



GILCÉLIA REGIANE DE SOUZA

**APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES IRREGULARMENTE AMOSTRADAS
COM BASES HIERÁRQUICAS ADAPTATIVAS DE ELEMENTOS
TENSORIAIS COMPACTOS**

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

GILCÉLIA REGIANE DE SOUZA

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES IRREGULARMENTE AMOSTRADAS
COM BASES HIERÁRQUICAS ADAPTATIVAS DE ELEMENTOS
TENSORIAIS COMPACTOS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática aplicada.

Orientador: Jorge Stolfi

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELA ALUNA GILCÉLIA REGIANE DE
SOUZA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JORGE STOLFI.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink, which appears to read "Jorge Stolfi", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

So89a Souza, Gilcélia Regiane, 1978-
Aproximação de funções irregularmente amostradas com bases hierárquicas adaptativas de elementos tensoriais compactos / Gilcélia Regiane de Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Jorge Stolfi.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise numérica. 2. Teoria da aproximação. 3. Spline, Teoria do. I. Stolfi, Jorge, 1950-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Sampled irregularly functions approximation with tensorial elements compact adaptive hierarchical bases

Palavras-chave em inglês:

Numerical analysis
Approximation theory
Spline theory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

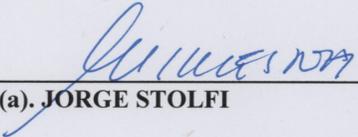
Jorge Stolfi [Orientador]
Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira
Maicon Ribeiro Correa
Helena Cristina da Gama Leitão
Denise Burgarelli Duczmal

Data de defesa: 11-10-2013

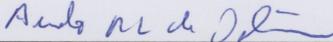
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 11 de outubro de 2013 e aprovada

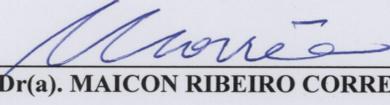
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JORGE STOLFI



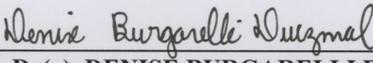
Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA



Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA



Prof(a). Dr(a). HELENA CRISTINA DA GAMA LEITÃO



Prof(a). Dr(a). DENISE BURGARELLI DUCZMAL

Abstract

In this thesis we develop efficient algorithms for the approximation of functions that have important small-scale details confined to small portions of their domain. We assume that the target function is sampled at a finite number of data points, with either uniform or non-uniform density.

In this thesis we chose to use a multilevel (or multiresolution) basis in which the elements centers at each level are a subset of a regular grid of centers, regardless of the sampling points. The bases in question have multiscale structure similar to that used in wavelet analysis in d dimensions. However, its elements are explicit functions defined by the product of d univariate functions of limited support (such as pseudo-Gaussians modeled by truncated polynomials or splines). We describe an incremental algorithm, which proceeds from the coarser level to the most detailed one, and in each level uses only the elements of the basis that are located in the regions where the approximation is still insufficiently precise. At each level, we use an iterative least squares methods that is designed to ignore outlier data and details that can only be approximated at smaller scales.

Keywords: Tensorial base, Hierarchical basis, Irregular sampling, Adaptive approximation, Multiscale analysis, Multiresolution analysis, Spline basis.

Resumo

Nesta tese, desenvolvemos algoritmos eficientes para a aproximação de funções que tem importantes detalhes de pequena escala confinados em pequenas região do domínio. Assumimos que a função objetivo é amostrada em um número finito de pontos dados, com densidade uniforme ou densidade não uniforme.

Neste trabalho optamos por utilizar uma base multinível (ou multiresolução), em que os centros dos elementos em cada nível são um subconjunto de uma grade regular de centros, independentemente dos pontos de amostragem. As bases em questão têm estrutura multiescala semelhante à usada na análise wavelet em d dimensões. No entanto, os seus elementos são funções explícitas definidas pelo produto de d funções univariadas de suporte limitado (tais como pseudo-gaussianas modelada por polinômios truncados ou spline). Descrevemos um algoritmo incremental de aproximação, que procede do nível mais grosseiro para o mais detalhado, sendo que em cada nível são

usados apenas os elementos da base localizados nas regiões onde a aproximação é ainda insuficientemente precisa. Em cada nível, usamos um processo iterativo com o método de mínimos quadrados que é projetado para ignorar dados discrepantes e detalhes que só podem ser aproximados em escalas menores.

Palavras-chave: Base tensorial, Base hierárquica, Amostragem irregular, Aproximação adaptativa, Análise multiescala, Análise multiresolução, Base de spline.

Sumário

Dedicatória	xiii
Agradecimentos	xv
Introdução	1
1 Introdução	1
1.1 Objetivo da tese	1
1.2 Metodologia	1
1.2.1 Modelo de aproximação	1
1.2.2 Aproximações adaptativas	2
1.2.3 Aproximações multiescala	2
1.2.4 Aproximação multiescala adaptativa	2
1.3 Contribuições	3
1.4 Estrutura da tese	3
2 Trabalhos relacionados	5
2.1 Teoria geral de aproximação	5
2.2 Tipos de bases	5
2.2.1 Bases elementos radiais	5
2.2.2 Bases de elementos tensoriais	6
2.2.3 Bases de elementos <i>splines</i>	6
2.3 Métodos de aproximação com base fixa	6
2.3.1 Interpolação	6
2.3.2 Aproximação por mínimos quadrados	7
2.4 Métodos de redução de base	7
2.5 Bases multiescala	7
2.5.1 Elementos radiais e tensoriais com escalas variáveis	7
2.5.2 Wavelets	7
2.6 Aproximação multiescala adaptativa	7
2.6.1 <i>Splines</i> hierárquicos com malhas irregulares	8
2.6.2 Bases hierárquicas radiais	8
2.6.3 Malhas multiníveis regulares	8

I	Conceitos Fundamentais	9
3	Teoria Geral da Aproximação	11
3.1	Conceitos gerais	11
3.1.1	Espaço de funções	11
3.1.2	Caixas	11
3.1.3	Norma uniforme e hilbertiana	11
3.1.4	Produtos internos	12
3.2	O problema geral da aproximação funcional	12
3.3	Espaço das funções objetivo	13
3.4	Espaço das funções aproximantes	13
3.4.1	Resíduo da aproximação	13
3.5	Critério de aproximação	14
3.5.1	Interpolação	14
3.5.2	Mínimos quadrados	15
3.6	Operadores de aproximação e resíduo	16
3.7	Qualidade de um espaço de aproximação	16
3.8	Bases derivadas de funções-mãe	17
3.8.1	Bases radiais	18
3.8.2	Bases tensoriais	19
4	Funções-mãe	21
4.1	Funções-mãe usadas nesta tese	21
4.1.1	Gaussiana	21
4.1.2	Pulsos polinomiais de Wendland	22
4.1.3	Pulsos <i>B-splines</i>	24
4.2	Outras funções-mãe	26
4.2.1	Poliharmônicas	26
4.2.2	Multiquádrica de Hardy	28
4.2.3	Multiquádrica Inversa	28
4.3	Discussão	29
4.3.1	Eficiência computacional	29
4.3.2	Solubilidade	29
4.3.3	Continuidade	29
5	Domínio toroidal	31
5.1	Tornando as bases periódicas	32
5.2	Versões periódicas das funções-mãe	33
5.2.1	Gaussiana	33
5.2.2	Pulsos polinomiais de Wendland	35
5.2.3	<i>B-splines</i>	37

6	Teoria da Aproximação Discreta	43
6.1	Normas do erro	43
6.2	Determinação dos coeficientes	44
6.2.1	Interpolação nos centros	44
6.2.2	Interpolação generalizada	44
6.2.3	Método dos Mínimos Quadrados	45
6.3	Esparcidade das matrizes	45
6.4	Tratamento de erros anômalos	46
II	Aproximação	
	monoescala	49
7	Aproximação usando Bases Uniformes	51
7.1	Definições	51
7.1.1	Domínio, centros e raios	51
7.1.2	Elementos	52
7.1.3	Amostragem	52
7.1.4	Espaço de funções objetivo	53
7.2	Otimização do cálculo das matrizes	54
7.3	Parâmetros dos testes	54
7.4	Determinação do raio ótimo	55
7.4.1	Função gaussiana Φ^G	56
7.5	Função-mãe de Wendland $\Phi_{3,2}^P$	58
7.6	Função-mãe de Wendland $\Phi_{5,4}^P$	61
7.6.1	Pulso B- <i>spline</i> Φ_1^S	63
7.6.2	Pulso B- <i>spline</i> Φ_2^S	63
7.6.3	Pulso B- <i>spline</i> Φ_3^S	64
7.6.4	Pulso B- <i>spline</i> Φ_4^S	65
7.6.5	Pulso B- <i>spline</i> Φ_5^S	65
7.7	Discussão	66
8	Redução de base	67
8.1	Esquema de redução de base	67
8.2	Critério para redução de base	68
8.3	Heurística de truncamento	68
9	Testes do algoritmo de aproximação Adaptativa	71
9.1	Funções exemplo	71
9.1.1	Função f_O	71
9.1.2	Função f_C	72
9.1.3	Função f_F	73
9.1.4	Função f_G	74

9.2	Resultados dos testes	75
9.2.1	Gaussiana	75
9.2.2	Pulsos Wendland $\Phi_{3,2}^P$	80
9.2.3	Pulsos Wendland $\Phi_{5,4}^P$	84
9.2.4	Função-mãe B- <i>splines</i> Φ_2^S	88
9.2.5	Função-mãe B- <i>splines</i> Φ_3^S	92
9.2.6	Função-mãe B- <i>splines</i> Φ_4^S	96
9.2.7	Função-mãe B- <i>splines</i> Φ_5^S	100
9.3	Discussão	104

III Aproximação adaptativa multiescala **107**

10 Aproximação hierárquica adaptativa **109**

10.1	Pré-base hierárquica	109
10.1.1	Níveis uniformes	109
10.1.2	Hierarquia	110
10.2	Aproximação multinível adaptativa	110
10.3	Redução prévia da pré-base	111
10.3.1	Escolha da pré-base reduzida	112

11 Testes com aproximação hierárquica adaptativa **115**

11.0.2	Função teste “ondinhas” - f_O	116
11.0.3	Função teste “cratera” - f_C	117
11.0.4	Função teste de Franke - f_F	118
11.0.5	Função teste “galáxia” - f_G	119
11.1	Discussão	120

12 Testes com aproximação adaptativa em pontos irregulares **123**

12.1	Discussão	129
------	---------------------	-----

13 Conclusões e trabalhos futuros **131**

13.1	Aproximação com bases uniformes	131
13.2	Aproximação com bases adaptativas	131
13.3	Aproximação adaptativa com bases hierárquicas	132
13.3.1	Aproximação adaptativa hierárquica com pontos irregulares	132
13.4	Trabalhos futuros	132

Referências Bibliográficas **133**

Aos meus queridos pais.

Ao meu marido Marcelo O. Veloso.

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado força para continuar.

Ao professor Dr. Jorge Stolfi, pela orientação, atenção, dedicação, apoio e pelo enorme tempo investido neste trabalho.

À professora Dra. Sônia Maria Gomes, pela orientação nos primeiros anos, ajuda e apoio.

Ao professor Dr. Laércio Luis Vendite, pelo apoio e ajuda.

Ao professor Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira, pelo apoio e incentivo.

À minha família, pela compreensão, incentivo e por me fortalecer a cada momento.

Ao meu marido Marcelo O. Veloso, pelo apoio, compreensão, incentivo, pela confiança e constante estímulo.

Aos funcionários do Imecc, Tânia, Cidinha, Ednaldo, Livia e Eliana, muito obrigada, sei que lhes dei muito trabalho e a ajuda de vocês foi muito importante.

Aos amigos que fiz durante o período do doutorado, pelo bons momentos, incentivo, apoio e por fazer do bandeirão o melhor lugar para se almoçar.

Aos colegas de trabalho da UFSJ e ao Leomar Túlio Rocha.

Lista de Símbolos

Apresentamos os vários símbolos que vamos encontrar ao longo desta tese.

Tabela 1: Símbolos.

Símbolo	Descrição	Capítulo
\mathcal{A}	espaço da funções ($\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{V}$) aproximantes	3,6, 7
A	representação discreta da base do espaço \mathcal{A} (matriz $N \times n$)	6,7
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	elementos do espaço de coeficientes \mathbb{V} , geralmente \mathbb{R}	3
B	matriz de colocação, $B_{ij} = \mathcal{P}_i \phi_j$	3
B_{ij}	matriz de colocação $P_j^1 \phi_i$	6
β	vetor do lado direito do sistema de interpolação, $\beta_i = \mathcal{P}_i f$	3
\mathcal{C}	operador dos coeficientes da aproximação	3, 10
C	forma discreta do operador dos coeficientes (matrix $N \times n$)	6
c_j	centros dos elementos da base	7
\mathcal{C}_i	célula ζ_i na direção do eixo i	7
\mathcal{F}	espaço da funções ($\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{V}$) a aproximar	3, 7
\mathbb{D}	domínio $\mathbb{D} = [0, L_1] \times [0, L_2] \times \dots \times [0, L_d]$	7
d	dimensão do domínio \mathbb{D}	7
$e = f - s$	resíduo	3
$E_d(r)$	integrais do elemento radial d -dimensional fora da bola de raio r	4
\mathcal{E}	espaço dos resíduos $\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mathcal{A}$	3
ϵ_{\max}	erro máximo para redução da base	8, 9, 11,12
$f \in \mathcal{F}$	função a aproximar	3,6
F	representação discreta da base do espaço \mathcal{F} (matriz $N \times m$)	6
g	grau de polinômio ou spline	4
H	largura do suporte da função-mãe	5
L_i	tamanho do domínio \mathbb{D} na direção do eixo i (período)	5
l	nível em base multiescala	11
Λ	número de condição da matriz = $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$	7

λ	vetor do lado direito do sistema de MQ $\lambda_i = \langle \phi_i, f \rangle_{\mathcal{E}}$	3
m	$\dim \mathcal{F}$	3, 6
M	matriz de momentos $M_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{E}}$	3, 6
n	$\dim \mathcal{A}$	3, 6
$\ \cdot\ _{\mathcal{E}}$	norma do espaço dos resíduos	3,6
$\ \cdot\ _{\mathcal{F}}$	norma do espaço \mathcal{F}	3
$\ \cdot\ _{\bar{2}}$	norma raiz da média quadrática (RMS)	6
\mathcal{O}	operador de aproximação	3
O	forma discreta do operador de aproximação (matriz $N \times N$)	6
$p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$	pontos de amostragem no domínio \mathbb{D}	6
P	matriz $n \times N$ cujas colunas são os vetores p_j	6
$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$	funcionais para a interpolação generalizada	3
$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$	base do espaço \mathcal{A} de aproximação	3
$\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*$	base cardinal, lagrangiana ou dual do espaço \mathcal{A}	3
Φ^G	função-mãe gaussiana	4
$\Phi_{d,c}^P$	função-mãe pulso polinomial de Wendland	4
Φ_g^S	função-mãe pulso B-spline	4
Φ_{β}^H	função-mãe poliharmônica	4
Φ_{η}^Q	função-mãe multiquádrica de Hardy	4
Φ_{η}^I	função-mãe multiquádrica inversa de Hardy	4
$\bar{\Phi}$	função-mãe repetida	5
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{2}}$	produto escalar da norma RMS $\langle f, g \rangle_{\bar{2}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f_i g_i$.	6
\mathcal{R}	operador resíduo da aproximação	3
R	forma discreta do operador de resíduo ($R = I_N - O$) (matriz $N \times N$)	6
\mathfrak{R}	células relevantes	10
ρ	fator de escala de elemento unidimensional	4
ρ_i	fator de escala no eixo i	7
$\bar{\rho}^*$	raio relativo ótimo	7
S_d	medida da esfera d -dimensional de raio 1	4
s	função aproximadora	3, 6
T	tamanho do domínio de teste	7, 9, 11, 12
τ	qualidade do espaço \mathcal{A}	3, 9 11, 12
\mathfrak{U}	células do suporte dos elementos de ϕ cujos centros estão em \mathfrak{R}	10
θ	ângulo entre os subespaços \mathcal{F} e \mathcal{A}	3
x	ponto do domínio \mathbb{D}	3
$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$	base ortogonal de \mathcal{F}	3
$\bar{\xi}_j$	aproximação da base ortogonal de \mathcal{F} $\mathcal{O}\xi_j$	3
ξ_j	resíduo da base ortogonal de \mathcal{F} $\mathcal{R}\xi_j$	3
ζ_i	espaçamento entre os centros no eixo i	7

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo da tese

O presente trabalho se enquadra na área de Análise Numérica, com enfoque em técnicas modernas de aproximação para funções em domínios multidimensionais que requerem resolução espacial adaptativa.

Especificamente, o objetivo desta tese é encontrar algoritmos eficientes para aproximação de funções que apresentam detalhes importantes mas de pequena escala (alta frequência espacial) em regiões relativamente pequenas do domínio. Vamos supor que a função a aproximar (função objetivo) é amostrada em um número finito de pontos com posições arbitrárias, cuja densidade também pode variar bastante de uma região para outra. Nestas situações é desejável que a aproximação também seja adaptada à função objetivo, com um número maior de parâmetros nas regiões onde há mais detalhes e/ou pontos.

A aproximação de uma função pode ser desejável por diversos motivos, incluindo eficiência computacional, considerações teóricas sobre a grandeza física representada pela função, ou pelo fato dela ser conhecida apenas parcialmente. Espera-se que as funções aproximadoras pertençam a uma classe mais simples e sejam mais fáceis de calcular e manipular, por derivadas, integrais, etc.

1.2 Metodologia

1.2.1 Modelo de aproximação

Uma abordagem para aproximação adaptativa é utilizar combinações lineares de uma base de *elementos radiais* [7], com um elemento centrado em cada ponto dado. De modo geral, esta escolha dos centros dos elementos melhora a estabilidade dos algoritmos de aproximação [37].

Entretanto, quando o número de pontos é muito grande, mas a função amostrada é relativamente suave, podemos obter uma aproximação adequada com bases muito menores. Nesses casos, uma vez que não há um elemento da base para cada ponto, não há mais razão para que os elementos sejam centrados em pontos de amostragem.

Por isso, nesta tese optamos por usar uma base em que os centros dos elementos são um subconjunto de uma *grade regular de centros*, independente dos pontos de amostragem.

Uma vez que optamos por uma grade regular de centros, o uso de elementos radiais (isotrópicos) também fica sem justificativa, pois o espaçamento entre os elementos depende da direção. Assim, nesta tese optamos pelo uso de *elementos tensoriais*, que são produto de elementos univariados cada qual dependendo de uma única coordenada do domínio. Na abordagem mais básica (monoescala), todos os elementos são idênticos exceto pela sua posição. Este modelo de aproximação é adequado quando se espera que a função objetivo seja igualmente complicada em todas partes do domínio.

1.2.2 Aproximações adaptativas

Muitas vezes, a função a aproximar é praticamente nula em grande parte do domínio. Nestes casos, a base de aproximação não precisa cobrir uniformemente todo o domínio; podemos usar apenas os elementos da base que afetam as regiões onde a função é significativamente diferente de zero, com economia de espaço e tempo de processamento. Nesta tese chamaremos as estratégias para escolher esses elementos de *esquemas adaptativos de aproximação*. (Ao contrário de muitos autores, nosso uso do termo ‘adaptativo’ não implica o uso de elementos de escala diferentes).

1.2.3 Aproximações multiescala

Nas ciências naturais e nas engenharias, é comum encontrar funções em que detalhes de tamanhos diferentes têm causas, efeitos ou relevâncias diferentes. Por exemplo, a forma da superfície da Terra tem detalhes de dezenas de quilômetros (montanhas) devidos ao movimento de placas tectônicas, e detalhes de centenas ou dezenas de metros devidos principalmente à erosão. Usualmente, a modelagem computacional de tais fenômenos requer soma de várias aproximações, onde cada aproximação (nível) captura detalhes significativos de um certo tamanho.

Para esta finalidade, podem ser usadas bases com fatores de escala espacial diferentes para cada nível. Nesta tese vamos usar *bases multiescala* cujos fatores de escala diminuam de nível para nível em progressão geométrica. Esta abordagem é semelhante à análise wavelet [13] mas fornece um modelo analítico explícito para a função aproximadora e pode ser usada mesmo quando os pontos de amostragem não formam uma grade regular. Além de possíveis justificativas físicas, aproximações multiescala são a chave para algoritmos numéricos eficientes, para filtragem, integração de equações diferenciais e outros problemas.

1.2.4 Aproximação multiescala adaptativa

A abordagem multiescala pode ser combinada com esquemas de aproximação adaptativa, onde em cada nível a função a aproximar é a parte da função original que não pôde ser aproximada pelos níveis anteriores. Estes esquemas de *aproximação multiescala adaptativa* permitem obter aproximações eficientes para funções que são suaves na maior parte do domínio, mas tem descontinuidades ou outros detalhes significativos não suaves em regiões limitadas do mesmo. Nesses casos, o comportamento geral da função pode ser aproximado nos níveis mais grosseiros com bases

pequenas, e os detalhes e descontinuidades são representados nos níveis mais finos, com elementos colocados apenas nas regiões onde esses aparecem.

Aproximações multiníveis adaptativas também são indicadas quando a função objetivo é amostrada com densidades bem diferentes em diferentes partes do domínio. Nesses casos, a aproximação fica numericamente instável se numa região do domínio houver mais elementos da base do que pontos de amostragem.

1.3 Contribuições

A principal contribuição desta tese é um algoritmo que denominamos *ApHAD* para aproximação hierárquica adaptativa de funções dadas por amostragens tomadas em um conjunto finito de pontos. O algoritmo usa uma variante do método de aproximação por mínimos quadrados em cada nível, com uma pré-base de elementos tensoriais compactos formando uma grade regular incompleta, seguido da eliminação de elementos não significativos dessa pré-base. A cada nível a função a aproximar é o resíduo de todas as aproximações nos níveis mais grosseiros. Algumas características originais do nosso algoritmo são:

- um algoritmo eficiente para aproximação com bases hierárquicas incompletas de elementos tensoriais para aproximação adaptativa hierárquica com pontos irregulares.
- um critério coerente para escolha da pré-base e sua redução em cada nível.
- uso de uma técnica de tratamento de anomalias na análise multinível para separar detalhes de escalas diferentes.

Outras contribuições desta tese são:

- a comparação entre várias funções-mãe quanto à precisão e à eficiência computacional das bases uniformes delas derivadas, e o tamanho das bases adaptativas para funções com suporte limitado.
- uso de um espaço de funções trigonométricas ponderadas para avaliação sistemática do erro de aproximação de uma base genérica.

Todos os algoritmos usados nesta tese foram implementados por nós na linguagem `matlab` e estão disponíveis para uso geral [68].

1.4 Estrutura da tese

No Capítulo 2 apresentamos uma resenha da literatura que consultamos na elaboração desta tese. O restante da tese está dividido em três partes principais e um resumo das conclusões (Capítulo 13).

A parte I, Capítulos 3 a 6, expõe conceitos fundamentais usados nas outras duas partes. No Capítulo 3 revemos os conceitos gerais da teoria de aproximação incluindo possíveis critérios de

aproximação. Apresentamos também os conceitos de elementos radial e elemento tensorial. No Capítulo 4 apresentamos as funções-mãe usadas nesta tese, das quais derivamos os elementos tensoriais. No Capítulo 5 introduzimos o conceito de domínio toroidal para evitar o efeito das bordas no erro de aproximação. No Capítulo 6 apresentamos os conceitos fundamentais de aproximação discreta, e também descrevemos uma técnica para tratamento de dados ‘anormais’ (que destoam significativamente dos demais).

Na parte II, Capítulos 7 a 9, estudamos a aproximação de funções com uma base uniforme (elementos iguais dispostos em uma grade regular completa ou incompleta). No Capítulo 7 apresentamos o conceito de base tensorial uniforme e analisamos experimentalmente a qualidade das aproximações obtidas, usando a versão discreta do método de aproximação por mínimos quadrados. Neste capítulo também determinamos o tamanho ótimo de certos elementos em relação ao espaçamento dos centros. No Capítulo 8 descrevemos um algoritmo para redução de base que se aplica quando a função a aproximar é diferente de zero apenas em uma parte pequena do domínio. Testes deste algoritmo estão relatados no Capítulo 9.

Na parte III da tese, descrevemos e testamos o algoritmo *ApHAD* para aproximação de funções usando uma base hierárquica adaptativa. No Capítulo 10 descrevemos o algoritmo, e no Capítulo 11 relatamos vários testes do mesmo com grades regulares de pontos de amostragem. No Capítulo 12, finalmente, apresentamos testes do algoritmo *ApHAD* com pontos de amostragem irregulares.

Capítulo 2

Trabalhos relacionados

Neste capítulo apresentamos uma resenha da literatura que consultamos na elaboração desta tese. Alguns conceitos mencionados neste capítulo, como matriz de colocação e elemento tensorial, são definidos no capítulo 3.

2.1 Teoria geral de aproximação

Uma análise da teoria geral de aproximação encontra-se no livro de Hammerlin e Hoffmann [33]. O artigo de Narcowich e outros [51] tem uma discussão da teoria de interpolação e aproximação em multinível.

Gomide e Stolfi [28] apresentam uma maneira sistemática de medir a qualidade de um espaço de aproximação, usando um espaço de funções objetivo em vez de uma coleção arbitrária de funções de teste. Usamos esta técnica no capítulo 7.

2.2 Tipos de bases

Muitas bases de aproximação já foram propostas e estudadas, desde polinômios (Gauss, Lagrange), senóides (Fourier), polinômios ortogonais (Chebyshev, Legendre). Nesta seção vamos considerar apenas os tipos de bases relevantes para nossa tese: radiais, tensoriais e *splines*.

As bases que consideramos nesta tese são formadas por translações de um mesmo elemento (não necessariamente radial). Tais bases foram analisadas por Schabach [65].

2.2.1 Bases elementos radiais

Embora não tenhamos usado bases radiais nesta tese, muitas das funções-mãe que usamos foram inicialmente desenvolvidas nesse contexto. Portanto, mencionamos aqui alguns trabalhos nessa área.

Muitos livros e artigos, incluindo Buhmann [7], Gegory e Fasshauer [25], Schaback [24, 51], Leitão [43] e Rippa [59], apresentam os fundamentos teóricos das bases de elementos radiais, incluindo uma pequena introdução histórica.

Fasshauer [18] comparou bases de elementos de suporte local e suporte global. Michelli [48] estudou várias bases de elementos radiais com suporte global, apontando as características necessárias para a garantia da existência das inversas das matrizes de colocação. Este estudo foi completado por Wu [71] que estendeu essa análise para bases de elementos radiais com suporte compacto, enunciando condições para que elas também tenham matrizes de colocação invertíveis.

Wendland [70] construiu alguns elementos radiais com suportes compactos. Fornberg, Larsson e Flyer [22] descreveram uma técnica para superar o mau condicionamento da matriz de colocação obtida com a função-mãe gaussiana. Dinch outros [14] descreveu elementos radiais anisotrópicos, que tem fatores de escala diferentes em cada eixo de coordenadas.

Exemplos de aplicações de bases radiais podem ser encontrados em Fasshauer [18], Franke [24], Larsson [41] (solução numérica de equações diferenciais parciais), Carr e outros [11], Pereira e outros [55], Othtake outros [53, 54] (computação gráfica).

2.2.2 Bases de elementos tensoriais

Os elementos tensoriais são muito usados, há várias referências bibliográficas discorrendo sobre esse tipo de base do ponto de vista geral. Uma definição de tais elementos e seu uso na aproximação de funções podem ser encontradas nos artigos de Edgar e Surana[16], Griebel e outros [30], Nogueira [52], Sickel e outros [67] e outros.

2.2.3 Bases de elementos *splines*

Há uma vasta literatura sobre aproximações de funções usando *splines*, incluindo a obtenção de bases de elementos *spline* de suporte limitado [3, 42, 52, 66].

Splines tensoriais multidimensionais, que são relevantes para nossa tese, foram usados por exemplo por Bézier nos anos 1960 para modelagem de superfícies industriais. Elementos B-*spline*, em particular, foram extensivamente estudados por de Boor [3]. A interpolação multilinear de dados em grade usa essencialmente uma base de “tendas”, elementos tensoriais cuja função-mãe é o pulso triangular (Φ_1^S na seção 4.1.3). Estas bases foram usadas, por exemplo, por Cardoso e outros [10] para integração de equações diferenciais parciais.

2.3 Métodos de aproximação com base fixa

Estudos comparativos de vários métodos de aproximação podem ser encontrados em [7, 23].

2.3.1 Interpolação

A interpolação de dados irregulares e as bases radiais estão intimamente relacionadas, ou melhor, a interpolação é fortemente usada no contexto das bases radiais, e portanto, todos os artigos introdutórios mostram como resolver esse problema. Powell [58] aponta a necessidade de incluir elementos polinomiais e condições adicionais em algumas casos (por exemplo, bases derivadas das funções-mãe poliharmônicas e multiquádricas de Hardy) para que a matriz de colocação seja inversível.

2.3.2 Aproximação por mínimos quadrados

A teoria básica de aproximação por mínimos quadrados encontra-se em Hammerlin e Hoffmann [27, 33, 47]. Bases radiais e tensoriais também foram muito usadas para construir aproximações ótimas no sentido de mínimos quadrados. Um exemplo é a tese de Cardoso [8].

2.4 Métodos de redução de base

A idéia de usar apenas um subconjunto da base original de aproximação (descrita no capítulo 8 desta tese) é também antiga, e é por exemplo uma das idéias centrais do método de compressão de imagens JPEG [1].

Em sua tese, D. A. Castro [12], por exemplo, apresenta um método para eliminar elementos supérfluos de uma base de aproximação, porém restrito a elementos do tipo tenda multilinear.

2.5 Bases multiescala

Há uma enorme variedade de métodos de aproximação multiescala (ou multinível), usando muitos tipos de bases — *splines* em malhas triangulares, bases radiais, etc. O uso de *B-splines* para interpolação multinível é discutido por Lee e outros [42].

2.5.1 Elementos radiais e tensoriais com escalas variáveis

Bozzini e outros [4] apresenta um trabalho que consiste da interpolação por funções base de diferentes escalas e formas, apropriados quando há anisotropia local dos dados.

2.5.2 Wavelets

Um tipo muito estudado de base multiescala, semelhante ao que usamos nesta tese, são as wavelets [13]. Como as bases que usamos nos capítulos 11 e 12, uma base wavelets consiste de vários níveis, sendo que os elementos de cada nível são translações de um mesmo elemento, e elementos em níveis distintos diferem apenas por posição e escala do domínio. Embora as bases de wavelets possam ser definidas a partir de funções-mãe explícitas, muitos trabalhos definem a base implicitamente por operadores de filtragem e reconstrução.

A tese de D. A. Castro [12] dá um exemplo de uso de wavelets implícitas para integração de equações diferenciais.

2.6 Aproximação multiescala adaptativa

Aproximação adaptativa multiescala também tem extensa bibliografia com bases de diversos os tipos. Podemos dividir quanto ao tipo de base usada em cada nível: *splines* sobre malhas irregulares, base radiais com centros em posições irregulares, bases tensoriais com centros em grade uniforme incompleta, etc. Tipicamente, numa abordagem multiescala adaptativa, a aproximação

é construída nível por nível, do mais grosseiro ao mais fino, sendo que cada nível é usado para aproximar o resíduo das aproximações obtidas nos níveis anteriores [37]. Esta é a abordagem que usamos nesta tese.

2.6.1 *Splines* hierárquicos com malhas irregulares

Em muitos trabalhos, a adaptatividade é conseguida pelo uso de malhas irregulares de resolução variável. Um exemplo é a tese de M. K. Kaibara [39], que descreve um método de análise de multiresolução baseado em médias celulares em malhas irregulares adaptativas.

2.6.2 Bases hierárquicas radiais

Armin Iske [35, 37, 38] apresentou a teoria de hierarquia adaptativa com elementos radiais. Ohtake [54] propôs uma abordagem hierárquica em 3D para a interpolação de dados dispersos usando funções de base radiais com suporte compacto.

2.6.3 Malhas multiníveis regulares

Nesta tese consideramos apenas esquemas em que cada nível da base é um subconjunto de uma grade regular de elementos e todos os elementos são cópias transladadas do mesmo elemento. As principais estruturas hierárquicas deste tipo são as malhas quadtree [20] e as malhas diádicas [9]. Georgoulis [26] usa um método de interpolação em multinível em problemas cujas funções estão em altas dimensões.

Hales e outros [31] usou *splines* em esquemas de refinamento e estudou estimativas de erros nas aproximações multiníveis usando *splines*.

As árvores quadtree foram introduzidas por Finkel e Bentley em (1974) [20], e mais tarde usadas por eles para problemas de busca geométrica. Elas tem sido usadas em muitos outros problemas, incluindo aproximação de funções, por exemplo por H. Samet e R. Webber [61], Ohtake e outros [54] e Iske e Levesley [36].

Em uma hierarquia diádica de malhas, as células de cada nível são obtidas por bissetção das células do nível anterior em uma direção que varia ciclicamente com o nível. Aproximações baseadas em malhas diádicas foram estudadas por Cardoso e outros [8, 9] e Castro e outros [12]. Em Cardoso e outros [10] pode ser encontrada uma apresentação detalhada da estrutura diádica.

Parte I

Conceitos Fundamentais

Capítulo 3

Teoria Geral da Aproximação

Neste capítulo vamos rever os princípios da teoria da aproximação independentemente de uma escolha específica das funções aproximadoras.

3.1 Conceitos gerais

3.1.1 Espaço de funções

Para quaisquer conjuntos Γ e Υ denotaremos por $\Gamma \rightarrow \Upsilon$ o conjunto de todas as funções (de Γ para Υ) com domínio em Γ e imagem em Υ . Observe que se Υ é um espaço vetorial, então $\Gamma \rightarrow \Upsilon$ também é um espaço vetorial.

3.1.2 Caixas

Uma *caixa* em \mathbb{R}^d é definida como sendo um produto cartesiano

$$I = I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_{d-1}$$

em que cada I_k é um intervalo fechado $[a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}$, ou seja, uma caixa é um paralelepípedo com arestas paralelas aos eixos de coordenadas. A *dimensão* da caixa I corresponde ao número de intervalos I_k que não são triviais, (isto é, que tem $a_k < b_k$).

Uma *face* de tal caixa é qualquer caixa da forma $J = J_0 \times J_1 \times \cdots \times J_{d-1}$ sendo que cada J_k ou é o intervalo I_k ou é um dos intervalos triviais $[a_k, a_k]$ ou $[b_k, b_k]$.

Quando todos intervalos J_k são triviais, obtemos um *vértice* ou *canto* da caixa I . O *canto inferior* é obtido quando $J_k = [a_k, a_k]$ para todo k .

3.1.3 Norma uniforme e hilbertiana

Se f é uma função de um conjunto X qualquer com valores reais limitados, define-se a *norma uniforme* (ou L_∞) de f como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Uma norma $\|\cdot\|$ para um espaço vetorial real \mathbb{V} é dita *norma hilbertiana* se para todo $u, v \in \mathbb{V}$ existem a, b e c tais que

$$\|u + tv\|^2 = at^2 + bt + c$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Um exemplo é a norma euclidiana $\|\cdot\|$ sobre \mathbb{R}^d . Outro exemplo é a norma L_2 sobre o espaço das funções contínuas definidas em um subconjunto \mathbb{D} de \mathbb{R}^d ,

$$\|f\|_2 = \left[\int_{\mathbb{D}} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (3.1.1)$$

Para todas as funções e domínios considerados nesta tese, as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são definidas e têm valores finitos.

3.1.4 Produtos internos

Lembramos que um *produto interno* para um espaço vetorial real \mathbb{V} é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ que é linear nos dois argumentos, simétrica, e tal que $\langle u, u \rangle$ é real e positivo para todo $u \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$. Todo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define uma norma hilbertiana $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Reciprocamente, toda norma hilbertiana $\|\cdot\|$ define um produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Por exemplo, a norma L_2 do espaço das funções contínuas de um domínio $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ para \mathbb{R} , a fórmula (3.1.1), corresponde ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(x)g(x) dx. \quad (3.1.2)$$

Para toda base $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ de um espaço vetorial \mathbb{V} , existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ sobre \mathbb{V} sob o qual η é ortonormal, isto é, $\langle \eta_i, \eta_j \rangle_\eta = 1$ se $i = j$, e 0 se $i \neq j$. Este produto interno é definido pela fórmula

$$\langle u, v \rangle_\eta = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad (3.1.3)$$

em que a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n são os coeficientes de u e v , respectivamente, na base η .

3.2 O problema geral da aproximação funcional

O *problema de aproximação funcional* pode ser definido abstratamente por

- dois conjuntos \mathbb{D} e \mathbb{V} , o *domínio* e o *contradomínio* respectivamente;
- uma família \mathcal{F} de *funções objetivo* de \mathbb{D} para \mathbb{V} ;
- uma família \mathcal{A} de *funções aproximadoras*, também de \mathbb{D} para \mathbb{V} ;
- um *critério de aproximação*, um predicado sobre $\mathcal{F} \times \mathcal{A}$.

Uma *instância* do problema é uma função f de \mathcal{F} ; uma *solução* dessa instância é uma função s de \mathcal{A} tal que o par (f, s) satisfaz o critério de aproximação.

Nesta tese vamos supor que o domínio \mathbb{D} é um subconjunto do espaço \mathbb{R}^d e o contradomínio \mathbb{V} é o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Os resultados podem ser facilmente estendidos a qualquer espaço vetorial \mathbb{V} de dimensão finita k , pois o problema de aproximação nesse espaço geralmente se reduz a resolver k problemas de aproximação de funções de \mathbb{D} para \mathbb{R} .

3.3 Espaço das funções objetivo

Tipicamente, o espaço de funções objetivo \mathcal{F} é um espaço vetorial de funções de \mathbb{D} para \mathbb{V} . Por exemplo, \mathcal{F} pode ser o espaço das funções contínuas de \mathbb{D} para \mathbb{V} , denotado por $\mathbf{C}[\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{V}]$. Nesta tese vamos supor que \mathcal{F} tem uma norma hilbertiana, que denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$.

3.4 Espaço das funções aproximantes

Na prática é necessário que as funções de \mathcal{A} possam ser identificadas por uma lista finita de parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Tipicamente (em particular, nesta tese), o espaço de funções aproximantes \mathcal{A} é um subespaço vetorial de dimensão n do conjunto de funções de \mathbb{D} para \mathbb{V} . Isto é, a função aproximadora s tem sempre a forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x), \quad (3.4.1)$$

para todo x em \mathbb{D} ; sendo que os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são elementos do espaço \mathbb{V} , e $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ é uma base do espaço \mathcal{A} (uma *base de aproximação*), cujos elementos são funções de \mathbb{D} para \mathbb{R} . Note-se que o mesmo espaço de aproximação \mathcal{A} tem uma infinidade de bases de aproximação.

Note-se também que o custo de calcular $s(x)$ pela fórmula (3.4.1) é no máximo n vezes o custo máximo de calcular cada elemento ϕ_j da base. Além disso, se o suporte dos elementos ϕ_j é bem menor que o domínio \mathbb{D} , basta calcular apenas os termos $\alpha_j \phi_j(x)$ da somatória tais que p está no suporte de ϕ_j .

Se a base ϕ é fixa, o problema de aproximação se reduz a determinar o vetor de coeficientes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ desta combinação, de modo a satisfazer os critérios desejados. Mais adiante vamos considerar também versões *adaptativas* do problema, que incluem também a escolha da base ϕ dentro de uma família bem maior de funções de \mathbb{D} para \mathbb{R} . Neste caso o critério de escolha leva em conta o tamanho n da base, além da qualidade da aproximação.

3.4.1 Resíduo da aproximação

Dada a função $f \in \mathcal{F}$ e uma aproximação $s \in \mathcal{A}$, define-se o *resíduo* como a diferença

$$e = f - s.$$

Esta função pertence ao *espaço dos resíduos*

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mathcal{A}$$

que é outro subespaço vetorial das funções de \mathbb{D} para \mathbb{V} . Vamos supor que este espaço também tem uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, que pode coincidir ou não com $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ no espaço de funções objetivo \mathcal{F} .

3.5 Critério de aproximação

O *critério de aproximação* é uma regra que permite dizer se uma determinada função $s \in \mathcal{A}$ é uma “boa aproximação” para uma dada função $f \in \mathcal{F}$. Um exemplo de critério de aproximação é que a norma do resíduo $\epsilon = \|f - s\|_{\mathcal{E}}$ seja menor que uma tolerância $\epsilon_{\max} > 0$ dada. Este critério, entretanto, torna a determinação de s muito dispendiosa. Na prática adotam-se critérios que podem ser mais ou menos exigentes do que esse, mas admitem métodos eficientes e robustos para determinar a aproximação s .

3.5.1 Interpolação

Um critério de aproximação muito comum é o de *interpolação*, onde se exige que a aproximação s coincida com a função dada f em um certo conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de pontos de \mathbb{D} ; ou seja, exige-se que $s(p_j) = f(p_j)$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Neste caso, quase sempre o número de pontos coincide com o número n de parâmetros de \mathcal{A} .

Mais geralmente, o critério de *interpolação generalizada* consiste em satisfazer n equações

$$\mathcal{P}_i(s) = \mathcal{P}_i(f),$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sendo $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ uma coleção de n funcionais de \mathcal{E} para \mathbb{R} . Por exemplo, $\mathcal{P}_i(f)$ pode ser o valor de f num ponto p_i , sua derivada nesse ponto, o valor médio em certo subconjunto $X_i \subseteq \mathbb{D}$, etc.

Em particular, se os funcionais $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ são lineares, então este critério reduz-se a um sistema linear de n equações, cujas incógnitas são os n coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de s na base de aproximação escolhida ϕ ,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{P}_i(\phi_j) = \mathcal{P}_i(f).$$

Este sistema pode ser escrito em forma matricial

$$B\alpha = \beta, \tag{3.5.1}$$

sendo B uma matriz $n \times n$ (a *matriz de colocação*) tal que $B_{ij} = \mathcal{P}_i(\phi_j)$, e β um vetor coluna tal que $\beta_i = \mathcal{P}_i(f)$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que o problema de interpolação está *bem posto* quando a matriz B tem inversa (determinante não nulo). Nesse caso a solução existe e é única, dada por $\alpha = B^{-1}\beta$.

Um conceito importante para o problema da interpolação generalizada é a *base cardinal* do espaço \mathcal{A} , uma base $\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*$ que satisfaz as equações

$$\mathcal{P}_i(\phi_j^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

No caso particular da interpolação propriamente dita, a base cardinal é chamada de *base lagrangiana*. Se o problema de interpolação está bem posto, esta base existe e é dada por

$$\phi_i^* = \sum_{j=1}^n (B^{-1})_{ij} \phi_j. \quad (3.5.2)$$

Para uma base cardinal, a matriz de colocação é a identidade. Portanto, nesse caso temos $\alpha_i = \mathcal{P}_i(f)$ para todo i , e a função interpoladora é

$$s = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(f) \phi_i^*.$$

3.5.2 Mínimos quadrados

Outro critério muito usado é o da *aproximação ótima*, segundo o qual s deve minimizar a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ do resíduo. Isto é, deseja-se que

$$\|f - s\|_{\mathcal{E}} = \inf_{u \in \mathcal{A}} \|f - u\|_{\mathcal{E}}.$$

A existência de uma função $s \in \mathcal{A}$ com esta propriedade é garantida se \mathcal{A} for um subespaço vetorial de dimensão finita ([56] página 407). Além disso, se $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ é hilbertiana, verifica-se que a aproximação ótima s é a (única) projeção ortogonal de f sobre \mathcal{A} , segundo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ associado à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ ([56] página 409). Neste caso também, a aproximação pode ser encontrada resolvendo-se um sistema linear

$$M\alpha = \gamma, \quad (3.5.3)$$

sendo que a matriz M (a *matriz dos momentos*) e o vetor γ são definidos pelas equações

$$M_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \gamma_i = \langle \phi_i, f \rangle_{\mathcal{E}}$$

para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Note que o sistema (3.5.3) equivale a exigir que $\langle \phi_i, f - s \rangle_{\mathcal{E}}$ seja nulo para cada i , isto é, que o resíduo seja ortogonal ao espaço \mathcal{A} .

O critério de aproximação hilbertiana ótima equivale ao critério de interpolação generalizada, com os funcionais lineares \mathcal{P}_i definidos por

$$\mathcal{P}_i(g) = \langle \phi_i, g \rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.5.4)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e qualquer função $g \in \mathcal{E}$.

Quando $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ é a norma L_2 (ou qualquer múltiplo dela), o método é chamado de *quadrados mínimos* ou *mínimos quadrados* (MQ).

Um conceito importante relacionado com aproximação hilbertiana ótima é a *base dual* $\phi^* = \{\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*\}$ da base escolhida ϕ , que satisfaz as equações

$$\langle \phi_i, \phi_j^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Ou seja, ϕ^* é a base lagrangiana para o problema de interpolação generalizada com os funcionais \mathcal{P}_i da equação (3.5.4). Temos então que

$$\phi_i^* = \sum_{j=1}^n (M^{-1})_{ij} \phi_j,$$

e os coeficientes da aproximação ótima na base ϕ são $\alpha_j = \langle f, \phi_j^* \rangle_{\mathcal{E}}$, ou seja,

$$s = \sum_{j=1}^n \langle f, \phi_j^* \rangle_{\mathcal{E}} \phi_j.$$

3.6 Operadores de aproximação e resíduo

Uma vez adotado um espaço de aproximação \mathcal{A} e um critério de aproximação que determina uma aproximação única em \mathcal{A} para cada função de \mathcal{F} , podemos definir o *operador de aproximação* \mathcal{O} , que aplicado a qualquer função f de \mathcal{F} fornece essa aproximação $\mathcal{O}(f) = s \in \mathcal{A}$. Definimos também o *operador resíduo* \mathcal{R} que leva $f \in \mathcal{F}$ ao resíduo $f - s = f - \mathcal{O}(f) \in \mathcal{E}$. Ou seja, $\mathcal{R} = \mathcal{I} - \mathcal{O}$, sendo que \mathcal{I} é o operador identidade sobre \mathcal{F} . Observe que $\mathcal{O}(f) + \mathcal{R}(f) = f$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$.

Introduzimos também o *operador de coeficientes* \mathcal{C} que, dada $f \in \mathcal{F}$ e uma base ϕ de \mathcal{A} , devolve o vetor de coeficientes $\mathcal{C}(f, \phi) = \alpha \in \mathbb{R}^n$ da aproximação $s = \mathcal{O}(f)$ nessa base.

Tanto o critério de aproximação hilbertiana ótima quanto o critério de interpolação resultam em um operador de aproximação \mathcal{O} linear, isto é, $\mathcal{O}(rf + tg) = r\mathcal{O}(f) + t\mathcal{O}(g)$, para qualquer $r, t \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{E}$. O mesmo vale para os operadores \mathcal{R} e \mathcal{C} .

Além disso, neste caso tanto \mathcal{O} quanto \mathcal{R} são projeções (operadores idempotentes), ou seja, $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f)$ e $\mathcal{R}(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$ para qualquer $f \in \mathcal{E}$. Na verdade \mathcal{O} e \mathcal{R} definem uma decomposição do espaço \mathcal{E} em espaços disjuntos, pois $\mathcal{O}(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(\mathcal{O}(f)) = 0_{\mathcal{E}}$ (a função nula de \mathcal{E}). Segue-se que $\mathcal{C}(\mathcal{O}(f), \phi) = \mathcal{C}(f, \phi)$ e $\mathcal{C}(\mathcal{R}(f), \phi) = 0_n$ (o vetor nulo de \mathbb{R}^n).

3.7 Qualidade de um espaço de aproximação

Para avaliar a qualidade de um espaço de aproximação \mathcal{A} , geralmente se considera a norma do resíduo

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{\mathcal{E}} = \|f - \mathcal{O}(f)\|_{\mathcal{E}}$$

no pior caso. Para que esta análise tenha sentido é necessário fixar a norma de f . Ou seja, a qualidade de \mathcal{A} é medida pelo parâmetro

$$\tau = \limsup_{f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{R}(f)\|_{\mathcal{E}}}{\|f\|_{\mathcal{F}}},$$

que também pode ser escrita

$$\tau = \sup_{f \in \mathcal{F}_1} \|\mathcal{R}(f)\|_{\mathcal{E}},$$

sendo $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} : \|f\|_{\mathcal{F}} = 1\}$ é a esfera unitária em \mathcal{F} definida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$.

Se as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ nessa fórmula forem ambas a mesma norma hilbertiana de \mathcal{E} , então τ é o seno do ângulo θ entre os subespaços \mathcal{F} e \mathcal{A} na geometria definida por essa norma. Entretanto, se a norma é a mesma, esta análise só faz sentido se $\dim \mathcal{F} \leq \dim \mathcal{A}$, pois se $\dim \mathcal{F} > \dim \mathcal{A}$ existirá sempre uma função não nula $f \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{O}(f) = 0$ e $\mathcal{R}(f) = f$, e portanto τ será 1.

Como em geral $\dim \mathcal{F} > \dim \mathcal{A}$, esta análise presuppõe que $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ são diferentes. Supondo que $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ são normas hilbertianas derivadas dos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ respectivamente, o valor τ pode ser determinado tomando uma base $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ de \mathcal{F} que seja ortonormal segundo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ e calculando as respectivas aproximações e resíduos

$$\xi_j^{\parallel} = \mathcal{O}(\xi_j) \quad \xi_j^{\perp} = \mathcal{R}(\xi_j).$$

Pelo fato da base ξ ser ortonormal, temos que, se $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_j$, então $\|f\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \beta_j^2}$. Portanto, $\|f\|_{\mathcal{F}} = 1$ se e somente se $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, $\mathcal{R}(f) = \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_j^{\perp}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(f)\|_{\mathcal{E}} &= \sqrt{\langle \mathcal{R}(f), \mathcal{R}(f) \rangle_{\mathcal{E}}} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_i^{\perp}, \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_j^{\perp} \right\rangle_{\mathcal{E}}} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \langle \xi_i^{\perp}, \xi_j^{\perp} \rangle_{\mathcal{E}}} = \sqrt{\beta^{\top} E \beta}, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

sendo E a matriz simétrica $n \times n$ tal que $E_{ij} = \langle \xi_i^{\perp}, \xi_j^{\perp} \rangle_{\mathcal{E}}$. Portanto,

$$\tau = \limsup_{\beta \in \mathbb{S}^{m-1}} \sqrt{\beta^{\top} E \beta}.$$

Evidentemente, $\tau = \sqrt{\lambda_{\max}}$, sendo λ_{\max} o autovalor de E de maior módulo.

3.8 Bases derivadas de funções-mãe

Quando o domínio \mathbb{D} é unidimensional (isto é, um intervalo de \mathbb{R}), uma abordagem popular é usar uma base que consiste de cópias transladadas de uma mesma *função-mãe* $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$\phi_j(x) = \Phi\left(\frac{x - c_j}{\rho}\right) \quad (3.8.1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo c_j e ρ parâmetros reais (o *centro* do elemento j e o *raio* ou *fator de escala* da base, respectivamente). Note que ρ não é necessariamente o raio do suporte de ϕ_j . Em geral, a função-mãe Φ é par (simétrica em torno do argumento 0), é positiva quando o argumento é nulo, e tende monotonicamente a zero quando o argumento tende ao infinito. Veja a Figura 3.1.

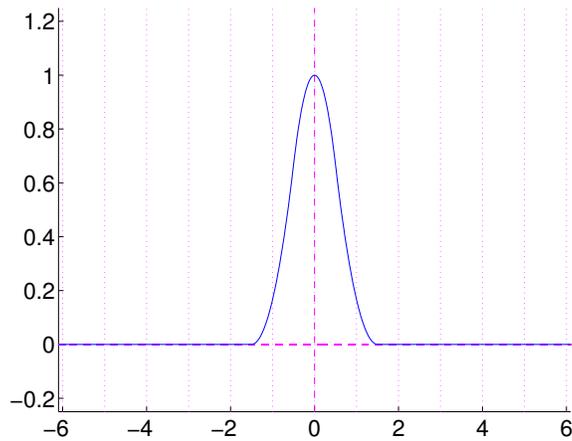


Figura 3.1: Exemplo de função-mãe.

3.8.1 Bases radiais

Para domínios de dimensão $d \geq 2$, esta abordagem pode ser generalizada de duas maneiras. Cada elemento pode ser uma *função radial* da forma

$$\phi_j(x) = \Phi\left(\frac{\|x - c_j\|}{\rho}\right), \quad (3.8.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana de \mathbb{R}^d , c_j é um ponto do \mathbb{R}^d (o *centro* do elemento ϕ) e ρ é um número real positivo, o *raio* ou *fator de escala* da base.

Uma vantagem importante desta abordagem é que ela pode ser usada para funções de domínios arbitrários de qualquer dimensão, pois o único conceito geométrico utilizado é a distância entre pontos.

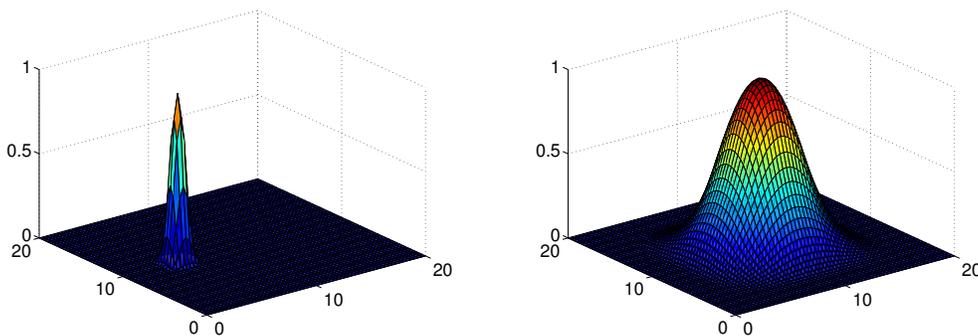


Figura 3.2: Elementos radiais ϕ_1 e ϕ_2 no domínio bidimensional $\mathbb{D} = [0, 20] \times [0, 20]$ derivados da função-mãe da Figura 3.1 com centros $c_1 = (5, 10)$, $c_2 = (10, 10)$ e fatores de escala $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 5$.

3.8.2 Bases tensoriais

Outra maneira de generalizar a fórmula 3.8.1 para um domínio multidimensional $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ é usar *elementos tensoriais* da forma

$$\phi_j(x) = \prod_{i=1}^d \Phi\left(\frac{x_i - c_{ji}}{\rho_i}\right),$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{D}$, sendo que $c_j = (c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jd})$, é o *centro do elemento*, cada ρ_i é o *raio* ou *fator de escala* da base na direção do eixo i e Φ é a função-mãe. Veja a Figura 3.3.

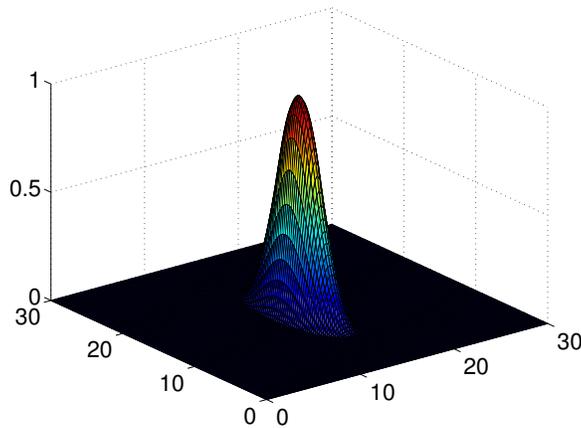


Figura 3.3: Um elemento tensorial ϕ_j derivado da função-mãe Φ da Figura 3.1, para domínio $\mathbb{D} = [0, 30] \times [0, 30]$, com centro $c_j = (15, 15)$ e fatores de escala $\rho = (2, 5)$.

Assim como as bases radiais, as bases tensoriais podem ser usadas em domínios de dimensão arbitrária. Entretanto, elas são apropriadas apenas quando o domínio é um subconjunto de \mathbb{R}^d e os centros formam uma grade regular (que é o caso nesta tese).

Comparados com elementos radiais, os elementos tensoriais preservam melhor em dimensões arbitrárias certas qualidades das bases unidimensionais derivadas da mesma função-mãe. Por exemplo, se a função-mãe permite obter uma base unidimensional que aproxima funções lineares exatamente, o mesmo vai ser possível em qualquer dimensão d , com bases tensoriais; mas não necessariamente com bases radiais.

Capítulo 4

Funções-mãe

Os elementos tensoriais que usamos nesta tese são derivados de um pequeno número de funções-mãe com suporte limitado (ou efetivamente limitado) que descrevemos neste capítulo, na Seção 4.1. Algumas destas funções-mãe foram originalmente propostas para uso em bases radiais, cujos centros c_j eram irregularmente distribuídos. Inúmeras outras funções-mãe foram propostas para esse fim, mas a maioria delas tem interesse apenas histórico ou é inadequada para nossos propósitos. Por completude mencionamos as mais conhecidas na Seção 4.2.

4.1 Funções-mãe usadas nesta tese

4.1.1 Gaussiana

A função-mãe $\Phi^G(r)$ que denominamos de *gaussiana*, é definida pela fórmula

$$\Phi^G(r) = e^{-\frac{1}{2}r^2},$$

para todo $r \in \mathbb{R}$. Veja Figura a 4.1. Esta função é a distribuição gaussiana de média zero e desvio um, não normalizada, com valor máximo $\Phi^G(0) = 1$.

Observamos que os elementos tensoriais obtidos com esta função-mãe são isotópicos, isto é, são também elementos radiais; pois

$$\Phi^G(\|x\|_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d x_i^2\right) = \prod_{i=1}^d \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right) = \prod_{i=1}^d \Phi^G(x_i).$$

Pode-se verificar que, a menos de translações e mudança de escala uniforme do argumento, esta é a única função-mãe decrescente com $|r|$ que tem esta propriedade.

Embora tenha suporte infinito, a função Φ^G diminui muito rapidamente quando o argumento $|r|$ aumenta. A Tabela 4.1 mostra o valor de $\Phi^G(r)$ para alguns valores de r , bem como as integrais $E_d(r)$ do elemento radial d -dimensional fora da bola de raio r , isto é,

$$E_d(r) = S_{d-1} \int_{u=r}^{\infty} \Phi^G(u) u^{d-1} du,$$

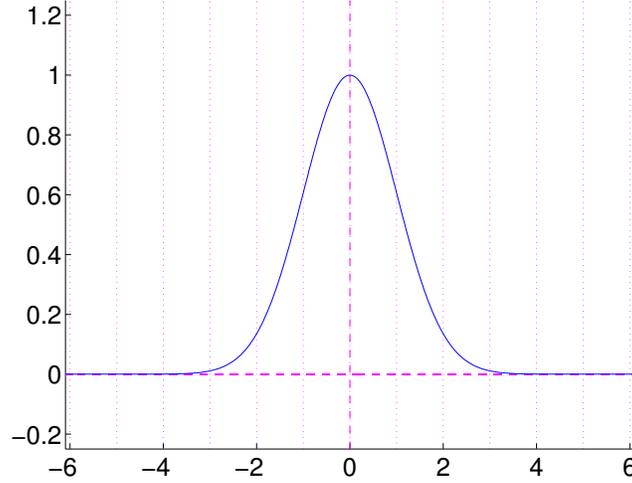


Figura 4.1: Função-mãe gaussiana: $\Phi^G(r)$.

em que S_d é a medida da esfera d dimensional de raio 1 ($S_0 = 2$, $S_1 = 2\pi$, $S_2 = 4\pi$, etc.). Para aproximação de dados representados em ponto flutuante de precisão dupla, podemos considerar $\Phi^G(r) = 0$ para $|r| \geq 8,5$, pois o erro deste truncamento se confundirá com os erros de arredondamento.

Tabela 4.1: Valores e integrais da função-mãe gaussiana.

r	$\Phi^G(r)$	E_1	E_2	E_3
1	0,607	$7,953 \times 10^{-1}$	3,811	12,619
2	0,135	$1,141 \times 10^{-1}$	$8,503 \times 10^{-1}$	4,118
3	$0,111 \times 10^{-1}$	$6,767 \times 10^{-3}$	$6,978 \times 10^{-2}$	$4,619 \times 10^{-1}$
4	$0,335 \times 10^{-3}$	$1,588 \times 10^{-4}$	$2,108 \times 10^{-3}$	$1,786 \times 10^{-2}$
5	$0,373 \times 10^{-5}$	$1,437 \times 10^{-6}$	$2,341 \times 10^{-5}$	$2,432 \times 10^{-4}$
6	$0,152 \times 10^{-7}$	$4,946 \times 10^{-9}$	$9,569 \times 10^{-8}$	$1,179 \times 10^{-6}$
7	$0,229 \times 10^{-10}$	$6,416 \times 10^{-12}$	$1,439 \times 10^{-10}$	$2,054 \times 10^{-9}$
8	$0,126 \times 10^{-13}$	$3,119 \times 10^{-15}$	$7,957 \times 10^{-14}$	$1,293 \times 10^{-12}$
9	$0,257 \times 10^{-17}$	$5,678 \times 10^{-19}$	$1,619 \times 10^{-17}$	$2,950 \times 10^{-16}$

4.1.2 Pulsos polinomiais de Wendland

As seguintes funções-mãe propostas por Wendland [69], que denotaremos por $\Phi_{d,c}^P$, proporcionam elementos com suporte compacto. Elas são caracterizadas por dois parâmetros inteiros d e c . Todas elas são nulas para $|r| \geq 1$. Para $0 \leq r \leq 1$, elas são polinômios em r , que dependem de d e de c .

Nesta tese testamos duas dessas funções-mãe, $\Phi_{3,2}^P(r) = (1 - r)^4(4r + 1)$ e $\Phi_{5,4}^P(r) = (1 - r)^7(16r^2 + 7r + 1)$ para $0 \leq r \leq 1$, e $\Phi_{d,c}^P(r) = \Phi_{d,c}^P(-r)$ para $-1 \leq r \leq 0$.

Cada função $\Phi_{d,c}^P$, tem continuidade de ordem c quando r é 0 ou ± 1 . O parâmetro d é a dimensão máxima do domínio para o qual, segundo Wendland, a função-mãe fornece uma base radial adequada.

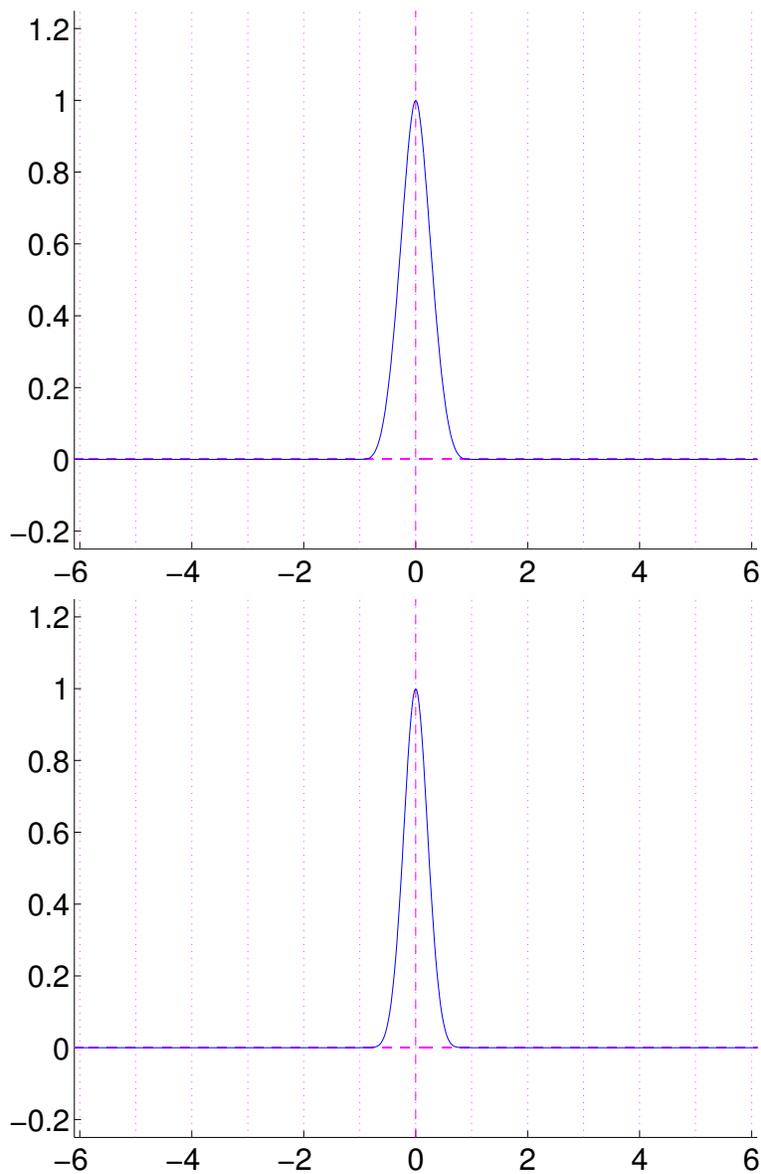


Figura 4.2: Pulsos polinomiais de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ (acima) e $\Phi_{5,4}^P$ (abaixo).

4.1.3 Pulsos B-splines

Os elementos *B-splines* foram estudados por Schoenberg [66]. A função-mãe genérica Φ_g^S destes elementos é indexada pelo grau $g \in \mathbb{N}$ e consiste de $g + 1$ polinômios de grau g definidos nos intervalos $[k, k + 1]$, para k variando de $-(g + 1)/2$ até $(g + 1)/2$ inclusive, de 1 em 1. A função Φ_g^S tem continuidade $g - 1$ nos extremos desses intervalos, e é zero para $|r| \geq (g + 1)/2$. Veja a Figura 4.3. Em particular,

$$\Phi_0^S(r) = 1 \text{ se } |r| \leq \frac{1}{2} \quad (4.1.1)$$

$$\Phi_1^S(r) = 1 - |r| \text{ se } |r| \leq 1 \quad (4.1.2)$$

$$\Phi_2^S(r) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3}r^2 & \text{se } |r| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - |r|\right)^2 & \text{se } \frac{1}{2} < |r| < \frac{3}{2} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

$$\Phi_3^S(r) = \begin{cases} 1 - \frac{r^2}{4}(6 - 3|r|) & \text{se } |r| \leq 1 \\ \frac{(2 - |r|)^3}{4} & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$\Phi_4^S(r) = \begin{cases} 1 - \frac{120}{115}r^2 + \frac{48}{115}r^4 & \text{se } |r| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{22}{23} + \frac{8}{23}|r| - \frac{240}{115}r^2 + \frac{160}{115}|r|^3 - \frac{32}{115}r^4 & \text{se } \frac{1}{2} < |r| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{16}{230}\left(\frac{5}{2} - |r|\right)^4 & \text{se } \frac{3}{2} < |r| \leq \frac{5}{2} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$\Phi_5^S(r) = \begin{cases} 1 - \frac{10}{11}r^2 + \frac{5}{11}r^4 - \frac{5}{33|r|^5} & \text{se } |r| \leq 1 \\ \frac{17}{22} + \frac{25}{22}|r| - \frac{35}{11}r^2 + \frac{25}{11}|r|^3 - \frac{15}{22}r^4 + \frac{5}{66}|r|^5 & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ \frac{1}{66}(3 - |r|)^5 & \text{se } 2 < |r| \leq 3 \end{cases} \quad (4.1.6)$$

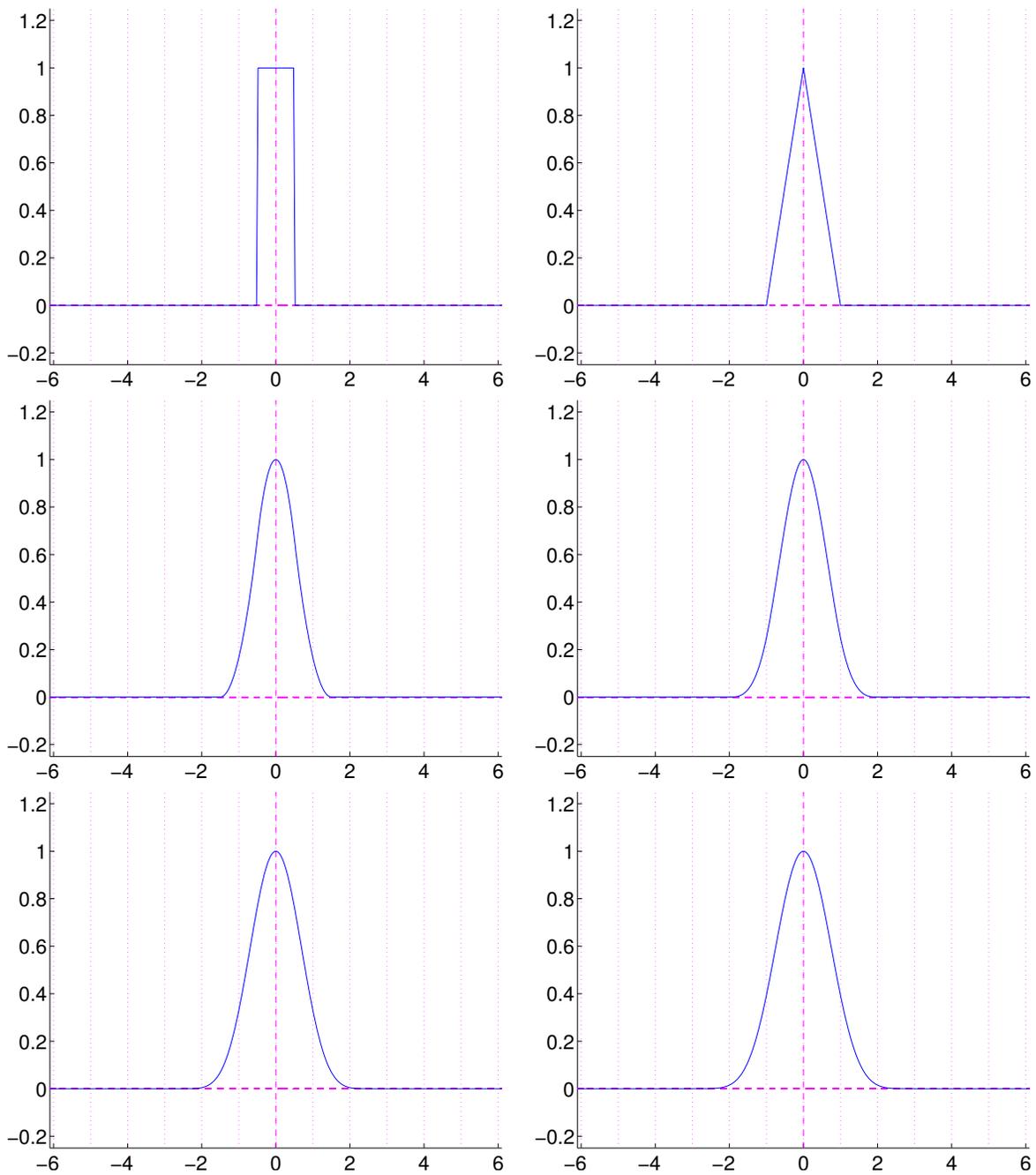


Figura 4.3: Funções-mãe B-spline Φ_0^S e Φ_1^S (no alto), Φ_2^S e Φ_3^S (meio), Φ_4^S e Φ_5^S (em baixo).

4.2 Outras funções-mãe

Vamos mencionar nesta seção algumas funções-mãe muito populares na literatura de bases radiais, mas que não são adequadas para nossos propósitos. Uma vez que os elementos derivados delas têm mais influência longe do centro do que perto dele.

4.2.1 Poliharmônicas

As funções-mãe *poliharmônicas* foram introduzidas por Meinguet [46]. Elas são indexadas por um inteiro positivo β , e definidas pelas fórmulas

$$\Phi_{\beta}^{\text{H}}(r) = \begin{cases} r^{2\beta} \log(r) & \text{para } d \text{ par,} \\ r^{2\beta-1} & \text{para } d \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Veja a Figura 4.4. Para d par, estas funções-mãe correspondem às *splines de placa fina* de Duchon [6].

O uso de elementos baseados em Φ_{β}^{H} é geralmente justificado por analogias físicas. O nome de *spline* placa fina refere-se a uma analogia física envolvendo a flexão elástica de uma folha fina de metal. Na configuração física, a deflexão está na direção ortogonal ao plano da folha [49].

Porém, estas funções-mãe têm muitas características problemáticas. Em primeiro lugar, elas crescem sem limite quando r tende para infinito. Por esta razão, cada elemento (radial ou tensorial) derivado delas tem efeito maior longe do centro do que próximo a ele. Esta característica torna as funções Φ_{β}^{H} inadequadas para esquemas adaptativos.

Além disso, as funções Φ_{β}^{H} se anulam para $r = 0$ e $r = 1$, o que pode resultar em dependências lineares entre os elementos em certas situações [49]. Por exemplo, se o centro c_1 estiver na origem de \mathbb{R}^d e os demais centros estiverem na fronteira da caixa $[-1, 1]^d$, a primeira linha e a primeira coluna da matriz de colocação B serão nulas.

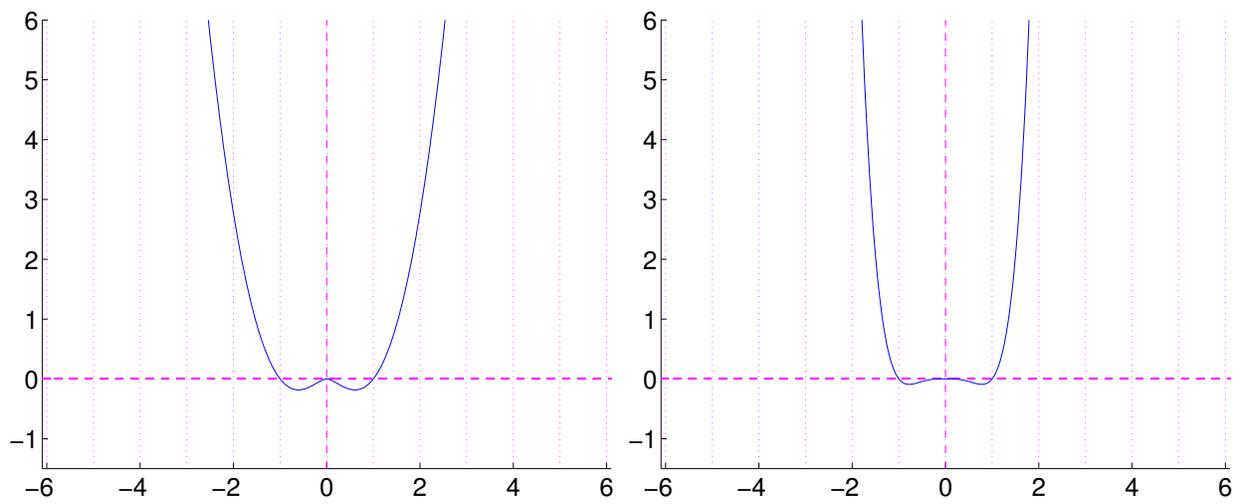


Figura 4.4: Funções-mãe poliharmônicas Φ_1^H (esquerda), Φ_2^H (direita).

4.2.2 Multiquádrica de Hardy

Outra função-mãe popular é a *multiquádrica de Hardy* [34], definida por

$$\Phi_{\eta}^{\text{Q}}(r) = \sqrt{(\eta^2 + r^2)},$$

sendo η uma constante positiva. Veja a Figura 4.5. Verifica-se que $\Phi_{\eta}^{\text{Q}}(r) = \eta\Phi_1^{\text{Q}}(r/\eta)$; portanto,

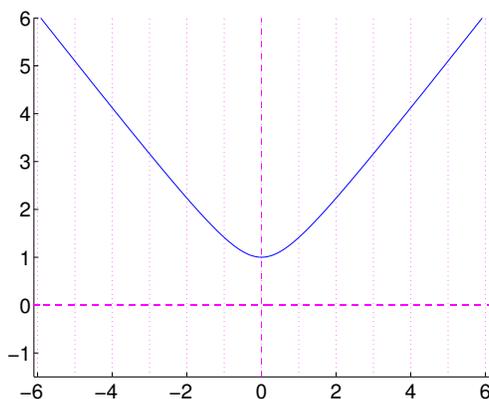


Figura 4.5: Multiquádrica de Hardy $\Phi_1^{\text{Q}}(r) = \sqrt{(1 + r^2)}$.

para construção de bases radiais ou tensoriais, podemos tomar $\eta = 1$. Esta função-mãe também cresce com $|r|$ em vez de diminuir. Portanto, os elementos derivados dela também têm mais influência longe do centro do que perto dele, o que a torna inadequada para esquemas adaptativos.

4.2.3 Multiquádrica Inversa

A *multiquádrica inversa*, também proposta por Hardy [34], é a função-mãe

$$\Phi_{\eta}^{\text{I}}(r) = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + r^2}}.$$

Veja a Figura 4.6. Para esta função também podemos supor $\eta = 1$, pois $\Phi_{\eta}^{\text{I}}(r) = (1/\eta)\Phi_1^{\text{I}}(r/\eta)$. O gráfico desta função (Figura 4.6) é superficialmente parecido com o da gaussiana Φ^{G} , porém ela decai muito mais devagar quando $|r|$ aumenta (aproximadamente como $1/|r|$). Portanto, ela não pode ser truncada a um intervalo limitado, e sua integral inclusive diverge.

Por essa mesma razão, quando os centros estão uniformemente distribuídos no domínio \mathbb{D} , a influência combinada dos elementos com centros distantes acaba sendo maior que a dos elementos mais próximos. Esta característica torna estes elementos inadequados para aproximações adaptativas, e é tanto mais grave quanto maior a dimensão do domínio.

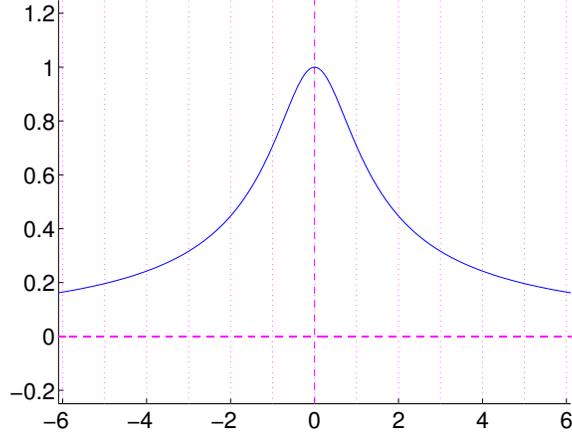


Figura 4.6: Função-mãe multiquádrica inversa: $\Phi_1^I(r) = 1/\sqrt{1+r^2}$.

4.3 Discussão

4.3.1 Eficiência computacional

Do ponto de vista de eficiência computacional, são interessantes funções-mãe *compactas* como $\Phi_{d,c}^P$ e Φ_g^S cujo suporte é limitado a uma região relativamente pequena do domínio \mathbb{D} . Porém, as funções-mãe com suporte compacto apresentam descontinuidade de valor ou derivadas. Discussões sobre esses assuntos encontram-se em Buhmann [7] e Fasshauer [18].

A função-mãe Φ^G gaussiana (seção 4.1.1) é um meio-termo; ela é totalmente suave (C^∞), mas embora tenha suporte ilimitado, para fins computacionais (com números em ponto flutuante de precisão dupla) pode ser considerada nula quando $|r| \geq 8,5$, como visto na seção 4.1.1.

4.3.2 Solubilidade

Verifica-se que todas as funções-mãe definidas na Seção 4.1 produzem matrizes de colocação B inversíveis, desde que os centros sejam distintos [48].

4.3.3 Continuidade

Algumas das funções-mãe que usamos tem descontinuidade para certos valores r_1, r_2, \dots do argumento $|r|$. Especificamente, as funções de Wendland $\Phi_{d,c}^P$ tem descontinuidades nas derivadas de ordem $2c+1$ para $|r|=r_0=0$ ou $|r|=r_1=1$. As funções B-splines Φ_g^S têm descontinuidade na derivada de ordem g quando $|r|$ é $r_0, r_1, \dots, r_{\lceil g/2 \rceil}$, sendo $r_k = k + 1/2$ se g é par ou $r_k = k$ se g é ímpar.

Os elementos ϕ_j das bases tensoriais derivados destas funções-mãe terão portanto essas mesmas descontinuidades nos hiperplanos definidos pelas equações $x_i = c_{ji} \pm \rho_i r_k$ para cada eixo de coordenadas i e cada um desses valores r_k .

Capítulo 5

Domínio toroidal

Uma dificuldade recorrente em problemas de aproximação é o *efeito das bordas*: quando \mathbb{D} é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^d , o erro de aproximação perto das bordas do domínio \mathbb{D} é geralmente diferente do erro na parte central. Por exemplo se os centros estão distribuídos uniformemente em \mathbb{D} , os pontos próximos à borda de \mathbb{D} serão cobertos por menos elementos da base do que os pontos na região central. Esta variação dificulta a análise comparativa de diferentes bases e diferentes métodos de aproximação.

Para evitar esta complicação, vamos supor que \mathbb{D} é um *toro d dimensional*; ou seja, uma caixa alinhada com os eixos, $\mathbb{D} = [0, L_1] \times [0, L_2] \times \cdots \times [0, L_d]$, sendo que cada face de \mathbb{D} é identificada conceitualmente com a face oposta. Desta forma, todos os pontos ficam equivalentes em relação ao domínio e (como veremos na Seção 7.1.1) todos os elementos de uma base uniforme ficam equivalentes.

A suposição de domínio toroidal efetivamente elimina as bordas do domínio, e os problemas decorrentes delas. Como veremos na Seção 7.2, esta suposição também permite reduzir drasticamente o custo computacional quando a base e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ tem estrutura uniforme sobre a caixa \mathbb{D} .

Uma desvantagem de adotar esta hipótese é que ela pressupõe que a função a aproximar f tem valores e derivadas iguais nas faces opostas de \mathbb{D} . Se isto não é verdade, tratar o domínio \mathbb{D} como toroidal torna a função f descontínua na fronteira da caixa \mathbb{D} .

Por outro lado, ainda podemos usar esta abordagem quando a função f não é periódica; basta mapear o domínio real \mathbb{D}' do problema para uma região suficientemente pequena no interior da caixa \mathbb{D} , e atribuir valores adequados à função f na região $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}'$ de forma a torná-la periódica, sem introduzir descontinuidades excessivas nessa região.

Outra abordagem que poderíamos tomar para eliminar o efeito das bordas é definir a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ de modo a ignorar o que ocorre perto delas. Entretanto esta solução impede o cálculo otimizado das matrizes de colocação e momentos (Seção 7.2), que depende de $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ ser invariante sob translação da função.

5.1 Tornando as bases periódicas

A decisão de usar um domínio toroidal requer a redefinição do conceito de elemento tensorial, para torná-lo periódico. A solução que usamos nesta tese é imaginar que as partes de um elemento ϕ_i que “transbordam” da caixa \mathbb{D} são deslocadas para dentro da mesma e somadas a função original. Veja a Figura 5.1. Dependendo do tamanho do suporte do elemento, este efeito pode causar a

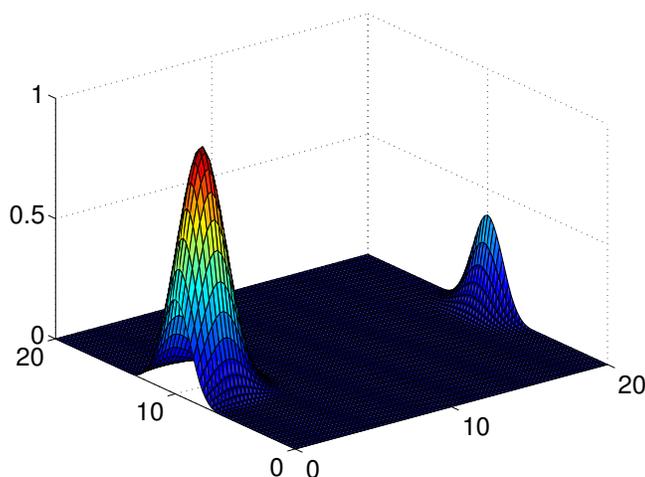


Figura 5.1: Um elemento da base periódica

sobreposição de várias (ou mesmo infinitas) partes do elemento no mesmo ponto do domínio.

Ou seja, cada elemento ϕ_j da base original deve ser substituído por um elemento $\bar{\phi}_j$ que é o elemento ϕ repetido com período L_i em cada direção i :

$$\bar{\phi}_j(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \phi_j(x + vL) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \Phi \prod_{i=1}^d \left(\frac{x_i - c_{ji} + v_i L_i}{\rho_i} \right), \quad (5.1.1)$$

para todo $x \in \mathbb{D}$. Esta somatória pode ser fatorada:

$$\bar{\phi}_j(x) = \prod_{i=1}^d \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi \left(\frac{x_i - c_{ij} - kL_i}{\rho_i} \right) \right]. \quad (5.1.2)$$

Esta fórmula mostra que a versão periódica $\bar{\phi}_j$ de um elemento tensorial ϕ_j também é um elemento tensorial,

$$\bar{\phi}_j(x) = \prod \bar{\Phi}_i(x_i - c_{ij}), \quad (5.1.3)$$

sendo $\bar{\Phi}_i$ a *função-mãe repetida*,

$$\bar{\Phi}_i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{z - kL_i}{\rho_i}\right). \quad (5.1.4)$$

Esta solução só pode ser usada quando a somatória (5.1.4) converge e, de preferência, tem uma fórmula analítica eficiente. Em particular, ela sempre pode ser usada quando a função-mãe tem suporte compacto (ou praticamente compacto, como no caso da gaussiana Φ^G), pois nesse caso a somatória (5.1.4) é sempre finita. Na verdade, se H é a largura do suporte de Φ , e $H\rho_i \leq L_i$, então a somatória (5.1.4) tem apenas um termo diferente de zero, com $k = k_0$ sendo

$$k_0 = [z/L_i] \quad (5.1.5)$$

sendo que $[\cdot]$ denota arredondamento para o inteiro mais próximo. Note que se $|(z - kL_i)/\rho_i| \geq H/2$ então $\bar{\Phi}(z)$ é zero. Se $H > L_i/\rho_i$, basta tomar os termos com $k = k_0 + t$ em que k_0 é dado pela fórmula (5.1.5) e $|t| \leq [H\rho_i/L_i/2]$. No restante desta tese, vamos supor que todos os elementos das bases ϕ_j são na verdade os elementos repetidos $\bar{\phi}_j$ conforme a equação (5.1.3).

5.2 Versões periódicas das funções-mãe

Nas seções a seguir mostramos algumas versões periódicas de cada uma das funções-mãe apresentadas na seção 4.1

5.2.1 Gaussiana

Como observado na Seção 4.1.1, embora a função-mãe gaussiana Φ^G tenha domínio infinito, ela pode ser tornada periódica, pois a somatória infinita (5.1.4) converge muito rapidamente. Em particular, uma vez que $\Phi^G(z)$ é menor que 10^{-15} quando $|z| \geq 8,5$, podemos considerar $H = 2 \times 8,5$ para fins da Seção 5.1. Para dimensão $d \leq 3$, basta usar os termos com $k_0 + t$ onde k_0 , é o inteiro dado pela fórmula (5.1.5) e $|t| \leq [8,5 \rho_i/L_i]$, para obter a soma com erro da ordem de 10^{-15} .

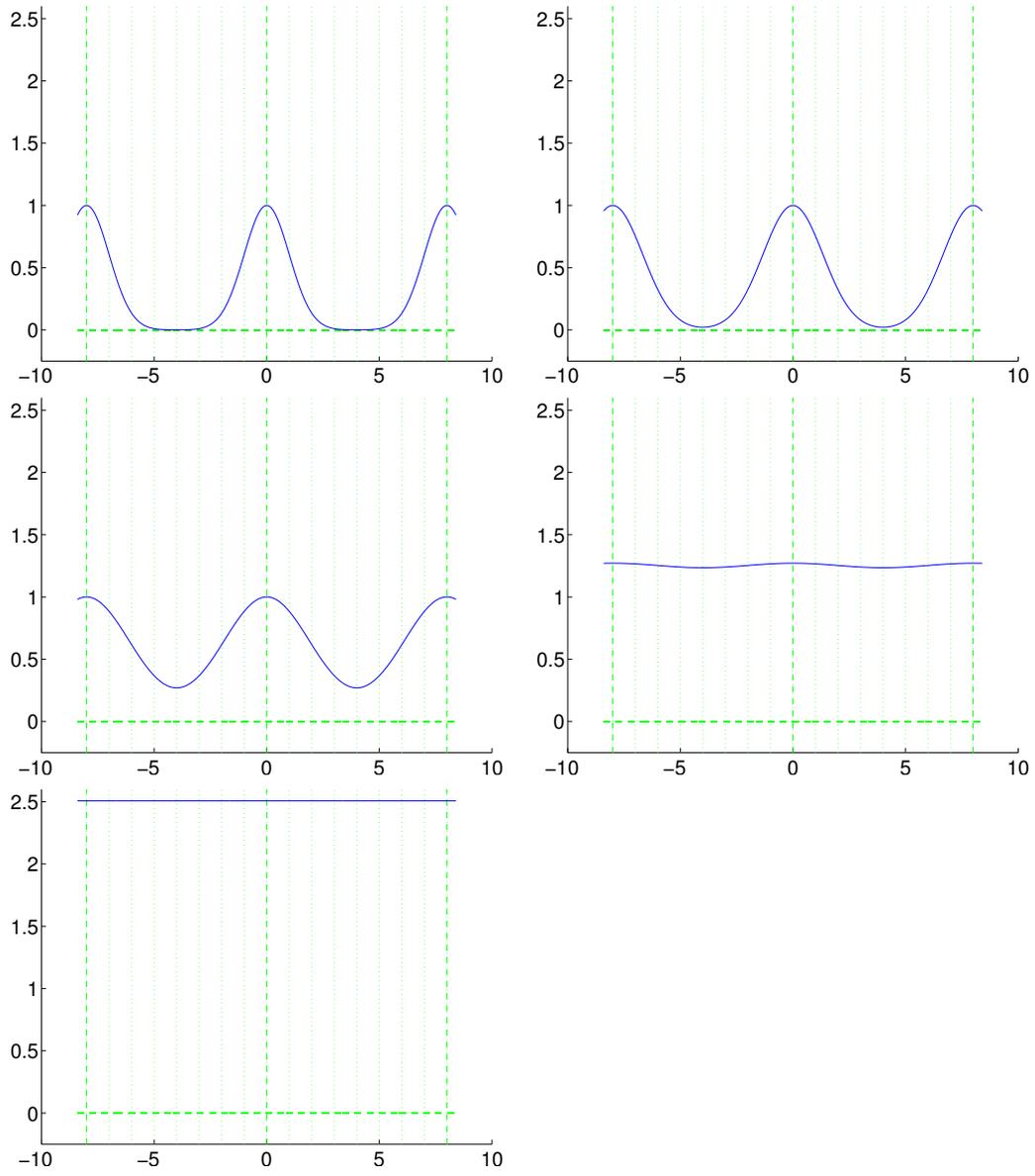


Figura 5.2: As versões repetidas $\hat{\Phi}_i^G(z)$ da função-mãe gaussiana Φ^G , para período $L_i = 8$ e fator de escala $\rho_i = 1, 4/3, 2, 4$ e 8

5.2.2 Pulsos polinomiais de Wendland

O suporte dos pulsos de Wendland $\Phi_{d,c}^P$ é o intervalo $[-1,+1]$ com tamanho ($H = 2$), portanto a somatória (5.1.4) converge e só precisa incluir termos com $k = k_0 + t$ em que $|t| \leq \lceil \rho_i/L_i \rceil$. Veja Figuras 5.3 e 5.4.

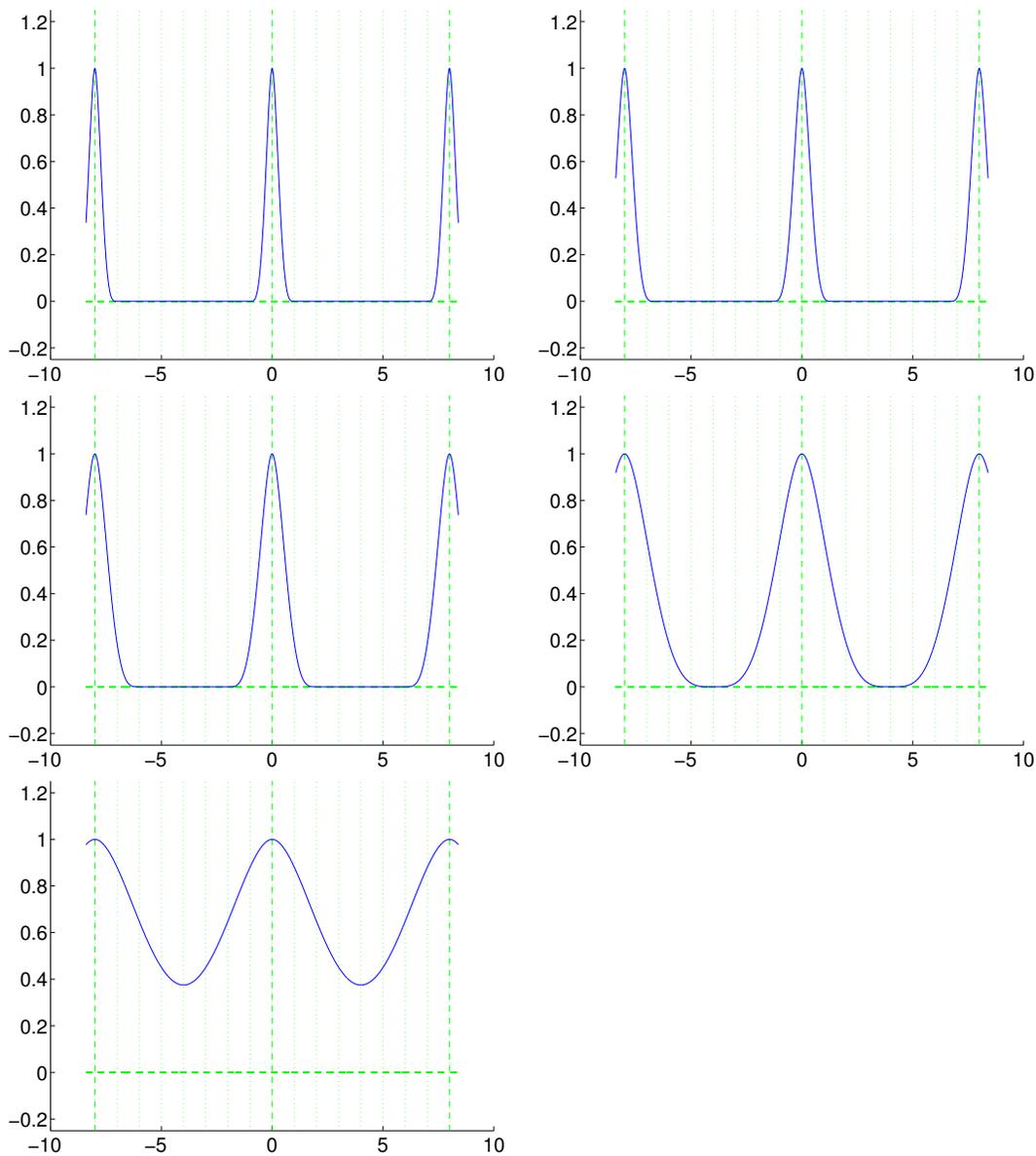


Figura 5.3: As versões repetidas $(\bar{\Phi}_{3,2}^P)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial $\Phi_{3,2}^P$, para período $L_i = 8$ e raios $\rho_i = 1, 4/3, 2, 4$ e 8 .

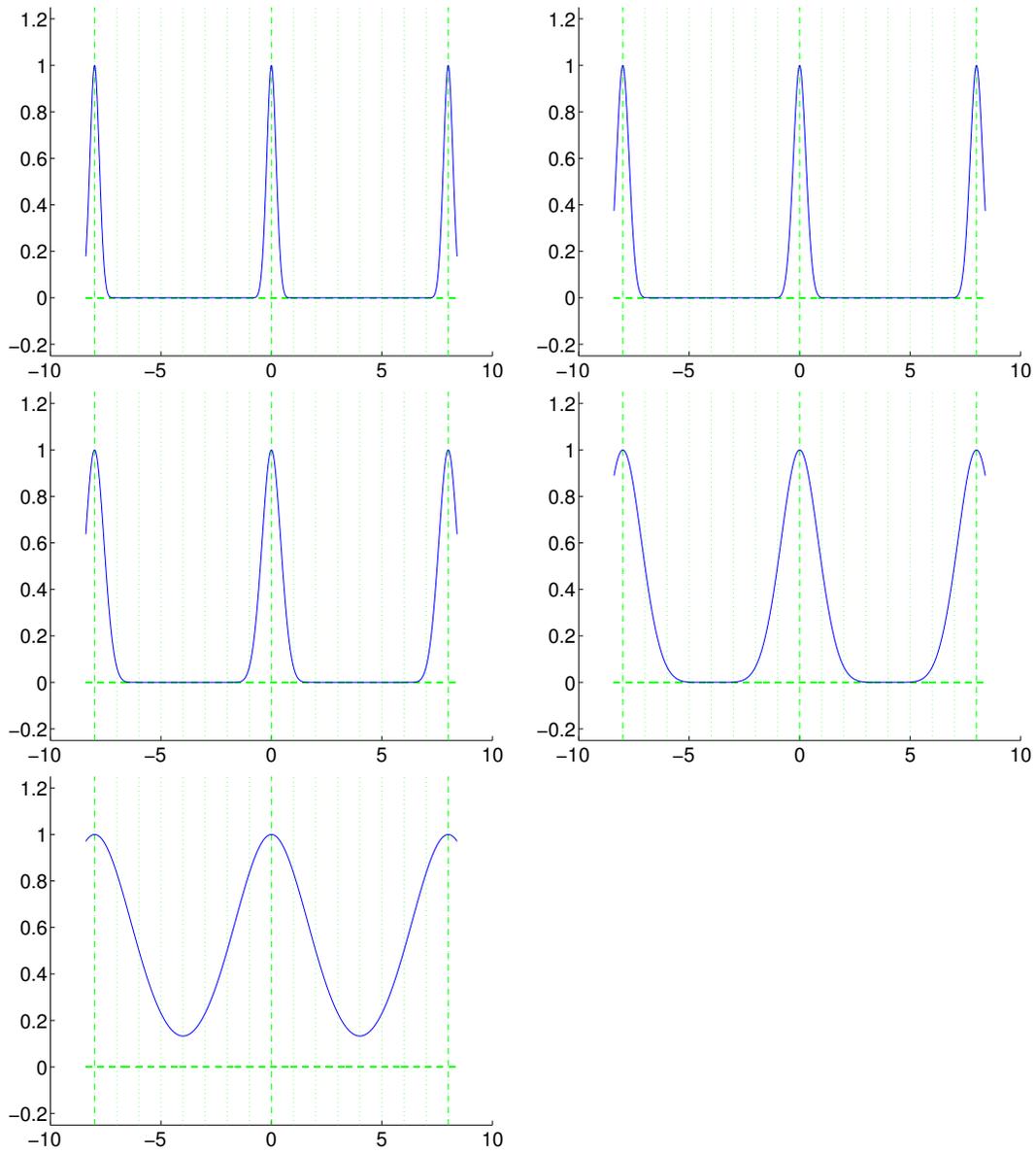


Figura 5.4: As versões repetidas $(\overline{\Phi}_{5,4}^P)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial $\Phi_{5,4}^P$, para período $L_i = 8$ e raios $\rho_i = 1, 4/3, 2, 4$ e 8 .

5.2.3 B-splines

O suporte da função-mãe B-spline Φ_g^S de grau g é o intervalo $[-(g+1)/2, +(g+1)/2]$, com largura $H = g+1$. Portanto a somatória (5.1.4) converge e só precisa incluir termos com $|t| \leq \lceil \rho_i(g+1)/2/L_i \rceil$. Veja a Figura 5.5.

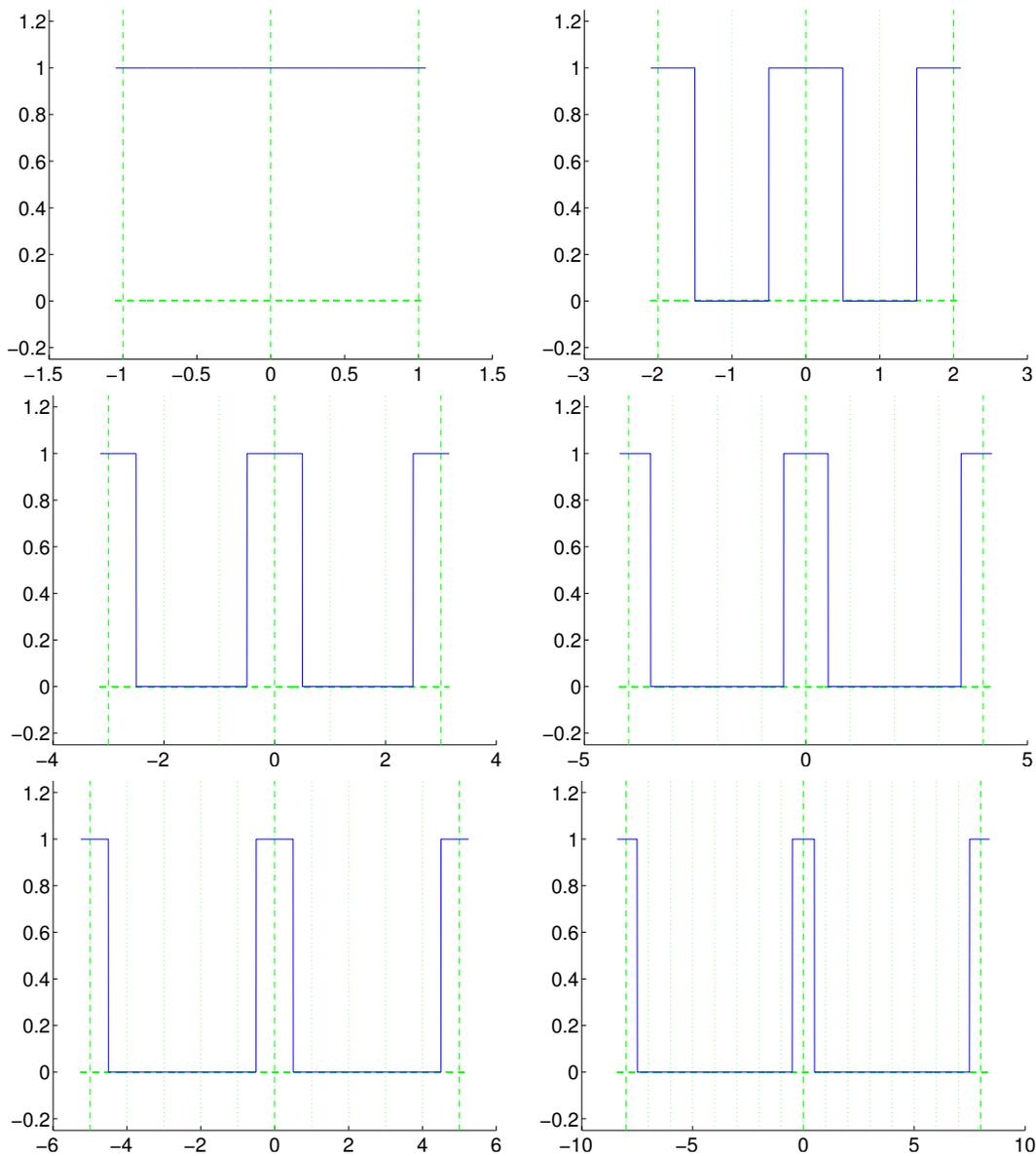


Figura 5.5: As versões repetidas $(\overline{\Phi}_0^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_0^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

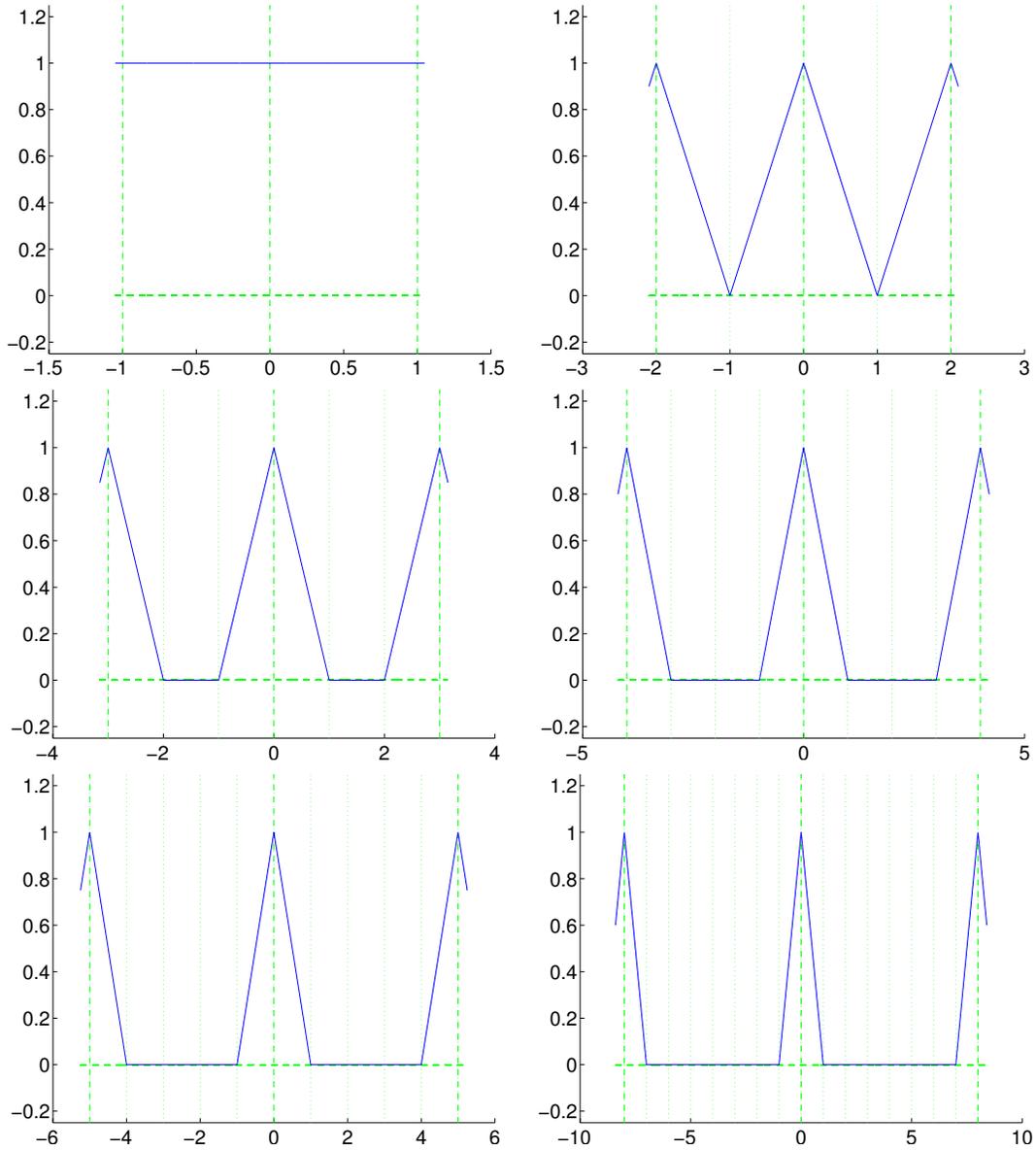


Figura 5.6: As versões repetidas $(\bar{\Phi}_1^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_1^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

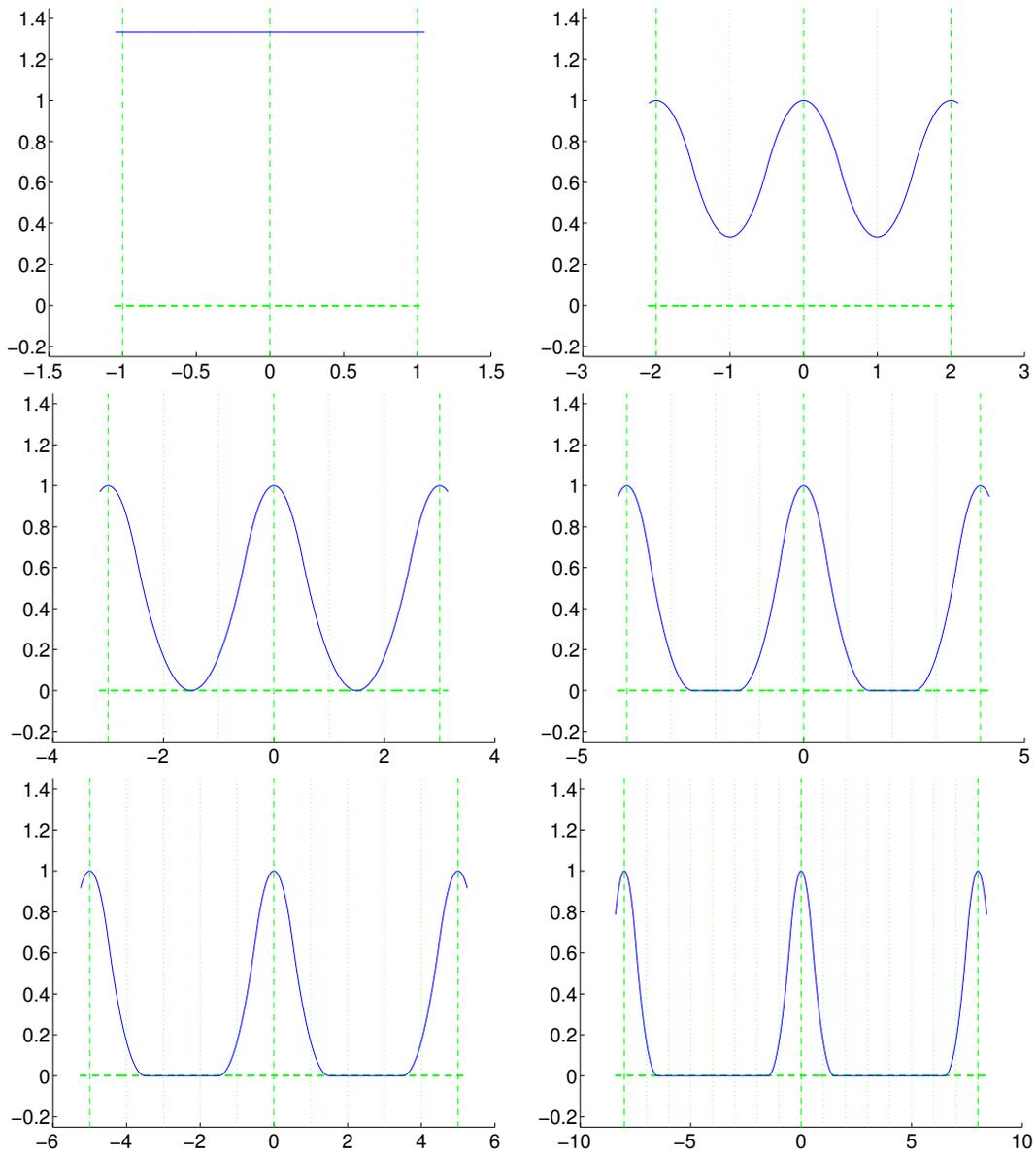


Figura 5.7: As versões repetidas $(\bar{\Phi}_2^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_2^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

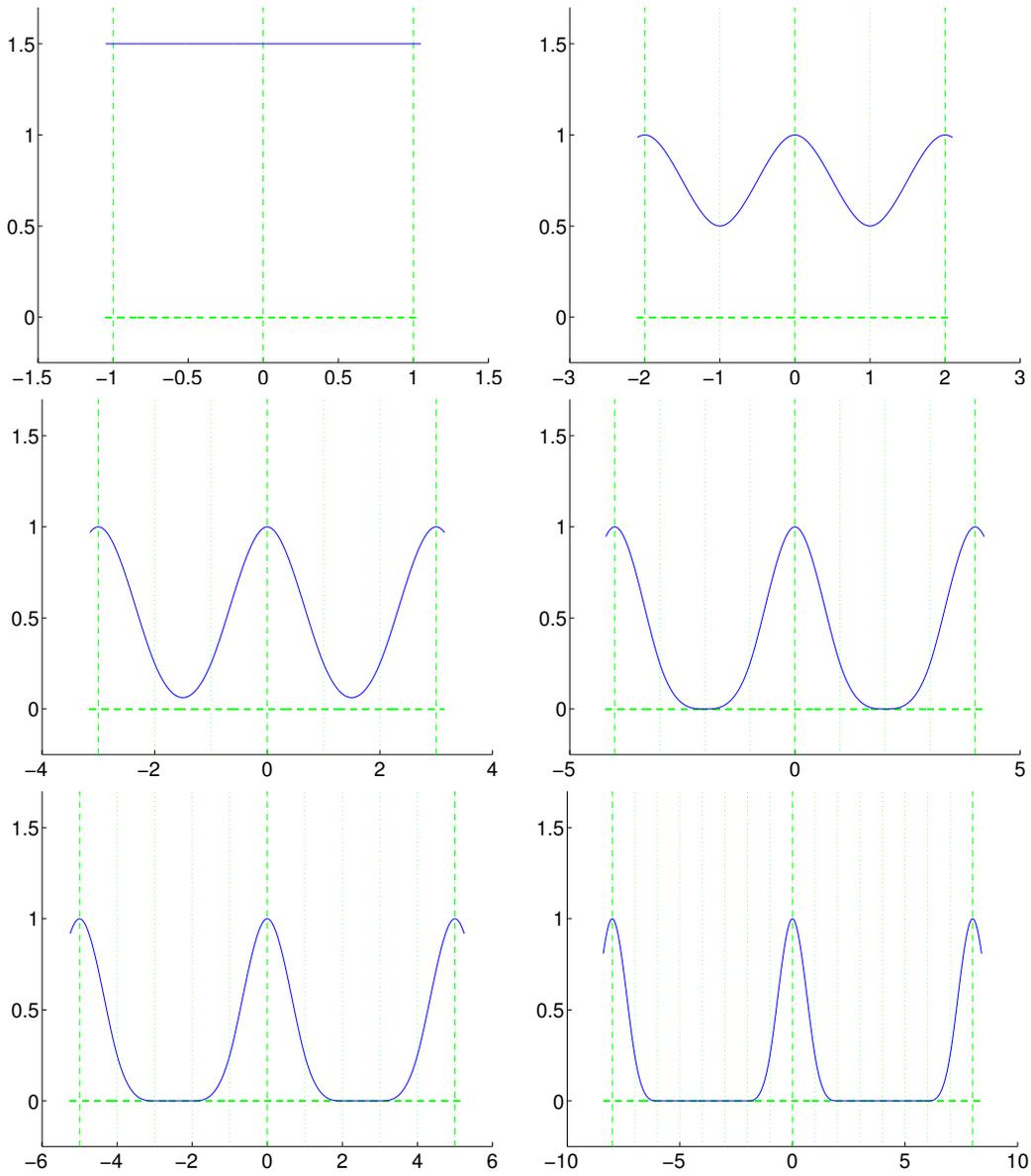


Figura 5.8: As versões repetidas $(\bar{\Phi}_3^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_3^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

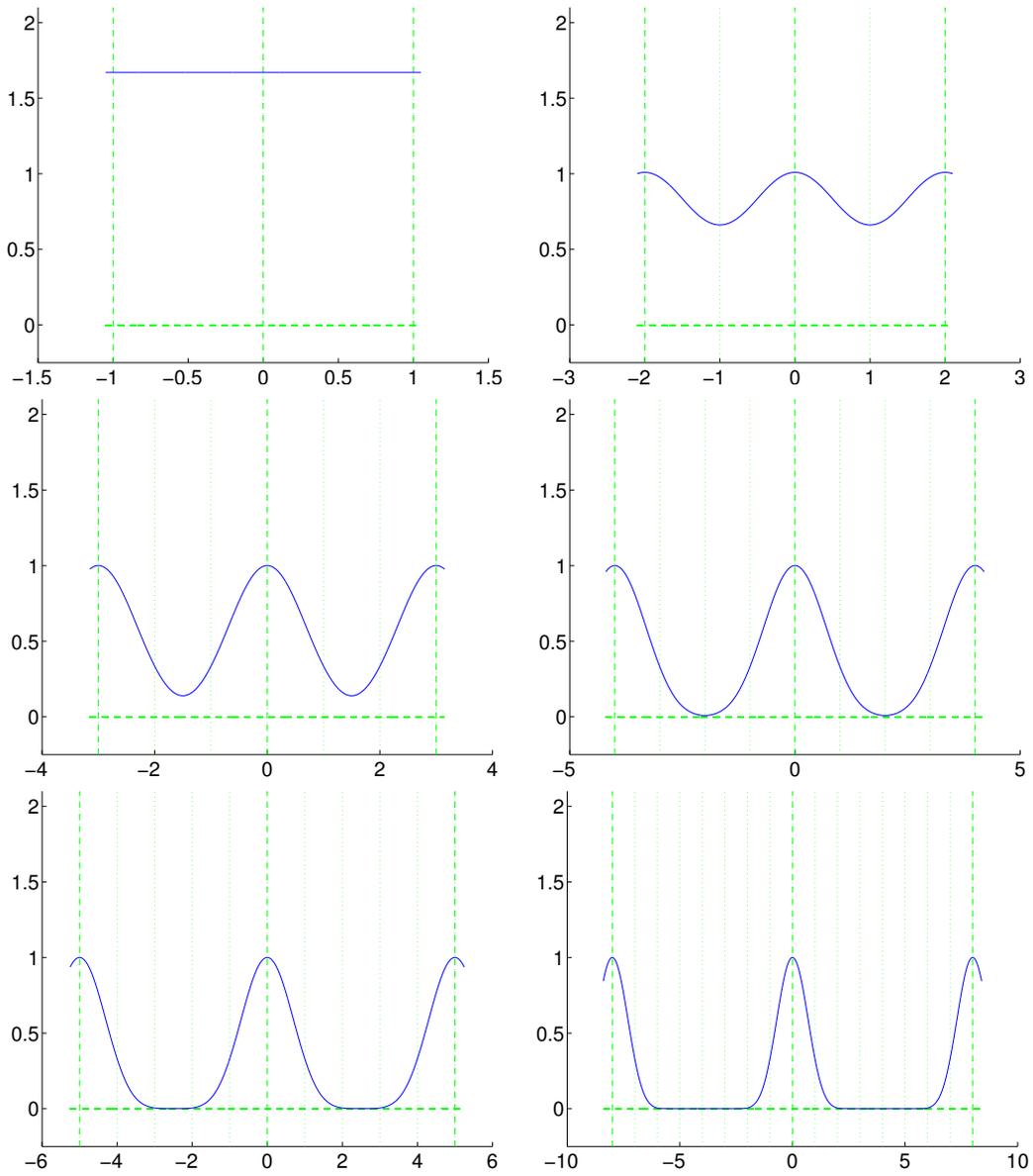


Figura 5.9: As versões repetidas $(\bar{\Phi}_4^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_4^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

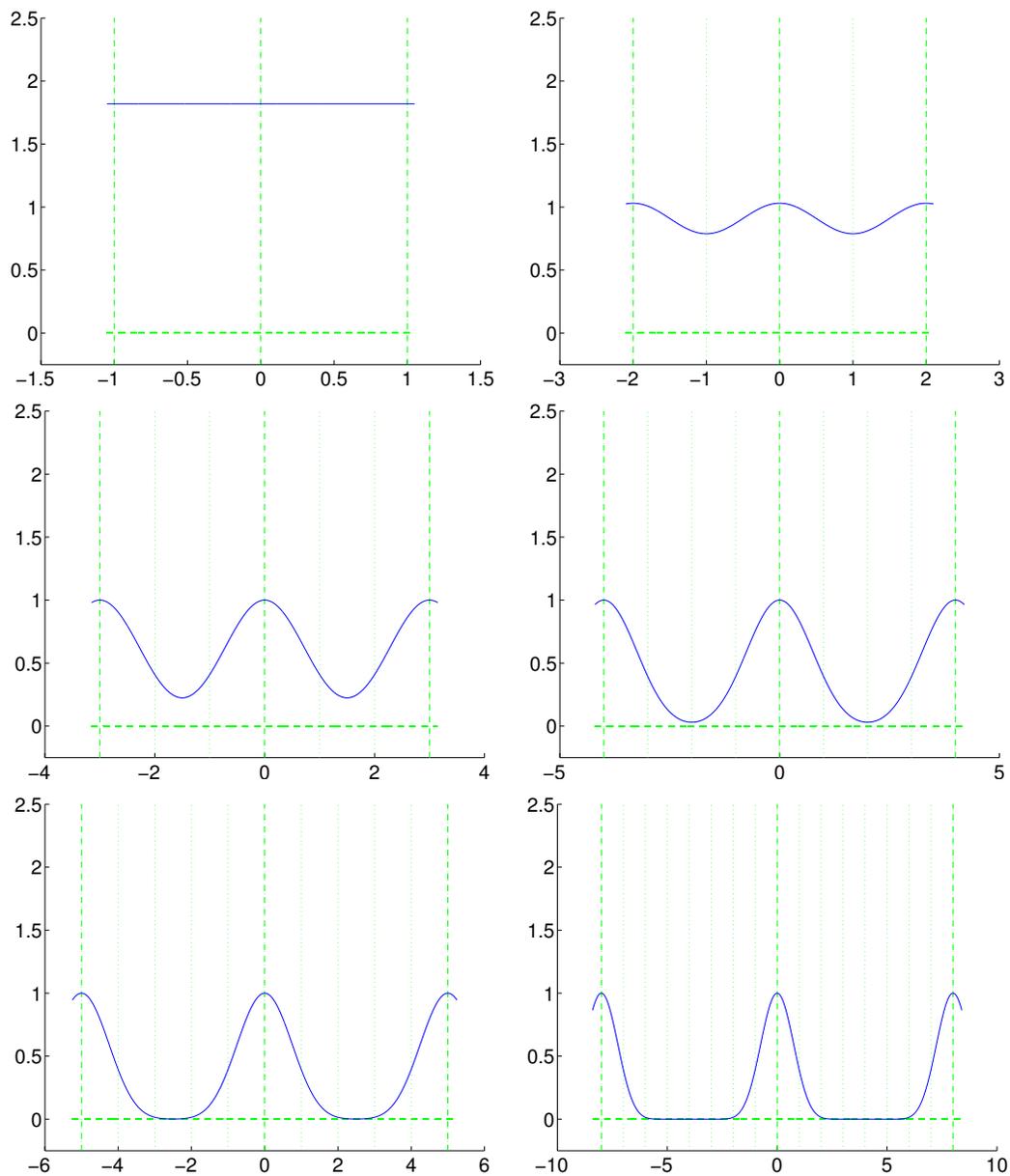


Figura 5.10: As versões repetidas $(\overline{\Phi}_5^S)_i(z)$ da função-mãe pulso polinomial Φ_5^S , para raio $\rho_i = 1$ e períodos $L_i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 8 .

Capítulo 6

Teoria da Aproximação Discreta

Neste capítulo vamos definir os conceitos fundamentais da aproximação *discreta*, em que tanto as funções objetivo quanto as aproximantes são definidas por seus valores em uma lista finita $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ de N pontos do domínio. Neste caso, as funções podem ser vistas como vetores de \mathbb{R}^N ; e tanto as normas quanto os produtos escalares sobre \mathcal{F} , \mathcal{A} e \mathcal{E} passam a ser normas e produtos internos sobre \mathbb{R}^N .

Podemos então redefinir um problema de *aproximação discreta* como consistindo de

- Um subespaço \mathcal{F} de \mathbb{R}^N , o espaço das *funções objetivo*;
- Um subespaço \mathcal{A} de \mathbb{R}^N , o espaço das *funções aproximadoras*;
- Um *critério de aproximação*, um predicado sobre $\mathcal{F} \times \mathcal{A}$.

As coordenadas dos vetores de \mathcal{A} e \mathcal{F} são chamadas *amostras*. Vários dos métodos e resultados podem ser estendidos para situações onde as amostras são valores de quaisquer outros N funcionais lineares independentes.

Uma *instância* de tal problema de aproximação discreta é um vetor $f \in \mathcal{F}$. Uma *solução* para essa instância é um vetor $s \in \mathcal{A}$ tal que o par (f, s) satisfaz o critério de aproximação. Na escolha de s vamos considerar apenas os critérios de interpolação e de aproximação ótima com norma hilbertiana, que, como observando no Capítulo 3, resultam em operadores de aproximação $\mathcal{O} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$ e de resíduo $\mathcal{R} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ que são lineares e idempotentes.

Vamos supor que os subespaços \mathcal{F} e \mathcal{A} são definidos por bases finitas de dimensões m e n , respectivamente. Os elementos dessas bases serão representados pelas colunas de duas matrizes reais F e A , de dimensões $N \times m$ e $N \times n$ respectivamente. Para que o problema seja bem posto é necessário que o número de pontos de amostragem N seja maior ou igual à dimensão n do espaço \mathcal{A} . (Em muitos casos tem-se $N \gg n$). O operador de coeficientes \mathcal{C} é portanto um operador linear de \mathcal{F} para \mathbb{R}^N .

6.1 Normas do erro

Como vimos no Capítulo 3, um critério de aproximação ótima requer uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ para o espaço $\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mathcal{A}$. Para esse fim usaremos a norma *raiz da média quadrática* $\|\cdot\|_2$ (também

conhecida pela sigla em inglês RMS), definida por

$$\|g\|_{\bar{2}} = \sqrt{\frac{g^\top g}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N g_i^2}{N}}.$$

Esta norma é associada ao produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{2}}$, definido por

$$\langle f, g \rangle_{\bar{2}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f_i g_i. \quad (6.1.1)$$

A norma $\|\cdot\|_{\bar{2}}$ é a norma euclidiana de \mathbb{R}^N dividida por \sqrt{N} . Em comparação com a norma euclidiana, a norma RMS é menos sensível à densidade de amostragem da função.

6.2 Determinação dos coeficientes

Vamos considerar apenas métodos de aproximação lineares, portanto os operadores de aproximação \mathcal{O} e resíduo \mathcal{R} são definidos por matrizes O e R de tamanho $N \times N$, sendo $R = I_N - O$; e o operador coeficientes \mathcal{C} é definido por uma matriz C de tamanho $n \times N$.

6.2.1 Interpolação nos centros

Na formulação discreta do critério de interpolação, vamos supor que os pontos onde f deve ser interpolada são um subconjunto q_1, q_2, \dots, q_n dos pontos de amostragem. Nesse caso a matriz de colocação B é formada pelas linhas de A que correspondem a esses pontos, e o lado direito b do sistema $B\alpha = b$ é formado pelos elementos correspondentes do vetor f .

A base lagrangiana é então dada por AB^{-1} , e o operador de coeficientes é dado pela matriz $C = B^{-1}$. Como na teoria de bases radiais é comum escolher como pontos de amostragem os próprios centros dos elementos, ou seja $q_i = c_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Quando o matriz B é cheia, o custo deste método é proporcional a n^2 (cálculo da matriz B) mais n^3 (resolução do sistema).

6.2.2 Interpolação generalizada

Na formulação mais geral, em que as condições de interpolação são definidas por operadores lineares $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ (Seção 3.5.2), vamos supor que cada operador \mathcal{P}_j é definido por uma matriz P_j de tamanho $1 \times N$ tal que $\mathcal{P}_j(f) = P_j^\top f$. Nesse caso a matriz de colocação é $B_{ij} = P_j^\top \phi_i$, e o vetor de coeficientes que exprime o predicado \mathcal{P}_j em termos dos valores amostrados de f é

$$\mathcal{P}_j(f) = P_j^\top f = \sum_{i=1}^N P_{ji} f_i.$$

Se denotarmos por P a matriz $n \times N$ cujas colunas são os vetores P_j , então temos $B = P^\top A$ e o sistema a ser resolvido é $B\alpha = P^\top f$.

Uma variante específica do método de interpolação é a *interpolação de médias locais*, sendo que cada funcional $P_j f$ é uma média do valor de f nas vizinhanças do centro c_j .

Nesse caso a matriz P da Seção 6.2.2 *matriz de redução* combina os valores amostrados da função em n médias.

6.2.3 Método dos Mínimos Quadrados

Como observado no Capítulo 3, se $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ é uma norma hilbertiana $\|g\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{g^{\top} E g}$, o vetor de coeficientes α ótimo pode ser encontrado pelo critério dos mínimos quadrados, resolvendo o sistema de n equações e n incógnitas $M\alpha = b$, sendo

$$M = A^{\top} E A \quad \text{e} \quad b = A^{\top} E f. \quad (6.2.1)$$

O operador de coeficientes é então $C = M^{-1} A^{\top} = (A^{\top} E A)^{-1} A^{\top}$ e portanto o operador aproximação é

$$O = A(A^{\top} E A)^{-1} A^{\top} E.$$

No caso da norma euclidiana $\|\cdot\|_2$, que tem $E = I_N$ estas fórmulas ficam

$$M = A^{\top} A \quad b = A^{\top} f \quad O = A(A^{\top} A)^{-1} A^{\top}.$$

No caso da norma RMS, $E = (1/N)I_N$ e portanto o sistema pode ser simplificado para $M = (1/N)A^{\top} A$, $b = (1/N)A^{\top} f$, etc. Note que o resultado seria o mesmo se usássemos a norma euclidiana em vez da norma RMS.

Se os elementos da base tem suporte global, o custo deste método é proporcional a Nn (para o cálculo da matriz A) mais $n^2 N$ (cálculo da matriz M) mais n^3 (resolução do sistema). Se $N \gg n$, a segunda etapa predomina.

Este método é portanto mais custoso que a interpolação de médias locais quando $N \gg n$; porém, ele garante que o vetor α será ótimo (no sentido de minimizar a norma RMS do resíduo).

A matriz A precisa ser calculada em qualquer caso para determinar o resíduo Rf , a um custo proporcional a Nn .

6.3 Esparsidade das matrizes

Quando a função-mãe possui suporte global, as matrizes A e B , com elementos $A_{i,j} = \phi_j(p_i)$ e $B_{i,j} = \phi_j(c_i)$, são matrizes cheias.

Se a função-mãe Φ tem suporte compacto de largura H , o suporte de qualquer elemento tensorial derivado dela é uma caixa de d -dimensional com largura $\rho_i H$ em cada eixo i . Nesse caso a matriz A é bastante esparsa, pois $\phi_j(p_i)$ é zero se p_i não está no suporte de ϕ . Da mesma forma a matriz de momentos M do método de mínimos quadrados também é esparsa, pois $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$ é zero se os suportes de ϕ_i e ϕ_j são disjuntos.

6.4 Tratamento de erros anômalos

Um problema comum em aplicações reais são certos tipos de erros nos dados que têm baixa probabilidade de ocorrência, mas magnitude arbitrária quando ocorrem. Estes *erros anormais* se distinguem dos *erros normais* que têm distribuição aproximadamente gaussiana em torno do valor correto de cada dado. Por exemplo, em uma imagem digital há erros normais devidos a variações estatísticas dos fótons que caem em cada elemento do sensor, e erros anormais devido a sensores defeituosos. Chamaremos de *dados anômalos* os dados f_i afetados por tais erros “anormais”.

O método dos mínimos quadrados pode ser justificado, em termos estatísticos, como sendo a aproximação mais provável da função, dentre do espaço \mathcal{A} , dados os valores amostrados f_i . Entretanto, esta justificativa pressupõe que os erros de amostragem são todos normais. Veja Figura 6.1.

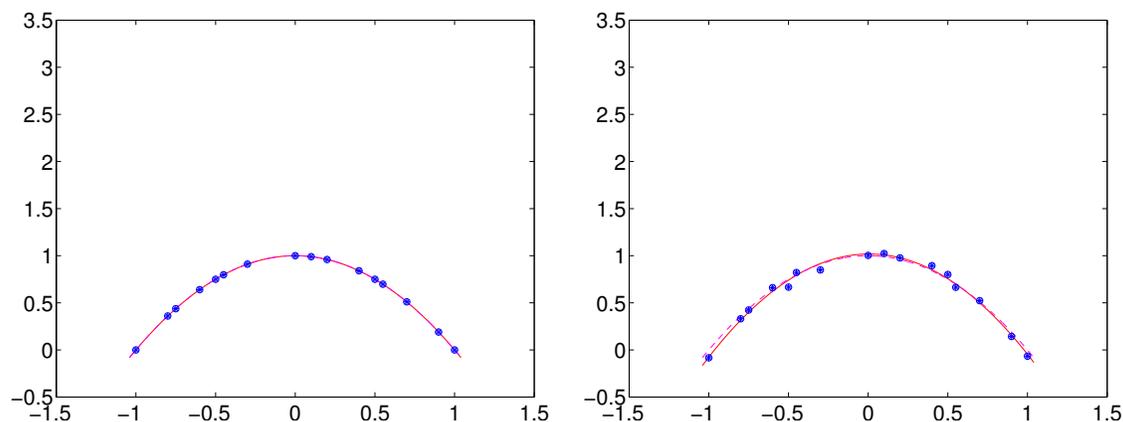


Figura 6.1: À esquerda: Amostras (círculos) de uma função quadrática (linha tracejada) e a aproximação de mínimos quadrados dessas amostras com base $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x$ e $\phi_3(x) = x^2$. À direita: amostras (círculos) da mesma função (linha tracejada), contaminados com apenas erros gaussianos, e sua aproximação MQ (linha cheia) com mesma base ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 .

Quando o método dos mínimos quadrados é usado na presença de dados anômalos, estes tipicamente afetam muito o erro de aproximação, não apenas no ponto onde a anomalia ocorre, mas também nos pontos próximos. Veja Figura 6.2.

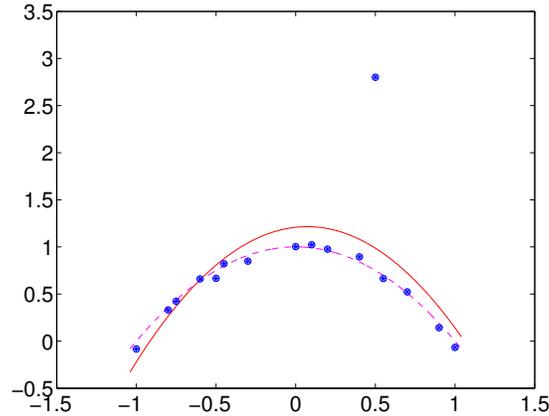


Figura 6.2: Amostras (círculos) de uma função quadrática (linha tracejada) afetados por erros gaussianos e incluindo um erro anômalo; e sua aproximação MQ (linha cheia).

Uma maneira de tratar dados anômalos é modificar seus valores de modo a diminuir seu efeito na fórmula de mínimos quadrados. Especificamente, valores de f_i que estão muito distantes da aproximação corrente s_i são considerados anômalos, e corrigidos de modo a ficarem mais próximos de s_i . Uma vez corrigidos os dados aparentemente anômalos, a aproximação s é recalculada pelo método dos mínimos quadrados, como antes. Note que a matriz M não precisa ser recalculada. Este método geralmente necessita de várias iterações até que os valores f_i se estabilizem. A Figura 6.3 apresenta a aproximação corrigida em 4 iterações. A fórmula que usamos nesta tese para corrigir os dados é

$$f_i \leftarrow s_i + \frac{f_i - s_i}{\sqrt{1 + (f_i - s_i)^2 / \sigma_t^2}} \quad (6.4.1)$$

sendo t o número de iterações já efetuadas, k o número máximo de iterações e σ_* um parâmetro que define valor máximo dos erros aceitos como “normais” e $\sigma_t = (k - t)^2 \sigma_*$. Esta fórmula, que é aplicada a todos os dados, preserva o valor de f_i quando $|f_i - s_i|$ é bem menor que σ_t , e traz f_i para $s_i \pm \sigma_t$ quando $|f_i - s_i|$ tende ao infinito. Note que $\sigma_t = \sigma_*$ na última iteração (quando $t = k - 1$).

Não é possível garantir que este método encontre a aproximação mais provável; ele pode convergir para uma aproximação que se ajusta a um conjunto pequeno de dados e considera todos os demais como anômalos.

Outra alternativa que consideramos foi usar uma métrica hilbertiana não uniforme para medir o erro,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i f_i g_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \|g\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N w_i}} \quad (6.4.2)$$

sendo que os pesos w_i são inicialmente iguais, e em seguida reduzidos iterativamente nos pontos p_i onde o erro $|f_i - s_i|$ é muito grande. Entretanto, nesta alternativa é necessário recalculer e inverter

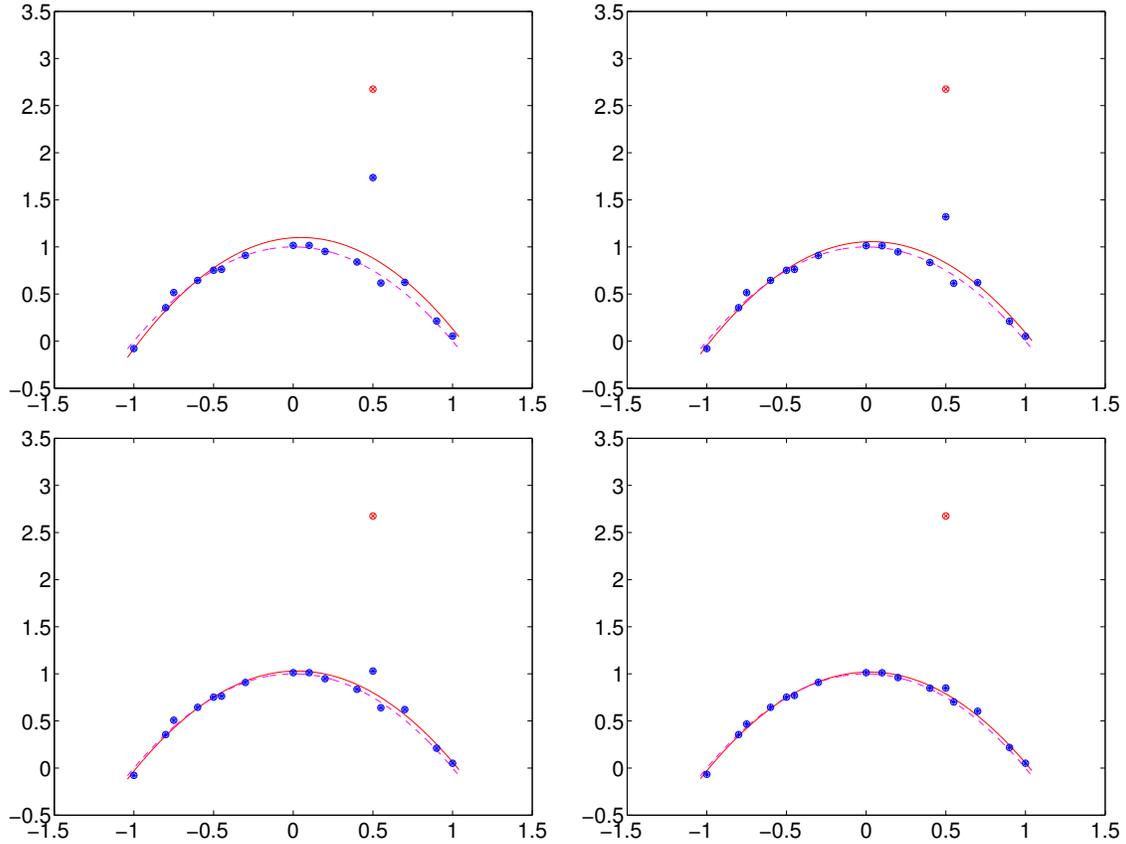


Figura 6.3: Quatro iterações da aproximação de MQ dos dados da figura 6.2 com 4 iterações da fórmula de correção de anomalias (6.4.1).

a matriz de momento M cada vez que os pesos w_i são alterados, aumentando excessivamente o custo do processo.

Uma desvantagem destas duas abordagens é que os operadores \mathcal{O} , \mathcal{R} e \mathcal{C} deixam de ser lineares.

Parte II

**Aproximação
monoescala**

Capítulo 7

Aproximação usando Bases Uniformes

No presente capítulo, vamos analisar experimentalmente a qualidade das aproximações obtidas com bases tensoriais *uniformes* — cujos centros são dispostos em uma grade ortogonal regular sobre o domínio \mathbb{D} , e cujos os elementos têm o mesmo fator de escala ρ em todos os eixos.

Em particular, vamos analisar bases tensoriais derivadas da função-mãe gaussiana Φ^G , dos pulsos de Wendland $\Phi_{d,c}^P$ e dos pulsos B-splines Φ_g^S . Nestas análises usaremos a versão discreta do método de aproximação por mínimos quadrados descrito anteriormente (seção 6.2.3). Estudaremos em particular o erro de aproximação e a estabilidade numérica.

Os pulsos B-splines são projetados para uso com o fator de escala ρ_i igual ao espaçamento ζ_i entre os centros em cada eixo i . Para as funções-mãe gaussiana e de Wendland, nossa análise inclui a determinação experimental do melhor valor da razão ρ_i/ζ_i .

7.1 Definições

7.1.1 Domínio, centros e raios

Neste capítulo vamos supor que a base tensorial uniforme é definida sobre um domínio \mathbb{D} que é uma caixa de topologia toroidal com tamanho L_i em cada eixo i , isto é, $\mathbb{D} = [0, L_1] \times [0, L_2] \times \dots \times [0, L_d]$.

Os centros c_j dos elementos da base são vértices de uma *grade regular de centros* com um certo número Q_i de posições ao longo de cada eixo i , o *tamanho da grade* ao longo desse eixo. Assim, o espaçamento entre os centros na direção i é $\zeta_i = L_i/Q_i$. Especificamente, vamos supor que os centros são todos os pontos

$$c_j = \left(\left(q_1 + \frac{1}{2} \right) \zeta_1, \left(q_2 + \frac{1}{2} \right) \zeta_2, \dots, \left(q_d + \frac{1}{2} \right) \zeta_d \right)$$

tais que cada q_i é um inteiro entre 0 e $Q_i - 1$ (inclusive), e que

$$j = 1 + \sum_{i=1}^d q_i \prod_{k=i+1}^d Q_k. \tag{7.1.1}$$

O vetor de inteiros $q = (q_1, q_2, \dots, q_d)$ representa a *posição* do elemento.

É conveniente decompor o domínio \mathbb{D} em uma grade regular de *células* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$, que são caixas de mesmo tamanho centradas nos centros c_1, c_2, \dots, c_n dos elementos. Cada célula tem tamanho ζ_i na direção do eixo i e pode ser identificada pela posição q do elemento correspondente, ou pelo seu índice j segundo a equação (7.1.1).

Por definição, o raio de cada elemento na direção i será $\rho_i = \bar{\rho}\zeta_i = \bar{\rho}L_i/Q_i$, em que $\bar{\rho}$ é um parâmetro fixo, o *fator de escala relativo* do elemento. Note que, em geral, o suporte de cada elemento ϕ_j intercepta a célula \mathfrak{C}_j e um certo número fixo de células ao redor dela, que depende da função mãe e do fator de escala relativo $\bar{\rho}$.

Observe que, com este tipo de base, o problema de aproximação discreta não muda se o tamanho do domínio L_i for multiplicado por qualquer fator positivo e todos os pontos de amostragem forem alterados da mesma forma. Portanto, neste capítulo, para simplificar adotaremos $L_i = Q_i$ para todo eixo i . Assim, o espaçamento ζ_i passa a ser 1 e o raio ρ_i dos elementos em qualquer direção i fica igual ao fator de escala relativo $\bar{\rho}$.

7.1.2 Elementos

Vamos supor que a base de aproximação ϕ é formada por elementos toroidais repetidos como descrito no Capítulo 5; ou seja

$$\phi_j(x) = \prod_{i=1}^d \bar{\Phi}_i(x_i - c_{ji}),$$

sendo que $\bar{\Phi}_i$ é a função-mãe repetida conforme a equação (5.1.4).

$$\bar{\Phi}_i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{z - kL_i}{\rho_i}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{z}{\rho_i} - k\frac{Q_i}{\bar{\rho}}\right). \quad (7.1.2)$$

Note que, por conta do domínio toroidal, todos os elementos da base são cópias transladadas (toroidalmente) do elemento ϕ_0 , ou seja, $\phi_j = \phi_0(z - (c_j - c_0))$. O mesmo vale para os elementos da base lagrangiana e da base dual associadas a ϕ .

Se a função-mãe tem suporte limitado de largura H , o fator de escala relativo deve ser maior que $H/2$, pois caso contrário haverá pontos de \mathbb{D} onde todos os elementos são nulos.

7.1.3 Amostragem

Nesta análise usaremos o método dos mínimos quadrados para obter a aproximação s . Considerando os objetivos desta análise, usamos um conjunto de pontos de amostragem p também dispostos em uma grade regular, com κQ_i pontos em cada eixo i para algum $\kappa \geq 1$. O espaçamento entre os pontos será portanto ζ_i/κ em cada eixo i . O número total de pontos de amostragem é portanto $N = \kappa^d \prod_{i=1}^d Q_i$. Mais precisamente os pontos são

$$p_k = \left(\left(y_1 + \frac{1}{2}\right)\zeta_1/\kappa, \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\zeta_2/\kappa, \dots, \left(y_d + \frac{1}{2}\right)\zeta_d/\kappa\right)$$

sendo que cada y_i é um inteiro entre 0 e $\kappa Q_i - 1$ inclusive, e

$$k = 1 + \sum_{i=1}^d y_i \prod_{j=i+1}^d (\kappa Q_j)^j.$$

7.1.4 Espaço de funções objetivo

Para o cálculo do ângulo τ entre \mathcal{F} e \mathcal{A} usamos um espaço de funções objetivo \mathcal{F} que consiste de séries trigonométricas d -dimensionais de período L_i e frequência máxima $\Omega_i = \lfloor (Q_i - 1)/2 \rfloor$ em cada eixo i . Mais especificamente, vamos usar para \mathcal{F} a *base de Hartley* [5], com amplitudes modificadas em função da frequência:

$$h_j(x) = \Gamma_j \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \sum_{i=1}^d \frac{x_i \nu_{ji}}{L_i} \right). \quad (7.1.3)$$

Nesta fórmula, $\nu_j = (\nu_{j1}, \nu_{j2}, \dots, \nu_{jd})$ é um vetor de inteiros, a *vetor de frequência*, cujas componentes ν_{ji} estão limitadas a um intervalo $\{-\Omega_i, \Omega_i\}$; e o índice j é dado por $1 + \sum_{i=1}^d (\nu_{ji} + \nu_{\max}) \prod_{k=i+1}^d (2\Omega_k + 1)$. Cada elemento h_j é portanto uma onda senoidal com vales e cristas perpendiculares ao vetor ν_j . A amplitude Γ_j na fórmula (7.1.3) diminui com a frequência absoluta da onda em cada eixo, conforme uma função gaussiana:

$$\Gamma_j = \prod_{i=1}^d \Phi^G \left(\frac{\nu_{ji}}{\omega_i} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\nu_{ji}}{\omega_i} \right)^2 \right),$$

sendo $\omega_i = \Omega_i/3$. Veja a Figura 7.1. Note que $\dim \mathcal{F} = \prod_{i=1}^d (2\Omega_k + 1) \leq \prod_{i=1}^d Q_i = \dim \mathcal{A}$. A

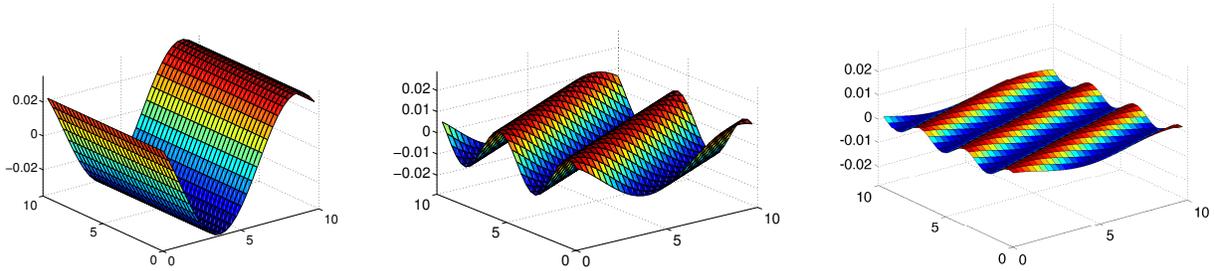


Figura 7.1: Exemplos de elementos da base de Hartley (variação da amplitude).

igualdade só vale se todos os Q_i forem ímpares.

Para definir o conjunto \mathcal{F}_1 usamos uma norma hilbertiana $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, na qual a base h é ortonormal. A Figura 7.2 mostra alguns elementos aleatórios de \mathcal{F}_1 .

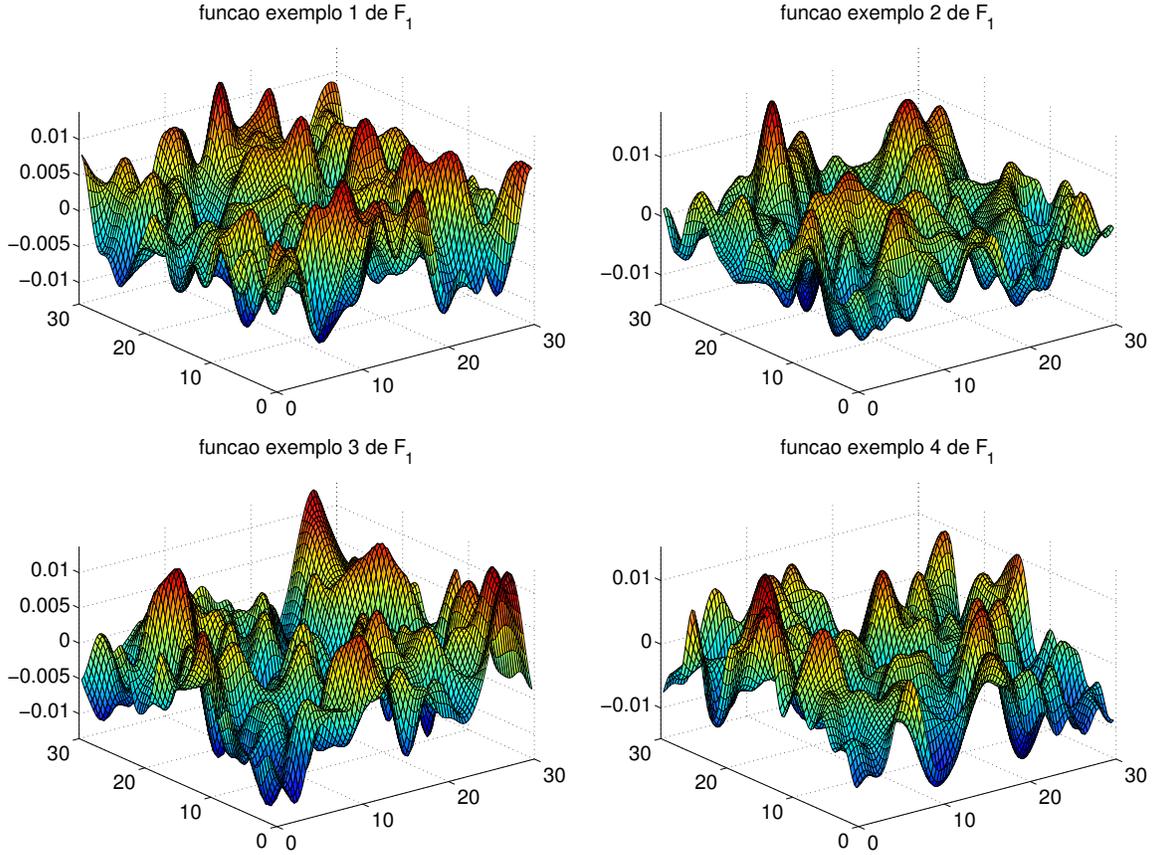


Figura 7.2: Exemplos de elementos do subespaço \mathcal{F}_1 .

7.2 Otimização do cálculo das matrizes

Uma vez que nas análises deste capítulo os pontos de amostragem formam uma grade uniforme sincronizada com a grade de centros, cada coluna da matriz A é permutação da primeira coluna. Então, para construir essa matriz obtemos um custo maior ao criar a primeira coluna (calcular $A_{i1} = \phi_1(p_i)$ para todo ponto de amostragem p_i), pois as demais colunas são obtidas com um simples rearranjo das entradas dessa coluna. Além disso, se o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ é definido pela fórmula (6.1.1), a mesma observação vale para a matriz M : basta calcular a primeira coluna $M_{i1} = \langle \phi_i, \phi_1 \rangle = \sum_{k=1}^N A_{ki} A_{k1}$, e replicar esses valores nas demais colunas. A mesma observação também vale para a matriz de colocação B do método de interpolação.

7.3 Parâmetros dos testes

Para avaliar as diversas funções-mãe, fizemos testes com $d = 2$, $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_d = T = 30$, portanto $n = \dim \mathcal{A} = T^2 = 900$, $m = \dim \mathcal{F} = (2\lfloor (T-1)/2 \rfloor + 1)^2 = 841$. Usamos uma

grade de amostragem com $\kappa = 3$, e portanto o número N de pontos de amostragem corresponde a $(\kappa T)^2 = 8.100$. Repetimos posteriormente os mesmos testes para $T = 40$, (portanto, $n = \dim \mathcal{A} = 1.600$, $m = \dim \mathcal{F} = 1.521$ e $N = 14.400$), a fim de confirmar que os resultados podem ser considerados representativos para as malhas (muito maiores) que podem ser encontradas na prática.

Para todas as funções-mãe analisadas, apresentamos

- gráficos de um elemento típico ϕ_{j^*} , sendo $j^* = 1 + \sum_{i=1}^d \lfloor T/2 \rfloor T^{d-i}$, para alguns valores do fator de escala relativo $\bar{\rho}$.
- gráfico de $\phi_{j^*}^*$, elemento típico da base dual, para esses valores de $\bar{\rho}$.

7.4 Determinação do raio ótimo

Para as funções-mãe B-splines Φ_g^S , o raio ρ_i deve ser igual ao passo ζ_i , por definição, ou seja o fator de escala relativo $\bar{\rho}$ deve ser 1. Com esta escolha, o espaço \mathcal{A} consiste de todos os splines de grau g e continuidade $g - 1$ na malha formada pelas células $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ sobre \mathbb{D} .

Para determinar o raio ótimo das outras funções-mãe, realizamos uma série de testes com diversos valores do fator de escala relativo $\bar{\rho}$ para as funções-mãe. Neste caso, além dos gráficos acima, apresentamos

- gráficos do erro médio $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\|\mathcal{R}(h_k)\|_2)^2}$, e do número de condição $\Lambda = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ da matriz M do sistema linear, em função do fator de escala relativo $\bar{\rho}$.
- o fator de escala relativo ótimo $\bar{\rho}$, adotado nos capítulos seguintes, e os respectivos valores de ϵ e Λ .

As Tabelas 7.1 e 7.2 abaixo resumem os resultados dos testes para o método MQ, com $T = 30$ e $T = 40$. Nos casos das funções Φ^G , $\Phi_{3,2}^P$ e $\Phi_{5,4}^P$ usamos os valores ótimos do fator de escala relativo $\bar{\rho}$ encontrados na seção 7.4. A última coluna mostra o número médio ν de elementos não nulos em cada coluna da matriz M .

Tabela 7.1: Resumo dos testes numa grade com $T = 30$

Φ	ρ	ϵ	τ	Λ_M	ν
Φ^G	1,1	0,000001	$5,5 \times 10^{-6}$	$5,9 \times 10^9$	900
$\Phi_{3,2}^P$	3,5	0,000078	$8,2 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^6$	169
$\Phi_{5,4}^P$	4,5	0,000034	$2,8 \times 10^{-4}$	$4,5 \times 10^6$	289
Φ_1^S	1	0,000464	$6,2 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^0$	9
Φ_2^S	1	0,000143	$1,7 \times 10^{-3}$	$5,5 \times 10^1$	25
Φ_3^S	1	0,000078	$7,0 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^2$	49
Φ_4^S	1	0,000045	$3,3 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^3$	81
Φ_5^S	1	0,000026	$1,6 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^4$	121

Tabela 7.2: Resumo dos testes numa grade com $T = 40$.

Φ	ρ	ϵ	τ	Λ	ν
Φ^G	1,1	0,000001	$6,7 \times 10^{-6}$	$5,9 \times 10^9$	1369
$\Phi_{3,2}^P$	3,5	0,000067	$8,8 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^6$	169
$\Phi_{5,4}^P$	4,5	0,000029	$3,1 \times 10^{-4}$	$4,5 \times 10^6$	289
Φ_1^S	1	0,00036	$6,6 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^0$	9
Φ_2^S	1	0,000116	$1,8 \times 10^{-3}$	$5,5 \times 10^1$	25
Φ_3^S	1	0,000065	$7,6 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^2$	49
Φ_4^S	1	0,000039	$3,6 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^3$	81
Φ_5^S	1	0,000024	$1,8 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^4$	121

7.4.1 Função gaussiana Φ^G

Os resultados abaixo referem-se à função-mãe gaussiana (seção 4.1.1). Veja a Figura 7.3.

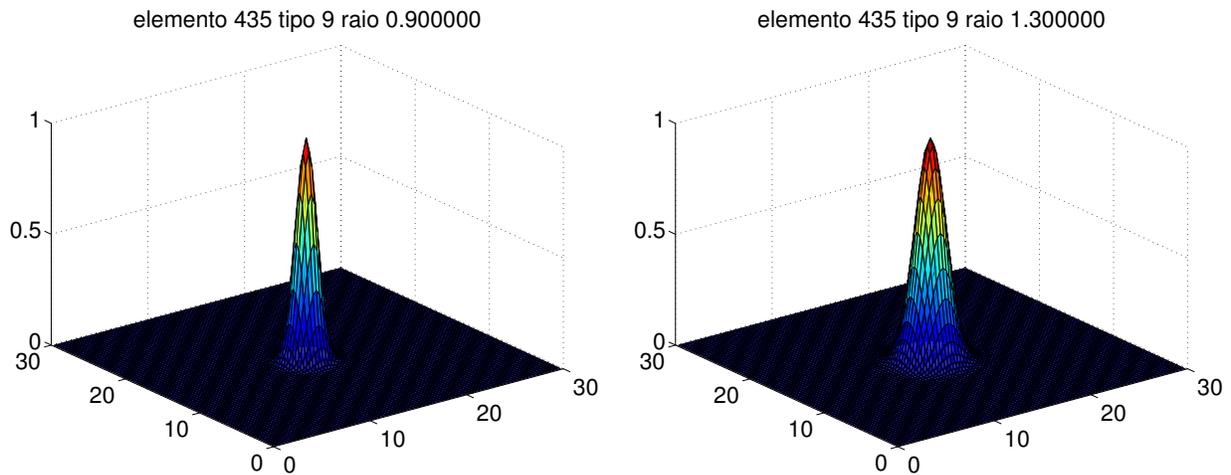


Figura 7.3: Elemento ϕ_{j^*} derivado da função-mãe gaussiana Φ^G com $\bar{\rho} = 0,90$ (à esquerda) e $\bar{\rho} = 1,30$. (à direita).

Pelos gráficos de erro e condição (Figura 7.4) concluímos que o fator de escala relativo mais adequado é $\bar{\rho}^* = 1,1$, para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 5,5 \times 10^{-6}$. Porém a condição Λ da matriz é $5,9 \times 10^9$. Para este valor de ρ a matriz M possui em cada coluna, 900 entradas não nulas.

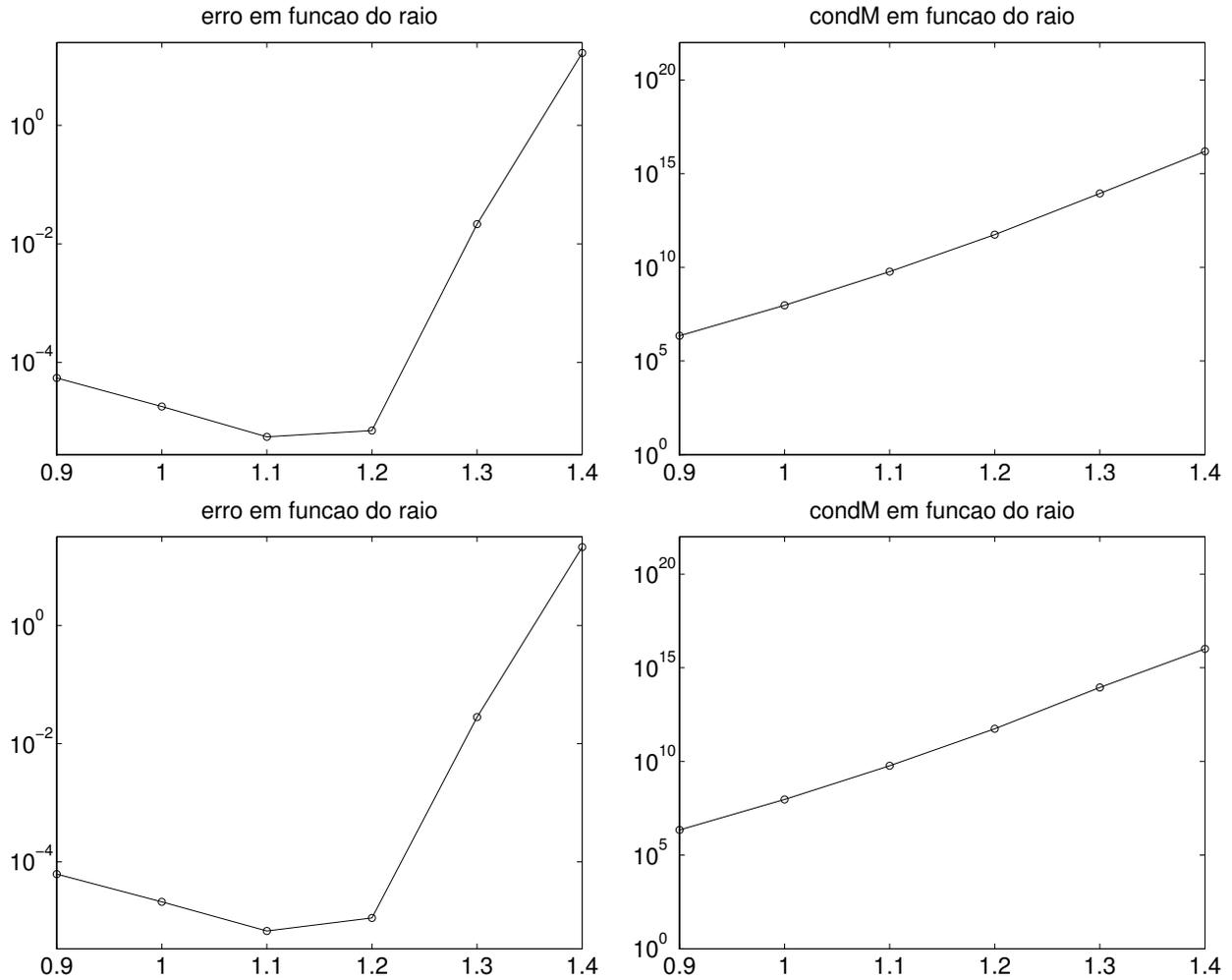


Figura 7.4: Erros médios $\|f - s\|_{\mathcal{E}}$ e condição da matriz $M = A^T A$ em função dos raios para a função-mãe gaussiana Φ^G , usando o método MQ (mínimos quadrados). Gráficos superiores $T = 30$ e inferiores $T = 40$

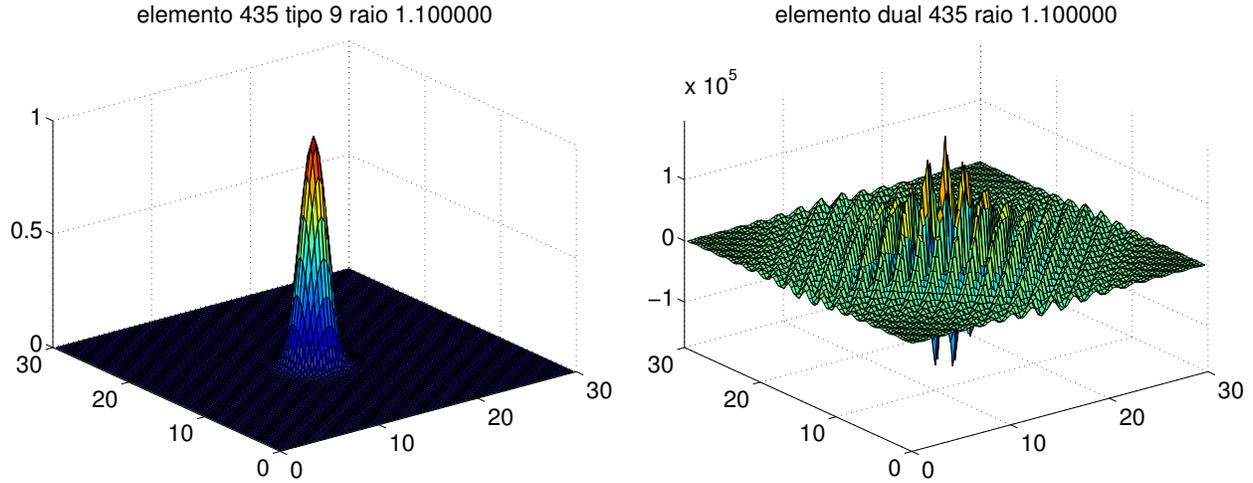


Figura 7.5: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe gaussiana Φ^G (à esquerda) e o elemento da base dual (direita) para o fator de escala relativo ótimo $\bar{\rho} = 1,10$.

7.5 Função-mãe de Wendland $\Phi_{3,2}^P$

A Figura 7.6 mostra a análise do erro e estabilidade do método MQ para a função-mãe de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ em função do fator de escala relativo $\bar{\rho}$. Pela Figura 7.6 concluímos que o fator de escala relativo mais adequado para $\Phi_{3,2}^P$ é $\bar{\rho} = 3,5$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 8,2 \times 10^{-4}$ e a condição $\Lambda = 1,1 \times 10^6$. Para este valor de $\bar{\rho}$ o suporte de cada elemento cobre um bloco de 7×7 células. Portanto, a matriz M possui 169 entradas não nulas em cada coluna.

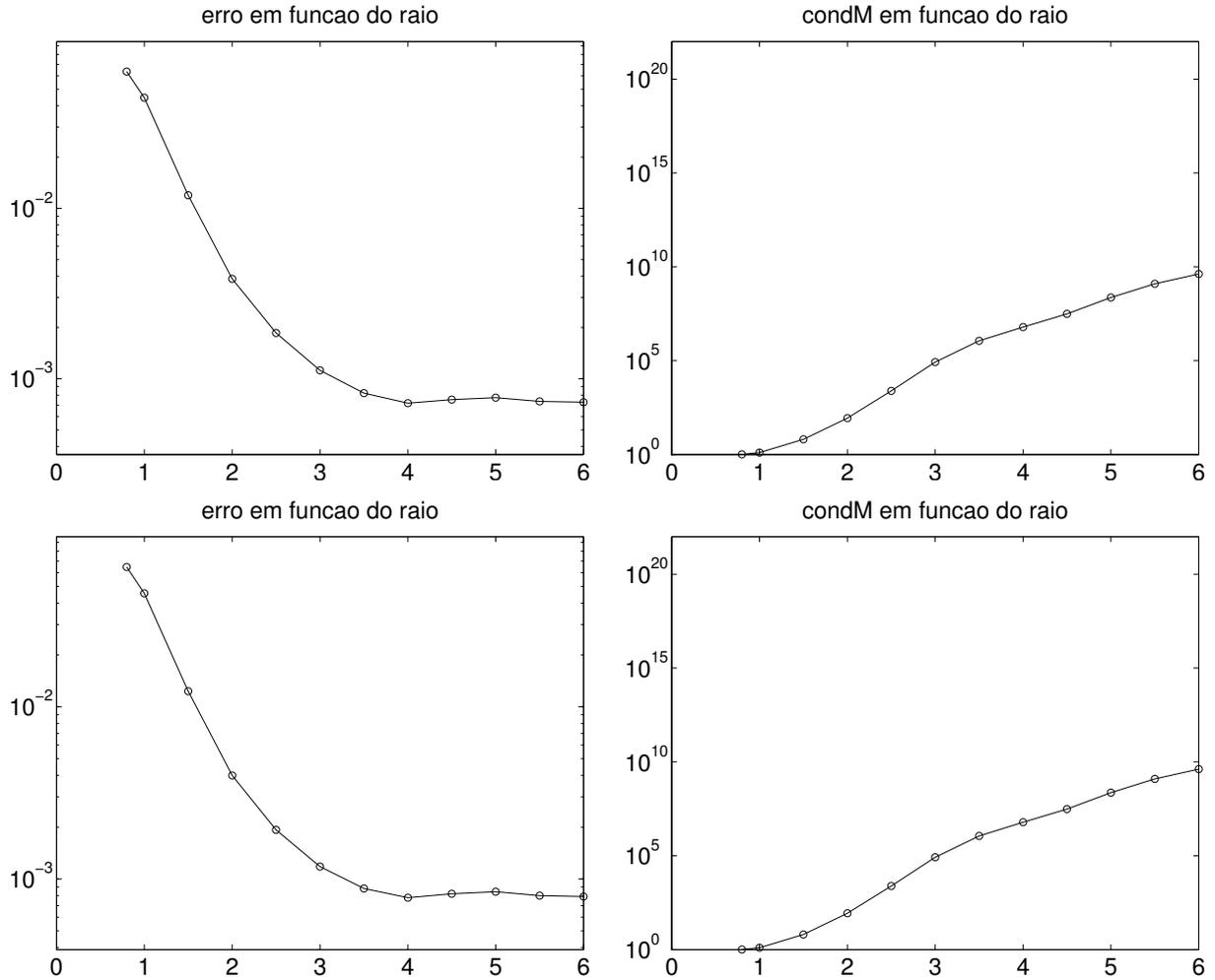


Figura 7.6: Erros médios e condição da matriz M em função do fator de escala relativo $\bar{\rho}$ para a função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$, usando o método MQ (mínimos quadrados). Gráficos superiores obtidos com $T = 30$ e inferiores $T = 40$.

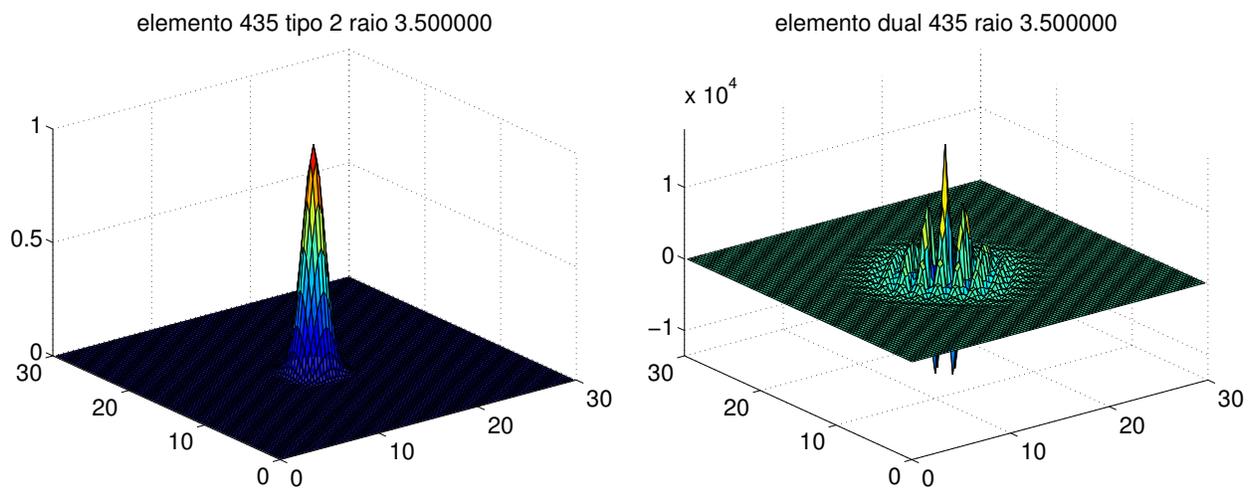


Figura 7.7: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_{3,2}^P$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo ótimo $\bar{\rho} = 3,5$.

7.6 Função-mãe de Wendland $\Phi_{5,4}^P$

A Figura 7.8 mostra a análise do erro e estabilidade do método MQ para a função-mãe de Wendland $\Phi_{5,4}^P$ em função do fator de escala relativo $\bar{\rho}$.

Pela Figura 7.8 concluímos que o fator de escala relativo mais adequado para $\Phi_{5,4}^P$ é $\bar{\rho} = 4,5$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 2,8 \times 10^{-4}$ e a condição $\Lambda = 4,5 \times 10^6$. Para este valor de $\bar{\rho}$ o suporte de cada elemento cobre um bloco de 9×9 células, portanto a matriz M possui 289 entradas não nulas em cada coluna.

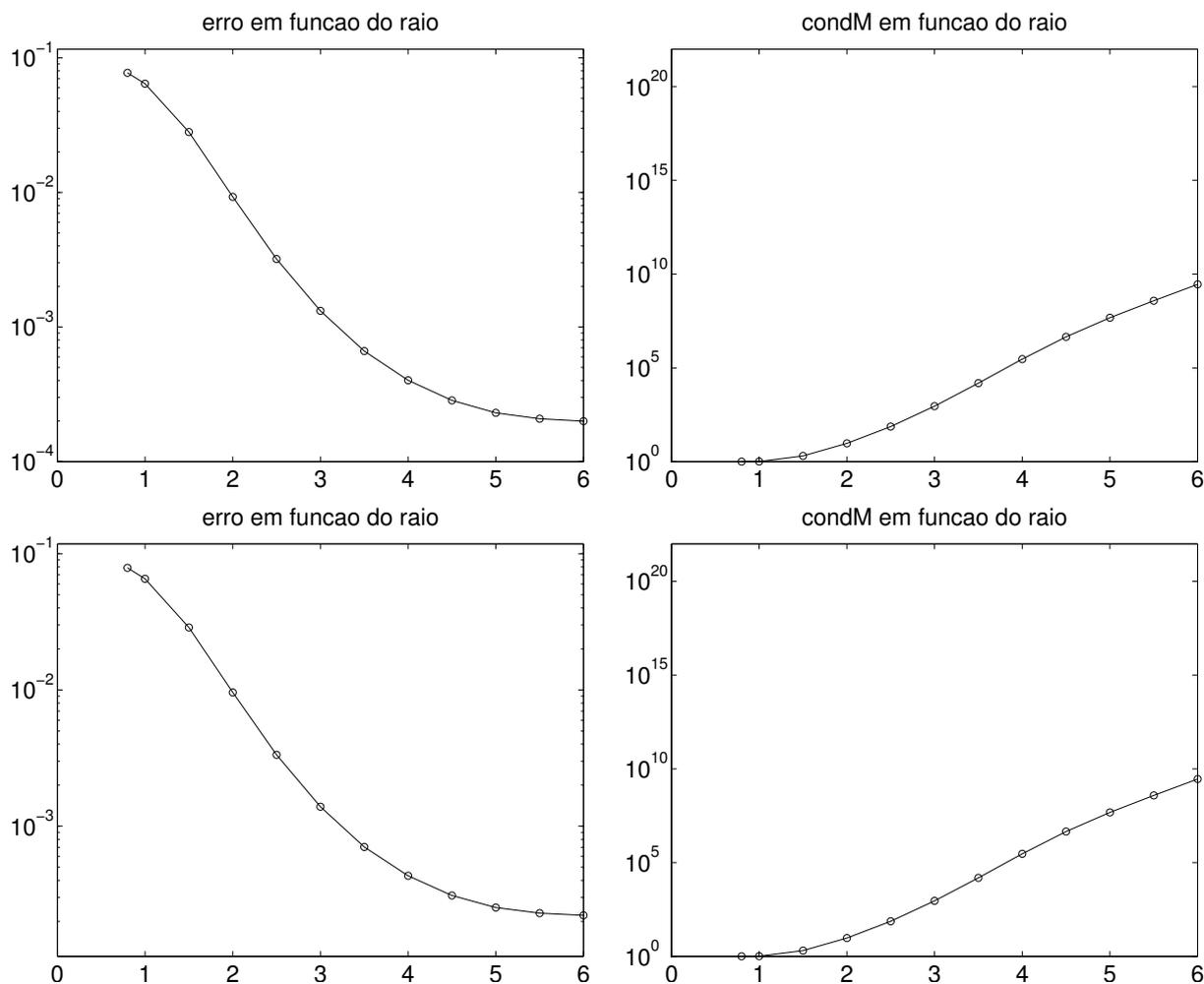


Figura 7.8: Erros médios e condição da matriz M em função do fator de escala relativo $\bar{\rho}$ para a função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{5,4}^P$, usando o método MQ (mínimos quadrados). Gráficos superiores obtidos com $T = 30$ e inferiores $T = 40$

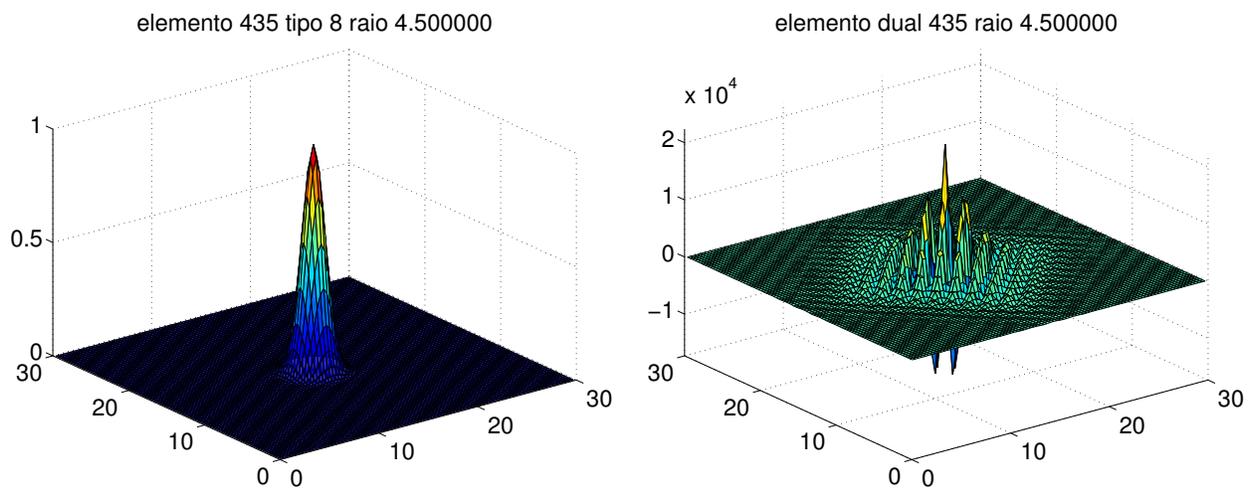


Figura 7.9: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_{5,4}^P$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo ótimo $\bar{\rho} = 4,5$.

7.6.1 Pulso B-spline Φ_1^S

Nesta seção examinamos elementos derivados dos pulsos B-splines Φ_g^S de grau g igual a 1 (seção 4.1.3) ou seja, tendas multilineares. Como observado anteriormente, para esta função-mãe o fator de escala relativo natural é $\bar{\rho} = 1$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 6,2 \times 10^{-3}$ e a condição $\Lambda = 6,0 \times 10^0$. Para este valor de $\bar{\rho}$ a matriz M possui 9 entradas não nulas em cada coluna.

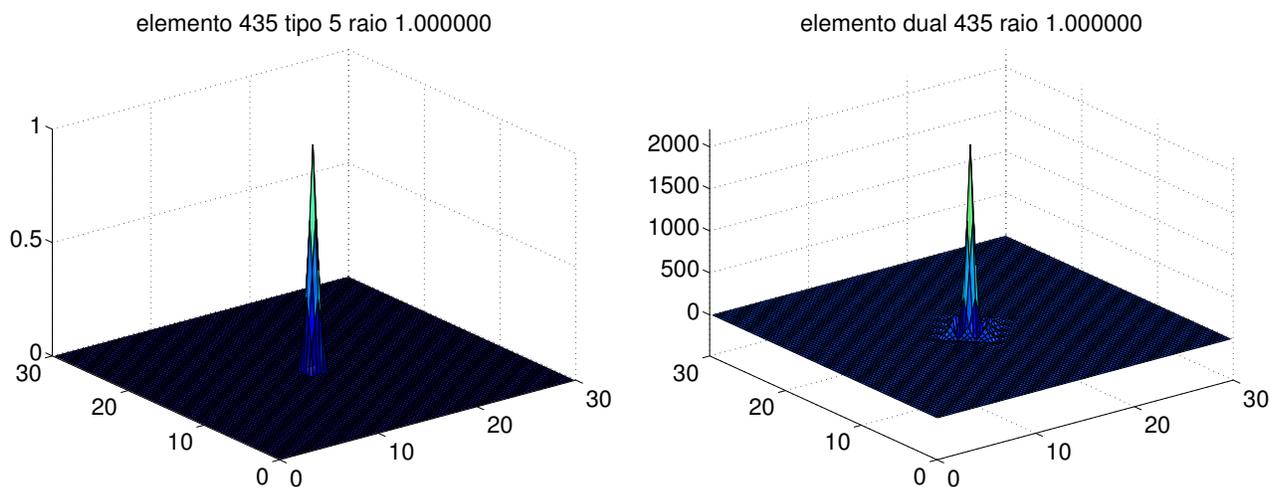


Figura 7.10: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_1^S(r)$ (à esquerda), elemento da base dual (centro) e o elemento da base dual para os fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1, 0$.

7.6.2 Pulso B-spline Φ_2^S

Para a função-mãe B-spline Φ_2^S também o fator de escala relativo natural é $\rho = 1$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 1,7 \times 10^{-3}$ e a condição $\Lambda = 5,5 \times 10^1$. Para este valor de $\bar{\rho}$ a matriz M possui 25 entradas não nulas em cada coluna.

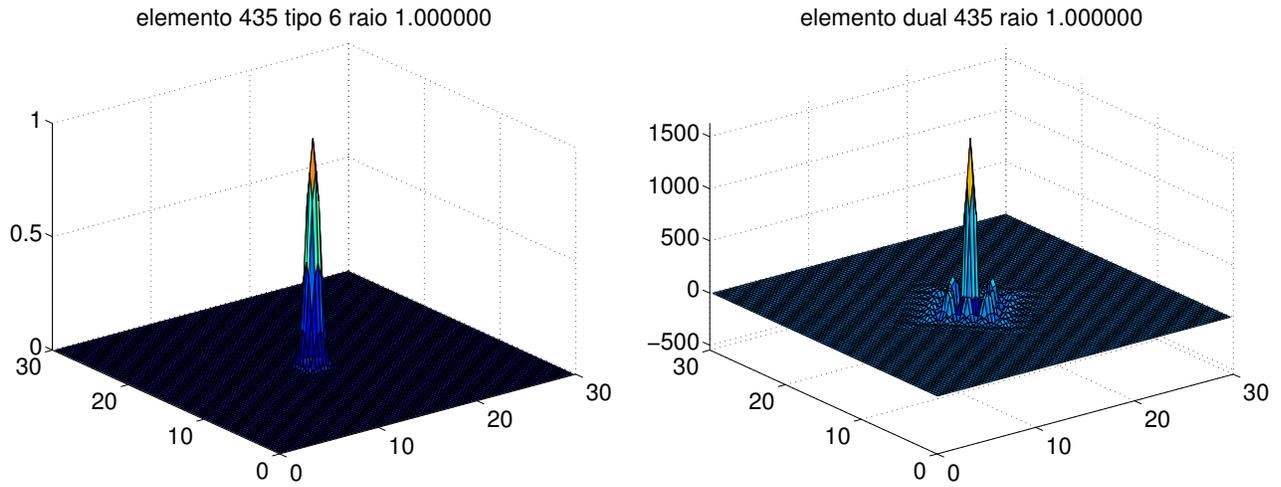


Figura 7.11: Elemento ϕ_j da função-mãe $\Phi_2^S(r)$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1,0$.

7.6.3 Pulso B-spline Φ_3^S

Para a função-mãe B-spline Φ_3^S também o fator de escala relativo natural é $\bar{\rho} = 1$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 7,0 \times 10^{-4}$ e a condição $\Lambda = 3,4 \times 10^2$. Para este valor de $\bar{\rho}$ a matriz M possui 49 entradas não nulas em cada coluna.

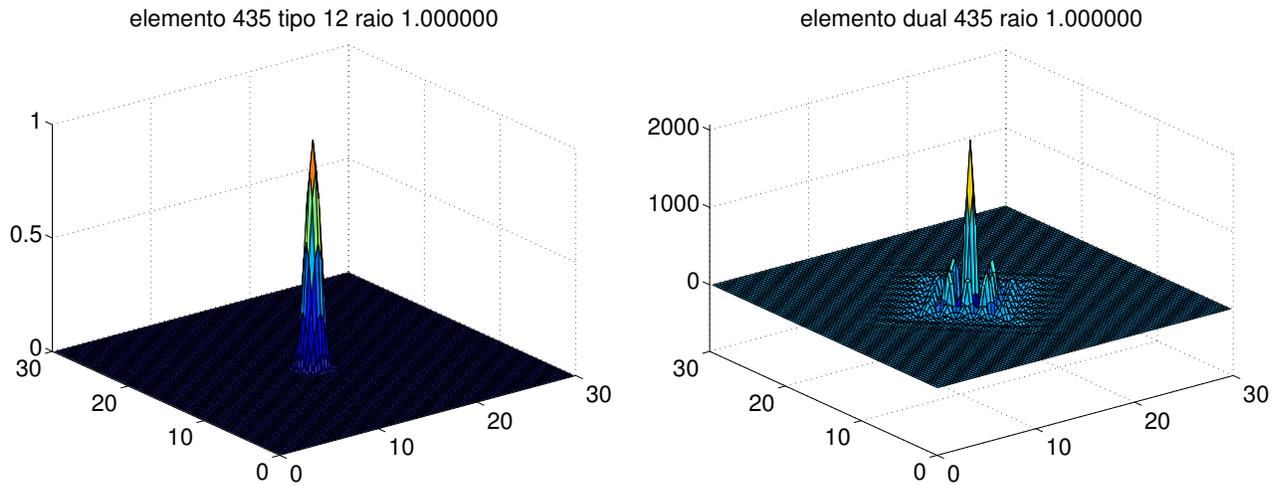


Figura 7.12: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_3^S(r)$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1,0$.

7.6.4 Pulso B-spline Φ_4^S

Para a função-mãe B-spline Φ_4^S também o raio natural é $\bar{\rho} = 1$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 3,3 \times 10^{-4}$ e a condição $\Lambda = 2,1 \times 10^3$. Para este valor de $\bar{\rho}$ a matriz M possui 81 entradas não nulas em cada coluna.

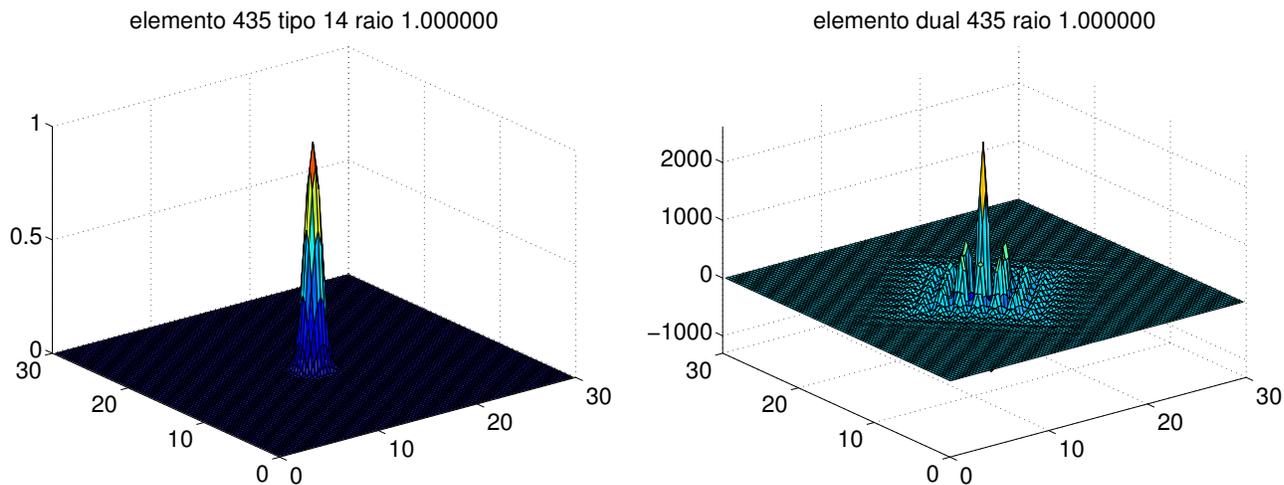


Figura 7.13: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_4^S(r)$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1,0$.

7.6.5 Pulso B-spline Φ_5^S

Para a função-mãe B-spline Φ_5^S também o raio natural é $\bar{\rho} = 1$ para o qual obtemos erro médio $\epsilon = 1,6 \times 10^{-4}$ e a condição $\Lambda = 1,3 \times 10^4$. Para este valor de $\bar{\rho}$ a matriz M possui 121 entradas não nulas em cada coluna.

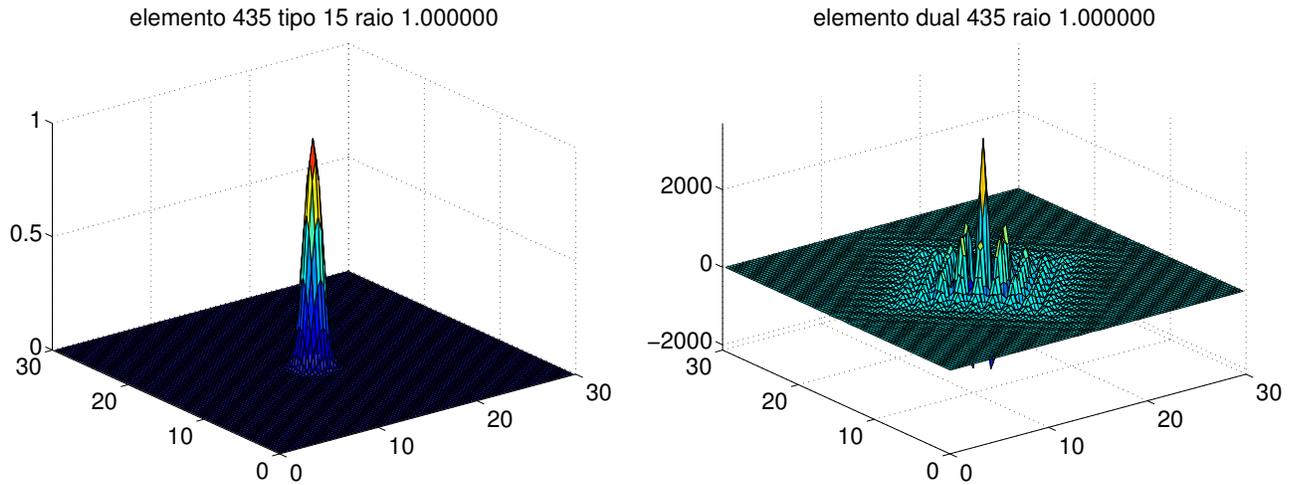


Figura 7.14: Elemento ϕ_{j^*} da função-mãe $\Phi_5^S(r)$ (à esquerda) e o elemento da base dual para o fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1, 0$.

7.7 Discussão

Como podemos ver pelas Tabelas 7.1 e 7.2 dentre as várias funções-mãe, a gaussiana Φ^G (com fator de escala relativo $\bar{\rho} = 1,1$) proporciona o menor erro ϵ para o espaço \mathcal{F} considerado. Porém, a matriz M do sistema é muito cheia (totalmente cheia até $T = 40$) e sua condição Λ_M é muito grande ($5,5 \times 10^{11}$).

Pode-se ver também que o pulso B-spline Φ_3^S tem erro menor, matriz M mais esparsa, e condição Λ_M menor que do pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$, que tem o mesmo grau e a mesma ordem de continuidade.

Da mesma forma, pode-se verificar que Φ_5^S é melhor que $\Phi_{5,4}^P$ em todos estes sentidos.

Capítulo 8

Redução de base

8.1 Esquema de redução de base

Em muitas aplicações a função a aproximar é diferente de zero apenas em uma parte pequena do domínio. Nestas aplicações podemos economizar muito espaço e tempo de processamento, usando um esquema de *redução de base*. Um esquema deste tipo para um domínio \mathbb{D} consiste de

- Uma sequência finita de funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ linearmente independentes, que chamaremos de *pré-base*, sendo cada ϕ_j uma função de \mathbb{D} para \mathbb{R} .
- Um *algoritmo de redução* que determina uma subsequência da pré-base ϕ ,

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_n.$$

Uma aproximação dentro deste esquema é uma combinação linear

$$\hat{s} = \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \hat{\phi}_k, \tag{8.1.1}$$

sendo cada $\hat{\alpha}_k$ um coeficiente real. O problema computacional inclui portanto a escolha da base $\hat{\phi}$, além da determinação dos coeficientes $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$.

A principal vantagem de uma base menor é que o cálculo da função \hat{s} pela fórmula (8.1.1) fica mais eficiente. Além disso, o custo de armazenar a base reduzida $\hat{\phi}$ e os coeficientes $\hat{\alpha}$ é proporcional ao tamanho n da base reduzida. Como veremos no Capítulo 10, redução de base também é um passo essencial na escolha de bases multi-escala.

Algoritmos de redução de base são indicados quando se espera que a base $\hat{\phi}$ seja muito menor que a pré-base ϕ . Tipicamente, isso ocorre quando a função f é praticamente nula numa região grande \mathbb{D}_0 do domínio e os elementos da pré-base dual ϕ^* tem suporte essencialmente limitado. Nestas condições, qualquer elemento ϕ_j tal que o suporte de ϕ_j^* está inteiramente contido em \mathbb{D}_0 pode ser eliminado sem afetar muito o erro de aproximação. Em geral, a redução da base é ineficaz quando os elementos da base dual ϕ^* não tem suporte limitado.

Nos esquemas que consideramos nesta tese, a pré-base ϕ é fixada independentemente da função f a aproximar e deve ser linearmente independente em relação aos pontos de amostragem

p_1, p_2, \dots, p_N usados. Na versão discreta do problema (vide Capítulo 6) isto significa que a matriz da pré-base A , com $A_{ij} = \phi_j(p_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, precisa ter posto m . Como observamos no Capítulo 6, o número m de elementos da pré-base ϕ não pode exceder o número N de pontos de amostragem.

8.2 Critério para redução de base

Em um esquema de redução de base, o critério de menor erro do método MQ não é mais adequado, pois em geral o erro mínimo é obtido quando $\hat{\phi} = \phi$. Tipicamente, quando se considera este tipo de esquema, o objetivo é um meio-termo entre minimizar alguma medida do resíduo $f - s$ e minimizar o tamanho n da base reduzida $\hat{\phi}$. Por exemplo, pode-se especificar que alguma medida de $f - s$ não ultrapasse um valor ϵ_{\max} dado, e que n seja o menor possível satisfazendo essa condição.

Se o resíduo $f - s$ fosse medido com uma norma hilbertiana $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ e se a pré-base ϕ fosse ortonormal em relação ao produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$, então a aproximação ótima com qualquer subconjunto $\hat{\phi}$ de ϕ teria os mesmos coeficientes da aproximação ótima calculada com a pré-base toda ϕ ; e a menor base reduzida $\hat{\phi}$ que proporciona $\|f - s\|_{\mathcal{E}} \leq \epsilon_{\max}$ seria obtida eliminando-se os elementos ϕ_j da pré-base em ordem crescente de $|\alpha_j|$, enquanto a norma euclidiana dos coeficientes α_j eliminados fosse menor que ϵ_{\max} .

Infelizmente as bases tensoriais que usamos nesta tese não são ortogonais em geral. Além disso, esta propriedade não vale se a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ usada para medir o resíduo não é hilbertiana, como $\|\cdot\|_{\infty}$. Nestas circunstâncias, a escolha dentro da família ϕ da menor base $\hat{\phi}$ que satisfaz a condição $\|f - s\|_{\mathcal{E}} \leq \epsilon_{\max}$ é um problema muito difícil. Em geral não há algoritmo eficiente para encontrar tal base.

Uma saída, que usaremos nesta tese, é calcular uma aproximação inicial s por qualquer método que for conveniente, e em seguida descartar termos da somatória de s (3.4.1) enquanto isso não aumentar demasiadamente o erro. Neste capítulo descreveremos uma heurística para efetuar tal descarte, que na prática, geralmente fornece uma base reduzida $\hat{\phi}$ de tamanho razoável, embora nem sempre mínimo. Para medir o resíduo $f - s$, esta heurística usa a norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$.

8.3 Heurística de truncamento

A heurística que adotamos no algoritmo de redução de base examina os elementos de ϕ em ordem crescente de seu efeito esperado no erro de aproximação e descarta sucessivamente os que menos contribuem para a aproximação, desde que o critério de aproximação acima seja satisfeito. Esta idéia é formalizada pelo algoritmo *Reduz* abaixo. Os dados para esse algoritmo são:

- a pré-base ϕ na forma discreta (a matriz $N \times m$ A com $A_{ij} = \phi_j(p_i)$),
- os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ de uma aproximação inicial $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j$ da função objetivo f nessa pré-base,
- o resíduo $e = f - s = f - A\alpha$ também na forma discreta (um vetor de N componentes),

- uma tolerância $\epsilon_{\max} > 0$.

O algoritmo *Reduz* devolve uma base $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_n)$ (que é um subconjunto da pré-base ϕ) e um vetor de coeficientes $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n$ (que é o sub-vetor de α correspondente a $\hat{\phi}$). O algoritmo garante que a aproximação o resíduo $\hat{f} = f - \hat{s} = f - \sum_k \hat{\alpha}_k \hat{s}_k$ satisfaz o seguinte critério, para todo ponto de amostragem p_i :

- se $|e_i| \leq \epsilon_{\max}$, então $|\hat{e}_i| \leq \epsilon_{\max}$;
- se $|e_i| > \epsilon_{\max}$, então $|\hat{e}_i| \leq |e_i|$.

Ou seja, a aproximação reduzida \hat{s} pode aumentar o erro $|e_i|$ em cada ponto, desde que não ultrapasse ϵ_{\max} ; e, se em algum ponto o erro já for maior que ϵ_{\max} , convencionamos que esse erro não pode aumentar.

Algoritmo 8.1. *Procedimento Reduz*($\phi, \alpha, e, \epsilon_{\max}$)

1. Calcule os valores de $\delta_j = |\alpha_j| \|\phi_j\|_{\infty}$ para $j = 1, \dots, m$.
2. Para cada índice j em $1, \dots, m$, em ordem de δ_j crescente, faça:
 3. Se $\delta_j > 2\epsilon_{\max}$ vá para o passo 6.
 4. Se para todo i temos $|e_i| \leq \epsilon_{\max}$ e $|e_i + \alpha_j \phi_j(p_i)| \leq \epsilon_{\max}$, ou $|e_i| > \epsilon_{\max}$ e $|e_i + \alpha_j \phi_j(p_i)| \leq |e_i|$ então faça:
 5. $e \leftarrow e + \alpha_j \phi_j$; $\alpha_j \leftarrow 0$.
6. Devolva a base $\hat{\phi}$ que consiste dos elementos ϕ_j com $\alpha_j \neq 0$, e os respectivos coeficientes $\hat{\alpha}$.

É fácil ver que a saída do algoritmo *Reduz* satisfaz o critério acima. A condição $\delta_j > 2\epsilon_{\max}$ no passo 3 é usada para evitar o teste de elementos que, quase certamente, não poderão ser eliminados.

O custo da heurística *Reduz* é dominado pelo cálculo dos valores δ_j no passo 1, pelo teste do passo 4 e pelo ajuste do resíduo e no passo 5. O custo do passo 1 é proporcional a mN . Note que a ordenação dos valores δ_j no passo 2 tem custo proporcional a $m \log m$, que é geralmente desprezível. Cada iteração dos passos 4 e 5 têm custo proporcional a N ; como o número de vezes que esses passos são executados é no máximo m , seu custo total, e portanto o custo total de *Reduz*, é limitado por uma constante vezes mN .

Esta heurística não obtém necessariamente a solução ótima, porque a eliminação de um elemento pode afetar a decisão de eliminar outros elementos seguintes. Observe também que, se algum elemento da base ϕ é eliminado, os coeficientes α_j geralmente não serão mais ótimos em relação à base remanescente. Portanto, a base $\hat{\phi}$ obtida por *Reduz* será geralmente maior do que a base ótima (a menor base contida em ϕ que permite erro menor que ϵ_{\max}), pois o erro estimado ϵ^* será geralmente maior do que a norma do resíduo da aproximação com coeficientes α ótimos.

Capítulo 9

Testes do algoritmo de aproximação Adaptativa

Neste capítulo apresentamos testes da heurística de aproximação adaptativa *Reduz* usando pré-bases tensoriais uniformes com várias funções-mãe. Para estes testes usamos uma grade uniforme de amostragem, para maior eficiência e para tornar as conclusões menos dependentes dos dados.

9.1 Funções exemplo

Para analisar o desempenho do algoritmo *Reduz* nas pré-bases escolhidas, vamos utilizar quatro funções objetivo denotadas por f_O , f_C , f_G e f_F , definidas a seguir. Em cada caso, mapeamos o domínio $\mathbb{D} = [0, L]^d$ para o domínio natural das funções objetivo $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ pelas fórmulas $X = (x/L) - 1/2$ e $Y = (y/L) - 1/2$, sendo (X, Y) os argumentos naturais da função objetivo e (x, y) o ponto de \mathbb{D} .

As funções f_O , f_C e f_F não são nulas na fronteira de \mathbb{D} , e portanto apresentam descontinuidades de valor e/ou derivada nessa fronteira quando consideramos \mathbb{D} com topologia toroidal. Entretanto a descontinuidade é muito pequena e não afeta os testes. Vale notar que estas funções de teste não pertencem ao espaço \mathcal{F} usado no Capítulo 7.

9.1.1 Função f_O

A função f_O (“ondinhas”) é uma variante do elemento de Gabor [19], isto é, uma onda senoidal bidimensional modulada por um sino gaussiano,

$$f_O(X, Y) = \exp\left(-\frac{1}{R}(X^2 + Y^2)\right) \cos((F_x X + F_y Y)\pi), \quad (9.1.1)$$

sendo $R = 0.015$, $F_x = 10$ e $F_y = 5$. Esta função é contínua e diferenciável em todas as ordens exceto na fronteira de \mathbb{D} , onde seu valor absoluto é menor que 6×10^{-8} . Veja a Figura 9.1.

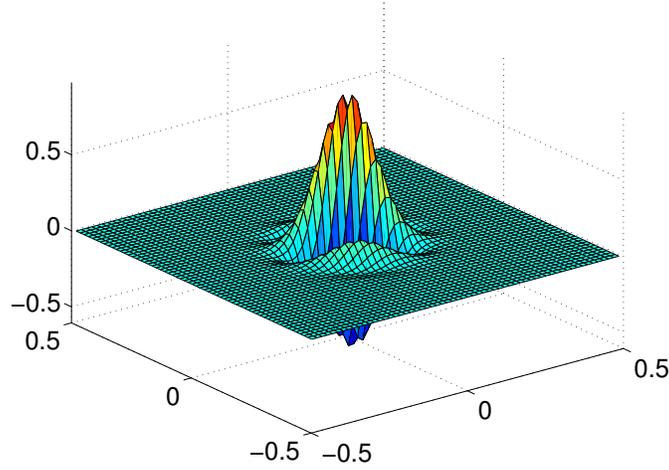


Figura 9.1: A função de teste f_O .

9.1.2 Função f_C

A função f_C (“cratera”) consiste de um pico central $f_0(X, Y)$ cercado por uma parede circular $f_1(X, Y)$:

$$f_C(X, Y) = H_0 f_0(X, Y) + H_1 f_1(X, Y), \quad (9.1.2)$$

sendo

$$f_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } X^2 + Y^2 \geq S_0^2 \\ (1 - v)^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9.1.3)$$

e

$$f_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } X^2 + Y^2 \leq S_1 \text{ ou } X^2 + Y^2 \geq S_2 \\ 4u(1 - u) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9.1.4)$$

em que

$$v = \frac{X^2 + Y^2}{S_0^2} \quad \text{e} \quad u = \frac{X^2 + Y^2 - S_1^2}{S_2^2 - S_1^2}.$$

Os coeficientes são $S_0 = 0,1196$, $S_1 = 0,2208$, $S_2 = 0,4232$, $H_0 = 1,0$ e $H_1 = 0,5$. Esta função é identicamente nula perto da borda de \mathbb{D} , e tem descontinuidade nas derivadas de segunda ordem nos círculos de raios S_0 , S_1 e S_2 . Veja a Figura 9.2.

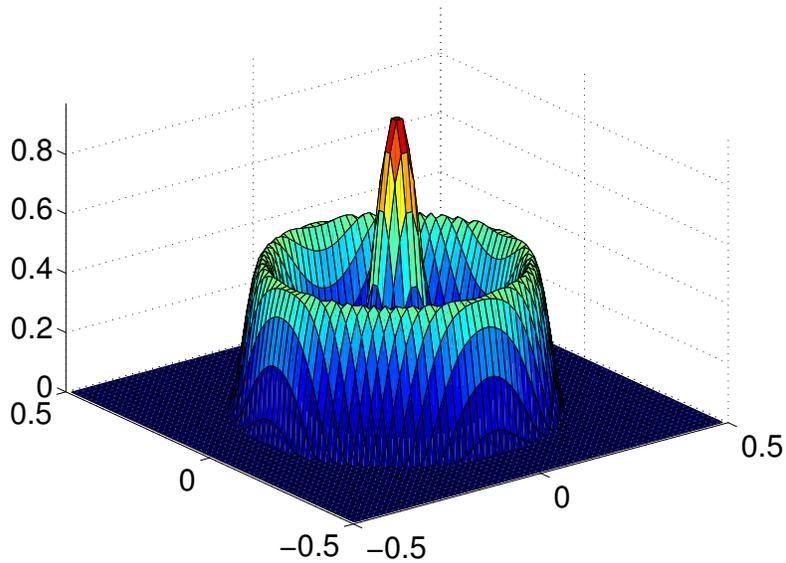


Figura 9.2: A função de teste f_C .

9.1.3 Função f_F

A função f_F , definida por Franke [23], é um exemplo popular em estudo de aproximação. Veja a Figura 9.3. Ela é a soma de quatro sinus gaussianos bidimensionais,

$$f_F(X, Y) = \sum_{k=1}^4 c_k \Phi^G\left(\frac{X/R - a_k}{u_k}\right) \Phi^G\left(\frac{Y/R - b_k}{v_k}\right), \quad (9.1.5)$$

O coeficiente R vale 0,017. As amplitudes c_k , as médias a_k , b_k e os desvios, u_k , v_k da função de Franke estão especificados na Tabela 9.1.3.

Tabela 9.1: Parâmetros da função de Franke

k	c_k	a_k	b_k	u_k	v_k
1	3/4	2	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	3/4	-1	-1	$7/\sqrt{2}$	$10/\sqrt{2}$
3	1/2	7	3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	-1/5	4	7	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

A função Franke é contínua e diferenciável em todas as ordens exceto na borda de \mathbb{D} onde seu valor absoluto é menor que 3×10^{-14} .

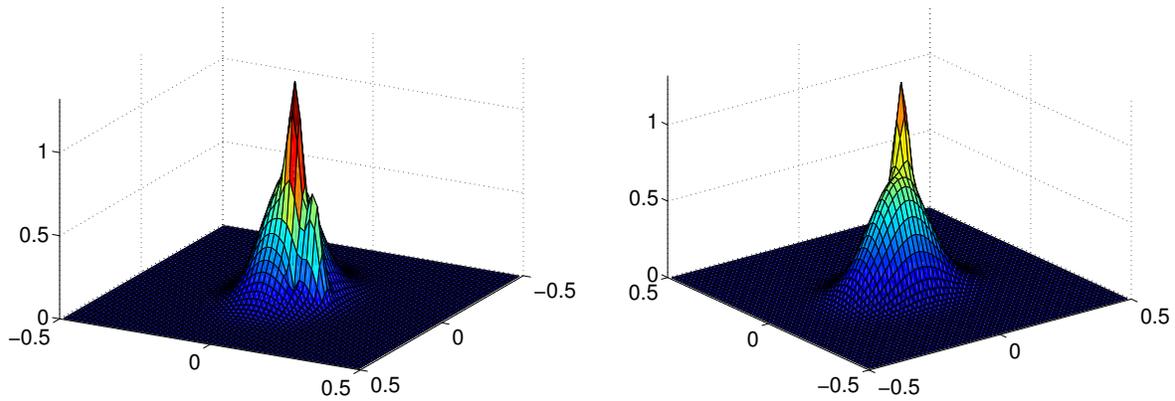


Figura 9.3: A função de Franke f_F em dois ângulos diferentes .

9.1.4 Função f_G

A função f_G (“galáxia”) é uma lombada em espiral definida pela fórmula,

$$f_G = g(X, Y)\text{sen}(t) \quad (9.1.6)$$

sendo

$$g(X, Y) = \begin{cases} \frac{v}{(1-u)^2\sqrt{1+v^2}} & \text{se } u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$u = \frac{X^2 + Y^2}{R_1^2} \quad v = \frac{S^2}{R_0}$$

$$t = \sphericalangle(y, x) + R_2 \frac{R_0}{r} \quad S = \sqrt{R_0^2 + X^2 + Y^2}.$$

Os parâmetros são $R_0 = 0,05$, $R_1 = 0,45$ e $R_2 = 15$. Esta função é identicamente nula perto da borda de \mathbb{D} , e tem descontinuidade nas derivadas de segunda ordem no círculo de raio R_1 . Veja Figura 9.4.

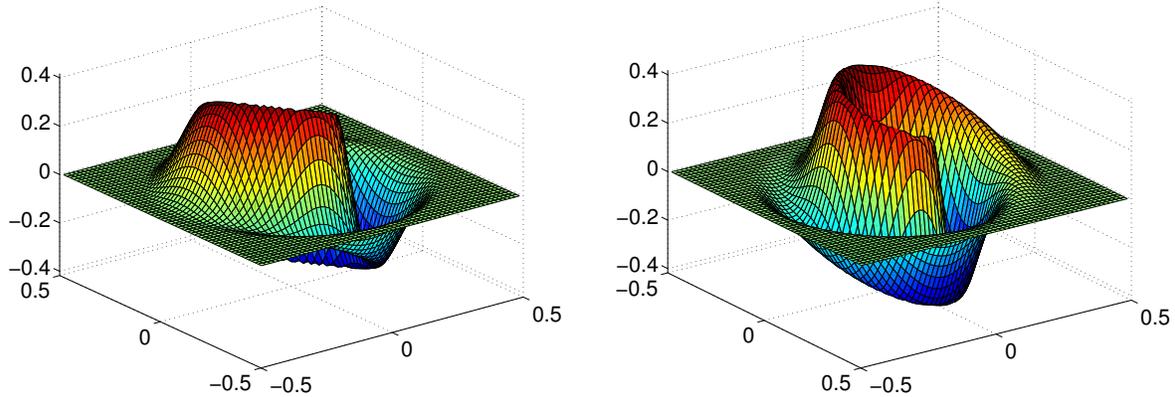


Figura 9.4: Duas vistas da função de teste f_G .

9.2 Resultados dos testes

Nesta seção, mostramos o resultado obtido com o algoritmo de aproximação adaptativa do capítulo 8 com as funções de teste da Seção 9.1 e pré-bases uniformes baseadas nas funções-mãe Φ^G (gaussiana), $\Phi_{3,2}^P$, $\Phi_{5,4}^P$ (pulsos de Wendland), Φ_2^S , Φ_3^S , Φ_4^S e Φ_5^S (pulsos B-spline).

Para estes testes, como no Capítulo 7 usamos um domínio toroidal bidimensional quadrado $\mathbb{D} = [0, L] \times [0, L]$, e uma grade de elementos uniforme com $T \times T$ centros, sendo $L = T$. Portanto, a pré-base ϕ tem $m = T^2$ elementos com espaçamento $\zeta = 1$ nos dois eixos. Para calcular a aproximação usamos o método mínimos quadrados com uma grade uniforme de pontos de amostragem p_1, p_2, \dots, p_N com $\kappa \times \kappa = 3 \times 3$ pontos por célula ($N = T^2 \kappa^2$ pontos no total).

Realizamos quatro séries de testes, com $\epsilon_{\max} = 0,005$ e $\epsilon_{\max} = 0,0025$, e $T = 40$ ($m = 1600$ elementos, $N = 14.400$ pontos de amostragem) e $T = 50$ ($m = 2500$ elementos $N = 22500$ pontos). Os resultados desses testes estão apresentados nas Seções 9.2.1 a 9.2.7. Eles estão resumidos nas Tabelas 9.2 a 9.5 e discutidos na Seção 9.3.

9.2.1 Gaussiana

A seguir, temos exemplos de aproximações das funções acima relacionadas, usando a função-mãe gaussiana Φ^G com raio $\rho = 1,1$. Veja as Figuras 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8.

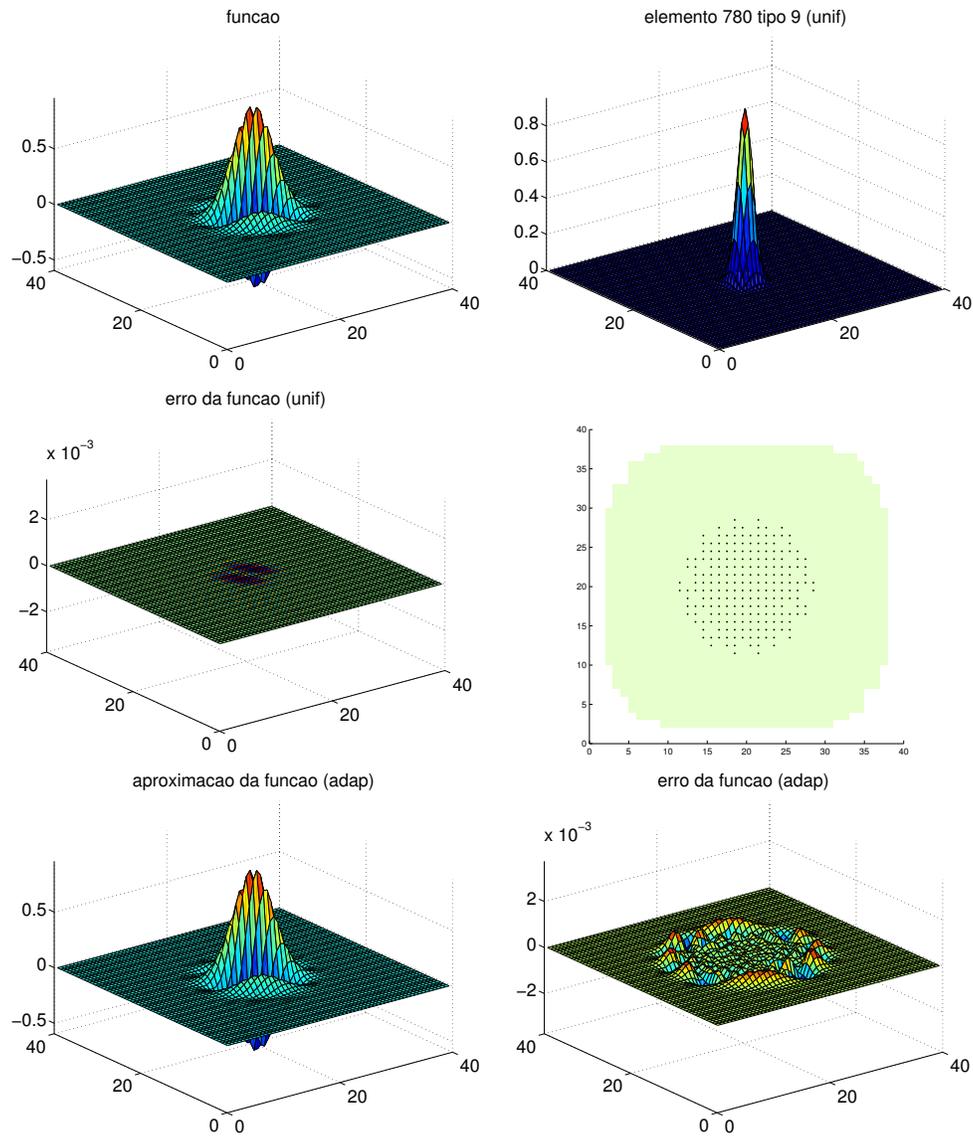


Figura 9.5: Aproximação adaptativa da função f_O com função-mãe gaussiana Φ^G e $\bar{\rho} = 1,1$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_O , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

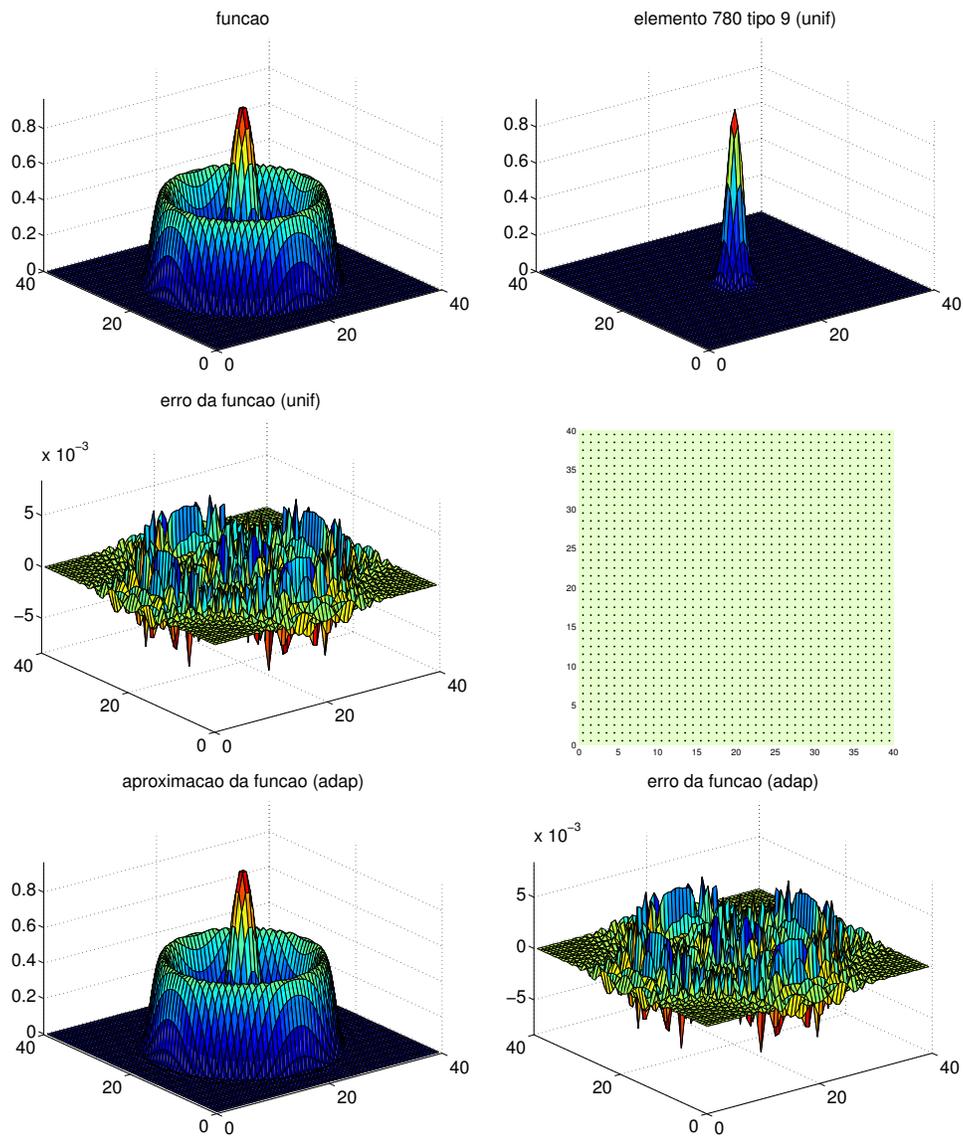


Figura 9.6: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe gaussiana Φ^G e $\bar{\rho} = 1,1$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

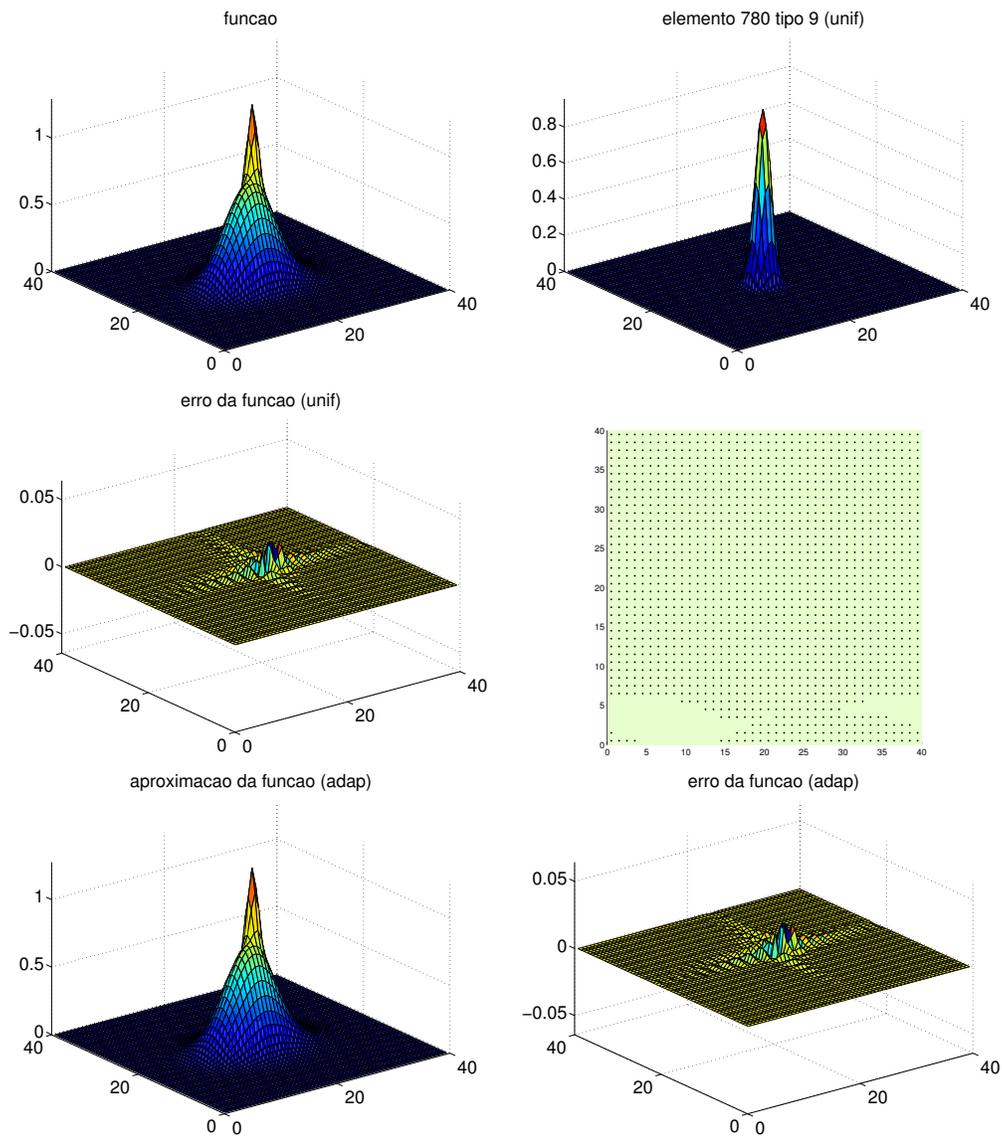


Figura 9.7: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe gaussiana Φ^G e $\bar{\rho} = 1,1$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

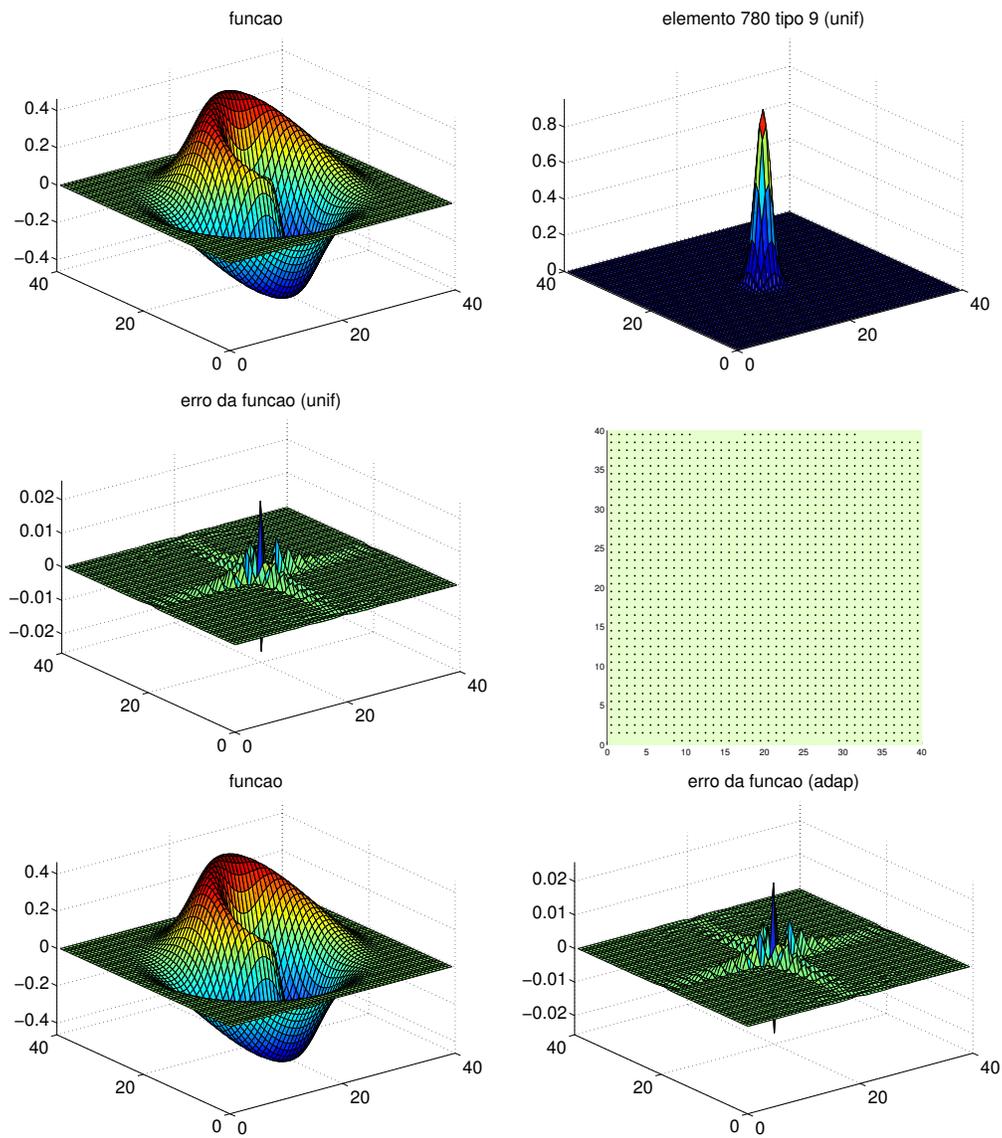


Figura 9.8: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe gaussiana Φ^G e $\bar{\rho} = 1,1$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.2 Pulsos Wendland $\Phi_{3,2}^P$

A seguir, temos exemplos de aproximações das funções acima relacionadas, usando a função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ com raio $\rho = 3,5$. Veja as Figuras 9.15, 9.15, 9.15 e 9.15.

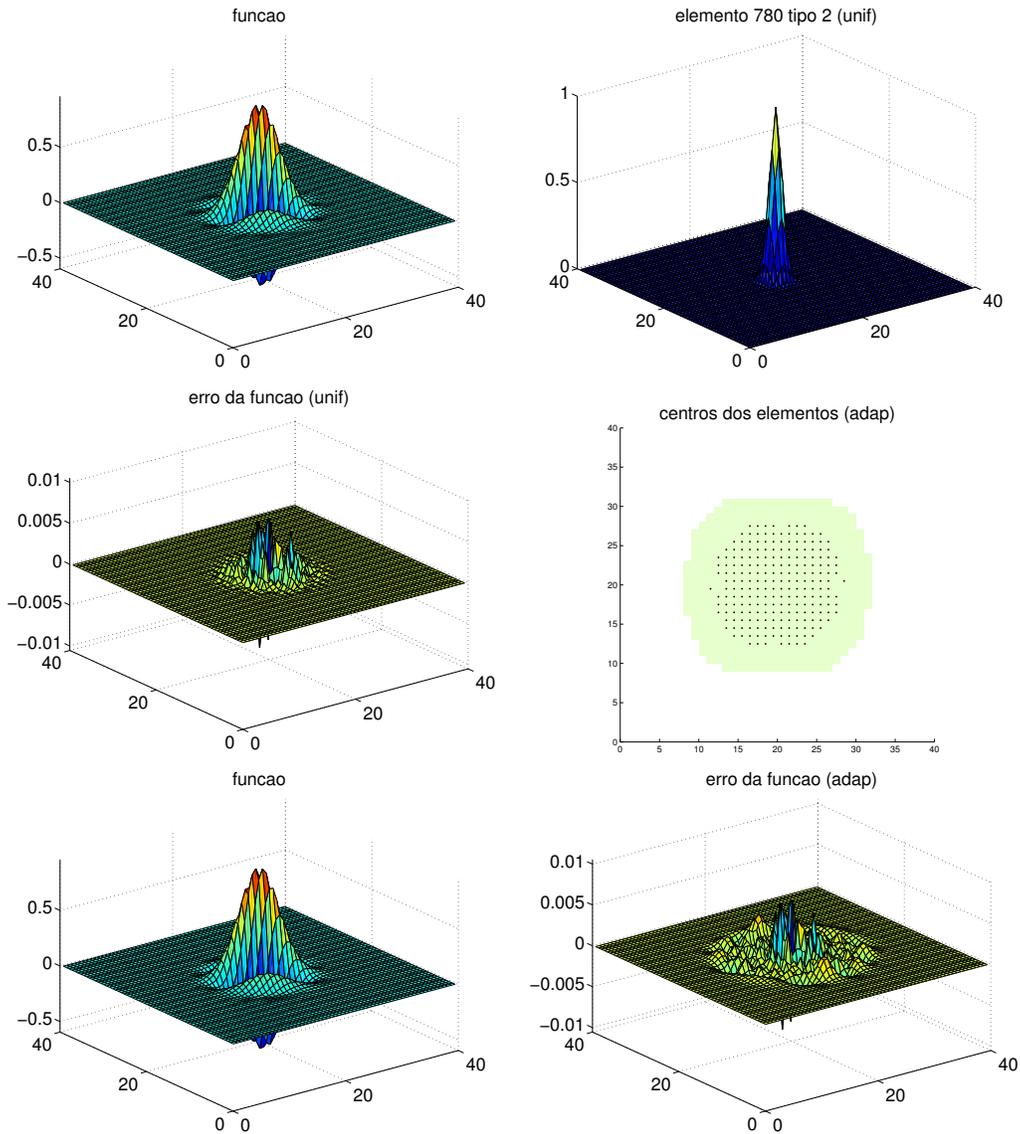


Figura 9.9: Aproximação adaptativa da função f_O com função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ e $\bar{\rho} = 3,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_O , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

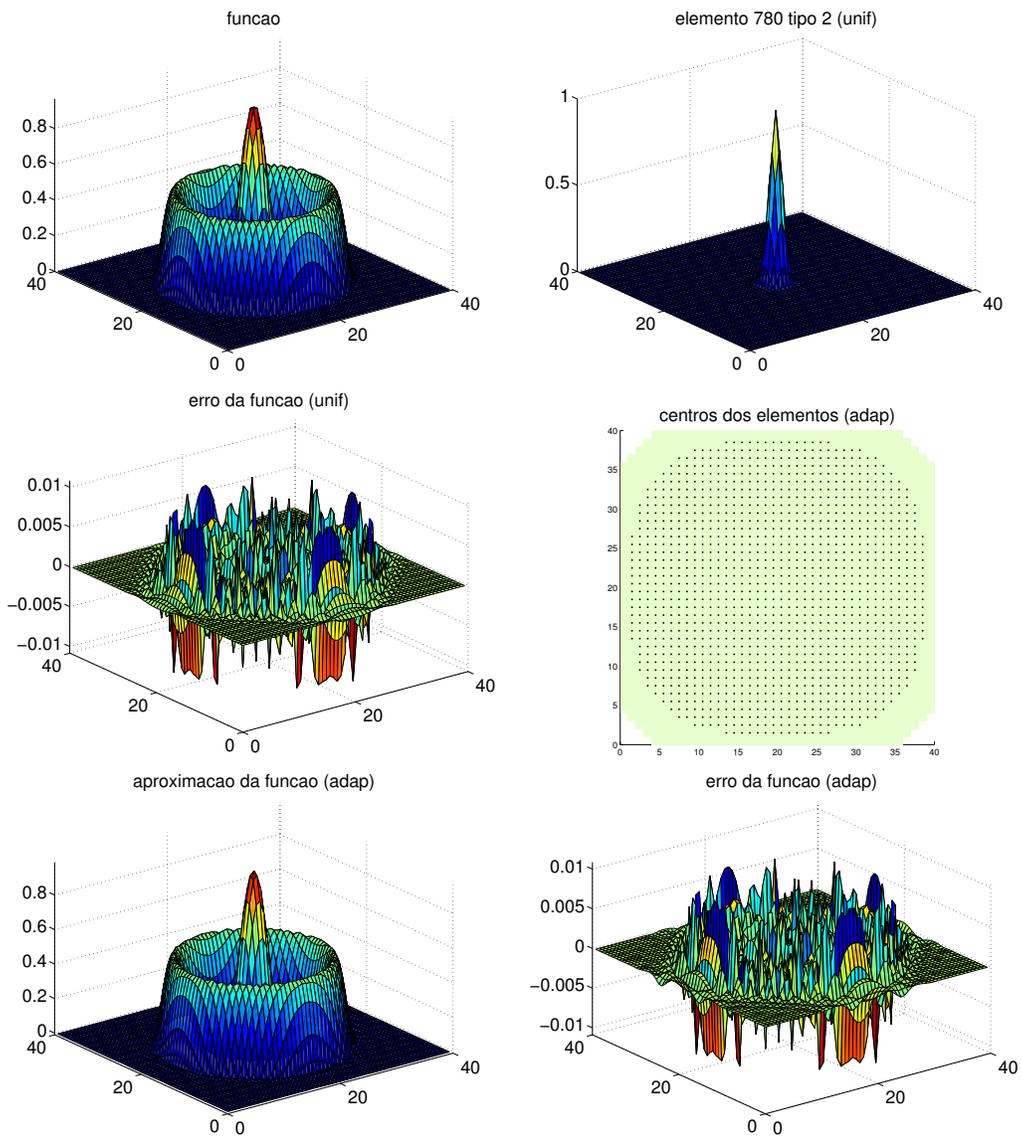


Figura 9.10: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ e $\bar{\rho} = 3,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

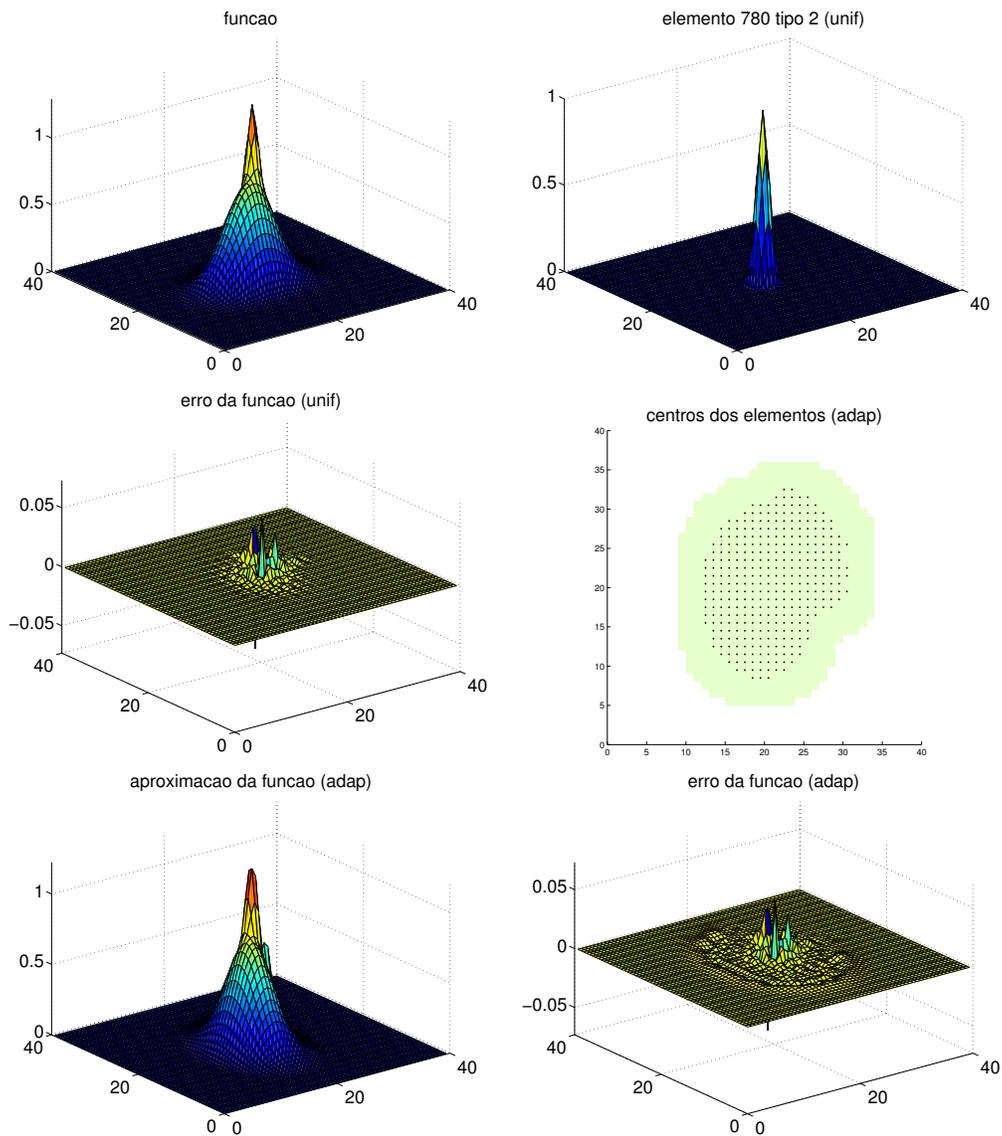


Figura 9.11: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ e $\bar{\rho} = 3,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

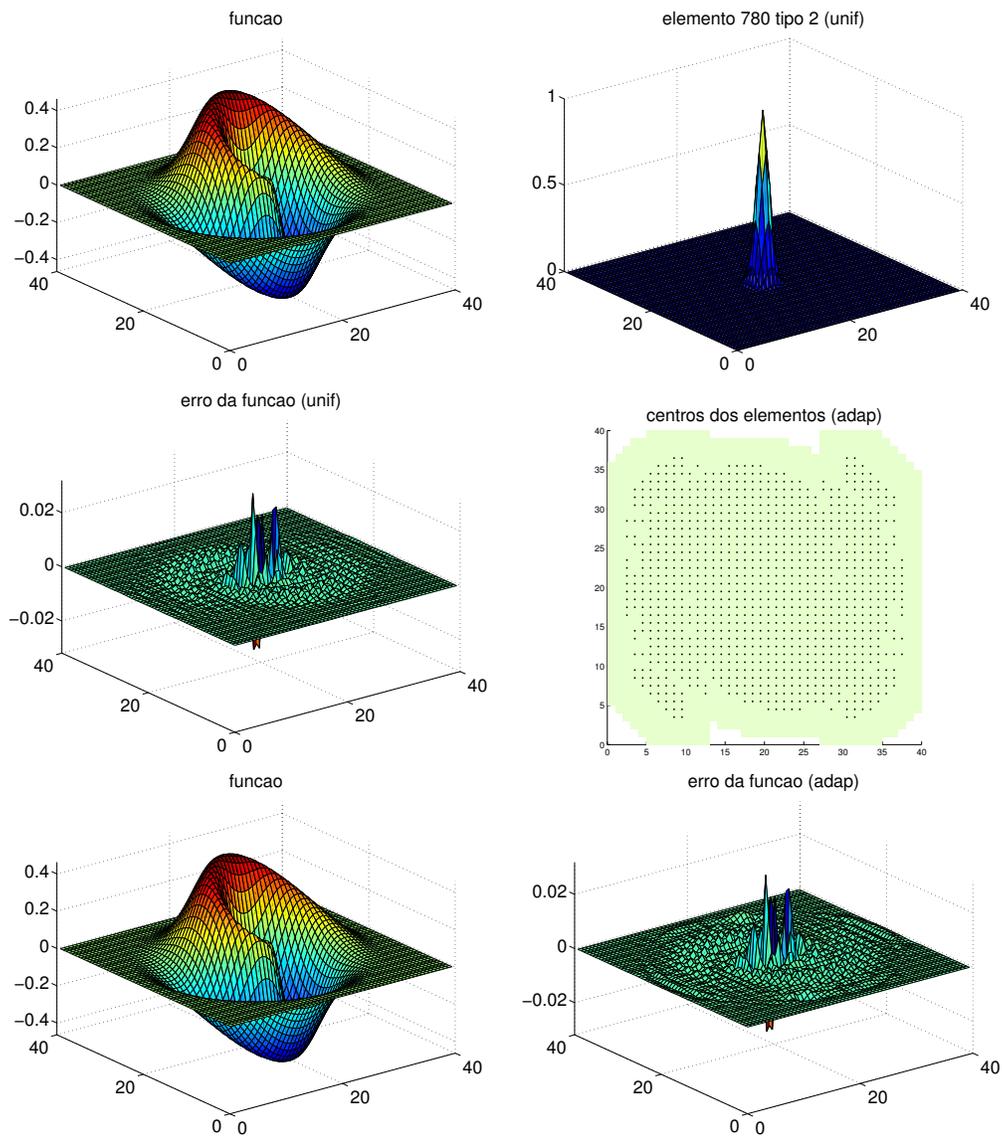


Figura 9.12: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe Wendland $\Phi_{3,2}^P$ e $\bar{\rho} = 3,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.3 Pulsos Wendland $\Phi_{5,4}^P$

A seguir, temos exemplos de aproximações das funções acima relacionadas, usando a função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{5,4}^P$ com raio $\rho = 4,5$. Veja as Figuras 9.16, 9.16, 9.16 e 9.16.

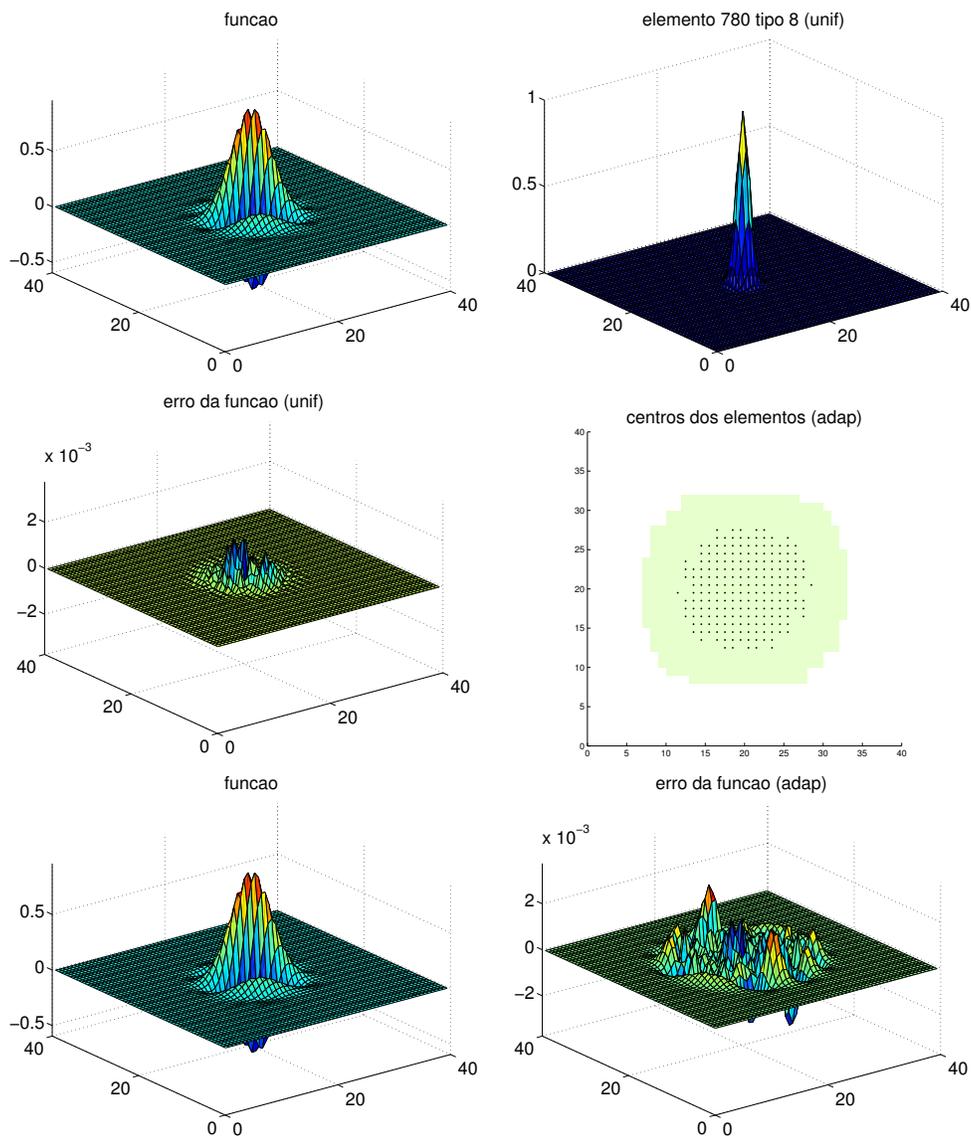


Figura 9.13: Aproximação adaptativa da função f_O com função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{5,4}^P$ e $\bar{\rho} = 4,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_O , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

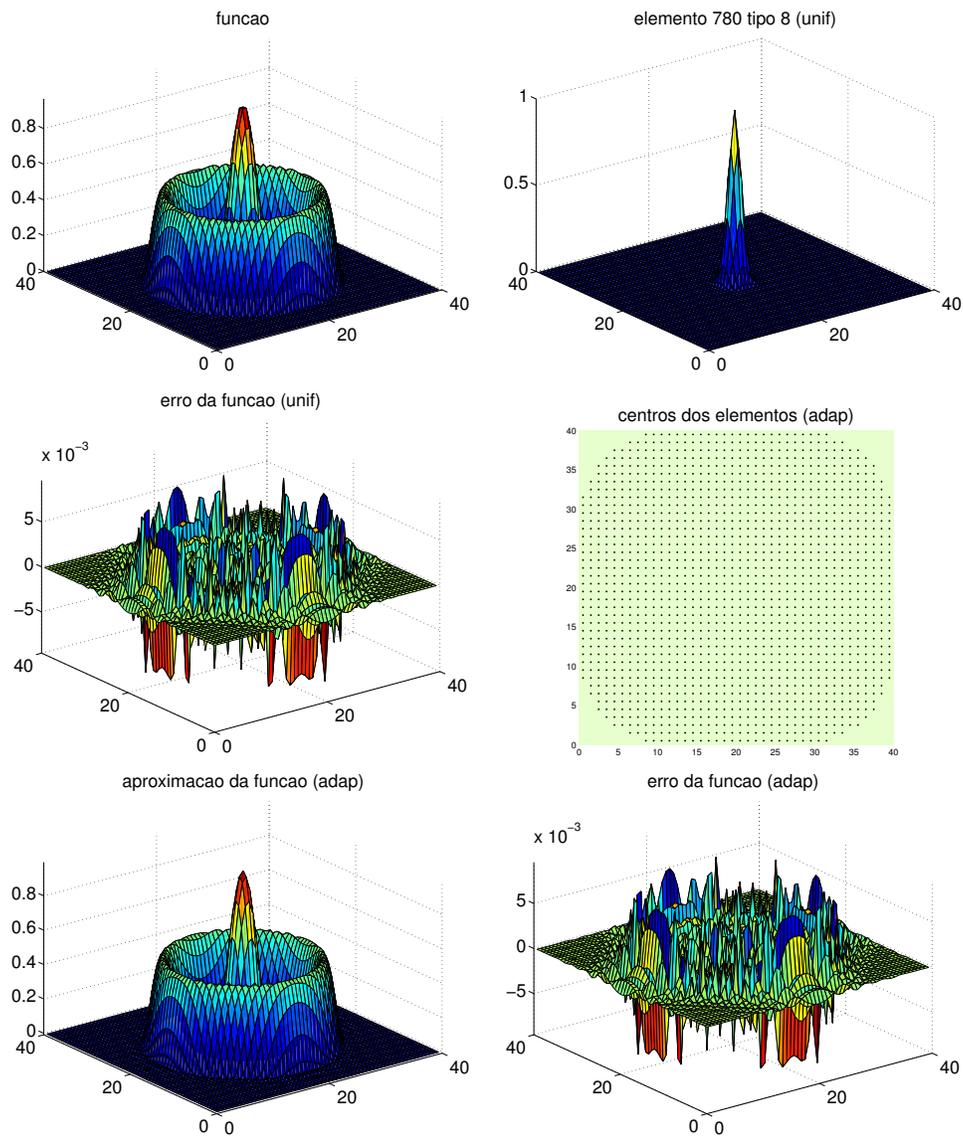


Figura 9.14: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe Wendland $\Phi_{5,4}^P$ e $\bar{\rho} = 4,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

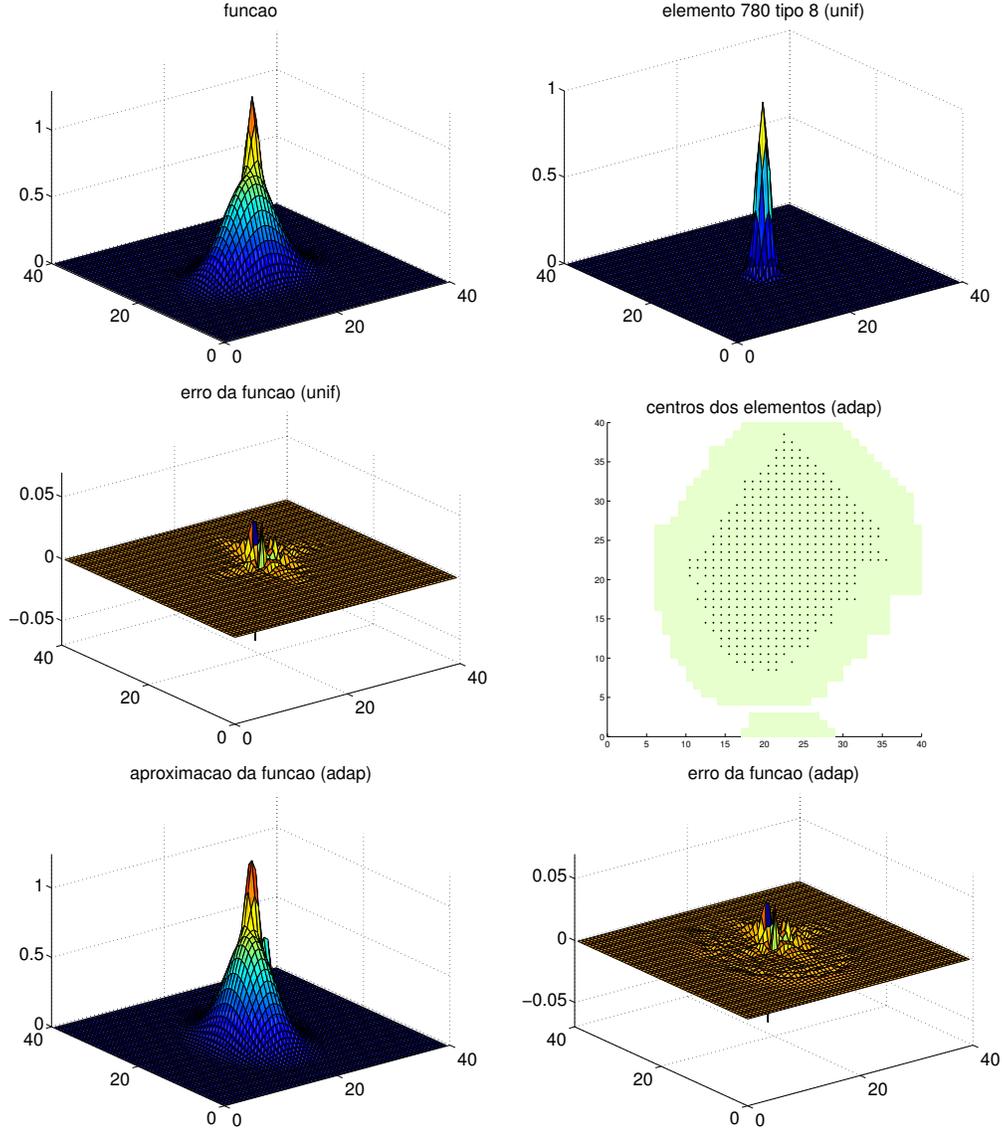


Figura 9.15: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe pulso de Wendland $\Phi_{5,4}^P$ e $\bar{\rho} = 4,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

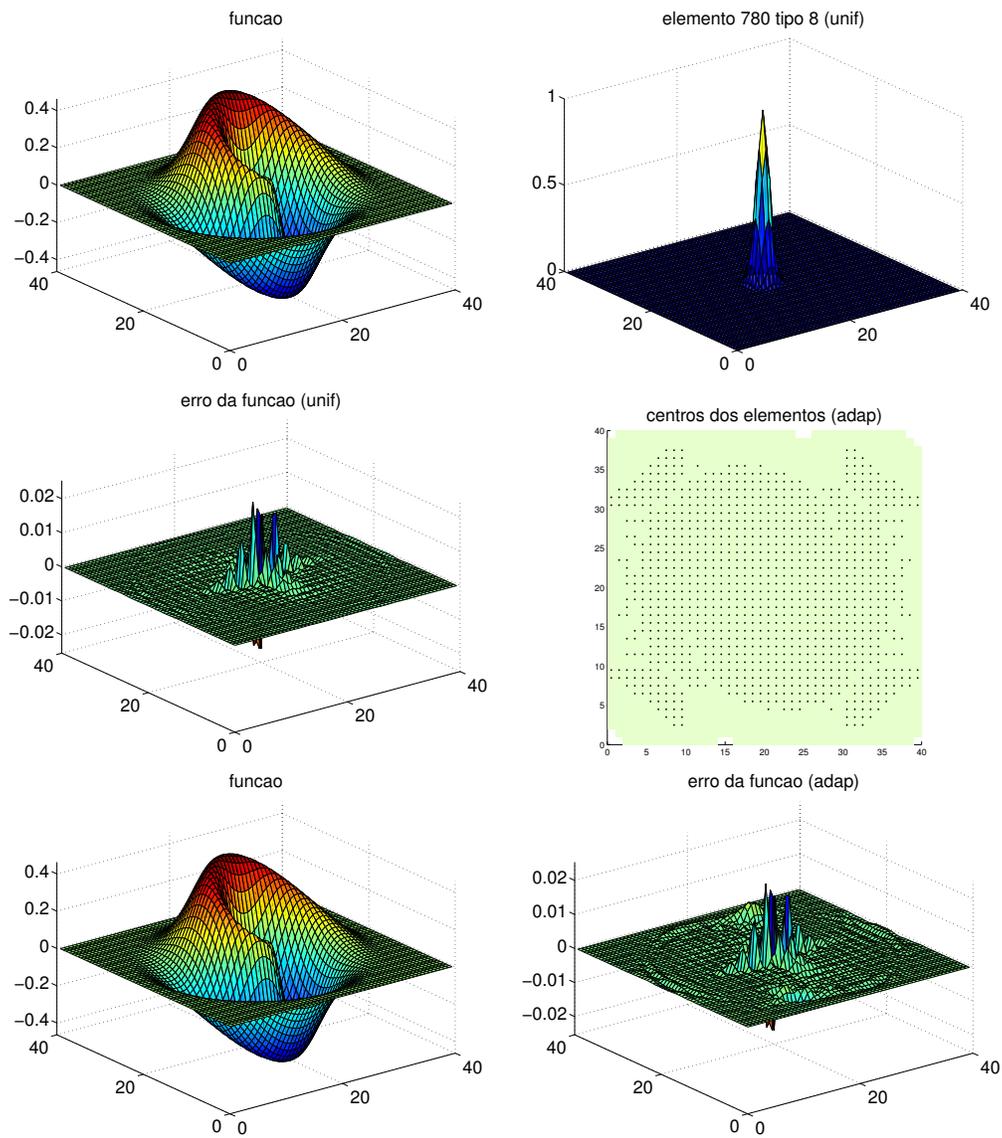


Figura 9.16: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe Wendland $\Phi_{5,4}^P$ e $\bar{\rho} = 4,5$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.4 Função-mãe B-splines Φ_2^S

Para a B-spline de grau 2, temos exemplos de aproximações de funções usando $\rho = 1, 0$. Veja as Figuras 9.17, 9.18, 9.19 e 9.20.

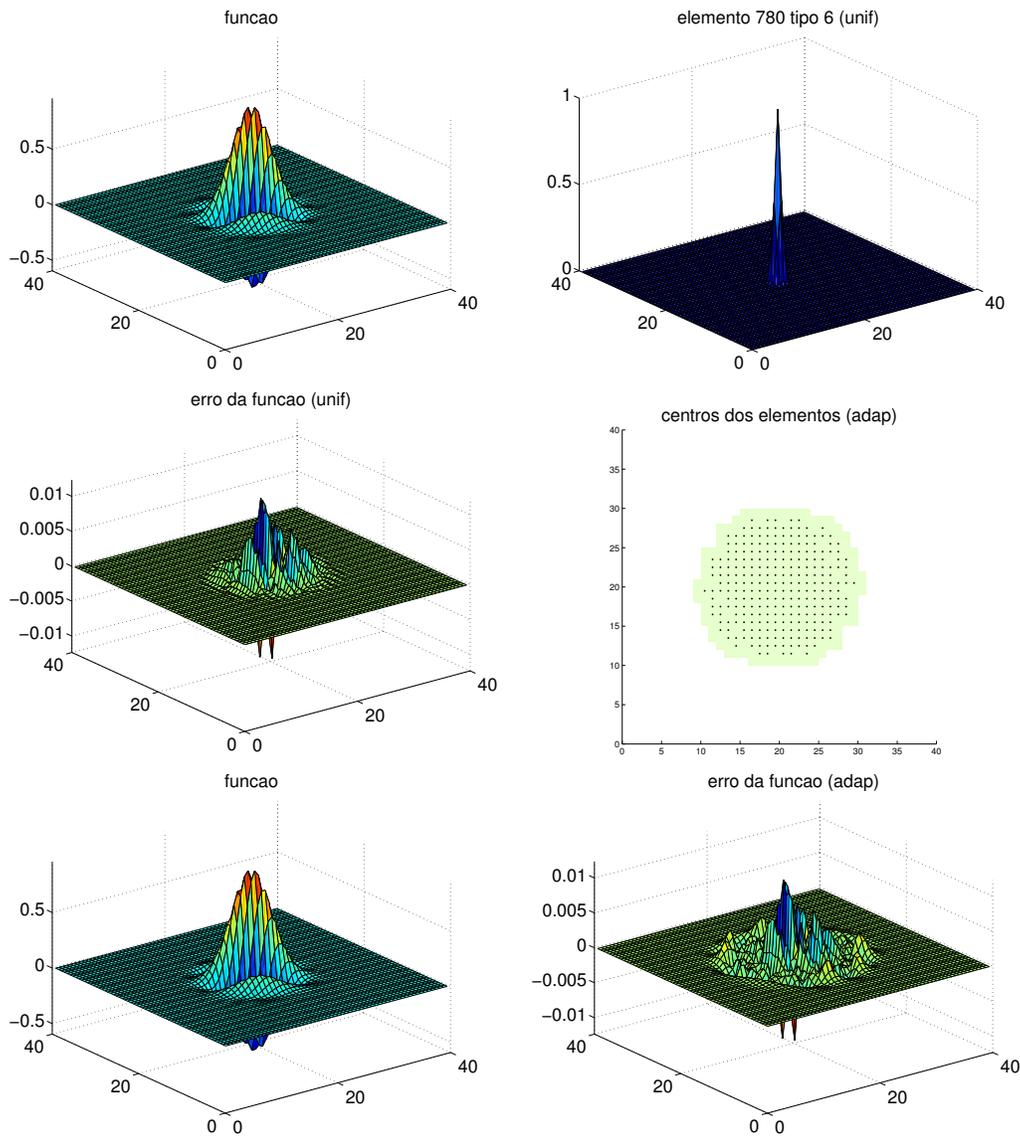


Figura 9.17: Aproximação adaptativa da função f_O com função-mãe B-spline Φ_2^S e $\bar{\rho} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_O , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

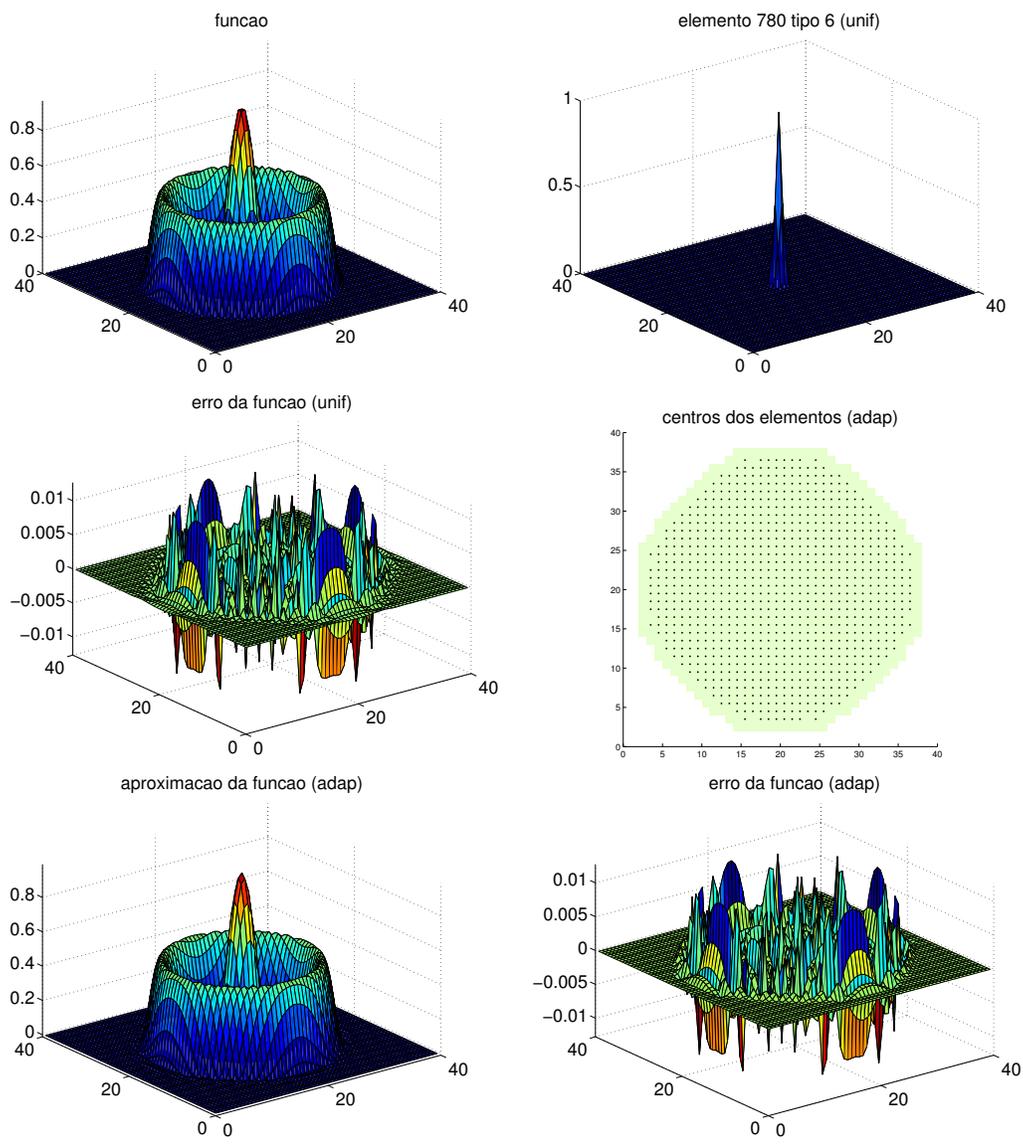


Figura 9.18: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe B-spline Φ_2^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

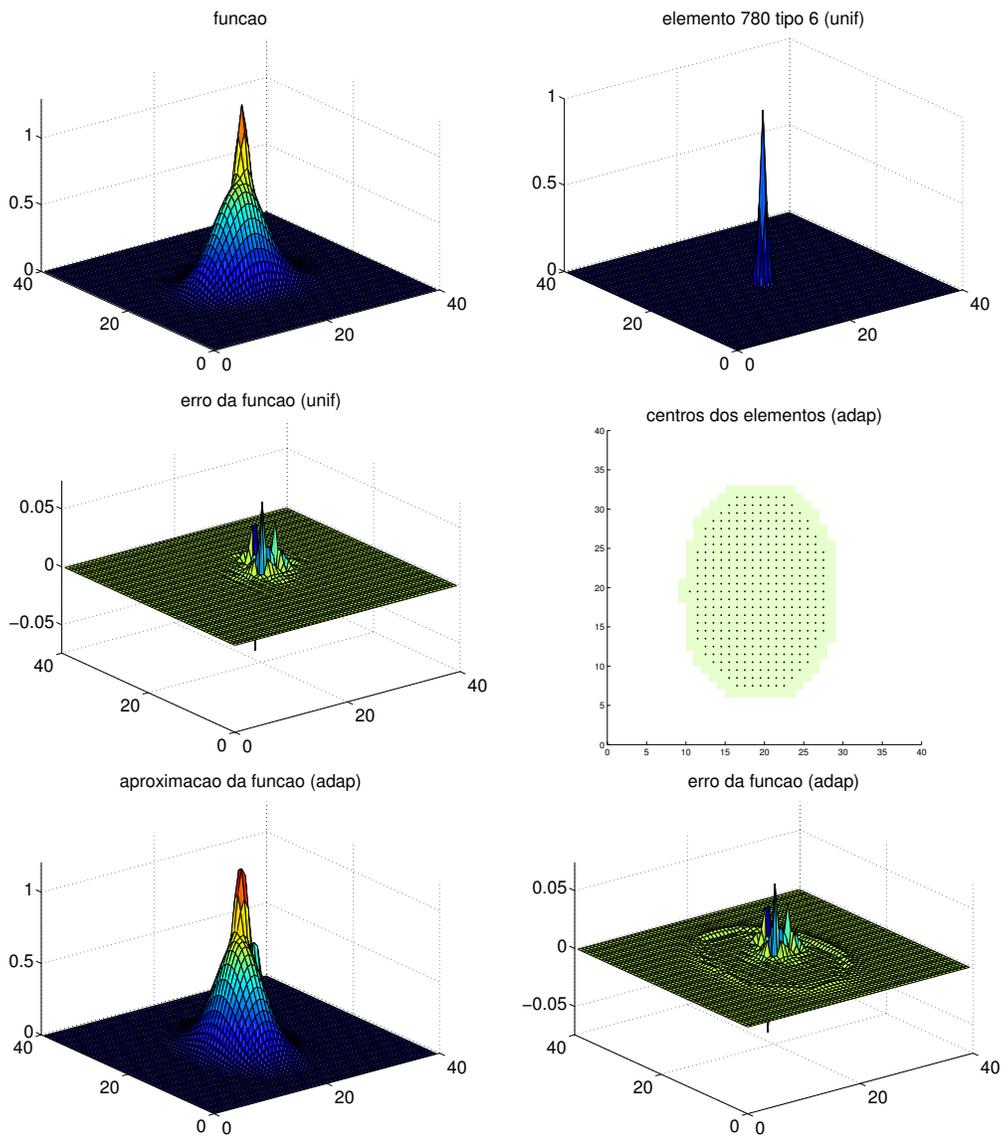


Figura 9.19: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline Φ_2^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

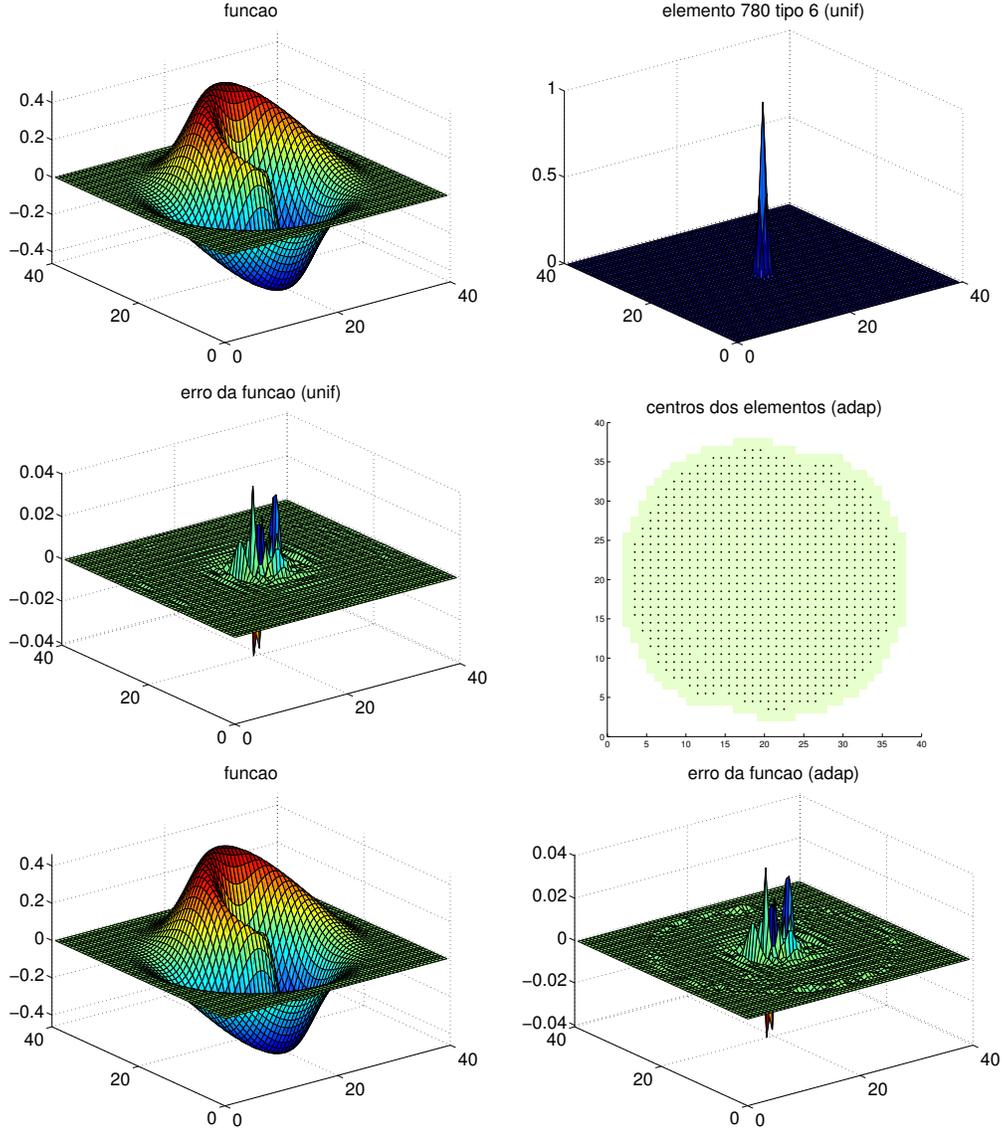


Figura 9.20: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline Φ_2^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.5 Função-mãe B-splines Φ_3^S

Para a B-spline de grau 3, temos exemplos de aproximações de funções usando $\rho = 1, 0$. Veja as Figuras 9.21, 9.22, 9.23 e 9.24.

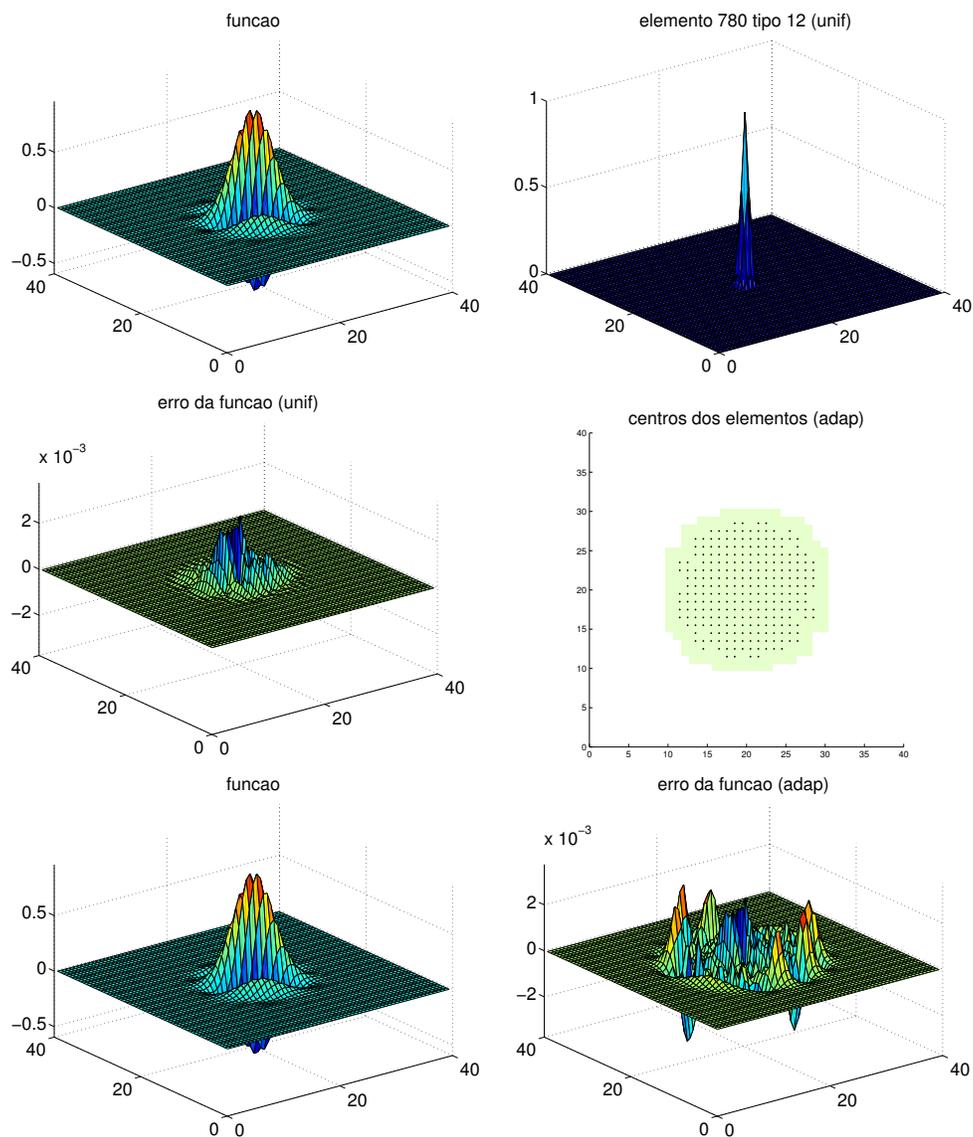


Figura 9.21: Aproximação adaptativa da função f_0 com função-mãe B-spline Φ_3^S e $\bar{\rho} = 1, 0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_0 , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

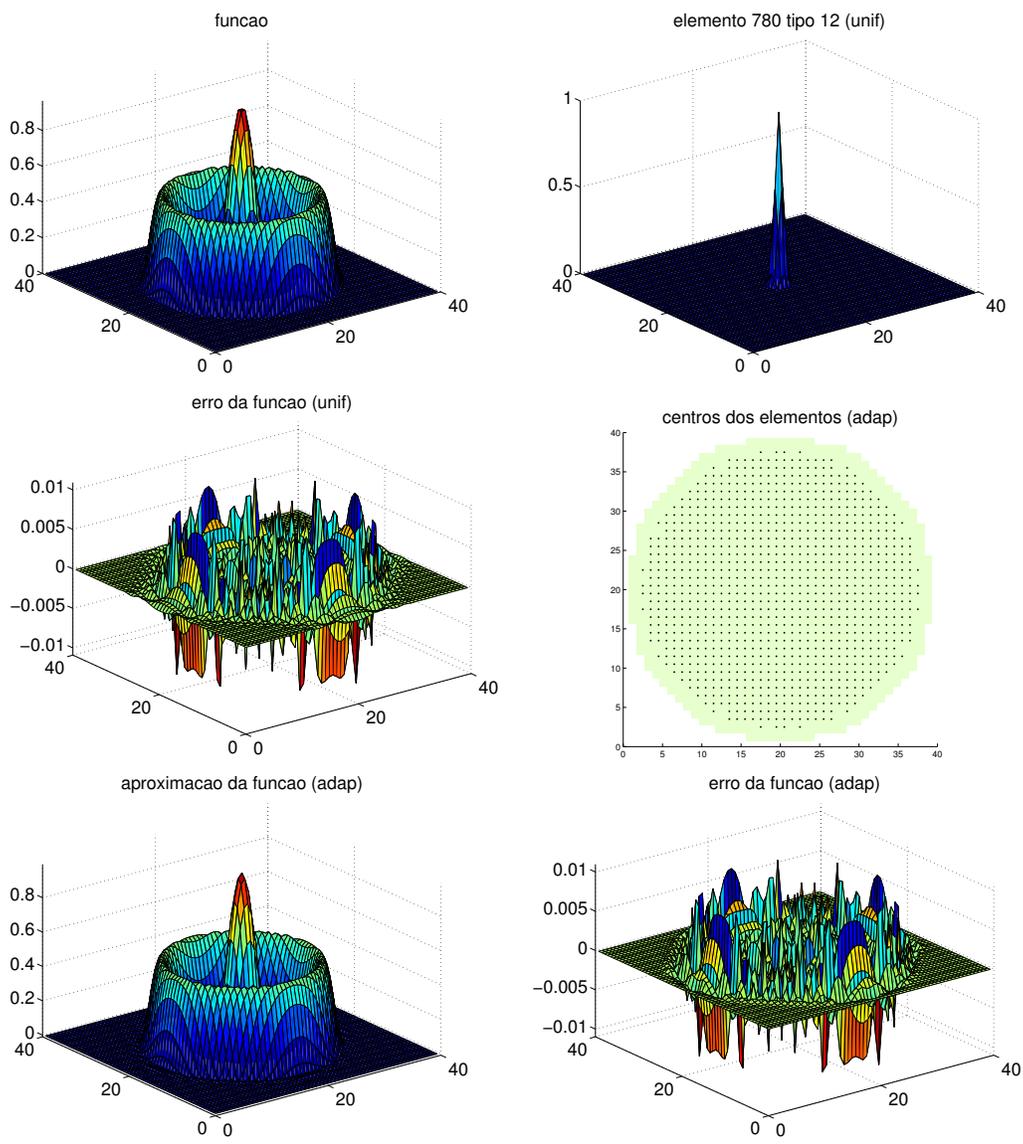


Figura 9.22: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe B-spline Φ_3^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

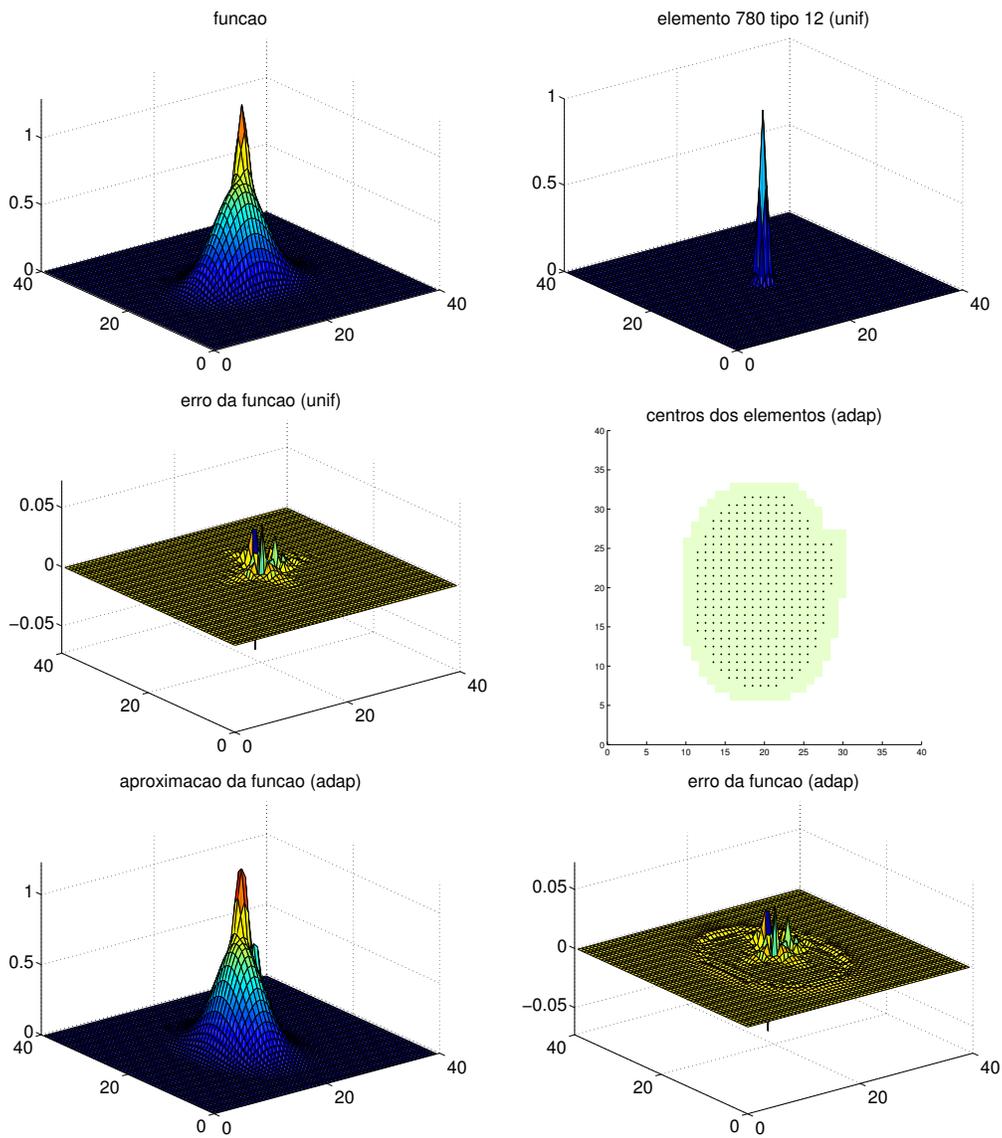


Figura 9.23: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline Φ_3^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

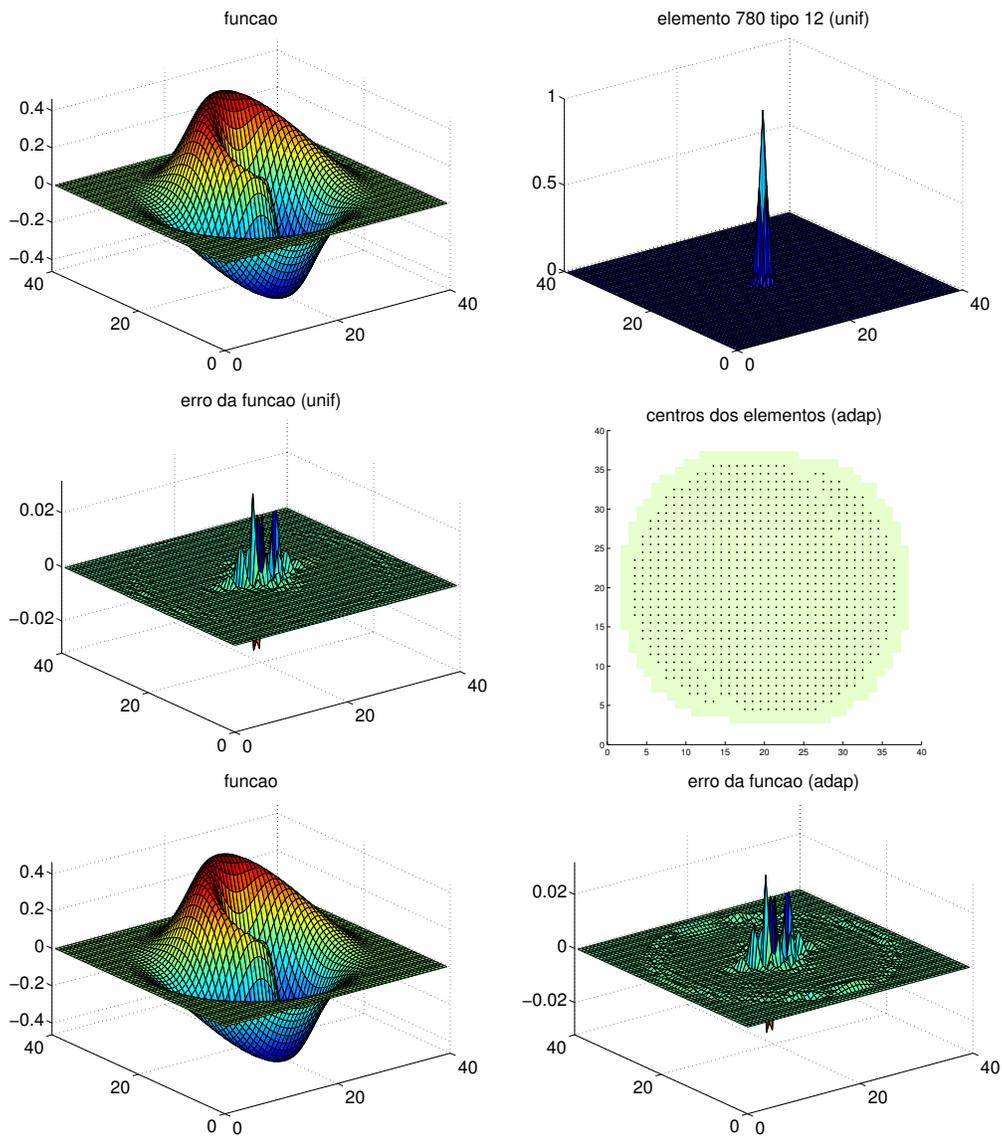


Figura 9.24: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline Φ_3^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.6 Função-mãe B-splines Φ_4^S

Para a B-spline de grau 4, temos exemplos de aproximações de funções usando $\rho = 1,0$. Veja as Figuras 9.25, 9.26, 9.27 e 9.28.

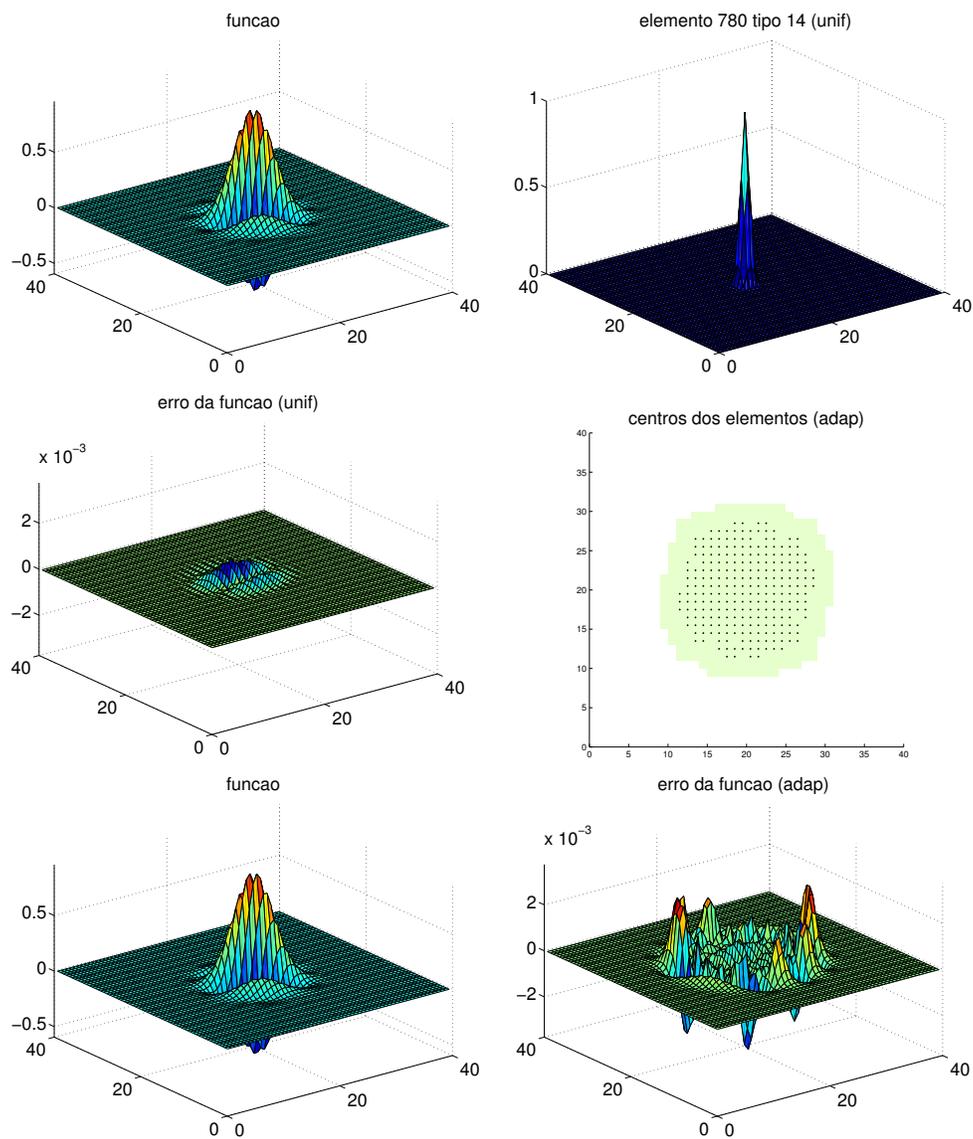


Figura 9.25: Aproximação adaptativa da função f_O com função-mãe B-spline Φ_4^S e $\bar{\rho} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_O , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

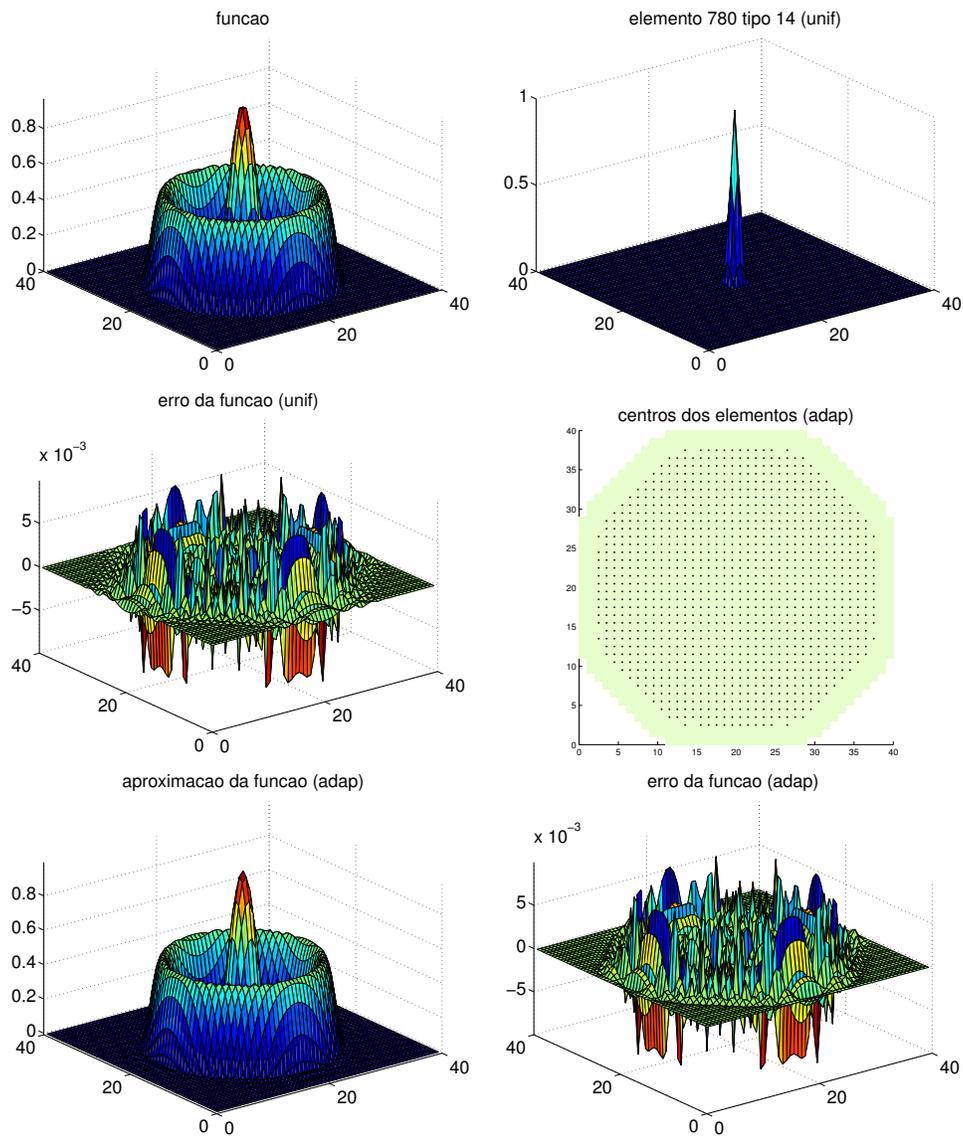


Figura 9.26: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe B-spline Φ_4^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

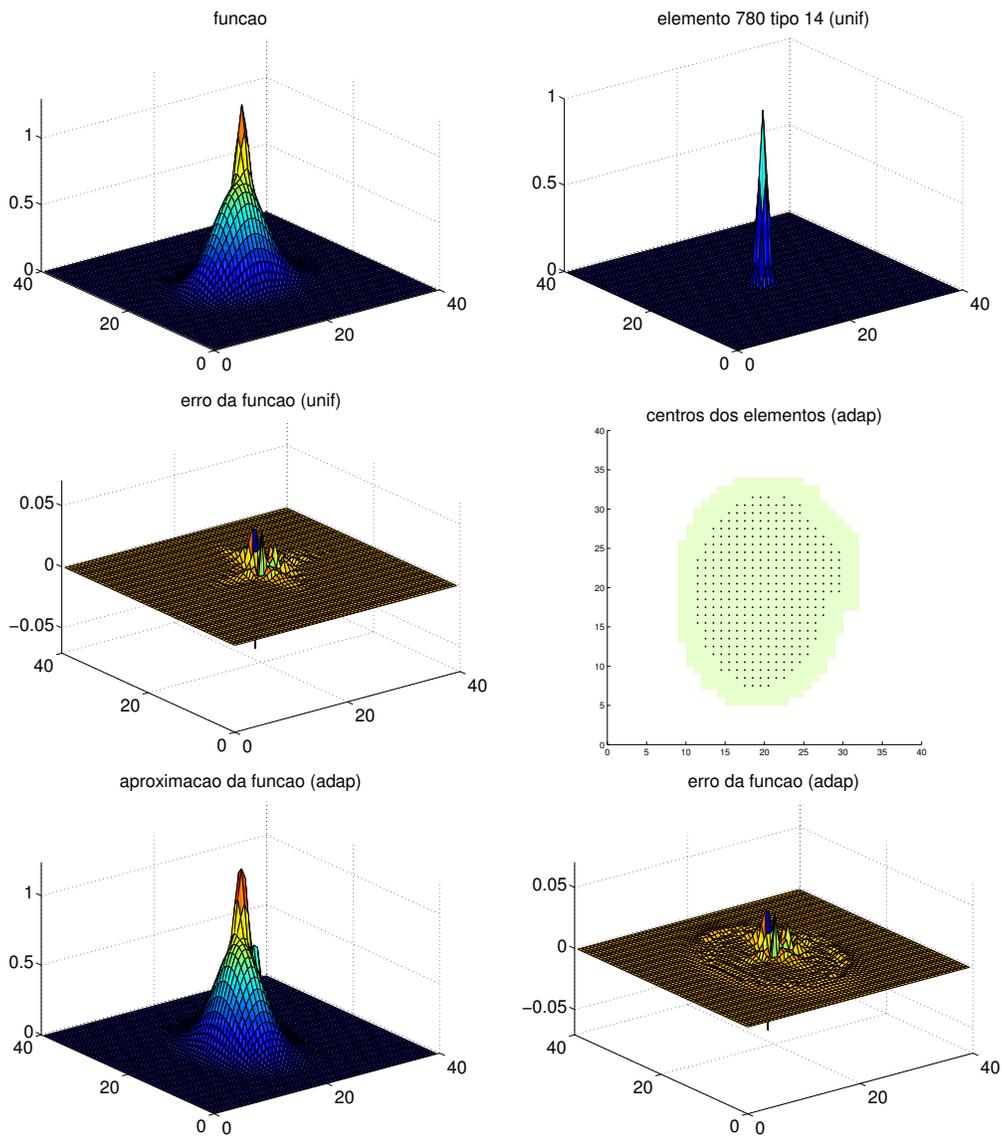


Figura 9.27: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline Φ_4^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

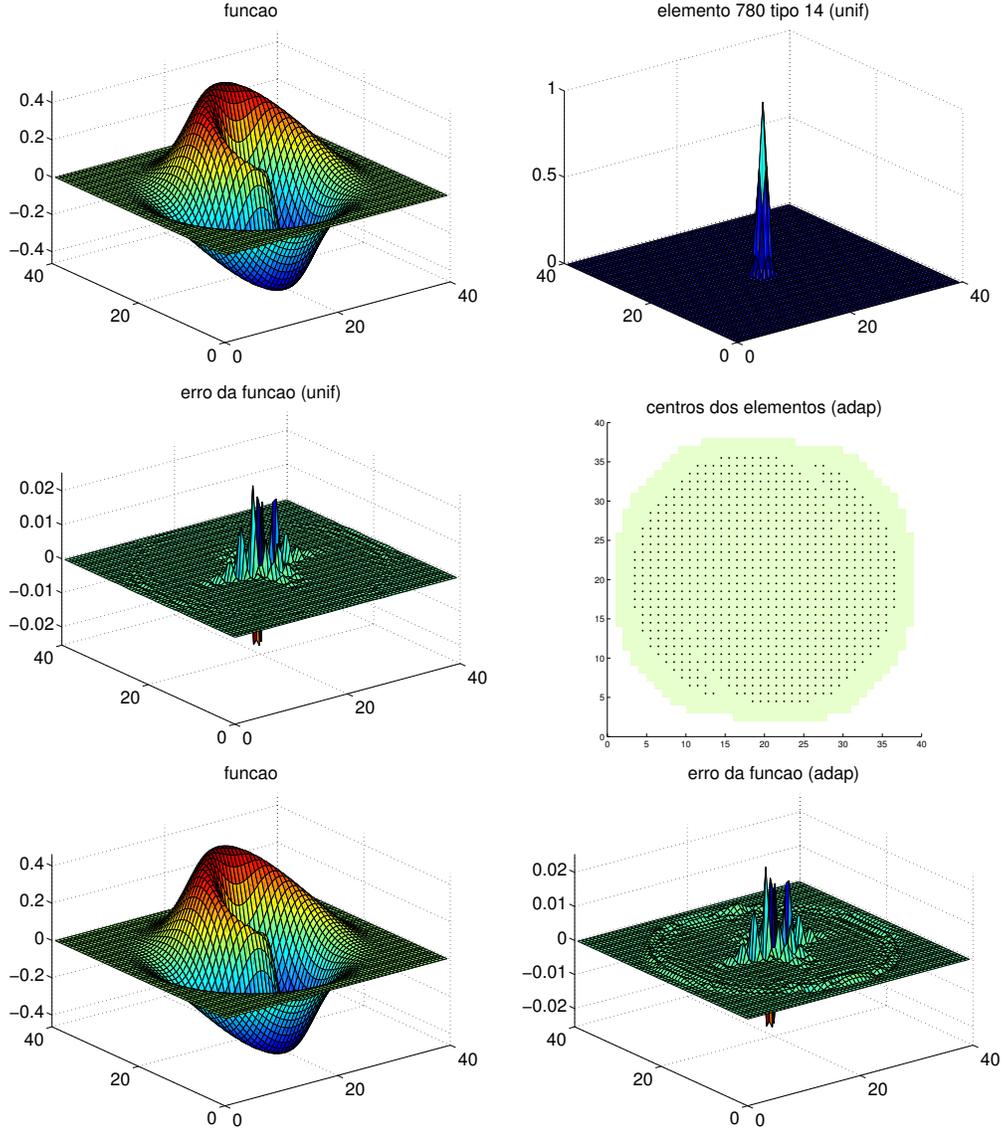


Figura 9.28: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline Φ_4^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.2.7 Função-mãe B-splines Φ_5^S

Para a B-spline de grau 5, temos exemplos de aproximações de funções usando $\rho = 1,0$. Veja as Figuras 9.29, 9.30, 9.31 e 9.32.

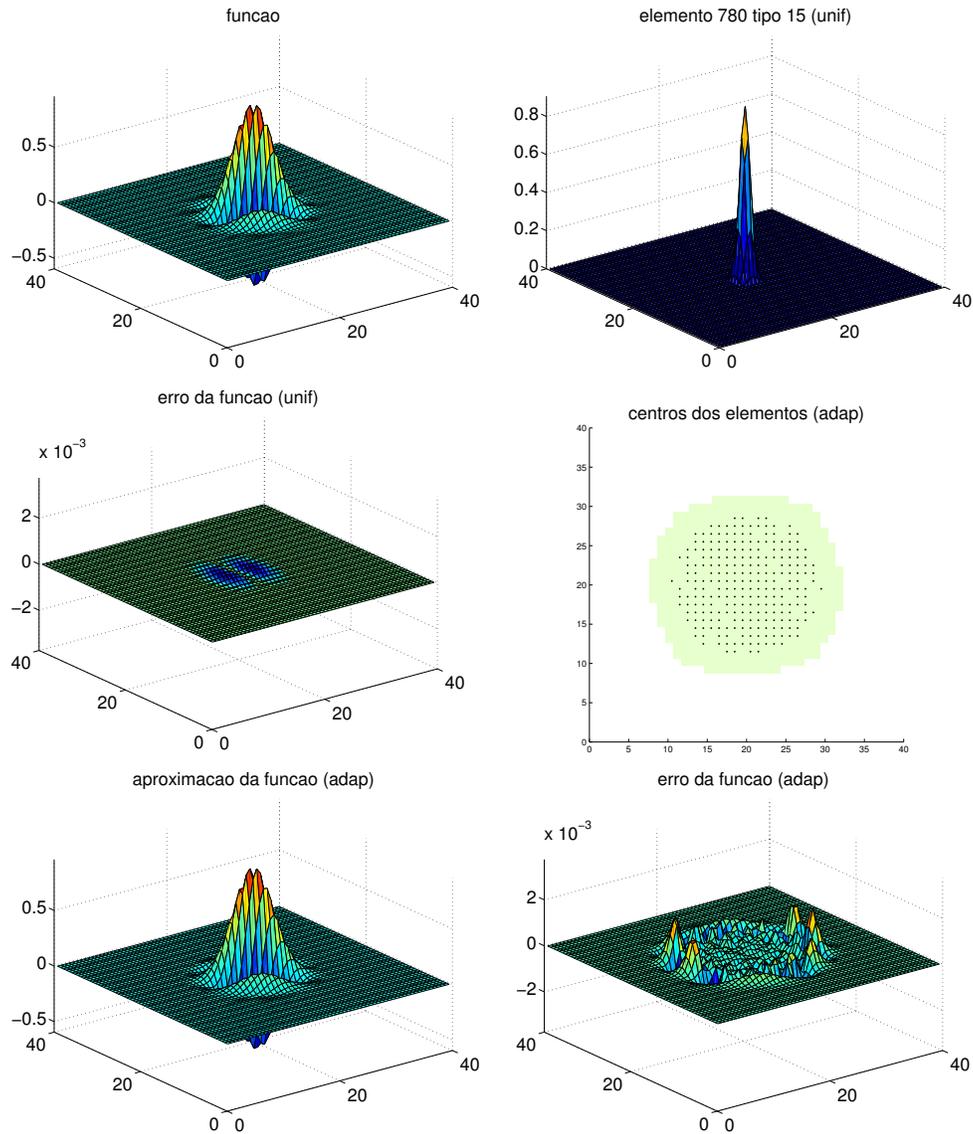


Figura 9.29: Aproximação adaptativa da função f_0 com função-mãe B-spline Φ_5^S e $\bar{\rho} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_0 , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

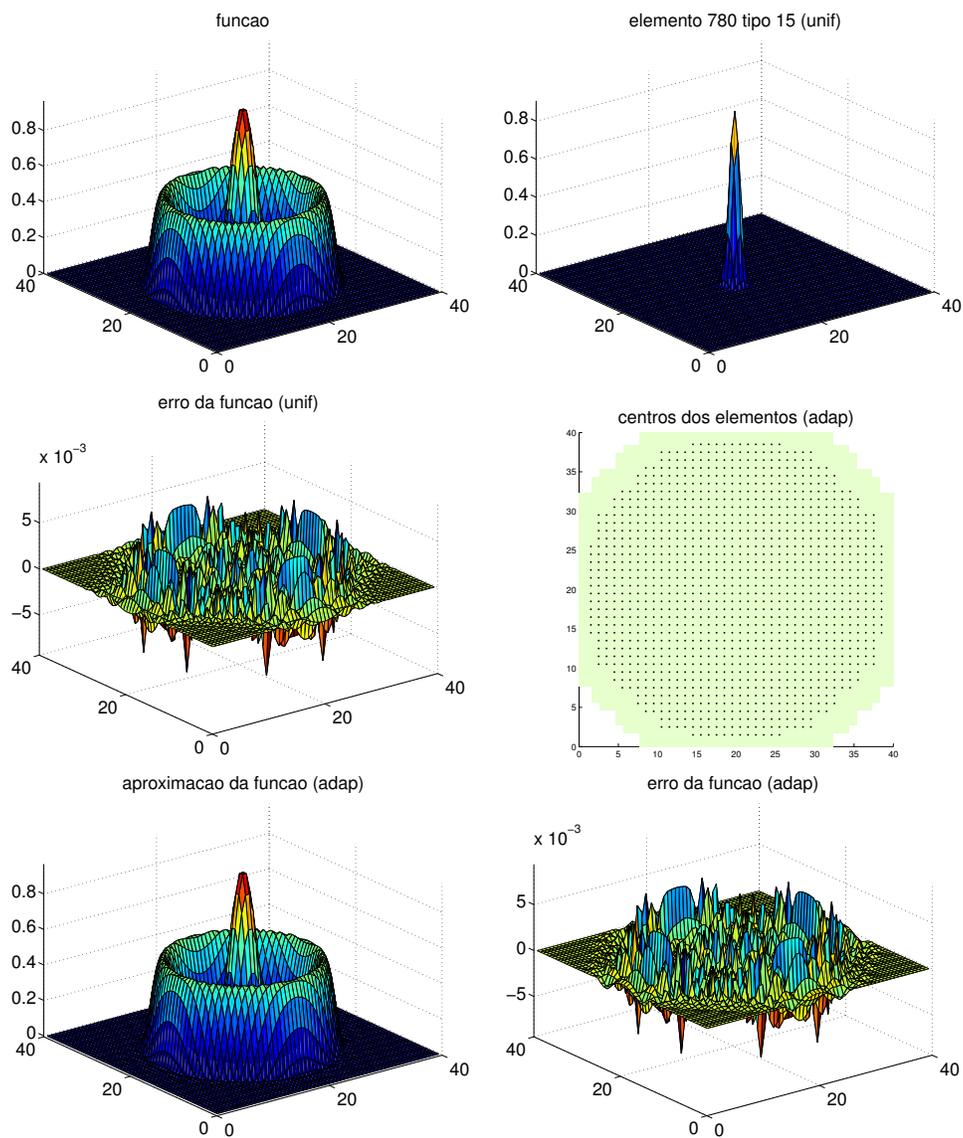


Figura 9.30: Aproximação adaptativa da função f_C com função-mãe B-spline Φ_5^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_C , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

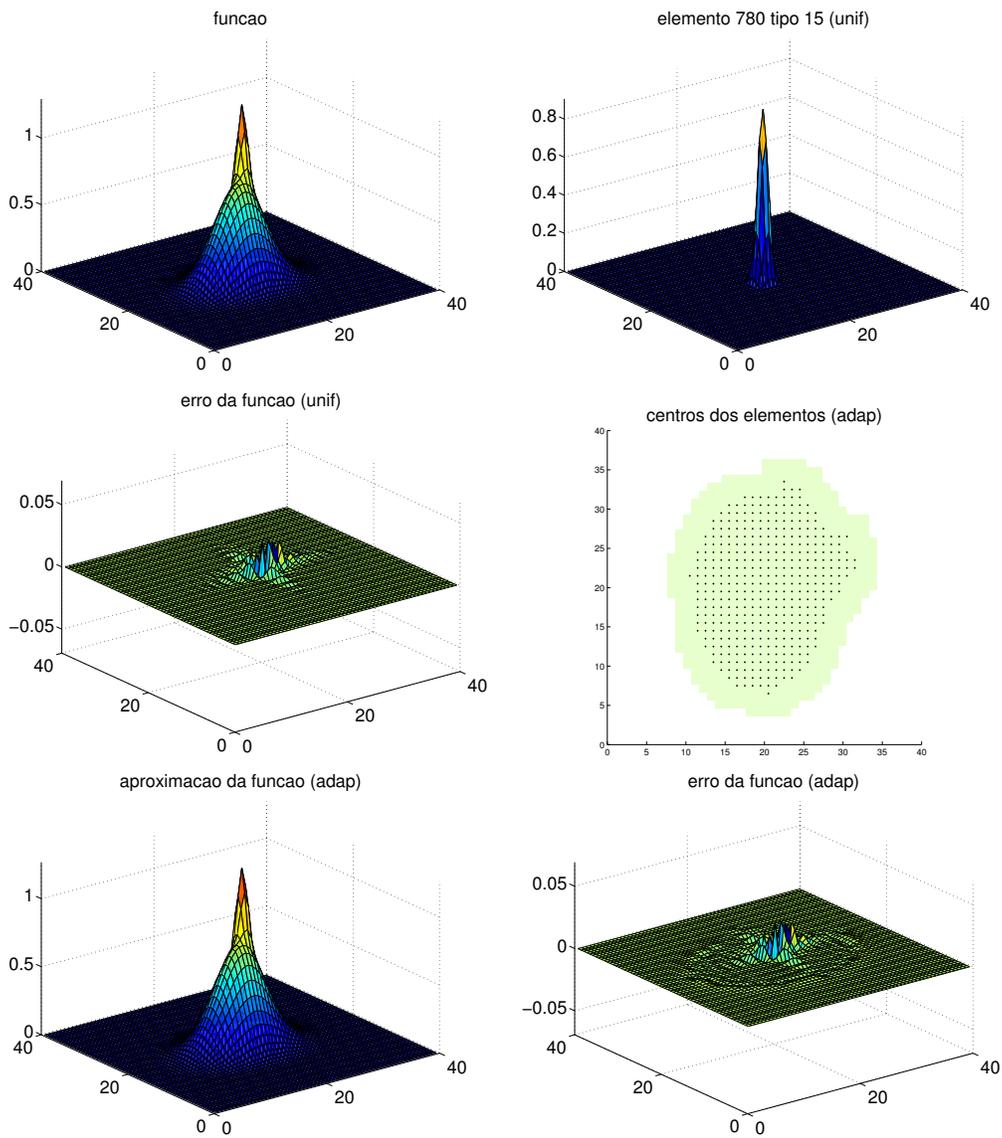


Figura 9.31: Aproximação adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline Φ_5^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_F , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

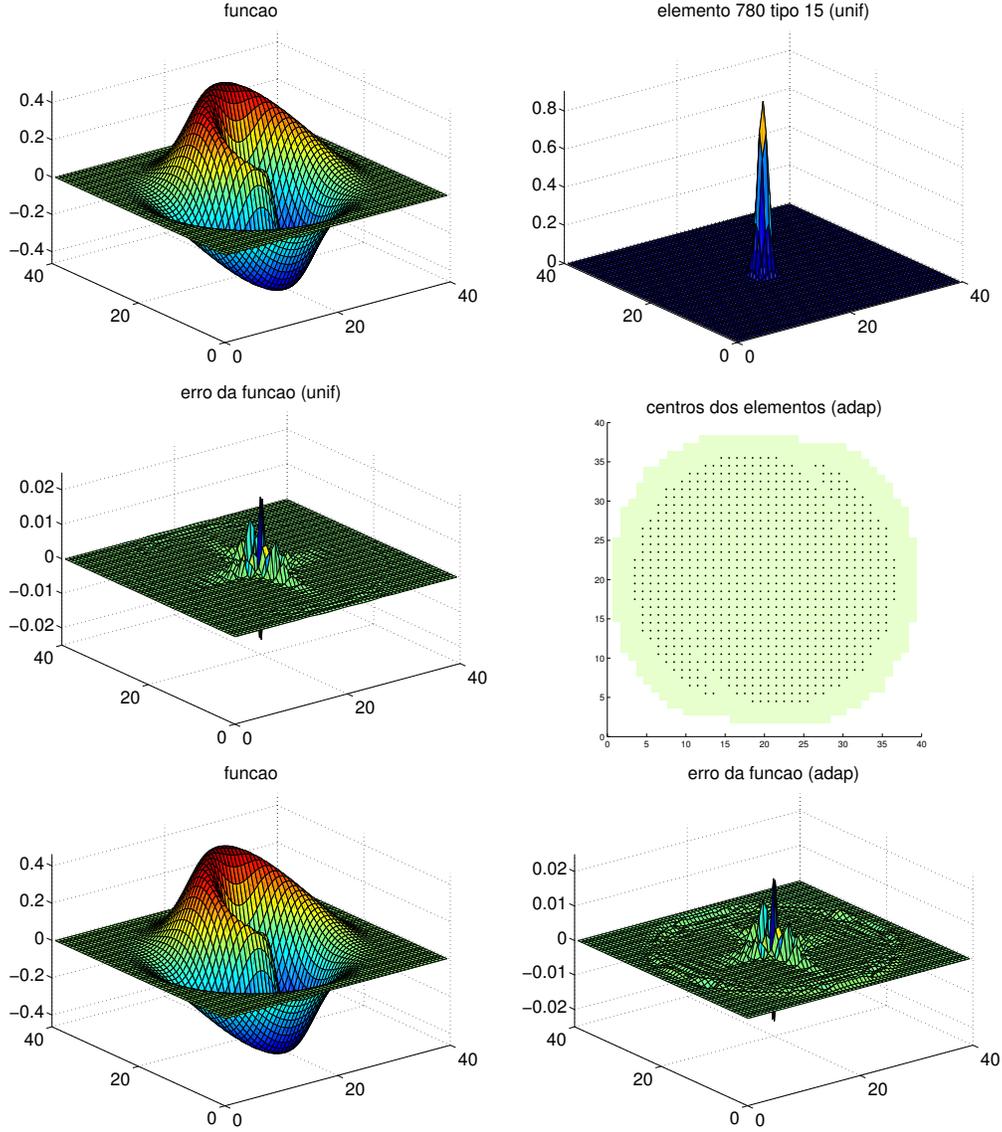


Figura 9.32: Aproximação adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline Φ_5^S e $\bar{p} = 1,0$, com $T = 40$ por mínimos quadrados. No alto, a função f_G , e um elemento típico ϕ_j^* da pré-base. No meio, o erro de aproximação com a pré-base plena ϕ , e os centros dos elementos da base reduzida $\hat{\phi}$. Em baixo, a aproximação com base reduzida $\hat{\phi}$ e o erro de aproximação correspondente.

9.3 Discussão

Tabela 9.2: Tamanho n da base reduzida e seu tamanho $\tau = n/m$ relativo à base completa, para cada uma das funções de teste, com cada função-mãe, para $\epsilon_{\max} = 5 \times 10^{-3}$ e $m = 40 \times 40 = 1600$.

Base	f_O		f_C		f_F		f_G	
	n	τ	n	τ	n	τ	n	τ
Φ^G	184	11%	1599	99%	1419	89%	1558	97%
$\Phi_{3,2}^P$	178	11%	1160	72%	289	18%	782	49%
$\Phi_{5,4}^P$	174	11%	1352	84%	366	23%	832	52%
Φ_2^S	224	14%	760	47%	314	20%	848	53%
Φ_3^S	208	13%	844	53%	299	19%	836	52%
Φ_4^S	188	12%	936	58%	293	18%	818	51%
Φ_5^S	194	12%	1016	63%	329	21%	818	51%

Tabela 9.3: Tamanho n da base reduzida e seu tamanho $\tau = n/m$ relativo à base completa, para cada uma das funções de teste, com cada função-mãe, para $\epsilon_{\max} = 2,5 \times 10^{-3}$ e $m = 40 \times 40 = 1600$.

Base	f_O		f_C		f_F		f_G	
	n	τ	n	τ	n	τ	n	τ
Φ^G	208	208%	1600	64%	1499	60%	1572	63%
$\Phi_{3,2}^P$	216	9%	1260	50%	332	13%	982	39%
$\Phi_{5,4}^P$	204	8%	1492	60%	442	18%	1040	42%
Φ_2^S	256	10%	868	35%	357	14%	896	36%
Φ_3^S	250	10%	976	39%	354	14%	870	35%
Φ_4^S	240	10%	1060	42%	350	14%	858	34%
Φ_5^S	238	9%	1188	47%	391	16%	850	34%

Tabela 9.4: Tamanho n da base reduzida e seu tamanho $\tau = n/m$ relativo à base completa, para cada uma das funções de teste, com cada função-mãe, para $\epsilon_{\max} = 5 \times 10^{-3}$ e $m = 50 \times 50 = 2500$.

Base	f_O		f_C		f_F		f_G	
	n	τ	n	τ	n	τ	n	τ
Φ^G	279	17%	2478	155%	1716	107%	1686	105%
$\Phi_{3,2}^P$	302	19%	1520	95%	457	28%	1240	77%
$\Phi_{5,4}^P$	298	19%	1776	111%	490	31%	1258	79%
Φ_2^S	352	22%	996	62%	523	33%	1340	84%
Φ_3^S	340	21%	1056	66%	508	32%	1314	82%
Φ_4^S	322	20%	1116	70%	493	31%	1296	81%
Φ_5^S	310	19%	1292	80%	484	30%	1290	81%

Tabela 9.5: Tamanho n da base reduzida e seu tamanho $\tau = n/m$ relativo à base completa, para cada uma das funções de teste, com cada função-mãe, para $\epsilon_{\max} = 2,5 \times 10^{-3}$ e $m = 50 \times 50 = 2500$.

Base	f_O		f_C		f_F		f_G	
	n	τ	n	τ	n	τ	n	τ
Φ^G	326	13%	2494	99%	1920	77%	2042	82%
$\Phi_{3,2}^P$	358	14%	1676	67%	533	21%	1384	55%
$\Phi_{5,4}^P$	350	14%	2000	80%	579	23%	1410	56%
Φ_2^S	412	17%	1184	47%	598	24%	1398	56%
Φ_3^S	396	16%	1304	52%	584	23%	1376	55%
Φ_4^S	388	15%	1428	57%	569	23%	1358	54%
Φ_5^S	386	15%	1556	62%	564	22%	1340	54%

Observamos nas Tabelas 9.2 a 9.5 que de modo geral, as funções-mãe de suporte mais compacto como $\Phi_{3,2}^P$, Φ_2^S , Φ_3^S , Φ_4^S e Φ_5^S resultam em bases reduzidas bem menores que a pré-base. Por outro lado, com a função-mãe gaussiana Φ^G , as bases reduzidas são geralmente bem maiores especialmente para as funções com detalhes pequenos como f_C , onde praticamente nenhum elemento pode ser eliminado. Por outro lado, não há diferença nítida entre as funções polinomiais por partes, neste aspecto.

A comparação entre as Tabelas 9.2 e 9.4, bem como entre as Tabelas 9.3 e 9.5, mostra que o tamanho relativo n/m da base reduzida em relação ao da pré-base não aumenta quando o tamanho m da pré-base aumenta (de 1600 para 2500, ou seja 56%). Por exemplo, para a função f_G com base Φ_5^S e $\epsilon_{\max} = 5 \times 10^{-3}$, o tamanho relativo da base reduzida manteve-se praticamente constante, de 818/1600 (51%) para 1290/2500 (51%). Já para a função f_C a fração n/m diminuiu, de 1016/1600 (63%) para 1292/2500 (52%), esse resultado é esperado uma vez que a fração n/m deve tender no limite $m \rightarrow \infty$ para a fração da área do domínio onde a função objetivo é maior que ϵ_{\max} em módulo.

A mesma razão explica porque a redução da tolerância ϵ_{\max} , de 5×10^{-3} para $2,5 \times 10^{-3}$ tem efeito relativamente modesto no tamanho n da base reduzida, como pode ser constatado comparando as Tabelas 9.2 e 9.3, bem como entre as Tabelas 9.4 e 9.5.

Parte III

**Aproximação adaptativa
multiescala**

Capítulo 10

Aproximação hierárquica adaptativa

Neste capítulo consideramos uma técnica geral para *aproximação multinível adaptativa* usando bases tensoriais. Os métodos que veremos aqui são interessantes quando a função a aproximar é suave (mas não necessariamente nula) em uma grande região \mathbb{D}_0 do domínio \mathbb{D} ou então quando a densidade de amostragem varia bastante de uma região para outra. Com esta técnica usamos uma base menor e mais grosseira nas regiões onde f é suave (ou há menos dados), e uma base mais densa com elementos mais compactos apenas nas regiões onde ela é menos suave (ou há mais dados). Dependendo da função e das bases, esta abordagem pode resultar em enorme economia de espaço e tempo.

10.1 Pré-base hierárquica

Para esse fim, introduzimos o conceito de *pré-base hierárquica* que é uma sequência infinita de *níveis*. Cada nível l é uma base de aproximação. O domínio \mathbb{D} é o mesmo para todos os níveis; como no resto da tese, vamos supor que \mathbb{D} é uma caixa $[0, L_1] \times [0, L_2] \times \dots \times [0, L_d]$ com topologia toroidal. Na prática usamos um número finito de níveis $l_{\min}, l_{\min} + 1, l_{\min} + 2, \dots, l_{\max}$.

De modo geral, o espaço $\mathcal{A}^{(l)}$ gerado por cada nível $\phi^{(l)}$ permite aproximar detalhes menores que o do nível $\phi^{(l-1)}$. Em muitos trabalhos sobre aproximação multi-nível (como Castros [12] e Müller [50]), supõe-se que os espaços $\mathcal{A}^{(l)}$ de níveis diferentes são linearmente independentes, ou mesmo ortogonais. Nesta tese não exigimos essa condição, o que nos permite maior liberdade na escolha das bases $\phi^{(l)}$.

10.1.1 Níveis uniformes

Nesta tese vamos considerar, especificamente, pré-bases onde cada nível $\phi^{(l)}$ é uma base uniforme como definida no Capítulo 7. Assim, em cada nível l os centros estão dispostos em uma grade regular de centros no domínio toroidal \mathbb{D} com um certo número $Q_i^{(l)}$ de centros ao longo de cada eixo i . O espaçamento dos centros é portanto $\zeta_i^{(l)} = L_i/Q_i^{(l)}$ em cada eixo i . O fator de escala $\rho_i^{(l)}$ de cada elemento na direção i é por definição $\bar{\rho}\zeta_i^{(l)} = \bar{\rho}L_i/Q_i^{(l)}$, sendo $\bar{\rho}$ um raio relativo fixo comum a todos os níveis (por exemplo, o raio relativo ótimo determinado no Capítulo 7). O

elemento genérico do nível l tem portanto a forma

$$\phi_j^{(l)}(x) = \prod_{i=1}^d \widehat{\Phi}_i^{(l)}(x_i - c_{ji}^{(l)}), \quad (10.1.1)$$

sendo $\widehat{\Phi}_i^{(l)}$ a função-mãe repetida pela Fórmula (7.1.2) com fator de escala $\rho_i = \bar{\rho} \zeta_i^{(l)}$ e período $Q_i^{(l)}/\bar{\rho}$, isto é

$$\widehat{\Phi}^{(l)}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{z - kL_i}{\rho_i^{(l)}}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{z}{\rho_i^{(l)}} - k \frac{Q_i^{(l)}}{\bar{\rho}}\right).$$

10.1.2 Hierarquia

Nesta tese consideramos bases multiníveis com a chamada *hierarquia quadtree*, em que $Q_i^{(l)} = 2^l$. Ou seja, a malha mais grosseira tem $Q_1^{(l)} = Q_2^{(l)} = \dots = Q_d^{(l)} = 1$, e, ao passarmos de um nível l para o nível seguinte $l + 1$, todos os parâmetros $Q_i^{(l)}$ dobram. Vale notar que, com estas definições não há coincidência entre os centros de níveis diferentes.

No decorrer de nossas pesquisas testamos também malhas diádicas [29] em substituição às malhas quadtree, mas os resultados não mostraram conclusivamente sua vantagem, e portanto optamos por deixar essa investigação para o futuro.

10.2 Aproximação multinível adaptativa

Se todos os elementos de todos os níveis fossem linearmente independentes, ou seja, $\mathcal{A}^{(l)} \cap \mathcal{A}^{(k)} = \{0\}$ sempre que $l \neq k$, então poderíamos pensar em tratar todas as bases $\phi^{(l)}$ com $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$ como uma única base, e aplicar o método mínimos quadrados com ela. Porém, para muitas das funções-mãe que usamos, os níveis não são linearmente independentes. Pelo contrário, para certas funções-mãe (como Φ_1^S), o espaço das funções aproximadoras de cada nível está contido no espaço do nível seguinte; ou seja, $\mathcal{A}^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(2)} \subset \dots$. Em particular, com esta função-mãe, a função constante $f(p) = 1$ pertence a todos os espaços $\mathcal{A}^{(l)}$.

Assim, na aproximação de uma função por uma pré-base hierárquica ϕ , é preferível calcular a aproximação ótima um nível por vez, em ordem crescente de seu índice l ; sendo que, em cada etapa, usamos apenas a pré-base $\phi^{(l)}$ para aproximar a função $f^{(l)}$ que é o resíduo das aproximações anteriores. As aproximações parciais $s^{(l)}$ obtidas em cada nível devem então ser somadas para obter a aproximação final.

Este método, pode ser formalizado pelo algoritmo *ApHAD* abaixo (que será melhorado no restante deste capítulo):

Algoritmo 10.1. *Procedimento ApHAD*($l_{\min}, l_{\max}, \epsilon_{\max}, f, \phi$)

1. $s \leftarrow 0_N; \hat{\phi} \leftarrow (); \hat{\alpha} \leftarrow (),$
2. para $l = l_{\min}, l_{\min} + 1 \dots, l_{\max},$
 3. se $l = l_{\min},$ faça $f^{(l)} \leftarrow f,$ senão $f^{(l)} \leftarrow \hat{e}^{(l-1)};$
 4. se $\|f^{(l)}\|_{\infty} < \epsilon_{\max},$ vá para o passo 11. Senão,
 5. $\alpha^{(l)} \leftarrow \mathcal{C}(f^{(l)}, \phi^{(l)}); s^{(l)} \leftarrow \sum_j \alpha_j^{(l)} \phi_j^{(l)}.$
 6. $e^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - s^{(l)}.$
 7. $(\hat{\phi}^{(l)}, \hat{\alpha}^{(l)}) \leftarrow \text{Reduz}(\phi^{(l)}, \alpha^{(l)}, e^{(l)}, \epsilon_{\max});$
 8. $\hat{s}^{(l)} \leftarrow \sum_k \hat{\alpha}_k \hat{\phi}_k.$
 9. $\hat{e}^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - \hat{s}^{(l)}.$
 10. $s \leftarrow s + \hat{s}^{(l)}; \hat{\phi} \leftarrow \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}^{(l)}; \hat{\alpha} \leftarrow \hat{\alpha} \cdot \hat{\alpha}^{(l)}.$
11. retorne $\hat{\phi}, \hat{\alpha}.$

Neste algoritmo, \mathcal{C} é um operador de aproximação arbitrário, como o método de mínimos quadrados definido no Capítulo 3; que, dado o resíduo corrente $f^{(l)},$ devolve os coeficientes $\alpha^{(l)}$ da sua aproximação $s^{(l)}$ na pré-base $\phi^{(l)}$ do nível $l.$ *Reduz* é um método de redução de base, como o que descrevemos no capítulo 8; que, dada a pré-base $\phi^{(l)},$ os coeficientes $\alpha^{(l)}$ e o resíduo $e^{(l)},$ devolve um subconjunto $\hat{\phi}^{(l)}$ de $\phi^{(l)}$ e os coeficientes correspondentes $\hat{\alpha}^{(l)}.$

A aproximação final s é a soma das aproximações reduzidas parciais $\hat{s}^{(l_{\min})} + \hat{s}^{(l_{\min}+1)} + \dots + \hat{s}^{(l_{\max})},$ que é a combinação linear da concatenação $\hat{\phi}$ de todas as bases reduzidas $\hat{\phi}^{(l_{\min})} \cdot \hat{\phi}^{(l_{\min}+1)} \dots \hat{\phi}^{(l_{\max})}$ com os respectivos coeficientes $\hat{\alpha}^{(l_{\min})} \cdot \hat{\alpha}^{(l_{\min}+1)} \dots \hat{\alpha}^{(l_{\max})}.$

Observe que o tamanho do suporte dos elementos da base, e especificamente da base dual (Seção 3.5.2), tem grande impacto na eficiência dos algoritmos de aproximação adaptativa.

10.3 Redução prévia da pré-base

O algoritmo *ApHAD* não é muito eficiente como descrito, pois exige a determinação de uma aproximação α na base $\phi^{(l)}$ que tem 2^{dl} elementos. Isto é impraticável mesmo para problemas em dimensão $d = 2:$ uma malha de nível $l = 7,$ por exemplo, tem $128 \times 128 = 2^{14} = 16.384$ elementos, e portanto o algoritmo *ApHAD* teria que resolver um sistema de tamanho $16384 \times 16384.$ Para transpor este obstáculo, a cada repetição do passo 5 usaremos apenas um subconjunto $\tilde{\phi}^{(l)}$ da base uniforme $\phi^{(l)},$ que consiste dos elementos que provavelmente serão necessários para reduzir a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ do resíduo corrente. Esta estratégia está descrita no algoritmo *ApHAD1* abaixo.

Algoritmo 10.2. *Procedimento ApHAd1*($f, \epsilon_{\max}, l_{\max}$)

1. $s \leftarrow 0_N$; $\hat{\phi} \leftarrow ()$; $\hat{\alpha} \leftarrow ()$.
2. para $l = \{l_{\min}, l_{\min} + 1, \dots, l_{\max}\}$.
 3. Se $l = l_{\min}$, faça $f^{(l)} \leftarrow f$; senão $f^{(l)} \leftarrow \tilde{e}^{(l-1)}$.
 4. escolha um subconjunto $\tilde{\phi}^{(l)}$ de $\phi^{(l)}$ adequado para $f^{(l)}$.
 5. se $\tilde{\phi}^{(l)}$ é vazia, vá para o passo 12. Senão,
 6. $\tilde{\alpha}^{(l)} \leftarrow \mathcal{C}(f^{(l)}, \tilde{\phi}^{(l)})$; $\tilde{s}^{(l)} \leftarrow \sum_j \tilde{\alpha}_j^{(l)} \tilde{\phi}_j^{(l)}$.
 7. $\tilde{e}^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - \tilde{s}^{(l)}$.
 8. $(\hat{\phi}^{(l)}, \hat{\alpha}^{(l)}) \leftarrow \text{Reduz}(\tilde{\phi}^{(l)}, \tilde{\alpha}^{(l)}, \tilde{e}^{(l)}, \epsilon_{\max})$.
 9. $\hat{s}^{(l)} \leftarrow \sum_k \hat{\alpha}_k \hat{\phi}_k$.
 10. $\hat{e}^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - \hat{s}^{(l)}$.
 11. $s \leftarrow s + \hat{s}^{(l)}$; $\hat{\phi} \leftarrow \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}^{(l)}$; $\hat{\alpha} \leftarrow \hat{\alpha} \cdot \hat{\alpha}^{(l)}$.
12. retorne $\hat{\phi}, \hat{\alpha}$.

10.3.1 Escolha da pré-base reduzida

A inovação principal do algoritmo *ApHAd1* está no passo 5, onde a pré-base $\phi^{(l)}$ é reduzida para uma base menor $\tilde{\phi}$ antes de calcular a aproximação ótima passo (6). Para este fim, usamos a seguinte heurística. Como no Capítulo 7, dividimos o domínio \mathbb{D} em células retangulares $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_m$ centradas nos centros c_1, c_2, \dots, c_m de cada elemento $\phi^{(l)}$. Em cada célula \mathfrak{C}_i calculamos o erro máximo,

$$\varepsilon_i^{(l)} = \max\{|f^{(l)}(p_k)| : k \in P_i\},$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, sendo que P_i é o conjunto de índices k dos pontos de amostragem p_k que estão dentro da célula \mathfrak{C}_i . Se não há nenhum ponto de amostragem na célula, $\varepsilon_i^{(l)}$ é zero por definição. Diremos que as células \mathfrak{C}_i com $\varepsilon_i > \epsilon_{\max}$ são *críticas*.

Na base $\tilde{\phi}^{(l)}$ precisamos colocar elementos suficientes para cobrir todas as células críticas; isto é, cada célula crítica deve estar dentro do suporte de algum elemento de $\tilde{\phi}^{(l)}$. Nesta tese tomamos todos os elementos de $\phi^{(l)}$ cujos centros estão em células críticas. (Outra opção seria colocar os elementos cujo suporte contém uma célula crítica, mas experiências mostram que esta opção resulta em bases maiores no final).

Em qualquer opção, definimos as *células relevantes* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_r$ como sendo as células que interceptam os suportes dos elementos $\tilde{\phi}^{(l)}$. Observe que, no passo 10, $\|f^{(l)}\|_{\infty} = \max\{\varepsilon_i : i = 1, \dots, m\}$. Este erro é maior que ϵ_{\max} se e somente se existe alguma célula crítica. Observe também que, após o passo 10, a combinação $\tilde{s} = \sum \tilde{\alpha}_j \tilde{\phi}_j$ é zero em qualquer célula que não seja relevante. Logo, nas células não relevantes $f^{(l)}(p_i)$ será igual a $f^{(l-1)}(p_i)$; e, portanto, nessas células o erro máximo permanecerá menor que ϵ_{\max} . A esperança é que os resíduos $\tilde{e}^{(l)}$ em todas as células relevantes (e portanto, nas células críticas) tenham norma $\|\cdot\|_{\infty}$ menor que ε_i depois dos passos 8 e 10.

Podemos acelerar ainda mais este algoritmo observando que uma célula $\mathfrak{C}_j^{(l+1)}$ do nível $l+1$ pode ser crítica apenas se ela intercepta uma célula relevante $\mathfrak{R}_i^{(l)}$ do nível l , pois nas células do

nível l que não são relevantes o erro é menor que ϵ_{\max} e os valores de $\tilde{e}^{(l+1)}$ são iguais a $\tilde{e}^{(l)}$ nessas células. Além disso, nos passos 6 a 8 podemos ignorar todos os pontos de amostragem que não estão nas células relevantes.

Estas idéias estão formalizadas no algoritmo *ApHAD2* abaixo. Observe que no cálculo de $\tilde{\alpha}^{(l)}$ a matriz A de base $\tilde{\phi}^{(l)}$ só precisa ser calculada nos pontos p_i que estão nas células $\mathfrak{R}^{(l)}$, pois o erro em todos os outros pontos não depende do vetor $\tilde{\alpha}$ e portanto não afeta o cálculo do mesmo.

Os conjuntos de células $\mathfrak{U}^{(l)}$ (células do suporte dos elementos de ϕ cujos centros estão em \mathfrak{R}) não são usados no algoritmo; eles servem apenas para analisar seu desempenho. Pode-se verificar que $\cup \mathfrak{C}^{(l)} \subseteq \cup \hat{\mathfrak{R}}^{(l)} \subseteq \cup \mathfrak{R}^{(l)} \subseteq \cup \mathfrak{U}^{(l-1)}$ em todas iterações. Ou seja, a região coberta pelas células do conjunto $\mathfrak{U}^{(l)}$ vai diminuindo a cada iteração enquanto que a região $\cup \mathfrak{C}^{(l)}$ pode aumentar temporariamente. Além disso, verifica-se que $\cup \mathfrak{U}^{(l)} \subseteq \cup \mathfrak{U}^{(l-1)}$, $\cup \mathfrak{C}^{(l)} \subseteq \cup \hat{\mathfrak{R}}^{(l-1)}$, embora $\cup \mathfrak{C}^{(l)}$ nem sempre esteja contido em $\cup \mathfrak{C}^{(l-1)}$ e $\cup \hat{\mathfrak{R}}^{(l)}$ nem sempre esteja contido em $\cup \hat{\mathfrak{R}}^{(l-1)}$.

Algoritmo 10.3. *Procedimento ApHAD2($f, \epsilon_{\max}, l_{\max}, p$)*

1. $\mathfrak{R}^{(l_{\min}-1)} \leftarrow$ (todas as células da malha completa de nível $l_{\min} - 1$);
2. $\mathfrak{U}^{(l_{\min}-1)} \leftarrow \mathfrak{R}^{(l_{\min}-1)}$;
3. $s \leftarrow 0_N$; $\hat{\phi} \leftarrow ()$; $\hat{\alpha} \leftarrow ()$;
4. para $l = \{l_{\min}, l_{\min} + 1, \dots, l_{\max}\}$.
 5. Se $l = l_{\min}$, faça $f^{(l)} \leftarrow f$, senão $f^{(l)} \leftarrow \tilde{e}^{(l-1)}$;
 6. $\mathfrak{C}^{(l)} \leftarrow$ todas as células do nível l que estão contidas nas células de $\mathfrak{R}^{(l-1)}$ e nas quais há pontos p_i em que $|f^{(l)}(p_i)| > \epsilon_{\max}$.
 7. se $\mathfrak{C}^{(l)} = \{\}$, vá para o passo 17.
 8. Constroi a base $\tilde{\phi}^{(l)}$ que consiste dos elementos de $\phi^{(l)}$ cujas células centrais estão em $\mathfrak{C}^{(l)}$.
 9. $\tilde{\alpha}^{(l)} \leftarrow \mathcal{C}(f^{(l)}, \tilde{\phi}^{(l)})$; $\tilde{s}^{(l)} \leftarrow \sum_j \tilde{\alpha}_j \tilde{\phi}_j$.
 10. $\tilde{e}^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - \tilde{s}^{(l)}$.
 11. $(\hat{\phi}^{(l)}, \hat{\alpha}^{(l)}) \leftarrow \text{Reduz}(\tilde{\phi}^{(l)}, \tilde{\alpha}^{(l)}, \tilde{e}^{(l)}, \epsilon_{\max})$;
 12. $\hat{s}^{(l)} \leftarrow \sum_k \hat{\alpha}_k \hat{\phi}_k$.
 13. $\hat{e}^{(l)} \leftarrow f^{(l)} - \hat{s}^{(l)}$.
 14. $\hat{\phi} \leftarrow \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}^{(l)}$; $\hat{\alpha} \leftarrow \hat{\alpha} \cdot \hat{\alpha}^{(l)}$; $s \leftarrow s + \hat{s}^{(l)}$.
 15. $\mathfrak{R}^{(l)} \leftarrow$ (células do suporte de todos os elementos de $\hat{\phi}^{(l)} \cup \mathfrak{C}^{(l)}$).
 16. $\mathfrak{U}^{(l)} \leftarrow$ (células do suporte dos elementos de $\hat{\phi}^{(l)}$ cujos centros estão em $\mathfrak{R}^{(l)}$).
17. devolva $\hat{\phi}, \hat{\alpha}$.

Capítulo 11

Testes com aproximação hierárquica adaptativa

Neste capítulo apresentamos testes do nosso método de aproximação hierárquica adaptativa com pré-base tensorial uniformes parcial (algoritmo *ApHAD2*). Como no Capítulo 9, usaremos primeiramente uma grade regular de pontos de amostragem para obter comparações mais significativas e maior eficiência computacional.

Para estes testes, usamos um domínio bidimensional quadrado \mathbb{D} , ou seja, uma caixa $[0, T] \times [0, T]$ com topologia toroidal, isto é, $L_1 = L_2 = T$, fixando arbitrariamente $T = 8$. Como explicado na Seção 10.1, em cada nível a pré-base $\tilde{\phi}^{(l)}$ é um subconjunto de uma base uniforme $\phi^{(l)}$ com $2^l \times 2^l$ elementos (portanto, com passo $\zeta^{(l)} = T/2^l$ nos dois eixos). O nível inicial é $l_{\min} = 3$, e portanto base completa $\phi^{(l_{\min})}$ tem $2^3 \times 2^3 = 64$ elementos. O nível máximo é $l_{\max} = 8$, para o qual a base completa $\phi^{(l_{\max})}$ teria $2^8 \times 2^8 = 65.536$ elementos. Usamos o método dos mínimos quadrados com uma grade regular de pontos de amostragem de $2^8 \times 2^8$ pontos, ou seja, um ponto por célula no nível máximo.

O método de tratamento de anomalias (Seção 6.4) foi usado em cada nível com o intuito de obter uma boa aproximação para os detalhes escala correspondente, ignorando detalhes de escalas mais finas como se fossem anomalias.

As funções objetivo que usamos nestes testes são as mesmas do Capítulo 9, e as funções-mãe que utilizamos são os pulsos Wendland $\Phi_{3,2}^P$ e $\Phi_{5,4}^P$, os pulsos B-splines Φ_2^S , Φ_3^S , Φ_4^S e Φ_5^S , que deram resultados satisfatórios naquele capítulo. A tolerância de erro em todos os testes foi $\epsilon_{\max} = 2,5 \times 10^{-3}$. Note que em alguns casos o algoritmo não conseguiu satisfazer o critério de erro com $l_{\max} = 8$.

As Figuras 11.1 a 11.8 mostram a distribuição dos centros da base reduzida $\hat{\phi}^{(l)}$ em cada nível, para algumas combinações de função-mãe e função objetivo. Os resultados de todos estes testes estão resumidos nas Tabelas 11.1 a 11.4, na discussão final (Seção 11.1).

11.0.2 Função teste “ondinhas” - f_O

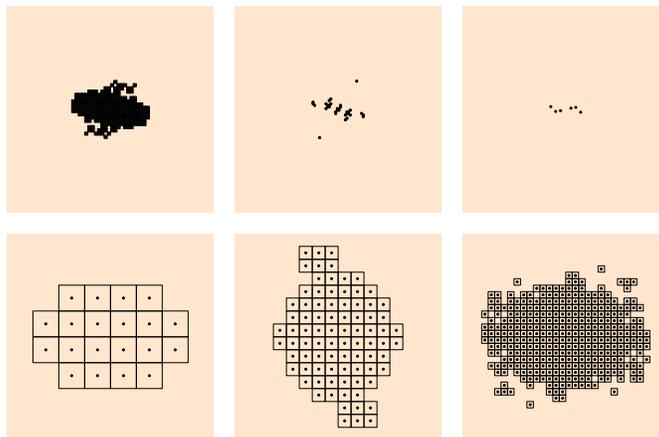


Figura 11.1: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_O com função-mãe pulso de Wendland ($\Phi_{5,4}^P$) pelo algoritmo *ApHAD2*.

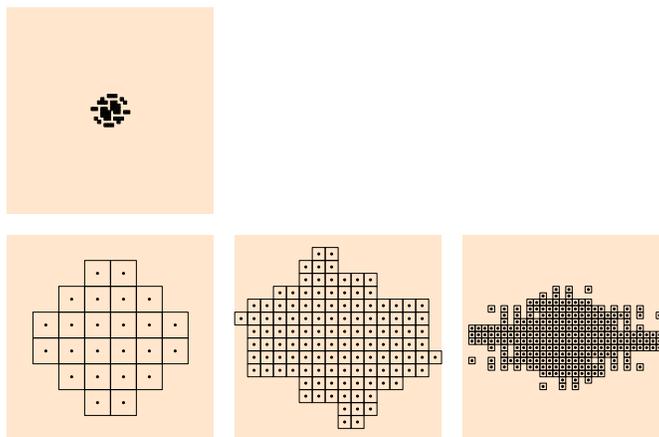


Figura 11.2: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_O com função-mãe B-spline de grau 2 (Φ_2^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

11.0.3 Função teste “cratera” - f_C

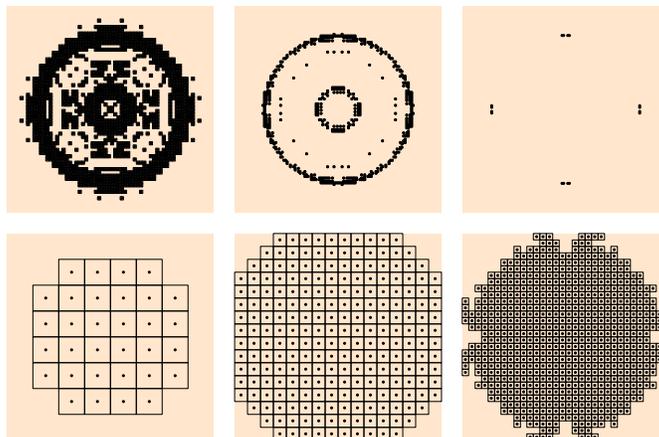


Figura 11.3: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_C com função-mãe B-*spline* de grau 2 (Φ_2^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

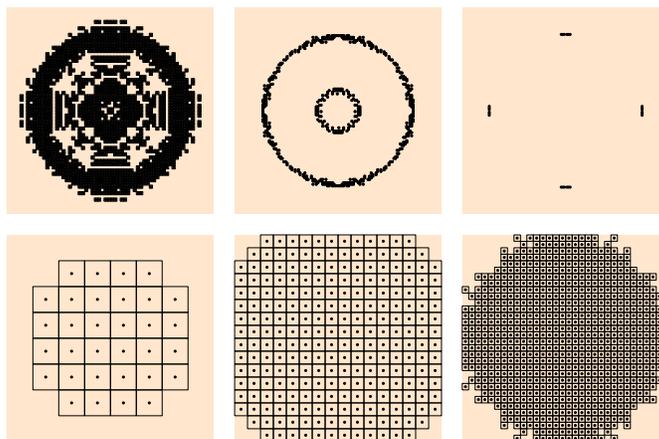


Figura 11.4: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_C com função-mãe B-*spline* de grau 4 (Φ_4^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

11.0.4 Função teste de Franke - f_F

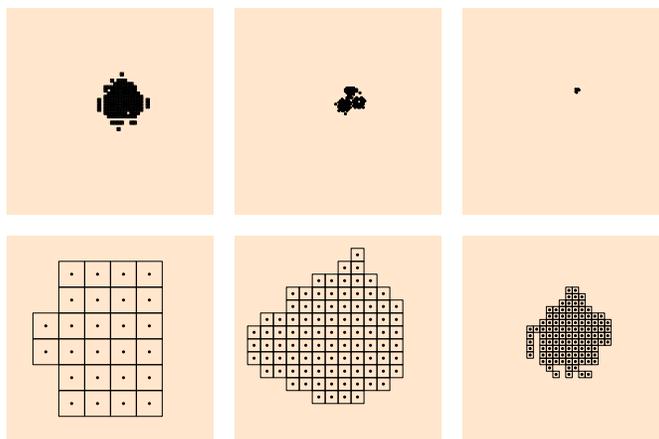


Figura 11.5: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline de grau 2 (Φ_2^S) pelo algoritmo *ApHAD2*. O nível aumenta de baixo para cima e da esquerda para direita.

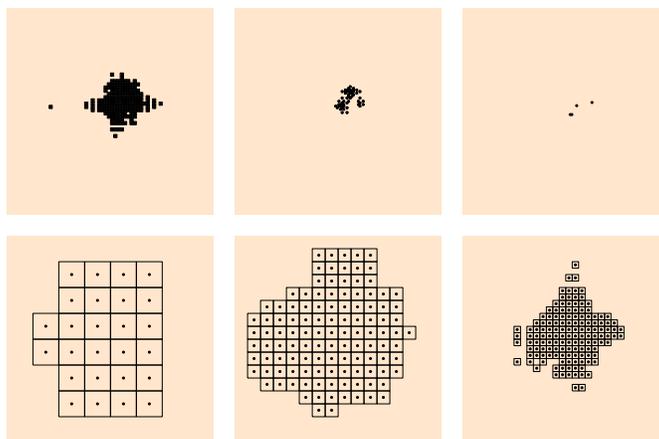


Figura 11.6: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_F com função-mãe B-spline de grau 4 (Φ_4^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

11.0.5 Função teste “galáxia” - f_G

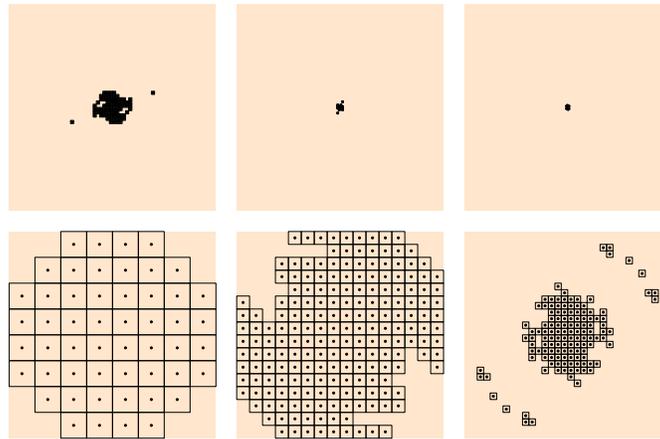


Figura 11.7: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline de grau 2 (Φ_2^S) pelo algoritmo $ApHAD2$.

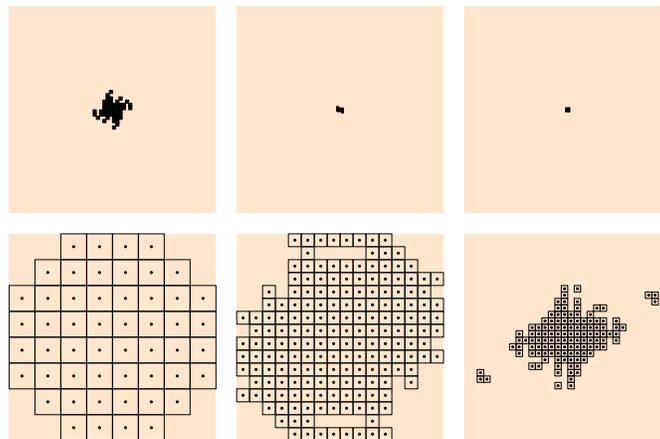


Figura 11.8: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa da função f_G com função-mãe B-spline de grau 4 (Φ_4^S) pelo algoritmo $ApHAD2$.

11.1 Discussão

As Tabelas 11.1 a 11.4 resumem os tamanhos das bases reduzidas obtidas nos testes acima.

Tabela 11.1: Tamanho $n^{(k)}$ da base final por nível, o tamanho total n^{total} e a razão $\tau = n^{\text{total}}/m^{(8)}$ para a função de teste f_O , com cada função-mãe.

Base	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	n^{total}	τ
$\Phi_{3,2}^P$	24	94	394	292	86	12	902	1,3%
$\Phi_{5,4}^P$	24	68	398	50	2	-	542	0,8%
Φ_2^S	24	112	212	296	30	6	680	1,0%
Φ_3^S	24	116	252	264	28	2	686	1,0%
Φ_4^S	24	124	252	42	-	-	442	0,7%
Φ_5^S	24	100	282	-	-	-	406	0,6%

Tabela 11.2: Tamanho $n^{(k)}$ da base final por nível, o tamanho total n^{total} e a razão $\tau = n^{\text{total}}/m^{(8)}$ para a função de teste f_C , com cada função-mãe.

Base	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	n^{total}	τ
$\Phi_{3,2}^P$	32	256	860	1972	840	88	4048	6,2%
$\Phi_{5,4}^P$	32	256	912	2044	832	136	4212	6,4%
Φ_2^S	32	232	724	1292	620	16	2916	4,4%
Φ_3^S	32	244	816	1568	576	24	3260	5,0%
Φ_4^S	32	252	848	1603	556	24	3315	5,0%
Φ_5^S	32	252	892	1720	648	52	3596	5,5%

Tabela 11.3: Tamanho $n^{(k)}$ da base final por nível, o tamanho total n^{total} e a razão $\tau = n^{\text{total}}/m^{(8)}$ para a função de teste f_F , com cada função-mãe.

Base	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	n^{total}	τ
$\Phi_{3,2}^P$	26	185	140	206	56	3	616	0,9%
$\Phi_{5,4}^P$	26	206	176	246	33	-	687	1,0%
Φ_2^S	26	95	109	133	102	6	471	0,7%
Φ_3^S	26	115	139	171	55	4	510	0,8%
Φ_4^S	26	138	148	185	26	-	523	0,8%
Φ_5^S	26	153	174	208	33	1	595	0,9%

Tabela 11.4: Tamanho $n^{(k)}$ da base final por nível, o tamanho total n^{total} e a razão $\tau = n^{\text{total}}/m^{(8)}$ para a função de teste f_G , com cada função-mãe.

Base	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	n^{total}	τ
$\Phi_{3,2}^P$	52	238	176	74	16	16	572	0,9%
$\Phi_{5,4}^P$	52	238	150	72	14	14	540	0,8%
Φ_2^S	52	196	128	78	14	12	480	0,7%
Φ_3^S	52	182	120	52	10	8	424	0,6%
Φ_4^S	52	186	108	54	12	10	422	0,6%
Φ_5^S	52	204	124	58	12	10	460	0,6%

Observe que o número final n^{total} de elementos na base reduzida é muito menor que o tamanho $m^{(8)}$ da base uniforme completa do último nível, $2^8 \times 2^8 = 65.536$. A razão $\tau = n^{\text{total}}/m^{(8)}$ é inclusive menor que a razão n/m observada nas mesmas condições com o algoritmo de redução de base monoescala (Capítulos 8 e 9). Por exemplo, para a função f_C com $\Phi = \Phi_4^S$, temos $n^{\text{total}}/m^{(8)} = 3315/65536$ (5%) enquanto que com a aproximação monoescala temos $1248/2500$ (50%). Observe que com a aproximação multinível o tamanho n^{total} da base pode ser bem menor que a fração do domínio onde a função é diferente de zero.

Nos nossos testes observamos que o método de tratamento de anomalias na aproximação de mínimos quadrados (Seção 6.4) proporciona uma redução sensível no tamanho da base final (da ordem 10% a 20%).

Capítulo 12

Testes com aproximação adaptativa em pontos irregulares

Finalmente vamos testar o algoritmo *ApHAd2* do Capítulo 10 com pontos de amostragem irregularmente distribuídos — que, lembramos, é o objetivo desta tese. Neste caso, as otimizações desenvolvidas na Seção 7.2 não se aplicam; os elementos $A_{ij} = \phi_j(p_i)$ devem ser calculados para todo elemento ϕ_j e todo ponto p_i no suporte de ϕ_j , e a matriz M precisa ser calculada pela fórmula $A^T A$.

Em todos estes testes, o domínio \mathbb{D} tem topologia toroidal, e a lista p consiste de $N = 5.000$ pontos irregularmente distribuídos no domínio \mathbb{D} como mostrado na Figura 12.1. Os valores f_i são obtidos (em cada caso) das funções f_O , f_C , f_F e f_G (Seções 9.1.1 a 9.1.4) calculadas nesses pontos. Veja as Figuras 12.2 a 12.5.

Observamos que a norma do erro de aproximação ($\|e\|_{\mathcal{E}} = \|e\|_{\infty}$) é calculada sobre os pontos p_i . O nível inicial é $l_{\min} = 4$. Em todos os testes, o erro especificado foi atingido no nível $l = 9$ ou menor.

As funções-mãe que utilizamos neste capítulo são os pulsos B-splines Φ_g^S , com $2 \leq g \leq 5$, que deram os melhores resultados no Capítulo 11. A tolerância de erro em todos os testes foi $\epsilon_{\max} = 2,5 \times 10^{-3}$.

As Figuras 12.6 a 12.9 mostram a distribuição dos centros da base reduzida $\hat{\phi}^{(l)}$ em cada nível. Os resultados de todos estes testes estão resumidos nas Tabelas 12.1 a 12.4.

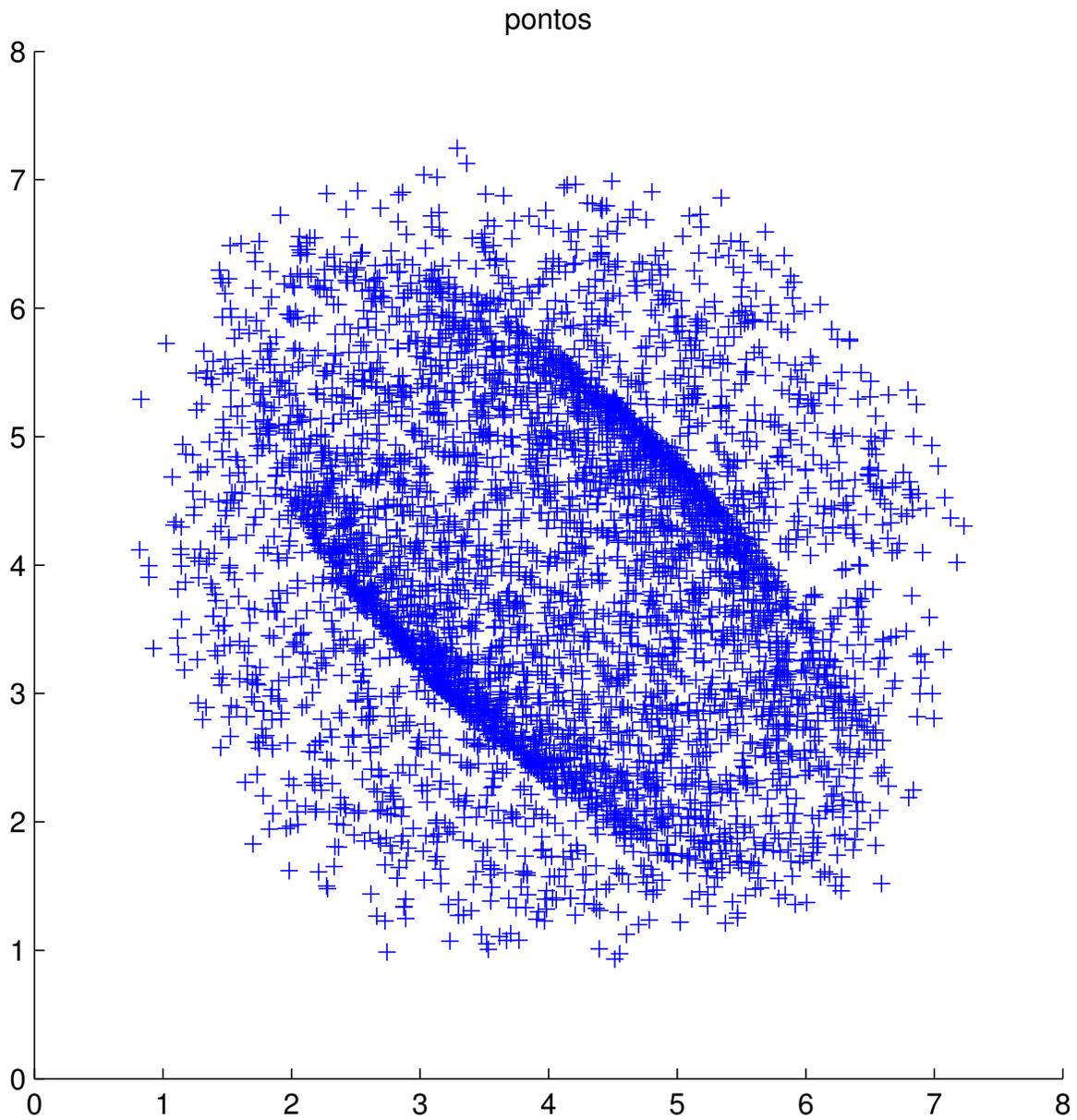


Figura 12.1: Os pontos de amostragem p_i irregularmente distribuídos, usados nos testes deste capítulo.

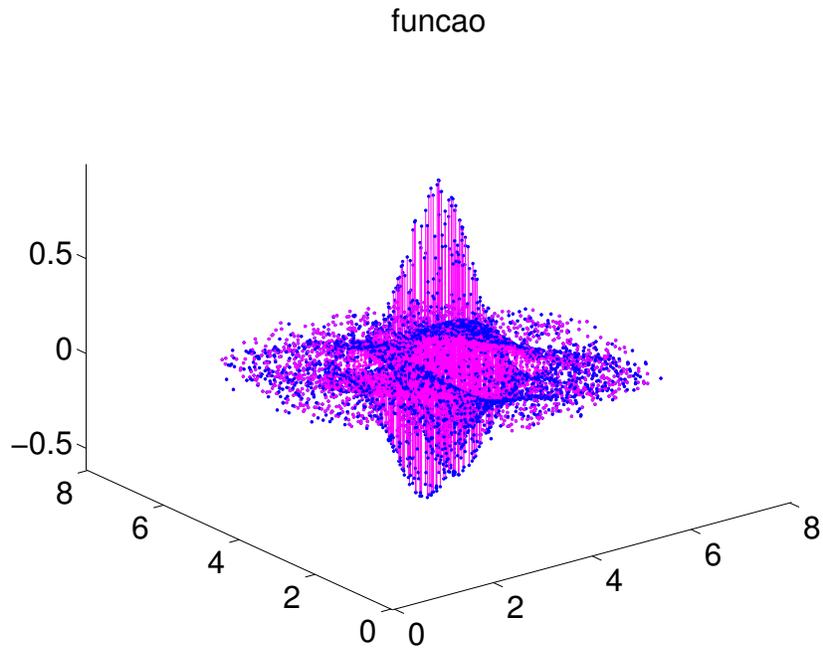


Figura 12.2: Valores dados f_i obtidos da função f_O nos pontos de amostragem p_i .

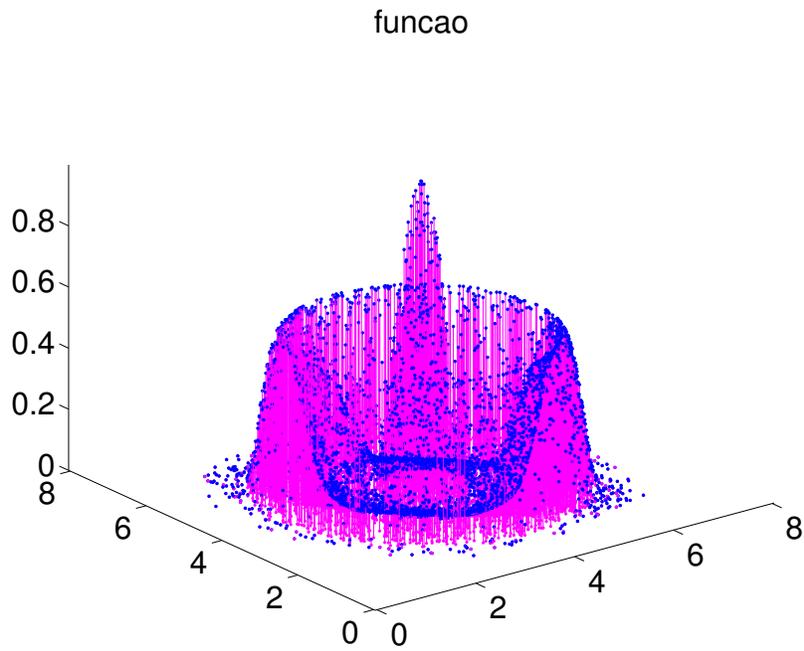


Figura 12.3: Valores dados f_i obtidos da função f_C nos pontos de amostragem p_i .

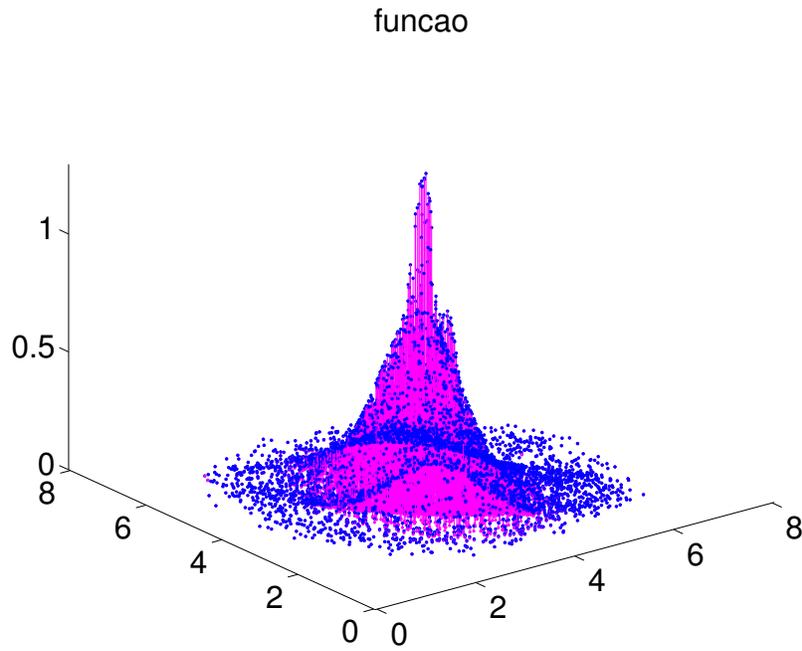


Figura 12.4: Valores dados f_i obtidos da função f_F nos pontos de amostragem p_i .

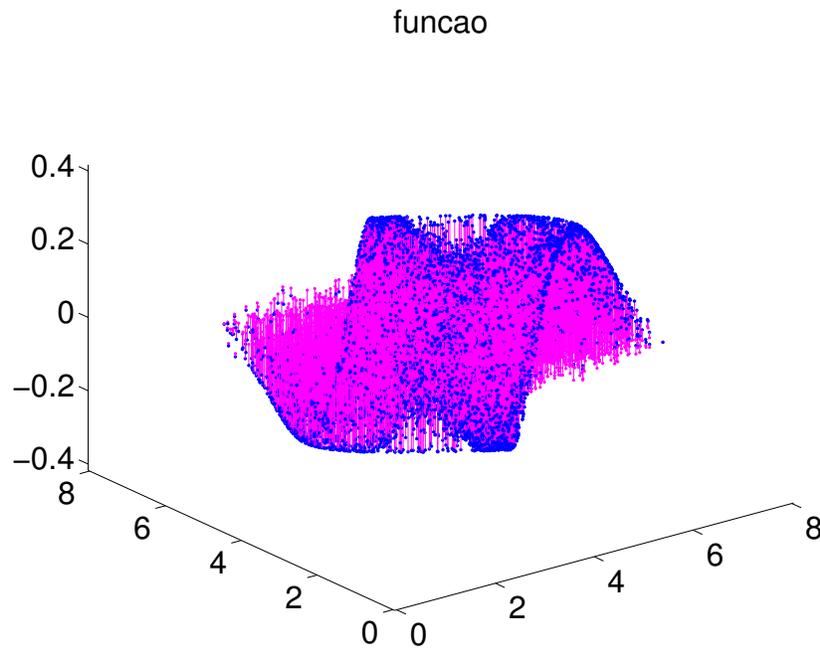


Figura 12.5: Valores dados f_i obtidos da função f_G nos pontos de amostragem p_i .

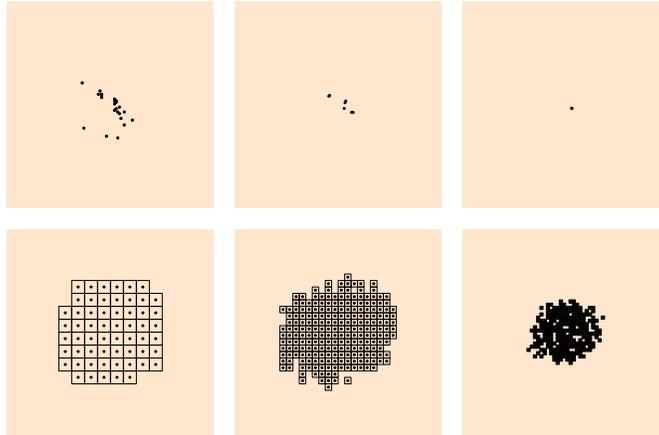


Figura 12.6: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa em pontos irregulares da função f_O com função-mãe B-spline de grau 2 (Φ_2^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

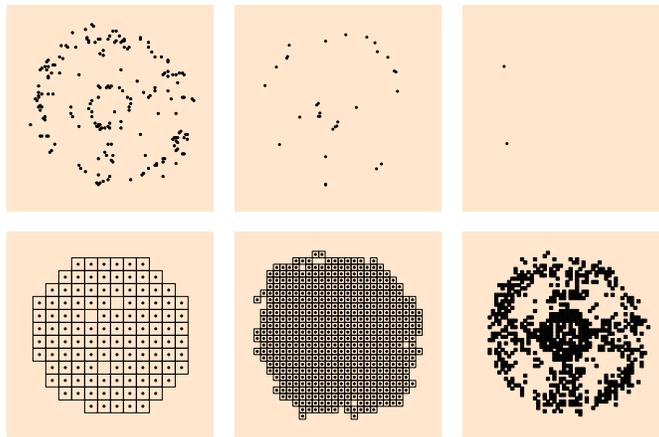


Figura 12.7: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa em pontos irregulares da função f_C com função-mãe B-spline de grau 3 (Φ_3^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

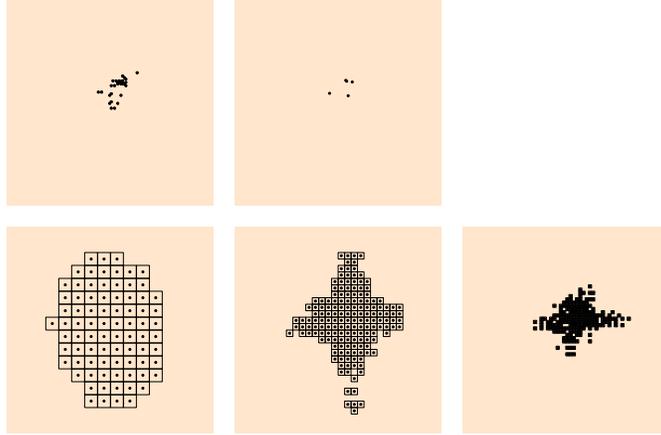


Figura 12.8: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa em pontos irregulares da função f_F com função-mãe B-spline de grau 4 (Φ_4^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

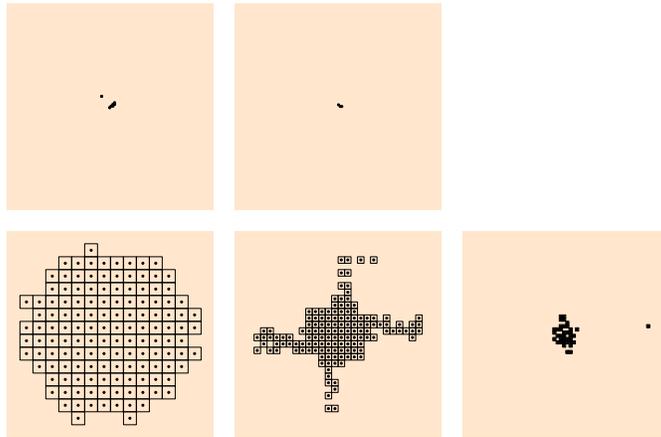


Figura 12.9: Centros dos elementos da aproximação hierárquica adaptativa em pontos irregulares da função f_G com função-mãe B-spline de grau 5 (Φ_5^S) pelo algoritmo *ApHAD2*.

12.1 Discussão

Em cada tabela, as colunas são: o número $n^{(k)}$ de elementos na base reduzida de cada nível $k \in \{4, \dots, 9\}$, o número total de elementos n^{total} na base final e o tamanho relativo $\tau = n^{\text{total}}/m^{(9)}$ da base reduzida em relação ao da pré-base.

Tabela 12.1: Resultados dos testes com a função de teste f_O , com cada função-mãe.

Base	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	$n^{(9)}$	n^{total}	τ
Φ_2^S	58	221	254	23	7	2	565	0,21%
Φ_3^S	58	231	167	19	2	-	477	0,18%
Φ_4^S	58	233	14	3	-	-	308	0,12%
Φ_5^S	58	230	-	-	-	-	288	0,11%

Tabela 12.2: Resultados dos testes com a função de teste f_C , com cada função-mãe.

Base	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	$n^{(9)}$	n^{total}	τ
Φ_2^S	115	507	624	198	28	1	1473	0,56%
Φ_3^S	115	512	739	192	31	2	1591	0,61%
Φ_4^S	115	513	635	177	30	1	1471	0,56%
Φ_5^S	115	512	691	164	36	2	1520	0,58%

Tabela 12.3: Resultados dos testes com a função de teste f_F , com cada função-mãe.

Base	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	$n^{(9)}$	n^{total}	τ
Φ_2^S	71	119	128	63	13	1	395	0,15%
Φ_3^S	76	133	170	46	10	-	435	0,17%
Φ_4^S	81	160	183	29	5	-	458	0,17%
Φ_5^S	83	187	199	22	4	-	495	0,19%

Tabela 12.4: Resultados dos testes com a função de teste f_G , com cada função-mãe.

Base	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$	$n^{(7)}$	$n^{(8)}$	$n^{(9)}$	n^{total}	τ
Φ_2^S	134	120	64	10	1	-	329	0,12%
Φ_3^S	134	108	47	7	1	-	297	0,11%
Φ_4^S	132	123	39	6	-	-	300	0,11%
Φ_5^S	137	138	38	7	3	-	323	0,11%

Como no Capítulo 11, observamos que o número de elementos da base final (n^{total}) é muito menor que o número de pontos de amostragem N , e também muito menor que o número de elementos da malha completa do nível máximo ($2^9 \times 2^9 = 262.144$). Vale notar que seria inviável alcançar esta escala de resolução com uma base monoescala (Capítulos 8 e 9), pois isso implicaria em resolver um sistema linear $2^{18} \times 2^{18}$.

Capítulo 13

Conclusões e trabalhos futuros

A principal contribuição desta tese é o algoritmo *ApAhd* do Capítulo 11 que combina as técnicas de análise multiescala *top-down*, elementos tensoriais compactos, mínimos quadrados, correção de erros anômalos, e redução da base para obter aproximações econômicas de funções que possuem detalhes localizados em várias escalas de resolução, e/ou são amostradas por pontos irregularmente distribuídos no domínio. O testes indicam que elementos polinomiais por partes proporcionam as menores representações.

Detalhamos a seguir essa e outras contribuições, capítulo por capítulo.

13.1 Aproximação com bases uniformes

Nos nossos testes com bases uniformes de várias funções-mãe (capítulo 7) determinamos os fatores de escala relativos ótimos para a funções-mãe gaussiana Φ^G ($\bar{\rho} = 1,1$) e para os pulsos de Wendland $\Phi_{3,2}^P$ ($\bar{\rho} = 3,5$) e $\Phi_{5,4}^P$ ($\bar{\rho} = 4,5$). Verificamos que a função-mãe gaussiana proporciona menor erro, mas infelizmente resulta em uma matriz de momentos bastante cheia e o número de condição é muito elevado. Isso a torna inviável para malhas relativamente pequenas (na plataforma que usamos, maiores que 50×50 elementos). Levando em conta a eficiência computacional e estabilidade, as bases uniformes derivadas dos pulsos *B-spline* Φ_g^S foram as melhores dentre as testadas.

13.2 Aproximação com bases adaptativas

Nos testes do capítulo 9 vimos que, como esperado, a função-mãe gaussiana produz bases reduzidas bem maiores que as funções-mãe de suporte mais compacto como, Φ_g^S e $\Phi_{d,c}^P$. Além disso, o tempo de execução também é muito maior. Dentre as bases testadas, os pulsos *B-spline* Φ_g^S deram melhores resultados (bases reduzidas menores) do que os pulsos de Wendland $\Phi_{d,c}^P$ para a tolerância $\epsilon_{\max} = 2,5 \times 10^{-3}$. Observamos também que para Φ_3^S , Φ_4^S e Φ_5^S , o desempenho foi praticamente equivalente.

13.3 Aproximação adaptativa com bases hierárquicas

Nos testes usando o nosso algoritmo *ApHAD2*, com uma grade de amostragem uniforme (capítulo 11), vimos que as funções-mãe B-splines Φ_4^S e Φ_5^S produziram bases reduzidas multiescala bem menores que as outras funções-mãe. Observamos também que o uso do algoritmo *ApHAD2* produz resultados em tempo muito menor, comparado ao método usado no capítulo 9. Observamos que o método de tratamento de anomalias (seção 6.4) é útil para este algoritmo.

Estas vantagens foram observadas também nos testes com dados distribuídos de forma irregular (capítulo 12). Quando a hierarquia tem que ser estendida por muitos níveis devido a detalhes localizados da função objetivo, o tempo de execução não é excessivo, uma vez que as matrizes envolvidas nos níveis maiores são de baixa ordem.

13.3.1 Aproximação adaptativa hierárquica com pontos irregulares

No Capítulo 12 verificamos que o método *ApHAD2* também é eficaz quando os pontos de amostragem não estão em uma grade regular e estão distribuídos de maneira não uniforme sobre o domínio. Nesse caso, o algoritmo *ApHAD2* usa bases menores tanto onde a função é suave quanto onde a densidade de pontos é menor. Entretanto, o custo é mais elevado devido à necessidade de calcular explicitamente a matriz de colocação.

Concluimos que o algoritmo *ApHAD2* atende ao objetivo inicial da tese.

13.4 Trabalhos futuros

Questões que poderiam ser exploradas em trabalhos futuros incluem a extensão destes testes a dimensão $d \geq 3$, e comparação da estrutura diádica em substituição a estrutura quadre no algoritmo *ApHAD2*.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao On image processing and a discrete cosine transform. IEEE Transactions on Computers C-23 (1): 90-93. 1974.
- [2] C. DE BOOR, *A practical guide to splines*. New York, Springer, (1978).
- [3] C. de Boor (1976), *Splines as linear combinations of B-splines*. Approximation Theory II, G. G. Lorentz, C. K. Chui and L. L. Schumaker eds., 1–47.
- [4] M. BOZZINI, L. LENARDUZZI, M. ROSSINI AND R. SCHABACK, *Interpolation by basis functions of different scales and shapes* Calculo Springer - Verlag 41, 77-84, 2004.
- [5] R. N. BRACEWELL, *The Hartley Transform*. Oxford University Press, New York, 1986.
- [6] M. D. BUHMANN, *Radial basis functions: Theory and Implementations* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2003.
- [7] M. D. BUHMANN, *Radial basis functions*. Acta Numerica 9, 1-38, 2000.
- [8] C. G. S. CARDOSO, *Grades diádicas adaptativas para simulação de escoamento de petróleo*. Master's thesis, IC – Unicamp, Campinas, São Paulo, Dezembro 2004.
- [9] C. G. S. CARDOSO, M. C. CUNHA, A. GOMIDE, D. J. SCHIOZER, AND J. STOLFI, *Finite elements on dyadic grids for oil reservoir simulation*. Math. Comput. Simulat., 73(1): 87–104, 2006.
- [10] C. G. S. CARDOSO, A. GOMIDE AND J. STOLFI, *Bases para elementos finitos em grades diádicas*. Métodos Computacionais em Engenharia, Lisboa, Portugal ©APMTAC (2004).
- [11] J. C. CARR, R. K. BEATSON AND B. C. MCCALLUM. *Reconstruction and Representation of 3D objects with radial basis functions*. Computer Graphics, ACM SIGGRAPH, 67-76, 2001.
- [12] D. A. CASTRO, *Multilevel approximation schemes and applications*. Master's thesis, IMECC – Unicamp, Campinas, São Paulo, Dezembro 2011.
- [13] C. K. CHUI, *Wavelets and Spline Interpolation*. Advances in Numerical Analysis 2, 1-35 (1992).

- [14] H. Q. DINCH, G. TURK AND G. SLABAUGH, *Reconstructing surfaces using anisotropic basis functions*. Computer Vision, ICCV 2001, volume 2, 2001.
- [15] M. O. DOMINGUES, S. M. GOMES, O. ROUSSEL, AND K. SCHNEIDER. *Adaptive multiresolution methods*. ESAIM Proceedings, 34:1-98, 2011.
- [16] N. B. EDGAR AND K. S. SURANA, *On the conditioning number and the selection criteria for p -version approximation functions*. Computers & Structures, 60(4), 26 june 1996, 521-530.
- [17] G. E. FASSHAUER, *Newton Iteration with Multiquadrics for the solution of Nonlinear PDEs*. Computers & Mathematics with applications, 43, 423-438, 2002.
- [18] G. E. FASSHAUER, *Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing* Advances in Computational Mathematics 11 (1999) 139–159.
- [19] H. G. FEICHTINGER, THOMAS STROHMER, *Gabor Analysis and Algorithms*. Theory and Applications - Springer, 1998.
- [20] Raphael Finkel and J.L. Bentley (1974). “Quad Trees: A Data Structure for Retrieval on Composite Keys” Acta Informatica 4 (1): 1–9.
- [21] M. S. FLOATER E A. ISKE, *Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions*. Journal of Computational and Applied Mathematics **73** 65-78 (1996).
- [22] B. FORNBERG, E. LARSSON E N. FLYER, *Stable Computations with Gaussian Radial Basis Functions in 2-D*. SIAM J. Sci. Comput., Vol. 33, No. 2, pp. 869–892, 2009.
- [23] R. FRANKE, *Scattered data interpolation: Tests of some methods*. Mathematics of Computation, 38(157), 181-200, 1982.
- [24] C. FRANKE AND R. SCHABACK, *Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions*. Applied Mathematics and Computation, 93, 73-82, 1998.
- [25] GEGORY E FASSHAWER, *Meshfree aproximation methods with matlab*. Interdisciplinary Mathematical Sciences - Vol. 6, 2007.
- [26] E. H. GEORGIOULIS, J. LEVESLEY AND F. SUBHA, *Multilevel sparse kernel-based interpolation*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Siam J. Sci. Comput. 35(2), pp. A815-A831.
- [27] G. H. GOLUB E C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press - Baltimore and London (1996).
- [28] A. GOMIDE E J. STOLFI, *Approximation error maps*. Algorithms For Approximation IV. Proceedings of the 2001 International Symposium 446-453.

- [29] C. G. S. CARDOSO, M. C. CUNHA, A. GOMIDE, D. J. SCHIOZER, E J. STOLFI , *Finite Elements on Dyadic Grids with Applications*. Mathematics and Computers in Simulation, 73, 87-104 (2006).
- [30] M. GRIEBEL, P. OSWALD, *Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems*. Adv. in Comput. Math., 4: 171–206 (1995).
- [31] S. J. HALES AND J. LEVESLEY, *Error estimates for multilevel approximation using polyharmonic splines*. Numerical Algorithms, 30 (2002), pp. 1-10.
- [32] J. H. HALTON, *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals*. Numer. Math., 2 (1960), pp. 84-90.
- [33] G. HAMMERLIN AND K. H. HOFFMANN, *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [34] R. L. HARDY, *Research results in the application of multiquadric equations to surveying and mapping problems*. Surv. Mapp., 35 (1975), pp. 321-332.
- [35] A. ISKE, *Hierarchical scattered data filtering for multilevel interpolation schemes*. Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000 - Tom Lyche and Larry L. Schumaker (eds), (2000) pp. 211-220.
- [36] A. ISKE E J. LEVESLEY, *Multilevel Scattered Data Approximation by Adaptive Domain Decomposition*. Numerical Algorithms 39: 189-198 (2005).
- [37] A. ISKE, *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*. Springer 2000.
- [38] A. ISKE, *Hierarchical scattered data filtering for multilevel interpolation schemes*. Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo, 211-220 (2000).
- [39] M. K. KAIBARA, *Análise de multiresolução para leis de conservação em malhas adaptativas*. Master's thesis, IMECC – Unicamp, Campinas, São Paulo, Março 2000.
- [40] C. LANCZOS, *A Precision Approximation of the Gamma Function*. SIAM Journal on Numerical Analysis series B (Society for Industrial and Applied Mathematics) 1: 86–96 (1964).
- [41] E. LARSSON, *A numerical study of some radial basis functions based solution methods for elliptic PDEs*. Computers & Mathematics with Applications, 46(5-6), 891-902, 2003.
- [42] S. LEE, G. WOLBERG AND S. Y. SHIN, *Scattered data interpolation with multilevel B-splines*. IEEE Transactions on visualization and computer graphics, 3(3), 228-244, 1997.
- [43] V. M. A. LEITÃO, *Utilização de funções de base radiais em problemas unidimensionais de análise estrutural*. Métodos Numéricos en Ingeniería V - J. M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor y G. Bugeda (Eds.) - SEMNI, España (2002).

- [44] J. LI AND Y. C. HON, *Domain decomposition for radial basis meshless methods*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 20(3), 450-462 May (2004).
- [45] W. R. MADYCH E S. A. NELSON, *Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions*. Approx. Theory Appl., 4, pp. 77-89 (1988).
- [46] J. MEINGUET, *Surface spline interpolation: basic theory and computational aspects*. Approximation Theory and Spline Functions, S. P. Singh, J. H. W. Burry, and B. Watson (eds.), Reidel, Dordrecht, (1984), pp. 127 - 142.
- [47] C. D. MEYER, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual*. SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) - United States of America (2000).
- [48] C. A. MICHELLI, *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*. Constr. Approx. 2: 11-22, (1986).
- [49] D. L. MILLER AND S. N. WOOD, *Using Multidimensional Scaling with Duchon Splines for Reliable finite area smoothing*. Mathematical Sciences, University of Bath, UK, 2011.
- [50] S. MÜLLER. *Adaptive multiscale schemes for conservation laws*, volume 27 of Lectures notes in computational science and engineering. Springer, Heidelberg, 2003.
- [51] F. J. NARCOWICH, R. SCHABACK AND J. D. WARD, *Multivariate interpolation and approximation*. Approximations Theory, 1-9 (1995).
- [52] A. C. NOGUEIRA JUNIOR, *Hierarchical basis functions for the p-version of the finite element*.
- [53] Y. OHTAKE, A. BELYAEV AND H. P. SEIDEL. *3D Scattered data approximation with adaptive compactly supported radial basis functions*. Graphical Models, 67(3), 150-165, 2005.
- [54] Y. OHTAKE, A. BELYAEV AND H. P. SEIDEL. *A multi-scale approach to 3D scattered data interpolation with compactly supported basis functions*. International conference on shape modeling and applications, 153-164, 2003.
- [55] D. R. PEREIRA, J. STOLFI, A. GOMIDE, *Efficient computation of global illumination for image synthesis*. Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing, 2010, Gramado - RS. SIBGRAPI, 2010.
- [56] R. PLATO. *Concise Numerical Mathematics*. American Mathematical Society, 57, 401-421, 2000.
- [57] M.J.D. POWELL, *The theory of Radial Basis Function Approximation en 1990*. In “Advances in Numerical Analysis” (W. Light, Ed.), Vol. 2, pp. 105-210, Clarendon, Oxford, 1992.
- [58] M.J.D. POWELL, *Radial basis function methods for interpolation to functions of many variables*. Report No. DAMTP, 2001/NA11, University of Cambridge.

- [59] M. J. D POWELL, *Advances in Numerical Analysis: Volume II: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions*. Now York Toronto (1992).
- [60] S. RIPPA, *An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation*. Advances in Computational Mathematics **11** 193-210 (1999).
- [61] H. Samet and R. Webber. “Storing a Collection of Polygons Using Quadtrees”. ACM Transactions on Graphics July 1985: 182-222. InfoLAB. Web. 23 March 2012.
- [62] R. SCHABACK, *Error estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation* Advances in Computational Mathematics **3** 251-264 (1995).
- [63] R. SCHABACK, Advances in Computational Mathematics **3** 251-264 (1995).
- [64] R. SCHABACK E H. WENDLAND, *Characterization and construction of radial basis functions* Multivariate Approximation and Applications, Cambridge University Press 1-24 (2002).
- [65] R. SCHABACK, *Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function*. Approximation Theory VIII, 1-8 (1995).
- [66] I. J. SCHOENBERG, *Cardinal interpolation and spline functions* J. Approximation Theory 2, 167–206 (1969).
- [67] W. SICKEL AND T. ULLRICH, *Tensor products of Sobolev-Besov spaces and applications to approximation from the hyperbolic cross*. Journal of Approximation Theory, 161(2): 748-786, (2009).
- [68] J. STOLFI E G. R. SOUZA, *Algoritmos da tese em Matlab*, disponíveis em `{\protect\T1\textbraceleft\http://www.unicamp.br/ stolfi/export/projects/apad/}`.
- [69] H. WENDLAND *Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree*. Journal of Approximation Theory **93**, 258-272 (1998).
- [70] H. WENDLAND *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*. Advances in Computational Mathematics **4**, 389-396 (1995).
- [71] Z. WU, *Compactly supported positive definite radial functions*. Advances in Computational Mathematics **4**, 283-292 (1995).

