ATUAÇÃO TRANSITIVA DE UM GRUPO DE LIE

DEFINIDA PELA SUA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

MIRIAM SAMPIERI SANTINHO

ORIENTADOR

PROF.DR.EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas, junho de 1979.

Para José Guilherme
e meu filho Guilherme

A José Guilherme

pelo incentivo, apoio e confiança nas horas difíceis.

Aos meus parentes e a todos os colegas da da Unicamp, que me animaram e apoiaram neste caminho.

A Eduardo Sebastiani Ferreira

pela proposição e orientação deste trabalho.

Ao CNPq e à CAPES

pelo apoio financeiro concedido.

A DEUS

deixo aqui todo o meu agradecimento.

MIRIAM SAMPIERI SANTINHO

ATUAÇÃO TRANSITIVA DE UM GRUPO DE LIE

DEFINIDA PELA SUA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

INTRODUÇÃO

Dentro da pesquisa matemática, um dos assuntos de maior interesse é o estudo de equações diferenciais a derivadas parciais.

O teorema principal desta dissertação [7] foi feito na forma clássica por S.Lie [6], para uma álgebra de Lie de campos de vetores, e provado por E. Cartan [1], para um grupo de transformações locais de Lie.

Para um pseudogrupo de dimensão infinita, Kuranishi [4] deu uma condição suficiente no sentido de que pode ser definido por uma equação diferencial parcial. Também, para uma álgebra de Lie de campos de vetores de dimensão infinita, Singer e Sternberg [10] deram a condição suficiente, no sentido de que pode ser definido por uma equação diferencial parcial.

Este teorema não está contido nestes resultados como um caso especial. Quanto à sua aplicabilidade na resolução de equações diferenciais, é mais um passo para se generelizar a resolução das mesmas.

No capítulo I, são apresentadas definições e teoremas necessários a uma leitura proveitosa desta dissertação.

No capítulo II, define-se o espaço dos k-jatos de difeomorfismos locais com fonte x e alvo na variedade M, denotado por $D^k(x,M)$; e também o grupo de Lie $H^k(x,M)$, subconjunto de $D^k(x,M)$, constituido pelos k-jatos de difeomorfismos locais com fonte e alvo em x. Em seguida, no parágrafo 2 deste capítulo, é definido o conjunto dos k-jatos de difeomorfismos de M deduzidos da ação do grupo de Lie G em M. No parágrafo 3, deste mesmo capítulo, constrói-se a k-forma estrutural ω^k.

No capítulo III o objetivo principal é atingido, demonstrando o teorema que caracteriza as operações de um grupo de Lie G, atuando em uma variedade M.

CAPÍTULO I

NOÇÕES GERAIS

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e teoremas utilizados no desenrolar desta dissertação, visando fornecer ao leitor um quadro geral dos pré-requisitos necessários para um bom acompanhamento das idéias expostas.

Definição 1.1- Um grupo de Lie é um conjunto G que satisfaz as seguintes propriedades:

1) O conjunto G possue uma estrutura de grupo e uma estrutura de variedade.

2) A aplicação μ de GxG em G, que a cada par (x,y) corresponde xy é diferenciavel e a aplicação i de G em G, que a cada x corresponde x^{-1}, é diferenciavel.

Para g em G, L_g e R_g designam as translações, respectivamente à esquerda e à direita, definidas por $L_g(x)=gx$ e $R_g(x)=xg$.

Definição1.2- Um campo de vetores X sobre G, grupo de Lie, é dito invariante à esquerda (respectivamente à direita) se

$$(L_g)_*X = X$$

para todo g em G (respectivamente $(R_g)_*X = X$).

O conjunto dos campos de vetores sobre G, invariantes à esquerda é uma álgebra de Lie com respeito ao colchete de Lie.

Definição 1.3- A álgebra de Lie de todos os campos de vetores sobre G, invariantes à esquerda, é a álgebra de Lie do grupo G.

Definição 1.4- Um subconjunto h de uma álgebra de Lie k, é uma subálgebra de Lie de k se:

1) O subconjunto h é um subespaço vetorial de k.

2) Para todo X e Y em h tem-se [X,Y] em h.

Teorema 1.1- Se h é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie k de um grupo de Lie G, existe um único subgrupo de Lie conexo G, cuja álgebra de Lie é h. (vide [8] pag.III.44)

Definição 1.5- Se G e H são dois grupos de Lie então, H é um subgrupo de Lie de G se H é uma subvariedade de G e se H é um subgrupo de G.

Teorema 1.2- Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie de G.(vide [8] pag.54)

Definição 1.6- Se G é um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável, G atuará diferenciavelmente sobre M se existir uma aplicação diferenciável μ de GxM em M que, a cada par (g,x), com g em G e x em M, associa o elemento gx em M, que satisfaz as seguintes pro--

priedades:

1) para quaisquer g_1 e g_2 em G e x em M

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x).$$

2) para todo x em M

$$ex = x.$$

onde e é o elemento neutro de G.

A ação será dita transitiva quando, para todo x e y em M, existir um g em G tal que y=gx

Definição 1.7- Seja x um elemento fixado em M. O conjunto dos elementos g de um grupo de Lie G com a propriedade

$$gx = x$$

é chamado de grupo de isotropia de G no ponto x.

Para cada x em M, denotar-se-á por K^x o grupo de isotropia do elemento x de M.

Proposição 1.1- K^x é um subgrupo de Lie de G.

Demonstração: Verifica-se, sem dificuldade, que K^x é um subgrupo de G.

Também K^x é fechado em G. De fato: como a aplicação μ de GxM em M é diferenciável, a sua restrição a cada uma das componentes do produto cartesiano , também o será e ainda, se x pertence a M, a aplicação μ_x de G em M, dada por $\mu_x(g) = gx$, para g em G, é diferenciável e

$$\mu_x^{-1}(\{x\}) = \{g\varepsilon G \mid \mu_x(g)=gx=x\} = K^x ;$$

como $\{x\}$ é fechado em M, $\mu_x^{-1}(\{x\})$ é fechado em G e portanto o resultado segue.

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciaveis de dimensões m e n respectivamente, e seja f uma aplicação de uma vizinhança U de um ponto x de M_1 em uma vizinhança de um ponto y de M_2 , com $f(x)=y$. Duas aplicações são ditas equivalentes em x se elas coincidem em alguma vizinhança de x. A classe de equivalência contendo f é definida como o germe de f em x.

<u>Definição 1.8</u>- Seja k um inteiro positivo ou nulo. Duas aplicações f e f' como as acima, coincidem até ordem k para x, se elas tem o mesmo desenvolvimento em série de Taylor até ordem k, em termos de alguma(e portanto de toda) escolha de cartas coordenadas sobre x e y. A classe de equivalência de todas as aplicações que coincidem com f até ordem k em x, é chamada o k-jato de f em x e denotada por $j_x^k f$.

As aplicações que a um jato qualquer associam sua fonte e seu alvo, serão denotadas por α e β, respectivamente.

Seja X um jato de ordem k com fonte x_0 em M_1 e alvo y_0 em M_2, e consideremos as coordenadas locais numa vizinhança destes pontos. Seja I uma sequência de índices inteiros positivos ou nulos $(i_1, i_2, \ldots i_m)$, tal que $1 \leq i_1+i_2+\ldots+i_m \leq k$. Para todo $j=1,2\ldots,n$:

$$p_I^j(X) = \left(\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m} f^j}{(\partial x^1)^{i_1} \ldots (\partial x^m)^{i_m}} \right)_{x_o} .$$

O jato X é determinado por sua fonte, seu alvo e os números $p_I^j(X)$, definidos numa vizinhança do ponto X em relação às coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ de x_0 em M_1.

Definição 1.9- Um espaço fibrado principal diferenciável, denotado por (P, M, π, G), é composto dos seguintes elementos:

1) P e M são duas variedades diferenciáveis,

2) π de P em M é uma sobrejeção diferenciável,

3) O grupo de Lie G atua sobre P de tal maneira que, para todo x de M, existem uma vizinhança aberta U de x e um difeomorfismo Φ de $\pi^{-1}(U)$ em UxG definido por $\Phi(p) = (\pi(p), \psi(p))$, satisfazendo a condição $\Phi(pg) = (\pi(p), \psi(p)g)$. Isto que dizer que G atua simplesmente transitivamente sobre M. sendo Ψ uma aplicação diferenciável de P em G, tomada convenientemente.

A variedade M é chamada espaço de base, P é o espaço fibrado, G é o grupo estrutural, π é a projeção.

Definição1.10- Seja M uma variedade diferenciável. Uma distribuição analítica D de dimensão r sobre M é uma aplicação que à p em M faz corresponder um subespaço vetorial D_p, de dimensão r, de $T_p(M)$, talque: para todo p de M, existe U, vizinhança de p, e r campos de vetores diferenciáveis $X_1, \ldots, X_r$, definidos sobre U de tal maneira que

$$\{(X_1)_x, \ldots, (X_r)_x\}$$

gera D_x, para todo x em U.

O conjunto $\{X_1,\ldots X_r\}$ é a base local de D.

Definição 1.11- Uma distribuição analítica D é dita involutiva se para todo ponto de M, existir uma base local $\{X_1,\ldots,X_r\}$ de D, definida em uma vizinhança U de p, tal que o colchete $[X_i,X_j]$ pertence à D, para todo i e j entre 1 e r; isto é, $[X_i,X_j]_x$ pertence à D_x para todo x de U.

Definição 1.12- Seja N uma subvariedade de dimensão r de M. Diz-se que N é uma variedade integral da distribuição D se:

$$D_x = T_x(N) \quad ,$$

para todo x de N.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS DE K-JATOS DE DIFEOMORFISMOS DE M

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos e resultados, que serão utilizados no capítulo seguinte.

1- Espaços de k-jatos de difeomorfismos locais da variedade M

A variedade M será sempre diferenciavel (de classe C^∞).

Seja $D^k(x,M)$ o espaço dos k-jatos de difeomorfismos locais com fonte em x pertencente à M e alvo em qualquer ponto de M. O subconjunto de $D^k(x,M)$, consistindo dos k-jatos de difeomorfismos com fonte e alvo em x, é denotado por $H^k(x,M)$.

Proposição 2.1.1- O conjunto $H^k(x,M)$ é um grupo de Lie.

Demonstração: Existe sobre $D^k(x,M)$ uma estrutura natural de variedade diferenciavel, porque o conjunto dos jatos (não necessariamente inversíveis) de ordem k, com fonte x e alvo em M, é uma subvariedade fechada do conjunto dos k-jatos com fonte em qualquer ponto de M e alvo em M, e ainda $D^k(x,M)$ é um aberto desta subvariedade.

Agora, $H^k(x,M)$ é um aberto da variedade diferenciavel dos jatos (não necessariamente inversíveis) de ordem k, com fonte e alvo no ponto x de M pois, através de um sistema de coordenadas, a cada função associa-se a sua matriz e a esta o seu determinante; considera-se a função determinante do conjunto das matrizes em $\mathbb{R}$. A imagem inversa do zero por esta função é um fechado e é o conjunto das matrizes associadas às funções não inversíveis, e o seu complementar é um aberto da variedade diferenciavel dos k-jatos com fonte e alvo em x de M, e este aberto é o próprio $H^k(x,M)$.

A multiplicação em $H^k(x,M)$ exprime-se por meio de funções polinomiais e a aplicação que leva um elemento de $H^k(x,M)$ no seu inverso, se exprime por meio de funções racionais, quando expresso cada elemento de $H^k(x,M)$ por meio de coordenadas locais, provenientes de coordenadas de M.

O grupo $H^k(x,M)$ opera à direita em $D^k(x,M)$ pela composição usual de jatos, isto é, para $X=j_x^k f$ em $D^k(x,M)$ e $j_x^k h=Y$ em $H^k(x,M)$, tem-se $XY=j_x^k(foh)$.

A ação de $H^k(x,M)$ na fibra $(\pi^k)^{-1}(x)$ é transitiva pois, se $X=j_x^k f$ e $Y=j_x^k h$ pertencem a $H^k(x,M)$ então:

$$Y = j_x^k f = j_x^k(fof^{-1}oh) = j_x^k fo(f^{-1}oh) = j_x^k f\ j_x^k f^{-1}oh = X\ j_x^k f^{-1}oh\ .$$

Assim, $D^k(x,M)$ possue uma estrutura de fibrado principal de base M e grupo estrutural $H^k(x,M)$, denotado por

$$(D^k,M,\pi^k,H^k).$$

Seja j o homomorfismo diferenciavel de um grupo de Lie K em um grupo de Lie H com imagem j(K) denotada por G'. De modo geral, a imagem G' tem uma estrutura de subgrupo de Lie de H e ainda, a aplicação j de K em G' é diferenciavel. Serão analisados dois casos: um onde K e H são grupos de Lie conexos e outro onde os mesmos são grupos de Lie quaisquer.

<u>Proposição 2.1.2-</u> Sejam H e K grupos de Lie conexos. A imagem G' de K, pelo homomorfismo j de K em H, tem uma estrutura de subgrupo de Lie de H.

<u>Demonstração:</u> De fato, sejam k e h as álgebras de Lie de K e H respectivamente, e dj uma aplicação de k em h definida por:

$$dj(X)g = X(goj)oj^{-1}$$

com g em $C^{\infty}(H)$, conjunto das funções de H em $\mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, X em k e Y em H. A aplicação dj é um homomorfismo de álgebras de Lie pois:

$$dj[X,Y]g = [X,Y](goj)oj^{-1} = X(Y(goj))oj^{-1}-Y(X(goj))oj^{-1},$$

e

$$\begin{aligned}[djX,djY]g &= djX((djY)g)-djY((djX)g) = \\ &= X((djY)goj)oj^{-1}-Y((djX)goj)oj^{-1}= \\ &= X(Y(goj)oj^{-1}oj)oj^{-1}-Y(X(goj)oj^{-1}oj)oj^{-1} = \\ &= X(Y(goj))oj^{-1}-Y(X(goj))oj^{-1} .\end{aligned}$$

Ainda tem-se que Imdj=g é uma subálgebra de Lie de h, visto que se Y e Y' estão em g, então Y=djX, com X em k e Y'= djX', com X' em k. O colchete [Y,Y'] está em g, pois:

$$[Y,Y'] = [djX,djX'] = dj[X,X'] .$$

Como X e X' estão em k, tem-se que $[X,X']$ também está em k e assim $[Y,Y']$ é a imagem por dj de um elemento de k.
Seja agora G o subgrupo de Lie conexo de H, cuja álgebra de Lie é g. Então G é gerado pelos elementos $\exp dj(x)$, com X em k. Contudo Imj é gerada pelos elementos $j(\exp X)$, para qualquer X em k, desde que K é conexo.
Desta maneira

$$g = \{Y \varepsilon h \mid Y = dj(X), \text{para todo } X \text{ em } k\}$$

e ainda

$$G = \{a \varepsilon H \mid a = \exp dj(X)\}.$$

Como Imj está contida em H, então

$$Imj = \{b \varepsilon H,\ b = j(c);\ c = \exp X, \text{para todo } X \text{ em } K\}.$$

Desde que $j(\exp_k X) = \exp_h(dj(X))$, tem-se $G = Imj = G'$, pois ambos são conexos. Logo segue o resultado.

<u>Proposição 2.1.3</u>- Sejam K e H grupos de Lie. A imagem G' de K por j tem uma estrutura de subgrupo de Lie de H.

<u>Demonstração</u>: Sejam K_e e H_e as componentes conexas dos elementos neutros de K e de H respectivamente, e j um homomorfismo de K_e em H_e. Pela proposição 2.1.2., $Imj = j(K_e) = G'_*$ é um subgrupo de Lie conexo de H_e.
Seja $T_{g'}$ um automorfismo interno de G' para g', definido por: para qualquer x em G', $T_{g'}(x) = g'xg'^{-1}$, o qual aplica G'_* sobre H_e diferenciavelmente e sua imagem é G'_* mesmo. De fato: como $j(K_e) = G'_*$ está contido em H_e, pois j é um homomorfismo, a imagem da identidade $\underline{e}$ por j é o próprio $\underline{e}$, e a imagem de um conexo é tam-

bém conexa. Assim a identidade em H pertence a um conexo contido no próprio H, e como H_e é o conexo maximal contendo e, segue - se que $G_*'=j(K_e)$ está contido em H_e. Logo $T_{g'}$ poderá ser restrito à G_*', obtendo-se uma aplicação de G_*' em H_e. Resta provar agora que

$$T_{g'}/_{G_*'}(G_*') = G_*' \quad .$$

De fato: seja x em G_*'; então x é a imagem de um elemento k_e em K_e pela aplicação j . Seja g' em G_*' isto é, g' é a imagem de um elemento k em K, pela j. Desta maneira,

$$T_{g'}(x) = g'xg'^{-1} = j(k)j(k_e)j(k^{-1}) = j(kk_ek^{-1}) \quad .$$

Porém, (kk_ek^{-1}) está em K pois, como L_k e $R_{k^{-1}}$ são homomorfismos de grupos de Lie, tem-se $L_k o R_{k^{-1}}(k_e)=kk_ek^{-1}$, com k_e em K_e e

$$L_k o R_{k^{-1}}(K_e) \subset K_e \quad .$$

Por outro lado, seja y em G_*'; então existe $(g'^{-1}yg')$ em G_*', tal que

$$g'(g'^{-1}yg')g'^{-1} = y \quad .$$

Desde que G' é uma variedade integral da distribuição involutiva definida por sua álgebra de Lie, então $T_{g'}$ dá um difeomorfismo de G_*'.

Portanto G' tem uma estrutura de subgrupo de Lie de H, tal que sua componente conexa da identidade é G_*'(vide [8] , III.48).

Então denominando-se por G^k a imagem do homomorfismo diferenciavel j_x^k de K^x (def.1.7) em $H^k(x,M)$, o qual leva g em $j_x^k g$, segue o seguinte teorema; considerando $H^k(x,M) = H^k$:

<u>Teorema 2.1.1</u>- Para todo k, G^k é um subgrupo de Lie de H^k e, a

aplicação j_x^k de K^x em G^k é diferenciavel.

2- Espaços de k-jatos de difeomorfismos de M deduzidos da ação de um grupo G sobre M.

Denota-se por f_p o difeomorfismo de M deduzido da ação de G em M.

Seja P^k o conjunto dos k-jatos destes difeomorfismos, isto é

$$P^k = \{p^k = j_x^k f_p,\ \forall\, x \in M,\ \forall\, p \in G \text{ tal que } f_p(x) = px\} .$$

O grupo G atua em P^k da seguinte maneira:

$$g j_x^k f_p = j_x^k f_{pg} ,$$

para todo p e g em G.

Esta ação é diferenciavel pela diferenciabilidade da ação de G em M. A transitividade segue de: sejam $p^k = j_x^k f_p$ e $g^k = j_x^k f_g$ pertencentes a P^k. Então

$$g^k = j_x^k f_p = j_x^k f_{g(g^{-1}p)} = (g^{-1}p) j_x^k f_g = (g^{-1}p) p^k .$$

Seja K^k o subgrupo de isotropia de G no elemento $o^k = j_x^k id$ de P^k, isto é,

$$K^k = \{s \in G,\ so^k = o^k\} .$$

Seja G_{k-1}^k o conjunto dos k-jatos de f_q em K^{k-1} e fonte em x, ou seja,

$$G_{k-1}^k = \{j_x^k f_q,\ q \in K^{k-1}\} .$$

A atuação do subgrupo de isotropia K^{k-1} em G^k_{k-1} é dada por:

$$sj^k_x f_q = j^k_x f_{qs} \ ,$$

para todo s em K^{k-1}.

Proposição 2.2.1- O conjunto G^k_{k-1} é um grupo de Lie.

Demonstração: É evidente que G^k_{k-1} está contido em P^k, que é um grupo de Lie. Seja π^k_{k-1} a aplicação de P^k em P^{k-1}, tal que o elemento $j^k_x f_p$, de P^k, é levado em $j^{k-1}_x f_p$ de P^{k-1}.
Seja $H=(\pi^k_{k-1})^{-1} j^{k-1}_x id$. Então $H=G^k_{k-1}$. De fato: dados $j^k_x id$ e $j^k_x f_p$ em H como $j^{k-1}_x f_p = j^{k-1}_x id$, então p deixa fixo todo elemento de P^{k-1}, em particular fixa o^{k-1}, logo $j^k_x f_p$ está em G^k_{k-1}. Reciprocamente, se $j^k_x f_p$ está em G^k_{k-1}, então $p \varepsilon K^{k-1}$ isto é, $p^{k-1} = o^{k-1}$. Assim, $j^{k-1}_x f_p = j^{k-1}_x id$. Logo $j^k_x f_p \ \varepsilon$ H. Portanto G^k_{k-1} é fechado em G, imagem inversa pela π^k_{k-1} do ponto $j^{k-1}_x id$.

Desta maneira obtém-se o fibrado principal

$$(P^k, P^{k-1}, \pi^k_{k-1}, G^k_{k-1}) \ .$$

3- A k-forma estrutural ω^k.

A aplicação projeção π^k_{k-1} de P^k em P^{k-1}, é diferenciavel; assim existe a diferencial $(\pi^k_{k-1})_*$, que é uma aplicação de $T_{p^k}(P^k)$ em $T_{p^{k-1}}(P^{k-1})$, espaços tangentes à P^k, no ponto p^k, e à P^{k-1} no ponto p^{k-1}, respectivamente.

Seja g um difeomorfismo de P^{k-1} em P^{k-1}, tal que:

$$g(j^{k-1}_x f_p) = j^{k-1}_x f_{pg} \ ,$$

para qualquer p e g em G. Assim g^{-1} é um difeomorfismo, e existe a diferencial g^{-1}_{*}, que é uma aplicação de $T_{j_x^{k-1}f_g}(P^{k-1})$ em $T_{j_x^{k-1}id}(P^{k-1})$

Desta maneira obtém-se uma k-forma estrutural ω^k em P^k, com valores em $T_{j_x^{k-1}id}(P^{k-1})$, definida por:

$$\omega^k(p^k, X^k) = g^{-1}_{*}(\pi^k_{k-1})_{*}X^k \;,$$

com X^k em $T_{j_x^k f_g}(P^k)$ e $\pi^k_{k-1}(j_x^k f_g) = j_x^{k-1} f_g$.

O diagrama de ω^k pode ser expresso por:

$$\begin{tikzcd}
T_{j_x^k f_g}(P^k) \arrow[d, "(\pi^k_{k-1})_*"'] \arrow[dr, "\omega^k"] & \\
T_{j_x^{k-1} f_g}(P^{k-1}) \arrow[r, "g^{-1}_*"] & T_{j_x^{k-1} id}(P^{k-1})
\end{tikzcd}$$

<u>Proposição 2.3.1-</u> O grupo G deixa ω^k invariante em P^k, isto é,

$$\omega^k(hp^k, h_* X^k) = \omega^k(p^k, X^k) \;,$$

para todo h em G.

Demonstração: De fato,

$$\omega^k(hp^k, h_* X^k) = (hg)^{-1}_*(\pi^k_{k-1})_*[(h)_* X^k] =$$
$$= (g^{-1}h^{-1})_*(h)_*[(\pi^k_{k-1})_* X^k] =$$
$$= g^{-1}_*\ h^{-1}_*(h)_*[(\pi^k_{k-1})_* X^k] =$$
$$= g^{-1}_*(\pi^k_{k-1})_* X^k =$$
$$= \omega^k(p^k, X^k) \ .$$

Por outro lado dim $P^{k-1} \leqslant$ dim P^k, pois π^k_{k-1} é sobre, e ainda dim $P^k \leqslant$ dim G, porque para todo p e q em G, com $p \neq q$, pode ocorrer $j^k_x f_p = j^k_x f_q$. Logo dim $P^{k-1} \leqslant$ dim $P^k \leqslant$ dim G.

Portanto existe um inteiro k, tal que dim P^{k-1} = dim P^k, pois dim G é finita.

Seja ℓ o menor k tal que dim P^k = dim P^{k-1}.

A projeção $\pi^\ell_{\ell-1}$ é diferenciavel e sobrejetora com dim P^ℓ = dim $P^{\ell-1}$; então $\pi^\ell_{\ell-1}$ é injetiva. Logo a diferencial $(\pi^\ell_{\ell-1})_*$ de $T(P^\ell)$ em $T(P^{\ell-1})$ é bijetiva e, pelo teorema da função inversa, $\pi^\ell_{\ell-1}$ é um difeomorfismo de uma vizinhança de p^ℓ em P^ℓ numa vizinhança de $\pi^\ell_{\ell-1}(p^\ell)$. Assim, para um vetor qualquer $v^{\ell-1}$ em $T_{j^{\ell-1}_x id}(P^{\ell-1})$ considera-se localmente um campo de vetores $X^{\ell-1}$, tal que $(\pi^\ell_{\ell-1})^{-1}_*(g)_* v^{\ell-1}$ é um vetor em $T_{p^\ell}(P^\ell)$ que define localmente um campo X^ℓ. Logo $(\pi^\ell_{\ell-1})^{-1}_* g_* v^{\ell-1} = v^\ell$. Então

$$\omega^\ell(p^\ell, v^\ell) = (j^\ell_x f_g, (\pi^\ell_{\ell-1})_* g_* v^{\ell-1}) =$$
$$= g^{-1}_* \pi^\ell_{\ell-1}(\pi^\ell_{\ell-1})^{-1}_* g_* v^{\ell-1})$$
$$= v^{\ell-1} \ , \text{ para qualquer } g \text{ em } G.$$

Proposição 2.3.2- O grupo G deixa ω^ℓ invariante em P .

Demonstração: Para todo h e g em G tem-se

$$hp^\ell = hj_x^\ell f_g = j_x^\ell f_{hg}$$

e ainda

$$\begin{aligned} h_* v^\ell &= h_*(\pi_{\ell-1}^\ell)_* g_* v^{\ell-1} = \\ &= h_* g_* (\pi_{\ell-1}^\ell)_* v^{\ell-1} = \\ &= (hg)_* (\pi_{\ell-1}^\ell)_* v^{\ell-1} = \\ &= (\pi_{\ell-1}^\ell)_* (hg)_* v^{\ell-1} . \end{aligned}$$

A transitividade da atuação do grupo G em P^ℓ segue de: sejam $p^\ell = j_x^\ell f_p$ e $s^\ell = j_x^\ell f_s$ pertencentes a P^ℓ, então

$$s^\ell = j_x^\ell f_s = j_x^\ell f_{p(p^{-1}s)} = p^{-1}sj_x^\ell f_p = p^{-1}sp^\ell .$$

Portanto pelo teorema da unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária, vale a seguinte proposição:

Proposição 2.3.3- Sejam φ e Ψ duas aplicações diferenciáveis de uma vizinhança conexa W em P . Se elas satisfazem a relação:

$$\omega^\ell(\varphi(w), \varphi_* X) = \omega^\ell(\Psi(w), \Psi_* X)$$

para todo w em W e X em $T_w(W)$, então existe um elemento g de G tal que a igualdade $\Psi(w) = g\varphi(w)$ é verdadeira em W. Todo elemento g em G, o qual aplica $\varphi(w_o)$ em $\Psi(w_o)$, para um ponto w_o de W, tem esta propriedade, isto é , vale a igualdade acima.

<u>Corolário 2.3.1-</u> O grupo K^ℓ deixa todos os pontos de P^ℓ fixos e portanto, todos os pontos em M fixos.

<u>Demonstração</u>: Sabe-se que K^ℓ é um subgrupo de Lie de G e que

$$K^\ell = \{s\varepsilon G,\ sj_x^\ell id = j_x^\ell id\}\ .$$

Por absurdo , supõe-se que existe um $j_x^\ell f_p$ em P^ℓ,que não seja deixado fixo por K^ℓ.

Como G atua transitivamente em P^ℓ, existe g em G tal que , para todo p e s em G, tem-se:

$$j_x^\ell f_p = gj_x^\ell f_{ps} = g(sj_x^\ell f_p) = gs(j_x^\ell f_p)\ .$$

Assim, gs deixa fixo o $j_x^\ell f_p$.

Como K^ℓ é a componente conexa da identidade e G é conexo, então $K^\ell \equiv G$. Logo , gs está em K^ℓ e gs fixa o $j_x^\ell f_p$, o que é uma contradição.

Portanto K^ℓ fixa todos os pontos de P^ℓ.

Agora, para todo s em K^ℓ, tem-se que $j_x^\ell f_p = j_x^\ell f_{ps}$; então

$$px = psx\ ,$$

pois pela aplicação β (def.1.8) de P^ℓ em M, $\beta(j_x^\ell f_p) = px$, para qualquer $j_x^\ell f_p$ em P^ℓ.

Portanto x = sx, para todo x em M e todo s em K^ℓ.

<u>Corolário 2.3.2-</u> Se a ação de dois elementos g e g' em G coincide em um aberto de M, então ela coincide em todo M.

<u>Demonstração</u>: Sejam g e g' em G e x um ponto no aberto da variedade de M onde a ação de g e g' coincide. Desta maneira gx = g'x, en -

tão $gg'^{-1}(x) = x$. Como K^{ℓ} é a componente conexa da identidade e G é conexo, então $K^{\ell} \equiv G$. Logo gg'^{-1} está em K^{ℓ}.

Mas K^{ℓ} fixa todos os pontos de M, conforme o corolário anterior. Então $gg'^{-1}(x) = x$, para qualquer x de M. Logo a ação coincide em todo M.

CAPÍTULO III

O TEOREMA PRINCIPAL

Será apresentado neste capítulo o teorema que caracteriza as operações de um grupo de Lie G, atuando em uma variedade M, como soluções de uma equação diferencial em M.

Teorema:- Existe um inteiro ℓ, tal que vale a seguinte afirmação: Suponha f um difeomorfismo local de M definido em um domínio conexo V. Então f é uma restrição da ação de um elemento g de G em V, se e somente se $j_x^\ell f$ está em $P^\ell(M)$, para todo x em V.

Demonstração: A necessidade da condição é óbvia pela própria definição de P^ℓ.
Prova-se a suficiência: o primeiro passo é provar o teorema para uma vizinhança U suficientemente pequena de x.
Seja U tão pequena tal que exista uma secção local $\mathcal{S}$ de U em G, tal que:

$$\mathcal{S}(y) = \mathcal{S}_y = (y,g) = g ,$$

para qualquer y em U.
Define-se uma aplicação f^ℓ de U em $D^\ell(x,M)$ por:

$$f^\ell(y) = j_x^\ell fg ,$$

tal que $\mathcal{Y}(y) = (y,g)$.

Esta é diferenciável como uma aplicação de U em $D^{\ell}(x,M)$.

Pela hipótese, para todo y em U, existe um elemento g_y em G, tal que

$$j_y^{\ell} f = j_y^{\ell} f_{g_y} .$$

Portanto, $f^{\ell}(y) = j_x^{\ell} fg = j_x^{\ell} fof_g = j_{gx}^{\ell} f\ j_x^{\ell} f_g$.

Como gx está em Y, existe g', que depende de gx, em G, tal que

$$j_{gx}^{\ell} f = j_{gx}^{\ell} f_{g'} .$$

Então,

$$j_x^{\ell} fg = j_{gx}^{\ell} f_{g'} j_x^{\ell} f_g = j_x^{\ell} f_{gg'} .$$

Logo a imagem de f^{ℓ} está contida em P^{ℓ}.

O subgrupo de Lie G^{ℓ} de H^{ℓ} tem componentes conexas no máximo enumeravel, pois o subgrupo fechado K^x de um grupo de Lie G tem esta propriedade.

Para todo ponto p^{ℓ} em P^{ℓ} , toma-se uma vizinhança U^{ℓ} de p^{ℓ} em $D^{\ell}(x,M)$, tal que as duas componentes conexas de p^{ℓ} em $P^{\ell} \cap U^{\ell}$, na topologia de P^{ℓ} e na de U^{ℓ}, coincidem. Portanto f^{ℓ} é diferenciavel como uma aplicação de U em P^{ℓ}.

Seja φ^{ℓ} uma aplicação de U em P^{ℓ}, definida por:

$$\varphi^{\ell}(y) = j_x^{\ell} f_g$$

tal que $\mathcal{Y}(y) = g$. Esta aplicação é diferenciavel.

Para todo vetor X em $T_y(M)$, obtem-se a identidade:

$$(\pi_{\ell-1}^{\ell} f^{\ell})_* X = (g_y)_* (\pi_{\ell-1}^{\ell} \varphi^{\ell})_* X$$

pois, para todo y em Y tem-se

$$f^\ell(y) = j_x^\ell f o f_g = j_{gx}^\ell f_{g_y} j_x^\ell f_g =$$

$$= j_x^\ell f_{g_y g} = g_y j_x^\ell f_g \ .$$

com

$$\pi_{\ell-1}^\ell (f^\ell(y)) = j_x^{\ell-1} f o f_g = g_y j_x^{\ell-1} f_g \ ,$$

também

$$\varphi^\ell(y) = j_x^\ell f_g \qquad \text{e} \qquad \pi_{\ell-1}^\ell(\varphi^\ell(y)) = j_x^{\ell-1} f_g \ .$$

Assim vê-se que o vetor $(\pi_{\ell-1}^\ell f^\ell)_* X$ está em $T_{g_y j_x^{\ell-1} f_g}(P^{\ell-1})$ e o vetor

$(\pi_{\ell-1}^\ell \varphi^\ell)_* X$ está em $T_{j_x^{\ell-1} f_g}(P^{\ell-1})$.

Vale então a seguinte igualdade:

$$\omega^\ell(f^\ell(y), f_*^\ell X) = \omega^\ell(\varphi^\ell(y), \varphi_*^\ell X) \ ,$$

para todo y em U e X em $T_y(M)$.

Pela proposição 2.3.3., existe um elemento $\bar{g}$ em G tal que

$$f^\ell(y) = \bar{g}\varphi^\ell(y) \text{ em U.}$$

Então

$$\bar{g}\varphi^\ell(y) = \bar{g} j_x^\ell f_g \ , \text{ cujo alvo é } \bar{g}gx$$

e

$$f^\ell(y) = j_x^\ell f_g = g_y j_x^\ell f_g \ , \text{ cujo alvo é } g_y gx$$

Como os jatos são iguais, os alvos coincidem. Logo

$$\bar{g}gx = g_y gx \ .$$

Assim pelo corolário 2.3.1.

$$\bar{g}x = gx \ .$$

Então

$$g_y g = \bar{g}g \bmod K \ ,$$

onde K é o subgrupo de isotropia de G, o qual deixa os pontos de M fixos.

Também, $\bar{g} = g_y$, para todo y em U então

$$g_y = \bar{g} \bmod K \ .$$

O segundo passo é provar o teorema para um domínio conexo V geral. Seja y um ponto qualquer de V e considera-se φ_y em G tal que

$$\varphi_y(x) = y \ .$$

Seja U_y a componente conexa de y em $\varphi_y(U) \cap V$. Toma-se um ponto v qualquer de U_y; desta maneira $\varphi_y^{-1}(v)$ está em U e, pela parte anterior, $f(\varphi_y^{-1}(v)) = \bar{\bar{g}}\ \varphi_y^{-1}(v)$, para algum $\bar{\bar{g}}$ em G.

Agora,

$$\varphi_y f(\varphi_y^{-1}(v)) = f(v)$$

e fazendo $\varphi_y g = h_y$ em G, tem-se

$$f(v) = h_y\ \varphi_y^{-1}(v) \ .$$

Para $U_{y'}$, a componente conexa de y' em $\varphi_{y'}(U) \cap V$, tal que $U_{y'} \cap U_y \neq \emptyset$, tem-se

$$f(v) = h_{y'}\ \varphi_{y'}^{-1}(v) \ .$$

Então

$$h_y\ \varphi_y^{-1}(v) = h_{y'}\varphi_{y'}^{-1}(v) \ .$$

Assim a ação de h_y e $h_{y'}$ coincide em $U_y \cap U_{y'}$.

Logo

$$h_y \varphi_y^{-1} = h_{y'} \varphi_{y'}^{-1} \text{ mod } K.$$

Como V é conexo, existe um elemento $\bar{g}$ em G tal que

$$f(v) = \bar{g}v \text{ em } V .$$

Exemplo : Seja $SU(n) = Sl(n,C) \cap U(n)$ um grupo conexo atuando sobre $\mathbb{C}^3$, onde $Sl(n,\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes, pertencentes à $M(n,\mathbb{C})$, com determinante igual a 1 e $U(n)$ é o conjunto das matrizes, pertencentes à $M(n,\mathbb{C})$, tal que sua matriz conjugada é igual a matriz adjunta.

Considera-se f um difeomorfismo analítico local de $\mathbb{C}^3$, definido em um domínio conexo V, tal que

$$f(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x)) ,$$

para $x = (x_1,x_2,x_3)$, dado o sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{C}^3$.

Tem-se

$$P^\ell = \{j_x^\ell f_g \text{ ,para todo } x \text{ em } \mathbb{C}^3 \text{ e todo } g \text{ em } SU(n),\ f_g(x) = gx\} ,$$

com

$$g = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e ainda

$$f_g(x) = gx =$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3) .$$

Calcula-se os p_I^j , com $j = 1,2,3$ e $I = (i_1,i_2,i_3)$, para $i_1+i_2+i_3 = 1$, obtem-se:

$$p_1^1 = \frac{\partial f^1}{\partial x_1} = a_{11} \qquad p_2^1 = \frac{\partial f^1}{\partial x_2} = a_{12} \qquad p_3^1 = \frac{\partial f^1}{\partial x_3} = a_{13}$$

$$p_1^2 = \frac{\partial f^2}{\partial x_1} = a_{21} \qquad p_2^2 = \frac{\partial f^2}{\partial x_2} = a_{22} \qquad p_3^2 = \frac{\partial f^2}{\partial x_3} = a_{23}$$

$$p_1^3 = \frac{\partial f^3}{\partial x_1} = a_{31} \qquad p_2^3 = \frac{\partial f^3}{\partial x_2} = a_{32} \qquad p_3^{33} = \frac{\partial f^3}{\partial x_3} = a_{33}$$

para $i_1+i_2+i_3 = 2$, ocorre:

$$p_I^j = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

para $i,j = 1,2,3$.

Desta maneira tem-se $\dim P^2 = \dim P^1$.

Agora,

$$j_x^2 f = (x_1,x_2,x_3,f^1(x),f^2(x),f^3(x),p_1^1,p_2^1,p_3^1,p_1^2,p_2^2,p_3^2,p_1^3,p_2^3,p_3^3,0,0\ldots)$$

Então $j_x^2 f \in P^2$, fixado $x = (x_1,x_2,x_3)$ em V e $f = (f^1,f^2,f^3)$.

Considerando-se um elemento g' em $SU(n)$, com

$$g' = \begin{bmatrix} (\frac{\partial f^1}{\partial x_1})_x & (\frac{\partial f^1}{\partial x_2})_x & (\frac{\partial f^1}{\partial x_3})_x \\ (\frac{\partial f^2}{\partial x_1})_x & (\frac{\partial f^2}{\partial x_2})_x & (\frac{\partial f^2}{\partial x_3})_x \\ (\frac{\partial f^3}{\partial x_1})_x & (\frac{\partial f^3}{\partial x_2})_x & (\frac{\partial f^3}{\partial x_3})_x \end{bmatrix}$$

para $g = g'$, $f \equiv f_{g'}/_V$.

Pode-se determinar ainda a forma estrutural ω^2 em P^2.

Um campo de vetores em P^2, numa vizinhança de $j_x^2 f$, é determinado pelo grupo local a 1-parâmetro por:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= Y_1(x_1,x_2,x_3,t)\frac{\partial}{\partial y_1} + Y_2(x_1,x_2,x_3,t)\frac{\partial}{\partial y_2} + Y_3(x_1,x_2,x_3,t)\frac{\partial}{\partial y_3}\\ &+ a_{11}(t)\frac{\partial}{\partial p_1^2} + a_{12}(t)\frac{\partial}{\partial p_2^1} + a_{13}(t)\frac{\partial}{\partial p_3^1} + a_{21}(t)\frac{\partial}{\partial p_1^2} + a_{22}(t)\frac{\partial}{\partial p_2^2}\\ &+ a_{23}(t)\frac{\partial}{\partial p_3^2} + a_{31}(t)\frac{\partial}{\partial p_1^3} + a_{32}(t)\frac{\partial}{\partial p_2^3} + a_{33}(t)\frac{\partial}{\partial p_3^3} + 0 + 0 + \ldots\end{aligned}$$

onde $y_i(f(x)) = f^i(x)$; $i = 1,2,3$.

Um vetor **X em** $T_{j_x^2 f} P^2$, determinado por este campo, é dado por:

$$\begin{aligned}X = \left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial Y_3}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial y_3} +\\ &+\left(\frac{da_{11}}{dt}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial p_1^1} + \left(\frac{da_{12}}{dt}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial p_2^1} + \ldots + \left(\frac{da_{33}}{dt}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial p_3^3} .\end{aligned}$$

Projetando o vetor X em $T_{j_x^1 f} P^1$ e transladando-o para a o rigem, obtém-se a forma estrutural em P^2 , na base usual do $T_{j_x^1 id} P^1$, cujas três primeiras coordenadas são: $f^1(x_1,x_2,x_3)$, $f^2(x_1,x_2,x_3)$, $f^3(x_1,x_2,x_3)$ analíticas e o jacobianao $J_x(f^1,f^2,f^3)$ pertence a su(n).

O teorema pode ser aplicado para outros grupos. Procedendo-se de maneira análoga o mesmo pode ser verificado para os subgrupos conexos de Gl(n,C): o grupo das matrizes que são ortogo nais e tem determinante 1 - SO(n); o grupo das matrizes unitárias -U(n); o grupo das matrizes unitárias com determinante igual a 1- SU(n).(vide [2] prop.3, pag37).

BIBLIOGRAFIA

[1] Cartan, E. Théorie des Groupes Finis et Continus e la Géomé -- trie Différentielle traitées par la Méthode du Repère Mobile, Chap 8, Gauthier-Villars, Paris 1937.

[2] Chevalley, C. Theory of Lie Groups, Princeton Univ.Press,Princeton, 1946.

[3] Eisenhart, L.P. Continuous Groups of Transformation,Princeton Univ.Press, Princeton, 1933.

[4] Guillemin, V and Sternberg, S."Deformation teory of pseudo - groupstructures", Mem.Amer. Math. Soc. 64 ,(1966).

[5] Kuranishi, M."On the local theory of continuous infinite pseudo groups", II, Nagoya Math. J. 19,(1961), 55-91.

[6] Lie, S. Theorie der Transformationsgruppen, I, Chap.11, Teubner, Leipzig, 1888.

[7] Matsuda, M. "A note on the defining equation of a transitive Lie group", Osaka, J.Math.8 (1971), 29-32.

[8] Matsushima, Y. Groupes de Lie, Université de Grenoble, 1966, notas de um curso dado em 1965-1966.

[9] Sagle, A e Walde, R. Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Academic Press, Inc, 1973.

[10] Singer, I.M. and Sternberg, S. "The infinite groups of Lie and Cartan", J.Analyse Math.15 (1965), 1-114.

[11] Sternberg, S. Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

[12] Tondeur, P. "Introducion to Lie groups e transformation groups" Lectures Notes in Mathematics, 7 Springer-Verlag, 1969.