1 + V_0(q))$ e seguindo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $d_t \in \{0, 1\}$, $c_s \in \{1, 2\}$. chegamos nas matrizes de $\Phi_0(q)$.

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

*Note que temos o $c_3 = 2$ satisfaz a restrição, mas se usarmos a restrição para gerar a matriz, vemos que a construção é diferente da que temos. Portanto, temos $c_3 = 1$ e daí $d_3 = 2 - 1 = 1$, pela restrição, logo $c_2 = 2 + 1 + 2 * 2 = 5$, pela restrição e daí temos que $d_2 = 5 - 5 = 0$. Por fim, $c_1 = 2 + 5 + 2 * 0 = 7$ e $d_1 = 8 - 7 = 1$.*

Observação: A sequência descrita no começo de cada linha, marcada em cinza, não foi encontrada em [11].

3.16 Mock Theta Function $\phi(q)$

A função geradora para $\phi(q)$ é

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q^2; q^2)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad 2|t, \quad c_s = 1.$$

O peso associado é $(-1)^{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^s d_t}$.

Quando calculamos todas as matrizes de um dado n , seguindo o que foi feito no Capítulo 1, observamos que todas as matrizes são construídas do mesmo modo: na primeira linha estão partições em partes ímpares de m , $m \geq n$ e a segunda linha é sempre composta de números pares. Ao fazermos os gráficos de Ferrers dessas partições, notamos também que só temos partes menores do que o tamanho do quadrado de Durfee. Então, considerando que a segunda linha da matriz, após ser somada, conta o número de partes abaixo do quadrado de Durfee, temos a tabela da Mock Theta Function $\phi(q)$.

Observe que na tabela aparecem sinais negativos. Isto ocorre devido ao sinal da função, que gera um sinal para cada matriz, e este sinal é considerado.

Baseado na forma como as matrizes foram construídas, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.16.1. *O número de partições de um inteiro positivo n com quadrado de Durfee de tamanho k , em que nenhuma parte excede o tamanho do quadrado de Durfee e um número par de vezes é igual ao número de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 1, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad t < k \\ \sum_{i=1}^k c_i + d_i &= n \\ 2 &\mid d_i; \end{aligned} \tag{3.48}$$

Demonstração. A prova deste teorema segue de modo análogo ao corolário C em [5]. É suficiente construir uma bijeção do conjunto de partições de n com as restrições descritas no Teorema (3.16.1) e o conjunto de matrizes da forma (3.48), em que associa a cada $k \geq 1$ fixado, uma partição de n com quadrado de Durfee de tamanho k e as partes abaixo dele aparecendo um número par de vezes a uma matriz com as restrições (3.48), contendo exatamente k colunas de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1 abaixo do quadrado de Durfee, d_2 é o número de partes iguais a 2 e assim por diante, além das partes que estão no quadrado de Durfee.

Por exemplo, uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ (suponha $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$) com tamanho do quadrado de Durfee igual 3 é completamente caracterizada, uma vez que for declarado quantas vezes cada um dos números 1, 2 e 3 aparece como parte abaixo do quadrado de Durfee de λ . Seja

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

uma matriz. Por (3.48) é possível escrever

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 \\ c_2 &= 3 + d_3 \\ c_1 &= 5 + d_2 + d_3, \end{aligned} \tag{3.50}$$

Portanto, a matriz (3.48) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 5 + d_2 + d_3 & 3 + d_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

ou, ainda, como a soma

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Da discussão anterior, segue que a partição λ pode ser caracterizada pelos números

$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ

$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 2 é uma parte de λ

$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ .

Como os d_i 's são pares, cada parte abaixo do quadrado de Durfee aparece um número par de vezes.

□

Exemplo 3.16.1. Considere a matriz $\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ela pode ser associada a partição $5 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Uma interpretação combinatória é dada em [10] para $\Phi(-q)$. Seja DO o conjunto de partições em partes ímpares distintas. Temos que:

$$\phi(-q) = \sum_{\lambda \in DO} (-1)^{\frac{\lambda_1+1}{2}} q^{|\lambda|},$$

em que λ_1 é a maior parte da partição.

Teorema 3.16.2. O coeficiente de $\phi(-q)$ é igual ao número de matrizes de duas linhas satisfazendo a restrição $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $2|d_t$, $c_s = 1$ e tendo sinal $(-1)^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s d_i}$, se n for par e $(-1)^{1+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s d_i}$, caso contrário.

Demonstração. Dada uma matriz de duas linhas, satisfazendo as restrições dadas, ela pode ser levada em uma partição em partes ímpares distintas apenas somando-se as colunas. Reciprocamente, dada uma partição em partes ímpares distintas, ela é levada à uma matriz de duas linhas apenas seguindo a restrição dada, observando que a soma das entradas nas colunas deve ser igual à parte equivalente. Observe na matriz para $n = 3$, $\lambda_1 = 5 + d_1 + d_2 + d_3$. Logo, $\frac{\lambda_1+1}{2}$ difere de $\frac{1}{2} \sum_{t=1}^s d_t$ pelo número de colunas. Portanto, se n é par, o sinal será igual e se n é ímpar, é necessário acrescentar o 1 para que o sinal coincida. \square

Exemplo 3.16.2. Considere $n = 8$.

As matrizes de duas linhas satisfazendo as restrições são: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $-\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Somando as colunas, obtemos as partições $7 + 1$, cujo sinal é $(-1)^{\frac{7+1}{2}} = 1$ e $5 + 3$, cujo sinal é $(-1)^{\frac{5+1}{2}} = -1$.

Reciprocamente, dadas as partições $7 + 1$, que tem sinal 1, e $5 + 3$, que tem sinal -1 , podemos construir as matrizes equivalentes, apenas seguindo a restrição:

$$7 + 1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pois } c_2 = 1 \text{ e } d_2 = 1 - 1 = 0; c_1 = 2 + c_2 + d_2 = 2 + 1 + 0 = 3 \text{ e } d_1 = 7 - 3 = 4.$$

E o sinal é igual a $(-1)^{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 d_t} = (-1)^{0+4} = 1$.

$$5 + 3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ pois } c_2 = 1 \text{ e } d_2 = 3 - 1 = 2; c_1 = 2 + c_2 + d_2 = 2 + 1 + 3 = 5 \text{ e } d_1 = 5 - 5 = 0.$$

E o sinal é igual a $(-1)^{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 d_t} = (-1)^{2+0} = -1$.

Teorema 3.16.3. (Vermelho) $\#\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é quadrado perfeito} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração. Segue direto da restrição da matriz. \square

3.16.1 Conjecturas

As conjecturas apresentadas a seguir foram feitas com o auxílio de [11].

Conjectura 1:(Verde) $\#\begin{Bmatrix} 2i \\ n - 2i \end{Bmatrix} = (-1)^i \cdot p_3 \left(\left\lfloor \frac{2i+3}{2} \right\rfloor + 3 \right),$

em que $p_3(n+3)$ = número de partições de $n+3$ em um número ímpar de partes, cada parte $> 3, \forall i \geq 1$.

Conjectura 1: (Laranja) $\#\left\{ \begin{matrix} 2i+1 \\ n-2i-1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{i+1} \cdot p_4 \left(\left\lfloor \frac{2i+8}{2} \right\rfloor + 4 \right),$

em que $p_4(n+4)$ = número de partições de n em um número par de partes, cada parte ≥ 4 , $\forall i \geq 4$.

Conjectura 1: (Amarelo) $\#\left\{ \begin{matrix} 2i \\ n-2i \end{matrix} \right\} = (-1)^{i+1} \cdot \tilde{p} \left(\left\lfloor \frac{2i-9}{2} \right\rfloor \right),$

em que $\tilde{p}(n)$ = número de partições de n com igual número de partes congruentes a $0, 2, 3 \pmod{5}$, $\forall i \geq 4$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, baseado na representação combinatória de partições como matrizes de duas linhas, descreve interpretações para partições irrestritas e a correspondente bijeção entre os conjuntos envolvidos. São apresentados resultados para algumas Mock Theta Functions e relacionamos algumas Mock Theta Functions distintas.

Dentre o que foi feito, ainda existe muito com o que se trabalhar. Algumas conjecturas, provenientes das tabelas aqui apresentadas e descritas ao final de cada seção, não foram demonstradas e são base para continuar trabalhando nesta área. Também existe a possibilidade de gerar tabelas para outras funções e procurar relações semelhantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ch. A. Charalambides; *Enumerative Combinatorics*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [2] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy; *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999.
- [3] G.E. Andrews; *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] G.E. Andrews, F.G. Garvan, *Dyson's Crank of a Partition*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, v. 18, Number 2, April 1988.
- [5] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *Bijjective proofs using two-line matrix representations for partitions*, The Ramanujan Journal, V23, p. 265-295, 2010.
- [6] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *A new approach and generalizations to some results about mock theta functions*, Discrete Mathematics, v. 311, p. 595-615, 2011.
- [7] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *Combinatorial interpretations as two-line array for the mock theta functions*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (Impresso), v. 44, p. 233-253, 2013.
- [8] J.P.O. Santos, P. Mondek, A.C. Ribeirto, *New Two-Lines Arrays Representing Partitions*, Annals of Combinatorics, v. 15, p. 341-354, 2011.
- [9] R.P. Stanley; *Enumerative Combinatorics, vol 1*, Cambridge University Press, 1997.

[10] W. Y. C. Chen, K. Q. Ji, E. H. Liu Partition Identities for Ramanujan's Third-Order Mock Theta Functions, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2010.

[11] <https://oeis.org/>