# INTRODUÇÃO À TEORIA DOS PERÍMETROS

PRIMO MANOEL BRAMBILLA

Orientador

Dr. RODNEY CARLOS BASSANEZI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março de 1978.

PARA ANGELA MARIA

E LIA RAQUEL.

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Rodney Carlos Bassanezi que com sua orientação segura, estímulo e amizade, contribuiu de maneira fundamental para a realização deste trabalho.

À FIDENE, pelas horas que me liberou para o mesmo e pelo que tem me ensinado.

À CAPES, pela bolsa de estudos.

Para todos aqueles, que direta ou indiretamente me incentivam e apoiam.

Aos meus sogros e meus pais.

À UNICAMP pelos professores e material que me colocou à disposição.

# INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresentamos a idéia de E. De Giorgi a propósito de uma definição de variedade orientada de codimensão 1, em um espaço euclidiano de dimensão finita, mediante o conceito topológico de fronteira do conjunto.

Tais conjuntos pertencem a uma classe mais vasta que aqueles cujas fronteiras são regulares. (basta que se possa falar em medida da fronteira e em normal exterior em quase todos os seus pontos).

Coletamos os resultados de Mário Miranda que estão numa linguagem mais moderna que os trabalhos que deram origem à teoria. Assim, dizemos que um conjunto de Borel $B \subset R^n$ tem "fronteira de medida finita" em um aberto $\Omega$ se $\sup\{\int_B \operatorname{div} g(x)dx \;,\; g \in [C_0^1(\Omega)]^n \;,\; |g| \leq 1\} < +\infty$ onde $[C_0^1(\Omega)]^n$ é o espaço das funções vetoriais com n componentes com suporte compacto em $\Omega$ e com as derivadas parciais primeiras contínuas.

Tal valor será dito "medida da fronteira de B em $\Omega$" ou simplesmente "perímetro de B em $\Omega$" e indicado por $P(B,\Omega)$.

No caso em que B tenha fronteira regular de modo que se possa escrever a fórmula de Green,

$$\int_B \operatorname{div} g(x)dx = \int_{\partial B} g.\nu.\, dH_{n-1}, \text{ para toda } g \in [C_0^1(\Omega)]^n$$

temos

$$P(B,\Omega) = H_{n-1}(\partial B \cap \Omega)$$

Não se deve esperar entretanto que o fato de B ter perímetro finito implique que $\partial B$ seja regular no sentido clássico.

Observamos que se indicarmos por $|\alpha_i|$ a variação total da medida $\alpha_i$ definida pela relação

$$\int_B D_i g(x)\,dx = - \int_{\partial B} g(x)\,d\alpha_i$$ e com $|\alpha|$ a variação total da medida vetorial $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ temos que $|\alpha|$ é uma medida em $R^n$ para a qual se tem a relação $P(B,\Omega) = |\alpha|\ (\Omega)$.

No capítulo I, desenvolvemos a teoria geral da medida tendo como objetivo a sua aplicabilidade na construção da Teoria dos Perímetros. Dentro desta linha, limitamo-nos a medir apenas os conjuntos borelianos limitados em $R^n$.

Gostaríamos de ressaltar neste capítulo a construção detalhada da variação total de uma medida e a demonstração do teorema da representação de Riesz.

No capítulo II, mostramos a equivalência de definições de conjuntos de perímetro localmente finito em $R^n$ e algumas propriedades destes conjuntos.

Introduzimos os teoremas da compacidade e da semi-continuidade, essenciais para a existência de conjuntos de perímetro mínimo.

No capítulo III, estudamos os conjuntos de perímetro finito, isto é, conjuntos borelianos B em $R^n$ para os quais

$$|\alpha|(R^n) = \sup \{ \int_B \operatorname{div} g(x)dx,\ g \in [C_0^1(R^n)]^n,\ |g| \leq 1\} < + \infty$$

Demonstramos um teorema "tipo Fubini" fundamental para o desenvolvimento do capítulo IV e estabelecemos o conceito de fronteira essencial.

No capítulo IV estabelecemos a desigualdade isoperimétrica em $R^n$, $n \geq 2$, para conjuntos borelianos de perímetro finito e a propriedade isoperimétrica da esfera em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

No último capítulo apresentamos a noção de fronteira reduzida de um conjunto e indicamos algumas aplicações da teoria dos perímetros, como por exemplo, a solução do problema de Plateau paramétrico e a generalização da medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ onde $\Omega$ é um aberto em $R^n$.

O objetivo principal deste trabalho foi organizar resultados dispersos na literatura sobre a teoria dos perímetros. Levando em conta a possibilidade do texto ser usado eventualmente em algum curso, procuramos torná-lo acessível demonstrando resultados simples e enumerando conceitos normalmente conhecidos.

# CAPÍTULO I

## TEORIA GERAL DA MEDIDA

Consideremos $R^n$ com a topologia euclidiana.

Chamaremos Família de Borel $\beta(R^n)$ a menor classe de subconjuntos de $R^n$ que contém os abertos e é fechada com respeito às operações: união enumerável, interseção enumerável e complementar.

Os elementos desta família serão denominados Borelianos.

Por $\beta_o(R^n)$ entenderemos a sub-família de $\beta(\mathbb{R}^n)$ constituída de todos os Borelianos limitados.

<u>Definição 1.1</u> - Uma medida relativa em $R^n$ é uma função

$\alpha : \beta_o(R^n) \longrightarrow R$ tal que se $\{B_h\}_{h\in N}$ é uma sucessão de elementos de $\beta_o(R^n)$ com $B_h \cap B_k = \phi$ para $h \neq k$ e $\bigcup_{h\in N} B_h \in \beta_o(R^n)$ então $\alpha(\bigcup_{h=1}^{\infty} B_h) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(B_h)$.

<u>Proposição 1.1</u> - Se $\{B_h\}_{h\in N}$ é uma sucessão de elementos de $\beta_o(R^n)$ tal que $B_{h+1} \subset B_h$ para todo $h \in N$, então

$$\alpha(\bigcap_{h=1}^{\infty} B_h) = \lim_{k\to\infty} \alpha(B_k) \text{ onde } \alpha \text{ é uma medida relativa em } R^n.$$

DEM: Sejam $B = \bigcap_{h=1}^{\infty} B_h$ e $F_h = B_h - B_{h+1}$ para todo $h \in N$.

Observamos que $B_1 - B = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h$ onde $F_i \cap F_j = \phi$ se $i \neq j$ e $B_1 - B \in \beta_o(R^n)$ pois $B_1 - B = B_1 \cap (R^n - B)$. Temos então $\alpha(B_1 - B) =$

$$= \alpha(\bigcup_{h=1}^{\infty} F_h) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(B_h - B_{h+1}).$$

Notamos também que $\alpha(B_1) = \alpha(B) + \alpha(B_1 - B)$ e $\alpha(B_h) = \alpha(B_{h+1}) + \alpha(B_h - B_{h+1})$ para todo $h \in N$.

Então $\alpha(B_1) - \alpha(B) = \sum_{h=1}^{\infty} [\alpha(B_h) - (B_{h+1})] =$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{h=1}^{k} [\alpha(B_h) - \alpha(B_{h+1})] = \lim_{k\to\infty} [\alpha(B_1) - \alpha(B_k)]$$

$$= \alpha(B_1) - \lim_{k\to\infty} \alpha(B_k)$$

Portanto $\alpha(B) = \lim_{k\to\infty} \alpha(B_k)$.

<u>Lema 1.1</u> - Seja $\alpha$ uma medida relativa em $R^n$ e $B \in \beta_o(R^n)$. Então

$$\alpha^+(B) = \sup_{B' \subset B} \alpha(B') \text{ é um número finito} \qquad (1)$$

DEM: Seja $W = \{B \in \beta_o(R^n) : \alpha^+(B) = +\infty\}$

Provemos que $W = \phi$. Suponhamos $W$ não vazio e dividamos a prova em duas partes

a) Mostremos que para todo $B \in W$, existe $B_1 \subset B$ com $\alpha(B_1) > 1$ e $\alpha^+(B - B_1) = +\infty$.

Raciocinemos por absurdo e tomemos um elemento $B_o \in W$ tal que para todo $B_1 \subset B_o$ com $\alpha(B_1) > 1$ tenhamos $\alpha^+(B_o - B_1) < +\infty$.

Então para todo $B_1 \subset B_o$ com $\alpha(B_1) > 1$ temos $\alpha^+(B_1) = +\infty$.

Como $\alpha^+(B_1) = +\infty$, podemos escolher $B_2 \subset B_1$ com $\alpha(B_2) > 2$ e $\alpha^+(B_2) = +\infty$. Conseguimos uma sucessão de borelianos $B_h$ com $B_h \supset B_{h+1}$ e $\alpha(B_h) > h$ para todo $h \in N$, o que é absurdo, pois baseando-se na proposição (1.1) teremos um boreliano limitado de medida infinita.

b) Seja $B_o \in W$. Baseados em (a), fixemos $B_1 \subset B_o$ com $\alpha(B_1) > 1$ e $\alpha^+(B_o - B_1) = +\infty$. Logo $B_o - B_1 \in W$. Então existe $B_2 \subset B_o - B_1$ com $\alpha(B_2) > 1$ e $\alpha^+[(B_o - B_1) - B_2] = +\infty$.

Conseguimos uma sucessão $\{B_h\}_{h \in N}$ tal que $B_h \cap B_k = \phi$ para $h \neq k$ e $\alpha(B_h) > 1$ com $B_h \subset B_o$ para todo $h \in N$, o que é absurdo.

Teorema 1.1 - Para cada medida relativa $\alpha$ em $R^n$ existe um boreliano P tal que qualquer que seja $B \in \beta_o(R^n)$ segue-se:

$$\alpha^+(B) = \alpha(P \cap B) \qquad (2)$$

DEM: Fixemos $B \in \beta_o(R^n)$. Pelo lema 1.1 temos que para todo h inteiro positivo, existe $B'_h \subset B$, $B'_h \in \beta_o(R^n)$ tal que $\alpha(B'_h) > \alpha^+(B) - 2^{-h}$.

$P' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left( \bigcup_{h \geq k} B'_h \right)$ é boreliano e satisfaz $\alpha^+(B) = \alpha(P' \cap B)$

De fato, $\alpha(P') \leq \alpha^+(B)$ pois $P' \subset B$

Por outro lado

$$\alpha(P') = \lim_{k\to\infty} \alpha\left( \bigcup_{h \geq k} B'_h \right) = \lim_{k\to\infty} [\alpha(B'_k) + \alpha(B'_{k+1}-B'_k) + (B'_{k+2}-B'_{k+1}-B'_k) + \ldots +]$$

Mas $\alpha(B'_{k+1} - B'_k) = \alpha(B'_{k+1}) - \alpha(B'_{k+1} \cap B'_k) \geq$

$\geq \alpha^+(B) - 2^{-k-1} - \alpha(B'_{k+1} \cap B'_k) \geq \alpha^+(B) - 2^{-k-1} - \alpha^+(B) = 2^{-k-1}$

Logo podemos escrever

$$\alpha(P') \geq \lim_{k\to\infty} [\alpha^+(B) - 2^{-k} - 2^{-k-1} - 2^{-k-2} - \ldots] =$$

$$= \alpha^+(B) - \lim_{k\to\infty} 2^{-k+1} = \alpha^+(B)$$

<u>OBS 1.1</u> - O que foi afirmado até aqui, equivale a afirmar a existência de um conjunto $P' \subset B$ tal que

$$\alpha(B') \geq 0 \text{ para todo } B' \subset P' \text{ e } \alpha(B') \leq 0 \text{ para todo } B' \subset B - P' \tag{3}$$

DEM: Seja $B' \subset P' \subset B$. Então $P' = (P' - B') \cup B'$ o que implica $\alpha(P') = \alpha(P' - B') + \alpha(B')$. Mas $P' - B' \subset B$. Então

$\alpha(P' - B') \leq \alpha^+(B) = \alpha(P')$. Logo

$\alpha(P') \leq \alpha(P') + \alpha(B')$. Donde $\alpha(B') \geq 0$.

Se $B' \subset B - P'$ temos $(B' \cup P') \subset B$ o que implica

$\alpha(B' \cup P') \leq \alpha^+(B) = \alpha(P')$ . Donde

$\alpha(B') + \alpha(P') \leq \alpha(P')$, isto é, $\alpha(B') \leq 0$.

Por outro lado suponhamos a existência de um conjunto $P' \subset B$ tal que $\alpha(B') \geq 0$ para todo $B' \subset P'$ e $\alpha(B') \leq 0$ para todo $B' \subset B-P'$.

Devemos mostrar que $\alpha^+(B) = \sup\limits_{B' \subset B} \alpha(B') = \alpha(P')$

Mas $P' \subset B$ implica que $\alpha(P') \leq \alpha^+(B)$

Provemos que $\alpha(P') \geq \alpha^+(B)$

a) Suponhamos $B^* \subset P'$. Então $P' = B^* \cup (P' - B^*)$

temos $\alpha(B^*) \geq 0$ e $\alpha(P' - B^*) \geq 0$

mas $\alpha(P') = \alpha(B^*) + \alpha(P' - B^*) \geq \alpha(B^*)$

Portanto $\alpha(P') \geq \alpha(B^*)$ para todo $B^* \subset P'$.

Seja agora $B^*$ arbitrário contido em $B$.

$B^* = B_1 \cup B_2$ onde $B_1 = B^* \cap (B - P')$ e $B_2 = B^* \cap P'$

Como $B_1 \subset B - P'$, temos que $\alpha(B_1) \leq 0$ e como $B_2 \subset P'$, temos que $\alpha(B_2) \leq \alpha(P')$.

Então $\alpha(B^*) = \alpha(B_1) + \alpha(B_2) \leq 0 + \alpha(P') = \alpha(P')$.

Portanto para todo $B^* \subset B$ temos $\alpha(B^*) \leq \alpha(P')$.

Donde $\alpha(P') \geq \sup_{B^* \subset B} \alpha(B^*) = \alpha^+(B)$, o que prova a observação 1.1.

Seja agora uma sucessão de borelianos limitados e disjuntos de $R^n$. Para cada h, seja $P'_h$ o boreliano com a propriedade (3).

Tomemos $P = \bigcup_h P'_h$. Provemos que P é um boreliano que satisfaz o teorema 1.1.

Se $B \in \beta_o(\mathbb{R}^n)$, para mostrarmos que a relação (2) é válida, basta provarmos que $P \cap B$ tem as propriedades expressas em (3)

Se $B' \subset B \cap P$, então $B' = \bigcup_{h=1}^{\infty} P'_h \cap B'$, donde

$$\alpha(B') = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(P'_h \cap B') \geq 0$$

Caso $B' \subset B - P$ temos $B' = \bigcup_{h=1}^{\infty} [(B_h - P'_h) \cap B']$ o que implica

$$\alpha(B') = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha[(B_h - P'_h) \cap B'] \leq 0,$$ o que conclui a prova do teorema 1.1.

OBS 1.2 - O teorema 1.1 é equivalente a afirmar que para cada medida $\alpha$ existe um boreliano $P \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(B') \geq 0$ para todo $B' \subset P$ e $\alpha(B') \leq 0$ para todo $B' \subset R^n - P$.

A partição de $R^n$ em P e $R^n - P$ chama-se <u>Partição de HAHN de $R^n$ associada à medida $\alpha$</u>.

<u>OBS 1.3</u> - Se $P$ e $P'$ são duas <u>partições</u> <u>de</u> <u>HAHN</u> associadas a uma medida $\alpha$, então para todo $B \in \beta_o(R^n)$ temos

$$\alpha[B \cap (P \Delta P')] = 0 \quad \text{onde} \quad P \Delta P' = (P-P) \cup (P'-P).$$

DEM: $B \cap (P \Delta P') = [B \cap (P - P')] \cup [B \cap (P' - P)]$ . Logo

$$\alpha[B \cap (P \Delta P')] = \alpha[B \cap (P - P')] + \alpha[B \cap (P' - P)]$$

Mas $B \cap (P - P') \subset P$, então $\alpha[B \cap (P - P')] \geq 0$ e

$B \cap (P - P') \subset R^n - P'$ então $\alpha[B \cap (P - P')] \leq 0$

donde

$$\alpha[B \cap (P - P')] = 0 .$$

De maneira análoga provamos que $\alpha[B \cap (P' - P)] = 0$ .

Temos que o boreliano $P$ é único a menos de conjuntos de medida nula.

<u>OBS 1.4</u> - $\alpha^+$ é uma medida não negativa.

DEM: Se $\{B_h\}_{h \in N}$ é uma sucessão de elementos de $\beta_o(R^n)$ com $B_h \cap B_k = \phi$ para $h \neq k$, então

$$\alpha^+(\bigcup_h B_h) = \alpha(P \cap \bigcup_h B_h) = \alpha[\bigcup_h (B_h \cap P)] =$$

$$= \sum_h \alpha(B_h \cap P) = \sum_h \alpha^+(B_h) \geq 0, \quad \text{pois}$$

$\alpha^+(B) \geq 0$ para todo $B \in \beta_o(R^n)$.

Definimos $\alpha^-(B) = -\alpha\,(B - P)$

$\alpha^-$ é uma medida não negativa e sugere a relação

$\alpha(B) = \alpha^+(B) - \alpha^-(B)$ para todo $B \in \beta_o(R^n)$, (4) pois

$\alpha^+(B) = \alpha(B \cap P)$, $-\alpha^-(B) = \alpha(B-P)$ e $B = (B \cap P) \cup (B-P)$

Logo $\alpha(B) = \alpha(B \cap P) + \alpha(B-P) = \alpha^+(B) - \alpha^-(B)$.

<u>Definição 1.2</u> - A função $|\alpha|: \beta_o(R^n) \longrightarrow R$ definida por $|\alpha|(B) = \alpha^+(B) + \alpha^-(B)$ (5) é uma medida não negativa, chamada <u>variação total da medida $\alpha$</u> .

<u>Proposição 1.2</u> - para todo $B \in \beta_o(R^n)$ temos

$$|\alpha|(B) = \sup\{ \sum_h |\alpha(B_h)|;\ B = \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h,\ B_h \cap B_k = \phi \text{ se } h \neq k\} \quad (6)$$

DEM: a) para todo $B \in \beta_o(R^n)$ temos $|\alpha|(B) = \alpha^+(B) + \alpha^-(B) \geq |\alpha(B)|$

Se $B = \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h$, $B_h \cap B_k = \phi$ para todo $h \neq k$ então

$$|\alpha|(B) = \sum_h |\alpha|(B_h) \geq \sum_h |\alpha(B_h)|$$

b) Podemos escrever B como $B = (P \cap B) \cup (B-P)$ então

$|\alpha(P \cap B)| + |\alpha(B - P)| = \alpha^{+}(B) + \alpha^{-}(B) = |\alpha|(B).$

OBS 1.5 - Se $\alpha$ é uma medida em $\mathbb{R}^n$ e $B \in \beta_o(R^n)$ então para to $\varepsilon > 0$, existe um aberto $A_\varepsilon$ e um compacto $K_\varepsilon$ com a seguinte propriedade: $K_\varepsilon \subset B \subset A_\varepsilon$ e $|\alpha(B - K_\varepsilon)| < \varepsilon$ ; $|\alpha(A_\varepsilon - B)| < \varepsilon$

DEM: (c f [ 10 ] , ps 47-48).

Definiremos agora a integral associada a uma medida

Seja $B \in \beta_o(R^n)$ e $\phi_B(x) : R^n \longrightarrow R$ definida por

$\phi_B(x) = 1$ se $x \in B$ e $\phi_B(x) = 0$ se $x \notin B$

$\phi_B(x)$ é dita função característica do conjunto B.

Diremos que uma função $f(x)$ é simples se existirem constantes $a_i$ R e conjuntos $B_i \in \beta_o(R^n)$ tais que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{B_i}(x) \qquad (7)$$

O conjunto $L = L(R^n)$ das funções simples é um espaço vetorial real.

Definição 1.3 - Seja $f \in L(R^n)$ e $\alpha$ uma medida. Então

$$\int f d\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha(B_i) \qquad (8)$$

Verifica-se que esta definição não depende da representação da função $f$ e que

$$\int (\lambda f_1+\mu f_2)\,d\alpha = \lambda \int f_1 d\alpha + \mu \int f_2 d\alpha \quad \text{para todo} \quad f_1, f_2 \in L(R^n) \quad \text{e}$$

para $\lambda$, $\mu \in R$ (c.f. [9], p. 76). (9)

Se $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, \phi_{B_i}(x)$ com $B_i \cap B_j = \phi$ para $i \neq j$ e $a_i \neq 0$ para todo $i$. Então

$$\left|\int f d\alpha\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha(B_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i|\,|\alpha(B_i)| \leq$$

$$\leq \sup |f| \sum_{i=1}^{m} |\alpha(B_i)| \leq \sup |f| \quad |\alpha| \,(\mathrm{supp}\, f)$$

onde supp $f$ é o suporte da função $f$.

Dizemos então que $\int f d\alpha$ é contínuo no sentido que

$$\left|\int f d\alpha\right| \leq \sup |f| \quad |\alpha|\,(\mathrm{supp}\ f). \qquad (10)$$

Denotaremos $C_o(R^n)$ o conjunto das funções $f\colon R^n \longrightarrow R$ contínuas com suporte compacto.

Seja $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ e $K = \text{supp } f$. Existe uma sucessão $\{f_h\}_{h\in N} \subset L(R^n)$ tal que

$$\sup |f_h| \leq \sup |f|; \quad f_h(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \notin K \text{ e todo } h \in N.$$

e $\lim\limits_{h\to\infty} (\sup |f_h - f|) = 0.$

Como

$$\left| \int f_h d\alpha - \int f_k d\alpha \right| = \left| \int (f_h - f_k) d\alpha \right| \leq \sup |f_h - f_k| \, |\alpha| (K),$$

temos que a sucessão $\int f_h d\alpha$ é de Cauchy em R e portanto convergente.

Definição 1.4 - A integral de $f \in C_o(R^n)$ com respeito a uma medida $\alpha$ é o número real

$$\int f d\alpha = \lim_{h\to\infty} \int f_h \, d\alpha \qquad (11)$$

Verifica-se que esta definição não depende da sucessão $\{f_h\}_{h\in N}$ escolhida e que $f \longrightarrow \int f d\alpha$ é um funcional linear contínuo em $C_o(R^n)$, isto é,

$$\int (\lambda f_1 + \mu f_2) d\alpha = \lambda \int f_1 d\alpha + \mu \int f_2 d\alpha \text{ para toda } f_1, f_2 \in C_o(R^n) \, ,$$

$\lambda,\mu \in R$ e $\left|\int f d\alpha\right| \leq \sup |f| |\alpha|$ (supp f) para toda $f \in C_o(R^n)$.

Teorema 1.2 (Riesz) Seja $F: C_o(R^n) \longrightarrow R$ um funcional linear tal que

$$|F(f)| \leq \sup|f| . \gamma(K) \text{ onde } K = \text{supp } f \text{ com } \gamma:\beta_o(R^n) \longrightarrow R. \tag{13}$$

Então existe uma única medida $\alpha$ tal que $F(f) = \int f d\alpha$.

DEM: Dividiremos a prova em vários lemas, proposições e teoremas.

Podemos considerar F positivo, isto é,

$$F(f) \geq 0 \quad \text{sempre que} \quad f \geq 0 \tag{14}$$

Caso contrário, consideremos o funcional

$$F^+(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} F(g) \text{ para } f \geq 0 \tag{15}$$

$F^+$ é contínuo. Provemos que também é linear.

Sejam $f$ e $g \in C_o(R^n)$ com $f \geq 0$, $g \geq 0$, $0 \leq h \leq f$ e $0 \leq K \leq g$

Então $0 \leq h + k \leq f + g$ o que resulta

$F^+(f+g) \geq F(h+k) = F(h) + F(k)$. Como h e k nas condições acima foram tomadas arbitrariamente temos

$$F^+(f + g) \geq F^+(f) + F^+(g) .$$

Por outro lado, sejam $0 \leq h \leq g + f$ e $k = \inf\{h,f\}$.
Então $0 \leq k \leq f$ e $g \geq h - k \geq 0$

$F^+(f) + F^+(g) \geq F(k) + F(h - k) = F(h)$ o que implica

$F^+(f) + F^+(g) \geq F^+(f + g)$

Se $f \in C_o(R^n)$ então podemos escrever $f = f^+ - f^-$ onde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Então $F^+(f) = F^+(f^+) - F^+(f^-)$

$F^+$ é um funcional linear, contínuo e não negativo em $C_o(R^n)$
Se definimos $F^-(f) = F^+(f) - F(f)$ então
$F = F^+ - F^-$ com $F^+$ e $F^-$ funcionais não negativos e contínuos. (16)

Entenderemos por $C_1(R^n)$ a classe das funções $f(x) = \lim_{h\to\infty} \phi_h(x)$ onde $\{\phi_h\}_{h\in N}$ é uma sucessão não decrescente de funções de $C_o(R^n)$ para as quais existe um conjunto $K \in \beta_o(R^n)$ e $L \in R$ tal tal que $\phi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e todo $h \in N$ e $|\phi_h(x)| \leq L$ para todo $x \in R^n$ e todo $h \in N$.

<u>Proposição 1.3</u> $C_1(R^n)$ tem as seguintes propriedades:

1) Se $f_1$ e $f_2 \in C_1(R^n)$ então $f_1 + f_2 \in C_1(R^n)$

2) Se $\lambda$ é um número real positivo e $f \in C_1(R^n)$ então $\lambda f \in C_1(R^n)$

3) Seja $\{f_h\}_{h\in N} \subset C_1(R^n)$ tal que $|f_h(x)| \leq L$ para todo $x \in R^n$ e $h \in N$; $f_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $h \in N$ e ainda $f_h(x) \uparrow f(x)$. Então $f \in C_1(R^n)$.

DEM:

1) Sejam $\phi_h(x)$ e $\psi_h(x)$ pertencentes a $C_o(R^n)$ com $\phi_h(x) \uparrow f_1(x)$, $\phi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K_o$ e $|\phi_h(x)| \leq L_o$, para todo $x \in R^n$ e $\psi_h(x) \uparrow f_2(x)$, $\psi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K_1$ e $|\psi_h(x)| \leq L_1$ para todo $x \in R^n$.

Denotemos $f = f_1 + f_2$, $L = 2\max(L_o, L_1)$ e $K = K_o \cup K_1$ e e $\rho_h(x) = \phi_h(x) + \psi_h(x)$.

Então $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_h(x)$ onde $\rho_h(x)$ é não decrescente em $C_o(R^n)$, $\rho_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $h \in N$ e $|\rho_h(x)| \leq L$ para todo $x \in R^n$ e $h \in N$.

Portanto $f = f_1 + f_2 \in C_1(R^n)$.

2) Seja $\phi_h(x) \uparrow f(x)$ onde $\phi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $h \in N$, $|\phi_h(x)| \leq L$ para todo $x \in R^n$ e $h \in N$ e $\{\phi_h\}_{n\in N} \subset C_o(R^n)$.

Temos que $\lambda\phi_h(x) \uparrow \lambda f(x)$ pois $\lambda > 0$, $\{\lambda\phi_h\}_{h\in N} \subset C_o(R^n)$ e ainda $\lambda\phi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e todo $h \in N$, $|\lambda\phi_h(x)| \leq \lambda L$ para todo $x \in R^n$ e todo $h \in N$.

Portanto $\lambda f(x) \in C_1(R^n)$

3) Como $f_h \in C_1(R^n)$ escolhemos $\{\phi_{h,k}\} \uparrow f_h$ tal que $\phi_{h,k} \in C_o(R^n)$; $\phi_{h,k}(x) = 0$ para todo $x \notin K'$ onde K' é um compacto contendo K, $|\phi_{h,k}(x)| \leq L'$ para todo $x \in R^n$ e para todo $h$ e $k \in N$.

Definimos $\phi_s(x) = \sup\limits_{h,k \leq s} \phi_{h,k}(x)$. Então $\phi_s \in C_o(R^n)$, $\phi_s(x) \uparrow$; $|\phi_s| \leq L'$, $\phi_s(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e todo $s \in N$.

Valem também as relações

$\phi_s \leq f_s$; $\phi_{h,s} \leq \phi_s$ para todo $h \leq s$. Como $f_h \uparrow f$ temos $\phi_{h,s} \leq \phi_s \leq f_s$ o que implica $\lim\limits_{s\to\infty} \phi_{h,s} \leq \lim\limits_{s\to\infty} \phi_s \leq \lim\limits_{s\to\infty} f_s$.

Logo $f_h \leq \lim\limits_{s\to\infty} \phi_s \leq f$ para todo $h \in N$, ou seja

$$f = \lim_{s\to\infty} \phi_s. \text{ Portanto } f \in C_1(R^n).$$

Seja $f \in C_1(R^n)$. Definimos

$F(f) = \lim\limits_{h\to\infty} F(\phi_h)$, onde $\{\phi_h\}_{h\in N} \subset C_o(R^n)$, $\phi_h \uparrow f$,

$|\phi_h(x)| \leq L$ e $\phi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K'$ e todo $h \in N$.

F está bem definida, pois se $\{\psi_h\}_{h\in N} \subset C_o(R^n)$ é tal que $\psi_h \uparrow f$ , $|\psi_h(x)| \leq L$ e $\psi_h(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $h \in N$

então $F(f) = \lim\limits_{h\to\infty} F(\psi_h)$ (17)

De fato, seja

$\phi_h \wedge \psi_k = \inf(\phi_h, \psi_k)$. Temos para todo $h$ e $k \in N$ que $\phi_h \wedge \psi_k \in C_o(R^n)$, $| \phi_h \wedge \psi_k \leq L$, $(\phi_h \wedge \psi_k)(x) = 0$ para $x \notin K$ .

Seja $h$ fixo, $\phi_h \wedge \psi_k$ converge para $\phi_h$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Como a sucessão $\{\phi_h \wedge \psi_k\}_{k\in N}$ é monótona não decrescente , por um teorema de Dini (cf [5], p. 269) temos que a convergência é uniforme. Analogamente se fixarmos $k$, temos que $\phi_h \wedge \psi_k \uparrow \psi_k$ uniformemente quando $h \to \infty$. Então $\lim\limits_{k\to\infty} F(\phi_h \wedge \psi_k) = F(\phi_h)$ e $\lim\limits_{h\to\infty} F(\phi_h \wedge \psi_k) = F(\psi_k)$.

A sucessão $A_{hk} = F(\phi_h \wedge \psi_k)$ é monótona, não decrescente nos dois índices e então podemos trocar a ordem dos limites

$$\lim_{k\to\infty} F(\psi_k) = \lim_{k\to\infty} \left[\lim_{h\to\infty} F(\phi_h \wedge \psi_k)\right] = \lim_{h\to\infty} \left[\lim_{k\to\infty} F(\phi_h \wedge \psi_k)\right] = \lim_{h\to\infty} F(\phi_h).$$

<u>Proposição 1.4</u> - $F: C_1(R^n) \longrightarrow R$ definido pela relação (17) tem as seguintes propriedades

1) $F(f_1+f_2) = F(f_1) + F(f_2)$ qualquer que sejam $f_1$ e $f_2$ em $C_1(R^n)$.

2) $F(\lambda f) = \lambda F(f)$ onde $\lambda > 0$ e $f \in C_1(R^n)$

3) $|F(f)| \leq \sup |f| \, \gamma(\text{supp } f)$ para toda $f$ em $C_1(R^n)$

4) Se $\{f_h\}_{h\in N} \subset C_1(R^n)$; $|f_h| \leq L$, supp $f_h \subset K$, $f_h \uparrow f$

então $F(f) = \lim\limits_{h\to\infty} F(f_h)$

DEM: provaremos apenas o item (4), visto que os outros decorrem imediatamente da definição do funcional $F$.

Como $f_h \uparrow f$ então $f - f_h \geq 0$ para todo $h \in N$. Logo $F(f - f_h) \geq 0$ o que implica $F(f) \geq F(f_h)$ para todo $h \in N$.

Donde $F(f) \geq \lim\limits_{h\to\infty} F(f_h)$.

Por outro lado, pela proposição (1.3) existe $\{\phi_s\}_{s\in N} \subset C_o(R^n)$ tal que $\phi_s \uparrow f$, $|\phi_s| \leq L$, $\phi_s(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e todo $s \in N$ e ainda $\phi_s \leq f_s$.

Portanto $F(f) = \lim\limits_{s\to\infty} F(\phi_s) \leq \lim\limits_{s\to\infty} F(f_s)$, pois $F$ é um funcional positivo, o que conclui a prova.

Observamos que se A é um aberto de $R^n$, então $\phi_A(x) \in C_1(R^n)$. Podemos então definir

$$\alpha(A) = F(\phi_A(x)) \text{ onde } A \text{ é aberto em } R^n \qquad (18).$$

<u>Lema 1.2</u> : $\alpha(A)$ definida pela relação (18) tem as seguintes propriedades

1) Se $A = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h$, A é limitado e $A_h$ aberto para todo $h$, então $\alpha(A) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h)$ e ainda se $A_h \cap A_k = \phi$ para $h \neq k$, $\alpha(A) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h)$.

2) Se $A_1$ e $A_2$ são abertos limitados, então $\alpha(A_1 \cup A_2) + \alpha(A_1 \cap A_2) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.

3) Se $A_h$ são abertos e limitados e $A_h \downarrow \phi$ então $\lim_{h\to\infty} \alpha(A_h) = 0$

DEM: 1) $\phi_A(x) = \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{h=1}^{n} \phi_{A_h}(x) \cap 1\}$ e

$$\alpha(A) = F(\phi_A(x)) = \lim_{n\to\infty} F( \sum_{h=1}^{n} \phi_{A_h}(x) \cap 1). \qquad \text{Mas}$$

$\sum_{i=1}^{n} \phi_{A_h}(x) - \{\sum_{i=1}^{n} \phi_{A_h}(x) \cap 1\} \geq 0$. Como F é positivo,

temos

$$F(\sum_{i=1}^{n} \phi_{A_h}(x)) \geq F(\sum_{i=1}^{n} \phi_{A_h}(x) \cap 1) .$$ Logo

$$F(\phi_A(x)) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} F(\phi_{A_h}(x)) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h)$$

Se $A_h \cap A_k = \phi$ para todo $h \neq k$, então

$$\phi_A(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} \phi_{A_h}(x).$$ Donde

$$F(\phi_A(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} F(\phi_{A_h}(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h)$$

2) Lembramos que $\phi_{A_1 \cup A_2}(x) + \phi_{A_1 \cap A_2}(x) = \phi_{A_1}(x) + \phi_{A_2}(x)$

Então

$$F(\phi_{A_1 \cup A_2}(x)) + F(\phi_{A_1 \cap A_2}(x)) = F(\phi_{A_1}(x)) + F(\phi_{A_2}(x)),$$ ou

seja, $\alpha(A_1 \cup A_2) + \alpha(A_1 \cap A_2) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.

3) Suponhamos por absurdo que $\alpha(A_h) > 2\varepsilon > 0$ para todo $h \in N$. Seja $\{g_h\}_{h\in N} \subset C_o(R^n)$ uma sucessão com a seguinte propriedade $0 \leq g_h \leq \phi_{A_h}(x)$ e $F(g_h) > \alpha(A_h) - \varepsilon 2^{-h}$.

Definimos $g'_h = \min\{g_1, g_2, \ldots, g_h\}$.

Caso $\lim\limits_{h\to\infty} \phi_{A_h}(x) = 0$ para todo $x \in R^n$, então

$\lim\limits_{h\to\infty} g'_h(x) = 0$ e a convergência a zero é uniforme.

$$g_h - \min\{g_1, g_2, \ldots, g_h\} \leq \phi_{A_1} - g_1 + \phi_{A_2} - g_2 + \ldots + \phi_{A_{h-1}} - g_{h-1}$$

$F(g_h) - F(g'_h) \leq \varepsilon 2^{-1} + \varepsilon 2^{-1} + \ldots + \varepsilon 2^{-h+1} < \varepsilon$. Então

$F(g'_h) \geq F(g_h) - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon 2^{-h} - \varepsilon$, donde $\lim\limits_{h\to\infty} F(g'_h) \geq \varepsilon$ e

isto é absurdo, pois $\lim\limits_{h\to\infty} \sup\limits_{R^n} g'_h = 0$.

Seja agora $K$ um compacto em $R^n$. Definimos

$$\alpha(K) = \inf_{A \supset K} \alpha(A) \quad \text{onde } A \text{ é aberto e limitado.} \tag{19}$$

<u>Lema 1.3</u> - Se $A$ é um aberto limitado e $K$ um compacto contido em $A$, então $\alpha(K) = \alpha(A) - \alpha(A - K)$.

DEM: a) $\alpha(K) \geq \alpha(A) - \alpha(A - K)$

Seja $K \subset A'$ onde $A'$ é aberto e limitado. Então

$A' \cup (A - K) \supset A$ o que implica $\phi_{A'\cup(A-K)} \geq \phi_A$. Como $F$ é positivo, $F(\phi_{A'\cup(A-k)}) \geq F(\phi_A(x))$, isto é, $\alpha(A' \cup (A - K)) \geq \alpha(A)$.

Logo $\alpha(A') + \alpha(A - K) \geq \alpha(A)$ ou $\alpha(K) \geq \alpha(A) - \alpha(A - K)$

b) $\alpha(K) \leq \alpha(A) - \alpha(A - K)$

Seja $\{A_h\}_{h\in N}$ uma sucessão de abertos convergentes decrescendo para $K$ e $A_h \subset A$ para todo $h \in N$. Então

$$\alpha(A_h) + \alpha(A - K) = \alpha(A_h \cup (A - K)) + \alpha(A_h \cap (A - K))$$

fazendo $h \longrightarrow \infty$ temos

$$\alpha(K) \leq \alpha(A) - \alpha(A - K).$$

<u>Nota 1.1</u> - Se $K_1$ e $K_2$ são compactos disjuntos em $R^n$, então $\alpha(K_1 \cup K_2) = \alpha(K_1) + \alpha(K_2)$.

DEM: Existem abertos disjuntos e limitados $A_1$ e $A_2$ contendo $K_1$ e $K_2$ respectivamente. Então

$$\alpha(K_1) = \alpha(A_1) - \alpha(A_1-K_1); \ \alpha(K_2) = \alpha(A_2) - \alpha(A_2-K_2) \quad \text{e}$$

$$\alpha(K_1 \cup K_2) = \alpha(A_1 \cup A_2) - \alpha[(A_1 \cup A_2) - (K_1 \cup K_2)] \ . \quad \text{Mas}$$

$$\alpha(K_1 \cup K_2) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2) - \alpha(A_1-K_1) - \alpha(A_2-K_2), \quad \text{pois}$$

$$(A_1 \cup A_2) - (K_1 \cup K_2) = (A_1 - K_1) \cup (A_2 - K_2).$$

Por outro lado temos

$$\alpha(K_1) + \alpha(K_2) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2) - \alpha(A_1-K_1) - \alpha(A_2-K_2)$$

<u>Nota 1.2</u>: Se $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ é uma família finita de compactos dois a dois disjuntos contidos em um aberto limitado $A$, então $\sum_{i=1}^{n} \alpha(K_i) \leq \alpha(A)$.

DEM: Seja $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Como $K \subset A$ temos $\alpha(K) \leq \alpha(A)$ pois $F$ é positivo. Logo $\sum_{i=1}^{n} \alpha(K_i) \leq \alpha(A)$.

Seja $X \subset R^n$ um conjunto limitado.

$X$ é dito $\alpha$- mensurável se

$$\sup_{K \subset X} \alpha(K) = \inf_{X \subset A} \alpha(A) \text{ onde } K \text{ é compacto e } A \text{ aberto} \qquad (21)$$

Lema 1.4 : A classe dos conjuntos $\alpha$ -mensuráveis tem as seguintes propriedades:

1) Se $X_1$ e $X_2$ são $\alpha$ -mensuráveis, então $X_1 - X_2$ é $\alpha$ -mensurável

2) Se $X = \bigcup_h X_h$ onde $X_h$ é mensurável para todo $h \in N$, $X_h \cap X_k = \phi$ para $h \neq k$ e $X$ é limitado, então $X$ é mensurável

3) Se $X = \bigcup_h X_h$ onde $X_h$ é mensurável para todo $h \in N$ e $X$ é limitado, então $X$ é mensurável

DEM: 1) é clara

2) para todo $\varepsilon > 0$ e todo $h \in N$, existem $K_h$ compacto e $A_h$ aberto com $K_h \subset X_h \subset A_h$ tais que $\alpha(A_h) - \alpha(K_h) < \varepsilon 2^{-h}$.

Para os conjuntos abertos vale a relação $\alpha(\bigcup_h A_h) \leq \sum_h \alpha(A_h)$ e como os compactos $K_h$ são disjuntos, pois são disjuntos os $X_h$, podemos escrever

$$\alpha(\sum_{h=1}^{m} K_h) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(K_h) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(K_h) - \sum_{h=m+1}^{\infty} \alpha(K_h)$$

Se $m$ é suficientemente grande temos

$$\alpha(\bigcup_{h=1}^{\infty} A_h - \bigcup_{h=1}^{m} K_h) = \alpha(\bigcup_{h=1}^{\infty} A_h) - (\bigcup_{h=1}^{m} K_h) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h) - \sum_{h=1}^{m} \alpha(K_h)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A_h) - \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(K_h) + \sum_{h=m+1}^{\infty} \alpha(K_h) \leq \varepsilon \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} + \sum_{h=m+1}^{\infty} \alpha(K_h) < 2\varepsilon$$

3) É consequência imediata de (1) e (2)

Teorema 1.3 - Os borelianos limitados em $R^n$ são $\alpha$-mensuráveis.

DEM: Seja $B \in \beta_o(R^n)$. Pela observação (1.5) dado $\varepsilon > 0$ existem um aberto $A_\varepsilon$ e um compacto $K_\varepsilon$ com $K_\varepsilon \subset B \subset A_\varepsilon$ e $\alpha(A - K) < \varepsilon$

Como $\varepsilon$ é arbitrário, segue-se que $B$ é mensurável.

Definição 1.5 - Seja $X \subset \beta_o(R^n)$. Chama-se $\alpha$-medida de $X$ o número $\alpha(X) = \sup_{K \subset X} \alpha(K) = \inf_{X \subset A} \alpha(A)$ onde $K$ é compacto e $A$ é aberto (22).

Finalmente, provemos que para toda $f \in C_o(R^n)$ com $f \geq 0$, temos $F(f) = \int f d\alpha$. (23)

DEM: Seja $A_h = \{x \in R^n : 0 < f(x) < h\varepsilon\}$ onde $\varepsilon = \dfrac{\max f(x)}{N}$ onde $N$ é um inteiro positivo.

$A_h$ é um conjunto aberto e além disso,

$$0 \leq f(x) - \sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,(\phi_{A_h} - \phi_{A_{h-1}}) \leq \varepsilon \,;$$

$f(x) + \sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,\phi_{A_{h-1}}$ e $\sum_{h=2}^{N} \varepsilon\,\phi_{A_h}$ são funções de $\bar{C}_1(R^n)$.

Então $0 \leq F(f + \sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,\phi_{A_{h-1}}) + F(\sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,\phi_{A_h}) < \varepsilon\,\gamma(K')$

onde $K'$ é um compacto fora do qual as duas funções se anulam.

Portanto $0 \leq F(f) - \sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,\alpha(A_h - A_{h-1}) < \varepsilon\,\gamma(K')$

Mas vale também a relação

$$0 \leq \int f d\alpha - \sum_{h=2}^{N} (h-1)\,\varepsilon\,\alpha(A_h - A_{h-1}) < \varepsilon\,\tilde{\gamma}(K')$$

Comparando as duas últimas expressões e notando a arbitrariedade de $\varepsilon$ temos

$$F(f) = \int f d\alpha \,.$$

Se $f$ não for positiva, basta decompormos em $f = f^+ - f^-$.

Provemos agora a unicidade da medida $\alpha$.

a) uma medida $\alpha \geq 0$ é determinada por seus valores sobre os abertos. Para um compacto $K$, $\alpha(K) = \inf_{K \subset A} \alpha(A)$ onde $A$ é aberto. E vice-versa, para um aberto $A$, $\alpha(A) = \sup_{K \subset A} \alpha(K)$ onde $K$ é compacto.

Os conjuntos $X$ $\alpha$-mensuráveis são tais que

$\sup_{K \subset X} \alpha(K) = \inf_{X \subset A} \alpha(A)$ e constituem uma família fechada com respeito à união enumerável, interseção enumerável e complementar. (24)

Recordamos que $\beta_0(R^n)$ é uma família de conjuntos $\alpha$-mensuráveis.

b) Uma medida $\alpha \geq 0$ é determinada pelos valores de $\int g d\alpha$ para toda $g \in C_0(R^n)$.

DEM: Se $A$ é um aberto fixo, $\alpha(A) = \int \phi_A \, d\alpha \geq \int g d\alpha$ para toda $g$ tal que $0 \leq g \leq \phi_A$ e portanto

$$\alpha(A) \geq \sup_{0 \leq g \leq \phi_A} \int g d\alpha \qquad (25)$$

Por outro lado $\alpha(A) = \sup_{K \subset A} \alpha(K)$, $K$ compacto. Existe $g \in C_0(R^n)$ com a propriedade $\phi_K \leq g \leq \phi_A$. Para tal $g$ resulta

$$\int g d\alpha \geq \int \phi_K \, d\alpha = \alpha(K). \quad \text{Donde}$$

$$\sup_{K\subset A} \alpha(K) \leq \sup_{0\leq g\leq \phi_A} \int g d\alpha \ , \quad g \in C_o(R^n) \tag{26}$$

Das relações (25) e (26) temos

$$\alpha(A) = \sup_{0\leq g\leq \phi_A} \int g d\alpha \ , \quad g \in C_o(R^n)$$

<u>Corolário 1.1</u> - Se $\alpha$ e $\beta$ são duas medidas não negativas tais que

$$\int g d\alpha = \int g d\beta \quad \text{para toda } g \text{ em } \ C_o(R^n) \ \text{então} \ \alpha = \beta$$

DEM: Seja A um aberto

$$\alpha(A) = \sup_{0\leq g\leq \phi_A} \int g d\alpha = \sup_{0\leq g\leq \phi_A} \int g d\beta = \beta(A)$$

c) Sejam $\alpha$ e $\beta$ duas medidas tais que $\int g d\alpha = \int g d\beta$ para toda g em $C_o(R^n)$. Então $\alpha = \beta$

DEM:

$$\int g(d\alpha^+ - d\alpha^-) = \int g(d\beta^+ - d\beta^-) \quad \text{ou}$$

$$\int g(d\alpha^+ + d\beta^-) = \int g(d\beta^+ + d\alpha^-) \ \text{para toda} \ \ g \in C_o(R^n)$$

pelo corolário (1.1) $\alpha^+ + \beta^- = \alpha^- + \beta^+$, isto é

$$\alpha^+ - \alpha^- = \alpha = \beta = \beta^+ - \beta^-$$

<u>Obs 1.6</u> Se $F(g) = \int g d\alpha$ para $g \in C_o(R^n)$ então

$$F^+(g) = \int g d\alpha^+ \quad \text{para toda} \quad g \in C_o(R^n) \tag{27}$$

DEM: $F^+$ é funcional linear e limitado. Pelo teorema de Riesz temos $F^+(g) = \int g d\beta$ com $\beta \geq 0$

Se $A$ é um aberto,

$$\beta(A) = \sup_{0 \leq g \leq \phi_A} F^+(g) = \sup_{0 \leq g \leq \phi_A} \sup_{0 \leq f \leq g} F(f) = \sup_{0 \leq f \leq \phi_A} F(f) = ,$$

$$= \sup_{0 \leq f \leq \phi_A} \int f d\alpha \leq \alpha^+(A) . \quad \text{Logo} \quad \beta \leq \alpha^+ .$$

Consideremos o funcional

$(F^+ - F)(g) = \int g \, d(\beta - \alpha^+ + \alpha^-)$. Pela unicidade do teorema de Riesz sendo $F^+ - F \geq 0$ devemos ter $\beta - \alpha^+ + \alpha^- \geq 0$ e recordando que $\alpha^+$ e $\alpha^-$ tem suportes disjuntos verifica-se que $\beta - \alpha^+ \geq 0$. Donde $\beta = \alpha^+$

Para $F^-$ temos que $F^- = F^+ - F$. Se $g \geq 0$,

$$F^-(g) = F^+(g) - F(g) = \sup_{0 \leq f \leq g} F(f) - F(g) = \sup_{0 \leq f \leq g} F(f-g) =$$

$$= \sup_{-g \leq \psi \leq 0} F(\psi) = \sup_{0 \leq \psi \leq g} (-F)(\psi) .$$

Se $A$ é um aberto, então

$$\alpha^{-}(A) = \sup_{0\leq g\leq \phi_A} (-F(g)) = \sup_{-\phi_A\leq g\leq 0} F(g) \quad \text{e portanto}$$

temos a seguinte caracterização:

$$|\alpha|(A) = \alpha^{+}(A) + \alpha^{-}(A) = \sup \{F(g),\ |g| \leq 1,\ g \in C_o(R^n), \quad \text{onde}$$

$A$ é um aberto em $\beta_o(R^n)$. (28)

Obs 1.7 - Se $\alpha$ é uma medida em $R^n$ com $\alpha \geq 0$, então para a integral associada a $\alpha$ valem as mesmas propriedades da medida e integral de Lebesgue.

Se $\alpha$ uma medida qualquer, se mantém verdadeiros os seguintes resultados

a) Se $f_n$ é uma sucessão de funções $\alpha$-mensuráveis com $f_{n-1} \leq f_n$, $f_n \geq 0$ para todo $n \in N$ e se $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ então

$$\int f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\alpha .$$

b) Se $f_n$ é uma sucessão de funções $|\alpha|$ mensuráveis com $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $|\alpha|$ q.t.p e $|f_n| \leq g$ com $g$ mensurável, então

$$\int f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\alpha .$$

Demonstremos (b)

Sejam $\{a_n\}_{n\in N}$ e $\{b_n\}_{n\in N}$ sucessões de números reais.

Então $\liminf_{n\to\infty}(a_n-b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} b_n$ e

$\limsup_{n\to\infty}(a_n-b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} b_n$ .

Destas duas relações decorrem

$$\text{(i)}\ \liminf_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha = \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n\, d\alpha^+ - \int f_n\, d\alpha^-\right) \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha^+ - \limsup_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha^- \geq \int f d\alpha^+ - \int f d\alpha^- .$$

$$\text{(ii)}\ \limsup_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha = \limsup_{n\to\infty}\left(\int f_n\, d\alpha^+ - \int f_n\, d\alpha^-\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha^+ - \liminf_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha^- \leq \int f d\alpha^+ - \int f d\alpha^- .$$

de (i) e (ii) segue que $\int f d\alpha = \lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\alpha$ .

Enunciaremos dois teoremas gerais da teoria da medida, que são fundamentais no estudo das propriedades geométricas da fronteira de conjuntos de perímetro localmente finito.

<u>Teorema 1.4</u> - (Radon-Nikodym). Sejam $\alpha$ e $\mu$ duas medidas em $R^n$ com $\mu \geq 0$, tais que $|\alpha(B)| \leq \mu(B)$ para todo $B \in \beta_o(R^n)$ .

Então existe uma função $f$ não negativa e mensurável definida em $R^n$ tal que

$$\alpha(B) = \int_B f(x)\, d_\mu(x) \quad \text{para todo} \quad B \in \beta_o(R^n)$$

DEM: (c.f [ 9 ] , ps 238-240)

<u>Teorema 1.5</u> - (Lebesgue - Vitali). Nas mesmas hipóteses do teorema (1.4), se $\beta_\rho(x)$ é a esfera de centro $x$ e raio $\rho$, então

$$f(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\alpha(\beta_\rho(x))}{\mu(\beta_\rho(x))} , \quad \mu \quad \text{q.t.p.}$$

## CAPÍTULO II

## CONJUNTOS DE PERÍMETRO LOCALMENTE FINITO

Seja B um boreliano de $R^n$ e $\phi_B(x)$ sua função característica. Para toda $g \in C_o(R^n)$ consideremos o funcional

$$B(g) = \int_B g(x)\,dx = \int g(x)\,\phi_B(x)\,dx \qquad (29)$$

$g \longrightarrow B(g)$ é um funcional linear sobre $C_o(R^n)$ e contínuo no sentido que $|B(g)| \leq \max |g| \operatorname{med}(B \cap \operatorname{supp} g)$ para toda $g \in C_o(R^n)$.

Denotaremos $C_o^1(R^n)$ o conjunto das funções $f\colon R^n \longrightarrow R$, tal que supp f é compacto e as primeiras derivadas parciais de f são contínuas.

Se $g \in C_o^1(R^n)$ podemos considerar o funcional

$$B_i(g) = B(D_i g) = \int_B D_i g(x)\,dx \quad \text{onde} \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (30)$$

$g \longrightarrow B_i(g)$ é um funcional linear sobre $C_o^1(R^n)$.

<u>Definição 2.1</u> - O conjunto B tem perímetro localmente finito em $R^n$, se para todo i, tal que $1 \leq i \leq n$ vale a relação

$$|B_i(g)| \leq \max |g| \, \gamma(\text{supp } g) \quad \text{para toda} \quad g \quad \text{em} \quad C_0^1(R^n). \quad (31)$$

Exemplo 2.1 - Um semi-espaço em $R^n$ é um conjunto de perímetro localmente finito

DEM: Seja $S = \{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < b; \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1\}$

Para toda $g \in C_0^1(R^n)$, $S_1(g) = S(D_1 g) = \int_S D_1 g(x)\,dx$

Se $a_1 = 0$ então $S_1(D_1 g) = 0$, pois

$$S_1(D_1 g) = \int_{\sum_{i=2}^{n} a_i x_i < b} dx_2 \ldots dx_n \int_{-\infty}^{\infty} D_1 g(x)\,dx_1$$

Mas $\int_{-\infty}^{\infty} D_1 g(x)\,dx_1 = 0$ pois $g \in C_0^1(R^n)$

Se $a_1 > 0$ temos

$$S(D_1 g) = \int_{R^{n-1}} dx_2 \ldots dx_n \int_{x_1 < (b - \sum_{i=2}^{n} a_i x_i) a_1^{-1}} (D_1 g(x)\,dx_1 \qquad =$$

$$= \int_{R^{n-1}} g[(b-\sum_{i=2}^{n} a_i x_i) a_1^{-1}, x_2,\ldots,x_n]\, dx_2\ldots dx_n = \int_{\partial S} g(x)\, a_1 d(\partial S)$$

Para $a_1 < 0$ o resultado é o mesmo.

Concluindo temos

$\left| \int_S D_1 g(x)\, dx \right| \leq \max |g| \; med_{n-1}(\partial S \cap \text{supp } g)$, e com argumento análogo

$$\left| \int_S D_i g(x)\, dx \right| \leq \max |g| \; med_{n-1}(\partial S \cap \text{supp } g), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

<u>Exemplo 2.2</u> : Seja B um boreliano de $R^n$ para o qual é válida a fórmula de GREEN, isto é:

$$\int_B D_i g(x)\, dx = - \int_{\partial B} g\nu_i \; d(\partial B) \quad \text{para toda} \quad g \in C_o^1(R^n) \qquad (32)$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ é o versor da normal interna a $\partial B$.

Então B tem perímetro localmente finito

<u>DEM</u>: $\left| \int_B D_i g(x)\, dx \right| \leq \text{máx } |g| \; med_{n-1}(\partial B \cap \text{supp } g)$ para toda $g \in C_o^1(R^n)$.

Definição 2.2 - Os conjuntos de perímetro localmente finito em $R^n$ são os borelianos B para os quais existem n medidas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\int_{R^n} \phi_B(x)\, D_i g(x) dx = -\int_{R^n} g(x) d\alpha_i \text{ para toda } g \quad C_o^1(R^n) \text{ e } 1 \leq i \leq n \qquad (33)$$

O teorema de Riesz mostra a equivalência das definições (2.1) e (2.2).

De fato, se $|B_i(g)| \leq \max|g| \gamma$ (supp g) para toda $g \in C_o^1(R^n)$, existe uma única medida $\alpha_i$ (para cada $1 \leq i \leq n$) tal que

$$B_i(g) = \int_B D_i g(x) dx = \int_{R^n} D_i g(x) d\alpha_i = -\int_{R^n} g d\alpha_i \quad \text{pois} \quad g \in C_o^1(R^n)$$

Por outro lado se $B_i(g) = -\int_{R^n} g d\alpha_i$ para toda $g \in C_o^1(R^n)$,

então $|B_i(g)| \leq \max |g| |\alpha_i|$ (supp g)

Obs.2.1: Os suportes das medidas $\alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, estão contidos na fronteira B.

DEM: Seja $A \subset R^n - \partial B$, A aberto. Então

$$\int_B D_i g(x)\,dx = 0 \quad \text{para toda} \quad g \in C_o^1(R^n) \quad \text{com} \quad |g| \leq \phi_A .$$

Portanto $\alpha_i^+ (A) = \sup_{0 \leq g \leq \phi_A} \int g d\alpha_i = 0$ e

$\alpha_i^- (A) = \sup_{0 \leq g \leq \phi_A} \{ - \int g d\alpha_i \} = 0$ , o que implica

$|\alpha_i|(A) = \alpha_i (A) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ .

Podemos então reescrever a relação (33) na forma

$$\int_B D_i g(x)\,dx = - \int_{\partial B} g(x)\,d\alpha_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \text{e} \quad g \in C_o^1(R^n) \quad . \qquad (34)$$

Em alguns casos, torna-se útil, caracterizar os conjuntos de perímetro localmente finito da seguinte maneira.

<u>Teorema 2.1</u> - O conjunto B tem perímetro localmente finito em $R^n$ se e somente se existe uma sucessão $\{\psi_h\}_{h \in N} \subset C_o^1(R^n)$ , $0 \leq \psi_h \leq 1$, tal que para todo $h \in N$ e todo compacto K em $R^n$ valem

$$\lim_{h\to\infty} \int_K |\psi_h(x) - \phi_B(x)|dx = 0 \qquad (35) \qquad e$$

$$\int_K |D\psi_h(x)|dx \leq \gamma(K) \text{ onde } D\psi_h \text{ é o gradiente da função } \psi_h \qquad (36)$$

DEM: a) Se existe uma sucessão $\{\psi_h\}_{h\in N} \subset C_0^1(R^n)$, $0 \leq \psi_h \leq 1$, que satisfaça as relações (35) e (36), provemos que B tem perímetro localmente finito.

Para toda $g \in C_0^1(R^n)$,

$$\int_B D_i g(x)dx = \int \phi_B(x) \; D_i g(x)dx = \lim_{h\to\infty} \int \psi_h(x) \; D_i g(x)dx \; .$$

Integrando por partes e observando que $g \in C_0^1(R^n)$ temos

$$\int_B D_i g(x)dx = -\lim_{h\to\infty} \int g(x) \; D_i\psi_h(x)dx \; . \text{ Portanto}$$

$$\int_B D_i g(x)dx \leq \max |g| \liminf_{n\to\infty} \int_{\text{supp } g} |D\psi_h(x)| \, dx \leq \max |g| \; \gamma(\text{supp } g)$$

b) Provemos que se B tem perímetro localmente finito, existe uma sucessão $\{\psi_h\}_{h\in N} \subset C_0^1(R^n)$ com $0 \leq \psi_h \leq 1$, satisfazendo as relações (35) e (36).

Seja $\tau(x) \in C_0^1(R^n)$; $\tau(x) \geq 0$; $\text{supp } \tau(x) \subset \{x \in R^n, |x| \leq 1\}$ e $\int_{R^n} \tau(x)dx = 1$

Seja $\tau_h(x) = h^n \tau(hx)$, $h \in N$

Observamos que $\int_{R^n} \tau(hx)dx = 1$ para todo $h \in N$ .

Definimos

$$\psi_h(x) = \int_{R^n} \tau_h(y)\phi_B(x-y)dy = \int_{R^n} \tau_h(x-y)\phi_B(y)dy$$

Para todo $h \in N$ temos $\psi_h(x) \in C^1_0(R^n)$ e $0 \leq \psi_h \leq 1$, pois

$$\psi_h(x) = \int_{R^n} \tau_h(x-y)\phi_B(y)dy = \int_B \tau_h(x-y)dy = \int_{B\cap \text{supp}\,\tau_h} \tau_h(x-y)dy \leq$$

$$\leq \int_{B\cap \text{supp}\,\tau} \tau_h(x-y)dy \leq \int_{R^n} \tau_h(x-y)dy = 1,$$ onde observamos que

$\text{supp}\,\tau_h \subset \{x \in R^n, |x| \leq \frac{1}{h}\}$ (c.f. [ 4 ], p. 377).

Para a continuidade da demonstração necessitamos do seguinte resultado.

<u>Proposição 2.1</u> - Seja $f \in L^1(R^n)$ e K um compacto no qual f é contínua. Seja $\{\phi_k\}_{k\in N}$ uma sucessão de DIRAC, isto é , $\phi_k : R^n \longrightarrow R$ , tal que

(1) $\phi_k \in C_o^1(R^n)$ e $\phi_k \geq 0$ para todo $k \in N$.

(2) $\int \phi_k(x)dx = 1$

(3) supp $\phi_k$ é compacto e dado $\delta > 0$, supp $\phi_k \subset \{x \in R^n$ , $|x| \leq \delta\}$ para k suficientemente grande

Então $\int_{R^n} \phi_k(y)\ f(x-y)dx$ converge uniformemente a f em K.

DEM: (c.f [4] , p. 377)

Da proposição (2.1) segue imediatamente que para todo K compacto em $R^n$, temos $\lim\limits_{h\to\infty} \int_k |\psi_h(x) - \phi_B(x)|\ dx = 0$.

Retomando a prova, ressaltamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tau_h(x - y) = - \frac{\partial}{\partial y_i} \tau_h(x - y)$$

$$\text{Seja} \quad \varepsilon_h^i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin K \quad \text{ou} \quad D_i\psi_h(x) = 0 \\ 1 & \text{se} \quad D_i\ \psi_h(x) > 0 \\ -1 & \text{se} \quad D_i\psi_h(x) < 0 \end{cases}$$

Como todas as funções que necessitamos pertencem a $L^1(R^n)$ temos

$$\int_K |D_i\psi_h|\,dx = \int_K \varepsilon_h^i(x) D_i\psi_h(x)\,dx = \int_K dx \int \varepsilon_h^i(x)\,\phi_B(y)\frac{\partial}{\partial x_i}[\tau_h(x-y)]\,dy =$$

$$= -\int \phi_B(y)\,dy\,\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\int \varepsilon_h^i(x)\,\tau_h(x-y)\,dx\Big) = -\int_B \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\int \varepsilon_h^i(x)\,\tau_h(x-y)\,dx\Big)\,dy \leq$$

$\leq |\alpha_i|(K_i)$ onde $K_i = \{x \in R^n,\ d(x,K) \leq i\}$, pois B tem perímetro localmente finito

Portanto $\int_K |D\psi_h(x)|\,dx \leq \gamma(K)$ para todo $h \in N$.

Indicaremos com $\pi_{loc}(R^n)$ a classe dos conjuntos de perímetro localmente finito em $R^n$.

Proposição 2.2 - $\pi_{loc}(R^n)$ tem as seguintes propriedades

1) Se $B_1$ e $B_2$ pertencem a $\pi_{loc}(R^n)$ e $B_1 \cap B_2 = \phi$ então $B_1 \cup B_2 \in \pi_{loc}(R^n)$

2) Se $B_1$ e $B_2$ pertencem a $\pi_{loc}(R^n)$ e $B_1 \subset B_2$ então $B_2 - B_1$ pertence a $\pi_{loc}(R^n)$

3) Se $B_1$ e $B_2$ pertencem a $\pi_{loc}(R^n)$ então $B_1 \cap B_2$ pertence a $\pi_{loc}(R^n)$

4) Se $B_1$ e $B_2$ pertencem a $\pi_{loc}(R^n)$ então $B_1 \cup B_2$ pertence a $\pi_{loc}(R^n)$.

DEM:

1) $$\int_{B_1 \cup B_2} D_i g(x)\,dx = \int_{B_1} D_i g(x)\,dx + \int_{B_2} D_i g(x)\,dx = \int \phi_{B_1}(x) D_i g(x)\,dx + \int \phi_{B_2}(x) D_i g(x)\,dx =$$

$$= -\int g(x) D_i \phi_{B_1} - \int g(x) D_i \phi_{B_2}$$

<u>Nota</u>: Como $B_1 \in \pi_{loc}(R^n)$ existe uma única medida $\alpha_i$ tal que $\int_{B_1} D_i g(x)\,dx = -\int_{\partial B_1} g(x)\,d\alpha_i$ e analogamente existe uma única medida $\gamma_i$ tal que $\int_{B_2} D_i g(x)\,dx = -\int_{\partial B_2} g(x)\,d\gamma_i$

É frequente o uso da notação $d\alpha_i = D_i \phi_{B_1}$ e $d\gamma_i = D_i \phi_{B_2}$ onde $D_i \phi_{B_1}$ e $D_i \phi_{B_2}$ são respectivamente as medidas derivadas de $\phi_{B_1}$ e $\phi_{B_2}$ no sentido de distribuição.

2) $$\int_{B_2-B_1} D_i g(x)\,dx = \int_{B_2} D_i g(x)\,dx - \int_{B_1} D_i g(x)\,dx = -\int_{\partial B_2} g(x)\,d\alpha_i +$$

$$+\int_{\partial B_1} g(x)\,d\tilde{\alpha}_i = -\int g(x)\,d(\alpha - \tilde{\alpha}_i)$$

3) Lembrando que $\phi_{B_1 \cap B_2} = \phi_{B_1} \cdot \phi_{B_2}$, sejam $\{\psi_h\}_{h\in N}$ e $\{X_h\}_{h\in N}$ duas sucessões de $C_o^1(R^n)$ com $0 \leq \psi_h \leq 1$ e $0 \leq X_h \leq 1$ tais que para todo h em N e todo compacto K em $R^n$,

$$\lim_{h\to\infty} \int_K |\psi_h - \phi_{B_1}|dx = \lim_{h\to\infty} \int_K |X_h - \phi_{B_2}|dx = 0 \qquad \text{e}$$

$$\int_K |D\psi_h(x)|dx \leq \gamma(K) \quad ; \quad \int_K |DX_h(x)|dx \leq \tilde{\gamma}(K)$$

Então resulta:

$$\lim_{h\to\infty} \int_K |\psi_h X_h - \phi_{B_1}\phi_{B_2}| \, dx = 0 \quad \text{para todo K compacto em } R^n ,$$

pois

$$|\psi_h X_h - \phi_{B_1}\phi_{B_2}| \leq |X_h - \phi_{B_2}| + |\psi_h - \phi_{B_1}| \qquad \text{e também}$$

$$\int_K |D\psi_h X_h(x)|dx \leq \gamma(K) + \tilde{\gamma}(K) \text{ para todo K compacto em } R^n.$$

pois $\quad D\psi_h X_h = \psi_h \, D \, X_h + X_h \, D\psi_h$

4) Resulta de (2) e (3) observando-se que $B_1 \cup B_2 = [B_1 - (B_1 \cap B_2)] \cup B_2$

Veremos agora uma nova definição de conjunto de perímetro localmente finito.

<u>Definição 2.3</u> - Seja B um boreliano de $R^n$. Dizemos que B é um conjunto de perímetro localmente finito se e somente se para qualquer $K \in \beta_o(R^n)$ temos

$$\sup \{ \int_B D_i g(x)dx, \; g \in C_o^1(R^n), \; |g| \leq 1, \text{ supp } g \subset K\} < + \infty$$

Mostremos a equivalência entre as definições (2.1) e (2.3)

a) (2.1) implica em (2.3)

Sejam $K \in \beta_o(R^n)$ e $g \in C_o^1(R^n)$ com $|g| \leq 1$ e supp $g \subset K$

Como B tem perímetro localmente finito em $R^n$, temos para $1 \leq i \leq n$, $|\int_B D_i g(x)dx| \leq \max |g| \; \gamma(\text{supp } g)$, ou ainda ,

$$|\int_B D_i g(x)dx| \leq \gamma(K) \text{ o que implica } \int_B D_i g(x)dx \leq \gamma(K) < + \infty$$

Logo $\sup \{\int_B D_i g(x),\ g \in C_0^1(R^n), |g| \leq 1,\ \text{supp } g \subset K\} \leq \gamma(K) < +\infty$

b) (2.3) implica em (2.1)

Seja $g \in C_0^1(R^n)$, $|g| \leq 1$. Como supp $g \subset \beta_0(R^n)$ temos

$\int_B D_i g(x)\,dx < +\infty$ para $1 \leq i \leq n$. Mas

$$\int_B D_i g(x)\,dx = -\int_{R^n} g(x)\,d\phi_B = -\int_{\text{supp } g} g(x)\,d\phi_B < +\infty \text{ . Logo}$$

$$\left|\int_B D_i g(x)\,dx\right| = \left|-\int_{\text{supp } g} g(x)\,d\phi_B\right| \leq \max|g|\,\gamma(\text{supp } g) \leq \gamma(\text{supp } g)$$

Seja agora $g \in C_0^1(R^n)$, $g$ arbitrária, com $|g(x)| > 1$ para algum $x \in R^n$.

Como supp $g$ é um compacto, temos que $|g(x)|$ assume um máximo em supp $g$.

Consideremos $h(x) = \dfrac{g(x)}{\max|g|}$. Temos que $h(x) \in C_0^1(R^n)$, $|h(x)| \leq 1$ e supp $h$ = supp $g$.

Então $\left|\int_B D_i h(x)\,dx\right| \leq \gamma(\text{supp } h)$, o que implica

$$\left|\int_B \max|g|\ D_i h(x)\,dx\right| \leq \max|g|\ \gamma\ (\text{supp } g),\ \text{isto é,}$$

$$\left|\int_B D_i g(x)\,dx\right| \le \max|g|\ \gamma\ (\text{supp } g) \text{ para } 1 \le i \le n.$$

Podemos reescrever a definição (2.3) da seguinte maneira

Definição (2.3)' - Seja B um boreliano de $R^n$. B é um conjunto de perímetro localmente finito se e somente se para qualquer $K \in \beta_o(R^n)$ temos

$$\sup\left\{\int_B \text{div } g(x)\,dx,\ g_i \in C_o^1(K),\ |g| \le 1\right\} < +\infty \text{ onde por } g_i$$

entendemos a i-ésima componente da função vetorial $g$.

Indiquemos por $|\alpha_i|$ a variação total da medida $\alpha_i$ definida de

$$\int_B D_i g(x)\,dx = -\int_{\partial B} g(x)\ d\alpha_i$$ e com $|\alpha|$ a variação total da medida vetorial $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, isto é, a função de conjunto

$$|\alpha|(B) = \sup\left\{\sum_h |\alpha(B_h)|,\ B = \bigcup_h B_h,\ B_h \cap B_k = \phi \text{ para } h \ne k\right\} \tag{37}$$

Proposição 2.3: A função $|\alpha|$ definida pela relação (37) é uma medida em $R^n$.

DEM: Seja $B = \bigcup_h B_h$, $B_h \cap B_k = \phi$ se $h \neq k$ e $\{C_k\}_{k \in N}$ uma partição qualquer de B. Notamos que $\{C_k \cap B_h\}_h^k$ é uma partição de $B_h$.

$$\text{Seja } \varepsilon_k^i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i(C_k)}{|\alpha(C_k)|} & \text{se} \quad \alpha(C_k) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha(C_k) = 0 \end{cases}$$

Então $|\alpha(C_k)| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i \; \alpha_i(C_k)$, donde

$$\sum_k |\alpha(C_k)| = \sum_k \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i \, \alpha_i(C_k) = \sum_k \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i \sum_h \alpha_i(C_k \cap B_h) =$$

$$= \sum_k \sum_h \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i \, \alpha_i(C_k \cap B_h) = \sum_k \sum_h |\alpha_i(C_k \cap B_h)| \leq$$

$$\sum_k \sum_h |\alpha(C_k \cap B_h)| \leq \sum_h |\alpha|(B_h).$$

Como $\{C_k\}_{k \in N}$ é uma partição arbitrária de B, temos

$$|\alpha|(B) \leq \sum_h |\alpha|(B_h).$$

Por outro lado para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição de $B_h$,

$\{C_{h,k}\}_{k\in N}$ tal que $|\alpha(B_h)| \leq \sum_k |\alpha(C_{h,k})| + \varepsilon 2^{-h}$

Mas $\{C_{h,k}\}$ é uma partição de B e portanto

$$|\alpha|(B) \geq \sum_{h,k} |\alpha(C_{h,k})| = \sum_h \sum_k |\alpha(C_{h,k})| \geq \sum_h |\alpha|(B_h) - \varepsilon$$

Donde $|\alpha|(B) \geq \sum_h |(B_h)$, o que conclui a demonstração.

Pelo teorema de Riesz (ver relação (28)) temos que se A é um aberto limitado então

$$|\alpha_i|(A) = \sup\{\int_B D_i g(x)\,dx;\ g\in C_o^1(A); |g|\leq 1\} + \infty , \qquad (38)$$

o que nos permitirá a seguinte proposição

<u>Proposição 2.4</u>: Seja A um aberto limitado em $R^n$. Então

$$|\alpha|(A) = \sup\{\int_B \operatorname{div} g(x)\,dx,\ g_i\in C_o^1(A),\ |g| \leq 1\} + \infty \qquad (39)$$

DEM: dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição finita de A, $\{A_h\}$, $h = 1,2,\ldots,\nu$ de conjuntos de Borel e existem pontos $x_h \in A_h$ tais que

$$\int g_i\,d\alpha_i \geq \sum_{h=1}^{\nu} g_i(x_h)\,\alpha_i(A_h) - \varepsilon/n$$ o que implica

$$-\sum_{i=1}^{n} \int g_i d\alpha_i \leq -\sum_{h=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_h)\ \alpha_i(A_h) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{\nu} |g(x_h)|\,|\alpha(A_h)| + \varepsilon \leq \sum_{h=1} |\alpha(A_h)| + \varepsilon \leq |\alpha|(A) + \varepsilon$$

Então $\sup \int_B \operatorname{div} g(x)dx \leq |\alpha|(A)$ para $|g| \leq 1$ e $g_i \in C_o^1(A)$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição finita $\{B_h\}$, $h = 1,2,\ldots,\nu$ de A tal que $|\alpha|(A) < \sum_{i=1}^{\nu} |\alpha(B_h)| + \varepsilon$

Seja $$\varepsilon_h^i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i(B_h)}{|\alpha(B_h)|} & \text{se } \alpha(B_h) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha(B_h) = 0 \end{cases}$$

Notamos que $|\alpha(B_h)| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_h^i\, \alpha_i(B_h)$ .

Então $$|\alpha|(A) \leq \sum_{h=1}^{\nu} |\alpha(B_h)| + \varepsilon = \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_h^i\, \alpha_i(B_h) + \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{h=1}^{\nu} \varepsilon_h^i\, \alpha_i(B_h)\right) + \varepsilon$$

Seja $g_i(x) = \sum_{h=1}^{\nu} \varepsilon_h^i \, \phi_{B_h}(x)$. Para cada $1 \leq i \leq n$, $g_i(x)$ é uma função escada que verifica a relação $\sum_{i=1}^{n} g_i^2(x) \leq 1$.

Então existem funções $\phi_i \in C_0^1(A)$, $1 \leq i \leq n$, verificando a mesma relação e tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \int g_i \, d\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \int \phi_i \, d\alpha_i + \varepsilon$$

Portanto

$$|\alpha|(A) < \sum_{i=1}^{n} \int g_i \, d\alpha_i + \varepsilon \leq \int \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, d\alpha_i + 2\varepsilon \leq \sup \int_B \operatorname{div} g(x)\,dx + 2\varepsilon ,$$

o que conclui a demonstração.

<u>Nota</u>: Se A é um aberto limitado de $R^n$, concluímos através da relação (34) que $|\alpha|(A) = |\alpha|(A \cap \partial B)$

<u>Definição 2.4</u>: Sejam B um conjunto de perímetro localmente finito em $R^n$ e A um aberto limitado em $R^n$.

O número $|\alpha|(A)$ é dito o perímetro de B em A.

<u>Nota</u>: Denotamos também $|\alpha|\,(A) = P(B,A)$.

Portanto

$$P(B,A) = \sup \left\{ \int_B \operatorname{div} g(x)\,dx,\ g_i \in C_0^1(A),\ |g| \leq 1 \right\} < +\infty .$$

<u>Nota</u>: B é relativamente compacto em A, se $B \subset A$, B é aberto em $R^n$ e $\overline{B}$ é compacto com $\text{dist}(B,\partial A) > 0$, onde $\partial A$ é a fronteira topológica de A. Denotamos $B \subset\subset A$.

<u>Teorema 2.2</u> (compacidade): Seja $\{B_s\}_{s\in N}$ uma sucessão de conjuntos tais que $P(B_s,A) \leq c(A) < +\infty$ para todo $A \subset\subset \Omega$ onde $\Omega$ é aberto em $R^n$. Então existem $\{B_{s_j}\}_{j\in N}$ e um conjunto B tal que para todo $K \subset\subset \Omega$ resulta

$$\lim_{j\to\infty} \int_k \left|\phi_{B_{s_j}} - \phi_B\right| dx = 0 \qquad (40)$$

DEM: para $A \subset\subset \Omega$ fixo, existe $\{s_j\}_{j\in N} \uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j}}$ converge em $L^1(A)$, isto é,

$$\lim_{j,t\to\infty} \int_A \left|\phi_{B_{s_j}} - \phi_{B_{s_t}}\right| dx = 0 \qquad (41)$$

De fato, seja $\psi_{h,s}(x) = \int_{B_s} \tau_h(x-y)\,dy$ e $\tau_h(x) = h^n \tau(hx)$ com $h \in N$, $\tau(x) \geq 0$, $\tau \in C_0^\infty(R^n)$, $\text{supp}\,\tau \subset \{x \in R^n, |x| \leq 1\}$ e $\int_{R^n} \tau(x)\,dx=1$.

Temos que $\psi_{h,s}$ é infinitamente diferenciável e a sequência $\{\psi_{h,s}\}$ converge uniformemente para $\phi_{B_s}$ em todo compacto $K \subset \Omega$.

Assim $\int_A |\phi_{B_{s_j}} - \psi_{h,s_j}| \, dx \leq h^{-1} n. \, c(A_1)$ e

$$\int_A |\psi_{h,s_t} - \phi_{B_{s_t}}| \, dx \leq h^{-1} n. \, c(A_2) \qquad (42)$$

Como $\{\psi_{h,s}\}$ é equilimitada , pois para todo $\underline{h}$ e $\underline{s}$ em N $|\psi_{h,s}| \leq 1$ e equicontínua em A, pois $|\psi_{h,s}(x)-\psi_{h,s}(y) \leq |x-y|.n.c(A)$ para todo x, y em A; pelo teorema de Ascoli, existe $\{s_i^1\}_{i\in N}$ tal que $\{\psi_{1,s_i^1}\}_{i\in N}$ converge uniformemente em A.

Com o mesmo argumento existe $\{s_i^2\}_{i\in N} \subset \{s_i^1\}_{i\in N}$ tal que $|\psi_{2,s_i^2}\}_{i\in N}$ converge uniformemente em A.

Em geral existe $\{s_i^m\}_{i\in N} \subset \{s_i^{m-1}\}_{i\in N}$ tal que $\{\psi_{m,s_i^m}\}_{i\in N}$ converge uniformemente em A.

Então a sequência $\{\psi_{m,s_i^i}\}_{i\in N}$ converge uniformemente em A para todo índice m. (43)

Mas $\int_A |\phi_{B_{s_j}} - \phi_{B_{s_t}}|\, dx \leq \int_A |\phi_{B_{s_j}} - \psi_{h,s_j}|\, dx + \int_A |\psi_{h,s_j} - \psi_{h,s_t}|\, dx +$

$$+ \int_A |\psi_{h,s_t} - \phi_{B_{s_t}}|\, dx$$

Assim a relação (41) segue (42) e (43). Portanto para $A \subset\subset \Omega$ existe $\{s_j\}_{j \in N}$ tal que $\phi_{B_{s_j}}$ converge em $L^1(A)$.

Por outro lado, tomando uma partição de $\Omega$ da seguinte forma: $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ com $A_n \subset A_{n+1}$ e $A_1 = A$ obtemos que em $A_1$ existe $\{s_j^1\} \uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j^1}}$ converge em $L^1(A_1)$, generalizando, em $A_n$ existe $\{s_j^n\} \uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j^n}}$ converge em $L^1(A_n)$. Tomando a sequência diagonal, em $A_n$, existe $\{s_n^n\} \uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(A_n)$.

Como para qualquer $K \subset\subset \Omega$, $K \subset A_n$ para algum $n$, temos que se $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(A_n)$ então $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(K)$ o que conclui a prova.

<u>Obs 2.2</u> : Uma sucessão de conjuntos $\{B_h\}_{h \in N}$ converge a $B$ em $L^1_{loc}(R^n)$ se para todo $K$ compacto em $R^n$, temos

$$\lim_{h\to\infty} \int_K |\phi_{B_h} - \phi_B|dx = 0$$

Veremos agora como calcular o perímetro de B em A mediante funções regularizantes que aproximam $\phi_B(x)$.

<u>Teorema 2.3</u> (Semi-Continuidade). Se $\{\psi_h\}_{h\in N} \subset C_o^1(R^n)$ converge a $\phi_B$ em $L^1_{loc}(R^n)$, para todo aberto $A \subset\subset R^n$ temos

$$P(B,A) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|\, dx \qquad (44)$$

DEM: Sabemos que $P(B,A) = |\alpha|(A) = \sup\{\int_B \operatorname{div} g(x)dx$, $g_i \in C_o^1(A)$, $|g| \leq 1\}$.

Então basta provarmos que $\int_B \operatorname{div} g(x)dx \leq \liminf_{h\to\infty}\int_A |D\psi_h(x)| dx$ para toda $g_i \in C_o^1(A)$ com $|g| \leq 1$ e supp $g \subset A$.

A hipótese nos diz que $\lim_{h\to\infty} \int_A |\psi_h(x) - \phi_B(x)|dx = 0$, o que implica

$$\int_B \operatorname{div} g(x)dx = \int_{R^n} \phi_B(x) \operatorname{div} g(x)dx = \lim_{h\to\infty} \int_A \psi_h(x) \operatorname{div} g(x)dx$$

Integrando por partes temos

$$\lim_{h\to\infty} \int_A \psi_h(x)\ \mathrm{div}\ g(x)dx = \lim_{h\to\infty} - \int_A \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\ D_i\psi_h(x)dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx\ .\quad \text{Portanto}$$

$$P(B,A) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx$$

<u>Obs. 2.3</u> : Seja $\tau(x) \in C_0^1(R^n)$, $\tau(x) \geq 0$, supp $\tau(x) \subset$ $\subset \{x \in R^n : |x| \leq 1$ e $\int_{R^n} \tau(x)dx = 1$. Seja ainda $\tau_h(x) = h^n\ \tau(hx)$. Por $\psi_h(x) = \tau_h * \phi_B$ entendemos

$$\psi_h(x) = \int_{R^n} \tau_h(y)\ \phi_B(x-y)dy = \int_{R^n} \tau_h(x-y)\ \phi_B(y)dy$$

Lembremos ainda que $0 \leq \psi_h \leq 1$ e $\psi_h \in C_0^1(R^n)$ para todo $h\in N$.

<u>Teorema 2.4</u>: Seja $\psi_h = \tau_h * \phi_B$ para $h \in N$. Então para todo $K \subset\subset R^n$ temos

$$\limsup_{h\to\infty} \int_K |D\psi_h(x)|dx \leq |\alpha|\ (\overline{K}).$$

DEM:

$$\int_K |D\psi_h(x)|dx = \sup\{ \int_K \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\ D_i\psi_h(x)dx,$$

$$g_i \in C_0^1(K),\ |g| \leq 1\} .$$

Seja $g_i \in C_0^1(K)$ fixa. Então

$$\int_K g_i(x)\ D_i\psi_h(x)dx = \int_K g_i(x)\ (\frac{\partial}{\partial x_i} \int \tau_h(x-y)\phi_B(y)dy)dx =$$

$$= \int \phi_B(y)dy \int_K g_i(x)\ \tau_h(x-y)dx = - \int_B \frac{\partial}{\partial y_i}(\int_K \tau_h(x-y)g_i(x)dx)dy.$$

Seja $\varepsilon > 0$, para h suficientemente grande a função

$\int_K \tau_h(x-y)\ g_i(x)dx$ pertence a $C_0^1(K_\varepsilon)$ e ainda

$$\sum_{i=1}^{n} (\int_K \tau_h(x-y)\ g_i(x)dx)^2 \leq 1 \quad \text{para todo} \quad y \in R^n .$$

Portanto $\int_K |D\psi_h(x)|dx \leq |\alpha|\ (K_\varepsilon)$ para h suficientemente grande e da arbitrariedade de $\varepsilon$ temos a conclusão.

<u>Obs. 2.4:</u> Dos teoremas (2.3) e (2.4) segue que se A é um conjunto aberto de $R^n$ e $\psi_h = \tau_h * \phi_B$, então

$$|\alpha|(A) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx \leq$$

$$\leq \limsup_{h} \int_A |D\psi_h(x)|dx \leq |\alpha|(\bar{A})$$

Em particular se

$$|\alpha|(\partial A) = 0, \qquad (46)$$

temos a relação

$$|\alpha|(A) = P(B,A) = \lim_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx \qquad (47)$$

## CAPÍTULO III

## CONJUNTOS DE PERÍMETRO FINITO

<u>Definição 3.1</u>: Seja B um boreliano de $R^n$. B é um conjunto de perímetro finito se

$$|\alpha|(R^n) = \sup\{\int_B \operatorname{div} g(x)dx,\ g_i \in C_0^1(R^n), |g| \leq 1\} < +\infty \qquad (48)$$

Chamaremos perímetro de B e denotaremos P(B) o número $|\alpha|(R^n) = |\alpha|(\partial B)$.

<u>Teorema 3.1</u>: Seja B um boreliano de $R^n$ e $\psi_h = \tau_h * \phi_B$ onde $h \in N$.

B tem perímetro finito se e somente se

$$\lim_{h\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x)|dx < +\infty . \qquad (49)$$

Temos ainda que

$$P(B) = \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x)|dx \qquad (50)$$

DEM: pelo teorema da semi-continuidade temos

$$|\alpha|(R^n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x)|dx$$

Pelo teorema (2.4) temos $\limsup_{n\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x)|dx \leq |\alpha|(\overline{R^n})$.

Portanto $|\alpha|(R^n) = \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x)|dx$

Obs.3.1 - Se B é um boreliano de $R^n$ para o qual vale a fórmula de GREEN, então

$$P(B) = \int_{\partial B} d\, H_{n-1}$$

DEM: $\sup_{|g|\leq 1} \int_B \operatorname{div} g(x)dx = \sup_{|g|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B} g_i \nu_i \, d\, H_{n-1} = \int_{\partial B} d\, H_{n-1}$

Provaremos agora um teorema "Tipo Fubini".

Teorema 3.2: Se $B \in \beta(R^n)$ tem perímetro finito em $R^n = R^m \times R^{n-m}$, então para quase todo $y \in R^{n-m}$ o conjunto

$B_y = \{x \in R^m;\ (x,y) \in B\}$ tem perímetro finito em $R^m$ e é válida a relação

$$\int_{R^{n-m}} P(B_y)\,dy \leq P(B) \tag{51}$$

DEM: Seja $\psi_h = \tau_h * \phi_B$; então

$$P(B) = \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x,y)\, dx\, dy$$ e quase para todo

$(x,y) \in R^m \times R^{n-m}$, $\lim\limits_{h\to\infty} \psi_h(x,y) = \phi_B(x,y)$.

Então para quase todo $y \in R^{n-m}$, $\psi_h(x,y)$ considerada apenas como função de x converge para quase todo $x \in R^m$ para a função $\phi_B(x,y) = \phi_{B_y}(x)$.

Portanto pelo teorema da semi-continuidade

$$P(B_y) \leq \lim_{h\to\infty} \inf \int_{R^n} |D_x\, \psi_h(x,y)|dx$$

Por outro lado a função $P(B_y)$ é integrável em $R^{n-m}$.

De fato, $P(B_y) = \sup \{\int \phi_B(x,y) \sum_{i=1}^{m} D_i g_i(x)dx,\ g_i \in C_o^1(R^m),\ |g| \leq 1\}$

Sejam $S_k = \{x \in R^m,\ |x| < k,\ k \in N\}$.

Como para quase todo $y \in R^{n-m}$, $\psi_h(x,y)$ converge para $\phi_{B_y}(x)$ em $L^1_{loc}(R^n)$, temos

$$\int_{S_k} |D\phi_{B_y}(x)|dx \leq \lim_{h\to\infty} \inf \int_{S_k} |D_x\, \psi_h(x,y)|\, dx$$

Por outro lado obtemos

$$\lim_{h\to\infty} \sup \int_{S_{k-1}} |D_x\psi_h(x,y)|\,dx \leq \int_{S_k} |D\phi_{B_y}(x)|\,dx$$

Mas $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{S_k} |D\phi_{B_y}(x)\,dx| = \int_{R^m} |D\phi_{B_y}(x)|\,dx = P(B_y)$

Portanto $\displaystyle P(B_y) \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} \inf \int_{S_k} |D_x\ \psi_h(x,y)|\,dx \leq$

$\displaystyle\leq \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} \sup \int_{S_k} |D_x\psi_h(x,y)|\,dx \leq P(B_y)$, o que prova ser $P(B_y)$ uma função integrável para quase todo $y \in R^{n-m}$.

Pelo lema de Fatou podemos escrever

$$\int_{R^m} P(B_y)\,dy \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{R^n} |D_x\psi_h(x,y)|\,dx \leq \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} |D\psi_h(x,y)\,dx\,dy = P(B)\ .$$

<u>Definição 3.2</u>: Seja $B \in \beta(R^n)$. A fronteira essencial de $B(\mathfrak{F}\,B)$ é o conjunto de pontos $x \in R^n$ tal que para todo $\ell > 0$,

$$\text{med}(B \cap S_\ell(x)) > 0 \quad \text{e} \quad \text{med}(B \cap S_\ell(x)) < \text{med}(S_\ell(x)) \tag{52}$$

onde

$$S_\ell(x) = \{y \in R^n : |y - x| < \ell\}.$$

Veremos uma maneira de calcular o perímetro de conjuntos borelianos na reta real.

Teorema 3.3: Seja $B \in \beta(R)$ e $P(B) < +\infty$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são pontos distintos de $\mathfrak{F}B$ então

$$P(B) \geq k \qquad (53)$$

DEM: Seja $\{\psi_h\}_{h \in N} \subset C_0^1(R)$, $0 \leq \psi_h \leq 1$, $\psi_h$ convergindo a $\phi_B$ em $L^1_{loc}(R)$ e $\lim_{h\to\infty} \int_R |D\psi_h(x)|dx = P(B)$,

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_k$ intervalos dois a dois disjuntos de centros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ respectivamente.

Para $1 \leq i \leq k$, existem em $S_i$ dois pontos que indicaremos $x_i^1$ e $x_i^2$ tais que $\lim_{h\to\infty} \psi_h(x_i^1) = 1$ e $\lim_{h\to\infty} \psi_h(x_i^2) = 0$

Então $$\int_R |D\psi_h(x)|dx \geq \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_i^2}^{x_i^1} |D\psi_h(x)|dx \right| \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^k |\psi_h(x_i^1) - \psi_h(x_i^2)|$$ . Fazendo $h \to \infty$, temos $P(B) \geq k$.

<u>Obs. 3.2</u>: Seja $B \in \beta(R)$ e $P(B) < +\infty$. Se $\mathcal{J}B$ é constituída exatamente de $k$ pontos então

$$P(B) = k \qquad (54)$$

<u>Obs. 3.3</u>: Se $B \subset R$ é uma semi-reta então $P(B) = 1$. Se $B \subset R$ é um intervalo limitado (aberto, fechado ou semi-aberto) então $P(B) = 2$.

# CAPÍTULO IV

## DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA EM $R^n$ E PROPRIEDADE ISOPERIMÉTRICA DA ESFERA

Dado $B \in \beta(R)$ com $P(B) < +\infty$, em geral não é possível majorarmos a med(B) ou a med(R-B) com $P(B)^\alpha$ onde $\alpha$ é um número positivo. Como exemplo se B é uma semi-reta temos $P(B) = 1$ e $\text{med}(B) = \text{med}(R-B) = +\infty$.

Mas em $R^2$ torna-se válida a seguinte desigualdade

<u>Teorema 4.1</u> (Desigualdade isoperimétrica em $R^2$)

Seja $B \in \beta(R^2)$ com $P(B) < +\infty$. Então

$$\min\{\text{med}(B),\ \text{med}(R^2 - B)\} \leq P(B)^2$$

DEM: pela relação (51) temos

$$\int_R P(B_y)\,dy \leq P(B) < +\infty \qquad (55) \text{ para quase todo } y \in R.$$

Pelo teorema (3.3) concluímos que

$$P(B_y) = 0,\ P(B_y) = N(y) > 0 \quad \text{ou} \quad P(B_y) = +\infty \qquad (56)$$

onde observamos que $N(y)$ é o número de pontos da fronteira essencial de $B_y$.

Como $\text{med}\{y: P(B_y) = +\infty\} = 0$, podemos considerar apenas os pontos $y \in R$ tais que $P(B_y) = 0$ ou $P(B_y) = N(y) > 0$

Seja $E_2 = \{y \in R : P(B_y) > 0\}$. Pela relação (55) temos

$$\text{med}(E_2) = \int_{E_2} \phi_{E_2}\, dy \leq \int_{E_2} P(B_y)\,dy = \int_R P(B_y)\,dy \leq P(B) < +\infty$$

Ao variarmos $y$ em $R$, teremos $B_y = \phi$; $B_y = R$ ou $\phi \neq B_y \neq R$

Sejam $\Gamma_1 = \{y \in R;\ B_y = \phi\}$; $\Gamma_2 = \{y \in R;\ B_y = R\}$. Então

$$\min\{\text{med}\,\Gamma_1,\ \text{med}\,\Gamma_2\} = 0, \qquad (57)$$

pois se isso não ocorresse, conduzindo retas paralelas ao eixo y teríamos $P(B_x) \geq 1$ para todo $x \in R$ e portanto $\int_R P(B_x)\,dx = +\infty$, o que contraria a relação (55).

A menos de passagem ao complementar podemos supor $\text{med}\,\Gamma_2 = 0$. Então $B \subset R \times E_2$

Seja $E_1 = \{x \in R : P(B_x)\} > 0$. Repetindo o raciocínio feito para $E_2$ temos $\text{med}(E_1) \leq P(B) < +\infty$ e $B \subset E_1 \times R$.

Portanto $\text{med}(B) \leq \text{med}(E_1 \times E_2) \leq P(B)^2$, o que conclui a demonstração.

Teorema 4.2 (Desigualdade isoperimétrica em $R^n$). Seja $B \in \beta(R^n)$ com $P(B) < +\infty$. Então para $n \geq 2$ temos

$$\min\{\operatorname{med}(B), \operatorname{med}(R^n - B)\} \leq P(B)^{\frac{n}{n-1}} \tag{58}$$

DEM: faremos a prova por indução finita

1) para $n=2$, o teorema 4.1 mostra que a relação (58) é válida.

2) Suponhamos a relação (58) válida para n e demonstremo-la para n+1. Sejam

$$B_{x_{n+1}} = \{x \in R^n : (x, x_{n+1}) \in B\}$$

$$B_x = \{x_{n+1} \in R : (x, x_{n+1}) \in B\}$$

$$E = \{x \in R^n : P(B_x) > 0\}$$

Consideremos a reta $r_x$ passando por x e paralela a $x_{n+1}$. Indicamos $A_1 = \{x \in R^n : r_x \cap B = \phi\}$ e $A_2 = \{x \in R^n : r_x \cap B = R\}$

Observamos que $A_2 \subset B_{x_{n+1}}$ e $A_1 \subset R^n - B_{x_{n+1}}$

Seja $\mu = \min\{\operatorname{med} A_1, \operatorname{med} A_2\}$

Se $\mu > 0$ então $\int_R \mu^{\frac{n-1}{n}} dx_{n+1} = +\infty$. Mas pela hipótese de indução $\min\{\text{med}(B_{x_{n+1}}), \text{med}(R^n - B_{x_{n+1}})\} \leq P(B_{x_{n+1}})^{\frac{n}{n-1}} < \infty$, para quase todo $x_{n+1} \in R$.

Podemos considerar

$\mu \leq \min \text{med}(B_{x_{n+1}}), \text{med}(R^n - B_{x_{n+1}})$ pois $A_2 \subset B_{x_{n+1}}$ e $A_1 \subset R^n - B_{x_{n+1}}$. Logo

$$\int_R \mu^{\frac{n-1}{n}} dx_{n+1} \leq \int_R P(B_{x_{n+1}}) dx_{n+1} < +\infty$$ , o que é absurdo.

Portanto $\mu = 0$.

A menos de passagem ao complementar podemos supor med $A_2 = 0$

Então $\text{med}(B_{x_{n+1}}) \leq \text{med } E$ para todo $x_{n+1} \in R$

Pela hipótese de indução

$\text{med}(B_{x_{n+1}})^{\frac{n-1}{n}} \leq P(B_{x_{n+1}})$. como med $E \leq P(B)$,

$$\text{med}(B_{x_{n+1}}) \leq P(B_{x_{n+1}})\, \text{med}(B_{x_{n+1}})^{1/n} \leq P(B_{x_{n+1}})\, P(B)^{1/n}$$

Integramos com respeito a $x_{n+1}$ e temos

$\text{med}(B) \leq P(B)^{\frac{n+1}{n}}$, o que conclui a demonstração

Estudaremos agora a propriedade isoperimétrica da esfera.

Lema 4.1: Sejam $\alpha$ e $\beta$ duas medidas vetoriais tais que para todo $\Omega \in \beta_o(R^n)$,

(59) $\langle\beta(\Omega), \alpha(\Omega) - \beta(\Omega)\rangle \geq 0$ onde com $\langle,\rangle$ indicamos o produto escalar em $R^n$. Então

$$2|\alpha|(\Omega)\{|\alpha|(\Omega) - |\beta|(\Omega)\} \geq [|\alpha - \beta|(\Omega)]^2 \tag{60}$$

DEM: Para todo $\Omega \in \beta_o(R^n)$ temos

$$|\alpha(\Omega)|^2 = \langle\alpha(\Omega),\alpha(\Omega)\rangle = \langle\alpha(\Omega) - \beta(\Omega) + \beta(\Omega), \alpha(\Omega) - \beta(\Omega) + \beta(\Omega)\rangle$$

$$= |\alpha(\Omega) - \beta(\Omega)|^2 + |\beta(\Omega)|^2 + 2\langle\alpha(\Omega) - \beta(\Omega), \beta(\Omega)\rangle$$

Mas por hipótese $\langle\alpha(\Omega) - \beta(\Omega), \beta(\Omega)\rangle \geq 0$. Então

$|\alpha(\Omega)|^2 \geq |\alpha(\Omega) - \beta(\Omega)|^2 + |\beta(\Omega)|^2 \geq |\beta(\Omega)|^2$. Portanto

$|\beta(\Omega)| \leq |\alpha(\Omega)| \leq |\alpha|(\Omega)$.

Pelos teoremas de Radon - Nikodym e Lebesgue - Vitali temos

$$\alpha(\Omega) = \int_\Omega \phi(x)\, d|\alpha| \quad \text{e} \quad \beta(\Omega) = \int_\Omega \psi(x)\, d|\alpha| \quad \text{onde}$$

$$\phi(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\alpha(B_\rho(x))}{|\alpha|(B_\rho(x))}, \quad \psi(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\beta(B_\rho(x))}{|\alpha|(B_\rho(x))}$$

com $\phi(x)$ e $\psi(x)$ $|\alpha|$ q.t.p e onde $B_\rho(x)$ é a esfera de centro x e raio $\rho$

Observamos que

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} |\phi| = 1; |\psi| \leq 1 \ , |\alpha| \quad \text{q.t.p} \\ 1 - |\psi|^2 = |\phi|^2 - |\psi|^2 \geq |\phi-\psi|^2 \end{cases}$$

Para provar a 2º relação do ítem (i) verificamos que

$$<\phi,\phi> = <\phi-\psi+\psi \ ,\phi-\psi+\psi> = <\phi-\psi>^2 + |\psi|^2 + 2<\phi-\psi, \psi>$$

Por outro lado,

$$<\phi(x) - \psi(x), \psi(x)> = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{<\alpha(B_\rho(x)) - \beta(B_\rho(x)), \beta(B_\rho(x))>}{|\alpha|(B_\rho(x))} \geq 0$$

Então $1 - |\psi|^2 = |\phi|^2 - |\psi|^2 = |\phi-\psi|^2 + 2<\phi-\psi,\psi> \geq |\phi-\psi|^2$

São válidas ainda as seguintes relações

$$\text{(ii)} \quad |\alpha|(\Omega) = \int_\Omega |\phi|\, d|\alpha| \;;\; |\beta|(\Omega) = \int_\Omega |\psi|\, d|\alpha| \;\text{ e }\; |\alpha-\beta|(\Omega) = \int_\Omega |\phi-\psi|\, d\,|\alpha|$$

que são consequência do seguinte fato geral

"Se uma medida $\mu$ pode ser representada por uma medida $\sigma$ da seguinte maneira: $\mu(A) = \int_A g(x)\, d|\sigma|$ , então representamos $|\mu|$ por $|\mu|(A) = \int_A |g(x)|\, d|\sigma|$ para todo $A \in \beta_o(R^n)$."

Das relações (i) segue que

$$\text{(iii)} \quad 2\int_\Omega (1 - |\psi|)\, d|\alpha| \geq \int_\Omega (1-|\psi|^2)\, d|\alpha| \geq \int_\Omega |\phi - \psi|^2\, d|\alpha| \qquad \text{pois}$$

se $2 - 2|\psi| < 1 - |\psi|^2$ então $|\psi(x)|^2 - 2|\psi(x)| + 1 < 0$ o que é absurdo.

Da desigualdade de Schwartz obtemos

$$\text{(iv)} \quad \int_\Omega |\phi - \psi|^2\, d|\alpha| \cdot |\alpha|(\Omega) \geq \left(\int_\Omega |\psi - \phi|\, d\,|\alpha|\right)^2 = (|\alpha-\beta|(\Omega))^2$$

De (i), (ii), (iii) e (iv) obtemos

$$2|\alpha|(\Omega)\{|\alpha|(\Omega) - |\beta|(\Omega)\} \geq (|\alpha-\beta|(\Omega))^2$$

Provaremos um teorema sobre conjuntos normais, que é essencial na demonstração da propriedade isoperimétrica da esfera

<u>Teorema 4.3</u>: Se. $E \in \beta_o(R^n)$, $n \geq 2$, tal que $P(E) < +\infty$ e se denotamos

$$E_x = \{x_n \in R : (x,x_n) \in E\}, \quad f(x) = \operatorname{med}_1 E_x,$$

$$L = \{(x, x_n) : |x_n| \leq \frac{f(x)}{2}\}. \quad \text{Então}$$

$P(L) \leq P(E)$ (61). Se $P(L) = P(E)$, então $E$ é normal ao eixo $x_n$.

DEM: Seja $L_x = \{x_n \in R : (x,x_n) \in L\}$, isto é,

$L_x = \{x_n \in R: |x_n| \leq \frac{f(x)}{2}\}$. Observamos que

$P(L_x) = 0$ ou $P(L_x) = 2$ pois $L_x$ é um intervalo limitado.

Mas $P(E_x) = 0$ ou $P(E_x) \geq 2$, pois se $P(E_x) = 1$ temos que $E_x$ é uma semi-reta e então $\operatorname{med}(E_x) = +\infty$. Temos que

$$P(E_x) \geq P(L_x) \text{ para todo } x \in R^{n-1}, \text{ pois } P(E_x) = 0 \tag{62}$$

se e somente se $P(L_x) = 0$.

De fato, se $P(E_x) = 0$, como $E_x$ é limitado então $f(x) = 0$. Logo

$$L_x = \{0\} \qquad \text{e portanto} \qquad P(L_x) = 0$$

Se $P(L_x) = 0$ então $L_x = \{0\}$, pois $L_x$ é um intervalo limitado, o que implica $f(x) = \text{med}_1 E_x = 0$. Donde $P(E_x) = 0$

Seja $\Omega \in \beta_o(R^{n-1})$. Como $\int_\Omega P(L_x)dx = \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_L|$ e

$\int_\Omega P(E_x)dx = \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_E|$ temos

$$\int_{\Omega\times R} |D_n\phi_E| \geq \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_L| \quad \text{para todo } \Omega\in\beta_o(R^{n-1}) \tag{63}$$

Também é válida a relação

$$\int_{\Omega\times R} |D_i\phi_E| \geq \int_{\Omega\times R} |D_i\phi_L| \qquad i = 1,2,\ldots,n-1 \text{ (c.f[12],p.45)} \tag{64}$$

Se definimos,

$$\alpha(\Omega) = \left(\int_{\Omega\times R} |D_1\phi_E|, \int_{\Omega\times R} |D_2\phi_E|, \ldots, \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_E|\right)$$

$$\beta(\Omega) = \left(\int_{\Omega\times R} |D_1\phi_L| , \int_{\Omega\times R} |D_2\phi_L|, \ldots, \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_L|\right)$$

das relações (63) e (64) segue

$< \beta(\Omega), \alpha(\Omega) - \beta(\Omega) > \geq 0$ para todo $\Omega \in \beta_o(R^{n-1})$ e portanto pelo lema 4.1 temos

$$2|\alpha|(\Omega)\{|\alpha|(\Omega) - |\beta|(\Omega)\} \geq [\,|\alpha-\beta|(\Omega)\,]^2 \qquad (65)$$

Donde concluímos que para todo $\Omega \in \beta_o(R^{n-1})$ , $|\alpha|(\Omega) \geq |\beta|(\Omega)$ e como $P(E) = |\alpha|(R^{n-1})$ e $P(L) = |\beta|(R^{n-1})$, verificamos que $P(L) \leq P(E)$.

Se $P(E) = P(L)$ então $|\alpha - \beta|(R^{n-1}) = 0$ e portanto para todo $\Omega\in\beta_o(R^{n-1})$, $\int_{\Omega\times R} |D_n\phi_E| = \int_{\Omega\times R} |D_n\phi_L|$, isto é, E é normal com respeito ao eixo $x_n$.

<u>Teorema 4.4</u> (propriedade isoperimétrica da esfera)

Seja $B \in \beta_o(R^n)$, $n \geq 2$ com $P(B) < +\infty$ . Então

$$\text{med}(B) \leq c(n)\ P(B)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{onde} \quad c(n) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n^n \omega_n}} \quad \text{e} \tag{66}$$

$\omega_n$ é a medida da esfera unitária n-dimensional.

E $\text{med}(B) = c(n)\ P(B)^{\frac{n}{n-1}}$ se e somente se B é uma esfera.

DEM: Seja S uma esfera contendo B e med B = $\lambda$

Consideremos $\mathcal{A} \doteq \{A \in \beta_o R^n) : \text{med } A = \lambda \text{ e } A \subset S\}$

$\mathcal{A}$ é não vazio pois $B \in \mathcal{A}$

Seja $\mu = \inf P(A)$ onde $A \in \mathcal{A}$. Existe uma sucessão $\{A_h\}_{h\in N} \subset \mathcal{A}$ tal que $\lim_{h\to\infty} P(A_h) = \mu$.

Pelos teoremas da compacidade (2.2) e da semi-continuidade (2.3) existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) = \mu$.

Como o semetrizante L de A também pertence a $\mathcal{A}$ temos pelo teorema (4.3) que $P(L) = P(A)$ e portanto A é normal com respeito ao eixo $x_n$.

Por outro lado a propriedade "A ter perímetro mínimo" é válida para qualquer conjunto obtido através de uma rotação de A em torno da origem.

Portanto A é normal com respeito a todas as direções de $R^n$, isto é, A é um conjunto convexo.

Então $A$ pode ser caracterizado como

$A = \{(x,x_n) \in R^n : f_1(x) \leq x_n \leq f_2(x),\ x \in D\}$ onde $D$ é um domínio convexo de $R^n$ e $f_1$ e $f_2$ são funções localmente lipschitzianas em D. Então

$$L = \{(x,x_n) \in R^n;\ |x_n| \leq \frac{f_2(x)-f_1(x)}{2},\quad x \in D\}.$$

Para todo $\Omega \subset\subset D$,

$$|\alpha|(\Omega\times R) = \int_\Omega \sqrt{1+|Df_1|^2} + \sqrt{1+|Df_2|^2}\ dx$$

$$|\beta|(\Omega\times R) = 2\int_\Omega \sqrt{1+\ |D(\frac{f_2-f_1}{2})|^2}\quad dx$$

Temos que $|\alpha|(\Omega\times R) = |\beta|(\Omega\times R)$ pois $P(A) = P(L)$ e isto equivale a

$$D_i(f_1 + f_2) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \tag{67}$$

A relação (67) é demonstrada através do seguinte lema:

<u>Lema 4.2</u>: Seja $\Omega$ um aberto convexo de $R^n$ e $f_1$ e $f_2$ funções reais definidas em $\Omega$ tais que existam $Df_1$ e $Df_2$ para todo

$x \in \Omega$ onde $Df_1$ e $Df_2$ são respectivamente o gradiente de $f_1$ e $f_2$.

Se

$$\int_\Omega \left(\sqrt{1+|Df_1|^2} + \sqrt{1+|Df_2|^2}\right) dx = \int_\Omega \sqrt{4+|D(f_2-f_1)|^2}\, dx$$

então $Df_2 = - Df_1$.

DEM: Como

$$\sqrt{4+|D(f_2-f_1)|^2} \leq \sqrt{1+|Df_1|^2} + \sqrt{1+|Df_2|^2}$$

para todo x e ambas as funções são positivas as integrais serão iguais somente se os integrandos forem iguais, a menos de um conjunto de medida nula.

Para facilitar a notação consideremos $x = Df_2$, $y = Df_1$ e $x - y = Df_2 - Df_1$.

Se $\sqrt{1+|x|^2} + \sqrt{1+|y|^2} = \sqrt{4+|x-y|^2}$ então

$$2 + |x|^2 + |y|^2 + 2\sqrt{1+|x|^2 + |y|^2 + |x|^2|y|^2} = \sqrt{4 + (x-y)^2},$$ ou

ainda $|x|^2 + |y|^2 + 2\sqrt{1+|x|^2 + |y|^2+|x|^2|y|^2} = 2+|x|^2+|y|^2-2<x,y>$.

Então $\sqrt{1 + |x|^2 + |y|^2 + |x|^2 \; |y|^2} = 1 - < x,y > ,$ ou

$1 + |x|^2 + |y|^2 + |x|^2|y|^2 = 1 - 2 < x,y > +| < x,y> |^2$ o

que implica

$|x|^2 + |y|^2 + |x|^2 \; |y|^2 + 2 < x,y > = |< x,y >|^2,$ isto é

$< x + y, \; x + y > = | < x,y >|^2 - |x|^2 \; |y|^2$ . Pelo lema de Schwartz, $< x+y, \; x + y > = 0$ . Portanto $x = - y$ ou $Df_2 = Df_1$.

c.q.d.

Como $\Omega \subset \subset D$ é arbitrário, temos que $D_i(f_1 + f_2) = 0,$ $i = 1,2,\ldots,n-1$ , vale para todo $x \in D$, ou seja $f_1 + f_2$ é constante para todo $x \in D$. Isto quer dizer que A é simétrico com respeito ao hiperplano paralelo a $x_n = 0$ e passando pelo baricentro de A .

Como esta simetria de A é invariante por qualquer rotação de A em torno da origem, concluímos que A é normal com respeito a todos os hiperplanos passando pelo seu baricentro. Portanto A é uma esfera.

Temos que $B \in \mathcal{A}$

Logo $P(B) \geq P(A) = \eta \, \omega_n \, \rho^{n-1}$ onde $\rho$ é o raio de A.

Mas $\operatorname{med}(A) = \lambda = \omega_n \rho^n$, donde $\rho^{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$

Então $P(B) \geq \eta\, \omega_n \left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. Como $\operatorname{med}(B) = \lambda$, temos

$$\operatorname{med}(B) \leq \frac{1}{\sqrt[n-1]{\omega_n\, \eta^n}}\; P(B)^{\frac{n}{n-1}}$$

. Portanto $\operatorname{med}(B) \leq c(n) P(B)^{\frac{n}{n-1}}$

Suponhamos agora que $\operatorname{med}(B) = c(n)\, P(B)^{\frac{n}{n-1}} = \lambda_o$ e seja $S$ uma esfera contendo $B$. Consideremos a classe de conjuntos

$$\mathcal{A}^* = \{A \in \beta_o(R^n) : \operatorname{med} A = \lambda_o \text{ e } A \subset S\}$$

Sabemos que existe $A \in \mathcal{A}^*$ com $P(A)$ mínimo, o que implica que $A$ é uma esfera

Mostremos que $P(B)$ é mínimo. Suponhamos por absurdo que $P(B) > P(A)$.

Temos $\operatorname{med} A = \lambda_o = \omega_n \rho^n$, o que implica $\rho^{n-1} = \left(\frac{c(n)}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot$

$\cdot\, P(B)$. Como $P(A) = \eta\omega_n\, \rho^{n-1}$ temos $P(B) > \eta \cdot \omega_n \cdot \left(\frac{c(n)}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot P(B)$,

seja $\frac{1}{n\sqrt[\eta]{\omega_n}} > (c(n))^{\frac{n-1}{n}}$. Mas $c(n) = \left(\frac{1}{\eta^n \omega_n}\right)^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)}$

Logo $(c(n))^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{\omega_n}}$ . Donde $\frac{1}{n\sqrt[n]{\omega_n}} > \frac{1}{n\sqrt[n]{\omega_n}}$

o que é absurdo.

Portanto B tem perímetro mínimo em $\mathcal{A}^*$, ou seja B é uma esfera.

Reciprocamente se B é uma esfera de raio $\rho$ temos

$$\text{med}(B) = \omega_n \rho^n \quad \text{e} \quad P(B) = n \cdot \omega_n \, \rho^{n-1} \text{ . Então}$$

$$\left(\frac{\text{med}(B)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{P(B)}{n \cdot \omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \text{, o que implica,}$$

$$\text{med}(B) = \omega_n \cdot \left(\frac{1}{n \cdot \omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot P(B)^{\frac{n}{n-1}} \text{, ou}$$

$$\text{med}(B) = c(n) \cdot P(B)^{\frac{n}{n-1}} .$$

<u>Obs. 4.1</u>: Se $B \in \beta(R^n)$, $n \geq 2$ não é limitado, continua válido o seguinte resultado:

$$\min\{\text{med}(B), \text{med}(R^n - B)\} \leq c(n) \; P(B)^{\frac{n}{n-1}}$$

E $\min\{\text{med}(B), \text{med}(R^n - B)\} = c(n) \; P(B)^{\frac{n}{n-1}}$ se e somente se B ou $R^n - B$ é uma esfera.

DEM: (c.f [ 12 ], p. 47).

## CAPÍTULO V

### PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA FRONTEIRA DE CONJUNTOS DE PERÍMETRO LOCALMENTE FINITO

Seja E um conjunto de perímetro localmente finito.

Existem n medidas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\int_E D_i g(x)\,dx = -\int_{\partial B} g(x)\,d\alpha_i \quad \text{para toda} \quad g \in C_o^1(R^n),\ 1 \leq i \leq n.$$

Denotemos $\alpha_i = D_i\phi_E$ e $\mu = |D\phi_E|$ —

Aplicando o teorema de Radon - Nikodym a estas medidas resulta definido $|D\phi_E|$ em quase toda parte o vetor

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x)) \text{ onde para cada } 1 \leq i \leq n, \tag{68}$$

$\nu_i(x)$ é caracterizado por

$$D_i\phi_E(B) = \int_B \nu_i(x)\,d|D\phi_E|(x) \quad \text{para todo} \quad B \in \beta_o(R^n) \tag{69}$$

Além disso, pelo teorema de Lebesgue-Vitali, sempre $|D\phi_E|$ em quase toda parte temos

$$\nu(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{D\phi_E(B_\rho(x))}{|D\phi_E|(B_\rho(x))} \tag{70}$$

onde $B_\rho(x)$ é a esfera de centro $x$ e raio $\rho$ .

Observamos que $|\nu(x)| = 1$, pois se $|\nu(x)| < 1$ em um conjunto A com $|D\phi_E|(A) > 0$ então

$$|D\phi_E|(A) = \int_A |\nu(x)| \, d \, |D\phi_E|(x) < (1-\varepsilon) \, |D\phi_E|(A),$$ o que é absurdo.

Como o suporte de $|D\phi_E|$ está contido na fronteira de E (obs. 2.1), o conjunto dos pontos $x \in R^n$ que verificam

$$\nu(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{D\phi_E(B_\rho(x))}{|D\phi_E|(B_\rho(x))} \quad \text{e} \quad |\nu(x)| = 1$$

formam um subconjunto da fronteira E.

<u>Definição 5.1</u>: Chama-se fronteira reduzida de E($\mathfrak{F}^*E$) o conjunto de pontos da fronteira topológica de E que verificam as relações:

$$\nu(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{D\phi_E(B_\rho(x))}{|D\phi_E|(B_\rho(x))} \,, \quad |D\phi_E| \text{ q.t.p} \quad \text{e} \quad |\nu(x)| = 1$$

Imediatamente verificamos que

$$|D\phi_E|(R^n - \mathcal{F}^*E) = 0 \qquad (71)$$

O vetor $\nu(x)$ definido na $\mathcal{F}^*E$ vem a ter o significado do vetor normal externo no sentido do seguinte teorema

Teorema 5.1: Se $x \in \mathcal{F}^*E$ então

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^{-n} \operatorname{med}\{y \in E : \langle (y-x), \nu(x) \rangle > 0,\ |y-x| < \rho\} = 0 \qquad (72)$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^{-n} \operatorname{med}\{y \notin E : \langle (y-x), \nu(x) \rangle > 0,\ |y-x| < \rho\} = 0 \qquad (73)$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^{-n} |D\phi_E|(B_\rho(x)) = \omega_{n-1} \qquad (74)$$

DEM: (c.f [ 12 ], ps. 62-65).

Seja $A$ um aberto limitado de $R^n$.

Definição 5.2: Um conjunto E de perímetro localmente finito tem fronteira minimal em $A$ se para todo conjunto M de perímetro localmente finito tal que $(E - M) \cup (M - E) \subset\subset A$ temos:

$$|D\phi_E|(A) \leq |D\phi_M|(A) \qquad (75)$$

<u>Definição 5.3</u>: Uma função $f \in BV_{loc}(R^n)$, isto é, $f \in L^1_{loc}(R^n)$ e $D_i f$ são medidas em $R^n$, tem gradiente minimal em $A$ se para toda, $g \in BV_{loc}(R^n)$, temos

$$|Df|(A) \leq |D(f+g)|(A) \qquad (76)$$

Sejam E um conjunto de perímetro localmente finito e K um compacto em $R^n$.

A transposição do problema de Plateau para esta teoria é a seguinte: minimizar $|D\phi_F|(K)$ na classe:

$$\mathcal{F} = \{F: F \text{ é de perímetro localemnte finito em } R^n \text{ com } F - K = E - K\}.$$

Este estudo é desenvolvido por Miranda em [6].

A seguir, veremos como a Teoria dos Perímetros pode ser utilizada para o cálculo da medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(A)$, isto é, f é integrável sobre compactos de A, onde A é um aberto.

Sejam $A \subset R^n$ um aberto e $a(x) = (a_o(x), a_1(x), \ldots, a_n(x))$ uma função vetorial contínua em A juntamente com suas derivadas pri meiras e com suporte compacto em A, isto é, $a \in [C_0^1(A)]^{n+1}$. Se $f \in L^1_{loc}(A)$ definimos

Definição 5.4:

$$|\text{graf}_A f| = \sup_a \left\{ \int_A \left[ a_o(x) + f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} \right] dx \right\}$$

onde $a \in [C^1(A)]^{n+1}$, $|a| \leq 1$ para todo $x \in A$.

Esta definição da medida do gráfico de uma função generaliza as demais, ou seja, a definição 5.4 coincide com a definição clássica quando $f \in C^1(A)$ e com a definição de Lebesgue quando $f \in C^0(A)$. (c.f [ 11 ], p. 32).

A medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(A)$ pode ser calculada através do perímetro de um conjunto associado, ou mais precisamente:

Proposição 5.1: Sejam $A \subset R^n$ um aberto e $f \in L^1_{loc}(A)$ tal que $|\text{graf}_A f| < +\infty$.

Se $E = \{(x,y) \in R^{n+1}: x \in A, \ y < f(x)\}$, então vale:

$$|\text{graf}_K f| = \int_{K\times R} |D\phi_E| \quad \text{onde } K \subset\subset A. \qquad (77)$$

DEM: (c.f [8], p. 525)

Com esta caracterização para a medida de área generalizada de uma superfície, pode-se resolver o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas usando-se formulações da teoria dos perímetros. (c. f [11] e [6])

## BIBLIOGRAFIA

[ 1 ] Bacci, Ricardo Apparício - "Perímetros de Medida Mínima com obstáculos sutís"
Tese de Mestrado, Campinas - 1976.

[ 2 ] Bassanezi, Rodney Carlos - "Sobre o Problema de Dirichlet n-Dimensional para a Equação das Superfícies Mínimas em Domínios com Fronteira Singular"
Tese de Doutoramento, Campinas - 1977.

[ 3 ] De Giorgi, E. - Colombini, F - Piccinini, L. C. - "Frontiere Orientate di Misura Minima e Questioni Colegate"
Pubbl. cl . Scienze, S.N. Sup - Pisa - 1972.

[ 4 ] Lang, Serge - Real Analysis
Addison Wesley Publishing Company

[5] Lima, Elon Lages - "Elementos de Topologia Geral"
Ao Livro Técnico e Edit. da Univ. de São Paulo
Rio de Janeiro, 1970

[6] Miranda, M - "Um princípio di Massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla rizoluzione del problema al contorno per l'equazione dele superfici di área mínima"
in Rend. Mat. Univ. Padova, 1971.

[7] Miranda, M - "Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito"
Ann. Sc. Norm Sup. Pisa 18 (1964)

[8] Miranda, M - "Superfici Cartesiani generalizzate ed insieme di perimetro finito sui prodotti cartesiani"
In Ann. Sc. Normal. Sup. Pisa, 1954.

[9] Royden, H. L. - Real Analysis
The Macmillan Company - 2ª edição

[ 10 ] Rudin, W - Real and Complex Analysis
International Student Edition
Mac-Graw-Hill, 1970.

[ 11 ] Weber, Olívio Augusto - "O problema de Dirichlet n-dimensional para a equação de superfície mínima em domínios pseudo-convexos com fronteira Lipschitziana"
Tese de Mestrado, Campinas - 1977

[ 12 ] Miranda,M - "Notas de Aula sobre a Teoria dos Perímetros"
Univ. de Trento, Itália.