

51170000

Campinas, 20 de Junho de 2000.

A Dinâmica dos Difeomorfismos de Smale em Superfícies

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Iamakuê de Almeida e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de julho de 2000.

Ketty A. de Rezende.
Prof^a Dr^a Ketty Abaroa de Rezende.

Banca Examinadora

Prof^a Dr^a Ketty Abaroa de Rezende
Prof^a Dr^a Claudina Izepe Rodrigues
Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

MADE BC
 CHAMADA:
 14/12/2018
 Ex.
 BO BC/ 42933
 2. 16-2+8/00
 D 12
 * R\$ 11,00
 25/10/00
 SPD

CM-00145909-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Almeida, Iamakaúê de

AL64d A dinâmica dos difeomorfismos de Smale em superfícies /
Iamakaúê de Almeida -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientadora : Ketty Rezende

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções zeta. 2. Difeomorfismos. I. Rezende, Ketty. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 20 de junho de 2000 e aprovada
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Ketty A. de Rezende

Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Claudina Izepe Rodrigues

Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Dr Oziride

Prof (a). Dr (a). OZIRIDE MANZOLI NETO

Índice

Introdução	2
1 Noções Básicas	3
1.1 Resultados Preliminares	3
2 A Dinâmica Simbólica dos Shifts	5
2.1 Exemplos de Shifts e Subshifts	5
2.1.1 Ferradura de Smale	5
2.1.2 J-Ferradura de Franks	9
2.2 Grafos e Representações Matriciais dos Subshifts	12
2.2.1 Matriz 0 – 1 e Grafo de Vértices Rotulados	12
2.2.2 Matriz Inteira e Grafo de Arestas Rotuladas	14
2.2.3 Relação entre Grafos de Vértices Rotulados e de Arestas Rotuladas	17
2.3 Matriz Irredutível	21
3 Invariantes Matriciais dos Shifts	26
3.1 Shifts do tipo Mixing	26
3.2 Entropia	28
3.3 Matrizes Shift Equivalentes	29
4 Função Zeta	34
4.1 Função Zeta para um Subshift do tipo Finito	34
4.2 Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz	37
4.3 Função Zeta de Homologia	41
4.4 Relações entre Funções Zeta e Zeta de Homologia	44
4.5 Função Zeta de Homologia Reduzida	50
5 Realização de Difeomorfismos de Smale	57
5.1 Obstrução para Realização de Subshifts do Tipo Finito	57
5.2 Condições para Realização de Subshifts do Tipo Finito	64
5.3 G-Ferraduras e J-Ferraduras	69

Introdução

Na teoria qualitativa de sistemas dinâmicos é de interesse descrever o comportamento das órbitas. Isto é feito, muitas vezes, através de uma descrição geométrica das órbitas ou de uma descrição algébrica do seu itinerário. Também pode-se associar à órbita um invariante topológico. No conjunto das órbitas de um sistema dinâmico serão de interesse aquelas que possuem um comportamento recorrente e que formam parte do conjunto recorrente por cadeia R . Posteriormente nos interessa entender como estas órbitas compõem o espaço de fases.

Nesta monografia os sistemas dinâmicos em questão são os difeomorfismos de Smale em superfícies diferenciáveis compactas e sem bordo. Pelo teorema espectral de Smale, sabemos que estes difeomorfismos são caracterizados pela descrição da dinâmica restrita aos conjuntos básicos que compõe R .

As técnicas usadas para estudar os blocos básicos estão no capítulo 2, no qual descrevemos a dinâmica simbólica e a representação matricial associada ao conjunto básico.

É natural que estas matrizes possuam invariantes que representem comportamentos dinâmicos relevantes nos conjuntos básicos e é precisamente essa conexão que estabelecemos no capítulo 3.

A função zeta é um invariante que utilizamos como uma obstrução à existência de outros difeomorfismos e portanto será definida no capítulo 4 e usada no capítulo 5. Neste último capítulo trataremos a questão da realização ou não, numa dada superfície, de um difeomorfismo de Smale de blocos básicos especificados a priori.

Capítulo 1

Noções Básicas

1.1 Resultados Preliminares

Nesta seção vamos apresentar algumas definições básicas para o estudo de sistemas dinâmicos. O primeiro desses conceitos é a definição de ponto hiperbólico de um difeomorfismo C^∞ $f : M \rightarrow M$, com M uma variedade diferenciável C^∞ .

Definição 1.1 *Dado $f : M \rightarrow M$, $x \in M$, um ponto periódico de período n é um ponto hiperbólico se $D_x^u f^n : T_x^u M \rightarrow T_x^u M$ não tem autovalores de valor absoluto igual a um. O índice u é a dimensão do espaço $E_x^u \subset T_x M$ gerado pelo autoespaço generalizado com autovalores maiores que um em módulo.*

No conjunto das órbitas de um sistema dinâmico nos interessam os pontos fixos, os pontos periódicos ou aquelas órbitas que possuem alguma forma de recorrência.

Definição 1.2 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Então um ponto $x \in M$ é dito recorrente por cadeia se para todo $\varepsilon > 0$ existem pontos $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ (com n dependendo de ε) tal que*

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, \text{ com } 1 \leq i < n$$

com $d(.,.)$ a métrica natural em M .

O conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeia é chamado de conjunto recorrente por cadeia e é denotado por $R(f)$ ou simplesmente R .

Definição 1.3 *O conjunto estável de $p \in M$ é definido como:*

$$W^s(p) = \{x \in M / d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty\}$$

e o conjunto instável de p como

$$W^u(p) = \{x \in M / d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty\}.$$

Filosoficamente um sistema dinâmico que modele algum fenômeno da natureza deve ser robusto no sentido que pequenas perturbações no sistema resulte num comportamento qualitativamente equivalente. Precisamos de uma noção de estabilidade. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é estruturalmente estável se $\exists$ uma vizinhança N de f no espaço dos difeomorfismos de M na topologia C^1 tal que se $g \in N$ então g é topologicamente conjugado a f , isto é, se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

A hiperbolicidade é um dos invariantes importantes para garantir a estabilidade estrutural de um sistema. Generalizando a noção de hiperbolicidade para pontos fixos e periódicos podemos definir uma estrutura hiperbólica para um conjunto invariante compacto Λ .

Definição 1.4 *Um conjunto invariante e compacto Λ para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tem uma estrutura hiperbólica se o espaço tangente de M restrito a Λ pode ser escrito como uma soma direta $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$ de subespaços invariantes pela derivada Df e existe uma constante $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, tal que:*

$$\|Df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall v \in E^s, n \geq 0$$

e

$$\|Df^n(v)\| \geq C^{-1}\lambda^{-n} \|v\|, \forall v \in E^u, n \geq 0.$$

A noção de transversalidade é também crucial. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ com conjunto recorrente por cadeia R satisfaz a condição de transversalidade se $\forall x, y \in R$, $W^s(x)$ intercepta $W^u(y)$ transversalmente.

Podemos agora definir uma classe importante de difeomorfismos estruturalmente estáveis.

Definição 1.5 *(Difeomorfismo de Smale): Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito difeomorfismo de Smale se satisfaz a condição de transversalidade e se possui um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia R que é zero dimensional.*

Capítulo 2

A Dinâmica Simbólica dos *Shifts*

2.1 Exemplos de *Shifts* e *Subshifts*

Com o intuito de fazermos uma apresentação didática e concreta apresentamos nesta seção dois exemplos, um de um *shift* e o outro de um *subshift*, antes de formalizarmos os conceitos de dinâmica simbólica.

O primeiro, que na verdade é um *full shift* ou simplesmente *shift*, é obtido da clássica Ferradura de Smale.

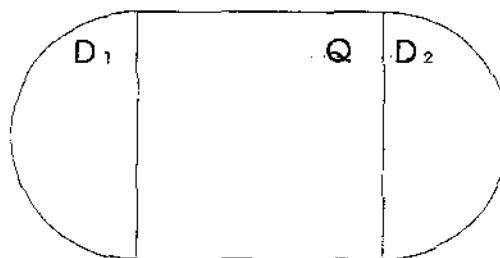
O segundo exemplo de *subshift*, a J-Ferradura, é devido a Franks.

2.1.1 Ferradura de Smale

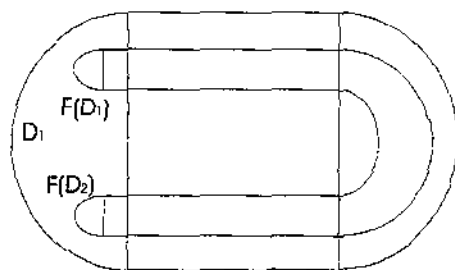
Nosso primeiro exemplo é o exemplo clássico de um difeomorfismo de Smale, a Ferradura de Smale.

Descrição do Difeomorfismo

Seja D um conjunto formado por dois semicírculos D_1 e D_2 de raio $\frac{1}{2}$ e por um quadrado Q de lado 1, com os semicírculos colados em lados opostos de Q , formando uma região parecida com um estádio, como na figura abaixo.



Defina uma função injetora (chamada de função Ferradura), $F : D \rightarrow D$ com a seguinte forma.



A função F deve contrair linearmente Q na direção horizontal por um fator $\delta < \frac{1}{2}$ e expandir Q linearmente na direção vertical pelo fator $\frac{1}{\delta}$. Por fim F leva Q em D , tendo $F(Q)$ a forma de uma ferradura. As regiões D_1 e D_2 são contraídas nos dois semidisks (de raio menor que 1) e levadas por F em D_1 . Portanto, a F assim construída em D não é sobrejetora, o que implica que F^{-1} não está definida globalmente. Estendemos esta função para o S^2 de forma que se torne um difeomorfismo colocando D no hemisfério sul e um ponto fixo repulsor no pólo norte. Como F é uma contração em D_1 , segue do Teorema da Contração de Banach que $F^n(D_1)$ com $n \rightarrow \infty$ contrai-se para um único ponto $p \in D_1$. Como $F(D_2) \subset D_1$, então $F^n(D_2)$, com $n \rightarrow \infty$, também contrai-se para p e mais, se x é um ponto em D com $F^n(x) \notin Q$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$. Portanto basta estudar a dinâmica de F para o conjunto dos pontos cujas iteradas permanecem em Q para sempre, isto é

$$\Lambda = \{q \in Q / F^k(q) \in Q, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

pois para pontos fora deste conjunto a dinâmica já está bem determinada.

Agora passamos a descrever a dinâmica relevante de F que ocorre em Q . Note que $F(Q) \cap Q$ é formado por dois retângulos horizontais H_1 e H_2 , e que as pré-imagens de H_1 e de H_2 são dois retângulos verticais V_1 e V_2 . Mais ainda, a base de cada V_i é δ , que é também a altura de cada H_i . Seja q um ponto tal que $F(q) \in Q$. Então, como visto acima, temos que $q \in V_1$ ou $q \in V_2$. De forma análoga, se $F^2(q) \in Q$, então $F(q) \in V_1 \cup V_2$, ou seja, $q \in F^{-1}(V_1) \cup F^{-1}(V_2)$, com $F^{-1}(V_i)$ a imagem inversa de V_i . Por esta construção, dado um retângulo vertical V_i com altura 1 e base δ então $F^{-1}(V_i)$ é um par de retângulos, um em cada V_i , com base de comprimento δ^2 . Portanto, $F^{-2}(V_i) = F^{-1}(F^{-1}(V_i))$ são quatro retângulos com base δ^3 cada, $F^{-3}(V_i)$ são oito retângulos com base de comprimento δ^4 , etc. De forma similar, $F(H_i)$ são dois retângulos com altura δ^2 cada, $F^2(H_i)$ são quatro retângulos com altura δ^3 cada e assim sucessivamente.

Defina:

$$\Lambda_+ = \{q \in Q / F^k(q) \in Q, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Λ_+ consiste de um conjunto de Cantor de segmentos verticais l .

Defina:

$$\Lambda_- = \{q \in Q / F^{-k}(q) \in Q, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots\}$$

ou seja, Λ_- é um conjunto de Cantor formado por segmentos horizontais h .

Segue que

$$\Lambda = \Lambda_- \cap \Lambda_+.$$

Representação via Dinâmica Simbólica

Por fim, será introduzida uma dinâmica simbólica para este sistema. Tome um segmento vertical l em Λ_+ . Como l está em Λ_+ , então $F^k(l)$ é um segmento de reta vertical com comprimento δ^k , $\forall k \in \mathbb{N}$. Associamos uma sequência de zeros e uns $(s_0 s_1 s_2 \dots)$ da seguinte forma: seja $x \in l \cap h$, então

$$s_k = \alpha \Leftrightarrow F^k(l) \in V_\alpha, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots$$

De forma similar, dado um segmento de reta horizontal h em Λ_- , associamos uma sequência de zeros e uns (que por comodidade será denotada por $(\dots s_{-2} s_{-1})$) da seguinte forma

$$s_{-k} = \alpha \Leftrightarrow F^{-k}(h) \in V_\alpha, \text{ com } k = 1, 2, \dots$$

Portanto, para cada ponto $x \in \Lambda$, associamos uma sequência duplo infinita, ou seja, definimos uma função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$

$$S(x) = (\dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 s_2 \dots) = s$$

com

$$s_k = \alpha \Leftrightarrow F^k(x) \in V_\alpha, \text{ para } k \in \mathbb{Z}$$

e o conjunto $\Sigma_2 = \{s = (\dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 s_2 \dots) / s_k = 0 \text{ ou } 1\}$. Definimos uma métrica $(d(\cdot, \cdot))$ em Σ_2

$$d(s, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}}.$$

Agora definimos a função *shift* $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por

$$\sigma(\dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 \dots) = (\dots s_{-2} s_{-1} s_0 . s_1 \dots)$$

Em Σ_2 , com a métrica d , a função σ é contínua e existe uma inversa σ^{-1} dada por

$$\sigma^{-1}(\dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 \dots) = (\dots s_{-2} . s_{-1} s_0 s_1 \dots)$$

que também é contínua. Portanto σ é um homeomorfismo.

Relação entre o Shift e o Difeomorfismo

S é uma conjugação topológica entre F em Λ e σ em Σ_2 . De fato, se $p \in \Lambda$ é dado, então $S(p) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$. Por conseguinte, temos que $S(F(p)) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$, pois se $F^k(p) \in V_\alpha$, então $F^{k-1}(F(p)) \in V_\alpha$. Por outro lado $S(p) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$.

Portanto, $\sigma(S(p)) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$. Como $p \in \Lambda$ foi tomado arbitrário, então

$$S(F(p)) = \sigma(S(p)), \forall p \in \Lambda$$

e portanto σ e F são topologicamente conjugadas, desde que S seja um homeomorfismo. A demonstração de que S é um homeomorfismo será dada adiante para o caso geral.

Por último, reduzimos o problema de estudar a dinâmica de F no problema mais simples de estudar a dinâmica de σ . Por exemplo, para encontrar os pontos fixos de F basta encontrar os pontos fixos de σ . Mas, para s ser ponto fixo de σ devemos ter $\sigma(s) = s$. Dado $s \in \Sigma_2$; isto é, $s = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$, com $s_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$ temos que $\sigma(s) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots)$. Desta forma, $\sigma(s) = s$ implica em

$$\dots = s_{-2} = s_{-1} = s_0 = s_1 = s_2 = \dots$$

Portanto só existem dois pontos fixos para F em Λ , que são os pontos associados às seqüências

$$(\dots 00.00\dots) \text{ e } (\dots 11.11\dots)$$

Pode-se também utilizar σ para provar que as órbitas periódicas são densas em Λ . De fato, seja $s = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1\dots) \in \Lambda$ e sejam

$$s_1 = (\dots, s_0s_0.s_0s_0\dots)$$

$$s_2 = (\dots s_0s_1.s_0s_1\dots)$$

$$s_3 = (\dots s_{-1}s_0s_1s_{-1}.s_0s_1\dots)$$

Desta forma contruímos uma seqüência convergente $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, com cada ponto s_i periódico em Σ e convergindo para s . Como a seqüência (s) foi tomada arbitrária, segue que as órbitas periódicas são densas em Λ .

Outro resultado importante é que existe uma órbita não periódica densa em Λ . De fato, considere a seqüência:

$$\nu = (\dots '01'10'11'00'0'11'0'00'11'10'01\dots)$$

ou seja, dada uma seqüência arbitrária

$$\xi = (\dots \xi_{-2}\xi_{-1}.\xi_0\xi_1\xi_2\dots)$$

e dado $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(\xi, \sigma^k(\nu)) < \varepsilon.$$

Em outras palavras avançamos na sequência de elementos de ν até encontrarmos um bloco formado por $\xi_{-j} \dots \xi_0 \dots \xi_j$ garantindo que a distância seja menor que ε , pois $\sum_{|i|>j} \frac{1}{2^{|i|}} < \varepsilon$.

Portanto, tal sequência pode aproximar-se tanto quanto se queira de qualquer elemento de Σ_2 , ou seja, esta sequência é densa em Σ_2 , e portanto o elemento de Λ ao qual esta sequência é associada têm uma órbita densa em Λ .¹

Utilizando σ torna-se fácil encontrar os conjuntos instáveis e estáveis para um ponto $p \in \Lambda$. Seja $S(p) = (\dots p_{-2}p_{-1}.p_0p_1p_2\dots)$ para p um ponto em Λ . Um ponto $z \in Q$, com $S(z) = (\dots z_{-2}z_{-1}.z_0z_1\dots)$, está em $W^s(p)$ se

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} p_k - \sum_{k=n}^{\infty} z_k \right| \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Portanto z está em $W^s(p)$ se e somente se $z_i = p_i \forall i \geq n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Um ponto $z \in Q$, com $S(z) = (\dots z_{-2}z_{-1}.z_0z_1\dots) \in D$ está em $W^u(p)$ se

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} p_{-k} - \sum_{k=n}^{\infty} z_{-k} \right| \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Ou seja, z está em $W^u(p)$ se e somente se $z_{-i} = p_{-i}, \forall i \geq n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

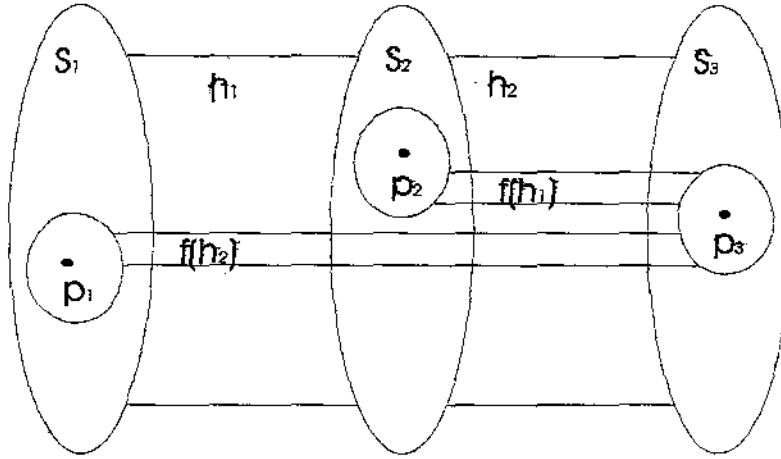
2.1.2 J-Ferradura de Franks

O próximo exemplo é devido a J. Franks [F1].

Descrição do Difeomorfismo

Seja D uma região no plano estendido $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ formada por três discos S_1, S_2 e S_3 e por duas faixas horizontais h_1 e h_2 , com as faixas horizontais ligando os discos. Defina um difeomorfismo f tal que os centros dos discos $\{c_1, c_2, c_3\}$ têm uma órbita periódica com período três, f levando c_1 em c_2 , c_2 em c_3 e c_3 em c_1 . Os discos contraem-se para a órbita periódica $\{c_1, c_2, c_3\}$. Se $x \notin D$, com $x \neq \infty$, então a órbita de x tende a D e ∞ é um ponto fixo repulsor. Finalmente, nas duas faixas, f deve contrair linearmente na vertical e expandir linearmente na horizontal, levando h_1 em $S_1 \cup S_2 \cup h_2$ e levando h_2 em $h_1 \cup h_2 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ conforme a figura.

¹ Nesta sequência as aspas são usadas para separar os blocos de 'palavras', para facilitar a visualização.



Portanto, para pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que $f^n(x) \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ temos que a órbita de x tende a órbita de $\{c_1, c_2, c_3\}$; por outro lado, se $x = \infty$, então x é um ponto fixo. Assim está bem determinada a dinâmica de f em ambos os conjuntos acima, ou seja, basta apenas determinar a órbita de f para o seguinte conjunto

$$\Lambda = \{z/f^n(z) \in h_1 \cup h_2, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Representação via Dinâmica Simbólica

Como no exemplo anterior, também é possível associar uma sequência a cada ponto de Λ da seguinte forma: considere o conjunto $\{1, 2\}$ com a topologia discreta e considere o espaço das sequências duplo infinitas

$$\Sigma = \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, 2\}$$

com a topologia produto. Definindo a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ por

$$S(x) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots)$$

com s_i definido para cada $i \in \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{se } f^{-n}(x) \in h_1 \\ 2, & \text{se } f^{-n}(x) \in h_2 \end{cases}$$

Como $h_1 \cap f(h_1) = \emptyset$, então sequências do tipo: $(\dots 11\dots)$ não são associadas a nenhum ponto, ou seja, S não é sobrejetora. Entretanto, restringindo ao espaço $\Sigma_A \subset \Sigma$, com: $\Sigma_A = \{a \in \Sigma / \text{se } a_i = 1 \text{ então } a_{i+1} = 2\}$, então temos²

$$S|_{\Sigma_A} : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$$

²A notação Σ_A será justificada subsequentemente.

é sobrejetora³.

Agora, definimos uma função σ , que será chamada de *subshift*

$$\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$$

definida por $\sigma(\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots)$.

Relação entre o Subshift e o Difeomorfismo

Como no primeiro exemplo, S é uma conjugação topológica entre σ e f (o fato de S ser um homeomorfismo seguirá de um dos próximos resultados). De fato, se $x \in \Lambda$, então:

$$S(x) = (\dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1\dots),$$

com $x_i = \alpha$ se $f^i(x) \in h_\alpha$. Mas se $f^i(x) \in h_\alpha$, então $f^{i-1}(f(x)) \in h_\alpha$, e portanto

$$S(f(x)) = (\dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1\dots)$$

Por outro lado, como: $S(x) = (x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots)$, então

$$\sigma(S(x)) = (\dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots)$$

Portanto $S \circ f = \sigma \circ S$, ou seja, S é de fato uma conjugação topológica entre f e σ .

Novamente pode-se encontrar as órbitas fixas em Λ , pois tais órbitas são as associadas às seqüências constantes em Σ_A . Como existe uma única seqüência constante em Σ_A , então existe um único ponto fixo para f em Λ , que é o ponto associado à seqüência $(\dots 222.222\dots)$. Também como no caso anterior, seqüências periódicas são densas em Λ . Também existe uma órbita não periódica densa. Basta tomar:

$$(\dots '01'10'11'0'1.1'0'11'01'10\dots),$$

Portanto, tal seqüência pode aproximar-se tanto quanto se queira de qualquer elemento de Σ_2 , ou seja, esta seqüência é densa em Σ_2 , e portanto o elemento de Λ ao qual esta seqüência é associada tem uma órbita densa em Λ .

Definição 2.1 Um subshift de tipo finito determinada por um conjunto de símbolos $\mathfrak{S}$ (o alfabeto) e uma relação $\rightarrow$ (chamada de pode ser seguido por) é um homeomorfismo $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, com

³ Como não haverá dúvida, faremos um abuso de notação e denotaremos $S|_{\Sigma_A}$ apenas por S .

$$\Sigma \subset \prod_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}$$

Σ (a lista) definido por $\Sigma = \{s = (\dots s_{-1} s_0 s_1 \dots) / s_i \rightarrow s_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$. Definimos $\sigma(s) = s'$, com $s'_i = s_{i-1}$ e σ será denotado por subshift à direita.

No primeiro exemplo da seção anterior $\mathfrak{S} = \{0, 1\}$ e $\mathfrak{S} = \{1, 2\}$ no segundo com $j \rightarrow i$ se um ponto de h_i pode ser levado em h_j .

Portanto, no primeiro exemplo temos:

$$0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0 \text{ e } 1 \rightarrow 1$$

Já no segundo

$$2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 2 \text{ mas } 1 \not\rightarrow 1.$$

2.2 Grafos e Representações Matriciais dos Subshifts

Um fato importante é que a partir de um conjunto com uma relação "pode ser seguido por" pode-se associar o sistema a um grafo ou a uma matriz.

2.2.1 Matriz 0-1 e Grafo de Vértices Rotulados

Do Subshift ao Grafo

Dado um conjunto finito S e uma relação $\rightarrow$, é possível construir um grafo orientado G . Cada elemento de S será um vértice e haverá uma aresta ligando s a s' se e somente se $s \rightarrow s'$. Suponha que cada aresta tenha comprimento um e seja Γ o conjunto dos caminhos $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ orientáveis e que preservam o comprimento de arco, tal que $\gamma(n)$ é um vértice de G , $\forall n \in \mathbb{Z}$. Como os caminhos percorridos em G são registrados pelos vértices percorridos, G será denominado de grafo de vértices rotulados.

Existe uma correspondência $h: \Gamma \rightarrow \Sigma$ tal que $h(\gamma) = (\dots \gamma(-1) \gamma(0) \gamma(1) \dots)$. De fato, h é um difeomorfismo de Γ com a topologia compacto-aberto em Σ . Mais ainda, h é uma conjugação topológica entre $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ e $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma$, com ρ definida como

$$\rho(\gamma(t)) = \gamma(t-1).$$

De fato

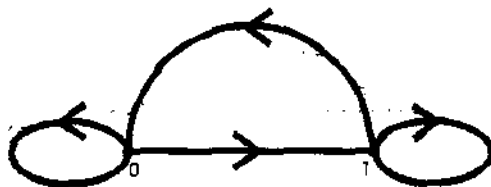
$$h(\rho(\gamma(t))) = h(\gamma(t-1)) = (\dots \gamma(-1) \gamma(0) \gamma(1) \gamma(2) \dots)$$

e

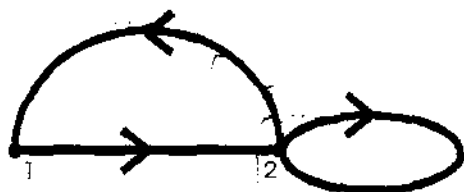
$$\sigma(h(\gamma(t))) = \sigma((\dots \gamma(-1) \gamma(0) \gamma(1) \gamma(2) \dots)) = (\dots \gamma(-1) \gamma(0) \gamma(1) \gamma(2) \dots)$$

portanto h é uma conjugação topológica entre σ e ρ .

Para o exemplo da seção 2.1.1 temos o seguinte grafo com vértices rotulados associado ao *subshift*



Já para o exemplo da seção 2.1.2 o *subshift* com vértices rotulados é o seguinte



Do Grafo à Matriz

Dado o conjunto S e a relação $\rightarrow$ é possível construir uma matriz quadrada A com entradas iguais a zero ou um. Sendo n o número de elementos de S , então a matriz A será $n \times n$ e, sendo $A = (A_{ij})$, então A será definida como:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } s_i \rightarrow s_j \\ 0, & \text{se } s_i \nrightarrow s_j \end{cases}$$

Para o exemplo 2.1

$$0 \rightarrow 0 \Rightarrow A_{11} = 1$$

$$0 \rightarrow 1 \Rightarrow A_{12} = 1$$

$$1 \rightarrow 0 \Rightarrow A_{21} = 1$$

$$1 \rightarrow 1 \Rightarrow A_{22} = 1$$

Portanto, a matriz A será

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Já para o exemplo 2.2

$$1 \nrightarrow 1 \Rightarrow A_{11} = 0$$

$$1 \rightarrow 2 \Rightarrow A_{12} = 1$$

$$2 \rightarrow 1 \Rightarrow A_{21} = 1$$

$$2 \rightarrow 2 \Rightarrow A_{22} = 1$$

Portanto a matriz A , para este exemplo, será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da Matriz ao Subshift

Também pode-se fazer o inverso, ou seja, dado uma matriz $0-1$ é possível construir o conjunto de símbolos S e a relação $\rightarrow$.

Dado uma matriz A $n \times n$, tome o conjunto S como um conjunto de símbolos com n elementos e defina a relação $\rightarrow$ como

$$s_i \rightarrow s_j \Leftrightarrow A_{ij} = 1$$

Um problema se apresenta quando a matriz A não é uma matriz $0-1$. Para contornar isto, utiliza-se a abordagem descrita na próxima seção.

2.2.2 Matriz Inteira e Grafo de Arestas Rotuladas

Do Grafo ao Subshift

Dado um grafo orientável G , seja S o conjunto das arestas de G e defina a relação $\rightarrow$ da seguinte forma: $s_i \rightarrow s_j \Leftrightarrow$ o vértice no qual s_i termina é o mesmo no qual s_j começa. Como os caminhos percorridos em G são registrados pelas arestas percorridas denominamos G , de forma sucinta, por grafo de arestas rotuladas.

Seja Γ o espaço dos caminhos $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ orientáveis e que preservam o comprimento de arco. Definimos $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma$ como

$$\rho(\gamma(t)) = \gamma(t-1)$$

com $\gamma(n)$ um vértice de G , para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A seguir definimos uma conjugação topológica $h: \Gamma \rightarrow \Sigma$ por

$$h(\gamma) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0s_1\dots)$$

com $s_i = \gamma([i, i+1])$.

Como feito para o caso do grafo de vértices rotulados, $h \circ \rho = \sigma \circ h$, com σ o shift associado ao conjunto S com a relação $\rightarrow$.

Da Matriz ao Subshift

Por outro lado, dado uma matriz $A^{n \times n}$ quadrada, inteira e não negativa, então é possível associar um grafo de arestas rotuladas (ou definir diretamente um subshift). Defina o conjunto de símbolos S e duas funções

$r, l : S \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ sendo $S = \cup S_{ij}$, com S_{ij} um conjunto de símbolos com cardinalidade igual a A_{ij} , para $1 \leq i, j \leq n$. Então, para $x \in S_{ij}$, defina

$$r(x) = j$$

$$l(x) = i$$

A relação $\rightarrow$ será definida por

$$s \rightarrow s' \Leftrightarrow r(s) = l(s').$$

Para o primeiro exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos

$$\#S_{11} = \#S_{12} = \#S_{21} = \#S_{22} = 1$$

Portanto,

$$S_{11} = \{s_1\}$$

$$S_{12} = \{s_2\}$$

$$S_{21} = \{s_3\}$$

$$S_{22} = \{s_4\}$$

Calculando r e l

$$l(s_1) = 1, r(s_1) = 1$$

$$l(s_2) = 1, r(s_2) = 2$$

$$l(s_3) = 2, r(s_3) = 1$$

$$l(s_4) = 2, r(s_4) = 2$$

Portanto,

$$r(s_1) = l(s_1) \Rightarrow s_1 \rightarrow s_1$$

$$r(s_1) = l(s_2) \Rightarrow s_1 \rightarrow s_2$$

$$r(s_2) = l(s_3) \Rightarrow s_2 \rightarrow s_3$$

$$r(s_2) = l(s_4) \Rightarrow s_2 \rightarrow s_4$$

$$r(s_3) = l(s_1) \Rightarrow s_3 \rightarrow s_1$$

$$r(s_3) = l(s_2) \Rightarrow s_3 \rightarrow s_2$$

$$r(s_4) = l(s_3) \Rightarrow s_4 \rightarrow s_3$$

$$r(s_4) = l(s_4) \Rightarrow s_4 \rightarrow s_4$$

Já para o segundo exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$\#S_{11} = 0 \text{ e } \#S_{12} = \#S_{21} = \#S_{22} = 1$$

Portanto,

$$S_{12} = \{s_1\}$$

$$S_{21} = \{s_2\}$$

$$S_{22} = \{s_3\}$$

Calculando r e l

$$l(s_1) = 1, r(s_1) = 2$$

$$l(s_2) = 2, r(s_2) = 1$$

$$l(s_3) = 2, r(s_3) = 2$$

Portanto,

$$r(s_1) = l(s_2) \Rightarrow s_1 \rightarrow s_2$$

$$r(s_1) = l(s_3) \Rightarrow s_1 \rightarrow s_3$$

$$r(s_2) = l(s_1) \Rightarrow s_2 \rightarrow s_1$$

$$r(s_3) = l(s_2) \Rightarrow s_3 \rightarrow s_2$$

$$r(s_3) = l(s_3) \Rightarrow s_3 \rightarrow s_3$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

2.2.3 Relação entre Grafos de Vértices Rotulados e de Arestas Rotuladas

Uma diferença fundamental entre os dois casos apresentados é que no primeiro caso, para especificar um caminho em G basta dar a sequência de vértices pelos quais ele passa. Já no segundo, para especificar um caminho em G deve-se dar a sequência de arestas pelos quais ele passa.

Dado um grafo de arestas rotuladas G associa-se a ele uma matriz inteira, quadrada e não negativa A da seguinte forma:

Contam-se os vértices de G (por exemplo, n) e então toma uma matriz A $n \times n$ definida como:

A_{ij} = o número de arestas que começam no vértice i e terminam no vértice j .

Dada uma matriz A , o *shift* de aresta e de vértice podem ser diferentes, como visto nos exemplos acima. Mas, se A é uma matriz 0 – 1, então vale o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Se A é uma matriz $n \times n$ e 0 – 1, então o subshift de arestas*

$$\sigma_{A_a} : \Sigma_{A_a} \rightarrow \Sigma_{A_a}$$

é topologicamente conjugado ao subshift de vértices

$$\sigma_{A_v} : \Sigma_{A_v} \rightarrow \Sigma_{A_v}$$

Prova:

Seja G o grafo com vértices $1, \dots, n$, com arestas orientadas de i para j se $A_{ij} = 1$. Seja Γ o espaço dos caminhos que preservam orientação e comprimento de arco em G , e seja

$$\rho : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

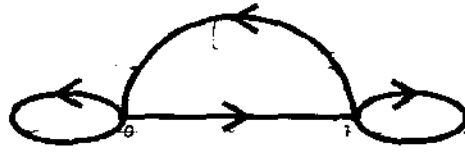
definida como

$$\rho(\gamma(t)) = \gamma(t - 1)$$

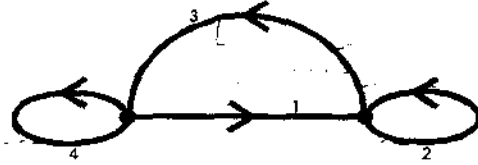
Como visto nas seções anteriores, ρ é topologicamente conjugado a σ_{A_a} e a σ_{A_v} , e portanto σ_{A_a} e σ_{A_v} são topologicamente conjugados. ■

Portanto, dada uma matriz 0 – 1, é equivalente trabalhar com o grafo de arestas rotuladas ou com o grafo de vértices rotulados.

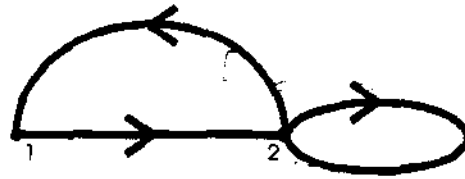
Exemplo 2.1 *Para o exemplo da seção 2.1.1 temos o seguinte grafo de vértices rotulados*



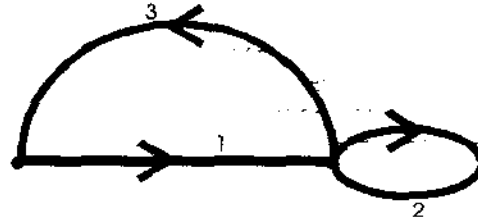
já o grafo de arestas rotuladas é



Para o exemplo da seção 2.1.2 o grafo de vértices rotulados é o seguinte

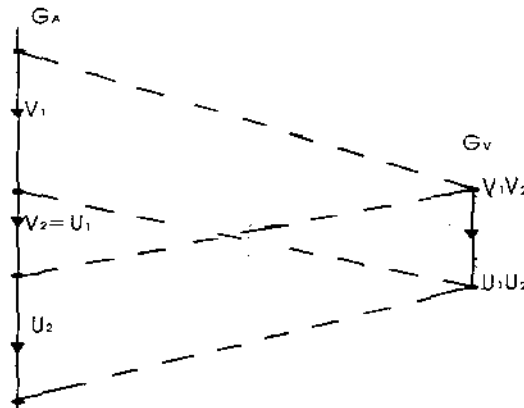


e o grafo de arestas rotuladas é



o que concorda com o que foi dito anteriormente.

Um *subshift de aresta* $(\Sigma_{A_a}, \sigma_{A_a})$ sempre é isomorfo a um *subshift de vértice*. Tome o grafo de arestas rotuladas associado a σ_{A_a} e encontre os caminhos de comprimento 2 neste grafo, ou seja, as arestas u_1, u_2 tal que o vértice onde u_1 termina é o vértice onde u_2 começa. Cada um desses caminhos será um vértice no grafo de vértices rotulados que será construído. No novo grafo existirá uma aresta indo do vértice $v_1 v_2$ para o vértice $u_1 u_2$ se e somente se $v_1 v_2 u_2 = v_1 u_1 u_2$, conforme a figura.

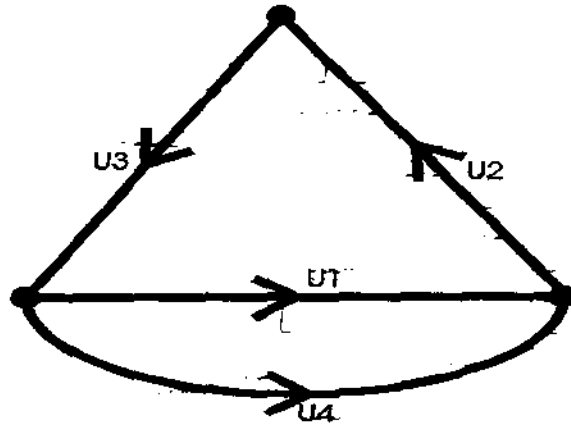


Temos portanto o *subshift* desejado, que é o associado ao novo grafo.

Exemplo 2.2 Para a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teremos o seguinte grafo de arestas rotuladas



assim, para o grafo de vértices rotulados isomorfo ao grafo acima, teremos os seguintes vértices:

$$v_1 = u_1 u_2$$

$$v_2 = u_4 u_2$$

$$v_3 = u_2 u_3$$

$$v_4 = u_3 u_1$$

$$v_5 = u_3 u_4$$

Então temos:

$$v_1 \rightarrow v_3$$

$$v_2 \rightarrow v_3$$

$$v_3 \rightarrow v_4$$

$$v_3 \rightarrow v_5$$

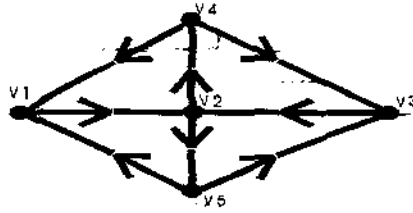
$$v_4 \rightarrow v_1$$

$$v_5 \rightarrow v_1$$

$$v_5 \rightarrow v_2$$

$$v_4 \rightarrow v_2$$

e temos o seguinte grafo



e a matriz associada a este grafo é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz associada ao grafo de arestas rotuladas, apesar de não ser uma matriz de entradas iguais a um, é uma matriz 3×3 , enquanto a matriz associada ao grafo de vértices rotulados é uma matriz 5×5 . É por isso que o grafo de arestas rotulados é usado, apesar do inconveniente de sua matriz associada normalmente não ser de entradas iguais a um. A dificuldade de se trabalhar com uma matriz inteira é compensada pela diminuição da ordem.

Por outro lado, dado um subshift de vértices, existe um subshift de arestas que lhe é associado. O resultado segue diretamente da proposição anterior.

Para os subshifts de vértice vale o seguinte.

Proposição 2.2 *Seja σ o subshift correspondente a A . Então, para todo $k > 0$, $\sigma(A^k)$ é topologicamente conjugado a $(\sigma(A))^k$ e $(\sigma(A))^{-1}$ é topologicamente conjugado a $\sigma(A^t)$, com A^t a matriz transposta de A .*

Prova:

Seja S o conjunto de símbolos para A e $l, r : S \rightarrow \{1, \dots, n\}$ como definido anteriormente, ou seja, $s \rightarrow s'$ se e somente se $r(s) = l(s')$. Definimos analogamente o conjunto P de símbolos para A^k e $r', l' : P \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Seja $P_{ij} = \{p \in P / l'(p) = i, r'(p) = j\}$. Então, pela definição, o número de elementos de $P_{ij} = (A^k)_{ij}$.

Seja $S_{ij}^k = \{(s_1, \dots, s_k) \in S^k / l(s_1) = i, r(s_k) = j \text{ e } r(s_t) = l(s_{t+1}), 1 \leq t < k\}$. A cardinalidade de $S_{ij}^k = (A^k)_{ij}$.

Seja $S(k) = \cup S_{ij}^k = \{(s_1, \dots, s_k) \in S^k / l(s_t) = r(s_{t+1}), \text{ para } 1 \leq t < k\}$, então define-se

$$\Phi : P \rightarrow S(k)$$

tal que: $\Phi(P_{ij}) = S_{ij}^k$.

Se $(s_1, \dots, s_k)$ e $(s'_1, \dots, s'_k)$ estão em $S(k)$, define-se:

$$(s_1, \dots, s_k) \rightarrow (s'_1, \dots, s'_k)$$

se $r(s_k) = l(s'_1)$. Então:

$\Phi : P \rightarrow S(k)$ é uma conjugação topológica entre o *shift* associado a A^k e o *shift* associado a $S(k)$. Portanto $(\sigma(A))^k$ é topologicamente conjugado a $\sigma(A^k)$. ■

Uma importante consequência do teorema anterior é que o número de pontos fixos de σ^n é igual ao $\text{tr } A^n$, sendo σ um subshift do tipo finito e A sua matriz associada. Esse fato é imediato para $n = 1$, pois $(\dots s_{-1} s_0 s_1 \dots)$ é um ponto fixo se e somente se $s_i = s_0, \forall i \in \mathbb{Z}$. Mas se o ponto $(\dots s_0 s_0 s_0 \dots)$ ocorre então $i \rightarrow i$, ou seja, $A_{ii} \neq 0$. Mais ainda, como já visto, $A_{ii} = \#S_{ii}$, ou seja, A_{ii} é igual ao número de arestas indo de i para i . Como para cada aresta indo de i para i existe um ponto fixo (um ponto cuja representação no grafo percorre apenas essa aresta é um ponto fixo) então o número de pontos fixos em S_{ii} é igual a A_{ii} . Como os pontos fixos ocorrem apenas nos S_{ii} então: $\text{Fix}(\sigma) = \sum_i A_{ii}$. Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer o resultado segue direto da proposição anterior, pois pela proposição $\sigma(A^n)$ é topologicamente conjugado a $(\sigma(A))^n$, ou seja, $\text{Fix}(\sigma(A^n)) = \text{Fix}(\sigma^n(A))$. Como visto acima, $\text{Fix}(\sigma(A^n)) = \text{tr}(A^n)$ e portanto $\text{Fix}(\sigma^n(A)) = \text{tr}(A^n)$.

2.3 Matriz Irredutível

Vimos nos dois exemplos da seção anterior que os subshifts tinham uma órbita densa. Esse fato não foi mera coincidência. Na verdade estamos interessados em 'subshifts' que tenham tal propriedade. Uma forma de garantir pelo menos uma órbita futura densa é trabalhar com as matrizes irredutíveis.

Definição 2.2 Uma matriz inteira não negativa $n \times n$ é chamada de irredutível se para cada $1 \leq i, j \leq n$ existe um inteiro $k > 0$ tal que $(A^k)_{ij} \neq 0$.

E para tais matrizes vale o resultado seguinte.

Proposição 2.3 Se $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ é o shift associado a matriz A , então as seguintes afirmações são equivalentes:

- A é irredutível.
- O homeomorfismo σ tem uma órbita futura densa.

Se as afirmações acima valem então as órbitas periódicas de σ são densas em Σ .

As matrizes irredutíveis ainda possuem uma relação com os shifts, como apresentaremos a seguir.

Seja A irredutível e tome K como o máximo do conjunto finito $\{k(i, j)/k(i, j) \text{ é o menor } k \text{ tal que } (A^k)_{ij} \neq 0\}$. Então qualquer símbolo pode seguir um outro por um caminho de comprimento k , pois dados s, s' , existem $s_1, s_2, \dots, s_n, l \leq k$, tal que $s \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_l \rightarrow s'$. Por outro lado,

se qualquer símbolo pode seguir qualquer outro no *shift* associado a A , então a matriz A é irredutível.

Se a matriz A não é irredutível, ainda é possível estabelecer resultados como o acima. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} B & W \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com B uma matriz $n \times n$ e C uma matriz $m \times m$ irredutíveis. Então

$$X = \{c \in \Sigma_A / 1 \leq r(c_i) \leq n, 1 \leq l(c_i) \leq n, \text{ para todo } i\}$$

é tal que $\sigma(A)|_X$ é topologicamente conjugado a $\sigma(B)$. Da mesma forma, existe um conjunto Y tal que $\sigma(A)|_Y$ é topologicamente conjugado a $\sigma(C)$. Generalizando:

Proposição 2.4 Se $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um subshift então é topologicamente conjugado ao shift associado a uma matriz A da forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

com cada A_i irredutível.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Prova:

Tome o grafo de arestas rotuladas associado a G e defina uma relação $\leq$ para seus vértices como

$$v \leq v' \Leftrightarrow \text{existe um caminho orientável ligando } v \text{ a } v'.$$

Então v e v' são equivalentes se $v \leq v'$ e $v' \leq v$ ou se $v = v'$.

Agora numere consecutivamente os vértices, tal que todo elemento numa mesma classe de equivalência tenha um mesmo número associado. Ainda mais, se $v \leq v'$ mas $v' \not\leq v$ então o número de v é menor que o número de v' . Seja A a matriz dada por

$$A_{ij} = \text{o número de arestas indo do vértice } i \text{ para o vértice } j.$$

Portanto σ é topologicamente conjugado a $\sigma(A) : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$.

Pela ordenação dos vértices temos A na forma desejada. Cada A_i corresponde aos vértices em uma mesma classe de equivalência. ■

O conceito de difeomorfismo hiperbólico com respeito ao conjunto das alças será muito importante para os próximos capítulos, particularmente para

os dois últimos. Porém, antes dessa definição, é necessário introduzir as seguintes notações. Seja $f: M \rightarrow M$ um difeomorfismo em uma n -variedade e seja $H = \cup h_i$ o conjunto finito das k -alças em M . Então cada h_i é uma cópia de $D^k \times D^{n-k}$ mergulhada em M (que será denotada por: $h_i = D_i^k \times D_i^{n-k}$), com D^k o k -disco unitário. Se $x \in D_i^k \times p \subset h_i$, o k -disco $D_i^k \times p$ será denotado por $W_i^u(x)$ e se $x \in D_j^{n-k} \times p$ então o $(n-k)$ -disco $D_j^{n-k} \times p$ será denotado por $W_j^{n-k}(x)$. Vamos agora definir de difeomorfismo hiperbólico.

Definição 2.3 O difeomorfismo f é hiperbólico com respeito ao conjunto das alças H se:

1) Se $x \in h_i$, $f(x) \in h_j$ então $\text{int}(f(W_i^u(x))) \supset W_j^u(f(x))$ e $f(W_i^s(x)) \subset \text{int}(W_j^s(f(x)))$.

2) Se $x \in h_i$, $f(x) \in H$ e $v \in T_x(W_i^s(x))$, $w \in T_x(W_i^u(x))$, então: $\|d(f(v))\| \leq \lambda \|v\|$ e $\|d(f(w))\| \geq \lambda^{-1} \|w\|$, para algum $\lambda \in (0, 1)$ e com $\|\cdot\|$ a métrica usual no espaço $D_j^k \times D_j^{n-k}$.

Definição 2.4 A matriz de interseção geométrica G correspondente a f e ao conjunto de alças H é definida como

$$G_{ij} = \text{número de componentes de } h_i \cap f(h_j)$$

Observação: Note que nos nossos dois exemplos a matriz de interseção geométrica é igual à matriz associada ao subshift de aresta (e ao de vértice). Esse fato não é mera coincidência, pois a definição das duas matrizes, a interseção geométrica e a associada ao subshift de aresta, é a mesma. Portanto, para subshifts do tipo finito, a matriz associada ao grafo de arestas rotuladas (e no caso de matriz $0-1$, também ao grafo de vértices) é a matriz de interseção geométrica.

Definição 2.5 Um difeomorfismo $f: M \rightarrow M$ é fitted em relação ao conjunto de alças $H(k) = \cup h_i(k)$ se:

(a) Para cada k o difeomorfismo é hiperbólico em relação ao conjunto das alças $H(k)$.

(b) Se k, l , $x \in h_i(l)$, e $y = f^n(x) \in h_j(k)$ para algum n então

$$f^n(W_i^u(x)) \supset W_j^u(y)$$

ou de forma equivalente

$$f^{-n}(W_j^s(y)) \supset W_i^s(x)$$

(c) Se $M_{k-1} = \phi^{-1}((-\infty, k - \varepsilon])$ então $f(M_k) \subset \text{int}(M_{k-1} \cup H(k))$ para todo $k \geq 0$, com ϕ uma função Morse auto-indexante.

Definição 2.6 A matriz de interseção algébrica para um conjunto de alças orientadas $H(k)$ é definida como

$$A(k)_{ij} = f(W_j^u(p)) \cdot W_i^s(q),$$

o número de interseção entre $f(W_j^u(p))$ e $W_i^s(q)$, com $p \in h_j$, $q \in h_i$.

Para finalizar o capítulo vamos provar que a função Ψ usada nos dois exemplos eram de fato um difeomorfismo. Na verdade, com esta demonstração estaremos mostrando que o subshift do tipo finito é um difeomorfismo. Isso segue do seguinte teorema.

Teorema 2.1 Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo que é hiperbólico com respeito ao conjunto de alças H e $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H)$, então $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugado ao subshift $\sigma(G) : \Sigma_G \rightarrow \Sigma_G$, com G a matriz de interseção geométrica correspondente a f e H .

Prova:

Tome H com m alças, ou seja, a matriz G é uma matriz $m \times m$. Seja S o conjunto de todas as componentes de $H \cap f(H)$. Defina

$$r, l : S \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

como feito anteriormente, ou seja, sendo:

$S_{ij} \subset S$ o conjunto das componentes de $h_i \cap f(h_j)$, com

$$\text{card}(S_{ij}) = G_{ij}$$

então se $x \in S_{ij}$

$$l(x) = i, r(x) = j.$$

Definindo

$$s \rightarrow s' \text{ se } r(s) = l(s')$$

então $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ determinado por $S \rightarrow$ determina o grafo de arestas rotuladas de G .

Defina

$$\Psi : \Lambda \rightarrow \Sigma$$

por

$$\Psi(x) = s,$$

$s \in \Sigma$ tal que $s = (\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots)$; com s_n o elemento de S contendo $f^{-n}(x)$, ou seja, $x \in f^n(s_n)$.

Tomando $\Sigma \subset \prod_{-\infty}^{\infty} S$ com a topologia produto, então Ψ é contínua. Como

$$\Psi \circ f = \sigma \circ \Psi$$

então para provar o teorema basta provar que Λ é compacto e que Ψ é uma bijeção, pois assim segue que Ψ é um homeomorfismo e portanto é uma conjugação topológica entre σ e f .

Seja $s = (\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots) \in \Sigma$. Então $s_0 \cap f(s_1)$ é uma única alça sobre h_i na direção $i = l(s_0)$ pois se $y \in h_i$ e $x \in s_1 \subset h_j$, então $f(W_j^u(x))$ intercepta $W_i^s(y)$ em G_{ij} pontos, cada um em uma das componentes de S_{ij} , e portanto apenas um em s_0 .

A f é uma contração uniforme em cada $W_k^s(y)$ por um fator λ , ou seja, na direção W^s a componente s_0 tem diâmetro menor ou igual a λd , e portanto $s_0 \cap f(s_1)$ tem diâmetro menor ou igual a $\lambda^2 d$, com d o diâmetro de D^k .

Por indução, $K_n^+ = \bigcap_{k=0}^n f^k(s_k)$ está sobre h_i na direção de W^u e tem diâmetro menor ou igual a $\lambda^n d$ na direção de W^s . De forma análoga:

$K_n^- = \bigcap_{k=-n}^{-1} f^k(s_k)$ está sobre h_i na direção W^s e tem diâmetro menor ou igual a $\lambda^n d$ na direção W^u .

Então: $K_n = K_n^- \cap K_n^+ = \bigcap_{k=-n}^n f^k(s_k)$ é compacto com diâmetro menor ou igual a $2\lambda^n d$, que tende a zero com $n \rightarrow \infty$ (pois $|\lambda| < 1$).

A sequência de conjuntos não vazios K_n^+ tem como interseção $\bigcap_{n \geq 0} K_n$ um único ponto. Portanto

$$x = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(s_k)$$

e portanto tem-se a função

$$s \rightarrow x$$

a inversa de Ψ .

Portanto: Ψ é uma bijeção em Λ , Ψ contínua e com Λ um compacto, ou seja, Ψ é a conjugação topológica entre f e σ . ■

Observação: Pelo fato de Ψ ser um homeomorfismo, segue que S é um homeomorfismo nos dois exemplos anteriores.

Capítulo 3

Invariantes Matriciais dos Shifts

O problema fundamental no estudo de *shifts* é a determinação das classes de isomorfismos. Portanto procuramos por invariantes. A primeira abordagem consiste em procurar por invariantes na forma de propriedades dos *shifts*. Tais propriedades devem ser fáceis de checar e dados *shifts* isomorfos estes devem satisfazer a propriedade. Por exemplo, a propriedade de ser do tipo *mixing*, equivalente por *shift*.

Outro enfoque é associar ao *shift* invariantes na forma de objetos algébricos, numéricos ou geométricos (por exemplo, com um grupo; um número ou um grafo). Tais invariantes devem ser de tal forma que para *shifts* isomorfos esses objetos devem ser iguais (no caso de números) ou isomorfos (no caso de grupos). A entropia, o raio espectral, a função zeta, a função zeta de homologia, os grafos são exemplos destes invariantes.

Além disso, um bom invariante deve ser fácil de calcular e completo. Um invariante P (seja uma propriedade; seja um objeto) para uma relação de equivalência é completo quando: se A e B satisfazem P (isto é, possuem a propriedade P) então A e B são equivalentes.

Neste capítulo vamos estudar invariantes matriciais para matrizes de entradas inteiras. Estes invariantes distinguem as classe de isomorfismo de *shifts* do tipo finito e neste sentido são invariantes completos. Muitos desses invariantes matriciais correspondem a invariantes dinâmicos do *shift* associado.

3.1 Shifts do tipo Mixing

O conceito de *subshift* do tipo *mixing* tem uma importância histórica, pois foi um conceito muito usado nos primeiros trabalhos sobre dinâmica simbólica. A classe dos *subshifts* mais relevante é a do tipo *mixing*. Textos mais recentes usam o conceito equivalente de matriz primitiva. A equivalência desses dois conceitos está estabelecida no teorema abaixo.

Definição 3.1 Seja $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ um shift, com A uma matriz inteira não negativa. Então σ é do tipo mixing se dados U e V subconjuntos abertos e não vazios de Σ_A existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $m \geq N$.

Definição 3.2 Seja A uma matriz inteira e não negativa. Então A é chamada de matriz primitiva se existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $A^r > 0$.

Toda matriz primitiva é obviamente irredutível pois, como visto no capítulo anterior, uma matriz inteira e não negativa A é irredutível se para cada $1 \leq i, j \leq n$, com n a ordem de A , existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $A_{ij}^r > 0$. Caso contrário A é redutível.

Teorema 3.1 Um subshift de tipo finito σ é mixing se e somente se sua matriz associada A é primitiva.

Prova:

($\Rightarrow$) Seja σ mixing. Tome $1 \leq i, j \leq n$. Então: $\exists N_{ij} \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_i \cap \sigma^k(U_j) \neq \emptyset, \forall k \geq N_{ij}$$

ou seja, existe $\mathbf{a} \in U_j$ tal que $\sigma^k(\mathbf{a}) \in U_i$. Portanto, $\mathbf{a} = (\dots a_{-1} a_0 a_1 \dots)$, com: $a_0 = j$ e $a_k = i$. Assim, por argumento análogo ao usado na prova do Teorema 2.1, segue que $(A^k)_{ij} > 0$, para todo $k > N_{ij}$.

Seja $N = \max_{i,j} \{N_{ij}\}$. Portanto, se $k > N \Rightarrow k > N_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq n$, ou seja, $(A^k)_{ij} > 0, \forall i, j$ e portanto A é primitiva.

($\Leftarrow$) Seja A primitiva. Então existe um N tal que $A^m > 0, \forall m \geq N$. Sejam $U, V \subset \Sigma_A$ abertos, $U, V \neq \emptyset$. Tome $\mathbf{a} \in U$ e $\mathbf{b} \in V$.

U é aberto $\Rightarrow \exists r_1 \in \mathbb{R}$ tal que se $\mathbf{x} \in \Sigma_A$ e $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r_1$ então $\mathbf{x} \in U$.

V é aberto $\Rightarrow \exists r_2 \in \mathbb{R}$ tal que se $\mathbf{x} \in \Sigma_A$ e $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r_2$ então $\mathbf{x} \in V$.

Portanto existem

$$U \supset \{\mathbf{x} \in \Sigma_A : x_k = a_k, \forall |k| < r\}$$

$$V \supset \{\mathbf{x} \in \Sigma_A : x_k = b_k, \forall |k| < r\}$$

para um r conveniente.

Tome $m > N$. Então existe uma palavra $c_0 c_1 \dots c_m$ no alfabeto com $c_0 = b_r$ e $c_m = a_{-r}$ e tal que $A_{c_k, c_{k+1}} = 1 \forall k$. Desse modo, a seguinte sequência

$$\mathbf{x} = (\dots b_{-2} b_{-1} b_0 b_1 \dots b_{r-1} c_0 \dots c_m a_{-r+1} a_{-r+2} \dots)$$

é tal que: $\mathbf{x} \in V, \sigma^{2r+m+1}(\mathbf{x}) \in U$. Como U e V foram tomados arbitrários, então σ é mixing. ■

3.2 Entropia

Entropia, em geral, está longe de ser um invariante completo para a relação de conjugação entre transformações. Basta ver o exemplo (3.2) a seguir, no qual os shifts dados não são conjugados e entretanto possuem a mesma entropia. Porém, quando nos restringimos à classe de shifts do tipo *mixing*, a entropia nos fornece informações relevantes.

Definição 3.3 Dado um subshift S , sua entropia $h(S)$ é definida como

$$h(S) = \limsup_n \frac{\log(\#W_n(S))}{n}$$

com $\#W_n(S)$ a cardinalidade do conjunto das palavras de comprimento n que ocorrem em seqüências de S .

Exemplo 3.1 No caso de σ ser um full shift é simples calcular a entropia $h(\sigma)$, pois $\#W_n(\sigma) = a^n$ (tomando, sem perda de generalidade, o alfabeto com a símbolos). Portanto

$$h(\sigma) = \limsup_n \frac{\log(\#W_n(\sigma))}{n} = \limsup_n \frac{\log(a^n)}{n} = \limsup_n \frac{n \log(a)}{n} = \log a$$

Exemplo 3.2 Um outro exemplo é o de um shift com entropia zero. Seja σ um shift com o alfabeto $\{1, 2\}$ e com $\rightarrow$ definida por

$$1 \rightarrow 2 \text{ e } 2 \rightarrow 1.$$

Portanto, existem duas seqüências para tal shift, que são

$$(\dots 1212121.212121\dots)$$

$$(\dots 121212.1212121\dots).$$

Para qualquer n , $\#W_n(\sigma) = 2$, pois existem apenas duas palavras de comprimento n , $\forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$h(\sigma) = \limsup_n \frac{\log(\#W_n(\sigma))}{n} = \limsup_n \frac{\log(2)}{n} = 0$$

Extendendo esse processo pode-se construir um subshift com um número determinado de seqüências. Por exemplo, construir um subshift com k palavras, $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Tome o alfabeto: $\{1, 2, \dots, k\}$ e defina a relação $\rightarrow$ por

$$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, k-1 \rightarrow k \text{ e } k \rightarrow 1.$$

Portanto só serão possíveis as seqüências: $(\dots(k-1)k123\dots k.1234\dots)$, $(\dots(k-1)k123\dots k1.234\dots)$, $\dots$, $(\dots(k-1)k123\dots(k-1).k1234\dots)$. Ou seja, ocorrem em σ apenas k seqüências. Note que também nesse caso: $h(\sigma) = 0$.

Para um *subshift* do tipo finito associado à matriz A a entropia é logaritmo do raio espectral de A , pois o número de palavras de comprimento n é $\text{tr} A^n$.

Que números podem ser entropia para um *subshift* do tipo *mixing*? Em outras palavras, que números podem ser o raio espectral de matrizes inteiras primitivas? Existe um resultado [L] que diz que um número é raio espectral de uma matriz inteira primitiva se e somente se é um número de Perron. Um número de Perron é um inteiro algébrico positivo estritamente maior que o módulo de qualquer raiz do polinômio minimal.

3.3 Matrizes *Shift* Equivalentes

Matrizes bem diferentes podem gerar *subshifts* do tipo finito conjugados. A relação de equivalência na classe das matrizes que correspondem à conjugação topológica dos *subshifts* deve-se a Williams [W] e é chamada de fortemente *shift* equivalência. Williams definiu outra relação de equivalência, a chamada *shift* equivalência [W]. É interessante notar que apesar de parecer mais complicada, *shift* equivalência é de certa forma mais simples que fortemente *shift* equivalência. Na verdade esse conceito foi introduzido por Williams na esperança de reduzir o estudo de fortemente *shift* equivalência a uma relação para qual fosse possível fazer as contas. Um resultado relativamente simples é que fortemente *shift* equivalência implica em *shift* equivalência. Em $\mathbb{Z}$ *shift* equivalência implica em fortemente *shift* equivalência. Williams [W] fez uma conjectura de que *shift* equivalência implicaria em fortemente *shift* equivalência em $\mathbb{Z}_+$. Porém Kim e Roush [KR1], baseados em um exemplo que está em [KRW], mostraram que, pelo menos no caso de matriz redutível, a conjectura está errada.

Definição 3.4 Duas matrizes A e B com entradas em $\mathbb{Z}$ são fortemente *shift* equivalentes elementar sobre $\mathbb{Z}$ se há matrizes U, V com entradas em $\mathbb{Z}$ tal que $A = UV$ e $B = VU$.

Definição 3.5 A e B são fortemente *shift* equivalentes sobre $\mathbb{Z}$ quando existem matrizes com entradas em $\mathbb{Z}$ (não necessariamente quadradas) R_i e S_i , com $1 \leq i \leq n$ tal que

$$A = R_1 S_1, B = S_n R_n \text{ e } R_{i+1} S_{i+1} = S_i R_i \text{ para } 1 < i \leq n.$$

Para definir fortemente *shift* equivalência elementar e fortemente *shift* equivalência em $\mathbb{Z}_+$ (ou em qualquer subanel S) basta substituir $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_+$ (ou por S) nas definições acima.

Teorema 3.2 [W] *Dois subshifts do tipo finito σ_A e σ_B são topologicamente conjugados se e somente se A e B são fortemente shift equivalentes.*

Uma demonstração desse resultado encontra-se em [F2].

Com o intuito de obter uma relação de equivalência entre matrizes mais fácil de computar, Williams introduziu a noção de *shift equivalência*.

Definição 3.6 *Duas matrizes A e B são shift equivalentes em $\mathbb{Z}$ se e somente se existem matrizes U, V em $\mathbb{Z}$ e um inteiro positivo l (chamado de 'lag') tais que as seguintes equações são válidas*

$$A^l = UV$$

$$B^l = VU$$

$$AU = UB$$

$$BV = VA$$

Para definir *shift equivalência em $\mathbb{Z}_+$* (ou em um subanel qualquer S) basta substituir $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_+$ (ou por S) na definição acima.

Um exemplo de duas matrizes *shift equivalentes* sobre $\mathbb{Z}_+$ de lag 1 é o seguinte:

Exemplo 3.3 *Sejam:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando: $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então:

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$UB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AU = UB$$

$$VA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow VA = BV$$

$$VU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Duas matrizes fortemente *shift* equivalentes A e B são *shift* equivalentes (qualquer que seja o subanel dado). De fato, sejam A e B fortemente *shift* equivalentes em S . Então existem R_i e S_i , com $1 \leq i \leq n$, tais que

$$A = R_1 S_1, B = S_n R_n \text{ e } R_{i+1} S_{i+1} = S_i R_i \text{ para } 1 < i \leq n.$$

Tome

$$T = R_1 R_2 \dots R_n$$

$$U = S_n S_{n-1} \dots S_1.$$

Daremos uma idéia das potências de A .

$$A^2 = R_1 \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} S_1 = R_1 R_2 S_2 S_1$$

$$A^3 = R_1 \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} S_1 = R_1 R_2 \underbrace{S_2 R_2}_{S_2} S_2 S_1 = R_1 R_2 R_3 S_3 S_2 S_1$$

$\vdots$

$$A^n = R_1 \underbrace{S_1 R_1 \dots S_1 R_1}_{(n-1) \times} S_1 = R_1 R_2 \underbrace{S_2 R_2 \dots S_2 R_2}_{(n-2) \times} S_2 S_1 = \dots = R_1 \dots R_n S_n \dots S_1 = TU.$$

Já para B

$$B^2 = S_n R_n S_n R_n = S_n S_{n-1} R_{n-1} R_n$$

$\vdots$

$$B^n = S_n \underbrace{R_n S_n \dots R_n S_n}_{(n-1) \times} R_n = \dots = S_n S_{n-1} \dots S_1 R_1 \dots R_n = UT.$$

Além disso

$$R_1 S_1 R_1 R_2 \dots R_n = R_1 R_2 S_2 R_2 \dots R_n = \dots = R_1 \dots R_{n-1} S_{n-1} R_{n-1} R_n = R_1 \dots R_n S_n R_n$$

e portanto $AT = TB$. Por outro lado

$$S_n S_{n-1} \dots S_1 R_1 S_1 = S_n \dots R_2 S_2 S_1 = \dots = S_n S_{n-1} R_{n-1} \dots S_1 = S_n R_n S_n \dots S_1$$

ou seja, $UA = BU$ e portanto A e B são *shift* equivalentes.

Proposição 3.1 *Seja U, V um par que define uma shift equivalência de lag l entre A e B . Então A^n e B^n , com $n > l$, são fortemente *shift* equivalentes. Ainda mais, o par $A^n U, V$ define uma shift equivalência de lag $l + n$ entre A e B .*

Prova: Tomando $n > l$ (ou seja, $n = l + n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$), segue que

$$n > l \Rightarrow A^n = A^{l+n_0} = A^l A^{n_0}$$

da mesma forma

$$B^n = B^{n_0} B^l$$

portanto

$$B^n = B^{n_0} B^l = B^{n_0} VU$$

e

$$A^n = A^l A^{n_0} = UV A^{n_0}$$

assim, para ter o resultado, basta provar que $VA^{n_0} = B^{n_0}V$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$. De fato, se $VA^{n_0} = B^{n_0}V$, então $B^{n_0}VU = VA^{n_0}U$, e portanto:

$$A^n = UV A^{n_0}$$

$$B^n = VA^{n_0}U$$

ou seja, A^n e B^n são fortemente *shift* equivalentes para todo $n > l$. Agora provaremos que $VA^{n_0} = B^{n_0}V$.

Para $n_0 = 1$

$$VA = BV$$

Suponha que vale para n_0 , ou seja

$$VA^{n_0} = B^{n_0}V$$

para $n_0 + 1$

$$VA^{n_0+1} = VA^{n_0}A = B^{n_0}VA = B^{n_0}BV = B^{n_0+1}V$$

portanto, pela hipótese de indução, segue o resultado.

A segunda afirmação segue

$$A^{l+n} = A^l A^n = UV A^n = UB^nV = A^n UV$$

$$B^{l+n} = B^l B^n = VUB^n = VA^nU$$

$$AA^nU = A^nAU = A^nUB$$

$$BV = VA$$

Para o resultado ser válido, basta mostrar que $A^nU = UB^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$

$$VA = BV$$

Suponha que vale para n , ou seja

$$VA^n = B^nV$$

já para $n + 1$

$$VA^{n+1} = VA^nA = B^nVA = B^nBV = B^{n+1}V$$

portanto, por indução, temos o resultado. ■

Definição 3.7 *Dois subshifts são eventualmente isomorfos se σ_A^n e σ_B^n são isomorfos a menos de um número finito de valores de n .*

Sejam A e B matrizes associada a σ_A e σ_B . Dos resultados acima segue: para $n > l$, A^n e B^n são fortemente *shift* equivalentes e portanto para $n > l$, σ_A^n e σ_B^n são isomorfos. Portanto, se A e B são *shift* equivalentes; então σ_A e σ_B são eventualmente isomorfos.

Se A e B são matrizes *shift* equivalentes sobre $\mathbb{Z}$ então A e B são fortemente *shift* equivalentes sobre $\mathbb{Z}$.

Já para o caso de matrizes sobre $\mathbb{Z}_+$, não se conhece qualquer relação entre matrizes serem *shift* equivalentes e fortemente *shift* equivalentes. Para esse caso, encontrar fortemente *shift* equivalência é muito complicado. Já *shift* equivalência é mais simples. O resultado abaixo facilita esta busca.

Teorema 3.3 *Duas matrizes primitivas, inteiras e não negativas A e B são *shift* equivalentes sobre $\mathbb{Z}_+$ se são *shift* equivalentes sobre $\mathbb{Z}$.*

Uma prova para o teorema acima encontra-se em [PaW].

Capítulo 4

Função Zeta

Neste capítulo vamos estudar a função zeta. Esta função foi primeiramente definida por Artin e Mazur [AM]. Além da função zeta propriamente dita, estudaremos as propriedades das funções zeta de homologia e zeta reduzida de homologia. A relação entre as funções zeta, zeta de homologia e função zeta de homologia reduzida será de grande importância para o desenvolvimento do próximo capítulo, no qual estudaremos a possibilidade de realização ou não de um *subshift* como conjunto básico de um difeomorfismo de Smale numa dada superfície.

4.1 Função Zeta para um Subshift do tipo Finito

A função zeta é definida (como definida por Artin e Mazur [AM]) da seguinte forma.

Definição 4.1 Dada uma função $f : M \rightarrow M$, então a função zeta de f é definida como a série de potência em t

$$\zeta_f(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} N_m t^m\right)$$

sendo N_m a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos de f^m ; ζ está definida se $N_m < \infty$ para todo m .

Proposição 4.1 Se A é uma matriz real $n \times n$, então

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\text{tr } A^m) t^m\right) = \frac{1}{\det(I - At)}$$

Prova:

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m}$ é a série de potência de $-\log(I - At)$, e converge para t próximo de zero. Como para uma matriz B , $\exp(\text{tr} B) = \det(\exp B)$, então:
 $\exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\text{tr} A^m) t^m) = \exp(\text{tr} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A^m t^m) = \exp(\text{tr}(-\log(I - At))) =$
 $= \det(\exp(-\log(I - At))) = \det(\exp(\log(I - At)^{-1})) = \det((I - At)^{-1}) =$
 $= \frac{1}{\det(I - At)}.$ ■

As raízes de $\det(I - At)$ são recíprocas aos autovalores não nulos de A e terão a mesma multiplicidade dos autovalores correspondentes. O polinômio $\det(I - At)$ contém a mesma informação do polinômio característico de A (χ_A) exceto a multiplicidade dos autovalores nulos que, se existirem, será perdida. Isso se segue pois: $\det(I - At) = t^n \det(It^{-1} - A) = t^n \chi_A(t^{-1})$.

Para o caso especial de um *subshift* σ associado a uma matriz inteira, a proposição implica o seguinte corolário, que facilitará o cálculo de ζ_σ neste caso especial.

Corolário 4.1 Se $\sigma(A) : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ é o shift do tipo finito associado à matriz inteira e não negativa A , então a função zeta de $\sigma(A)$ é dada por

$$\zeta_\sigma(t) = \frac{1}{\det(I - At)}.$$

Prova:

Como : $N_m = \text{tr}(A^m)$ então

$$\zeta_\sigma(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} N_m t^m\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{tr}(A^m) t^m\right) = \frac{1}{\det(I - At)}$$

o que conclui a prova. ■

Exemplo 4.1 Torna-se fácil calcular a função zeta para os exemplos vistos até aqui. Primeiro calcularemos para o exemplo 2.1. Como tanto para fonte quanto para o poço existe apenas um ponto fixo para qualquer iterada do difeomorfismo f restrito a estes conjuntos (e portanto $N_m = 1, \forall m \in \mathbb{N}$). Assim $f|_{\Omega_0} = f|_{\Omega_2}$, que vale:

$$\zeta(f|_{\Omega_0}) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} N_m t^m\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m\right) = \frac{1}{1-t}$$

Para a Ferradura de Smale, como a matriz de interseção geométrica é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então (sendo σ o shift associado à matriz A)

$$I - At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & t \\ t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

e portanto: $\det(I - At) = 1 - 2t$, ou seja

$$\zeta_{\sigma}(t) = \frac{1}{1-2t}.$$

Exemplo 4.2 Já para o exemplo 2.2, como a fonte é um ponto fixo repulsor, então sua função zeta é a mesma de $f|_{\Omega_0}$ do exemplo 2.1. O conjunto atrator é um conjunto periódico de período 3. Portanto existem 3 pontos fixos para $f^m|_{\Omega_0}$, ou seja, $N_m = 3, \forall m \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\zeta(f|_{\Omega_0}) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} 3t^m\right) = \exp 3\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m\right) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^3.$$

Já para J -Ferradura, a matriz de interseção algébrica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto (sendo σ o shift associado à matriz A)

$$I - At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\det(I - At) = 1 - t - t^2$$

e segue

$$\zeta_{\sigma}(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

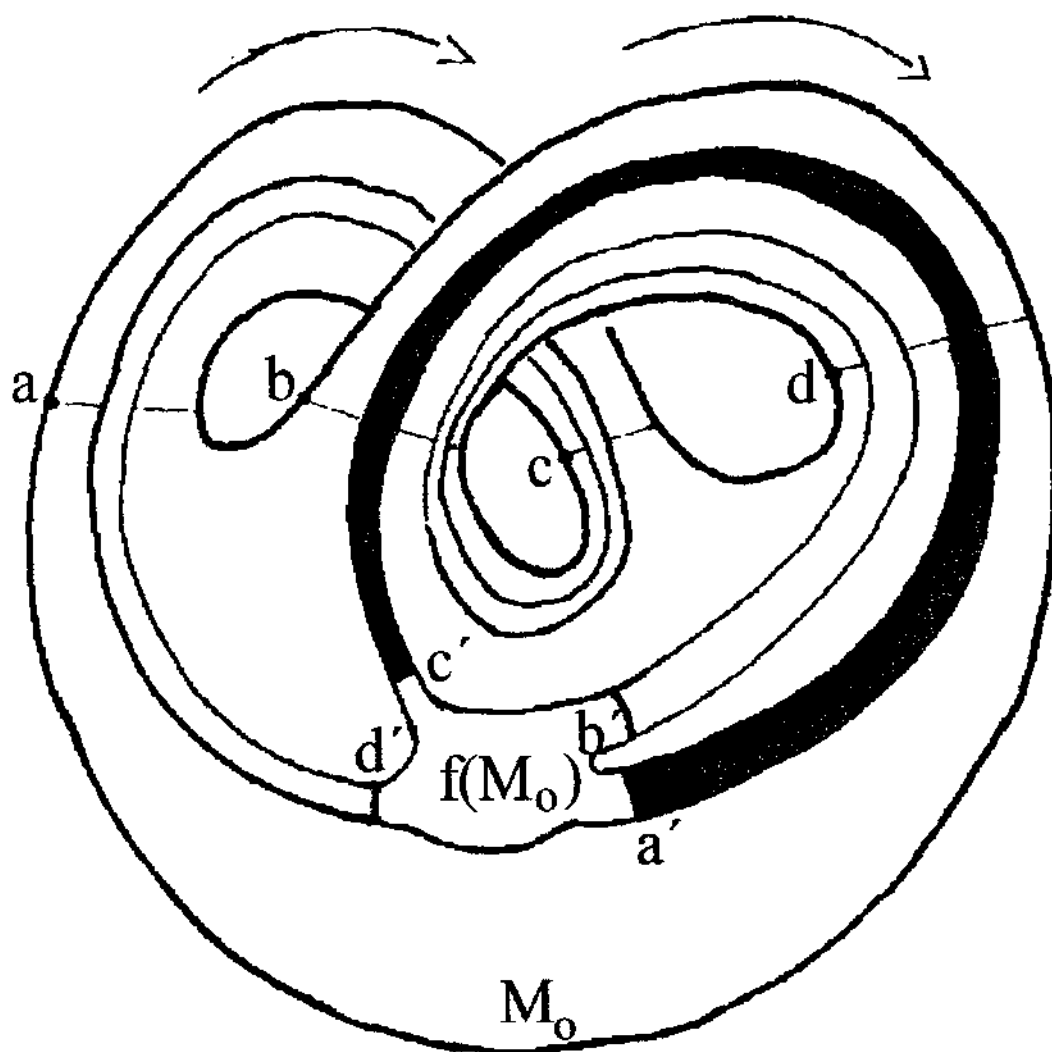
Exemplo 4.3 Exemplo no toro devido a Franks [F2]

Os exemplos vistos até aqui estão no plano (ou no plano estendido). Vamos agora estudar um exemplo no toro.

Tome um difeomorfismo f no toro T , conforme a figura abaixo. Na figura está representada a imagem de $f : T \rightarrow T$ restrita a $T - D$, com D um disco. O difeomorfismo f tem como conjuntos básicos um ponto fixo atrator p , um ponto fixo repulsor ∞ que está no disco retirado e um conjunto Λ determinado pelo conjunto $H = h_1 \cup h_2$ de alças hiperbólicas. Note que: $f(h_1) \subset h_2$ e $f(h_2) \subset h_1 \cup h_2$. Portanto a matriz de interseção geométrica para este exemplo é a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como nos dois exemplos já apresentados, existe um subshift do tipo finito σ associado à matriz A . Para o cálculo da função zeta, no caso específico dos subshifts do tipo finito, o que interessa é a matriz de interseção geométrica. Portanto $\zeta_{\sigma}(t)$ é o mesmo que o calculado no exemplo anterior. Portanto,

$$\zeta_{\sigma}(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE



4.2 Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz

Entre as mais importantes aplicações da função zeta como invariante matricial associado ao *shift* está sua relação com invariantes homológicos. Esta relação está estabelecida no Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz.

Definição 4.2 Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem o conjunto dos pontos fixos F compacto, então o índice de ponto fixo $I_F(f)$ é definido como o inteiro

$$(id - f)_*(u_F) \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{Z}.$$

A função $(id - f) : (V, V - F) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ é dada por: $(id - f)(x) = x - f(x)$ e $u_F \in H_n(V, V - F)$ é a imagem de 1 pela composta

$$\mathbb{Z} = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - F) \simeq H_n(V, V - F),$$

com D^n o n -disco contendo F .

Proposição 4.2 *Seja p o único ponto fixo da função $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, f de classe C^∞ , com $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\det(I - Df_p) \neq 0$. Então*

$$I_p(f) = \operatorname{sgn}(\det(I - Df_p))$$

Se p é hiperbólico, então $I_p(f) = (-1)^u \Delta$, com $u = \dim E_p^u$ o índice de p e $\Delta = 1$ se $Df_p : E_p^u \rightarrow E_p^u$ preserva a direção e $\Delta = -1$ caso contrário.

Prova:

Como $\det(I - Df_p) \neq 0$, então pelo Teorema da Função Implícita $\operatorname{id} - f$ é um difeomorfismo local que preserva ou inverte a orientação dependendo do sinal de: $\det(I - Df_p)$ (preserva se o sinal é positivo e inverte se é negativo). Como

$$(\operatorname{id} - f)_* : H_n(V, V - \{p\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

é $\pm \operatorname{id} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, com o sinal dependendo do sinal de $\det(I - Df_p)$, então

$$I_p(f) = \operatorname{sgn}(\det(I - Df_p)).$$

Para mostrar que $I_p(f) = (-1)^u \Delta$, se p hiperbólico, será provado que

$$(-1)^u \Delta = \operatorname{sgn}(\det(I - Df_p)).$$

Sejam: $\{\mu_i\}$ e $\{\lambda_i\}$ os autovalores de Df_p com

$$|\mu_i| > 1 \text{ e } |\lambda_i| < 1.$$

Então

$$\det(I - Df_p) = \prod (1 - \mu_i) \prod (1 - \lambda_i).$$

Como para um autovalor complexo η seu conjugado também é um autovalor, então no produto acima

$$(1 - \eta)(1 - \bar{\eta}) = (1 - \eta)(\overline{1 - \eta}) = |1 - \eta|^2 > 0$$

e portanto autovalores complexos não influenciam a mudança de orientação. Portanto basta estudar os autovalores reais.

Assuma, sem perda de generalidade, que Df_p tem apenas autovalores reais. Então:

$$\operatorname{sgn}(\det(I - Df_p)) = \operatorname{sgn}(\prod (1 - \mu_i)) = (-1)^{u-r}$$

com r o número de μ_i que são negativos, pois apenas para μ_i positivo $1 - \mu_i < 0$. Mas

$$\Delta = (-1)^{-r} = (-1)^r.$$

Portanto,

$$\operatorname{sgn}(\det(I - Df_p)) = (-1)^u (-1)^r = (-1)^u \Delta$$

o que conclui a prova. ■

Exemplo 4.4 Pela proposição anterior torna-se fácil calcular $I_p(f)$ no caso da Ferradura de Smale em Λ . Tomando um dos dois pontos fixos no conjunto básico de dimensão 1, ou seja, em Λ , temos que $u = 1$. Como Df_p preserva a orientação, segue que $\Delta = 1$. Portanto: $I_p(f) = -1$, para qualquer dos dois pontos fixos de f em Λ .

Também é simples calcular $I_p(f)$ para o exemplo 2.2 em Λ . Para esse exemplo, como já visto, existe um único ponto fixo para f em Λ . Para esse ponto fixo, Df_p preserva a orientação e portanto $\Delta = 1$. Como Λ é um conjunto básico de dimensão 1, segue que $u = 1$. Portanto $I_p(f) = -1$.

A seguir enunciamos algumas propriedades do índice cujas demonstrações encontram-se em [E2].

Teorema 4.1 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com o conjunto de pontos fixos F compacto.

(a) Se $F_0 \subset F$ é compacto e V, V' são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ com $F_0 = V \cap F = V' \cap F$. Então

$$I_{F_0}(f|_V) = I_{F_0}(f|_{V'})$$

e será denotado por I_{F_0} .

(b) Se $F = F_1 \cup F_2$ com F_1, F_2 compactos e disjuntos então

$$I_F(f) = I_{F_1}(f) + I_{F_2}(f)$$

(c) Se $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$ é uma homotopia e: $K = \{x : f_t(x) = x \text{ para algum } t\}$ é compacto. Então

$$I_{F_0}(f_0) = I_{F_1}(f_1)$$

com F_0 e F_1 os conjuntos dos pontos fixos de f_0 e de f_1 respectivamente.

Antes de provar o Teorema de Lefschetz é necessário fazer algumas considerações algébricas. Seja C um grupo abeliano finitamente gerado ou um espaço vetorial de dimensão finita e $e : C \rightarrow C$ um endomorfismo. As funções que serão usadas são funções α tais que se

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow e_1 & & \downarrow e_2 & & \downarrow e_3 \\ 0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

é um diagrama comutativo com as linhas horizontais uma sequência exata curta, então

$$\alpha(e_2) = \alpha(e_1) + \alpha(e_3).$$

Tais funções são chamadas de funções de Euler-Poincaré.

Um exemplo de função de Euler-Poincaré é a função

$$\alpha(e) = \text{tr}(e) \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 4.3 *Seja α uma função que associa a cada par (C, e) um elemento de um grupo abeliano G , sendo e um endomorfismo de C . Se α é aditiva em uma sequência exata curta, então para qualquer cadeia complexa finitamente gerada $C = \{C_i\}$ e função de cadeia $\tau = \{\tau_i : C_i \rightarrow C_{i+1}\}$ temos que*

$$\sum (-1)^i \alpha(C_i, \tau_i) = \sum (-1)^i \alpha(H_i(C), \tau_{i*}).$$

Agora já é possível provar o Teorema de Lefschetz. Esse teorema será fundamental para o cálculo da função zeta de homologia, pois apresenta uma forma relativamente simples para calcular o índice de ponto fixo. Estamos interessados apenas no caso de um difeomorfismo, mas existem versões mais gerais para este teorema.

Teorema 4.2 (Teorema de Lefschetz): *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade compacta com o conjunto dos pontos fixos F . Então*

$$I_F(f) = \sum (-1)^i \text{tr}(f_{*i})$$

com

$$f_{*i} : H_i(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(M, \mathbb{R}) \text{ induzida por } f.$$

Prova:

Como o índice é um invariante homotópico, então pode-se tomar f fitted. Se $\Lambda_k = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(H(k))$, então $f|_{\Lambda_k}$ é topologicamente conjugado ao shift com matriz geométrica $G(k)$ pelo teorema 2.1. A cardinalidade dos pontos fixos em Λ_k é dada pelo traço de $G(k)$. Pela proposição 4.2 temos

$$I_{F(k)}(f) = \sum_{p \in F(k)} I_p f = \sum_{p \in F(k)} (-1)^k \Delta_p$$

com: $F(k) = F \cap \Lambda_k$ e $\Delta_p = \pm 1$, dependendo da ação de Df_p na orientação de E_p^u , negativo se inverte a orientação e positivo caso contrário. Por outro lado, $p \in h_i(k)$, então por definição Δ_p é o número de interseção

$$f(W_i^u(p)) \cdot W_i^s(p) = A_{ii}(k)$$

e segue que

$$\sum_{p \in F(k)} \Delta_p = \text{tr}(A(k)),$$

com $A(k)$ a matriz de interseção algébrica de $H(k)$. Daí temos que

$$\sum_{p \in F(k)} I_p f = (-1)^k \text{tr}(A(k))$$

As matrizes $\{A_k\}$ são matrizes para funções de cadeia representando f em um complexo de cadeia cuja homologia é $H_*(M)$. Então, pela proposição anterior

$$I_F(f) = \sum_{k=0}^n I_{F(k)}(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{tr}(A(k)) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{tr}(f_{**k})$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Corolário 4.2 *Seja $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$ difeomorfismo de um par, com $X \subset \mathbb{R}^n$, com o conjunto dos pontos fixos F . Se $F_1 = F \cap (X - A)$, $F_2 = F \cap A$ e $F_2 \subset \text{int} A$. Então*

$$I_{F_1}(f) = \sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}$$

com $f_{**k} : H_k(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(X, A; \mathbb{R})$ induzido por f .

Prova:

Considere a sequência exata longa do par (X, A) , com os endomorfismos induzidos por f

$$\dots \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow \dots$$

como um complexo de cadeia de homologia trivial. Pela proposição 4.3

$$\sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}(A) - \sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}(X) + \sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}(X, A) = 0$$

então pelo Teorema de Lefschetz

$$I_{F_2}(f|_A) - I_F(f) + \sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}(X, A) = 0.$$

Então, como $F_2 = F \cap A$ temos que

$$\sum (-1)^k \text{tr} f_{**k}(X, A) = I_F(f) - I_{F_2}(f) = I_{F_1}(f)$$

e segue o resultado. ■

4.3 Função Zeta de Homologia

Definição 4.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $m > 0$ $F(m)$ é o conjunto de pontos fixos de f^m . Então a função zeta de homologia $Z(f)$ de f é definida como*

$$Z_f(t) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} L(f^m) \frac{t^m}{m} \right),$$

$L(f^m) = I_{F(m)}(f^m)$, com $I_{F(m)}(f^m) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr} f_{i*}^m$, é chamado de número de Lefschetz de f^m .

Exemplo 4.5 Seja f o difeomorfismo do exemplo 2.1. Como visto, seus conjuntos básicos são um poço (um ponto fixo atrator), que será denotado por Ω_0 , uma fonte (∞), que será denotado por Ω_2 , e o conjunto cuja matriz de interseção geométrica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que será denotado por Ω_1 .

Para Ω_0 e Ω_2 , como são apenas pontos fixos, então a matriz de interseção geométrica é a matriz 1×1 (1) e sua alça $H(0)$ é a 0-alça. Já para Ω_1 , o conjunto de 1-alças é $H = h_1 \cup h_2$ (com h_1 e h_2 definidos no exemplo 2.1) e a matriz de interseção geométrica é A . Portanto,

$$I_{F(m)}(f^m) = (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot \text{tr}(A^m) + (-1)^2 \cdot 1 = 2 + (-1)\text{tr}(A^m), \forall m.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z_f(t) &= \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left((2 + (-1)\text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) \right) = \\ &= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2t^m}{m} + ((-1)\text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) \end{aligned}$$

e portanto

$$Z_f(t) = \exp \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2t^m}{m} \right) + \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((-1)\text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) \right)$$

e

$$Z_f(t) = \left(\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2t^m}{m} \right) \right) \left(\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((-1)\text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) \right)$$

como

$$\exp \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} \right) = \exp(-2 \log(1-t)) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

e

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((-1)\text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) = \det(I - At) = 1 - 2t$$

então

$$Z_f(t) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 (1-2t) = \frac{1-2t}{(1-t)^2}$$

que é a função zeta de homologia para o difeomorfismo do exemplo 2.1.

Exemplo 4.6 Já para o exemplo 2.2 os conjuntos básicos são Ω_0 uma órbita periódica atratora de período 3, Ω_2 um ponto fixo repulsor ∞ e o conjunto Ω_1 cuja matriz de interseção geométrica é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma que no exemplo da seção 2.1.1, Ω_2 tem a matriz de interseção geométrica (1). Já a matriz de interseção geométrica para Ω_0 será

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Já o conjunto de 1-alças para Ω_1 é: $H = h_1 \cup h_2$ e a matriz de interseção geométrica é A . Portanto

$$I_{F^m}(f^m) = (-1)^0 1 + (-1)^2 \text{tr} \hat{A} + (-1)^1 \text{tr}(A^m)$$

e, calculando a função de homologia zeta como foi feito no exemplo anterior temos,

$$Z_f(t) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} \right) \cdot \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\text{tr} \hat{A} \right) \frac{t^m}{m} \right) \cdot \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((-1) \text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right)$$

com

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} \right) = \frac{1}{(1-t)},$$

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\text{tr} \hat{A}^m \right) \frac{t^m}{m} \right) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} 3 \frac{t^m}{m} \right) = \frac{1}{(1-t)^3}$$

e

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} ((-1) \text{tr}(A^m)) \frac{t^m}{m} \right) = \det(I - At) = 1 - t - t^2$$

e portanto

$$Z_f(t) = \frac{1 - t - t^2}{(1-t)^4}$$

A função zeta de homologia ($Z_f(t)$) tem como coeficiente o índice de ponto fixo $I_{F^m}(f^m)$, enquanto a função zeta tem como coeficientes o número de pontos fixos de f^m . O Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz apresenta uma fórmula relativamente fácil para calcular o índice de pontos fixos. Não existe uma fórmula parecida para o cálculo do número de pontos fixos de f^m . Mais adiante veremos que existe uma relação entre $\zeta_f(t)$ e $Z_f(t)$. Então, pela facilidade no cálculo, $Z_f(t)$ é mais utilizada.

Proposição 4.4 *Seja $f : E \rightarrow E$, com $E \subset \mathbb{R}^n$, um difeomorfismo. Então a função zeta de homologia de f é uma função racional dada por*

$$Z_f(t) = \left(\prod_{k=0}^n \det(I - f_{k*}t)^{(-1)^{k+1}} \right)$$

com: $f_* : H_k(E; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(E; \mathbb{R})$ induzida por f e n satisfazendo: $H_k(E) = 0$, $\forall k > n$.

Prova:

$$Z_f(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \text{tr} f_{k*}^m \frac{t^m}{m}\right)\right) = \prod_{k=0}^n \left(\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{tr} f_{k*}^m t^m\right)\right)^{(-1)^k} = \prod_{k=0}^n \det(I - f_{k*} t)^{(-1)^{k+1}}. \blacksquare$$

Se $\bar{f} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ é uma função de um par, com $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{Fix}(\bar{f}^m) = \{x \in X : \bar{f}^m(x) = x\}$ e $(\text{Fix}(\bar{f}^m) \cap A) \subset \text{int} A, \forall m$, então pode-se definir a função zeta de homologia de $\bar{f}$ para o par por

$$Z_{\bar{f}}(t) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} L(\bar{f}^m) \frac{t^m}{m}$$

com: $L(\bar{f}^m) = I_{F(m)}(\bar{f}^m|_{X-A}), F(m) = \text{Fix}(\bar{f}^m) \cap (X - A)$.

Para esse caso existe um resultado análogo.

Proposição 4.5 *Seja $\bar{f} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ uma função, com $X \subset \mathbb{R}^n$, e*

$$\text{Fix}(\bar{f}^m) \cap A \subset \text{int} A, \forall m,$$

então a função zeta de homologia de $\bar{f}$ é dada por

$$Z_{\bar{f}}(t) = \prod_{k=0}^n (\det(I - \bar{f}_{k*} t)^{(-1)^{k+1}})$$

com: $\bar{f}_{k*} : H_k(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(X, A; \mathbb{R})$ induzida por $\bar{f}$ e n satisfazendo

$$H_k(X, A) = 0, \text{ se } k > n.$$

Definição 4.4 *Se para $f : M \rightarrow M$ há um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia, com conjuntos básicos $\{\Omega_i\}$, denota-se por ζ_i a função zeta de $f|_{\Omega_i}$ e por Z_i a função zeta de homologia de f restrita a Ω_i , ou seja*

$$Z_{f_i}(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{N}_m^i t^m\right)$$

com: $\tilde{N}_m^i = \sum I_p(f^m)$ a soma sobre todo p tal que $p \in \text{Fix}(f^m) \cap \Omega_i$.

4.4 Relações entre Funções Zeta e Zeta de Homologia

Proposição 4.6 *Se para $f : M \rightarrow M$ há um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia com conjuntos básicos $\{\Omega_i\}_{i=0}^l$ então vale.*

$$(a) \zeta_f(t) = \prod_{i=0}^l \zeta_{f_i}(t)$$

$$(b) Z_f(t) = \prod_{i=0}^l Z_{f_i}(t)$$

$$(c) Z_{f_i}(t) = \prod_{k=0}^n \det(I - f_{i_k} t)^{(-1)^{k+1}}, \text{ com: } f_{i_k} : H_*(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R})$$

induzida por f e $\{M_i\}$ uma filtração associada a f .

Prova:

(c) segue da proposição anterior.

Como $Fix(f^m) = \bigcup_i Fix(f^m|_{\Omega_i})$, então (a) segue das definições de $\zeta_f(t)$ e $\zeta_{f_i}(t)$.

Como $\tilde{N}_m^i = \sum_{\rho \in F(i)} I_\rho(f^m)$, com $F(i) = Fix(f^m) \cap \Omega_i$, então:

$\sum_{i=0}^l \tilde{N}_m^i = L(f^m)$ e portanto (b) segue da definição. ■

Exemplo 4.7 Seja f o difeomorfismo descrito na seção 2.1.1. Tomando Ω_0 , Ω_1 e Ω_2 como no exemplo 4.5. Para Ω_0 e Ω_2 existe apenas um ponto fixo para f^m , para qualquer m , então $N_m = 1, \forall m$, e portanto

$$\zeta_{f_0}(t) = \zeta_{f_2}(t) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} N_m t^m \right) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m \right)$$

mas

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m \right) = -\log(1-t)$$

e assim

$$\zeta_{f_0}(t) = \zeta_{f_2}(t) = \exp(-\log(1-t)) = \frac{1}{1-t}.$$

Como já visto

$$\zeta_{f_1}(t) = \frac{1}{1-2t}$$

Portanto, pela proposição anterior

$$\zeta_f(t) = \prod_{i=0}^2 \zeta_{f_i}(t) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 \left(\frac{1}{1-2t} \right) = \frac{1}{1-4t+5t^2-2t^3}.$$

Já para o exemplo da J-ferradura do Franks, tomando Ω_0 , Ω_1 e Ω_2 como no exemplo 4.6. Aqui o cálculo de $\zeta_{f_2}(t)$ é idêntico ao caso anterior, e portanto

$$\zeta_{f_2}(t) = \frac{1}{1-t}$$

Já $f|_{\Omega_0}$ tem um ponto periódico com período 3, o mesmo ocorrendo com qualquer de suas potências. Portanto,

$$\zeta_{f_0}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3t^n}{n}\right) = \frac{1}{(1-t)^3}$$

$\zeta_{f_1}(t)$ já foi calculado e vale

$$\zeta_{f_1}(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Portanto

$$\zeta_f(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^4 \left(\frac{1}{1-t-t^2}\right) = \frac{1}{1-5t+9t^2-6t^3-t^4+3t^5-t^6}.$$

O próximo resultado é uma relação entre as funções $Z_{f_i}(t)$ e $\zeta_{f_i}(t)$ sobre um conjunto básico Ω_i de f . Esta proposição dependerá da preservação ou não por Df de E^u em Ω_i .

Proposição 4.7 Se Ω_i é um conjunto básico de $f : M \rightarrow M$ e $Df : E^u \rightarrow E^u$ preserva (ou inverte) a orientação de E^u em Ω_i , então

$$\zeta_{f_i}(t) = Z_{f_i}(t)^{(-1)^k} \text{ (ou } Z_{f_i}(-t)^{(-1)^k}, \text{ se inverte a orientação)}$$

com k o índice de Ω_i .

Prova:

Suponha que Df preserva a orientação.

Seja $N_m^i = \text{cardinalidade de } \text{Fix}(f^m) \cap \Omega_i$ e $\tilde{N}_m^i(f^m) = \sum I_p(f^m)$, com $p \in \text{Fix}(f^m) \cap \Omega_i$. Então $N_m^i = (-1)^k \tilde{N}_m^i$, pois,

$$\tilde{N}_m^i = \sum I_p(f^m) = (-1)^k \sum \Delta = (-1)^k N_m^i,$$

pois Df preserva a orientação, portanto $\Delta = 1$. A soma é tomada sobre $p \in \text{Fix}(f^m) \cap \Omega_i$, com $I_p(f^m) = (-1)^k$. Então

$$\zeta_{f_i}(t) = Z_{f_i}(t)^{(-1)^k}.$$

Suponha que Df inverte a orientação.

$I_p(f^m) = (-1)^k \Delta_p$ e $\Delta_p = (-1)^m$, com

$$\tilde{N}_m^i = (-1)^k (-1)^m N_m^i.$$

Então

$$Z_{f_i}(-t) = \exp\left(\sum \frac{1}{m} \tilde{N}_m^i (-t)^m\right) = \exp\left(\sum \frac{1}{m} (-1)^k N_m^i t^m\right) = \zeta_{f_i}(t)^{(-1)^k}$$

o que completa a demonstração. ■

Exemplo 4.8 Vejamos estas relações nos exemplo das seções 2.1.1 e 2.1.2. Para o exemplo do difeomorfismo associado à ferradura de Smale temos

$$\zeta_{f_0}(t) = \zeta_{f_2}(t) = \frac{1}{1-t}$$

e

$$\zeta_{f_1}(t) = \frac{1}{1-2t}.$$

Vamos agora calcular $Z_{f_i}(t)$, com $0 \leq i \leq 2$. Como visto, a matriz de interseção algébrica é a matriz (1). Portanto

$$I_{F(m)}(f^m) = 1, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$Z_{f_0}(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{1}{1-t}.$$

Já a matriz de interseção geométrica para Ω_1 é A , daí

$$I_{F(m)}(f^m) = (-1) \operatorname{tr} A^m$$

portanto

$$Z_{f_1}(t) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1) \operatorname{tr}(A^n) \frac{t^n}{n} \right) \right) = \det(I - At) = 1 - 2t.$$

e portanto ilustramos com este exemplo a proposição 4.7.

Exemplo 4.9 Para o exemplo da seção 2.1.2 não há necessidade de fazer as contas para as funções $\zeta_{f_2}(t)$ e $Z_{f_2}(t)$, pois serão idênticas ao caso anterior. Do exemplo 4.3 temos

$$\zeta_{f_0}(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Calculando $Z_{f_0}(t)$, lembrando que a matriz de interseção algébrica para esse caso é

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$Z_{f_0}(t) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr} \hat{A} \frac{t^n}{n} \right) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} 3 \frac{t^n}{n} \right) = \frac{1}{(1-t)^3}$$

Temos do exemplo 4.2 que

$$\zeta_{f_1}(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Como a matriz de interseção algébrica também é A , temos

$$I_{F(n)}(f^n) = (-1)tr(A^n)$$

e portanto

$$Z_{f_1}(t) = \left(\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)tr(A^n)) \frac{t^n}{n} \right) \right) = \det(I - At) = 1 - t - t^2.$$

Em geral E^u não é orientável. Se Ω_i não for conexo, então Df pode preservar a orientação em parte de Ω_i e inverter no restante. Isso normalmente ocorre com difeomorfismos *fitted*. Apresentaremos um exemplo desta situação a seguir.

Com isso, já é possível provar a racionalidade de $\zeta_f(t)$ quando $f : M \rightarrow M$ possui um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia.

Para a conveniência do leitor, reproduzimos de [F2] as demonstrações do teorema 4.3 e do teorema 4.4.

Teorema 4.3 *Se $f : M \rightarrow M$ possui um conjunto recorrente por cadeia R , com $R = \cup \Omega_i$, com Ω_i os conjuntos básicos. Então para cada i , $\zeta_{f_i}(t)$ é uma função racional. Mais ainda, é o quociente de polinômios inteiros cujo termo constante é um.*

Prova:

A prova será feita construindo uma função em $\mathbb{R}^n$ cuja função zeta de homologia seja igual a $\zeta_{f_i}(t)$. Como as funções zeta de homologia são racionais, então $\zeta_{f_i}(t)$ também será. Na verdade, será construída uma função $\bar{g} : (X, A) \rightarrow (X, A)$, com (X, A) em $\mathbb{R}^n$.

O espaço instável de Ω_i pode ser estendido a um espaço instável sobre uma vizinhança U_0 de Ω_i (tal espaço também será denotado por E^u). Escolhendo uma filtração associada à f tal que

$$\Omega_i = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i - M_{i-1}).$$

Então, para N suficientemente grande, se $U = f^N(M_i - M_{i-1})$, então

$$U \cup f(U) \subset U_0.$$

Seja $X_0 = (E^u|_U) \cup T(f^{-N}(M_{i-1})) \cup E^u|_{\Omega_i}$ que pode ser estendido da seguinte maneira:

Seja $a : M \rightarrow [0, 1]$ uma função suave que é 0 em uma vizinhança de $f^{-N}(M_{i-1})$ e 1 em uma vizinhança de $(M - f^{-N-1}(M_{i-1}))$. Definindo a função

$$g : X_0 \rightarrow X_0$$

por

$$g(v_x) = \begin{cases} Df(v_x), & \text{se } x \in f^{-N}(M_{i-1}), v_x \in T_x M \\ \alpha(x)p_{f(x)}^u(Df(v_x)) + (1 - \alpha(x))Df(v_x), & \text{se } x \in U, v_x \in E_x^u \end{cases}$$

com: $p_x^u : T_x M \rightarrow E_x^u$ a projeção ortogonal em alguma métrica Riemanniana. Se U for tomado pequeno o suficiente, então o espaço instável $E^u|_U$ é uma função invariante sobre Df tal que $v_x \neq 0$ implica $g(v_x) \neq 0$.

Seja X o espaço que compactifica X_0 adicionando o ponto ∞ em todas as fibras $T_x M$, com $x \in f^{-N}(M_{i-1})$ e E_x^u , $x \in U$. Definido $A \subset X$ como

$$A = \{(T(f^{-N}(M_{i-1})) \cup \{v \in E_x^u / x \in U \text{ e } |v| \geq 1\}) \cup \{\infty\}\}$$

Para estender g em X basta definir

$$g(\infty) = \infty$$

Como g expande o comprimento dos vetores $v_x \in E^u$, $x \in U$, então $g(A) \subset A$.

Seja $\bar{g} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ a função de par determinada por g . A função zeta de homologia $Z(\bar{g})$ é racional (pela proposição 4.3). Esta função é definida por: $\exp(\sum \frac{L(\bar{g}^m)}{m})$, com: $L(\bar{g}^m) = \sum I_p(g^m)$, $p \in \text{Fix}(g^m) \cap (X - A)$. Os pontos fixos de g^m em $X - A$ estão em Ω_i e são exatamente os mesmos pontos fixos de f .

Se p é um ponto fixo hiperbólico de g em $E^u|_U$, então existe uma fórmula para calcular $I_p(g)$. Mas o espaço instável $E_p^u(g)$ é $E_p^u(f) \oplus E_p^u(f)'$, a soma de $E_p^u(f)$ em TU_x e $E_p^u(f)'$ o espaço tangente à fibra de $E^u|_U$ de p . Então: $Dg_p : E_p^u(g) \rightarrow E_p^u(g)$ é a soma de duas cópias de $Df_p : E_p^u(f) \rightarrow E_p^u(f)$. Portanto

$$I_p(g) = (-1)^{2k(i)} \Delta$$

mas: $\Delta = 1$, pois $Df_p \oplus Df_p$ tem que preservar orientação. Então $I_p(g^m) = 1$ se $p \in \text{Fix}(g^m) \cap \Omega_i$. Segue que $L(\bar{g}^m) = \sum I_p(g^m) = N_m$, o número de pontos fixos de f^m em Ω_i , e portanto a função zeta de $f|_{\Omega_i}$, $\zeta_i(f)$ é igual à função racional $Z(\bar{g})$, e portanto $\zeta_i(f)$ é racional. Como o i tomado é qualquer, então $\zeta_i(f)$ é racional $\forall i$. ■

O próximo resultado dará expressões para $\zeta_f(t)$ e $Z_f(t)$ como produto infinito quando f tem apenas pontos periódicos hiperbólicos. Se além disso o número de pontos periódicos é finito, então esses produtos são finitos e as expressões para $\zeta_f(t)$ e $Z_f(t)$ são dadas como funções racionais.

Teorema 4.4 Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo com todos os pontos periódicos hiperbólicos, então (como série de potência sobre t):

(a) $\zeta_f(t) = \prod_{\gamma} (1 - t^{p(\gamma)})^{-\Delta_{\gamma}}$, com o produto feito sobre todas as órbitas de γ e $p(\gamma)$ é o período de γ .

(b) $Z_f(t) = \prod_{\gamma} (1 - \Delta_{\gamma} t^{p(\gamma)} (-1)^{u(\gamma)+1})$, com $\Delta_{\gamma} = 1$ se $Df_x^{p(\gamma)} : E_x^u \rightarrow E_x^u$ preserva a orientação e (-1) caso contrário, e $u(\gamma) = \dim E_x^u$, $x \in \gamma$.

Se f tem conjunto básico recorrente por cadeia e Ω_i é um conjunto básico então as mesmas fórmulas são válidas para $\zeta_{fi}(t)$ e $Z_{fi}(t)$ se os produtos são tomados sobre todos os $\gamma \subset \Omega_i$.

Prova: Como todos os pontos periódicos são hiperbólicos e M é compacto, segue que os pontos de período $\leq n$ são isolados e formam um conjunto finito para algum n fixo. Se γ é uma órbita simples de período p então $\zeta_{f|_\gamma}(t) = (1 - t^p)^{-1}$ (por exemplo, se $f|_\gamma$ é conjugado a um subshift finito associada a uma matriz de permutação então o resultado segue do primeiro corolário desse capítulo).

Fixe n e seja $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ o conjunto das órbitas periódicas com período $\rho(\gamma_i) \leq n$ e seja $K = \bigcup_{i=1}^s \gamma_i$. Então: $\zeta(f|_K) = \prod_{i=1}^s (1 - t^{\rho(\gamma_i)})^{-1}$.

Mas: $N_m(f) = N_m(f|_K)$, pois qualquer ponto fixo de f^n está em K . Então o coeficiente de t^n em $\zeta_f(t)$ é o mesmo coeficiente de t^n em $\zeta(f|_K) = \prod (1 - t^{\rho(\gamma_i)})^{-1}$.

Contudo, como $(1 - t^p)^{-1} = 1 + t^p + t^{2p} + \dots$, o coeficiente de t^n em $\prod_{i=1}^s (1 - t^{\rho(\gamma_i)})^{-1}$ é o mesmo coeficiente de t^n em $\prod_\gamma (1 - t^{\rho(\gamma)})$ com o produto tomado sobre todas as órbitas periódicas γ . Então os coeficientes de t^n em $\zeta_f(t)$ e $\prod_\gamma (1 - t^{\rho(\gamma)})$ são os mesmos e portanto (a) está provado.

Da primeira proposição deste capítulo, se γ tem período p e $x \in \gamma$, então o índice de ponto fixo é $(-1)^k \Delta_\gamma$, com: $\Delta_\gamma = 1$ se Df_p preserva a orientação e $\Delta_\gamma = -1$ caso contrário. $Z(f) = \exp(\sum (\frac{1}{m}) L_m(f^m) t^m)$, com $L_m(f^m) = \sum I_x(f^m)$, a soma sobre todo $x \in \text{Fix}(f^m)$. Seja K como definido anteriormente e defina $\rho = \exp(\sum (\frac{1}{m}) L_m(K) t^m)$, com $L_m(K)$ a soma de $I_x(f^m)$ para todo $x \in \text{Fix}(f^m) \cap K$. Então, para $m \leq n$, segue que $L_m(K) = L_m(f^m)$ com todos os pontos de período menor ou igual a n em K .

Assim, os coeficientes de t^n em ρ é o mesmo coeficiente de t^n em $Z_f(t)$.

Mas $L_m(K) = \sum_{i=1}^s L_m(\gamma_i)$ com $L_m(\gamma_i) = \sum I_x(f^m)$. Então

$$\rho = \prod_{i=1}^s \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} L_m(\gamma_i) t^m\right)$$

com

$$L_m(\gamma) = \begin{cases} p(\gamma) (-1)^{u(\gamma)} \Delta_\gamma^{\frac{m}{p(\gamma)}}, & \text{se } m \equiv 0 \pmod{p(\gamma)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

daí segue que: $\rho = \left(\prod_{i=1}^s (1 - \Delta_{\gamma_i} t^{p(\gamma_i)})\right)^{(-1)^{u(i)+1}}$. Então, como no caso anterior,

o coeficiente t^n de ρ é igual ao coeficiente de t^n em $\prod_\gamma (1 - \Delta_\gamma t^{p(\gamma)})^{(-1)^{u(\gamma)+1}}$, e portanto segue (b), o que completa a demonstração. ■

4.5 Função Zeta de Homologia Reduzida

Definição 4.5 Se $f : M \rightarrow M$ possui um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia então a função zeta de homologia reduzida $z_f(t)$ é definida como

a função racional em t com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ obtida reduzindo todos os coeficientes de $Z_f(t) \bmod 2$. Isso pode ser feito pois $Z_f(t)$ é o quociente de polinômios com termo constante 1. Se Ω_i é um conjunto básico, analogamente define-se $z_{f_i}(t)$ como a redução $Z_{f_i}(t) \bmod 2$.

Exemplo 4.10 Vamos calcular a função zeta de homologia reduzida para os dois exemplos já vistos. Para o difeomorfismo da seção 2.1.1 da Ferradura de Smale

$$Z_f(t) = \frac{1 - 2t}{1 - 2t + t^2}$$

e portanto a função reduzida de homologia $z_f(t)$ é

$$z_f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Já para o difeomorfismo do exemplo 2.1.2 do Franks em S^2

$$Z_f(t) = \frac{1 - t - t^2}{(1 - t)^4}$$

e portanto

$$z_f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{1 + t^4}.$$

Exemplo 4.11 Exemplos no bitoro

Generalizando a idéia do exemplo do Franks, pense no bitoro menos um disco D_1 como um disco D_2 com dois pares de alças. Considere um poço (um ponto atrator p) no disco D_2 e uma fonte (um ponto repulsor ∞) no disco D_1 . Como naquele exemplo valerá (chamando o primeiro par de alças de h_1 e h_2 e o segundo de h_3 e h_4):

$f(h_1) \subset h_2$, $f(h_2) \subset h_1 \cup h_2$, $f(h_3) \subset h_3 \cup h_4$, $f(h_4) \subset h_3$, conforme a figura abaixo. Então a matriz associada a essa função será

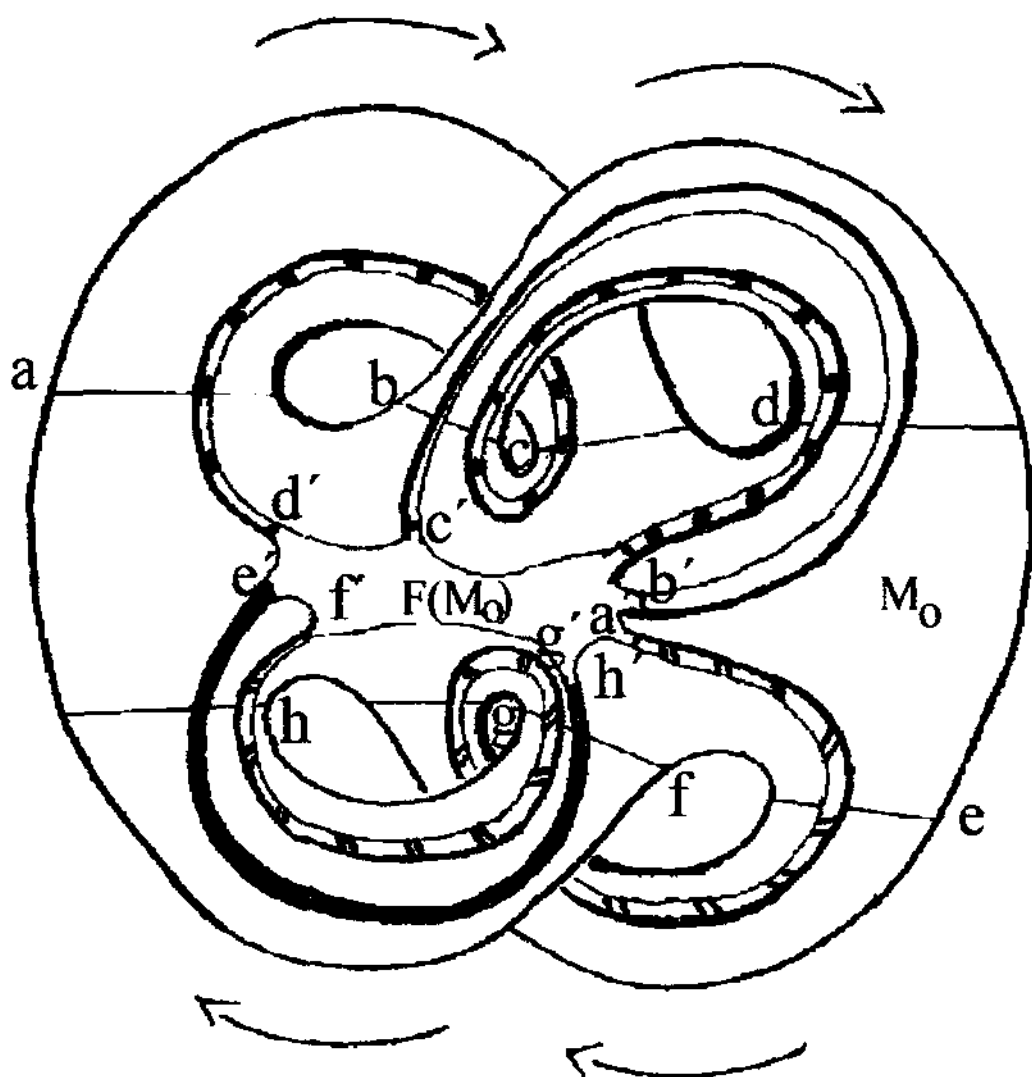
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e portanto A não é uma matriz irredutível (é claro, pois $A_{13}^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).



Entretanto, tal matriz pode ser vista como

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \tilde{0} \\ \tilde{0} & A_2 \end{pmatrix},$$

com

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, uma matriz na forma da proposição 2.4. Portanto o shift associado ao conjunto recorrente por cadeia formado pelos dois pares de alças restrito a cada par de alça é topologicamente conjugado ao shift associado à matriz A_1 . Nesse caso, os conjuntos básicos são: $H_1 = h_1 \cup h_2$, $H_2 = h_3 \cup h_4$, $\{p, \infty\}$ (Os conjuntos H_1 e H_2 são conjuntos básicos porque a matriz A_1 é irredutível.).

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

A matriz de interseção algébrica para o par de alças é

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

com sinal dependendo da ação de f na orientação de h_1, h_2, h_3 e h_4 .

Com o calculado acima, torna-se fácil encontrar as funções $\zeta(f)$ e $Z(f)$.

Para $\zeta(f)$:

$$\zeta_1(f) = \zeta(\sigma),$$

com σ o shift associado à matriz. Portanto

$$\zeta_1(f) = \frac{1}{\det(I - At)}$$

com

$$(I - At) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ t & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ -t & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & -t & 1-t \end{pmatrix},$$

e portanto: $\det(I - At) = 1 - 2t + 2t^3 - t^2 + t^4$. Assim:

$$\zeta_1(f) = \frac{1}{1 - 2t + 2t^3 - t^2 + t^4}.$$

Para calcular as outras $\zeta_i(f)$

$$\zeta_0(f) = \zeta_1(f) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m\right) = \exp(-\log(1-t)) = \frac{1}{1-t}.$$

Portanto

$$\zeta(f) = \prod_{i=0}^3 \zeta_i(f) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 \times \left(\frac{1}{1-2t+2t^3-t^2+t^4}\right) = \frac{1}{(1-t)^2(1-2t+2t^3-t^2+t^4)}.$$

Para calcular $Z(f)$

$$I_{F(n)}(f^n) = 1 - \text{tr}(A(1)^n) + 1$$

e portanto

$$Z(f) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (2 - \text{tr}(A(1)^i)) \frac{t^i}{i}\right) = \left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2t^i}{i}\right)\right) \left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (-\text{tr}(A(1)^i)) \frac{t^i}{i}\right)\right).$$

Como

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2t^i}{i}\right) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = \frac{1}{1-2t+t^2}$$

e

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} ((-1)\text{tr}(A(1)^i)) \frac{t^i}{i}\right) = \det(I - A(1)t)$$

com

$$(I - A(1)t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ -t & 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & -t & 1+t \end{pmatrix},$$

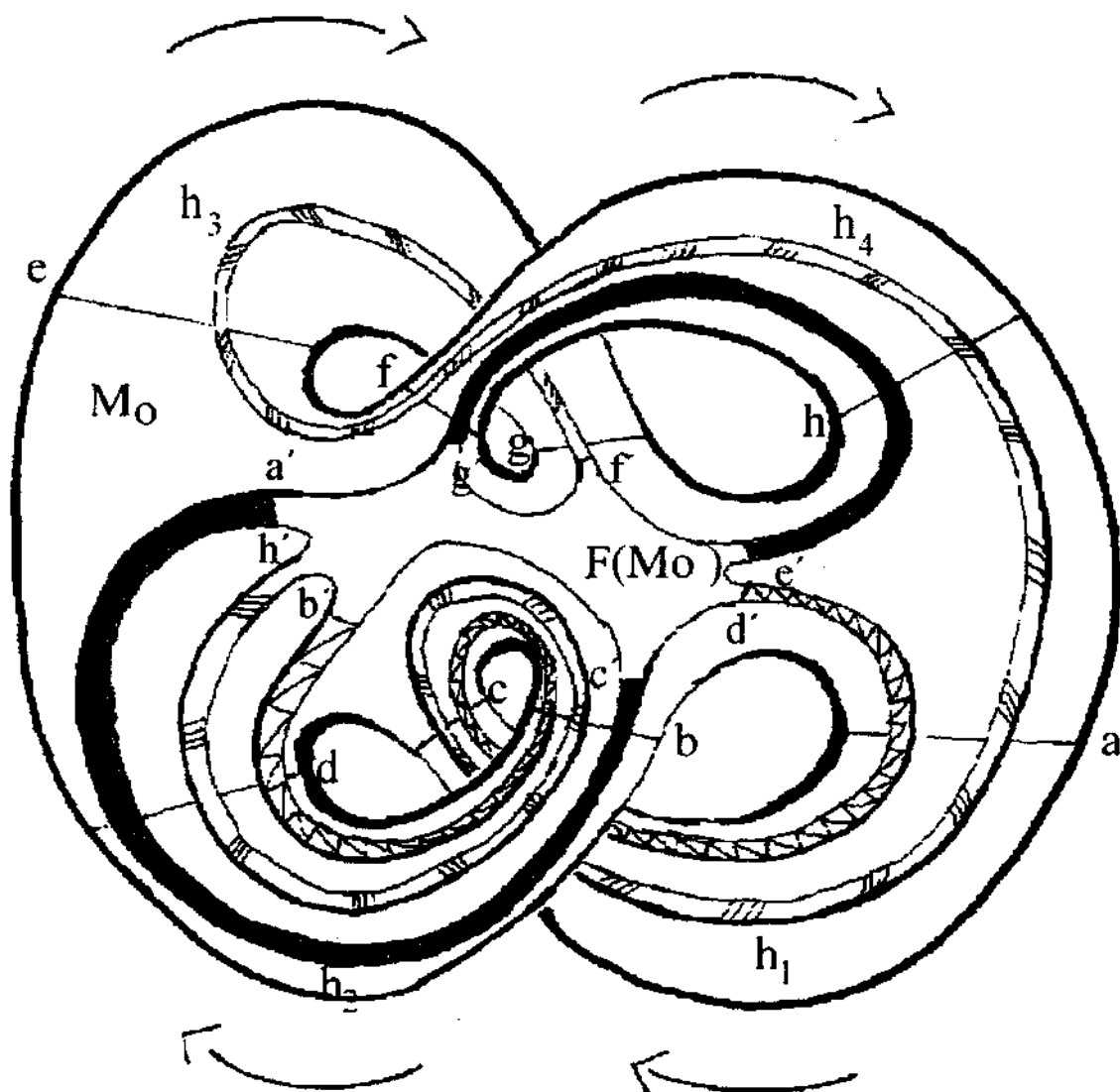
portanto $\det(I - A(1)t) = 1 + 2t - 2t^3 - t^2 + t^4$. Então

$$Z(f) = \left(\frac{1}{1 - 2t + t^2} \right) \times (1 + 2t - 2t^3 - t^2 + t^4) = \frac{1 + 2t - 2t^3 - t^2 + t^4}{1 - 2t + t^2}$$

Tendo a $Z(f)$ é imediato o cálculo de $z(f)$, que será

$$z(f) = \frac{1 + t^2 + t^4}{1 + t^2}$$

Um segundo exemplo no bitoro, com a função dada geometricamente pela figura.



A matriz interseção geométrica será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e portanto A é irredutível. Portanto o conjunto Λ associado à A é um conjunto recorrente por cadeia e mais, $f|_{\Lambda}$ é topologicamente conjugado ao shift de tipo finito $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$. A matriz de interseção algébrica é

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para esse caso é fácil calcular $\zeta(f)$ e $Z(f)$. Para $\zeta(f)$:

$$\zeta_1(f) = \zeta(\sigma),$$

com σ o subshift associado à matriz A . Então

$$\zeta_1(f) = \frac{1}{\det(I - At)},$$

com

$$(I - At) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ t & t & 0 & t \\ 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ -t & 1-t & 0 & -t \\ 0 & -t & 1-t & 0 \\ 0 & -t & -t & 1-t \end{pmatrix},$$

e portanto: $\det(I - At) = 1 - 3t + t^2 + t^3 - t^4$. Assim

$$\zeta_1(f) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + t^3 - t^4}$$

os outros $\zeta_i(f)$ são como já calculado anteriormente

$$\zeta_0(f) = \zeta_2(f) = \frac{1}{1-t}.$$

Para calcular $Z(f)$

$$I_{F(n)}(f^n) = 2 + \text{tr}(A(1)^n)$$

e calculando de forma análoga ao primeiro exemplo

$$(I - A(1)t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 & 0 \\ -t & t & 0 & t \\ 0 & t & -t & 0 \\ 0 & t & -t & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -t \\ 0 & -t & 1+t & 0 \\ 0 & -t & t & 1-t \end{pmatrix},$$

portanto: $\det(I - A(1)t) = 1 - t - 3t^2 + t^3 + t^4$.

Portanto

$$Z(f) = \frac{1 - t - 3t^2 + t^3 + t^4}{-1 + 4t - t^2}$$

e segue

$$z(f) = \frac{1 + t + t^2 + t^3 + t^4}{1 + t^2}$$

Praticamente os mesmos teoremas válidos para as $Z_f(t)$ e $\zeta_f(t)$ valerão também para $z_f(t)$ e para a função $\zeta_f(t)$ reduzida mod 2. Para maiores detalhes consultar [F2].

Teorema 4.5 Se para $f : M \rightarrow M$ há um conjunto recorrente por cadeia e conjuntos básicos Ω_i com índice u então são equivalentes:

- (a) A função racional $\zeta_{f_i}(t)^{(-1)^u}$ com todos os coeficientes reduzidos mod 2.
- (b) $z_{f_i}(t)$
- (c) A função $\prod_{k=0}^{\infty} \det(I - f_{k*}t)^{(-1)^{k+1}}$, com

$$f_{k*} : H_k(M_i, M_{i-1}; F_2) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F_2)$$

induzida por f , $\{M_i\}$ é uma filtração associada a f e $F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corolário 4.3 Se para $f : M \rightarrow M$ há um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia e conjuntos básicos $\{\Omega_i\}$, $1 \leq i \leq l$, então são iguais:

- (a) A função racional $\prod_{i=1}^l \zeta_{f_i}(t)^{(-1)^{k(i)}}$ com todos os coeficientes mod 2, com: $k(i) = \text{índice de } \Omega_i$.
- (b) $z_f(t)$.
- (c) $\prod_{k=0}^{\infty} \det(I - f_{k*}t)^{(-1)^{k+1}}$, com: $f_{k*} : H_k(M; F_2) \rightarrow H_k(M; F_2)$ induzida por f e $F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Capítulo 5

Realização de Difeomorfismos de Smale

Neste capítulo estabeleceremos propriedades para a possível realização de um difeomorfismo de Smale em uma variedade dada. Mais que isso, procuramos propriedades que possibilitem a realização ou não do *subshift* do tipo finito associado a um conjunto básico na variedade. Serão estabelecidos critérios para realização dos difeomorfismos e obstruções à existência de *subshift* do tipo finito como um conjunto básico em uma superfície bidimensional. Para variedades com dimensão maior que dois todo *subshift* pode ser realizado como conjunto básico, resultado estabelecido por Williams [W].

5.1 Obstrução para Realização de *Subshifts* do Tipo Finito

Iniciaremos esta seção com um resultado devido a Franks [F3] que relacionará a característica de Euler da variedade com o grau das funções zeta de homologia reduzida do difeomorfismo.

Proposição 5.1 [F3] *Se $f : M \rightarrow M$ tem um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia $R = \bigcup_{i=1}^l \Omega_i$, com Ω_i conjunto básico para cada $1 \leq i \leq l$, então*

$$\sum_{i=1}^l \deg z_i(f) = -\chi(M),$$

com $\chi(M)$ a característica de Euler de M .

Prova:

Pelo corolário 4.3 temos

$$\prod_{i=0}^n z_{f_i}(t) = \prod_{i=0}^n \det(I - f_{i*}(t))^{(-1)^{i+1}}.$$

Temos que

$$\deg \left(\prod_{i=0}^n z_{f_i}(t) \right) = \sum_{i=0}^n \deg(z_{f_i}(t)).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \deg \left(\prod_{i=0}^n \det(I - f_{i*}(t))^{(-1)^{i+1}} \right) &= \sum_{i=0}^n \deg \left(\det(I - f_{i*}(t))^{(-1)^{i+1}} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \deg(\det(I - f_{i*}(t))) = - \sum_{i=0}^n (-1)^i \deg(\det(I - f_{i*}(t))). \end{aligned}$$

Como $f_{i*}(t)$ é um isomorfismo para cada i , então

$$\deg(\det(I - f_{i*}(t))) = \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \deg(z_{f_i}(t)) &= - \sum_{i=0}^n (-1)^i \deg(\det(I - f_{i*}(t))) = \\ &= - \sum_{i=0}^n \dim H_i(M, \mathbb{Z}_2) = -\chi(M). \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 5.1 Uma aplicação para a proposição anterior é determinar qual a possível função zeta de homologia reduzida de um conjunto básico a ser realizado numa superfície tendo as dos outros conjuntos básicos já previamente definidos. Por exemplo, qual o grau possível para a função zeta de homologia reduzida associada ao conjunto básico de dimensão 1 de um difeomorfismo com uma fonte e um poço na esfera? Como já calculamos a função zeta de homologia reduzida tanto para o poço quanto para a fonte, que é

$$z_{f_0}(t) = z_{f_2}(t) = \frac{1}{1-t}$$

temos que

$$\deg(z_{f_0}(t)) + \deg(z_{f_2}(t)) = -2.$$

Pelo teorema anterior

$$\deg(z_{f_0}(t)) + \deg(z_{f_1}(t)) + \deg(z_{f_2}(t)) = -\chi(S^2) = -2$$

o que implica

$$\deg(z_{f_1}(t)) = 0$$

e essa é a única possibilidade para o grau da função zeta de homologia reduzida para um difeomorfismo desse tipo.

O seguinte Teorema, devido a Franks e Blanchard [BIF] caracteriza a função zeta de homologia reduzida de um subshift do tipo finito em uma superfície compacta bidimensional.

Teorema 5.1 *Seja M uma variedade compacta e bidimensional e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com um conjunto hiperbólico recorrente por cadeia. Se o subshift $\sigma|_{\Sigma}$ é topologicamente conjugado a $f|_{\Lambda_i}$, para algum conjunto básico Λ_i , então:*

(i) $p(t)$ tem grau par ou

(ii) $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$, com $p(t)$ a redução módulo 2 do polinômio $[\zeta_{f|_{\Lambda_i}}(t)]^{-1}$.

A demonstração do teorema encontra-se em [BIF]. Vamos fazer a demonstração apenas no caso especial no qual f satisfaz a seguinte propriedade.

Seja $f : M \rightarrow M$, com M uma variedade diferenciável, um difeomorfismo que satisfaça as seguintes propriedades:

(1) $f|_{R(f)}$ tem estrutura hiperbólica;

(2) $R(f) = (\text{conjunto de fontes periódicas}) \cup \Lambda \cup (\text{conjunto de poços periódicos})$;

(3) $f|_{\Lambda}$ é topologicamente conjugado a um subshift do tipo finito.

Teorema 5.2 [BIF] *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma superfície compacta que satisfaz as três propriedades acima. Se $p(t)$ é a redução módulo 2 do polinômio $[\zeta_{f|_{\Lambda}}(t)]^{-1}$ então:*

(1) ou $p(t)$ tem grau par;

(2) ou $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Prova:

A menos de componentes que não interceptam Λ , M pode ser tomado como união de componentes que são uma permutação cíclica (pois $f|_{\Lambda}$ tem uma órbita densa). Então

$$M = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

com cada X_i uma componente de M e

$$f(X_i) = X_{(i+1) \bmod k}.$$

Então

$$z(f) = \frac{\det(I + f_{1*}t)}{(1+t^k)^2} = \frac{\det(F + f_{1*}t)}{(1+t^d)^{2r}},$$

com $k = rd$, d um ímpar e r uma potência de 2. Um dos fatores $(1+t^k)$ vem da homologia de dimensão zero e a outra vem da homologia de dimensão dois e f_{1*} como já visto.

Por outro lado, do capítulo anterior

$$z(f) = \frac{p(t)}{\prod (1 - t^{p_i})},$$

o produto tomado sobre todas as fontes e todos o poços e com p_i o período de alguma fonte (ou de algum poço). Então

$$\frac{\det(I + f_{1*}t)}{(1+t^d)^{2r}} = \frac{p(t)}{\prod (1-t^{p_i})}.$$

Como X é uma permutação cíclica, então $p_i = kd_i$, para algum $d_i \in \mathbb{N}^*$. Portanto

$$p_i = (rd)d_i = rm_i,$$

com $m_i = dd_i$. Das equações segue

$$(\det(I + f_{1*}t)) \prod (1-t^{m_i})^r = ((1+t^d)^{2r})p(t).$$

Como existem pelo menos uma fonte e um poço para f , então existem pelo menos dois termos da forma $(1-t^{m_i})^r$ do lado esquerdo da equação. Se existe mais um fator $(1-t^{m_i})^r$ então o número desses fatores é maior que três do lado esquerdo da equação. Como esse número é igual a dois do lado direito então com certeza $(1-t^{m_i})^r$ é um fator de $p(t)$ e portanto $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Portanto basta analisar o caso no qual existem exatamente um conjunto atrator e um conjunto repulsor, ou seja, quando existem apenas dois fatores de $(1-t^{m_i})^r$. Então

$$(\det(I + f_{1*}t))(1-t^{m_1})^r(1-t^{m_2})^r = ((1+t^d)^{2r})p(t) \quad (*).$$

Nesse caso há duas possibilidades:

Primeira possibilidade: Quando X não é orientável, então 1 sempre será raiz de $\det(I + f_{1*}t)$, pois pelo Teorema do Coeficiente Universal 1 é sempre um autovalor de

$$f_{1*} : H_1 \left(X; \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \right) \rightarrow H_1 \left(X; \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \right).$$

Na equação (*) temos

$$\deg [(\det(I + f_{1*}t))(1-t^{m_1})^r(1-t^{m_2})^r] = \deg [((1+t^d)^{2r})p(t)]$$

ou seja

$$\deg [\det(I + f_{1*}t)] + rm_1 + rm_2 = 2rd + \deg [p(t)].$$

Como $m_1 = dd_1$ e $m_2 = dd_2$ então

$$rm_1 + rm_2 = rdd_1 + rdd_2 = rd.(d_1 + d_2) \geq 2rd,$$

pois $d_1 \in \mathbb{N}^*$, $d_2 \in \mathbb{N}^*$. Portanto existe pelo menos o fator $(1+t)$ em $p(t)$ e portanto $(1+t)$ é um fator de $p(t)$. Portanto $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Segunda possibilidade: Quando X é orientável. Note que somente neste caso é possível $p(1) \neq 0$ em $\mathbb{Z}_2$. Tome o grau de $p(t)$ ímpar. O grau de $\det(I + f_{1*}t)$ é par, pois X é orientável. Como o grau do lado direito da equação (*) é ímpar, então $(m_1 + m_2)r$ é ímpar. Como r é uma potência de dois, então $r = 1$ e $m_1 + m_2$ é ímpar. Então, sem perda de generalidade, m_1 é par e m_2 é ímpar. Tome $m_1 = 2q_1$. Assim

$$1 - t^{m_1} = (1 - t^{q_1})^2.$$

Substituindo na equação

$$(\det(I + f_{1*}t))(1 - t^{q_1})^2(1 - t^{m_2}) = (1 + t^d)^2 p(t).$$

Como o lado esquerdo desta equação tem pelo menos três fatores de $1 - t$ segue que $1 - t$ é fator de $p(t)$ e portanto $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$, o que completa a demonstração. ■

A seguir faremos dois exemplos para ilustrar o teorema 5.2.

Exemplo 5.2 Note que nossos dois primeiros exemplos ilustram o teorema. De fato, para Ferradura de Smale, a função zeta do subshift associado ao conjunto básico de dimensão 1 é

$$\zeta_\sigma(t) = \frac{1}{1 - 2t}$$

e portanto

$$p_\sigma(t) = 1.$$

Já para o conjunto básico de dimensão 1 da J -Ferradura temos a seguinte função zeta (para seu subshift associado)

$$\zeta_\sigma(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}$$

e portanto

$$p_\sigma(t) = t^2 + t + 1$$

em ambos os exemplos $\deg p$ é par.

Exemplo 5.3 Com esse teorema é possível mostrar que o subshift α associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

não pode ser realizado em nenhuma superfície bidimensional. De fato

$$I - At = \begin{pmatrix} -1 & -t & 0 \\ 0 & -1 & -t \\ -t & -t & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\det(I - At) = -1 + (-t)^3 - (-t)^2 = -t^3 + t^2 - 1$$

e assim

$$p(t) = t^3 + t^2 + 1.$$

Portanto, pelo teorema anterior, $\deg(p(t))$ é ímpar e $p(1) \equiv 1 \pmod{2}$ são obstruções a realização de σ como um conjunto básico em uma variedade bidimensional.

O resultado desse teorema foi aprimorado por Fried [Fr], que conseguiu uma condição para realização do subshift, isto é, condições no polinômio $p(t)$ para que Σ_A seja realizável numa variedade bidimensional, com A uma matriz quadrada, inteira e não negativa. Para tanto foi necessário definir um conjunto especial de polinômios, denominados polinômios recíprocos.

Definição 5.1 Uma função racional não nula $R(t)$ sobre um corpo F , $R \in F(t)^*$, é recíproca se:

$$R(t^{-1}) = t^k R(t), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.4 A função $p_\sigma(t)$, com σ o shift associado ao conjunto básico de dimensão 1 da Ferradura de Smale, é um polinômio recíproco. De fato

$$p_\sigma(t) = 1$$

e portanto

$$p_\sigma(t^{-1}) = 1 = p_\sigma(t).$$

Também é recíproco o $p_\sigma(t)$, com o subshift σ associado ao conjunto básico de dimensão um da J -Ferradura. Como

$$\zeta_\sigma(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$$

então vale

$$p_\sigma(t) = 1 + t + t^2$$

que é recíproco, pois

$$p(t^{-1}) = 1 + \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{t^2 + t + 1}{t^2} = t^{-2} p(t).$$

Exemplos de polinômios que não são recíprocos daremos a seguir.

O fenômeno que ocorre nos exemplos anteriores generaliza-se pela seguinte proposição:

Proposição 5.2 [Fr] *Seja $f : S \rightarrow S$ um mergulho, S uma superfície compacta. Então a função $p(t)$ associada a f é recíproca.*

Definição 5.2 [Fr] *Seja A uma matriz $0-1$ e σ_A o subshift do tipo finito associado. Dizemos que uma superfície S admite σ_A se existe um mergulho $g : S \rightarrow S$ e superfícies compactas M_1 e $M_2 \subset \text{int}(M_1)$ tal que:*

- (1) $g(M_i) \subset \text{int}(M_i)$, $i = 1, 2$.
- (2) o conjunto invariante

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} (g^n(M_1)) \cup \bigcup_{n \geq 0} (g^{-n}(M_2))$$

é um conjunto básico de dimensão 1 e $g|_\Lambda$ é topologicamente conjugado a σ_A .

- (3) Λ intercepta todas as componentes de S .

O que resulta no seguinte teorema:

Teorema 5.3 [Fr] *Se S admite σ_A então $p_A(t)$ é recíproca.*

Na verdade o teorema anterior generaliza o teorema 5.1. Segue direto da definição de polinômio recíproco de grau g que se o termo t^k aparece no polinômio então o termo t^{g-k} também terá que aparecer. Se g é ímpar, então para todo $0 \leq k \leq g$: $g - k \neq k$, e portanto o polinômio sempre terá um número par de termos, ou seja, $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$.

Exemplo 5.5 *Para polinômios de grau par ser recíproco não implica em ter um número par de termos (ou seja, ter $p(1) \equiv 0 \pmod{2}$). Por exemplo, o polinômio*

$$p(t) = 1 + t + t^2$$

é recíproco, mas

$$p(1) = 3 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Exemplo 5.6 *Por outro lado, um polinômio com um número par de termos não é necessariamente recíproco. Um exemplo para um polinômio de grau ímpar é*

$$p(t) = 1 + t + t^2 + t^5$$

que tem um número par de termos mas não é recíproco, pois

$$p(t^{-1}) = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^5} = \frac{t^5 + t^4 + t^3 + 1}{t^5} \neq t^k p(t),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Um exemplo de polinômio de grau par com um número par de termos mas que não é recíproco é o seguinte

$$p(t) = 1 + t + t^2 + t^6$$

que de fato não é recíproco, pois

$$p(t^{-1}) = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^6} = \frac{t^6 + t^5 + t^4 + 1}{t^6} \neq t^k p(t),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Nestes exemplos o fato de $p(t)$ não ser recíproco é uma obstrução à existência de um difeomorfismo com função zeta reduzida $p^{-1}(t)$.

5.2 Condições para Realização de Subshifts do Tipo Finito

A recíproca do teorema 5.3 pode ser escrita da seguinte maneira.

Teorema 5.4 [Fr] *Dado um polinômio recíproco $p(t) \in \mathbb{Z}_2[t]$ com termo constante 1 então existe uma superfície conexa orientada S e um subshift do tipo mixing σ_A , tal que S admite σ_A , com $p_A(t) = p(t)$.*

Note que não existe uma recíproca para o teorema 5.1, pois como vimos no exemplo 5.6 existem funções que têm grau par e não são recíprocas e funções que têm grau ímpar com um número par de termos mas que também não são recíprocas. Portanto, pela proposição 5.2 esses polinômios não são realizáveis em nenhuma variedade de dimensão 2. Isso implica que realmente foi necessário caracterizar melhor os polinômios $p(t)$ para conseguir uma condição necessária e suficiente para a realização de um subshift do tipo mixing numa superfície.

Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ um subshift de tipo finito. Se σ não é mixing, então Σ pode ser escrito como a união disjunta: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$, com σ uma permutação cíclica desses conjuntos e $\sigma^k|_{\Sigma_i}$ é um subshift do tipo mixing. Esta decomposição é única. Os conjuntos $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ são as componentes mixing de Σ e o número de componentes mixing é o período de σ .

Proposição 5.3 *O período de σ é o máximo divisor comum dos períodos de todos os pontos periódicos.*

Seja $\zeta_k(t)$ a função zeta de $\sigma^k|_{\Sigma_1}$.

Proposição 5.4 *Se σ é um subshift com período k então $\zeta_k(t^k) = \zeta(t)$.*

Teorema 5.5 *Seja M uma superfície orientada de gênero g e f um difeomorfismo de Smale em M que é isotópico a identidade. Se Λ está associado a um conjunto básico Λ de índice 1 com função zeta de homologia reduzida $z(t)$ então ou Λ pode ser realizado no disco (nesse caso $z(t) = \frac{\prod(1-t^{m_i})}{1-t}$) ou:*

(1) *Se $g = 0$ então $z_\Lambda(t) = \frac{\prod(1-t^{m_i})}{(1-t)^2}$ e σ é mixing;*

(2) *Se $g = 1$ então $z_\Lambda(t) = \prod (1 - t^{m_i})$;*

(3) *Se $g \geq 2$ então $z_\Lambda(t) = (1-t) \prod (1 - t^{m_i})$ e σ é mixing.*

Reciprocamente, existe subshift para cada uma das funções zeta acima, que pode ser realizado por um difeomorfismo de Smale que é isotópico à identidade na superfície.

Exemplo 5.7 *Pode-se agora calcular o número de poços, fontes e de conjuntos periódicos (atratores ou repulsores) de uma dada variedade. Por exemplo, em uma variedade de gênero 0, sendo*

$$z_\Lambda(t) = \frac{\prod (1 - t^{m_i})}{(1 - t)^2}$$

então

$$\deg(z_\Lambda(t)) = \sum_i m_i - 2.$$

Portanto

$$\deg(z(t)) = m_i - 2 + s - p - f - \sum_j a_j$$

com $s = 1$ o número de selas, d o número de poços, f o número de fontes e a_i o período de uma órbita periódica, a soma tomada sobre o número de órbitas periódicas existentes. Assim

$$-\chi(M) = -(2 - 2g) = -2 = \sum_i m_i - 2 + s - p - f - \sum_j a_j,$$

ou seja

$$p + f + \sum_j a_j = \sum_i m_i + s.$$

Exemplo 5.8 *Já para o caso de uma variedade com gênero 1, sendo*

$$z_\Lambda(t) = \prod (1 - t^{m_i})$$

então

$$\deg(z_\Lambda(t)) = \sum_i m_i$$

e (usando a mesma notação do caso anterior)

$$\chi(M) = -2 + 2 = 0 = \sum_i m_i + s - p - f - \sum_j a_j$$

e portanto

$$p + f + \sum_j a_j = \sum_i m_i + s.$$

Exemplo 5.9. Para uma variedade de gênero maior ou igual a 2 com

$$z_A(t) = (1-t) \prod (1-t^{m_i})$$

ou seja

$$\deg(z_A(t)) = \sum_i m_i + 1$$

daí

$$\chi(M) = -2 + 2g = \sum_i m_i + 1 + s - p - f - \sum_i a_i$$

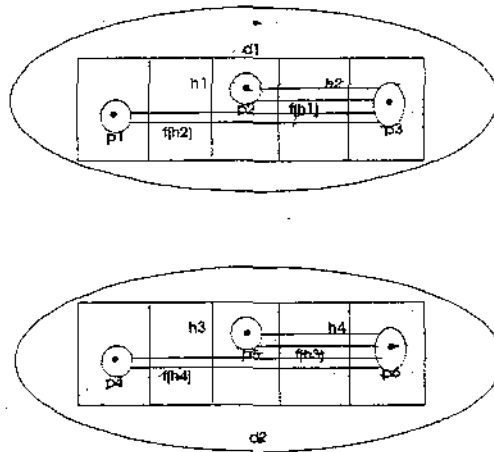
e portanto

$$p + f + \sum_i a_i = -2 + 2g + \sum_i m_i + s$$

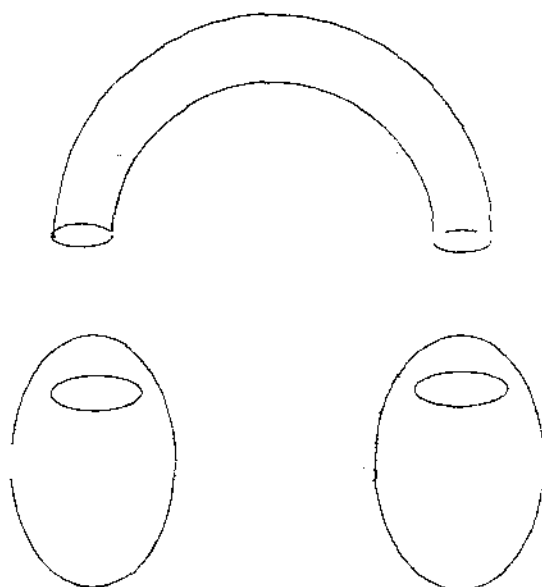
Exemplo 5.10 Existe difeomorfismo em S^2 formado por um conjunto periódico atrator com período 6, uma fonte, uma sela e um conjunto básico com índice 1.

Primeiro descreveremos o difeomorfismo f geometricamente, que é formado a partir da J-Ferradura. Tome duas cópias de S^2 , com uma J-Ferradura em cada, e permuta seus elementos:

$$p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow p_4 \rightarrow p_5 \rightarrow p_6 \rightarrow p_1.$$



Tome um difeomorfismo g em S^2 que tenha uma fonte, um conjunto periódico atrator de período 2 e uma sela. Para cada ponto da órbita de período 2 de g , remova um disco que o contenha D_1 e D_2 . Em cada uma das esferas construídas anteriormente com uma J-Ferradura remova um disco que contenha a fonte $\bar{D}_1$ e $\bar{D}_2$. Finalmente cole D_1 a $\bar{D}_1$ e D_2 a $\bar{D}_2$ conforme a figura.



Algebricamente verificamos:

$$I - At = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ -t & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & -t & 1-t \end{pmatrix}$$

então: $\det(I - At) = t^4 + 2t^3 - t^2 - 2t + 1$, ou seja:

$$z_{f|_{\Lambda_1}}(t) = 1 + t^2 + t^4.$$

Portanto $z_{f|_{\Lambda_1}}(t^{-1}) = 1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} = \frac{t^4 + t^2 + 1}{t^4}$, ou seja, é um polinômio recíproco e portanto é realizável em alguma variedade de dimensão 2. Usando a proposição 5.1 podemos encontrar que de fato tal difeomorfismo ocorre na esfera. Como $\deg(z|_{\Lambda_1}) = 4$ e existem um conjunto atrator periódico de período 6, uma fonte e uma sela temos:

$$-\chi(M) = 4 - 6 - 1 + 1 = -2 \Rightarrow \chi(M) = 2 \Rightarrow g = 0.$$

O próximo resultado é, de certa forma, uma extensão do teorema 5.1 pois dará uma condição de necessidade e suficiência para a existência de um difeomorfismo em uma variedade M com subshifts associados a matrizes dadas e para tal depende apenas da característica de Euler de M .

Antes, porém, é necessária a seguinte definição:

Definição 5.3 O grau reduzido de uma matriz inteira A é o grau do polinômio $\det(I - At)$ reduzido módulo 2.

Teorema 5.6 *Seja A uma soma direta de matrizes irredutíveis e seja A_0 e A_1 matrizes de permutação. Em uma variedade compacta M uma condição necessária e suficiente para a existência de um difeomorfismo isotópico a identidade e com conjuntos básicos de índice j ($j = 0, 1, 2$) correspondendo a A_j^k , para algum inteiro k , é que $d_2 - d_1 + d_0 = \chi(M)$ com d_j o grau reduzido de A_j .*

Exemplo 5.11 *Como já visto, a seguinte matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é realizável na esfera. Essa matriz é irredutível, pois

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tome as matrizes

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

que claramente são matrizes de permutação e $A_1 = A$. Vamos agora calcular o grau reduzido de cada matriz.

Para A , como já visto

$$\det(I - At) = -1 + (-t)^3 - (-t)^2 = -t^3 + t^2 - 1$$

e portanto o grau reduzido de A é 3.

Para A_0

$$I_{4 \times 4} - A_0 t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto: $\det(I_{4 \times 4} - A_0 t) = 1 - t^4$, e portanto o grau reduzido de A_0 é 4.

Para A_2

$$I_{1 \times 1} - A_2 t = 1 - t$$

e portanto o grau reduzido de A_2 é 1.

Portanto: $d_0 = 4$, $d_1 = 3$ e $d_2 = 1$. Como

$$d_2 - d_1 + d_0 = 4 - 3 + 1 = 2 = \chi(S^2),$$

então para alguma potência de A_0 , alguma potência de A e alguma potência de A_2 existe um difeomorfismo de Smale isotópico à identidade com conjuntos básicos associados a essas potências das matrizes.

Note que apesar de A não ser realizável em nenhuma variedade de dimensão 2, existe potência de A que é realizável na esfera. De fato

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^7 t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^7 t = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 9t & 6t & 4t \\ 4t & 3t & 2t \\ 6t & 4t & 3t \end{pmatrix}$$

$$(I - A^7 t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9t & 6t & 4t \\ 4t & 3t & 2t \\ 6t & 4t & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-9t & -6t & -4t \\ -4t & 1-3t & -2t \\ -6t & -4t & 1-3t \end{pmatrix}$$

e portanto: $p_{A^7}(t) = \det(I - A^7 t) = 1 - 15t + 7t^2 - t^3$, que é um polinômio recíproco, apesar de $p_A(t)$ não ser.

5.3 G-Ferraduras e J-Ferraduras

As G-Ferraduras [Sm] são exemplos no plano estendido com os mesmos conjuntos básicos da Ferradura de Smale. São, como podemos facilmente ver, difeomorfismo não conjugados da Ferradura de Smale, mas para efeito dos subshifts associados aos conjuntos básicos não é possível estabelecer essas diferenças.

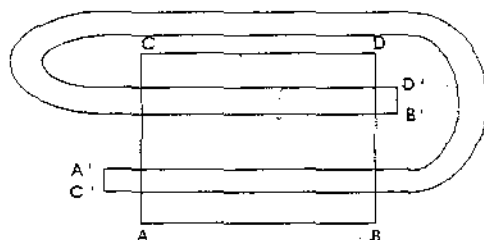
Exemplo 5.12 G-Ferraduras

Nestes exemplos todos os difeomorfismo tem um conjunto recorrente por cadeia formado por um poço, uma fonte e por um conjunto básico de dimensão 1 associado à matriz

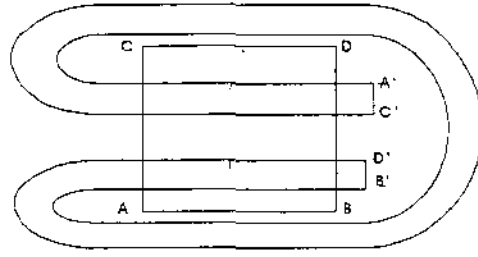
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e são os difeomorfismos representados abaixo.

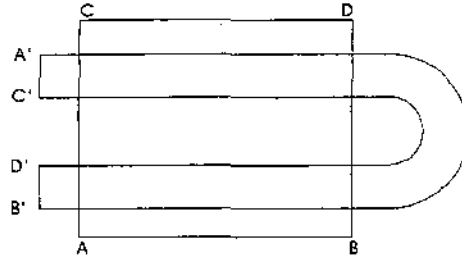
O primeiro terá a seguinte forma:



e o segundo será:



além da própria Ferradura de Smale, que esboçamos abaixo:



Para esse exemplo, como os subshifts são idênticos para todos os conjuntos, temos que nossos invariantes também serão idênticos, tanto a função zeta quanto a função zeta de homologia (e portanto as funções reduzidas) são as mesmas que calculamos nos exemplos 4.5 e 4.7 e valem

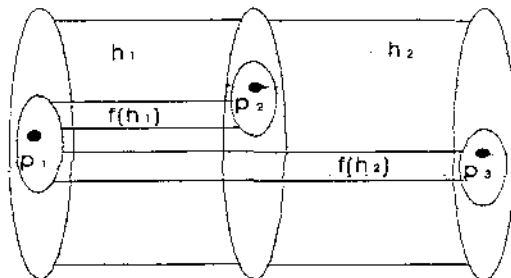
$$\zeta_f(t) = \frac{1}{1 - 4t + 5t^2 - 2t^3}$$

$$Z_f(t) = \frac{-2t + 1}{t^2 - 2t + 1}$$

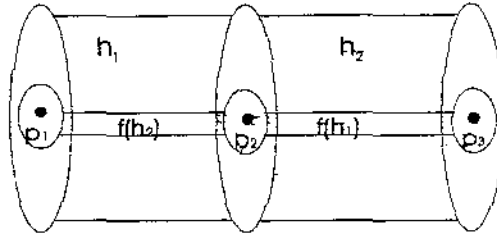
Para o exemplo da seção 2.1.2 também existe uma família de funções como acima.

Exemplo 5.13 J-Ferraduras

O primeiro difeomorfismo é o do exemplo 2.2. O segundo difeomorfismo é o seguinte



e por fim um exemplo de um difeomorfismo trivial:



Para o primeiro exemplo temos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e como visto nos exemplos 4.6 e 4.7 temos

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{1 - 5t + 9t^2 - 6t^3 - t^4 + 3t^5 - t^6}$$

e

$$Z_f(t) = \frac{1 - t - t^2}{(1 - t)^4}.$$

O segundo difeomorfismo tem a matriz de interseção geométrica

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{(1 - t)^2 (1 - t)^4} = \frac{1}{1 - 6t + 15t^2 - 20t^3 + 15t^4 - 6t^5 + t^6}$$

e

$$I_{F(n)}(f^n) = 1 + 3 + (-1)tr((A_2)^n)$$

À como acima, ou seja

$$Z_f(t) = \left(\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} (4) \frac{t^n}{n} \right) \right) \left(\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)tr((A_2)^n)) \frac{t^n}{n} \right) \right),$$

com

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t^n}{n} \right) = \frac{1}{(1 - t)^4}$$

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)tr(A^n)) \frac{t^n}{n} \right) = \det(I - At) = t^2 - 2t + 1.$$

Portanto

$$Z_f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{(1 - t)^4}.$$

Para o terceiro exemplo a matriz de interseção geométrica é

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto a função zeta é

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{(1-t)^4}.$$

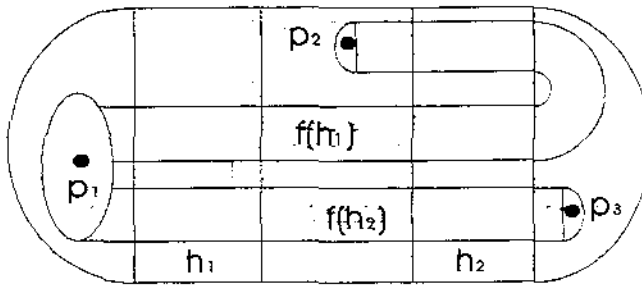
Nesse caso temos que a matriz de interseção algébrica é igual à matriz interseção geométrica e portanto

$$I_{F(n)}(f^n) = 1 + 3 + \text{tr} A_3 = 4 + 0 = 4.$$

Portanto:

$$Z_f(t) = \left(\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t^n}{n} \right) \right) = \frac{1}{(1-t)^4}.$$

Smale [Sm] criou o seguinte exemplo



que a primeira vista pode parecer ser uma nova J-Ferradura. Mas na verdade esse exemplo é igual ao segundo caso das nossas J-Ferraduras. Como podemos ver, $f(h_1)$ passa duas vezes por h_2 .

Bibliografia

- [AM] E. Artin & B. Mazur, *On Periodic Points*, Ann. of Math. (2) 81 (1965), págs. 82-99.
- [B1] S. Batterson, *Constructing Smale Diffeomorphisms on Compact Surfaces*, Trans Amer. Math. Soc. 257 (1980), págs. 237-245.
- [B2] S. Batterson, *The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus*, Trans. Amer. Math. Soc. 256 (1979), págs. 395-403.
- [BF] P. Blanchard & J. Franks, *An Obstruction to the Existence of Certain Dynamics in Surface Diffeomorphisms*, Erg. Th. Dyn. Syst. 1 (1981), págs. 255-260.
- [Bo1] R. Bowen, *On Axiom A Diffeomorphisms*, CBMS Regional Conf. Series in Math., no. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [Bo2] R. Bowen, *Entropy versus Homology for Certain Diffeomorphisms*, Topology 13 (1974), págs. 61-67.
- [BoF] R. Bowen & J. Franks, *Homology for Zero Dimensional Basic Sets*, Ann. of Math. 106 (1977), págs. 73-92.
- [By1] M. Boyle, *Symbolic Dynamics and Matrices*, Combinatorial and Graph-Theoretical Problems in Linear Algebra, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Volume 50, eds. R. A. Brualdi, S. Friedland and V. Klee, Springer-Verlag (1993), págs. 1-38.
- [By2] M. Boyle, *Shift Equivalence and the Jordan Form away from Zero*, Erg. Th. & Dyn. Sys. 4 (1984), págs. 367-379.
- [ByMT] M. Boyle, B. Marcus & P. Trow, *Resolving Maps and the Dimension Group for Shifts of Finite Type*, Memoirs AMS 377(1987).
- [D] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition, 1989.
- [F1] J. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, CBMS Conference Ser. 49 (1982), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

- [F2] J. Franks, *Flow Equivalence of Subshift of Finite Type*, Erg. Th. Dyn. Syst. 4(1984), págs. 53-66.
- [F3] J. Franks, *A Reduced Zeta Function for Diffeomorphisms*, Amer. J. Math. 100 (1978), págs. 217-243.
- [Fr] D. Fried, *Subshifts on Surfaces*, Erg. Theo. and Dyn. Syst. 2 (1982), págs. 15-21.
- [G] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Northeastern University.
- [KR1] K. Kim & F. Roush, *Williams's Conjecture is False for Reducible Subshifts*, J. AMS 5 (1992), págs. 213-215.
- [KR 2] K. Kim & F. Roush, *Some Results on Decidability of Shift Equivalence*, J. Combinatorics, Info. Sys. Sci. 4 (1979), 123-146.
- [KRW] K. Kim, F. Roush & J. Wagoner, *Automorphisms of the Dimension Group and Gyration Number*, J. AMS 5 (1992), págs.191-212.
- [La] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- [L] D. A. Lind, *The Entropies of Topological Markov Shifts and a Related Class of Algebraic Integers*, Ergod. Th. & Dinam. Sys. (1984), págs. 283-300.
- [PM] Jacob Palis Jr. & Welington de Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*.
- [PaS] W. Parry & D. Sullivan, *A Topological Invariant of Flows on One-Dimensional Spaces*, Topology 14 (1975), págs. 297-299.
- [PaW] W. Parry & R. Williams, *Block Coding and a Zeta Function for Markov Chains*, Proc. LMS 35 (1977), págs. 483-495.
- [Sm] S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), págs. 747-817.
- [W] R. Williams, *Classification of Subshifts of Finite Type*, Ann. Math., 98 (1973), págs. 120-135; errata 99 (1974), págs. 380-381.