



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Simetria em Equações Elípticas

por

Gilmar Garbugio[†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Simetria em Equações Elípticas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Gilmar Garbugio** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de Março de 2003.

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

*Dedico este trabalho com muito carinho:
A minha mãe Iraci e ao meu pai Orlando.
Aos meus irmãos Reginaldo, Rosinei,
Rosana, Carla, Roseli e Andréia.
Ao meu cunhado Nilson.*

*A glória da amizade não é a mão
estendida, nem o sorriso carinhoso,
nem mesmo a delícia da companhia.
É a inspiração espiritual que vem
quando você descobre que alguém
acredita e confia em você.
(Ralph Waldo Emerson)*

*A sabedoria não nos é dada;
é preciso descobri-la por
nós mesmos depois de uma
viagem que ninguém nos pode
poupar ou fazer por nós.
(Marcel Proust)*

Agradecimentos

À Deus e a Nossa Senhora pela presença em todos os momentos de minha vida.

Ao professor **Dr. Marcelo da Silva Montenegro** pela orientação, dedicação e confiança.

Aos todos os professores que de alguma forma contribuíram para minha formação, em especial: Osvaldo Germano Rocio, Alfredo Tadeu Cousin, Carla Montorfano, Doherty Andrade, Irene Naomi Nakaoka, José Luiz Boldrini e Claudina Izepe Rodrigues.

Ao professor Dr. Marco Antonio Teixeira por estar sempre disposto a ajudar nos momentos em que precisei.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial: Tânia, Ednaldo e Cidinha.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Aos colegas de graduação e pós-graduação pela amizade, companheirismo e momentos de descontração, em especial: Sônia, Poling, Karine, Paula, Romário, Lucas, Humberto, Fernando Bando, Chela, Benaia, Henrique (Patrão), Lidermir, Alcindo, Rosemberg, Marcos Vergès, Fernando Santos, Vanessa, Anderson, Gastão, Franklin, Sandra, Weslei, Jair, Ederson, Emanuel, Cristiano, Marivone (Mari), Liu, Letícia, Angela e Márcio.

Agradeço também aqueles colegas que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho, em especial: **Edson, Bianca, Luciano, Marcão, Elder, Rogério, Paulo, Fábio e Mércio.**

Resumo

Neste trabalho estamos interessados em analisar as soluções de algumas equações elípticas não-lineares em um domínio limitado, convexo apenas numa direção. Os elementos principais utilizados nesta análise são: o método de mover planos, simetria e princípios de máximo. O método de mover planos é uma técnica que tem sido bastante utilizada para estabelecer propriedades qualitativas de soluções positivas de equações elípticas não-lineares como simetria e monotonicidade. Basicamente este método compara os valores da solução da equação em dois pontos diferentes, onde um ponto é a reflexão do outro com relação a um hiperplano, o plano é movido até uma posição crítica, e então mostrando que a solução é simétrica com relação a este plano crítico. O método de mover planos é devido à A.D.Alexandroff (no estudo de superfícies de curvatura média constante) e a J.Serrin, Gidas, Ni e Nirenberg que introduziram esta técnica no estudo de equações diferenciais parciais.

Abstract

In this work we are interested in analyzing the solutions of some nonlinear elliptic equations on a bounded domain which is convex in only one direction. The main elements used in this analysis are: the method of moving planes, symmetry and maximum principles. The moving planes is a technique that has been widely used to establish qualitative properties of positive solutions of nonlinear elliptic equations such as symmetry and monotonicity. Basically this method compares the values of the solution of the equation in two antipodal points with respect to a hyperplane, the plane is moved until a critical position, and then shows that the solution is symmetric with respect to this critical hyperplane . The moving planes method is due to A.D.Alexandroff (in the study of surfaces of constant mean curvature) and to J.Serrin, Gidas, Ni and Nirenberg that introduced this technique in the study of partial differential equations.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	viii
1 Planos Móveis	1
1.1 Simetria Radial	1
1.2 Simetria em Conjuntos Convexos	8
1.3 Estimativas a Priori	13
2 Simetria para Problemas Sobredeterminados	25
2.1 Problema com $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ constante na fronteira	25
2.2 Problema com $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c x $ na fronteira	38
Apêndice A	44
A Princípios de Máximo	44
A.1 Princípios de Máximo Fraco	45
A.2 Princípios de Máximo Forte	45
Apêndice B	51
B Espaços de Sobolev	51
B.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$	51
B.2 O Espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$	52
B.3 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	53

B.4	O Espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$	54
Apêndice C		55
C	Tópicos de Cálculo Avançado	55
Apêndice D		57
D	Regularidade	57
D.1	Bootstrap	58
Bibliografia		61

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em analisar as soluções de algumas equações elípticas não-lineares da forma $F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$ em um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ o qual é convexo na direção x_1 , por exemplo. Os elementos principais utilizados nesta análise são: o método de mover planos, simetria e princípios de máximo. O método de mover planos é uma técnica que tem sido utilizada para estabelecer algumas propriedades qualitativas de soluções positivas de equações elípticas não-lineares como simetria e monotonicidade. Basicamente este método compara os valores da solução da equação em dois pontos diferentes, onde um ponto é a reflexão do outro com relação a um hiperplano, digamos $x_1 = \lambda$, o plano é movido até uma posição crítica, e então mostra-se que a solução é simétrica com relação a esse plano limite. O método de mover planos é devido à A.D.Alexandroff (no estudo de superfícies de curvatura média constante) e então J.Serrin aplicou o método em 1971 em Equações Diferenciais Parciais (ver [20]). Em 1979 Gidas-Ni-Nirenberg (ver [10]) usaram o método de mover planos para provar monotonicidade e simetria soluções positivas anulando-se na fronteira $\partial\Omega$.

Este trabalho está dividido em dois capítulos. O primeiro capítulo está dividido em três seções e o segundo capítulo está dividido em duas seções.

No primeiro capítulo estudaremos o método de mover planos. Na primeira seção estamos interessados em soluções $u > 0$ de

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{em } B, \\ u &= 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

nele mostraremos que se B é uma bola e f é qualquer função real de classe C^1 , então a

solução u é necessariamente radial e monótona decrescente. Este resultado é devido a Gidas-Ni-Nirenberg (*ver*[10]) em 1979.

Na segunda seção estamos interessados em soluções $u > 0$ de

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

nele mostraremos que se Ω é um domínio limitado, convexo e simétrico com relação a um hiperplano, digamos $x_1 = 0$, então as soluções são simétricas e monótonas decrescentes na direção normal a este hiperplano. Este resultado é devido a Berestycki-Nirenberg (*ver*[3]) em 1991 e é o principal resultado do primeiro capítulo.

Na terceira seção usaremos os resultados das seções anteriores para obter uma estimativa a priori para as soluções u do seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u + u^p &= 0 & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostraremos então que as soluções do problema acima são uniformemente limitadas por uma constante, dependendo somente de p, Ω e da dimensão de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. A prova é feita por contradição e usaremos um argumento de redução ("blow up"). Este procedimento reduz o problema de estimativas a priori à resultados globais do tipo Liouville, *ver* Teorema (1.3.4), resultados estes que podem ser encontrados em Gidas-Spruck ([11]). Também usamos o método de mover planos, contido no Teorema (1.3.6).

No segundo capítulo estudaremos alguns resultados de simetria em dois problemas sobre-determinados. Na primeira seção estamos interessados em soluções $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} \Delta u &= -1 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= c & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e mostraremos que Ω é uma bola euclidiana e que a solução u tem a forma $u = \frac{A - r^2}{2N}$, onde A é uma constante e $r = |x|$. A prova deste resultado é devido á Weinberger (*ver*[24]) em uma observação sobre o paper de J.Serrin (*ver*[20]) em 1971.

Na segunda seção estamos interessados em soluções $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} \Delta u &= -1 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -cr & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e também mostraremos que Ω é uma bola euclidiana e que a solução u tem a seguinte forma $u = \frac{A - r^2}{2N}$, onde A é uma constante e $r = |x|$. Este resultado é devido á T.Amdeberhan (*ver*[1]) em 2001. Faremos uma análise física dos dois problemas acima.

Para finalizar, gostaríamos de citar os Apêndices, que englobam resultados muito importante para este trabalho, em especial o Apêndice A, que contém os Princípios de Máximo e o Apêndice D que contém resultados de teoria de regularidade.

Outros resultados de simetria podem ser alcançados através de técnicas de simetrização e rearranjo, *ver* Lions [17]. Em Lopes *ver*[18] há uma abordagem diferente para se mostrar que mínimos de funcionais são radialmente simétricos. A técnica do moving planes pode ser também utilizada em problemas de evolução *ver* Berestycki-Nirenberg [2].

Capítulo 1

Planos Móveis

O primeiro resultado deste capítulo dado no Teorema 1.1.1 é um resultado de simetria e monotonicidade para soluções u positivas de

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{em } B, \\ u &= 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

onde $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$. Em sua prova vamos utilizar o Lema de Hopf, princípios de máximo e o método de mover planos. O segundo resultado dado no Teorema 1.2.1 é o principal resultado deste capítulo. Nele vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio, convexo, limitado qualquer, e simétrico com relação a um hiperplano digamos $x_1 = 0$ e mostraremos que as soluções $u > 0$ de

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

são simétricas e monótonas decrescentes na direção deste hiperplano. Convém ressaltar que este resultado generaliza o Teorema 1.1.1. Em sua prova também vamos utilizar o Lema de Hopf, princípios de máximo, o método de mover planos e um princípio de máximo para domínios pequenos (ver Lema 1.2.2).

1.1 Simetria Radial

Teorema 1.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\bar{B})$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } B, \\ u > 0 & \text{em } B, \\ u = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases} \quad (1.1)$$

Então

i) u é radialmente simétrica, isto é, $u(x) = v(r)$, onde $r = |x|$.

ii) u é monótona decrescente, isto é, $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ para $0 < r < R$.

Observação 1.1.1

Antes de mostrarmos o Teorema 1.1.1 necessitamos de alguns Lemas.

Lema 1.1.2 Dado $x_0 \in \partial B \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0\}$ existe $\delta > 0$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ em

$$B \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \delta\}.$$

Demonstração.

Para uma idéia geométrica do Lema acima, veja a figura (1.1).

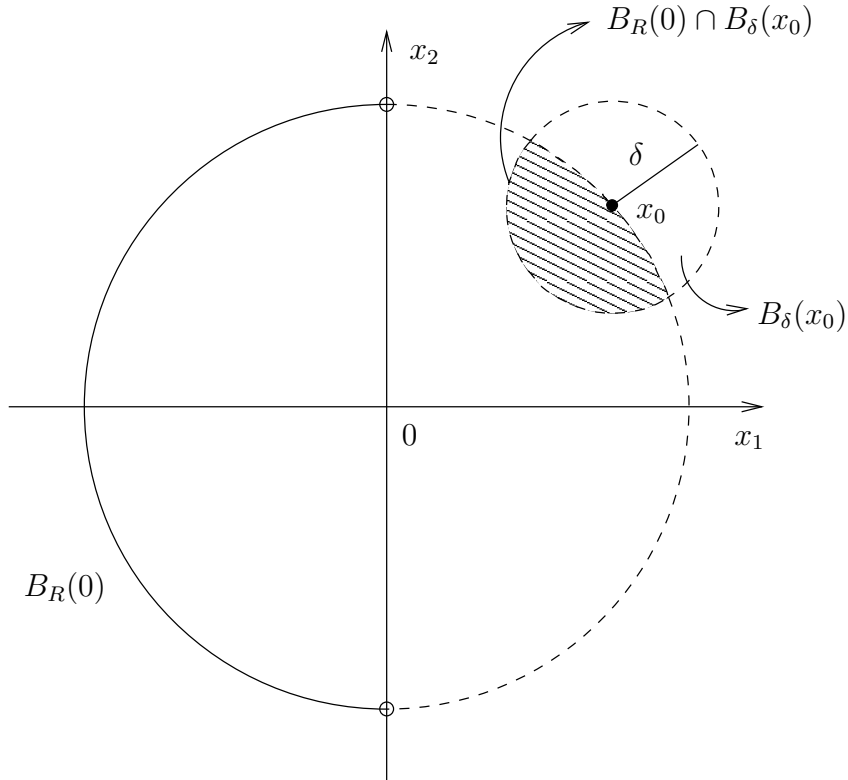


Figura 1.1:

Se o Lema fosse falso, existiria uma seqüência de pontos $x_j \in B$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_j) \geq 0$ e $x_j \rightarrow x_0$.

Mas, como $u > 0$ em B e $u = 0$ em ∂B , temos pela definição de derivada $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) \leq 0$. Pela continuidade de $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ em $\bar{B}$, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) \geq 0$, e portanto $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = 0$.

Observe que como $u = 0$ em ∂B temos $\frac{\partial u}{\partial \mu}(x_0) = 0$, onde μ é qualquer vetor tangente a B . (As derivadas tangenciais são nulas). Como a direção de x_1 não está no plano tangente a x_0 , temos que $\nabla u(x_0) = 0$. Queremos mostrar agora que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = 0.$$

Como $u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = 0$ e $u > 0$ em B , temos $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) \geq 0$. Suponhamos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) > 0$, então por continuidade $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) > 0$ numa vizinhança N de x_0 . Seja Γ o segmento ligando $x_j \in B$ a um ponto $y_j \in \partial B$, paralelo ao eixo x_1 e com sentido positivo. Para j suficientemente grande o segmento Γ está completamente em N , veja figura (1.2), logo:

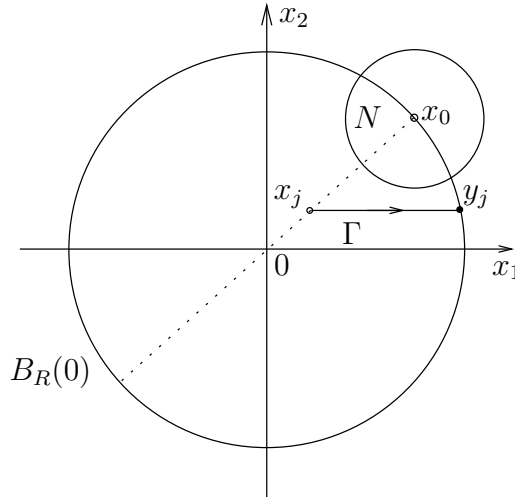


Figura 1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_j) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_j) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) dx_1 > 0. \quad (1.2)$$

Por outro lado, por hipótese $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_j) \geq 0$ e pela definição de derivada $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_j) \leq 0$, um absurdo se compararmos com (1.2).

Até o momento temos as seguintes conclusões

$$\nabla u(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = 0.$$

Voltemos à finalização da demonstração.

i) Se $f(0) \geq 0$, então

$\Delta u + f(u) - f(0) \leq 0$, então, $\Delta u + c(x)u \leq 0$, onde $c(x)$ é uma função advinda do Teorema do Valor Médio, tal que $f(u) - f(0) = c(x)u$.

Dessa forma, temos pelo Lema de Hopf (A.2.8), que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, onde ν é o vetor normal exterior no ponto x_0 , logo $\nabla u(x_0) \neq 0$, o que é um absurdo.

ii) Se $f(0) < 0$, então

$\Delta u(x_0) = -f(u(x_0)) = -f(0) > 0$. Por outro lado como $u = 0$ em ∂B e $\nabla u(x_0) = 0$, temos $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = \nu_1^2 \Delta u(x_0) > 0$ (esse fato será provado abaixo), logo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) \neq 0$, absurdo.

Mostraremos agora que de fato $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = \nu_1^2 \nabla u(x_0)$, de forma geral, mostraremos que nas condições acima, isto é, que se $\Delta u(x_0) = -f(u(x_0)) = -f(0) > 0$ e $\nabla u(x_0) = 0$, então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = -f(0)\nu_i \nu_j \quad \text{para cada } i, j = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

De fato, como a operador laplaciano é invariante sob uma rotação de eixo de coordenadas (ver Evans [8]), nós podemos supor que $x_0 = (1, \dots, 0)$ e $\nu = (1, \dots, 0)$. Como $u = 0$ em ∂B , nós temos $u(x', \gamma(x')) = 0$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |x'| \leq 1$, onde $\gamma(x') = \sqrt{1 - |x'|^2}$. Diferenciando com respeito a x_i e x_j para cada $i, j = 1, \dots, N-1$ e usando que $\nabla u(x_0) = 0$ concluímos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N-1. \quad (1.4)$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x_1} \leq 0$ em $\partial B \cap \{x_1 > 0\}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = 0$, a aplicação $x' \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_1}(x', \gamma(x'))$ tem um máximo em $x' = 0$. Conseqüentemente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N-1. \quad (1.5)$$

Finalmente por (1.4), (1.5) e $\Delta u = -f(u)$ temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = -f(0)$. Esta igualdade é (1.3) para $\nu = (1, \dots, 0)$. Retornando ao eixo de coordenadas original obtemos (1.3). Fazendo $i = j = 1$ em (1.3) e usando que $-f(0) > 0$ segue-se que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = -f(0)\nu_1\nu_1 > 0.$$

o que conclui a prova ■

Antes de passarmos ao próximo Lema, vamos introduzir algumas notações:

$$\begin{aligned} T_\lambda &:= \text{plano } x_1 = \lambda, \\ \Sigma(\lambda) &:= B \cap \{x_1 > \lambda\}, \\ \Sigma'(\lambda) &:= \text{reflexão de } \Sigma(\lambda) \text{ através de } T_\lambda, \\ x^\lambda &:= \text{reflexão de um ponto através de } T_\lambda. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Lema 1.1.3 *Assuma que para algum $\lambda \in [0, R)$ tivermos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \leq 0$, $u(x) \leq u(x^\lambda)$ mas $u(x) \not\equiv u(x^\lambda)$ em $\Sigma(\lambda)$. Então $u(x) < u(x^\lambda)$ em $\Sigma(\lambda)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ em $B \cap T_\lambda$.*

Demonstração.

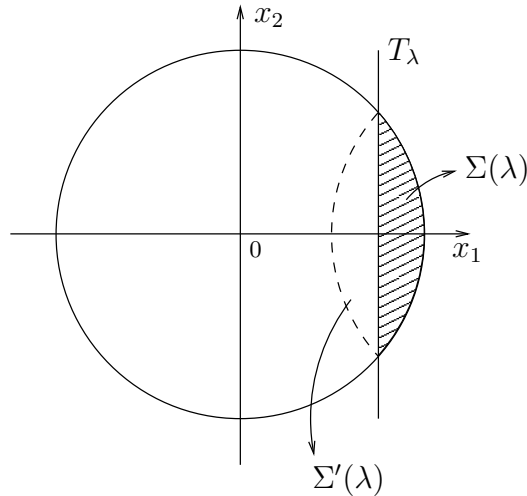


Figura 1.3:

Em $\Sigma'(\lambda)$ como na figura (1.3), seja $v(x) = u(x^\lambda)$. Como u é solução do problema (1.1) temos que v satisfaz $\Delta v + f(v) = 0$. Seja $w = v - u$ e $c(x)$ tal que $f(v) - f(u) = c(x)w$.

Logo, $\Delta w + c(x)w = 0$ em $\sum'(\lambda)$. Além disso, $w \leq 0$ em $\sum'(\lambda)$ e $w \not\equiv 0$ em $\sum'(\lambda)$. Passemos a demonstrar desses fatos:

Temos que $u(x) \leq u(x^\lambda)$, para todo x em $\sum(\lambda)$, defina $v(x^\lambda) := u(x)$, para todo x em $\sum(\lambda)$. Então $v \leq u \forall x \in \sum'(\lambda)$. Agora para ver que $w \not\equiv 0$, basta observar que por hipótese $u(x) \leq u(x^\lambda)$ mas $u(x) \not\equiv u(x^\lambda), \forall x \in \sum(\lambda)$.

Note que $w = 0$ em $T_\lambda \cap B$ pela própria definição de v , uma vez que $v(x) = u(x^\lambda)$ para x em $\sum'(\lambda)$.

Pelo Princípio do Máximo (A.2.7), temos $w < 0$ em $\sum'(\lambda)$ e $\frac{\partial w}{\partial x_1} > 0$ em $B \cap T_\lambda$. Como $\frac{\partial w}{\partial x_1} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ em $B \cap T_\lambda$, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ em $B \cap T_\lambda$. ■

Observação 1.1.4 *Vamos mostrar que u é simétrica com relação ao plano $x_1 = 0$ e que $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ para $x \in B \cap \{x_1 > 0\}$. Claramente isto implica no resultado do Teorema (1.1.1) pois pelo mesmo argumento u é simétrica com respeito a qualquer plano que passa pela origem.*

Lema 1.1.5 *Para todo $\lambda \in (0, R)$ temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ e $u(x) < u(x^\lambda)$ para todo $x \in \sum(\lambda)$.*

Observação 1.1.6 *Por continuidade, obtemos $u(x) \leq u(x^0)$ em $\sum(0) = B \cap \{x_1 > 0\}$. Repetindo-se o argumento com x_1 substituído por $-x_1$, concluímos que $u(x) \geq u(x^0)$ em $\sum(0)$. Portanto, u é simétrica com relação ao plano $x_1 = 0$, daí segue-se o Teorema (1.1.1).*

Demonstração do Lema 1.1.5

Pelo Lema (1.1.2) temos para λ suficientemente perto de R que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0.$$

Além disso

$$u(x) < u(x^\lambda) \text{ para } x \in \sum(\lambda),$$

pois $u(x) - u(x^\lambda) = \int_{\Gamma_{x_\lambda x}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) dx_1 < 0$, onde $\Gamma_{x_\lambda x}$ é o segmento de reta que liga x_λ a x no sentido positivo do eixo x_1 . Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \text{ e } u(x) < u(x^\lambda) \text{ para } x \in \sum(\lambda), \quad (1.7)$$

Seja μ um número tal que (1.7) é válido para $\lambda > \mu$, mas não é válido para $\lambda < \mu$. Por continuidade temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \text{ e } u(x) \leq u(x^\mu) \text{ para } x \in \Sigma(\mu).$$

Vamos mostrar que $\mu = 0$. Veja figura (1.4)

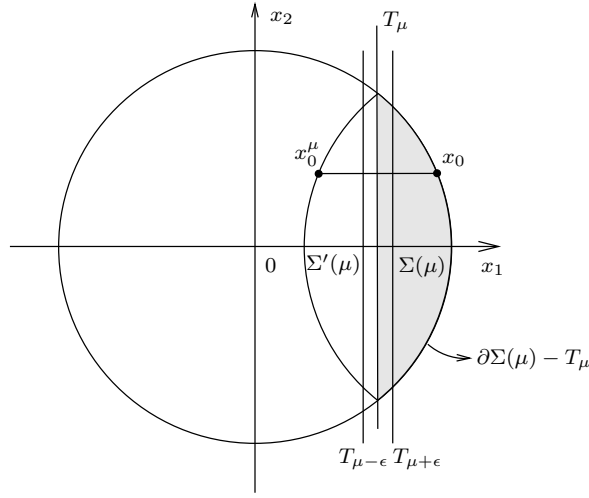


Figura 1.4:

Suponhamos que $\mu > 0$. Para qualquer ponto $x_0 \in \partial \Sigma(\mu) - T_\mu$, temos $x_0^\mu \in B$, logo $0 = u(x_0) \neq \mu(x_{x_0}^\lambda) > 0$, pois u é uma solução do problema. Portanto nós vemos que $u(x) \not\equiv u(x^\mu)$ para $x \in \Sigma(\mu)$, então pelo Lema (1.1.3), $u(x) < u(x^\mu)$ para $x \in \Sigma(\mu)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para $x \in B \cap T_\mu$. Portanto, (1.7) é válido para $\lambda = \mu$. Além disso, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para todo x numa vizinhança de um ponto em $T_\mu \cap \partial B$. Portanto, todo ponto em $T_\mu \cap \overline{B}$ possui uma vizinhança na qual $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$. Como $T_\mu \cap \overline{B}$ é compacto, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ em $\Sigma(\mu - \epsilon)$ para ϵ suficientemente pequeno.

Como assumimos que (1.7) não vale para $\lambda < \mu$, existe uma seqüência λ_j e $x_j \in \Sigma(\lambda_j)$ com $\lambda_j < \mu$, tal que $\lambda_j \rightarrow \mu$ e $u(x_j) \geq \mu(x_j^{\lambda_j})$.

Tomando uma subsequência de x_j , a qual também denotaremos por x_j , podemos assumir que ela converge, digamos $x_j \rightarrow x$. Portanto, $x \in \overline{\Sigma(\mu)}$ e $u(x) \geq u(x^\mu)$. Ora, isso não pode ser verdade, se $x \in \partial B$, pois neste caso $u(x) = 0$ e $u(x^\mu) > 0$. Também $x \notin \Sigma(\mu)$ em vista de (1.7). Como (1.7) é válido para μ , devemos ter $x \in T_\mu \cap B$, logo $x = x^\mu$. Por

outro lado, para j suficientemente grande o segmento $\Gamma_{x_j x_j^{\lambda_j}}$ ligando x_j à $x_j^{\lambda_j}$ pertence a B e devido a $u(x_j) \geq u(x_j x_j^{\lambda_j})$ e pelo Teorema do Valor Médio, tal segmento $\Gamma_{x_j x_j^{\lambda_j}}$ deve conter um ponto y_j no qual $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_j) \geq 0$. Tomando o limite quando $j \rightarrow \infty$, obtemos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \geq 0$, um absurdo! Portanto $\mu = 0$. ■

1.2 Simetria em Conjuntos Convexos

Agora vamos mostrar o Teorema (1.2.1) que é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio convexo e limitado qualquer, simétrico com relação a um hiperplano, digamos $x_1 = 0$. Seja ainda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Então

i) u é simétrica com relação ao hiperplano $x_1 = 0$,

ii) $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para $x \in \{x \in \Omega, x_1 > 0\}$.

Antes de demonstrarmos o Teorema acima, precisamos do seguinte Princípio de Máximo ver (Lema A.2.6) no Apêndice B, onde no presente caso estamos considerando o sinal de c .

Lema 1.2.2 *Suponhamos $N \geq 3$ e seja $S_N = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2}$, onde Ω é um aberto convexo. Seja ainda $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta w + c(x)w \leq 0 & \text{em } \Omega \\ w \leq 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

i) Se $c(x) \geq 0$ em Ω , então $w \leq 0$ em Ω .

ii) Seja $c^- = \max\{-c, 0\}$. Se $\|c^-\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} < S_N$, então $w \leq 0$ em Ω .

Observação 1.2.3 *Em particular, em domínios pequenos se c^- for limitado, então ii) é verdadeiro. Por exemplo, se $\|c^-\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{N}{2}} < S_N$, então $\|c^-\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} < S_N$.*

Demonstração. A demonstração de i) é clássica (ver [8]). Mostraremos então ii). Como $w = w^+ - w^-$, vamos mostrar que nas condições acima devemos ter $w^+ = 0$. De fato, multiplicando a equação $-\Delta w + c(x)w \leq 0$ por w^+ e integrado, temos

$$\int_{\Omega} [-\Delta w + c(x)w]w^+ dx \leq 0. \quad (1.10)$$

Por outro lado

$$\int_{\Omega} [-\Delta w + c(x)w]w^+ dx = \int_{\Omega} \nabla w \nabla w^+ dx + \int_{\Omega} c(x)ww^+ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} w^+ d\sigma.$$

Como $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $w^+ \equiv 0$ em $\partial\Omega$ e assim

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} w^+ d\sigma = 0.$$

Usando que $w = w^+ - w^-$, então obteremos finalmente que

$$\int_{\Omega} [-\Delta w + c(x)w]w^+ dx = \int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)(w^+)^2 dx - \int_{\Omega} [\nabla w^+ \nabla w^- + c(x)w^+ w^-] dx,$$

e como (1.10) é válido, devemos ter necessariamente

$$\int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)(w^+)^2 dx \leq 0.$$

O que implica em

$$\int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 dx + \int_{\Omega} c^+(x)(w^+)^2 dx \leq \int_{\Omega} c^-(x)(w^+)^2 dx. \quad (1.11)$$

Agora, usando a norma do gradiente em $H_0^1(\Omega)$ e (1.11), segue-se que

$$\|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} c^+(x)(w^+)^2 dx \leq \int_{\Omega} c^-(x)(w^+)^2 dx$$

e

$$\|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} c^+(x)(w^+)^2 dx.$$

Portanto

$$\|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} c^-(x)(w^+)^2 dx. \quad (1.12)$$

Como por hipótese $w^+ \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ segue que $(w^+)^2 \in L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ além disso ainda temos que $c^-(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Então usando a desigualdade de Hölder em (1.12), teremos

$$\int_{\Omega} c^-(x)(w^+)^2 dx \leq \|c^-(x)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2.$$

Assim

$$\|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|c^-(x)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2. \quad (1.13)$$

Como $S_N = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla w^+\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2} \leq \frac{\|\nabla w^+\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2} = \frac{\|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2}$, segue-se que

$$S_N \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2 \leq \|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

então retornando em (1.11) obtemos

$$\begin{aligned} S_N \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2 &\leq \|w^+\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|c^-(x)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2 \implies \\ (S_N - \|c^-(x)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}) \|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Agora por hipótese temos $\|c^-\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} < S_N$, de modo que $\|c^-\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} - S_N < 0$ e então de (1.14), devemos ter necessariamente

$$\|w^+\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^2 = 0,$$

e conseqüentemente $w^+ = 0$ em Ω , logo $w \leq 0$ em Ω . ■

Demonstração do Teorema 1.2.1 Sejam $x = (x_1, y) \in \Omega$ e $y = (x_2, \dots, x_N)$. Vamos mostrar que

$$u(x_1, y) < u(x'_1, y) \quad \forall x = (x_1, y) \in \Omega \text{ com } x_1 > 0 \text{ e } \forall x'_1 \text{ tal que } |x'_1| < x_1. \quad (1.15)$$

Usando (1.15), e fazendo x'_1 tender a x_1 , nós obteremos por continuidade $u(x_1, y) \leq u(-x_1, y)$ se $x_1 > 0$. Podemos agora trocar x_1 por $-x_1$ e aplicando-se (1.15) à $\tilde{u}(x_1, y) = u(-x_1, y)$, que também é uma solução de (1.8), obteremos $\tilde{u}(x_1, y) \leq \tilde{u}(-x_1, y)$, isto é, $u(-x_1, y) \leq u(x_1, y)$. Assim nós vemos que a igualdade deve ser válida em (1.15) de modo

que $u(x_1, y) = u(-x_1, y)$ e conseqüentemente concluímos que u é simétrica com respeito a x_1 . De (1.15) segue-se que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para $x \in \Omega$ com $x_1 > 0$.

No que se segue nós vamos definir $a = \max \{x_1 : (x_1, y) \in \Omega\}$.

Utilizando o método de mover planos nós vamos agora mostrar (1.15). Assim, para λ tal que $0 < \lambda < a$, definamos

$$\sum(\lambda) = \{x = (x_1, y) \in \Omega : x_1 > \lambda\} \text{ e } w^\lambda(x) = u(2\lambda - x_1, y) - u(x_1, y) \text{ para } x \in \sum(\lambda).$$

Notemos que w^λ está bem definido em $\sum(\lambda)$, pois Ω é convexo e simétrico com relação ao hiperplano $x_1 = 0$.

Afirmção 1: A desigualdade (1.15) é equivalente a provar que

$$w^\lambda(x) > 0 \quad \forall x \in \sum(\lambda), \quad \forall \lambda \in (0, a). \quad (1.16)$$

Demonstraremos a Afirmção 1 no final da demonstração do Teorema (1.2.1).

Como f é Lipschitz, então a função w^λ satisfaz $-\Delta w^\lambda + c^\lambda(x)w^\lambda = 0$ em $\sum(\lambda)$, onde

$$c^\lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x_1, y)) - f(u(2\lambda - x_1, y))}{w^\lambda(x)} & \text{se } w^\lambda(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } w^\lambda(x) = 0. \end{cases}$$

Ora, $\|c^\lambda\|_{L^\infty(\sum(\lambda))} \leq L$, onde L é a constante de Lipschitz de f no intervalo $[-\|u\|_{L^\infty}, \|u\|_{L^\infty}]$. Além disso, $w^\lambda \geq 0$ em $\partial \sum(\lambda)$ e $w^\lambda \not\equiv 0$ em $\partial \sum(\lambda)$. Agora para λ perto de a , o conjunto $\sum(\lambda)$ possui medida pequena. Assim aplicando Lema (1.2.2,) deduzimos que $w^\lambda \geq 0$ em $\sum(\lambda)$. Definamos

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in (0, a) : w^\lambda \geq 0 \text{ em } \sum(\lambda) \right\},$$

logo $\Lambda \neq \emptyset$.

Afirmção 2: Λ é fechado em $(0, a)$.

Com efeito, sejam $\lambda_n \in \Lambda$ e tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\lambda_0 \in (0, a)$. Precisamos mostrar que $w^{\lambda_0}(x) \geq 0$ para todo $x \in \sum(\lambda_0)$. Seja $x \in \sum(\lambda_0)$. Como $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e w^{λ_n} são contínuas para todo n , segue-se que $w^{\lambda_n}(x) \rightarrow w^{\lambda_0}(x)$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in \sum(\lambda_0)$. Sendo $w^{\lambda_n}(x) \geq 0$ para todo $x \in \sum(\lambda_0)$ podemos concluir que $w^{\lambda_0}(x) \geq 0$, pois caso contrário existe $x_0 \in \sum(\lambda_0)$ tal que $w^{\lambda_0}(x_0) < 0$. Como as w^{λ_0} são contínuas, então existe uma vizinhança V de x_0 tal que $w^{\lambda_0}(V) < 0$. Mas então como

$w^{\lambda_n}(x) \longrightarrow w^{\lambda_0}(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a partir dele teríamos que as $w^{\lambda_n}(x)$ estariam em V , contrariando o fato das $w^{\lambda_n}(x) \geq 0$ em $\sum(\lambda_0)$. Portanto $w^{\lambda_0}(x) \geq 0$ para todo $x \in \sum(\lambda_0)$. Portanto Λ é fechado em $(0, a)$.

Afirmção 3: Λ é aberto em $(0, a)$.

De fato, fixemos $\lambda \in \Lambda$. Pelo Princípio do Máximo (A.2.7), temos $w^\lambda > 0$ em $\sum(\lambda)$. Seja K um conjunto compacto e suave em $\sum(\lambda)$ tal que $|\sum(\lambda) - K|$ (onde a notação $|\cdot|$ significa medida) seja suficientemente pequeno de modo que o Lema (1.2.2) possa ser aplicado em $\sum(\lambda) - K$. Para tanto basta exigir que $L|\sum(\lambda) - K|^{\frac{N}{2}} < S_N$, uma vez que $\|c^\lambda\|_{L^\infty(\sum(\lambda))} \leq L$. Como $w^\lambda(x) \geq \delta > 0$ em K , por continuidade $w^\mu(x) \geq 0$ em K , para todo μ perto de λ . Em particular, $w^\mu(x) \geq 0$ na fronteira de $\sum(\mu) - K$.

Aplicando o Lema (1.2.2) a w^μ em $\sum(\lambda) - K$, obtemos $w^\mu \geq 0$ em $\sum(\mu) - K$, logo $w^\mu \geq 0$ em $\sum(\mu)$. Portanto $\mu \in \Lambda$ para todo μ próximo de λ , e assim concluímos que Λ é aberto.

Vamos finalmente provar a Afirmção 1. A prova vai ser feita da seguinte maneira:

$$a) (1.15) \Rightarrow (1.16), \quad b) (1.16) \Rightarrow (1.15).$$

Com efeito, mostremos primeiramente *a*). Para tanto suponha que (1.15) seja válido. Sejam $x \in \sum(\lambda)$ e $\lambda \in (0, a)$, queremos mostrar que $w^\lambda(x) > 0$. Como $x \in \sum(\lambda)$ e $\lambda \in (0, a)$, então $x_1 > \lambda > 0$, e tomemos $x'_1 = 2\lambda - x_1$. Assim, temos que $|x'_1| < x_1$, pois

$$|x'_1| < x_1 \iff |2\lambda - x_1| < x_1 \iff -x_1 < 2\lambda - x_1 < x_1 \iff 0 < 2\lambda < 2x_1 \iff 0 < \lambda < x_1.$$

Usando (1.15) segue que

$$w^\lambda(x) = u(2\lambda - x_1, y) - u(x_1, y) = u(x'_1, y) - u(x_1, y) > 0.$$

Como $x \in \sum(\lambda)$ e $\lambda \in (0, a)$, eram arbitrários segue-se que

$$w^\lambda(x) > 0 \quad \forall x \in \sum(\lambda), \quad \forall \lambda \in (0, a).$$

Mostremos agora *b*) Para tanto, suponha que (1.16) seja válido. Sejam $x \in \Omega$ com $x_1 > 0$ e x'_1 tal que $|x'_1| < x_1$, queremos mostrar que $u(x_1, y) < u(x'_1, y)$. Tomemos $x_1 = 2\lambda - x'_1$,

como $|x'_1| < x_1$ temos então que $0 < x'_1 + x_1 < 2x_1$, de modo que $2\lambda < 2x_1$ e portanto $x_1 > \lambda$. Assim $x \in \sum(\lambda)$ e também $\lambda \in (0, a)$. Usando (1.16) segue que

$$u(x'_1, y) - u(x_1, y) = u(2\lambda - x_1, y) - u(x_1, y) = w^\lambda(x) > 0.$$

Como x'_1 e x_1 eram arbitrários segue-se que

$$u(x_1, y) < u(x'_1, y) \quad \forall x = (x_1, y) \in \Omega \text{ com } x_1 > 0 \text{ e } \forall x'_1 \text{ tal que } |x'_1| < x_1.$$

Com isto concluimos a prova da Afirmação 1. Assim das afirmações 2 e 3 conclui-se que $\Lambda = (0, a)$. De onde vale (1.16). Pela afirmação 1 temos que vale (1.15). E como vimos no início da demonstração, (1.16) implica no resultado do Teorema (1.2.1). ■

1.3 Estimativas a Priori

Nesta seção vamos aplicar os resultados das seções anteriores para obter uma estimativa a priori para as soluções de

$$\begin{cases} \Delta u + u^p &= 0 & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.17)$$

Mostraremos que as soluções de (1.17) são uniformemente limitadas por uma constante, assumindo que o domínio Ω é convexo e $p < \frac{N}{N-2}$, para tornar nossa prova mais simples, o caso geral está provado em [11]. A prova é feita por contradição.

Definição 1.3.1 Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.17) desde que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} u^p(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.3.2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio convexo, limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, e seja $1 < p < \frac{N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$. Então se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.17), temos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M^{\frac{2}{p-1}},$$

onde M é uma constante dependendo somente de p, N e Ω .

Estas estimativas podem ser estabelecidas sob hipóteses mais gerais. Em particular $\frac{N}{N-2}$ pode ser trocado pelo termo maior $\frac{N+2}{N-2}$. A hipótese forte $1 < p < \frac{N}{N-2}$ é para tornar a prova mais simples.

Em vista dos resultados de regularidade para soluções fracas (ver Apêndice C), vamos assumir que todas as soluções consideradas são suaves até a fronteira. Antes de demonstrarmos o Teorema (1.3.2) necessitamos alguns resultados. Primeiro vamos estabelecer um resultado de não existência de soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.

Observação 1.3.3 *O Teorema abaixo abaixo é uma versão não-linear do clássico Teorema de Liouville ver bibliografia [7].*

Teorema 1.3.4 *Suponha que $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma solução de $\Delta u + u^p = 0$.*

I) Se $N = 2$ e $1 < p < \infty$, então $u \equiv 0$.

II) Se $N \geq 3$ e $1 < p < \frac{N}{N-2}$, então $u \equiv 0$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente I).

Em coordenadas polares temos

$$u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) + u^p(r, \varphi) = 0, \quad (1.18)$$

onde $u = u(r, \varphi)$, $r \geq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Definamos

$$w(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi, \quad (1.19)$$

então integrando (1.18) com respeito a φ teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} u_{rr}(r, \varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} u_r(r, \varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} u(r, \varphi)^p d\varphi \right\} = \\ &= w''(r) + \frac{w'(r)}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi)^p d\varphi \geq w''(r) + \frac{w'(r)}{r} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi \right)^p = \\ &= w''(r) + \frac{w'(r)}{r} + w(r)^p, \end{aligned} \quad (1.20)$$

de modo que w é uma função radialmente simétrica satisfazendo

$$\Delta w(r) + w^p(r) \leq 0. \quad (1.21)$$

Agora vamos justificar duas passagens omitidas acima.

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) d\varphi = 0.$$

$$b) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi)^p d\varphi \geq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi \right)^p, \quad \forall 1 < p < \infty.$$

Para $a)$ temos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) d\varphi = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) d\varphi = \frac{1}{r^2} [u_{\varphi}(r, 2\pi) - u_{\varphi}(r, 0)] = 0.$$

Para $b)$ definamos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^p$ onde $p > 1$. É fácil ver que f é convexa. Considere u acima definida em $(0, \pi)$ então aplicando-se diretamente a desigualdade de Jensen (C.3) obteremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi)^p d\varphi \geq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi \right)^p,$$

e assim mostramos $b)$.

Então aplicando o teorema do valor médio para funções super-harmônicas (39) temos

$$w(0) = u(0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi = w(r). \quad (1.22)$$

Mas então, escrevendo $r = e^{-t}$, nós achamos

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(t) + e^{-2t} w^p(t) \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

de modo que w é uma função côncava em $\mathbb{R}$, a qual é não negativa e limitada. Isto implica que $w \equiv 0$, e portanto também temos $u \equiv 0$. Vamos a prova deste fato, que constituirá de duas etapas:

i) Se $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é côncava. Então $w'(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

ii) Usando a desigualdade (1.23), e o fato que w é limitada vamos mostrar que $w \equiv 0$.

Para a prova de i) vamos utilizar o Lema (C.7), o qual está enunciado no Apêndice C.

Para tanto seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e sejam $a, t \in I$ e suponha ainda que $w'(a) \neq 0$ para algum $a \in I$. Sem perda de generalidade podemos supor por exemplo que $w'(a) < 0$. Então como por hipótese w é côncava, temos que $w(t) \leq w(a) + w'(a)(t - a)$. Mas agora

podemos escolher t suficientemente grande tal que $w(a) + w'(a)(t - a) < 0$. Para ver isto, basta observar que por hipótese $w'(a) < 0$, então

$$w(a) + w'(a)(t - a) < 0 \iff \frac{w(a)}{w'(a)} + \frac{w'(a)(t - a)}{w'(a)} > 0$$

$$\frac{w(a)}{w'(a)} + (t - a) > 0 \iff t > -\frac{w(a)}{w'(a)} + a.$$

Assim escolhendo t suficientemente grande tal que $t > -\frac{w(a)}{w'(a)} + a$, segue-se que

$$w(t) \leq w(a) + w'(a)(t - a) < 0.$$

Absurdo, pois por hipótese $w(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Analogamente para o caso em que $w'(a) > 0$, também podemos escolher t tal que $w(a) + w'(a)(t - a) < 0$, bastando para isso tomar t suficientemente pequeno tal que $-t > \frac{w(a)}{w'(a)} + a$. Assim de ambos os casos acima podemos concluir que $w'(a) = 0$. Como $a \in I$ era arbitrário, segue-se que $w'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ou seja $w'(t) \equiv 0$, e assim concluimos a prova de *i*).

Vamos agora a prova de *ii*). Como $w'(t) \equiv 0$ e $\mathbb{R}$ é conexo segue-se que $w(t) = C, \forall t \in \mathbb{R}$. Usando-se então a desigualdade (1.23) temos que

$$e^{-2t}w(t)^p \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

e como $e^{-2t} > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $w(t)^p \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, conseqüentemente $w(t) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ou seja $w \equiv 0$, e assim concluimos a prova de *ii*).

Vamos agora a prova de *III*). Definamos

$$w(r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r} u(s) ds, \quad (1.24)$$

onde ω_N é a medida da bola unitária, e chegaremos em (1.21) com $w(0) \geq w(r)$. Conseqüentemente

$$w''(r) + \frac{N-1}{r}w'(r) + w^p(r) \leq 0. \quad (1.25)$$

A justificativa da desigualdade acima será feita no final dessa demonstração para o caso $N = 3$. Assim escrevendo $r = t^{-\frac{1}{N-2}}$, temos

$$(N-2)^2 \frac{d^2 w}{dt^2}(t) + t^{-\frac{2(N-1)}{N-2}} w^p(t) \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.26)$$

Assim w é agora uma função não negativa, côncava e limitada de t em $\mathbb{R}^+$. Então, escrevendo $w(t)$ em vez de $w(r)$, temos

$$w'(t) = \int_t^\infty -w''(s)ds \geq \frac{1}{(N-2)^2} \int_t^\infty s^{-\frac{2(N-1)}{(N-2)}} w(s)^p ds \geq$$

$$\frac{w(t)^p}{(N-2)^2} \int_t^\infty s^{-\frac{2(N-1)}{(N-2)}} ds = \frac{w(t)^p}{N(N-2)} t^{-\frac{N}{(N-2)}},$$

de modo que

$$(w(t)^{1-p})' \leq \frac{1-p}{N(N-2)} t^{-\frac{N}{(N-2)}},$$

assim

$$w(\infty)^{1-p} - w(t)^{1-p} \leq \frac{1-p}{2N} t^{-\frac{2}{(N-2)}},$$

ou

$$w(t) \leq \left(w(\infty)^{1-p} + \frac{p-1}{2N} t^{-\frac{2}{(N-2)}} \right)^{-\frac{1}{p-1}} \leq \left(\frac{p-1}{2N} \right)^{-\frac{1}{p-1}} t^{\frac{2}{(N-2)(p-1)}}. \quad (1.27)$$

Claramente (1.27) força $w \equiv 0$ se o expoente de t em (1.27) for maior que um, isto é

$$\frac{2}{(N-2)(p-1)} > 1,$$

porque de outra maneira w não poderia ser côncava e não negativa num vizinhança de $t = 0$ a qual contradiz (1.26).

A seguir vamos fazer a demonstração da desigualdade (1.25) para o caso $N = 3$. Se $N = 3$, em coordenadas esféricas temos

$$0 = \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u^p, \quad (1.28)$$

onde $u = u(r, \theta, \varphi)$, $r \geq 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Definamos agora

$$w(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.29)$$

Multiplicando (1.28) por $\sin \theta$ e integrando primeiramente com respeito a θ e depois com respeito φ , obteremos

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi)^p \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.30)
\end{aligned}$$

A seguir vamos mostrar que (1.30) se simplifica em

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

De fato, resolvendo cada integral separadamente temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \cos \theta d\theta d\varphi = \\
& \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta u(r, \theta, \varphi) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta \right] d\varphi = \\
& -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left[u(r, \pi, \varphi) + u(r, 0, \varphi) + \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta \right] d\varphi. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\
& \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left[\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \cos \theta d\theta \right] d\varphi = \\
& -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \cos \theta d\theta d\varphi = \\
& -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta u(r, \theta, \varphi) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta \right] d\varphi = \\
& \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left[u(r, \pi, \varphi) + u(r, 0, \varphi) + \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta \right] d\varphi. \quad (1.33)
\end{aligned}$$

E finalmente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r, \theta, \varphi) \csc \theta d\theta d\varphi = \\
& \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \csc \theta \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \theta, 2\pi) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \theta, 0) \right) d\theta = 0, \quad (1.34)
\end{aligned}$$

pois

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \theta, 2\pi) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \theta, 0) = 0.$$

Substituindo (1.32), (1.33) e (1.34) em (1.30) obtemos (1.31) e usando (1.29) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi)^p \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right) + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi)^p \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right) = \\ &w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi)^p \sin \theta d\theta d\varphi \geq \\ &w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) + \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right)^p = \\ &w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) + w^p(r). \end{aligned}$$

Assim mostramos

$$w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) + w^p(r) \leq 0, \quad (1.35)$$

que é a desigualdade (1.25) para o caso $N = 3$. Vamos agora justificar a seguinte passagem omitida acima

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi)^p \sin \theta d\theta d\varphi \geq \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right)^p. \quad (1.36)$$

Para ver isto, definamos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^p$ onde $p \geq 1$. É fácil ver que f é convexa. Também definamos $g : (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ por $g(\theta, \varphi) = \sin \theta$. Temos que g é positiva em $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$, então pela desigualdade de Jensen (C.4) temos

$$\left(\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi} \right)^p \leq \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u^p(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi},$$

e como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi,$$

segue-se que

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right)^p \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u^p(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

como queríamos mostrar. ■

A seguir, utilizaremos o método de mover planos, devido a [10]. Primeiramente vamos introduzir algumas notações. Nós assumiremos que Ω é convexo. Para $x_0 \in \partial\Omega$ e $\epsilon > 0$ seja

$$T_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : (x_0 - x, \nu(x_0)) = \epsilon\}, \quad (1.37)$$

e

$$\Sigma_\epsilon(x_0) = \{x \in \Omega : (x_0 - x, \nu(x_0)) < \epsilon\} \quad (1.38)$$

Observação 1.3.5 *As expressões (1.37) e (1.38) nos dão uma forma mais explícita dos conjuntos definidos em (1.6).*

Aqui $\nu(x_0)$ é a normal exterior a $\partial\Omega$ em x_0 . Agora seja

$$S_{\epsilon, x_0} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

denotando a reflexão ortogonal em $T_\epsilon(x_0)$, e seja

$$\Sigma'_\epsilon(x_0) = \{S_{\epsilon, x_0}(x) : x \in \Sigma_\epsilon(x_0)\}.$$

Nós dizemos que $\epsilon > 0$ é admissível para $x_0 \in \partial\Omega$ se

$$\Sigma'_\epsilon(x_0) \subset \Omega$$

e

$$(\nu(x), \nu(x_0)) > 0 \text{ para todo } x \in T_\epsilon(x_0) \cap \partial\Omega.$$

Teorema 1.3.6 *Seja Ω um domínio limitado, convexo com fronteira suave $\partial\Omega$, seja também $x_0 \in \partial\Omega$. Então o conjunto dos admissíveis $\epsilon > 0$ é um intervalo aberto, limitado e não vazio da forma $(0, \epsilon^*)$. Seja u uma solução clássica de (1.17). Então*

$$\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*] \quad \forall x \in \Sigma_\epsilon(x_0) \quad u(S_{\epsilon, x_0}(x)) \geq u(x),$$

e, fixado $\nu = \nu(x_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \sum_{\epsilon}(x_0).$$

Mais ainda, a primeira desigualdade é estrita a menos que $\epsilon = \epsilon^*$ e ambos u e Ω são simétricos em $T_{\epsilon}(x_0)$.

Demonstração. As desigualdades no Teorema (1.3.6) são válidas para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, pois pelo Lema de Hopf na fronteira temos $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ em x_0 , portanto temos a existência de ϵ^* . Vejamos que ϵ^* é maximal. Suponha que exista $\epsilon_1 \in (0, \epsilon^*)$ tal que as desigualdades não são válidas para algum $\epsilon \geq \epsilon_1$. Nós vamos assumir que ϵ_1 é maximal com este respeito, de modo que as desigualdades são válidas para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$. Nós consideraremos em $\sum'_{\epsilon_1}(x_0)$ as funções $w(x) = u(S_{\epsilon_1, x_0}(x)) - u(x)$, e $q(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$.

Por continuidade nós temos $w \geq 0$ e $q \leq 0$ pois para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$ as desigualdades são válidas. Como $\epsilon_1 < \epsilon^*$ segue-se que

$$w(x) = u(S_{\epsilon_1, x_0}(x)) > 0 \text{ em } \partial \sum_{\epsilon_1}(x_0) \cap \partial \Omega.$$

Também em $\sum_{\epsilon_1}(x_0)$ temos

$$\Delta w(x) = -u(S_{\epsilon_1, x_0}(x))^p + u(x)^p \leq 0,$$

de modo que, pelo princípio do máximo forte (A.2.3) temos

$$w > 0 \text{ em } \sum_{\epsilon_1}(x_0).$$

Como $w = 0$ em $T_{\epsilon}(x_0)$ o Lema de Hopf na fronteira (A.2.1) implica que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} > 0 \text{ em } \Omega \cap T_{\epsilon}(x_0).$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \Omega \cap T_{\epsilon}(x_0)$$

e, como ϵ_1 é admissível, usando novanente o Lema de Hopf na fronteira (A.2.1), resulta

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial \Omega \cap \partial \sum_{\epsilon}(x_0).$$

Conseqüentemente

$$q = \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial \sum_{\epsilon}(x_0),$$

e como $\Delta q = -pu^{p-1}q \geq 0$ em $\sum_\epsilon(x_0)$, nós temos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \overline{\sum_\epsilon(x_0)}$$

Juntamente com $w > 0$ em $\sum_\epsilon(x_0)$ isto implica que as desigualdades no Teorema (1.3.6) são válidas para $\epsilon > \epsilon_1$ suficientemente próximo a ϵ_1 . Isto é uma contradição, e portanto ϵ_1 não pode existir.

Para completar a prova nós repetimos o argumento acima com ϵ_1 em lugar de ϵ^* e concluímos que as desigualdades são válidas para $\epsilon = \epsilon^*$, e que as desigualdades são estritas, a menos que $w = 0$ em $\partial\sum_{\epsilon^*}(x_0)$, a qual implica

$$\Omega \setminus T_{\epsilon^*}(x_0) = \sum_{\epsilon^*}(x_0) \cup \sum'_{\epsilon^*}(x_0),$$

de modo que Ω é simétrico com relação a $T_{\epsilon^*}(x_0)$. Intercalando as regras de $u(x)$ e $u(S_{\epsilon^*,x_0}(x))$ nós concluímos também que u deve ser simétrica em $T_{\epsilon^*}(x_0)$. Isto completa a prova. ■

Corolário 1.3.7 *Se Ω é uma bola, então toda solução de (1.17) é radialmente simétrica.*

Corolário 1.3.8 *Existe um $\delta > 0$ tal que se uma solução u de (1.17) obtém seu máximo em $\bar{x} \in \Omega$, então $B_\delta(\bar{x}) \subset\subset \Omega$. Este δ depende apenas da forma do domínio.*

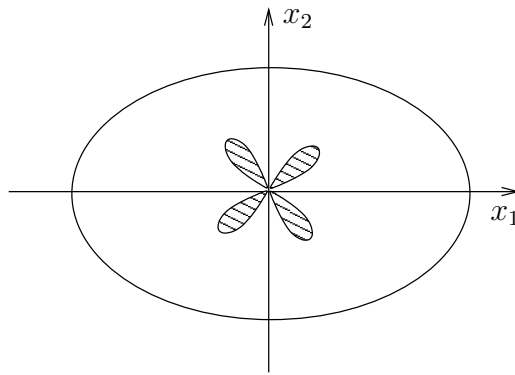


Figura 1.5: Localização dos pontos críticos de u

Observação 1.3.9 *De modo geral o Corolário acima nos diz que existe uma vizinhança de $\partial\Omega$ em Ω onde $u(x)$ não tem pontos críticos. Por exemplo se Ω é uma elipse como na figura (1.5), os pontos críticos de u se existirem estão na região sombreada.*

Demonstração do Teorema 1.3.2

Suponha que a estimativa a priori seja falsa. Neste caso existe uma sequência u_k de soluções de (1.17) que assumem o máximo em P_k no interior de Ω . Sem perda de generalidade podemos supor que $0 \in \Omega$ e que $P_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta maneira pelo Corolário (1.3.8) existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset\subset \Omega$. Esse $\delta > 0$ pode ser tomado de forma uniforme. E ainda temos, por hipótese de absurdo, que $u_k(0) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Para cada u_k , definamos

$$w_k(x) = \frac{1}{u_k(0)} u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}}), \quad (1.39)$$

as quais estão bem definidas para

$$|x| \leq \delta u_k(0)^{\frac{p-1}{2}} = R_k, \quad (1.40)$$

ou seja as w_k são funções definidas em bolas $B^k = B_{R_k}(0)$ de raio R_k e centro na origem. Além disso como as $u_k > 0$ em Ω para todo k , em particular segue que as w_k são limitadas, pois satisfazem

$$0 < w_k \leq 1 = w_k(0). \quad (1.41)$$

Além disso, w_k satisfazem

$$-\Delta w_k(x) = w_k^p(x), \quad \forall x \in B_k. \quad (1.42)$$

De fato, como as u_k são soluções de (1.17) para todo k segue que $-\Delta u_k = u_k^p$. Assim

$$\begin{aligned} \Delta w_k(x) &= \frac{1}{u_k(0)} \Delta u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}}) u_k(0)^{1-p} = -\frac{1}{u_k(0)} u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}})^p u_k(0)^{1-p} = \\ &= -(u_k(0))^{-p} u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}})^p \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta w_k(x) = -(u_k(0))^{-p} u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}})^p$$

Por outro lado

$$w_k^p(x) = (u_k(0))^{-p} u_k(x u_k(0)^{\frac{1-p}{2}})^p.$$

Portanto

$$\Delta w_k(x) + w_k^p(x) = 0, \quad \forall x \in B_k.$$

Afirmamos que quando $k \rightarrow \infty$, w_k tende a uma solução $w_\infty > 0$ da equação

$$-\Delta v = v^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (1.43)$$

De fato, fixemos um raio R e uma bola $B_R(0)$. De acordo com o Teorema de Calderón-Zygmund (ver (D.2)), temos

$$\|w_k\|_{W^{2,r}(B)} \leq \text{constante}$$

para $r \geq N$ devido a (1.41). Dessa forma, uma subsequência de w_k converge fracamente para, digamos, w em $W^{2,r}(B_{R/2})$ onde $B_{R/2} \subset \subset B_R$. Assim temos

$$-\Delta w = w^p \quad \text{em } B_{R/2}. \quad (1.44)$$

Agora, aumentando-se o raio R progressivamente, encontramos para cada R uma solução da equação (1.44). Fazendo-se $R \rightarrow \infty$, encontramos pelo argumento de diagonal de Cantor, subsequência de w_k que converge em compactos para uma função v de classe C^2 e que satisfaz (1.43), um absurdo pelo teorema (1.3.4). ■

Capítulo 2

Simetria para Problemas Sobredeterminados

Neste capítulo estudaremos alguns resultados de simetria em dois problemas sobre-determinados. Em ambos os problemas estamos interessados em soluções $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e chegaremos as mesmas conclusões, ou seja que Ω é uma bola euclidiana e que a solução u tem a forma $u = \frac{A - r^2}{2N}$, onde A é uma constante e $r = |x|$. O primeiro resultado está contido no Teorema 2.1.1, onde acrescentamos a condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c$, onde $c < 0$ e ν é o vetor normal unitário exterior á $\partial\Omega$. O segundo resultado está contido no Teorema 2.2.1, onde nele acrescentamos a condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -cr$, o que torna este resultado uma generalização do primeiro. Faremos uma análise física dos problemas envolvidos.

2.1 Problema com $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ constante na fronteira

Teorema 2.1.1 *Seja Ω um domínio aberto, limitado e conexo em $\mathbb{R}^N$ tendo uma fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha que exista uma função $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_N)$, onde $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do seguinte problema*

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $c < 0$. Então $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola de raio $R = -Nc$ e $u(x) = \frac{N^2 c^2 - r^2}{2N}$ onde $r = |x|$.

Antes de darmos uma prova do teorema acima, gostaríamos de discutir algumas motivações físicas para o problema em questão. Considere o escoamento de um fluido viscoso incompressível, através de um tubo reto, com seção transversal Ω o qual se movimenta em forma paralela na direção do canal. Se nós fixarmos coordenadas retangulares no espaço com o eixo- z direcionado ao longo do tubo, e ainda mais sabendo-se que a velocidade do fluxo u é então uma função de x, y somente satisfazendo a equação diferencial parcial de Poisson ($N = 2$) $\Delta u = -A$ em Ω , onde A é uma constante relacionada com a viscosidade do fluido e a taxa de mudança de pressão por unidade de comprimento ao longo do tubo. Acrescentando-se a equação diferencial nós temos a condição de aderência $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Finalmente, a pressão tangencial por unidade de área na parede do tubo é dada pela quantidade $\mu \frac{\partial u}{\partial \nu}$, onde μ é a viscosidade. Nossa proposição então estabelece que a razão pressão tangencial na parede do tubo por sua distância radial é a mesma em todos os pontos da parede se e somente se o tubo tem uma seção-transversal circular.

Precisamente a mesma equação diferencial parcial e a condição de fronteira resultam na teoria linear da torção de uma barra sólida reta de seção-transversal Ω ; (veja Sokolinikoff [21], pag 109-119.) Em razão disto, a Proposição (2.2.1) estabelece que, quando uma barra sólida reta está sujeita a torção, o razão da magnetude da pressão resultante, a qual ocorre na superfície da barra, pela distância radial da superfície é independente da posição se, e somente se a barra tem uma seção-transversal circular. Agora vamos a prova do teorema acima.

Demonstração. A prova é construtiva, e por este motivo resolvemos dividi-la em sete Lemas.

Lema 2.1.2

$$(N + 2) \int_{\Omega} u dx = N c^2 |\Omega|. \quad (2.2)$$

Observação 2.1.3 *O Lema 2.1.2 será utilizado para obter uma contradição com o Lema 2.1.10.*

Observemos primeiramente que

$$\Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta u) + 2\Delta u = -2, \quad (2.3)$$

onde r é a distância de uma origem fixa e $\frac{\partial u}{\partial r}$ é a derivada de u na direção do raio r . Por definição

$$\Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Agora

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_j} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \sum_{j=1}^N \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) \right) = r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta u) + 2\Delta u.$$

Como $\Delta u = -1$, segue-se que

$$\Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -2.$$

Usando as identidades de Green (C.2) e o Teorema da Divergência (C.1) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[2u - r \frac{\partial u}{\partial r} \right] dx &\stackrel{a}{=} \int_{\Omega} \left[-u \Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r} \Delta u \right] dx \stackrel{b}{=} \\ &\int_{\partial\Omega} \left[-u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma \stackrel{c}{=} \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma \stackrel{d}{=} \end{aligned}$$

$$c^2 \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma \stackrel{e}{=} N c^2 |\Omega|.$$

Agora justificaremos as passagens a, b, c, d e e acima.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[2u - r \frac{\partial u}{\partial r} \right] dx &\stackrel{a}{=} - \int_{\Omega} (-2)u dx + \int_{\Omega} (-1)r \frac{\partial u}{\partial r} dx = - \int_{\Omega} u \Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} \Delta u \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dx = \int_{\Omega} \left[-u \Delta \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Delta u \right] dx \stackrel{37}{=} \\ &\int_{\partial\Omega} \left[-u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Usando o fato que $u = 0$ em $\partial\Omega$ e que $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial r}{\partial \nu}$, temos então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left[-u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma &\stackrel{c}{=} \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = \\ \int_{\partial\Omega} r \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial r}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c$ em $\partial\Omega$, segue-se

$$\int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma \stackrel{d}{=} c^2 \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma.$$

$$\begin{aligned} c^2 \int_{\partial\Omega} r \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma &\stackrel{e}{=} c^2 \int_{\partial\Omega} \nabla \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \nu d\sigma \stackrel{C.1}{=} c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \right) dx = \\ c^2 \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) dx &= c^2 \int_{\Omega} N dx, \end{aligned}$$

pois $\Delta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = N$ e como $\int_{\Omega} 1 dx = |\Omega|$, segue-se que

$$c^2 \int_{\Omega} N dx = N c^2 \int_{\Omega} 1 dx = N c^2 |\Omega|.$$

Assim

$$\int_{\Omega} \left[2u - r \frac{\partial u}{\partial r} \right] dx = N c^2 |\Omega|. \quad (2.4)$$

Por outro lado temos, temos

$$\int_{\Omega} r \frac{\partial u}{\partial r} dx = \int_{\Omega} r \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot x dx = \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \cdot \nabla u dx \stackrel{36}{=} - \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) u(x) dx +$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) u d\sigma = - \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) u(x) dx = -N \int_{\Omega} u(x) dx,$$

onde nas duas últimas passagens usamos o fato de que $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$ e $\Delta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = N$ em Ω .

Portanto

$$\int_{\Omega} r \frac{\partial u}{\partial r} dx = -N \int_{\Omega} u(x) dx. \quad (2.5)$$

Somando-se (2.4) e (2.5) obtemos a identidade

$$(N+2) \int_{\Omega} u dx = N c^2 |\Omega|.$$

Lema 2.1.4 *Mostraremos agora que*

$$1 = (\Delta u)^2 \leq N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 \leq N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2. \quad (2.6)$$

Observação 2.1.5 *As desigualdades acima vão ser utilizadas nos Lemas 2.1.7 e 2.1.10.*

Primeiramente, demonstraremos que $(\Delta u)^2 \leq N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2$. O ingrediente principal desta prova será a de desigualdade de Cauchy-Schwarz. Se denotarmos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^N$, e tomarmos $w = (u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_N x_N})$, $v = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$, então

$$\langle w, v \rangle = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = \Delta u.$$

Usando-se então Cauchy-Schwarz, temos que

$$\langle w, v \rangle \leq |\langle w, v \rangle| \leq |w| |v| = \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2}.$$

Assim

$$(\Delta u)^2 = \left(\sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} \right)^2 \leq (\sqrt{N})^2 \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2} \right)^2 = N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2.$$

Por outro lado

$$N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 = N \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (u_{x_i x_j})^2 + N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 \geq N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2.$$

E portanto mostramos que

$$1 = (\Delta u)^2 \leq N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 \leq N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2.$$

Lema 2.1.6 *Vamos mostrar agora que existe $\bar{x} \in \Omega$ tal que $u(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}} u = M$ e além disso que $\nabla u(x_0) \neq 0, \forall x_0 \in \partial\Omega$.*

Primeiro mostraremos que existe $\bar{x} \in \Omega$ tal que $u(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}} u = M$. Para tanto precisamos mostrar apenas que $u > 0$ em Ω .

Com efeito, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Definamos agora $w = -u$, então w satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w = -1 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Se $M = \max_{\bar{\Omega}} w = w(\bar{x})$ para algum $\bar{x} \in \Omega$, então pelo princípio do máximo forte (A.2.3), temos que $w \equiv M$ em Ω . Por continuidade $w \equiv M$ em $\bar{\Omega}$. Em particular $w \equiv M$ em $\partial\Omega$. Como também $w \equiv 0$ em $\partial\Omega$, segue-se que $M = 0$ e portanto $w \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$. Mas $w \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$ implica que $-\Delta w = 0$ em Ω , absurdo, pois $-\Delta w = -1$ em Ω . Portanto $M = \max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0$, e assim em Ω temos que $w < 0$, de modo que $u > 0$ em Ω .

Agora vamos mostrar que $\nabla u(x_0) \neq 0, \forall x_0 \in \partial\Omega$.

Para isto vamos utilizar o Lema de Hopf (Lema (A.2.2)). Dado $x_0 \in \partial\Omega$, então $u(x_0) = 0$ e pelo que já mostramos acima u deve satisfazer

$$\begin{cases} -\Delta u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

além disso $u(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}} u = M$, onde $\bar{x} \in \Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^2 , então Ω satisfaz a condição da bola interior em x^0 isto é, existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ com $x^0 \in \partial B$. Assim $0 = u(x_0) < u(x), \forall x \in \Omega$ e estamos nas condições do Lema (A.2.2), de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nabla u(x_0) \nu(x_0) < 0$, segue-se que $\nabla u(x_0) \neq 0, \forall x_0 \in \partial\Omega$.

Lema 2.1.7 Definamos $z(x) := |\nabla u(x)|^2 + \frac{2}{N}u(x)$ em $\overline{\Omega}$ e mostraremos que z satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta z \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ z = c^2 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observação 2.1.8 A definição da função z acima é a peça chave na demonstração do Teorema (2.1.1).

Mostremos primeiramente que $z = c^2$ em $\partial\Omega$. De fato, como u anula-se em $\partial\Omega$, e também $\nabla u(x_0) \neq 0$, $\forall x_0 \in \partial\Omega$, então segue-se que podemos tomar $\nu = \pm \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Para ver isto, observe primeiramente que já mostramos que $u > 0$ em Ω , assim podemos descrever $\partial\Omega$ como

$$\partial\Omega = u^{-1}(\{0\}) = \{x \in \overline{\Omega} \text{ tal que } u(x) = 0\},$$

a qual é uma superfície de nível para a função u no nível 0. Agora, sabemos que uma das propriedades do vetor gradiente é a seguinte: fixado um ponto a tal que $\nabla u(a) \neq 0$, então $\nabla u(a)$ é perpendicular a superfície de nível de u que passa por aquele ponto. Assim se denotarmos por $\vec{u}_t(\bar{x})$ qualquer vetor tangente a $\partial\Omega$ em um ponto $\bar{x} \in \partial\Omega$, e então dizer que $\nabla u \perp \partial\Omega$, é equivalente à $\nabla u(x_0) \perp \vec{u}_t(x_0)$ onde $x_0 \in \partial\Omega$. Disto segue que podemos tomar $\nabla u(x_0)$ como vetor normal a $\partial\Omega$, e então normalizando este vetor, podemos tomar finalmente $\nu(x_0) = \pm \frac{\nabla u(x_0)}{|\nabla u(x_0)|}$ como o vetor normal unitário a $\partial\Omega$ em cada $x_0 \in \partial\Omega$, onde o sinal $\pm$ nos indica a orientação do vetor acima. Usando o fato acima e também que $u = 0$ em $\partial\Omega$, segue-se que para cada $x_0 \in \partial\Omega$ temos

$$c^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \nu}(x_0) = (\nabla u(x_0) \cdot \nu(x_0))^2 = |\nabla u(x_0)|^2 = |\nabla u(x_0)|^2 + \frac{2}{N}u(x_0) = z(x_0).$$

Assim em $\partial\Omega$ mostramos que

$$z = |\nabla u|^2 + \frac{2}{N}u = c^2$$

Agora mostraremos que $\Delta z \geq 0$ em Ω . De fato

$$\Delta z = \sum_{j=1}^N z_{x_j x_j} = -\frac{2}{N} + \Delta(|\nabla u|^2) = -\frac{2}{N} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N u_{x_i}^2 \right)_{x_j x_j} =$$

$$-\frac{2}{N} + 2 \sum_{i,j=1}^N [u_{x_i x_j}^2 + u_{x_i} u_{x_i x_j x_j}] = -\frac{2}{N} + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j x_j}.$$

Mas

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j x_j} &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j x_j} = 2 \sum_{i=1}^N u_{x_i} \left(\sum_{j=1}^N (u_{x_i x_j x_j}) \right) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N u_{x_i} (\Delta u_{x_i}) = 2 \sum_{i=1}^N u_{x_i} (\Delta u)_{x_i} = 0, \end{aligned}$$

pois $\Delta u = -1$. Logo

$$\Delta z = 2 \sum_{i,j}^N u_{x_i x_j}^2 - \frac{2}{N}.$$

De (2.6) temos que

$$1 \leq N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 \implies \frac{2}{N} \leq 2 \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 \implies 2 \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 - \frac{2}{N} \geq 0.$$

Portanto $\Delta z \geq 0$, de modo que

$$-\Delta z = \frac{2}{N} - 2 \sum_{i,j}^N u_{x_i x_j}^2 \leq 0.$$

Lema 2.1.9 *Usando o Princípio do Máximo Forte (A.2.3) vamos mostrar que $z(x) \leq c^2$, para todo $x \in \Omega$.*

No Lema (2.1.7) mostramos que z satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta z \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ z = c^2 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $M = z(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} z$, então pelo Princípio do Máximo Forte (A.2.3) temos que $z = M$ em Ω , por continuidade segue que $z = M$ em $\overline{\Omega}$. Em particular $z = M$ em $\partial\Omega$, mas $z = c^2$ em $\partial\Omega$, de onde segue que $M = c^2$. Portanto podemos concluir que $z = c^2$ em $\overline{\Omega}$, em particular, $z = c^2$ em Ω . Caso contrário, $z(x) < M$ para todo $x \in \Omega$, e então z atinge o máximo em $\partial\Omega$. Mas novamente temos que $z = c^2$ em $\partial\Omega$, e assim $M = c^2$. Logo $z(x) < c^2$ para todo $x \in \Omega$. Portanto mostramos que $z(x) \leq c^2$ para todo $x \in \Omega$.

Lema 2.1.10 *Mostraremos agora que*

$$u_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{N}\delta_{ij}(x), \text{ onde } \delta_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.9)$$

Observação 2.1.11 *O Lema 2.1.10 nos diz que a solução u é decrescente ao longo de qualquer direção tomada.*

Primeiramente mostraremos que $z = c^2$ em Ω . Suponha que $z(x) < c^2$ para algum $x \in \Omega$. Como z é contínua, segue-se que $z < c^2$ em uma vizinhança de x em Ω . Então integrando em Ω , temos

$$\int_{\Omega} z(x)dx < \int_{\Omega} c^2 dx = c^2|\Omega|, \quad (2.10)$$

por outro lado

$$\int_{\Omega} z(x)dx = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + \frac{2}{N}u(x))dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{2}{N} \int_{\Omega} u(x)dx. \quad (2.11)$$

Agora observemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = - \int_{\Omega} u(x)\Delta u(x)dx = \int_{\Omega} u(x)dx,$$

e então substituindo em (2.11) segue-se que

$$\int_{\Omega} z(x)dx = \left(1 + \frac{2}{N}\right) \int_{\Omega} u(x)dx.$$

Substituindo este valor em (2.10) segue-se que

$$\left(1 + \frac{2}{N}\right) \int_{\Omega} u(x) < c^2|\Omega|,$$

de modo que

$$(N+2) \int_{\Omega} u(x)dx < Nc^2|\Omega|,$$

e isto contradiz (2.2). Logo $z = c^2$ em Ω .

Vamos mostrar (2.9). Como $z = c^2$ em Ω , então $\Delta z = 0$ em Ω . Assim

$$0 = \Delta z = 2 \sum_{i,j} u_{x_i x_j}^2 - \frac{2}{N} \implies N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 = 1.$$

De (2.6) segue-se que

$$1 \leq N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 \leq 1.$$

Assim

$$1 = N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 = N \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2,$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 = \sum_{i,j=1}^N (u_{x_i x_j})^2 = \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (u_{x_i x_j})^2 \iff \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (u_{x_i x_j})^2 = 0 \iff$$

$$(u_{x_i x_j})^2 = 0 \text{ para } i \neq j = 1, \dots, N \iff u_{x_i x_j} = 0 \text{ para } i \neq j = 1, \dots, N.$$

Assim

$$u_{x_i x_j} = 0 \text{ para } i \neq j = 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

Mostraremos a seguir que

$$u_{x_i x_i} = -\frac{1}{N}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Já mostramos que

$$1 = N \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 \implies \sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2 = \frac{1}{N}.$$

Além disso aplicando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz aos vetores $w = (u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_N x_N})$ e $v = (1, \dots, 1)$, obtemos

$$1 = |\Delta u| = |\langle w, v \rangle| \leq |w||v| = \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{x_i x_i})^2} = \sqrt{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = 1.$$

Assim mostramos que

$$|\langle w, v \rangle| = |w||v|$$

e portanto u e v são linearmente dependentes. Então existe $\lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda w$, ou seja

$$(1, \dots, 1) = (\lambda u_{x_1 x_1}, \dots, \lambda u_{x_N x_N}) \implies$$

$$u_{x_i x_i} = \frac{1}{\lambda}, \text{ para todo } i = 1, \dots, N.$$

Como $\Delta u = -1$, segue-se então que

$$-1 = \Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} = \frac{N}{\lambda} \implies \lambda = -N.$$

Logo

$$u_{x_i x_i} = -\frac{1}{N}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13) conclui-se finalmente

$$u_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{N} \delta_{ij}(x).$$

Lema 2.1.12 *Mostraremos agora que u toma a forma*

$$u(x) = \frac{1}{2N}(A - r^2), \quad (2.14)$$

onde A é uma constante. E finalmente concluiremos que Ω é uma bola de raio $r = Nc$ e centro na origem.

Já mostramos que u atinge seu máximo em $\overline{\Omega}$ em um ponto $x_0 \in \Omega$, ou seja existe $x_0 \in \Omega$ tal que $M = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 \in \Omega$ e que u atinge seu máximo em 0 . Para ver isto basta definir a função $u(x) = v(x - x_0)$. Suponha primeiramente que Ω é convexo.

Dado $v \in \Omega$ onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, temos então que $\{tv : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$. Como já mostramos que u atinge seu máximo em $0 \in \Omega$ então vamos centralizar nosso sistema de coordenadas em 0 . Tomemos um caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}$ dada por $\lambda(t) = tv$. Considere agora também $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $u(x) = u(x_1, \dots, x_N)$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(t) = u(\lambda(t))$ ou seja g é a função composta de u com λ . Assim temos $g(1) = u(\lambda(1)) = u(v)$ e $g(0) = u(\lambda(0)) = u(0)$. Além disso temos

$$g'(t) = u(\lambda(t))' = \sum_{i=1}^N u_{x_i}(\lambda(t)) \alpha_i \quad (2.15)$$

$$g''(t) = u(\lambda(t))'' = \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}(\lambda(t)) \alpha_i \alpha_j \quad (2.16)$$

Já mostramos que $u_{x_i x_j} = -\frac{1}{N} \delta_{ij}$. Assim

$$g''(t) = u(\lambda(t))'' = \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}(\lambda(t)) \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N u_{x_i x_j}(\lambda(t)) \alpha_i \alpha_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N -\frac{\delta_{ij}}{N} (\lambda(t)) \alpha_i \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{N} \alpha_i \alpha_i = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{N} \alpha_i^2 = -\frac{1}{N} r^2.$$

Assim

$$g''(t) = -\frac{1}{N} r^2. \quad (2.17)$$

Integrando (2.17) de 0 até s obtemos

$$g'(s) - g'(0) = \int_0^s g''(t) dt = \int_0^s -\frac{1}{N} r^2 dt = -\frac{s}{N} r^2. \quad (2.18)$$

Agora

$$g'(s) = \sum_{i=1}^N u_{x_i}(\lambda(s)) \alpha_i \text{ e } g'(0) = \sum_{i=1}^N u_{x_i}(\lambda(0)) \alpha_i = \sum_{i=1}^N u_{x_i}(0) \alpha_i.$$

Agora por hipótese 0 é ponto de máximo para u , assim

$$\nabla u(0) = 0 \implies u_{x_i}(0) = 0, \forall i = 1, \dots, N \implies \sum_{i=1}^N u_{x_i}(0) \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, N \implies g'(0) = 0.$$

Então (2.18) torna-se

$$g'(s) = -\frac{s}{N} r^2.$$

Integrando de 0 até 1 temos que:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = -\int_0^1 \frac{s}{N} r^2 ds = -\frac{r^2}{2N}.$$

Como $g(1) = u(v)$ e $g(0) = u(0)$ segue-se então que

$$u(v) = u(0) - \frac{r^2}{2N}. \quad (2.19)$$

Agora vamos determinar o valor $u(0)$. Já mostramos que $z = c^2$ em Ω . Assim para todo $x \in \Omega$ temos

$$c^2 = z(x) = |\nabla u(x)|^2 + \frac{2}{N} u(x).$$

Em particular para $x = 0$ temos

$$c^2 = z(0) = |\nabla u(0)|^2 + \frac{2}{N} u(0).$$

Como 0 é ponto de máximo para u obtemos finalmente que

$$u(0) = \frac{Nc^2}{2}. \quad (2.20)$$

Logo substituindo (2.20) em (2.19) obtemos

$$u(v) = \frac{Nc^2}{2} - \frac{r^2}{2N} = \frac{1}{2N}[N^2c^2 - r^2].$$

Fazendo-se $A = N^2c^2$ segue-se finalmente que

$$u(v) = \frac{1}{2N}[A - r^2].$$

Como $v \in \overline{\Omega}$ era arbitrário segue-se que

$$u(x) = \frac{1}{2N}[A - r^2]. \quad (2.21)$$

Como u anula-se em $\partial\Omega$, então

$$0 = \frac{1}{2N}[A - r^2] \implies A - r^2 = 0 \implies A = r^2 \implies r = \sqrt{A} = -Nc.$$

Logo u é radialmente simétrica ou seja $u(x) = w(r)$, onde $r = |x|$, e Ω é uma bola de centro na origem e raio $r = -Nc$, ou seja $\Omega = B_r(0)$.

Agora vamos mostrar que Ω é uma bola no caso geral. Com efeito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \Delta u - \Delta_S u - (N-1)k \frac{\partial u}{\partial \nu} = -1 - (N-1)k \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Acima, utilizamos a fórmula do Laplaciano Δ_S na fronteira de Ω que é uma variedade diferenciável. Denotamos por k a curvatura média de $\partial\Omega$. Essa fórmula pode ser encontrada em livros de geometria como em [5], não a detalharemos aqui. Usando os Lemas 2.1.7 e 2.1.10 podemos concluir que $z = |\nabla u|^2 + \frac{2}{N}u = c^2$ em $\overline{\Omega}$, em particular $z = |\nabla u|^2 + \frac{2}{N}u = c^2$ em $\partial\Omega$, logo $|\nabla u|^2 = c^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2$ em $\partial\Omega$. Ora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(|\nabla u|^2 + \frac{2}{N}u \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{N} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{1}{N} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(-1 - (N-1)k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{N} \right) \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

logo

$$\left(-1 - (N-1)k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{N} \right) = 0.$$

Portanto a curvatura de $\partial\Omega$ é

$$k = -\frac{1}{Nc}.$$

De acordo com o Teorema de (ver [6] ou [22]), concluimos que Ω é uma bola de raio $R = -Nc$. Agora sabemos que Ω é uma bola e portanto convexa, então repetindo o raciocínio do Lema acima, concluimos finalmente que

$$u(x) = \frac{1}{2N}(A - r^2),$$

e com isto terminamos a demonstração do Teorema. ■

2.2 Problema com $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c|x|$ na fronteira

Assuma que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado cuja fronteira é de classe C^2 e contém a origem estritamente em seu interior. Seja ν o vetor unitário exterior a $\partial\Omega$.

Teorema 2.2.1 *Suponha que exista uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -cr & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $r = |x|$ e c é uma constante e suponha que Ω seja convexo. Então Ω é uma bola N -dimensional e $u = \frac{A - r^2}{2N}$.

Antes de demonstrarmos o Teorema (2.2.1) necessitamos do seguinte Lema:

Lema 2.2.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema (2.2.1), temos*

$$\int_{\Omega} u dx = c^2 \int_{\Omega} r^2 dx. \quad (2.23)$$

Demonstração. Primeiramente introduziremos a função auxiliar $h = 2u - \sum_{i=1}^N x_i u_{x_i}$. Então temos $\Delta h = 0$. Usando a identidade de Green

$$\int_{\Omega} (h \Delta u - u \Delta h) dx = \int_{\partial\Omega} \left(h \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h}{\partial \nu} \right) d\sigma, \quad (2.24)$$

A condição $u = 0$ em $\partial\Omega$, mais o fato de h ser harmônica nos fornece

$$\int_{\Omega} h dx = c \int_{\partial\Omega} r h d\sigma. \quad (2.25)$$

Agora vamos calcular ambos os lados de (2.25) individualmente. Aplicando o Teorema da Divergência (C.1) temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} h dx &= \int_{\Omega} (2 + N) u dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(xu) dx = \\ &= \int_{\Omega} (2 + N) u dx - \int_{\Omega} (xu) \nu d\sigma = \int_{\Omega} (2 + N) u dx,\end{aligned}$$

pois $u = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto

$$\int_{\Omega} h dx = \int_{\Omega} (2 + N) u dx. \quad (2.26)$$

E ainda como u anula-se em $\partial\Omega$ (conseqüentemente $\nu = \pm \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$) e $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ segue-se então que

$$\begin{aligned}c \int_{\partial\Omega} r h d\sigma &= -c \int_{\partial\Omega} r x_i u_{x_i} d\sigma = -c \int_{\partial\Omega} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = \\ &= -c \int_{\partial\Omega} r^2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma = c^2 \int_{\partial\Omega} r^3 \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma = \frac{c^2}{4} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(r^4)}{\partial \nu} d\sigma = \\ &= \frac{c^2}{4} \int_{\Omega} \Delta(r^4) dx = c^2(N + 2) \int_{\Omega} r^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$c \int_{\partial\Omega} r h d\sigma = c^2(N + 2) \int_{\Omega} r^2 dx. \quad (2.27)$$

De (2.25), (2.26), e (2.27) segue-se que

$$\int_{\Omega} u dx = c^2 \int_{\Omega} r^2 dx,$$

e isto demonstra o Lema. ■

Agora vamos a prova do Teorama (2.2.1).

Demonstração do Teorema 2.2.1

Considere o funcional $\Phi = \sum_{i=1}^N u_{x_i} u_{x_i} - c^2 r^2$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{i,j=1}^N (2u_{x_i} u_{x_i x_j x_j} + 2u_{x_i x_j} u_{x_i x_j}) - 2Nc^2 = 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j x_j} + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2Nc^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N u_{x_i} \left(\sum_{j=1}^N u_{x_i x_j x_j} \right) + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2Nc^2 = 2 \sum_{i=1}^N u_{x_i} (\Delta u_{x_i}) + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2Nc^2 =\end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=1}^N u_{x_i} (\Delta u)_{x_i} + 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2Nc^2.$$

Como $\Delta u = -1$ segue então que $(\Delta u)_{x_i} = 0$ e portanto a equação acima simplifica-se em

$$\Delta \Phi = 2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2Nc^2.$$

Podemos reescrever a soma acima como

$$2 \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} - 2c^2 N = 2 \sum_{i,j=1}^N \left(u_{x_i x_j} + \frac{\delta_{ij}}{N} \right)^2 + \frac{2}{N} - 2c^2 N \geq \frac{2}{N} - 2c^2 N.$$

Portanto

$$\Delta \Phi \geq \frac{2}{N} - 2c^2 N. \quad (2.28)$$

Vamos assumir por um momento que $cN \leq 1$, argumento tal que será justificado na Observação (2.2.5) posteriormente. Então nós temos

$$\Delta \Phi \geq 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.29)$$

Como $u = 0$ em $\partial\Omega$, então segue que $\nu = \pm \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Conseqüentemente em $\partial\Omega$ nós temos

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 - c^2 r^2 = 0. \quad (2.30)$$

Aplicando as Fórmulas de Green e substituindo as condições de fronteira resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi dx &= \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta u dx - c^2 \int_{\Omega} r^2 dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} u \Delta u dx - c^2 \int_{\Omega} r^2 dx = \\ &= - \int_{\Omega} u \Delta u dx - c^2 \int_{\Omega} r^2 dx = \int_{\Omega} u dx - c^2 \int_{\Omega} r^2 dx \end{aligned}$$

Assim

$$\int_{\Omega} \Phi dx = \int_{\Omega} u dx - c^2 \int_{\Omega} r^2 dx.$$

Pelo Lema (2.2.2) acima, temos então que

$$\int_{\Omega} \Phi dx = 0. \quad (2.31)$$

Pelo Princípio do Máximo forte (A.2.3) juntamente com as propriedades (2.29)-(2.31) de Φ implica que $\Phi \equiv 0$ em Ω . Com efeito, temos que

$$\begin{cases} -\Delta\Phi \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

Primeiramente vamos aplicar o Princípio do Máximo Forte (A.2.3) para mostrar que $\Phi \leq 0$ em Ω .

Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $M = \Phi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \Phi$, então pelo Princípio do Máximo Forte (A.2.3) temos que $\Phi = M$ em Ω , por continuidade segue que $\Phi = M$ em $\overline{\Omega}$. Em particular $\Phi = M$ em $\partial\Omega$, mas $\Phi = 0$ em $\partial\Omega$, logo $M = 0$. Portanto podemos concluir que $\Phi = 0$ em $\overline{\Omega}$, em particular, $\Phi = 0$ em Ω . Caso contrário, $\Phi(x) < M$ para todo $x \in \Omega$, e então Φ atinge o máximo em $\partial\Omega$. Mas novamente temos que $\Phi = 0$ em $\partial\Omega$, e assim $M = 0$. Logo $\Phi(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$. Portanto mostramos que $\Phi(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Temos portanto as seguintes condições

$$\int_{\Omega} \Phi dx = 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \Phi \in C^1(\Omega).$$

Afirmamos então que $\Phi = 0$ em Ω . Suponha que exista $x \in \Omega$ tal que $\Phi(x) = \alpha < 0$. Então existe $B = B_R(x) \subset \Omega$ tal que $\Phi(x) \leq \frac{\alpha}{2}$ pois Φ é contínua. Logo

$$\int_{\Omega} \Phi dx = \int_{\Omega \setminus B} \Phi dx + \int_B \Phi dx \leq \int_B \Phi dx \leq \int_B \frac{\alpha}{2} dx = \frac{\alpha}{2} c|B| < 0,$$

pois $\frac{\alpha}{2} < 0$ e $|B| > 0$, onde $|B|$ denota a medida da bola B em $\mathbb{R}^N$. Portanto

$$\int_{\Omega} \Phi dx < 0.$$

Absurdo se compararmos com (2.31). Portanto $\Phi \equiv 0$ em Ω . Isto em particular força a igualdade em (2.28), de modo que

$$u_{x_i x_j}(x) + \frac{\delta_{ij}}{N}(x) = 0.$$

Seguindo-se o mesmo argumento do Lema (2.1.12) concluímos que u toma a forma

$$u(x) = \frac{1}{2N}(A - r^2).$$

onde A é uma constante. Como u anula-se em $\partial\Omega$, então

$$0 = \frac{1}{2N}[A - r^2] \implies A - r^2 = 0 \implies A = r^2 \implies r \text{ é constante.}$$

Logo u é radialmente simétrica ou seja $u(x) = v(r)$, onde $r = |x|$ e Ω é uma bola de centro na origem e raio $r = \sqrt{A}$, ou seja $\Omega = B_r(0)$. ■

Observação 2.2.3 *Em 1971, James Serrin provou o seguinte resultado clássico. Suponha que exista uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfazendo a equação diferencial elíptica*

$$a(u, |p|)\Delta u + h(u, |p|)u_{x_i}u_{x_j}u_{x_{jj}} = f(u, |p|) \text{ em } \Omega,$$

onde a, f e h, p_i, p_j são funções continuamente diferenciáveis de u e p (aqui $p = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N})$ denota o vetor gradiente de u). Suponha ainda que $u > 0$ em Ω e que u satisfaça as condições de fronteira

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = c \text{ em } \partial\Omega.$$

Então Ω deve ser uma bola e u é radialmente simétrica.

Observação 2.2.4 *As hipóteses de suavidade C^2 feitas em u na Proposição (2.2.1) podem ser enfraquecidas, no entanto as provas se tornariam mais técnicas. Não abordaremos isso aqui.*

Observação 2.2.5 *A hipótese $cN \leq 1$ na prova da Proposição (2.2.1) não é essencial. Para ver isto, note de fato que devido as condições (2.2.1) em u juntamente com o Teorema da Divergência, verificamos que*

$$|\Omega| = - \int_{\Omega} \Delta u dx = - \int_{\partial\Omega} r d\sigma \geq cN \int_{\partial\Omega} \frac{r dA}{N} = cNA \text{ da geometria.}$$

Consequentemente, $cN \leq 1$.

Observação 2.2.6 *Usando os mesmos argumentos e trocando a segunda condição de fronteira por $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -cr^\alpha$, onde $\alpha \geq 1$ (note que isto já implica que $cN \text{dist}(0, \partial\Omega)^{\alpha-1} \leq 1$), $d = \text{diam}(\Omega)$ e*

$$0 < c \leq \frac{2^{\alpha-1}}{d^{\alpha-1} \sqrt{\alpha N(N-2\alpha-2)}}$$

nós temos a conclusão da Proposição (2.2.1)

Observação 2.2.7 *Mais geral ainda, se $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -f(r)$ onde $g(r) = f^2(r)$ satisfaz as condições*

$$\int_{\Omega} (rg' - 2g)dx \geq 0,$$

$$g'' + \frac{N-1}{r}g' - \frac{2}{N} \leq 0$$

então a Proposição (2.2.1) é satisfeita. Além disso, isto implica que ou $f = c_1$ ou $f = c_2r$ para algumas constantes positivas c_1 e c_2 . Uma destas implicações é que sob certas hipóteses gerais, existem somente duas formas possíveis para a derivada na fronteira: ou $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -c_1$ como na Observação (2.2.3) de Serrin, ou $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -c_2r$ como na Proposição (2.2.1).

Observação 2.2.8 *A interpretação física do Teorema 2.1.1 é a mesma do Teorema 2.2.1.*

Apêndice A

A Princípios de Máximo

Vamos desenvolver princípios de máximo para Equações Diferenciais Parciais Elípticas de segunda ordem. Os resultados aqui estudados podem ser vistos em Evans (ver [8]).

Métodos de princípio de máximo estão baseados sob a observação que se uma função u de classe C^2 atinge seu máximo sob um conjunto aberto Ω em um ponto $x_0 \in \Omega$, então:

$$Du(x_0) = 0 \quad D^2u(x_0) \leq 0,$$

onde esta desigualdade significa que a matriz simétrica $D^2u = ((u_{x_i x_j}))$ é não positiva definida em x_0 . Vamos considerar operadores elípticos L , tendo a forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu,$$

onde os coeficientes a_{ij}, b^i, c são contínuos e satisfazem a condição de elipticidade uniforme, a qual definiremos a seguir. Nós vamos assumir, sem perda de generalidade, a condição de simetria $a^{ij} = a^{ji}(i, j = 1, \dots, N)$.

Definição A.1 Dizemos que o operador diferencial L é (uniformemente) elíptico se existir uma constante θ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \text{ q.t.p } x \in \Omega \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

A.1 Princípios de Máximo Fraco

Primeiramente, vamos identificar sob quais circunstâncias uma função deve atingir seu máximo (ou mínimo) na fronteira. Estamos assumindo sempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado.

Teorema A.1.1 *Assuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c = 0$ em Ω .*

i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω , então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) *Se $Lu \geq 0$ em Ω , então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Observação A.1.2 *Uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu \leq 0$ em Ω é chamada de subsolução. Analogamente uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu \geq 0$ em Ω é chamada de supersolução.*

Teorema A.1.3 *Assuma $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω .*

i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω , então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

ii) *Se $Lu \geq 0$ em Ω , então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\min_{\partial\Omega} u^-.$$

Observação A.1.4 *Em particular, se $Lu = 0$ em Ω então*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

A.2 Princípios de Máximo Forte

Lema A.2.1 (Lema de Hopf para Subsoluções) *Assuma $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e que $c = 0$ em Ω . Suponha ainda $Lu \leq 0$ em Ω , e que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

$$u(x_0) > u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Assuma, finalmente que Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 isto é, existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.

i) Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a bola B em x_0 .

ii) Se

$$c \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

a mesma conclusão é válida desde que $u(x_0) \geq 0$.

Lema A.2.2 (Lema de Hopf para Supersoluções) Assuma $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e que $c = 0$ em Ω . Suponha ainda $Lu \geq 0$ em Ω , e que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) < u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Assuma finalmente que Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 isto é, existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.

i) Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a bola B em x_0 .

ii) Se

$$c \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

a mesma conclusão é válida desde que $u(x_0) \leq 0$.

Teorema A.2.3 (Princípio do máximo forte com $c = 0$) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e que $c = 0$ em Ω . Suponha ainda que Ω é conexo, aberto e limitado.

i) Se

$$Lu \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atinge seu máximo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .

ii) Analogamente, se

$$Lu \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atinge seu mínimo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .

Teorema A.2.4 (Princípio do máximo forte com $c \geq 0$) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e que $c \geq 0$ em Ω . Suponha ainda que Ω é conexo.*

i) Se

$$Lu \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atinge um máximo não-negativo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .

ii) Analogamente, se

$$Lu \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atinge um mínimo não-positivo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .

Observação A.2.5 *No próximo Lema não estaremos fazendo nenhuma hipótese com respeito ao sinal de c .*

Lema A.2.6 (Um Refinamento do Lema de Hopf) *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Assuma*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Suponha ainda $u \not\equiv 0$.

i) *Se $x_0 \in \partial\Omega$, $u(x_0) = 0$, e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

ii) *Mais ainda*

$$u > 0 \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Seja $w := e^{-\alpha x_1}u$, onde $\alpha > 0$ será selecionado mais abaixo. Então $u = e^{\alpha x_1}w$, assim

$$cu \geq \Delta u = \Delta(e^{\alpha x_1}w) = 2\alpha^2 u + \alpha e^{\alpha x_1}w_{x_1} + e^{\alpha x_1}\Delta w.$$

Portanto

$$-\Delta w - 2\alpha w_{x_1} \geq (\alpha^2 - c)w \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

pois como $w = e^{-\alpha x_1}u \geq 0$ em Ω e $c \in L^\infty(\Omega)$, segue que $\|c\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \geq c(x) \forall x \in \Omega$.

Disto segue-se que se tomar-mos $\alpha = \|c\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$ teremos $\alpha^2 - c \geq 0$ em Ω . Conseqüentemente w é uma supersolução para o operador elíptico $Lw := -\Delta w - 2\alpha w_{x_1}$, o qual não tem termo de zero ordem. Pelo princípio do máximo forte A.2.3, segue que $w > 0$ em Ω . Com efeito, suponha que exista $y_0 \in \Omega$ tal que $w(y_0) = 0$. Então como $w = e^{-\alpha x_1}u$ e $e^{-\alpha x_1} > 0$ segue que existe $y_0 \in \Omega$ tal que $u(y_0) = 0$. Mas como $u \geq 0$ em Ω , segue que y_0 é ponto de mínimo para w em Ω . Portanto por (A.2.3) parte (ii) concluimos que w é constante em Ω . Mas como $w(y_0) = 0$, segue que $w(y) = 0$ para todo $y \in \Omega$. Pela continuidade de w em $\overline{\Omega}$ segue que $w = 0$ em $\overline{\Omega}$ e isto implica em $u = 0$ em $\overline{\Omega}$. Absurdo, pois por hipótese $u \neq 0$. Portanto segue que $w > 0$ em Ω . Agora por hipótese existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $w(x_0) = 0$, e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 , além disso pelo que mostramos acima temos $w(x_0) < w(x) \forall x \in \Omega$. Pelo Lema de Hopf (A.2.2) concluimos que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Mas como

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = e^{\alpha x_1} \nabla w(x_0) \nu(x_0) = e^{-\alpha x_1^0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$$

e $u(x_0) = 0$. Seque que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Como $w > 0$ em Ω e $e^{-\alpha x_1} > 0$, concluimos finalmente que $u > 0$ em Ω . ■

Teorema A.2.7 *Suponha $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $d \in L^\infty(\Omega)$ satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta v + d(x)v \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ v \leq 0 & \text{em } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Se v se anula em um ponto $y_0 \in \Omega$, então $v \equiv 0$.

Antes de demonstrar-mos o Teorema acima, demonstraremos o seguinte Lema que é essencialmente o Lema (A.2.6) com uma mudança de sinal.

Lema A.2.8 *Suponha $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $d \in L^\infty(\Omega)$ satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta v + d(x)v \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ v \leq 0 & \text{em } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Suponha ainda que

i) Ω satisfaça a condição da bola interior em $x^0 \in \partial\Omega$,

ii) $v(x_0) = 0$,

iii) $v \not\equiv 0$. Então

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a bola em x_0 .

Demonstração. Façamos $v = -u$ e $-c(x) = d(x)$ para $x \in \Omega$. Portanto temos que $u(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Temos

$$\Delta v + d(x)v = \Delta(-u) - d(x)u = -\Delta u - d(x)u = -\Delta u + c(x)u \geq 0.$$

Assim temos

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso segue de *i), ii), iii)* que:

iv) Ω satisfaça a condição da bola interior em $x_0 \in \partial\Omega$,

v) $u(x_0) = 0$,

vi) $u \not\equiv 0$.

Então aplicando o Teorema (A.2.6) parte *i)* concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Portanto

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Além disso pela parte *ii*) do Teorema (A.2.6), concluímos ainda que $u > 0$ em Ω de modo que $v < 0$ em Ω . ■

Demonstração do Teorema A.2.7

Suponha que $v \not\equiv 0$. Pela demonstração do Lema (A.2.8) temos que $v < 0$ em Ω . Absurdo pois por hipótese existe $y_0 \in \Omega$ tal que $v(y_0) = 0$. Logo $v \equiv 0$. ■

Apêndice B

B Espaços de Sobolev

B.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Seja $I =]a, b[$ um intervalo limitado ou não e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Os resultados deste apêndice podem ser encontrados em Brezis (ver [4]).

Definição B.1.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}.$$

Para cada $u \in W^{1,p}(I)$ dizemos que g é a derivada generalizada de u e escrevemos $g = u'$.

Observação B.1.2 *O espaço $W^{1,p}$ está munido da norma $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$, ou as vezes da norma equivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$.*

Observação B.1.3 *Se $p = 2$, denotamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. O espaço H^1 está munido do produto escalar*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

e norma associada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

a qual é equivalente a norma $W^{1,2}$.

Teorema B.1.4 *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema B.1.5 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$; Então existe uma função $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ q.t.p em I e ainda*

$$\tilde{u}(b) - \tilde{u}(a) = \int_a^b u'(t) dt \quad \forall a, b \in \bar{I}.$$

Teorema B.1.6 *Existe uma constante C (dependendo somente de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

dito de outra maneira $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ com imersão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, quando I é limitado verifica-se

i) a imersão $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ é compacta para $1 \leq p \leq \infty$,

ii) a imersão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para $1 \leq q < \infty$.

B.2 O Espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

Definição B.2.1 *Dado $1 \leq p < \infty$, designa-se por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_c^\infty(I)$ na norma de $W^{1,p}(I)$, abreviadamente $W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^\infty(I)}^{W^{1,p}(I)}$.*

Denota-se $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

O espaço $W_0^{1,p}(I)$ está munido da norma induzida por $W^{1,p}(I)$; o espaço $H_0^1(I)$ está munido do produto escalar induzido por $H^1(I)$.

O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach separável e reflexivo para $1 < p < \infty$. O espaço $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert separável.

Teorema B.2.2 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que I é limitado. Então existe uma constante C (dependendo de $|I|$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad u \in W_0^{1,p}(I).$$

De outra maneira, em $W_0^{1,p}(I)$ a quantidade $\|u'\|_{L^p}$ é uma norma equivalente a norma de $W^{1,p}$.

B.3 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição B.3.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por (33),*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \right\} \quad (33)$$

Coloca-se $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|,$$

ou as vezes da norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ está munido do produto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2};$$

e norma associada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual é equivalente a norma de $W^{1,2}$.

Teorema B.3.2 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Observação B.3.3 *Se $p < N$, então*

$$i) \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ compactamente para } 1 \leq q < p^*,$$

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ continuamente para $1 \leq q \leq p^*$, onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

Observação B.3.4 Se $N \geq 3$ e $p = 2$, então

i) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ compactamente para $1 \leq p < 2^*$,

ii) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ continuamente para $1 \leq q \leq 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Observação B.3.5 Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty)$, compactamente e continuamente.

B.4 O Espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definição B.4.1 Seja $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$, abreviadamente $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

Denota-se $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável. $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar de $H^1(\Omega)$.

Teorema B.4.2 (Desigualdade de Poincaré) Suponhamos que Ω é um aberto limitado. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}}$.

Vamos mostrar a equivalência enunciada no teorema acima, mas não mostraremos a última desigualdade. Por um lado temos

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Por outro lado da desigualdade de Poincaré temos

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Apêndice C

C Tópicos de Cálculo Avançado

Teorema C.1 (Teorema da Divergência) *Seja $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 , e $\Omega \subset U$ aberto, limitado, com fronteira suave. Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \nu d\sigma, \quad (34)$$

onde ν é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$.

Valem as chamadas Identidades ou Fórmulas de Green

Teorema C.2 *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma, \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma, \quad (36)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (37)$$

Teorema C.3 (Desigualdade de Jensen 1) *Assuma que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja função convexa e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado. Suponha ainda que $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Então*

$$f \left(\int_{\Omega} u dx \right) \leq \int_{\Omega} f(u) dx,$$

onde $|\Omega|$ é a medida de u sobre Ω e $\int_{\Omega} u dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$.

Teorema C.4 (Desigualdade de Jensen 2) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e suponha que $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva q.t.p, então*

$$f\left(\frac{\int_{\Omega} u(x)g(x)dx}{\int_{\Omega} g(x)dx}\right) \leq \frac{\int_{\Omega} f(u(x))g(x)dx}{\int_{\Omega} g(x)dx},$$

se $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva.

Definição C.5 *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e u uma função de classe C^2 em Ω . A função u é chamada harmônica, sub-harmônica ou super-harmônica, respectivamente em Ω se ela satisfaz $\Delta u = 0, \geq 0$, ou ≤ 0 , respectivamente. (ver [12])*

Teorema C.6 *Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaça $\Delta u = 0 (\geq 0, \leq 0)$ em Ω . Então para qualquer bola $B = B_R(y) \subset \subset \Omega$, nós temos*

$$u(y) = (\geq 0, \leq 0) \frac{1}{N\omega_N R^N} \int_{\partial\Omega} u d\sigma, \quad (38)$$

ou

$$u(y) = (\geq 0, \leq 0) \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\Omega} u dx, \quad (39)$$

onde ω_N é a medida da bola B em $\mathbb{R}^N$. Para funções harmônicas o Teorema (C.6) assegura que o valor da função no centro da bola B é igual ao valor médio da integral sobre ambas a fronteira $\partial\Omega$ e a bola B . Estes resultados, são conhecidos como teoremas do valor médio, e são usados para caracterizar funções harmônicas. (ver [12])

Para uma demonstração do próximo resultado (ver Lima [14]).

Lema C.7 *As seguintes afirmações sobre uma função $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no intervalo I , são equivalentes:*

- a) w é côncava.*
- b) A derivada $w' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-crescente.*
- c) para quaisquer $a, t \in I$, tem-se $w(t) \leq w(a) + w'(a)(t - a)$, ou seja o gráfico de w está situado abaixo, de qualquer de suas tangentes.*

Apêndice D

D Regularidade

Os resultados de Regularidade podem ser encontrados em Kavian (ver [13]).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i, j \leq N}$, $b(\cdot) := (b_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$. e c uma função. Considere L o operador de segunda ordem dado por

$$Lu := - \sum_{i,j}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + b \cdot \nabla u + cu \quad (40)$$

Sem perda de generalidade vamos considerar em L que $a_{ij} = a_{ji}$ e $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ e ainda considerar que o operador L verifique a condição de elipticidade, ou seja existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \text{ q.t.p } x \in \Omega \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema D.1 (Teorema de Schauder) *Seja L um operador definido pela relação (40), e suponhamos que os coeficientes $a_{ij}, b, c \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $\theta \in (0,1)$ e algum inteiro $k \geq 0$ e que além disso a condição de elipticidade seja satisfeita; suponhamos Ω um aberto limitado de classe $C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ e $f \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$. Então existe uma única função $u \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$, tal que*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (41)$$

Além disso existe uma constante C dependendo somente de Ω, θ, α e ainda das normas dos coeficientes $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\|u\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} \right), \quad (42)$$

$$\|D^2u\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})} \right). \quad (43)$$

Teorema D.2 (Teorema de Calderón-Zigmund) *Seja L um operador dado por (40), suponha que os coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, e $b, c \in L^\infty(\Omega)$ e que a condição de elipticidade seja satisfeita. Assim se Ω é um aberto limitado de classe $C^{1,1}$ e $f \in L^p(\Omega)$ para algum $1 < p < \infty$, então existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (44)$$

e ainda, para alguma constante C independente de f, u nós temos

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)}). \quad (45)$$

Em particular se $p < \frac{N}{2}$ e $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ existe uma única solução $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (46)$$

D.1 Bootstrap

Como aplicação da teoria da regularidade, nós vamos usar a técnica de Bootstrap para regularizar a solução de um determinado problema. Tal técnica é utilizada para passarmos de uma solução fraca (obtida por exemplo por um método variacional) para uma solução clássica. Vamos usar tal técnica para regularizar a solução do seguinte problema:

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um aberto limitado de classe C^∞ , e que $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $u > 0$ verifique a equação semi-linear

$$-\Delta u = u^q, \quad \text{onde } q \in [1, \frac{N+2}{N-2}), \quad (47)$$

então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

- Se $N = 1$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$. Assim em particular como $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in C^0(\overline{\Omega})$ de modo que $u^q \in C^0(\overline{\Omega})$. Como u verifica a equação (47) então $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Conseqüentemente $u^q \in C^2(\overline{\Omega})$, e novamente como u verifica a equação (47) podemos concluir que $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Repetindo este mesmo argumento para qualquer k natural, concluimos que $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para todo k . Portanto $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

• Se $N = 2$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, então neste caso como $p = 2 = N$ segue por resultados de imersão de Sobolev que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para todo p finito (ver Apêndice B), e portanto $u \in L^p(\Omega)$ para todo p finito, donde $u^q \in L^p(\Omega)$ para todo p finito. Pelo Teorema (D.2) concluimos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p finito. Logo $\nabla u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo p finito. Em particular sempre podemos tomar $p > 2$, uma vez que N a dimensão do espaço é fixa. Assim novamente por resultados de imersão de Sobolev como $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ para todo $p > N$, então $\nabla u \in C^0(\overline{\Omega})$. Logo $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e portanto $u^q \in C^1(\overline{\Omega})$. Como u verifica a equação (47) pelo Teorema (D.1) concluimos que $u \in C^3(\overline{\Omega})$. Assim $u^q \in C^3(\overline{\Omega})$, então usando novamente o fato que u satisfaz a equação (47), então novamente do Teorema (D.1) concluimos que $u \in C^5(\overline{\Omega})$. Repetindo este mesmo argumento para qualquer k natural, concluimos que $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para todo k . Portanto $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

• Se $N \geq 3$ então por resultados de imersão de Sobolev sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$ onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Colocando $p_0 = \frac{2^*}{q}$, vemos que $u^q \in L^{p_0}(\Omega)$, pois

$$\int_{\Omega} (u^q)^{p_0} dx = \int_{\Omega} u^{2^*} dx < \infty.$$

Além disso $p_0 > 1$ pois

$$2^* = \frac{2N}{N-2} > \frac{N+2}{N-2} = q, \quad \forall N \geq 3.$$

Então $u \in L^{p_0}(\Omega)$ para algum $1 < p_0 < \infty$. Pelo Teorema (D.2) segue que $u \in W^{2,p_0}$.

Se $2p_0 > N$ então por resultados de imersão de Sobolev segue que $W^{2,p_0}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ onde $\theta := 1 - \frac{N}{2p_0}$. Em particular u

$\in C^0(\overline{\Omega})$ donde segue que $u^q \in C^0(\overline{\Omega})$. Como u verifica a equação (47) pelo Teorema (D.1) concluimos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Assim $u^q \in C^2(\overline{\Omega})$, então usando novamente o fato que u satisfaz a equação (47), então novamente do Teorema (D.1) concluimos que $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Repetindo este mesmo argumento para qualquer k natural, concluimos que $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para todo k . Portanto $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Se $2p_0 = N$ então por resultados de imersão de Sobolev temos que $W^{2,p_0}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para todo p finito. Assim $u \in L^p(\Omega)$ para todo p finito. Portanto $u^q \in L^p(\Omega)$ para todo p

finito. Pelo Teorema (D.2) concluímos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p finito. Estamos nas mesmas condições do caso $N = 2$, portanto podemos concluir que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Se $2p_0 < N$ então por resultados de imersão de Sobolev temos que $W^{2,p_0}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde r satisfaz $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N}$. Além disso $r > 2^*$ pois

$$r > 2^* \Leftrightarrow \frac{r}{q} > \frac{2^*}{q} = p_0 \Leftrightarrow \frac{p_0 N}{(N - 2p_0)q} > p_0 \Leftrightarrow N > (N - 2p_0)q = Nq - \frac{4N}{N - 2} \Leftrightarrow$$

$$N + \frac{4N}{N - 2} > Nq \Leftrightarrow \frac{N^2 + 2N}{N - 2} > Nq \Leftrightarrow q < \frac{N + 2}{N - 2},$$

e isto é verdadeiro por hipótese. Colocando $p_1 = \frac{r}{q}$ temos que $p_1 > p_0 > 1$, além disso $u^q \in L^{p_1}(\Omega)$ pois

$$\int_{\Omega} (u^q)^{p_1} dx = \int_{\Omega} u^r dx < \infty.$$

Pelo Teorema (D.2) segue que $u \in W^{2,p_1}$. Repetindo os mesmos argumentos acima, um número finito de vezes digamos k vezes, construímos uma sequência $1 < p_0 < p_1 < \dots < p_k$ tal que $-\Delta u = u^q \in L^{p_k}(\Omega)$ se $2p_k > N$ e ainda nós temos que $u \in W^{2,p_k}(\Omega)$. Finalmente nós concluímos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p finito. Estamos nas mesmas condições do caso $N = 2$, portanto podemos concluir que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Bibliografia

- [1] Amdeberhan, T. *Two symmetry problems in potential theory*. Electron. J. Differential Equations 2001, No. 43, 5 pp.
- [2] Berestycki, H, Nirenberg, L. *Travelling fronts in cylinders*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9, (1992), No. 5, 497-572.
- [3] Berestycki, B, Nirenberg, L. *On the method of moving planes and the sliding method*, Boletim Soc. Brasil. de Mat. Nova. Ser. 22 (1991), 1-37.
- [4] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [5] do Carmo, Manfredo P., *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [6] do Carmo, Manfredo P., *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [7] Conway, John B., *Functions of one complex variable*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [8] Evans, Lawrence C. - *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol.19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, U.S.A., 1998.
- [9] Gidas, Basilis. *Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science pp. 255-273, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 54, Dekker, New York, 1980.

- [10] Gidas, B; Ni, Wei Ming; Nirenberg, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. 68 (1979), no. 3, 209-243.
- [11] Gidas, B.; Spruck, J. *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Partial Differential Equations 6 (1981), no. 8, 883-901.
- [12] Gilbarg, D; Trudinger, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [13] Kavian, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. French; Mathématiques et Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [14] Lima, Elon Lages. - *Análise Real*, volume 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.(Coleção Matemática Universitária).
- [15] Lima, Elon Lages. - *Curso de Análise*, volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.(Projeto Euclides).
- [16] Lima, Elon Lages. - *Curso de Análise*, volume 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.(Projeto Euclides).
- [17] Lions, P-L. *Two properties of solutions of semilinear problems*. Applicable Anal. 12 (1981), No 4, 267-272.
- [18] Lopes, O. *Symmetry of minimizers for some translation and rotation invariant functionals*. J. Differential Equations 1996, No. 2, 378-388.
- [19] Protter, Murray H. and Weinberger. *Maximum principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., U.S.A., 1967.
- [20] Serrin, J. *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 304-318.
- [21] Sokolnikoff. I. S, *Mathematical theory of elasticity*. McGraw Hill; New York,(1956).

- [22] Spivak, Michael, *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. III. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1975.
- [23] Struwe, M. *Variational methods*. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Third edition. 34. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [24] Weinberger H.F, *Remark on the preceding paper of Serrin*, Arch. Rational. Mech. Anal. 43 (1971), 319-320.