UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EVERALDO FERNANDES BARBOSA

A REGRA DE L'HÔPITAL

ANÁLISE HISTÓRICA DA REGRA DE L'HÔPITAL

A importância da História da Matemática na disciplina de Cálculo

UNICAMP

2008

A REGRA DE L'HÔPITAL

ANÁLISE HISTÓRICA DA REGRA DE L'HÔPITAL

A importância da História da Matemática
na disciplina de Cálculo

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Everaldo Fernandes Barbosa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de Setembro de 2008.

Prof. Dr.: Eduardo Sebastiani Ferreira
Orientador

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (UFES)
2. Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira (IMECC – Unicamp)
3. Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho (UERJ)
4. Profa. Dra. Maria Zoraide M. C. Soares (UNEMAT)
5. Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre (UNESP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como pré-requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2116

Barbosa, Everaldo Fernandes
B232r A regra de L'Hôpital: análise histórica da regra de L'Hôpital - a importância da histórica da matemática na disciplina de cálculo / Everaldo Fernandes Barbosa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador: Eduardo Sebastiani Ferreira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Mátemática, Estatística e Computação Cientifica.

1. História da matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Ensino de Matemática. I. Ferreira, Eduardo Sebastiani. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e computação Cientifica. III. Título.

Título em inglês: The hule of l'Hôpital: Historical analysis of the hule of L'Hôpital – impotance of the history of mathematics in the discipline of calculation.

Palavras-chaves em ingles (Keywords): 1. History of mathematics. 2. Differential calculus. 3. Mathematical teaching.

Área de concentração: Metodologia de Ensino Superior

Titulação: Mestre em Matemática

Banca Examinadora: Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Circe Mary S. S. Dynnikov (UFES)
Profa. Dra. Maria Zoraide M. C. Soares (UNEMAT)

Data da defesa: 26/09/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de setembro de 2008 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Prof. (a). Dr (a). CIRCE MARY SILVA DA SILVA DYNNIKOV

Maria Zoraide M Costa Soares

Prof. (a). Dr (a). MARIA ZORAIDE MARTINS COSTA SOARES

DEDICATÓRIA

A toda minha família pelo incentivo prestado. Incentivo esse que me deu força para conseguir ultrapassar todas as etapas do curso.

AGRADECIMENTOS

À Deus

"Devo tudo àquele que me deu sabedoria, força para superar todos os obstáculos, vontade de vencer, e conseguir alcançar mais um objetivo dentre vários outros que ainda pretendo".

À esposa

"Companheira de todos os momentos. Divide, comigo, o mérito desta conquista".

Aos meus filhos

"Razões de lutas que me enchem de entusiasmo e felicidade todas as vezes que me chamam de pai".

Aos pais

"A arte de ser pai e de ser mãe é reservada aqueles que conhecem o amor e a abnegação que habitam na essência daqueles que nos criaram e nos permitiram ser o que somos".

Ao prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

"que não mediu esforços na orientação, prestando todo o apoio necessário com grande competência e agilidade nos serviços prestados na elaboração deste trabalho".

A profª. Dra Sueli

"Coordenadora do projeto que não mediu esforços para que o curso fosse realizado".

A profª. Dra Zoraide

"que, assim como a professora Sueli, foi uma pessoa que lutou e acreditou no projeto", e, graças a seu empenho e competência, podemos estar concretizando hoje nosso sonho.

Aos professores

“Ao corpo docente do programa Mestrado Profissional em Matemática que se dispuseram a viajar durante horas para que pudéssemos adquirir mais conhecimentos”.

Aos colegas

“A todos os colegas e amigos do curso de Mestrado, especialmente os do Campus Universitário de Barra do Bugres”.

A SEMEC

“A Secretária Municipal de Educação de Tangará da Serra pela licença concedida, que possibilitou a realização desse trabalho, sobre a administração do prof. José Paulo”.

RESUMO

O trabalho apresenta uma biografia do marquês de L'Hôpital e de Johann Bernoulli e as discussões sobre o cálculo do limite de uma função racional cujo numerador e denominador tendem a zero (conhecida como Regra de L'Hôpital), publicado no livro Análise dos Infinitamente Pequenos por Linhas Curvas pelo Marquês de L'Hôpital.

Apresentamos a demonstração de ambos, L'Hôpital e Bernoulli e a demonstração rigorosa de Cauchy. Discutimos as controvérsias com relação à autoria da regra e as reivindicações de Johann Bernoulli pela sua autoria, pois Bernoulli foi pago para produzir e desvendar os mistérios, que para L'Hôpital, existiam na matemática de Leibniz.

Incluímos também a interpretação geométrica que sugere a veracidade da regra e outras variantes que dependem dela. Além disso, são apresentadas discussões com relação ao uso da História da Matemática como material pedagógico para ensino de Cálculo Diferencial e Integral I e a altercação feita nos livros brasileiros e estrangeiros de cálculo sobre a aplicação da regra.

Palavras chaves: L'Hôpital, Johann Bernoulli, Regra de L'Hôpital, Cauchy, Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

The work presents Marquis de L'Hôpital and Johann Bernoulli's biographies and discussions on the calculation of the limit of a rational function whose numerator and denominator tend to zero (known as L'Hôpital's Rule), published in the book *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* by Marquis de L'Hôpital.

We present the demonstration made by both, L'Hôpital and Bernoulli and rigorous demonstration of Cauchy. We discussed the controversy with respect to the authors of that rule and Johann Bernoulli's claims by its authorship, because Bernoulli was paid to produce and unravel the mysteries, which for L'Hôpital, there were in mathematics from Leibniz.

We also included the geometric interpretation that suggests the veracity of the rule and other variants that depend on it. Moreover, discussions are presented in connection with the use of the History of Mathematics as teaching material for education of Differential and Integral Calculus and modification made in Brazilian and foreign calculus books about the rule's application.

Key words: L'Hôpital, Johann Bernoulli, L'Hôpital's Rule, Cauchy, Teaching of Calculus.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1. Introdução

O assunto tratado nesse trabalho dissertativo é sobre a criação de uma forma fácil e rápida para calcular os limites de formas indeterminadas do tipo 0/0 conhecida como Regra de L'Hôpital.

Neste contexto, faremos uma análise histórica dos principais fatos para o descobrimento da regra; mostraremos na integra o desenvolvimento feito por L'Hôpital e Bernoulli; as controvérsias sobre a origem e autoria bem como as publicações posteriores em livros estrangeiros e nacionais. Analisaremos o processo histórico para constatar se as reivindicações de autoria da regra criada por Bernoulli eram aceitáveis. As demonstrações em diferentes épocas serão enfatizadas no trabalho. Uma discussão pertinente nessa dissertação é sobre a importância da história da matemática nos cursos de cálculo.

A escolha do assunto se deu pela curiosidade e o interesse de estudar os acontecimentos históricos relacionados com a matemática. Isso se deve ao fato que é sempre possível justificar conceitos matemáticos fazendo uso da história e, em particular, justificar a regra de L'Hôpital, fica mais fácil quando voltamos no tempo e tentamos desenvolver os acontecimentos da época do seu descobrimento.

Devemos levar em consideração que nos cursos de cálculo a Regra de L'Hôpital é apenas apresentada como ferramenta para calcular limites indeterminados, sem a preocupação de uma justificativa, o que para o aprendizado matemático, é de certa forma um problema. O que pensa o aluno sobre a Regra de L'Hôpital quando lhe é apresentada da seguinte forma: "S*ejam f e g funções deriváveis em um intervalo I, exceto possivelmente em um ponto a de I. Se f e g ambas se aproximam de 0 quando* $x \to a$*;e se* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existir para* $g'(x) \neq 0$ *, então* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existirá e* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$". Esta apresentação aparece na maioria dos livros de cálculo.

Neste trabalho é possível resgatar e difundir a história da matemática, projetando-a como uma das tendências em educação matemática e destacar os principais personagens responsáveis pela criação dos conceitos envolvidos.

O presente trabalho está distribuído em cinco partes. A primeira parte trata-se da biografia de L'Hôpital, onde retratamos o interesse dele pela matemática, citamos alguns problemas por ele resolvidos e traçamos algumas linhas sobre a elaboração e impressão do primeiro livro texto de Cálculo Diferencial. Nesta primeira parte apresentamos a árvore genealógica da família Bernoulli e em especial, a biografia de Johann Bernoulli e suas contribuições para a elaboração do livro citado.

Na segunda parte encontramos o desenvolvimento da regra feita por L'Hôpital, dos conceitos preliminares, definições, postulados até a sua apresentação e demonstração. Apresentamos as controvérsias e reivindicações de Bernoulli sobre a autoria da regra e a demonstração sistemática e rigorosa de Cauchy.

Dedicamos a terceira parte em discutir as publicações da Regra de L'Hôpital. Como os livros didáticos nomeiam tal regra e como são feitas as apresentações em livros brasileiros e estrangeiros. Atentamos para o fato de alguns livros, inclusive livros franceses, não nomearem a regra com o nome de L'Hôpital. A parte seguinte enfoca três maneiras de justificar a regra:

i. Utilizando o Teorema do Valor Médio de Cauchy;
ii. Sem utilizar o Teorema do Valor Médio;
iii. Usando análise não standard.

A quinta e última parte é dedicada a discussões sobre a importância da utilização da história da matemática nos cursos de cálculo. Essa parte é de suma importância, porque estudamos a história não simplesmente para saber da história, mais sim por sabermos que poderemos utilizá-la como recurso de ensino aprendizagem de matemática.

Todo o trabalho foi feito baseado em pesquisas bibliográficas disponíveis nas bibliotecas, internet, experiências de profissionais da área de matemática, história da matemática e em educação matemática. Buscamos todas as informações possíveis para o momento em diferentes épocas, utilizando obras originais dos autores.

2. As Origens da Regra de L'Hôpital

"De que me irei ocupar no céu, durante toda a
Eternidade, se não me derem uma infinidade
de problemas de Matemática para resolver"?
Augustin Louis Cauchy.

Iniciaremos nosso trabalho com uma breve biografia de L'Hôpital, mostrando seu interesse para com a matemática. Abordamos seus primeiros trabalhos e as obras por ele produzidas, entre elas a principal obra que é a publicação do primeiro livro texto de cálculo diferencial. Neste livro encontramos a regra de cálculos de limites de formas indeterminadas que ficou conhecida como "Regra de L'Hôpital".

Faremos também nessa seção, uma biografia de Johann Bernoulli contando sobre sua origem e a árvore geneológica da sua família.

2.1 L'Hôpital

"Guillaume François Antoine de L'Hospital", marquês de Saint Mesme, mais conhecido como Marquês de L'Hospital, nasceu em Paris em 1661. Sua família era aristocrática e muito conhecida na época. Durante alguns anos, ele serviu como oficial de cavalaria no exército francês, mas renunciou por conta de sua miopia (Barufi, 2002). Depois disso, L'Hospital dedicou-se inteiramente à Matemática, que, segundo Struik (1963, p.257), "ficou impressionado pelo novo cálculo apresentado por Leibniz (1646 – 1716) em dois artigos, um de 1684 e outro de 1686", publicados pela primeira vez na revista científica alemã *Acta Eruditorum* do qual Leibniz foi um dos fundadores.

Figura 2.1.1
Marquês de L'Hôpital
(1661 – 1704)

A forma original do nome do marquês era L'Hospital. A partir de uma das várias reformas ortográficas ocorridas na França entre os séculos XVII e XIX, a grafia correta passou a ser L'Hôpital. Isso explica o fato dos livros de cálculo atuais apresentarem variações na grafia da Regra de L'Hôpital, que aparece ora como Regra de L'Hospital, ora como Regra de L’Hôpital e, com menor freqüência, Regra de l’Hospital e Regra de l’Hôpital. Como veremos a seguir, a Regra de L’Hôpital têm como objetivo calcular o limite de frações em que há indeterminações do tipo 0/0. A partir de agora adotaremos o nome “*Regra de L’Hôpital*” quando fizermos referência a essa indeterminação.

Leibniz descobriu o novo cálculo; as notações por ele criadas permitiram que as suas idéias se destacassem relativamente às de Newton (1642 – 1727). Sabe-se hoje que Newton descobriu o cálculo primeiro que Leibniz, no entanto foi Leibniz quem primeiro publicou[1] trabalhos sobre o assunto.

As bases do método de fluxos de Newton foram primeiramente publicadas obscuramente na forma de lemas no *Príncipia*[2] de 1687, não mais do que alguns anos após sua descoberta do cálculo. Entre 1669 e 1676, Newton escreveu alguns tratados sobre os elementos de fluxos, mais isso só apareceu publicado em 1704.

O artigo de 1684 de Leibniz, de seis páginas, contém a definição[3] de diferencial e dá breves regras para determinar a diferencial da soma, produto, quociente e potências, juntamente com aplicações geométricas. Inclui também algumas aplicações no problema da tangente e dos pontos críticos. Segundo Boyer (1996, p.278), este artigo continha muitas explicações insuficientes e também muitos erros tipográficos, tornando-se amplamente enigmático até para os grandes matemáticos da época.

Os artigos publicados na *Acta* possibilitaram a difusão do cálculo leibniziano, tornando-o amplamente conhecido. De acordo com Bos (1985, p. 5), foi dessa forma que os matemáticos contemporâneos puderam ver a aplicação do cálculo, mas era preciso ser um matemático de muito talento para realmente aprender cálculo a partir desses artigos.

Grattan-Guinness (1984, p.111) diz que, em uma matéria da revista *Acta Eruditorum* de junho de 1696, Johann Bernoulli (1667 – 1748) propôs aos matemáticos da época resolverem o problema da *brachystochrone*[4] (braquistócrona) do grego *βϱαχυς* –

[1] Os trabalhos de Newton sobre o cálculo datam de 1664 – 1666, enquanto que os de Leibniz são de 1672 – 1676. No entanto, Leibniz foi quem primeiro publicou em 1684 e 1686 (artigos no *Acta Eruditorum*). Newton só veio publicar seu cálculo no *Principia* de 1687 e no seu livro *Opticks* de 1704 (Edwards, 1979, p.266).

[2] Principal obra de Newton: *Philosophie Naturalis Principia Mathematica*, conhecida como *Principia* e impressa em 1687 considerada por Garding (1981, p.150) o primeiro grande êxito para a combinação da física e da matemática.

[3] Ver Bos, 1985, p.58 – 68. Unidade III e Boyer, 1996, p.278.

[4] O problema de Brachystochrone em sua forma clássica pedia para que se encontrasse o menor trajeto possível que um corpo faria em uma trajetória descendente, entre dois pontos dados, onde seu movimento se daria unicamente pela força de gravidade constante atuante sobre este próprio corpo, sem a existência de atrito. Nesse sentido, dados dois pontos num plano vertical, a alturas diferentes, que trajetória do plano deve seguir uma partícula material para ir do ponto mais alto ao mais baixo no menor espaço de tempo possível? (Eves, 2002, p.465).

bráquis – que significa “menor” e $\chi\rho o\nu o\varsigma$ – cronos – que significa “tempo”. O mesmo jornal de maio de 1697 trazia artigos, sobre esse problema, de seis dos mais renomados matemáticos da época: Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, Isaac Newton, Marquês de L’Hôpital, Gottfried Leibniz e Ehrenfried Tschirnhaus.

L’Hôpital passa a fazer parte da elite matemática da época e destacou-se como um expoente matemático da França, não somente pelos trabalhos científicos, mas também pelos contatos que manteve com Leibniz e Bernoulli. Foi membro da *l’Académie des Science de Paris*, de 1690 até sua morte.

L’Hôpital tomou parte em quase todos desafios emitidos por Leibniz, pelos Bernoulli’s e por outros matemáticos continentais da época. Estudou a isócrona, sólidos de resistência mínima, a catenária, a tratriz, trajetórias, curvas cáusticas, problemas isoperimétricos, que para Boyer (1996, p.290), eram problemas avançados da análise escritos por Johann Bernoulli.

Vários autores destacam as qualidades pedagógicas do Marquês. Dentre eles, Boyer fala das habilidades de escrita de L’Hôpital, e diz que ele era um autor excepcional:

> L’Hôpital escreveu um tratado analítico sobre cones intitulado *Traité analytique dês sections coniques*, que foi publicado postumamente em 1707. Esse tratado fez pela geometria analítica do século dezoito o que a *Analyse* fizera pelo cálculo. O *Traité* não era especialmente original, mais tinha qualidades pedagógicas que o tornaram um trabalho padrão sobre o assunto durante a maior parte do século (BOYER, 1996, p.288).

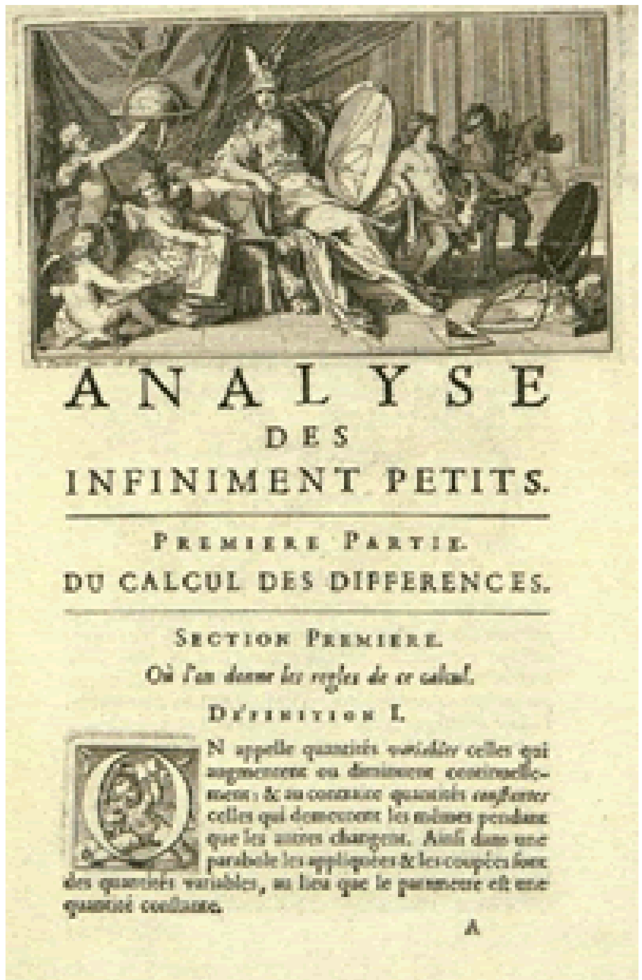
L’Hôpital, não totalmente convencido de que poderia compreender sozinho o novo cálculo apresentado por Leibniz, contratou os serviços de Johann Bernoulli do fim de 1691 a julho de 1692, tempo em que Bernoulli ficou hospedado em sua casa em Paris, com o propósito de ensinar-lhe o novo cálculo, fato que veremos com mais detalhes no capítulo 2.

Nesta época, além de Newton, Leibniz e os Bernoullis, L’Hôpital era quem tinha condições de resolver os problemas mais difíceis que eram propostos como desafios.

A fama de L’Hôpital é baseada em seu livro *Analysis des Infiniment Petits Pour l’intelligence des lignes courbes* (Análise dos Infinitamente Pequenos para o Estudo de Linhas Curvas) considerado o primeiro livro texto escrito sobre cálculo diferencial, publicado em 1696. De acordo com Ricieri (1992, p.27) “nesse livro, L’Hôpital demonstra ser um escritor exímio, expondo de maneira ordenada, através de seus dotes pedagógicos, toda a evolução das principais idéias básicas da nova matemática que estava surgindo”.

Segundo Lacroix, L'Hôpital, na sua época foi um dos geômetras que mais contribuiu para o Cálculo Deferencial:

> No ano de 1699, L'Hôpital foi um dos poucos geômetras que fez algum progresso no Cálculo Diferencial e ele próprio trouxe uma contribuição os infinitamente pequenos. Este livro foi por um longo tempo o melhor livro sobre esta matéria, mas ele não escreveu (deixou de escrever) um tratado sobre o Cálculo Integral, porque ele sabia que Leibniz tinha em mãos uma grande obra com o título "*De Scientia Infiniti*" e que queria tornar conhecida, e que ele ainda não tinha completa (LACROIX, 1799, p.xxviii)



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.
Où l'on donne les regles de ce calcul.

DEFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

A

Figura 1.1.2
Capa do livro de L'Hôpital

O *Analysis des Infiniment Petits* consta de dez seções: A primeira seção é onde são dadas as definições, axiomas e regras básicas de diferenciação do que ele chamou de cálculo das diferenças. Na seção dois aplicam-se estas regras para calcular a tangente a uma curva em um ponto. A seção três trata de máximos e mínimos. A seção quatro aborda conceitos de pontos de reflexão, as cúspides ou pontos de retrocessos. A maior seção é a cinco, em que ele analisa as evolutas que são definidas como “raio de curvatura de uma evoluta”. As seções seis e sete tratam das cáusticas[5] por reflexão e refração. A seção oito estuda o tema dos envolventes e uma família de raios. É aqui que ele introduz o método de Leibniz de diferenciação. A seção nove esta dedicada a resolução de diversos problemas, onde são usados os métodos precedentes. De fato, trata o que atualmente se conhece como indeterminações, e contém a “Regra de L’Hôpital”. Finalmente, a última seção, a décima, compara a elegância do novo cálculo com os métodos da tangente de Descartes e Hudde.

Segundo Ricieri (1992), “*este livro teve um sucesso tão grande que durante dois séculos foi publicado com tiragens de milhares de exemplares*”. Boyer (1996, p.290) também menciona a importância que o livro trouxe para a época: “... e*sse livro cuja influência dominou quase todo o século dezoito”.*

Na introdução L’Hôpital admitia dever muito a Leibniz e aos irmãos Bernoulli, porém, considerava como suas as idéias desenvolvidas na obra. De fato, de acordo com Bos (1985, p.5), “a maior parte do material do livro já havia sido discutida nas aulas de Bernoulli, mas a versão de L’Hôpital foi muito instrutiva, pois continha várias conclusões suas”. L’Hôpital nunca desejou para si os resultados de Bernoulli. Vejamos o que ele escreve na introdução do seu livro:

> "Ao resto eu reconheço dever muito aos esclarecimentos dos Srs. Bernoulli’s, sobre tudo ao jovem atualmente professor em Groningue. Eu me servi sem dúvida de suas descobertas e das do Sr. Leibniz. É porque, eu consinto que eles reivindiquem tudo o que quiserem, me contentando do que quiserem me deixar." (L’HÔPITAL, 1696, prefácio. tradução: Sebastiani Ferreira)

Segundo Bos (1985, p.5), “L’Hôpital não inclui cálculo integral em seu livro porque Leibniz havia manifestado a intenção de escrever um tratado completo sobre o cálculo. Contudo jamais realizou seu intento”.

Abellán (2004, p.42) diz que L’Hôpital não discutiu a natureza do cálculo, mas tornou-o popular, tanto escrevendo artigos no *Journal des Sçavans,* quanto reproduzindo diversas cópias do seu livro. Abellán[6] (2004, p.43) elogia o livro de L’Hôpital, destacando que o autor havia contribuído para acabar com os segredos que envolvia o novo cálculo. O

[5] Curva formada pela intersecção dos raios luminosos que uma superfície curva reflete ou refrata.

[6]Abellán apud Montucla (1758, p. 397) e Bossut (1802, p. 162-163)

livro foi traduzido para o inglês em 1730 por Stone. Em 1725, Pierre Varignon (1654 – 1722) publicou *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*. Antes de Varignon, Jean Pierre Crousaz (1663 – 1750) publicou em 1721 *Commentarie sur l'Analyse des infiniment petits*.

A publicação do *Analysis des Infiniment Petits* deu origem ao debate entre Michael Rolle (1652 – 1719) e Pierre Varginon na Academia de Ciências em Paris. Rolle em 17 de julho de 1700 começa o debate sobre o cálculo diferencial questionando a validade dos novos métodos infinitesimais tais como eram apresentados por L'Hôpital. Varignon decidiu defender o novo cálculo contra os ataques de Rolle. As críticas de Michael Rolle estão embasadas em dois pontos: a falta de rigor nos conceitos fundamentais e erros produzidos pelo novo cálculo, fato que não discutiremos nesse trabalho por não estar no âmbito da nossa pesquisa.

Neste livro, *Analysis des Infiniment Petits,* é encontrada a regra, conhecida agora como "*Regra de L'Hôpital*", usada para calcular o limite de uma função racional cujo numerador e denominador tendem a zero em um ponto, ou seja, o valor da variável toma a forma de indeterminação 0/0. Este trabalho teve uma grande circulação e acabou por dar forma à notação de diferencial a ser usada na França, ajudando a fazê-lo conhecido por toda a Europa.

A "*Regra de L'Hôpital*" freqüentemente apresenta resultados rápidos e diretos e, algumas vezes, funciona onde outros métodos, como fatoração e aplicação do conjugado, possivelmente, possam falhar quando estamos lidando com radicais no numerador, denominador ou em ambos,.

Parte do material no *Analysis des Infiniment Petits* certamente era trabalho independente de L'Hôpital, pois ele era um matemático competente. Como exemplo disso, pode-se citar a retificação da curva.

De acordo com Sebastiani Ferreira (2008) a curva logarítmica foi sugerida à Descartes (1596 – 1650) por Debeaune (1601 – 1652) em 1638 numa carta. Descartes resolve em parte o problema e envia numa carta também à Debeaune, em 20 de fevereiro de 1638, tudo isso sem perceber que era a curva logarítmica, um problema inverso da tangente, isso é, um problema de integração. Em 1692 no *Journal des Sçavans* L'Hôpital mostra a ligação entre a curva logarítmica e a quadratura da hipérbole, e lança o desafio aos geômetras da época a encontrar a retificação da curva de De Debaune, que foi aceito e publicado no mesmo jornal onze anos depois por Varignon.

L'Hôpital morreu em Paris, em 1704, aos 43 anos como vice-presidente da *Académie des Sciences.*

2.2 Bernoulli’s

Desde a antiguidade até os dias atuais, a humanidade sempre teve grandes intelectuais que muito contribuíram para o desenvolvimento da Ciência. Através de suas teorias, descobertas ou invenções, estes gênios trouxeram benefícios enormes, provocando grandes avanços. Entretanto, quase não se tem notícia de um famoso sábio que seja parente de outro famoso sábio. Neste panorama, apresentamos a família Bernoulli. Esta família produziu famosos e numerosos intelectuais, muitos deles, grandes matemáticos. Dentre todos eles, dois irmãos merecem destaque especial: Jacob e Johann. Eles protagonizaram a tão conhecida "Querela dos Bernoulli’s".

2.2.1 Genealogias dos Bernoulli[7]

Em 1483 nasceu, na Holanda, Jacob Bernoulli, que, mais tarde, foi obrigado a deixar esse país para escapar a perseguição do duque de Albe, por questões religiosas. Foi para Frankfurt.

Seu neto, também chamado de Jacob, nasceu em 1598 e se estabeleceu em Basiléia – Suíça – em 1622. Morreu nesta cidade em 1634.

Nicolaus Bernoulli, filho mais velho do precedente Jacob, nasceu em 1623 e morreu em 1708. Foi negociante e membro do Grande Conselho da Basiléia. Casou-se com Margaretha Bernoulli e tiveram onze filhos.

De seus filhos os três mais conhecidos foram: Jacob, Johann I e Nicolaus I. Jacob, o quinto filho, nasceu na Basiléia no dia 27 de dezembro de 1654 e morreu no dia 16 de agosto de 1705. Licenciado em Teologia, mudou-se em 1676 para Genebra a fim de trabalhar como tutor.

Figura 2.2.1
Jacob (1654 - 1705)

[7] Fonte: Professor Eduardo Sebastiani Ferreira

Em 1681 Jacob trabalhou na França e em 1683 voltou para Suíça para dar aulas de mecânica na Universidade da Basiléia. Casou-se com Judith Stupanus e tiveram um casal de filhos, o menino, também de nome Nicolaus, foi o único membro da família a não se tornar nem matemático, nem físico.

Jacob foi nomeado professor de Matemática da Universidade de Basiléia em 1687, e se manteve no cargo até sua morte em 1705. Foi substituído pelo seu irmão Johann.

Entre as contribuições de Jacob Bernoulli à matemática figuram o uso das coordenadas polares, o estudo da catenária, o estudo de muitas outras curvas planas superiores, a criação da curva chamada de *isócrona*. Propôs e discutiu o problema das *figuras isoperimétricas*. Vários resultados em matemática têm hoje o nome de Jacob Bernoulli. Entre eles estão a *distribuição de Bernoulli* e o *teorema de Bernoulli* da estatística e da teoria das probabilidades; a *equação diferencial de Bernoulli*, os *números de Bernoulli,* os *polinômios de Bernoulli* de interesse da teoria dos números; e a *lamniscata de Bernoulli.*

Johann I, o décimo filho de Nicolaus, nasceu também em Basiléia no dia 27 de julho de 1667 e morreu dia 1º de janeiro de 1748. Doutorou-se em medicina, em 1691 foi à Genebra dar aulas de cálculo, de lá para Paris, onde freqüentou o círculo de Nicolas Malebranche[8] (1638 – 1715). Foi nessa época que conhece L'Hôpital e Varignon (1692). Volta à Basiléia por pouco tempo e em 1695 recebe a cátedra de Matemática da Universidade Groningen. Casou-se com Dorotheia Flakner, com quem teve três filhos: Nicolaus III, Daniel I e Johann II. Retorna à Basiléia para assumir a cátedra de Matemática deixada pela morte de seu irmão Jacob. Pertenceu as Academias de Ciências de Paris, Berlim, Londres e Saint Petersburgo.

Figura 2.2.2
Johann I (1667 - 1748)

[8] Filósofo e teólogo francês, nascido em Paris. Estudou um ano de filosofia no Colégio de la Marche e três de teologia na Universidade de Sorbonne. Limitou-se praticamente aos estudos pelo resto de sua vida. Tendo em 1664 lido o *Traité de l'homme ou de la formation du foetus* de Descartes, interessou-se pela sua filosofia e tornou-se um entusiasmado racionalista cartesiano. Dentre vários trabalhos pesquisou sobre a natureza da luz e da cor, e estudos de cálculo infinitesimal e a visão. Os seguidores e leitores de suas obras formavam o chamado círculo de Melebranche.

Outro filho de Nicolaus I, chamado de Nicolaus II, nasceu no dia 21 de outubro de 1687, e morreu no dia 25 de novembro de 1759. Era doutor em Direito e professor de matemática, na Universidade da Pádua (1716/19). Mais tarde professor de Direito e Lógica na Universidade da Basiléia. Foi eleito membro da Academia de Berlim em 1713, tendo pertencido, também, às academias Real de Londres (1714) e de Bolonha (1724).

Quanto aos filhos de Johann I, Nicolaus III nasceu em 6 de fevereiro de 1695 na Basiléia e morreu em 31 de julho de 1726 em Saint Petersbourg. Doutorou-se em Direito e foi professor dessa disciplina na Universidade da Basiléia de 1723 a 1725, depois professor de Matemática em Saint Petersburgo.

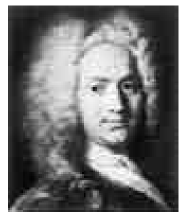


Figura 2.2.3
Nicolaus II (1695 - 1726)

Daniel I, outro filho de Johann, nasceu em 8 de fevereiro de 1700 em Groningue e morreu em 17 de março de 1782 na Basiléia. Doutorou-se em Medicina e foi professor de Matemática em Saint Petersburgo de 1725 a 1733. Estudou em Heidelburg e Strassburg. Ganhou o Grande Premio da Academia de Paris por 10 vezes. Pertenceu às academias de Bolonha, Saint Petersboug, Berlim, Paris, Londres, Berna, Turin, Zurique e Manheim.

Figura 2.2.4
Daniel I (1700 - 1792)

O filho mais novo de Johann I nasceu em 28 de maio de 1710 e morreu em 17 de julho de 1790, na Basiléia, recebeu o nome de Johann II. Doutor em Direito e professor de Oratória na Basiléia e em 1750 torna-se professor de Matemática nessa Universidade. Teve também três filhos: Johann III, Daniel II e Jacob II.

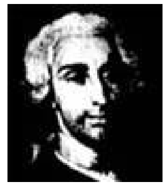


Figura 2.2.5
Johann II (1710 - 1790)

Johann III nasceu em 4 de novembro de 1744, na Basiléia e morreu em 13 de julho de 1807 em Berlim. Doutor em Filosofia, licenciado em Direito e astrônomo da Academia de Berlim (1767).

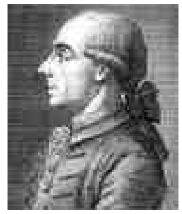


Figura 2.2.6
Johann III (1695 - 1726)

Jacob II nasceu em 17 de outubro de 1759 na Basiléia e morreu em Saint Petersburgo no dia 15 de agosto de 1789, afogado quando nadava no rio Neva. Foi professor de Matemática na Universidade de Saint Petersburgo, e casado com uma neta de Euler.

Figura 2.2.7
Jocob II (1759 - 1789)

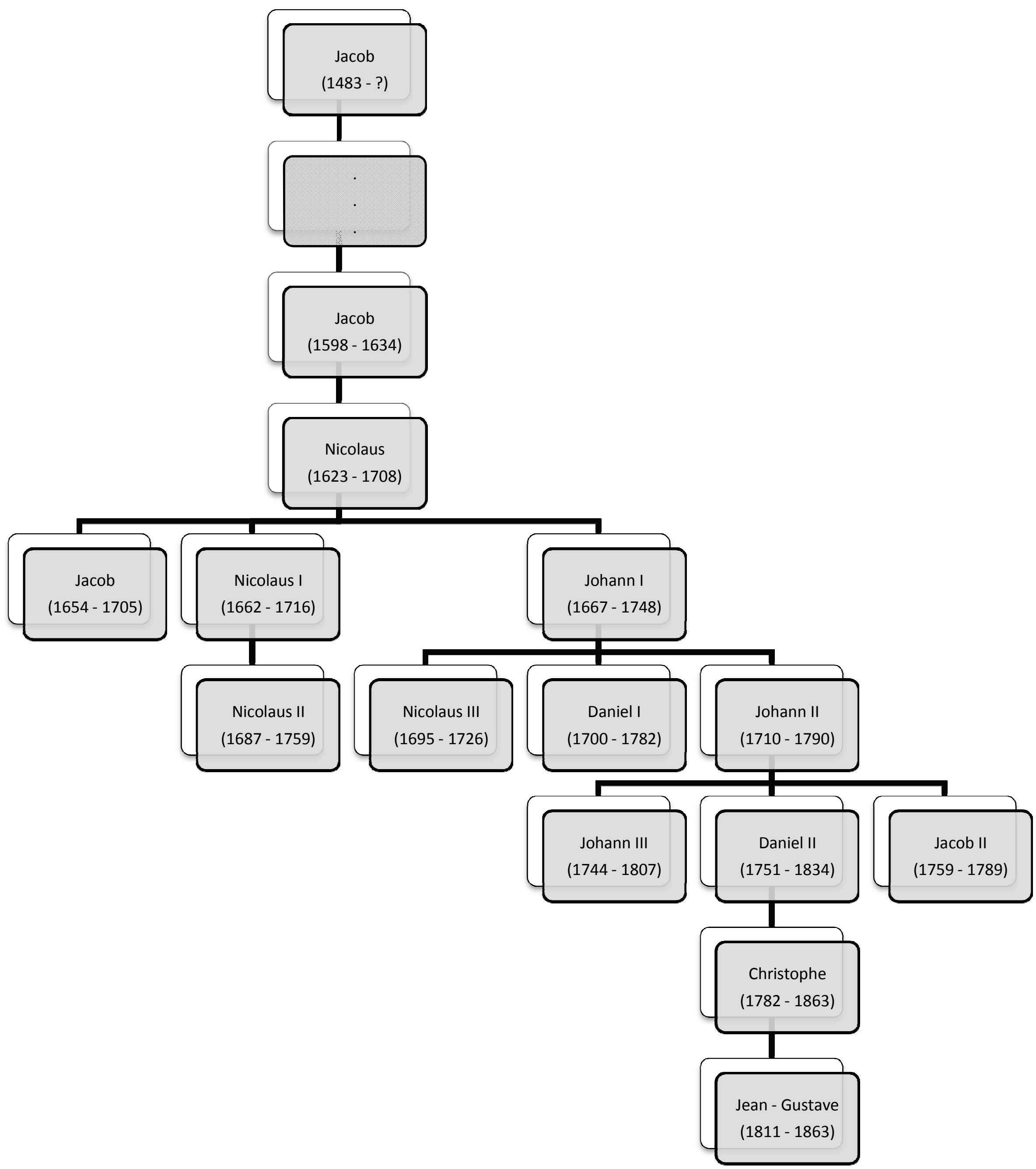
Daniel II nasceu e morreu na Basiléia nos dias 31 de janeiro de 1751 e 21 de outubro de 1834, respectivamente. Doutor em Medicina e professor de oratória na Universidade da Basiléia.

Christophe era filho de Daniel II, nasceu também na Basiléia em 15 de maio de 1782. Foi professor no Pedagogium de Halle em 1802, chefe do Instituto da Basiléia (1806/17) e professor de História Natural na Universidade desta cidade, depois de 1811.

Jean-Gustave, filho de Christophe, nasceu em 1811 na Basiléia e é autor do *Vade-Mecum* do Mecânico.

Podemos fazer conclusões a respeito da família Bernoulli dizendo que a história dos descendentes é muito semelhante a dos pais, não revelando queda para os negócios da família, inscreveram-se na Universidade onde cursaram Magistratura ou Medicina. Anos mais tarde acabariam por se dedicar à Matemática onde viriam a dar contribuições importantes, nomeadamente na área do cálculo.

Foram professores e colegas dos eminentes matemáticos Leibniz, L'Hôpital e Euler, entre outros, e deram importantes contributos para a discussão científica da sua época.



2.2.2 Johann I Bernoulli

Johann Bernoulli foi o que teve contato direto com L'Hôpital. Seus pais, Nicolaus e Margaretha Bernoulli queriam que ele fosse comerciante ou médico, mas Johann que pode ter sido influenciado quando criança pelo seu irmão Jacob Bernoulli já na carreira matemática, tinha grandes facilidades para lidar com a matemática.

Muitos dos grandes matemáticos que se destacaram em seus trabalhos começaram a produzir logo cedo. No resumo da biografia feita por Barufi (2002) sobre Johann, podemos observar este fato:

> Em 1682, com quinze anos de idade, Johann trabalhou no comércio durante um ano, porém não gostou da atividade. Em 1683, ingressou na Universidade da Basiléia para estudar Medicina, apesar de ter sempre gostado de Matemática. Quatro anos depois, seu irmão Jacob foi nomeado professor de Matemática na Universidade e, de 1687 a 1690, Johann e Jacob Bernoulli estudaram juntos as teorias de Leibniz sobre o Cálculo. Na época, essas teorias não tinham sido compreendidas por nenhum outro matemático e os irmãos Bernoulli foram os primeiros a estudá-las. Os dois irmãos e Leibniz iniciaram uma série de artigos publicados na *Acta Eruditorum*, dando origem à difusão do Cálculo Leibniziano, tornando-o amplamente conhecido (BARUFI, 2002).

De acordo com Bos (1985, p.5) os assuntos publicados na *Acta* eram, entre outros, *a catenária*, *as espirais* e as formas de várias *equações diferenciais*.

O bom desempenho de Bernoulli nos cálculos fascinaram o marquês L'Hôpital, que segundo Bos (1985, p.5), durante uma discussão sobre o conceito de curvatura, Bernoulli impressionou-o ao calcular em poucos minutos o raio de curvatura para várias curvas.

O acordo[9] que Bernoulli fizera com L'Hôpital permitia ao marquês usar todo o conteúdo ensinado como o desejasse. A conseqüência desse acordo foi a importante contribuição de Johann Bernoulli à conhecida Regra de L'Hôpital, publicada pelo marquês em seu livro *Analyse*.

Johann nunca chegou a publicar seu livro sobre o cálculo, porém de acordo com Boyer (1996, p.290) e Baron (1985, p. 5), escreveu sobre a catenária, as espirais, a forma de corpos elásticos sob tensão, a curvatura, trajetórias, problemas isoperimétricos[10], várias equações diferenciais entre outros, conseguindo reconhecimento pelo seu trabalho, o que proporcionou-lhe encontrar trabalho. Após a morte de seu irmão em 1705, foi chamado para ocupar a cadeira dele na Universidade de Basiléia.

---

[9] Veremos com detalhes o acordo feito entre ambos no próximo capítulo.

[10] Jacobi Bernoulli propôs como continuação da solução do problema da braquistócrona, outros vários problemas do mesmo tipo chamados de *problemas isoperimétricos*. No caso da braquistócrona, são curvas que se deslocam no menor intervalo de tempo entre todas aquelas que passam por dois pontos A e B (como definimos na nota de rodapé número 4). Nos problemas isoperimétricos são todas as curvas que passam por A e B e possuem o mesmo comprimento. Por exemplo, consideremos um curva que passa por A e B de comprimento 1 e determina com o seguimento AB uma área máxima. Jacobi Bernoulli obteve grandes sucessos na investigação dessa curva possibilitando métodos para resolver esse tipo de problemas (Grattan-Guinness, 1984, p. 112-113).

Apesar de nunca ter publicado um livro, para Grattan-Guinness:

> Em 1742 Johann Bernoulli publicou sua obra completa, mais de cinqüenta anos após haver escrito, as lições que havia dado a L'Hôpital sobre o título "*O método das integrais*" (Bernoulli, 1691a), afirmando em uma nota de rodapé que omitia suas lições sobre cálculo diferencial, dado que seu conteúdo estava no livro *Analyse* de L'Hôpital. Estas lições podem ser consideradas com um bom resumo das idéias vigentes por volta de 1700 sobre integrais e o uso nas soluções de problemas (GRATTAN-GUINNESS, 1984, p.99)

Muito do desenvolvimento matemático devemos às numerosas contribuições de Johann Bernoulli e da família Bernoulli em geral. Segundo Pastor & Babini (1986, p. 99), encontramos vários problemas de aplicações dos métodos infinitesimais à geometria e a mecânica propostos por Johann e seu irmão Jacob. Dentre os problemas propostos, citamos o problema da curva de tempo mínimo (braquistócrona). Ricieri (1992, p.28) diz que Johann tinha interesse pelo cálculo de variações:

> Em 1695, Bernoulli foi convidado para ser professor da Universidade de Groningen e, em 1696, começou a interessar-se pelo que seria o Cálculo Varacional. Nessa época, propôs, na revista *Acta Eruditorium*, o célebre problema do tempo mínimo de descida de um corpo sob a ação do campo gravitacional, problema este resolvido por Newton, Euler e vários matemáticos, inclusive pelo próprio Johann (RICIERI, 1992, p.28).

Como já vimos, Johann propôs o problema da *braquistócrona*, mas ele não foi o primeiro a considerar esse problema. Galileu havia escrito sobre o problema em 1638 no seu famoso trabalho *Discurse and mathematical demonstrations Concerning Two New Sciences*. Neste trabalho, Galileu propôs como solução da braquistócrona um arco de circunferência. De acordo com Boyer (1996, p.287) Johann achara uma prova incorreta de que a curva é uma ciclóide, e desafiou o irmão Jacob a descobrir a curva requerida. Depois que Jacob provou corretamente que a curva é uma ciclóide, Johann tentou substituir sua prova pela do irmão.

O problema da braquistócrona marca um momento significativo na história da matemática por ser um exemplo pertencente ao chamado *cálculo varacional.* É um problema de máximos e mínimos, que tem em especial a quantidade T_y cujo valor mínimo se busca, não depende de uma só variável independente nem de um número finito delas, mas sim de uma forma geral da curva.

Segundo Boyer (1996, p.288), Jacob Bernoulli tinha fascinação por curvas e pelo cálculo, e uma curva tem seu nome a "*lemniscata de Bernoulli*" dada pela equação polar $r^2 = a \cos 2\theta$. A curva foi descrita na *Acta Eruditorum* como semelhante a um oito ou uma fita com laço. De acordo com Grattan-Guinness (1984, p.108), outro problema que Jacob resolveu foi a determinação da equação catenária.

> A determinação da equação da catenária[11] foi o primeiro problema importante resolvido por Johann Bernoulli, em 1691. O interesse por essa curva tem origem em Galileu que pensava que a solução era simplesmente uma parábola. Em 1646, Huygens provou que a solução de Galileo era falsa, mas também não conseguiu resolver o problema que era determinar sua equação. Utilizando o Cálculo Leibniziano, Johann Bernoulli resolveu o problema um ano após seu irmão Jacob ter lançado o problema. Esse foi o primeiro sucesso público do novo cálculo (GRATTAN-GUINNESS, 1984, p.108).

Pastor & Babini (1986, p. 100) descrevem outras contribuições de Johann. Essas contribuições se referem especialmente à teoria das séries, a aplicações do cálculo integral e as equações diferenciais. Em 1694, estudou as curvas exponenciais $y = a^x$ e $y = x^x$, os métodos do fator integrante e de separação das variáveis e a integração de equações diferenciais. O original método da quadratura por séries, exposto em 1694, de onde se originou a chamada série de Taylor, vinte e sete anos depois era devido a Johann. Pastor & Babini (1986, p. 100) fazem menção a essa regra com o nome de "*série de Bernoulli*". Para Bernoulli a integração era a operação inversa da diferenciação. Tal concepção permaneceu até a época de Cauchy.

Johann Bernoulli era sempre homenageado por reis e rainhas devidos aos seus trabalhos. Ricieri conta em seu livro que Maclaurin (1698 – 1746) havia escrito:

> "... Os Bernoulli são gênios. Especificamente Johann. Apesar de seu comportamento estranho, uma vez que parece sempre estar atormentado, tem feito uma matemática espetacular. Seus estudos, particularmente os de Cálculo Diferencial, tem contribuído para o avanço das exatas. Não resta dúvida que Johann Bernoulli é um dos maiores matemáticos que esse mundo conheceu ..." (RICIERI, 1992, p.29).

Johann teve três filhos com Marie Euler[12], Nicolaus (1695 - 1726), Daniel (1700 - 1782) e Johann (1710 - 1790). Todos eles foram matemáticos e Daniel produziu um trabalho sobre Hidrodinâmica conhecido como Princípio de Bernoulli.

Em 1712, Johann demonstrou nítidos sinais de desequilíbrio mental ao expulsar de casa seu filho Daniel depois de quase tê-lo matado com uma facada nas costas, por este haver conquistado um prêmio da Academia de Ciências de Paris, ao qual Johann também estava

---

[11] A catenária é a forma assumida por uma corda ou corrente suspensa livremente por dois pontos. Um breve resumo da solução dada por Johann Bernoulli pode ser encontrada na sua obra "*O método das integrais*" de *1691a*, p.12-36.

[12] Sobrinha de Euler que se casou com Bernoulli com apenas 10 anos.

concorrendo. O fato de o filho haver tido melhor desempenho que ele, provocou-lhe uma inveja e ira que perdurou até o final de sua vida. Recusava-se a conversar com as pessoas à sua volta e, se estas conhecessem matemática, afirmava que eram ladras de suas idéias. Todos estes sintomas de paranóia tornar-se-iam agudos com o passar dos anos. No ano de 1747, ficou sozinho abandonado pela própria família. No livro de Ricieri encontramos um parágrafo onde Johann Bernoulli demonstra-se muito revoltado com tudo e com todos. Vejamos o que ele fala:

> "... Dizem que estou louco. Louco? Eu estou louco! São eles os loucos. Alguém saberia definir um louco? Tenho certeza que não. Loucos, no sentido de doido e maluco, somos todos nós que esperamos pela morte. Sabemos que mais cedo ou tarde estaremos, loucos ou não, mortos. Que se dane a loucura. Eu não sou louco. Estou, simplesmente, apodrecendo..."
>
> "...estejam certos que do mesmo modo que nasci, modificar-me-ei e ressurgirei novamente. Sou teimoso, idealista, ..." (RICIERI, 1992, p.30)

Johann Bernoulli morreu no dia primeiro de janeiro de 1748, completamente louco, suicidando-se, cortando os pulsos, com 81 anos de idade, na Basiléia.

3. A Regra de L'Hôpital

"Se estiver com dificuldade com um problema de Cálculo e não sabes como resolver, trata-se de integrar por partes ou fazer uma troca de variáveis, agregado a esse conselho podemos dizer outro: se não sabes como calcular um limite use a Regra de L'Hôpital".

Jerry Kazdan

Neste capítulo tentaremos explicar a regra de L'Hôpital para o levantamento de indeterminações do tipo 0/0 que aparece nas páginas 145 e 146 do *Analyse.*

Esta explicação carece, por um lado, das definições e demandas ou postulados (suposições) apresentadas por L'Hôpital no início do seu livro e, por outro lado, das definições de variável, função, derivada e diferencial apresentadas por Cauchy nos seus resumos das lições dadas na École Royale Polytechnique que veremos na seção 3.4. Começaremos introduzindo as definições de L'Hôpital e explicaremos depois a sua regra e os dois exemplos por ele apresentados.

3.1 A regra segundo L'Hôpital

L'Hôpital começa com as definições de quantidades variáveis e suas diferenciais:

> *Definição I:* Chama-se quantidades variáveis as que aumentam ou diminuem continuamente; e pelo contrário, quantidades constantes são aquelas que continuam iguais enquanto outras se alteram. Assim numa parábola os aplicados[13] e cortados[14] são quantidades variáveis, e o parâmetro é uma quantidade constante. (L'HÔPITAL, 1696, p. 01, tradução nossa)

Chamaremos a atenção para a palavra *continuamente* usada nesta definição. L'Hôpital não faz nenhuma consideração sobre o que significa aumentar ou diminuir continuamente, pelo que ficamos com algumas dúvidas relativamente ao que, de fato, ele queria dizer.

[13] Ordenada
[14] Abscissa

Vejamos a segunda definição apresentada por Bos (1985, p. 7). A figura 3.1.1 abaixo nos ajudará a entender e explicar os conceitos definidos por L'Hôpital.

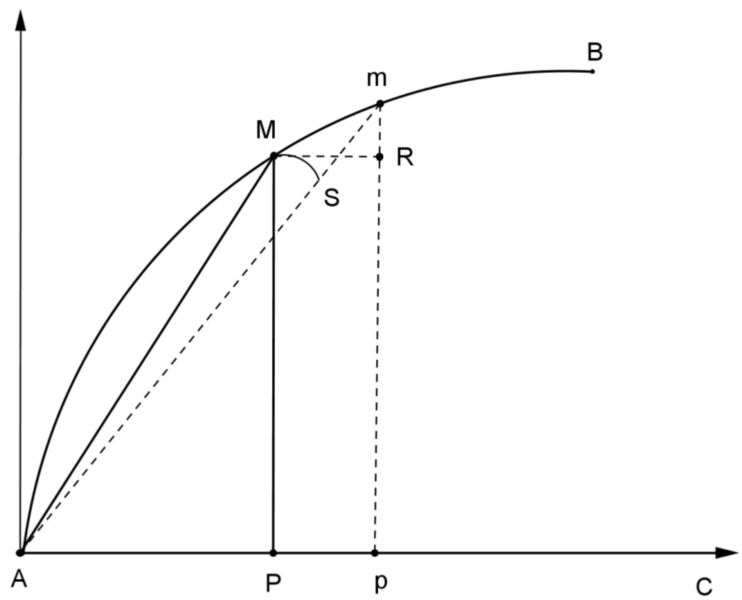


Figura 3.1.1
Gráfico ilustrativo da definição de diferencial feito por L'Hôpital

> *Definição II:* A parte infinitamente pequena pela qual uma quantidade variável aumenta ou diminui continuamente chama-se diferencial [diferença] daquela quantidade.
> Seja por exemplo uma linha curva qualquer *AMB*, como mostra a figura 3.1.1, cujo eixo ou diâmetro é a linha *AC*; seja a linha reta *PM* uma ordenada, e a linha reta *pm* outra ordenada infinitamente próxima à primeira. Se traçarmos agora a linha *MR*, paralela a *AC* e às linhas *AM* e *Am*, e descrevermos o pequeno arco circular *MS* partindo do centro *A* com distância *AM*, *Pp* será a diferencial de *AP*; *Rm* será a diferencial de *AM*; e *Mm* será a diferencial do arco *AM*. Da mesma forma, o pequeno triângulo *MAm*, cuja base é o arco *Mm*, será a diferencial do segmento *AM*; e o pequeno espaço *MPpm* será a diferencial do espaço contido sob as linhas retas *AP*, *PM* e sob o arco *AM*. (BOS, 1985, p.7)

Depois das definições dadas, L'Hôpital apresenta como corolário que "a diferença de uma quantidade constante é nula ou zero" chegando mesmo a reforçar esta idéia escrevendo "ou (o que é a mesma coisa) que as quantidades constantes não têm diferença."

L'Hôpital usa a letra *d* para denotar a diferença entre duas quantidades variáveis e que não terá outro significado senão denotar essas diferenças. Em forma de observação ele escreve:

> "Servirnos-emos daqui para a frente da notação ou característica *d* para designar a diferença de uma quantidade variável que seja expressa por uma só letra; e para evitar confusão daqui para a frente, esta notação *d* não terá outro uso neste cálculo.

> Se nomearmos, por exemplo, as variáveis *AP* por x; *PM* por y; *AM* por z; o arco *AM* por u; o espaço mistilíneo *APM* por s; e o segmento *AM* por t: dx exprimirá o valor de *Pp*, dy o de *Rm*, dz o de *Sm*, du o do pequeno *arco Mm*, ds o do pequeno *espaço MPpm*, e dt o do pequeno *triângulo mistilíneo MAm*" (L'HÔPITAL, 1696, p.02, tradução nossa).

O postulado I do livro de L'Hôpital estabelece regras sobre o uso de *quantidades infinitamente pequenas*. É importante frisar que L'Hôpital, não discute se tais quantidades existem ou não. No entanto, os próximos postulados mostram como estas quantidades se comportam.

> Postulado I: Admitimos que se possa tomar indiferentemente uma pela outra duas quantidades que não diferem entre elas que de uma quantidade infinitamente pequena; ou (que é a mesma coisa) que uma quantidade que não é aumentada ou diminuída por outra quantidade infinitamente menor que ela, pode ser considerada como permanecendo a mesma. Pede-se por exemplo que, podemos tomar *Ap* por *AP*, *pm* por *PM*, o espaço *Apm* pelo espaço *APM*, o pequeno espaço *MPpm* pelo pequeno retângulo *MPpR*, o pequeno setor *AMm* pelo triângulo *AMS*, o ângulo *pAm* pelo ângulo *PAM*, etc. (L'HÔPITAL, 1696, p.03, tradução: Sebastiani Ferreira).

Neste postulado, as diferenciais são desprezadas quando comparadas com quantidades finitas, ou seja,

$$x + dx = x \qquad y + dy = y \qquad z + dz = z$$

etc., onde ele faz uma observação que "as ultimas letras do alfabeto, x, y, z, etc, denotam as quantidades variáveis e as primeiras letras a, b, c, etc., denotam as quantidades constantes". O dx é o pequeno acréscimo da abscissa e o dy é o acréscimo da ordenada. Enfim, os d são as partes infinitamente pequenas adicionadas ou subtraídas de uma variável quando esta aumenta ou diminui continuamente.

L'Hôpital continua usando o primeiro postulado para expressar as regras do cálculo para apresentar a regra do produto para derivadas.

$$\begin{aligned} d(x.y) &= (x + dx)(y+dy) - xy &= \\ &= xy + xdy + ydx + dxdy - xy &= \\ &= xdy + ydx + dxdy &= \\ &= xdy + ydx. \end{aligned}$$

Como $dxdy$ é uma quantidade infinitamente pequena com relação aos outros termos xdy e ydx, estes são eliminados.

Achamos pertinente ver como é que é deduzida a diferença de uma fração qualquer. “A diferença de $\frac{x}{y}$ é $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Porque, supondo $\frac{x}{y} = z$ teremos $x = yz$ e como estas duas quantidades variáveis x e yz são sempre iguais, os seus aumentos ou os seus decrescimentos serão também iguais, isto fará com que as suas diferenças sejam iguais. E, portanto, teremos $dx = ydz + zdy$ [pela regra da diferença do produto, designada por L’Hôpital como Regra II] e $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ quando fazemos z igual a $\frac{x}{y}$. E encontramos o que era preciso.”

> Postulado II: “Pede-se que uma linha curva possa ser considerada como uma reunião de uma infinidade de segmentos de reta, cada um infinitamente pequeno; ou (o que é a mesma coisa) como um polígono com uma infinidade de lados, cada um deles infinitamente pequeno que determinam, pelos ângulos que formam uns com os outros, a curvatura da curva. Pede-se, por exemplo, que a porção da curva *Mm* e o arco de círculo *MS* possam ser considerados segmentos de reta por causa dos seus infinitamente pequenos, de tal modo que o triângulo pequeno *msM* possa ser considerado retângulo” (L’HÔPITAL, 1696, p. 3. Tradução nossa). (Figura 3.1.1).

De acordo com Boyer (1996, p.288), devemos salientar neste momento que os postulados I e II não são de modo nenhum aceitáveis; no entanto, referindo-se a eles, L’Hôpital considerava-os “tão evidentes que não deixavam lugar ao menor escrúpulo quanto à sua validade e certeza na mente de um leitor atento”.

3.2 Demonstração de L’Hôpital

O Trecho a seguir, é retirado da obra original de L’Hôpital, o livro *Analisis des Infiniment Petits Pour l’intelligence des lignes courbes*. Vejamos como ele explica a regra de indeterminação 0/0.

DES INFINIMENT PETITS. *I. Part.* 145

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précedentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP $=$ x , PM $=$ y , AB $=$ a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque* x $=$ a, *c'est à dire lorsque le point* P *tombe sur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. FIG. 130.

Soient entendues deux lignes courbes *ANB*, *COB*, qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui soient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction generale qui convient à toutes les *PM*: de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point *B*; puisque par la supposition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorsque le point *P* tombe en *B*. Cela posé, si l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB*, *COB* aux points *f*, *g*; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne différe pas de *BD*. *Art. 2.

Il n'est donc question que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il est visible que la coupee *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN*, *PO* deviennent nulles, & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il suit que ces appliquées, elles mêmes *bf*, *bg*, sont la difference des appliquees en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB*, *COB*; & partant que si l'on prend la difference du numérateur, & qu'on la divise par la difference du denominateur, après

T

avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée *bd* ou *BD*. Ce qu'il falloit trouver.

Proposição I[15]

"Seja uma linha curva AMD (AP = x, PM = y, AB = a) tal que o valor da aplicada y seja expressa por uma fração, cujo o numerador e denominador tornam-se zero, quando $x = a$, isto é, quando o ponto P cai sobre o ponto B dado. Pergunta-se qual é o valor da aplicada BD ?"

L'Hôpital demonstra então geometricamente que substituindo o numerador e o denominador pelas respectivas derivadas, calculadas para $x = a$, teremos o valor procurado. Logo após dá dois exemplo:

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \quad \text{e} \quad y = \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}.$$

Sua demonstração é a seguinte:

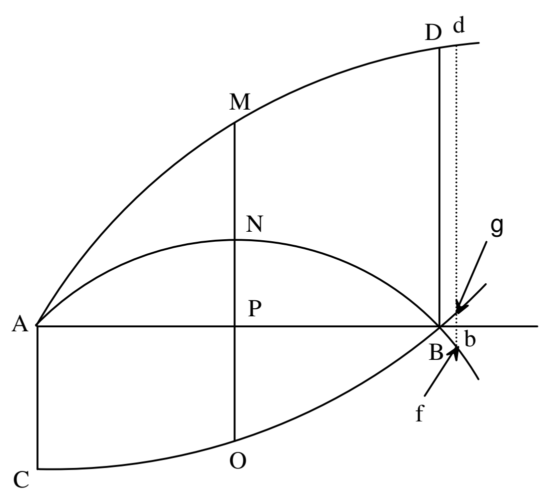


Figura 3.2.1
Gráfico feito por L'Hôpital ilustrando a regra de indeterminação 0/0

> Seja estendido duas linhas curvas ANB, COB que têm por eixo comum a linha AB, e que sejam tais que a aplicada PN exprime o numerador e a aplicada PO o denominador da fração geral, que convém a todos os PM: de sorte que $PM = \frac{ABxPN}{PO}$. É claro que estas duas curvas se encontram no ponto B, pois que

[15] Proposição da Seção IX do livro de L'Hôpital – Soluções de problemas gerais que depende dos métodos de diferenciação – p. 145.

> por suposição *PN* e *PO* são cada um zero quando o ponto *P* se torna *B*. Isto posto, se imaginarmos uma aplicada *bd* infinitamente próxima da *BD*, e que encontra as linhas curvas *ANB* e *COB* nos pontos *f* e *g*, teremos $bd = \frac{ABxbf}{bg}$ a qual não difere de *BD* . Não é questão de encontrar a relação de *bg* com *bf*. É verificável que o par *AP* torna-se *AB*, os aplicados *PN*, *PO* tornam-se nulos, e *AP* torna-se *AB*, e que tornam-se *bf* , *bg*. Donde é necessário que estes aplicados, eles mesmos *bf*, *bg* sejam as diferenças dos aplicados em *B* e *b* em relação as curvas *ANB*, *COB*; e portanto que se tomarmos a diferença do numerador e quando a dividimos pela diferença do denominador, depois de ter feito $x = a = Ab$ ou *AB*. Teremos o valor procurado da aplicada *bd* ou *BD*. É o que procurávamos (L'HÔPITAL, 1696, p.145, tradução: Sebastiani Ferreira).

Começamos por apresentar a tradução da *Regra de L'Hôpital* a qual carece de explicação à luz do cálculo usado na obra em que ela aparece pela primeira vez. Conforme vimos, a obra escrita por L'Hôpital começa por apresentar as definições, postulados e até mesmo as regras de "*diferenciação*" que vai usar. É, pois, com base nessa introdução que iremos analisar esta regra.

L'Hôpital começa por referenciar uma curva, que designa por *AMD*, a um eixo *AB*, sendo *A* e *B* dois pontos dados, (Figura 3.2.1). Este eixo vai ser considerado o eixo das abscissas. Toma de seguida um ponto *M*, sobre essa curva e desse ponto considera um segmento de reta *PM*, com *P* pertencente ao eixo *AB* (*PM* não é necessariamente perpendicular ao eixo *AB*). Designa a medida do comprimento de *PM* por *aplicada* [ordenada] e denota-a por *y*. Denota a medida do comprimento do segmento de reta *AP* por *x* e a medida do comprimento do segmento de reta *AB* por *a*.

A curva considerada é tal que o valor da aplicada *y* é expresso por uma fração em *x*, na qual o numerador e o denominador se anulam sempre que *x* toma o valor de *a*, isto é, sempre que o ponto *P* coincide com o ponto *B*.

Uma vez que obtemos uma indeterminação do tipo 0/0, pergunta-se então qual deve ser o valor da aplicada *BD*?

Para resolver este problema L'Hôpital considera duas curvas auxiliares *ANB* e *COB* referenciadas ao eixo *AB*, e que sejam tais que a aplicada *PN* seja o numerador e a aplicada *PO* seja o denominador da aplicada *PM* que é expressa por uma fração; saliente-se que tanto *PN* quanto *PO* são curvas expressas em "*função*" de *x*. Assim considera $PM = \frac{ABxPN}{PO}$, multiplicando o numerador pela constante *AB* para preservar o princípio da homogeneidade. Note-se que esta constante podia ser qualquer uma.

Queremos conhecer *BD*. Vamos tomar a aplicada *bd* infinitamente próxima de *BD* e assim $bd = \frac{Abxbf}{bg}$, a qual não difere de *BD*, pelo Postulado I, ou seja, $BD = \frac{ABxbf}{bg}$ (também pelo Postulado I podemos considerar *Ab* = *AB*). Se conseguirmos relacionar, de algum modo, *bf* com *bg* temos o problema resolvido.

Quando *AP* tende para *AB* podemos observar (Figura 3.2.1) que *PN* tende para zero, passando-se o mesmo com *PO*. Com efeito, L'Hôpital coloca como hipótese estas condições. Pelo modo como foram construídas as curvas *ANB* e *COB* podemos afirmar que, quando *AP* tende para *Ab* verifica-se que *PN* tende para *bf* e que *PO* tende para *bg*. Assim *bf* e *bg* são as aplicadas em *b* relativamente às curvas *ANB* e *COB*, respectivamente.

De acordo com L'Hôpital, devemos considerar a aplicada *bd* infinitamente próxima da aplicada *BD*, pois quando *b* tende para *B* podemos considerar *bf* como a diferença das aplicadas em *B* e *b* relativamente à curva *ANB*. Do mesmo modo podemos dizer que a aplicada *bg* é a diferença entre as aplicadas em *B* e *b* relativamente à curva *COB*.

Dado que ao considerarmos as diferenças *bf* e *bg* em vez de *PN* e *PO*, respectivamente, já podemos efetuar a divisão $\frac{Abxbf}{bg}$ destas diferenças; pois elas não se anulam quando fizermos $x = a$, ou se quisermos $x = Ab$ o que é o mesmo que $x = AB$, à luz do postulado I. Encontramos deste modo, o valor da aplicada *bd* que é o mesmo que o valor da aplicada *BD* que desejávamos encontrar.

Podemos observar contra-senso em que entramos ao considerarmos, por um lado $bf \neq PN$, $bg \neq PO$ e por outro lado $bd = BD$. Ou seja, uma diferença tanto é zero como diferente de zero, conforme nos dá ou não jeito. Cauchy, como iremos ver no item 3.4, não admite que isto aconteça.

Antes de apresentarmos os dois exemplos dados por L'Hôpital de aplicação da "sua" regra, convém chamar a atenção para as quatro proposições e conseqüentes quatro regras dadas na primeira seção, onde é explicado como tomar as diferenças.

A regra I explica-nos como tomar a diferença de várias quantidades adicionadas ou subtraídas umas às outras; a regra II ensina-nos a tomar a diferença para quantidades multiplicadas; quanto à regra III esta dá-nos a diferença de quantidades divididas ou de frações; por fim, a regra IV refere-se à diferença para as potências de expoente perfeitos ou imperfeitos, isto é, inteiros ou fracionários.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le denominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{aax}}$ du numérateur, & on la divisera par la difference $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est à dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

Exemplo I

Seja $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ é claro que para $x = a$ o numerador e denominador da fração tornam-se cada um igual a zero. É porque tomamos a diferença $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{ax^2}}$ do numerador, que dividimos pela diferença do denominador $\frac{-3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$, depois de ter feito $x = a$, isto é, que dividimos $\frac{-4}{3}adx$ por $\frac{-3}{4}dx$, o que torna-se $\frac{16}{9}a$ o valor procurado de BD (L'HÔPITAL, 1696, p.146, tradução: Sebastiani Ferreira).

Na verdade L'Hôpital deriva o numerador e o denominador como fazemos hoje. Vejamos:

$$y' = \frac{\dfrac{2a^3 - 4x^3}{2(2a^3x - x^4)^{1/2}} - \dfrac{a^3}{3(a^2x)^{2/3}}}{-\dfrac{3ax^2}{4(ax^3)^{3/4}}} = \frac{\dfrac{(2a^3 - 4x^3)\ 3(a^2x)^{2/3} - 2a^3(2a^3x - x^4)^{1/2}}{2(2a^3x - x^4)^{1/2}\ 3(a^2x)^{2/3}}}{-\dfrac{3ax^2}{4(ax^3)^{3/4}}}$$

Fazendo $x = a$, temos:

$$\frac{\dfrac{-6a^3(a^3)^{2/3} + 2a^5}{6(a^4)^{1/2}\ 3(a^3)^{2/3}}}{-\dfrac{3a^3}{4(a^4)^{3/4}}} = \frac{\dfrac{8a^5}{6a^4}}{\dfrac{3}{4}} = \frac{16}{9}a$$

O gráfico[16] da figura 3.2.2 mostra o numerador (linha azul) e o denominador (linha vermelha) e o momento em que ambos se anulam no ponto de abscissa 3. A linha roxa é o gráfico da função *y*.

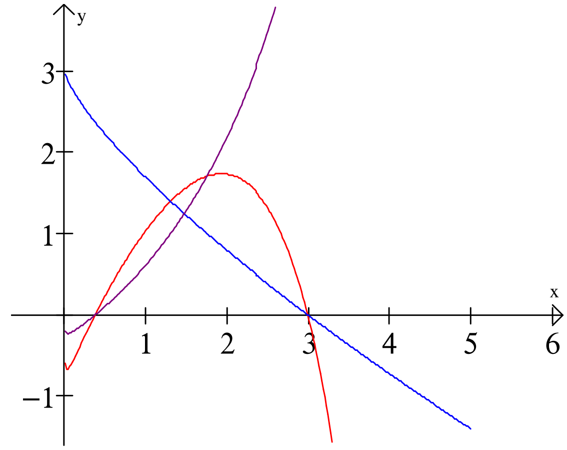


Figura 2.2.2
Gráfico do primeiro exemplo de L'Hôpital

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorſque $x = a$.

On pourroit réſoudre cet éxemple ſans avoir beſoin du calcul des différences, en cette ſorte.

Ayant ôté les incommenſurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant diviſé par $x - a$, ſe réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & ſubſtituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

Exemplo II

Seja $y = \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$. Usando a regra de L'Hôpital, encontramos $y = 2a$ quando $x = a$. Podemos resolver este exemplo sem necessitar do cálculo das diferenças, da seguinte maneira maneira: Tendo cuidado com os incomensuráveis, temos $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, que sendo dividido por $x - a$, se reduz a $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; e substituindo a por x, vem como antes $y = 2a$ (L'HÔPITAL, 1696, p.146, tradução: Sebastiani Ferreira).

Quando $x = a$, nos deparamos novamente com a indeterminação $\frac{0}{0}$, que L'Hôpital diz não precisar usar derivadas para resolver o problema. Para isso, basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador que obtemos:

$$y = \frac{(a^2 - ax)(a + \sqrt{ax})}{(a - \sqrt{ax})(a + \sqrt{ax})} \qquad =$$

[16] Neste exemplo foi considerado a = 3.

$$= \frac{a^3 + a^2\sqrt{ax} - a^2x - ax\sqrt{ax}}{a^2 - ax} =$$

$$= \frac{(a-x)(a^2 + \sqrt{ax})}{a(a-x)} =$$

$$= \frac{a^2 + a\sqrt{ax}}{a}$$

Fazendo $x = a$, temos:

$$y = \frac{a^2 + a^2}{a} = 2a$$

O gráfico na figura 3.2.3 mostra o numerador da fração em azul e o denominador em vermelho, fazendo-se $a = 2$.

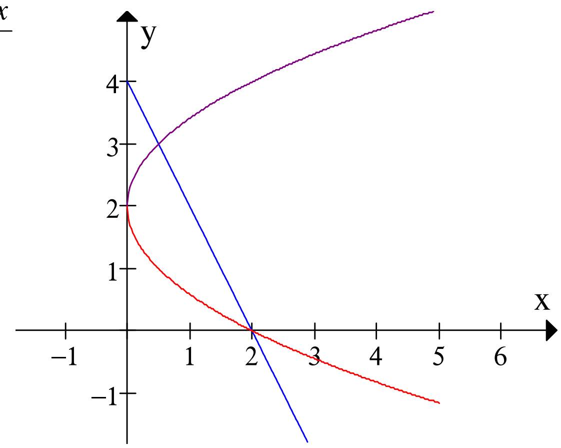


Figura 3.2.3
Gráfico do segundo exemplo de L'Hôpital

3.3 Controvérsia sobre a descoberta da regra de indeterminação 0/0 e a reivindicação de Bernoulli

Durante muito tempo acreditava-se que toda a obra no livro *Analyse* era realmente obras de L'Hôpital. Como já foi visto, L'Hôpital não estava totalmente seguro de que pudesse entender o novo cálculo apresentado por Leibniz, e por isso pediu ao jovem Johann Bernoulli que o ajudasse.

Em uma carta de 17 de março de 1694 L'Hôpital oferece a Johann um salário regular de 300 libras mensais, quantidade que tinha intenção de aumentar, para que Bernoulli o ajudasse no desenvolvimento dos novos conceitos do cálculo. Entretanto, Bernoulli deveria comunicar-lhe suas descobertas, e em particular, pediu que Bernoulli não comunicasse à Varignon e a nenhuma outra pessoa. Vejamos as exigências imposta por L'Hôpital a Bernoulli na carta:

> Darei a você com prazer uma pensão de trezentas libras, que começará a primeiro de janeiro do presente ano, e lhe enviarei duzentas libras pela primeira metade do ano devido às revistas que você me enviou e cento e cinqüenta libras pela segunda metade do ano, e assim seguirá no futuro. Eu prometo aumentar esta pensão sem demora, pois sei que é muito modesta, e farei isto tão logo meus negócios estiverem um pouco menos confusos. (…) Não tenho a insensatez de lhe pedir todo o seu tempo, mas solicitarei a você que me dê ocasionalmente algumas horas do seu

> tempo para trabalhar no que eu pedir – e também me comunicar de suas descobertas, com o pedido de não mencioná-las a outros. Eu também pediria para não enviar nem a M. Varignon nem a outros cópias das notas que você me permita ter, pois não me contentaria se elas as tornassem públicas. Envie-me sua resposta a tudo isso e acredite em mim, *Monsieur tout à vous*
>
> Le M. de L'Hôspital.
>
> (STRUIK, 1963, p. 258, tradução nossa)

De acordo com a carta, L'Hôpital propunha um acordo onde Bernoulli ficaria incumbido de:

1 – Trabalhar todos os problemas matemáticos enviados à ele por L'Hôpital;

2 – Mostrar a ele toda descoberta matemática, e;

3 – Não enviar a outros copias das notas enviadas à L'Hôpital.

A resposta de Bernoulli nunca foi encontrada, mas, por uma carta de 22 de julho de 1694, sabemos que ele aceitou a proposta. Para Bernoulli que ainda jovem recém casado e desprovido de recursos, esse acordo teria vindo em bom momento. Não se sabe até quando durou o acordo, mas segundo Struik (1963, p. 258), a situação financeira de Bernoulli melhorou, o mesmo não acontecendo com a de L'Hôpital.

Apesar de L'Hôpital pedir a Bernoulli que não fornecesse cópias das lições a ninguém, houve situações em que as notas de aulas foram inevitavelmente conhecidas por outros. De acordo com Abéllan (2004, p.43), durante as aulas em Paris, as lições de Johann eram copiadas pelo seu amigo Stahelin quando esteve em Oucques. Johann pede para seu amigo não fazer cópia das lições correspondente a aquela estada. Stahelin ignora e faz cópia das lições de Johann e repassa para Reyneau, que por sua vez para Montmort. Ele passa também para Bizance.

Varignon desejava conseguir uma cópia. Aquela era a razão pela qual na carta a Johann, L'Hôpital solicitou, não comunicar as descobertas a Varignon, que era amigos de ambos.

Diversas cartas entre Bernoulli e L'Hôpital foram recentemente publicadas, e de acordo com Sebastiani Ferreira (apud Struik, 1963), na carta de 22 de julho de 1694, Bernoulli mostra a regra do 0/0. A formulação é muito parecida com a que aparece no livro de L'Hôpital.

Em uma carta de L'Hôpital à Bernoulli de setembro de 1693 ele escreve:

> "Je vous avoue que jê me suis fort appliqué à résoudre l'équation $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ lorque $x = a$, car ne voyant point de jour y réussir puisque toutes lês solutions qui se présentent d'abourd ne sont pás exactes."

A solução desse problema aparece na citada carta de 22 de julho de 1694, numerada de carta número 28, onde Bernoulli demonstra a regra de indeterminação 0/0. Sua demonstração é também geométrica e ele dá dois exemplos: o primeiro é citado por L'Hôpital e o segundo é $y = \dfrac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}}$. No começo da carta Bernoulli diz:

> … você vai encontrar neste papel a solução desse enigma dado pelo Sr Viviani, mais ele é exatamente o mesmo problema que você teria me proposto em Paris. Finalmente tenho uma maneira de solucionar o problema das curvas descritas por estes pontos que significa resolver esse tipo de equações
>
> $$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \qquad \text{quando } x = a$$
>
> Fiquei contente, depois de ter tomado o cuidado de ler tudo para lhes explicar claramente (BERNOULLI, 1955, p. 232. Tradução nossa).

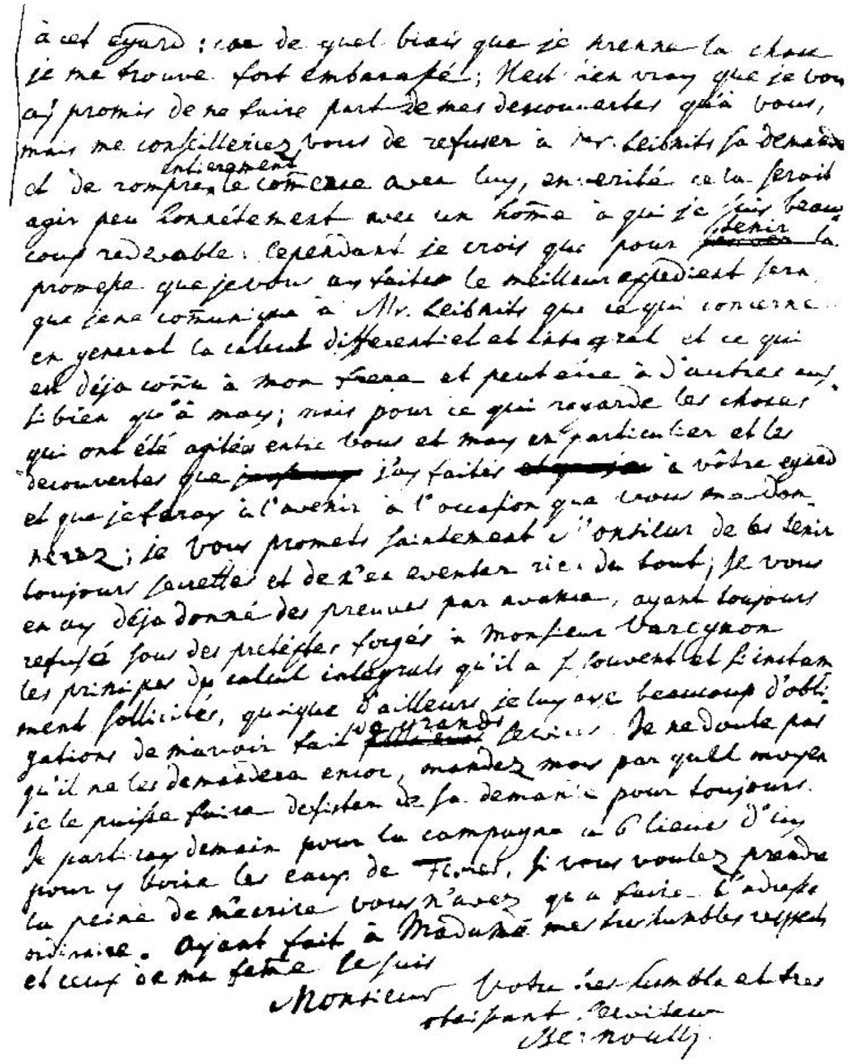
Nesta mesma carta, Bernoulli afirma que está fornecendo os resultados apenas a ele, L'Hôpital, e demonstra que está um tanto angustiado por não poder mostrar nada a Leibniz que foi quem de início muito o ajudou sobre os assuntos do cálculo, mas que continuaria a manter a promessa com relação as descobertas. Tudo isso é dito no trecho da carta[17] a seguir originalmente escrita por Bernoulli.

---

[17]Tradução da carta da página seguinte: estou assumindo uma coisa que me deixa muito envergonhado; prometi para senhor que não iria compartilhar minhas descobertas com ninguém, mas aconselho a falar sobre o nosso trato para o Sr Leibniz, se ele procurar. Na verdade seria muito desonesto mentir para um homem a quem eu sou fortemente grato. No entanto, penso que para manter a promessa que lhe fiz, o melhor seria falar a Leibniz que se trata do cálculo diferencial e integral geral, e é aquilo que meu irmão, e talvez outros já saibam; bem como ele, mas no que diz respeito às coisas que têm sido discutidas entre você e ele, em particular, as descobertas feitas por ele eu vou respeitar, no futuro, com sua permissão, eu vos prometo, excelentíssimo senhor, manter sempre em segredo. Já tenho dado provas anteriores, que sempre recusei prestar algum tipo de auxílio ao senhor Varignon sobre cálculo usando pretextos falsos, ele que tantas vezes me procurou, embora, na realidade, eu teria obrigações de ajudá-lo, pois ele tem prestado muitos serviços. Não tenha qualquer dúvida, que após me pedir segredo, eu mantive o seu pedido para sempre. Para obter outros trabalhos basta me escrever. Meu humildes cumprimentos e de minha esposa.

Senhor
Seu humilde servo
Bernoulli

Tradução nossa.



à cet egard; car de quel biais que je prenne la chose
je me trouve fort embarassé; Il est bien vray que je vous
ay promis de ne faire part de mes decouvertes qu'à vous,
mais me conseillerez vous de refuser à Mr. Leibnits sa demande
et de rompre entierement le commerce avec luy, en verité cela seroit
agir peu honnétement avec un homme à qui je suis beau
coup redevable. Cependant je crois que pour ~~garder~~ tenir la
promesse que je vous ay faites le meilleur expedient sera
que je ne communique à Mr. Leibnits que ce qui concerne
en general le calcul different et integral et ce qui
est déja connu à mon frere et peut être à d'autres aussi
si bien qu'à moy; mais pour ce qui regarde les choses
qui ont été agitées entre vous et moy en particulier et les
decouvertes que ~~[illegible]~~ j'ay faites ~~[illegible]~~ à vôtre egard
et que je feray à l'avenir à l'occasion que vous me donne
rez; je vous promets saintement Monsieur de les tenir
toujours secrette et de n'en eventer rien du tout; Je vous
en ay déja donné des preuves par avance, ayant toujours
refusé sous des pretestes forgés à Monsieur Varignon
les principes du calcul integrals qu'il a si souvent et si instam
ment sollicités, quoique d'ailleurs je luy aye beaucoup d'obli
gations de m'avoir fait de grands ~~[illegible]~~ services. Je ne doute pas
qu'il ne les demandera encor, mandez moy par quel moyen
je le puisse faire desister de sa demande pour toujours.
Je partiray demain pour la campagne a 6 lieues d'icy
pour y boire les eaux de [illegible], si vous voulez prendre
la peine de m'ecrire vous n'avez qu'a faire l'addresse
ordinaire. Ayant fait à Madame mes tres humbles respects
et ceux de ma femme je suis
Monsieur Votre tres humble et tres
obeissant serviteur
Bernoulli.

Car de quel biais que je prenne la chose je me trouve fort embarassé; Il est bien vray que je vous ay promis de ne faire part de mes decouvertes qu'à vous, mais me conseilleriez vous de refuser à Mr. Leibnits a demande et de rompre entierement le commerce avec luy? En verité cela seroit agir peu honnétement avec un homme à qui je suis beaucoup redevable. Cependant je crois que pour tenir La promesse que je vous ay faite, le meilleur expedient será que je ne communique à Mr Leibnits que ce qui concerne en general le calcul differentiel et integral et ce qui est deja connu à mon frere et peut-être à d'autres aussi bien qu'à moy; mais pour ce qui regarde les choses qui ont été agitées entre vous et moy en particulier et les decouvertes que j'ay faites à vôtre egard et que je feray à l'avenir à l'occasion que vous me donnerez; je vous promets saintemente, Monsieur, de les tenir toujours secrettes et de n'en eventer rien du tout; Je vous en ey déja donné des preuves par avance, ayant toujours refusé sous des pretestes forgés à Monsieur Varignon les príncipes du calcul integral qu'il a si souvent et si instamment sollicités, quoique d'ailleurs je luy aye beaucoup d'obligations de m'avoir fait de grands services. Je ne doute pás qu'il ne les

> demandera encor, mandez moy par quel moyen je Le puísse faire desister de sa demande pour toujours. Je partiray demanin pour la campagne à 6 lieues d'icy pour y boire les eaux de Fevres, si vous voulez prendre La peine de m'ecrire vous n'avez qu'à faire l'adresse ordinaire. Ayant fait à Madame mes tres humbles respects et ceux de ma femme je suis
>
> Monsieur
>
> Votre tres humble et tres
> abeissant serviteur
> Bernoulli

Passemos a mostrar a maneira como Bernoulli apresenta a regra de indeterminação 0/0.

Problema: Seja dada uma curva cuja natureza se exprime por uma fração igual a *y*, que em certo caso o numerador e o denominador iguais a zero, pergunta-se o valor, isto é a grandeza da aplicada *y*.

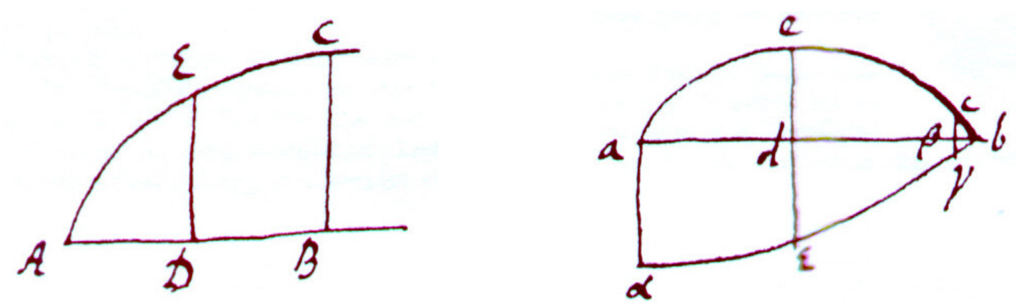


Figura 3.3.1
Gráfico feito por Bernoulli ilustrando a regra de indeterminação 0/0

A solução que Bernoulli apresenta é a seguinte:

> *Solução de Bernoulli*: Seja *AEC* uma curva dada, *AD* = *x*, *DE* = *y*, *AB* = *a* uma constante, tal que *BC* é uma fração com numerador e denominador nulos. Temos que achar o valor *BC*. Johann constrói sobre o eixo *abd*, duas curvas *aeb* e *αεb*, tal que, as abscissas *AD* e *ad* sejam iguais. As ordenadas *de* está em razão do numerador da fração geral que expressa *DE*. E as ordenadas *dε* está para a razão do denominador da fração geral. Johann diz que é claro que dividindo por *dε* temos o valor *DE*. Temos que encontrar o valor de *dε* quando *ab* = *AB*. Neste caso *de* e *dε* se anulam porque os dois termos da fração se anulam, e assim as duas curvas *aeb* e *αεb* se cortam no ponto *b*. Não se tem então que tomar as últimas diferenciais *βc*, *βγ*, que divididas pela outra marcará o valor procurado de *BC*. Isto fornece a regra geral: Para encontrar o valor da aplicada de uma dita curva neste caso, é necessário dividir a diferencial do numerador da fração geral pela diferencial do denominador, o quociente, depois de fazer *x* igual *a* suposta de *AB*, será a grandeza de *BC* (BERNOULLI, 1955, p.235. Tradução: Sebastiani Ferreira).

Traduzindo para a linguagem atual transcrevemos a regra para 0/0 feita por Bernoulli[18].

> (…) Se
>
> $$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$
>
> e ambas as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ passam pelo mesmo ponto P no eixo x, $OP = a$, então $f(a) = g(a) = 0$, e se tomarmos as coordenadas $x = a + h$, então a figura mostra imediatamente que
>
> $$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$
>
> é quase igual ao quociente de $h\ f'(a+h)$ por $h\ g'(a+h)$, onde h é pequeno. No limite encontramos nas palavras de Bernoulli:
> *"Para encontrar o valor da ordinária (appliquée) da curva dada:*
>
> $$\left[y = \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$
>
> *Neste caso é necessário dividir a diferencial (la différentielle) do numerador da fração geral pela diferencial do numerador"* (STRUIK, 1963, p.259. Tradução: Sebastiani Ferreira).

Como já foi dito, os exemplos de Bernoulli são quase os mesmo que L'Hôpital usou:

1) $y = \left[\dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \right]$ para $x = a$. Então $y = \dfrac{16}{9}a$. Este exemplo foi usado por ambos Bernoulli e L'Hôpital.

2) $y = \dfrac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$ para $x = a$. Então $y = 3a$. Este exemplo de Bernoulli foi mudado por L'Hôpital para:

$$y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$$

Para $x = a$. Então $y = 2a$.

A demonstração de Bernoulli também é geométrica e muito semelhante a que está no *Analyse*, inclusive um dos exemplos que L'Hôpital coloca em seu livro é o mesmo que Bernoulli usa em sua carta. Um outro, que é utilizado por ambos, apresenta também grande semelhança. Existem algumas diferenças pequenas entre os dois autores: em primeiro lugar o desenho que Bernoulli faz em sua carta; o acréscimo feito no desenho se dá pelo lado

[18] Veja Struik, 1963, p. 257 – 260.

esquerdo, isto é, negativamente, e o acréscimo dado por L'Hôpital se encontra à direita. Segundo Sebastiani, a diferença mais significativa, é que L'Hôpital usa na sua demonstração o conceito de fração como proporção, então ele necessita colocar a constante *AB* no numerador de sua fração, o que não ocorre com Bernoulli. Isto também se reflete nos exemplos. No segundo exemplo, Bernoulli tem no numerador $a\sqrt{ax}-xx$, enquanto que L'Hôpital escreve $aa - ax$. Ele tinha a necessidade da constante a na proporcionalidade.

Mas em essência as duas demonstrações e os exemplos são iguais, o que confirma o fato de que a Regra de L'Hôpital é devida a Johann Bernoulli, uma vez que o livro de L'Hôpital de 1696 e a carta de Johann Bernoulli é de 1694. Devido a esse fato, preferimos de agora em diante denominar a regra de indeterminação 0/0 com o nome de "*Regra de L'Hôpital-Bernoulli*".

Abellan encontra nas publicações de Paul Schafheitlin[19] das cartas entre Bernoulli e L'Hôpital indícios de que os trabalhos eram mesmo de Bernoulli.

> Em 1922 Paul Schafheitlin edita as *Lectiones de calculo differentialium* de Johann Bernoulli, e diz que são as lições de cálculo diferencial e integral que ofereceu a L'Hôpital entre 1691 a 1692. Comparando ambos os textos observa-se as coincidências como: A questão da origem das fontes[20] os exemplos e a forma de resolução. Em 1955, Otto Spiess publica a correspondência entre Johann Bernoulli e L'Hôpital, que como já vimos, quando Bernoulli abandona Paris e retorna a Basiléia no final de 1692, suas lições continuam. Estas cartas reforçam o fato de que as supostas contribuições originais de L'Hôpital eram problemas que haviam sido trabalhados juntos, Johann Bernoulli e L'Hôpital (ABÉLLAN, 2004, p. 43).

Na introdução de *Lectiones* de Johann Bernoulli aparecem três postulados, os quais constam também no livro *Analyse* de L'Hôpital:

> 1) Uma quantidade que é diminuída ou aumentada de uma quantidade infinitamente pequena, não é nem diminuída nem aumentada;
> 2) Cada linha curva está composta por uma infinidade de linhas retas, infinitamente pequenas;
> 3) Uma curva que está contida entre duas ordenadas, a diferença entre as abscissas é a parte infinitamente pequena de uma curva qualquer, é considerada como um paralelogramo (BERNOULLI, 1955, p.3).

Com relação ao item 1 acima, L'Hôpital havia escrito no postulado I do seu livro que: "uma quantidade que não é aumentada ou diminuída por outra quantidade infinitamente

---

[19] Doutor em matemática em Halle em 1885autor de várias publicações entre elas a equação diferencial de Bessel.

[20] Ambos os autores (L'Hôpital e Bernoulli) tinham acesso aos artigos de Leibniz.

menor que ela, pode ser considerava como permanecendo a mesma", isto é, uma constante. Comparando o item dois e três acima com o postulado II de L'Hôpital, podemos afirmar que tanto um quanto o outro considerava uma linha curva como sendo constituída por uma infinidade de segmentos, ou então, a curva pode ser comparada com um polígono que possui uma infinidade de lados.

Quando o livro *Analyse* foi publicado, Bernoulli logo reconheceu suas notas de aulas. Struik (1963, p.259) diz que: "A situação, portanto, ficou esclarecida. Quando o livro de L'Hôpital foi publicado, Bernoulli estava amarrado pela promessa de não revelar quais as partes do livro que eram dele. Só podia dizê-lo particularmente".

Quando Johann Bernoulli recebeu uma cópia do livro enviada por L'Hôpital no qual, no seu prefácio, constava uma pequena menção ao seu nome, ele agradeceu à L'Hôpital e prometeu retornar os comprimentos tão logo tivesse composto algo. Escreveu que o trabalho era admiravelmente bem apresentado, e prazeroso nos arranjos das proposições e pela inteligibilidade da exposição e ainda sugeriu a L'Hôpital que escreva um cálculo integral como seqüência do *Analyse*. Bernoulli, entretanto, observou com um aparente ciúme o grande sucesso do livro do seu protegido, e depois da morte de L'Hôpital a insatisfação de Johann I Bernoulli veio a desencadear.

Após a morte de L'Hôpital, em 1704, Bernoulli o acusa de haver plagiado vários de seus trabalhos e reivindica a autoria desses trabalhos que, por sua vez, segundo Bos (1985, p.5), "havia perdido a credibilidade em tais assuntos devido a desavenças públicas, principalmente com seu irmão Jacob". Esse reconhecimento só aconteceu em 1921, quando a família de Bernoulli permitiu publicar suas cartas que eram as correspondências entre Bernoulli e L'Hôpital. Os matemáticos perceberam que as grandes idéias do segundo foram dadas pelo primeiro. De acordo com Grattan-Guinness (1984, p.74), "as reivindicações de Johann Bernoulli sobre a maior parte dos conteúdos do *Analysis des Infiniment Petits* estavam plenamente justificadas quando se descobriu os manuscritos originais".

> " ... inúmeros resultados encontrados no famoso livro do marquês de St. Mesme (L'Hôpital) são meus. Ele não sabia muita coisa de cálculo e prontifiquei-me a ensinar-lhe. Recebi dinheiro por tal empreendimento, porém perdi a fama da autoria de várias técnicas ..." (RICIERI, 1992, p.28).

A Academia de Ciências ficou dividida com relação a produção do livro *Analysis des Infiniment Petits* e chegou até a formar uma comissão para julgar de quem era a autoria em questão.

Abéllan (2004, p.42) conta que, em 1698 Johann I Bernoulli escreveu para Leibniz queixando-se que o marquês havia plagiado suas lições de cálculo. Em 1704, depois da morte de L'Hôpital, Johann I escreveu também a Taylor, lamentando aqueles fatos. Em sua carta Johann diz; "*Senhores exponho em público que a regra que aparece no artigo 163, seção IX, do Analyse (conhecida a partir de então como "regra de L'Hôpital") na realidade é descoberta minha*".

De fato, L'Hôpital em nenhum momento afirma que a regra fosse de sua autoria. Em 1742 Johann publica suas lições sobre Cálculo Integral. Em uma nota afirma que o conteúdo de suas lições de cálculo diferencial que aparece no livro *Analyse* publicado por L'Hôpital era dele, o qual havia-lhe presenteado.

O estudo da História da Matemática possibilita tentarmos entender qual o papel que cada matemático desempenhou na teoria do Cálculo Diferencial e em quais situações os conceitos foram desenvolvidos. Somos capazes de observar a importância de cada um dentro da comunidade matemática. Podemos dizer que ambos os autores envolvidos nas controvérsias tiveram papéis importantes para o desenvolvimento e publicação dos conceitos fundamentais do cálculo. Devemos tudo isso a esses gênios da matemática, um por decifrar mais facilmente a matemática, outro pelo poder de saber fazer colocações claras de escrita.

Os fundamentos do cálculo envolviam conceitos e postulados que necessitavam ser esclarecidos. Uma quantidade que, como o primeiro postulado de L'Hôpital, aumenta ou diminui e mesmo assim permanece a mesma envolve uma contradição lógica que sugere que ela não pode existir. Segundo Bos (1985, p.15), como explicar o que é diferencial? Para L'Hôpital é uma quantidade infinitamente pequena a diferença entre dois valores de uma variável que estão infinitamente próximos um do outro. O que significa infinitamente pequeno? Significa que quantidades pequenas podem ser desprezadas com relação a quantidades finitas. Estas eram questões que ainda precisariam ser respondidas e durante muito tempo ficaram sem respostas.

Estas inconsistências renderam críticas de vários matemáticos como George Berkeley (1685 – 1753) e Leonhard Euler (1707 – 1783) que não conseguiram explicar as inconsistências existentes no cálculo diferencial. Depois de Berkeley alguns resultados positivos para entender o cálculo começaram a surgir. Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) matemático, cientista e filósofo francês, defendeu em 1754, o uso de limites para eliminar a inexatidão inerente às infinitesimais. A razão pelo qual o conceito de limite de d'Alembert não ter sido aceito de imediato é porque ele o considerava o limite de uma variável ao invés do valor de uma função quando a variável independente tende a um valor dado.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) especificou a relação entre *x* e *y* considerando *y* como uma função *f* de *x*, e então a derivada *f'* como uma função de *x* relacionada à função *f* pela propriedade de ser o coeficiente de *h* no desenvolvimento em série de f(x + h). Segundo ele, para cada função *f*, e para cada *x*, $f(x + h)$ poderia ser desenvolvida como uma série de potências em *h*:

$$f(x + h) = f(x) + \mathrm{A}h + \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h^3 + \ldots$$

O problema que parecia estar totalmente resolvido tinha a questão da convergência das séries, que pode ser discutido somente em termos de limites, e devemos ainda levar em consideração ainda que, não é verdade que podemos desenvolver toda as funções $f(x + h)$ como uma série de potências em *h*.

O problema sobre os fundamentos do cálculo ainda permanecia, mas com as discussões feitas por vários matemáticos e filósofos durante os cem anos depois de L'Hôpital, contribuíram para que Cauchy conseguisse justificar as inconsistência que envolviam as quantidades infinitamente pequenas.

3.4 A Regra Segundo Cauchy

O cálculo rigoroso de Cauchy não é de todo intuitivo como é quando trabalhamos com velocidades, distâncias, tangentes e áreas. Quando Newton e Leibniz inventaram o cálculo no século XVIII, eles não usaram épsilons e deltas para prová-lo. Isto demorou uns 150 anos para aparecer, o que deixa evidente que não foi tão simples desenvolver a sistematização dos conceitos fundamentais do cálculo com o rigor que aparece hoje. Segundo Grabiner (2005, p.185) não é de se admirar que um estudante moderno encontre as bases do cálculo rigoroso difícil.

Os matemáticos do século XVI, principalmente os precursores do Cálculo de Newton e Leibniz, tinham conhecimentos dos fundamentos do cálculo, mas não sabiam como justificar as inconsistências existentes, como por exemplo, justificar que quantidades infinitamente pequenas, chamadas de diferenciais, que primeiramente existiam e seriam diferentes de zero, logo depois devemos considerá-las iguais a zero. Esta falta de clareza em relação às diferenciais não foram esclarecidas nem mesmo por Newton e Leibniz que se tornou alvo de muitas críticas, principalmente pelo filósofo George Berkeley (1685 – 1753). As críticas não serão aqui analisadas por considerarmos fora do âmbito deste trabalho.

Após muitas controvérsias e muitas tentativas de solução no século XVIII, os fundamentos do cálculo foram firmemente fixados no século XIX pelo francês engenheiro Augustin Louis Cauchy (1789 – 1867) sustentado basicamente em:

- Considerar as variáveis como funções de uma variável independente;
- Introduzir a função derivada como um conceito fundamental do cálculo;
- Usar o conceito de limite bem explícito na definição da função derivada.

Figura 3.4.1
Cauchy (1789 - 1857)

Cauchy, matemático francês, nasceu em Paris em 21 de Agosto de 1789 e faleceu em Seine em 23 de Maio de 1857. Sobrevivendo de forma precária, Cauchy cresceu desnutrido e debilitado. Recebeu a sua primeira educação em casa por intermédio de seu pai, ingressando na escola aos treze anos passando a ganhar vários prêmios acadêmicos. Com dezesseis anos entrou na Escola Politécnica[21], de Paris, onde se graduou em engenharia civil. Seu primeiro trabalho foi como engenheiro militar na base naval de Cherbourg e, em 1813, voltou para Paris para dedicar-se a seus interesses científicos. Segundo Eves (2004) ganhou a admiração de Lagrange e Laplace. Aos 26 anos passou a lecionar na Escola Politécnica abandonando a carreira de engenheiro civil e, com 27 anos era considerado um dos matemáticos de maior prestígio da França.

Veremos que Cauchy expressa o conceito final de limite em termos de função ao invés de variáveis, e também, vamos poder acompanhar o conceito de derivada como um

[21] Famosa escola para engenheiros militares fundada em 1794, que segundo Bos (1985), durante muito tempo atraiu como professores os mais prestigiados matemáticos e cientistas franceses.

limite. Segundo Bos (1985), Cauchy foi além da combinação dos conceitos de função e limite nos fundamentos do cálculo.

Cauchy publicou 789 trabalhos, dentre eles encontramos o conceito de limite, os critérios de convergência das séries infinitas, teoremas de integração e as equações diferenciais de Cauchy-Riemann. Sua extensa obra introduziu e consolidou o conceito fundamental do rigor matemático. Vamos analisar aqui os resumos das lições[22] de Cauchy de suas aulas, ministradas na Escola Politécnica sobre cálculo diferencial (*Résumé des leçons données a L'école Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*).

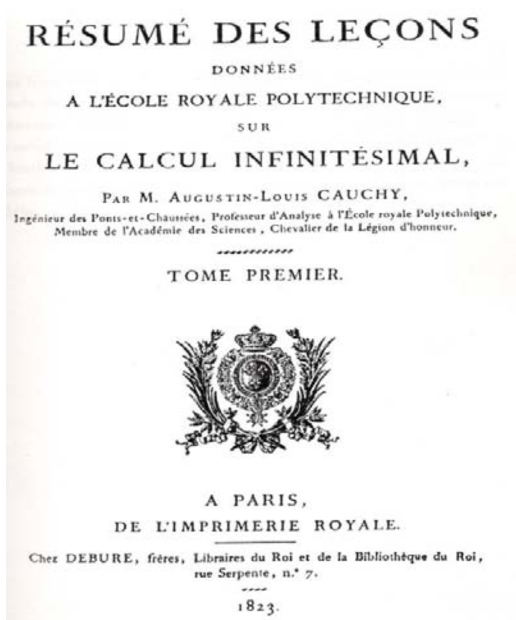

RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
TOME PREMIER.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1823.

Figura 3.4.2
Capa do livro - Lições de Cauchy

Primeira Lição (*Variáveis, Limites e Quantidades Infinitamente Pequenas*)

Nos resumos da sua primeira lição, Cauchy começa por definir *quantidade variável* como "aquela que podemos considerar como podendo receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros". Prossegue definindo constante e limite.

> "Chamamos *constante* a toda a quantidade que toma um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de tal forma que no final diferem dele tão pouco quanto queira, a este último valor chamamos *limite* de todos os outros" (CAUCHY, 1849, p.13).

---

[22] As traduções das lições de Cauchy são traduções nossa.

Afim de esclarecer a propriedade acima, e de transformar a matemática menos abstrata e mais compreensiva, Cauchy usa um exemplo de muitos séculos atrás, exemplo este usado principalmente por Arquimedes (287 – 212 a.C) em seu método de exaustão para provar área do círculo.

> A área do círculo é o limite para o qual convergem as áreas de todos os polígonos regulares inscritos, se o número de seus lados aumentarem cada vez mais e o ângulo entre o eixo x e o raio vetor, traçado do centro de uma hipérbole a um ponto na curva que se mover cada vez mais para longe de seu centro, forma com o eixo x um ângulo que tem como limite o ângulo entre esse mesmo eixo e a assíntota; … Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação *lim* escrita antes da variável. (CAUCHY, 1849, p.13)

Após Cauchy trabalhar alguns exemplos de aplicação, podemos ver em suas lições definição do infinitamente pequeno.

> "Quando os valores numéricos sucessivos de uma mesma variável decrescem indefinidamente de modo a ficarem abaixo de todo o número dado, a esta variável será dado o nome de *infinitamente pequeno*, ou *quantidade infinitamente pequena*. Uma variável desta espécie terá zero como limite" (CAUCHY, 1849, p.16).

Cauchy termina o resumo desta lição definindo infinito positivo e infinito negativo.

Segunda Lição (*Funções Continuas e Descontinuas. Representações Geométricas das funções Contínuas*)

Nesta lição, Cauchy começa a introduzir o conceito de função:

> "Quando quantidades variáveis estão de tal modo ligadas entre elas, que sendo dado o valor de uma delas, podemos calcular o valor de todas as outras, ou conseguimos exprimir as diversas quantidades variáveis à custa de uma delas, esta tomará o nome de *variável independente*; e as outras quantidades exprimidas por meio da variável independente, diremos que estão em *função* desta variável" (CAUCHY, 1849, p.17).

Segundo Bos (1985, p.35), "a palavra função foi usada pela primeira vez na matemática por Leibniz". Durante o decorrer da história, as funções tiveram significados (sentidos) diferentes. Leibniz chamava de funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva. Johann Bernoulli chamou de funções as expressões analíticas que envolviam somente uma quantidade variável, assim como Euler apresentou em seu livro *Introduction to Analysis of Infinits* (Introdução à Análise de Infinitos) de 1748. No volume I desse mesmo livro, Euler passou a chamar de função qualquer variável que dependa de outra de tal modo que, quando a segunda varia a primeira também varia.

Cauchy apenas diz que uma função é uma quantidade expressa por meio de uma outra quantidade independente. Podemos observar nesta definição, que não está explicito que ambas variam, assim poderemos considerar como função o exemplo dado por Dirichlet[23]:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x\ \acute{e}\ racional \\ 0, & se\ x\ \acute{e}\ irracional \end{cases}$$

Cauchy define o que são funções explicitas e implícitas e mostra alguns exemplos dessas funções.

Após a definição de variável independente e de função vejamos como Cauchy define acréscimo.

> "De seguida, no cálculo, tomamos a notação Δ para indicar os acréscimos simultâneos de duas variáveis que dependam uma da outra. Suponhamos que a variável y está expressa em função da variável x pela equação
>
> $$y = f(x) \tag{3.1}$$
>
> Δy, ou o acréscimo de y corresponde ao acréscimo Δx da variável x, e será determinado pela fórmula
>
> $$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \tag{3.2}$$
>
> Mais geralmente, se supusermos
>
> $$F(x, y) = 0 \tag{3.3}$$
>
> teremos
>
> $$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0 \tag{3.4}$$
>
> facilmente observamos que das equações (3.1) e (3.2) juntas, concluímos
>
> $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{3.5}$$
>
> Consideremos agora h e i duas quantidades distintas, a primeira finita, a segunda infinitamente pequena, e $\alpha = \frac{i}{h}$ a razão infinitamente pequena destas duas quantidades. Se atribuirmos a Δx o valor finito h, o valor Δy dado pela equação (3.5), será chamado a *diferença finita* da função $f(x)$, e será ordinariamente uma quantidade finita. Se pelo contrário atribuirmos a Δx um valor infinitamente pequeno, se fizermos, por exemplo, $\Delta x = i = \alpha h$ o valor de Δy será, $f(x + i) - f(x)$ ou $f(x + \alpha h) - f(x)$ e será ordinariamente uma quantidade infinitamente pequena (CAUCHY, 1849, p.18).

---

[23] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) foi um matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função.

De acordo com Bos (1985, p.47), para Cauchy, “uma quantidade infinitamente pequena não é zero, e nem uma quantidade constante menor do que qualquer quantidade finita, mais é uma *variável* que se aproxima de zero”. Utilizando-se dessa noção de quantidade infinitamente pequena, Cauchy define a continuidade das funções.

> Quando a função $f(x)$ admite um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença $f(x + i) - f(x)$ está *sempre entre dois limites* a menos de uma quantidade infinitamente pequena, dizemos que $f(x)$ é uma *função contínua* da variável x, dentro dos limites onde ela varia (CAUCHY, 1849, p.19).

Observamos que o termo *infinitamente pequeno* ainda é usado, coisa que não mais fazemos para definir continuidade de uma função. A expressão “*x está sempre entre dois limites*” significa que está no interior de um intervalo aberto. Como escrevemos hoje, x pertence ao intervalo aberto (a , b).

A próxima definição é sobre a vizinhança e sobre continuidade de uma função. Vejamos as colocações feitas por Cauchy sobre continuidade.

> “Conceba-se a construção da curva que tenha por equação, em coordenadas retangulares, $y = f(x)$. Se a função $f(x)$ é contínua entre os limites $x = x_0$ e $x = X$, a cada abscissa x compreendida entre esses limites corresponderá uma só ordenada; e mais, se x crescer de uma quantidade infinitamente pequena Δx, y crescerá uma quantidade infinitamente pequena Δy. Por conseguinte, a duas abscissas muito próximas x e $x + \Delta x$ corresponderão dois pontos muito próximos um do outro, pois a sua distância $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ será ela própria uma quantidade infinitamente pequena. Estas condições não podem ser satisfeitas quando os diferentes pontos não formam uma linha contínua entre os limites $x = x_0$ e $x = X$ (CAUCHY, 1849, p.20).

Observamos nesse parágrafo a diferença na definição de quantidades infinitamente pequena dada por L’Hôpital e a apresentada agora por Cauchy. Segundo L’Hôpital, as quantidades que diferissem apenas por uma quantidade infinitamente pequena poderiam ser consideradas como sendo iguais; enquanto Cauchy diz que serão pontos muito próximos um do outro, e que a distância entre eles será ainda assim uma quantidade infinitamente pequena.

Segundo Grabiner (2005, p.190) Cauchy deu essencialmente a definição de função continua, dizendo que a função $f(x)$ é continua num dado intervalo se para cada x no intervalo “o valor absoluto da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce infinitamente com α”.

Terceira Lição (*Derivadas das funções de uma só variável)*

Vejamos como Cauchy definiu derivada usando o conceito de limite combinado com o conceito de função.

> "Quando a função $y = f(x)$ for contínua entre dois limites dados da variável x, e sempre que esta variável tome um valor compreendido entre os dois limites considerados, um acréscimo infinitamente pequeno atribuído à variável produz um acréscimo infinitamente pequeno da função. Conseqüentemente, se tomarmos agora $\Delta x = i$ os dois termos da razão das diferenças
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \tag{3.6}$$
>
> serão duas quantidades infinitamente pequenas. Mas, estes dois termos da igualdade aproximam-se indefinidamente e simultaneamente do limite zero, ela própria pode convergir para outro limite, positivo ou negativo. Este limite quando existir tem um valor determinado para cada valor particular de x; mas variando com x. Este limite é uma nova função da variável x. A forma desta nova função que será o limite da razão $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar esta dependência, daremos à nova função o nome de *função derivada* e designamo-la com a ajuda de um apóstrofe, pela notação ou y' ou $f'(x)$" (CAUCHY, 1849, p.20).

Cauchy diz que para cada valor particular de x, a razão $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, que é uma quantidade infinitamente pequena dependerá de i, ou seja, esta razão é considerada agora como sendo uma função e não mais uma variável como eram tratadas pelos matemáticos anteriores. Quando a função se aproximar de um valor fixo bem definido i tende a se aproximar de zero.

Cauchy apresenta vários exemplos de funções e calcula suas derivadas aplicando os conceitos precedentes. Dentre as funções temos: $y = a + x$; $y = a - x$; $y = ax$, ...

Tomemos como exemplo a função $y = ax$. Então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i) - ax}{i} = \frac{ax + ai - ax}{i} = \frac{ai}{i} = a$$

Como a razão é constante, o limite quando i tende a 0 é a.

O autor termina a terceira lição expondo alguns exemplos de aplicação e apresentando a derivada de funções compostas.

Quarta Lição (*Diferenciais das funções de uma só variável)*

Cauchy utiliza uma notação que é utilizada até hoje. Usava a notação $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto que y é a variável dependente. O símbolo $\frac{dy}{dx}$, introduzido por Leibniz, é simplesmente outra maneira de expressar $f\,'(x)$ e não era encarado como um quociente.

> "Consideremos sempre $y = f(x)$ uma função de variável independente x, i uma quantidade infinitamente pequena e h uma quantidade finita. Se considerarmos $i = \alpha h$, α será agora uma quantidade infinitamente pequena e obtemos a identidade
>
> $$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$
>
> de onde concluiremos que
>
> $$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h \qquad (3.7)$$
>
> O limite para o qual converge o primeiro membro da equação (3.7) sempre que a variável α se aproxima indefinidamente de zero, a quantidade h ficando constante, será chamada d*iferencial* da função y = f(x). Denotaremos o diferencial pela letra "*d*" donde ficará:
>
> $$dy \text{ ou } df(x).$$
>
> É fácil de obter o seu valor sempre que se conheça o valor da função derivada y' ou $f\,'(x)$. Com efeito, tomando os limites dos dois membros da equação (3.7) obtemos, em geral,
>
> $$df(x) = hf\,'(x) \qquad (3.8)$$
>
> No caso particular em que $f(x) = x$, a equação (3.8) reduzir-se-á a
>
> $$dx = h \qquad (3.9)$$
>
> Assim o diferencial da variável independente x não é outra coisa senão a constante finita h. Se a substituirmos na equação (3.8) virá
>
> $$df(x) = f\,'(x)\,dx \qquad (3.10)$$
>
> ou, o que é o mesmo,
>
> $$dy = y'\,dx \qquad (3.11)$$
>
> Resulta desta última igualdade que a derivada $y' = f\,'(x)$ de uma função qualquer $y = f(x)$ é precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$, isto é o mesmo que dizer que a razão entre o diferencial da função e o da variável ou, se quisermos, o coeficiente por que é necessário multiplicar o segundo diferencial para obter o primeiro. É por esta razão que damos algumas vezes à função derivada o nome de *coeficiente diferencial* (CAUCHY, 1849, p.27).

Segundo Cauchy "*Diferenciar* uma função é encontrar a sua diferencial. A operação pela qual diferenciamos é chamada de *diferenciação*."

Facilmente vemos que aplicando a fórmula (3.9) podemos obter os diferenciais das funções para as quais conhecemos as derivadas. Tomando o único exemplo por nós apresentado temos que $d(a + x) = dx$.

Após a apresentação de mais exemplos Cauchy chegava, no final desta lição, naturalmente, à conclusão de que "***a razão entre as diferenças infinitamente pequenas de duas funções da variável x terá por limite a razão dos seus diferenciais ou das suas derivadas***".

Com efeito, "suponhamos $y = f(x)$, e $\Delta x = i = \alpha h$, o segundo membro da equação (3.7) terá por limite dy, que poderá ser apresentado na forma

$$\frac{\Delta y}{\alpha} = dy + \beta$$

designando β uma quantidade infinitamente pequena, concluímos que

$$\Delta y = \alpha(dy + \beta)$$

Seja z uma segunda função da variável x. Teremos na mesma

$$\Delta z = \alpha(dz + \gamma)$$

designando γ ainda uma quantidade infinitamente pequena. Teremos de seguida

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz + \gamma}{dz + \beta}$$

e quando passamos aos limites teremos,

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'\,dx}{y'\,dx} = \frac{z'}{y'},$$

Assim *a razão entre as diferenças infinitamente pequenas de duas funções da variável x terá por limite a razão dos seus diferenciais ou das suas derivadas*".

A *quinta lição* trata da soma de funções. *Diferenciais da soma de várias funções e a soma de suas diferenciais. Conseqüências destes princípios. Diferenciais de funções imaginárias*[24].

Estamos agora em condições de ver como Cauchy resolve, no fim da sua sexta lição o problema proposto pela proposição I na nona secção do livro *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des ligne courbes* de L'Hospital.

[24] Diferenciais com números complexos. Cauchy na página 39 do Résumé des Leçons (quinta lição), mostra como calcular o limite de expressões do tipo $s = u + p\sqrt{-1}$

SIXIÈME LEÇON.

USAGE DES DIFFÉRENTIELLES ET DES FONCTIONS DÉRIVÉES DANS LA SOLUTION DE PLUSIEURS PROBLÈMES. MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. VALEURS DES FRACTIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{0}{0}$.

IV[25]

PROBLÈME IV. — *On demande la véritable valeur d'une fraction dont les deux termes sont des fonctions de la variable x, dans le cas où l'on attribue à cette variable une valeur particulière, pour laquelle la fraction se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.*

Solution. — Soit $s = \frac{z}{y}$ la fraction proposée, y et z désignant deux fonctions de la variable x, et supposons que la valeur particulière

(1) Nous indiquons ici les points à l'aide de leurs coordonnées renfermées entre deux parenthèses, ce que nous ferons toujours par la suite. Souvent aussi, nous indiquerons les courbes ou surfaces courbes par leurs équations.

$x = x_0$ réduise cette fraction à la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire qu'elle fasse évanouir y et z. Si l'on représente par Δx, Δy, Δz les accroissements infiniment petits et simultanés des trois variables x, y, z, on aura, pour une valeur quelconque de x,

$$s = \frac{z}{y} = \lim \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y}$$

et, pour la valeur particulière $x = x_0$,

$$s = \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}. \qquad (3)$$

Ainsi la valeur cherchée de la fraction s ou $\frac{z}{y}$ coïncidera généralement avec celle du rapport $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{z'}{y'}$.

Exemples. — On aura, pour $x = 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1, \qquad \frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1;$$

[25]Este problema pode ser encontrado em Cauchy, 1849, p. 40.

Sexta Lição (*Uso dos diferenciais e das funções derivadas na solução de problemas. Máximos e mínimos de funções de uma só variável. Valores das frações que se apresentam na forma* $\frac{0}{0}$).

Problema IV – Queremos o verdadeiro valor de uma fração em que os seus dois termos sejam funções da variável x, no caso de se atribuir a esta variável um valor particular, para o qual a fração se apresenta na forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Solução – Seja $s = \frac{z}{y}$ a fração proposta, y e z designam duas funções da variável x, e suponhamos que o valor particular $x = x_0$, reduz esta fração à forma $\frac{0}{0}$, isto é o mesmo que dizer que ele faz esvaecer y e z. Se representarmos por Δx, Δy e Δz os acréscimos infinitamente pequenos e simultâneos das três variáveis x, y e z, teremos para um valor qualquer de x

$$s = \frac{z}{y} = \lim \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y}$$

e, para o valor particular $x = x_0$,

$$s = \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}$$

Assim o valor procurado da fração s ou $\frac{z}{y}$ coincidirá geralmente com o valor da razão $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{z'}{y'}$."

Fazendo uma leitura atenta de todas as definições que Cauchy foi dando ao longo das seis primeiras lições de Cálculo Diferencial ministradas na École Polytechnique podemos encontrar o Teorema do Valor Médio[26] que hoje é usado para demonstrar, de forma rigorosa, a Regra de L'Hôpital. Estas lições que foram aqui traduzidas, poderão ser encontrada na obra intitulada "Résumé des Leçon A L'École Polytechnique sur Le Calcul Infinitésimal" datada de 1849. Encontramos "*demonstrada*" a regra de L'Hôpital por Cauchy.

[26] O Teorema do Valor Médio, está de forma implícita no final da quarta lição: "a razão entre as diferenças infinitamente pequena de duas funções da variável x terá por limite a razão dos seus diferenciais ou das suas derivadas".

4. Publicações da Regra de L'Hôpital

"A Matemática faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida".

Jacob Bernoulli

A partir do momento que L'Hôpital publica seu livro de cálculo "*Analysis des Infiniment Petits Pour l'intelligence des lignes courbes*" a regra de indeterminação 0/0 ficou conhecida como "*Regra de L'Hôpital*". Um fato interessante é que alguns livros publicados por matemáticos franceses não a denominam com esse nome, mais sim como um estudo de indeterminações da forma 0/0 como veremos adiante.

4.1 Publicação com o nome de L'Hôpital

A maioria dos livros de cálculo se referém a regra do cálculo de limites, quando ocorre a indeterminação 0/0, como sendo a *Regra de L'Hôpital*. Hoje sabemos que o verdadeiro criador de tal regra foi Johann Bernoulli, porém, o responsável pela divulgação de tal regra foi sem dúvida L'Hôpital, que através do seu livro *Analyse*, a tornou de domínio público.

Struik (1963, p.259) afirma que "*não podemos esperar que a regra leve o nome de Bernoulli"*. Isso se deve a vários motivos. Primeiro, porque já há várias regras e teoremas com o nome Bernoulli. Outro argumento que Struik expõe, e o que ele considera como um argumento de peso é que: "(…) *se começarmos a mudar os nomes de regras e teoremas estritamente segundo as leis da prioridade, logo chegaremos à conclusão desanimadora de que nossa ciência perderá muitas de suas expressões familiares"*.

Muitos outros teoremas e regras que hoje nos são familiares através da nomenclatura que receberam, também não tiveram sua origem naqueles sábios, cujos nomes foram associados a tais regras e teoremas. É o caso do Teorema de Pitágoras, que era conhecido mil anos antes pelos babilônios. As equações de Cauchy-Riemann eram conhecidas por D'Alembert e Euler. O teorema de Taylor seria de Gregory. Struik dá ainda mais exemplos de nomes que não foram autores diretos de trabalhos como: As equações de John Pell que já eram conhecidas muito antes pelos indianos; As séries de Fourier foram usadas por Euler e Daniel Bernoulli. O triângulo de Pascal era conhecido pelo matemático chinês Yang Hui e provavelmente muito mais antigo; e seu contemporâneo Chin Chiu-shao trabalhou como o método de Horner da teoria das equações algébricas como se fosse um instrumento antigo, etc.

Muitos países europeus assinaram na cidade de Bolonha um acordo denominado *Tratado de Bolonha,* firmado em 1999 entre 29 países europeus, em que se comprometem a seguir uma formação de ensino superior semelhante em todos os países. Dentre as propostas especificas de cada disciplina ficou acordado que os conteúdos correspondentes a nosso Cálculo Diferencial e Integral I, que os europeus denomina-o de Análise I, existe no programa mínimo os seguintes tópicos:

1. Sucessões e funções

   Números Naturais, Racionais, Reais e desigualdades numéricas. Sucessões, funções, gráficos e operações algébricas.

2. A noção de limite

   Propriedades algébricas, de monotonia e de enquadramento. Exemplos de limites de funções e de sucessões. A série geométrica.

3. Funções contínuas e suas propriedades

   Funções compostas, monótonas e inversas. Teoremas de Bolzano e de Weierstrass (sem a demonstração rigorosa).

4. Derivação

   Definição, propriedades e significações geométrica e física. Regras de derivação das funções composta e inversa.

5. **Teoremas básicos do cálculo diferencial**

   Teorema de Rolle, do valor médio (Lagrange), regras de L'Hôpital e de Cauchy. Aplicações (grifo nosso).

6. Derivações de ordem superior e desenvolvimentos de Taylor

   Máximos e mínimos, concavidade e inflexões, gráficos e assíntotas.

7. Primitivação e integrais indefinidos de funções elementares e compostas

   Regras e propriedades. Integração por partes e por substituição.

8. Integral definida

   Propriedades elementares. O teorema fundamental do cálculo.

9. Aplicações do cálculo integral
   Cálculo de áreas, de volumes e de centros de massa; equações diferenciais imediatas e definições das funções elementares: logaritmo e exponencial, funções trigonométricas.

Chamamos a atenção para alguns fatos importantes referentes ao item 5 dos tópicos. Primeiro quanto ao nome do Teorema do Valor Médio que é creditado a Lagrange e não a Cauchy como é apresentado na maioria dos livros. Segundo, que é a mais importante, a adoção da regra com o nome de L'Hôpital. Isso enfatiza o fato do que vem primeiro, e é aceito, torna-se difícil uma mudança, pois, sabemos que o 0/0 foi disseminando para o mundo como criação do Marquês de L'Hôpital, apesar de ter sido provado que tal regra não era dele. De acordo com Struik (1963, p. 259), o melhor mesmo é que deixemos o marquês com sua regra primorosa, pois ele pagou por ela e tornou-a de domínio público.

O livro mais antigo que trata do assunto encontrado na biblioteca da UNICAMP é o de *Édouard Goursat* publicação Dover de 1904 em Nova York. Na página 10 encontra-se a Regra de L'Hôpital denominando-a dessa forma, juntamente com a generalização do Teorema do Valor Médio que o autor expõe usando os conceitos de matrizes. Em nossa pesquisa não foram encontrados a denominação com o nome de ambos os autores *"Regra de L'Hôpital – Bernoulli"* e também não foram encontrados registros somente com o nome de *Bernoulli*.

Diante da análise feita com relação ao nome da regra, achamos melhor concordar com Struik quando ele fala para deixarmos com o nome de L'Hôpital. Afinal, diz Struik, *"ele pagou por ela e tornou-a de domínio público*, *logo merece alguma fama"*. Seu livro teve muitas contribuições próprias e foi o primeiro a ser publicado e teve qualidade suficiente para manter em posição de destaque por mais de meio século.

4.2 Apresentação da Regra por livros estrangeiros e brasileiros

O objetivo desse tópico é discutir como a regra de L'Hôpital é apresentada em livros estrangeiros e brasileiros, quais são os enfoques que esses livros dão sobre o assunto. Vamos analisar também porque alguns livros de cálculo não mencionam tal regra.

Um fato importante e interessante é que alguns livros franceses, como por exemplo, os resumos das aulas de Cauchy, não denominam a regra de L'Hôpital por esse nome e apenas como regra de indeterminação 0/0.

Vamos tentar entender o porquê que o livro de Matemática Aplicada do grupo de Berkeley[27] não faz referências da Regra de L'Hôpital. Este livro defende que todo assunto deve ser apresentado geometricamente, numericamente e algebricamente que os autores chamam de *Regra de Três.* Segundo os autores, o conceito de derivada está exposto de acordo com a citada Regra de Três e tem por objetivo apresentar uma definição prática da derivada por limite e de sua interpretação como uma taxa de variação instantânea.

Sempre que necessário, o livro fornece justificativas informais introduzindo argumentações numéricas e gráficas sempre que apropriado, e, o uso da tecnologia gráfica para observar propriedades básicas e o cálculo para confirmá-las.

O conceito de limite é introduzido como aproximações sucessivas de um móvel em cada instante de tempo. Então, essas aproximações são tomadas como a velocidade média ao longo de intervalos de tempo cada vez menores. Basicamente, constrói-se uma tabela com valores de h se aproximando de zero, ou seja, para intervalos de tempo cada vez menores da função tempo; assim o limite é calculado fazendo estimativas numéricas.

O livro de Hughes (um dos autores do livro de matemática aplicada do grupo de Berkeley) faz a explanação do conceito de limite como sendo uma taxa de variação para qualquer função, isto segundo os próprios autores do livro, apenas escondem as dificuldades com a noção de limite. Analisando mais de perto este conceito, os autores escrevem:

> A expressão
> $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
> é chamada de razão incremental da f. Ela mede a taxa de variação média da f ao longo do intervalo $a \leq x \leq a + h$. À medida que o intervalo encolhe, isto é, que h fica menor, estas taxas de variação média podem aproximar de um determinado número. Se existir um número L, digamos, tal que possamos fazer com que a taxa de variação média fique tão próxima de L quanto desejarmos bastando para isso escolher um intervalo pequeno o suficiente, então dizemos que L é o limite das razões incrementais quando h se aproxima de zero. Em símbolos,
> $$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
> O que estamos afirmando aqui é que, à medida que h fica menor, as razões incrementais se aproximam do número L (HUGHES, 1997, p. 134).

O livro evita qualquer menção quando h é zero, pois segundo os autores , quando h é zero, a razão incremental é igual a 0/0, e que não tem nenhum sentido e que, o limite foi introduzindo justamente para evitar tal problema. Poderíamos perguntar como fazemos para

[27] Este livro consta nas referências como: HUGHES, D. et al. Cálculo – Volume 1.

calcular, por exemplo, $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta}{\theta}$? A resposta dada no livro é que poderíamos tomar valores de θ próximos de zero, por exemplo, $\theta = 0{,}01$; $\theta = 0{,}001$; $\theta = 0{,}0001$, e assim por diante que chegaríamos ao resultado do limite, que é 1. Os autores enfatizam que essa é a *única maneira* de investigar essa situação, pois se tomarmos $\theta = 0$ a expressão fica indeterminada.

O Tratamento feito pelos autores do livro elimina qualquer menção sobre a regra do cálculo da indeterminação 0/0, elaborado por Bernoulli e publicada por L'Hôpital. Isso se dá devido ao tratamento aplicado dos conceitos envolvidos no livro.

O livro de Sonnet de 1909, a exemplo do livro de Hughes, começa com a definição de derivada, mas ao contrário do livro anterior ele traz a discussão sobre a indeterminação 0/0, mais que como muitos livros franceses ele não denomina como sendo a regra de L'Hôpital. Assim como fez Cauchy na sua segunda lição (item 3), Sonnet define a derivada como sendo uma taxa de variação em x e y:

> Quando duas variáveis x e y estão relacionadas, tal que
>
> $$y = f(x)$$
>
> e se é dado a x um acréscimo Δx, que resulte para y um acréscimo correspondente, positivo ou negativo, Δy; obtemos
>
> $$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
>
> donde por subtração
>
> $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$
>
> Dividindo os dois membros da equação acima por Δx, vem:
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
>
> Se fizermos Δx tender para zero, e Δy tender também para zero, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se tornará uma forma indeterminada (SONNET, 1909, p. 4 e 5).

As indeterminações são tratadas na página 74 do livro Sonnet com o título de "*verdadeiro valor de expressões que tomam a forma* $\frac{0}{0}$". O autor utiliza o Binômio de Newton par fazer a demonstração da regra de L'Hôpital-Bernoulli.

O livro[28] de Omar Catunda[29] é bem enfático na aplicação da Regra de L'Hôpital-Bernoulli. Ele enuncia o teorema na página 219 do seu livro e afirma que o teorema constitui a chamada "*regra de l'Hospital*", pela qual, para achar o limite do quociente de dois *infinitésimos*, procura-se o limite do quociente de suas derivadas. Um fato que devemos considerar é o tratamento dado ao conceito de limite como sendo infinitésimos. Catunda toma como exemplo para aplicar a regra de L'Hôpital-Bernoulli a seguinte função

$$y = \frac{sen(1-\cos x)}{\left[\log(1+3x)\right]^2}$$

e trata como quociente de dois infinitésimos, para x $\to$ 0. A demonstração da regra é feita utilizando o Teorema de Cauchy e finaliza com outro item nomeado como "*outros limites que se calculam pela regra de l'hospital*"[30].

O livro de Louis Leithold que é referência em quase todas as ementas dos cursos de cálculo oferecidos para os cursos da área de exatas no Brasil. Não só pelas mais de 1180 páginas de seus Volumes 1 e 2, mas por se tratar, de fato, de um dos livros mais ricos em exemplos e demonstrações de resultados. Aparentemente, o livro não faz questão de referenciar o nome L'Hôpital quando trata do assunto de indeterminação, mencionando no seu índice apenas como indeterminação da forma 0/0. De forma discreta, o nome de L'Hôpital aparece no meio do texto (Leithold, p. 652) citando a regra como um método para calcular formas indeterminadas do tipo 0/0. O autor nomeia o método como: "*regra de L'Hôpital*".

O livro do professor Hamilton Guidorizzi é citado como referência em muitos programas das disciplinas de cálculo oferecidas para os cursos da área de ciências exatas no Brasil, especialmente ao cálculo ministrado aos alunos de matemática e engenharia. A coleção é composta por cinco volumes, distribuídos em mais de 2000 páginas. Cada volume é acompanhado de manuais que contém as soluções de grande parte dos exercícios, especialmente dos mais "complexos". No Capítulo 9 do volume 1 é trabalhado o *estudo da variação das funções* no qual podemos destacar o tópico que ele denomina "*Regra de L'Hospital*".

[28] Este livro é baseado nas aulas de Omar Catunda na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

[29] Omar Catunda (1906-1986), merece destaque pela sua contribuição para a formação de diversas gerações de matemáticos e físicos; como também sua atuação pedagógica relativa ao ensino básico, tornado-se um dos precursores da educação matemática brasileira.

[30] Esta é a maneira que aparece escrito o nome de L'Hôpital no livro de Omar Catunda que como já mencionamos, a forma de escrita varia de autor para autor.

Este livro foi escrito na forma de curso pelo professor da McMaster University (EUA) James Stewart. O livro foi traduzido da quarta edição americana e é dirigido a professores e estudantes universitários da área de exatas fazendo parte da bibliografia de grande parte dos cursos de exatas do país, principalmente dos cursos de Licenciatura em Matemática. O capítulo quatro trata das *Aplicações da Diferencial*, e o item 4.4 aborda as formas indeterminadas e a regra de L'Hôpital, distribuídos em oito páginas. Neste livro, o autor diz no prefácio que pretende transmitir aos estudantes um sentido de utilidade do cálculo e desenvolver competências técnicas. A compreensão dos conceitos é enfatizada em três vertentes: Visualização, Experimentação Numérica e Experimentação Gráfica. No exemplo introdutório que Stewart mostra, fica evidente que a regra de L'Hôpital é uma ferramenta imprescindível para calcular limites que é muito usado na análise do comportamento de funções.

O livro de James Stewart prioriza a visualização gráfica dos teoremas e os fatos históricos que são apresentados. Ao lado da definição da regra de L'Hôpital-Bernoulli é citado os fatos históricos justificando o porquê da regra ter esse nome, e também menciona as controvérsias sobre quem realmente descobriu tal regra. O exercício 75 do livro traz o primeiro exemplo usado por L'Hôpital e Bernoulli, o que mostra que o autor está comprometido em mostrar os fatos históricos. Para dar maior sustentabilidade e veracidade à regra, o aspecto visual gráfico é enfatizado, além disso, é tecido comentários algébricos justificando o gráfico produzido assim como faremos no próximo item quando fala-se da demonstração não Standard.

A Regra de L'Hôpital na maioria dos livros encontra-se inserida no item sobre o estudo de comportamento das funções. O professor Geraldo Ávila não foge a esse preceito e insere a apresentação sobre o assunto nesse item. Começa enfatizando que precisará do TVM (Teorema do Valor Médio) como noções preliminares para o estudo da Regra, que ele chama de "*Regra de L'Hôpital*".

Na página 218, ele expõe o TVM de maneira bastante clara e objetiva, fazendo uso não só da mostração algébrica mas também utilizando a representação geométrica.

Segundo Ávila,

> "Uma boa didática recomenda que a intuição geométrica seja utilizada sempre, não somente para motivar os resultados, mas também para justificá-los. Muitas vezes vale mais, no aprendizado, uma boa justificação geométrica de que uma demonstração formal" (ÁVILA, 1994, prefácio).

Ângelo (1997, p. 122) diz que, as aplicações e discussões das demonstrações da Regra de L'Hôpital terá uma justificativa de sua validade mais plausível e com mais sentido se não forem baseadas somente na utilização de ε's e δ's. Segundo Ângelo, o problema é que muitos professores, pela própria inexperiência, insegurança ou desconhecimento de outras forma de abordar determinado conteúdo, preferem se firmar sobre o conhecimento já consolidado que é veiculado pelos livros textos.

Fazendo-se uma pequena comparação entre os livros analisados, podemos perceber suas diferenças. Os livros textos variam de autor para autor. O professor pode optar por aquele que julga que melhor o fará cumprir os objetivos de seu curso.

5. Demonstração da Regra de L'Hôpital

As demonstrações constituem parte indispensável do conhecimento matemático. São muito valiosas por proporcionarem novas compreensões, conduzirem a novas descobertas ou ajudarem à sistematização.

5.1 Utilizando o Teorema do Valor Médio de Cauchy[31]

Para chegar ao Teorema do Valor Médio precisamos primeiro do Teorema de Rolle que satisfaz as seguintes hipóteses:

i) f é continua no intervalo fechado [a , b];
ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a , b);
iii) $f(a) = f(b)$

Então existe um número c em (a , b) tal que $f'(c) = 0$.

O Teorema do Valor Médio satisfaz as seguintes hipóteses:

i) f é continua no intervalo fechado [a , b];
ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a , b);

Então existe um número c em (a , b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (5.1.1)$$

A interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio é dada na figura abaixo.

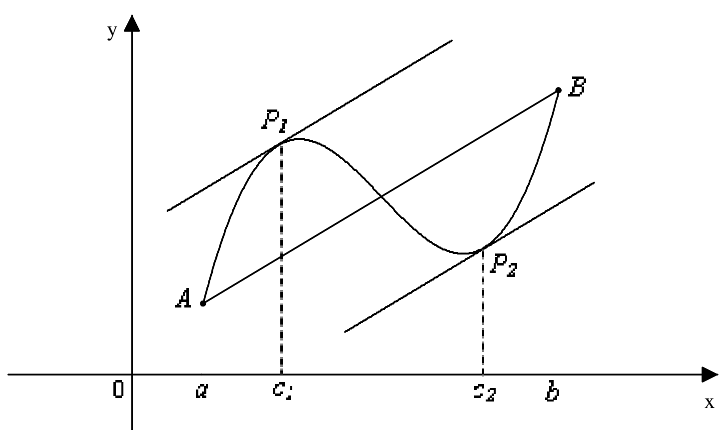


Figura 5.1. 1
Interpretação Geométrica do Teorema do Valor Médio

[31] Essa demonstração é feita fazendo-se uma junção da forma como os autores Geraldo Ávila e Louis Leithold o fizeram.

A figura 5.1.1 mostra os pontos *A*(a , $f(a)$) e *B*(b , $f(b)$) sobre o gráfico da função diferenciável. A inclinação da reta secante *AB* é

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que é a mesma expressão mostrada no lado direito da equação 5.1.1. Uma vez que $f\,'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto (c , $f(c)$), o Teorema do Valor Médio na forma dada pela equação 5.1.1 diz que há no mínimo um ponto *P*(c , $f(c)$) sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante AB.

Aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função *F* definida como a diferença entre *f* e a função cujo gráfico é a reta secante *AB*.

Fazendo uso da interpretação geométrica, Geraldo Ávila esclarece o aparecimento da equação $F(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a)$ utilizada na demonstração do TVM. Alguns livros apenas fazem uso dessa equação sem justificá-la. Portanto, um ponto positivo no livro é a justificativa através de figuras geométricas, que desse modo, dá uma consistência considerável ao assunto. Veja a interpretação geométrica da equação na figura 5.1.2.

$F(x)$ está entre as ordenadas $f(x)$ da curva e Y da reta secante AB, para um mesmo valor x da abscissa. A secante AB da figura 5.1.1 é a reta que passa pelo ponto $A(a, f(a))$ com declive $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; logo sua equação é dada por

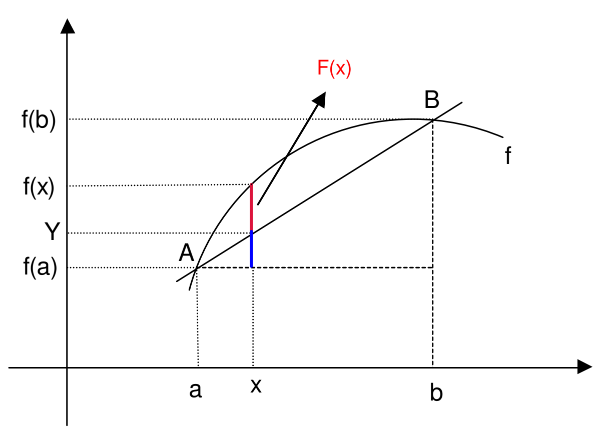


Figura 5.1.2
Demonstração do TVM

$$Y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou seja,

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Portanto, a função $F(x) = f(x) - Y$ será dada por

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Se fizermos uma rotação de eixos (figura 5.1.3) de forma que $F(a) = F(b) = 0$ e, sendo F derivável nos pontos internos ao intervalo $[a\ ,\ b]$, podemos aplicar o Teorema de Rolle nessa função: existe um ponto c, entre a e b tal que $F'(c) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou ainda,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

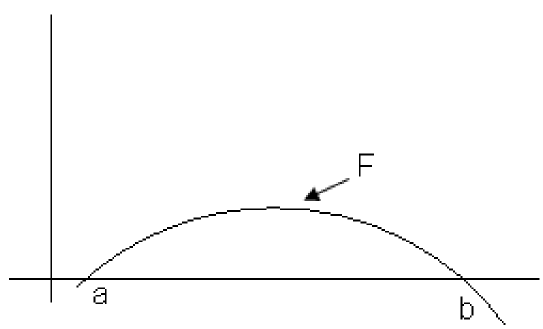


Figura 5.1.3
Gráfico - Teorema de Rolle

Agora estamos prontos para demonstrarmos a regra. A demonstração é feita para o caso $x \to a^+$, onde $x \to a^+$ é o limite a direita de a, por valores maiores que a.

Como na hipótese não foi suposto que f e g definidas em a, consideremos duas novas funções F e G para as quais

$$\begin{aligned} &F(x) = f(x) \ \text{ se } x \neq a \text{ e } F(a) = 0 \\ &G(x) = g(x) \text{ se } x \neq a \text{ e } G(a) = 0 \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

Seja b o extremo direito do intervalo aberto I dado na hipótese. Como f e g são ambas diferenciáveis em I, exceto possivelmente em a, concluímos que F e G são ambas diferenciáveis no intervalo $(a\ ,\ x]$, onde $a < x < b$. Logo, F e G são contínuas em $(a\ ,\ x]$. As funções F e G são também contínuas à direita de a, pois $\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, que é $F(a)$; analogamente, $\lim_{x\to a^+} G(x) = G(a)$. Logo, F e G são contínuas no intervalo fechado $[a\ ,\ x]$. Assim, F e G satisfazem as três condições da hipótese do teorema do valor médio generalizado no intervalo $[a\ ,\ x]$. Assim,

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

onde z é algum número tal que $a < z < x$. De (5.1.2) e da igualdade acima, temos,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Como $a < z < x$, segue que quando $x \to a^+$, então, também $z \to a^+$, pois z está entre a e x; assim sendo,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Mas, por hipótese, esse limite é L. Logo, $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

5.2 Sem utilizar o teorema do valor médio

A regra que possui o nome do Marques de L'Hôpital, é usualmente provada usando o Teorema do Valor Médio generalizado. Vamos mostrar que, podemos fazer essa demonstração por um método muito simples e sem utilizar o teorema do valor médio. Esta prova parece ter algumas vantagens pedagógicas, bem como sugere alguns resultados que não são cobertos pela formulação usual.

Nós provaremos que:

- *se f e g são funções reais com derivadas contínuas;*
- *se f(x) e g(x) ambas se aproximam de 0 ou ambas se aproximam de ∞ com* $x \to a$*;*
- *se* $g'(x) \neq 0$*, e se* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ *com* $x \to a$*;*

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L.$$

Todos os limites são tomados de um lado de *a*, isto é, tomamos o limite de $x \to a^+$ ou tomamos o limite de $x \to a^-$. Vamos tomar $a = \infty$ e *L* finito, mas algumas modificações formais são requeridas para os outros casos.

Vamos precisar apenas:

i) Da definição de limites;
ii) Que as funções contínuas *f* e *g* nunca sejam 0 tendo um sinal fixo (positivo ou negativo);
iii) Que a função com derivada positiva é crescente.[32]

Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$-\varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} - L < \varepsilon$$

para *t* suficientemente grande. Desde que *g'* seja contínua e positiva, isto é, suponhamos por definição que $g'(t) > 0$. Então

$$-\varepsilon\, g'(t) < f'(t) - Lg'(t) < \varepsilon\, g'(t) \qquad (5.2.1)$$

Consideremos o lado direito da inequação; dizemos que

$$f'(t) - (\varepsilon + L)g'(t) < 0 \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.} \qquad (5.2.2)$$

Uma vez que uma função negativa tem uma integral negativa, temos para *x* e *y* suficientemente grande, com $x > y$,

$$f(x) - f(y) - (\varepsilon + L)[g(x) - g(y)] < 0 \qquad (5.2.3)$$

[32] Para provar que uma função com derivada positiva é crescente ver LEITHOLD.

Suponhamos primeiramente que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$; fixando y e fazendo $x \to \infty$, obtemos

$$-f(y)+(\varepsilon+L)g(y)\leq 0$$

$$\frac{-f(y)}{g(y)}+(\varepsilon+L)\frac{g(y)}{g(y)}\leq 0 \qquad (5.2.4)$$

Sendo $g'(y) > 0$ e $g(y) \to 0$, temos $g(y) < 0$ para y grande. Assim (5.2.4) diz que

$$-\frac{f(y)}{g(y)}+L\geq -\varepsilon$$

Para y suficientemente grande. Analogamente, o lado esquerdo da inequação (5.1.1) fica

$$-\frac{f(y)}{g(y)}+L\leq \varepsilon$$

e os dois lados juntos da inequação dizem que $\frac{f(y)}{g(y)} \to L$ com $y \to \infty$. Se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$, temos $f(x) > 0$ para x grande, assim assumimos $g'(x) > 0$. Reescrevemos (5.1.3) como

$$\frac{f(x)}{g(x)}-(\varepsilon+L)<\frac{f(y)-(\varepsilon+L)g(y)}{g(x)}$$

y fixo; para x suficientemente grande o lado direito é menor do que ε, e assim

$$\frac{f(x)}{g(x)}-L<2\varepsilon$$

Analogamente,

$$-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-L$$

Portanto

$$-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-L<2\varepsilon$$

Então concluímos que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L$$

A hipótese de que *g*’ é contínua é redundante, embora sempre satisfaça na prática e torna a demonstração mais compreensível.

Tudo que usamos em (ii) é que uma derivada que é diferente de zero num intervalo tem um sinal fixo (positivo ou negativo).

Assim nossa prova não utiliza o Teorema do Valor Médio, ela abre a possibilidade de estender a regra para casos onde o Teorema do Valor Médio não pode ser usado, como por exemplo, casos em que a função é descontínua.

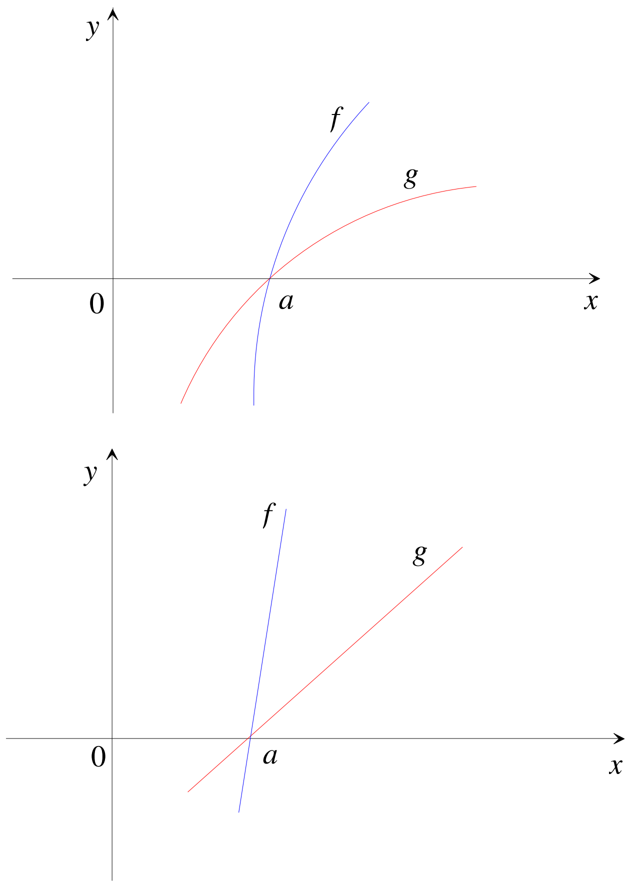
5.3 Usando Analise não Standard

A Análise não Standard, criada por Abraham Robinson na década de 1960, possui uma terminologia intuitiva evitando quase sempre a argumentação contravariante, que é uma característica das demonstrações clássicas. Esse tipo de demonstração constitui, de certo modo, a justificação esperada durante cerca de três séculos para tornar rigoroso o modo profundamente criativo usado por Leibniz e Newton para a descoberta e desenvolvimento do Cálculo, então chamado de “*Cálculo Infinitesimal*”.

A Análise Não-Standard constitui uma ferramenta de trabalho que, em muitos aspectos, está mais próxima da gênese do Cálculo do que a Análise Matemática usual. Mas como o cálculo infinitesimal mostrou-se plenamente operacional e, por meio dele, podem-se fazer previsões que empiricamente se confirmam com uma precisão fantástica. Talvez isso indique que a natureza, para existir, não precisa ser inteiramente conforme a lógica formal. Isto é, que, provavelmente, as leis do pensamento correto não reproduzem fidedignamente a estrutura do mundo objetivo, até porque não seria necessário: um conhecimento constituído de aproximações grosseiras é o suficiente para que dele se obtenha os efeitos práticos esperados. E algumas vezes quando a prática exige uma sintonia mais fina entre a idéia e os fatos, então é só complementar o naturalmente dado com algum artifício cultural, valendo-se até mesmo improvisar conceitos, como a muitos parece ser o infinitésimo de segunda ordem.

Em meados do século XIX o matemático K. Weierstrass elaborou uma versão do cálculo que prescinde dos infinitesimais. Seu tratamento rigoroso da noção de limite requer apenas números finitos, o que proporcionou a este ramo da matemática a fundamentação lógica que antes carecia. No entanto, na análise não Standard, os infinitesimais são restituídos à custa do abandono do axioma[33] de Arquimedes.

A regra de L'Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de sua derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições com respeito aos limites f e g antes de usar a Regra de L'Hôpital.



A figura 5.3.1 sugere visualmente por que a regra de L'Hôpital pode ser verdadeira. O primeiro gráfico mostra duas funções diferenciáveis f e g, que tendem a zero quando x tende a a. Se dermos um zoom em direção ao ponto (a , 0), os gráficos começarão a parecer quase lineares. Mas se as funções forem realmente lineares como no segundo gráfico, então sua razão será

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que é a razão de suas derivadas. Isso sugere que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(STEWART, 2001, p.307).

Figura 5.3.1
Gráfico – Análise não Standard

dard

[33] Segundo Arquimedes, foi Eudoxo (408 – 355 a. C.) que forneceu o axioma que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes, chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. O axioma diz que: dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmentos de retas indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia. (Boyer, 1996). Algebricamente, se $x > 0$ e y são dois reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.

Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de L'Hôpital é verdadeira. De fato, usando a definição de derivada temos:

Demonstração para o caso $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

Façamos Δx ser quase zero. Então $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, e

$$\frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)} = \frac{\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}{\dfrac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x}} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

tomando o limite chegamos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

intuitivamente, para $x \approx a$ o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ são quase retas que tocam $f'(a)$ e $g'(a)$ passando por zero, assim o gráfico de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ está quase na linha horizontal por $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ (Figura 5.3.2).

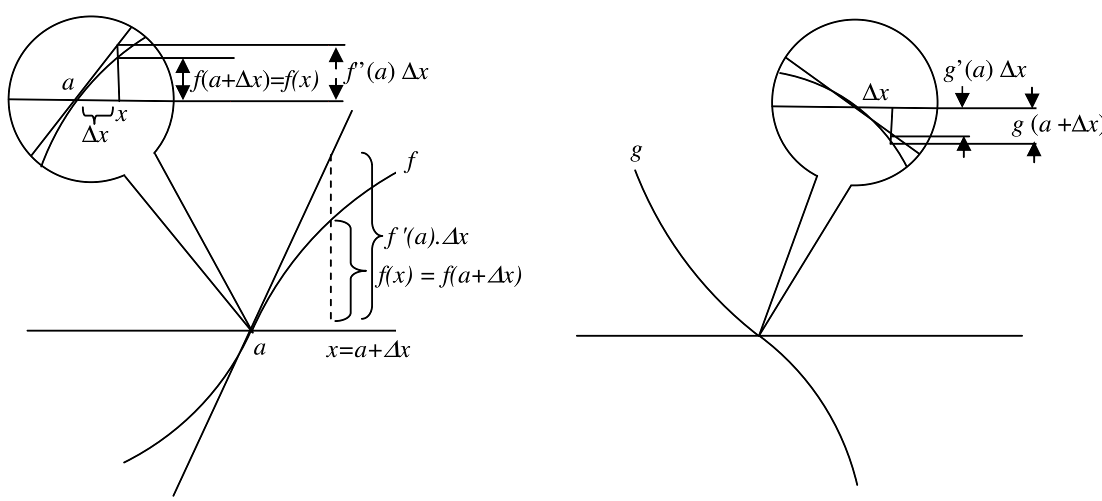


Figura 5.3.2
Análise não Standard

A equação

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

nem sempre é verdade. Por exemplo, $g'(a)$ talvez é zero ou indefinido.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

as vezes é outro limite do tipo $\frac{0}{0}$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f'(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g'(x) = 0$$

quando isso acontece, a Regra de L'Hôpital deverá ser reaplicada para $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sendo a regra de L'Hôpital a idéia central desse trabalho, procuramos apresentá-la objetivando a compreensão dos conceitos. Para tanto, fez-se necessária a apresentação das demonstrações de formas diversificadas. Vimos no item dois como L'Hôpital expôs sua regra usando artifícios geométricos. Apresentamos a regra usando o Teorema do Valor Médio abordando a parte algébrica e a visualização geométrica. Provamos sem utilizar o Teorema do valor médio, usando um ponto de vista puramente algébrico; e por fim, utilizamos a análise não Standard dando mais ênfase ao aspecto geométrico do que o algébrico.

Estabelecemos uma importante relação entre o formalismo necessário e a análise de um problema e os aspectos visuais que permeiam sua solução. A análise gráfica de conceitos pode evidenciar algumas propriedades, gerando uma discussão sobre a relevância de soluções analíticas para problemas em detrimento de soluções simbólicas que, de fato, são corretas e intuitivamente convincentes. Muitos matemáticos valorizam o rigor de notações, deixando de lado a visualização que são úteis à compreensão de conceitos.

Historicamente, as representações desempenharam um importante papel na análise e solução de problemas e, conseqüentemente, no desenvolvimento do conhecimento. Nesse sentido, aspectos evidenciados em uma representação atingem seu objetivo através de um processo de visualização. Em outras palavras, é preciso “ver” um desenho ou um modelo a fim de serem assimiladas as propriedades por eles apresentadas.

6. Importância da história da matemática nos cursos de Cálculo.

> *"Ha professores que explicam essas gravuras, habituando as crianças com menos de 10 anos a aprender sem fatiga, como uma espécie de divertimento, todas as ciências, mas tudo pelo método histórico"*
>
> *Campanella*

Essa citação foi feita por Tammaso Campanella[34] em 1602, que segundo o professor Eduardo Sebastiani Ferreira, foi a citação mais antiga que ele encontrou em livros observando o entusiasmo de utilizar a história como forma de obter conhecimento.

Aparentemente existe um consenso entre autores que um dos meios mais interessantes de obter conhecimento é através da história. Que é possível compreender a origem das idéias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas idéias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Zuñiga destaca a importância da história da matemática escrevendo:

> "A participação da história dos conteúdos matemáticos como recursos didáticos é imprescindível. O desenvolvimento histórico não só serve como elemento de motivação, mas também como fator de melhor esclarecimento do sentido dos conceitos e das teorias estudadas. Não se trata de fazer uma referência histórica de duas linhas ao iniciar um capitulo, mas de realmente usar a ordem histórica da construção matemática para facilitar uma melhor assimilação durante a reconstrução teórica. Isto é central. Os conceitos e noções da matemática tiveram uma ordem de construção histórica. Esse decurso concreto põe em evidência os obstáculos que surgiram em sua edificação e compreensão. Ao recriar teoricamente esse processo (obviamente adaptado ao estado atual de conhecimento) é possível revelar seu sentido e seus limites. A história deveria servir, então, como o instrumento mais adequado para a estruturação do delineamento mesmo da exposição dos conceitos. É provável também que uma aproximação dessa natureza seja possível satisfazer as exigências de um sentido vetorial do concreto ao abstrato. Com isso não se quer dizer que se deve reproduzir mecanicamente a ordem da aparição histórica dos conceitos matemáticos; sem dúvida, todas as ciências possuem certa lógica interna que se dá a partir de sínteses teóricas importantes e que se deve assimilar no sentido ensino-aprendizagem. Só se coloca a necessidade buscar um equilíbrio, enfatizando a importância do segundo". (ZUÑIGA, 1988, p.31, apud SEBASTIANI FERREIRA, 1997, p.153)

[34] Filósofo italiano que nasceu em Stilo em 1568; autor de uma das mais populares obras: "A cidade do Sol", uma utopia essencialmente idealista.

Assim, esta história é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria matemática. Infelizmente alguns autores acreditam que a história serve apenas como instrumento de motivação, outros ensinam usando a história sem se preocupar com o contexto histórico que levou ao desenvolvimento de uma determinada descoberta matemática.

Para Sebastiani Ferreira (1997, p.154), “A história em sala de aula tem um alcance muito maior que apenas uma simples motivação. Além de motivar o aluno, o faz passar por revoluções no método da matemática, que foram sem dúvida, marcos decisivos nesta ciência”. Além disso, continua o autor, “mostra como a matemática foi construída pelo homem através dos tempos e como suas dificuldades foram sendo superadas”.

Desse modo, podemos entender porque cada conceito foi introduzido nesta ciência e porque, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. Conhecendo a história da matemática percebemos que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram que foram desenvolvidas com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de criação.

O que pretendemos fazer aqui é contribuir para o estudo de uma utilização muito mais profunda do recurso à História da Matemática. O recurso à História da Matemática tem, portanto, um papel decisivo na organização do conteúdo que se quer ensinar, iluminando-o, por assim dizer, com o modo de raciocinar próprio de um conhecimento que se quer construir.

Conhecer a história da matemática permite tentativas de por em pé situações didáticas mais pertinentes para conseguir aprendizagens, graças ao conhecimento que se pode ter sobre a origem da noção a ensinar, sobre o tipo de problema que ela visa resolver, as dificuldades que surgiram e o modo como foram superadas.

O desafio que ainda não foi superado é encontrar uma metodologia que contemple o desenvolvimento histórico da matemática como mecanismo de ensino; qual deve ser o melhor caminho para inseri-la como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. Existem alguns caminhos que foram tomados durante a busca para encontrar a melhor maneira de explorar a história. Essa insistência em encontrar o melhor caminho para fazermos uso da história é porque acreditamos fielmente que poderemos facilitar o aprendizado matemático.

Alguns autores traçaram esse caminho seguindo exatamente os passos da "invenção" do conhecimento, como Sebastiani Ferreira, como Clairaut[35] fez em 1765. Em seu prefácio, Sebastiani Ferreira (1996, p.250) cita Clairaut:

> "Afim de seguir nesta obra um caminho semelhante aos dos inventores faço com que os principiantes descubram antes de tudo as verdade que pode depender a simples medida dos terrenos e das distâncias acessíveis, etc. Passo daí a outras investigações, de tal modo análogas às primeira que a curiosidade natural de todos os homens os leva a nelas se deterem. Justificando depois esta curiosidade por algumas aplicações úteis, chego a ensinar tudo o que de mais interessante a geometria elementar tem ... Por esse método, os principiantes, a cada passo que lhes fazemos dar, percebem a razão que move o inventor; e podem assim mais facilmente adquirir o espírito da invenção" (CLAIRAUT, 1892, apud SEBASTIANI FERREIRA, 1996, p.250).

Outro caminho que foi tomando para inserir a história da matemática como opção de ensino-aprendizagem é o chamado *Princípio Genético*. Este princípio pode ser estabelecido da seguinte forma: "*a aprendizagem efetiva requer que cada aluno refaça os principais passos da evolução histórica*".

Aqui lembramos a lei biogenética da Psicologia, que afirma que o indivíduo, desde seu nascimento até sua maturidade, repete as principais etapas do desenvolvimento humano. Segundo Toeplitz[36], o historiador recorda todos os fatos ocorridos, sejam bons ou ruins; por outro lado, o método genético seleciona a gênese e os pontos cardeais de problemas, fatos e provas. Segundo Edwards[37], a História da Matemática não se detém na descrição da teoria, a não ser o mínimo necessário para o entendimento dos fatos, e o método genético não busca um estudo detalhado dos eventos que não contribuem para o entendimento do assunto.

O "princípio genético" foi defendido por matemáticos influentes tais como Felix Klein e Henri Poincaré.

Klein escreveu em 1908 que:

> ["...gostaria de apresentar a lei biogenética fundamental, segundo a qual o indivíduo, em seu desenvolvimento, atravessa, de forma abreviada, todas as fases do desenvolvimento da espécie. Essas idéias tornam-se hoje em dia parte e parcela da cultura de todos. Levando em conta a capacidade natural da juventude, o ensino deveria guiá-la para idéias mais elevadas e, finalmente, para formulações mais abstratas, e, ao fazê-lo, deveria seguir o mesmo caminho ao longo do qual a raça humana tem buscado desenvolver o conhecimento, desde seu estado original e simples até às formas mais elevadas. É necessário formular esse princípio freqüentemente,

[35] Clairaut publicou na França o livro *Eléments de Géométrie* em 1765, que de acordo com Sebastiani, foi uma crítica ao formalismo euclidiano que aparece nos *Elementos*.

[36] Confira Prefácio.

[37] Confira Prefácio.

> pois sempre existem pessoas que, à maneira dos eruditos medievais, começam sua instrução com as idéias mais gerais, defendendo este método como o único método cientifico...”] (KLEIN, apud SEBASTIANI FERREIRA, 1996, p.251).

Podemos notar no trecho abaixo que Poincaré defendia o “principio genético” quando em 1927 escreve:

> “Os zoólogos afirmam que o desenvolvimento embrionário de um animal resume em um tempo bastante curto toda a história de seus ancestrais de tempos geológicos. Parece que o mesmo, pode ser dito a respeito do desenvolvimento da mente. O educador deve fazer com que a criança passe novamente por onde passaram os seus ascendentes; mais rapidamente, mas sem omitir etapas. Por essa razão, a história da ciência deve ser o nosso primeiro guia” (POINCARÉ, apud SEBASTIANI FERREIRA, 1996, p.251).

Vários autores defenderam o “princípio genético”. Em 1964 George Polya diz que “*devemos deixar as crianças perfazerem as etapas da evolução intelectual da raça humana*”. Morris Kline e René Thom, anos 60 e 70, também defendem tal principio como ordem natural de ensino.

Victor Byers, em 1982, abranda a responsabilidade do princípio genético dizendo que ele é um guia para estabelecer ensino, mas não devemos encará-lo como sendo um substituto universal para as demais didáticas. Segundo Sebastiani Ferreira (1996, p.253), Antonio Miguel em sua tese de doutorado, diz que é problemático o uso do “principio genético” para relacionar história e ensino-aprendizagem, porque na concepção de produção do conhecimento no plano psicogenético, a matemática passa a ser vista como um corpo cumulativo de conhecimentos seqüenciais e ordenados hierarquicamente, e a adoção do recurso à história baseada na ordem cronológica da constituição dos conteúdos a serem ensinados.

Outro princípio que consiste em explorar a história da matemática é o princípio que chamaremos aqui de “*Método Experimental*”[38]. Esse método é fundamentado no conceito de experiência cientifica. Para realização de tal experiência devemos adquirir recursos tanto materiais quanto teóricos. Para isso devemos nos preocupar em:

i) Espaço para realização da pesquisa, que não precisa ser necessariamente a sala de aulas, mais sim um laboratório de computação, biblioteca, etc.;
ii) Encher o espaço com ferramentas semelhantes as quais dispunham os matemáticos e determinada época; segundo Ferreira, os materiais não precisam ser necessariamente

[38] Proposta de ensino utilizando fatos históricos de matemática feita pelo professor Sebastiani. No entanto, Sebastiani não usou essa denominação. Fazemos uso apenas para identificar o método proposto.

objetos concretos mas conceitos, técnicas e estratégias matemáticas que o autor dispunha.

iii) Perturbação do sistema. Essa etapa consiste em mudar os equipamentos (conceitos, técnicas e estratégias matemáticas) de acordo com a evolução do processo histórico. Nesse momento, utilizamos bibliografias para mostrar os principais momentos históricos até que chegamos ao computador por ser a ferramenta e/ou equipamento utilizado pelos matemáticos contemporâneos;

iv) Instigar os alunos para que eles expressem todo o processo experimental, podendo ser em forma oral, escritas, ou ambas.

Então a idéia é pegar um fato e “caminhar” com ele através da história da matemática. Essa é a idéia defendida pelo professor Eduardo Sebastiani.

Faremos uma proposta de como Aplicar o *método experimental* no tratamento das formas indeterminadas da forma $\frac{0}{0}$, tratada na seção 2.2. Devemos começar identificando os personagens que atacaram o problema naquela época, que como já vimos foram Johann Bernoulli e L’Hôpital, mas que como agora sabemos, Bernoulli foi o responsável pela resolução de tal problema. O próximo passo será procurar materiais a fim de obtermos ferramentas necessárias para a evolução do experimento; para isso se faz necessário uma pesquisa bibliográfica. O material coletado deverá conter as ferramentas utilizadas por Bernoulli, que são muitas, pois já existiam trabalhos de vários personagens como Newton e Leibniz, sendo que o segundo teve maior influência nos desenvolvimentos matemáticos de Bernoulli.

L’Hôpital e Bernoulli aproveitaram os trabalhos de Leibniz. Mas antes de abordamos como esses dois matemáticos apresentaram a regra de indeterminação, devemos estudar como Leibniz vem apresentando o cálculo. Leibniz explica o que vem a ser uma diferencial, o que é um triângulo característico, o que são quantidades infinitamente pequenas e apresentou conceitos de reta tangente. Baseados nos conceitos de Leibniz podemos mostrar e entender as explicações dadas por L’Hôpital e Bernoulli a respeito da regra de indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Por fim faremos uso do computador para visualizar geometricamente o que acontece quando damos ZOOM no ponto de indeterminação. Desse modo, partimos de um fato histórico, trabalhamos com ele observando os principais acontecimentos durante o passar dos tempos até chegarmos aos dias atuais com a utilização do computador.

Alguns livros de matemática propõem o ensino de cálculo usando a história. A exemplo disso, temos a coleção de cinco volumes publicados pela UNB com o título de "*Curso de História da Matemática*" de M. E. Baron e H. J. M. Bos, o livro do Toeplitz e, o mais importante deles, o livro de C. H. Edwards, Jr.

A coleção de livros da UNB é dividia em cinco volumes e expõe todos os conceitos de um primeiro curso de cálculo contando os principais fatos históricos e instigando o leitor a fazer avaliação dos acontecimentos propondo questões avaliativas relacionado ao assunto tratado. Em alguns casos, pede-se que façamos comentários críticos e, em outros, propõe que se façam resumos de partes dos textos. Nestes textos encontramos traduzidos os relatos, publicações, cartas, etc. como são encontrados nos trabalhos originais dos autores. Logo após cada exposição desses trabalhos, são feitos apontamentos sobre o assunto.

Toeplitz em seu livro *The Calculus, a Genetic Approach*, segue a inspiração histórica para apresentar os conceitos do Cálculo ao estudante. Inicia com uma discussão sobre as especulações dos antigos matemáticos gregos sobre os processos infinitos, a teoria das proporções, o método da exaustão, a medida da circunferência de Arquimedes, o conceito de número, limites de seqüências e séries numéricas. O estudo da integral definida se inicia com a quadratura da parábola por Arquimedes, e a retomada deste problema 18 séculos após com Cavalieri. A derivação é apresentada com o estudo do problema de se encontrar a tangente a uma curva em um ponto, com problemas de máximos e mínimos e o conceito de velocidade de Galileu. O estudo dos logaritmos lança uma luz sobre a relação entre derivada e integral. O livro termina com aplicações a problemas de movimento, como o pêndulo, oscilações, leis de Kepler e de Newton. Toeplitz deixou o livro inacabado, tendo falecido em 1940 em Jerusalém, após deixar a Alemanha em 1939.

Edwards diz no prefácio do seu livro que:

> "(…) o interesse em escrever este livro foi tornar o desenvolvimento histórico acessível, não só para o estudante da história da matemática, mas para toda a comunidade matemática" cuja exposição torna-se especificamente destinada àqueles que querem estudar, ensinar e usar o cálculo (EDWARDS, 1979, prefácio).

Segundo Edwards, a história do desenvolvimento do cálculo tem um especial interesse para quem aprecia o valor histórico na perspectiva de ensino e aprendizagem, desfrutando dela e de suas aplicações. Seu livro começa discutindo os problemas da antiguidade até chegar à análise do século vinte. Após tratar dos principais assuntos da matemática grega, o autor conta fatos históricos e as contribuições dos principais personagens percussores do cálculo, que de uma forma ou de outra, colaboraram no seu desenvolvimento até chegarmos à Newton e Leibniz que auferiram o direito de ter, cada um deles, um capítulo inteiro no livro por serem eles inevitavelmente considerados a peça central da história do cálculo.

A principal característica deste livro é a inclusão entremeada de exercícios ao longo do texto como uma parte integrante da exposição. A história da matemática, como matemática própria, não se aprende com uma leitura passiva, mas com uma caneta na mão. No entanto, a solução de problemas típicos e particulares de um determinado período histórico, utilizando as ferramentas daquele tempo permite ao leitor compartilhar o entusiasmo da primeira descoberta. O autor indaga que o melhor caminho de penetrar no pensamento de Arquimedes e Newton, por exemplo, é resolver alguns problemas utilizando seus próprios métodos.

7. Considerações Finais

Procuramos neste trabalho fazer um levantamento histórico mostrando os acontecimentos importantes no que diz respeito a regra de indeterminação 0/0, conhecida como *Regra de L'Hôpital.*

Um fato importante do trabalho é deixar claro a importância do conhecimento histórico que devemos ter quando resolvemos estudar matemática. Conhecer como os conhecimentos foram desdobrados e as dificuldades enfrentadas na época para a solução de problemas pode acarretar melhor compreensão dos conceitos atuais. Para evitar pontos obscuros, procuramos deixar claras as circunstâncias nas quais, os matemáticos realizam suas contribuições à matemática fazendo uma biografia dos principais colaboradores.

Podemos destacar as qualidades dos matemáticos. Uns por terem mais facilidades de desenvolver os conceitos matemáticos, outros por saberem escrever esses conceitos de forma clara e compreensível.

L'Hôpital se encaixa no segundo item, mas não podemos dizer que ele não sabia matemática, pois para escrever sobre algo com clareza deve ser entendido do assunto. O fato é que Bernoulli tinha mais facilidades em decifrar os artigos que eram publicados por Leibniz no *Acta Eruditorum*. O Marquês de L'Hôpital ficou impressionado com facilidade matemática que Bernoulli possuía que lhe pediu aulas particulares a troco de um salário. Bernoulli aceitou a proposta e começou a dar aulas particulares a L'Hôpital. Ao fim de um ano Bernoulli abandonou Paris; no entanto continuou ajudando L'Hôpital por cartas, tendo mesmo feito um acordo, a troco de uma elevada quantia mensal, que respondia a todas as perguntas colocadas por L'Hôpital sobre Matemática e que lhe enviaria todas as suas descobertas matemáticas e não comunicaria a mais ninguém os seus achados.

Podemos então dizer que houve uma cumplicidade entre os dois matemáticos. Depois da publicação do livro *Analysis des Infiniment petits*, contendo todos os conceitos básicos de cálculo diferencial, muitos outros poderiam ter acesso aos problemas matemáticos. Em 1921 foi descoberto em Paris o manuscrito original das aulas dadas por Bernoulli a L'Hôpital, e fazendo-se a comparação do manuscrito com o livro de L'Hôpital foi possível dar razão a Bernoulli sobre a originalidade das idéias expressas no livro. Pois Bernoulli reivindicava-as como suas.

Com esse estudo tivemos a oportunidade de conhecermos a personalidade no âmbito matemático dos personagens envolvidos na criação da regra de indeterminação 0/0.

Entendemos em quais situações os fundamentos foram se desenvolvendo, quais as contribuições dos personagens envolvidos, suas ambições, seus anseios desejos e necessidades.

A história mostra como as demonstrações dos conceitos eram feitas. L'Hôpital e Bernoulli apresentaram a regra de indeterminação 0/0 usando técnicas geométricas com pequenas diferenças entre as demonstrações. L'Hôpital descreveu a aplicada de uma curva por uma fração em x, onde o numerador e o denominador da fração gerava duas novas curvas auxiliares, ambas expressas em x. Nas cartas de Bernoulli a L'Hôpital a demonstração é feita de maneira análoga, mas podemos observar que, enquanto Bernoulli fazia o acréscimo pela esquerda, L'Hôpital acrescentava uma quantidade infinitamente pequena pela direita. O fato mais importante que diferencia uma demonstração da outra, é o uso que L'Hôpital fazia da constante de proporcionalidade, conceito que Bernoulli não usava em sua demonstração.

Apesar de existir uma lógica sensata nas discussões dos dois autores sobre as indeterminações 0/0, existiam pontos obscuros, que na época não eram possíveis de serem explicados. Esses pontos obscuros dizem respeito às quantidades infinitamente pequena, que em alguns momentos elas existiam e que logo deixavam de existir. Essas imperfeições na matemática só foi possível ser reparada com a criação do conceito de limite, que foi muito bem ilustrado por Cauchy. L'Hôpital afirmava que, depois de fazer as operações necessárias para sair da indeterminação, poderíamos considerar o valor da aplicada aquele no qual dava a indeterminação, enquanto Cauchy, considerava o limite pela qual o valor de um função em x se aproximava do ponto de indeterminação.

O objetivo de todo o discurso histórico, sem dúvida, foi fundamentar a necessidade e utilidade da história da matemática como aliado para o processo de ensino aprendizagem. Para que esse processo se efetive, é necessário o conhecimento histórico dos fatos que envolvem o respectivo assunto a ser estudado. A história facilita o entendimento dos porquês da matemática. Vimos que foi através de várias produções independentes e também utilizando conhecimentos de outros matemáticos que foi possível chegar a uma sustentação rigorosa dos conceitos matemáticos.

As dificuldades encontradas pelos professores de ensino superior, quer seja na área de cálculo, quer seja em geometria e álgebra, é o desconhecimento sobre os fatos históricos relacionados. Esse problema só poderá ser superado a partir do momento que se cria o hábito de ensinar matemática utilizando a história. Todas as formas didáticas diferenciadas, isto é, formas diferentes da tradicional, que é utilizar apenas livro-texto, com exposição de conceitos, exemplos e listas de exercícios para fixação de conceitos, carecem de mais planejamento e horas de estudo para que a ação se torne efetiva.

Assim, esta história é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria matemática. Podemos entender porque cada conceito foi introduzido nesta ciência e porque, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. Permite também estabelecer conexões com a história, a filosofia, a geografia e várias outras manifestações da cultura.

A história da matemática permite compreender a origem das idéias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas idéias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Esperamos que o material produzido sirva de referência para interessados em utilizar a história da matemática como ferramenta metodológica de ensino, ou simplesmente para os curiosos que desejam saber como surgiram os conceitos matemáticos, em particular os conceitos envolvendo indeterminações.

8. Bibliografia

ABELLÁN, M. B. **Hermeneútica del cálcul diferencial a l'europa del segle XVIII:** de l'analyse des infiniment petitis de l'hôpital (1696) al traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802). Tese (Doutorado em Matemática) – Faculdade de Barcelona. Universidade Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2004.

ANGELO, C. L. **A regra de L'Hôpital no habitat livro – texto:** uma análise do discurso de alguns autores. Dissertação de Mestrado (Curso de pós-graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP. Rio Claro, 1997.

ÁVILA, G. **Cálculo I**: funções de uma variável. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de J. R. B. Coelho, R. Maier e M. J. M. M. Mendes. Brasilia: Universidade de Brasilia, 1985. Un. 3.

BARUFI, M. C. B. **Johann Bernoulli.** IME.USP.SP. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002. Mapa da História: apresenta a Biografia de personagens da História da Matemática. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/historia/bernoulli1.htm>. Acesso em: 8 out. 2007.

____________________ **Marquis de L'Hospital**. IME.USP.SP. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/>. Acesso em: 8 out. 2007.

BERNOULLI, J. **Herausgegeben von der naturforschenden gesellschaft.** Birkhauser Verlag Basel, 1955.

BOS, H. J. M**. Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. O cálculo no século XVIII. Tradução de M. J. M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. Un. 4.

BOYER, C. **História da Matemática.** Tradução de E. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blÿcher Ltda, 1996.

BYERS, V. **Why study the history of mathematics?** In: Inter. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1982 p. 59-66.

CATUNDA, O. **Curso de Análise Matemática**. São Paulo: Trabalho Datilográfado, 1962. Vol. I.

CAUCHY, A. L. **Résumé des données a L'ecole Polytechnique Sur le Calcul Infinitésimal.** Paris: Académie des Sciences, 1821. Série 2, Tome 4. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/>. Acesso em: 5 dez. 2007.

EDWARDS, C. H. Jr. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979. 150 ilustrações.

GOURSAT, E. **Cours d'analyse mathématique**. New York: Dover Publications, 1904.

GRATTAN-GUINNESS. **Del cálculo a La teoría de conjuntos**, 1630 – 1910: Uma introducción histórica. Versão espanhola de Mariano Martinez Pérez. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

HUGHES, D. et al. **Cálculo – Volume 1**. Tradução de C. R. Galdo. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

LACROIX, S. F. **Lebrbegriff des Differential unb Integral calculs.** Berlim, 1799.

L'HÔPITAL, G. F. A. **l'Analyse des infiniments petits por l'Itelligence des lignes courbes**. Paris: ACL éditions, 1696.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica.** 3. ed. Tradução de C. C. Patarra. São Paulo: Harbra, 1994. Vol. I.

PASTOR, J. R.; BABINI, J. **Historia de La Matemática:** Del renacimiento a La actualidad. 2. ed. Barcelona: gedisa, 1986.

RICIERI, A. P. **Matemáticos:** vida e obra. São Paulo: Prandiano Edições, 1992. Vol. II.

SEBASTIANI FERREIRA, E. **A função logarítmica e a quadratura da hipérbole**. In: VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro, 2008. CD-ROM.

____________________ Como usar a história da Matemática na construção de uma educação matemática com significado. III Seminário Nacional de História da Matemática. Vitória: Circe Mary Silva da Silva, 1999.

____________________ O uso da História da Matemática nas aulas de cálculo. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática. Anais. Águas de São Pedro - SP: Sergio Nobre, 1997.

____________________ Mais uma vez: porquê a História da Matemática. *Dez anos de ProfMat.* Associação de Professores de Matemática, 1996.

SONNET, H. **Premiers Élémentes du Calcul Infinitésimal**. Paris: Librairie Hachette, 1909.

STEWART, J. **Cálculo.** Tradução de A. A. PATARRA. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001. Vol. I.

STRUIK, D. J. **The origin of L'Hôpital's rule:** The Mathematics Teacher. April, 1963. p. 257 – 260.

TOEPLITZ, O. **The Calculus, a Genetic Approach.** Chicago: The University Press,1966.

Bibliografia Consultada

BOURBAKI, N. **Eléments d'histoire des mathématiques.** Paris: Hermam, 1969. p. 228 – 274.

EDWARDS, H. M. **Fermat's Last Theorem:** A Genetic Introducion to Algebraic Number. New York: Springer Verlag, 1977.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de H. H. Domingues. 3 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática.** Tradução de H. H. Dominguez. São Paulo: Atual, 1992.

GARDING, L. **Encontro com a matemática.** Tradução de W. M. Alvarenga e M. M. Alvarenga. Brasília: Universidade de Brasília, 1981.

HUGHES, D. et al. **Cálculo e Aplicações.** Tradução de E. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1999.

SANTOS, A. R.; BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo com Maple:** cálculo de uma variável. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA. **Perdi a matéria:** nomes que fizeram a história. Site criado por professores da Universidade Santa Úrsula com o objetivo de apresentar um resumo da história de personagem que contribuíram para o desenvolvimento da ciência. Disponível em: <http://www.perdiamateria.eng.br/Nomes/Lhopital.htm>. Acesso em: 25 set. 2007.