
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Alguns Aspectos da Obra Matemática
de Joaquim Gomes de Souza**

por

Carlos Ociran Silva Nascimento

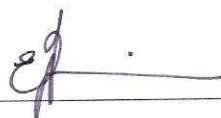
Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Alguns Aspectos da Obra Matemática de Joaquim Gomes de Souza

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Carlos Ociran Silva Nascimento** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de Dezembro de 2008.



Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Prof. Dra. Sandra Augusta Santos

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre

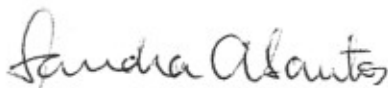
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de novembro de 2008 e aprovada

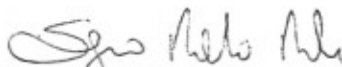
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA



Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). SÉRGIO ROBERTO NOBRE

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Mirian Cristina Alves - CRB8a/5090

Nascimento, Carlos Ociran Silva

N17a Alguns aspectos da obra matemática de Joaquim Gomes de
Souza/Carlos Ociran Silva Nascimento. – Campinas, [SP.:s.n.], 2008.

Orientador: Eduardo Sebastiani Ferreira

Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Souza, Joaquim Gomes de, 1829-1863. 2. Matemáticos - Brasil.
3. Matemática - História. 4. Funções contínuas. 5. Séries (Matemática). I.
Ferreira, Eduardo Sebastiani. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Titulo em Inglês: Some aspects of the mathematical work of Joaquim Gomes de Souza.

Palavras-chave em Inglês (Keywords): 1. Souza, Joaquim Gomes de 1819-1863. 2.

Mathematicians - Brazil. 3. Mathematics - History. 4. Functions, Continuous. 5. Series
(Mathematics).

Área de concentração: História da matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira (IMECC-Unicamp)

Profa. Dra. Sandra Augusta Santos (IMECC-Unicamp)

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre (IGCE-Unesp)

Data da defesa: 24/11/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

*“Um matemático que não é também
um pouco poeta nunca será um
matemático completo.”*

K. Weierstrass

Agradecimentos

Ao Grande Arquiteto do Universo, aos meus pais e irmãos; à esposa e companheira Ana Luci; às filhas Luciana, Elisiana e Caroline e em especial ao meu neto Celso, que veio abrilhantar e alegrar mais ainda essa família.

Aos amigos e companheiros de curso: Andre, Walleria, Remi, Heron, Gilson e Adão, com atenção ao companheiro de jornadas de estudo, o amigo João Bosco, minha gratidão pelo apoio e ajuda sempre providenciais;

Aos guerreiros Elson, Moraes, João Coelho, Felix e Danilo, que apesar das dificuldades de toda ordem, acreditam na educação como elemento transformador do homem e da sociedade. Sonham e investem alto para melhorar a educação do Maranhão e em particular na Uema.

A Ivaldo Paula, pela ajuda fundamental nas questões de informática.

Faço aqui uma deferência aos amigos José Fernandes (Fernandinho), Horácio, Wilson e Antônia, que têm apoiado minha família nas minhas ausências para estudo. A estes, minha profunda gratidão.

Agradeço especialmente aos professores, monitores e funcionários desse programa que possibilitaram essa oportunidade, especialmente à Sandra e Sueli, pelo profissionalismo e humanismo destacados.

Agradeço ao meu orientador Eduardo Sebastiani Ferreira, que tão segura e pacientemente mostrou o caminho a ser seguido.

Agradeço ainda à FAPEMA, UEMA, CEFET e UNICAMP que viabilizaram esse programa.

Agradeço e louvo a dedicação, a isenção e a forma justa com que a coordenação desse programa e seus auxiliares o têm conduzido até aqui.

A todos citados e àqueles que não mencionei, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Este trabalho é voltado para a área de História da Matemática, notadamente a do século XIX, tendo como um dos objetivos, fornecer material para o ensino de Cálculo e História da matemática, tomando como base o resgate da vida e obra do matemático maranhense Joaquim Gomes de Souza, com foco em uma de suas proposições, a saber: *Redução de Funções Descontínuas à Forma de Funções Contínuas*. Tal resultado tem relação direta com a série de Fourier, convergência de séries, continuidade, derivada, culminando com o exemplo de função contínua sem derivada de Weierstrass. Constitui-se, dessa forma, material com o fim de auxiliar pesquisadores, professores e alunos nessas disciplinas.

Abstract

This work belongs to the area of History of Mathematics, especially to the one of the nineteenth century, with the main objective of providing educational materials for the teaching of Calculus and History of the mathematics, recovering the life and work of the mathematician from Maranhão, Joaquim Gomes de Souza, with a focus on one of their propositions, namely: Reduction of discontinuous Functions to the form of Continuous Functions. This result is related has directy with the convergence of series, continuity, derivative, culminating with the example of continuou function without derivative of the Weierstrass. Constituting, this way, material to support researchers, teachers and students in this discipline.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 O Maranhão no Cenário Brasileiro	3
1.1 Panorama Histórico-Cultural do Brasil no Século XIX	6
1.2 Nasce Joaquim Gomes de Souza	9
2 A Proposição de Joaquim Gomes de Souza	15
2.1 Análise da “Mémoire” que Joaquim Gomes de Sousa Apresentou à Academia des Sciences de Paris	15
3 Joaquim Gomes de Souza por ele mesmo	26
4 A Evolução do Conceito de Função	42
4.1 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, uma breve biografia	49
4.2 A função contínua sem derivada de Weierstrass	52
Conclusões	58
Anexo	66

Lista de Figuras

4.1	Função de Weierstrass	57
4.2	Retrato de Joaquim Gomes de Souza	66
4.3	Frontispício da tese de Joaquim Gomes de Souza	67
4.4	Frontispício de Mélanges de Calcul Intégral	68
4.5	Frontispício de Anthologie Universelle	69

Introdução

Estudar Gomes de Souza é uma tarefa árdua e cheia de desafios. Há a dificuldade de fontes primárias e a inconsistência de fontes secundárias que podem levar a informações, no mínimo imprecisas, dado que, salvo excessões, o que foi escrito sobre o matemático maranhense, o ufanismo tem um peso considerável, aproximando-se perigosamente do mito. Outra dificuldade é de ordem técnica. Gomes de Souza escreveu matemática relevante e de nível considerável, como podemos perceber em sua obra póstuma *Mélanges de Calcul Intégral*.

De leitura difícil e contendo erros, tanto de impressão quanto de conteúdo. Não sabemos ao certo se cometidos pelo autor, pela gráfica que o imprimiu ou por quem preparou o material para a impressão, já que se trata de uma coleção de seus trabalhos. Num francês rebuscado e de estilo próprio, passeia pela matemática com ênfase na análise e na física matemática, propondo resultados que pretendia gerais e ao mesmo tempo alegando um rigor que não se confirma na prática.

Deparamo-nos, ao longo do trabalho, com situações que nos levaram a momentos de euforia e em outros, senão de decepção, pelo menos de tristeza, ao perceber que muito do que se afirmara como verdade irrefutável, era na realidade algo menos grandioso do que se supunha.

Para termos a real dimensão da sua obra, como também a sua importância dentro da historiografia matemática brasileira, faz-se necessário a continuação dos estudos, investigando-se principalmente os vários ramos da matemática em que trabalhou e desenvolveu resultados notáveis, a confirmação de outros já conhecidos, principalmente aqueles que julgava ter alcançado ou exaurido, os quais necessitam de confirmação e informações complementares.

No primeiro momento, tentamos situar o Maranhão no cenário brasileiro, e de passagem, o panorama histórico-cultural do Brasil com leve referência ao cenário mundial, para percebermos em que condições sócio-econômicas viveu e produziu Gomes de Souza. Em seguida, tratamos de sua vida, obedecendo sempre que possível uma ordem cronológica intercalada com fatos e situações imprescindíveis à visão e compreensão do todo.

No capítulo II, tratamos do problema que nos propomos investigar: *Redução de Funções Descontínuas à Forma de Funções Contínuas*. A motivação foi a contundente afirmação de que é sempre possível transformar funções descontínuas em funções contínuas com as condições dadas, independentemente da função $f_1(\theta)$ que entra sob o sinal de integração.

Essa afirmação nos pareceu muito forte, dada a maneira como foi apresentada, sem a necessária clareza das hipóteses, rigor e, principalmente, sem as passagens fundamentais da suposta demonstração.

No capítulo III, transpomos parte de sua autobiografia tomando como referência a obra de Bacelar Portela, que por sua vez colheu as preciosas informações no Dicionário de Inocêncio, obra a que não tivemos acesso direto.

O capítulo IV trata da evolução do conceito de função seguida pela função de Weierstrass. Um exemplo sui generis de função não elementar, contínua em todos os pontos do seu domínio, mas que surpreendentemente não possui derivada em ponto algum. Apresentamo-na como um contra-exemplo à proposição de Gomes de Souza.

Em anexo, apresentamos uma fotografia do retrato de Joaquim Gomes de Souza, exposto no Museu Histórico e Cultural de São Luís, antiga residência de Souza, bem como a transcrição de notas emitidas pela *Académie des Sciences* de Paris, além de frontispícios de algumas de suas obras. Em seguida, discutimos alguns pontos do livro *Uma história concisa da matemática no Brasil, 2008*, de Ubiratan D'Ambrósio, que dedica o item 4 a Joaquim Gomes de Souza, relatando aspectos da sua obra.

O Maranhão no Cenário Brasileiro

O Estado do Maranhão foi criado por carta régia de 13 de junho de 1621 e compreendia as capitanias do Piauí, Maranhão, Grão-Pará e Rio Negro, hoje Amazonas. Em 1751, redefinidas as estratégias de defesa e colonização, a capital passa a ser em Belém, o Estado, a se denominar Grão-Pará e Maranhão, e São Luís, a capital administrativa desde o início do século XVII, de onde se irradia o povoamento tendo como motor da economia os engenhos de açúcar.

A área mais desenvolvida abrangia o vale dos rios Munim, Itapecuru, Mearim, Pindaré e Parnaíba. No litoral - São Luís, Alcântara, Icatu, a ribeira dos rios Itapecuru, Munim, Pindaré e Mearim, fizeram a diferença, possibilitando a comunicação com a metrópole e as outras colônias.

Apesar da vastidão territorial, os colonizadores transitavam com desenvoltura. As rotas maiores eram para Portugal, atravessando o Atlântico e para Bahia e Pernambuco, pelo sertão, seguindo o leito dos rios e para a região do Amazonas, sendo esta rota para a capital do Pará a mais freqüente. As vilas e cidades até a segunda metade do século XVIII eram poucas: São Luís, Alcântara, Icatu e pequenas povoações na ribeira dos rios. A população de São Luís constava de fun-

cionários públicos, comerciantes, escravos e alforriados. Em São Luís e Alcântara, predominava o segmento social mais ligado à administração portuguesa, a maioria formada por militares.

Estima-se que a maior parte da população urbana na primeira metade do século XVIII, descendia destes militares. As mulheres, uma grande parte, descendiam das populações nativas e eram poucas as que vinham da metrópole. A miscigenação era inevitável, dada a convivência dos colonos com escravas índias, africanas e suas descendentes.

Mário M. Meireles na apresentação da obra de Henriques Leal - Pantheon Maranhense, cita o padre Antônio Vieira, famoso por seus sermões, que ao chegar ao Maranhão em janeiro de 1653, assim descrevera o Estado:

Em todo o Estado, exceto a capital, não há açougue nem ribeira, nem tenda, onde se vendessem as coisas normais para o comer ordinário. Esse assim era no interior, na capital, onde mal ou bem se encontraria sempre o com que matar a fome, o Senado da Câmara se queixava de que era tal e tanta a miséria que o geral dos moradores, e ainda os mais qualificados, andavam vestidos de pano de algodão grosso da terra, tinto de preto [20].

O Maranhão, colonizado no começo do século XVII, decorridos um século e meio depois, vivia em estado de penúria, economicamente fraco sem produzir o suficiente para alimentar com dignidade seus habitantes. O Maranhão só veio ter uma perspectiva de melhora econômica com a criação da Companhia Geral de Comércio do Grão-Pará e Maranhão que operaria durante vinte anos.

A profissão de comerciante foi regulamentada pela Coroa, que fundou em Lisboa uma escola de comércio para a diplomação de guarda-livros, instituindo um curso com duração de três anos com especialização em aritmética e escrituração mercantil por partidas dobradas.

Não havia até então uma educação formal instituída. O Maranhão teve sua primeira aula em 1811, a cargo de Francisco Justino da Cunha que, reconhecido

incompetente, foi demitido em 1820.

Somente no fim do século XVIII, o Maranhão envia o primeiro estudante para o Reino, o poeta repentista José Pereira da Silva, para Coimbra (1777). No governo de D. Fernando Antônio de Noronha (1792 – 1796), envia Raimundo Pedro da Silva e Cunha, Antônio Xavier de Lima, José Alves de Carvalho e Francisco Diogo Veles. Deveriam ser aproveitados na Academia de Marinha e na Universidade de Coimbra para o estudo das profissões de Hidráulico, Topógrafo, Médico, Cirurgião e Contador.

A educação não era uma prioridade. Os portugueses preocuparam-se somente com o enriquecimento pessoal e para alcançá-lo, promoveram a escravização dos nativos, o que gerou enormes problemas para a coroa, cuja solução foi provocar a importação do negro africano.

Esse estado de penúria se arrastou por décadas a fio. Somente no início do século XIX ocorreram as primeiras manifestações culturais.

Em 1º de junho de 1817, inaugura-se em São Luís o teatro União, que viria a se tornar teatro Artur Azevedo. Em 1821, o capitão-general Bernardo da Silveira cria a Tipografia Nacional. O primeiro periódico, *O Conciliador do Maranhão*, tem sua primeira edição em 10 de novembro do mesmo ano. Em 1822, circula o primeiro periódico científico - *A Folha Medicinal do Maranhão*. Na mesma época foi criada a primeira associação cultural - *Sociedade Patriótica, Política e Literária*.

Como se pode perceber, no Maranhão, (leia-se São Luís, a capital), que recebera o epíteto honroso de Atenas do Brasil, havia nada ou quase nada que o justificasse. O título deveu-se ao fato de as famílias abastadas mandarem seus filhos para serem educados na Europa, ou seja, uma parcela mínima da população. A Atenas do Brasil se resumia a um grupo seletivo e privilegiado que aqui chegando, ostentava a cultura adquirida na Europa. Estudavam basicamente na Universidade de Coimbra. Ainda hoje, o bom português falado e decantado, restringe-se à ilha de São Luís. A pobreza e o analfabetismo perduram no restante do estado.

1.1 Panorama Histórico-Cultural do Brasil no Século XIX

As guerras expansionistas implementadas por Napoleão, com o bloqueio continental imposto e não respeitado pela corte portuguesa, obrigam a família real portuguesa a transferir-se para o Brasil. Assim, em 1808, o Rio de Janeiro foi o palco para a instalação do novo império de D. João.

O impacto cultural foi de dimensão assombrosa. As condições de habitações não eram adequadas para os padrões exigidos pela corte. Foi necessário recriar todos os órgãos do estado português: os Ministérios do Reino, da Marinha e Ultramar, da Guerra, dos Estrangeiros e o Real Erário. Recriam-se também os órgãos da administração e da justiça. As medidas adotadas trouxeram avanços para o país. É dessa época a criação do Banco Central, instrumento do Tesouro Real, a Casa da Moeda, a Fábrica de Pólvora, o Arsenal da Marinha e o Jardim Botânico.

Como a corte gastava muito, a cobrança de mais impostos foi inevitável. Foram criados vários empregos públicos para os fidalgos que acompanhavam a fuga do rei. A vida dos colonos, no entanto, permanecia inalterada.

Criou-se também a Imprensa Régia. A Gazeta do Rio de Janeiro foi o primeiro jornal do Brasil. Na Bahia, publicou-se A Idade de Ouro do Brasil, publicação inteiramente comprometida com o poder instituído. Em contraponto, o Correio Brasiliense, dirigido por Hipólito José da Costa, liberal, opositor de D. João, teve uma periodicidade quase mensal até 1822, destacando o ponto de vista dos grandes proprietários.

Enquanto nas colônias espanholas já havia universidades, a educação no Brasil era relegada a segundo plano, ainda que D. João tenha aberto a Academia de Belas Artes, as Academias Militares, Escolas de Direito e Medicina e a Biblioteca Real. A educação era predominantemente eclesiástica.

Com a expulsão dos jesuítas (1759), a reforma do Marquês de Pombal tomou corpo. O programa pombalino criou colégios reais mantidos pelo erário, restrito à educação de colonizadores e aristocratas, e seminários destinados à formação

do clero. De 1808 a 1822 transitaram, sem êxito, 24 projetos dispendo sobre a criação de universidades.

Em 1815, as capitanias brasileiras passaram a denominar-se províncias, quando o Brasil passou à categoria de Reino Unido a Portugal e Algarves. Tratou-se de uma imposição política do Congresso de Viena para que Portugal tivesse assento nele. A província do Maranhão quando se integrou ao Império do Brasil ficou com uma área estimada em 334 809 km^2 .

A sua população total, conforme o recenseamento de Pereira do Lago, em 1821, era de 152 983, na qual mais de 50 por cento de origem africana, o número de escravos subia a 77 914. Tinha uma cidade - São Luís, a capital, com 19 611 almas, 12 vilas (Alcântara, 3 000; Caxias, 2 426; Itapecuru-Mirim - onde nasceu Gomes de Souza - 767; Tutóia, 760; São Bernardo, 650; Paço do Lumiar, 520; Guimarães, Icatu e Pastos Bons, 480 cada; Vinhais e Viana, 300, cada; e Monção, 90) - e mais 19 povoações [23].

A revista Superinteressante, na edição de número 251, abril de 2008, na reportagem de capa “O Brasil surreal que Dom João encontrou”, por Laurentino Gomes e Marcos Nogueira, dá uma visão geral de como era o Brasil. Destacamos os tópicos seguintes que chamam a atenção:

- 1 - No ano da chegada da Corte, a colônia tinha acabado de passar por uma explosão populacional. Em pouco mais de 100 anos, o número de habitantes aumentara dez vezes;
- 2 - (...) só de Portugal, entre meio milhão e oitocentos mil pessoas mudaram-se para o Brasil de 1700 a 1800;
- 3 - Fazia mais de 200 anos que o tráfico de africanos sustentava a prosperidade da economia colonial;
- 4 - A ignorância era resultado de uma política deliberada do governo português, que tinha como objetivo manter o Brasil uma jóia extrativista;

- 5 - Uma lei de 1733 proibia a abertura de estradas, para combater o contrabando de ouro e diamantes, facilitando o trabalho dos fiscais portugueses;
- 6 - São Paulo, a maior metrópole brasileira da atualidade, tinha em 1808 pouco mais de 20 mil habitantes, incluindo os escravos;
- 7 - A primeira área a prosperar nas terras recém-descobertas foi o litoral nordestino. (...) foi lá que se ergueu a primeira capital da colônia: São Salvador da Bahia de Todos os Santos;
- 8 - O transeunte devia olhar tanto para o chão quanto para o alto. Das janelas dos sobrados vinham os excrementos e lixo de toda natureza atirados à rua sem cerimônia (...) “era prática tão comum que chegou a haver uma lei obrigando as pessoas a gritar ao esvaziar o balde”, afirma Carlos Eugênio Líbano Soares, historiador da UFBA. Era um hábito herdado de Lisboa, onde, por falta de saneamento os penicos eram esvaziados diretamente à rua enquanto o morador alertava: lá vai água;
- 9 - Em um ambiente tão insalubre, adoecia-se muito. Varíola, malária, tifo, sarna, e todo tipo de moléstia eram coisa ordinária não só na Bahia, mas em todo o Brasil.

Pelo cenário acima, custa-se a acreditar que em meio a tantos fatores negativos e dificuldades de toda ordem, algo de extraordinário pudesse ter acontecido em termos de cultura e desenvolvimento.

Pois bem, como se diz que é do caos que nasce a ordem, foi da vontade de romper com esse estado de coisas que alguns brasileiros e entre eles maranhenses, imbuídos do desejo de liberdade, impulsionados pelas boas novas do velho mundo como a revolução francesa e seus princípios de igualdade, liberdade, e fraternidade, além do direito à propriedade, pela ascensão e queda de Napoleão, foram à busca de conhecimentos, uns aqui mesmo no Brasil e outros mais abastados para a Europa. Joaquim Gomes de Souza foi um deles.

1.2 Nasce Joaquim Gomes de Souza

Este relato biográfico está fortemente baseado na obra já citada de Antônio Henriques Leal. Optamos pela grafia com “Z” por ser esta a grafada em seus trabalhos científicos e em boa parte dos documentos consultados.

Em meio ao conjunto de fatores mencionados acima, nasce em 15 de fevereiro de 1829, no sítio da Conceição à margem esquerda do rio Itapecuru, Joaquim Gomes de Souza, filho do Major Inácio José de Souza e de Antônia de Brito Gomes de Souza. O nome é dado em homenagem a Joaquim Vieira da Silva e Souza (1800 – 1864)¹, influente político maranhense.

Por influência de Domingos J. G. de Magalhães, Barão de Araguaia, secretário do governo da província, os pais de Gomes de Souza mandaram-no estudar em Pernambuco em 1841 com seu irmão mais velho, José Gomes de Souza que já estudava direito em Olinda, curso que também fora determinado a fazer.

O irmão falece em 1842 e Gomes de Souza volta ao Maranhão, desta vez para a capital. Seus pais decidem transformá-lo em militar, carreira que não era de sua predileção, dada a sua compleição física inadequada. Assim partiu para o Rio de Janeiro em 1843, matriculando-se na Escola Militar, “assentando praça” de cadete no primeiro batalhão de artilharia a pé.

Não tendo aptidão para o serviço militar, e sentindo-se desconfortável na farda, escreve aos pais solicitando permissão para deixar a carreira. Estes queriam que voltasse à província, mas foram demovidos da idéia pelo parente Tiago José Salgado, que os convence a permitirem que Gomes de Souza cursasse medicina. Terminados os exames de matemática referentes ao primeiro ano, estuda latim e filosofia racional e em março de 1844, matricula-se na Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro. Diga-se, de passagem, à época não eram exigidos os exames vestibulares.

¹Foi deputado geral, presidente das províncias do Rio Grande do Norte e do Maranhão, Ministro do Supremo Tribunal de Justiça, Ministro da Marinha e da Guerra, e também Senador e Conselheiro do Império

Henriques Leal, no seu *Pantheon Maranhense*, páginas 240 e seguintes, no afã de enaltecer mais ainda as qualidades de seu amigo e conterrâneo, diz que:

(...) em um mês já tinha estudado Os Elementos de Botânica de Richard, e os de Zoologia de Milne Edwards, e depois passou-se aos de Pouillet, e entregou-se todo à Física, matéria de sua particular predileção. (...) começou a estudar consigo mesmo as mais complicadas operações de Álgebra. E não encontrando nelas dificuldades, quis prosseguir em seus estudos. Muniu-se então de todos os compêndios do curso do segundo ano da academia militar. Estudados estes, e animado por tão inesperado resultado, entrou afoito pelo Cálculo Integral e Diferencial, pela mecânica de Francoeur, pela Astronomia; e assim, quase insensivelmente e sem outro auxílio e guia que o de sua extraordinária inteligência, dentro do seu gabinete, e ao concluir o seu terceiro ano médico, já sabia tudo o quanto constituía o curso de engenharia; (...) ocupou sempre o primeiro lugar entre os mais distintos estudantes da escola de medicina, freqüentada então por tantos talentos de primor! [20].

O quadro pintado por Henriques Leal se nos apresenta com cores fortemente poéticas, a despeito da reconhecida inteligência de Gomes de Souza e da sua dedicação aos estudos. Contudo, não se pode tirar-lhe o mérito dos grandes feitos no curso de sua curta existência, mas custa acreditar que em tão pouco tempo pudesse absorver tanta e tão variada informação.

Em 1847 conclui o terceiro ano do curso de medicina e é estimulado por colegas e, em particular, pelo lente da Academia Militar, Dr. Ricardo José Gomes Jardim, inquilino do mesmo prédio na Rua da Misericórdia, onde residia Gomes de Souza a pedir o exame vago de todas as disciplinas do curso de engenharia. O pedido foi recebido com reservas e descrença pelos lentes da academia. Por fim, o seu pedido foi desprezado.

Gomes de Souza relatou o fato à D. Maria Constança Martins Brito, filha do Barão do Passeio. Esta, por sua vez, recorreu ao Senador Saturnino², que também possuía conhecimentos de matemática.

Em visita ao Senador que o inquiriu, Gomes de Souza deixou boa impressão e assim, por intervenção do Senador, conseguiu licença para fazer os exames do segundo e terceiros anos. Dr. Jardim que antes o estimulava, foi quem atribuiu uma nota r (reprovado) nos exames do terceiro ano, sendo cassada por isso a licença para continuar a empreitada.

Esse episódio não o demoveu da idéia de concluir o curso pela via rápida. Ao contrário, pareceu estimulá-lo mais ainda a estudar com afinco. Henriques Leal relata um fato que prova a determinação e empenho do matemático maranhense.

- *Vão a bom caminho as suas pretensões?*, inquiri.
- *Não tem avançado um passo sequer*, replicou-me ele.
- *Então por que mostra-se tão alegre?*
- *É que pude afinal comprar a Mecânica Celeste de Laplace, que há tempos cobiçava* [20].

Enquanto isso, D. Maria Constança insistia pela intervenção dos senadores Saturnino e Cândido Batista de Oliveira e estes com o Ministro da Guerra.³ O Senador Saturnino comunicou também o fato ao colega Senador, matemático, conselheiro e lente da Academia Militar, Pedro de Alcântara Bellegarde⁴, que também foi Ministro da Guerra de 1853 a 1855.

Após muita insistência, Gomes de Souza conseguiu licença para fazer exame das matérias que faltavam para completar o curso e tomar o grau de doutor.

²José Saturnino da Costa Pereira (1777-1852), professor da Academia Real Militar. Publicou na revista *O Patriota* um artigo de matemática avançada sobre o problema isoperimétrico do sólido de maior volume [35].

³Pode ter sido Manuel Felizardo de Souza e Melo ou Joaquim Antão Fernandes Leão, ambos no período de 1848.

⁴Gomes de Souza oferece a sua *Dissertação Sobre O Modo de Indagar Novos Astros sem Auxílio das Observações Directas* a Pedro de Alcântara Bellegarde, em *signal de estima e reconhecimento*. (Ver dedicatória em, [33].)

Consta que o imperador D. Pedro II assistiu às seções que obedeciam ao seguinte formato: em dias consecutivos, se fazia o exame de ponto e no dia seguinte o exame vago, até que no dia 10 de junho de 1848 tomou o grau de Bacharel em Ciências Matemáticas e Físicas.

A prática da defesa de tese para a obtenção do grau de doutor veio com o decreto de 9 de março de 1842. A partir de 1848 começaram a aparecer as primeiras dissertações para o doutorado em matemática. De modo geral, os trabalhos, apresentados com esse fim, são de caráter meramente expositivo [6].

A tese de Joaquim Gomes de Souza foi uma exceção. *Disertação Sobre o Modo de Indagar Novos Astros sem o Auxílio das Observações Directas*, é um trabalho original de astronomia, motivado pela recente descoberta de Netuno que fora realizada dois anos antes de acordo com os cálculos de J. C. Adams e J. J. Leverrier. Após observarem irregularidades na órbita do planeta Urano, estes dois cientistas calcularam a massa e a posição do astro, sendo confirmados os resultados após apontarem telescópios para a região do espaço de acordo com as coordenadas indicadas.

Certamente o que também contribuiu para que Gomes de Souza escrevesse o seu trabalho, foram os conhecimentos adquiridos na obra de Laplace *Mécanique Céleste*, além de estar a par dos acontecimentos científicos da época, apesar das dificuldades socioeconômicas e da distância que separa o Brasil do velho continente. O trabalho consta de três problemas que são resolvidos com a preocupação da precisão das fórmulas apresentadas:

- I - Sendo dada a perturbação de hum astro, achar-se-ha mais de hum systema de astros que as satisfaça?
- II - Se dadas as perturbações de hum planeta, He possivel achar mais de hum planeta perturbador que as satisfaça?

III - He possivel substituir a acção perturbadora de hum planeta pela de dois outros? [33].

Gomes de Souza conclui o trabalho com uma nota ao final:

A grandeza que ja tem esta these, a pressa em que estamos de a concluir nos fez tratar com pouco desenvolvimento certas questões: assim tratando de substituir dois planetas a hum não consideramos as suas perturbações mutuas; o calculo seria penoso, porem analogo ao que demos no mesmo lugar [33].

Essa tese, Gomes de Souza a defendeu aos 19 anos de idade, quatro anos após ter ingressado na Escola Militar como soldado da 5ª Cia. do 1º batalhão de Artilharia a pé, a 14 de outubro de 1848.

Pouco tempo depois, tendo vagado uma cadeira de lente-substituto na mesma academia, Gomes de Souza concorreu à vaga com os doutores Galvão e Escaragnolle, vencendo-os no concurso.

Nessa época era comum a vacância de cadeiras pelo fato de seus professores constantemente serem chamados a desempenhar outras funções tais como assumir cargos políticos no governo, dado ao fato de que eram poucos os homens cultos no país, o que se tornava um problema para a academia.

(...) Fora nomeado, em 23 de novembro de 1848, lente substituto. Também foi nomeado Capitão Honorário da Escola Militar e, em 10 de março de 1858, lente (Professor) Catedrático da primeira cadeira do quarto ano do curso Matemático e de Ciências Naturais da então Escola Central (Astronomia) [32].

Gomes de Souza não gozava de plena saúde. Os problemas começaram a se intensificar com o acúmulo das atividades. A notícia de que a saúde se agravara, alarmou seus pais, que enviaram um irmão para que o convencesse a gozar férias no Maranhão. Não se opôs, já que se passaram cinco anos desde a sua partida.

Na fazenda Conceição, onde nascera, demorou-se até julho de 1849, quando então retornou ao Rio de Janeiro.

Começava a circular no Rio de Janeiro a Revista Guanabara, publicada mensalmente, abordando temas científicos, artísticos e literários, sob a direção de Araújo Porto Alegre, Gonçalves Dias e Manuel de Macedo. Gomes de Souza, em 1850 publica dois trabalhos nessa revista:

- 1 - Resolução das equações numéricas, seguida de uma retificação e
- 2 - Exposição succinta de um método de integrar equações differenciaes parciais por integraes definidas.

Nota-se pela data, que logo chegando das “férias”, Gomes de Souza deu início aos estudos de matemática. Os artigos aparecem como fruto desse trabalho e como embriões para as memórias que mais tarde apresentaria à *Academia de Ciências*, de Paris.

Em 1852 foi nomeado membro da comissão diretora da construção e do regime interno da casa de Correção da Corte, cargo que ocupou como secretário até 1863. Nesse cargo tinha admiração e simpatia do seu presidente, Conselheiro Marquês de Abaeté, o que de alguma forma permitiu que fosse em 1854 à Europa com a missão oficial de estudar o sistema penitenciário com o objetivo de melhorar o adotado na Casa de Correção da Corte e obter informações sobre os observatórios astronômicos.

Subjacente à missão oficial, desejava manter contato com instituições científicas e seus representantes, para então apresentar as memórias que havia escrito, o que mostra uma manifesta ousadia de propósito, o que efetivamente fez. Não obteve a atenção desejada, tão pouco o reconhecimento esperado, mas não deixou de lutar por seus objetivos.

A Proposição de Joaquim Gomes de Souza

2.1 Análise da “Mémoire” que Joaquim Gomes de Sousa Apresentou à Academia des Sciences de Paris

Na sua “*Mémoire sur la détermination des fonctions inconnues que entrent sous le signe d’intégration définie*”, encaminhada à Académie des Sciences de Paris, (conforme nota 5 em anexo) em 1855, no seu primeiro extrato, ele se propõe a

“determinar a função $\varphi(x)$ que satisfaz às seguintes equações:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\varphi(x+\theta)d\theta = F(x) \quad (2.1)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta x)\varphi(\theta x)d\theta = F(x) \quad (2.2)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + x f_1(\theta)] \varphi(x + \theta) d\theta = F(x) \quad (2.3)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + x f_1(\theta)] \varphi(x\theta) d\theta = F(x) \quad (2.4)$$

onde $f(\theta)$ e $f_1(\theta)$ são funções quaisquer de θ ; $F(x)$ uma função também qualquer de x , dada como as anteriores; α e β constantes, tomadas à vontade, e independentes, portanto, de x e θ ” [34].

O autor afirma que as equações (2.1) e (2.2) são casos particulares das equações que aparecem em um artigo de Liouville no Journal de l’Ecole Polytechnique, no caderno 21. Gomes de Souza comenta, também, nesta “mémoire” sobre a importância destas equações na Física-matemática e apresenta métodos para resolvê-las.

“Daremos vários métodos para resolver as equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) e outras do mesmo gênero que aparecem nessa memória. Alguns dos métodos são apoiados sobre integrais definidas, outros sobre séries; mas, como os primeiros são gerais e se aplicam em todos os casos, quaisquer que sejam as funções $f(\theta)$ e $f_1(\theta)$, etc., as soluções em séries serão sempre restritas ao caso onde estas séries sejam convergentes. Como nesses problemas se encontram sempre funções gerais, $f(\theta)$ e $f_1(\theta)$, etc., que podem assumir todas as formas possíveis, as séries serão convergentes ou divergentes dependendo destas funções. Isso posto, em cada caso particular em que a forma das funções, $f(\theta)$ e $f_1(\theta)$, etc., é dada, examinaremos se as séries serão convergentes ou não. No primeiro caso faremos uso deste fato, no último devemos rejeitar tais séries e ter, então, de recorrer a soluções um pouco mais simples dadas pelas integrais definidas. Esta observação que eu faço aqui, de uma vez por todas, devemos sempre lembrar sem que eu tenha que repetir a todo momento no que se segue” [34].

Ele inicia, então, a resolução das equações e se ocupa de início da primeira (2.1). Sua primeira suposição é que $F(x)$ seja escrita como uma série exponencial:

$$F(x) = A_0 + A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + etc.$$

Supondo que $\varphi(x)$ seja também uma série exponencial:

$$\varphi(x) = B_0 + B_1 e^{m_1 x} + B_2 e^{m_2 x} + etc.,$$

e apresenta a solução para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta} + \frac{A_1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_1 \theta} f(\theta) d\theta} e^{m_1 x} + \frac{A_2}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_2 \theta} f(\theta) d\theta} e^{m_2 x} + etc.,$$

Afirma que os cálculos são muito simples, não sendo necessário desenvolvê-los, sem se preocupar com as condições para que isso aconteça.

Na página 167 do “Mélange”, Souzinha usa de outro artifício matemático quando mostra que:

“sempre podemos escrever uma função qualquer $F(x)$, com $F(x) = \int_a^b e^{-hwx} F_1(w) dw$, onde as constantes a , b e h e a função $F_1(w)$ são determinadas pela $F(x)$.”

Escreveu ele,

se $F_1(w)$ se exprime com a ajuda de uma integral definida, podemos resolver prontamente, mas há muitos casos em que essa função se escreve por caracteres simples, ou, o que vem dar na mesma, de a transformação anterior poder se executada com a ajuda de uma só integral definida.

Com esse resultado, então, enuncia o seguinte teorema na página 169.

Teorema 2.1 (Teorema I). *Se temos a equação $\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \varphi(x + \theta) d\theta = F(x)$, onde $f(x)$, $F(x)$ são duas funções quaisquer de x ; α e β duas constantes finititas ou infinitas, reais ou imaginárias, e se fazemos $F(x) = \int_a^b e^{-hwx} F_1(w) dw$, é sempre possível satisfazer a primeira equação tomando por $\varphi(x)$ a função $\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-hwx} F_1(w)}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta w} f(\theta) d\theta} dw$.*

A seguir, na página 173, o autor enuncia um segundo teorema:

Teorema 2.2 (Teorema III).¹ *Se temos a equação $\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\varphi(x+\theta)d\theta = F(x)$, onde $f(x)$, $F(x)$ são funções quaisquer de x ; α e β , quantidades independentes de x e θ ; e se fizermos:*

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)e^{hm\theta}d\theta} = \int_{\gamma}^{\delta} f_1(w)e^{hmw}dw,$$

podemos sempre satisfazer a primeira equação tomando $\varphi(x)$ a função

$$\varphi(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f_1(w)F(x+w)dw.$$

O autor não faz nos seus escritos nenhuma restrição ao denominador da fração, nem em que domínio estava considerando x , θ e w . Podemos observar que a construção da $f_1(w)$ é, para ele, garantida pelo que foi exposto acima. Souzinha reconhece que seus processos anteriores não são simples, escrevendo:

O primeiro método, que demos para resolver a primeira equação exigia o desenvolvimento de uma função qualquer em série exponencial, pode apresentar alguma dificuldade quando não queremos nos servir dos métodos ou das fórmulas de Fourier. O segundo método exigia a redução de uma função qualquer à fórmula (que aparece no Teorema I), o que não conduz sempre a cálculos muito simples. Por essas razões, eu vou dar um terceiro que em relação à simplicidade, não deixa nada a desejar [34].

Sua terceira tentativa de resolver a igualdade (2.1), parte do desenvolvimento em série de Taylor da função procurada $\varphi(x+\theta)$. Faz

$$\frac{1}{n!} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\theta^n d\theta = f_1(n)$$

e obtém a igualdade: $\varphi(x) = A_0F(x) + A_1F'(x) + A_2F''(x) + etc.$.

¹O Teorema II não aparece no texto.

Esta igualdade pode ser obtida, sob certas hipóteses, substituindo-se a série de Taylor para $\varphi(x + \theta)$ na igualdade (2.1), derivando-se esta relação infinitas vezes, multiplicando-se cada equação pelo coeficiente $f_1(n)$ conveniente e rearranjando os termos.

Isso foi feito sem supor ser possível o desenvolvimento em série de Taylor da função $\varphi(x + \theta)$, mesmo sem admitir que a $F(x)$ tenha derivada de qualquer ordem e que os valores de $f_1(n)$ são não nulos.

No segundo item dessa “mémoire”, o autor tenta resolver alguns impasses de suas soluções. O primeiro a ser abordado por ele é a redução de uma função qualquer à forma $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta x} f_1(\theta) d\theta$, onde α , β e h são constantes e $f_1(\theta)$ uma função de θ dependente da natureza da função $f(x)$. Na página 199, Souza escreve que se $F(x)$ pode ser escrita como uma integral definida como no Teorema I, a questão é resolvida imediatamente. Continua ele:

Se isso não é possível, fazemos

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_n(x)$$

e procuramos determinar as funções $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc., de sorte que satisfaçam as condições precedentes das equações do Teorema I de mesma ordem ou de ordem diferente.

Façamos a mesma coisa para a $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots + \varphi_n(x)$$

Cada uma das funções $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., sendo determinadas pelo que precede, a função $\varphi(x)$ o será igualmente.

Ele dá alguns exemplos para a primeira igualdade:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + x f_1(\theta)] \varphi(x + \theta) d\theta = F(x).$$

Se tivermos

$$F(x) = F_1(1)e^{mx} + F_1(2)e^{2mx} + F_1(3)e^{3mx} + etc.,$$

os valores correspondentes de $\varphi(x)$ se apresentam pelo que foi exposto por:

$$\varphi(x) = \frac{f_1(1)e^{mx}}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{mx} f(\theta) d\theta} + \frac{f_1(2)e^{2mx}}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{2m\theta} f(\theta) d\theta} + \frac{f_1(3)e^{3mx}}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{3m\theta} f(\theta) d\theta} + etc.,$$

Podemos mesmo somar as outras seqüências que se encontram quando a função $\varphi(x)$ for dada por uma série da forma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + etc.,$$

onde $f_n(x)$ é uma função qualquer de n e de x .

Tomando, então $f(n) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$, é desnecessário observar que nas fórmulas precedentes, $f(n)$, que representa o termo genérico, não é uma função qualquer, mas deve satisfazer a diferentes condições, as quais verificam as fórmulas que entraram na construção: ainda mais, que a mesma função torne convergente a série acima, que queremos somar [34].

Continuando o autor dá suas soluções para as outras equações: (2.2), (2.3) e (2.4); usando processos análogos aos usados na solução da equação (2.1).

Finalmente encontramos nas páginas 203 e 204 a “*Mémoire sur la Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d’integration définie*”, que tem como um dos seus sub-títulos: “*Réduction des fonctions discontinues à la forme des fonctions continues.*” Esse é o quarto extrato de sua “Mémoire” principal.

Vamos traduzir o texto completo, por não ser muito extenso e mais ainda por ser onde vamos apresentar os contra-exemplos das afirmações do autor:

Para que possamos aplicar os métodos precedentes à soma da seqüência $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) \dots$, é necessário que seu termo geral seja uma função contínua, ou então uma função tendo **a forma de uma função contínua**. (grifo nosso). Ora, há quase sempre casos em que isso não acontece e a função contem na expressão dos seus termos, formas tais como: $1+2+3+\dots+n+\dots$, ou $1.2.3 \dots n \dots$.

Já mostramos em alguns casos particulares como podemos reduzir à forma contínua uma função descontínua (*este é o caso do Teorema I, quando usado para expressar a fração, onde denominador é uma integral definida por outra integral definida, através de uma função $f_1(w)$*), mas acreditamos que podemos fazer para uma função qualquer. (*é nessa afirmação que fomos buscar nossos contra-exemplos*). Vejamos, em todo caso, como podemos fazer:
Geralmente essas funções são da forma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x);$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x).$$

Ocupemo-nos do primeiro caso e para reduzi-la à forma contínua, designamos tal soma por y_n . Deduzimos facilmente que

$$y_{n+1} = y_n + f(n+1).$$

Olhando para $f(n+1)$ como uma função contínua de x , (*o autor coloca de n , que deve ser um erro*), colocamos na forma

$$f(x+1) = \int_a^b e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta$$

(*aqui também aparece como exponencial $e^{hn\theta}$ que também deve ser um erro de escrita, pois as funções $f(n)$ são funções de x*). É evidente que devemos tomar

$$y_n = \int_a^b \frac{e^{xn\theta}}{e^{x\theta} - 1} f_1(\theta) d\theta.$$

Quando se trata do produto de funções, $z_{n+1} = f(n)z_n$, tomando o logaritmo e fazendo $\ln(z_n) = y_n$, temos

$$y_{n+1} = y_n + \ln(f(n+1)),$$

e essa equação tem a forma da equação anterior, o que nos dá a seqüência dos y_n e, portanto dos z_n na forma contínua.

Como as equações estudadas por Souzinha são de integrais definidas, então, se a descontinuidade for por partes de $\varphi(x)$, com descontinuidade por saltos e integrável nos intervalos onde é contínua, o problema tem solução. A busca de contra-exemplos deve aparecer quando a função $\varphi(x)$ for descontínua num intervalo interior ao intervalo de integração.

Desenvolvemos a seguir contra-exemplos simples para a afirmação de Souzinha. Incluimos, também, a clássica função de Weierstrass em nossa análise.

Consideremos a equação

$$f(x+1) = \int_a^b e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta \quad (2.5)$$

Supondo $a \rightarrow 0$ e $b \rightarrow \infty$, com $f_1(\theta) = e^{-s\theta}$, $s > 0$, temos

$$f(x+1) = \int_0^\infty e^{xn\theta} e^{-s\theta} d\theta \quad (2.6)$$

Ora, $\int_0^\infty e^{-s\theta} e^{xn\theta} d\theta$ é a transformada de Laplace da função $e^{xn\theta}$, ou seja

$$\int_0^\infty e^{-s\theta} e^{xn\theta} d\theta = \int_0^\infty e^{-(s-xn)\theta} d\theta = \left(\frac{-1}{s-xn} \right) e^{-(s-xn)\theta} \Big|_0^\infty \quad (2.7)$$

Logo,

$$\int_0^\infty e^{-s\theta} e^{xn\theta} d\theta = \left(\frac{-1}{s-xn} \right) [0 - 1] = \frac{1}{s-xn}. \quad (2.8)$$

Portanto,

$$f(x+1) = F(s) \Rightarrow f(x+1) = \frac{1}{s-xn}$$

que é descontínua para $s = xn$.

Vamos agora considerar conhecida a função interna que entra sob o sinal de integração, $f_1(\theta)$, e verificar, sendo possível resolver a integral, se a função resultante é contínua.

Tomemos, por exemplo, $f_1(\theta) = \cos n\theta$. Resolvendo por partes a integral, temos

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = ? \quad (2.9)$$

fazendo $u = e^{xn\theta} \Rightarrow du = xne^{xn\theta} d\theta$; $dv = \cos n\theta d\theta \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin n\theta$.

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = e^{xn\theta} \frac{1}{n} \sin n\theta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{n} \sin n\theta (xn) e^{xn\theta} d\theta \quad (2.10)$$

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = e^{xn\theta} \frac{1}{n} \sin n\theta \Big|_a^b - x \int_a^b e^{xn\theta} \sin n\theta d\theta \quad (2.11)$$

Vamos agora resolver $\int_a^b e^{xn\theta} \sin n\theta d\theta$

fazendo $u_1 = e^{xn\theta} \Rightarrow du_1 = xne^{xn\theta} d\theta$; $dv = \sin n\theta d\theta \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos n\theta$.

$$\int_a^b e^{xn\theta} \sin n\theta d\theta = -e^{xn\theta} \frac{1}{n} \cos n\theta \Big|_a^b - \int_a^b \left[-\frac{1}{n} \cos n\theta \right] (xn) e^{xn\theta} d\theta \quad (2.12)$$

$$\int_a^b e^{xn\theta} \sin n\theta d\theta = -e^{xn\theta} \frac{1}{n} \cos n\theta \Big|_a^b + x \int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.11), temos:

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = e^{xn\theta} \frac{1}{n} \sin n\theta \Big|_a^b - x \left[-e^{xn\theta} \frac{1}{n} \cos n\theta \Big|_a^b + x \int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta \right] \quad (2.14)$$

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = \frac{e^{xn\theta}}{n} [\sin n\theta + x \cos n\theta] \Big|_a^b - x^2 \int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta \quad (2.15)$$

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta (1 + x^2) = \frac{e^{xn\theta}}{n} [\sin n\theta + x \cos n\theta] \Big|_a^b \quad (2.16)$$

$$\int_a^b e^{xn\theta} \cos n\theta d\theta = \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \frac{e^{xn\theta}}{n} [\sin n\theta + x \cos n\theta] \Big|_a^b \quad (2.17)$$

O segundo membro da equação é uma sequência de funções, cujos termos são funções contínuas em x , entretanto, percebe-se que se $n \rightarrow \infty$ os seus termos crescem ilimitadamente, não convergindo, portanto.

Consideremos agora a função de Weierstrass $f : R \rightarrow R$, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad (2.18)$$

onde $0 < b < 1$, e a é um inteiro ímpar tal que

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \quad (2.19)$$

Observamos que temos uma família de funções para cada a e b tomados.

É imediato também que a função $f_n : R \rightarrow R$ com $n \in N$ dada por

$$f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x) \quad (2.20)$$

é contínua para todo $x \in R$. Temos ainda que

$$|b^n \cos(a^n \pi x)| = |b^n| |\cos(a^n \pi x)| \leq b^n \quad (2.21)$$

Como a série geométrica $\sum_0^{\infty} b^n$ é convergente para $0 < b < 1$, segue pelo teste M^2 de Weierstrass, que a função dada em (2.18) está bem definida e é contínua em todo $x \in R$.

Joaquim Gomes de Souza afirma que para todo $f_1(\theta)$,

$$f(x+1) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta \quad (2.22)$$

é contínua. (*Trocamos os extremos do sinal de integral para não confundir com o a e o b da função de Weierstrass*).

Consideremos, então, a igualdade

$$b^n \cos(a^n \pi x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta \quad (2.23)$$

A função do primeiro membro sabemos ser contínua para todo $x \in R$.

²Suponhamos que $\{f_n\}$ uma sucessão de funções definidas em E e tais que $|f_n(x)| \leq M_n$ $x \in E$, $E = \{1, 2, 3, \dots\}$. Então $\sum f_n$ converge uniformemente em E se $\sum M_n$ converge [31]

Portanto, para que a igualdade se verifique, existe uma $f_1(\theta)$ qua a satisfaça para todo $x \in R$.

Aplicando o somatório dos dois lados da equação, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta \quad (2.24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} e^{xn\theta} f_1(\theta) d\theta \quad (2.25)$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{xn\theta} = \frac{1}{1 - e^{x\theta}}, \text{ com } |e^{x\theta}| < 1 \quad (2.26)$$

Tem-se

$$x\theta < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0, & \theta > 0 \\ \text{ou} \\ x > 0, & \theta < 0 \end{cases}$$

Desse modo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) = \int_a^b \frac{1}{1 - e^{x\theta}} f_1(\theta) d\theta \quad (2.27)$$

Ou seja

$$f(x) = \int_a^b \frac{1}{1 - e^{x\theta}} f_1(\theta) d\theta. \quad (2.28)$$

Ora, se tomarmos $f_1(\theta) \equiv 1$, $\alpha = 0$, e $\beta = 1$, $\int_0^1 \frac{1}{1 - e^{x\theta}} d\theta$ não converge.

Como podemos perceber, a proposição de Gomes de Souza não é válida para todo $f_1(\theta)$, como havia suposto.

Joaquim Gomes de Souza por ele mesmo

No dicionário de Inocêncio¹, encontra-se uma parte da autobiografia de Joaquim Gomes de Souza, transcrita para o livro *Gomes de Souza e Sua Obra, de Bacelar Portela (1975)*. Nosso propósito aqui, ao reproduzir fragmentos tal como na obra citada acima, é manter fielmente o que Souzinha escreveu, naturalmente dando credibilidade ao documento citado, mas comentando à luz do desenvolvimento da matemática sem deixar de considerar o homem e sua obra em seu tempo.

Nesse fragmento, percebe-se claramente o seu projeto ambicioso de vida e o forte propósito de tornar-se um matemático de renome, pena é que não houve tempo para executá-lo.

Resta-nos especular se teria conseguido ou não, como desejava e quais objetivos

¹O Dicionário Bibliográfico Português, da autoria de Inocêncio Francisco da Silva mas continuado por Brito Aranha, seu testamentário, que lhe acrescentou vários volumes, é uma obra de referência sobre as obras publicadas em Portugal até finais do século XIX e os seus autores. É uma obra monumental, muitas vezes referida apenas por Dicionário de Inocêncio, constituída por 23 volumes, complementados por um Guia Bibliográfico de Ernesto Soares e um Aditamento de Martinho da Fonseca [39].

conseguiu realizar em sua curta existência.

Começa por anunciar uma grande obra abrangendo vários itens e assuntos, com pretensões generalísticas, primazia dos resultados, correções de trabalhos precedentes, alegando rigor e indicações para aplicações. Iniciando na página 73 e seguintes, encontramos:

Coleção de Memórias de Análise e de Física Matemática. Leipzig, na tipografia Brockhaus (1857 – 58) 8º max, de mais de 350 páginas² onde se incluem vários trabalhos, assim descritos:

- I - Memória sobre métodos gerais de integração, 69 páginas;
- II - Adição à memória sobre métodos gerais de integração, 13 páginas;
- III - Sobre a determinação das constantes que, nos problemas de Física Matemática, entram nas integrais das equações diferenciais parciais, em função do estado inicial do sistema, 4 páginas;
- IV - Demonstração de alguns teoremas gerais para a comparação de novas funções transcendentais, 8 páginas;
- V - Memória sobre um teorema de cálculo integral e suas aplicações à solução de problemas da física matemática, 70 páginas;
- VI - Memória sobre a determinação das funções desconhecidas que entram sob o sinal de integração definida, 64 páginas;
- VIII - Memória sobre a teoria do som;
- IX - Memória sobre a propagação do movimento nos meios elásticos, compreendendo o movimento dos meios cristalóides e teoria da luz;
- X - Memória sobre a vibração nos meios elásticos;

²Não podemos afirmar a existência da obra citada. Na nossa pesquisa não encontramos indícios da sua existência física. Acreditamos se tratar de mais um projeto de Gomes de Souza que não fora realizado.

-
- XI - Memória sobre resoluções algébricas ou transcendentais por integrais definidas;
 - XII - Filosofia geral das Matemáticas. Unificação dos métodos analíticos;
 - XIII - Sobre o cálculo dos resíduos;
 - XIV - Memória sobre aplicações da Análise à Física Matemática com aplicações a muitas questões gerais.

I- Memória sobre métodos gerais de integração, 69 páginas. Nessa memória reduzo o problema geral de integração à determinação da função $\varphi(x)$ entrando sob o característico de integração definida na equação: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta) \varphi(x, \theta) d\theta$ que resolvo de diversas maneiras me apoiando em séries, cuja convergência não é demonstrada ou não pode existir de uma maneira geral, mas que elimino depois dos cálculos, demonstrando que os resultados devem ser independentes das séries empregadas, e por consequência, corretos. Resolvo a mesma equação ou problema mediante integrais definidas e sem passar por séries.

O problema acima escrito aplica-se propriamente à integração das equações lineares, de qualquer ordem, a duas variáveis; trato depois de duas questões análogas: uma compreende equações de mais de duas variáveis, porém lineares, outra aplicável às equações não lineares. Deste modo abranjo o cálculo todo. Como questões incidentes, dou algumas fórmulas somatórias; a demonstração de alguns teoremas gerais conhecidos da análise, como o de Burman (a propósito do uso das séries convergentes) e a soma da série de Loyravy (já dadas por outros geométricos).

Nesse primeiro item, observamos que Gomes de Souza confessa o uso de séries sem se preocupar com a convergência, o que no mínimo é temerário, pois, como sabemos o estudo das séries, particularmente das séries infinitas, é um terreno cheio de armadilhas em que muitos matemáticos andaram com extrema cautela

e outros não menos importantes evitaram. Newton e Leibniz já achavam que se devia interrogar sobre a convergência das séries infinitas, mas não possuíam critérios para isso, excetuando o teste de Leibniz para séries alternadas.

As séries fazem parte de uma ambiente escorregadio e traiçoeiro. Senão vejamos alguns casos que valem registro: Guido Grandi (1671 – 1742), discípulo de Saccheri (1667 – 1733), em correspondência com Leibniz, indagava sobre a questão de saber se é possível ou não tomar como sendo $\frac{1}{2}$ a soma da série infinita alternada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$. Esse valor é sugerido não só como média aritmética dos dois valores das somas parciais dos n primeiros termos, mas também como valor quando $x = 1$ da função geradora $\frac{1}{1+x}$ de que se obtém a série $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ por divisão.

Essa série causou muito embaraço aos matemáticos dos séculos *XVII* e *XVIII* por terem pouca compreensão das séries infinitas. Não raro aplicavam a essas séries operações válidas para séries finitas, mas aplicáveis para séries infinitas somente sob certas restrições, como podemos perceber nos exemplos seguintes:

(Exemplo - 1) Para o agrupamento

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \quad S = 0;$$

(Exemplo - 2) Para o agrupamento

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \quad S = 1;$$

(Exemplo - 3) Se denotarmos $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

e fazendo o seguinte agrupamento $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$, temos: $S = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$;

(Exemplo - 4) $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ se colocamos x em evidência como segue, temos:

$$S = 1 + x \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)}_S \Rightarrow S = 1 + Sx \Rightarrow S(1-x) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-x}$$

Ora, sabemos que a última igualdade acima só é válida para $|x| < 1$.

De outro modo chegaríamos a absurdos, como por exemplo: Para $x = 2$, $S = -1$.

Euler, cujas pesquisas sobre séries levaram à criação da teoria das integrais in-

definidas como desenvolvimento das chamadas integrais eulerianas, alertava os seus leitores quanto ao uso de séries divergentes, mas ele próprio não era cuidadoso nesse sentido.

Segundo Cajori [9], todo escrito em que Euler alerta sobre séries divergentes, contém a prova de que

$$\cdots \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots = 0$$

Como segue:

$$\begin{aligned} \cdots n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 \cdots &= \frac{n}{1-n} \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots &= \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

Somava as duas parcelas e exibia o resultado.

Cauchy (1789 – 1857) foi o primeiro a definir por completo as idéias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas. Este trabalho foi feito em conjunto com o desenvolvimento de uma análise rigorosa do cálculo. Também foi o primeiro a desenvolver uma teoria sistemática para números complexos e a transformada de Fourier para equações diferenciais. Contudo, ambos Cauchy e seu contemporâneo Niels Henrik Abel (1802 – 1829) ignoraram a utilidade das séries divergentes.³

Runge (1856–1927) desenvolveu o método de resolução baseado em seqüências para solucionar numericamente equações diferenciais junto com M. W. Kutta (1867 – 1944). Seqüências e séries tornaram-se ferramentas padrão para aproximar funções e calcular resultados em computação numérica.

O matemático indiano autodidata Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) usou seqüências e séries de potências para desenvolver resultados em teoria de números.

³Cabe aqui anotar que um conjunto de documentos descobertos no arquivo distrital de Braga, em Portugal, José Anastácio da Cunha (Lisboa, 11 de maio de 1744 - 1º de janeiro de 1787), antecipou-se a Cauchy em conceitos matemáticos, com parecer favorável de Gauss após ler uma tradução de “Princípios Matemáticos para Instrução dos Alunos do Colégio de São Lucas da Real Casa Pia do Castelo de São Jorge”, relativo às definições de função exponencial e logarítmicas [44].

O trabalho de Ramanujan era teórico e produziu numerosos resultados importantes usados por matemáticos no Século XX.

Seus colaboradores britânicos Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947) e John Littlewood (1885–1977) usaram seu conhecimento de séries para produzir avanços importantes em teoria de números e estenderam a utilidade das séries para muitas áreas da matemática. Cauchy e Abel foram os matemáticos que mais fortemente combateram a falta de rigor.

Do ponto de vista matemático, a crítica e o cuidado de Cauchy no estudo da convergência de séries e sucessões não impediram, entretanto, que ele cometesse os erros clássicos relacionados com um conceito que não existia ainda bem delineado em sua época que era a convergência uniforme. Esse conceito apareceu com C. Gudermann, professor de Weierstrass em 1838, mas foi somente com esse último que o conceito se firmou em forma precisa com o uso do dueto ϵ , e δ . (...) a integração e diferenciação de séries e sucessões termo a termo conduzia freqüentemente a situações bizarras e paradoxais e somente a intuição de Cauchy e Abel não permitiu que esses erros se multiplicassem sem controle [21].

Joaquim Gomes de Souza comete certo exagero ao afirmar que na sua memória *Métodos Gerais de Integração*, em 69 páginas, abrangeria o cálculo todo, além de reproduzir resultados já conhecidos da análise, exatamente em relação ao tratamento de séries, que ele próprio afirma ter usado sem se preocupar com a convergência ou não, tendo depois de procurar a solução de suas proposições por outro caminho sem o uso de séries, como afirma posteriormente em trabalhos complementares. Seguem o segundo e terceiros itens.

II - Adição à memória sobre métodos gerais de integração, 13 páginas.

Nova solução das questões precedentes;

Ao analisarmos o conjunto da sua obra, observamos que a adição a memórias já publicadas foi uma constante. Algumas com o objetivo de tornar mais geral, ou

pelo menos mais abrangente, outras com objetivo de corrigir possíveis deslizos, quem sabe, motivado por alguma crítica, o que nos pareceu muito sensível a elas.

III - Sobre a determinação das constantes que, nos problemas de Física Matemática, entram nas integrais das equações diferenciais parciais, em função do estado inicial do sistema, 4 páginas. Demonstro que um problema particular sobre os fenômenos termo-elétricos, que Duhamel resolveu no Jornal da Escola Politécnica, e que considerava muito difícil, depende pura e simplesmente ou pode ser obtido aplicando o método geral dado para esse fim por Fourier e aperfeiçoado por Poisson. Liouville que escreveu um artigo sobre a solução de Duhamel nada diz a esse respeito.

Percebemos aqui que Gomes de Souza enaltece seus resultados, ao mesmo tempo em que, de alguma forma, desqualifica o trabalho de Duhamel e de Liouville. Uma investigação mais aprofundada deve ser feita confrontando esses resultados para que não fique parecendo bravata o que afirmara. Contudo, somos da opinião de que os trabalhos de outros, ainda que superados, devem ter o seu valor intrínseco como parte do desenvolvimento da ciência, como fizera Newton em raro momento de humildade quando disse que chegou aonde chegou foi porque se apoiou em ombros de gigantes, referindo-se a seus predecessores.

A seguir, IV e V itens:

IV - Demonstração de alguns teoremas gerais para a comparação de novas funções transcendentais, 8 páginas;

A preocupação com a generalização e o rigor era uma constante. Pelo menos ao escrever os resultados anunciados. Entretanto, quando fazemos uma leitura mais acurada, deparamo-nos exatamente com a falta destes, principalmente o rigor. As passagens não são claras e o rigor deixa a desejar com expressões tipo: é fácil de perceber que..., para que se possa aplicar as memórias precedentes..., etc.

V - Memória sobre um teorema de cálculo integral e suas aplicações

à solução de problemas da física matemática, 70 páginas. Este teorema sobre a composição das funções arbitrárias nas integrais das diferenciais parciais é um daqueles poucos de que nunca se poderá fazer abstrações porque ele expressa verdades fundamentais que nunca poderão ser expressas por outros.

Muito útil na análise de diversos ramos da Física Matemática, ele é sobretudo decisivo nas questões gerais de propagação do movimento nos meios elásticos, resolvendo de maneira facílissima questões até hoje intratáveis pelas suas dificuldades analíticas.

Ele me permitiu enunciar no fim da memória este teorema geral que encerra uma bela lei da natureza a saber: *que a propagação nos meios elásticos não depende, de modo algum, das forças que solicitam as moléculas do meio.* E fundo sobre ele dois métodos de integração, um para integrais ordinárias, outro para integrais definidas, mediante os quais se pode obter, por um processo uniforme, as diferentes integrais conhecidas até hoje, obtidas por diferentes tentativas dirigidas ao acaso ou processos incongruentes.

Como exemplo, dou as belas integrais de Poisson no tomo III das M. do Instituto e Jornal da Escola Politécnica. Este foi o primeiro teorema que descobri, em fins de 1848 ou princípio de 1849, e que me permitiu escrever logo duas memórias sobre a integração das equações diferenciais parciais, e sobre a teoria do som, 80 páginas, em 4°. Cada uma, memórias que foram apresentadas à congregação dos lentes da Escola Militar, e sob proposta deles mandaram imprimir na litografia pelo Governo. Uma delas o foi quase integralmente, mas tendo sido interrompida a impressão, por trabalho do arquivo, não me inquietei mais de continuá-las, tendo já o projeto de as publicar na Europa.

Aqui, Gomes de Souza ao mesmo tempo em que demonstra sua grande capacidade de enveredar-se por temas diversos e com profundidade, anuncia, não sem uma dose de precipitação, exaustão e/ou extensão de assuntos, sendo seu método

inovador e definitivo. Num lampejo de humildade, faz referência a Poisson e aos professores (lentes) da Escola Militar. Também demonstra sua intenção de alçar vôos mais altos quando planeja publicar suas memórias na Europa.

VI - Memória sobre a determinação das funções desconhecidas que entram sob o sinal de integração definida, 64 páginas.

Esta memória que encerra questões compreendidas como casos particulares daquelas de que se ocupa a primeira, foi naturalmente escrita antes dela. Não se acha de todo prejudicada, ou mesmo de modo algum, porque os métodos da memória aplicando-se a casos muito mais particulares são mais simples e devem, conseqüentemente, nesses casos, ser preferidos aos métodos gerais da outra. Além disso, trata-se nelas de muitas questões incidentes dignas de interesse.

A determinação das funções $\varphi(x)$ entrando nas equações:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta) + x f_1(\theta)] \varphi(x + \theta) d\theta = F(x)$$

$$\int_b^a [f(\theta) + x f_1(\theta)] \varphi(x\theta) d\theta = F(x)$$

em que $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ e $F(x)$ são funções absolutamente quaisquer, de um dos problemas tratados na memória. Ora, estas questões já vão muito além de tudo quanto se havia feito na matéria. Pois que os trabalhos de Liouville e Abel sobre a matéria (V. Jornal da Escola Politécnica e livros completos de Abel) não chegaram a compreender as duas equações:

$$\int_0^{\infty} \theta^{\mu-1} \varphi(x + \theta) d\theta = F(x) \text{ e } \int_0^{\infty} (1 - \theta)^p \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right) d\theta = F(x)$$

Isto é, casos muito particulares das formas mencionadas.

Mais uma vez aqui manifesta a pretensão de generalizar resultados e de superar matemáticos do porte de Abel e Liouville. A humildade é posta de lado quando se compara de forma superior a esses matemáticos que tanto contribuíram para o desenvolvimento dessa ciência.

Das questões acima descritas, assim como de outras mais gerais, dei um grande número de soluções, baseadas ou não em séries convergentes ou em métodos independentes de séries deduzindo, sempre como casos particulares das minhas, as soluções de Liouville. Esta memória (a menos importante das que tenho escrito) foi apresentada ao Instituto de França que até hoje ainda não quis dar parecer, sendo Liouville o relator. Pelo que tenho o direito, creio, de atribuir à la petite Jalousie⁴, tendo o célebre Lamé, um dos comissários a quem eu instigava para que a comissão desse parecer, escrito uma carta em que dizia: “J’ai lu votre mémoire; Il prouve que vos êtes un bon analyste; je vous salue comme tel et pense que mēs collègues ne seront pas d’une autre opinion”⁵.

Esqueci-me de dizer mais acima que a primeira memória, quando estava ainda em embrião e quando ainda se fazia uso das séries divergentes, tinha sido apresentada na Sociedade Real de Londres e que dela acha-se um pequeno extrato nos Proceedings of the Royal Society, ano 1856. Como questão incidente trato:

1º - Da dedução das funções $f(x)$ à fórmula $\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta x} f_1(\theta) d\theta$.

Sendo as funções finitas ou infinitas, reais ou imaginárias.

2º - Da redução da função $f(x)$ à fórmula $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f_1(\theta) d\theta}{(x + \theta)}$ que me conduz a este teorema notável: toda função $f(x)$ que posta no lugar de y satisfaz a equação:

$$ay + \left(a' + b'x + c'x^2\right) \frac{dy}{dx} + \left(a'' + b''x + c''x^2\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \dots = 0$$

pode ser sempre redutível à forma $f(x) = C \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(-\theta) d\theta}{(x + \theta)}$
com C , α , β constantes.

⁴Pequena inveja (T. A.)

⁵Eu li a sua memória; ela prova que você é um bom analista; quero cumprimentar-lhe como tal e acho que meus colegas não serão de outra opinião. (T. A.)

Aqui Gomes de Souza deixa transparecer que evoluíra ao procurar outros caminhos que não o uso das séries divergentes, contudo mostra também que ainda não amadurecera o suficiente ao achar que tenha exaurido um determinado assunto, particularmente dentro da análise matemática. Ao minimizar sua memória como a "menos importante das que tenho escrito", tenta sub-repticiamente, enaltecê-la quando mencionara trabalhos de Liouville e de Abel como casos particulares dos seus. Ainda que o fosse, o que se percebe é que Liouville é um alvo seu por não ter dado parecer oficial sobre suas memórias, sendo o relator da comissão, atribuindo como causa uma pequena inveja. Por outro lado, demonstra que estava a par do que estava sendo produzido no momento, especialmente quanto á obra de Abel, como sabemos, revolucionária e genial. E segue:

- 3º - Construção de fórmulas somatórias e aplicações das diferentes séries encontradas na memória;
- 4º - Redução das funções inexplicáveis de Euler e outras funções descontínuas à forma de função contínua.

Esse quarto item contém o cerne do nosso trabalho. Gomes de Souza é muito vago ao tratar do assunto. Não define claramente as hipóteses, tão pouco esclarece quais funções descontínuas ou que tipos de funções descontínuas podem ser "reduzidas" em funções contínuas. Quais seriam as funções inexplicáveis de Euler? Afirma já ter resolvido para casos particulares, mas não crê que tenha feito para o caso geral, ou seja: para todas as funções descontínuas.

Bacelar Portela, mesmo não sendo um matemático, ao abordar o assunto do uso das séries por Gomes de Souza, nos brinda com um comentário que descreve perfeitamente a situação. Antes porém, Souzinha comentara sobre possíveis problemas com seus resultados, como segue:

Quando se dá a solução de um problema geral por meio de integrais definidas, pode acontecer algumas vezes que esta solução seja ilusória, quando, para alguns valores particulares de uma função dada $f(x)$ que entra sob o sinal de integração, a integral se torna indeterminada.

Ora, se se tem, então, uma outra solução em série, esta solução será suficiente para levantar a indeterminação da outra. Apesar de muita coisa ter ficado sem demonstração, na base da suposição que, se é intuitiva para o autor, não basta para o leitor; apesar ainda do complicado jogo algébrico que arrasta o leitor a resultados não convincentes, **pelos saltos mortais que dá para a clareza e compreensão do assunto, (...)** (Grifo nosso) [30].

- 5º - Determinação da lei de atração, segundo a qual o pólo de um ímã atrai cada elemento de uma corrente elétrica definida;
- 6º - Determinação da lei segundo a qual os elementos de duas correntes elétricas se atraem mutuamente.

Gomes de Souza comenta que os dois itens acima haviam sido tratados por Laplace e Ampère, criticando-os quanto à generalidade e validade dos resultados por estes terem considerado que a atração fosse somente função da distância. Em seguida ataca mais uma vez Liouville e seu método de cálculo diferencial de índices fracionários.

(...) o qual, segundo a opinião dos geômetras, deixa sempre alguma incerteza sobre os resultados obtidos por seu intermédio. Convinha então tratar de novo o problema. Foi o que fiz.

- 7º - Integração completa da equação:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{adz}{xdx} + \frac{b}{x^2}z \right)$$

- 8º - Integração da equação:

$$(ax^2 + bx + c) \frac{d^2y}{dx^2} + (x + c) \frac{dy}{dx} + f(x) = 0$$

Já tratada por Liouville mediante o seu cálculo diferencial de índices fracionários que tantas incertezas deixa nos seus resultados. É a minha teoria de redução das funções à forma

$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\varphi(\theta)}{(x+\theta)^m} d\theta$ que me conduz à integral dessa equação.
E aplico o mesmo método a equações quaisquer.

VII - Memória sobre a analogia entre as equações diferenciais lineares e as equações algébricas ordinárias, 28 páginas. Muitas aplicações à teoria das integrais e à teoria das funções elípticas. Alguns teoremas sobre a natureza das transcendentess encerradas nas equações diferenciais lineares, de coeficientes algébricos.

A autobiografia citada, relaciona ainda, como estudos preparados para serem ajuntados aos anteriores, outros trabalhos não menos pretenciosos, assim descritos:

VIII - Memória sobre a teoria do som.

Nesse trabalho há uma forte crítica ao trabalho de Poisson como sendo a sua forma de raciocinar inteiramente errônea. Afirma em seguida que é ele quem pela primeira vez trata o problema com todo o rigor e julga resolver completamente a questão porque considera o estudo da vibração do ar não somente em tubos retilíneos, mas também o caso de tubos curvilíneos e de quaisquer leis da variação do calor.

IX - Memória sobre a propagação do movimento nos meios elásticos, compreendendo o movimento dos meios cristalóides e teoria da luz;

X - Memória sobre a vibração nos meios elásticos;

XI - Memória sobre resoluções algébricas ou transcendentess por integrais definidas.

Trato primeiramente de achar uma raiz, problema já resolvido por Parceval e Cauchy (no caso de ser convergente a série de Logrye e das questões que ele resolve). O meu método, independente de séries, aplica-se a uma função qualquer. Em segundo lugar, faço depender a determinação de todas as raízes (questão de um gênero totalmente novo em análise) da determinação de uma certa função $f(n)$, em que,

dando-se a n a série de valores $1, 2, 3, 4$, etc., obtém-se todas as raízes. Isto depende de uma questão de cálculo integral que os meus métodos ensinam a resolver.

XII - Memória sobre duas espécies de cálculos novos, compreendendo toda a teoria das características, e sobre os princípios fundamentais da Análise geral;

XIII - Filosofia geral das Matemáticas. Unificação dos métodos analíticos;

Esse trabalho por si só, se viesse a ser feito, dada a complexidade e alcance, já o tornaria um dos mais famosos matemáticos do mundo. O tempo veio mostrar com a lista dos 23 problemas matemáticos de David Hilbert (1862–1943), quando Kurt Gödel (1906–1978), mostrou que dentro de um sistema rigidamente lógico, podem ser formuladas proposições que são indecidíveis ou indemonstráveis dentro dos axiomas do sistema, que o projeto seria inviável.

XIV - Sobre o cálculo dos resíduos;

Seria uma bela contribuição, sendo comprovados os resultados, dado que a teoria dos resíduos constituiu uma poderosa ferramenta no tratamento das funções analíticas e permite o cálculo de integrais de funções reais a partir de integrais de funções complexas.

XV - Memória sobre aplicações da Análise à Física Matemática com aplicações a muitas questões gerais. Construção das fórmulas analíticas como representando fenômenos físicos.

Gomes de Souza teve a ousadia e a coragem de acreditar em seu sonho, chegando aonde poucos chegariam, mesmo com as condições e recursos de hoje.

Apesar da forma bastante contundente como se referia aos trabalhos de alguns que lhe precederam e outros que foram contemporâneos, não podemos simplesmente dizer que fora um lançador de bravatas. É certo que em muitas colocações tenha exagerado quanto a pretensão de generalizar resultados e superar matemáticos de grande monta. Sua obra, como já disse, carece de estudo aprofundado para que se

possa fazer um julgamento correto, como fizeram Otto de Alencar⁶ e M. Amoroso Costa⁷, Ambos reconhecendo o potencial de Gomes de Souza, como também a complexidade de sua obra, bem como os erros que cometeu e a falta de rigor. A seguir, trechos da Conferência sobre Otto de Alencar, proferida por Amoroso Costa e publicada na Revista de Didática da Escola Politécnica, nº13 em 29 de abril de 1918.

Otto de Alencar, em 1901 publicou no *Jornal da Sciencias Mathematicas e Astronomicas do Porto*, uma memória intitulada: *De l'action d'une force accélératrice sur la propagation du son*. N'esse trabalho, cujo thema é um bello problema de *Physica mathematica*. Elle se utiliza constantemente de methodos e resultados propostos por Gomes de Souza, cuja obra injustamente esquecida procura fazer reviver. (...) Suas obras mathematicas foram publicadas em Leipzig, no anno de 1882, por iniciativa do governo brasileiro, sob o titulo: *Mélanges de calcul integral*. Constam de sete memorias e alguns fragmentos, e sua leitura nada tem de facil; o que mais espanta n'esses trabalhos é o modo magistral pelo qual Gomes de Souza manejava o instrumento algebrico; é de lamentar que as demonstrações careçam muitas vezes de rigor; o próprio auctor reconhece haver usado frequentemente de séries cuja convergencia é *hypothetica*. Elle pertencia evidentemente á classe dos geometras nos quaes predomina a intuição, e que con-

⁶Otto de Alencar Silva (1874 – 1912) nasceu em Fortaleza, Ceará, filho de Silvino Silva e Maria Alencar Silva. Primo pelo lado materno, do escritor José de Alencar (1829 – 1877). Após concluir seus estudos secundários em Fortaleza, Otto de Alencar transferiu-se para a cidade do Rio de Janeiro para matricular-se na Escola Politécnica. Em 1893, aos dezenove anos de idade, graduara-se em engenharia civil. Fixara residência na cidade do Rio de Janeiro, onde falecera em fevereiro de 1912 [40].

⁷Engenheiro civil, bacharel em ciências físicas e matemática, livre docente de astronomia e geodésia brasileiro nascido na cidade do Rio de Janeiro, internacionalmente conhecido e diferenciado de seus contemporâneos por sua postura pioneira em diversos momentos, um dos pioneiros em pesquisas matemáticas no país [41].

sideram essencial a conquista, às vezes precária, de novos resultados; como quer que seja, muito há a aprender no seu livro. Assim é que Otto de Alencar foi encontrar n'ella a solução do problema seguinte, que constitue o assumpto da sua memória: A velocidade do som em um meio indefinido sofre alguma modificação quando se leva em conta a força acceleradora da gravidade?

Encontramos também na Revista da Sociedade Brasileira de Ciência, 1918, página 65, um trabalho de Manuel Amoroso Costa sob o título: *Sobre um Theorema de Calculo Integral*, onde discorre sobre a memória que Gomes de Souza apresentou à *Académie des Sciences*, de Paris, conforme (Comptes Rendus - tomo XLI, P. 100) no qual mostra que

Os argumentos das funcções arbitrarías, que entram na integral geral de uma equação às derivadas parciaes, linear em relação ás derivadas de ordem mais alta; dependem unicamente dos termos dessa ordem. (...) decorre immediatamente de uma proposição mais geral, devido a Ampère. (...) Comprehende-se que este corollario do theorema pode fornecer úteis indicações na integração das equações, sem comtudo conduzir a um methodo geral applicavel a taes equações, como pretendia Gomes de Souza. Como quer que seja, o theorema em si é interessante e merecia ser tirado do olvido, o que constiue o objecto desta nota.

O que fizeram Otto de Alencar e Amoroso Costa é o que esperamos que seja feito por outros matemáticos sobre a memória de Gomes de Souza, um trabalho sério e competente com o devido apreço. Um trabalho matemático contundente que venha esclarecer questões que foram postas há muito tempo, mas que não foram devida e aprofundadamente abordadas. É o que tentamos aqui, muito parcialmente e dentro das nossas limitações e da proposta desse trabalho.

A Evolução do Conceito de Função

O propósito desse capítulo é contribuir com informações sobre o conceito de função através da sua evolução ao longo do tempo. As incorreções no próprio conceito, à luz do que se tem hoje, são decorrentes do seu desenvolvimento. A motivação se deu por causa da proposição de Gomes de Souza que relaciona função, continuidade, séries de funções, convergência de séries, bem como a função de Weierstrass, um exemplo refinado e não elementar.

Em *Qual é a função da função?*, texto de autoria de Eduardo Sebastiani Ferreira, Rosa Maria Machado e Miriam Sampieri Santinho, gentilmente cedido pelos autores, que será um capítulo de um livro a ser publicado pela Editora da Universidade de Brasília, encontramos:

“O conceito de função aparece bem tarde na História de Matemática, apesar de ser central, principalmente no Cálculo. Ele foi usado desde os egípcios, babilônios e gregos antes de Cristo, e mesmo na Europa do século XVI “implicitamente”, como dizem os historiadores. Nos papiros egípcios e nas tábuas babilônicas já temos representações

de funções em forma de tabelas, na Grécia antiga ela aparece como gráficos de curvas principalmente em Arquimedes e Apolônio. Na Europa da idade média, iniciou-se a busca da expressão algébrica de uma função e quem primeiramente, pelo que se sabe, preocupou-se com isto foi Oresme (1323 – 1387) na França. Ele procurava a dependência das duas magnitudes velocidade e tempo. Leibniz (1646 – 1716) usa pela primeira vez a palavra “função” como um termo para designar as várias quantidades geométricas associadas com a curva, elas eram “funções” da curva. Depois dele John Bernoulli em 1698 adota a terminologia de Leibniz - função - para uma magnitude variável, uma quantidade que é composta de qualquer maneira possível desta variável e de constantes. Euler, que foi aluno de Bernoulli, em 1748 escreveu que: “Uma função é uma valor variável numa expressão analítica, que é composta do valor variável e valores constantes”. Então para Bernoulli e Euler a função era o que hoje chamamos do “valor da função” e não exigiam a unicidade, Euler dá como exemplo de função a raiz quadrada de uma variável. Para ele também só tinha sentido funções contínuas, mas já assumiam que a função podia ter duas representações, sua expressão analítica e a “curva traçada a mão livre”. Fourier (1768 – 1830) restringe de alguma maneira o domínio de definição da função, não era para qualquer número, mas poderia ser só para um intervalo, mais geralmente para um conjunto. Outro fator importante estudado por Fourier foi de funções não contínuas. Finalmente em 1837 aparece a definição de Dirichlet que introduz o sentido mais amplo de função, a que conhecemos até hoje: “A função $f : A \rightarrow B$ consiste de dois conjuntos não vazios o domínio A e a imagem B , e de uma regra que faz corresponder a cada $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Esta correspondência é denotada por $y = f(x)$. Dizemos que y é a imagem de x e que x é uma imagem inversa de y .”

Segundo Richard Courant e Herbert Robbins, em “O que é Matemática?”, matemáticos

e físicos divergem algumas vezes quanto ao aspecto do conceito de função que enfatizam. Os primeiros geralmente destacam a lei da correspondência, a operação matemática aplicada à variável independente x para obter o valor da variável dependente u . Nesse sentido, $f()$ é o símbolo de uma operação matemática; o valor $u = f(x)$ é o resultado de se aplicar a operação $f()$ ao número x . Por outro lado, o físico está muito mais interessado na quantidade u do que em qualquer procedimento pelo qual os valores de u podem ser calculados a partir dos valores de x . Assim a resistência u do ar a um objeto em movimento depende da velocidade v e pode ser encontrada por experimento, quer seja ou não conhecida uma fórmula matemática explícita para calcular $u = f(v)$. O interesse fundamental do físico é a resistência efetiva e não qualquer fórmula matemática $f(v)$, exceto na medida em que o estudo dessa fórmula possa auxiliá-lo na análise do comportamento da quantidade u . Esta é a atitude normalmente adotada quando se aplica à Matemática, à Física ou à Engenharia. Em cálculos mais avançados com funções, pode-se muitas vezes evitar confusão apenas sabendo se o que se deseja é a operação $f()$ que associa a x uma quantidade $u = f(v)$, ou a quantidade u em si, que pode também depender, de um modo bastante diferente, de alguma outra variável, z .

O embate saudável entre Matemáticos e Físicos gera energia que move a Matemática ao longo dos séculos. Essa questão é colocada de forma cristalina em *O Valor da Ciência de Henri Poincaré* (1854 – 1912) [29].

No capítulo V quando discorre sobre a análise e a física, começa com veemência:

Sem dúvida já lhe perguntaram muitas vezes para que serve a Matemática, e se essas delicadas construções que tiramos inteiras de nosso espírito não são artificiais, concebidas por nosso capricho. Entre as pessoas que fazem essa pergunta, devo fazer uma distinção; as pessoas práticas reclamam de nós apenas um meio de ganhar dinheiro. Estes não merecem resposta; é a eles, antes, que conviria perguntar para que serve acumular tantas riquezas e se, para ter tempo de adquiri-las, é preciso negligenciar a arte e a ciência, as únicas que podem nos

proporcionar espíritos capazes de usufruí-las, *et propter vitam vivendi perdere causas*¹.

A Matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza. Mas não é só isso: tem um objetivo filosófico e, ousa dizer, um objetivo estético. (...) poucos privilegiados são chamados a gozá-la plenamente, é verdade, mas não acontece o mesmo com as mais nobres artes?

O matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima. A Física Matemática e a Análise Pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; penetram-se mutuamente. O físico não pode prescindir da Matemática; ela lhe fornece a única linguagem que ele pode falar [29].

O capítulo inteiro, para não falar de todo o livro, é uma bela e clara lição do que é ciência, particularmente a ciência matemática. E segue na página 96:

A série de Fourier é um instrumento precioso, que a análise usa continuamente: foi por esse meio que ela pôde representar funções descontínuas; se Fourier a inventou, foi para resolver um problema de física relativo à propagação do calor. Se esse problema não tivesse surgido naturalmente, jamais teríamos ousado devolver à descontinuidade seus direitos; por muito tempo ainda, teríamos considerado as funções contínuas como as únicas funções verdadeiras.

Assim a noção de função ampliou-se consideravelmente e recebeu de alguns analistas lógicos um desenvolvimento imprevisto. Esses analistas aventuraram-se assim em regiões onde reina a mais pura abstração a afastaram-se tanto quanto possível do mundo real [29].

Essa citação tem implicação direta com nosso trabalho, especificamente quando trata das funções descontínuas, ou seja, com a proposição de Joaquim Gomes

¹E por causa da vida perdem-se a razão de viver.

de Souza de transformar funções descontínuas em funções contínuas. Gomes de Souza faz uso corrente da transformada de Fourier em todo o seu trabalho, como podemos perceber em *Mélanges de Calcul Intégral* (1882).

A afirmação de Fourier de que qualquer função arbitrária dada pode ser representada por uma série trigonométrica, levou Cauchy (1789 – 1857) a uma nova formulação dos conceitos de contínuo, valor limite e função, no seu *Cours d'Analyse*, 1821:

A função $f(x)$ é contínua entre dois limites dados, se para cada valor de x que esteja entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x+a) - f(x)$ diminua com a de tal maneira que torna-se menor do que qualquer número finito.

Com Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843), autor de textos matemáticos bem sucedidos, os quais foram adotados na Escola Militar, baseados nos cursos ministrados na École Polytechnique e Cauchy; surgem indicações de uma tendência em livrar o conceito funcional de uma representação concreta, ainda que Cauchy, em seus textos mais antigos tenha demorado a reconhecer a importância das variáveis imaginárias e só mais tarde tenha mergulhado fundo no tratamento de funções complexas e tenha avançado em integrações sobre campos imaginários.

Enquanto Euler e Laplace (1749–1827) declaravam que a ordem de integração em integrais duplas era irrelevante, Cauchy, em *Mémoire sur la théorie des intégrales* editada em 1825, mostrou que isso era verdade somente quando a expressão a ser integrada não se torna indeterminada no intervalo. Cauchy, Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) e Liouville (1809 – 1882) envolveram-se em discussões como as de se a continuidade de uma função era suficiente para garantir sua expansibilidade, ou se a de suas derivadas também deviam ser necessárias. Em 1851, Cauchy concluiu que a continuidade da derivada fazia-se necessária.

Quem começa a colocar definitivamente em bases sólidas a teoria moderna das funções é Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866). Como todas as

pesquisas de Riemann, as sobre funções eram profundas e abrangentes. Influenciado por Gauss e por W. Weber, os aspectos físicos foram os principais motivos para suas investigações na matemática pura. A monografia da habilitação de Riemann, de 1854, publicada em 1867 foi sobre a representação de uma função por meio de uma série trigonométrica, na qual ele avançou além da posição alcançada por Dirichlet. Cauchy estabelecera critérios para a existência de uma integral definida como o limite de uma soma, e garantiu que tal limite sempre existe quando a função é contínua. Riemann fez a notável extensão apontando que a existência desse limite não está confinada a casos de continuidade. O novo critério de Riemann colocou a integral definida sobre uma fundação completamente independente do cálculo diferencial e da existência de uma derivada.

É com Karl Weierstrass (1815 – 1897) que a teoria moderna das funções encontra terreno fértil e firme. Em 1839, durante um semestre, em Münster, foi o único aluno das aulas de Christof Gudermann (1798–1851), cujas pesquisas sobre funções hiperbólicas conduziram à função $tg^{-1} \sinh(x)$, chamada Gudermaniana. A paixão de Weierstrass era as funções abelianas, cujo gosto foi desenvolvido pela leitura das memórias de Abel no Journal de Crelle². Gudermann convenceu o então jovem Weierstrass que a representação em série de potência de uma função é um instrumento muito útil e foi nesse tema, seguindo os passos de Abel que produziu um de seus maiores trabalhos: mostrou que a representação em série de potência infinita de uma função $f(x)$ centrada em um ponto p_1 do plano complexo converge em todos os pontos dentro de um círculo C_1 cujo centro é p_1 e que passa pela singularidade mais próxima. Se agora é feita a expansão da mesma função em um segundo ponto p_2 diferente de p_1 , mas dentro de C_1 , esta série será convergente dentro de um círculo C_2 , tendo p_2 como centro e passando pela singularidade mais próxima de p_2 . Este círculo pode incluir pontos fora de C_1 . Dessa forma, a área do plano em que $f(x)$ está definida analiticamente é estendida por uma série de potência. Esse processo pode ser continuado para outros pontos com

²A. L. Crelle, em 1826, editou em Berlim as primeiras folhas do seu célebre jornal, publicando as memórias de N. H. Abel, de C. G. J. Jacobi, e de J. Steiner [9].

os seus respectivos círculos. Weierstrass, portanto, definia uma função analítica como sendo uma série de potências juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.

Segundo Boyer [3], havia duas causas principais de inquietação nesse intervalo de 50 anos (1822 – 1872). Uma era a falta de confiança nas operações executadas sobre séries infinitas. Não era sequer claro que se ou não uma série infinita de funções - de potências, ou de senos e cossenos, por exemplo - sempre converge à função de que provém. Uma segunda causa de preocupação era a falta de qualquer definição da expressão “número real” que estava no próprio cerne do programa de aritmetização. Bolzano em 1817 tinha percebido tão bem a necessidade de rigor em análise que Klein o chamava “pai da aritmetização”; mas Bolzano tinha sido menos influente que Cauchy, cuja análise ainda carregava muito de intuição geométrica. Mesmo a função contínua e não derivável de Bolzano de cerca de 1830 foi esquecida pelos sucessores, e o exemplo de uma tal função dado por Weierstrass (em aulas dadas em 1861 e num artigo para a Academia de Berlim de 1872) em geral foi considerado como sendo a primeira ilustração do fato.

Encerramos aqui a abordagem sobre a evolução do conceito de função, sabendo que muito mais tem que ser dito e aprofundado sobre a matéria.

4.1 Karl Theodor Wilhelm Wierstrass, uma breve biografia

A seguir, faremos uma breve biografia de Wierstrass para depois apresentarmos o seu famoso exemplo de função sem derivada.

Karl Theodor Wilhelm Wierstrass, Nasceu em Ostefeld, Alemanha em 31 de outubro de 1815 e faleceu em Berlim em 19 de fevereiro de 1897, aos 82 anos de idade. Era filho de Wilhelm Weierstras e Theodora Vonderforst. Frequentou várias escolas primárias devido à profissão do pai, uma espécie de fiscal de impostos da Prússia. Com 14 anos, entrou para o Ginásio Católico de Paderborn, onde desta vez seu pai trabalhava como tesoureiro. Nessa escola, distinguiu-se como excelente aluno e ganhou vários prêmios. Por essa época, Weierstrass lia com interesse os números do Journal de Clelle.

Essas leituras, especialmente das memórias de Abel, influenciou-o profundamente. Em 1834, a pedido do pai para que futuramente se tornasse uma figura de destaque na administração do governo da Prússia, ingressou na Universidade de Bonn para estudar direito e Administração. Nesse período, dedicava-se à leitura da *Mécanique Céleste* de Laplace, trabalhos de Jacobi e Legendre.

Vendo em um caderno de aluno anotações de Christof Gudermann (1798–1851) sobre transcendentel elípticos, Weierstrass foi em 1839 para Münster, onde durante um semestre foi o único aluno das aulas de Gudermann sobre aquele tópico e geometria esférica analítica.

Em carta enviada em 10 de abril de 1882 a Sophus Lie, explica sua decisão definitiva tomada em 1840: se dedicar somente à Matemática. Abandonou a Universidade sem ao menos fazer os exames finais, vindo somente em 1841 obter seu diploma universitário, o qual lhe dava o direito de lecionar no ensino secundário.

Em 14 de junho de 1856 foi indicado para o Instituto Industrial de Berlim. Em 19 de dezembro do mesmo ano, tornou-se membro da Academia de Ciências de Berlim. Em 1864, ocupou a posição de

professor Titular da Universidade de Berlim [21].

Há fatos interessantes sobre Weierstrass. Conta-se que

[...] nunca lamentou os anos gastos no ensino elementar, transferiu sua notável capacidade pedagógica para o trabalho universitário, tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve [10].

Contrariando a opinião quase unânime de que um matemático tem que se revelar muito cedo, ou do contrário pouco poderá produzir com o avançar da idade, Weierstrass só começou a trabalhar com matemática de alto nível aos 49 anos, idade em que muitos estão cessando seu trabalho criativo, apesar de seus problemas de saúde.

Desde 1850, Weierstrass vinha sofrendo de problemas cerebrais, de vertigens e vômitos, que o afastavam do trabalho, às vezes, por um longo período de tempo, como aconteceu de 1861 a 1862; a isso se adicionava problemas de bronquite e feblite que o obrigavam a viver com frequência em cadeiras de rodas; suas aulas eram, então, acompanhadas no quadro negro por alguns de seus assistentes, pois ele era incapaz de fazê-lo. Apesar de tudo, suas aulas eram famosas em Berlim pela originalidade de idéias e pelo famoso “rigor Weierstrassiano” (...) Apesar de seus problemas de saúde, Weierstrass possuía uma extraordinária energia para o trabalho e encontrava equilíbrio ideal para o professor e o pesquisador. (...) atraiu e influenciou um grande número de alunos e colaboradores, dentre os quais destacamos: George Frobenius, Oskar Bolza, Friedrich Engel, Otto Hölder, Adolf Hurwitz, Felix Klein, Adolf Kneser, Sophus Lie, Herman Minkowski, Gösta Mittag-Leffer e o filósofo Edmund Husserl, que era também matemático. Enfim, a figura imponente de Karl Weierstrass, juntamente com Gauss e Riemann, forma o “perfeito trio” da supremacia matemática na Alemanha do século XIX [21].

Weierstrass escreveu uma obra monumental em importância e profundidade. Uma de suas mais fortes paixões era a teoria das integrais abelianas e suas inversas. Segundo Eves [10], suas contribuições à matemática mais amplamente conhecidas, referem-se à teoria das funções complexas por meio de séries de potências.

Grande parte de suas descobertas chegaram ao domínio do mundo matemático através das notas de suas famosas aulas, que permitia generosamente que alunos “polissem” e ficassem com os méritos. Deu contribuições fundamentais ao cálculo das variações, como as condições suficientes para a existência das funções que tornam mínimas certos integrais.

Rubens Lintz comenta que esses resultados eram, em geral, expostos nessas aulas e que eram avidamente copiados por alunos que depois se tornaram famosos e escreveram tratados sobre cálculo das variações, como Kneser, Bolza e outros. Descobriu a convergência uniforme, deu início à aritmetização da análise, ou redução dos princípios da análise ao conceito de número real.

Em 1861, em uma de suas preleções, discutiu pela primeira vez seu exemplo de função contínua sem derivada, cuja publicação só aconteceu em 1874, por intermédio de Paul du Bois-Reymond (1831 – 1889). O exemplo envolve série trigonométrica e é pouco intuitivo, como mostraremos a seguir.

4.2 A função contínua sem derivada de Weierstrass

A demonstração que segue, com pequenas passagens desenvolvidas, pode ser encontrada na *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 20, nº 1, março, 1998 no artigo “O Movimento Browniano e as curvas sem tangente” de Luis Fernando de Osório Mello. Como também, em linhas gerais em *Continuous Nowhere Differentiable Functions*, dezembro de 2003, *Master Thesis*, de Johan Thim.

Seja a função $f : R \rightarrow R$, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad (4.1)$$

onde $0 < b < 1$, e a é um inteiro ímpar tal que

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \quad (4.2)$$

Observamos que temos uma família de funções para cada a e b tomados.

É imediato também que a função $f_n : R \rightarrow R$ com $n \in N$ dada por

$$f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x) \quad (4.3)$$

é contínua para todo $x \in R$. Temos ainda que

$$|b^n \cos(a^n \pi x)| = |b^n| |\cos(a^n \pi x)| \leq b^n \quad (4.4)$$

Como a série geométrica $\sum_0^{\infty} b^n$ é convergente para $0 < b < 1$, segue pelo teste M^3 de Weierstras, que a função dada em (4.1) está bem definida e é contínua em todo $x \in R$. A seguir, mostraremos que a referida função não é derivável em nenhum ponto da reta real. Para tanto, fixemos um ponto arbitrário $x \in R$.

³Suponhamos que $\{f_n\}$ uma sucessão de funções definidas em E e tais que $|f_n(x)| \leq M_n$, $x \in E$, $E = \{1, 2, 3, \dots\}$. Então $\sum f_n$ converge uniformemente em E se $\sum M_n$ converge [31].

Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos[a^n \pi(x+h)] - \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos[a^n \pi x]}{h} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h} = \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h} + \\
 &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definindo

$$S_m = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h} \tag{4.6}$$

e

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h}, \tag{4.7}$$

Temos, portanto

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_m + R_m \tag{4.8}$$

Do teorema do valor médio para derivadas⁴, obtemos

$$\frac{b^n \cos[a^n \pi(x+h)] - b^n \cos[a^n \pi x]}{h} = f'(x + \theta h) = -b^n a^n \pi \sin[a^n \pi(x + \theta h)].$$

Então

$$\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x] = -a^n \pi h \sin[a^n \pi(x + \theta h)] \tag{4.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 |\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]| &= |-a^n \pi h \sin[a^n \pi(x + \theta h)]| = \\
 &= |a^n \pi h| |\sin[a^n \pi(x + \theta h)]| \leq a^n \pi |h|,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

⁴(**Teorema do Valor Médio, de Lagrange.**) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ [22]

de modo que

$$\begin{aligned}
 |S_m| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n \{ \cos [a^n \pi (x+h)] - \cos [a^n \pi x] \}}{h} \right| \leq \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left| \frac{b^n \{ \cos [a^n \pi (x+h)] - \cos [a^n \pi x] \}}{h} \right| = \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{|\cos [a^n \pi (x+h)] - \cos [a^n \pi x]|}{|h|} \leq \quad (4.11) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{a^n \pi |h|}{|h|} = \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \\
 &= \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1}.
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$|S_m| < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} \quad (4.12)$$

Por outro lado, para um valor particular de h , podemos obter um limite inferior R_m . Escrevamos a seguinte equação,

$$a^m x = \alpha_m + \epsilon_m \quad (4.13)$$

onde α_m é um inteiro e $\frac{-1}{2} \leq \epsilon_m < \frac{1}{2}$, Pois qualquer número real pode ser escrito como um inteiro mais uma parcela $\epsilon_m \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Tomemos ainda

$$h = \frac{1 - \epsilon_m}{a^m} \rightarrow a^m h = 1 - \epsilon_m \quad (4.14)$$

Na equação (4.13), tomando $x = h$, $\alpha_m = 1$ e $\epsilon_m = \frac{1}{2}$, temos

$$a^m h = 1 + \frac{1}{2} \rightarrow h = \frac{3}{2a^m} \quad (4.15)$$

Ora, mas $\epsilon_m < \frac{1}{2}$, então

$$0 < h < \frac{3}{2a^m} \rightarrow \frac{1}{h} > \frac{2a^m}{3} \quad (4.16)$$

assim

$$\begin{aligned}
 a^n \pi(x+h) &= a^{n-m} a^m (x+h) = a^{n-m} \pi(a^m x + a^m h) = \\
 &= a^{n-m} \pi(\alpha_m + \epsilon_m + 1 - \epsilon_m) = a^{n-m} \pi(\alpha_m + 1)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Uma vez que, por hipótese, a é ímpar, então, de (4.17), temos

$$\cos[a^n \pi(x+h)] = \cos[a^{n-m} \pi(\alpha_m + 1)] = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m + 1)} \tag{4.18}$$

Mas, como a é ímpar, então a^{n-m} também será ímpar, de onde podemos escrever

$$(-1)^{a^{n-m}(\alpha_m + 1)} = (-1)^{\alpha_m + 1} \tag{4.19}$$

de modo que

$$\cos[a^{n-m} \pi \alpha_m] = (-1)^{\alpha_m} \tag{4.20}$$

E assim,

$$\cos[a^n \pi(x+h)] = (-1)^{\alpha_m + 1} \tag{4.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \cos[a^n \pi(x)] &= \cos[a^{n-m} \pi a^m x] = \cos[a^{n-m} \pi(\alpha_m + \epsilon_m)] = \\
 &= \cos[a^{n-m} \pi \alpha_m + a^{n-m} \pi \epsilon_m] = \\
 &= \cos[a^{n-m} \pi \alpha_m] \cos[a^{n-m} \pi \epsilon_m] + \\
 &\quad - \sin[a^{n-m} \pi \alpha_m] \sin[a^{n-m} \pi \epsilon_m] = \\
 &= (-1)^{\alpha_m} \cos[a^{n-m} \pi \epsilon_m].
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ou seja

$$\cos[a^n \pi(x)] = (-1)^{\alpha_m} \cos[a^{n-m} \pi \epsilon_m]. \tag{4.23}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 R_m &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos[a^n \pi x]\}}{h} = \\
 &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n}{h} [(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n-m} \pi \epsilon_m)] = \\
 &= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n [1 + \cos(a^{n-m} \pi \epsilon_m)].
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como todos os termos da série em (4.24) são não negativos, temos

$$|R_m| = \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=m}^{\infty} [1 + \cos(a^{n-m} \pi \epsilon_m)] \right| > \frac{b^m}{|h|}. \tag{4.25}$$

Como $\frac{1}{h} > \frac{2a^m}{3} \rightarrow \frac{b^m}{h} > \frac{2}{3}(ab)^m$, então

$$|R_m| > \frac{b^m}{h} > \frac{2}{3}(ab)^m \tag{4.26}$$

Desse modo, de (4.8), (4.12) e (4.26), obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &= |S_m + R_m| \geq |R_m| - |S_m| > \\
 &> \frac{2}{3}(ab)^m - \pi \left(\frac{(ab)^m}{ab-1} \right) = \\
 &= \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) (ab)^m.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ou seja,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) (ab)^m \tag{4.28}$$

Do fato de que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, decorre que $\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) > 0$.

De $h = \frac{1 - \epsilon_m}{a^m}$, temos que, quando $m \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ e vice-versa.

Ou seja, se $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) (ab)^m. \tag{4.29}$$

Uma vez que $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$ toma valores arbitrariamente grandes, não existe a derivada da função f no ponto x tomado. Como x é arbitrário, concluímos que f não é derivável em ponto algum. Vale notar que esse exemplo e outros, tais como o de Bolzano (≈ 1830), Riemann (≈ 1861), Darboux (1873), Peano (1890) e mais recentemente Koch (1904), Sierpinski (1912), entre outros, representam funções com propriedade fractal. Veja a seguir o gráfico da função de Weierstrass com $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ e k variando de 0 a 15.

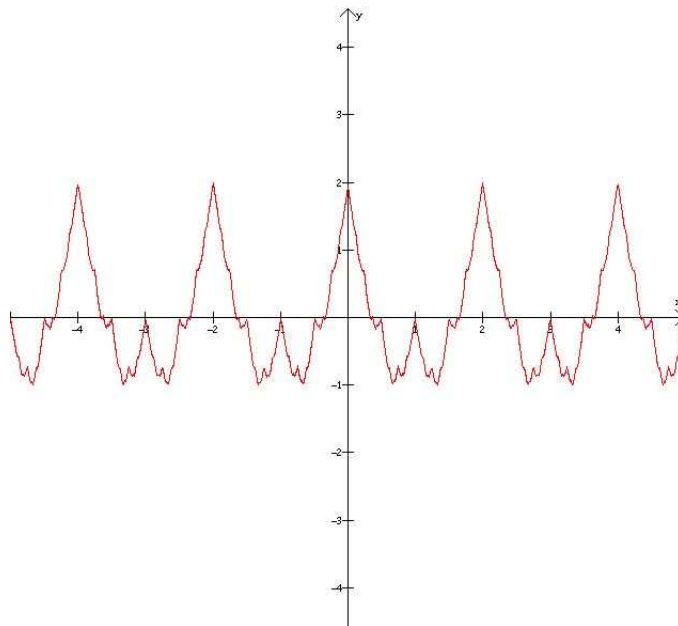


Figura 4.1: Função de Weierstrass

Conclusões

Este trabalho tem como objetivo o resgate, ainda que parcial, da vida e a obra de Joaquim Gomes de Souza. A parte matemática foi levemente tocada, dada a natureza da forma de como se apresenta no *Mélanges de Calcul Intégral*, (1882). O aprofundamento requer tratamento muito especializado e ainda está por ser feito, considerando-se que, segundo nossa opinião, Gomes de Souza produziu matemática de bom nível até mesmo para os padrões atuais desde então até aqui. As dificuldades quanto ao tratamento matemático se apresentam pela forma que escreveu, com saltos e omissões de passagens fundamentais para entendimento e exploração à luz da matemática de agora.

Francisco de Oliveira Castro, em *A matemática no Brasil*, 2ª edição, 1999, descreve com precisão a questão do estudo da obra de Gomes de Souza.

Na verdade, a obra de Gomes de Sousa (grafada com s) não pode ser apreciada tão-somente à luz dos atuais critérios de rigor científico. No seu tempo, a reconstrução lógica da análise mal se tinha iniciado com os trabalhos de Cauchy. Muito embora contenham seus escritos repetidas referências aos *Exercices de mathématiques*, de Cauchy, ao cálculo dos resíduos e aos trabalhos de Laplace, Abel e Liouville, eram outros os autores de sua predileção. Fundamentalmente interessado por assuntos de física e matemática, deixou-se guiar por Euler, Fourier e Poisson. Não compartilhava dos exageros de Cauchy e Abel, que queriam banir da análise o emprego das séries divergentes. (...) Na falta de meios poderosos, utiliza as séries divergentes como instrumento de descoberta e, nesse e em outros pontos, invoca em seu favor idéias análogas a de De Morgan.

Em seguida, após comentar que “a significação da obra de Gomes de Souza não deve ser, em verdade, exagerada...” cita G. H. Hardy como especialista da moderna teoria das séries divergentes e como meio de melhor compreensão da obra de Souzinha:

It is a mistake to think of Euler as a 'lose' mathematician, though his language may sometimes seem loose to modern ears; and even his language sometimes suggest a point of view far in advance of the general ideas of his time.

The puzzles of the time about divergent series arose mostly, not from any particular mystery in divergent series as such, but from disinclination to give formal definitions and from the current theory of functions.

Recorre em seguida a Teodoro Ramos quando este sugere “Examinar à luz da análise moderna as condições de validade das fórmulas obtidas por Gomes de Souza” e conclui afirmando que esse trabalho está por se fazer e, por fim, acrescenta

(...) a obra de Gomes de Sousa, além de seu valor intrínseco, tem uma significação toda especial, pois representa o verdadeiro início da pesquisa matemática no país. Em Gomes de Sousa, teve também o Brasil o seu primeiro matemático, na verdadeira acepção de quem é capaz de formular novos problemas e indicar o meio de resolvê-los.

Vale ressaltar, entretanto, o ótimo trabalho do professor Sergio Nobre e seus alunos, da UNESP-Rio Claro, as relevantes contribuições do professor Ubiratan D'Ambrosio, bem como do professor Clóvis Pereira da Silva. Esses ilustres pesquisadores, entre outros, têm contribuído muito com a história da matemática brasileira não deixando que nomes importantes da nossa história caiam no limbo do esquecimento.

Esse trabalho tem a pretensão de fornecer material auxiliar com o objetivo de munir professores de história da matemática, dando ênfase ao século XIX,

juntamente com informações sobre Gomes de Souza. Subjacente ao que está escrito, estão os conceitos mais sutis dentro da Matemática de hoje. Tratamos de fundamentar o conceito de função, e para isso, discorremos no capítulo IV sobre a história da sua evolução, apresentando também o exemplo de Weierstrass de funções contínuas sem derivadas.

Mesmo matemáticos reconhecidamente competentes, cometeram deslises quando não atentaram para o rigor matemático nas demonstrações, inclusive Gomes de Souza. O próprio Cauchy que tanto fez pelo rigor e precisão dos conceitos de convergência de séries, por exemplo, fez uso destes.

Coube a Abel, ao próprio Cauchy e a Weierstrass, entre outros, tornar a matemática e seus conceitos mais consistentes, confiáveis e seguros. Enfim... não podemos perder de vista que todos, apesar da inteligência diferenciada, do trabalho árduo e da capacidade técnica, são humanos, e portanto falíveis.

Gomes de Souza, apesar dos deslises matemáticos que cometeu, deixou uma obra com grandes idéias matemáticas, que valem uma pesquisa mais aprofundada, como já dissemos. Isso pode trazer algum fruto para essa ciência. Por exemplo, será possível achar uma série convergente que se aproxima de maneira desejável de uma outra divergente, ambas com termos de funções contínuas? O desejável é que possamos em alguns casos substituir uma pela outra. Para Souzinha isso era possível de maneira geral, mas não é verdade. Quando isso seria possível? Em que casos? Pelo que sei, isso não foi estudado até hoje.

Algumas funções como a função gama e a função beta de Euler, a função seno integral, a função logaritmo integral, entre outras, que admitem desenvolvimento assintótico, podem ser substituídas satisfatoriamente (para valores desejados muito grandes) por séries assintóticas, que são em geral divergentes. Gomes de Souza não vislumbrou esse resultado. Gomes de Souza nos mostra que a tarefa de bem fundamentar e contribuir significativamente para o grande monumento do espírito humano, que é a matemática, é tarefa para poucos, assim como são os poucos da música, da literatura, das artes, quando na sua autobiografia, comentando sobre os *Métodos Gerais de Integração*, afirmando:

Amando acima de tudo as Ciências que têm por objetivo o estudo da Natureza, determinei-me a estudar Matemática, para melhor conhecê-las. Quando, porém, se começa esse estudo, pára-se a cada momento diante das dificuldades insuperáveis que o Cálculo Integral oferece. Se há, entretanto, alguma coisa verdadeiramente sedutora é o estudo desse ramo da Análise.

As dificuldades do Cálculo vencidas, podemos voltar mais particularmente nosso espírito à observação dos fenômenos da Natureza, seguros de que, se encontrarmos uma relação qualquer entre o fenômeno e a causa procurada, e outras que se podem ver e medir, será sempre possível voltar à primeira.

Meu primeiro fim foi atingido; quando, porém, vou proceder ao segundo, o de aplicar estas fórmulas e interrogar a própria Natureza, vejo-me talvez obrigado a parar! Métodos gerais de integral foram descobertos, é verdade, mas minha saúde está destruída e meu organismo consumido, o estado dos meus olhos não me permite talvez mais a me entregar às pesquisas, onde a mais profunda atenção e a perseverança mais assídua são absolutamente necessárias.

Se, porém, sou forçado a parar aqui, e não me é permitido ver desenrolar diante dos meus olhos a cena a que a minha imaginação tantas vezes tem sido lançada, terei pelo menos o prazer de ter aberto o caminho para os outros, e de saber que será permitido agora ao homem ler de uma maneira mais profunda no seio do Criador. [30]

Estudar a obra de Gomes de Souza não é tarefa fácil, particularmente a obra matemática. Gostaríamos de realizar o sonho de Souzinha, dar continuidade ao caminho que trilhou. O que fizemos aqui foi chamar a atenção para o trabalho imenso que ainda está por ser feito. Uma pequena parte fizemos, é verdade, mas acreditando que possamos ter contribuído de alguma forma. Até aqui chegamos e pretendemos continuar, até que a natureza nos acolha em seu seio, pois sonhos se fazem quando nos propomos realizar.

Referências Bibliográficas

- [1] BELLANDI Filho, José., *Funções especiais*, Campinas-SP. Papirus, 1985.
- [2] BUTIKOV, Eugene., *Física Matemática*, Rio de Janeiro-RJ. Contaponto, 1995.
- [3] BOYER, Carl B., *História da Matemática*, São Paulo-SP. 2ª ed. Edgard Blücher Ltda, 1999.
- [4] BOYCE Willian E., DiPrima, Richard C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value problems* USA, Third Edition, 1977.
- [5] CORREIA, Leopoldo., *Biografia de Joaquim Gomes de Souza*, Belo Horizonte-MG. Littera Maciel, 1984.
- [6] CASTRO, F. M. de Oliveira., *A Matemática no Brasil*, Campinas-SP. 2ª ed. Editora da UNICAMP, 1999. (p. 36)
- [7] COSTA, Wagner Cabral da., *História do Maranhão: novos estudos. (Org.)*, São Luís-MA. EDUFMA, 2004.
- [8] COURANT, Richard e Robbins, Herbert., *O que é matemática?*, Rio de Janeiro- RJ. Ed. Ciência Moderna Ltda, 2000.
- [9] CAJORI, Florian., *Uma História da Matemática*, Rio de Janeiro-RJ. Ciência Moderna Ltda, 2007.
- [10] EVES, Howard., *Uma História da Matemática*, Campinas-SP. Editora da UNICAMP, 2004.

- [11] EDWARDS, C. H., Penney, David E. *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*, Rio de Janeiro-RJ. Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1995.
- [12] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro-RJ. 4ª ed. IMPA, 2007.
- [13] GARBI, Gilberto Geraldo., *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, São Paulo-SP. Editora livraria da Física, 2006.
- [14] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz., *Um Curso de Cálculo, Volume 4*, Rio de Janeiro-RJ. 5ª ed. LTC, 2002.
- [15] KREYSZIG, Erwin., *Matemática Superior, Volume 2*, Rio de Janeiro-RJ. LTC, 1969.
- [16] KUDRIÁVTSEV, L. D., *Curso de Analisis Matemático, Volume 2*, URSS. Editorial Mir Moscú, 1984.
- [17] KOLMOGOROV, A. N., Fomin, S. V., *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*, URSS. Editorial Mir Moscú, 1972.
- [18] KAPLAN, Wilfred., *Cálculo Avançado, Volume 1*, São Paulo-SP. Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1972.
- [19] KAPLAN, Wilfred., *Cálculo Avançado, Volume 2*, São Paulo-SP. Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1972.
- [20] LEAL, Antônio Henriques *Pantheon Maranhense. Ensaios Biográficos dos Maranhenses ilustres já falecidos*, Rio de Janeiro-RJ. Editorial Alhambra, 2ª ed. Tomos I e II, 1987. (p. VII-VIII, 240, 241, 242,)
- [21] LINTZ, Rubens Gouveia., *História da Matemática*, Campinas-SP. UNICAMP (Coleção CLE, V. 46), 2007.

- [22] LIMA, Elon Lages., *Análise Real Volume 1. Funções de Uma Variável*, Rio de Janeiro-RJ. IMPA, 2006.
- [23] MEIRELES, Mário M., *História do Maranhão*, São Paulo-SP. Siciliano, 2001.
- [24] MARKUSHEVICH, A., *Teoria de las Funciones Analíticas, Tomo I*, URSS. Editora Mir Moscú, 1970.
- [25] MEDEIROS, Luiz Adauto da Justa., *Introdução às Funções Complexas*, Rio de Janeiro-RJ. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972.
- [26] OLIVEIRA, Edmundo Capelas de., *Funções Analíticas e Aplicações*, São Paulo. Editora Livraria da Física, 2006.
- [27] PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral, Volume I*, Porto, Editora Lopes da Silva, 1997.
- [28] PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral, Volume II*, Porto, Editora Lopes da Silva, 1997.
- [29] POINCARÉ, Henri., *O Valor da Ciência*, Rio de Janeiro-RJ. Contraponto, 1995.
- [30] PORTELA, João Bacelar., *Gomes de Souza e Sua Obra*, São Luís-MA. Editora da UFMA, 1975.
- [31] RUDIN, Walter., *Princípios de Análise Matemática*, Rio de Janeiro-RJ. Editora Universidade de Brasília, 1971.
- [32] SILVA, Clóvis Pereira da., *A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*, São Leopoldo-RS. 2ª ed. Editora Usininos, 1999. , (p. 153-154)
- [33] SOUZA, Joaquim Gomes de., *O Modo de Indagar Novos Astros sem Auxílio das Observações Directas*, Rio de Janeiro. Typographia de Teixeira & C.^a, 1848. , (p. 2, 5 e 14)

- [34] SOUZA, Joaquim Gomes de., *Mélanges de Calcul Intégral. Ouvrage Posthume*, Leipzig. Imprimiere de la F. A. Brockhaus, 1882. , (p. 55, 165, 166, 174, 202)
- [35] D'AMBRÓSIO, Ubiratan., *Uma história concisa da matemática no Brasil*, Petrópolis, RJ : Vozes, 2008. (P. 48).
- [36] STEWART, James., *Cálculo, Volume 2*, São Paulo-SP. 2ª ed. Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [37] VALENTE, Wagner Rodrigues., *uma história da matemática escolar no brasil (1730 – 1930)*, São Paulo-SP. 2ª ed. Annablume: FAPESP, 1999.
- [38] <http://www.netsaber.com.br/biografias>. 06 de outubro de 2008, 21h:30m.
- [39] [http://pt.wikipedia.org/Dicionário bibliográfico português. Estudos aplicáveis a Portugal e ao Brasil](http://pt.wikipedia.org/Dicionário_bibliográfico_português._Estudos_aplicáveis_a_Portugal_e_ao_Brasil), Lisboa: Imprensa Nacional, 1858-1923. 21 de agosto de 2008, 23h:40m.
- [40] <http://www.dmm.im.ufrj.br/doc/otto.htm>/Otto de Alencar Silva, por Clovis Pereira da Silva Curitiba, novembro de 1997. 28 de agosto de 2008, 22h:00m.
- [41] <http://www.colegioweb.com.br/biografias/manuel-amoroso-costa>. 28 de agosto de 2008, 22h:30m.
- [42] www.profcardy.com. 15 de outubro de 2008, 10h:35m.
- [43] <http://matematicanolimite.blogspot.com/2008/04/historia-das-sequencias-e-series>. 08 de outubro de 2008, 11h:25m.
- [44] <http://pt.wikipedia.org>. 27/11/2008, 13h:42m.

Anexo

1. Retrato de Joaquim Gomes de Souza



Figura 4.2: Retrato de Joaquim Gomes de Souza

2. Frontispício da tese de Joaquim Gomes de Souza. Apresentação, Clóvis Pereira da Silva - Fac-símile da edição original, 1848.

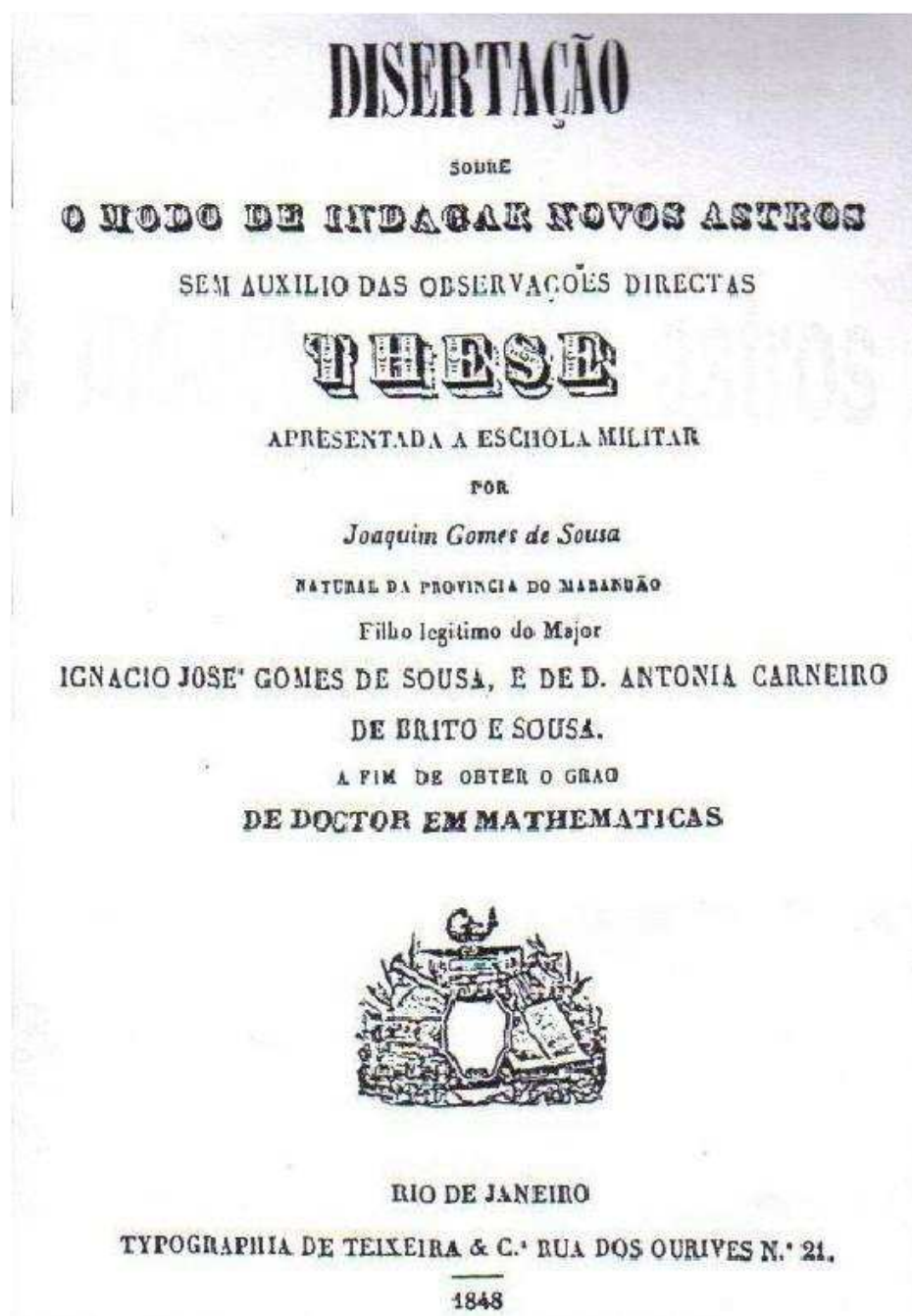


Figura 4.3: Frontispício da tese de Joaquim Gomes de Souza

3. Frontispício de Mélanges de Calcul Intégral

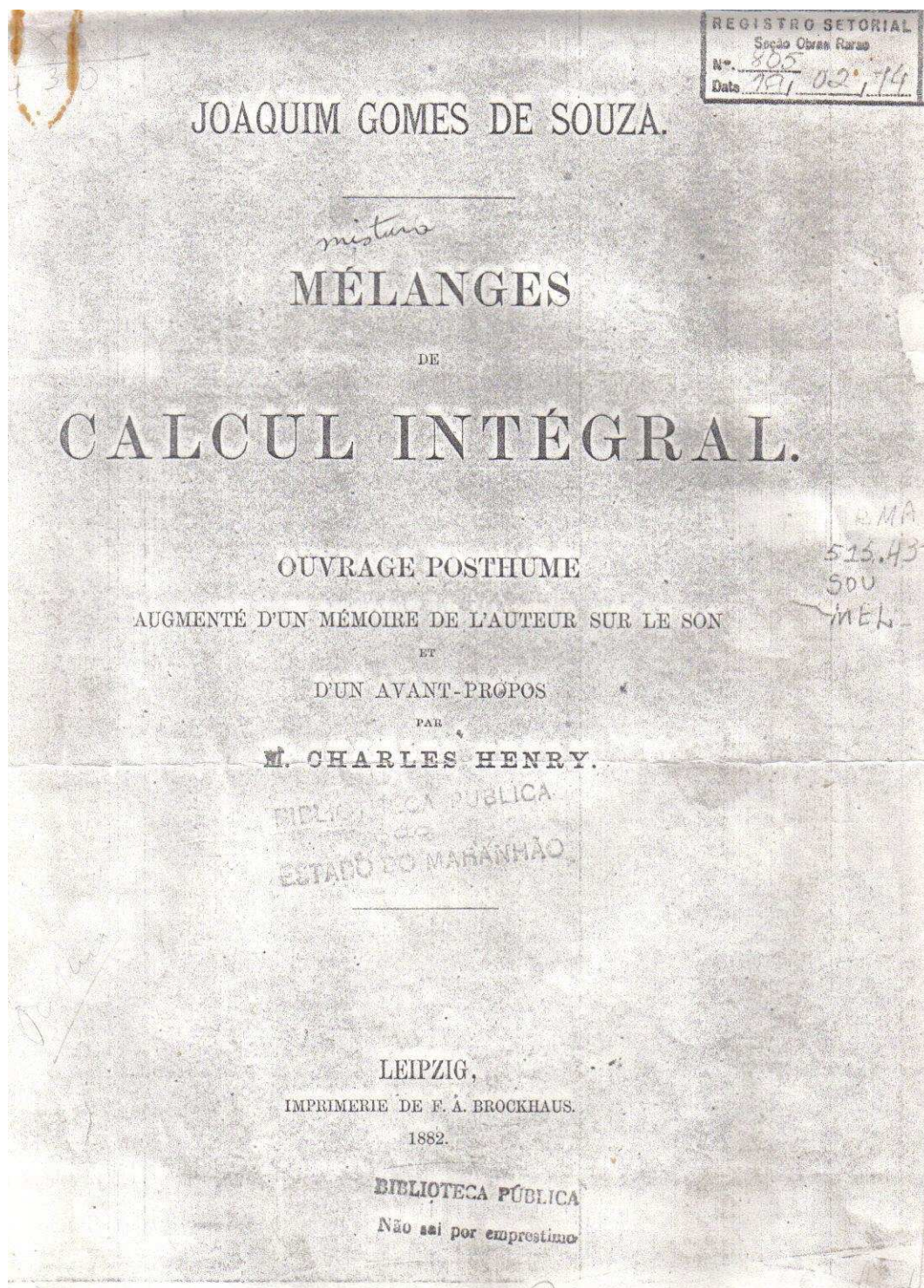


Figura 4.4: Frontispício de Mélanges de Calcul Intégral

4. Frontispício de Anthologie Universelle

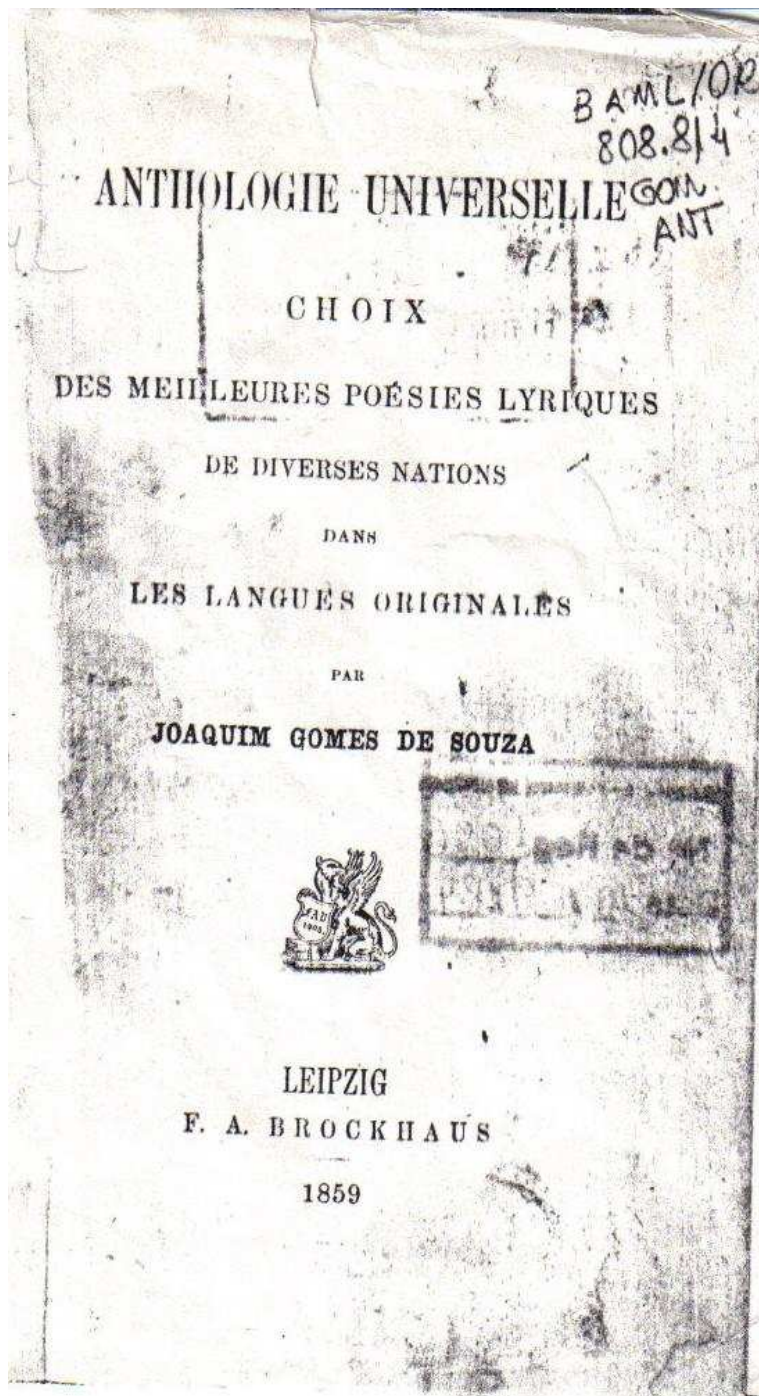


Figura 4.5: Frontispício de Anthologie Universelle

5. Nota publicada no Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XL, p. 1310.

M. J. Gomez de Souza soumet au jugement de l'Académie un travail ayant pour titre: *Mémoires sur la détermination de fonctions qui retrent sous le signe d'intégration définie.*

Ce travail, qui se compose de sept fascicules, est revoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. Liouville, Lamé, Bienaymé.

6. Nota publicada no Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, p. 1119.

M. Gomes de Souza commence la lecture d'un Mémoire intitulé: *Addition à un Mémoire sur la détermination de fonctions qui retrent sous le signe d'intégration définie.*

(Commissaires précédentes nommés MM. Liouville, Lamé, Bienaymé.)

7. Nota publicada no Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XLI, p. 100.

M. J. Gomez de Souza soumet au jugement de l'Académie deux nouveaux Mémoires *d'analyse mathématique* et un Mémoire sur la *théorie du son*.

(Revoi à l'examen des Commissaires nommés pour de précédentes communications de l'auteur, MM. Liouville, Lamé, Bienaymé.)

8. Nota publicada no Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XLIII, p. 168.

M. Gomes de Souza prie l'Académie de vouloir bien hâter le travail de la commission qui a été chargée de l'examen de ses diverses communications concernant des questions d'analyse mathématique. M. de Souza devant quitter prochainement la France, et probablement pour n'y plus revenir, désire vivement obtenir sur ses travaux un jugement de l'Académie.

9. Nota publicada no Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,

tome XLIV, p. 477.

M. Gomes de Souza, professeur à la Faculté de Mathématiques de Rio-Janeiro, soumet au jugement de l'Académie un travail portant pour titre: *Mémoires sur la détermination de fonctions qui retrent sous le signe d'intégration définie*.

Ce travail très-étendu, et qui est accompagné d'un extrait lui-même trop long pour trouver place dans le *Compte rendu*, est reovoyé à l'examen de la Commission déjà désignée pour d'autres communications du même auteur, Commission qui se compose de MM. Liouville, Lamé et Bienaymé.

No livro *Uma história concisa da matemática no Brasil, 2008*, no capítulo 5, Ubiratan D'Ambrósio dedica o item 4 a Joaquim Gomes de Souza. Transcreveremos e comentaremos, a título de informação, partes desse item. Ora concordando, outrora apresentando contra-ponto às informações ali contidas. O autor inicia o item mencionado apresentando Gomes de Souza como o detentor do primeiro doutorado em *Ciências Matemáticas* no Brasil e grafa o nascimento e morte como (1829 – 1864), respectivamente. Na página 54, escreve:

Em 1860 morre sua esposa, no Maranhão, e em 1862 também morre seu filho. Em fevereiro de 1864, muito doente, casa-se novamente. Em março de 1864 faz uma viagem à Inglaterra para tratamento de saúde, vindo a falecer no dia 1º de junho do mesmo ano.

No *Pantheon Maranhense - Ensaios biográficos dos maranhenses ilustres já falecidos*, de Antônio Henriques Leal, nas páginas 251 e 252, obra também citada pelo autor, encontra-se o seguinte relato:

Progredia a enfermidade e o Dr. Gomes de Sousa, desalentado de esperanças, deixava a melancolia apoderar-se dele. No Maranhão aparecera-lhe hemoptises, cuja causa eficiente, ou estivesse localizada nos pulmões, ou se explicasse por um retrocesso, minava-lhe contudo a existência uma consumação lenta até que por último lhe extinguiu.

(...) foi morar no pitoresco e sossegado morro de Santa Tereza, (...) Era-lhe convizinha a família do Dr. Guerra. A filha deste, a *Ex.^{ma} Sr.^a* D. Paulina, penalizava-se da grande dor que ressumbrava do ar enfermigo daquele moço todo entregue às suas mágoas e em tão completa soledade! (...) a *Ex.^{ma} Sr.^a* D. Paulina, senhora de grandes espíritos e cultura, cativa dele, vindo por fim os laços de mútuo afeto que já os prendia, estreitarem-se mais por seu consórcio, efetuado em 8 de fevereiro de 1863.

Em março apareceu-lhe pertinaz diarréia. (...) Gomes de Sousa, a despeito de seus conhecimentos médicos, entendeu que seu restabelecimento dependia de uma viagem à Europa, e não houve opor-se a um tal projeto; confiado, como estava, que acharia aí seu remédio e cura.

(...) Partiu com a esposa nesse mês e a 8 de abril chegou a Southampton, mas tão debilitado de forças que foi de mister desembarcá-lo em braços. Seguiu daí sem demora para Londres onde o examinaram e medicaram os facultativos ingleses e franceses que tinham maior nomeada na grande capital, mas apesar dos esforços da ciência, dos desvelos e carinhos da mulher, da caridosa e vigilante assistência dos sogros e cunhados (pais e irmãos de sua primeira mulher), que não arredaram pé de seu leito de agonia, e substituíram a presença e zelo da família do Dr. Gomes de Sousa, tudo foi baldado e improfícuo! No dia 1º de junho de 1863 sucumbiu ele a tão incurável e grave enfermidade.

Herinques Leal, a despeito da sua narrativa poética e bem ao seu estilo, parece não ter dúvidas quanto às datas mencionadas, tanto do casamento quanto da morte de Gomes de Souza. Há, portanto, uma discordância de datas entre os dois autores. Reafirma essa nossa observação quando em seguida escreve:

A fatalidade pesava sobre o Maranhão! Seus quatro maiores engenhos

tinham desaparecido em pouco mais de um ano e todos longe dos amigos e da pátria, e sem acharem até hoje - três deles - sepultura na terra natal! João Lisboa, na capital do reino de Portugal, a 26 de abril de 1863, Gomes de Sousa em 1º de junho do mesmo ano. Odorico Mendes a 18 de agosto de 1864, em Londres, e por último Gonçalves Dias, a 3 de novembro desse mesmo ano, tendo o oceano por sudário.

Em consulta a outros documentos que tratam das biografias de João Lisboa, Odorico Mendes e Gonçalves Dias, não há desencontro de informação quanto as datas de nascimento e morte fornecidas por Henriques Leal. Naturalmente é possível que estivesse errado, mas essa hipótese carece de informação que a comprove ou a negue. Por outro lado, Henriques Leal ao finalizar o capítulo sobre Gomes de Souza, erra ao grafar a idade em um ano a mais. Na página 254 da obra já referida, comenta:

Assim, com **trinta e cinco anos**, (grifo nosso) finou-se quem encheria o mundo com o seu nome, se perseverasse na carreira tão bem estreada e houvesse ao menos terminado e dado à luz os trabalhos que havia concebido e rascunhado.

Ubiratan D'Ambrósio anota ainda na página 54

Um erro que, lamentavelmente, foi incorporado à historiografia da matemática no Brasil, é a data de morte de Joaquim Gomes de Sousa, que aparece erroneamente como 1º de junho de 1863. A origem do erro é o capítulo de Antônio henriques Leal, publicado no *Pantheon Maranhense*, São Luiz, em 1873.

Não havendo outros documentos que atestem uma das datas mencionadas, ficamos temerosos em afirmar uma delas. Optamos, porém, pela primeira, considerando-se a anterioridade e o fato de o autor ter sido um contemporâneo e biógrafo de Gomes de Souza. Acreditamos que o erro pode ter sido cometido ao afirmar que

a idade era de trinta e cinco anos ao invés de trinta e quatro.

Em seguida, o autor se coloca de forma cética quanto a importância da obra de Gomes de Souza quando escreve:

Sua obra matemática, talvez menos importante que sua presença política no Segundo Império, ficou disponível na forma de memórias póstumas, publicadas em 1882 com o financiamento do governo brasileiro. Ainda não foi feito um estudo detalhado desta importante obra.

Recorremos novamente a Henriques Leal, quando comenta sobre a eleição compulsória de Gomes de Souza para o parlamento brasileiro. Nas páginas 248 e 249, encontramos:

Amigo dele, seu sincero admirador sobre ser zeloso da sua glória científica que a política ia empanar, improvei essa candidatura, tendo-a para mim como um delito, e neste sentido escrevi mais de um artigo na *Conciliação*, Jornal de que fui um dos redatores. Se há aí de que me pese, não é de terem-se afrouxado os laços de nossa amizade em consequência do meu procedimento nessa conjuntura, porém de não ter tido bastante talento e influência para impedir que se consumasse o fato.

O que resultou, com efeito, de tudo isto? Que a ciência perdeu quem a poderia adiantar, ao passo que o país não ganhou nele um bom político!

Ainda na página 254 do *Pantheon Maranhense*, Henriques Leal reafirma a sua posição não concordando que Gomes de Souza tenha abandonado a ciência para se dedicar à política, não tendo nesse ramo experiência alguma.

Repito-o, pois, à saciedade que deploro do fundo da alma não chegasse o Dr. Gomes de Souza a erguer os monumentos científicos, cujos materiais estava aparelhando e foram postos de banda para ocupar-se da política, onde, se colheu essas efêmeras gloriolas parlamentares,

adquiriu também a enfermidade que o roubou de improviso à pátria que tinha muito a esperar dele.

Na página 51, D'Ambrósio faz um resumo da empreitada de Gomes de Souza junto à *Academie des Sciences* de Paris quando submeteu suas “memórias” à comissão formada por Joseph Liouville, Gabriel Lamé e Irénée-Jules Bienaymé. Posteriormente passou a integrar essa comissão Augustin Cauchy, segundo o autor cita conforme o tomo 42 (1856), p. 1175.

Mais adiante o autor anota:

Na troca de correspondência entre os avalizadores do trabalho, são apontados erros e dificuldades para entender as notações e as sequências de demonstração. Desse modo os editores justificam a reação negativa à publicação.

Observamos, porém, que a comissão era formada por franceses e membros da mesma academia. Havia a necessidade de comunicação através de carta? E se havia, há algum registro que as comprovam? Não temos respostas a essas indagações. Mais adiante, agora com base em documentos, o autor comenta:

Em 1856, Sousinha submete à *Royal Society* de Londres o trabalho *On the determination of unknown functions which are involved under definite integrals*. O trabalho é comunicado pelo então secretário da *Royal Society*, G. G. Stokes (1820-1903). Nesta comunicação, publicada no *Proceedings of the Royal Society*, 1856, p. 146 - 149, Stokes diz que o autor aborda “o problema famoso cuja solução tem sido procurada em vão nos últimos duzentos anos”, que é determinar a função φ que, sendo dadas as funções f e F e os limites de integração α e β , satisfazem a equação

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta) \varphi(x + \theta) d\theta = F(x).$$

Stokes diz que o autor obteve uma solução, baseada em resultados apresentados à *Academie des Sciences* de Paris, na forma de um teo-

rema e esboça a demonstração, uma dentre muitas obtidas. Em 1º de novembro do mesmo ano, o fisiologista Willian Sharpey (1802-1880), também Secretário da *Royal Society*, comunica, em uma nota de 5 linhas, que Gomes de Souza enviou à sociedade um *Addition* à memória anterior, generalizando o resultado comunicado por Stokes.

Assim como na *Academie des Sciences*, a troca de correspondência entre os avaliadores do trabalho de Sousinha na *Royal Society*, indicam contra-exemplos, reclamam da utilização de notação confusa e de falta de clareza.

Mais uma vez remetemo-nos à base documental, embora tenhamos consciência que a história não é feita somente com base em documentos. Acreditamos que se trata somente de uma forte opinião do autor, como ele próprio admite a seguir em outra situação avaliativa.

A troca de correspondência com Sousinha deixa claro que o trabalho não seria aceito. A negativa foi dada a ele de forma muito sutil, tentando não ofendê-lo. Isso talvez tenha sido um reflexo do prestígio de Dom Pedro II junto às academias européias. As correspondências de D. Pedro II às academias da França e da Inglaterra talvez possam ajudar a esclarecer o porquê desse tratamento dado a Joaquim Gomes de Sousa. **É possível que isto seja o produto de minha fantasia,** (grifo nosso) mas é importante notar que D. Pedro II era o único monarca no Novo Mundo, ligado distintas dinastias européias, e na época havia um esforço para restaurar monarquias na Europa e, possivelmente, estendê-las ao Novo Mundo. No período da visita de Sousinha à Europa, Louis Napoleão havia se proclamado Imperador Napoleão III (1852) e estava em pleno esforço para restaurar a monarquia francesa, um projeto fracassado que chegou ao fim em 1870.

Como já dito exaustivamente ao longo do trabalho, que muito está ainda por ser feito quanto a obra de Gomes de Souza, concordamos com o autor quando afirma que “ainda não foi feito um estudo detalhado desta importante obra”. Assim sendo, encerramos aqui esse anexo agradecendo ao renomado professor Ubiratan D’Ambrósio que possibilitou essas informações. A sua contribuição e importância dentro da hitoriografia matemática brasileira é inegável.

O livro aqui referendado *Uma história concisa da matemática no Brasil*, além de informações preciosas, traz ainda o excelente prefácio do não menos renomado professor Sérgio Nobre, Presidente da Sociedade Brasileira de História da Matemática.