

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado

**Equações Diferenciais Ordinárias com campo de
direções parcialmente conhecido**

Autor: Marina Ribeiro Barros Dias

Orientador: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

26 de abril de 2006.

Equações Diferenciais Ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marina Ribeiro Barros Dias** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de abril de 2006.

Prof. Dr.: **Laécio Carvalho de Barros**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros.

Prof.^a Dr.^a Renata Zotin Gomes de Oliveira.

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestrado em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a 12116

Dias, Marina Ribeiro Barros

D543e

Equações diferenciais ordinárias com campo de direções
parcialmente conhecido / Marina Ribeiro Barros Dias -- Campinas,
[S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Laécio Carvalho de Barros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Conjuntos difusos. 2. Teoria da aproximação. 3. Equações
diferenciais ordinárias. I. Barros, Laécio Carvalho de. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Ordinary differential equations with direction field partly known

Palavras-chave em inglês (Keywords): I. Fuzzy sets. 2. Approximation theory. 3. Ordinary differential equations.

Área de Concentração: Biomatemática

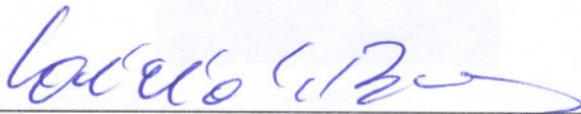
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC-UNICAMP)
Profª. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira (UNESP-Rio Claro)
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 26/04/2006

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de abril de 2006 e aprovada

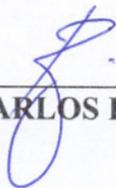
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS



Prof. (a). Dr (a). RENATA ZOTIN GOMES DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Resumo

Nesse trabalho propomos uma metodologia para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias cujo campo de direções é apenas parcialmente conhecido. Para isto, aliamos a teoria de controladores fuzzy com métodos numéricos tradicionais. A partir de teoremas clássicos de continuidade e estudos sobre aproximação, vimos que, para alguns casos, as soluções aqui produzidas aproximam-se das teóricas. Fazemos uso da metodologia aqui proposta para analisar modelos de crescimento populacional de espécie isolada e também modelos que envolvem várias espécies. Finalmente, indicamos essa metodologia como uma ferramenta auxiliar para obtenção de parâmetros de equações diferenciais determinísticas.

Abstract

In this work we propose a methodology to study Ordinary Differential Equations supposing the direction field is partially known. We join theory of Fuzzy Controlers and traditional numerical methods to develop this study. Using classical theorems of continuity and aproximation theory we saw that, for some cases, the solutions we present here estimate the theoretical ones. We'll use the methodology proposed here to analyse unidimensional models of populational growth and models that involves many species. Finally, we point out our methodology like an auxiliar tool to obtain parameters of deterministic differential equations.

Agradecimentos

Ao meu pai Custódio e minha mãe Neca que sempre foram e sempre serão meus dois grandes exemplos de vida, agradeço pelo carinho, estímulo e apoio incondicional em todos os momentos da minha caminhada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros pelo competente trabalho de orientação, paciência e confiança que a mim foi depositada, respeitando integralmente minhas idéias e meu modo de pensar.

Aos membros da Banca Examinadora Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi e Prof.^a Dr.^a Renata Zotin Gomes de Oliveira, pela avaliação, dedicação dispensada e sugestões dadas no intuito de melhorar a qualidade deste trabalho.

Às sempre amigas Camila, Elaine, Luciana, Maristela, Lurdes e Jovita, pelas intermináveis horas de estudo, pelo apoio, amizade e por terem feito deste tempo longe de casa uma acolhedora e divertida convivência. Saibam que vocês sempre foram presentes quando precisei.

Às companheiras de república Patileme, Val, Dani, Patrícia, Carol e Aline pela paciência nos momentos difíceis e pela amizade.

Ao Moisés e João pelo apoio e paciência que tiveram ao me auxiliar na parte computacional deste trabalho.

Aos funcionários e professores do IMECC/UNICAMP, em especial à Tânia e Edinaldo, pelo carinho e eficiência com que sempre trataram meus problemas e ao Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer, pelas ótimas aulas, pelo carinho

e atenção que sempre me dedicou.

À Universidade Estadual de Campinas, instituição que possibilitou a realização deste mestrado

A todos que, sem dúvida e sem exceção, direta ou indiretamente colaboraram comigo e, peço desculpas às pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

E principalmente à deus por estar sempre presente em minha vida e por ter me proporcionado a oportunidade de completar mais uma etapa de minha vida.

Meus sinceros agradecimentos.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy	5
1.1 Conjuntos Fuzzy	5
1.2 Números Fuzzy	8
1.3 Conectivos Lógicos	13
1.3.1 t-norma	13
1.3.2 t-conorma	14
1.4 Relações Fuzzy	16
2 Sistemas Fuzzy e Controladores Fuzzy	21
2.1 Sistemas Fuzzy	21
2.2 Conhecimento como regras	22
2.3 Raciocínio Aproximado	23
2.4 Controladores Fuzzy	26
2.4.1 Base de Regras Fuzzy	26
2.4.2 Funcionamento de um Controlador Fuzzy	27
2.4.3 O Método de Inferência de Mamdani	29

2.4.4	Defuzzificador Centro de Massa (Centro de gravidade, Centróide ou Centro de Área)	30
3	Alguns Resultados Teóricos	33
3.1	Alguns tópicos de Análise Matemática	33
3.2	Alguns tópicos de Análise Numérica	36
3.2.1	Métodos de Runge-Kutta	36
3.3	Aproximação Universal	39
3.3.1	Capacidade de Aproximação	40
3.3.2	Comentários e Ilustrações sobre o teorema 3.12	44
4	Controlador Fuzzy aplicado à E.D.O	53
4.1	Introdução	53
4.2	EDO e Controlador	54
4.3	A solução exata e a estimada pelo controlador fuzzy	57
4.4	Características da função do controlador (f_r)	59
4.5	Regras fuzzy com Oposição Semântica	62
4.6	Equilíbrio e estabilidade de Sistemas p-fuzzy Contínuos Unidimensionais	66
5	Modelos Unidimensionais	71
5.1	Introdução	71
5.2	O Modelo de Verhulst	72
5.3	O Modelo p-fuzzy de Verhulst	74
5.4	Resultado das Aproximações	75
5.4.1	Primeira Simulação	76

5.4.2	Segunda Simulação	77
5.4.3	Terceira Simulação	79
5.5	Estudo do modelo p-fuzzy de Montroll	80
5.6	Estimativa de parâmetros	83
5.7	Conclusões	88
6	Modelos Bidimensionais	91
6.1	Modelo clássico de Lotka-Volterra	91
6.2	Modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra	94
6.2.1	Formulação da base de regras	96
6.3	Conclusão	102
7	Considerações Finais	103
7.1	Conclusões	103
7.2	Trabalhos Futuros	104
	Bibliografia	107

Introdução

Termos lingüísticos subjetivos sempre foram utilizados em nosso cotidiano. Apesar de suas incertezas, eles são transmitidos e perfeitamente compreendidos entre interlocutores. É natural, por exemplo, a utilização de termos como *João é alto*, *Pedro é velho*, etc. No entanto, muitos deles têm permanecido fora da formalidade matemática tradicional.

Pensando em problemas cuja propriedade que define o conjunto estudado é subjetiva, surgiu a Teoria dos conjuntos Fuzzy, que tem crescido consideravelmente, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas de estudo, sobretudo em tecnologia.

O marco inicial da teoria dos conjuntos fuzzy foi o artigo *Fuzzy Sets* publicado em 1965 pelo matemático de origem iraniana Lotfi Asker Zadeh, professor no Departamento de engenharia elétrica e ciências da computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley (28), com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos lingüísticos subjetivos. Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas a exemplo do que faz o ser humano.

Em geral, os modelos clássicos de biomatemática são fundamentados em hipóteses que quantificam um determinado fenômeno. Mas, se além de quantificar, desejamos também considerar qualidades do fenômeno, então devemos considerar variáveis com

alguma incerteza (subjetividade).

Os vários tipos de incertezas que aparecem nos fenômenos de Biomatemática podem ter modelagens bem variadas. Podemos optar, por exemplo, pela modelagem estocástica onde, implicitamente, estamos supondo conhecer, a priori, as distribuições de probabilidades dos parâmetros e condições iniciais do fenômeno estudado. Uma outra maneira de modelar é através de modelos variacionais fuzzy, que podem comportar vários tipos de subjetividade ou incertezas, dependendo da escolha da variável de estado e dos parâmetros dos modelos. As incertezas que apresentam gradualidades oriundas do conhecimento de especialistas, podem ser modeladas por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy (5), (6), (17).

Em nosso trabalho, optaremos pela modelagem Fuzzy. Esta nova maneira de modelar problemas ligados à realidade onde, na formulação dos modelos, tanto as variáveis de estado como os parâmetros podem apresentar muita subjetividade, vem ganhando espaço na área de Biomatemática (Ecologia e Epidemiologia) com resultados significativos e animadores (5), (9), (15), (19), (23). Muitas vezes, as variáveis de estado são incertas, e esta incerteza pode ser passada para os parâmetros do modelo matemático (2), (5), (6).

Nosso objetivo principal consiste no estudo da teoria dos conjuntos fuzzy e da análise numérica, visando “unir” essas duas teorias para que se possa desenvolver uma metodologia que resolva problemas cujo campo de direções é apenas parcialmente conhecido, para então aplicá-la a fenômenos biológicos.

As simulações deste trabalho foram todas realizadas utilizando o software Matlab versão 7.0, da empresa Math Works. Para utilizarmos as ferramentas fuzzy, utilizamos o pacote toolbox fuzzy do Matlab que contém uma interface gráfica do controlador fuzzy já pronta.

O trabalho está organizado como segue.

O primeiro capítulo é dedicado ao estudo das algumas ferramentas da teoria dos

conjuntos fuzzy, tais como conjuntos fuzzy, números fuzzy e relações fuzzy. Além disso, tratamos de alguns conceitos da lógica fuzzy, como t-normas e t-conormas, assuntos estes usados na modelagem de termos lingüísticos, que serão importantes nos capítulos posteriores.

No capítulo 2 damos um tratamento teórico aos sistemas baseados em regras fuzzy, dando ênfase ao funcionamento de um sistema fuzzy particular, os controladores fuzzy. Este capítulo tem embasamento teórico, principalmente nos livros de Barros e Bassanezi (2) e Nguyen (21). Toda a teoria vista aqui depende fortemente dos conceitos vistos no primeiro capítulo.

No capítulo 3 fazemos um estudo de alguns tópicos da teoria clássica de Análise Matemática e também de Análise Numérica. Este capítulo faz-se necessário devido aos teoremas que caracterizam as funções por nós conhecidas quanto à continuidade, derivabilidade, integrabilidade, etc, e também pelos resultados que garantem a convergência (e portanto a eficiência) de métodos numéricos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

No capítulo 4 propomos a “união” da Análise Numérica, com toda a sua eficiência já comprovada, e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (mais especificamente, dos Controladores Fuzzy) para “produzir” soluções numéricas do fenômeno estudado.

No capítulos 5 aplicamos a metodologia vista no capítulo 4. Estudamos fenômenos biológicos unidimensionais, particularmente os modelos que apresentam auto-inibição. Neste capítulo é verificado a eficiência da teoria dos conjuntos fuzzy em modelar fenômenos cujo campo de direções que o modela é apenas parcialmente conhecido.

Por fim, no capítulo 6, aplicamos a metodologia vista no capítulo 4 para modelar fenômenos biológicos bidimensionais, como o presa-predador, que envolve um sistema de equações diferenciais ordinárias e fazemos também um ajuste de parâmetros, com o objetivo de encontrar explicitamente uma função que represente o campo de direções de um modelo teórico.

Por fim, apresentamos as conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 1

Conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy que acreditamos ser necessário para um bom entendimento deste trabalho.

1.1 Conjuntos Fuzzy

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que todo subconjunto clássico A de um conjunto universo $X \neq \emptyset$ pode ser caracterizado por uma função, denominada **função característica** do conjunto A , definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Podemos notar que o objetivo da função característica do subconjunto $A \subset X$ é indicar se um elemento $x \in X$ pertence ou não a A , dependendo de sua imagem em $\{0, 1\}$. Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A , já que indica quais elementos do conjunto X são elementos de A .

Desta forma, cada subconjunto A de X tem sua função característica. Mais ainda, Negoita e Ralescu (20) provaram que a cada função $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ existe um único conjunto $A \subset X$ tal que $\chi = \chi_A$.

A idéia de Zadeh, ao formular o conceito de subconjuntos fuzzy, foi estender o conceito de um elemento pertencer ou não a um conjunto, ampliando o contra-domínio de χ_A para $[0, 1]$. Admitiu-se portanto que um elemento ao pertencer a um conjunto, o faz com um determinado grau.

Definição 1.1 *Um **subconjunto fuzzy** A do conjunto universo $X \neq \emptyset$ é caracterizado por uma função $\varphi_A : X \rightarrow [0, 1]$, chamada **função de pertinência do conjunto fuzzy** A .*

O valor $\varphi_A(x) \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de X pertence ao conjunto fuzzy A , com $\varphi_A(x) = 0$ e $\varphi_A(x) = 1$ indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy A . Observamos que a definição de conjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, isto é, do conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$. Assim, podemos notar que todo conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy, onde a função de pertinência que o caracteriza é sua função característica.

Observações:

1. Com o intuito de simplificar o texto, iremos nos referir a subconjunto fuzzy por **conjunto fuzzy**.
2. Quando quisermos nos referir a um conjunto clássico A diremos apenas conjunto A , sem usar a palavra “clássico”. Porém, se A for um conjunto fuzzy, usaremos a palavra “fuzzy” para diferenciá-lo.
3. Vimos que fixado o conjunto X , a função φ_A caracteriza completamente o conjunto fuzzy A . Por esse motivo, muitas vezes iremos nos referir ao conjunto fuzzy A citando apenas a função que o caracteriza φ_A . Omitiremos também em alguns casos o índice A na notação φ_A , isto é, φ_A será denotada apenas por φ .

Exemplo 1.2 Seja U o conjunto de todos os números reais que podem indicar altura de uma pessoa. Vamos definir o conjunto A , que é o conjunto das alturas de pessoas altas. Podemos pensar em uma função de pertinência do tipo:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,55 \\ 5(x - 1,55), & \text{se } 1,55 < x < 1,75 \\ 1, & \text{se } x \geq 1,75. \end{cases}$$

Geometricamente, temos o conjunto A dado por

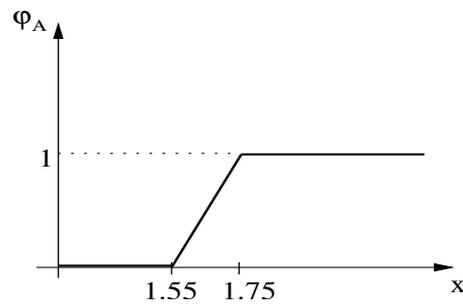


Figura 1.1: Representação gráfica do conjunto fuzzy das pessoas altas.

Uma outra função representando o conjunto A poderia ser:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{x-1,8}, & \text{se } \delta \leq x \leq 1,8 \\ 1, & \text{se } x > 1,8. \end{cases}$$

cujo gráfico é dado abaixo.

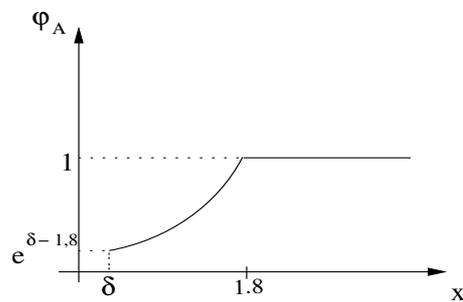


Figura 1.2: Outra representação gráfica do conjunto fuzzy das pessoas altas.

Observe que temos inúmeras maneiras de representar um mesmo conjunto fuzzy. A escolha da função que deve ser adotada para o conjunto em questão depende de fatores que estão relacionados com o contexto do problema a ser estudado.

Do ponto de vista da teoria dos conjuntos fuzzy, qualquer uma das funções de pertinência acima podem ser representantes do nosso conjunto A . Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produz um conjunto fuzzy distinto.

1.2 Números Fuzzy

O conceito de número fuzzy vem do fato de que, em geral, num problema concreto, não conseguimos precisar um número que lá aparece. Por exemplo, quando medimos a altura de uma pessoa, o que obtemos é um valor numérico carregado de imprecisões. Tais imprecisões podem ter as mais variadas origens (instrumentos de medida, as próprias pessoas que estão medindo, etc.)e, por isso, o que naturalmente fazemos é optar por um determinado valor real h para indicarmos tal altura. No entanto, o mais prudente seria dizer que a altura é “em torno de h ”, ou então “aproximadamente h ”. Nesse caso, matematicamente, indica-se a expressão “em torno de” por um conjunto fuzzy A cujo domínio é o conjunto dos números reais. Também é razoável esperar que $\varphi_A(h) = 1$. A escolha desse domínio segue do fato de que, teoricamente, os possíveis valores para a altura são números reais.

Antes de enunciarmos uma definição para número fuzzy, precisamos da definição de nível de um conjunto fuzzy, que será dada abaixo.

Definição 1.3 *Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Definimos como α -nível de A o conjunto*

$$[A]^\alpha = \{x \in U, \varphi_A(x) \geq \alpha\}.$$

Note que $U = \{x \in U, \varphi_A(x) \geq 0\}$. Por isso definimos que o 0-nível do conjunto A é dado pelo suporte de A , ou seja,

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U; \varphi_A(x) > 0\}}.$$

Em nosso trabalho, será comum a notação $\text{supp}(A)$ para indicar o 0-nível de um conjunto A .

Segue abaixo a definição de número fuzzy.

Definição 1.4 *Um conjunto fuzzy A é chamado número fuzzy quando o conjunto universo onde A está definido é o conjunto dos números reais ($\varphi_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$) e satisfaz as condições*

1. $[A]^\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in [0, 1]$
2. $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in [0, 1]$
3. O suporte de A , $\text{supp}(A) = [A]^0$ é limitado.

Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ o conjunto dos números fuzzy.

Todo número real p é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$\chi_{\{p\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = p \\ 0, & \text{se } x \neq p. \end{cases}$$

Denotaremos aqui, $\chi_{\{p\}}(x)$ por \hat{p} .

Observação: Vamos denotar os α -níveis de um número fuzzy A por:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha].$$

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares, os trapezoidais e os em forma de sino.

Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a \leq x < u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u \leq x < b \\ 0, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

O gráfico de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, b]$ e como único vértice fora desta base, o ponto $(u, 1)$, como mostra a figura 1.3.

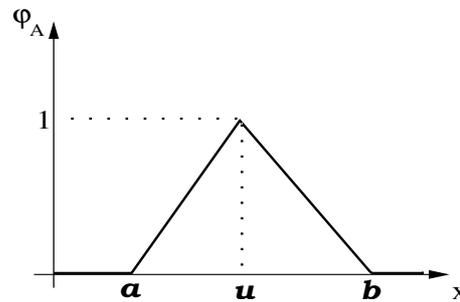


Figura 1.3: Número fuzzy triangular.

Notemos que os números reais a , u e b definem esse número. Aqui, denotaremos um número fuzzy triangular A pela terna ordenada (a, u, b) .

Notemos ainda que o conjunto fuzzy acima não é necessariamente simétrico, uma vez que $u - a$ pode ser diferente de $b - u$, porém, $\varphi_A(u) = 1$ sempre. Podemos dizer que o conjunto fuzzy A é um modelo razoável para a expressão lingüística “perto de u ”.

Exemplo 1.5 Podemos modelar, matematicamente, a expressão “por volta de 6 dias”, usando um número fuzzy triangular A , cuja função de pertinência é dada

por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{8-x}{2}, & \text{se } 6 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, para este caso, tomamos um número fuzzy triangular simétrico.

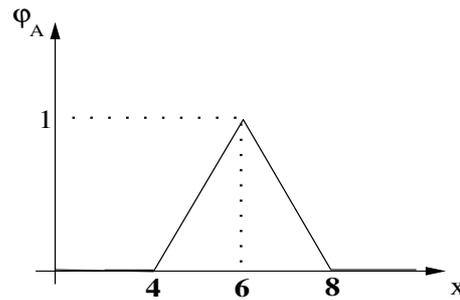


Figura 1.4: Representação da expressão “em torno de 6 dias”.

Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $a < b < c < d$.

Note que neste caso, cada elemento desta classe é caracterizado por quatro números reais, a , b , c , d , como mostra a figura 1.5. Aqui, denotaremos um número fuzzy trapezoidal A pela quadra ordenada (a, b, c, d) .

Exemplo 1.6 Podemos modelar o conjunto dos números reais “próximos de 3” por

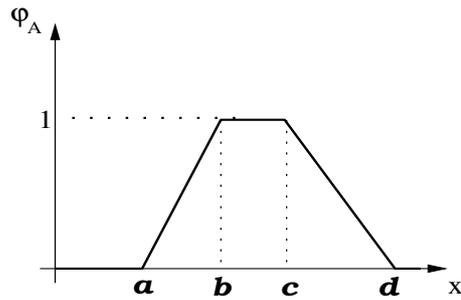


Figura 1.5: Número fuzzy trapezoidal.

um número fuzzy trapezoidal cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{5x-10}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 2,8 \\ 1, & \text{se } 2,8 \leq x \leq 3,2 \\ \frac{20-5x}{4}, & \text{se } 3,2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e tem representação gráfica ilustrada na figura 1.6.

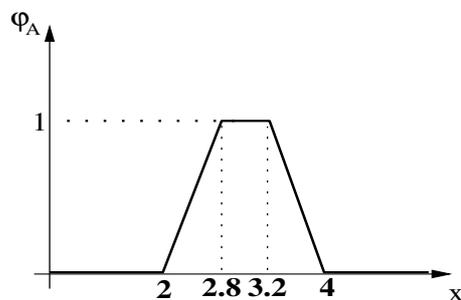


Figura 1.6: Conjunto fuzzy dos números “próximos de 3.”

Um número fuzzy A tem “forma de sino” quando sua função for suave e simétrica em relação a um número real u . Uma fórmula genérica para estes casos é:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-u)^2}{a}}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A figura 1.7 ilustra este caso.

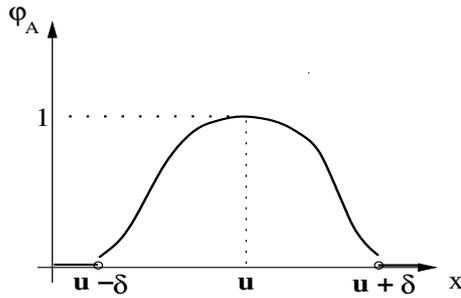


Figura 1.7: Número fuzzy “em forma de sino”.

1.3 Conectivos Lógicos

Consideremos a seguinte informação: “Se o tomate está vermelho, então ele está maduro”. Neste caso, e em outros do nosso cotidiano, usamos termos subjetivos como uma tentativa de transmitir uma determinada informação. Em nosso exemplo, “vermelho” e “maduro” são os termos lingüísticos que podem ser modelados por conjuntos fuzzy.

Em geral, nos deparamos com informações mais completas como, por exemplo, “Se x é A e y é B então z é C ou z é D ”. Para traduzirmos matematicamente tais sentenças, será necessário modelarmos os conectivos “e” e “ou”, bem como a condição “Se...então...”. Existem várias maneiras de modelar tais conectivos, visto que eles possuem domínios dependentes, ou seja, variam de acordo com a área estudada. Nesta seção, veremos as maneiras de modelá-los usando combinações conhecidas que já estão na forma de conjuntos fuzzy. Desse modo, esses modelos podem ser vistos como uma extensão dos conectivos lógicos usados na teoria clássica.

1.3.1 t-norma

Consideremos, a princípio, o conectivo “e”. Na teoria clássica, se considerarmos dois conjuntos A e B , a expressão “ x está em A e x está em B ” nos fornece a informação de que x pertence a intersecção dos conjuntos. Assim, podemos modelar

o conectivo “e”, na teoria clássica, pela intersecção de conjuntos.

De maneira análoga, associa-se a intersecção entre conjuntos fuzzy para modelar o conectivo fuzzy “e” no caso fuzzy (ver detalhes em Barros e Bassanezi (2)). Definiremos a seguir a família das possíveis operações que modelam tal conectivo na lógica fuzzy e a denotaremos por **norma triangular** ou simplesmente **t-norma**. Adotaremos como notação genérica o símbolo Δ .

Definição 1.7 *Uma operação binária $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-norma se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. $1\Delta x = x$ (elemento neutro);
2. $x\Delta y = y\Delta x$ (comutativa);
3. $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ (associativa);
4. Se $v \leq w$ e $x \leq y$ então $v\Delta x \leq w\Delta y$ (monotonicidade).

Exemplo 1.8 *Seque abaixo alguns exemplos de t-norma.*

a) $x\Delta_1 y = \min\{x, y\}$;

b) $x\Delta_2 y = x \cdot y$;

c) $x\Delta_3 y = \max\{0, x + y - 1\}$.

1.3.2 t-conorma

Consideremos agora o conectivo “ou”. Na teoria clássica, na sentença “ x está em A **ou** x está em B ” significa, em outras palavras, que x está na união de A e B . Analogamente à “construção” da t-norma, associa-se ao conectivo “ou” a união entre conjuntos clássicos.

De maneira análoga, associa-se a união entre conjuntos fuzzy para modelar o conectivo fuzzy “ou” no caso fuzzy (ver detalhes em Barros e Bassanezi (2)). Definiremos a seguir a família das possíveis operações que modelam tal conectivo na lógica fuzzy e a denotaremos por **conorma triangular** ou simplesmente **t-conorma**. Adotaremos como notação genérica o símbolo ∇ .

Definição 1.9 *Uma operação binária $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-conorma se satisfizer as seguintes condições:*

1. $0\nabla x = x$ (elemento neutro);
2. $x\nabla y = y\nabla x$ (comutativa);
3. $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$ (associativa);
4. Se $v \leq w$ e $x \leq y$ então $v\nabla x \leq w\nabla y$ (monotonicidade).

Exemplo 1.10 *Segue abaixo alguns exemplos de t-conorma.*

- a) $x\nabla_1 y = \max\{x, y\}$;
- b) $x\nabla_2 y = \min\{1, x + y\}$;
- c) $x\nabla_3 y = x + y - xy$.

Outro conectivo importante a ser modelado é o conectivo “não”, ou seja, a “negação”. Em geral, associa-se a este conectivo a idéia de complementar. Definiremos aqui o complementar de um conjunto como uma aplicação $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que associa a cada elemento x o valor $1 - x$.

Definição 1.11 *Uma aplicação $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma negação se satisfizer as seguintes condições:*

1. $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$; (fronteiras)

2. $\eta(\eta(x)) = x$ (*involução*);

3. η é decrescente (*monotonicidade*).

A modelagem fuzzy para a condição “Se...então...” será discutida no capítulo 2. Antes, precisamos do conceito de relação fuzzy.

1.4 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações entre os elementos de diversas classes é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica descreve a interrelação entre dois ou mais objetos. Sendo este um conjunto, tem-se associado a ele, sua função característica.

De maneira geral, uma relação será clássica quando optarmos por conjuntos clássicos e será fuzzy quando utilizarmos conjuntos fuzzy. A escolha do tipo de relação dependerá do fenômeno estudado. Porém, vale lembrar que a opção pela teoria dos conjuntos fuzzy sempre tem maior robustez no sentido que esta inclui a teoria clássica de conjuntos.

Vamos relembrar o conceito matemático de relação clássica. Em seguida, vamos estender este conceito para o caso fuzzy, ou seja, vamos definir o conceito matemático de relação fuzzy.

Definição 1.12 *Uma relação (clássica) \mathcal{R} , sobre $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $X_1 \times X_2$, a relação é chamada binária sobre $X_1 \times X_2$.*

Como a relação \mathcal{R} é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser

representada por sua função característica $\chi_{\mathcal{R}}$, ou seja,

$$\chi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

Definição 1.13 Uma relação fuzzy \mathcal{R} , sobre $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Se o produto cartesiano for formado por dois conjuntos $X_1 \times X_2$, a relação é chamada fuzzy binária sobre $X_1 \times X_2$.

Se a função de pertinência da relação fuzzy \mathcal{R} for indicada por $\varphi_{\mathcal{R}}$, então o número $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica o grau com que os elementos x_i , que compõem a n-upla (x_1, x_2, \dots, x_n) , estão relacionados segundo a relação \mathcal{R} . Esta é uma das vantagens em se optar pela relação fuzzy, pois enquanto a relação clássica nos diz apenas se os elementos estão ou não relacionados entre si, a relação fuzzy binária nos diz ainda o grau dessa relação.

Uma relação fuzzy sobre $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ de grande utilidade, principalmente na teoria de controladores fuzzy - que veremos mais adiante, é o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy, cuja definição é dada a seguir:

Definição 1.14 O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de X_1, X_2, \dots, X_n , respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \Delta \varphi_{A_2}(x_2) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_n}(x_n),$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Nos exemplos 1.15 e 1.16 será mostrado uma relação clássica e uma relação fuzzy, respectivamente, com o intuito de ilustrar a diferença entre elas, uma vez que a primeira indica apenas se os objetos em estudo se relacionam, e a segunda indica se há relação e ainda o grau desta relação.

Exemplo 1.15 Considere a relação $\mathcal{R} = \{(galinha, ovos), (vaca, leite), (cabra, leite)\}$.

A figura 1.8 ilustra a relação \mathcal{R} , onde os pontos marcados especificam os pares que fazem parte da relação.

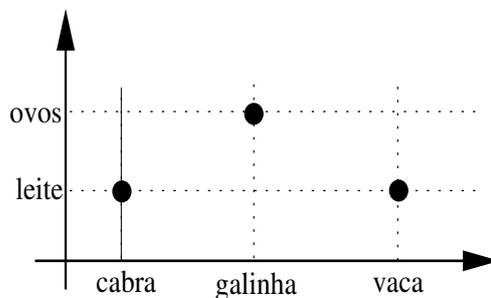


Figura 1.8: Representação por coordenadas da relação \mathcal{R} .

Os graus de pertinência dos pares ordenados que estão relacionados são todos iguais a 1, enquanto os que não estão relacionados é zero. A tabela 1.1 fornece uma representação matricial para tal relação.

\mathcal{R}	Cabra	Galinha	Vaca
Leite	1	0	1
Ovos	0	1	0

Tabela 1.1: Representação matricial da relação \mathcal{R} .

Exemplo 1.16 Suponha que a produção de leite de vaca seja o dobro da produção de leite de cabra. Neste caso, se atribuir grau 1 para indicar a relação de vaca com leite, é razoável que cabra com leite tenha grau $\frac{1}{2}$. Assim sendo, tem-se uma relação fuzzy e faz-se necessário um terceiro eixo para indicar o grau de relação entre os elementos. A figura 1.9 ilustra este exemplo e a tabela 1.2 fornece uma representação matricial desta relação fuzzy.

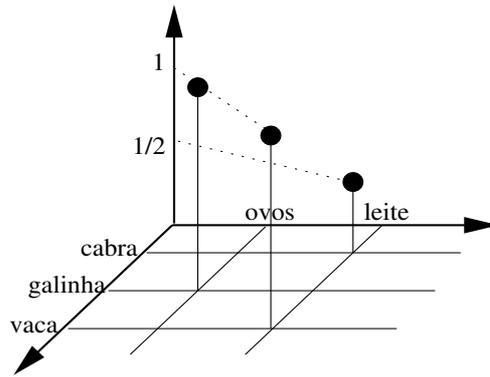


Figura 1.9: Representação por coordenadas de uma relação fuzzy.

\mathcal{R}	Cabra	Galinha	Vaca
Leite	$\frac{1}{2}$	0	1
Ovos	0	1	0

Tabela 1.2: Representação matricial da relação fuzzy.

A noção e utilização de produto cartesiano fuzzy ficará mais clara no próximo capítulo, onde introduziremos o conceito de sistemas fuzzy, que são sistemas compostos de regras da forma “Se...então...”. Veremos que essas regras são produtos cartesianos de conjuntos fuzzy. Sendo assim, um produto cartesiano fuzzy será uma possível forma de modelar o termo “Se...então...”.

Capítulo 2

Sistemas Fuzzy e Controladores Fuzzy

Em nosso cotidiano as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. O controle da tarefa a ser executada deve seguir uma seqüência de “ordens” lingüísticas capazes de serem interpretadas pelo controlador.

Neste capítulo estudaremos os sistemas baseados em regras fuzzy, ou simplesmente sistemas fuzzy. Em particular, apresentaremos o funcionamento de um controlador fuzzy e uma maneira de interpretar, na prática, as regras formuladas numa base de regras.

2.1 Sistemas Fuzzy

Um sistema fuzzy é visto aqui como um conjunto de relações entre termos lingüísticos que podem ser modelados por conjuntos fuzzy. Um sistema será chamado fuzzy se suas relações forem representadas por relações fuzzy.

No decorrer deste capítulo exploraremos a idéia de sistemas fuzzy e daremos um tratamento matemático formal. Intuitivamente, podemos pensar nisto do seguinte modo: cada pedaço de conhecimento humano é uma regra da forma “Se...então...”,

que define um “grânulo”. Um sistema fuzzy é uma coleção de regras fuzzy “SE...ENTÃO...”, ou seja, é um grupo de “grânulos”. Todas as regras definem “grânulos” que tentam “cobrir” alguma curva que representa a informação correta, precisa. Os “grânulos” que cobrem melhor a curva são as melhores regras do sistema. Mais informações significam mais regras. Muitas regras, significam mais “grânulos” e assim, uma cobertura mais “precisa”. Quanto mais incertas as regras, maiores serão os “grânulos” e pior será a cobertura. Quanto mais precisa as regras, menores serão os “grânulos” e assim melhor será a cobertura. A figura 2.1 ilustra a idéia dos “grânulos” cobrindo uma curva.

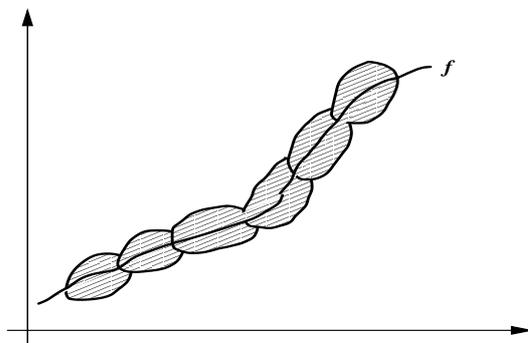


Figura 2.1: Regras vistas como grânulos.

2.2 Conhecimento como regras

O que é uma regra fuzzy? Regra fuzzy é como relacionamos os conjuntos fuzzy. Por exemplo, se X é A , então Y é B , onde A e B são conjuntos fuzzy. Considere a seguinte situação: gostaríamos de passear no sábado ou no domingo. As notícias dizem que há uma boa chance de chover no sábado mas só uma leve chance de chover no domingo.

Queremos inferir muito com a regra “Se chover, então seremos molhados”. Se chover um pouco, nos molharemos pouco. Se chover muito, seremos muito molhados. O substantivo *chuva* pode ser representado por conjuntos fuzzy. Quando nos

referimos à chuva, podemos estar nos referindo a chuvisco, chuva média ou chuva forte. Ainda, *pouco* e *forte* representam subconjuntos fuzzy de chuva.

Regras como estas e outras como “se o semáforo indicando vermelho está muito próximo, então acionamos fortemente o freio”, ou “se uma ovelha é muito jovem, então ela é muito mais presa para os lobos” são, em geral, obtidas através de um especialista do problema em mãos ou simplesmente de nosso bom senso.

Quando Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjuntos fuzzy em 1965, a visão fuzzy era só bom senso, e isso não persuade os cientistas. Um bom modo para que se interessem pelo assunto é fazer uso da geometria e é por isso que devemos ter em mente a idéia de “grânulo” fuzzy. “Grânulos”, nuvens cinzas ou também ponto fuzzy são idéias chaves para modelar conhecimento na teoria dos conjuntos fuzzy. Eles amarram o bom senso à geometria simples e ajudam a transportar nosso conhecimento para o papel ou para computadores.

2.3 Raciocínio Aproximado

Raciocínio Aproximado refere-se ao processo onde obtém-se conclusões a partir de premissas imprecisas. Em nossa vida diária é comum nos depararmos com tais premissas e, a partir delas, tirarmos nossas próprias conclusões. Sentenças como “se a roupa está muito suja então devemos esfregá-la muito tempo”, ou ainda “se a velocidade do carro está alta e o semáforo vermelho está perto então devemos freiar muito”, são exemplos de raciocínio que usamos frequentemente.

Esta é uma generalização do conhecido método dedutivo *modus ponens*. A diferença para o *modus ponens* clássico são as variáveis envolvidas. No caso fuzzy, os termos lingüísticos são expressos em uma linguagem natural e são modelados por conjuntos fuzzy.

Os resultados apresentados a partir daqui podem ser encontrados com mais de-

talhes em Barros e Bassanezi (2).

Considere A e B subconjuntos fuzzy dos conjuntos U e V respectivamente, x e y variáveis que assumem valores em U e V , e as seguintes proposições:

$$\begin{aligned} p &: "x \text{ é } A" \\ q &: "y \text{ é } B" \end{aligned}$$

Tem-se então o modelo:

$$p \Rightarrow q : "Se x \text{ é } A \text{ então } y \text{ é } B".$$

$p \Rightarrow q$ é uma proposição fuzzy condicional, que é modelada por um subconjunto fuzzy \mathcal{R} de $U \times V$ através da função grau de pertinência

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = (\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)) = \min(1, 1 - \varphi_A(x) + \varphi_B(y)).$$

Para o caso clássico, ou seja, quando $\varphi_A(x), \varphi_B(y) \in \{0, 1\}$, a implicação produz:

$$\chi_{\mathcal{R}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

de modo que

$$\sup_{x \in U} [\chi_{\mathcal{R}}(x, y) \wedge \chi_A(x)] = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin \mathcal{R}. \end{cases} = \chi_B(y)$$

ou seja,

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in U} [\chi_{\mathcal{R}}(x, y) \wedge \chi_A(x)]$$

ou ainda

$$B = \mathcal{R} \circ A.$$

Esta igualdade pode ser interpretada como: Se \mathcal{R} é uma relação que representa a condicional “Se $x \in A$ então $y \in B$ ” e observa-se que $x \in A$, conclui-se que $y \in B$, ou seja, se a entrada for de A , a saída é de B .

Com o objetivo de estender esta idéia para a teoria de conjuntos fuzzy, esta regra será generalizada e poderemos então inferir conjuntos fuzzy.

Considere a seguinte proposição:

“Se o tomate está vermelho então ele está maduro”

Se tivermos o seguinte fato

“O tomate está quase vermelho”

o que dizer a respeito do estado do tomate?

Esta forma de raciocínio pode ser considerada como uma generalização do modus ponens. A composição de regras para obter uma inferência que pode corresponder à questões como esta será descrita a seguir:

Sejam X e Y variáveis em U e V , respectivamente. Sejam A , A^* e B subconjuntos fuzzy e a regra

“Se x é A então y é B ”.

Fato: “ x é A^* ”

Conclusão: “ y é B^* ”?

Como obter tal conclusão?

A afirmação condicional acima é uma relação fuzzy \mathcal{R} , que é um subconjunto fuzzy de $U \times V$ e A^* é um subconjunto fuzzy de U .

Por analogia ao caso clássico, define-se:

$$\varphi_B(y) = \sup_{x \in U} [\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \Delta \varphi_A(x)]$$

Esta é a forma geral da regra de inferência composicional para a resolução de modelos fuzzy, como mostra Barros e Bassanezy (2) e Nguyen (21).

Na próxima seção estudaremos as etapas de um sistema baseado em regras fuzzy, onde serão utilizados os conectivos lógicos vistos no capítulo 1.

2.4 Controladores Fuzzy

Como dissemos em seções anteriores, em nosso cotidiano, ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Em geral, o controle e a execução de tarefas devem seguir uma seqüência de “ordens” lingüísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem decodificadas pelo controlador.

Uma tentativa de reproduzir teorias estratégicas de um controlador humano é dada pelos **Controladores Fuzzy**. Com o auxílio de métodos que vimos em raciocínio aproximado (seção 2.3), torna-se possível traduzir termos lingüísticos, constantemente empregados por especialistas com o intuito de controlarem suas tarefas por meio de um conjunto de regras fuzzy.

A partir dessa base de regras obtém-se a relação fuzzy, a qual produzirá a saída (ação) para cada entrada (condição, estado).

Nas subseções seguintes, apresentaremos a formulação de uma base de regras e, em seguida, o funcionamento de um controlador fuzzy.

2.4.1 Base de Regras Fuzzy

Uma base de regras tem a forma

R_1 : “Proposição fuzzy 1”

R_2 : “Proposição fuzzy 2”

⋮

R_r : “Proposição fuzzy r ”

Simplificadamente, podemos dizer que controladores fuzzy são sistemas especialistas para os quais cada proposição fuzzy tem a forma

Se “condição” então “ação”,

em que cada “condição” e cada “ação” são estados assumidos por variáveis lingüísticas, e essas por sua vez, são modelados por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy que compõem a “condição” são chamados de *antecedentes*; os que compõem a “ação” são chamados de *conseqüentes*.

Cada uma das classificações das variáveis que constam na base de regras é modelada por um conjunto fuzzy. A lógica fuzzy é usada aqui para sintetizar as informações matemáticas contidas na base de regras.

A base de regras cumpre o papel de “traduzir” matematicamente as informações que formam a base de conhecimentos do sistema fuzzy. Num certo sentido, pode-se afirmar que quanto mais precisa forem tais informações, menos fuzzy (mais clássica) será a relação fuzzy que representa a base de conhecimentos. Intuitivamente, quanto maior o número de regras, melhor a representação da base de regras, como ilustra a figura 2.2. Numa situação ideal, tal relação pode mesmo ser uma função no sentido clássico.

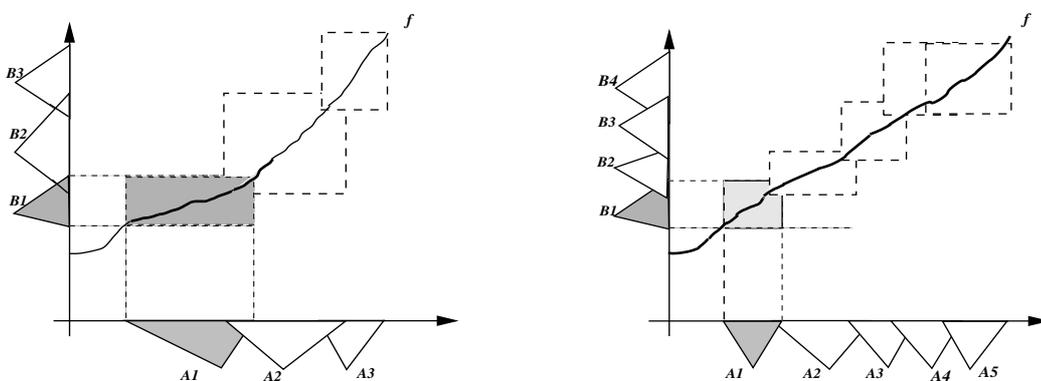


Figura 2.2: Grânulos - Quanto maior o número de regras, melhor a cobertura

2.4.2 Funcionamento de um Controlador Fuzzy

Para os controladores fuzzy, a cada entrada fuzzy faz-se corresponder uma saída fuzzy. No entanto, se a entrada for crisp (um ponto de \mathbb{R}), espera-se que a saída também seja crisp (número real). Neste caso, um controlador fuzzy é uma função de

\mathbb{R}^n em \mathbb{R} construída de alguma maneira específica. Podemos dividir um controlador fuzzy em quatro módulos (ou etapas), assim descritos:

- **Módulo de Fuzzificação:**

Este é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy, com as respectivas faixas de valores onde estão definidos. É nele que justifica-se a grande importância do fenômeno a ser modelado. Juntamente com os especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo. Observe que, mesmo que a entrada seja crisp, essa será fuzzificada por meio de sua função característica.

- **Módulo da Base de Regras Fuzzy:**

Este pode ser considerado como um módulo que faz parte do “núcleo” do controlador fuzzy. Ele é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma lingüística

$$\textit{Se } x_1 \textit{ é } A_1 \textit{ e } \dots \textit{ e } x_n \textit{ é } A_n \textit{ então } u_1 \textit{ é } B_1 \textit{ e } \dots \textit{ e } x_m \textit{ é } B_m,$$

de acordo com as informações de um especialista. É neste ponto que as variáveis e suas classificações lingüísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, funções de pertinência.

- **Módulo de Inferência Fuzzy:**

É neste módulo que cada proposição fuzzy é “traduzida” matematicamente por meio das técnicas de lógica fuzzy. É onde se define quais t-normas, t-conormas e regras de inferência (que podem ou não ser implicações fuzzy) serão utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a base de regras. Este módulo tem tanta importância quanto o módulo da base de regras. É basicamente dele que depende o sucesso do controlador fuzzy, já que ele fornecerá a saída fuzzy a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada.

Em nosso trabalho utilizaremos o chamado *Método de Inferência de Mamdani*, que será apresentado a seguir.

2.4.3 O Método de Inferência de Mamdani

O método de Mamdani é baseado na regra de composição de inferência *max-min* e segue o procedimento:

- Em cada regra R_j da base de regras fuzzy, a condicional “Se x é A_j então y é B_j ” é modelada pela aplicação \wedge (mínimo) que, erroneamente, costuma ser denominada por implicação de Mamdani (\wedge não é uma implicação fuzzy);
- Adota-se a t-norma \wedge (mínimo) para o conectivo lógico “e”;
- Para o conectivo lógico “ou” adota-se a t-conorma \vee (máximo), que conecta as regras fuzzy da base de regras;

Formalmente, a relação fuzzy M é o subconjunto fuzzy de $X \times Y$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r} (\varphi_{R_i}(x, y)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\varphi_{A_i}(x) \wedge \varphi_{B_i}(y)],$$

onde r é o número de regras que compõem a base de regras e A_j e B_j são conjuntos fuzzy da regra j . Cada um dos valores $\varphi_{A_j}(x)$ e $\varphi_{B_j}(y)$ são interpretados como os graus com que x e y estão nos conjuntos fuzzy A_j e B_j , respectivamente.

- **Módulo de Defuzzificação:**

Na teoria dos conjuntos fuzzy, a defuzzificação é um processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real). Um exemplo de método de defuzzificação é o chamado *Centro de massa* apresentado abaixo:

2.4.4 Defuzzificador Centro de Massa (Centro de gravidade, Centróide ou Centro de Área)

Este método de defuzzificação é semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os valores $\varphi_B(y_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor y_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy B .

O centro de massa dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o mais preciso e preferido, mesmo sendo o mais complicado.

Para um domínio discreto tem-se:

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \varphi_B(y_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(y_i)}.$$

Para um domínio contínuo tem-se:

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \varphi_B(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(y) dy}.$$

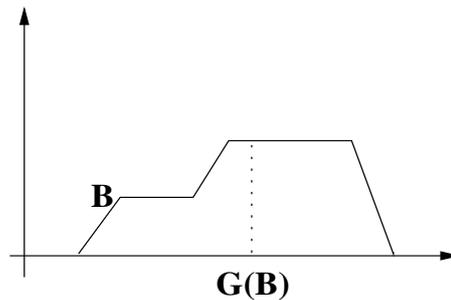


Figura 2.3: Defuzzificador centro de gravidade $G(B)$.

Em nosso trabalho, faremos uso do *Método de Inferência de Mamdani* e utilizaremos como método de defuzzificação o *Centro de Massa*. Para ilustrar o controlador fuzzy com essa metodologia, vamos usar apenas duas regras genéricas, como as que

aparecem em nossa base de regras, cada uma com duas entradas e uma saída (figura 2.4).

R_1 : Se x_1 é A_1 e x_2 é B_1 então y é C_1 .

R_2 : Se x_1 é A_2 e x_2 é B_2 então y é C_2 .

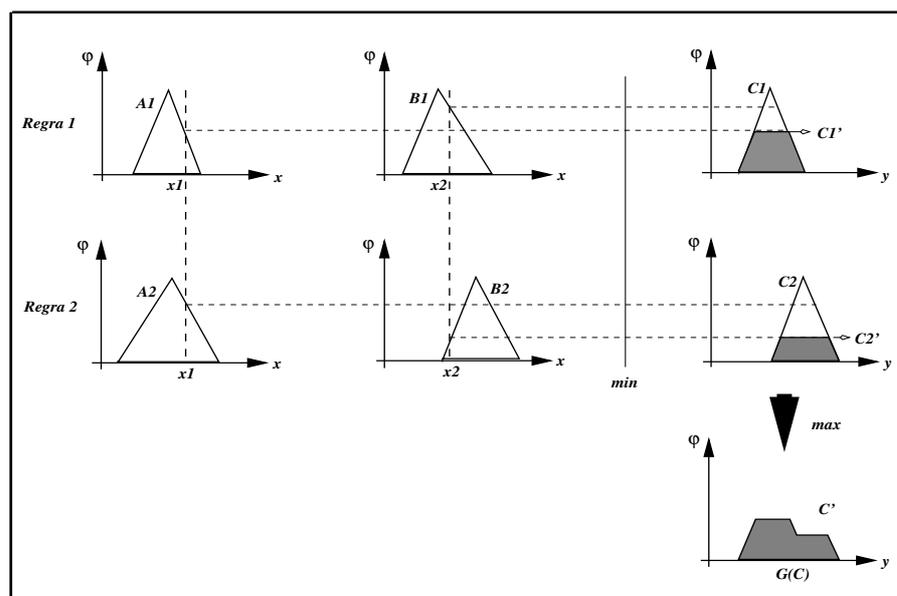


Figura 2.4: Método de Mamdani.

Neste capítulo estudamos os sistemas fuzzy, procurando entender como podemos “captar” informações (termos lingüísticos) que encontramos em nosso cotidiano e transformá-las em regras fuzzy. A finalidade dessa transformação é poder trabalhar, através do controlador fuzzy, com informações imprecisas e obter no final do processo uma resposta para o que desejamos modelar. Vimos também como é o funcionamento de um controlador fuzzy, seus processos e, em particular, o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação de centro de massa, que serão utilizados para realizar as simulações dos capítulos 5 e 6.

Capítulo 3

Alguns Resultados Teóricos

Neste capítulo apresentaremos os resultados teóricos que darão suporte para o desenvolvimento dos próximos capítulos, os quais constituem o nosso trabalho propriamente dito. Dividiremos o capítulo em três seções, que referem-se às áreas da matemática nas quais os respectivos resultados se encontram. São elas: Análise Matemática, Análise Numérica e Aproximação Universal.

3.1 Alguns tópicos de Análise Matemática

A análise matemática é uma importante área da matemática que nos permite estudar o comportamento de funções reais. Ela engloba teoremas que, sob certas condições, garantem a convergência de uma seqüência de funções e estuda propriedades de funções limite. Em nosso trabalho, será necessário o conhecimento de alguns teoremas, para podermos aplicá-los em capítulos mais a frente. Nesta seção, enunciaremos alguns deles. Mais resultados podem ser encontrados em livros clássicos de análise matemática como o de Rudin (25) e Lima (18).

Dado X um espaço métrico, no decorrer dessa seção $C(X)$ denotará o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas.

Definição 3.1 *Suponhamos $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, uma sucessão de funções reais*

definidas em X tal que a sucessão de números $\{f_n(x)\}$ convirja qualquer que seja $x \in X$. Podemos então definir uma função f por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad (x \in X).$$

Nestas condições, dizemos que $\{f_n\}$ converge em X e que f é o limite ou a função limite de $\{f_n\}$.

Definição 3.2 Dizemos que uma sucessão de funções reais $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, converge uniformemente em X para a função f se a cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro $N(\varepsilon)$ tal que, quando $n \geq N(\varepsilon)$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 3.3 Se X é um conjunto compacto então toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.4 Se $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções reais contínuas em X e se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X , então f é contínua em X .

Teorema 3.5 (Weierstrass) Se $f \in C([a, b])$, então existe uma seqüência de polinômios p_n convergindo uniformemente para f em $[a, b]$.

Esta é a forma em que o teorema foi originalmente apresentado por Weierstrass. A demonstração pode ser encontrada em Rudin (25). Para a forma mais geral do teorema de Stone-Weierstrass necessitamos da definição 3.6. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Bando (1) ou Nguyen (21).

Definição 3.6 Seja $H \subseteq C(X)$. Dizemos que

1. H é uma subálgebra de $C(X)$ se para $a \in \mathbb{R}$ e $f, g \in H$ temos $af, f+g$ e $fg \in H$.
2. H não se anula em nenhum ponto de X se para cada $x \in X$ existir $h \in H$ tal que $h(x) \neq 0$.
3. H separa pontos em X se a cada par de pontos distintos x_1 e $x_2 \in X$ existir $h \in H$ tal que $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Teorema 3.7 (Stone-Weierstrass) *Sejam K um subconjunto compacto de X e H uma subálgebra de $C(X)$. Se H separa pontos em X e não se anula em nenhum ponto de K , então $\bar{H} = C(K)$.*

Aqui, denota-se por \mathbb{M} famílias de conjuntos mensuráveis e por $\mathbb{L}(\mu)$ uma classe de funções Lebesgue-integráveis.

Teorema 3.8 (Teorema de Lebesgue da Convergência Monótona) *Suponhamos $X \in \mathbb{M}$. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis tais que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in X).$$

Seja f definida por

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in X, n \rightarrow \infty).$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema 3.9 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Suponhamos que $X \in \mathbb{M}$. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis tais que*

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in X)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Se existe uma função $g \in \mathbb{L}(\mu)$ em X tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Nesta seção enunciamos resultados da análise matemática que serão de grande importância neste trabalho. Tais resultados serão utilizados no capítulo 4, onde demonstra-se que as funções obtidas através do controlador fuzzy são boas aproximações de funções teóricas contínuas.

3.2 Alguns tópicos de Análise Numérica

Nesta seção apresentaremos alguns métodos numéricos que nos conduzam a aproximações de soluções do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde y_0 e $f(x, y(x))$ são dadas.

Na falta de soluções analíticas para equações diferenciais, os métodos numéricos têm atuado como importante ferramenta. Apresentaremos aqui algumas técnicas úteis no cálculo de aproximações numéricas para $y(x)$. Nosso estudo foi baseado nos livros de Cunha (11) e Ruggiero (26). Nos restringiremos apenas aqueles que serão utilizados em capítulos posteriores.

3.2.1 Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são os mais usados dentre aqueles apropriados para os problemas de valor inicial. Seus atrativos são simplicidade, alta precisão e versa-

tilidade nas aplicações.

Tomemos a equação diferencial de primeira ordem, com dado inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Considerando a malha definida pelo passo h , podemos usar a fórmula de diferenças finitas avançada para discretizar a derivada de $y(x)$ no ponto x_k . Assim, obtemos uma versão discretizada do PVI acima:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k). \quad (3.2)$$

Esta equação permite que calculemos y_{k+1} a partir de y_k , e define o *Método de Euler* (1707-1783), estabelecido em 1768. Sua aplicação é muito simples:

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \text{ para } k = 0, 1, \dots$$

A fórmula avançada introduz um erro da ordem de h em cada passo.

A idéia de Euler tem versões de maior precisão nos trabalhos de Runge em 1895, para o caso de uma equação, e Kutta em 1901, para o caso de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Consideremos inicialmente os Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem definidos pela expressão

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \beta_0 f(x_k, y_k) + \beta_1 f(x_k + \gamma h, y_k + \delta h),$$

onde os parâmetros β_0 , β_1 , γ e δ serão convenientemente calculados de modo a aumentar a precisão do resultado.

Explicitando y_{k+1} nesta relação, temos

$$y_{k+1} = y_k + h\beta_0 f(x_k, y_k) + h\beta_1 f(x_k + \gamma h, y_k + \delta h). \quad (3.3)$$

O último termo do lado direito desta equação pode ser desenvolvido através da série de Taylor para funções de duas variáveis. Substituindo então, na equação acima teremos:

$$y_{k+1} = y_k + h[(\beta_0 + \beta_1) f(x_k, y_k)] + \frac{h^2}{2}[2\beta_1\gamma f_x(x_k, y_k) + 2\beta_1\delta f_y(x_k, y_k)] + \quad (3.4)$$

$$\frac{h^3}{3}[3\beta_1\gamma^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 6\beta_1\gamma\delta f_{xy}(x_k, y_k) + 3\beta_1\delta^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + \mathcal{O}(h^4).$$

Nos métodos de Runge-Kutta adota-se, como critério de escolha dos quatro parâmetros β_0 , β_1 , γ e δ a ordem de aproximações dos valores de y_{k+1} pela série de Taylor. Detalharemos a seguir o método de Runge-Kutta de segunda ordem.

Tomando o desenvolvimento de Taylor até a quarta ordem e a expressão dada acima, vamos escolher β_0 , β_1 , γ e δ de modo que os multiplicadores de h e h^2 sejam iguais nas duas expressões. Desta maneira, os parâmetros devem satisfazer às três relações

$$\beta_0 + \beta_1 = 1 \quad 2\beta_1\gamma = 1 \quad 2\beta_1\delta = f(x_k, y_k).$$

Como são quatro os parâmetros e três as condições que eles devem satisfazer, existem várias escolhas de β_0 , β_1 , γ e δ de modo que o cálculo de y_{k+1} usando (3.3) coincida com o da série de Taylor, até o termo de segunda ordem.

Tomando, então, $\beta_0 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ e $\delta = f(x_k, y_k)$, temos um método de Runge-Kutta de segunda ordem, mais conhecido como o método de Euler Aperfeiçoado, que será utilizado nos capítulos 5 e 6. A fórmula explícita deste método é dada então por

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))]. \quad (3.5)$$

Os métodos de Runge-Kutta são estáveis e convergem sob determinadas condições. Para o nosso interesse aqui, os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem serão eficientes e estáveis, desde que utilizemos h pequeno. Mais detalhes consultar Cunha (11).

Na seção seguinte estudaremos as propriedades que os sistemas fuzzy têm de aproximar funções.

3.3 Aproximação Universal

Para modelagem matemática de fenômenos da natureza, o ideal é que tenhamos uma função que o represente. Porém, nem sempre encontramos uma função ideal que o represente ou então tal função, na maioria das vezes, é de grande complexidade, dificultando a análise do modelo. Por outro lado, como visto no capítulo 2, sistemas baseados em regras fuzzy podem ser uma ferramenta que nos ajuda a modelar fenômenos a partir de regras lingüísticas, tornando o tratamento matemático mais “simples”.

Nesta seção serão abordados alguns resultados sobre Teoria de Aproximação Universal, para o caso de funções clássicas. Em seguida, apresentaremos alguns resultados nos baseando no fato de que sistemas baseados em conjuntos de regras lingüísticas “cobrem” a curva que será candidata a ser a função teórica que modela o problema em mãos. Sistemas fuzzy serão, portanto, vistos aqui como aproximadores de funções. Para isso nos basearemos na teoria clássica de aproximação.

Como vimos no capítulo anterior, um controlador fuzzy define uma aplicação de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} construída de algum modo especial, a partir de um conjunto de regras da forma “Se $x_i \in A_{ij}$ então $y \in B_j, i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, r$ ”, onde as variáveis x_i e y_i são valores em \mathbb{R} e os A_{ij} e B_j são conjuntos fuzzy. Sendo assim, na próxima seção enunciaremos um importante teorema de nosso trabalho. Ele garante que podemos fazer uso dos controladores fuzzy para aproximar funções contínuas. Observamos que para um bom entendimento da seção seguinte, é necessário conhecimento dos teoremas 3.5 e 3.7.

3.3.1 Capacidade de Aproximação

Nesta seção apresentaremos resultados que permitem estudar a aproximação de funções reais contínuas por um controlador fuzzy, utilizando como ferramenta base o teorema de Stone-Weierstrass.

Vimos anteriormente que um controlado fuzzy define uma aplicação de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Para rever isto, considere a base de regras:

$$R_1 : \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n1} \text{ então } y \text{ é } B_1''$$

$$R_2 : \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{12} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n2} \text{ então } y \text{ é } B_2''$$

⋮

$$R_r : \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{1r} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{nr} \text{ então } y \text{ é } B_r''$$

onde as variáveis x_i e y são valores em \mathbb{R} e os A_{ij} e B_j são conjuntos fuzzy escolhidos de forma especial. Assim escolhendo uma t-norma Δ para o conectivo lógico “e” e uma t-conorma ∇ para “ou”, obteremos a função de pertinência

$$\varphi_S(y) = \nabla_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n) \Delta \varphi_{B_j}(y)]$$

que representa a saída fuzzy do sistema, e para obtermos uma saída precisamos escolher um processo de defuzzificação coerente, como método do Centro de Massa

$$y^* = f^*(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \varphi_S(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_S(y) dy}.$$

Portanto a aplicação $x \rightarrow y^* = f^*(x)$ depende

- dos conjuntos fuzzy A_{ij} e B_j ,
- da t-norma Δ e da t-conorma ∇
- do “processo de defuzzificação” $\varphi_S \rightarrow y^*$.

Denotaremos por \mathcal{M} uma classe das funções de pertinência, por \mathcal{L} uma classe de conectivos lógicos fuzzy, e por \mathcal{D} um processo de defuzzificação. A terna $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ refere-se a uma **metodologia** que especifica a aplicação entrada-saída $y^* = f^*(x)$. A função f^* também depende do número de regras r , e esta dependência será indicada pela notação f_r .

Os resultados seguintes devem-se a Nguyen e podem ser encontrados em Bando (1) e Nguyen (21).

Baseando-se no teorema de Stone-Weierstrass e em condições adequadas para $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, mostraremos que a classe de funções $\{f_r, r \geq 1\}$, com a norma do sup, é densa no espaço das funções contínuas $C(K)$, onde K é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Seja \mathbb{F} a classe das funções $f_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f_r(x) = \frac{\sum_{j=1}^r y_j \Delta(\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))}{\sum_{j=1}^r (\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}$, Δ é uma t-norma contínua e A_{ij} são conjuntos fuzzy tipo Gaussiano, isto é,

$$\varphi_{A_{ij}}(z) = \alpha_{ij} e^{-\frac{(z-\alpha_{ij})^2}{k_{ij}}}.$$

Denotaremos por \mathbb{F}_K os elementos de \mathbb{F} restritos a K .

Lema 3.10 *Sejam $\{a_i\}_{i=1}^m$ e $\{b_i\}_{i=1}^n$ conjuntos de números reais positivos finitos.*

Então

$$(\wedge_i \{a_i\})(\wedge_j \{b_j\}) = (\wedge_i (\wedge_j \{a_i b_j\})).$$

Demonstração: Ver em Bando (1). □

Teorema 3.11 *Seja $a \Delta b = a \wedge b$ ou $a \Delta b = a \cdot b$. Para qualquer subconjunto compacto K de \mathbb{R}^n , \mathbb{F}_K é denso em $C(K)$ com relação a norma do sup.*

Demonstração: Demonstraremos o teorema para o caso $a\Delta b = a \wedge b$. É suficiente verificar as hipóteses do teorema de Stone-Weierstrass. Primeiro, vejamos se \mathbb{F}_K é uma subálgebra (definição 3.6). Isto segue-se usando o lema 3.10 e que o produto de Gaussianas é Gaussiano.

Para mostrar que \mathbb{F}_K não se anula em ponto algum, simplesmente escolhemos $y_j > 0$ para todo j . Então $f_r(x) > 0$ desde que $\varphi_{A_{i_j}}(x_i) > 0$.

Mostraremos agora que \mathbb{F}_K separa pontos em K . Se $u, v \in K$ com $u \neq v$, então para f_r definido por

$$f_r(x) = \frac{\wedge_i \{e^{-\frac{1}{2}(x_i - u_i)^2}\}}{\wedge_i \{e^{-\frac{1}{2}(x_i - u_i)^2}\} + \wedge_i \{e^{-\frac{1}{2}(x_i - v_i)^2}\}},$$

$f_r(u) \neq f_r(v)$. Assim, se $g \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, existe $f_r \in \mathbb{F}_K$ tal que $\|f_r - g\| < \varepsilon$, onde $\|g\|_\infty = \vee_{x \in K} |g(x)|$. \square

Pelo resultado anterior temos que toda função contínua definida em K pode ser aproximada por funções de \mathbb{F}_K , funções estas que são conjuntos fuzzy que representam sistemas fuzzy com propriedades específicas, por exemplo, os conjuntos fuzzy têm que ter forma Gaussiana (seção 1.2).

Discutimos anteriormente que a classe \mathbb{F} de funções contínuas depende da metodologia $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ adotada. Consideremos agora a classe $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, onde \mathcal{M} consiste das funções de pertinência φ tais que $\varphi(x) = \varphi_0(ax + b)$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e $\varphi_0(x)$ é contínua, positiva em algum intervalo de \mathbb{R} , e zero fora dele. \mathcal{L} consiste em t-normas e t-conormas contínuas. \mathcal{D} é um método de defuzzificação que transforma cada função de pertinência φ em um número real de maneira que se $\varphi(x) = 0$ para $x \notin (\alpha, \beta)$, então $\mathcal{D}(\varphi(x)) \in [\alpha, \beta]$. Por exemplo,

$$\mathcal{D}(\varphi(x)) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx}$$

é um método de defuzzificação.

Denotaremos por $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ os elementos de $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ restritos a K .

Teorema 3.12 *Para qualquer metodologia $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ e qualquer subconjunto compacto K de \mathbb{R}^n , $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ é densa em $C(K)$ com relação a norma do sup.*

Demonstração: Precisamos mostrar que para $f \in C(K)$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ tal que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Sendo f uniformemente contínua no conjunto compacto K , existe $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que

$$\forall \{x_i - y_i; i = 1, \dots, n\} \leq \delta(\varepsilon).$$

Como K é compacto, existe uma cobertura dada por r bolas abertas, $r \geq 1$, com a j -ésima centrada em z^j e raio $\frac{\delta(\varepsilon)}{2}$. Considere a coleção de regras da forma “Se x_1 é A_{1j} e ... e x_n é A_{nj} então y é B_j ”, onde as funções de pertinência são escolhidas como segue. Seja φ_0 uma função contínua, positiva no intervalo (α, β) e zero fora dele. A função

$$\hat{\varphi}_0(t) = \varphi_0\left(\frac{\beta - \alpha}{2}t + \frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

está em \mathcal{M} , é positiva em $(-1, 1)$ e 0 fora deste intervalo. Tome

$$\varphi_{A_{ij}}(t) = \hat{\varphi}_0\left(\frac{t - z_i^j}{\delta}\right) \quad e \quad \varphi_{B_j}(t) = \hat{\varphi}_0\left(\frac{t - f(z_i^j)}{\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

Então para $\Delta, \nabla \in \mathcal{L}$, seja

$$\varphi_x(y) = \nabla_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n) \Delta \varphi_{B_j}(y)].$$

Mostraremos que $g(x) = \mathcal{D}(\varphi_x)$ aproxima f com a precisão desejada.

Na visão das propriedades de \mathcal{D} , é suficiente verificar que φ_x não é identicamente nula e $\varphi_x(y) = 0$ quando $y \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Agora, para $x \in K$, existe z^j tal que

$$\forall \{x_i - z_i^j; i = 1, \dots, n\} \leq \delta(\varepsilon)$$

então

$$\varphi_{A_{ij}}(x_i) = \hat{\varphi}_0 \left(\frac{t - z_i^j}{\delta} \right) > 0$$

para todo i , desde que $\frac{t - z_i^j}{\delta} \in (-1, 1)$.

Tomando $y = f(z_i^j)$, temos $\varphi_{B_j}(y) = \hat{\varphi}_0(0) > 0$. Pelas propriedades de t-normas e t-conormas, segue que $\varphi_x(y) > 0$.

Agora, seja $y \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Pelas propriedades de t-norma e t-conorma, para mostrar que $\varphi_x(y) = 0$ basta mostrar que para $j = 1, \dots, r$

$$p_j = [\varphi_{A_{ij}}(x_i) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{ij}}(x_n) \Delta \varphi_{B_j}(y)] = 0.$$

Sendo Δ uma t-norma, $p_j = 0$ se algum $\varphi_{A_{ij}}(x_i) = 0$ ou $\varphi_{B_j}(y) = 0$. Se todos são positivos, então $|f(x) - f(z_i^j)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pela continuidade uniforme de f em K . Por outro lado, por hipótese, $|y - f(x)| \geq \varepsilon$, e então

$$\frac{y - f(z_i^j)}{\frac{\varepsilon}{2}} \notin (-1, 1).$$

Então,

$$\varphi_{B_j}(y) = \hat{\varphi}_0 \left(\frac{y - f(z_i^j)}{\frac{\varepsilon}{2}} \right) = 0.$$

□

Em resumo, o teorema 3.12 nos diz que existem várias classes de controladores fuzzy que podem aproximar funções contínuas definidas num compacto no espaço euclidiano de dimensão finita. Assim, o teorema 3.12 demonstra que uma função contínua f pode ser aproximada por funções modeladas por conjuntos fuzzy, que representam um sistema de regras lingüísticas.

3.3.2 Comentários e Ilustrações sobre o teorema 3.12

Pela demonstração do teorema 3.12, os z_i^j s utilizados como centro das bolas que “cobrem” o gráfico da função f devem pertencer aos conjuntos fuzzy da base de

regras com grau de pertinência não nulo. Em particular, os elementos z_i e $f(z_i)$ podem pertencer aos conjuntos fuzzy da base de regras com pertinência máxima e igual a 1. Assim, dado um problema para ser modelado podemos, com a ajuda de um especialista, identificar tais z 's, e então utilizar um controlador fuzzy para estimar uma solução. Ainda de acordo com o teorema, quanto maior o número de z 's que puder ser identificado, melhor a aproximação feita pelo controlador.

Vamos aqui ilustrar a idéia deste teorema com o exemplo abaixo.

Exemplo 3.13 *Suponha que desejamos modelar um fenômeno que pode ser descrito pela função $f(x) = x^2$. Não queremos apenas traçar o gráfico da função, mas sim tentar representá-la através de uma base de regras. De acordo com o teorema, precisamos ter conhecimento de alguns valores e suas respectivas imagens (que chamaremos de z_i e $f(z_i)$, respectivamente). Veremos aqui como a representação da função melhora a medida que temos conhecimento de um número maior de valores z 's.*

Como o controlador fuzzy representa uma função em um compacto K , vamos trabalhar com o intervalo fechado $[0, 10]$, mas lembramos que este intervalo pode assumir quaisquer outros valores, desde que seja um intervalo fechado.

Utilizaremos o método de inferência de Mamdani com centro de massa como defuzzificador. As funções de pertinência são números fuzzy triangulares ou trapezoidais. Denotaremos por $f_r(x)$ a saída fornecida pelo controlador.

Primeiro caso: *Suponha que temos o conhecimento de 4 valores para z e suas respectivas imagens. Lembramos que o valor da função de pertinência de cada z e de $f(z)$ é igual a 1 e cada um deles se encontra no suporte de apenas um conjunto fuzzy.*

A figura 3.1 mostra as funções de pertinência para os antecedentes X e os con-

seqüentes X^2 :

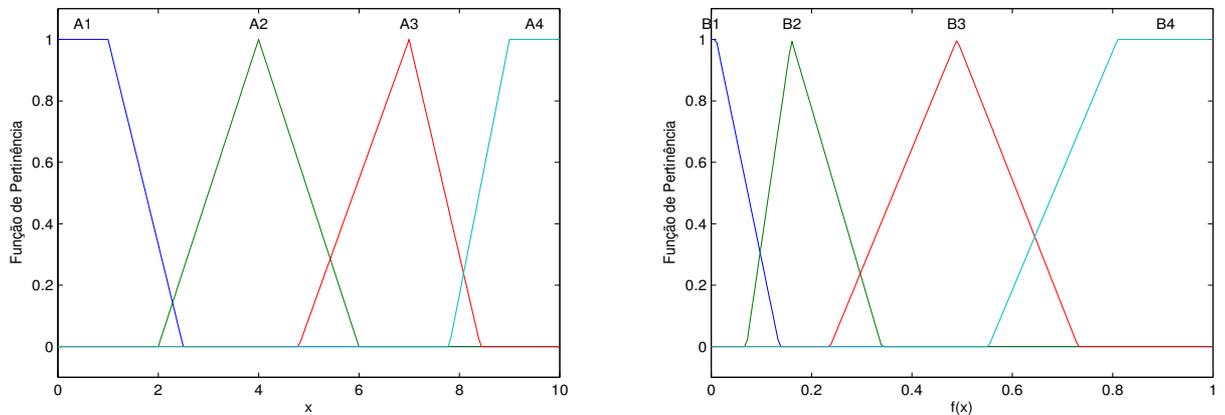


Figura 3.1: Função de pertinência dos antecedentes e conseqüentes - primeiro caso.

Para montar a base de regras levamos em consideração que a função f é estritamente crescente para o domínio que estamos trabalhando. A base de regras para essa função segue abaixo.

$R1$: Se X é $A1$ então X^2 é $B1$

$R2$: Se X é $A2$ então X^2 é $B2$

$R3$: Se X é $A3$ então X^2 é $B3$

$R4$: Se X é $A4$ então X^2 é $B4$

e a curva representada pela base de regras é dada pela figura 3.2.

Segundo caso: Vamos aumentar agora o número de z_i s conhecido. Tomaremos os 4 valores anteriores e mais 7 outros valores com suas respectivas imagens. Novamente lembramos que o valor da função de pertinência de cada z e de $f(z)$ é igual a 1 e cada um deles se encontra no suporte de apenas um conjunto fuzzy.

A figura 3.3 mostra as funções de pertinência para os novos antecedentes X e conseqüentes X^2 :

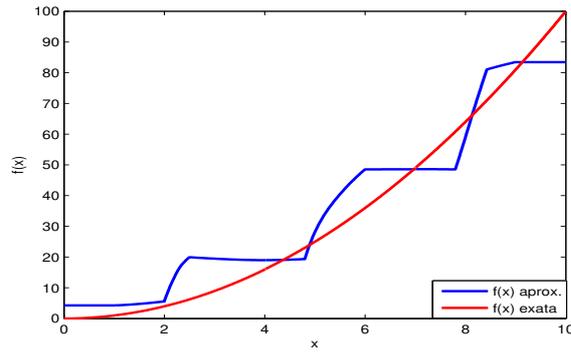


Figura 3.2: Gráfico de $f(x) = x^2$ e da função $f_r(x)$ obtida através do controlador.

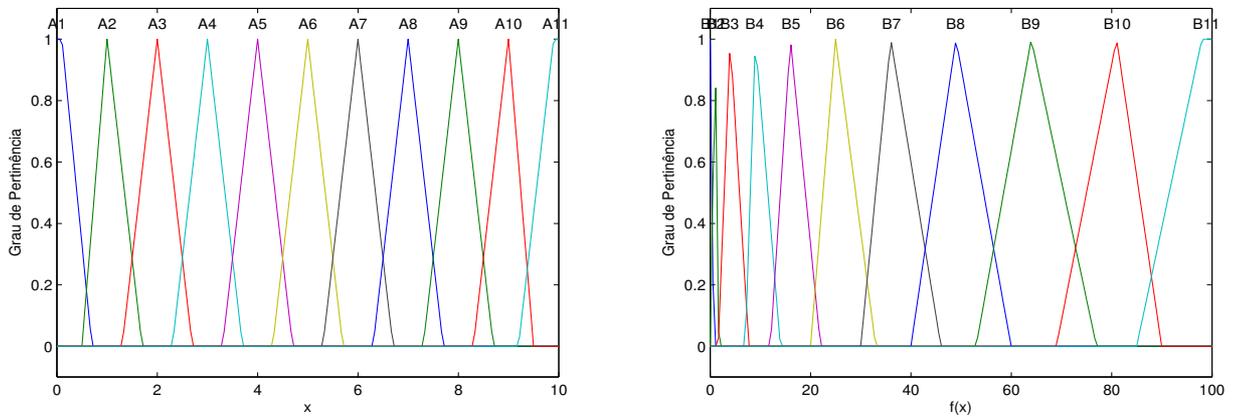


Figura 3.3: Função de pertinência dos antecedentes e conseqüentes - segundo caso.

A base de regras agora é dada por 11 regras, como segue.

$R1$: Se X é $A1$ então X^2 é $B1$

$R2$: Se X é $A2$ então X^2 é $B2$

$R3$: Se X é $A3$ então X^2 é $B3$

$R4$: Se X é $A4$ então X^2 é $B4$

$R5$: Se X é $A5$ então X^2 é $B5$

$R6$: Se X é $A6$ então X^2 é $B6$

$R7$: Se X é $A7$ então X^2 é $B7$

$R8$: Se X é $A8$ então X^2 é $B8$

R9: Se X é A9 então x^2 é B9

R10: Se X é A10 então X^2 é B10

R11: Se X é A11 então X^2 é B11

A figura 3.4 ilustra a curva que representa a base de regras acima.

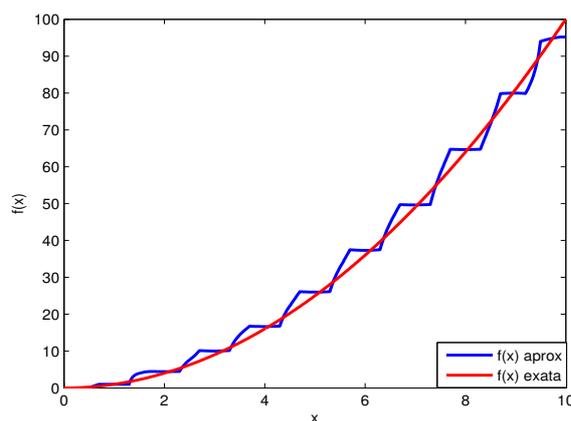


Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = x^2$ e da função $f_r(x)$ obtida através do controlador.

Terceiro caso: Vamos aumentar mais uma vez o número de z_i 's conhecidos. Tomaremos os 11 valores anteriores e mais 10 outros valores com suas respectivas imagens. Teremos agora uma base de regras formada por 21 regras.

A figura 3.5 mostra as funções de pertinência para os novos antecedentes X e conseqüentes X^2 :

A base de regras agora é dada por 21 regras, como segue

R1: Se X é A1 então X^2 é B1

R2: Se X é A2 então X^2 é B2

R3: Se X é A3 então X^2 é B3

R4: Se X é A4 então X^2 é B4

R5: Se X é A5 então X^2 é B5

R6: Se X é A6 então X^2 é B6

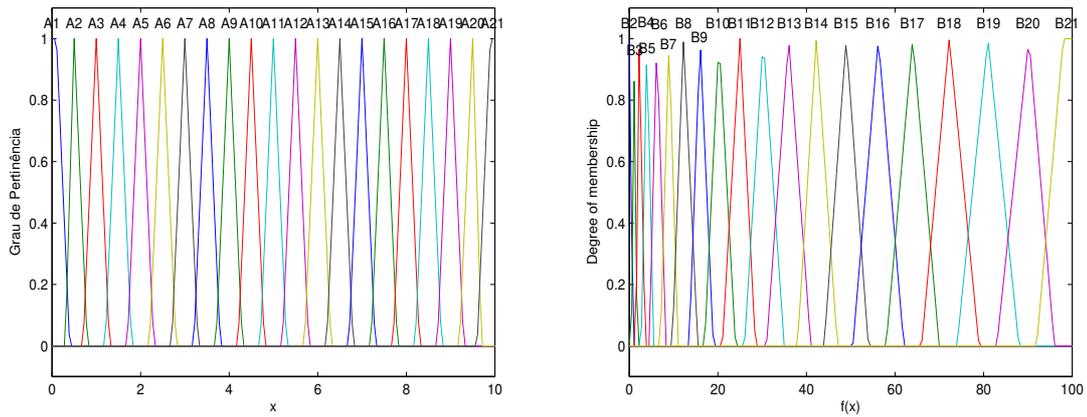


Figura 3.5: Função de pertinência dos antecedentes e conseqüentes.

R7: Se X é A7 então X^2 é B7

R8: Se X é A8 então X^2 é B8

R9: Se X é A9 então X^2 é B9

R10: Se X é A10 então X^2 é B10

R11: Se X é A11 então X^2 é B11

R12: Se X é A12 então X^2 é B12

R13: Se X é A13 então X^2 é B13

R14: Se X é A14 então X^2 é B14

R15: Se X é A15 então X^2 é B15

R16: Se X é A16 então X^2 é B16

R17: Se X é A17 então X^2 é B17

R18: Se X é A18 então X^2 é B18

R19: Se X é A19 então X^2 é B19

R20: Se X é A20 então X^2 é B20

R21: Se X é A21 então X^2 é B21

e a curva representada pela base de regras pode ser visualizada na figura 3.6.

É claro que, na pratica, dificilmente teríamos conhecimento de tantos valores

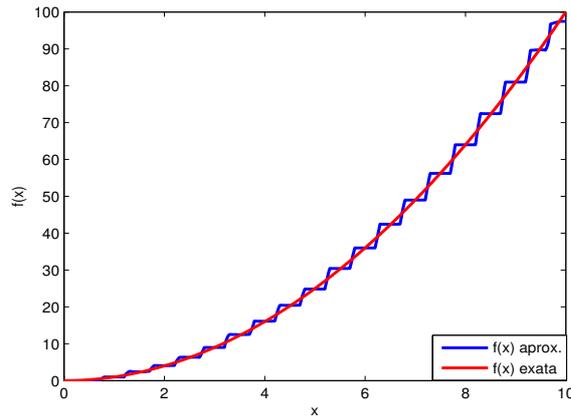


Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x^2$ e da função $f_r(x)$ obtida através do controlador.

para podermos construir nossa base de regras, mesmo porque se tivéssemos tanto conhecimento sobre tal função poderíamos optar por fazer um ajuste de curvas ou até mesmo utilizar apenas métodos numéricos para estimar tal função, sem que fosse necessário o uso do controlador fuzzy. Nossa intenção aqui é apenas ilustrar o teorema 3.12.

Nas figuras 3.2, 3.4 e 3.6, ilustramos o gráfico da função modelada pelo controlador fuzzy e a comparamos com a função desejada, $f(x) = x^2$. O que observamos é justamente a aproximação das duas funções à medida que aumentamos o número de regras. Isso pode ser confirmado pela tabela 3.1 que mostra os valores obtidos para $f_r(x)$ nas três simulações e também o valor exato de $f(x)$.

Neste capítulo relembremos alguns resultados da análise matemática. Estes resultados serão utilizados no capítulo ?? para mostrar que a solução de uma equação diferencial ordinária cujo campo de direções é parcialmente conhecido converge para a solução de uma equação diferencial ordinária cujo campo de direções é dado por uma função teórica contínua. Dedicamos também uma seção para apresentar os métodos numéricos de Runge-Kutta, que serão utilizados para realizar grande parte das simulações deste trabalho.

Tabela 3.1: Valores aproximados e valor exato para $f(z)$.

z	$f(z) = z^2$	$f_r(z)$ aprox1	$f_r(z)$ aprox2	$f_r(z)$ aprox3
0.1	0.01	—	0	0
0.5	0.025	—	—	0
1	1	4.2604	1	1
1.5	2.25	—	—	2.4
2	4	—	4.4154	4.0656
2.5	6.25	—	—	6.3333
3	9	—	9	9
3.5	12.25	—	—	12.4834
4	16	18.9998	16.6667	16.119
4.5	20.25	—	—	20.4167
5	25	—	26	24.8679
5.5	30.25	—	—	30.4167
6	36	—	37.333	36
6.5	42.25	—	—	42.4167
7	49	48.6151	49.6667	49
7.5	56.25	—	—	56.2273
8	64	—	64.6667	64
8.5	72.25	—	—	74.4167
9	81	83.4720	80	81
9.5	90.25	—	—	89.747
9.9	98.01	—	84.7122	97.4861

Por fim, estudamos um importante teorema sobre aproximação universal (3.12). Este teorema nos garante que uma função contínua f pode ser aproximada por funções modeladas por conjuntos fuzzy, através de um controlador fuzzy sob algumas

condições. Para ilustrar o teorema modelamos a função $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ por meio de um controlador fuzzy e percebemos que, à medida que o número de regras aumenta, melhor é o resultado obtido.

Capítulo 4

Controlador Fuzzy aplicado à E.D.O

Neste capítulo vamos propor uma metodologia que utiliza sistemas baseados em regras fuzzy para modelar fenômenos cujo campo de direções é apenas parcialmente conhecido. Vamos supor aqui que os fenômenos estudados podem ser representados por uma Equação Diferencial Ordinária.

4.1 Introdução

Suponha que, ao analisarmos um fenômeno biológico, nos deparamos com um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde f é conhecida.

Será de grande utilidade teórica aqui o seguinte resultado:

Proposição 4.1 *Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua. A função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de 4.1 se, e somente se, é contínua e satisfizer à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Como é sabido, dependendo da complexidade do campo f , a solução $x(t)$ pode não ter uma expressão analítica explícita. Nesse caso, o que se faz é adotar algum método numérico para obter uma solução numérica $\{x^n\}$ para o PVI (4.1), com

$$\{x^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Entretanto, $\{x^n\}$ só será obtida se o campo f for conhecido, ou seja, o conhecimento do campo de direções f é uma imposição do método numérico para produzir a estimativa $\{x^n\}$.

Do ponto de vista de modelagem, a crítica que se faz é que, muitas vezes, o campo de direções f é conhecido apenas parcialmente, isto é, há clareza apenas em algumas propriedades qualitativas de f , que são reveladas a partir do fenômeno estudado, geralmente auxiliado por um especialista. A partir daí, com o objetivo de produzir uma solução matemática para o problema adota-se, arbitrariamente, alguma expressão matemática que tenha aquelas propriedades do fenômeno.

Nossa proposta aqui é “substituir” o campo f em (4.1) por uma base de regras que representa aquelas propriedades que caracterizam o fenômeno. Em outras palavras, queremos substituir o campo teórico f por f_r , que é resultado da saída de algum controlador fuzzy com r regras. É claro que, para que isso seja feito, devemos investigar as características da função f_r e então garantir, através dos teoremas vistos no capítulo 3, a convergência da solução obtida através dessa substituição.

As seções seguintes são dedicadas a essa investigação.

4.2 EDO e Controlador

Num controlador fuzzy, cada valor de entrada “produz” um valor de saída. Assim, podemos visualizar a saída de um controlador fuzzy como uma função que a cada x (entrada) associa o valor $f_r(x)$ (saída), onde r representa o número de regras da base de regras. O objetivo de se utilizar um controlador é o de representar um

determinado fenômeno a partir de suas próprias características, ou seja, modelamos um determinado fenômeno utilizando o controlador fuzzy.

Se não temos informações quantitativas de um determinado fenômeno que desejamos modelar, não será possível explicitar o campo de direções f em 4.1, mas será possível utilizar informações qualitativas para montar uma base de regras e, a partir dela, utilizar o controlador fuzzy para obter as informações desejadas. Como a saída do controlador é vista aqui como uma função, porque não utilizá-la para obter a solução do problema a ser estudado? Pensando nisto é que propomos substituir o campo de direções f de 4.1 por f_r . Teremos então um novo PVI:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_r(t, x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Os sistemas da forma (4.2) que trabalharemos aqui são do tipo autônomo, ou seja, as taxas de variações não dependem explicitamente do tempo. Mais ainda, tanto as variáveis de estado como suas variações são consideradas linguísticas. Dessa forma, as variáveis de estado estão co-relacionadas com suas variações por meio de uma base de regras fuzzy cuja característica principal é ter variáveis de estado como entradas enquanto as variações são as saídas.

Denominaremos os sistemas estudados aqui por **sistemas parcialmente fuzzy (p-fuzzy)** porque se utilizam de metodologias de controladores fuzzy para relacionar as variáveis com suas variações. Porém a solução é crisp, isto é, em cada instante t tem-se um valor preciso $x(t)$ que representa a variável de estado defuzzificada. Os sistemas p-fuzzy podem ser discretos ou contínuos mas trabalharemos apenas com os **p-fuzzy contínuos**. Um estudo detalhado sobre sistemas p-fuzzy discretos o leitor pode encontrar em Silva (27) e Cecconello (10).

Formalmente, a base de regras de um sistema p-fuzzy contínuo é semelhante a de um discreto. A diferença se dá fundamentalmente na formulação de cada regra e da maneira como “realimentamos” a entrada do controlador fuzzy à medida que o

tempo varia.

Nos sistemas discretos as variações são qualificadas em termos absolutos, isto é, as qualificações são formuladas para intervalos de tempo em que ocorrem as sucessões de gerações. Para o caso contínuo, as gerações se sobrepõem e as taxas de variações devem ter propriedades qualitativas compatíveis com o conceito de derivada. Portanto, as qualificações para as saídas devem ser compatíveis com o conceito de variação por unidade de tempo. Tal unidade é independente daquela que caracterizaria as sucessões de gerações simplesmente porque essa não está definida aqui. Num modelo contínuo as gerações se sobrepõem.

A solução de (4.2), de acordo com a proposição 4.1, é dada por

$$x_r(t) = x_0 + \int_0^t f_r(s, x(s)) ds.$$

A pergunta que devemos fazer agora é: sob que condições x_r existe e é única? Essa é uma pergunta geral e que a teoria de EDO tem respostas bem variadas. Por exemplo, pela proposição 4.1 a continuidade (e portanto a integrabilidade) de f_r garante a existência de x_r , porém não garante a unicidade (14). O teorema seguinte afirma as condições para que seja garantida a existência e unicidade de solução de um PVI.

Teorema 4.2 1. Se $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ então, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ contendo $t_0 = 0$ e uma solução $\varphi(t, x_0)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

definido para todo $t \in I_{x_0}$, satisfazendo a condição inicial $\varphi(0, x_0) = x_0$.

2. Se além disso $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $\varphi(t, x_0)$ é **único** em I_{x_0} e $\varphi(t, x_0)$ é contínua

em (t, x_0) e também é contínua sua primeira derivada parcial, ou seja, $\varphi(t, x_0)$ é uma função de classe C^1 .

Baseando-nos no teorema 4.2 percebemos que a existência e unicidade de x_r depende fortemente de f_r possuir ou não algumas características particulares, como continuidade e derivabilidade. Supondo que f_r possua tais características, garantimos então que x_r existe. Devemos nos questionar agora se $x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x$ ou, em outras palavras, será que a solução de (4.2) se aproxima da solução de (4.1) à medida que r aumenta?

Este resultado é de extrema importância em nosso trabalho e, portanto, dedicamos a seção seguinte a ele.

4.3 A solução exata e a estimada pelo controlador fuzzy

Como visto na seção anterior, ao trabalharmos com o sistema p-fuzzy contínuo (4.2) devemos nos assegurar que sua solução se aproxime da solução desejada, ou seja, a solução do PVI (4.1).

Vimos também que a solução x_r , caso exista, é dada por

$$x_r(t) = x_0 + \int_0^t f_r(s, x(s)) ds.$$

A função f_r não é explicitamente conhecida. Nós só a conhecemos em forma de tabela. Por isso, para estimar x_r devemos fazer uso de métodos numéricos. Pela seção 3.2 vimos que se utilizarmos o método de Runge-Kutta teremos garantia de estabilidade e convergência. Isto significa que $x_r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_r$.

Supondo que $f_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f$, podemos garantir a convergência desejada se f_r possuir características particulares. Vamos citar aqui dois casos que resolvem nosso problema.

Caso 1: Suponha f_r monótona integrável num compacto X . Pelo teorema 3.8 temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_X f_r d\mu = \int_X f d\mu.$$

Logo,

$$x_0 + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_X f_r d\mu = x_0 + \int_X f d\mu$$

e, portanto,

$$x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x.$$

Caso 2: Suponha f_r uma família de funções limitadas e integráveis. Então pelo teorema 3.9

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_X f_r d\mu = \int_X f d\mu$$

e assim,

$$x_0 + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_X f_r d\mu = x_0 + \int_X f d\mu,$$

de onde concluímos que

$$x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x.$$

É interessante observar que a convergência de x_r para x não pode ser analisada de uma forma geral, uma vez que para determinarmos x_r necessitamos de f_r e esta, por sua vez, apresenta ou não determinada propriedade dependendo da metodologia utilizada pelo controlador fuzzy. Por esse motivo, ao escolhermos a metodologia em nosso trabalho, consideraremos em geral aquela que nos fornece uma saída f_r com as propriedades necessárias para a utilização dos resultados vistos até aqui e que serão vistos mais adiante.

Na próxima seção faremos uma investigação sobre tais propriedades de f_r .

4.4 Características da função do controlador (f_r)

Como visto, um controlador fuzzy é um sistema de entrada e saída que associa a cada x um valor $y = f_r(x)$, onde r é o número de regras da base de regras que compõe o controlador. Isto significa que podemos associar uma aplicação $f_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a um controlador fuzzy, ou seja, cada controlador fuzzy, cuja base de regras tem apenas um conseqüente, “produz” uma aplicação f_r , que associa cada vetor do \mathbb{R}^n a um valor real.

Nesta seção temos interesse em investigar características de f_r . Por exemplo, sob que condições do controlador tem-se:

1. f_r contínua?
2. f_r monótona?
3. f_r limitada?
4. f_r derivável?
5. f_r integrável?
6. Podemos calcular $\lim f_r$ (quando $r \rightarrow \infty$)?

Questões como estas serão de grande importância neste trabalho pois, conseguindo algumas características de f_r , poderemos fazer uso dos teoremas e resultados enunciados no capítulo 3, podendo garantir a convergência de f_r para uma determinada função teórica f . Para o nosso caso, temos interesse particular nas questões 1, 5 e 6.

Para estudar as propriedades da função f_r obtida através da saída do controlador é necessário conhecermos o método de inferência utilizado pelo controlador fuzzy pois, para cada metodologia, teremos uma f_r com características próprias, ou seja, o “tipo” de saída do controlador fuzzy depende diretamente do método de inferência utilizado (t-normas, t-conormas e método de defuzzificação).

Analisaremos aqui casos particulares das f_r .

- **Caso 1:** De acordo com Nguyen (21), como visto na seção 3.3, considerando um controlador fuzzy que utiliza uma metodologia do tipo $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, onde:

1. \mathcal{M} denota a classe das funções de pertinência φ tais que $\varphi(x) = \varphi_0(ax+b)$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e $\varphi_0(x)$ é contínua, positiva em algum intervalo de \mathbb{R} , e 0 fora dele;
2. \mathcal{L} consistem t-normas e t-conormas contínuas e
3. \mathcal{D} é um método de defuzzificação que transforma cada função de pertinência φ em um número real de maneira que se $\varphi(x) = 0$ para $x \notin (\alpha, \beta)$,

temos a saída do controlador dada por

$$f_r(x) = \frac{\sum_{j=1}^r y_j \Delta(\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))}{\sum_{j=1}^r (\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))},$$

que são funções contínuas (portanto integráveis).

- **Caso 2:** Considere um controlador fuzzy que utiliza o operador mínimo para combinar as variáveis de entrada (t-norma), o produto para combinar as regras (t-conorma) e o centro de massa para a defuzzificação. Suponha ainda que estamos trabalhando com conjuntos fuzzy cuja função de pertinência seja dada em “forma de sino”, como visto na seção 1.5.

De acordo com Kosko e Dickerson (16), controladores com essas características fornecem saídas dadas exatamente pela equação do centro de massa, ou seja

$$f_r(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \varphi_B(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(y) dy},$$

que é uma função derivável, contínua e integrável. Sendo contínua num intervalo fechado, f_r será também limitada.

O caso seguinte será de grande importância em nosso trabalho. Os resultados que serão apresentados a partir daqui são baseados no trabalho de Silva (27) em sua tese de Doutorado.

- **Caso 3:** Utilizaremos aqui o método de inferência de Mamdani com centro de massa como defuzzificador. Vamos supor ainda que a base de regras satisfaz algumas propriedades. São elas:

1. Os universos devem ser intervalos limitados do conjunto dos números reais;
2. Os conjuntos fuzzy da base de regras devem ser números fuzzy (seção 1.2);
3. A base de regras deve ser uma cobertura dos universos, no sentido que cada elemento dos universos tem pertinência não nula a pelo menos um dos números fuzzy da base de regras;
4. No máximo duas regras devem ser ativadas, isto é, cada elemento do universo não pode ter pertinência não-nula a mais que dois antecedentes;
5. Elementos de pertinência máxima (igual a 1) pertencem só a um dos números fuzzy da base de regras.
6. Por último, para facilitar a localização de possíveis equilíbrios, a base de regras deve ser **ordenada monotonicamente**, isto é, os qualificadores dos antecedentes devem ser ordenados: pequeno, médio e grande, por exemplo. Formalmente, isto significa que o maior elemento do suporte do antecedente da regra “ i ” deve ser menor que o da regra seguinte “ $i + 1$ ”.

Definição 4.3 *Uma base de regras com as seis características acima será denominada **bem ordenada**.*

Os resultados abaixo caracterizam a f_r que obtemos através da saída do controlador. Mais detalhes o leitor pode encontrar em Silva (27).

Proposição 4.4 *Suponha que a base de regras seja bem ordenada e que os números fuzzy A_i e A_{i+1} , de regras consecutivas, sejam números fuzzy com*

funções de pertinência contínuas. Então, para todo $x \in I^* = \text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$, a saída f_r é contínua e derivável.

Demonstração: Ver em Silva (27). □

Corolário 4.5 *Suponha que a base de regras seja bem ordenada e que seja formada por números fuzzy triangulares e/ou trapezoidais. Nestas condições, para todo $x \in I^* = \text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$, a saída f_r é contínua e derivável.*

Para encerrar este capítulo, faremos uma seção sobre equilíbrio e estabilidade de sistemas p-fuzzy contínuos. Antes porém faz-se necessário alguns comentários a respeito de base de regras fuzzy com oposição semântica. Estas seções serão de extrema importância nos capítulos 5 e 6.

4.5 Regras fuzzy com Oposição Semântica

O princípio a seguir é bem aceito em Ecologia:

“A variação de uma população é proporcional à população em cada instante.”

Uma primeira tentativa de modelagem para tal princípio poderia nos levar às seguintes regras:

R1: Se a população é “baixa” então a variação é “baixa”

R2: Se a população é “média” então a variação é “média”

R3: Se a população é “alta” então a variação é “alta”

em que as variáveis de entrada e saída são representadas na figura 4.1 por:

Com essa base de regras, o controlador de Mamdani, com defuzzificação dada pelo centro de massa, o sistema p-fuzzy contínuo com condição inicial dada por $x(0) = 2$ nos leva à trajetória ilustrada na figura 4.2.

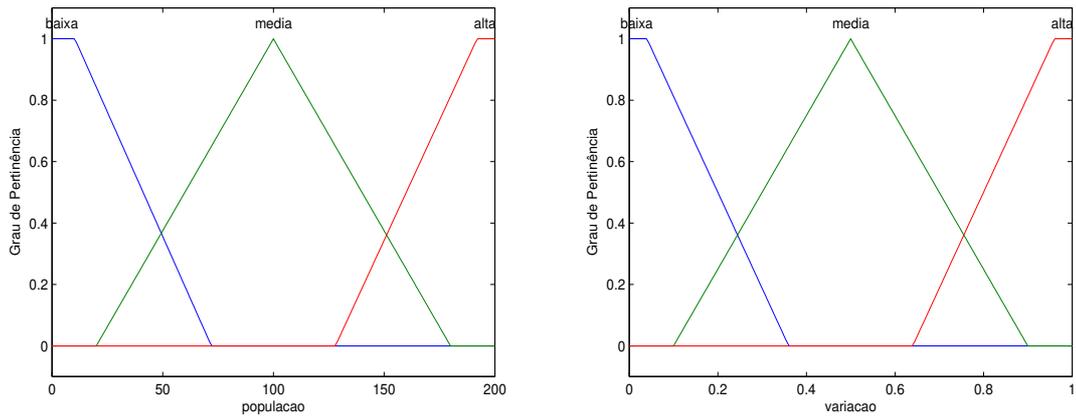


Figura 4.1: Função de pertinência das variáveis população e variação.

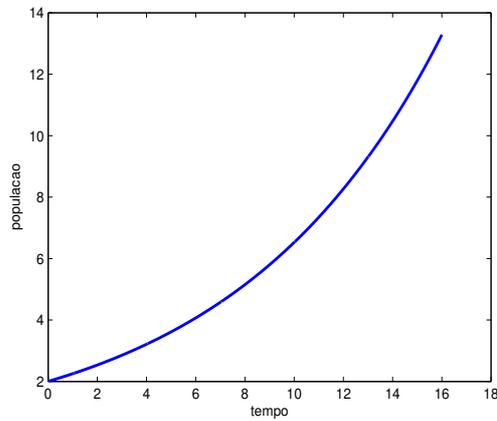


Figura 4.2: Solução dada pelo controlador com $x(0) = 2$.

De acordo com a figura 4.2 o sistema p-fuzzy contínuo produz uma trajetória compatível com o modelo exponencial malthusiano em que o número de mortes é inferior ao de nascimento. No entanto, esse crescimento exponencial ilimitado não é observado na realidade, a não ser por um curto espaço de tempo. Há na natureza fatores como alimentação, competição entre espécies, disputa por espaço, luz, etc, que limitam a população a um certo nível dando-lhe estabilidade num determinado ambiente.

Fatores como esses desencadeiam um processo de “auto-inibição” nos indivíduos da população de modo que para populações muito grandes a variação é pequena ou

mesmo negativa.

Com o propósito de aprimorar o modelo malthusiano acima, tais informações devem ser “inseridas” na base de regras. Se esperamos estabilidade ou equilíbrios, a base de regras deve apresentar regras com **oposição semântica** nos conseqüentes (oposição semântica é caracterizada aqui pela alternância de sinais dos conseqüentes. Um estudo mais aprofundado a esse respeito pode ser encontrado em Pereira (24)). Por exemplo, poderíamos refinar a base de regras anterior, de modo a obter a seguinte base de regras com oposição semântica nas regras *R5* e *R6*.

R1: Se a população é “*baixa*” então a variação é “*baixa positiva*”

R2: Se a população é “*média baixa*” então a variação é “*média positiva*”

R3: Se a população é “*média*” então a variação é “*alta positiva*”

R4: Se a população é “*média alta*” então a variação é “*média positiva*”

R5: Se a população é “*alta*” então a variação é “*baixa positiva*”

R6: Se a população é “*altíssima*” então a variação é “*baixa negativa*”

em que os conjuntos fuzzy dos antecedentes e dos conseqüentes estão ilustrados na figura 4.3.

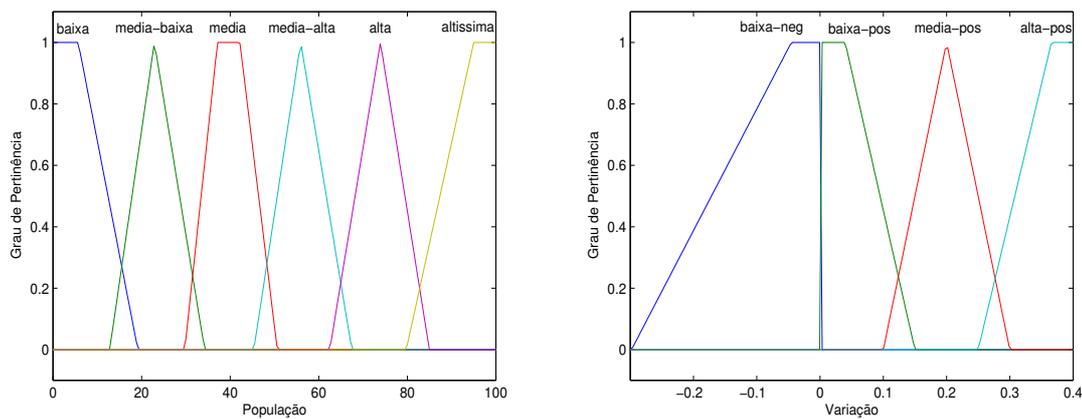


Figura 4.3: Função de pertinência das variáveis população e variação.

Com a nova base de regras e o controlador de Mamdani, o sistema p-fuzzy contínuo produz a trajetória ilustrada na figura 4.4.

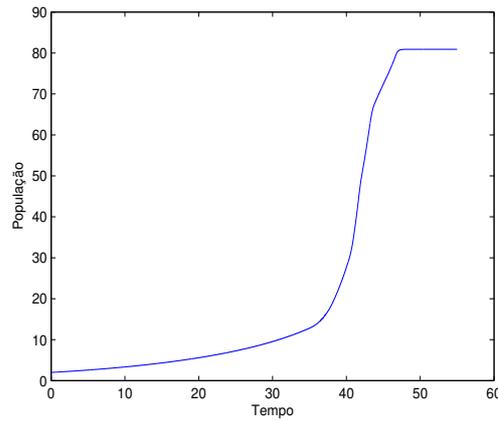


Figura 4.4: Solução dada pelo controlador.

A trajetória apresentada na figura 4.4 tem comportamento qualitativo compatível com os modelos que apresentam inibição como, por exemplo, o de Verhulst, de Gompertz e de Montroll.

Para facilitar o estudo de equilíbrios de sistemas fuzzy faremos algumas exigências a respeito da base de regras. Uma delas diz respeito à monotonicidade na base de regras, isto é, as regras devem estar dispostas numa **escala ordinal**. Por exemplo, as regras apresentadas anteriormente apresentam tal ordem. Isso facilitará a localização de possíveis equilíbrios do modelo. Claro que a não ordenação não elimina os equilíbrios. A existência ou não deles depende, dentre outros fatores, da existência de oposição semântica nas regras. Regras sem oposição semântica implicam na não existência de equilíbrios hiperbólicos, que são os de nosso interesse. Por outro lado, regras com oposição semântica implicam na possibilidade desses equilíbrios. A certeza passa a depender da “continuidade” na base de regras. No caso clássico, essa garantia vem do famoso teorema de Bolzano:

Teorema 4.6 *Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

4.6 Equilíbrio e estabilidade de Sistemas p-fuzzy Contínuos Unidimensionais

Na teoria clássica de EDO uma solução de equilíbrio é a solução em que o sistema não apresenta nenhuma variação. Uma definição dessa solução é apresentada abaixo.

Definição 4.7 *Dada uma Equação Diferencial Ordinária da forma $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, dizemos que $\bar{x}(t)$ é uma solução de equilíbrio do sistema se, e somente se, $f(t, x(t)) = 0$, para todo t .*

Este conceito é bastante importante para o estudo da dinâmica das soluções de uma EDO. Dessa forma, ao trabalharmos com a teoria dos conjuntos fuzzy, faz-se necessário a extensão desse conceito, que será fortemente utilizado na construção da base de regras do controlador fuzzy.

Na teoria dos conjuntos fuzzy trabalhamos sempre com variáveis lingüísticas, que são variáveis cujos valores ao invés de números são palavras, chamadas de termos lingüísticos, determinados a partir das características do fenômeno. Por esse motivo, não é possível falarmos em valor de equilíbrio de maneira direta, como na teoria clássica, mas podemos fazer uma análise qualitativa de nossa base de regras e, a partir daí, identificar a região que possivelmente se encontra o valor de equilíbrio, quando este existir.

Intuitivamente, os valores de equilíbrio de um sistema p-fuzzy estarão sempre no suporte dos conjuntos fuzzy cujas regras apresentam oposição semântica. Denotaremos tal região por **Conjunto viável de equilíbrio**. Os resultados apresentados a seguir foram baseados no estudo de Silva (27).

Teorema 4.8 (Existência de Equilíbrio) *Suponha que uma base de regras esteja nas condições da proposição 4.4 e que as regras R_i e R_{i+1} , com antecedentes A_i e A_{i+1} apresentam oposição semântica nos consequentes B_i e B_{i+1} . Nestas condições*

o intervalo $I^* = \text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$ possui pelo menos um equilíbrio para o sistema 4.2.

Demonstração: Ver em Silva (27) □

Teorema 4.9 (Unicidade de Equilíbrio para saídas simétricas) *Suponha que uma base de regras esteja nas condições da proposição 4.4 e que as regras R_i e R_{i+1} , com antecedentes A_i e A_{i+1} , apresentam oposição semântica nos consequentes B_i e B_{i+1} cujas funções de pertinência sejam simétricas, isto é $\varphi_{B_i}(s) = \varphi_{B_{i+1}}(-s)$ para todo s do universo. Nestas condições o intervalo $I^* = \text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1})$ possui apenas um equilíbrio \bar{x} do sistema p-fuzzy que é dado por*

$$\bar{x} = \max_{x \in I^*} [\min(\varphi_{A_i}(x), \varphi_{A_{i+1}}(x))]$$

ou pela solução da equação

$$\varphi_{A_i}(x) = \varphi_{A_{i+1}}(x),$$

quando existir.

Além disso também vale a seguinte fórmula para o estudo de estabilidade

$$\left. \frac{d(f_r(x))}{dx} \right|_{x=\bar{x}} = \frac{[\varphi_{B_{i+1}}^{-1}(\varphi_{A_i}(\bar{x}))]^2 [\varphi'_{A_i}(\bar{x}) - \varphi'_{A_{i+1}}(\bar{x})]}{4 \int_0^{\varphi_{A_i}(\bar{x})} \varphi_{B_{i+1}}^{-1}(s) ds}. \quad (4.4)$$

Demonstração: Ver em Silva (27). □

Observações:

1. Os resultados sobre equilíbrio e estabilidade dos sistemas p-fuzzy listados aqui foram estudados por Silva (27) para o caso discreto. Como a formulação de um sistema p-fuzzy contínuo é a mesma de um sistema discreto (o que muda é a maneira como “realimentamos” o sistema - ver seção (4.2)), os resultados são válidos também para o caso contínuo.

2. Em nossa metodologia, à medida que aumentamos o número de regras de nossa base de regras, o suporte da função de pertinência de cada termo linguístico diminui. Intuitivamente podemos notar que com isso o suporte do conjunto viável de equilíbrio também diminui à medida que aumentamos o número de regras. Diminuindo o suporte desse conjunto podemos estimar melhor o valor de equilíbrio. Note que a idéia aqui é análoga ao método da bissecção para encontrar a raiz de uma função contínua, que também trabalha com a idéia da diminuição de intervalo (Ver Ruggiero (26)).
3. Ao aumentarmos o número de regras de nossa base de regras, precisamos decidir em qual das novas regras o valor de equilíbrio se encontra. Uma maneira de resolver esse problema é utilizar o teorema de Bolzano (teorema 4.6).

É claro que para utilizar o teorema 4.6 é necessário que a função f_r satisfaça a hipótese de ser contínua. Como visto na seção 4.4, a metodologia utilizada pelo controlador fuzzy é que determina as características da f_r . Em nosso trabalho utilizamos o método de Mamdani e o centro de massa como defuzzificador e que, de acordo com a seção 4.4, produz uma função f_r contínua quando a base de regras for composta por conjuntos fuzzy especiais, como os triangulares e os trapezoidais. Assim, podemos fazer uso do teorema 4.6 para encontrar o valor de equilíbrio do problema proposto quando for de nosso interesse.

Neste capítulo desenvolvemos uma metodologia que utiliza sistemas baseados em regras fuzzy para modelar fenômenos cujo campo de direções é apenas parcialmente conhecido. Utilizando esta metodologia, substituímos um PVI teórico por um novo PVI, cujo campo de direções é modelado pela função dada pela saída do controlador. Mostramos que, sob certas condições, as soluções do PVI fuzzy se aproximam da solução do PVI teórico.

Vimos, ainda neste capítulo, algumas características da função do controlador fuzzy (f_r) e fizemos um breve estudo sobre equilíbrio e estabilidade de sistemas

p-fuzzy contínuos unidimensionais e também sobre regras com oposição semântica. Estes assuntos serão utilizados nos capítulos seguintes, motivo pelo qual julgamos ser necessário seu estudo.

Capítulo 5

Modelos Unidimensionais

Neste capítulo ilustraremos a metodologia proposta no capítulo 4 para o caso unidimensional, ou seja, para fenômenos que podem ser modelados por uma função que depende apenas de uma variável. Faremos algumas observações mais gerais sobre a metodologia aplicada aos modelos de crescimento populacional com auto-inibição, como os de Verhulst, Gompertz, Montroll, etc, e exemplificaremos nossa análise com o modelo populacional proposto por Verhulst, nos baseando apenas nas características principais do modelo, isto é, vamos supor que não conhecemos a função que representa seu campo de direções e, através da saída do controlador fuzzy, estimaremos uma solução para o problema estudado. Com base no modelo p-fuzzy de Verhulst, exemplificaremos também um sistema para o modelo de Montroll. Para finalizar, estimaremos parâmetros para encontrar uma função determinística para cada um dos modelos analisados.

5.1 Introdução

Os modelos de crescimento populacional com auto-inibição são caracterizados, em geral, por um fator que limita o crescimento de uma população à medida que esta aumenta. Existem vários modelos que possuem tal característica, sendo mais conhecidos o de Verhulst, o de Gompertz e o de Montroll. Todos estes modelos,

apesar de possuírem a característica acima (auto-inibição), possuem algumas características específicas que os diferem um dos outros (7).

Ao longo deste capítulo, veremos que são essas características específicas que precisamos “captar” para montar uma base de regras de um controlador fuzzy e, então, simular uma aproximação para o fenômeno.

Vamos supor que desejamos modelar o crescimento inibido de uma população, ao longo do tempo, com um campo de direções, f , parcialmente conhecido. Como primeiro passo, devemos encontrar características qualitativas de f , ou seja, devemos analisar as informações obtidas através do conhecimento de tal população. Feito isto, o segundo passo é montar uma base de regras para o controlador fuzzy e assim, obter f_r que estima f , como visto no capítulo 3 (seção 3.3).

Nossa tentativa neste capítulo será a de modelar uma população supondo que esta se comporta como prevê o modelo clássico de Verhulst e em seguida, faremos uma análise para o modelo clássico de Montroll. No capítulo 6 trataremos dos modelos bidimensionais.

5.2 O Modelo de Verhulst

O Modelo de Verhulst foi proposto com o objetivo de prever o comportamento de uma população ao longo do tempo. Verhulst modificou o modelo de Malthus, supondo que a população possui um fator de inibição que não permite seu crescimento ilimitado (que é a característica do modelo de Malthus).

Para este modelo, a população cresce de acordo com o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(K - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde a é a razão de crescimento intrínseca e K é a capacidade suporte da população

(fator inibidor).

As soluções clássicas da equação (5.1), que representam as populações $x(t)$ em cada instante t são dadas por

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-at} + 1}, \quad (5.2)$$

de onde concluímos que:

- x é crescente se $x_0 < K$
- x é constante se $x_0 = K$
- x é decrescente se $x_0 > K$,

e tem a forma representada na figura 5.1

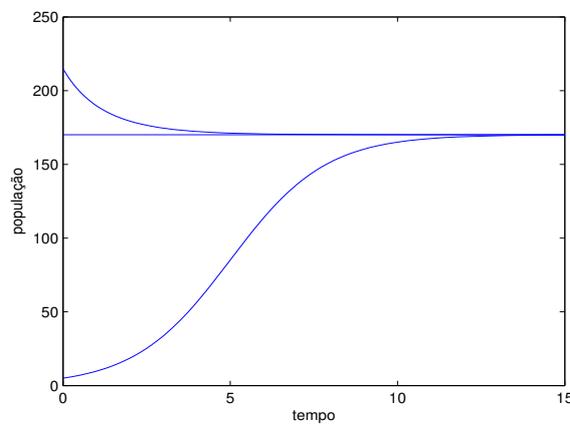


Figura 5.1: Possíveis soluções do modelo de Verhulst

Apesar de conhecermos o campo de direções para este modelo, aqui não estaremos interessados nas equações propostas por Verhulst, e sim nas características qualitativas do modelo proposto por ele. Nosso interesse é obter estimativas para as trajetórias logísticas a partir da metodologia descrita no capítulo 4.

Note que a equação 5.1 está escrita em função da taxa de crescimento específico. Esta formulação facilita na elaboração das regras do sistema p-fuzzy contínuo. A “construção” das regras a partir da variação percentual por unidade de tempo é mais intuitiva que a formulação a partir das variações absolutas.

Considerando então a taxa de crescimento específico temos, reescrevendo a equação 5.1 que

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(K - x) = f(x), \quad (5.3)$$

onde f é linear (decrecente).

5.3 O Modelo p-fuzzy de Verhulst

Quando trabalhamos com a teoria dos conjuntos fuzzy, trabalhamos não mais com termos precisos, mas sim com termos linguísticos, que caracterizam os conjuntos em questão. No controlador fuzzy, as variáveis de estado estão co-relacionadas com suas variações não por meio de uma equação - que é o caso mais comum na literatura, mas sim por uma base de regras fuzzy cuja característica principal é ter as **variáveis de estado como entradas enquanto as variações são as saídas**.

Para modelarmos fenômenos unidimensionais, trabalharemos com o controlador fuzzy admitindo uma variável de entrada e uma variável de saída. O número de regras será dado de acordo com o número de termos linguísticos assumidos em cada variável, em cada uma das simulações feita.

A variável de entrada será a **população**, ou seja, o número de indivíduos de determinada população em cada instante. A variável de saída, em nosso caso, será a **taxa de crescimento específico**, mas para facilitar a notação, denotaremos a saída apenas por **variação**. O método de inferência utilizado será o de Mamdani que, como visto na seção 2.4, associa a t-norma \wedge (mínimo) para o conectivo

lógico “e” e a t-conorma \vee (máximo) para o conectivo “ou”. Para a defuzzificação, utilizaremos o método do centro de massa, que é o mais utilizado.

Com a saída f_r do controlador, utilizaremos o método de Euler Aperfeiçoado em todas as simulações para estimar as soluções y_r . O processo para encontrar a solução é iterativo e depende apenas do valor população no instante anterior. A fórmula recursiva para encontrar os valores desejados é dada, neste caso, por

$$y(k+1) = y(k) + 0,5hy(k)[f_r(y(k)) + f_r(y(k) + hy(k)f_r(y(k)))].$$

Observe que, para calcular $y(k+1)$, multiplicamos o valor de f_r por $y(k)$, pois estamos considerando que f_r representa a razão de crescimento intrínseco.

5.4 Resultado das Aproximações

No capítulo 3, vimos que um controlador fuzzy é capaz de aproximar funções e que, à medida que aumentamos o número de regras da base de regras, melhor passa a ser a aproximação. Com o objetivo de ilustrar este fato, fizemos três simulações para tentar aproximar o modelo de Verhulst utilizando bases de regras com diferentes números de regras. Em todas as simulações temos *população* como variável de entrada e *variação* como variável de saída, lembrando que esta “variação” é a taxa de variação intrínseca da população dada por $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$. Em cada simulação haverá um aumento no número de termos lingüístico para cada uma das variáveis, resultando assim no aumento do número r de regras. Observe ainda que, como visto na seção 4.5, para que a base de regras apresente a característica de “auto-inibição”, a base de regras deve apresentar oposição semântica.

5.4.1 Primeira Simulação

Nesta primeira simulação, temos um total de três regras em nossa base de regras.

Podemos listá-las como se segue:

R1: Se a população é “*baixa*” então a variação é “*média positiva*”

R2: Se a população é “*média*” então a variação é “*baixa positiva*”

R3: Se a população é “*alta*” então a variação é “*baixa negativa*”

As funções de pertinência consideradas nesta simulação para as variáveis de entrada e saída estão ilustradas na figura 5.2.

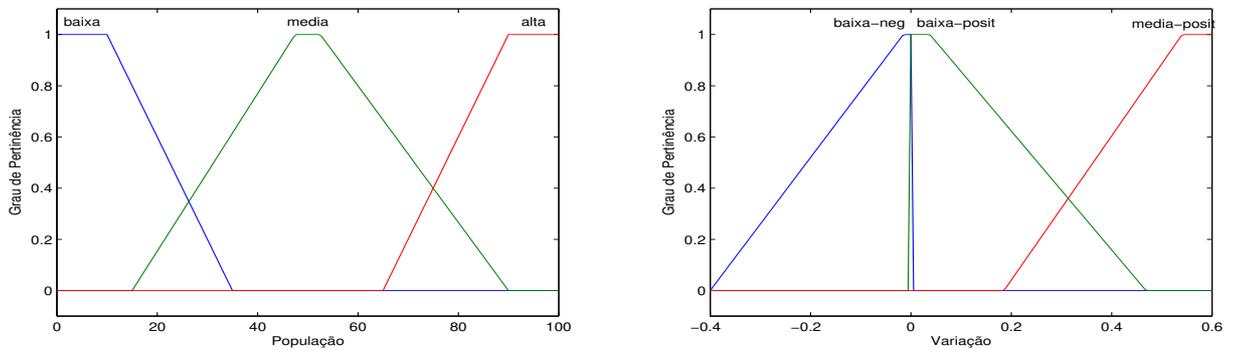


Figura 5.2: Função de pertinência das variáveis *população* e *variação*.

Observe que em nossa base de regras temos oposição semântica (ver seção 4.5) nas regras *R2* e *R3*. Baseando-nos no que foi discutido na seção 4.6 podemos intuir que o valor de equilíbrio se encontra no suporte da região de equilíbrio dos subconjuntos fuzzy que representam populações “*média*” e “*alta*”, ou seja, o valor de equilíbrio se encontra no intervalo $[65, 90]$

Como resultado desta simulação para a condição inicial $x(0) = 5$, ou seja, um valor abaixo da capacidade suporte, obtivemos a curva ilustrada na figura 5.3.

A curva obtida é uma aproximação um pouco grosseira da curva do modelo de Verhulst clássico, visto que ela foi construída baseada em poucas regras. Mas apesar disso, observamos que ela apresenta as mesmas “*características*” do modelo,

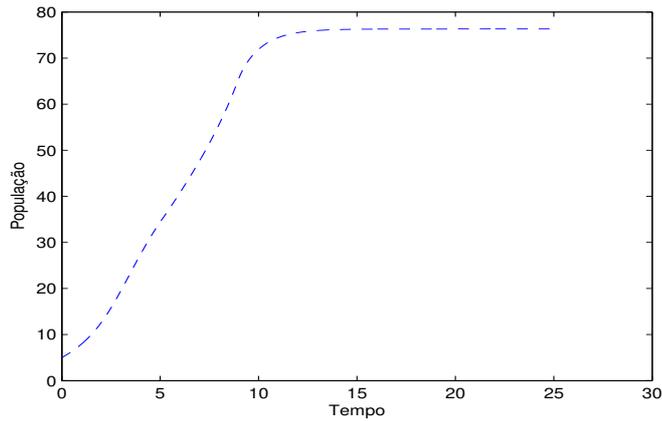


Figura 5.3: Aproximação para o modelo de Verhulst com $x(0) = 5$ - primeira simulação.

ou seja, o crescimento é mais rápido quando a população é menor; à medida que esta aumenta, a variação começa a diminuir, até atingir um valor limite (que é o valor de equilíbrio). O valor limite, neste caso, se encontra no intervalo $J = [65, 90]$. Note que este intervalo não nos fornece muita informação sobre a capacidade suporte. Intuitivamente, desejamos que esse intervalo diminua à medida que o número de regras aumente.

Para estimar essa solução, utilizamos $h = 0,01$. Quando $h = 0,5$, percebemos que a população oscila em torno do valor limite da população. Para $h = 1$, o programa apresenta erro numérico, o que é de se esperar, pois a eficiência dos métodos numéricos está diretamente relacionada com o tamanho do passo h , que em geral, só faz sentido com valores pequenos.

5.4.2 Segunda Simulação

Nesta simulação, aumentamos o número de regras para nossa base de regras, obtendo agora, um total de 5 regras. Esse aumento foi obtido com o aumento do número de termos lingüísticos assumidos por cada uma das variáveis. As regras agora são:

- R1: Se a população é “*baixa*” então a variação é “*grande positiva*”
R2: Se a população é “*média baixa*” então a variação é “*média positiva*”
R3: Se a população é “*média*” então a variação é “*média positiva*”
R4: Se a população é “*alta*” então a variação é “*baixa positiva*”
R5: Se a população é “*muito alta*” então a variação é “*baixa negativa*”

Aqui o valor de equilíbrio está no intervalo que contém a intersecção entre as funções de pertinência da população “*alta*” e “*muito alta*”. As variáveis de entrada e saída possuem, respectivamente, as seguintes funções de pertinência:

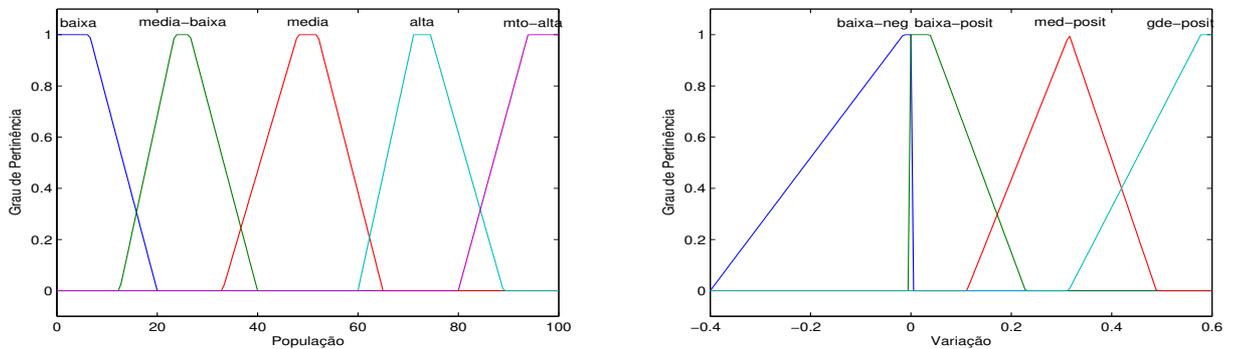


Figura 5.4: Função de pertinência das variáveis *população* e *variação*.

Observe através da figura 5.4 que o valor de equilíbrio se encontra no intervalo $J = [80, 90]$. Note também que, com o aumento do número de regras, o tamanho do intervalo diminui. Há um refinamento no intervalo e isso faz com que consigamos determinar o valor de equilíbrio do sistema com uma maior confiabilidade.

O gráfico da solução estimada pelo controlador fuzzy nesta simulação, considerando a mesma condição inicial $x(0) = 5$ é dado pela figura 5.5.

Observe que esta solução apresenta uma curva mais suave do que a curva obtida na primeira simulação. Isso ocorre devido ao aumento do número de regras de nossa base de regras, pois o teorema 3.12 nos garante que, quanto maior o número de regras, “melhor” nossa aproximação. As observações feitas sobre o passo h na primeira simulação continuam valendo para a segunda simulação.

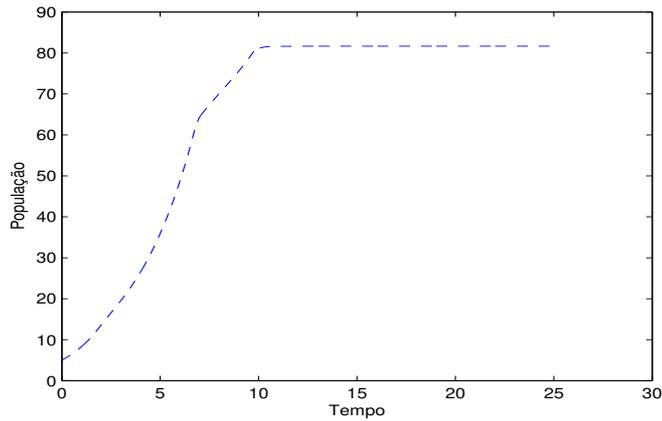


Figura 5.5: Aproximação para o modelo de Verhulst com $x(0) = 5$ - segunda simulação.

5.4.3 Terceira Simulação

Aumentando um pouco mais o número de regras de nossa base de regras, ou seja, aumentando o número de termos lingüísticos assumidos por nossas variáveis de entrada e saída, vamos fazer a terceira simulação. Teremos agora, então, um total de 6 regras. São elas:

R1: Se a população é “muito baixa” então a variação é “alta positiva”

R2: Se a população é “baixa” então a variação é “alta positiva”

R3: Se a população é “média” então a variação é “média positiva”

R4: Se a população é “média alta” então a variação é “média positiva”

R5: Se a população é “alta” então a variação é “baixa positiva”

R6: Se a população é “altíssima” então a variação é “baixa negativa”

A figura 5.6 ilustra as variáveis de entrada e saída.

Novamente devemos observar na base de regras uma oposição semântica entre as regras *R5* e *R6*. Isso significa o valor de equilíbrio do modelo de Verhulst, neste caso, se encontra no intervalo $J = [86, 5; 90]$, como ilustra a figura 5.6.

A solução agora, é dada pela curva ilustrada na figura 5.7, e tem $x(0) = 5$ como condição inicial.

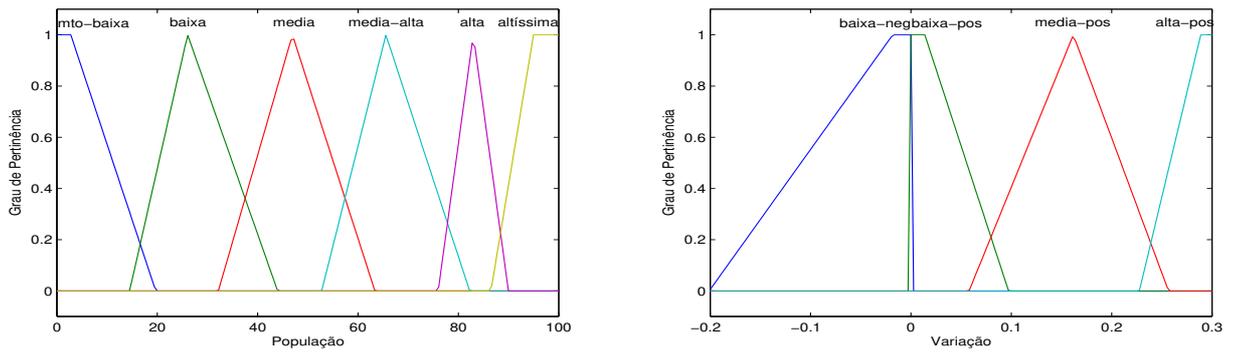


Figura 5.6: Função de pertinência das variáveis *população* e *variação*.

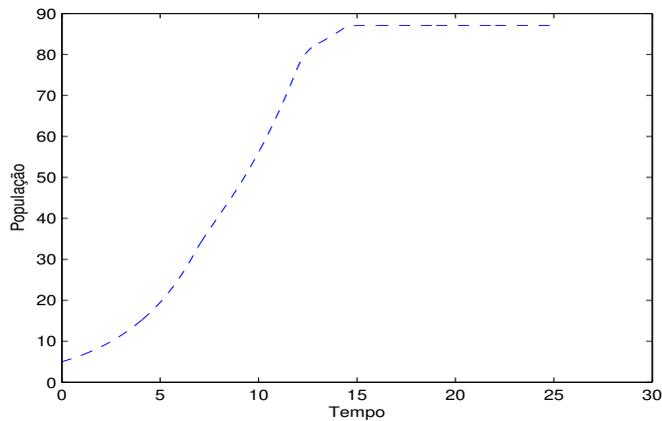


Figura 5.7: Aproximação para o modelo de Verhulst com $x(0) = 5$ - terceira simulação.

A seguir, vamos fazer um breve estudo sobre o modelo geral de Montroll e, supondo que a base de regras utilizada anteriormente corresponda apenas ao modelo de Verhulst, ilustrar uma maneira de “ajustar” tais regras a fim de levar em conta as particularidades desse modelo.

5.5 Estudo do modelo p-fuzzy de Montroll

O modelo clássico contínuo de Montroll é dado por

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^s\right), \text{ com } s > 0, \quad (5.4)$$

onde a é a taxa de crescimento intrínseco e K é a capacidade suporte da população.

As soluções clássicas da equação (5.4), que representam as populações $x(t)$ em cada instante t são dadas por

$$x(t) = \frac{Kx_0}{(x_0^s + (K^s - x_0^s)e^{-sat})^{\frac{1}{s}}}. \quad (5.5)$$

Reescrevendo 5.4 de forma a obter uma expressão para a taxa de variação específica temos

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(1 - (\frac{x}{K})^s), \quad \text{com } s > 0. \quad (5.6)$$

O modelo de crescimento específico de Montroll assume valores maiores ou menores que o modelo de Verhulst dependendo do parâmetro s (ver figura 5.8). Além disso, o ponto de inflexão é dado por $P_m = K(\frac{1}{s+1})^{\frac{1}{s}}$, ou seja, depende apenas do parâmetro s (Ver detalhes em Bassanezi (8)).

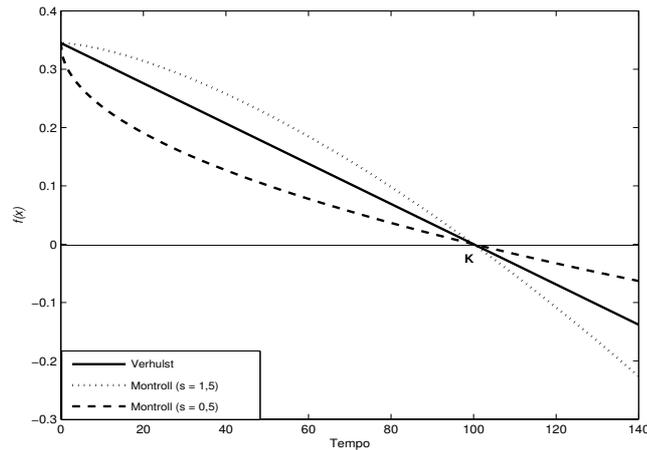


Figura 5.8: Comparação do Modelo de Verhulst com o Modelo de Montroll para $s = 1,5$ e $s = 0,5$; com $a = 0,345$ e $K = 100$.

- Se $0 < s < 1$, o crescimento específico de Montroll é menor que o de Verhulst até a capacidade suporte. Depois desse valor, o modelo de Montroll cresce mais. Mais ainda, o ponto de inflexão do modelo de Montroll assume valor menor que o ponto de inflexão do modelo de Verhulst.
- Se $s > 1$, tem-se inversão nos crescimentos em relação ao parâmetro $0 < s < 1$.

Essas particularidades sugerem modificações que devem ser feitas na base de regras para que fiquem coerentes com o modelo de Montroll.

Base de regras para o modelo de Montroll com $0 < s < 1$

R1: Se a população é “muito baixa” então a variação é “pouco alta positiva”

R2: Se a população é “baixa” então a variação é “pouco alta positiva”

R3: Se a população é “média” então a variação é “média baixa positiva”

R4: Se a população é “média alta” então a variação é “média baixa positiva”

R5: Se a população é “alta” então a variação é “muito baixa positiva”

R6: Se a população é “altíssima” então a variação é “muito baixa negativa”.

Observe que os antecedentes das regras acima são idênticos aos das regras usadas no modelo de Verhulst na terceira simulação. A mudança será feita nos conseqüentes, utilizando para isso os **modificadores potência**, que funcionam como segue (mais detalhes consultar Barros e Bassanezi (2)).

A potência à qual elevaremos os valores das funções de pertinência é exatamente o parâmetro s ou seu inverso $\frac{1}{s}$. Vamos aplicar os modificadores nos conseqüentes das regras de Verhulst para obter os conseqüentes das regras de Montroll da seguinte maneira:

$$pBi = (Bi)^s \Leftrightarrow \varphi_{pBi} = (\varphi_{Bi}(x))^s, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$mBi = (Bi)^{\frac{1}{s}} \Leftrightarrow \varphi_{mBi} = (\varphi_{Bi}(x))^{\frac{1}{s}}, \quad i = 5, 6.$$

A figura 5.9 ilustra os novos conseqüentes para as regras de Montroll, supondo $s = 0,4$.

Com a nova base de regras obtemos a seguinte trajetória o modelo p-fuzzy de Montroll ilustrada na figura

Comparando as duas soluções obtidas até aqui - a de Montroll e a de Verhulst, percebemos que a base de regras modela a característica de que o ponto de inflexão muda (o de Montroll é menor que o de Verhulst, para $0 < s < 1$). A figura 5.11

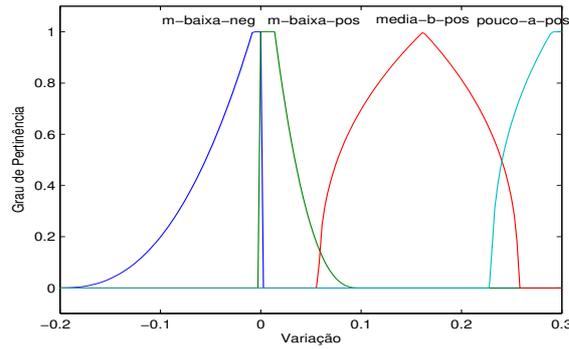


Figura 5.9: Representação dos consequentes das regras de Montroll com $s = 0,4$.

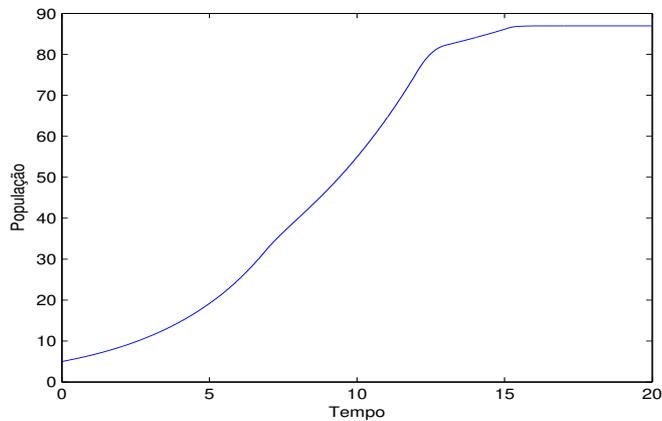


Figura 5.10: Solução do modelo p-fuzzy de Montroll com $x(0) = 5$ e $s = 0,4$.

ilustra os dois modelos.

Não faremos aqui o caso $s > 1$. O raciocínio para montar as regras para esse caso é análogo, valendo observar apenas que invertemos as potências dos multiplicadores (utilizamos potência s para os antecedentes das regras $R5$ e $R6$ e potência $\frac{1}{s}$ para os antecedentes das regras $R1$, $R2$, $R3$ e $R4$).

5.6 Estimativa de parâmetros

Os sistemas p-fuzzy contínuos desempenham papel importante quando desejar-se modelar algum sistema dinâmico contínuo com campo de direções parcialmente

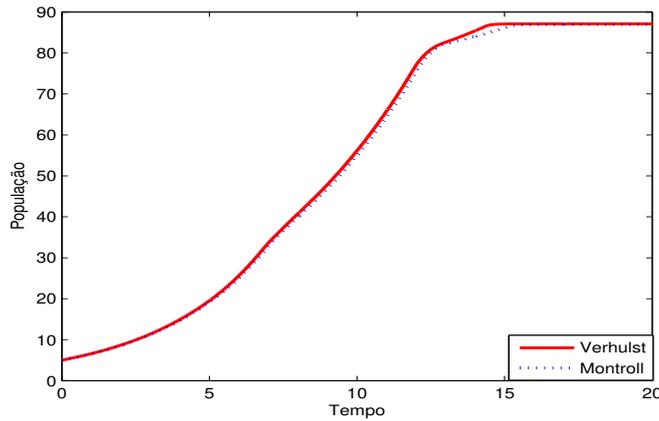


Figura 5.11: Solução do modelo p-fuzzy de Montroll e de Verhulst.

conhecido, como discutido na seção 4.2 do capítulo 4. Lá comentamos e provamos que tais sistemas são bons aproximadores de sistemas teóricos. Porém, não estamos mais interessados nessa propriedade e por isso mesmo, omitiremos o índice “ r ” do campo f_r que o diferencia do campo teórico f . Aqui o modelo matemático para o fenômeno em questão é dado pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde o campo f de direções é dado pelo sistema p-fuzzy contínuo.

Temos interesse agora em estimar os parâmetros dos modelos unidimensionais de crescimento populacional com inibição (Verhulst e Montroll). Vamos aqui trabalhar com a base de regras vistas na seção 5.5 e tentaremos estimar parâmetros para obtermos uma expressão analítica para as soluções de tais modelos, baseando-nos na teoria vista até aqui.

Os modelos unidimensionais de crescimento populacional em geral são escritos da forma

$$\frac{dx}{dt} = xf(x), \quad (5.8)$$

onde f é uma função que varia de acordo com a população que estamos modelando. Reescrevendo a equação (5.8) de forma a ficar de acordo com o que modelaremos

pelo controlador obtemos

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = f(x). \quad (5.9)$$

Quando supomos um crescimento populacional com inibição, $f(x)$ pode assumir várias funções, mas em geral, todas elas são decrescentes e possuem taxa de variação igual a zero quando a população atinge a capacidade suporte. Algumas dessas funções podem ser visualizadas no gráfico da figura 5.12, onde assumimos os parâmetros $a = 0,345$, $b = 0,0749$, $s = 0,5$ e $K = 100$.

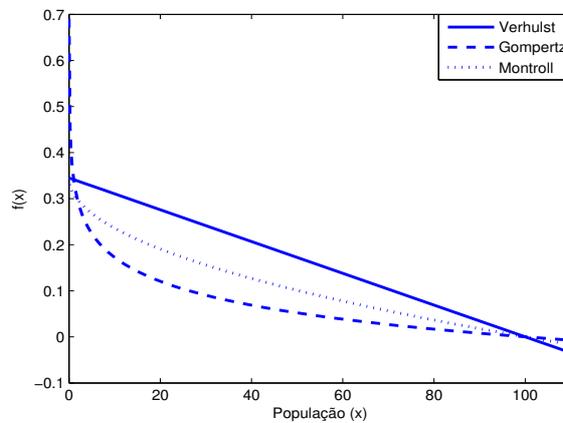


Figura 5.12: Taxa de variação relativa de alguns modelos de crescimento populacional - $a = 0,345$, $s = 0,5$, $b = 0,0749$ e $K = 100$.

Vamos supor, a princípio, que gostaríamos de trabalhar com o modelo de Verhulst. Como foi visto no capítulo 5, sua equação reescrita na forma (5.9) é dada por

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(K - x), \quad (5.10)$$

onde a é a razão de crescimento intrínseca e K é a capacidade suporte. Note que $f(x)$ neste caso é uma função linear decrescente. Esta formulação facilita na elaboração das regras do sistema p-fuzzy contínuo. A “construção” das regras a partir da variação percentual por unidade de tempo é mais intuitiva do que a formulação a partir das variações absolutas. Trabalhando com a base de regras da seção 5.5 (terceira simulação) temos:

R1: Se a população é “ *muito baixa* ” então a variação é “ *alta positiva* ”

R2: Se a população é “ *baixa* ” então a variação é “ *alta positiva* ”

R3: Se a população é “ *média* ” então a variação é “ *média positiva* ”

R4: Se a população é “ *média alta* ” então a variação é “ *média positiva* ”

R5: Se a população é “ *alta* ” então a variação é “ *baixa positiva* ”

R6: Se a população é “ *altíssima* ” então a variação é “ *baixa negativa* ”

Assim, utilizando a base de regras acima e o método de Euler Aperfeiçoado como método numérico para aproximar soluções, obtemos as estimativas para o p-fuzzy contínuo (figura 5.13).

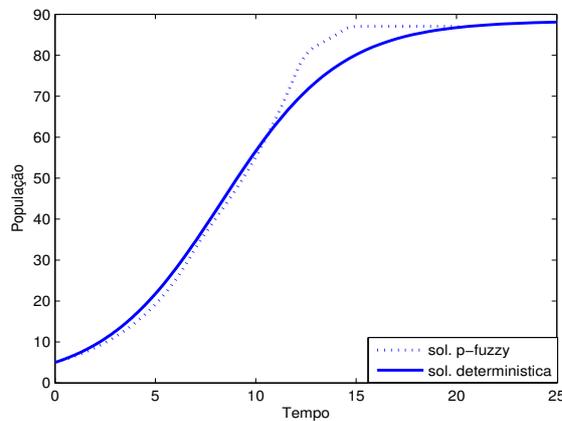


Figura 5.13: Trajetória do modelo de Verhulst com $x(0) = 5$, $a = 0,3390$ e $K = 88,41$.

Os parâmetros utilizados para traçar o modelo clássico de Verhulst ($a = 0,3390$ e $K = 88,41$) foram estimados baseados no que já foi estudado até aqui. De acordo com a seção (4.2) do capítulo 4, o valor de equilíbrio do modelo p-fuzzy contínuo se encontra no suporte da região viável de equilíbrio (região onde se encontra oposição semântica), ou seja, no intervalo

$$I^* = \text{supp}(A_5) \cap \text{supp}(A_6) = [86, 5; 90],$$

já que há oposição semântica entre as regras *R5* e *R6*. Esse valor será a capacidade suporte (K) do modelo teórico de Verhulst (ver Bassanezi (8)). Para facilitar, denotaremos por A_i o conseqüente da regra i .

Temos então

$$\varphi_{A_5}(x) = \varphi_{A_6}(x) \Leftrightarrow \frac{90 - x}{7} = \frac{2x - 86,5}{17} \Leftrightarrow K = 88,41.$$

O valor a foi encontrado fazendo-se um ajuste por quadrados mínimos.

Assim conseguimos estimar os parâmetros para ajustar a curva dada pela base de regras acima. Tal solução será então dada por

$$x(t) = \frac{88,41}{\left(\frac{88,41}{x_0} - 1\right)e^{-0,3251t} + 1}. \quad (5.11)$$

A seguir, tentaremos estimar parâmetros para o modelo p-fuzzy de Montroll visto na seção anterior.

Antes porém, lembremos que para construir as regras para este modelo nos baseamos no modelo p-fuzzy de Verhulst, fazendo modificações apenas nos consequentes das regras. Como os antecedentes permaneceram sem alterações e a oposição semântica deste modelo também ocorre entre as regras $R5$ e $R6$ (como no modelo p-fuzzy de Verhulst), devemos concluir que o valor de equilíbrio do sistema é o mesmo para ambos os casos. Temos portanto, $K = 88,41$.

Para o parâmetro s , utilizaremos o valor usado como multiplicador potência na seção 5.6, ou seja, $s = 0,4$. E falta portanto ajustar apenas o parâmetro a .

Fazendo um ajuste por quadrados mínimos chegamos ao valor $a = 0,5822$

Temos portanto, a expressão analítica da solução do modelo p-fuzzy de Montroll

$$x(t) = \frac{88,41x_0}{(x_0^{0,4} + (88,41^{0,4} - x_0^{0,4})e^{-0,2329t})^{2,5}} \quad (5.12)$$

e sua curva ilustrada na figura 5.14, comparada com a curva originalmente obtida pelo controlador fuzzy.

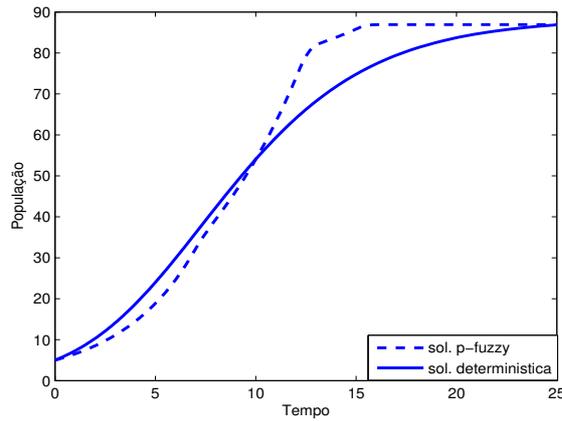


Figura 5.14: Trajetória do modelo de Montroll com $x(0) = 5$, $a = 0,5733$, $s = 0,4$ e $K = 88,41$.

5.7 Conclusões

À medida que aumentamos o número de regras em nossa base de regras, obtemos melhor aproximação para a solução do modelo. Com o termo “melhor”, queremos dizer que a curva obtida através do controlador fuzzy é mais “parecida” com a curva já conhecida do modelo de Verhulst clássico, ou seja, se tomarmos diversos valores para x e calcularmos sua imagem pelo controlador e sua imagem pela função conhecida explicitamente, os valores se aproximam cada vez mais. É claro que para comparar duas curvas, devemos conhecê-las em todos os pontos e aqui, estamos supondo que a função que representa o modelo de Verhulst (ou de Montroll) é apenas parcialmente conhecida. Assim, nosso objetivo em fazer tais simulações é mostrar que é possível modelar uma população sabendo apenas algumas de suas características. Basta que consigamos transformar o conhecimento que temos sobre ela no maior número de regras possível e, com a ajuda de um método numérico, estimar então a solução desejada.

Conclui-se também que o valor de equilíbrio de um sistema modelado por equações diferenciais ordinárias, quando existe, pode ser identificado através da base de regras construída por um especialista. Esse reconhecimento é feito através da análise das

regras e da percepção de ocorrência ou não de oposição semântica entre elas. Caso exista um valor de equilíbrio, podemos melhorar nossa aproximação a ele aumentando o número de regras de nossa base de regras. Quando utiliza-se um controlador fuzzy que produz uma saída f_r contínua, esse argumento é justificado pelo teorema de Bolzano (teorema 4.6) e pelo teorema 3.12.

Ao acrescentarmos hipóteses em um modelo, tais mudanças implicam em modificações na base de regras. Para formular regras para o modelo de Montroll, por exemplo, foi necessário modificar a base de regras do modelo p-fuzzy de Verhulst. Para isso lançamos mão de uma ferramenta da teoria de conjuntos fuzzy, os modificadores potência. Lembramos que, para um outro modelo, pode-se utilizar alguma outra ferramenta; a decisão é tomada conhecendo o comportamento do fenômeno.

Por fim, concluímos que é possível estimar parâmetros para encontrar soluções determinísticas de um modelo unidimensional.

No capítulo seguinte faremos uma análise dos modelos p-fuzzy bidimensionais.

Capítulo 6

Modelos Bidimensionais

Neste capítulo faremos um estudo sobre o modelo bidimensional do tipo presa-predador de Lotka-Volterra. Analisaremos sua formulação clássica e em seguida vamos propor uma maneira para montar uma base de regras, de forma que esta “capte” as informações qualitativas do fenômeno. Uma análise da base de regras será necessária para que possamos estimar parâmetros para tal modelo.

Estudos mais detalhados sobre modelos bidimensionais pode ser encontrado no trabalho de Ceconello (10) e de Silva (27).

6.1 Modelo clássico de Lotka-Volterra

O modelo conhecido como **Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra** foi estabelecido e analisado independentemente por Lotka e Volterra, por volta de 1925. Este modelo focaliza a interação entre duas espécies, onde uma delas dispõe de alimentos em abundância (presa) e a segunda espécie alimenta-se da primeira (predador).

O modelo criado por Volterra foi bem aceito por explicar as alterações observadas nas populações de pescadas e tubarões no Mar Adriático durante a 1ª Guerra Mundial.

Umberto D’Ancona, biólogo italiano, fez um estudo estatístico sobre as po-

pulações de peixes no Mar Adriático, em 1926 e descobriu, estudando o volume de diferentes espécies de peixes capturados no Mar Mediterrâneo durante a 1ª Guerra Mundial, que a porcentagem de peixes predadores (que se alimentam de outros peixes) tinha crescido significativamente, enquanto que a população de peixes presa havia diminuído. Após a guerra essa situação se alterou, sugerindo que essas espécies causaram flutuações quase periódicas em cada população. Mais ainda, D'Ancona observou que uma ascensão na população de presas está seguida (com retardo) por uma ascensão na população de predadores. Quando a população de predadores é suficientemente elevada, então a população de presas começa a cair. Depois que a população de presas cai, a população de predadores também cai, o que permite que a população de presas se recupere, terminando o ciclo dessa interação.

Portanto, D'Ancona concluiu que, para essas espécies, há existência de periodicidades inesperadas e, mais ainda, tais periodicidades estavam deslocadas no tempo com relação às outras.

Alguns matemáticos desenvolveram modelos do tipo presa-predador mas foi o modelo presa-predador de Lotka-Volterra que se tornou um paradigma da Biomatemática. De acordo com Bassanezi (7) tal modelo foi baseado em algumas hipóteses e pressupõe que:

1. Tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo habitat, ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar cada presa;
2. O encontro de elementos das duas espécies acontece ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações, já que quanto maior o número de presas, mais fácil será de encontrá-las e quanto mais predadores, mais alimento será necessário;
3. A população de presas $x(t)$ cresce ilimitadamente na ausência de predadores (crescimento exponencial, como Malthus propõe);

4. A taxa de mortalidade dos predadores, na ausência de presas, é proporcional a sua população $y(t)$ em cada instante (há morte por falta de alimento).
5. A população de predadores é favorecida pelo aumento de presas;
6. A população de presas é desfavorecida pelo aumento de predadores.

Tais hipóteses são apresentadas, matematicamente, pela equações abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, as populações presa e predador em cada instante t , a é a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores, b é a taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas e $\frac{\alpha}{\beta}$ é a eficiência de predação, isto é, a eficiência de conversão de uma unidade de massa de presas em uma unidade de massa de predadores, já que α representa a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e β a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores.

Este modelo apresenta um caráter cíclico, que aparentemente explica as oscilações observadas por D'Ancona em seus experimentos. Os pontos críticos do sistema (6.1) são $(0, 0)$ (ponto de sela estável) e $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ (centro estável). Mais detalhes podem ser encontrados em Bassanezi (7).

A figura 6.1 apresenta o plano de fase deste modelo supondo $a = 0.0877$, $\alpha = 0.001479$, $b = 0.198293$ e $\beta = 0.003894$. O objetivo da figura é ilustrar o ciclo limite que ocorre neste modelo.

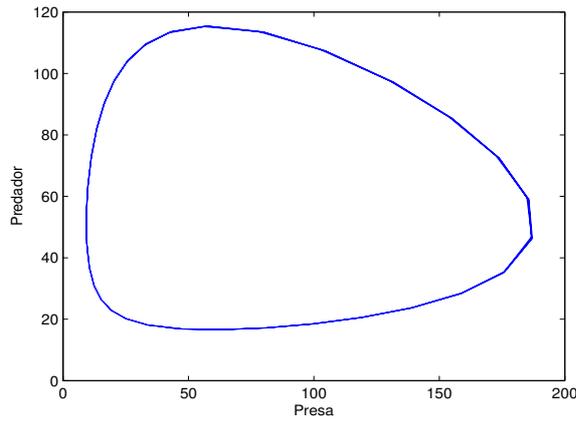


Figura 6.1: Plano de fase para o caso bidimensional clássico.

6.2 Modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra

Na seção anterior foi apresentado o modelo clássico de Lotka Volterra. Para formular tais equações, Volterra baseou-se nas observações feitas por D’Ancona em seus experimentos. O que faremos nesta seção é utilizar as informações dadas por D’Ancona para, ao invés de formular uma equação, construir uma base de regras para o nosso modelo p-fuzzy bidimensional. Tal procedimento é possível porque para montar uma base de regras, tudo o que precisamos é de informações qualitativas sobre o fenômeno e isto nós temos deido às observações de D’Ancona.

Abaixo relacionamos as observações feitas por D’Ancona em forma de “regras” relacionadas com as equações 6.1

1. A quantidade da população de presas e a quantidade da população de predadores têm caráter oscilatório;
2. O crescimento na população de presas é seguido (com retardo) por um aumento na população de predadores;
3. Se a quantidade de predadores for baixa, então a quantidade de presas aumenta, ou seja, $\frac{dx}{dt} > 0$ enquanto $y < \frac{a}{\alpha}$;

4. Se a quantidade de predadores for alta, então a quantidade de presas diminui, ou seja, $\frac{dx}{dt} < 0$ enquanto $y > \frac{a}{\alpha}$;
5. Se a quantidade de presas for alta, então a quantidade de predadores aumenta, ou seja, $\frac{dy}{dt} > 0$ enquanto $x > \frac{b}{\beta}$;
6. Se a quantidade de presas for baixa, então a quantidade de predadores diminui, ou seja, $\frac{dy}{dt} < 0$ enquanto $x < \frac{b}{\beta}$;

Considerando as observações acima, temos o objetivo de elaborar uma base de regras fuzzy que “substitua” as equações (6.1) quando quisermos modelar a dinâmica entre presas e predadores e analisar a evolução de cada um destes ao longo do tempo.

Como no caso unidimensional, precisamos definir as variáveis linguísticas de entrada e saída. Definiremos a quantidade de presas (X) e quantidade de predadores (Y) como variáveis de entrada, e a variação da quantidade de presas por unidade de tempo ($\frac{dX}{dt}$) e variação da quantidade de predadores por unidade de tempo $\frac{dY}{dt}$ como variáveis de saída.

A figura 6.2 representa um esquema do sistema p-fuzzy para o caso bidimensional.

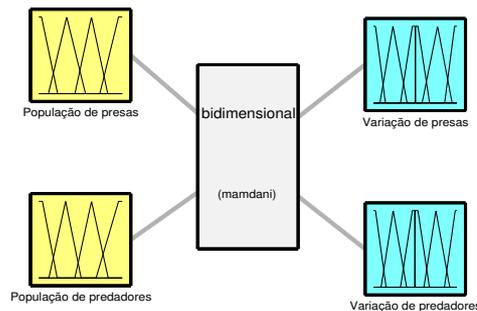


Figura 6.2: Esquema do sistema p-fuzzy para o caso bidimensional.

Os valores assumidos pelas variáveis de entrada X e Y são: *baixa* (A_1), *média baixa* (A_2), *média alta* (A_3) e *alta* (A_4).

Para as variações $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$, admitiremos os valores *alta positiva* (P_3), *média positiva* (P_2), *baixa positiva* (P_1), *baixa negativa* (N_1), *média negativa* (N_2) e *alta negativa* (N_3).

6.2.1 Formulação da base de regras

Vale a pena comentar como foi feita a construção da base de regras, visto que para o caso bidimensional, a saída do controlador nos fornecia a *taxa de variação específica* enquanto que, para o caso unidimensional, vamos supor que o controlador nos forneça a *taxa de variação absoluta*.

A idéia intuitiva para a construção da base de regras é a seguinte:

Fixado X e Y , precisamos “descobrir” o que ocorre com suas respectivas variações. Por exemplo, suponha que estamos formulando uma regra onde X é baixa e Y é baixa. Da equação

$$\frac{dX}{dt} = a - \alpha Y \quad (6.2)$$

observa-se que enquanto Y for baixa, o lado direito de 6.2 “será baixo”. Assim, se X for baixa, devemos ter $\frac{dX}{dt}$ também baixa, para que os dois lados fiquem compatíveis. Se supusermos que $\frac{dX}{dt}$ é alta, por exemplo, não teríamos uma regra compatível pois “algo grande dividido por algo pequeno resulta em algo grande”. Devemos pensar ainda que, quando Y aumenta, a variação de X passa a ser negativa, uma vez que X só assume valores positivos.

Analogamente intuimos o resultado de $\frac{dY}{dt}$ para essa mesma regra. De acordo com a equação

$$\frac{dY}{dt} = -b + \beta X \quad (6.3)$$

temos que se X é baixa então o parâmetro b predomina com o sinal negativo e por

este motivo devemos ter uma saída negativa. Como estamos supondo Y baixa então $\frac{dY}{dt}$ deve ser também um valor baixo negativo.

Note que utilizando este raciocínio na construção das regras obtemos regras que estão de acordo com o significado de crescimento específico, o que acarreta na não diminuição do módulo de cada taxa de crescimento quando mantém-se fixo o valor da outra espécie. Por exemplo, para uma quantidade fixa de predadores, a variação de presas em módulo é não decrescente (ver figura 6.5). Claro que outra base de regras poderia ser adotada, já que as magnitudes envolvidas, tanto para as variáveis como para os crescimentos específicos são incertas.

Baseando-nos no que foi visto acima, propomos então a seguinte base de regras fuzzy:

1. Se X é “*baixa*” e Y é “*baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*baixa positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa negativa*”.
2. Se X é “*baixa*” e Y é “*média baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*baixa positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média negativa*”.
3. Se X “*baixa*” e Y é “*média alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*baixa negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média negativa*”
4. Se X “*baixa*” e Y é “*alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*baixa negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*alta negativa*”
5. Se X é “*média baixa*” e Y é “*baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa negativa*”.
6. Se X é “*média baixa*” e Y é “*média baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa negativa*”.
7. Se X é “*média baixa*” e Y é “*média alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa negativa*”.

8. Se X é “*média baixa*” e Y é “*alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média negativa*”.
9. Se X é “*média alta*” e Y é “*baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa positiva*”.
10. Se X é “*média alta*” e Y é “*média baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa positiva*”.
11. Se X é “*média alta*” e Y é “*média alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*baixa positiva*”.
12. Se X é “*média alta*” e Y é “*alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média positiva*”.
13. Se X é “*alta*” e Y é “*baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*alta positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média positiva*”.
14. Se X é “*alta*” e Y é “*média baixa*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média positiva*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média positiva*”.
15. Se X é “*alta*” e Y é “*média alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*média negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média positiva*”.
16. Se X é “*alta*” e Y é “*alta*”, então $\frac{dX}{dt}$ é “*alta negativa*” e $\frac{dY}{dt}$ é “*média positiva*”.

As funções de pertinência das variáveis de entrada (X e Y) e das variáveis de saída ($\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$) estão representadas nas figuras 6.3 e 6.4, respectivamente.

A figura 6.5 foi construída a partir da base de regras apresentada e representa para nós o “campo de direções” formado pelo modelo p-fuzzy Lotka-Volterra, uma vez que nela estão representadas as saídas do controlador fuzzy, que são as variações das populações. Outra figura interessante a ser considerada é a figura 6.6 que representa o “plano de fase do sistema p-fuzzy Lotka-Volterra”, pois através dela podemos visualizar as soluções do sistema e podemos concluir que, analogamente ao

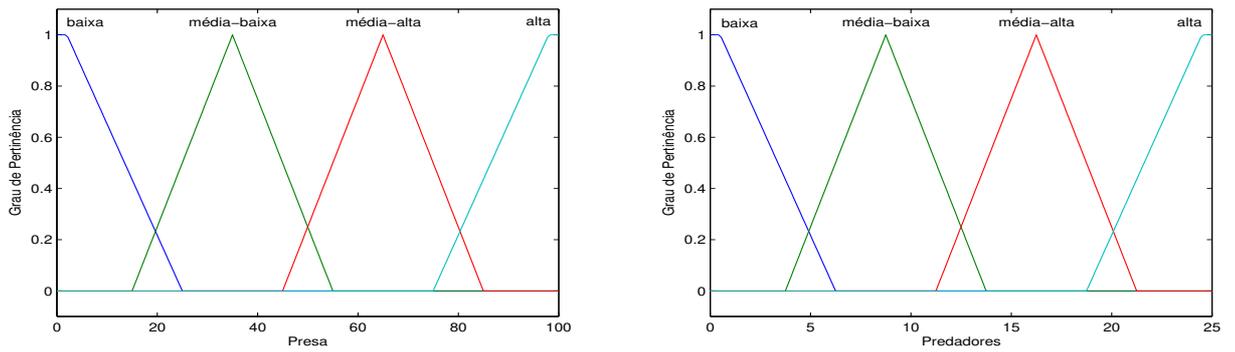


Figura 6.3: Função de pertinência das presas e dos predadores.

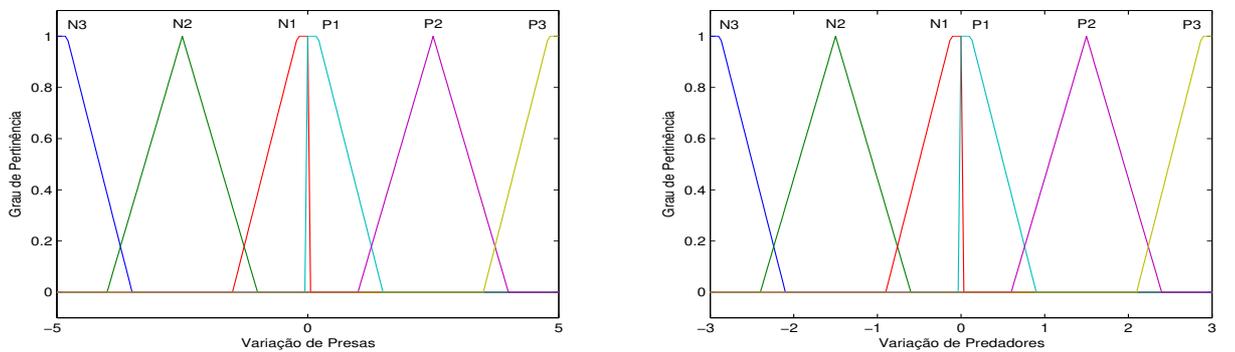


Figura 6.4: Função de pertinência da variação das presas e dos predadores.

modelo clássico, nosso modelo p-fuzzy produz uma solução que oscila (forma um ciclo estável). Note que, assim como num modelo clássico, as duas figuras estão relacionadas. Se mudarmos nossa base de regras, mudaremos os campos de direções da figura 6.5, o que acarreta na mudança da figura 6.6.

Nossa intenção agora é tentar comparar a figura 6.5 com uma representação do campo de direções de um modelo clássico, pois esse tipo de representação é bastante útil no estudo da dinâmica do sistema. Por exemplo, através da figura 6.5 é possível localizar a região viável de equilíbrio do sistema, ou seja, a região do plano em que os possíveis equilíbrios (não nulos) do sistema se encontram. Como já foi visto no capítulo 4, tais pontos se localizam onde ocorre oposição semântica nas regras e, em

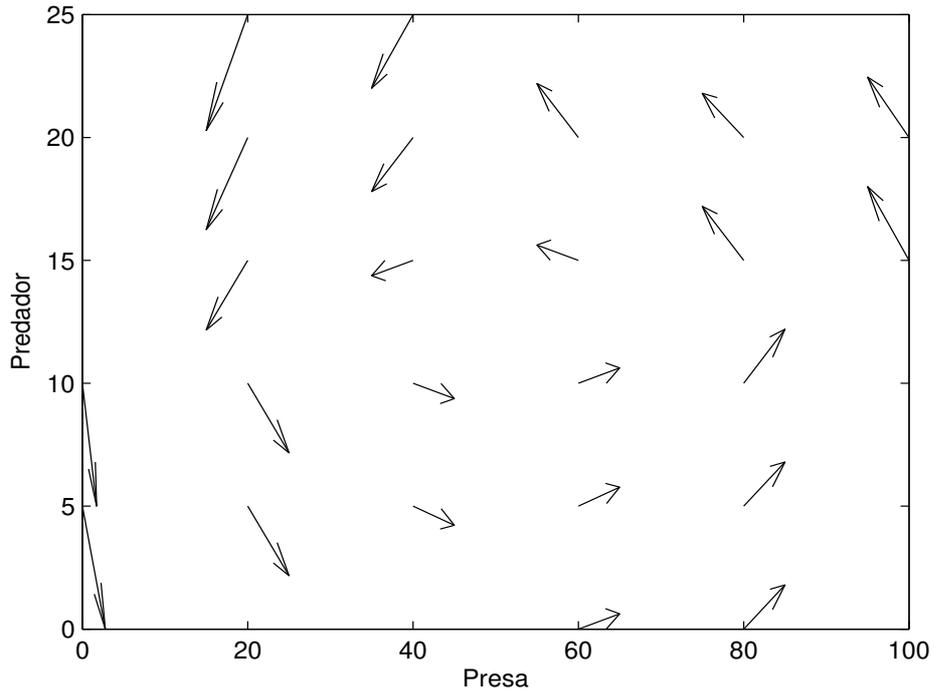


Figura 6.5: Campo de direções do modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra.

nosso caso, essa região é

$$R = [\text{supp}(MB) \cap \text{supp}(MA)] \times [\text{supp}(MB) \cap \text{supp}(MA)]$$

Mais especificadamente, de acordo com Silva (27), como as funções de pertinência são simétricas, o valor de equilíbrio é exatamente o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde \bar{x} é tal que $\varphi_{MB}(x) = \varphi_{MA}(x)$ e \bar{y} é tal que $\varphi_{MB}y = \varphi_{MA}(y)$. Fazendo os cálculos, temos $\bar{x} = 50$ e $\bar{y} = 12,25$.

Quanto aos parâmetros a , b , α e β , basta lembrarmos que, para o caso clássico, o ponto de equilíbrio é dado por $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$. Portanto, temos as relações $\frac{b}{\beta} = 50$ e $\frac{a}{\alpha} = 12,25$, o que nos fornece grande informação.

Como feito para o caso unidimensional, adotaremos aqui o método de Euler Aperfeiçoado (ver seção 3.2 do capítulo 3) para estimar os valores $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$.

Temos então os resultados obtidos através da base de regras adotada. A figura

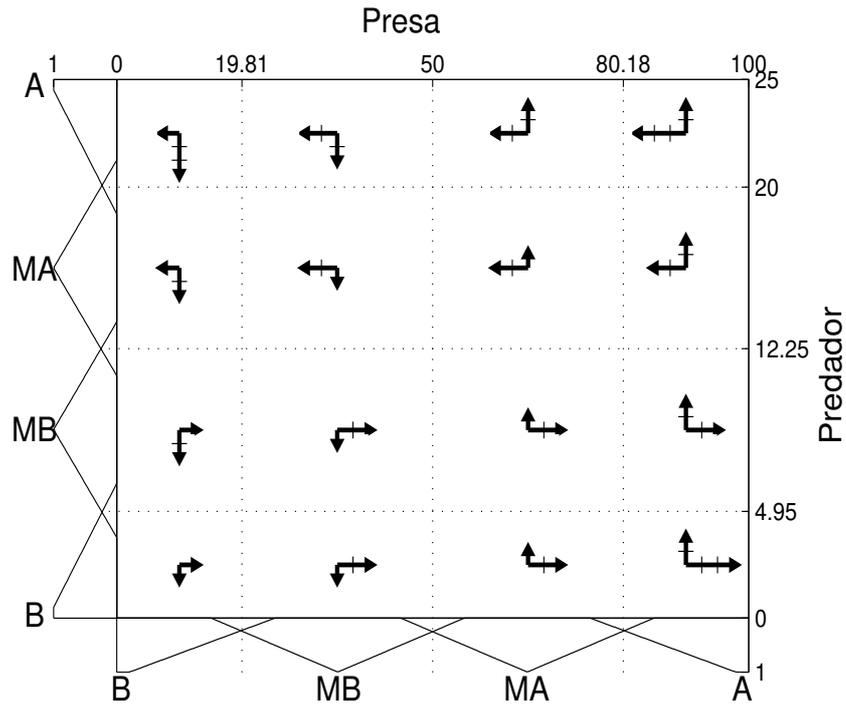


Figura 6.6: Campo de direções das regras do modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra.

6.7 mostra o comportamento do predador em relação a presa. Já a figura 6.8 ilustra como a população de presas e de predadores se comporta ao longo do tempo. Perceba que há formação de um ciclo neste sistema p-fuzzy e que as duas populações permanecem em constante oscilação.

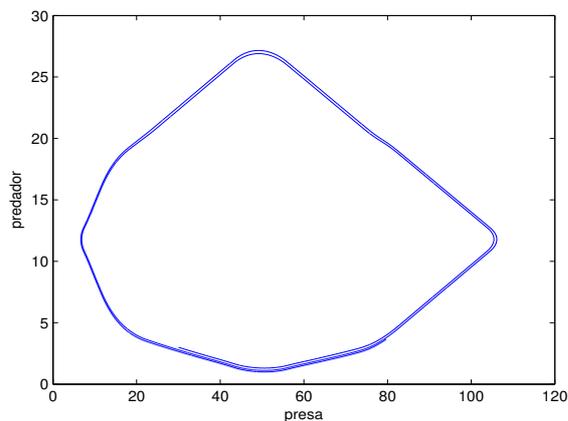


Figura 6.7: Plano de fase do modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra.

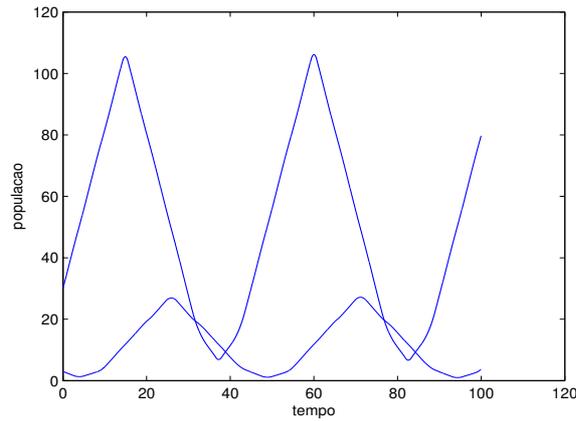


Figura 6.8: População de presas e predadores ao longo do tempo.

6.3 Conclusão

Neste capítulo nós propomos uma metodologia para estimar parâmetros de modelos clássicos unidimensionais, usando o sistema p-fuzzy. Tais parâmetros, muitas vezes, são de grande importância pois tem significado físico (biológico) como por exemplo, taxa de crescimento específico. Com os dados fornecidos pelo sistema p-fuzzy estimamos parâmetros, como feito para o modelo de Verhulst e o de Montroll.

Além disso, conseguimos montar uma base de regras para um sistema bidimensional do tipo presa-predador contendo as mesmas características do modelo clássico de Lotka Volterra, como a formação de ciclo e oscilação no tamanho das populações ao longo do tempo.

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 Conclusões

Conclui-se neste trabalho que o controlador fuzzy é uma ferramenta da teoria dos conjuntos fuzzy que pode ser utilizada para modelar fenômenos cujo campo de direções é apenas parcialmente conhecido. Nos capítulos 3 e 4 provamos resultados que garantem a convergência da função obtida pelo controlador pela função teórica que não conhecemos, mas desejamos estimar.

Vimos que quanto maior o número de regras de nossa base de regras, melhor será nossa aproximação. Isso é uma conclusão bastante intuitiva, pois quanto maior o número de regras, maior a quantidade de informações que temos e, se temos bastante informação, somos capazes de melhor modelar um fenômeno. Ilustramos esta idéia aplicando a metodologia ao modelo clássico de Verhulst, que modela o crescimento inibido de uma população.

Toda informação que temos deve ser “armazenada” de forma adequada na base de regras do controlador fuzzy. Assim, no capítulo 5 tentamos alterar a base de regras do modelo p-fuzzy de forma que ela “captasse” as características do modelo clássico de Montroll que, apesar de semelhante, possui algumas características específicas. Com o resultado obtido, fomos capazes de estimar parâmetros para que pudéssemos obter uma solução analítica do modelo.

Salientamos, para finalizar, que a validação de um modelo matemático consiste na verificação de quanto os dados reais estão próximos daqueles estimados pelo modelo. Desta forma, a aceitação de um modelo depende, essencialmente, do usuário - é ele que vai estabelecer o “grau desejado de proximidade”. Entretanto, o modelador, na busca de um melhor “grau de aproximação”, não pode perder de vista o significado intrínseco das variáveis e parâmetros utilizados no modelo e que devem sempre traduzir ou explicar o fenômeno analisado. Em outras palavras, muitas vezes um ajuste ótimo de dados experimentais pode causar erros de projeções futuras. Uma curva ajustada aos dados reais não é necessariamente um modelo da situação estudada, ela simplesmente fornece informações que podem ser usadas na elaboração de um modelo.

7.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros podemos citar os seguintes:

Estimativa de parâmetros para Modelos Bidimensionais

Seguindo a metodologia aqui proposta, acreditamos ser interessante encontrar uma maneira de estimar parâmetros de modelos p-fuzzy bidimensionais. Pode-se começar um estudo baseando-se na simulação vista no 6. A formulação da base de regras para este modelo também pode ser seguida para utilização do controlador.

Elaboração de um método para estimar erro ao aproximar f_r por f

Como visto nos capítulos 3 e 4, a saída f_r do controlador fuzzy pode aproximar de uma função teórica f , dependendo da metodologia utilizada. O problema aqui é que não temos como “medir” tal aproximação para garantir que ela seja tão boa

quanto desejamos. Assim, seria interessante elaborar uma maneira de calcular o erro que cometemos ao aproximar a função teórica pela função obtida pelo controlador fuzzy.

Bibliografia

- [1] Bando, F.M., “Sistemas Fuzzy e Aproximação Universal”, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 2002.
- [2] Barros, L.C., Bassanezi, R.C., “Tópicos em Lógica Fuzzy com aplicações em Biomatemática”- *No prelo*, 2006.
- [3] Barros, L. C., “Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos”, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1993.
- [4] Barros, L. C., “Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações”, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1997.
- [5] Barros, L.C., Leite, M.B.F., Bassanezi, R.C., “The SI Epidemiological Models with a Fuzzy Transmission Parameter”, *An International Journal Computers and Mathematics with Applications*, **45**, 1619-1628, 2003.
- [6] Bassanezi, R.C., Barros, L.C., Oliveira, R.Z.G, “Type SIS Epidemiological Model with Subjective parameters”, *Proceedings of the First Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, 2002, 149-165.
- [7] Bassanezi, R.C., “Equações Diferenciais com Aplicações”, Ed. Harba, São Paulo, 1988.
- [8] Bassanezi, R.C., “Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática”, Ed. Contexto, São Paulo, 2002.

- [9] Castanho, M.J.P., “Construção e avaliação de um modelo matemático para prever a evolução do câncer de próstata e descrever seu crescimento utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy”, Tese de Doutorado - FEEC-UNICAMP, 2005.
- [10] Cecconello, M.S., “Uma modelagem alternativa para ????: Sistemas Dinâmicos Fuzzy”, Dissertação de Mestrado - IMECC-UNICAMP, 2006.
- [11] Cunha, M.C.C. “Métodos Numéricos”, Editora Unicamp, 2003.
- [12] Edelstein-Keshet, L., “Mathematical Models in Biology”, McGraw-Hill, Inc, 1987.
- [13] Gomes, A.G, Varriale, M.C, “Modelagem de Ecossistemas: Uma Introdução”, Editora UFSM, 2001.
- [14] Hale, J., Koçak, H., “Dynamics and Bifurcations”, Springer-Verlag, 1991.
- [15] Jafelice, R.M., “Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta”, Tese de Doutorado, FEEC - Unicamp, Campinas, 2003.
- [16] Kosko, B., Dickerson, J. A., “Function Approximation with Additive Fuzzy Sets”, *Theoretical Aspects of Fuzzy Control*, 313-347, 1995.
- [17] Krivan, V., “Differential Inclusions as a methodology tool in population Biology”, *Proceeding of the 1995 European Simulation Multiconference*, 1998, June 5-7, Praga - 544-547.
- [18] Lima, E.L., “Análise Real”, IMPA, 2001.
- [19] Magnano, K.F., “Abordagem Fuzzy em Modelos Populacionais Discretos: Metapopulação de Moscas Varejeiras”, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 2005.

- [20] Negoita, C. V. & Ralescu, D. A., “Applications of Fuzzy sets to Systems Analysis”, Willey, N.Y., 1975.
- [21] Nguyen, H.T., Walker, E.A., “A First Course in Fuzzy Logic”, Chapman and Hall/CRC, 2000.
- [22] Nguyen, H.T., “A note on the extension principle for fuzzy sets”, Jour. of Math. Analysis and Applications **64**, 369-380, 1978.
- [23] Peixoto, M. S., “Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo”, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [24] Pereira, J. C. R., “Análise de dados qualitativos - Estratégias Metodológicas para as Ciências da Saúde, Humanas e Sociais”, Edusp, 2001.
- [25] Rudin, W., “Princípios de Análise Matemática”, Editora Universidade de Brasília, 1971.
- [26] Ruggiero, M.A.G, Lopes, V.L.R, “Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais”, 2^a ed., Makron Books, 1997.
- [27] Silva, J. D. M., “Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-fuzzy com Aplicações em Biomatemática”, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [28] Zadeh, L. A., “Fuzzy Sets”, Inform. and Control **8**, 338-353, 1965.