



DANILO COVAES NOGAROTTO

INFERÊNCIA BAYESIANA EM MODELOS DE REGRESSÃO BETA E BETA INFLACIONADOS

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

DANILO COVAES NOGAROTTO

INFERÊNCIA BAYESIANA EM MODELOS DE REGRESSÃO BETA E BETA
INFLACIONADOS

Orientador: Prof. Dr. Caio Lucidius Naberezny Azevedo

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de mestre em Estatística

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO DANILO COVAES NOGAROTTO
E ORIENTADA PELO PROF. DR. CAIO LUCIDIUS NABEREZNY AZEVEDO

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Caio Lucidius Naberezny Azevedo", written over a horizontal line.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

N686i Nogarotto, Danilo Covaes, 1987-
Inferência bayesiana em modelos de regressão beta e beta inflacionados /
Danilo Covaes Nogarotto. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Caio Lucidius Naberezny Azevedo.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Regressão beta inflacionada. 2. Inferência bayesiana. 3. Métodos MCMC.
4. Jeffreys, Priori de. I. Azevedo, Caio Lucidius Naberezny, 1979-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Bayesian inference in beta and inflated beta regression models

Palavras-chave em inglês:

Inflated beta regression

Bayesian inference

MCMC methods

Jeffreys prior

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Caio Lucidius Naberezny Azevedo [Orientador]

Héilton Ribeiro Tavares

Jorge Luis Bazán Guzmán

Data de defesa: 04-07-2013

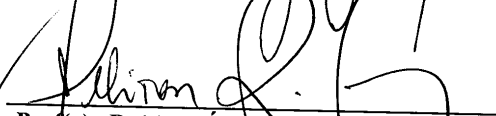
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 04 de julho de 2013 e aprovada

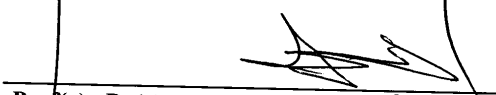
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). CAIO LUCIDIUS NABEREZNY AZEVEDO



Prof(a). Dr(a). HÉLITON RIBEIRO TAVARES



Prof(a). Dr(a). JORGE LUIS BAZÁN GUZMÁN

Agradecimentos

“O coração do homem dispõe seu caminho,
mas é o Senhor quem dirige seus passos”
(Pr 16,9)

Agradeço primeiramente a Deus, por ser esperança, confiança e felicidade em todas as etapas de minha vida.

Agradeço aos meus pais, Carlos e Teresa, pelo total apoio e incentivo em toda minha trajetória. Pelo amor e carinho com que se dispuseram comigo desde sempre. O exemplo de vida que me proporcionam é algo imensurável. À minha irmã Laís, que sempre me apoiou, e com sua alegria e amizade me ajudou em todos os momentos. Aos amigos e familiares de Limeira, que sempre estarão presentes em minha vida.

Aos meus amigos do mestrado, pela companhia e suporte durante esses mais de dois anos. Foram grupos de estudos muito proveitosos, principalmente nas qualificações! Sem eles, boa parte desse projeto não seria possível.

Em especial, agradeço ao professor Caio L. N. Azevedo, meu orientador, que desde a graduação me acompanha. Muito me auxiliou nesse passo de minha carreira, com conselhos, paciência e confiança.

Agradeço a banca examinadora, professores Héilton R. Tavares e Jorge Luis B. Guzmán, pelos conselhos e sugestões para este trabalho.

Por fim, agradeço a CNPQ, pelo apoio financeiro a este projeto.

Resumo

No presente trabalho desenvolvemos ferramentas de inferência bayesiana para modelos de regressão beta e beta inflacionados, em relação à estimação paramétrica e diagnóstico. Trabalhamos com modelos de regressão beta não inflacionados, inflacionados em zero ou um e inflacionados em zero e um. Devido à impossibilidade de obtenção analítica das posteriores de interesse, tais ferramentas foram desenvolvidas através de algoritmos MCMC. Para os parâmetros da estrutura de regressão e para o parâmetro de precisão exploramos a utilização de prioris comumente empregadas em modelos de regressão, bem como prioris de Jeffreys e de Jeffreys sob independência. Para os parâmetros das componentes discretas, consideramos prioris conjugadas. Realizamos diversos estudos de simulação considerando algumas situações de interesse prático com o intuito de comparar as estimativas bayesianas com as frequentistas e também de estudar a sensibilidade dos modelos à escolha de prioris. Um conjunto de dados da área psicométrica foi analisado para ilustrar o potencial do ferramental desenvolvido. Os resultados indicaram que há ganho ao se considerar modelos que contemplam as observações inflacionadas ao invés de transformá-las a fim de utilizar modelos não inflacionados.

Palavras chaves: Regressão beta inflacionada, inferência bayesiana, métodos MCMC, priori de Jeffreys

Abstract

In the present work we developed Bayesian tools, concerning parameter estimation and diagnostics, for noninflated, zero inflated, one inflated and zero-one inflated beta regression models. Due to the impossibility of obtaining the posterior distributions of interest, analytically, all these tools were developed through MCMC algorithms. For the regression and precision parameters we exploited the using of prior distributions commonly considered in regression models as well as Jeffreys and independence Jeffreys priors. For the parameters related to the discrete components, we considered conjugate prior distributions. We performed simulation studies, considering some situations of practical interest, in order to compare the Bayesian and frequentist estimates as well as to evaluate the sensitivity of the models to the prior choice. A psychometric real data set was analyzed to illustrate the performance of the developed tools. The results indicated that there is an overall improvement in using models that consider the inflated observations compared to transforming these observations in order to use noninflated models.

Keywords: Inflated beta regression, bayesian inference, MCMC methods, Jeffreys prior

Sumário

Lista de Figuras	xv
1 Introdução	1
2 Aspectos Inferenciais em Modelo de Regressão Beta	5
2.1 Introdução	5
2.1.1 Modelos de Regressão Beta	6
2.1.2 Estimação via abordagem frequentista	13
2.2 Inferência Bayesiana	14
2.2.1 Apresentação das Prioris	14
2.2.2 Apresentação das posterioris e das condicionais completas	19
2.2.3 Desenvolvimento do algoritmo MCMC	24
2.2.4 Inferência Bayesiana para os parâmetros δ e γ	26
3 Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta	29
3.1 Introdução	29
3.2 Estudo de Convergência	32
3.3 Avaliação dos Resultados	37
3.4 Conclusão	46
4 Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero ou Um	47
4.1 Introdução	47
4.2 Estudo de Convergência	49
4.3 Avaliação dos Resultados	58
4.4 Conclusão	94
5 Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um	95
5.1 Introdução	95
5.2 Estudo de Convergência	97

5.3	Avaliação dos Resultados	102
5.4	Conclusão	127
6	Aplicações a dados reais	129
6.1	Introdução	129
6.2	Análise Inferencial	131
6.3	Análise de Diagnóstico	134
6.4	Aplicação - Modelo de Regressão Beta	139
6.5	Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero	145
6.6	Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Um	151
6.7	Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um	157
6.8	Conclusão	161
7	Conclusão	165
7.1	Considerações Finais	165
A	Estudo de Convergência	169
A.1	Modelos de Regressão Beta	170
A.2	Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Zero	174
A.3	Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Um	178
A.4	Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um	182
	Referências Bibliográficas	187

Lista de Figuras

3.1	<i>Densidades das distribuições a priori associadas ao parâmetro ϕ</i>	30
3.2	<i>Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta</i>	34
3.3	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	35
3.4	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	36
3.5	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=20$ e $p=2$</i>	39
3.6	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=50$ e $p=2$</i>	39
3.7	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=200$ e $p=2$</i>	40
3.8	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=1000$ e $p=2$</i>	40
3.9	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=20$ e $p=5$</i>	44
3.10	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=50$ e $p=5$</i>	44
3.11	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=200$ e $p=5$</i>	45
3.12	<i>REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=1000$ e $p=5$</i>	45
4.1	<i>Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero</i>	51
4.2	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	52
4.3	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	53
4.4	<i>Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Um</i>	55
4.5	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	56
4.6	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	57
4.7	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	63
4.8	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	63
4.9	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	64
4.10	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	64
4.11	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	65
4.12	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	65
4.13	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	66
4.14	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	66
4.15	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	67

4.16	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	67
4.17	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	68
4.18	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	68
4.19	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$ e $p=2$</i>	70
4.20	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$ e $p=2$</i>	71
4.21	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$ e $p=2$</i>	72
4.22	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$ e $p=2$</i>	73
4.23	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	81
4.24	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	81
4.25	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	82
4.26	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	82
4.27	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	83
4.28	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	83
4.29	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	84
4.30	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	84
4.31	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	85
4.32	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	85
4.33	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	86
4.34	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	86
4.35	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	87
4.36	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	87
4.37	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	88
4.38	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	88
4.39	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$ e $p=5$</i>	90
4.40	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$ e $p=5$</i>	91
4.41	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$ e $p=5$</i>	92
4.42	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$ e $p=5$</i>	93
5.1	<i>Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um</i>	98
5.2	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	100
5.3	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	101
5.4	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	105

5.5	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	106
5.6	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	106
5.7	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$</i>	107
5.8	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$</i>	107
5.9	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$</i>	108
5.10	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=2$</i>	109
5.11	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=2$</i>	110
5.12	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=2$</i>	111
5.13	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=2$</i>	112
5.14	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	118
5.15	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	118
5.16	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	119
5.17	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	119
5.18	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$</i>	120
5.19	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$</i>	120
5.20	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	121
5.21	<i>REQM e $\log(\text{REQM})$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$</i>	121
5.22	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=5$</i>	123
5.23	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=5$</i>	124
5.24	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=5$</i>	125
5.25	<i>REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=5$</i>	126
6.1	<i>Gráfico de Perfis entre as variáveis categorizadas</i>	132
6.2	<i>Gráfico de Dispersão - Idade x Logito de Risco</i>	134
6.3	<i>Gráfico de Dispersão - Idade x Logito de Risco</i>	135
6.4	<i>Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Não-Inflacionada</i>	143
6.5	<i>Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Não-Inflacionada</i>	144
6.6	<i>Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Zero</i>	149
6.7	<i>Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Zero</i>	150
6.8	<i>Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Um</i>	155
6.9	<i>Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Um</i>	156
6.10	<i>Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Zero e Um</i>	161
6.11	<i>Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Zero e Um</i>	162
6.12	<i>Gráfico de Médias dos Parâmetros do Modelo 3</i>	163

A.1	<i>Trace plot dos parâmetros</i>	170
A.2	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	171
A.3	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	172
A.4	<i>Estudo de Convergência - ϕ</i>	173
A.5	<i>Trace plot dos parâmetros</i>	174
A.6	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	175
A.7	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	176
A.8	<i>Estudo de Convergência - ϕ</i>	177
A.9	<i>Trace plot dos parâmetros</i>	178
A.10	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	179
A.11	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	180
A.12	<i>Estudo de Convergência - ϕ</i>	181
A.13	<i>Trace plot dos parâmetros</i>	182
A.14	<i>Critério de Gelman-Rubin</i>	183
A.15	<i>Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações</i>	184
A.16	<i>Estudo de Convergência - ϕ</i>	185

Capítulo 1

Introdução

Analisar e entender como uma variável se relaciona com outras variáveis é extremamente importante em várias aplicações da vida real em que nos deparamos no dia-a-dia. O uso dos Modelos de Regressão linear, no século *XIX*, e posteriormente dos Modelos Lineares Generalizados, no início da década de 70, ajudaram na resolução dos mais diversos problemas como esses.

Esses modelos utilizam-se de algumas suposições que limitam sua aplicação, como por exemplo em situações que a variável resposta é restrita ao intervalo unitário $(0,1)$. Nesses casos, os Modelos de Regressão Linear podem estimar valores que excedam os limites desse intervalo, para detalhes veja Charnet *et al* (2008). Mesmo nos Modelos Lineares Generalizados, há algumas suposições também limitam sua aplicação. Por exemplo o fato da distribuição da variável resposta y necessariamente pertencer a alguma distribuição da família exponencial. Paula (2004) mostra detalhes dos modelos lineares generalizados.

Nos últimos anos surgiu uma nova classe de modelos de regressão conhecida como modelos aditivos generalizados para localização, escala e forma. Rigby e Stasinopoulos (2005) o definiram como GAMLSS, do termo inglês *generalized additive models for location, scale and shape*. Essa classe de modelos permitiu uma exploração mais ampla de diversas distribuições para a variável resposta. Entre essas distribuições temos a Beta, Beta Inflacionada em zero ou um e a Beta Inflacionada em zero e um.

Ferrari e Cribari-Neto (2004) propuseram um modelo de regressão para situações como des-

crita, em que a variável resposta pertence ao intervalo unitário e é medida continuamente nele. Nessa proposta, para a variável dependente Y é assumida a distribuição beta, utilizando uma parametrização baseada na lei beta que é indexada pela média e seu parâmetro de dispersão.

Os modelos de regressão beta têm, atualmente, uma enorme aplicabilidade. O uso deles são muito importantes na modelagem de taxas, proporções ou razões. Ospina (2007) apresenta várias aplicações do modelo de regressão beta, para conjunto de dados pertencentes ao intervalo $(0,1)$. Entretanto, é natural que em muitas situações encontramos dados que apresentam zeros e/ou uns, o que impossibilita assumir a suposição de que as observações provêm de uma distribuição contínua.

Ospina e Ferrari (2011) apresentaram um modelo de regressão inflacionados de zeros ou uns baseado na distribuição beta inflacionada, proposta por Ospina e Ferrari (2010). Esse modelo permite a presença de zeros e/ou uns, atribuindo uma certa probabilidade na observação desses dados. Na verdade, o que temos nesse caso é uma modelagem de dados provenientes de uma mistura das distribuições Beta e Bernoulli.

O interesse nos modelos de regressão beta inflacionados é crescente na última década. Pereira (2010) apresenta várias aplicações do modelo de regressão beta inflacionado. Wieczorek e Hawala (2011) mostram uma aplicação em dados de taxas de pobreza em municípios dos Estados Unidos. Além disso, Pereira (2012) introduz o modelo de regressão beta inflacionados truncados, em que é utilizado em situações onde os dados são provenientes de uma distribuição que é uma mistura de uma distribuição beta no intervalo $(c, 1)$ e uma distribuição trinomial que assume valores zero, um e c .

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem bayesiana no que diz respeito à estimação e validação do modelo de regressão beta, discutindo alguns pontos importantes no uso dessa abordagem em diversas situações possíveis na atualidade. Além disso, discutimos também o uso da abordagem bayesiana nos modelos de regressão beta inflacionados em zeros e/ou uns. Realizamos um estudo de simulação, a fim de verificar diversas situações possíveis. Além disso, aplicamos a metodologia proposta num conjunto de dados reais, para exemplificar o contexto.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: primeiramente no capítulo 2 expomos todo o assunto, tais como as distribuições beta, os modelos, todo aspecto da inferência bayesiana, entre outros. Após isso, nos capítulos 3, 4 e 5 temos os estudos de simulações para os modelos de regressão Beta, Beta inflacionado em zero ou um, e os modelos Beta inflacionados em zero e um e também toda a análise. No capítulo 6 apresentamos a aplicação com os dados reais da metodologia discutida em todo o trabalho. Por fim, no capítulo 7, apresentamos uma consideração final sobre o trabalho.

Os resultados obtidos nesse trabalho foram feitos utilizando o ambiente computacional R na sua versão 2.12.2. Os principais pacotes utilizados foram “betareg”, “gamlss” e “gamlss.dist”. Alguns gráficos foram elaborados utilizando o Excel na sua versão 2010.

A dissertação foi digitada usando o sistema tipográfico \LaTeX . Esse sistema foi desenvolvido por Leslie Lamport em 1985.

Capítulo 2

Aspectos Inferenciais em Modelo de Regressão Beta

2.1 Introdução

A Inferência Bayesiana utiliza-se dos conhecimentos prévios a respeito dos parâmetros envolvidos no estudo, no que chamamos de informação *a Priori*. Nessa abordagem, os parâmetros passam a ser variáveis aleatórias e não mais variáveis fixas. A metodologia usada nesta abordagem é devido ao *Teorema de Bayes*, que mostra a relação entre a probabilidade condicional da evidência dado a hipótese, e vice-versa, da hipótese dado a evidência. Esse importante Teorema da estatística é devido a *Thomas Bayes*, inglês que viveu de 1701 a 1761. Resumindo, temos que esse Teorema permite incorporar a informação *a Priori* com o conjunto de dados observados (verossimilhança) e assim, após essa composição chegamos no que podemos dizer de informação *a Posteriori*.

Em inferência bayesiana temos a seguinte combinação da verossimilhança com a informação a priori. Seja $\pi(\theta|\lambda)$ a distribuição a priori do parâmetro θ , em que λ são hiperparâmetros associados a distribuição a priori. Agora, seja $L(x|\theta; \lambda)$ a verossimilhança da amostra x condicionada ao parâmetro θ . A distribuição a posteriori considera a seguinte estrutura:

$$\pi(\theta|x, \lambda) \propto \pi(\theta|\lambda)L(x|\theta, \lambda). \quad (2.1)$$

Consideramos a proporcionalidade na equação (2.1) pelo fato da densidade a posteriori $\pi(\theta|x, \lambda)$, ter as propriedades de uma distribuição de probabilidade a menos de uma constante de proporcionalidade.

Neste contexto, nos deparamos com várias situações em que é difícil de simular da distribuição *a Posteriori*, sendo necessário o uso de técnicas computacionais avançadas, principalmente do Método MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), que é uma classe de algoritmos utilizada para simular distribuições complexas de probabilidades através das Cadeias de Markov. Esses métodos são uma resposta para o problema de simulação de quantidades presentes em modelos probabilísticos mais complexos. Dentre todos os algoritmos utilizados por esse método, podemos citar, por exemplo, o Algoritmo de *Metropolis-Hastings* como sendo um dos principais, senão o principal. O nome do algoritmo faz consideração aos artigos de Metropolis *et al* (1953) e Hastings (1970). Estes dois artigos são básicos, porém relevantes na caracterização deste método. Gamerman e Lopes (2006) descreve esse método de uma forma bem detalhada.

Atualmente, com os avanços tecnológicos e as melhorias computacionais encontradas, foi possível ampliar o uso desses métodos computacionais, e conseqüentemente, da inferência bayesiana, que nesses últimos anos tem se tornado ferramenta importantíssima na análise estatística.

Este capítulo apresenta alguns pontos importantes da Inferência Bayesiana em relação ao Modelo de Regressão Beta. Apresenta o modelo de Regressão em si e os conjuntos de distribuições *a Priori* usados na estimação dos parâmetros de regressão.

2.1.1 Modelos de Regressão Beta

Primeiramente, considere y uma observação proveniente de uma distribuição beta, que assume valores entre $(0, 1)$. Usualmente temos que a distribuição Beta é definida como $Beta(a, b)$ se:

$$f(y; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.2)$$

Nessa parametrização temos que $E(Y) = \frac{a}{a+b}$ e a $Var(Y) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$. Além disso, $\Gamma(\cdot)$ é a

função gama.

Agora, iremos apresentar a distribuição Beta parametrizada como uma estrutura do modelo de regressão conforme Ferrari e Cribari-Neto (2004) propuseram. Seja y uma observação proveniente de uma distribuição beta com média e variância:

$$E(Y) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = \frac{V(\mu)}{1 + \phi},$$

onde $V(\mu) = \mu(1 - \mu)$. Então temos que a densidade de y pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1 - \mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1 - y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.3)$$

onde $0 < \mu < 1$ e $\phi > 0$.

Nessa parametrização da distribuição Beta o parâmetro μ é a média e ϕ é o parâmetro de precisão. Isto é, fixando μ temos que quanto maior o valor de ϕ menor a variância de y .

Agora considere, Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra aleatória proveniente da distribuição beta conforme (2.3). Para cada Y_t , $t = 1, \dots, n$, a média é μ_t e parâmetro de precisão ϕ . Então o modelo é construído de tal forma que a média de y_t pode ser escrita como:

$$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^p x_{ti}\beta_i = \eta_t, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \phi > 0, \quad (2.4)$$

onde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ é o vetor dos parâmetros de regressão e, $g(\cdot)$ é uma função de ligação duas vezes diferenciável e estritamente monótona. Tal função mapeia o intervalo $(0, 1)$ no \mathbb{R} . Ainda temos que x_{t1}, \dots, x_{tp} são covariáveis associadas a t -observação.

Dentre as possibilidades da função de ligação em (2.4), podemos citar a logito, probito, log-log, entre outras. No presente trabalho utilizamos a função de ligação logito. Assim, temos que:

$$\mu_t = \frac{\exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}$$

e $\mathbf{x}_t^T = (x_{t1}, \dots, x_{tp})$, $t = 1, \dots, n$.

Por outro lado, considere agora que os dados são provenientes de uma distribuição beta, com observações pertencentes ao intervalo unitário contínuo em $(0, 1)$, e porém com zeros ou uns na amostra. Sendo assim, seja y uma observação da distribuição beta inflacionada em c ($c = 0$ ou $c = 1$). Então a densidade de Y é dada por:

$$bi_c(y; \delta, \mu, \phi) = \begin{cases} \delta & \text{se } y = c \\ (1 - \delta)f(y; \mu, \phi) & \text{se } y \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.5)$$

em que $f(y; \mu, \phi)$ é a densidade beta definida em (2.3), $0 < \delta, \mu < 1$ e $\phi > 0$.

Note que δ é a probabilidade de $y = c$ ($c = 0$ ou $c = 1$), ou seja é o parâmetro de mistura, que atribui peso ao ponto 0 ou 1, dependendo do caso. Observe que y é distribuído conforme uma mistura entre a distribuição contínua Beta e a distribuição degenerada no ponto c . Em Ospina e Ferrari (2010) há maiores detalhes a respeito da distribuição beta inflacionada.

Similarmente ao modelo de regressão beta apresentado, temos também o modelo de regressão beta inflacionado em zero ou um. Seja a densidade definida em (2.5). Entretanto, seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra dessa distribuição; para cada Y_t sua densidade é $bi_c(y; \delta, \mu_t, \phi)$ como dado em (2.5). Novamente temos que o parâmetro μ_t é definido pelo componente sistemático dado em (2.4).

Finalmente, apresentaremos a distribuição beta inflacionada em zero e um. Considere então, que os dados são provenientes de uma distribuição contínua no intervalo $(0,1)$, mas também existe, simultaneamente, ponto de massa nos dois extremos do intervalo. Logo, nesse caso, temos que y pertence ao intervalo $[0, 1]$. A densidade da variável y é definida por:

$$bizu(y; \delta, \gamma, \mu, \phi) = \begin{cases} \delta\gamma & \text{se } y = 1 \\ \delta(1 - \gamma) & \text{se } y = 0 \\ (1 - \delta)f(y; \mu, \phi) & \text{se } y \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.6)$$

em que $f(y; \mu, \phi)$ é a densidade beta definida em (2.3), $0 < \delta, \gamma, \mu < 1$ e $\phi > 0$.

Podemos afirmar que neste caso Y é distribuído conforme uma mistura entre as distribuições Beta e Bernoulli, com parâmetros (μ, ϕ) e (γ) . Note que δ é a probabilidade da observação ser 0 ou 1, ou seja é o parâmetro de mistura ou a probabilidade de mistura. Por outro lado, γ é a probabilidade da observação ser igual a um, dado que ela é inflacionada.

Note que $P(y = 1) = \delta\gamma$, $P(y = 0) = \delta(1 - \gamma)$ e, para $0 < a < b < 1$,

$$P(y \in (a, b)) = \int_a^b f(y; \mu, \phi) dy$$

De modo análogo, o modelo de regressão beta inflacionado em zero e um é uma extensão ao modelo de regressão beta inflacionado em zero ou um. A variável Y_t é distribuída conforme a densidade definida em (2.6). Assim, seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra dessa distribuição beta inflacionada em zero e um; para cada Y_t sua densidade é $bizu(y; \delta, \gamma, \mu_t, \phi)$. Mais uma vez, μ_t é definido pelo componente sistemático em (2.4).

Na Tabela 2.1 temos os 3 modelos de regressão beta estudados neste trabalho.

Tabela 2.1: Modelos de Regressão Beta

Modelo de Regressão	Distribuição	Parâmetros	Componente sistemático
Beta	$Beta(\mu_t, \phi)$	β, ϕ	$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^n x_{ti}\beta_i = \eta_t$
Beta Inflacionado em Zero ou Um	$bi_c(y; \delta, \mu_t, \phi)$	δ, β, ϕ	$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^n x_{ti}\beta_i = \eta_t$
Beta Inflacionado em Zero e Um	$bizu(y; \delta, \gamma, \mu_t, \phi)$	$\delta, \gamma, \beta, \phi$	$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^n x_{ti}\beta_i = \eta_t$

Ressaltamos que nesse trabalho não consideramos a modelagem dos parâmetros ϕ , δ e γ . Porém tais modelos foram desenvolvidos por Ospina e Ferrari (2011), Ospina (2008) e Reitman (2007) os quais relacionam tais parâmetros com preditores lineares através de funções de ligação específicas.

Vamos agora reescrever a distribuição $bizu(y; \delta, \gamma, \mu_t, \phi)$, definida na Tabela 2.1 de forma a estruturar de uma maneira clara a mistura entre as distribuições Beta e Bernoulli. Suponha que Y_t pode assumir valores no intervalo fechado $[0, 1]$. Para cada Y_t , define-se z_t como:

$$z_t = \begin{cases} 0 & \text{se } y_t \in (0, 1) \\ 1 & \text{se } y_t = 0 \text{ ou } y_t = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Quando $z_t = 0$, temos que y_t tem distribuição $Beta(\mu_t, \phi)$. Ao contrário, quando $z_t = 1$, dizemos que y_t tem distribuição $Bernoulli(\gamma)$. Ainda, sabemos que a probabilidade de $z_t = 1$, (ou seja, $P(Y_t = 0 \text{ ou } Y_t = 1) = P(Z_t = 1)$) é igual a δ , e por consequência a $P(Z_t = 0) = 1 - \delta$. Melhor dizendo, temos que $Z_t \sim Bernoulli(\delta)$.

Portanto temos que a função de distribuição acumulada de Y_t condicionada ao valor de Z_t é dada por:

$$F(y_t|z_t; \delta, \gamma, \mu_t, \phi) = F_1(y_t; \mu_t, \phi)^{1-z_t} F_2(y_t; \gamma)^{z_t},$$

sendo que $F_1(y_t; \mu_t, \phi)$ é a função distribuição acumulada de uma $Beta(\mu_t, \phi)$ e $F_2(y_t; \gamma)$ é a função de distribuição acumulada de uma $Bernoulli(\gamma)$. Por outro lado, a distribuição marginal de Y_t :

$$\begin{aligned} F(y_t; \delta, \gamma, \mu_t, \phi) &= \sum_{k=0}^1 F(y_t|z_t; \delta, \gamma, \mu_t, \phi) P(z_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^1 F_1(y_t; \mu_t, \phi)^{1-k} F_2(y_t; \gamma)^k P(z_t = k) \\ &= (1 - \delta) F_1(y_t; \mu_t, \phi) + \delta F_2(y_t; \gamma), \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde os parâmetros δ, γ, μ_t e ϕ são como definidos no quadro resumo 2.1.

Resumindo podemos reescrever a função distribuição $bizu(y_t; \delta, \gamma, \mu_t, \phi, z_t)$, agora incluindo a variável z_t , como:

$$bizu(y_t; \delta, \gamma, \mu_t, \phi, z_t) = f_1(y_t; \mu_t, \phi)^{1-z_t} f_2(y_t; \gamma)^{z_t} \delta^{z_t} (1 - \delta)^{1-z_t}. \tag{2.9}$$

O valor de z_t pode ser igual a 0 ou 1. A função $f_1(y_t; \mu_t, \phi)$ é a função densidade da beta como definida em (2.3) e a função $f_2(y_t; \gamma)$ é a distribuição de probabilidade de uma $Bernoulli$ com parâmetro γ .

Note que a função descrita em (2.9) é a generalização dos demais casos apresentados nas

equações (2.3), (2.5) ou (2.6).

Na sequência apresentaremos como é a função de verossimilhança dos 3 modelos de regressão beta apresentados; o modelo de regressão beta usual, o modelo de regressão beta inflacionado em c ($c=0$ ou $c=1$) e o modelo de regressão beta inflacionado em zero e um.

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n , uma amostra aleatória em que supomos ser distribuída conforme uma Beta como dado em (2.3). Temos, então, que a verossimilhança da amostra é dada por

$$L(\boldsymbol{\beta}, \phi) = \prod_{t=1}^n \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t \phi) \Gamma((1 - \mu_t) \phi)} y_t^{\mu_t \phi - 1} (1 - y_t)^{(1 - \mu_t) \phi - 1} \quad (2.10)$$

Agora, considere Y_1, Y_2, \dots, Y_n , uma amostra aleatória que tenha distribuição dada por (2.5). Suponha que tenhamos pelo menos um caso de inflacionamento no ponto c ($c=0$ ou 1). Defina ainda, para cada y_t , uma variável z_t como em (2.7). Assim, a equação de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\delta, \boldsymbol{\beta}, \phi) &= \prod_{t=1}^n [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} P(Z_t = z_t) \\ &= \prod_{t=1}^n [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \delta^{z_t} (1 - \delta)^{1-z_t} \\ &= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1 - \delta)^{n - \sum_{t=1}^n z_t} \prod_{t | z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \\ &= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1 - \delta)^{n - \sum_{t=1}^n z_t} \prod_{t | y_t \in (0,1)} [f(y_t; \mu_t, \phi)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $Z_t \sim \text{Bernoulli}(\delta)$ e $f(y_t; \mu_t, \phi)$ é a densidade beta definida em (2.3). Note que $\sum_{t=1}^n z_t$ é a somatória de valores inflacionados na amostra e também é distribuído conforme uma *Binomial*(n, δ). Outro ponto interessante é que a verossimilhança descrita em (2.11) pode ser escrita como:

$$L(\delta, \boldsymbol{\beta}, \phi) = L_1(\delta) L_2(\boldsymbol{\beta}, \phi).$$

Ou seja, temos que a função de verossimilhança pode ser fatorada em dois termos, um que depende

apenas do parâmetro δ e outro que depende apenas dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ . Assim, toda a inferência pode ser feita de maneira independente nos dois casos. Podemos dizer ainda, que $L_1(\delta)$ envolve apenas o componente discreto do modelo, enquanto que $L_2(\boldsymbol{\beta}, \phi)$ envolve o componente contínuo do modelo. Ou seja, a verossimilhança é separável.

Vamos agora considerar que nossa amostra pertence ao intervalo $[0, 1]$. Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra independente, em que y_t tem distribuição definida em (2.6). Neste caso, suponha que tenhamos pelo menos alguma observação igual a zero e outra observação igual a um. Novamente definimos uma variável z_t , de acordo com a regra definida em (2.7). A função de verossimilhança será dada por:

$$\begin{aligned}
L(\delta, \gamma, \boldsymbol{\mu}, \phi) &= \prod_{t=1}^n [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} [f_2(y_t; \gamma)]^{z_t} P(Z_t = z_t) \\
&= \prod_{t=1}^n [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} [f_2(y_t; \gamma)]^{z_t} \delta^{z_t} (1-\delta)^{1-z_t} \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1-\delta)^{n-\sum_{t=1}^n z_t} \prod_{t|z_t=0} [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \prod_{t|z_t=1} [f_2(y_t; \gamma)]^{z_t} \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1-\delta)^{n-\sum_{t=1}^n z_t} [f_2(y_t; \gamma)]^{\sum_{t=1}^n z_t} \prod_{t|z_t=0} [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1-\delta)^{n-\sum_{t=1}^n z_t} \gamma^{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} (1-\gamma)^{\sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} \prod_{t|z_t=0} [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1-\delta)^{n-\sum_{t=1}^n z_t} \gamma^{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} (1-\gamma)^{\sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} \prod_{t|y_t \in (0,1)} [f_1(y_t; \mu_t, \phi)]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Onde $Z_t \sim \text{Bernoulli}(\delta)$, $f_1(y_t; \mu_t, \phi)$ é a densidade beta definida em (2.3) e $f_2(y_t; \gamma)$ é a distribuição de probabilidade de uma *Bernoulli* de parâmetro γ . Assim como em (2.11) $\sum_{t=1}^n z_t$ é a somatória de valores inflacionados na amostra. A função $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora do evento A . Similarmente temos que o produtório da equação (2.12) é o produtório de todas as observações $y_t \in (0, 1)$. Note que a verossimilhança dada em (2.12) pode ser escrita como:

$$L(\delta, \gamma, \boldsymbol{\beta}, \phi) = L_1(\delta) L_2(\gamma) L_3(\boldsymbol{\beta}, \phi)$$

Ou seja, temos que a verossimilhança pode ser fatorada em três termos: um que depende apenas do parâmetro δ , outro apenas do γ , outro ainda que depende apenas dos parâmetros β e ϕ . O processo de estimação desses parâmetros pode ser feita de modo independente nos três casos. Por fim, nota-se que $L_1(\delta)L_2(\gamma)$ é a parte da verossimilhança que depende apenas do componente discreto do modelo, enquanto que $L_3(\beta, \phi)$ envolve o componente contínuo do modelo.

2.1.2 Estimação via abordagem frequentista

Os modelos apresentados até agora foram estudados no presente trabalho. Duas abordagens para estimação dos parâmetros foram analisadas, a saber: a bayesiana e a frequentista. Ferrari e Cribari-Neto (2004) e Ospina e Ferrari (2011) discutem como é feita a estimação pelo método de Máxima Verossimilhança (MV). Basicamente, na estimação dos parâmetros β e ϕ é utilizado algum algoritmo de otimização não-linear para encontrar as soluções das equações da função escore de cada um dos parâmetros. Para a estimação por MV utilizamos os pacotes já implementados no software R. Para os modelos de Regressão Beta (não inflacionados) o pacote utilizado foi o “betareg” (Cribari-Neto e Zeileis (2010)). Para os modelos de Regressão Beta Inflacionados os pacotes utilizados foram o “gamlss” (Rigby e Stasinopoulos (2005)) e o “gamlss.dist” (Stasinopoulos *et al* (2011)).

No caso dos modelos inflacionados, em que temos os parâmetros ligados às observações inflacionadas, a estimação é feita resolvendo as equações da função escore que nesse caso tem solução explícita. Os detalhes do processo de estimação via abordagem frequentista não serão discutidos nesse trabalho, mas podem ser encontradas em Ferrari e Cribari-Neto (2004) e Ospina e Ferrari (2011).

2.2 Inferência Bayesiana

2.2.1 Apresentação das Prioris

Na metodologia bayesiana, escolhemos 5 conjuntos de tipos de distribuições a priori para a estimação dos parâmetros. Detalharemos a seguir cada um dos casos para a obtenção das distribuições a posteriori.

Na escolha das prioris levamos em consideração o espaço paramétrico em que cada um dos parâmetros estão definidos. Por exemplo, para o parâmetro de precisão ϕ , que é definido no intervalo $(0, \infty)$, tomamos como distribuição a priori, em um dos casos, a Gama, que é bem definida nesse intervalo. Também utilizamos algumas prioris não informativas, como as prioris de Jeffrey.

Todos os conjuntos de prioris podem ser escrito da seguinte maneira, considerando apenas os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ :

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \phi) \propto \pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\phi)$$

Somente no conjunto de prioris de Jeffreys que serão escritos como $\pi(\boldsymbol{\beta}, \phi)$, de forma que as prioris de cada parâmetro não sejam separáveis. Todavia, apresentaremos sempre separado para cada uma das distribuições a priori.

Vamos expor as distribuições a priori para os parâmetros de regressão $\boldsymbol{\beta}$. Note que o vetor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ pode ser definido como tendo uma distribuição Normal multivariada com vetor $p \times 1$ de média $\boldsymbol{\mu}_\beta = (\mu_{b1}, \dots, \mu_{bp})^T$ e matriz $p \times p$ de variância e covariância Σ_β , ou seja:

$$\pi(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_\beta|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_\beta)^T \Sigma_\beta^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_\beta)\right) \quad (2.13)$$

Em conjunto com a priori normal multivariada definida em (2.13), utilizamos duas prioris diferentes para o parâmetro de precisão ϕ . Uma, a priori Gama e outra, a priori proporcional a uma constante, que é uma priori imprópria e não informativa.

A primeira priori é dada por:

$$\pi(\phi) = \frac{1}{\lambda\eta\Gamma(\eta)}\phi^{\eta-1}e^{-\frac{\phi}{\lambda}}, \quad \phi > 0, \eta, \lambda > 0. \quad (2.14)$$

Os hiperparâmetros são definidos de acordo com algum conhecimento prévio dos dados em questão. O valor esperado é dado por $E(\phi) = \eta\lambda$ e a variância é $Var(\phi) = \eta\lambda^2$. Podemos decidir também por escolher qual média e variância para a distribuição a priori (2.14). Assim, definindo essas quantidades, podemos facilmente encontrar os valores dos hiperparâmetros. Por exemplo, definindo que a média seja igual a h_1 e a variância igual a h_2 , é fácil provar que:

$$\lambda = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{h_1^2}{h_2}$$

A segunda priori é dada por:

$$\pi(\phi) \propto 1, \quad \phi > 0$$

Essa priori, como já mencionado, é uma priori imprópria. Prioris desse tipo podem levar a distribuições a posterioris impróprias também. Porém, como avaliaremos nos próximos capítulos, os resultados obtidos da simulação MCMC da distribuição a posteriori sugerem que as posterioris são próprias. Este aspecto merece mais investigação, mas não faz parte dos objetivos do presente trabalho. Vale ressaltar que o nome “proporcional” para esse conjunto de priori é devido a priori do parâmetro de precisão ϕ .

Vamos agora apresentar as prioris de Jeffreys sob independência e de Jeffreys para os parâmetros β e ϕ . Primeiramente vamos mostrar como são as matrizes de Informação de Fisher. Essa matriz é obtida através do valor esperado da derivada segunda da log-verossimilhança. Mais detalhes sobre esses desenvolvimentos podem ser encontrados em Oliveira (2004) e Ospina (2008).

Seja $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$, $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ e $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, em que $w_t = \psi'(\mu_t\phi) + \psi'((1 - \mu_t)\phi)$, $d_t = (1 - \mu_t)^2\psi'((1 - \mu_t)\phi) + \mu_t^2\psi'(\mu_t\phi) - \psi'(\phi)$ e $c_t = \phi[\mu_t w_t + ((1 - \mu_t)\phi)]$. Defina ainda, $T = \text{diag}\{d\mu_1/d\eta_1, \dots, d\mu_n/d\eta_n\} = \text{diag}\{\frac{1}{g'(\mu_1)}, \frac{1}{g'(\mu_2)}, \dots, \frac{1}{g'(\mu_n)}\}$, com η_t como definido em

(2.4), e $\Delta_{(0,1)} = \text{diag}\{1/(1 - \delta), \dots, 1/(1 - \delta)\}$ uma matriz diagonal $n \times n$. A função $\psi(\cdot)$ é a função digama, definida como: $\psi(\tau) = \frac{d \log \Gamma(\tau)}{d\lambda} = \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}$, $\tau > 0$

A matrizes de Informação de Fisher são calculadas de acordo com o modelo proposto. Assim, teremos três matrizes, uma para cada modelo.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que o modelo estudado é o de regressão Beta em que os dados não são inflacionados, isto é, o modelo Beta descrito na Tabela 2.1. As matrizes de Informação de Fisher são dadas por:

$$\begin{aligned} K_{\beta\beta} &= \phi^2 X^T \{TWT\} X \\ K_{\beta\phi} &= K_{\phi\beta}^T = X^T T c \\ K_{\phi\phi} &= \text{tr}(D), \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde, de forma geral, $\text{tr}(M)$ é o traço da matriz M . Finalmente, a matriz completa da Informação de Fisher de (β, ϕ) é dada por:

$$K(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Note que os parâmetros β e ϕ não são ortogonais. O trabalho de Ferrari e Cribari-Neto (2004) apresenta os cálculos detalhado da matriz de Informação de Fisher para os parâmetros do modelo de regressão Beta.

Considere agora o modelo de regressão Beta inflacionado em zero ou um conforme descrito no quadro 2.1. Como já visto anteriormente, uma das características da verossimilhança é que ela pode ser separada em dois termos, sendo um que envolve apenas o parâmetro δ relacionado aos dados inflacionados (0 ou 1), e outro termo que envolve apenas os parâmetros β e ϕ . Com isso, a

matriz de Informação de Fisher é dada por:

$$\begin{aligned}
K_{\delta\delta} &= 1/[\delta(1 - \delta)] \\
K_{\beta\beta} &= \phi^2 X^T \{ \Delta_{(0,1)}^{-1} TWT \} X \\
K_{\beta\phi} &= K_{\phi\beta}^T = X^T \Delta_{(0,1)}^{-1} Tc \\
K_{\phi\phi} &= tr(\Delta_{(0,1)}^{-1} D)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

O fato da verossimilhança ser separável, faz com que as derivadas cruzadas serem nulas, ou seja, $K_{\delta\beta} = K_{\delta\phi} = 0$. Neste caso, o parâmetro δ é ortogonal aos parâmetros β e ϕ . Sendo assim, a matriz de Informação de Fisher fica:

$$K(\delta, \beta, \phi) = \begin{pmatrix} K_{\delta\delta} & 0 \\ 0 & K(\beta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\delta\delta} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ 0 & K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Ospina e Ferrari (2011) apresentam os cálculos detalhado da matriz de Informação de Fisher para o modelo de regressão beta inflacionado em zero ou um.

Por fim, apresentaremos a matriz de Informação de Fisher para o modelo Inflacionado em zero e um. Lembrando que neste caso a verossimilhança é fatorada em três termos. Um que depende apenas do parâmetro δ , outro que envolve apenas o parâmetro γ e o último que envolve o conjunto de parâmetros (β, ϕ) . Com isso, as matrizes das derivadas cruzadas ficam todas iguais a zero, ou seja, $K_{\delta\beta} = K_{\delta\phi} = K_{\delta\gamma} = K_{\gamma\beta} = K_{\gamma\phi} = 0$.

$$\begin{aligned}
K_{\delta\delta} &= 1/[\delta(1 - \delta)] \\
K_{\gamma\gamma} &= \delta/[\gamma(1 - \gamma)] \\
K_{\beta\beta} &= \phi^2 X^T \{\Delta_{(0,1)}^{-1} TWT\} X \\
K_{\beta\phi} &= K_{\phi\beta}^T = X^T \Delta_{(0,1)}^{-1} Tc \\
K_{\phi\phi} &= tr(\Delta_{(0,1)}^{-1} D)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$K(\delta, \gamma, \boldsymbol{\beta}, \phi) = \begin{pmatrix} K(\delta, \gamma) & 0 \\ 0 & K(\boldsymbol{\beta}, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\delta\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\gamma\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ 0 & 0 & K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Assim, as matrizes de Informação de Fisher do Modelo de Regressão Beta, Modelo de Regressão Beta Inflacionado em c e Modelo Inflacionado em Zero e Um são dadas pelas matrizes (2.16), (2.18) e (2.20).

A priori de Jeffreys é definida pela raiz quadrada do determinante da matriz de Informação de Fisher. Por outro lado, a priori de Jeffreys sob a suposição de independência entre $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ , é definida como:

$$\pi(\boldsymbol{\beta}) \propto \sqrt{|K_{\beta\beta}|} \quad \text{e} \quad \pi(\phi) \propto \sqrt{|K_{\phi\phi}|}. \tag{2.21}$$

E, finalmente, sem a suposição de independência, temos que a priori de Jeffreys é dada por:

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \phi) \propto \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|} \tag{2.22}$$

As matrizes $K_{\beta\beta}$, $K_{\phi\phi}$, $K_{\beta\phi}$ e $K_{\phi\beta}$ são definidas de acordo com o modelo que está sendo proposto. Para o modelo de regressão Beta as matrizes são dadas em (2.15). Para o modelo Inflacionado em

c , elas são dadas por (2.17). E no modelo Inflacionado em zero e um as matrizes são definidas em (2.19).

Vale ressaltar que a priori de Jeffreys é não informativa. Particularmente, Souza (2011) mostrou que a priori de Jeffreys para o parâmetro ϕ e no caso específico que as médias são iguais em todas as observações, que ela é imprópria. Nos capítulos a seguir, mostraremos através de estudos de simulações que as posterioris obtidas com as prioris de Jeffreys sugerem que elas são próprias.

Para os parâmetros γ e δ , que assumem valores entre $(0, 1)$, a distribuição a priori escolhida foi a Beta. Definimos que uma variável θ tem distribuição $Beta(a, b)$ se:

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.23)$$

Nessa parametrização temos que $E(\theta) = \frac{a}{a+b}$ e a $Var(\theta) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$. Nesse caso temos que escolher os hiperparâmetros a e b de acordo com a experiência do pesquisador, ou mesmo alguma outra informação disponível no estudo.

A Tabela 2.2 apresenta os conjuntos das prioris utilizadas para cada parâmetro dos modelos estudados.

Tabela 2.2: *Prioris associadas aos parâmetros do modelo em cada uma das abordagens bayesianas*

	β	ϕ
Prioris Usuais	$N_p(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$	$Gama(\eta, \lambda)$
Jeffreys Independente	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta} }$	$\propto \sqrt{ K_{\phi\phi} }$
Jeffreys	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta} }$	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta} }$
Proporcional	$N_p(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$	$\propto 1$
	δ	γ
Bayesiano	$Beta(a_1, b_1)$	$Beta(a_2, b_2)$

2.2.2 Apresentação das posterioris e das condicionais completas

Conforme a idéia apresentada em (2.1), iremos combinar a verossimilhança com a distribuição a priori, encontrando assim o *kernel* da distribuição a posteriori. Como já mencionado anteriormente, a verossimilhança pode ser fatorada em pelo menos dois termos diferentes nos modelos

inflacionados. A parte que depende apenas dos parâmetros de regressão e outra que depende apenas do componente discreto do modelo. Pelo fato da separabilidade da função de verossimilhança, podemos obter as posteriores de maneira independente. Neste momento, iniciaremos mostrando as posteriores dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ . Além disso, a estimação dos parâmetros do componente contínuo ($\boldsymbol{\beta}$ e ϕ) é similar nos três modelos estudados neste trabalho. As verossimilhanças de cada modelo, dependem apenas dos dados pertencentes ao intervalo (0,1). Por isso, podemos generalizar a apresentação das posteriores de todos os modelos para esses parâmetros.

Outro ponto a discutir é que as posteriores podem ser escritas da seguinte forma:

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \phi | \mathbf{y}) \propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi) \pi(\boldsymbol{\beta}, \phi) \propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi) \pi(\boldsymbol{\beta}) \pi(\phi)$$

Entretanto, as distribuições a posteriores em nenhum caso terão forma conhecida. Iremos então, trabalhar com as condicionais completas, que são dadas por:

$$\pi(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \phi) \propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi) \pi(\boldsymbol{\beta}) \quad \text{e} \quad \pi(\phi | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) \propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi) \pi(\phi)$$

Mostraremos a seguir que essas condicionais completas não possuem forma conhecida, e por isso, utilizaremos algum método MCMC (que será apresentado na Seção 2.2.3) para simulação dessa distribuição.

Considere cada uma das verossimilhanças apresentadas em (2.10), ou a função $L_2(\boldsymbol{\beta}, \phi)$ da equação (2.11), ou a função $L_3(\boldsymbol{\beta}, \phi)$ da equação (2.12), a depender do modelo proposto. Note que cada uma das verossimilhanças são similares pelo fato de que todas dependem apenas dos valores de $y_t \in (0, 1)$.

Primeiramente, considere o conjunto de priori usuais como mostrado na Tabela 2.2. A condi-

cional completa do vetor $\boldsymbol{\beta}$ é determinada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \phi) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\boldsymbol{\beta}) & (2.24) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_{\boldsymbol{\beta}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})^T \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})\right) \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t \phi) \Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t \phi - 1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi - 1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})^T \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})\right) \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu_t \phi) \Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t \phi - 1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi - 1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})^T \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}})\right)
\end{aligned}$$

e a condicional completa do parâmetro ϕ é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\phi|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \eta, \lambda) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\phi) & (2.25) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \frac{1}{\lambda^\eta \Gamma(\eta)} \phi^{\eta-1} e^{-\frac{\phi}{\lambda}} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t \phi) \Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t \phi - 1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi - 1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \frac{1}{\lambda^\eta \Gamma(\eta)} \phi^{\eta-1} e^{-\frac{\phi}{\lambda}}
\end{aligned}$$

Nota-se que as duas distribuições não possuem forma fechada. Isto nos leva a utilizar algum método de simulação, para obtermos amostras da densidade a posteriori.

Agora, considere o conjunto de priors Proporcional. Neste caso, a condicional completa para o parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ é igual a equação (2.24). A diferença está na densidade da condicional completa

do parâmetro ϕ que é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\phi|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\phi) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Novamente para esses conjuntos de prioris, as condicionais completas não têm forma conhecida. Uma das soluções é utilizar o algoritmo de *Metropolis-Hastings* para amostrar dessa densidade.

Vamos agora apresentar as condicionais completas do conjunto de prioris de Jeffreys sob a suposição de independência, conforme mostrado na Tabela 2.2. A condicional completa do parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ é:

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \phi) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\boldsymbol{\beta}) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}|}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e a condicional completa do parâmetro ϕ é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\phi|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\phi) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \propto \sqrt{|K_{\phi\phi}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\phi\phi}|}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Por fim, temos o conjunto de condicionais completas provenientes das prioris de Jeffreys para

os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ que são dados por:

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \phi) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\boldsymbol{\beta}) & (2.29) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|}
\end{aligned}$$

e para o parâmetro ϕ é igual a:

$$\begin{aligned}
\pi(\phi|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}) &\propto L(\boldsymbol{\beta}, \phi)\pi(\phi) & (2.30) \\
&= \prod_{t|z_t=0} [f(y_t; \mu_t, \phi)]^{1-z_t} \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|} \\
&\propto \prod_{t|z_t=0} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1} (1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1} \right]^{1-z_t} \\
&\times \sqrt{|K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta}|}
\end{aligned}$$

Assim como nos demais casos, as densidades a posteriori dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ não tem forma conhecida para os dois conjuntos de prioris de Jeffreys, assim como suas condicionais completas. Ou seja as posterioris de interesse não são obteníveis. Assim, temos de usar métodos de simulação MCMC. Além disso, como as condicionais completas não são conhecidas, devemos utilizar algum algoritmo auxiliar para amostrar delas. Como já mencionado, foi utilizado o algoritmo de *Metropolis-Hastings* para amostrar das densidades a posteriori. Podem ainda ser sugeridos outros métodos, como a Rejeição adaptativa ou o “slice-sampling”. Para detalhes veja Gamerman e

Lopes (2006).

2.2.3 Desenvolvimento do algoritmo MCMC

No enfoque bayesiano de estimação dos parâmetros do modelo as distribuições a posteriori não possuem forma conhecida, e então precisamos de algum método de simulação para amostrar da densidade a posteriori. O algoritmo de *Metropolis-Hastings* é um método de simulação que se baseia em algoritmos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC - *Markov Chain Monte Carlo*). Gamerman e Lopes (2006) descrevem o algoritmo de MH com maiores detalhes. Resumidamente, se queremos amostrar de uma densidade $\pi(\theta)$, primeiramente calculamos uma probabilidade de transição, $\alpha(\theta, \cdot)$, que é a combinação da densidade $\pi(\theta)$ com um *Kernel* de transição arbitrário, $q(\cdot, \theta)$. A expressão para a probabilidade de transição é:

$$\alpha(\theta, \omega) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\omega)q(\omega, \theta)}{\pi(\theta)q(\theta, \omega)} \right\} \quad (2.31)$$

Assim, em termos práticos, a simulação de Monte Carlo pode ser descrita nos seguintes passos:

1. Inicialize a iteração com o contador $j = 1$ e um valor inicial arbitrário $\theta^{(0)}$
2. Mova a cadeia para um novo valor ω gerado da densidade $q(\theta^{(j-1)}, \cdot)$
3. Avalie a probabilidade de aceitação dada em (2.31). Se o movimento é aceito, $\theta^{(j)} = \omega$, e se não for aceito, $\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)}$ e a cadeia não se move
4. Altere o contador de j para $j + 1$ e retorne ao passo 2 até que um número suficiente de iterações MCMC seja obtida

Pode-se utilizar ao invés da razão entre quocientes na probabilidade de transição, tomar o logaritmo e assim ficar com uma soma. Isto pode facilitar a implementação computacional.

Para verificar se houve a convergência, utilizamos alguns métodos para monitorar a mesma. Um deles é a inspeção visual através de gráficos das autocorrelações, e também da observação

da trajetória de diferentes cadeias, o que nos permite verificar a convergência em distribuição na medida que aumenta o número de iterações. Utilizamos também os critérios como o de Geweke, proposto em Geweke (1992) e o critério de Gelman e Rubin, sugerido por Gelman e Rubin (1992). O critério de Geweke sugere a verificação da convergência através de testes de médias, em intervalos diferentes, após o período de *burn-in* do algoritmo. Se a convergência foi alcançada, os comportamentos nos diferentes intervalos devem ser parecidos. Já o critério de Gelman e Rubin, avalia a convergência utilizando cadeias paralelas. O teste consiste em comparar a variância entre e dentro das cadeias. Gamerman e Lopes (2006) descrevem estes critérios com maiores detalhes. Mais adiante iremos mostrar uma simulação feita, em que utilizamos esses critérios para monitoramento da convergência da cadeia.

No uso do algoritmo, como *Kernel* de transição do parâmetro β utilizamos a distribuição Normal com média igual a estimativa de máxima verossimilhança deslocada de uma constante e como matriz de covariância, a matriz obtida com as variâncias e covariâncias estimadas por máxima verossimilhança, mas multiplicada por um fator de escala. Para o parâmetro ϕ utilizamos a distribuição log-Normal. Temos que o logaritmo do parâmetro ϕ é distribuído como uma Normal com média igual ao logaritmo do valor obtido no passo anterior, e como variância uma constante previamente escolhida. Basicamente a escolha dos *Kernel* de transição é baseada na facilidade de amostrar dessa densidade e também que tal densidade nos leve a uma probabilidade de transição alta, fazendo com que a cadeia de Markov se mova até a convergência. Maiores detalhes podem ser visto em Gamerman e Lopes (2006) e Gamerman (1996).

Na aplicação com dados reais, no capítulo 6, foi utilizada uma pequena modificação na distribuição de transição, somente para os vetor de parâmetros β . Ao invés de se utilizar a normal multivariada com as estimativas de MV, trocamos a matriz de variância e covariância considerando apenas a diagonal principal dela, multiplicada por um fator de escala. Essa alteração foi feita para auxiliar a convergência do algoritmo.

Resumindo, utilizamos esse algoritmo para amostrar da densidade a posteriori dos parâmetros β e ϕ , pois suas distribuições não tem forma conhecida. Salientamos ainda que nos 3 modelos

estudados (modelo de Regressão Beta não inflacionado, inflacionado em zero ou um e inflacionado em zero e um) o processo de estimação são bem similares. A diferença consiste que nos modelos inflacionados, utilizamos no algoritmo de *Metropolis-Hastings* somente as observações diferentes de zero ou um. Assim como para o conjunto de prioris de Jeffreys usamos as distribuições definidas na Tabela 2.2, utilizando a matriz de Informação de Fisher de acordo com o modelo em análise conforme as equações (2.16), (2.18) e (2.20).

2.2.4 Inferência Bayesiana para os parâmetros δ e γ

Finalmente, para encerrar os aspectos da estimação bayesiana desse trabalho, vamos discutir como são os estimadores dos parâmetros associados ao componente discreto do modelo de regressão Beta. Neste caso, somente faz sentido discutir para os modelos inflacionados em zero ou/e um. Os parâmetros são o δ e o γ , referentes a probabilidade de dados inflacionados na amostra e a probabilidade da observação ser igual a um, dado que ela é inflacionada, respectivamente.

Diferentemente dos parâmetros de regressão, os parâmetros δ e γ , apresentam posterioris conhecidas. A combinação da verossimilhança com a distribuição a priori tem a forma de uma distribuição beta. Para esses parâmetros a distribuição a priori definida foi a beta, conforme a Tabela 2.2.

Considere, primeiramente, a função definida em $L_1(\delta)$, apresentada na equação (2.11) e na equação (2.12). Assim, combinando a função de verossimilhança e a priori definida em (2.23) teremos a seguinte distribuição a posteriori para o parâmetro δ :

$$\begin{aligned}
\pi(\delta|\mathbf{y}, a_1, b_1) &\propto L(\delta)\pi(\delta) & (2.32) \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1 - \delta)^{n - \sum_{t=1}^n z_t} \frac{\Gamma(a_1 + b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)} \delta^{a_1-1} (1 - \delta)^{(b_1-1)} \\
&\propto \delta^{\sum_{t=1}^n z_t} (1 - \delta)^{n - \sum_{t=1}^n z_t} \delta^{a_1-1} (1 - \delta)^{(b_1-1)} \\
&= \delta^{\sum_{t=1}^n z_t + a_1 - 1} (1 - \delta)^{n - \sum_{t=1}^n z_t + b_1 - 1}
\end{aligned}$$

Note que a distribuição a posteriori de δ é uma Beta com parâmetros $(\sum_{t=1}^n z_t + a_1, n - \sum_{t=1}^n z_t + b_1)$. O estimador bayesiano nesse caso é a esperança a posteriori que é definida por:

$$E(\delta|\mathbf{y}, a_1, b_1) = \frac{\sum_{t=1}^n z_t + a_1}{a_1 + n + b_1} \quad (2.33)$$

E sua variância que é dada por:

$$Var(\delta|\mathbf{y}, a_1, b_1) = \frac{(\sum_{t=1}^n z_t + a_1)(n - \sum_{t=1}^n z_t + b_1)}{(a_1 + n + b_1 + 1)(a_1 + n + b_1)^2} \quad (2.34)$$

Agora, veja na equação (2.12) o termo $L_2(\gamma)$. Combinando com a distribuição a priori definida em (2.23), com os hiperparâmetros (a_2, b_2) conforme o quadro 2.2, teremos a seguinte distribuição a posteriori para o parâmetro γ :

$$\begin{aligned} \pi(\gamma|\mathbf{y}, a_2, b_2) &\propto L(\gamma)\pi(\gamma) & (2.35) \\ &= \gamma^{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)}(1-\gamma)^{\sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} \frac{\Gamma(a_2 + b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \gamma^{a_2-1}(1-\gamma)^{b_2-1} \\ &\propto \gamma^{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)}(1-\gamma)^{\sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1)} \gamma^{a_2-1}(1-\gamma)^{b_2-1} \\ &= \gamma^{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1) + a_2 - 1} (1-\gamma)^{\sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t=1) + b_2 - 1} \end{aligned}$$

A distribuição a posteriori do parâmetro γ é uma Beta com parâmetros $(\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t = 1) + a_2, \sum_{t=1}^n z_t - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t = 1) + b_2)$. Com isso, o valor esperado a posteriori do parâmetro γ é dado por:

$$E(\gamma|\mathbf{y}, a_2, b_2) = \frac{\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t = 1) + a_2}{a_2 + \sum_{t=1}^n z_t + b_2} \quad (2.36)$$

E sua variância é dada por:

$$Var(\gamma|\mathbf{y}, a_2, b_2) = \frac{(\sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t = 1) + a_2)(n - \sum_{t=1}^n \mathbb{I}(y_t = 1) + b_2)}{(a_2 + \sum_{t=1}^n z_t + b_2 + 1)(a_2 + \sum_{t=1}^n z_t + b_2)^2} \quad (2.37)$$

Assim, concluímos todos os aspectos inferenciais proposto nesse trabalho. Iniciaremos a seguir,

os estudos de simulação realizados para verificar o ferramental proposto.

Capítulo 3

Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta

3.1 Introdução

Os objetivos desse estudo são comparar as estimativas bayesianas com as de Máxima Verossimilhança, verificar a sensibilidade das estimativas bayesianas à escolha das prioris e avaliar o impacto dos fatores na precisão das estimativas dos diferentes métodos. Para isso foi feito um estudo de simulação. Foram fixados três fatores: o tamanho amostral, o número de covariáveis (consequentemente os valores verdadeiros dos parâmetros associados a essas covariáveis) e o valor verdadeiro do parâmetro de precisão ϕ (relacionado com a variabilidade dos dados).

Os tamanhos amostrais propostos foram 20, 50 e 200; o número de covariáveis foram 2 e 5; e finalmente, os valores verdadeiros de ϕ foram 20, 50, 200 e 1000. Na situação em que o número de covariáveis é dois, os verdadeiros valores dos parâmetros de regressão são $\beta_0 = -1,5$ e $\beta_1 = 1,5$. No caso em que o número de covariáveis é igual a cinco, os verdadeiros valores do vetor de parâmetros β 's são $\beta_0 = -3,0$, $\beta_1 = -1,5$, $\beta_2 = 0,0$, $\beta_3 = 1,5$ e $\beta_4 = 3,0$. Os valores escolhidos dos parâmetros de regressão foram baseados nas aplicações com dados simulados e também com dados reais dos trabalhos de Ferrari e Cribari-Neto (2004) e de Ospina e Ferrari (2011).

Lembrando que temos 6 conjuntos de estimativas provenientes de dois métodos de estimação utilizados, o bayesiano e o frequentista. Dentre os 6, temos 5 bayesianos, os quais estão relacionados com as distribuições a priori usadas. A saber teremos: as prioris usuais 1, prioris usuais 2, Jeffreys

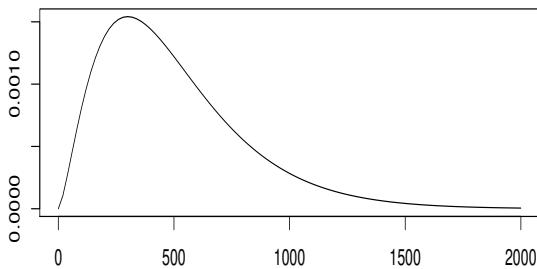
sob independência, Jeffreys e proporcional. A Tabela 3.1 mostra as prioris associadas a cada uma das abordagens bayesianas. Sendo que $K(\cdot, \cdot)$ é a matriz de Informação de Fisher definida em (2.15).

Tabela 3.1: *Prioris associadas aos parâmetros do modelo em cada uma das abordagens bayesianas*

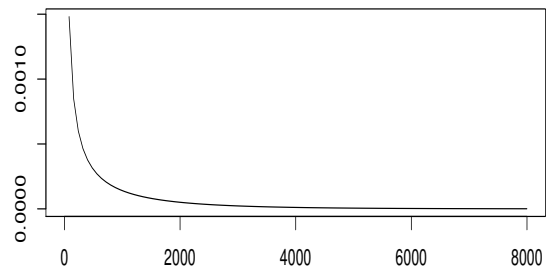
	β	ϕ
Prioris Usuais 1	$N_p(\mathbf{0}, 25I_p)$	$Gama(500, 100000)$
Prioris Usuais 2	$N_p(\mathbf{0}, 25I_p)$	$Gama(500, 1000000)$
Jeffreys Independente	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta} }$	$\propto \sqrt{ K_{\phi\phi} }$
Jeffreys	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta} }$	$\propto \sqrt{ K_{\beta\beta}K_{\phi\phi} - K_{\beta\phi}K_{\phi\beta} }$
Proporcional	$N_p(\mathbf{0}, 25I_p)$	$\propto 1$

Na Figura 3.1 temos as duas densidades gama propostas para o parâmetro ϕ . Para ilustrar o comportamento delas, foram construídas a linha da densidade real das duas distribuições gama. Ambas as distribuições possuem média igual a 500. A diferença está na variância, que na priori usual 1 é igual à 100000 e na usual 2 é igual à 1000000. Note que na primeira os valores se concentram de 0 a 1500. Enquanto na segunda, os valores vão de 0 até 8000, e, na grande maioria, concentrando-se de 0 a 2000.

Os valores dos hiperparâmetros foram escolhidos baseando-se nas aplicações dos trabalhos de Ospina (2008) e Oliveira (2004).



(e) *Priori Usual 1 - Gama(500, 100000)*



(f) *Priori Usual 2 - Gama(500, 1000000)*

Figura 3.1: *Densidades das distribuições a priori associadas ao parâmetro ϕ*

Vamos detalhar os passos usados no estudo de simulação. Para cada combinação dos níveis dos três fatores fixados, a matriz regressora é gerada da distribuição Uniforme no intervalo (0,1). Oliveira (2004) e Ospina (2008) utilizaram também como a matriz das variáveis regressoras como distribuídas conforme $U(0, 1)$. Qualquer covariável pode facilmente ser deslocada para o intervalo unitário, sendo assim, esse foi um dos motivos que também não utilizamos outra distribuição para simular as covariáveis. Além disso, Oliveira (2004) utilizou outras covariáveis no estudo de simulação, e não encontrou nenhum apontamento que pudesse interferir nos resultados.

Após isso, é gerada a variável resposta y_1, \dots, y_n , com $Y_t \sim \text{Beta}(\mu_t, \phi)$ e:

$$\mu_t = \frac{\exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}$$

Para cada amostra gerada, são calculados as estimativas dos parâmetros do modelo. Tal processo foi repetido 100 vezes (100 réplicas). Na abordagem bayesiana utilizamos a esperança a posteriori como estimador, sendo que o algoritmo MCMC foi usado para amostrar das posteriores. Os algoritmos foram implementados no software R, enquanto que as estimativas de Máxima Verossimilhança foram obtidas utilizando-se o pacote “betareg” no software R. Zeiles e Cribari-Neto (2010) apresentam maiores detalhes desse pacote.

Dessas 100 réplicas, as seguintes quantidades foram calculadas: Média, Variância, Vício, raiz quadrada do Erro Quadrático Médio (REQM) e o valor absoluto do vício relativo (da sigla em inglês AVR - *Absolute Value of Relative Bias*). Considere que $\hat{\theta}_r$ é a estimativa obtida da r -ésima réplica para cada parâmetro. Então, define-se cada uma das estatísticas como:

- **Média:** média das $R = 100$ réplicas

$$\rightarrow \widehat{\theta}_R = \sum_{r=1}^R \frac{\hat{\theta}_r}{R}$$

- **Variância:** variância das $R = 100$ réplicas

$$\rightarrow \widehat{Var}_{\theta} = Var(\widehat{\theta}_R) = \sum_{r=1}^R \frac{(\hat{\theta}_r - \widehat{\theta}_R)^2}{R-1}$$

- **Vício:** diferença da média com o valor verdadeiro do parâmetro

$$\rightarrow \widehat{Vicio}_\theta = Vicio(\widehat{\theta}_R) = \widehat{\theta}_R - \theta$$

- **REQM**: raiz quadrada da soma do vício ao quadrado com a variância

$$\rightarrow \widehat{REQM}_\theta = REQM(\widehat{\theta}_R) = \sqrt{\widehat{Vicio}_\theta^2 + \widehat{Var}_\theta}$$

- **AVRB**: valor absoluto do vício dividido pelo valor absoluto do verdadeiro valor do parâmetro

$$\rightarrow \widehat{AVRB}_\theta = \frac{|\widehat{Vicio}_\theta|}{|\theta|}$$

Com exceção da média, para todas as outras estatísticas calculadas, quanto menor seu valor, melhor o desempenho do método de estimação. Porém, vale ressaltar que o vício tem essa característica quando analisado em termos do seu valor absoluto. Além disso, foram construídos os box-plots das 100 estimativas e gráficos dos REQM.

A fim de simplificar os resultados, e para evitar um número excessivo de tabelas e gráficos, consideramos uma média dos valores de AVRB e REQM obtidos para os parâmetros β . Por exemplo, para o caso em que $p=2$, calculamos a média do AVRB obtida dos parâmetros β_0 e β_1 e apresentamos nas tabelas, assim como para o REQM, só que nesse caso apresetamos nos gráficos. Mesmo resumo foi feito para o caso em que $p=5$.

3.2 Estudo de Convergência

Mostraremos a seguir um exemplo do estudo de convergência feito para os modelos de regressão Beta não inflacionado. Utilizamos o conjunto de prioris usuais, conforme tabela (2.2). Primeiramente, escolhemos os valores verdadeiros dos parâmetros do modelo de regressão beta como sendo igual a $\beta = (-1, 5; 1, 5)$ e o parâmetro $\phi = 200$. As covariáveis foram amostradas da distribuição Uniforme no intervalo $(0,1)$. O tamanho amostral igual a 50. Os hiperparâmetros da densidade a priori Normal foram iguais a 0 (vetor de média igual ao vetor nulo) e 25 (matriz de variância e covariância, com todos elementos da diagonal principal igual a 25) para o vetor de parâmetro β . Para o parâmetro de precisão ϕ , a densidade a priori gama foi definida com média igual a 500 e variância igual a 100000.

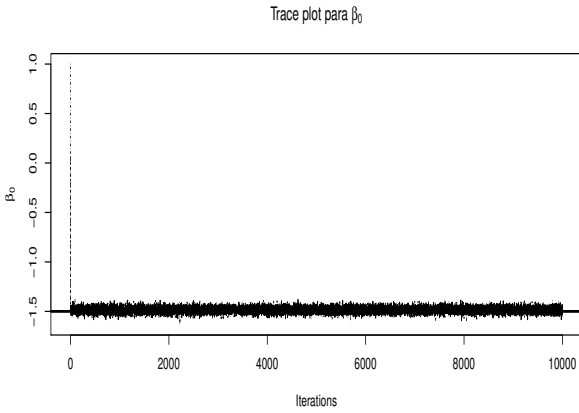
O estudo consiste de iniciar conjuntamente 3 cadeias em paralelo. Numa cadeia os valores iniciais dos parâmetros β e ϕ foram iguais aos propostos por Ferrari e Cribari-Neto (2004), para a inicialização do algoritmo de otimização. Na segunda cadeia, os valores iniciais para os elementos do vetor β foi amostrado de uma densidade Normal com média igual a zero e variância igual a 0,1, e para o valor inicial de ϕ foi amostrado de uma densidade Normal com média igual ao logaritmo do valor verdadeiro (no caso, $\log(200)$) e variância igual a 0,2, e depois tomou-se a exponencial do valor simulado. E na última cadeia, o vetor inicial β foi o vetor nulo e o para o parâmetro ϕ , amostrou-se de uma Normal com média 4,5 e variância 0,2, e tomado a exponencial desse número.

Em cada uma das cadeias o número de iterações foi igual a 10000. Considerou-se um *burn-in* igual a 1000 e espaçamento igual a 9. O tamanho da amostra final igual a 1000. Para auxílio da obtenção das estatísticas e gráficos de monitoramento da convergência das cadeias foi utilizado o pacote "Coda" (Plummer *et al* (2006)) do software R.

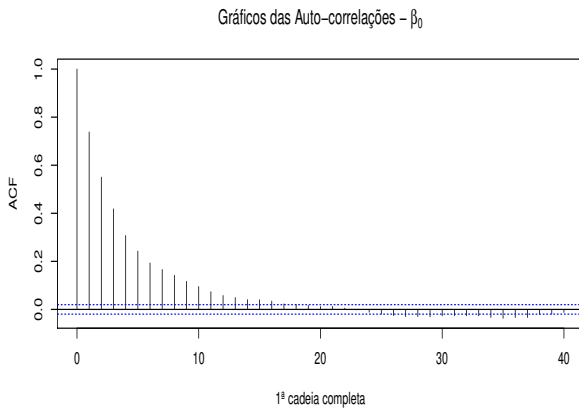
Na Figura 3.2 temos os valores das 3 cadeias completas (com as 10000 iterações), assim como as auto-correlações obtidas. Note que elas se sobrepõe, e que nos 3 parâmetros, após o período das 1000 primeiras iterações, aparentemente houve convergência para o verdadeiro valor, e que não há mais influência do valor inicial de cada uma das cadeias.

Considerando a estatística de Geweke, em todas as 3 cadeias dos parâmetros β_0 , β_1 e ϕ a maioria dos valores ficaram dentro dos limites considerados aceitáveis, o que indica convergência das cadeias. Não foram apresentados os gráficos dessa estatística para evitar que o trabalho ficasse muito longo.

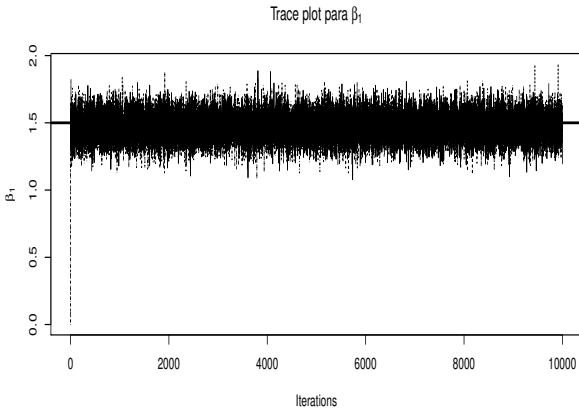
Já na Figura 3.3 temos os gráficos com as estatística de Gelman-Rubin. Quanto mais perto do valor unitário, significa que as 3 cadeias convergiram conjuntamente. Note que para os 3 parâmetros os valores estão bem próximos de 1.



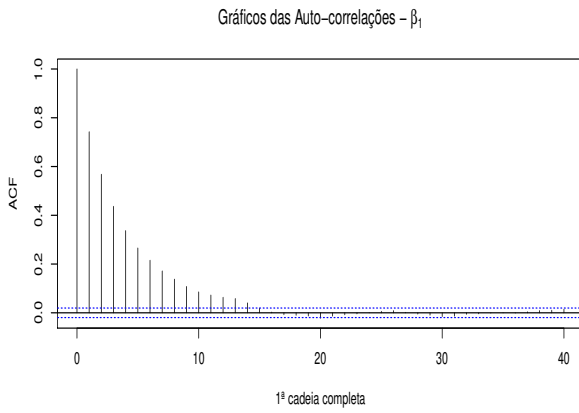
(a) *Parâmetro - β_0*



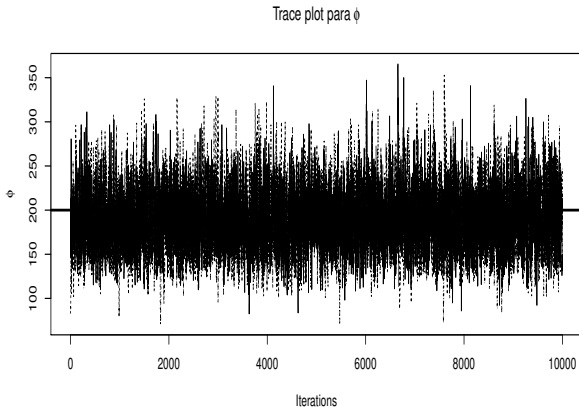
(b) *Auto-correlações - β_0*



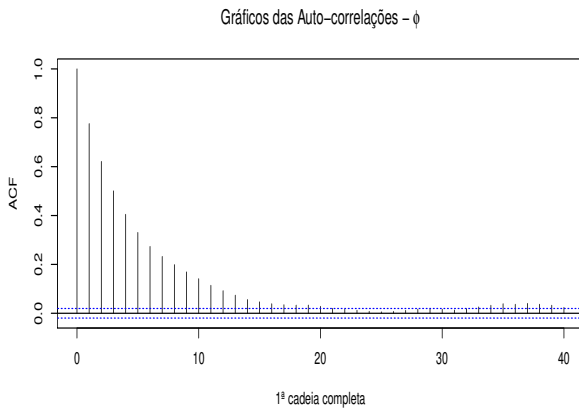
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-correlações - β_1*

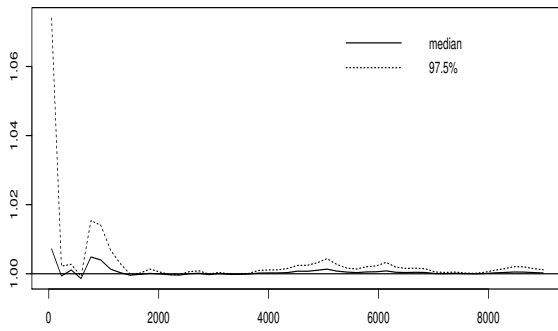


(e) *Parâmetro - ϕ*

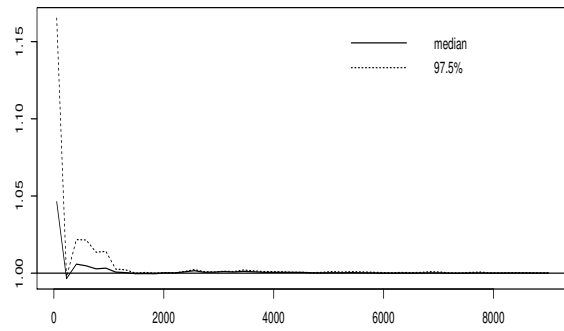


(f) *Parâmetro - ϕ*

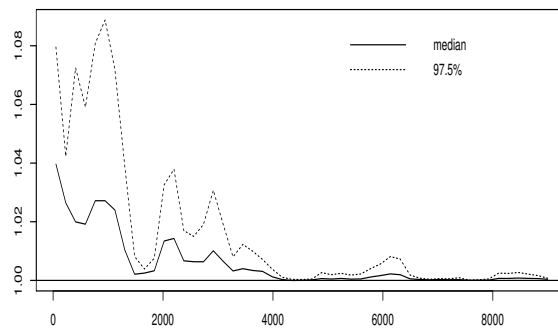
Figura 3.2: *Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta*



(a) *Parâmetro - β_0*



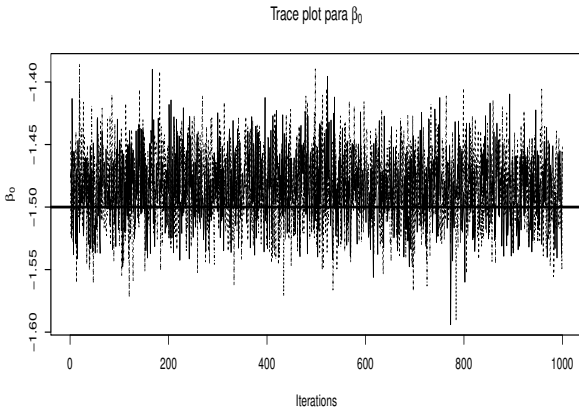
(b) *Parâmetro - β_1*



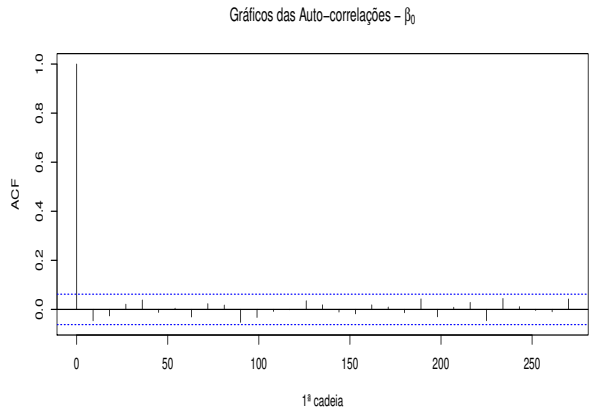
(c) *Parâmetro - ϕ*

Figura 3.3: *Cr terio de Gelman-Rubin*

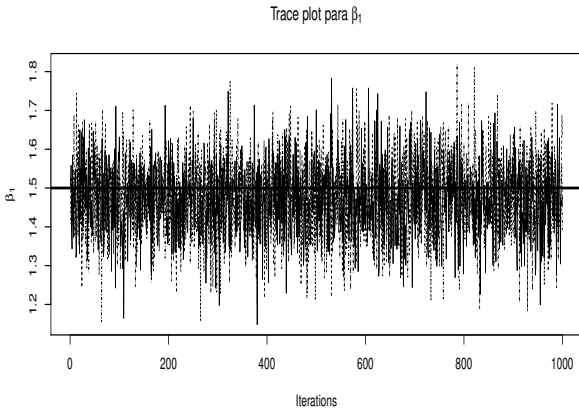
Na Figura 3.4 temos o gr fico do trace-plot da amostra final, isto  , com as 1000 estimativas selecionadas da cadeia de Markov, ap s a retirada das 1000 primeiras itera es (*burn-in*). Temos tamb m, ao lado, nos Gr ficos 3.4(b), 3.4(d) e 3.4(f) as autocorrela es obtidas da amostra final apenas para a primeira cadeia. Note que os valores est o todos abaixo de 0,20, indicando que as amostras s o aproximadamente n o correlacionadas.



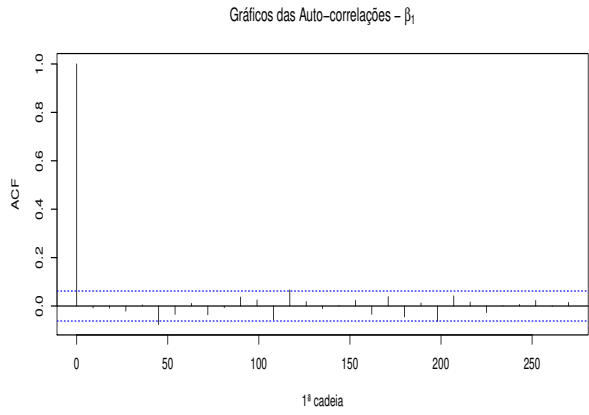
(a) *Parâmetro - β_0*



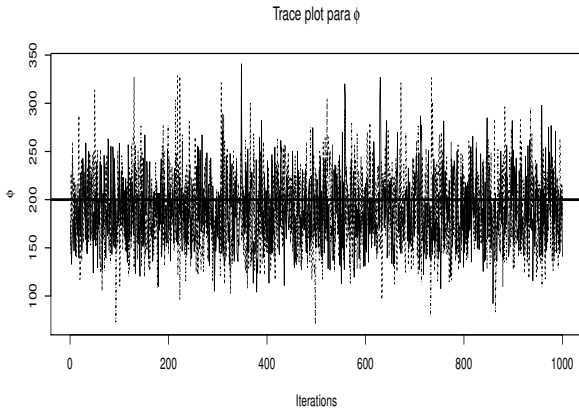
(b) *Auto-Correlações - β_0*



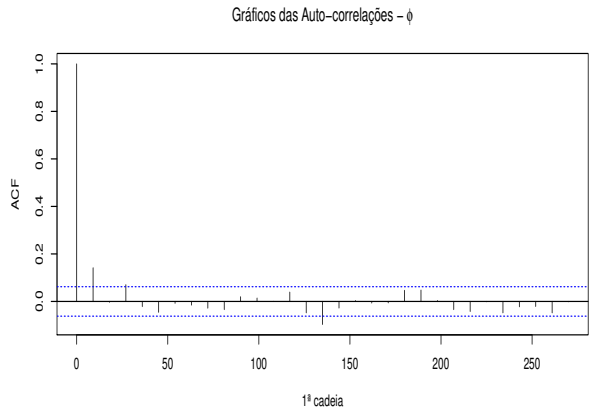
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-Correlações - β_1*



(e) *Parâmetro - ϕ*



(f) *Auto-Correlações - ϕ*

Figura 3.4: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

3.3 Avaliação dos Resultados

Iniciaremos agora a avaliação dos resultados obtidos. Nota-se que de maneira geral conforme aumenta-se o tamanho da amostra e o valor do parâmetro ϕ , melhor o desempenho das estimativas. Tal comportamento já era esperado, devido ao fato de que, quanto maior o valor do parâmetro ϕ menor a variabilidade dos dados, e quanto maior o tamanho da amostra, em princípio, mais informações se dispõe para se estimar os parâmetros.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que o número de covariáveis é igual a dois. Tanto a variância, quanto o REQM das estimativas dos parâmetros β_0 e β_1 diminui conforme aumenta o tamanho da amostra. O valor verdadeiro do parâmetro de precisão ϕ também influencia em melhores resultados, pois a variância diminui quando o valor do parâmetro ϕ é maior. Por exemplo, nas situações que o parâmetro ϕ é igual a 1000, os REQM são todas menores que 0,001. As Figuras 3.5 a 3.8 apresentam os valores do REQM em cada uma das situações simuladas. Analisando o viés das estimativas, quando ϕ é igual 1000 percebe-se diferença somente na terceira casa decimal, ou seja, eles são praticamente iguais. Já quando ϕ é 50 ou 200, observa-se algumas diferenças na segunda casa decimal. Os maiores valores absolutos do vício foram encontrados quando ϕ é igual a 20. Na estatística AVR B não houve grandes diferenças entre as estimativas. Os maiores valores dessa quantidade foram obtidos nos casos que tanto o n , quanto o ϕ são pequenos (20 e 20 respectivamente), porém nada maior que 9%. As Tabelas 3.2 e 3.3 mostram o AVR B associados as estimativas obtidas em cada um dos métodos de estimação de todos os parâmetros.

De modo geral, as estimativas dos β 's se comportaram de forma bem similar entre todos os métodos abordados, tanto os bayesianos, quanto na abordagem clássica. Não houve diferenças significativas entre elas. Todavia, o parâmetro de precisão ϕ tem interferência razoável no comportamento das estimativas. Assim, começaremos agora uma análise mais detalhada a respeito da estimação desse parâmetro.

As estatísticas relacionadas às estimativas do parâmetro de precisão ϕ também apresentam melhores resultados conforme aumenta-se o tamanho da amostra. Porém, é possível notar que

Tabela 3.2: AVR B das Estimativas dos parâmetros β 's - $p=2$

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
20	20	6,2%	4,3%	3,9%	3,7%	5,1%	4,9%
	50	1,1%	1,2%	1,1%	1,1%	1,2%	1,1%
	200	0,3%	0,2%	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%
50	20	0,6%	0,2%	0,3%	0,3%	0,3%	0,1%
	50	0,5%	0,7%	0,8%	0,8%	0,6%	0,7%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%
200	20	0,5%	0,3%	0,3%	0,3%	0,4%	0,4%
	50	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
	200	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%
1000	20	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
	50	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
	200	<0,1%	<0,1%	<0,1%	<0,1%	<0,1%	<0,1%

Tabela 3.3: AVR B das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
20	20	46,0%	20,1%	16,0%	14,2%	29,4%	27,3%
	50	18,8%	9,4%	8,0%	7,5%	12,7%	12,1%
	200	3,0%	0,9%	0,4%	0,4%	1,5%	1,4%
50	20	41,8%	18,1%	14,9%	14,3%	28,2%	27,1%
	50	13,4%	4,8%	3,8%	3,5%	8,3%	7,8%
	200	3,7%	1,6%	1,3%	1,2%	2,3%	2,3%
200	20	27,0%	14,4%	12,5%	13,0%	25,3%	25,1%
	50	12,0%	6,8%	6,1%	6,1%	10,6%	10,5%
	200	1,6%	0,3%	0,1%	0,1%	1,1%	1,1%
1000	20	16,9%	2,7%	6,7%	6,9%	18,6%	18,8%
	50	5,8%	3,4%	4,7%	4,8%	9,0%	9,0%
	200	0,8%	3,2%	3,5%	3,5%	4,4%	4,5%

as estimativas bayesianas sob as prioris de Jeffreys sob independência e as prioris de Jeffreys apresentaram melhores resultados que os demais métodos. Na maioria das combinações dos níveis dos fatores as estimativas oriundas dessas duas abordagens apresentaram menores AVR B e REQM que as outras. Podemos destacar, no caso em que o verdadeiro valor do parâmetro ϕ é 1000, que a abordagem de estimação com a priori usual 1, produz melhores resultados em termos da REQM se comparado as demais estimativas. Porém o AVR B foram maiores em termos absolutos (em relação as demais). Também quando o verdadeiro valor é 1000, outro ponto de destaque, é o método com priori usual 2. Ele apresentou resultados satisfatórios na estimação, isto é, gerou boas estatísticas

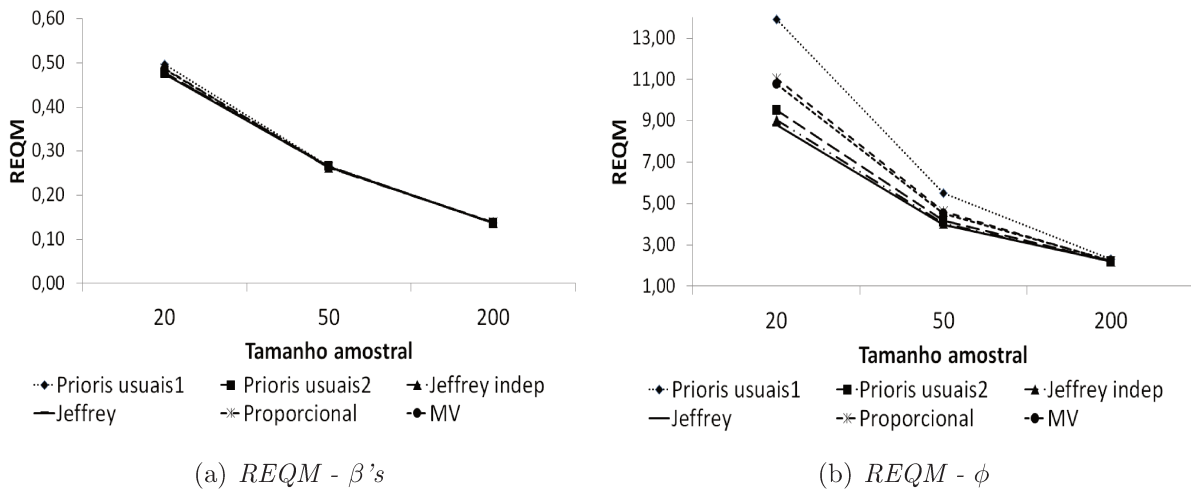


Figura 3.5: $REQM$ dos parâmetros do modelo - $\phi=20$ e $p=2$

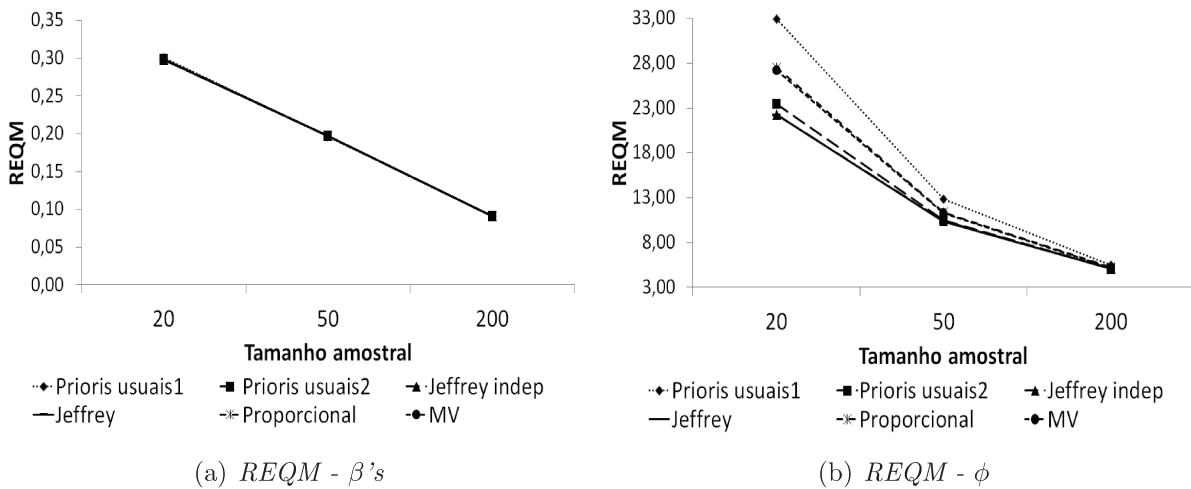


Figura 3.6: $REQM$ dos parâmetros do modelo - $\phi=50$ e $p=2$

em relação as outras estimativas bayesianas e também da estimativa por MV. Resumindo, essas duas estimativas com as prioris usuais 1 e 2 se mostraram melhores quando o parâmetro de precisão é bem alto. Na Figura 3.1 temos os gráficos com o comportamento das duas prioris usuais.

Quanto ao AVR B, notamos outro ponto positivo nas abordagens com as prioris de Jeffreys. Ambas apresentaram estimativas com baixos percentuais de AVR B, sendo que o máximo encontrado foi igual a 16%. Quando n e ϕ são pequenos as prioris de Jeffreys foram melhores em relação ao AVR B.

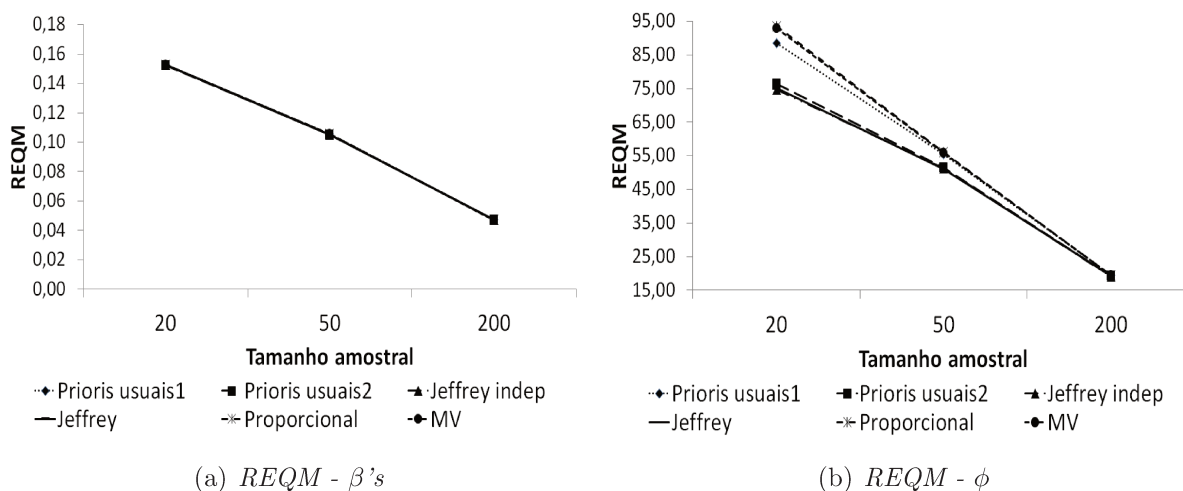


Figura 3.7: $REQM$ dos parâmetros do modelo - $\phi=200$ e $p=2$

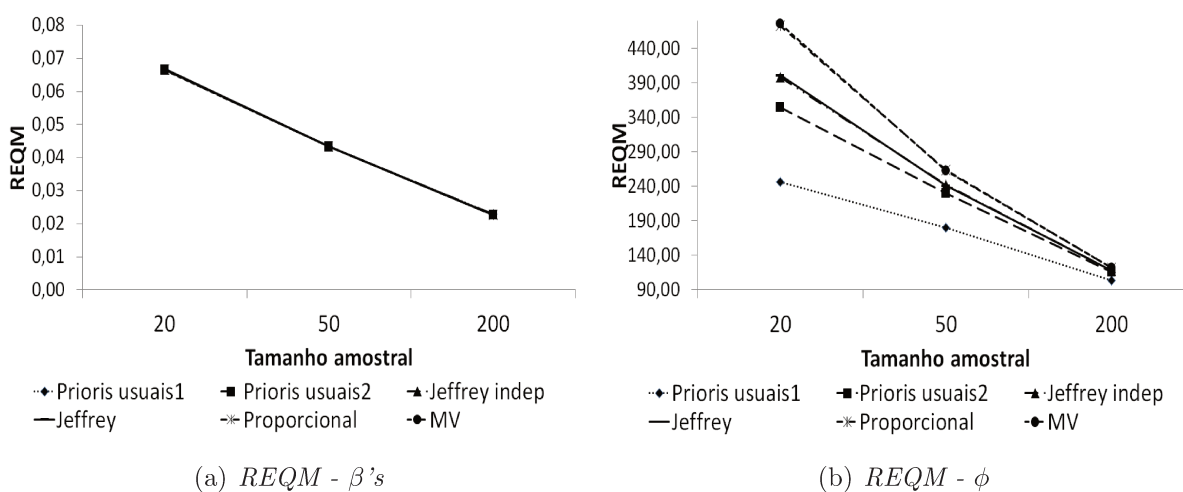


Figura 3.8: $REQM$ dos parâmetros do modelo - $\phi=1000$ e $p=2$

Em geral os resultados apresentados se mostram favoráveis as estimativas bayesianas utilizando as prioris de Jeffreys sob independência e de Jeffreys para a estimação do parâmetro de precisão ϕ , e uma equivalência entre todos os métodos para a estimação dos β .

Em resumo temos que as estimativas dos parâmetros de regressão β se comportaram de modo bem similar em todos os 6 métodos de estimação. Entretanto as duas abordagens de estimação com as prioris de Jeffreys (sob a suposição de independência e a de Jeffreys) se mostraram bem semelhantes, e ao mesmo tempo, tiveram o melhor desempenho em termos das estatísticas analisa-

das para a estimação do parâmetro de precisão. Os resultados foram melhores ou iguais às demais estimativas bayesiana usando os outros conjuntos de prioris e também melhores que o método de máxima verossimilhança. Concluimos aqui que utilizar uma das duas abordagens bayesinas na estimação dos parâmetros do modelo de regressão Beta pode ser um caminho bem interessante na obtenção de boas estimativas.

Tabela 3.4: *AVRB das Estimativas dos parâmetros β 's - $p=5$*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
20	20	2,7%	5,2%	4,0%	15,9%	3,2%	2,3%
	50	1,2%	3,0%	2,9%	6,2%	2,2%	1,2%
	200	3,0%	3,5%	3,5%	4,1%	3,4%	3,1%
50	20	3,7%	3,9%	3,9%	7,2%	3,8%	3,7%
	50	0,8%	1,0%	1,1%	2,0%	0,9%	0,7%
	200	1,1%	1,2%	1,2%	1,4%	1,2%	1,1%
200	20	1,4%	1,3%	1,2%	1,7%	1,3%	1,4%
	50	0,4%	0,5%	0,6%	0,9%	0,5%	0,3%
	200	0,3%	0,4%	0,3%	0,4%	0,3%	0,3%
1000	20	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,5%
	50	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%
	200	<0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%

Tabela 3.5: *AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
20	20	86,4%	43,8%	36,9%	19,6%	61,0%	73,9%
	50	29,7%	15,8%	13,2%	2,6%	21,0%	24,1%
	200	10,7%	7,7%	7,0%	3,4%	8,6%	9,3%
50	20	61,8%	31,3%	24,8%	13,9%	44,2%	61,7%
	50	17,2%	7,4%	5,4%	5,2%	11,6%	16,5%
	200	4,3%	2,0%	1,5%	0,8%	2,9%	3,9%
200	20	29,5%	16,0%	13,8%	12,3%	29,6%	50,1%
	50	10,9%	5,6%	4,4%	3,6%	9,5%	15,8%
	200	3,1%	1,6%	1,5%	0,4%	2,6%	4,0%
1000	20	14,9%	11,8%	17,6%	6,8%	33,3%	56,3%
	50	8,2%	0,7%	1,9%	5,0%	6,4%	13,2%
	200	<0,1%	2,4%	2,6%	1,0%	3,6%	5,2%

Vamos agora iniciar as análises dos resultados obtidos das simulações quando o número de covariáveis é igual a 5. As Tabelas 3.4 e 3.5 apresentam os valores do vício relativo para cada um

dos conjuntos de estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta. As Figuras 3.9 a 3.12 ilustram os valores da REQM.

Novamente, podemos observar que quanto maior o tamanho da amostra e maior o valor do parâmetro de precisão ϕ melhores são os resultados para todas as estimativas. Particularmente, para o parâmetro β_2 , cujo valor verdadeiro é igual a zero, não foram encontradas diferenças significativas entre os métodos de estimação. Vale a pena frisar que a estatística AVRB não foi calculada para este parâmetro. Isso pelo fato do valor verdadeiro ser igual a 0, e assim, o valor do AVRB tende ao infinito, o que não nos interessaria em nada. Para os demais parâmetros de regressão (β_0 , β_1 , β_3 e β_4 , com valores verdadeiros iguais a -3,0, -1,5, 1,5 e 3,0, respectivamente) nota-se que quando o valor do parâmetro de precisão aumenta, as estatísticas analisadas associadas as estimativas são bem próximas. As variâncias das estimativas dos parâmetros foram bem similares. No caso em que o verdadeiro valor do ϕ e o tamanho amostral são 20, as estimativas bayesianas sob as prioris de Jeffreys apresentaram, menor ou igual variância em todas as estimativas dos parâmetros β .

Em relação ao vieses das estimativas, há um ponto a se destacar: a abordagem com as prioris de Jeffreys tiveram os maiores vícios no caso em que o n e o ϕ são pequenos (iguais a 20 neste estudo), diferente do usual. De forma geral, conforme aumenta o tamanho da amostra e o valor do parâmetro de precisão é alto, o vício das estimativas apresenta diferença apenas na terceira casa decimal, isto é são praticamente iguais.

A REQM não apresentou diferenças significativas entre as estimativas, e mais uma vez é notória a melhora nas estatísticas quando aumenta-se o n e o ϕ . Vemos que em relação ao AVRB o valor máximo encontrado nas condições simuladas ficou entre 15 a 20%. Em geral, com os resultados obtidos, concluímos que as estimativas bayesianas sob prioris de Jeffreys se comportaram de uma melhor forma em relação as demais estimativas.

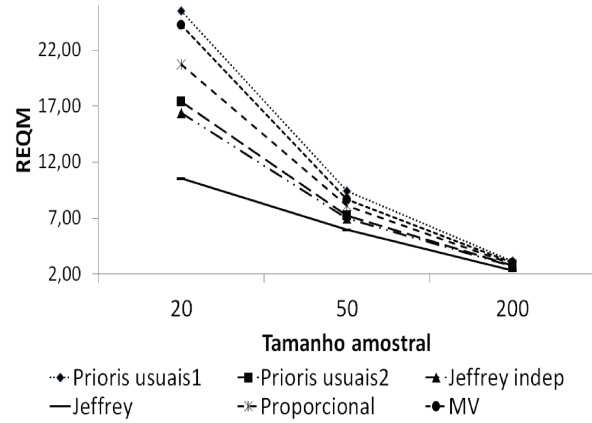
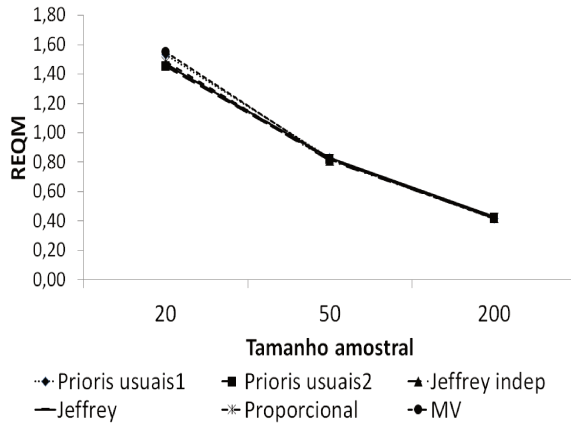
As estimativas dos parâmetros de regressão do modelo Beta, assim como no caso que o número de covariáveis é dois, tiveram comportamento bem similares em relação as quantidades analisadas. Mesmo com as características particulares do parâmetro β_2 (cujo verdadeiro valor é zero), e os

demais parâmetros que se comportaram de modo semelhante entre si, em geral não obtivemos nenhum método de estimação que apresentou vantagens em relação aos outros na qualidade das estimativas.

Vamos iniciar agora o estudo do parâmetro de precisão para o caso de $p=5$. Em geral, nota-se nesse caso que as estimativas bayesianas via prioris de Jeffreys obtiveram os melhores desempenhos. Somente nas situações em que o tamanho amostral aumenta, não há grandes diferenças entre os métodos, todas as estatísticas tiveram resultados bem próximos. Analisando as variâncias e o REQM das estimativas, nota-se claramente que as estimativas com as prioris de Jeffreys tem os melhores resultados. Em todas as combinações simuladas, as estatísticas relativas à esses conjuntos de estimativas foram menores ou iguais aos resultados encontrados nas demais estimativas.

Em termos dos vieses das estimativas, novamente a abordagem com as prioris de Jeffreys apresentou os melhores resultados. Apenas quando $n=50$ e o valor verdadeiro de ϕ é igual a 1000, o viés dessa estimativa bayesiana ficou bem acima dos outros. Por fim, os valores do AVRB associados as estimativas bayesianas com as prioris de Jeffreys tiveram no máximo um percentual igual a 19,6% (na combinação de n e ϕ iguais a 20). Comparando às estatísticas obtidas, percebe-se claramente que o método de estimação bayesiano com as prioris de Jeffreys se comportou melhor em relação aos demais.

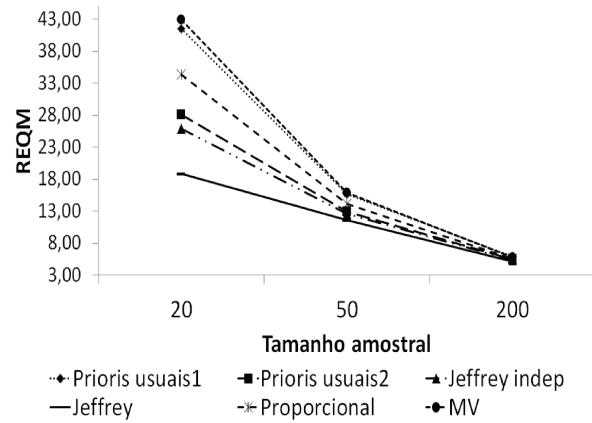
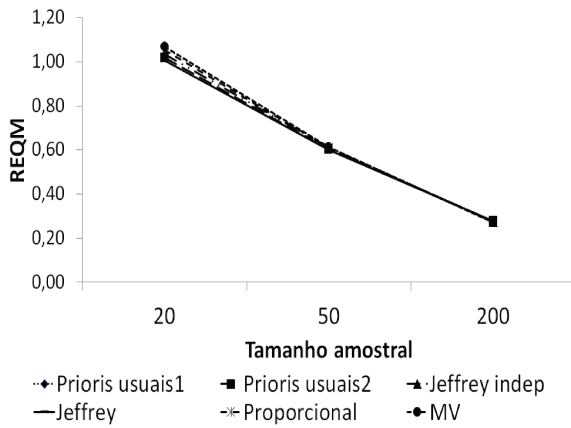
De modo geral, as situações em que o ϕ é pequeno (igual a 20) apresentam resultados ruins. Esse parâmetro sendo pequeno, indica uma alta variabilidade dos dados, o que pode explicar os resultados da simulação.



(a) REQM - β 's

(b) REQM - ϕ

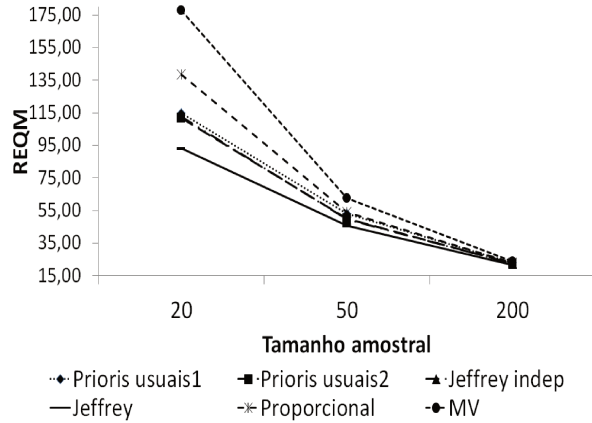
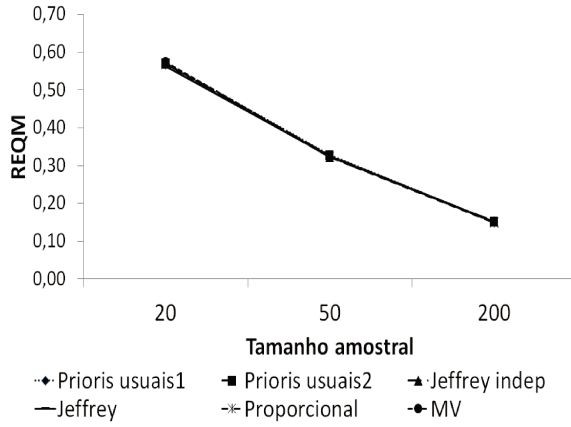
Figura 3.9: REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=20$ e $p=5$



(a) REQM - β 's

(b) REQM - ϕ

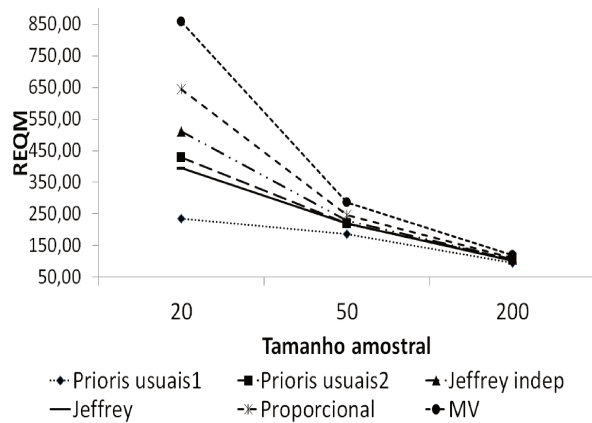
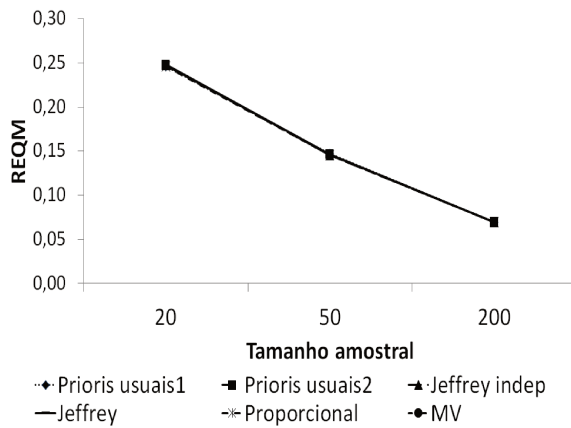
Figura 3.10: REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=50$ e $p=5$



(a) REQM - β 's

(b) REQM - ϕ

Figura 3.11: REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=200$ e $p=5$



(a) REQM - β 's

(b) REQM - ϕ

Figura 3.12: REQM dos parâmetros do modelo - $\phi=1000$ e $p=5$

3.4 Conclusão

Após essa discussão, conclui-se que as estimativas oriundas os dois conjuntos de prioris de Jeffreys (sob independência e pela regra de Jeffreys) se comportaram muito bem na maioria das condições propostas de estudo para estimação dos parâmetros do modelo de regressão Beta. Ficou evidente no caso do número de covariáveis igual a 5, que as estimativas sob a priori de Jeffreys se mostraram melhores. Contudo, a priori de Jeffreys sob independência se comportou razoavelmente bem na estimação dos parâmetros. Principalmente na estimação do parâmetro ϕ , o melhor desempenho dessas duas estimativas é mais evidente. Podemos afirmar, de acordo com os resultados obtidos, que em geral para os parâmetros de regressão, as estimativas foram igualmente precisas, e para o parâmetro de precisão, as estimativas bayesianas, principalmente usando as prioris de Jeffreys, obtiveram qualidade superior nas estimativas.

Capítulo 4

Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero ou Um

4.1 Introdução

Neste segundo estudo de simulação, estamos interessados em verificar, além dos objetivos já citados anteriormente, entender como o parâmetro de mistura (δ) pode interferir no processo de estimação dos parâmetros do modelo inflacionado em zero ou um. Assim, neste estudo foram fixados 4 fatores: os 3 fixados anteriormente e mais um, que é o verdadeiro valor do parâmetro δ (relacionado a componente discreta do modelo). Este parâmetro trata-se da probabilidade da observação ser inflacionada. Os tamanhos amostrais foram mantidos os mesmos do primeiro estudo, assim como o número de covariáveis (e seus valores verdadeiros). Somente alteramos para o parâmetro ϕ , os verdadeiros valores são 50 e 200. Retiramos os valores 20 e 1000 para evitar um número muito grande de situações. Já para o parâmetro δ os valores verdadeiros foram definidos iguais a 0,1, 0,3 e 0,5. Definimos esses valores com base em Ospina e Ferrari (2011). Lembrando que o parâmetro δ é a probabilidade da observação ser igual a um ou a zero, dependendo do modelo proposto.

Na Tabela 3.1 temos as prioris utilizadas para os parâmetros de regressão e o parâmetro de precisão (β e ϕ , respectivamente). Essas distribuições são as mesmas utilizadas no estudo do

modelo de regressão Beta não inflacionado. Para o parâmetro δ , que é o parâmetro de mistura, utilizamos como priori a distribuição Beta com hiperparâmetros $a_1 = b_1 = 1$, que é equivalente a distribuição $U(0, 1)$. Ressaltamos novamente, que para os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e o ϕ temos seis conjuntos de estimativas (cinco bayesianos e um frequentista), e para o parâmetro δ temos dois conjuntos de estimativas: o bayesiano e o frequentista.

Primeiramente, fixamos os fatores definidos, e assim geramos as covariáveis conforme a distribuição Uniforme no intervalo unitário. O estudo consiste em simular uma amostra da densidade $bi_c(y_t, \delta, \mu_t, \phi)$ conforme descrito em (2.5). Com função de ligação $g(\mu_t) = \sum_{i=1}^p x_{ti}\beta_i = \eta_t$ sendo a logito, e assim temos:

$$\mu_t = \frac{\exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}$$

Para cada amostra gerada, é calculada as estimativas para cada conjunto de prioris e a estimativa de máxima verossimilhança. Novamente replicamos esse processo 100 vezes. Com as 100 réplicas calculamos as seguintes estatísticas: Média, Variância, Vício, REQM e AVR B.

Salientamos que o estimador bayesiano utilizado foi a esperança a posteriori. As estimativas por MV foram obtidas utilizando o pacote “gamlss” e o “gamlss.dist” (para detalhes veja Rigby e Stasinopoulos (2005) e Stasinopoulos *et al* (2011), respectivamente).

Relembramos que com o objetivo de simplificar os resultados, e para evitar um número excessivo de tabelas e gráficos, consideramos uma média dos valores de AVR B e REQM obtidos para os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$. Por exemplo, para o caso em que $p=5$, calculamos a média do AVR B e do REQM obtida dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 e apresentamos nas tabelas e gráficos.

A seguir, iniciaremos as análises referente ao estudo de simulação. Adiantamos que os resultados alcançados para o modelo inflacionado em zero e para o modelo inflacionado em um foram muito semelhantes. Por isso, as conclusões foram apresentadas em conjunto para esses dois modelos.

4.2 Estudo de Convergência

Mostraremos a seguir dois estudos de convergência da implementação do algoritmo de *Metropolis-Hastings*, um para o modelo inflacionado em zero e outro para o inflacionado em um. Utilizamos o conjunto de prioris Jeffreys sob a suposição de independência para o modelo inflacionado em zero, e o conjunto de prioris de Jeffreys para o modelo inflacionado em um, conforme tabela (2.2).

Em cada uma das cadeias o número de iterações foi igual a 10000. Considerou-se um *burn-in* igual a 1000 e espaçamento igual a 9. O tamanho da amostra final igual a 1000. Para auxílio da obtenção das estatísticas e gráficos de monitoramento da convergência das cadeias foi utilizado o pacote "Coda" (Plummer *et al* (2006)) do software R.

O estudo consiste de iniciar conjuntamente 3 cadeias em paralelo. Numa cadeia os valores iniciais dos parâmetros β e ϕ foram iguais aos propostos por Ferrari e Cribari-Neto (2004), para a inicialização do algoritmo de otimização. Na segunda cadeia, os valores iniciais para os elementos do vetor β foi amostrado de uma densidade Normal com média igual a zero e variância igual a 0,1, e para o valor inicial de ϕ foi amostrado de uma densidade Normal com média igual ao logaritmo do valor verdadeiro (no caso, $\log(\phi)$) e variância igual a 0,2, e depois tomou-se a exponencial do valor simulado. E na última cadeia, o vetor inicial β foi o vetor nulo e o para o parâmetro ϕ , amostrou-se de uma Normal com média 4,5 e variância 0,2, e tomou a exponencial desse número.

Primeiramente, definimos os valores verdadeiros dos parâmetros do modelo de regressão beta como sendo igual a $\beta = (-1, 5; 1, 5)$ e o parâmetro $\phi = 200$. As covariáveis foram amostradas da distribuição Uniforme no intervalo (0,1). O tamanho amostral igual a 20 e o parâmetro δ igual 0,1. Esses foram os parâmetros definidos para o modelo inflacionado em zero.

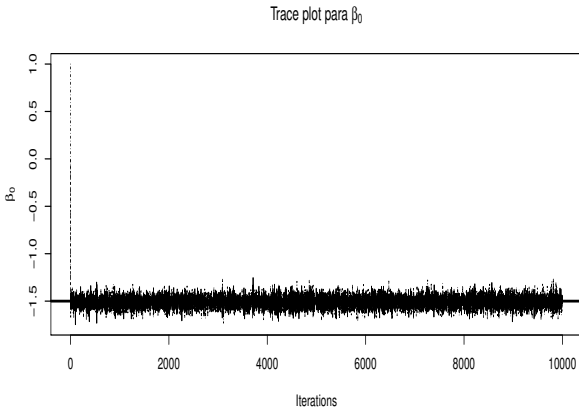
Na Figura 4.1 vemos os valores das 3 cadeias completas (com as 10000 iterações) e também as auto-correlações obtidas. As cadeias se sobrepõem, e que nos 3 parâmetros, após o período das 1000 primeiras iterações, aparentemente houve convergência para o verdadeiro valor, e que não há mais influência do valor inicial de cada uma das cadeias.

Com relação a estatística de Geweke, nas 3 cadeias dos parâmetros β_0 , β_1 e ϕ a maioria dos

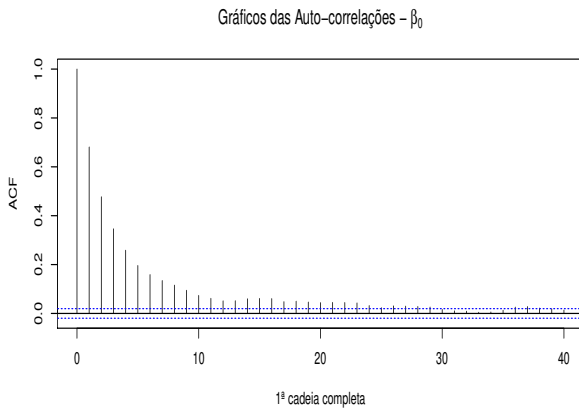
valores ficaram dentro dos limites considerados aceitáveis, o que indica convergência das cadeias. Não foram apresentados os gráficos da estatística de Geweke para evitar que o trabalho ficasse muito longo.

As Figuras 4.2 apresentam os gráficos com as estatística de Gelman-Rubin. Quanto mais perto do valor unitário, significa que as 3 cadeias convergiram conjuntamente. Note que para os 3 parâmetros os valores estão bem próximos de 1.

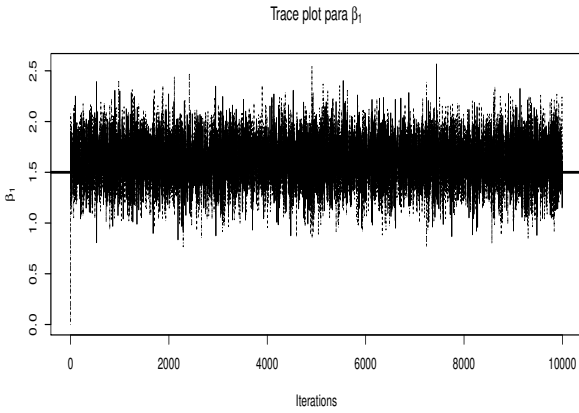
Na Figura 4.3 temos o gráfico do trace-plot da amostra final, isto é, com as 1000 estimativas selecionadas da cadeia de Markov, após a retirada das 1000 primeiras iterações (*burn-in*). Temos também, ao lado, nos Gráficos 4.3(b), 4.3(d) e 4.3(f) as autocorrelações obtidas da amostra final. Note que os valores estão todos abaixo de 0,20, indicando que as amostras são aproximadamente não correlacionadas.



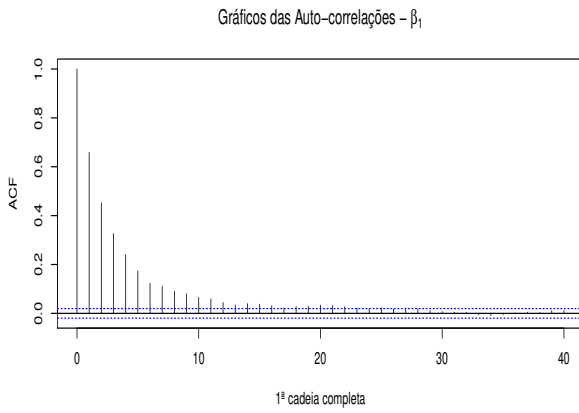
(a) *Parâmetro - β_0*



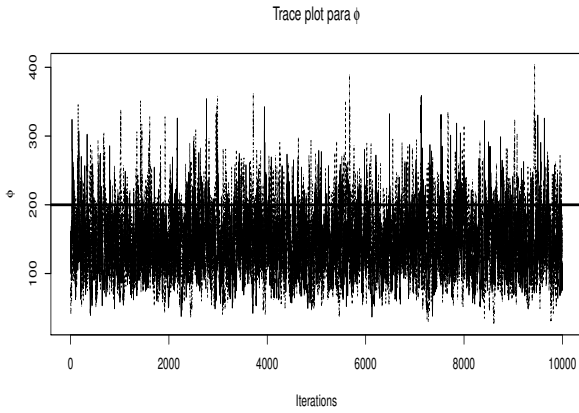
(b) *Auto-correlações - β_0*



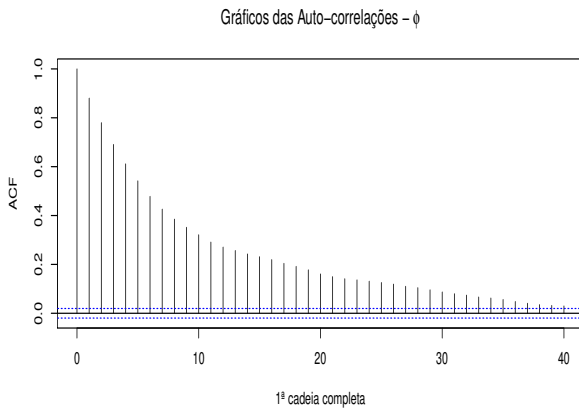
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-correlações - β_1*

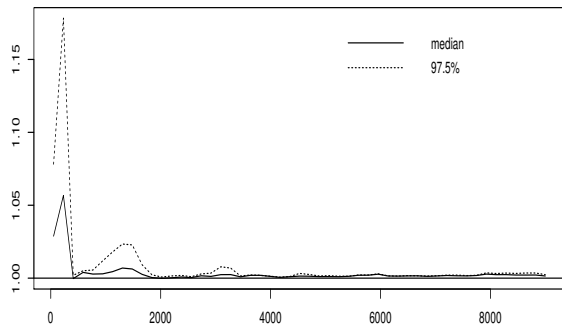


(e) *Parâmetro - ϕ*

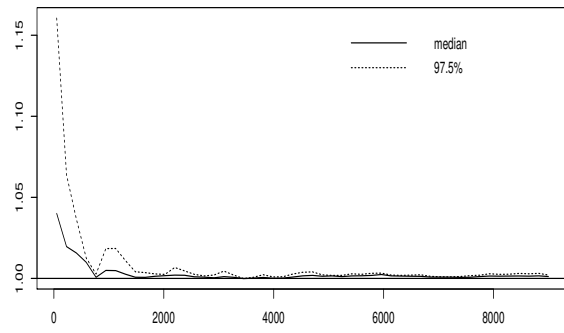


(f) *Auto-correlações - ϕ*

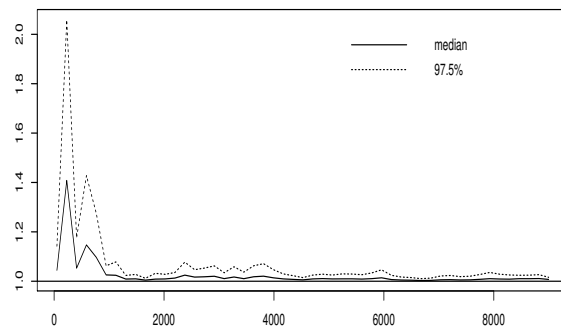
Figura 4.1: *Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero*



(a) *Parâmetro - β_0*

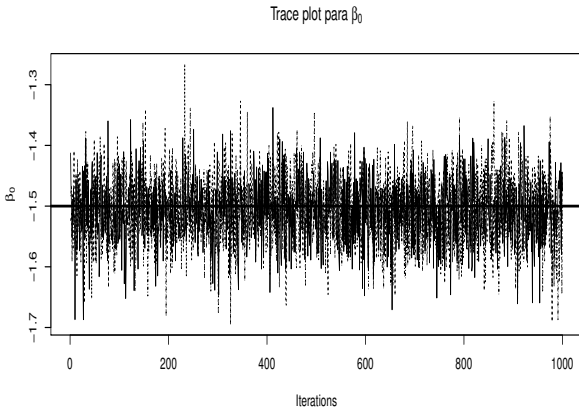


(b) *Parâmetro - β_1*

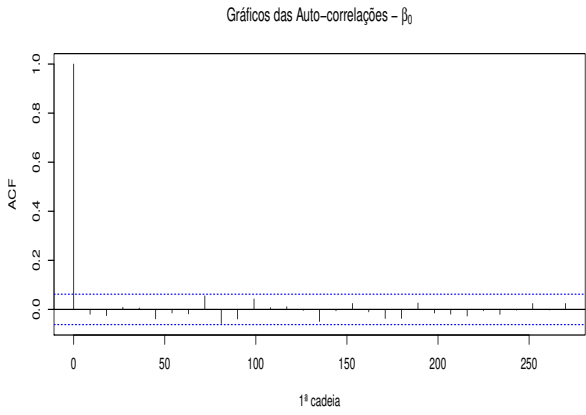


(c) *Parâmetro - ϕ*

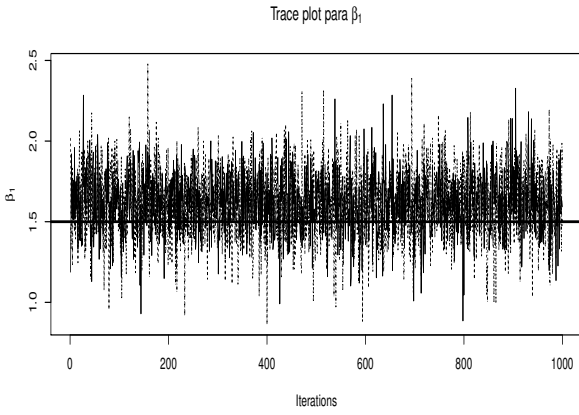
Figura 4.2: *Critério de Gelman-Rubin*



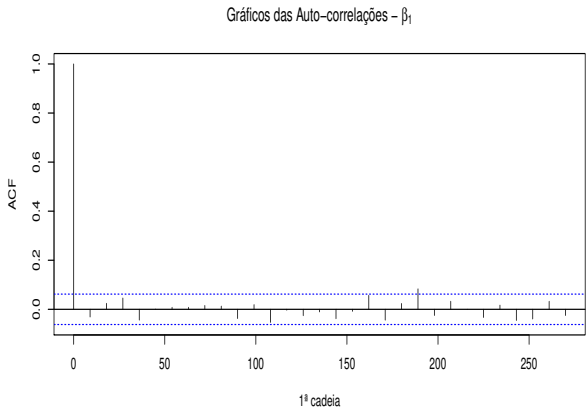
(a) *Parâmetro - β_0*



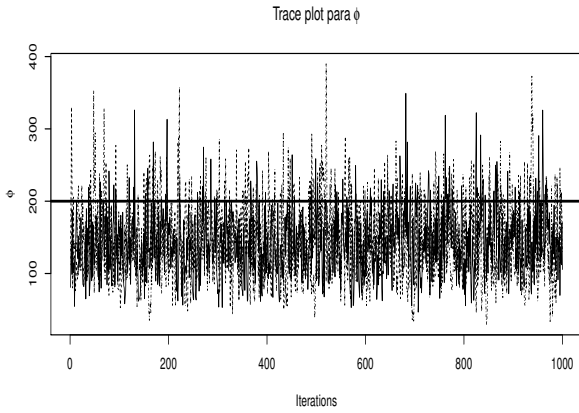
(b) *Auto-Correlações - β_0*



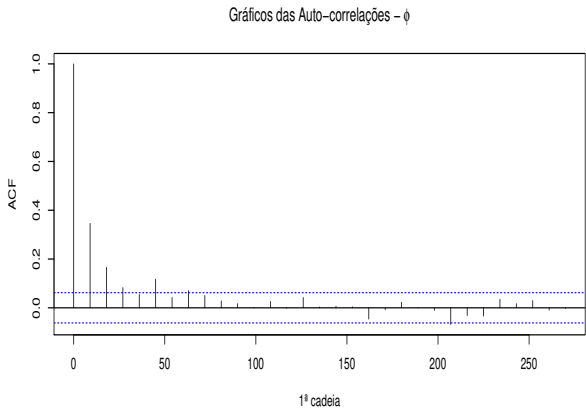
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-Correlações - β_1*



(e) *Parâmetro - ϕ*



(f) *Auto-Correlações - ϕ*

Figura 4.3: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

Vamos iniciar o estudo com o modelo inflacionado em um. Definimos os valores verdadeiros dos parâmetros do modelo de regressão Beta como sendo igual a $\beta = (-1, 5; 1, 5)$ e o parâmetro $\phi = 50$. As covariáveis foram amostradas da distribuição Uniforme no intervalo $(0,1)$. O tamanho amostral igual a 50 e o parâmetro δ igual 0,5.

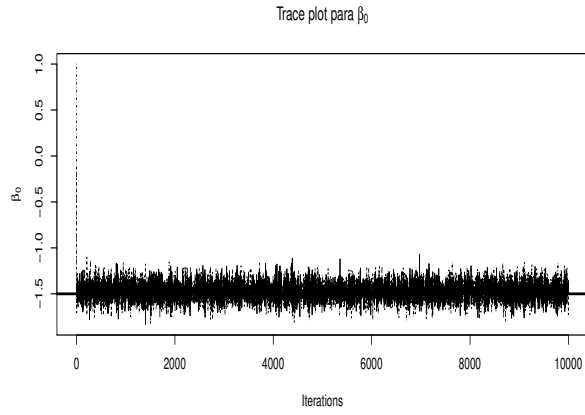
Na Figura 4.4 vemos os valores das 3 cadeias completas (com as 10000 iterações), assim como as auto-correlações da primeira cadeia de cada parâmetro. Perceba que as cadeias se sobrepõe, e que nos 3 parâmetros, após o período das 1000 primeiras iterações, aparentemente houve convergência para o verdadeiro valor. Também, parece que não há mais influência do valor inicial de cada uma das cadeias.

Nas 3 cadeias dos parâmetros β_0 , β_1 e ϕ , considerando a estatística de Geweke, a maioria dos valores ficaram dentro dos limites considerados aceitáveis, o que indica convergência das cadeias. Não foram apresentados os gráficos dessa estatística para evitar que o trabalho ficasse muito longo.

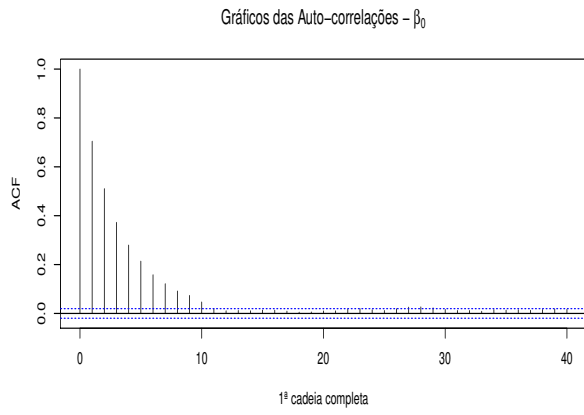
As Figuras 4.5 apresentam os gráficos com as estatística de Gelman-Rubin. Quanto mais perto do valor unitário, significa que as 3 cadeias convergiram conjuntamente. Note que para os 3 parâmetros os valores estão bem próximos de 1.

Na Figura 4.6 temos o gráfico do trace-plot da amostra final, isto é, com as 1000 estimativas selecionadas da cadeia de Markov, após a retirada das 1000 primeiras iterações (*burn-in*). Temos também, ao lado, nos Gráficos 4.6(b), 4.6(d) e 4.6(f) as autocorrelações obtidas da amostra final. Note que os valores estão todos abaixo de 0,20, indicando que as amostras são aproximadamente não correlacionadas.

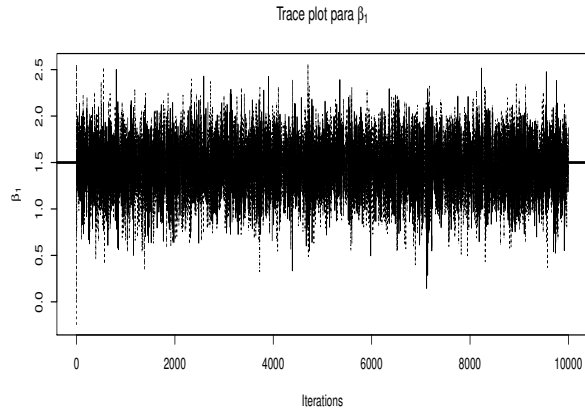
Os resultados apresentados para os modelos inflacionados em zero e inflacionados em um, ilustram dois exemplos de como foi feito o estudo de convergência. Vários outros estudos foram feitos, mas esses estão nesse trabalho como exemplificação.



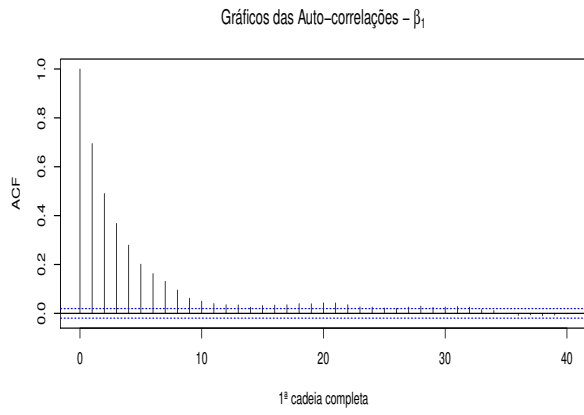
(a) *Parâmetro - β_0*



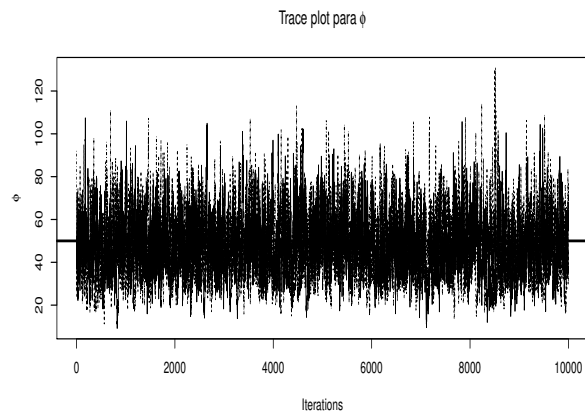
(b) *Auto-correlações - β_0*



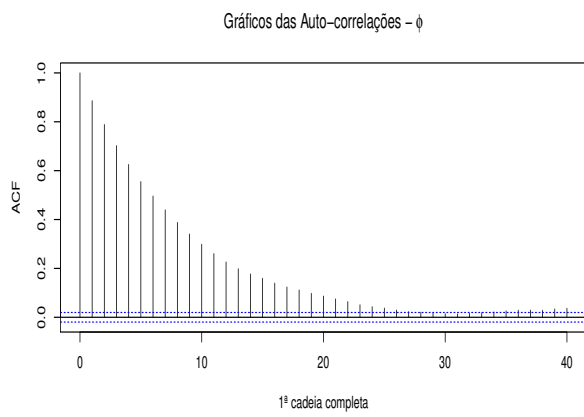
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-correlações - β_1*

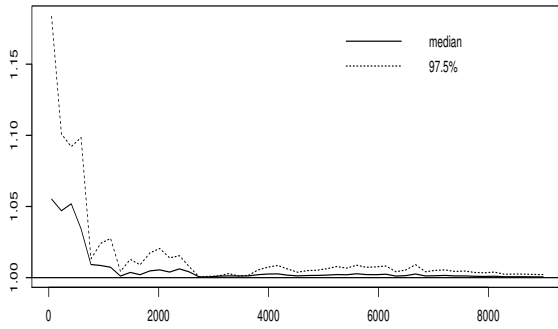


(e) *Parâmetro - ϕ*

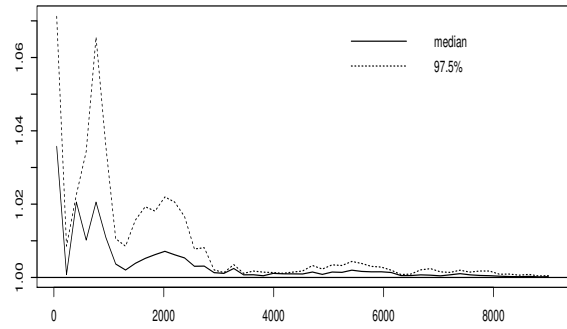


(f) *Auto-correlações - ϕ*

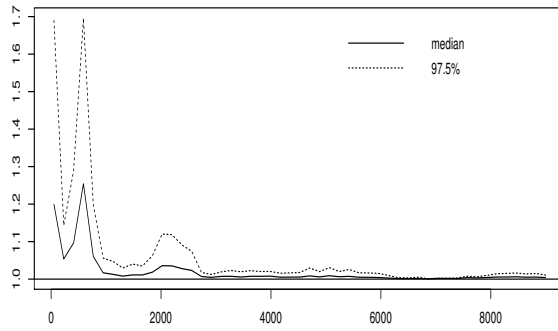
Figura 4.4: *Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Um*



(a) *Parâmetro - β_0*

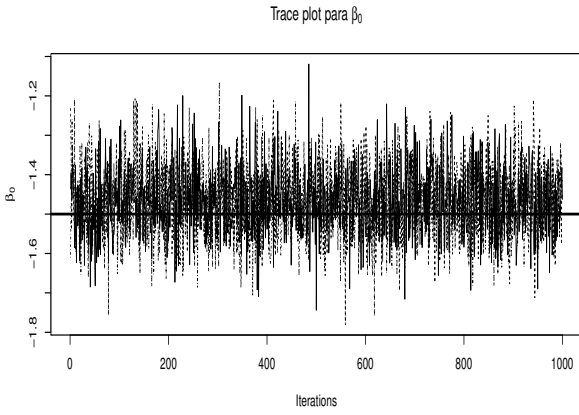


(b) *Parâmetro - β_1*

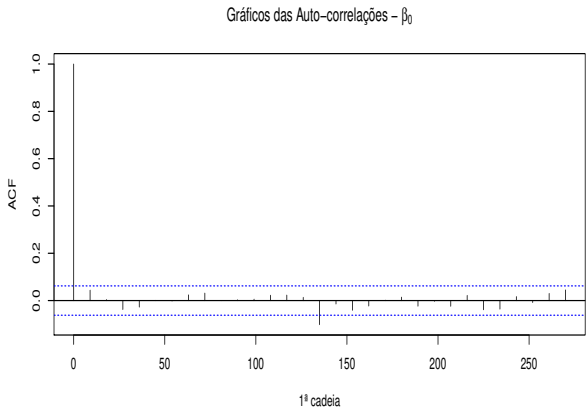


(c) *Parâmetro - ϕ*

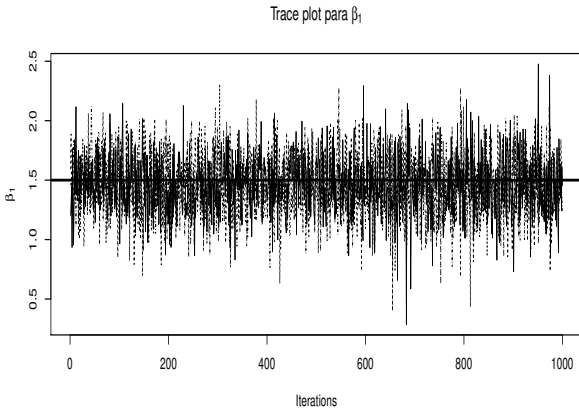
Figura 4.5: *Critério de Gelman-Rubin*



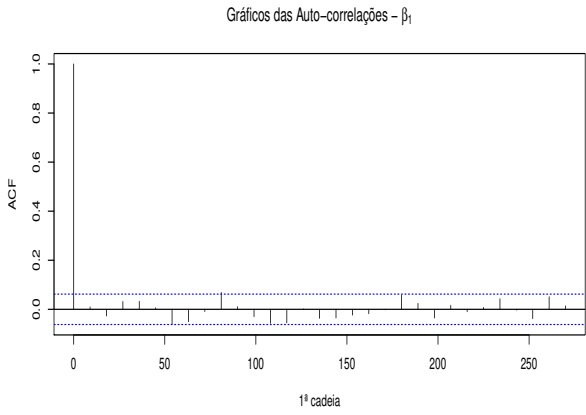
(a) *Parâmetro - β_0*



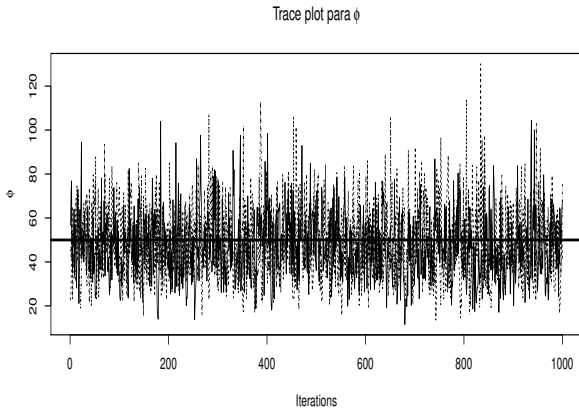
(b) *Auto-Correlações - β_0*



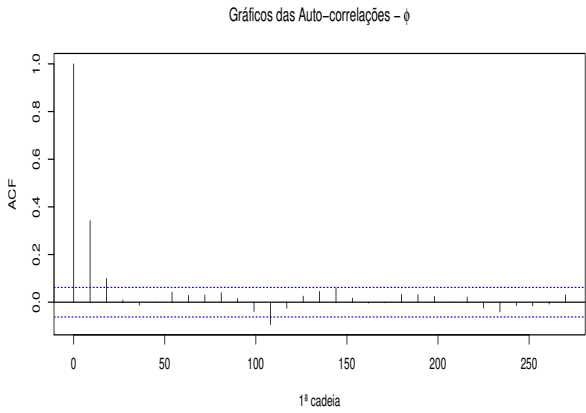
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-Correlações - β_1*



(e) *Parâmetro - ϕ*



(f) *Auto-Correlações - ϕ*

Figura 4.6: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

4.3 Avaliação dos Resultados

Primeiramente, iniciaremos analisando os resultados dos conjuntos das estimativas dos parâmetros β 's. De uma forma geral, os resultados indicaram que conforme se aumenta o tamanho da amostra e o valor do parâmetro ϕ , e diminui-se o valor do parâmetro δ , melhor o desempenho das estimativas. Este fato era esperado, pois quanto maior o valor do parâmetro de precisão ϕ , menor a variabilidade dos dados. Também, quanto menor o valor de δ , maior a quantidade de observações não inflacionadas, aumentando a amostra relevante para o processo de estimação desses parâmetros.

Considerando o caso em que o número de covariáveis é igual a dois, percebe-se que tanto a variância, quanto o REQM das estimativas dos parâmetros β_0 e β_1 diminui conforme aumenta-se o tamanho da amostra. O valor verdadeiro do parâmetro de precisão ϕ também influencia em melhores resultados, pois a variância diminui quando o valor do parâmetro ϕ é maior. Outro fator que determina melhores estimativas é o valor verdadeiro do parâmetro δ . Quanto menor o valor deste parâmetro, maior a quantidade de dados pertencentes ao intervalo (0,1) e com isso, melhores são as estimativas. Por exemplo, quando o tamanho amostral é 50, e o valor verdadeiro do δ é 0,1, espera-se que tenhamos, em torno de 40 observações não-inflacionadas, diferentemente do caso quando δ é igual a 0,5, que na média esperamos ter 25 observações entre 0 e 1.

Destaca-se que nas situações que o parâmetro ϕ é igual a 200 e o valor do δ é 0,1, as variâncias das estimativas do β_0 e β_1 são todas pequenas, menores que 0,03. Para o REQM, os valores também são pequenos nesse caso, menores que 0,17. As Figuras 4.7 a 4.12 apresentam os valores do REQM em cada uma das situações simuladas para o modelo inflacionado em zero. As Figuras 4.13 a 4.18 mostram as REQM das estimativas dos parâmetros do modelo inflacionado em um.

Analisando o AVRB das estimativas, para o vetor de parâmetro β temos que as estimativas são praticamente não viesadas. Nessa estatística, não houve grandes diferenças entre as estimativas, independente do fator e do método de estimação. O maior valor encontrado para ela foi 2,7%. Esse valor foi obtido na situação em que $n=20$, $\phi=50$, $\delta=0,3$, na média dos AVRB dos parâmetros β_0 e β_1 no conjunto de estimativas utilizando a priori de Jeffreys e prioris Usuais 2, no modelo

inflacionado em zero. Para o modelo inflacionado em um, o maior valor de AVRB foi 3,5%, na combinação de $n=20$, $\phi=50$, $\delta=0,5$, para a média do AVRB dos parâmetros β_0 e β_1 para o conjunto de estimativas oriundas das prioris de Jeffreys. As Tabelas 4.1 a 4.3 mostram a média dos AVRB associados as estimativas obtidas em cada um dos métodos de estimação de todos os parâmetros do modelo inflacionado em zero. Para o modelo inflacionado em um, esses valores estão nas Tabelas 4.4 a 4.6.

Tabela 4.1: AVRB das Estimativas dos parâmetros β 's - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	1,3%	0,4%	0,4%	0,4%	0,8%	0,7%
	50	0,5%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%
	200	0,3%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%
200	20	1,0%	0,8%	0,8%	0,8%	1,0%	0,9%
	50	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%

Tabela 4.2: AVRB das Estimativas dos parâmetros β 's - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	2,5%	2,7%	2,5%	2,7%	2,6%	2,4%
	50	0,8%	0,3%	0,2%	0,3%	0,6%	0,4%
	200	0,2%	0,3%	0,3%	0,3%	0,2%	0,3%
200	20	0,5%	0,6%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%
	50	0,3%	0,3%	0,4%	0,4%	0,3%	0,3%
	200	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%

Tabela 4.3: AVRB das Estimativas dos parâmetros β 's - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	1,0%	1,4%	1,2%	1,3%	1,2%	1,0%
	50	0,4%	0,2%	0,4%	0,4%	<0,1%	0,2%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%
200	20	0,6%	0,9%	1,1%	1,1%	0,7%	0,8%
	50	0,4%	0,5%	0,5%	0,4%	0,5%	0,4%
	200	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%

Tabela 4.4: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	2,1%	1,2%	1,0%	1,0%	1,6%	1,5%
	50	1,6%	1,2%	1,2%	1,2%	1,4%	1,3%
	200	0,9%	0,8%	0,8%	0,7%	0,8%	0,8%
200	20	1,1%	1,2%	1,3%	1,3%	1,1%	1,2%
	50	0,2%	0,2%	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%

Tabela 4.5: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	3,0%	2,1%	2,2%	2,3%	2,5%	2,4%
	50	0,7%	0,8%	1,0%	1,0%	0,7%	0,7%
	200	0,6%	0,5%	0,4%	0,5%	0,5%	0,5%
200	20	0,2%	0,3%	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%
	50	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%	0,1%	0,2%
	200	<0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%

Tabela 4.6: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	2,9%	3,3%	3,5%	3,5%	3,0%	2,8%
	50	2,1%	1,5%	1,3%	1,3%	1,8%	1,7%
	200	0,8%	0,7%	0,6%	0,6%	0,7%	0,7%
200	20	0,3%	0,4%	0,2%	0,2%	0,3%	0,2%
	50	0,7%	0,6%	0,5%	0,5%	0,7%	0,6%
	200	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%

Assim como no modelo de regressão Beta não-inflacionado, em geral, as estimativas dos β 's se comportaram de forma bem similar entre todos os métodos de estimação abordados, tanto os bayesianos, quanto na abordagem frequentista. Porém, para n e ϕ pequenos houve uma ligeira superioridade das estimativas bayesianas na priori de Jeffrey. Contudo, o parâmetro de precisão ϕ e o parâmetro δ têm interferência razoável no comportamento das estimativas. O primeiro pela variabilidade, e o segundo pela quantidade de observações inflacionadas nos dados. Logo, vamos começar agora uma análise mais detalhada a respeito das estimativas obtidas desses parâmetros.

As estatísticas das estimativas do parâmetro de precisão ϕ também apresentaram melhores resultados conforme aumenta-se o tamanho da amostra e diminui-se o valor do parâmetro δ . Porém, é possível notar que as estimativas bayesianas sob as prioris usuais 2, Jeffreys sob independência e as prioris de Jeffreys apresentaram melhores resultados que os demais métodos. As estimativas oriundas dessas prioris tiveram vícios menores, assim como o menores valores do REQM. Quanto ao AVRB, independente do valor de δ , nota-se que quando o tamanho amostral é 50 ou 200, a maioria dos valores foram aproximadamente 20% ou menores. Destaca-se as estimativas das prioris usuais 2 e as duas de Jeffreys, que para o AVRB não há valores maiores que 10%, em qualquer combinação dos níveis dos fatores estudados. Apenas para as estimativas do parâmetro ϕ , que principalmente nos casos em que n é igual a 20, e δ igual a 0,5 apresentou alguns resultados ruins em relação as estatísticas calculadas. Por exemplo, para as estimativas obtidas com as prioris usuais 1, quando ϕ igual a 50, o valor do AVRB obtido foi igual a 111% (modelo inflacionado em zero) e 110% (modelo inflacionado em um). Resumindo, em geral, as estimativas com as prioris usuais 2, Jeffreys sob independência e Jeffreys se mostraram um pouco melhores no processo de estimação do parâmetro de precisão ϕ .

Tabela 4.7: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	39,5%	13,6%	9,8%	9,1%	24,3%	23,4%
	50	17,0%	7,5%	6,2%	5,8%	11,3%	10,9%
	200	3,4%	1,1%	0,8%	0,8%	2,0%	1,9%
200	20	25,0%	11,4%	9,5%	9,1%	23,4%	23,3%
	50	9,5%	3,6%	2,9%	2,7%	7,7%	7,6%
	200	4,0%	2,5%	2,4%	2,4%	3,5%	3,5%

Tabela 4.8: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	73,3%	34,8%	29,4%	29,6%	53,0%	51,8%
	50	19,4%	6,7%	5,1%	4,8%	11,6%	11,3%
	200	6,9%	3,9%	3,5%	3,5%	5,1%	5,0%
200	20	44,1%	28,3%	26,4%	26,3%	48,1%	47,4%
	50	7,6%	0,4%	0,5%	0,8%	5,3%	5,3%
	200	5,4%	3,5%	3,3%	3,2%	4,8%	4,8%

Tabela 4.9: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	111,4%	50,5%	40,9%	38,7%	82,2%	80,1%
	50	27,5%	9,6%	7,1%	6,9%	16,8%	16,3%
	200	6,8%	2,8%	2,3%	2,0%	4,3%	4,2%
200	20	50,6%	33,4%	30,2%	29,1%	63,9%	64,1%
	50	19,1%	9,2%	8,0%	7,8%	17,9%	17,4%
	200	5,7%	2,9%	2,5%	2,5%	4,7%	4,7%

Tabela 4.10: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	56,4%	27,8%	23,9%	23,2%	40,3%	39,1%
	50	16,1%	6,5%	5,2%	4,9%	10,3%	10,0%
	200	4,3%	2,0%	1,7%	1,7%	2,8%	2,8%
200	20	23,2%	9,7%	7,8%	7,6%	21,4%	21,6%
	50	11,7%	6,1%	5,4%	5,2%	10,1%	10,1%
	200	3,7%	2,3%	2,1%	2,0%	3,2%	3,2%

Tabela 4.11: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	70,9%	32,5%	26,8%	25,9%	49,4%	48,2%
	50	13,3%	1,4%	<0,1%	0,4%	6,1%	5,8%
	200	6,0%	3,0%	2,6%	2,6%	4,2%	4,0%
200	20	41,9%	26,5%	24,8%	24,1%	47,2%	46,7%
	50	15,3%	8,0%	7,0%	6,7%	13,3%	13,4%
	200	5,4%	3,4%	3,3%	3,2%	4,8%	4,8%

Tabela 4.12: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	110,0%	56,4%	49,5%	46,3%	90,1%	88,6%
	50	27,9%	9,6%	7,3%	6,3%	17,0%	16,3%
	200	6,8%	2,7%	2,1%	2,0%	4,2%	4,1%
200	20	54,7%	37,4%	36,2%	34,4%	72,7%	72,7%
	50	17,7%	7,3%	5,8%	5,8%	15,6%	15,3%
	200	6,5%	3,7%	3,4%	3,4%	5,6%	5,5%

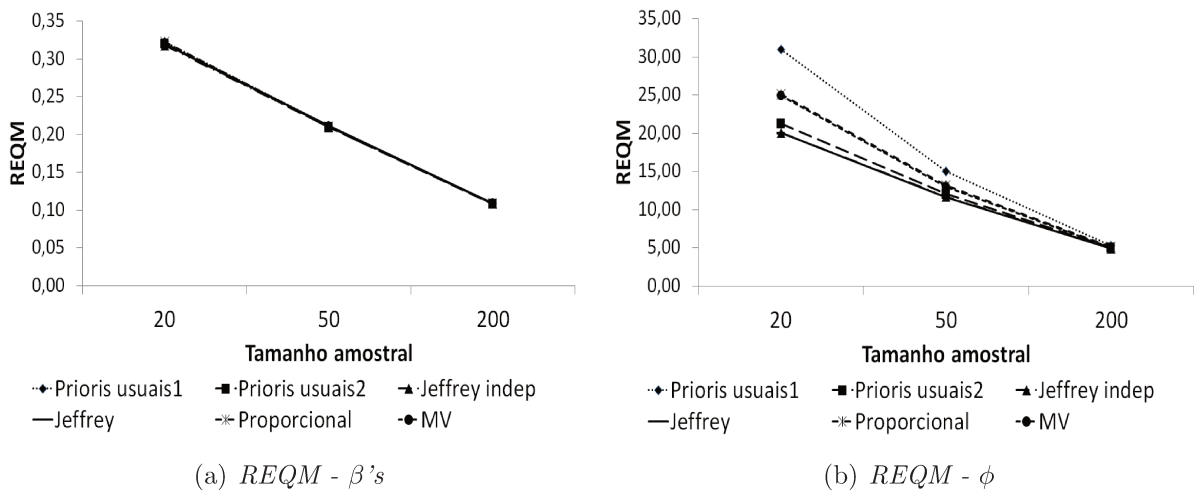


Figura 4.7: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$

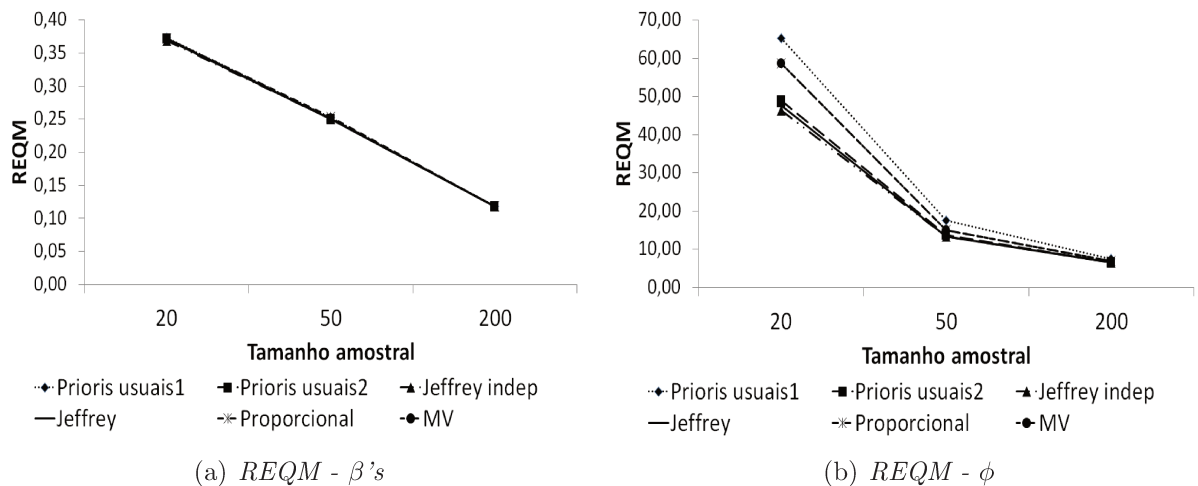


Figura 4.8: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$

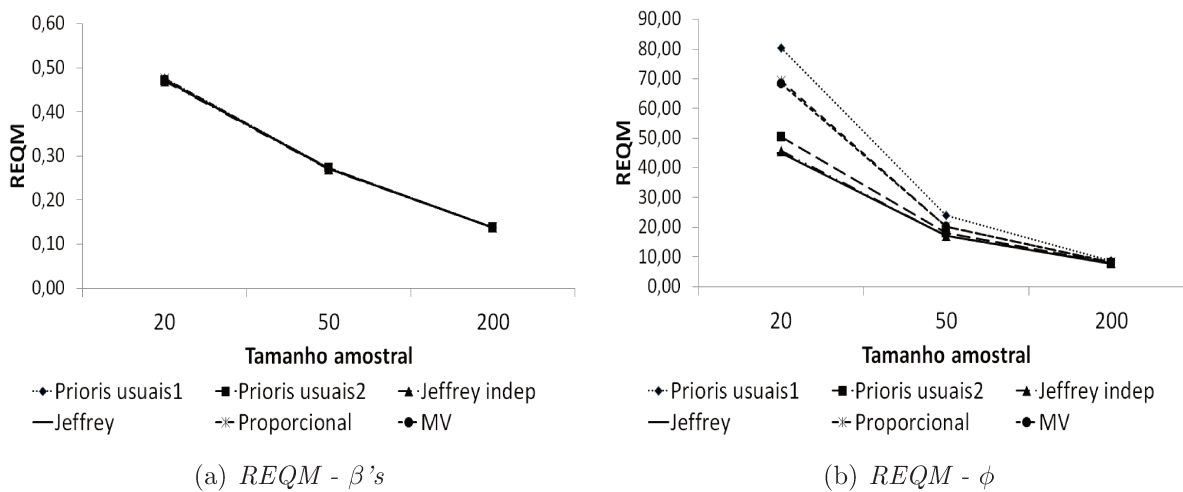


Figura 4.9: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$

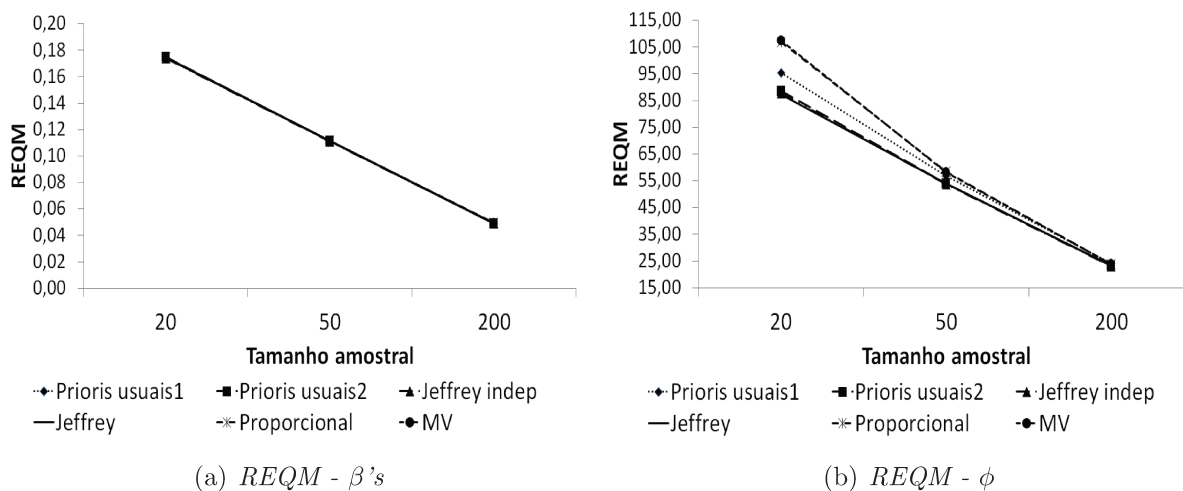


Figura 4.10: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$

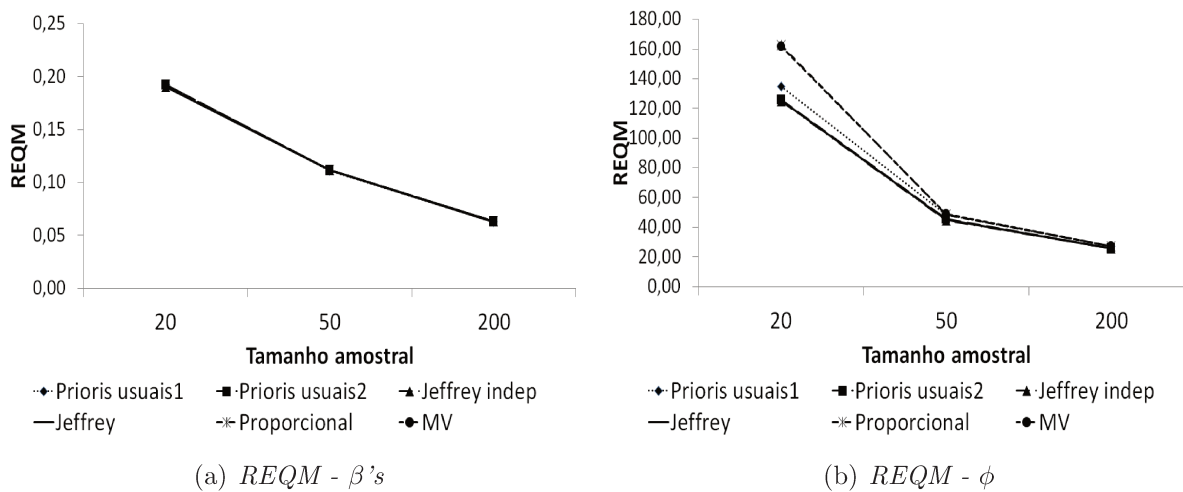


Figura 4.11: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$

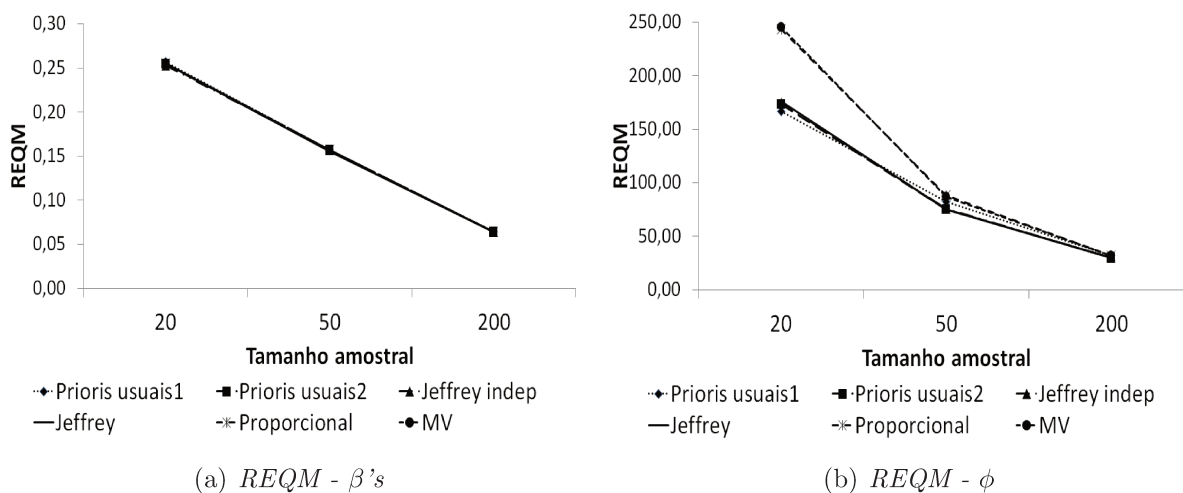


Figura 4.12: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$

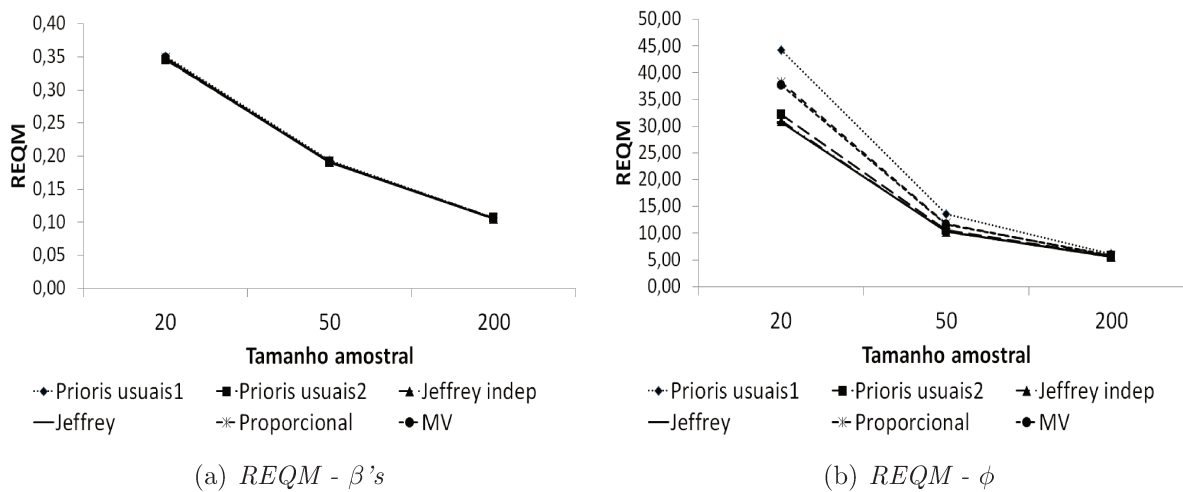


Figura 4.13: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$

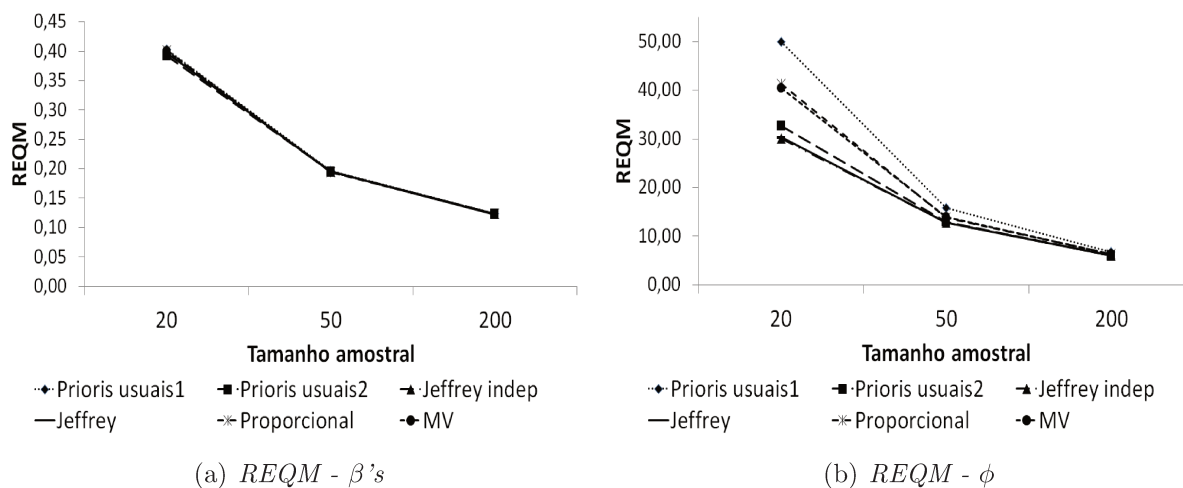


Figura 4.14: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$

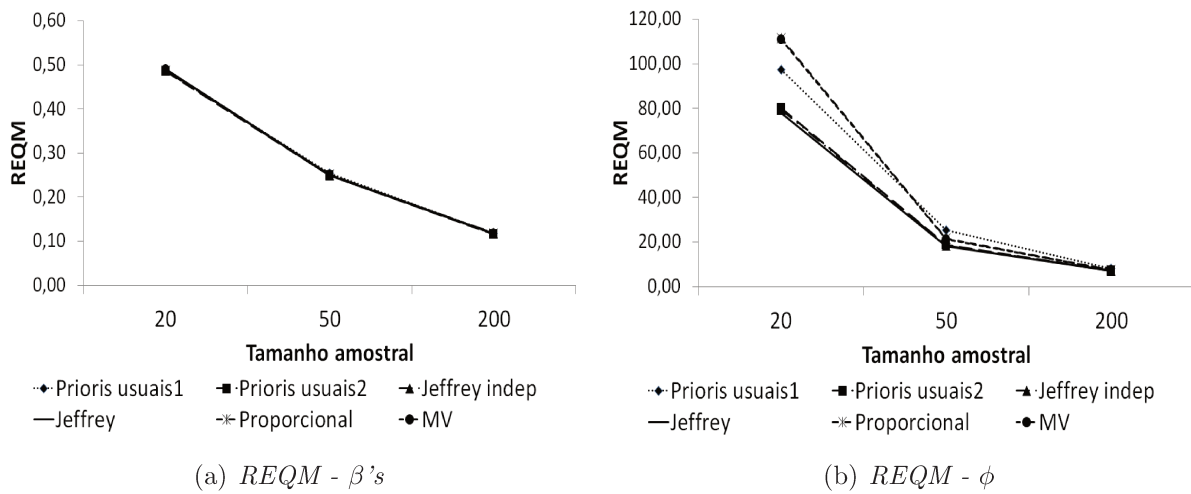


Figura 4.15: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$

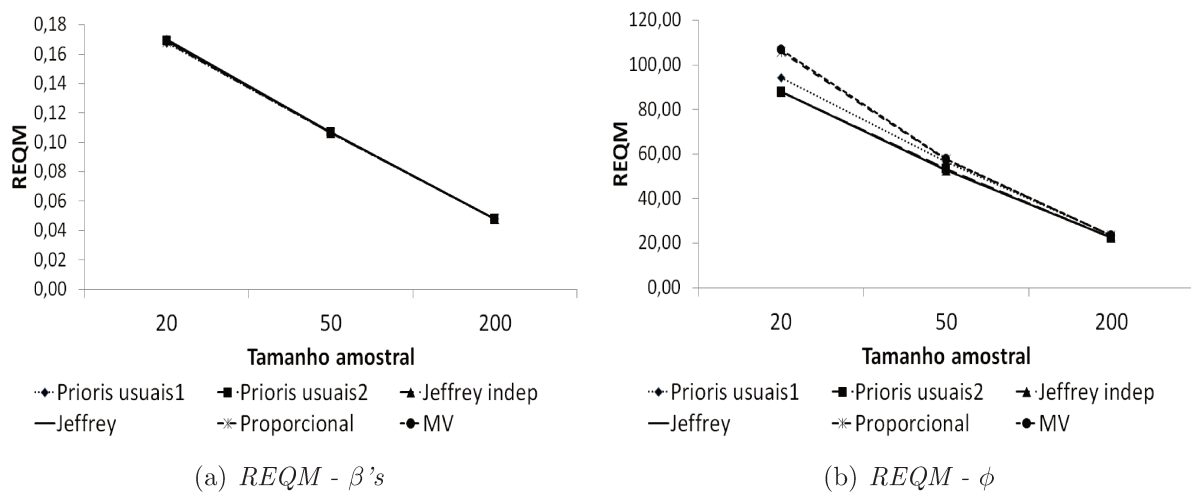


Figura 4.16: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$

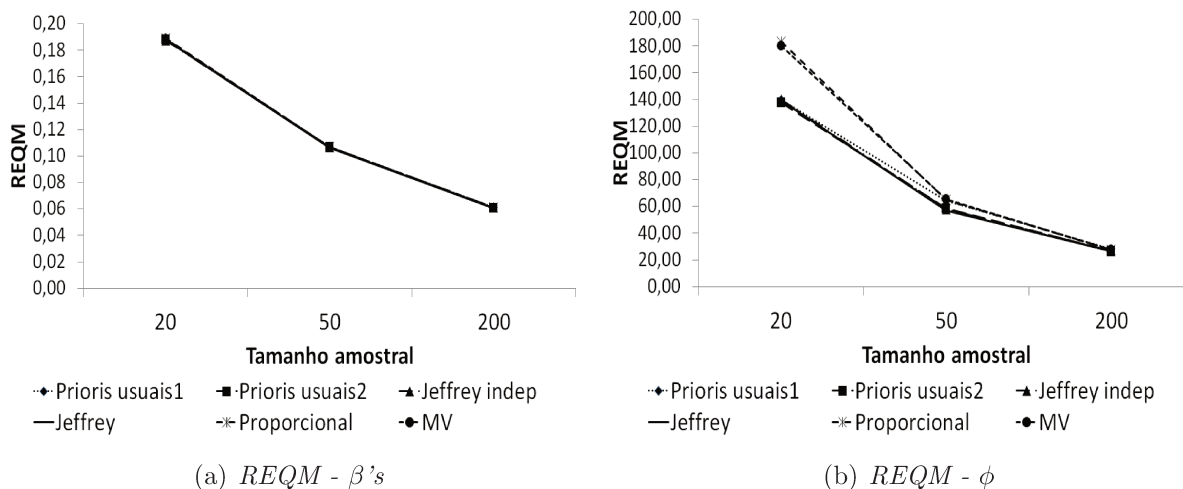


Figura 4.17: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em $um - \phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$

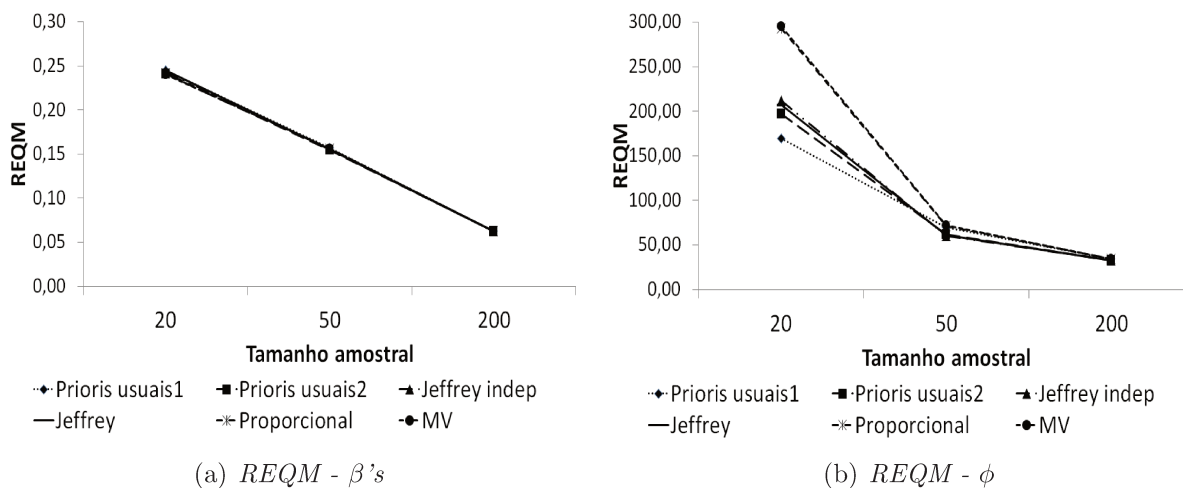


Figura 4.18: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em $um - \phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$

Considerando agora o parâmetro δ , temos dois conjuntos de estimativas, a bayesiana e a clássica. Para esse parâmetro, é bem evidente que quando aumenta-se o tamanho amostral e o valor verdadeiro do parâmetro δ , os resultados obtidos são bem melhores. Para esse parâmetro, quanto maior o valor do δ , espera-se que, em média, tenhamos mais valores iguais a c ($c=0$ ou $c=1$), aumentando o tamanho da amostra que é utilizada para estimar esse parâmetro. Conseqüentemente, melhorando seu desempenho das estimativas.

Nota-se que quando há poucas observações inflacionadas ($\delta=0,1$), as estimativas de MV são melhores. Porém, para δ igual a 0,3 ou 0,5, o REQM obtido foram menores para as estimativas bayesianas em relação a frequentista. Não foi observado nenhuma grande influência do valor do parâmetro ϕ nas estimativas. Tal fato era esperado, devido a separabilidade da função de verossimilhança, que assim, torna os processos de estimação dos parâmetros (β, ϕ) e δ independentes. As Tabelas 4.13 e 4.14 apresentam os valores do *AVRB* obtidos nas simulações para os dois modelos. Nas Figuras 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 tem-se os REQM obtidos.

Em resumo temos que as estimativas dos parâmetros de regressão β se comportaram de modo bem similar em todos os 6 métodos de estimação. Os resultados foram bem próximos aos encontrados no modelo de regressão Beta não-inflacionado. Entretanto as duas abordagens de estimação com as prioris de Jeffreys (sob a suposição de independência e pela regra) e as estimativas provenientes das prioris usuais 2 se mostraram bem semelhantes, e ao mesmo tempo, tiveram um desempenho um pouco melhor em termos das estatísticas analisadas para a estimação do parâmetro de precisão. Para o parâmetro δ , não se observou nenhuma grande vantagem em relação a um método comparado ao outro. Ambos apresentaram resultados muitos próximos.

Tabela 4.13: *AVRB das Estimativas do parâmetro δ - $p=2$*

<i>Modelo Inflacionado em Zero</i>							
		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
	20	42,7%	7,0%	10,8%	5,2%	1,9%	2,1%
50	50	9,6%	6,0%	6,0%	3,5%	0,3%	0,4%
	200	3,7%	0,3%	0,4%	0,3%	<0,1%	<0,1%
200	20	46,4%	11,0%	3,5%	2,8%	1,7%	1,9%
	50	20,2%	5,0%	0,3%	2,4%	<0,1%	<0,1%
	200	1,1%	2,9%	1,4%	0,8%	1,0%	1,1%

Tabela 4.14: AVR B das Estimativas do parâmetro δ - $p=2$

Modelo Inflacionado em Um

		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	45,9%	10,5%	5,2%	1,0%	1,2%	1,3%
	50	15,4%	<0,1%	<0,1%	2,7%	1,3%	1,4%
	200	1,5%	2,5%	0,6%	1,2%	0,1%	0,1%
200	20	57,3%	23,0%	10,8%	5,2%	0,1%	0,1%
	50	13,3%	2,2%	1,5%	1,1%	0,4%	0,4%
	200	1,2%	2,8%	3,5%	2,9%	0,9%	0,9%

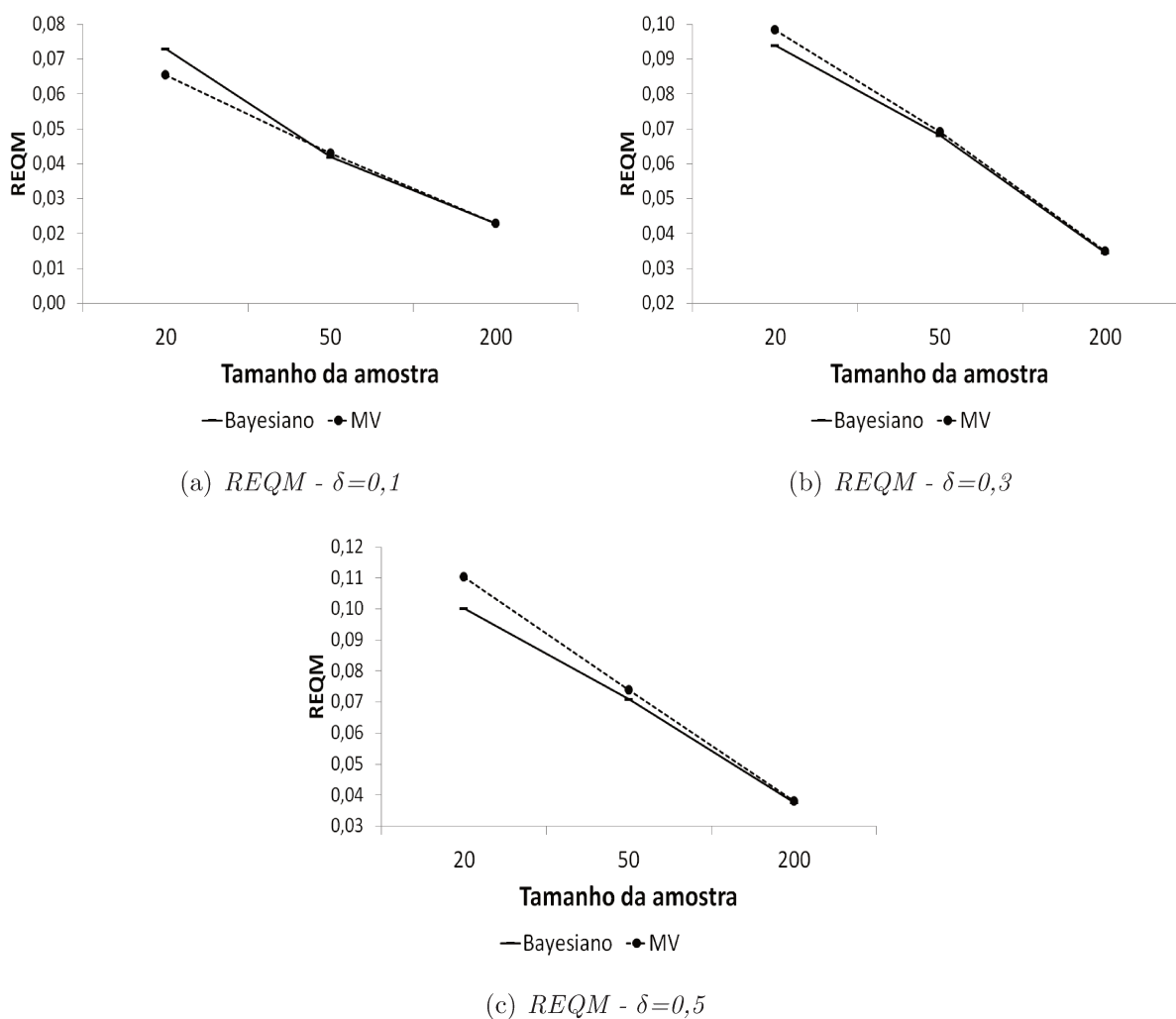
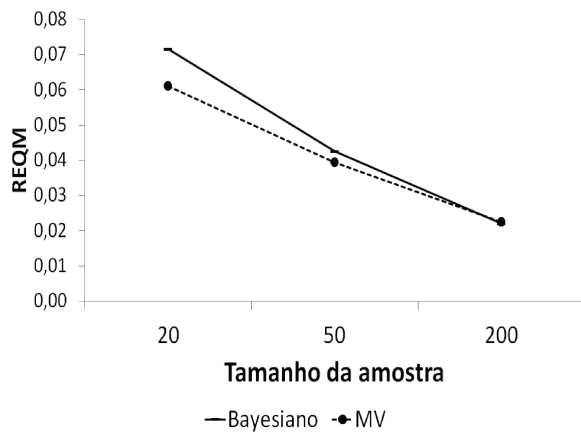
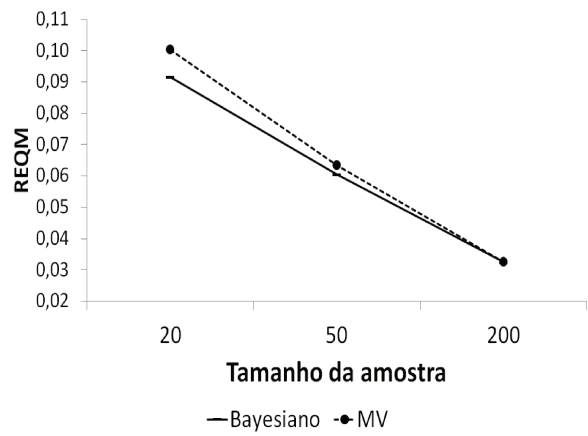


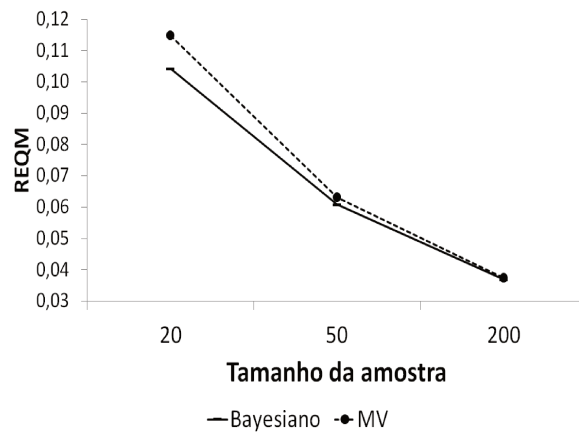
Figura 4.19: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$ e $p=2$



(a) $REQM - \delta=0,1$

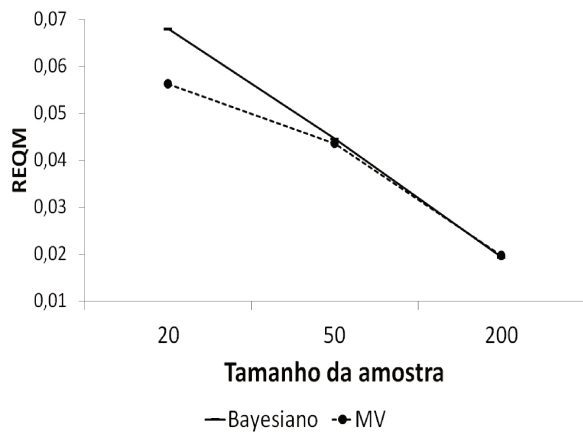


(b) $REQM - \delta=0,3$

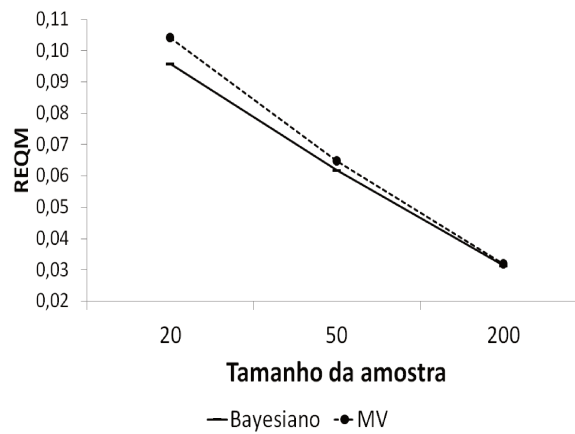


(c) $REQM - \delta=0,5$

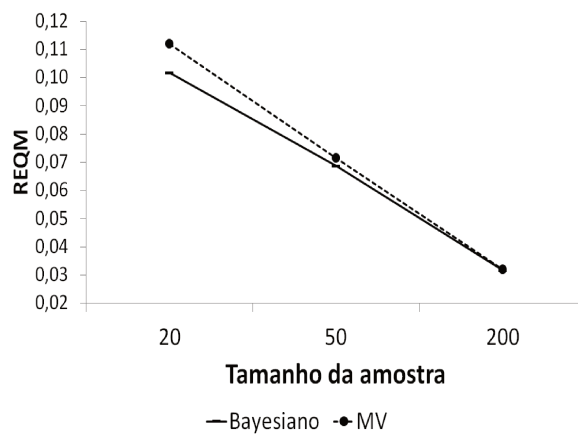
Figura 4.20: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$ e $p=2$



(a) $REQM - \delta=0,1$

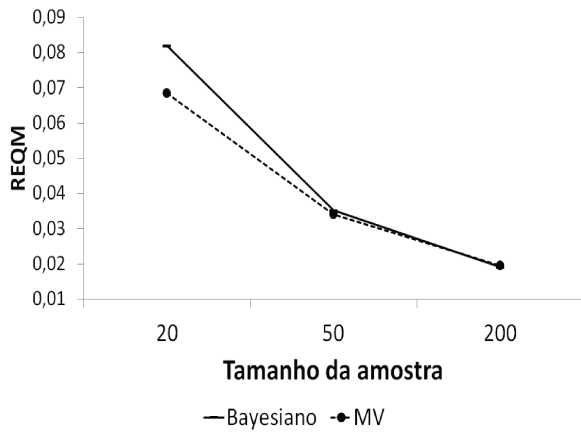


(b) $REQM - \delta=0,3$

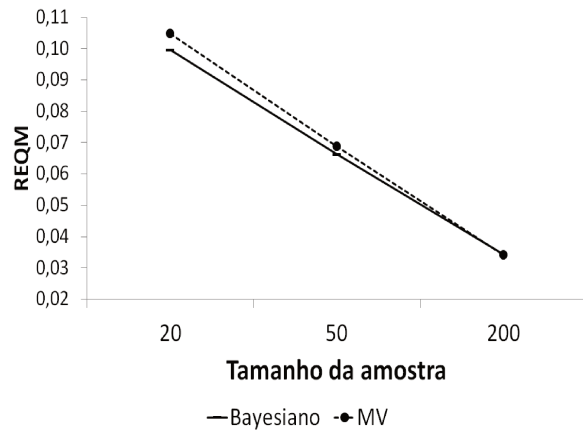


(c) $REQM - \delta=0,5$

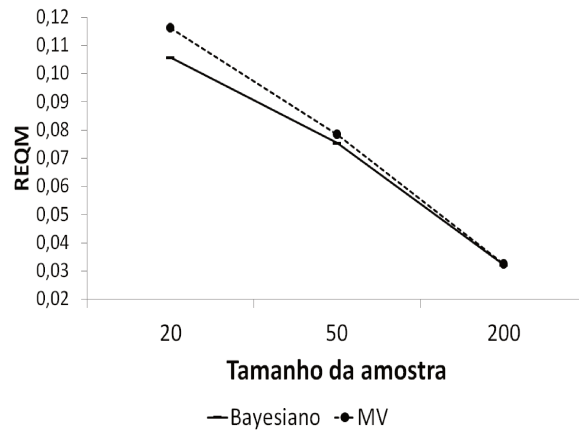
Figura 4.21: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$ e $p=2$



(a) $REQM - \delta=0,1$



(b) $REQM - \delta=0,3$



(c) $REQM - \delta=0,5$

Figura 4.22: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$ e $p=2$

Iniciaremos as análises dos resultados obtidos das simulações quando o número de covariáveis é igual a 5. As Tabelas 4.15 a 4.17 apresentam os valores do vício relativo para cada um dos conjuntos de estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta inflacionado em zero. As Tabelas 4.18 a 4.20 apresentam os valores do AVRB para as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão Beta inflacionado em um.

Começemos pelos parâmetros β_0 , β_1 , β_2 , β_3 e β_4 . Novamente, podemos observar que quanto maior o tamanho da amostra e maior o valor do parâmetro de precisão ϕ melhores são os resultados. Além disso, podemos dizer que quanto menor o valor do parâmetro δ , melhor o desempenho das estimativas. Em geral, as variâncias obtidas são menores quando ocorre esses três fatos simultaneamente. Aliás, nenhum dos conjuntos de estimativas se sobressaiu em relação aos demais. Os resultados bayesianos e o frequentista ficaram bem próximos.

Em relação ao viés das estimativas, de modo geral, não foram encontradas diferenças entre os métodos de estimação. Nota-se que para o AVRB o valor máximo encontrado nas condições simuladas foi igual a 15,1% para o AVRB médio no conjunto de estimativas da priori de Jeffreys, quando $n=20$, $\phi=50$ e $\delta = 0,3$. No modelo inflacionado em um, o maior valor obtido para o viés relativo foi igual a 15,0% na combinação de $n=20$, $\phi=50$, $\delta = 0,5$, com as prioris de Jeffreys também. Em todas as outras situações, os valores obtidos para a estatística AVRB foram menores que 20%. Relembremos que a estatística AVRB não foi calculada para o parâmetro β_2 , devido o fato do valor verdadeiro ser igual a 0, e assim, o valor do AVRB tende ao infinito, o que não nos interessaria.

O REQM não apresentou diferenças significativas entre as estimativas. Mais uma vez é notória a melhora nas estatísticas a medida que aumentamos o n e o ϕ e diminuimos o δ . As Figuras 4.23 a 4.30 e 4.31 a 4.38, para os modelos inflacionado em zero e inflacionado em um, respectivamente, ilustram os valores da REQM.

As estimativas dos parâmetros de regressão do modelo Beta inflacionado em zero ou um, assim como no caso que o número de covariáveis é dois, tiveram comportamento bem similares em relação as quantidades analisadas. As estimativas dos β 's se comportaram de modo semelhante entre si,

em geral não obtivemos nenhum método de estimação que apresentou vantagens em relação aos outros na qualidade das estimativas.

Vamos iniciar agora a análise dos parâmetros de precisão, ϕ , e do parâmetro de mistura, δ , para o caso de $p=5$.

Tabela 4.15: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	2,4%	1,7%	1,2%	7,6%	1,3%	2,1%
	50	2,0%	1,7%	1,6%	2,9%	1,7%	1,9%
	200	0,7%	0,5%	0,5%	0,6%	0,6%	0,6%
200	20	1,3%	1,4%	1,4%	2,5%	1,3%	1,1%
	50	0,4%	0,3%	0,3%	0,5%	0,3%	0,4%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%	0,2%	0,2%

Tabela 4.16: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	3,6%	3,7%	3,0%	15,1%	3,0%	3,5%
	50	1,1%	1,1%	1,1%	3,1%	1,0%	0,9%
	200	1,5%	1,3%	1,2%	1,1%	1,3%	1,4%
200	20	1,4%	1,1%	0,9%	3,1%	1,1%	1,7%
	50	1,3%	1,2%	1,1%	1,0%	1,2%	1,3%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%	0,2%	0,2%

Tabela 4.17: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	10,3%	5,0%	7,1%	13,5%	8,2%	7,4%
	50	3,5%	1,4%	1,3%	2,8%	2,2%	3,3%
	200	1,2%	1,0%	0,9%	0,9%	1,1%	1,2%
200	20	4,1%	3,1%	4,1%	4,6%	3,9%	5,0%
	50	1,6%	1,4%	1,4%	1,3%	1,5%	1,7%
	200	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%

Tabela 4.18: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	5,6%	2,5%	2,7%	4,9%	3,9%	5,6%
	50	0,6%	1,3%	1,2%	2,7%	1,0%	0,5%
	200	1,0%	0,9%	0,9%	0,8%	0,9%	1,0%
200	20	1,5%	1,5%	1,3%	2,1%	1,3%	1,8%
	50	0,7%	0,5%	0,5%	0,3%	0,6%	0,8%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%

Tabela 4.19: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	8,0%	4,0%	4,1%	8,2%	5,8%	8,3%
	50	2,8%	1,4%	1,2%	1,0%	1,9%	2,7%
	200	0,2%	0,4%	0,4%	0,8%	0,2%	0,2%
200	20	2,5%	1,6%	1,6%	2,6%	2,3%	2,9%
	50	0,4%	0,3%	0,3%	0,7%	0,4%	0,4%
	200	0,2%	0,3%	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%

Tabela 4.20: AVR B das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	8,0%	3,0%	3,8%	15,0%	5,8%	8,7%
	50	2,7%	0,8%	0,7%	3,8%	1,4%	2,5%
	200	1%	0,4%	0,4%	0,3%	0,6%	0,9%
200	20	2,7%	1,9%	2,3%	6,5%	2,6%	4,0%
	50	1,2%	1,3%	1,1%	1,4%	1,2%	1,3%
	200	0,3%	0,3%	0,4%	0,4%	0,3%	0,3%

Tabela 4.21: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	71,8%	36,6%	28,4%	16,7%	52,9%	73,7%
	50	24,6%	13,1%	10,6%	2,0%	17,6%	23,4%
	200	4,7%	2,2%	1,7%	1,0%	3,2%	4,3%
200	20	41,4%	25,6%	21,8%	12,4%	43,5%	69,7%
	50	14,5%	8,0%	7,0%	2,2%	12,8%	20,0%
	200	4,1%	2,6%	2,3%	0,3%	3,5%	5,1%

Tabela 4.22: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	108,6%	54,6%	43,9%	28,6%	79,9%	116,2%
	50	26,6%	11,2%	8,1%	8,8%	17,4%	25,1%
	200	4,2%	0,9%	0,3%	3,1%	2,3%	3,7%
200	20	55%	43,1%	40,3%	14,4%	75,1%	120,8%
	50	17,1%	9,0%	7,7%	4,8%	15,4%	24,8%
	200	3,6%	1,6%	1,3%	1,3%	2,9%	4,9%

Tabela 4.23: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	242,6%	299,2%	853,0%	279,7%	1346,9%	721,8%
	50	47,2%	23,9%	19,2%	8,8%	33,3%	46,2%
	200	12,5%	7,6%	6,6%	1,4%	9,4%	11,8%
200	20	88,4%	119,5%	2493,6%	445,6%	4348%	8686,9%
	50	31,9%	20,7%	18,6%	3,0%	32,0%	48,9%
	200	5,8%	3,0%	2,5%	1,2%	4,8%	7,8%

Tabela 4.24: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	76,3%	39,8%	32,3%	15,3%	56,3%	78,8%
	50	19,4%	8,4%	6,1%	6,2%	12,8%	18,2%
	200	5,6%	2,9%	2,4%	0,2%	3,9%	5,1%
200	20	29,5%	14,4%	10,9%	19,9%	29,2%	53,6%
	50	13,5%	7,3%	6,0%	3,1%	11,8%	19,0%
	200	2,8%	1,3%	1,1%	0,9%	2,4%	3,8%

Tabela 4.25: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	117,0%	61,3%	49,9%	23,4%	88,5%	126,4%
	50	35,2%	19,7%	16,2%	1,7%	25,8%	34,0%
	200	4,4%	1,1%	0,4%	3,0%	2,4%	3,9%
200	20	52,9%	39,5%	35,9%	20,9%	72,4%	119,1%
	50	13,0%	5,0%	3,6%	8,3%	11,1%	20,5%
	200	3,8%	1,9%	1,5%	1,1%	3,2%	5,2%

Tabela 4.26: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	296,1%	296,4%	457,8%	69,1%	835,4%	1513,7%
	50	46,9%	22,4%	17,6%	11,3%	32,6%	45,7%
	200	7,2%	2,6%	1,6%	3,3%	4,5%	6,6%
200	20	97,2%	129,1%	263,3%	51,7%	514,5%	852,7%
	50	33,5%	22,5%	20,3%	1,7%	33,4%	51,2%
	200	3,2%	0,3%	0,2%	3,8%	2,2%	4,9%

Iniciando com o parâmetro ϕ , em geral, nota-se nesse caso que a abordagem bayesiana utilizando a priori de Jeffreys apresentou as menores variâncias, se comparada aos demais conjuntos de estimativas, para os casos em que n é igual a 20 e δ igual a 0,1 e 0,3. A medida que o tamanho amostral aumenta (acima de 50), não há grandes diferenças entre os métodos. Também ao passo que aumenta o valor do parâmetro δ , maior é a variância, de forma geral. Em relação aos valores obtidos para o REQM, destaca-se que nos casos em que n é igual a 20, e δ é igual a 0,5, tanto as estimativas bayesianas, quanto a estimativa de MV, apresentaram resultados muito altos. Isso se deve porque houve a presença de alguns *out-liers* dentre as 100 réplicas. Um dos motivos é porque com esses valores de δ e n , há algumas réplicas nas quais número de observações no intervalo (0,1) é menor que 10. Com isso, as estimativas são muito ruins, pois no processo de estimação do ϕ , utiliza-se apenas essas observações. Devido a esse fato, os gráficos de REQM do ϕ das Figuras 4.25(b), 4.29(b), 4.33(b) e 4.37(b) ficaram bem distorcidos. A fim de melhorar a visualização, tomamos o logaritmo natural dos valores de REQM, e nas Figuras 4.26, 4.30, 4.34 e 4.38 apresentam os dois gráficos lado a lado. Com o gráfico do $\log(\text{REQM})$ nota-se que para os tamanhos amostrais iguais a 50 e 200, não há grandes diferenças entre os conjuntos de estimativas.

Em termos dos vieses das estimativas, o desempenho dos diferentes métodos foram bem similares. Nota-se que os valores do AVRB obtidos para o caso em que o tamanho amostral é 20, foram bem altos no caso em que o valor de δ é 0,5. Por exemplo, na Tabela 4.23, temos que o AVRB variou de 88% até 8686%, isso para o modelo inflacionado em zero. Para o modelo inflacionado em um, o maior valor foi igual a 1514%, que pode ser visto na Tabela 4.26. Assim como ocorrido com a estatística REQM, esse fato pode ser explicado pelo tamanho amostral para estimar o ϕ , que nos casos em que n é 20, em média, o número de observações entre 0 e 1, fica em torno de 10, que é muito pequeno.

Analisaremos agora o parâmetro δ . Para esse parâmetro, é bem claro que aumentando-se o tamanho amostral e o valor verdadeiro do parâmetro δ , os resultados obtidos tendem a ser mais precisos. Percebe-se que quando há poucas observações inflacionadas ($\delta=0,1$), as estimativas de MV são melhores, pois apresentam menores vícios que as estimativas bayesianas. As Figuras 4.39,

4.40, 4.41 e 4.42 mostram bem essa situação. Porém, para δ igual a 0,3 ou 0,5, os REQMs obtidos foram menores para as estimativas bayesianas em relação a frequentista. Assim como no caso em que $p=2$, não se observou influência do valor do parâmetro ϕ nas estimativas. Os resultados obtidos para $p=2$ e $p=5$ foram bem similares, sugerindo que o número de covariáveis não influencia na estimação do parâmetro δ .

As Tabelas 4.27 e 4.28 mostram os valores do *AVRB* obtidos nas simulações dos modelos inflacionados em zero e inflacionados em um. Nas Figuras 4.39, 4.40, 4.41 e 4.42 têm-se os REQMs obtidos.

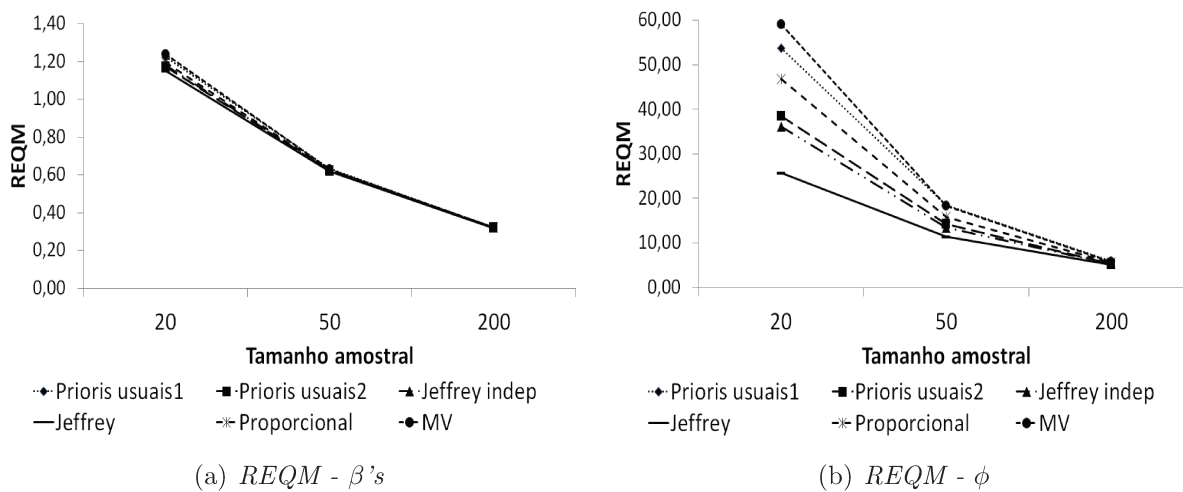


Figura 4.23: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$

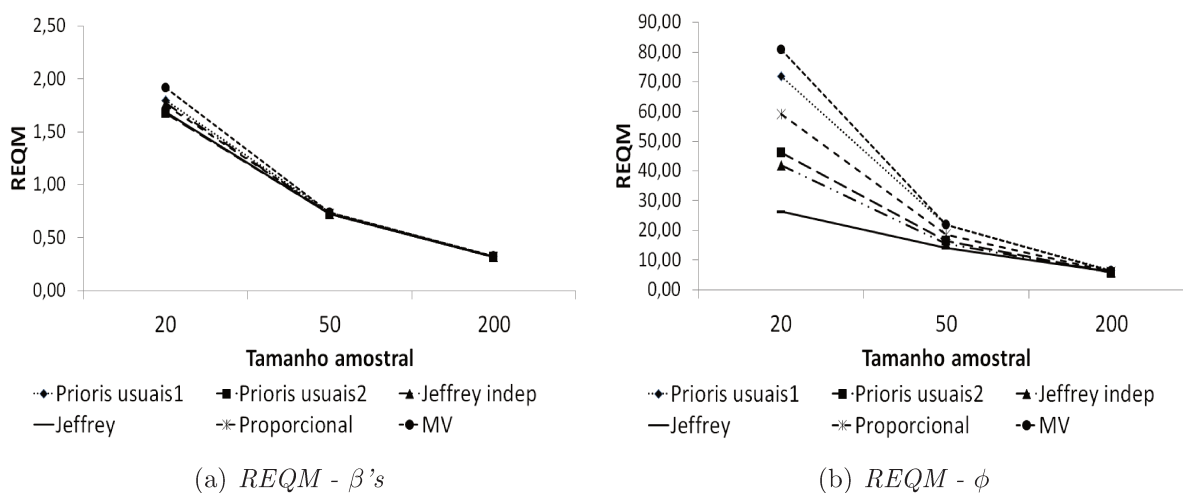


Figura 4.24: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$

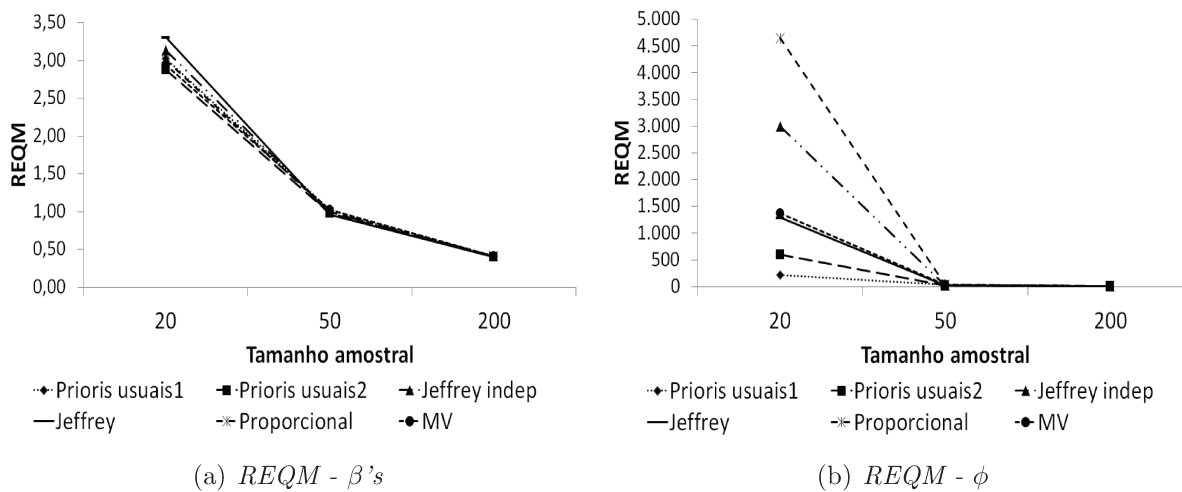


Figura 4.25: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$

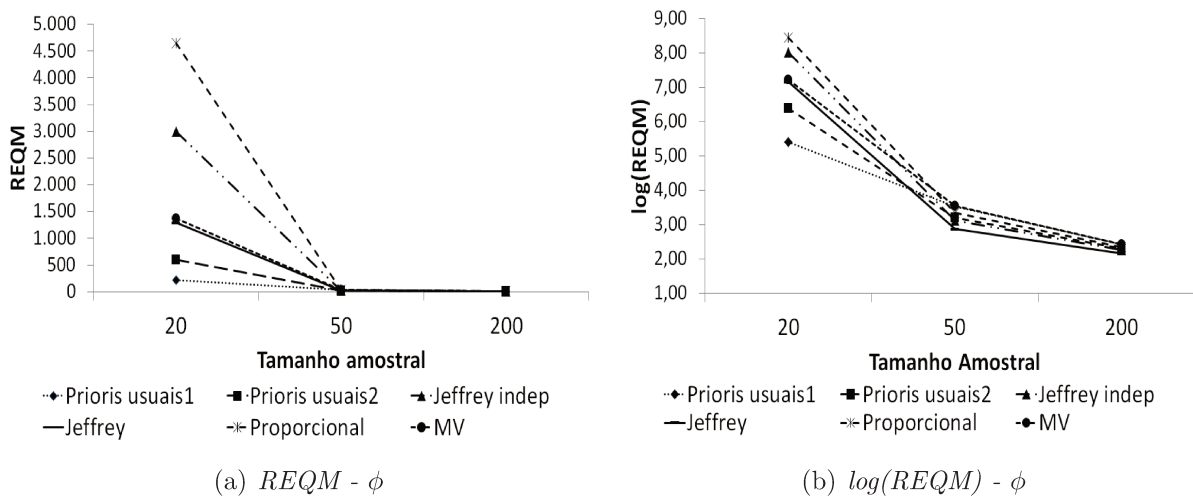


Figura 4.26: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$

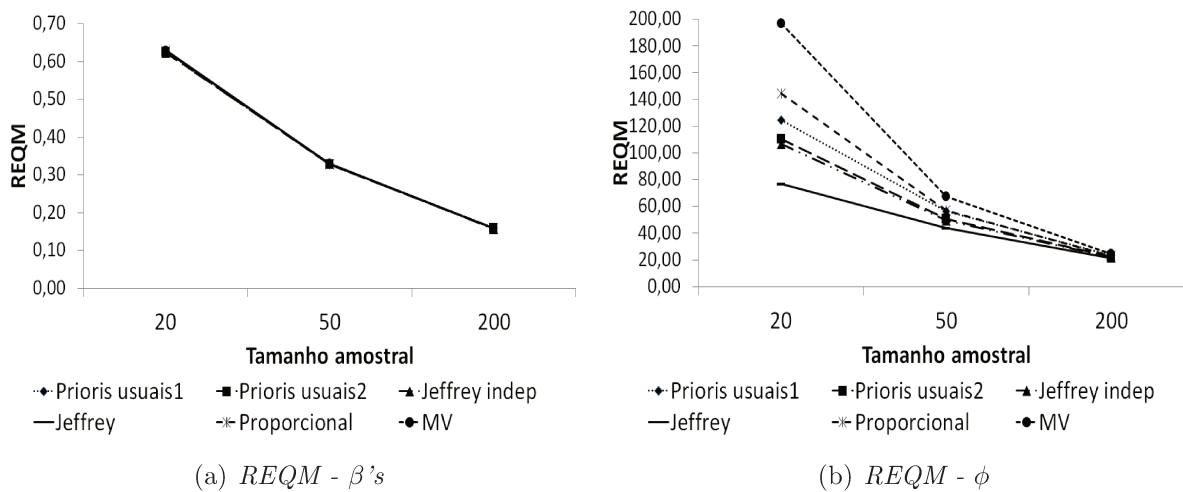


Figura 4.27: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$

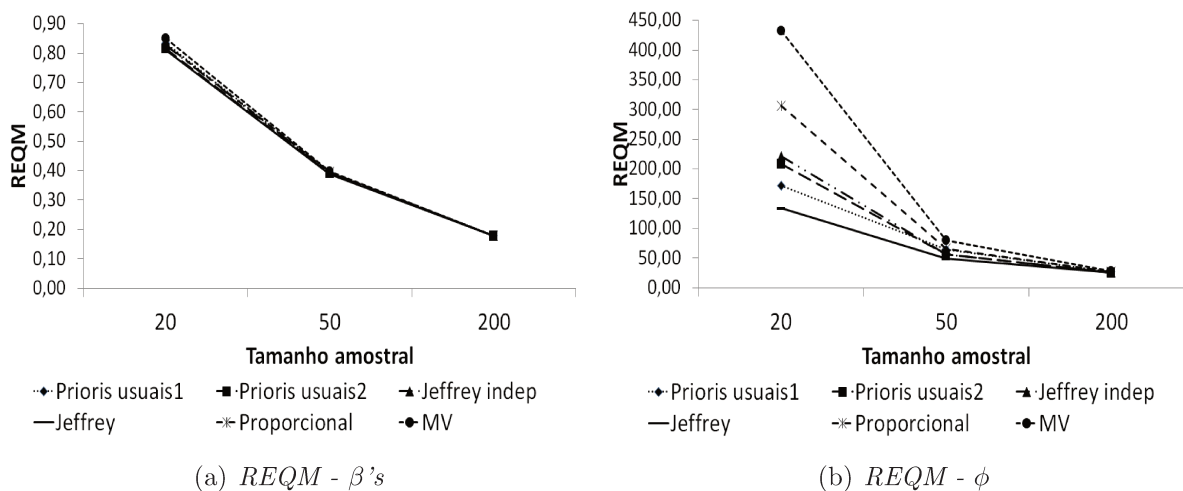


Figura 4.28: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$

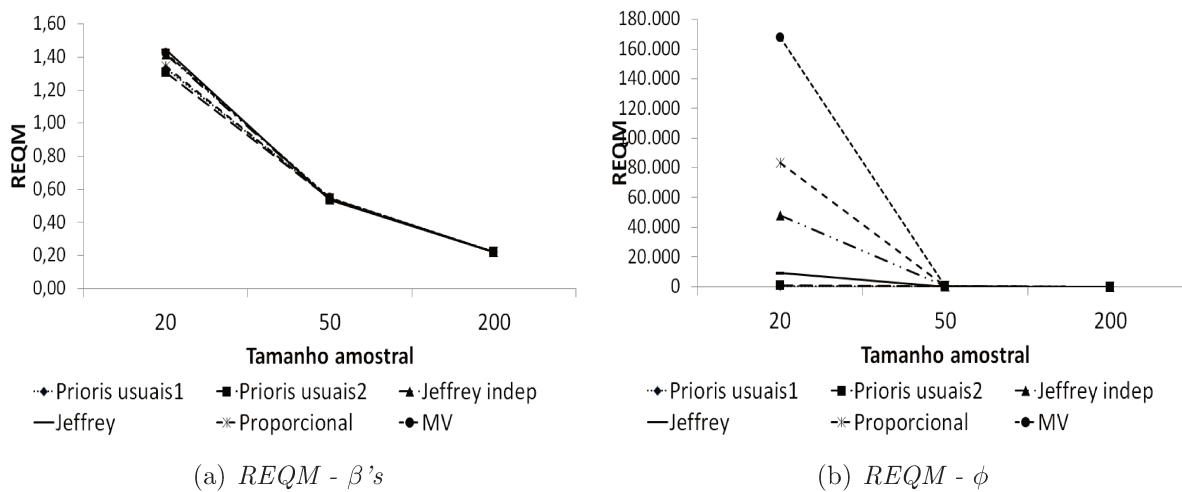


Figura 4.29: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$

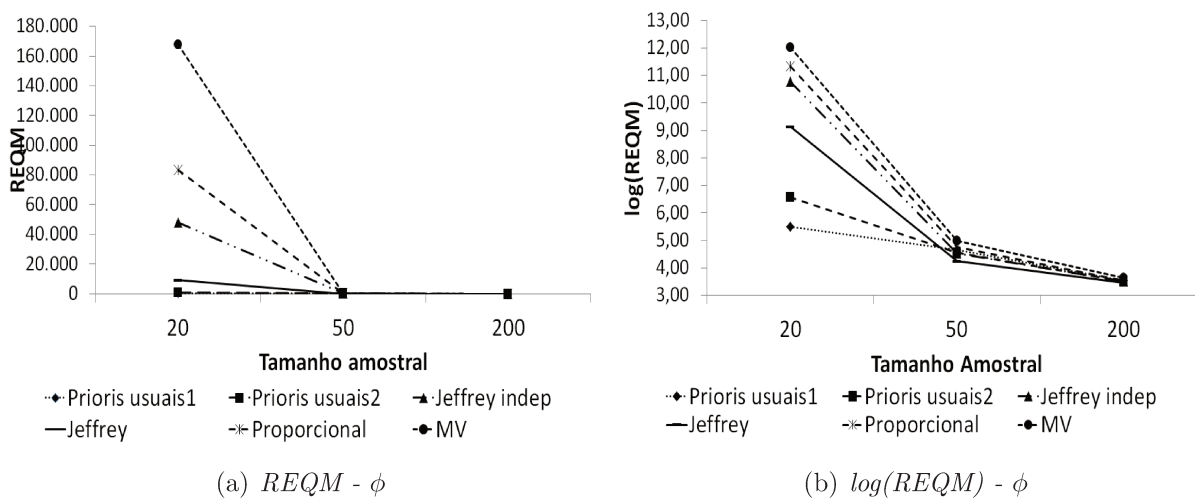


Figura 4.30: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$

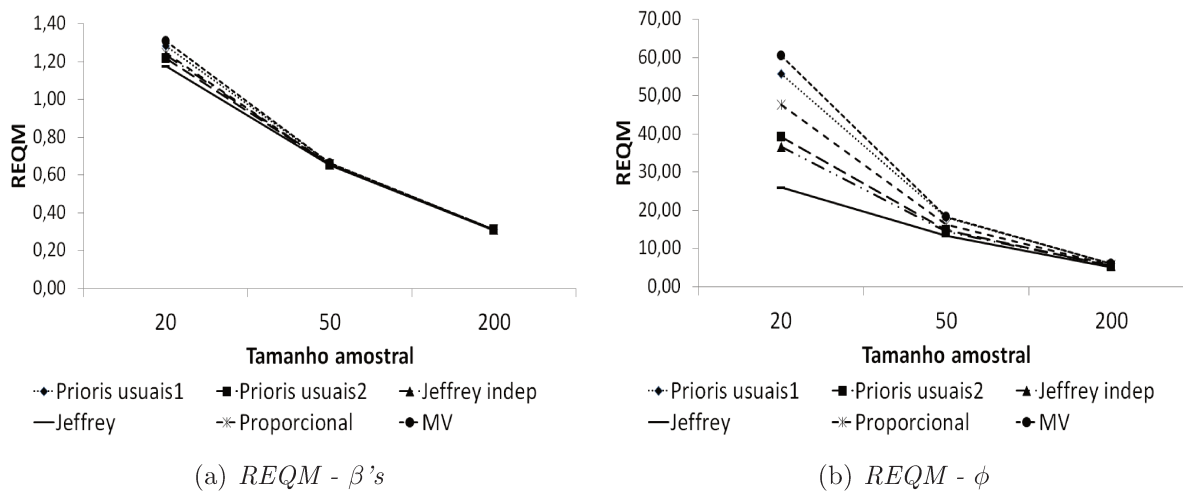


Figura 4.31: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$

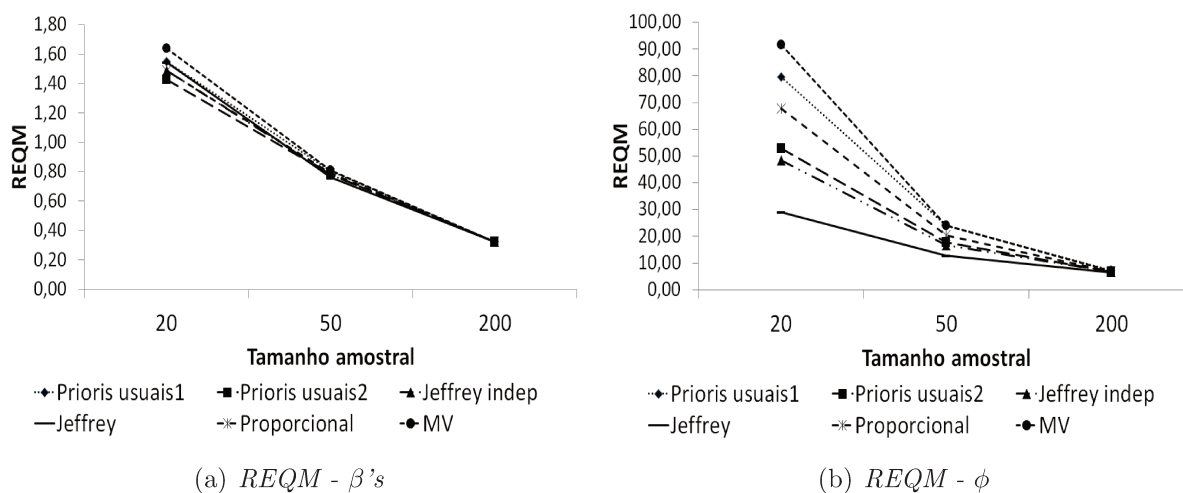


Figura 4.32: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$

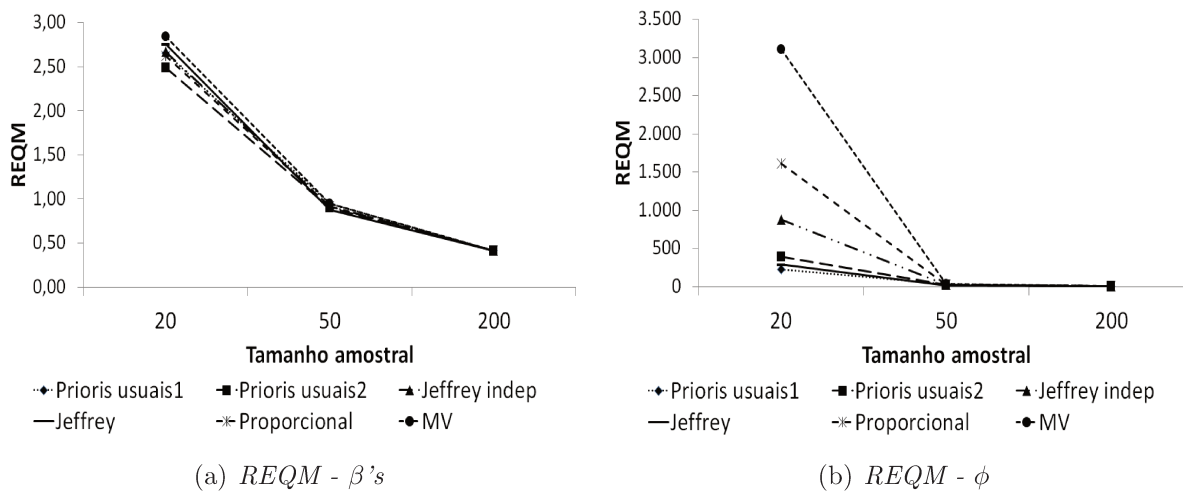


Figura 4.33: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$

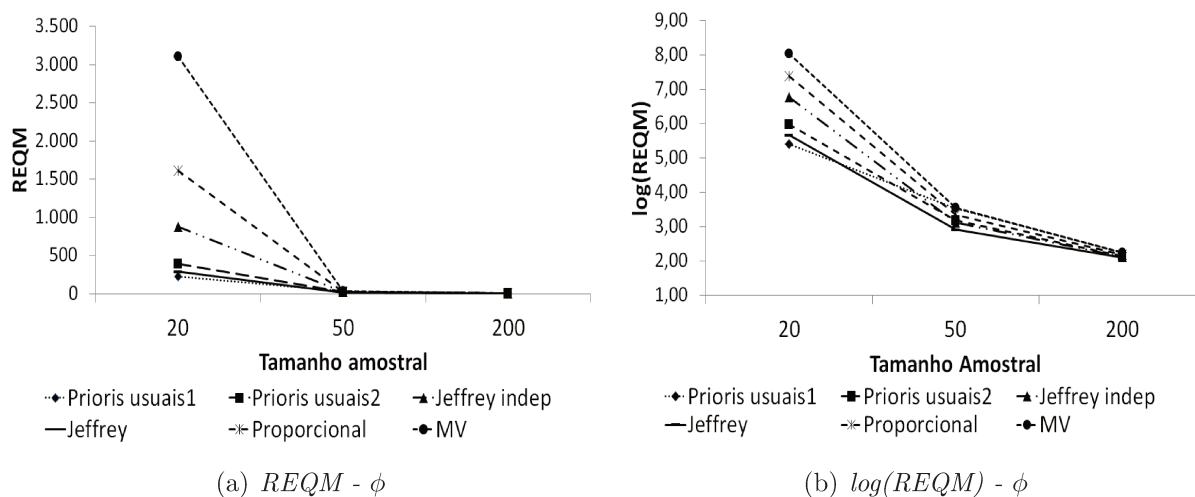


Figura 4.34: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$

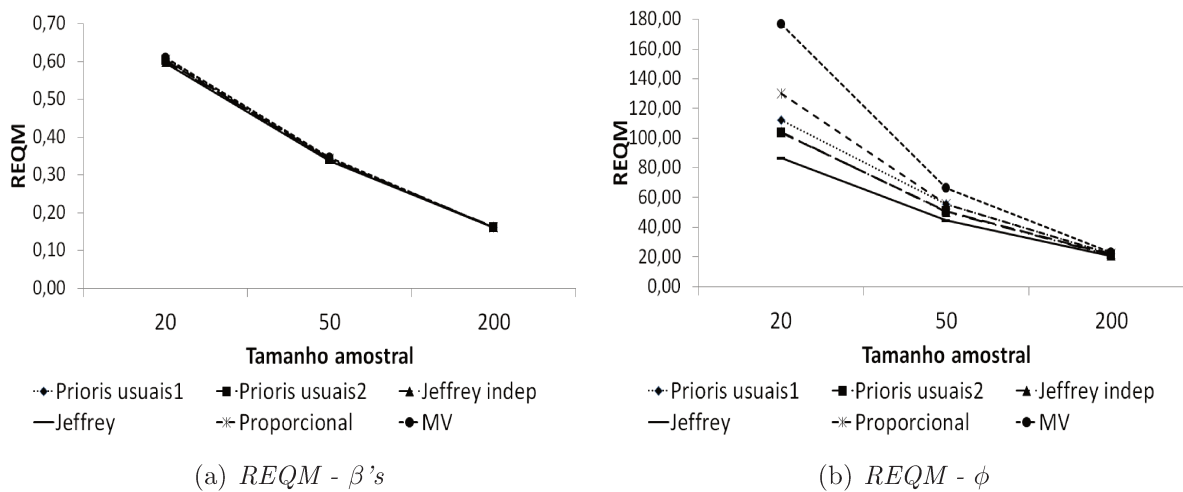


Figura 4.35: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em $um - \phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$

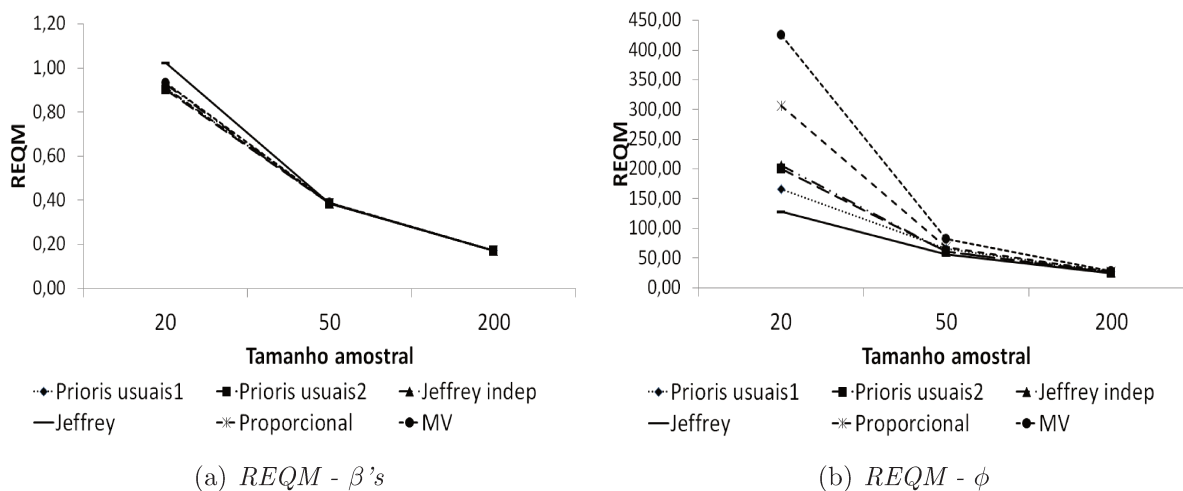


Figura 4.36: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em $um - \phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$

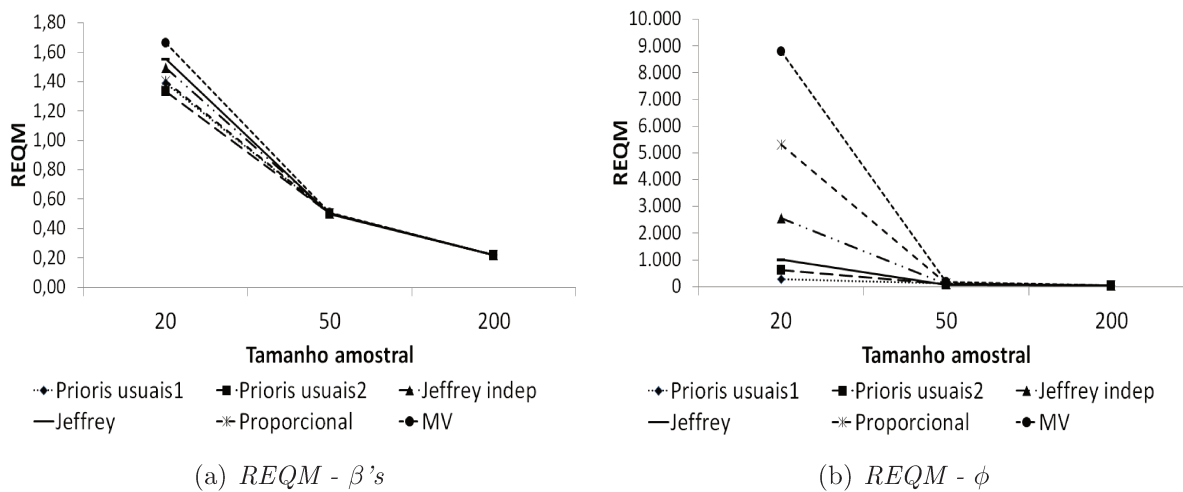


Figura 4.37: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em $um - \phi=200, p=5$ e $\delta=0,5$

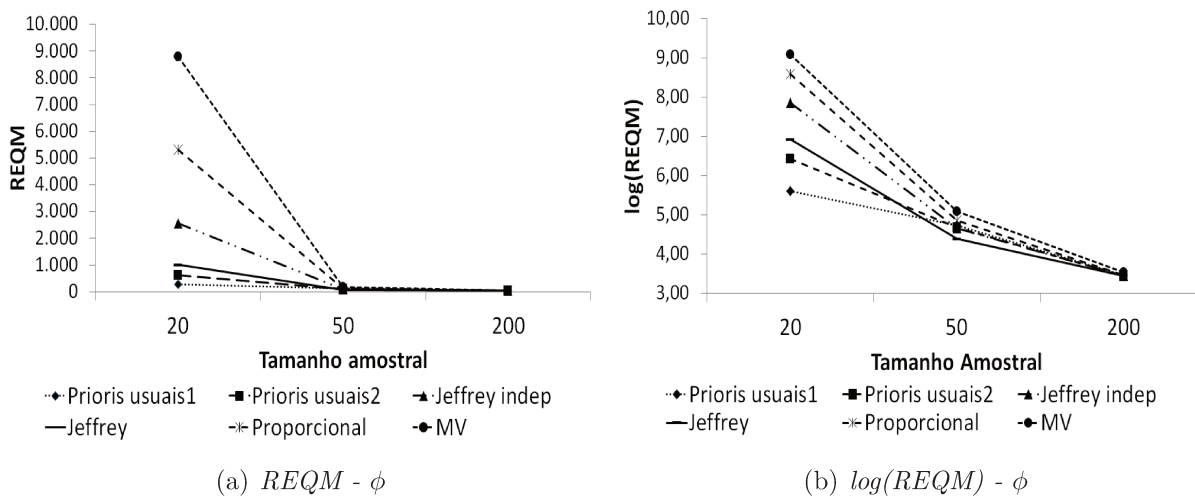


Figura 4.38: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em $um - \phi=200, p=5$ e $\delta=0,5$

Tabela 4.27: AVR B das Estimativas do parâmetro δ - $p=5$

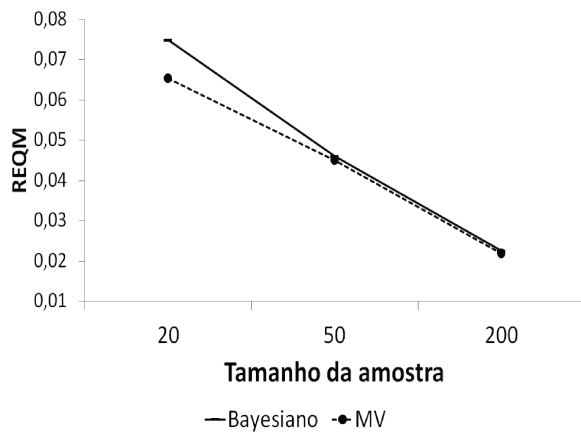
Modelo Inflacionado em Zero

		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	46,8%	11,5%	8,6%	2,8%	2,6%	2,9%
	50	15,8%	0,4%	4,7%	2,3%	0,7%	0,7%
	200	7,5%	3,6%	0,4%	1,1%	0,3%	0,3%
200	20	57,7%	23,5%	5,0%	1,2%	1,1%	1,2%
	50	13,8%	1,6%	<0,1%	2,7%	1,0%	1,0%
	200	5,0%	1,0%	1,0%	0,3%	0,4%	0,4%

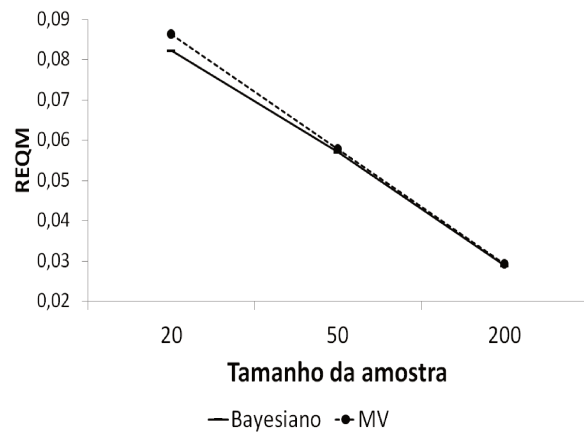
Tabela 4.28: AVR B das Estimativas do parâmetro δ - $p=5$

Modelo Inflacionado em Um

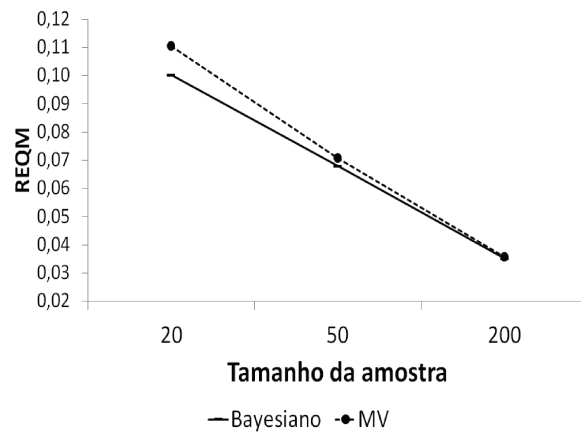
		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	48,2%	13,0%	4,1%	2,2%	1,3%	1,4%
	50	19,6%	4,4%	2,1%	0,5%	3,2%	3,4%
	200	2,8%	1,2%	<0,1%	0,6%	0,4%	0,4%
200	20	48,2%	13%	10,8%	5,2%	1,1%	1,2%
	50	15,2%	0,2%	2,8%	0,3%	1,3%	1,4%
	200	2,8%	1,2%	1,0%	0,3%	0,2%	0,2%



(a) $REQM - \delta=0,1$

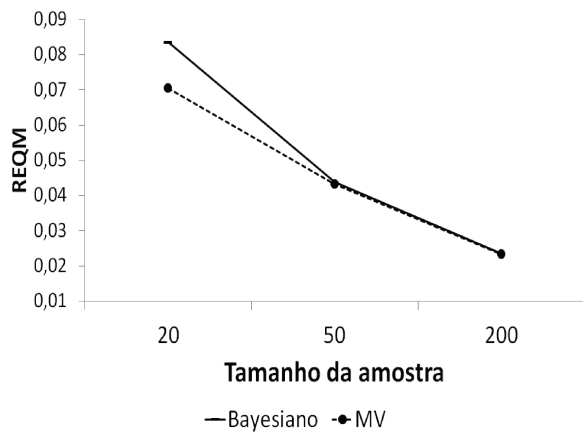


(b) $REQM - \delta=0,3$

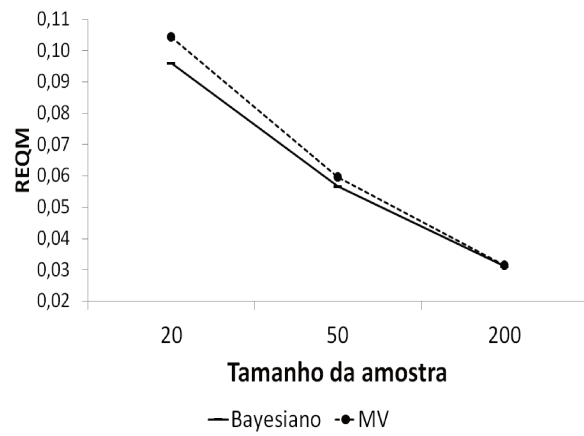


(c) $REQM - \delta=0,5$

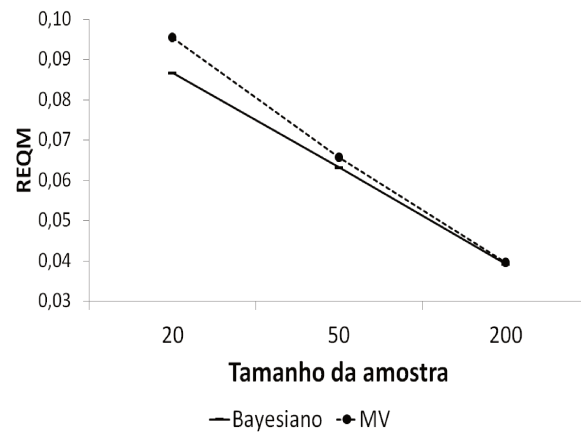
Figura 4.39: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=50$ e $p=5$



(a) $REQM - \delta=0,1$

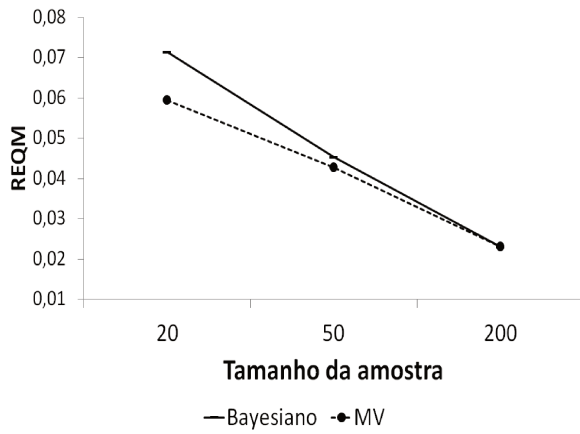


(b) $REQM - \delta=0,3$

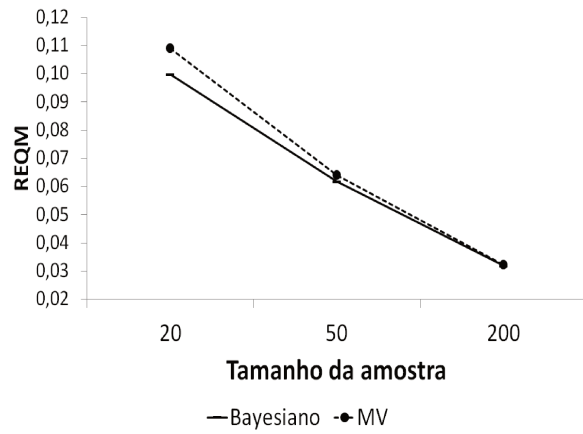


(c) $REQM - \delta=0,5$

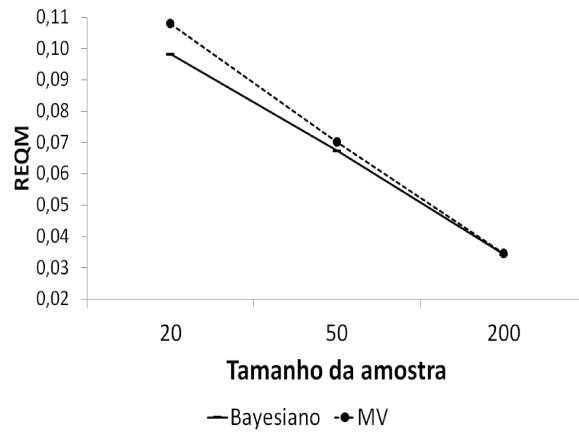
Figura 4.40: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero - $\phi=200$ e $p=5$



(a) $REQM - \delta=0,1$

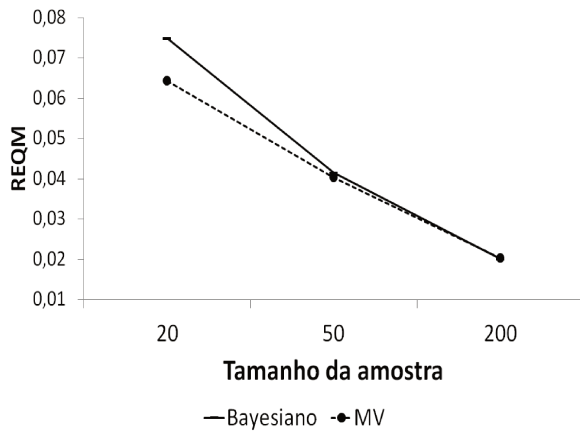


(b) $REQM - \delta=0,3$

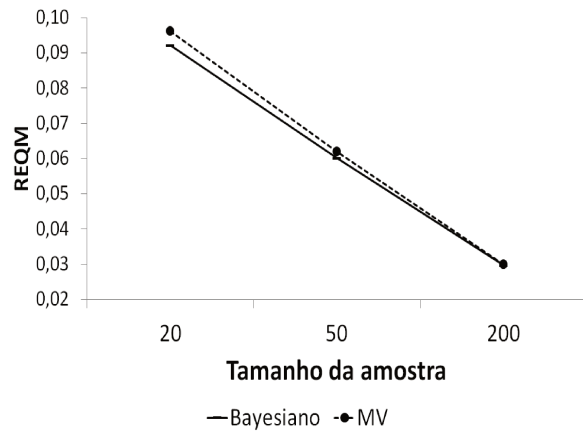


(c) $REQM - \delta=0,5$

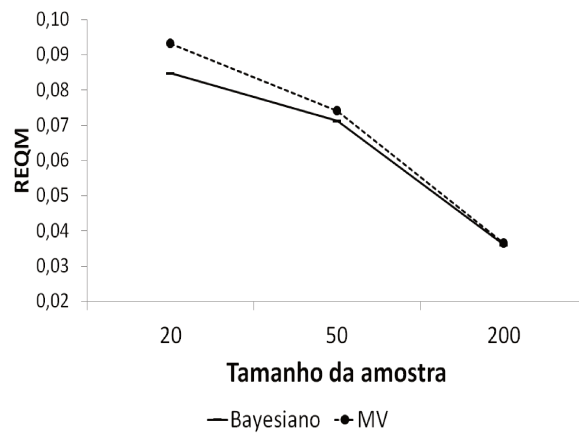
Figura 4.41: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=50$ e $p=5$



(a) $REQM - \delta=0,1$



(b) $REQM - \delta=0,3$



(c) $REQM - \delta=0,5$

Figura 4.42: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em um - $\phi=200$ e $p=5$

4.4 Conclusão

Por fim, após essa breve discussão, conclui-se que as estimativas oriundas do conjunto de priori de Jeffreys se comportaram muito bem na maioria das condições propostas de estudo para estimação dos parâmetros do modelo de regressão Beta inflacionado em c ($c=0$ ou $c=1$), principalmente em relação ao parâmetro ϕ . Porém, a diferença com relação aos demais conjuntos de estimativas bayesianas e a estimativa frequentista, não foi tão grande. Em relação ao vetor β e ao parâmetro δ , praticamente não houve diferenças relevantes. Sugerimos também, com base nos resultados apresentados, não utilizar o modelo de regressão Beta inflacionado quando não houver muitas observações entre $(0,1)$ para estimar os parâmetros β e ϕ , pois as estimativas são bem ruins em todas as abordagens simuladas. Podemos afirmar que em geral, não há grandes diferenças na estimação dos parâmetros em todos os métodos de estimação proposto, apenas uma ligeira vantagem para o conjunto de estimativas da priori de Jeffrey.

Capítulo 5

Estudo de Simulação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um

5.1 Introdução

Para o modelo de regressão Beta inflacionado em zero e um, realizamos um estudo de simulação para analisar o comportamento das estimativas dos parâmetros do componente contínuo do modelo (vetor de parâmetros β e o parâmetro ϕ), assim como os parâmetros referentes ao componente discreto do modelo, que são o δ (probabilidade da observação ser inflacionada, isto é, igual a zero ou a um) e γ (probabilidade da observação ser igual a um, dado que ela é inflacionada). Neste estudo foram fixados 5 fatores: o tamanho amostral, o número de covariáveis (fixando-se também os valores verdadeiros dos parâmetros de regressão), o verdadeiro valor do parâmetro de precisão ϕ (relacionado à variabilidade dos dados), o verdadeiro valor do parâmetro δ e o verdadeiro valor do parâmetro γ (estes dois últimos relacionados ao componente discreto do modelo). Os tamanhos amostrais foram mantidos os mesmos dos estudos anteriores, assim como o número de covariáveis (e seus valores verdadeiros). Para o parâmetro ϕ , os verdadeiros valores são 50 e 200. Para o parâmetro δ os valores verdadeiros foram definidos iguais a 0,1, 0,3 e 0,5. E por fim, definimos o verdadeiro valor do parâmetro γ como sendo igual a 0,5.

Mantivemos as priors para os parâmetros β e ϕ conforme Tabela 3.1. Para os parâmetros

δ e γ , utilizamos como priori a distribuição Beta com os dois hiperparâmetros iguais a 1, que é equivalente a distribuição Uniforme no intervalo (0,1). Assim como o parâmetro δ , o γ tem dois conjuntos de estimativas, o bayesiano e o frequentista. Isso por dois motivos. Primeiro, pelo fato da verossimilhança ser fatorável em três termos, um que depende apenas dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e ϕ , outro que depende de δ e por último, o que depende apenas de γ . Com isso as estimativas são mutuamente independente. E em segundo lugar, que as estimativas tem fórmula fechada, tanto a frequentista, quanto a função a posteriori desses dois parâmetros (δ e γ). As distribuições a posteriori são Beta, conforme as equações (2.32) e (2.35) para os parâmetros δ e γ , respectivamente.

Em primeiro lugar, fixamos os fatores definidos, e geramos as covariáveis conforme a distribuição $U(0,1)$. Com isso, simulamos uma amostra da densidade $bizu(y_t, \delta, \gamma, \mu_t, \phi)$ de acordo com o descrito em (2.6). A função de ligação é dada por $g(\mu_t) = \sum_{i=1}^p x_{ti}\beta_i = \eta_t$ sendo a logito, ou seja:

$$\mu_t = \frac{\exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}$$

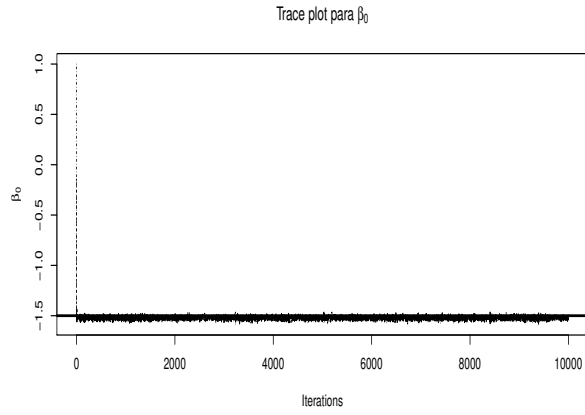
Para cada amostra gerada, foram calculadas as estimativas bayesianas para cada conjunto de prioris e a estimativa de Máxima Verossimilhança. A estimativa bayesiana escolhida foi a esperança a posteriori. As estimativas por MV foram obtidas utilizando o pacote “gamlss” (Rigby e Stasinopoulos (2005)) e o “gamlss.dist” (Stasinopoulos *et al* (2011)). Novamente replicamos esse processo 100 vezes. Com as 100 réplicas calculamos as seguintes estatísticas: Média, Variância, Vício, REQM e AVR B.

Assim como nos casos anteriores, nesse estudo de simulação, também calculamos um AVR B médio e o REQM médio dos parâmetros do modelo de regressão ($\boldsymbol{\beta}$). Com isso, foi possível evitar um número excessivo de tabelas e gráficos.

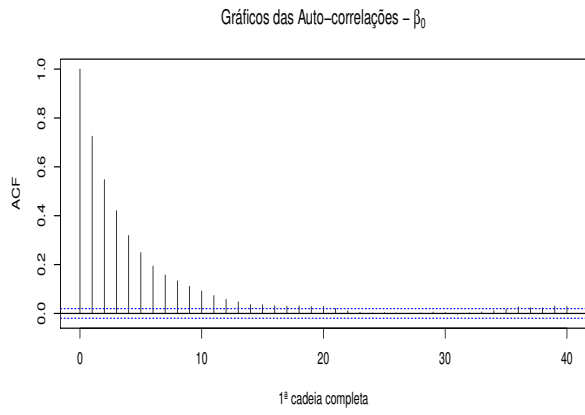
5.2 Estudo de Convergência

Exemplificaremos a seguir um estudo de convergência da implementação do algoritmo de *Metropolis-Hastings* para o modelo de regressão Beta inflacionado em zero e um. Utilizamos o conjunto de prioris proporcional, conforme tabela (2.2). Primeiramente, definimos os valores verdadeiros dos parâmetros do modelo de regressão Beta como sendo igual a $\beta = (-1, 5; 1, 5)$ e o parâmetro $\phi = 200$. As covariáveis foram amostradas da distribuição Uniforme no intervalo (0,1). O tamanho amostral igual a 200. Os parâmetros δ e γ foram iguais a 0,3 e 0,5, respectivamente. Os hiperparâmetros da densidade a priori Normal foram iguais a 0 (vetor de média igual ao vetor nulo) e 25 (matriz de variância e covariância, com todos elementos da diagonal principal igual a 25) para o vetor de parâmetro β .

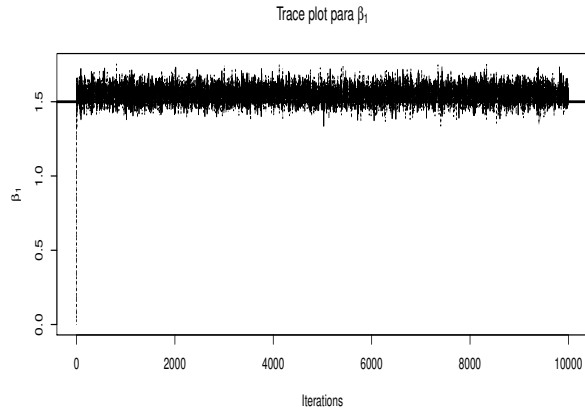
No estudo iniciamos conjuntamente 3 cadeias em paralelo. Numa cadeia os valores iniciais dos parâmetros β e ϕ foram iguais aos propostos por Ferrari e Cribari-Neto (2004), para a inicialização do algoritmo de otimização. Na segunda cadeia, os valores iniciais para os elementos do vetor β foi amostrado de uma densidade Normal com média igual a zero e variância igual a 0,1, e para o valor inicial de ϕ foi amostrado de uma densidade Normal com média igual ao logaritmo do valor verdadeiro (no caso, $\log(200)$) e variância igual a 0,2, e depois tomou-se a exponencial do valor simulado. E na última cadeia, o vetor inicial β foi o vetor nulo e o para o parâmetro ϕ , amostrou-se de uma Normal com média 4,5 e variância 0,2, e tomado a exponencial desse número.



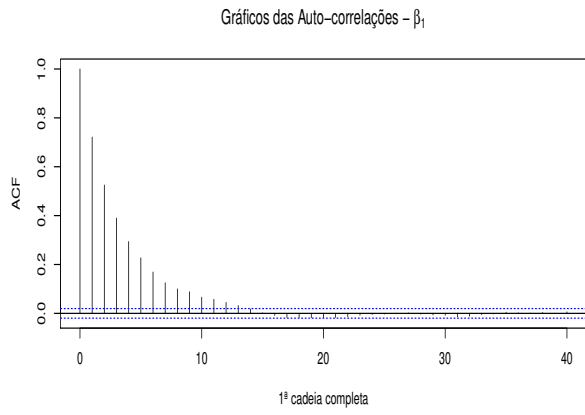
(a) *Parâmetro - β_0*



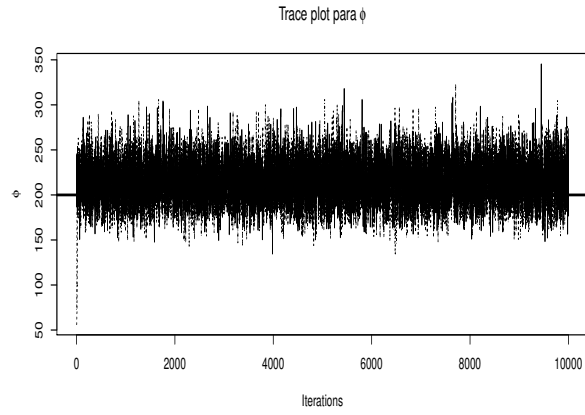
(b) *Auto-correlações - β_0*



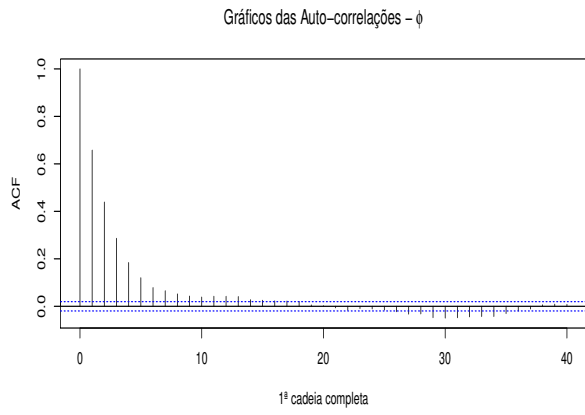
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-correlações - β_1*



(e) *Parâmetro - ϕ*



(f) *Auto-correlações - ϕ*

Figura 5.1: *Trace plot dos parâmetros do Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um*

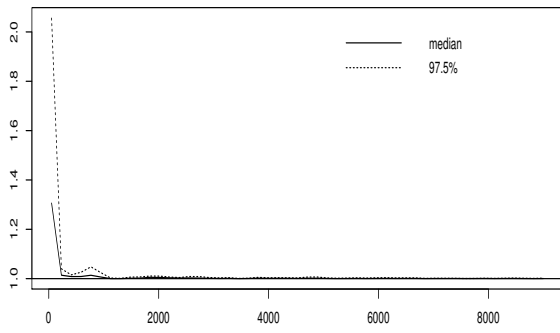
Em cada uma das cadeias o número de iterações foi igual a 10000. Considerou-se um *burn-in* igual a 1000 e espaçamento igual a 9. O tamanho da amostra final igual a 1000. Para auxílio da obtenção das estatísticas e gráficos de monitoramento da convergência das cadeias foi utilizado o pacote “Coda” (Plummer *et al* (2006)) do software R.

Na Figura 5.1 temos os valores das 3 cadeias completas (com as 10000 iterações). Note que elas se sobrepõe, e que nos 3 parâmetros, após o período das 1000 primeiras iterações, aparentemente houve convergência para o verdadeiro valor, e que não há mais influência do valor inicial de cada uma das cadeias. As Figuras 5.1(b), 5.1(d) e 5.1(f) mostram as auto-correlações das cadeias completas. Os valores são bem altos, evidenciando que as cadeias são altamente correlacionadas.

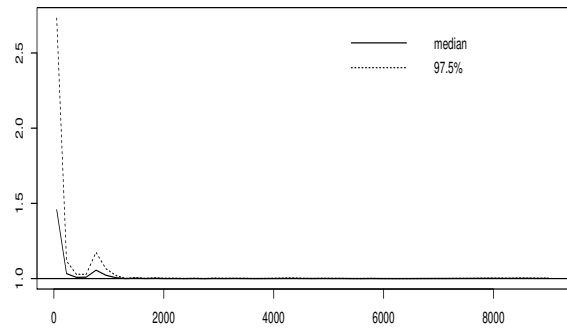
Analisando os valores das estatísticas de Geweke, nota-se que nas 3 cadeias dos parâmetros β_0 , β_1 e ϕ a maioria dos valores ficaram dentro dos limites considerados aceitáveis, o que indica convergência das cadeias. Não foram apresentados os gráficos dessa estatística para evitar que o trabalho ficasse muito longo.

Já na Figura 5.2 temos os gráficos com as estatística de Gelman-Rubin. Quanto mais perto do valor unitário, significa que as 3 cadeias convergiram conjuntamente. Note que para os 3 parâmetros os valores estão bem próximos de 1.

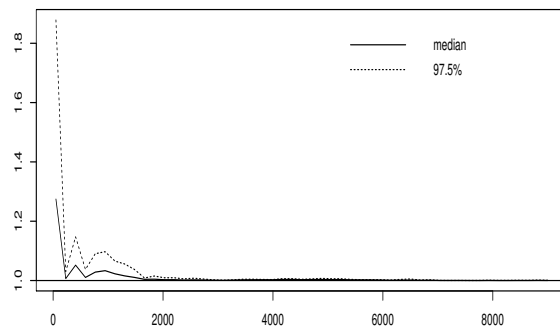
Na Figura 5.3 temos o gráfico do trace-plot da amostra final, isto é, com as 1000 estimativas selecionadas da cadeia de Markov, após a retirada das 1000 primeiras iterações (*burn-in*). Temos também, ao lado, nos Gráficos 5.3(b), 5.3(d) e 5.3(f) as autocorrelações obtidas da amostra final. Note que os valores estão todos abaixo de 0,20, indicando que as amostras são aproximadamente não correlacionadas.



(a) *Parâmetro - β_0*

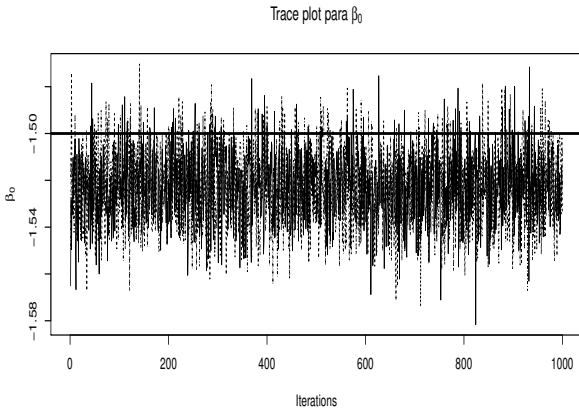


(b) *Parâmetro - β_1*

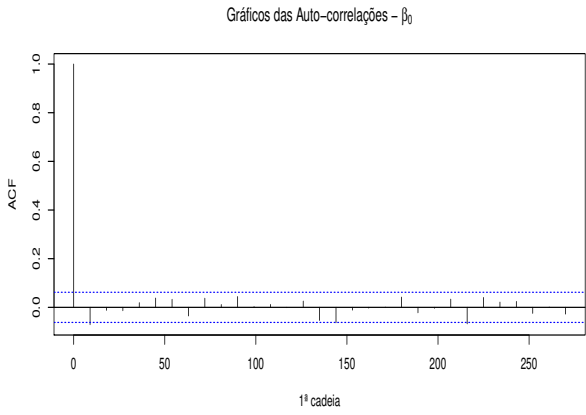


(c) *Parâmetro - ϕ*

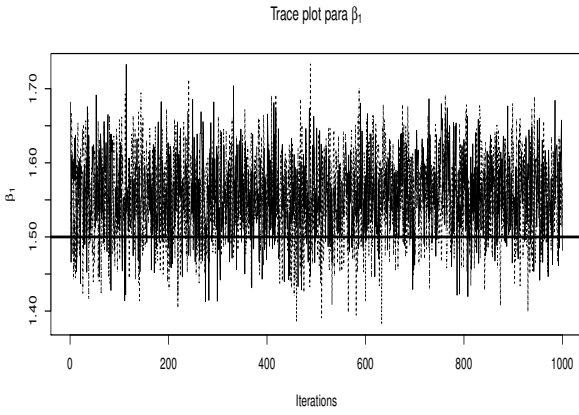
Figura 5.2: *Critério de Gelman-Rubin*



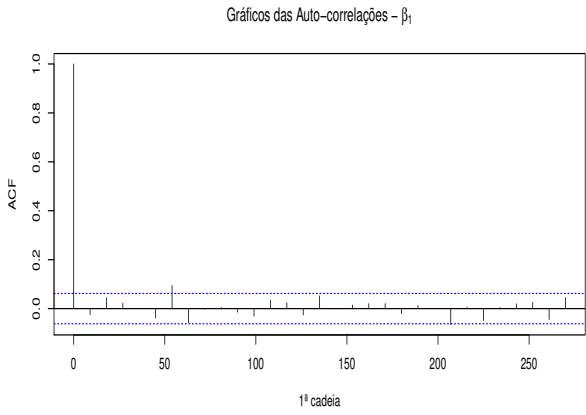
(a) *Parâmetro - β_0*



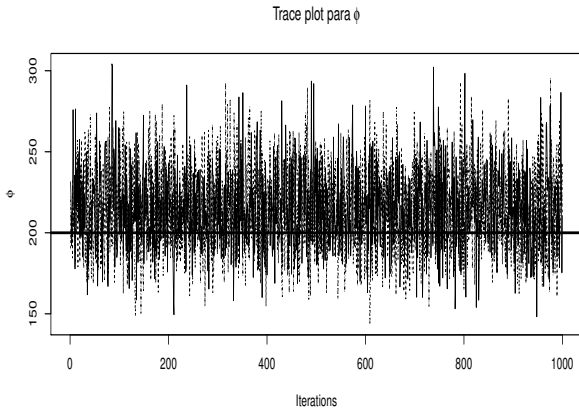
(b) *Auto-Correlações - β_0*



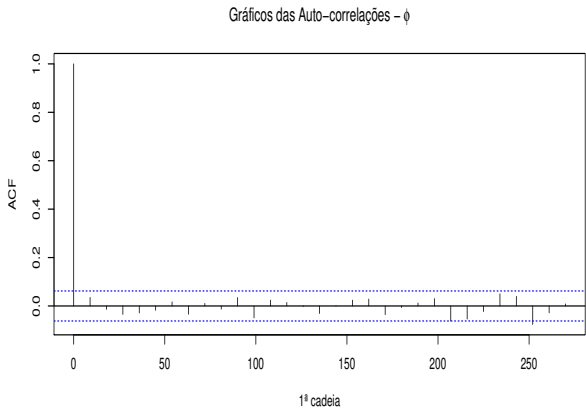
(c) *Parâmetro - β_1*



(d) *Auto-Correlações - β_1*



(e) *Parâmetro - ϕ*



(f) *Auto-Correlações - ϕ*

Figura 5.3: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

5.3 Avaliação dos Resultados

Em primeiro lugar, vamos começar analisando os resultados obtidos dos conjuntos das estimativas dos parâmetros β . Em geral, os resultados indicaram que a medida que se aumenta o tamanho da amostra e o valor do parâmetro ϕ , e diminui-se o valor do parâmetro δ , melhor o desempenho das estimativas. Novamente, salientamos que por causa do maior valor do parâmetro de precisão ϕ (menor a variabilidade dos dados), e também, por causa do menor valor de δ (maior a quantidade de observações não inflacionadas), aumenta-se a amostra relevante para o processo de estimação dos parâmetros de regressão. Conclusão igual aos resultados do modelo inflacionado em zero ou um. Além disso, o verdadeiro valor do parâmetro γ não tem influência no processo de estimação do β .

Seguindo primeiro com o caso em que o número de covariáveis é igual a dois. Nota-se que tanto a variância, quanto o REQM das estimativas dos parâmetros β_0 e β_1 diminui à medida que se aumenta o tamanho da amostra. O valor do parâmetro de precisão ϕ também influencia em melhores resultados, pois a variância diminui com o aumento do parâmetro ϕ (como era de se esperar, quanto maior o valor de ϕ , maior a precisão). O parâmetro δ também influencia em melhores resultados referentes a estimação dos parâmetros β . Quanto menor seu valor, maior a quantidade de dados pertencentes ao intervalo (0,1), e com isso, melhores são as estimativas. Ainda, podemos afirmar que nenhum conjunto de estimativas se sobressaiu em relação aos outros. Os cinco bayesianos e o frequentista ficaram bem próximos.

Nota-se que nas situações em que o parâmetro ϕ é igual a 200 as variâncias das estimativas do β_0 e β_1 são todas pequenas, menores que 0,050. Para os casos em que o $\phi=50$, as variâncias foram todas menores que 1,9. Para o REQM, o máximo valor obtido foi de 1,878 para o parâmetro β_1 , com $n=20$, $\phi = 50$ e $\delta=0,5$ nas estimativas de Jeffreys sob independência. As Figuras 5.4 a 5.9 apresentam os valores do REQM em cada uma das situações simuladas para o modelo inflacionado em zero e um.

O viés e o AVRB das estimativas nos permitem afirmar que as estimativas são praticamente não

viesadas. Na estatística AVRB não houve grandes diferenças entre as estimativas, independente do fator. O maior valor encontrado para ela foi igual a 4,4%. Tal valor foi obtido na situação em que $n=20$, $\phi=50$, $\delta=0,5$, no conjunto de estimativas utilizando a priori de Jeffreys sob independência. As Tabelas 5.1 a 5.3 mostram o AVRB médio associados as estimativas obtidas em cada um dos métodos de estimação de todos os parâmetros do modelo inflacionado em zero e um.

Tabela 5.1: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	1,5%	1,4%	1,4%	1,5%	1,5%	1,5%
	50	2,1%	1,8%	1,7%	1,7%	1,9%	1,9%
	200	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
200	20	0,3%	0,3%	0,4%	0,3%	0,3%	0,3%
	50	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%
	200	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%

Tabela 5.2: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	1,3%	0,2%	0,3%	0,3%	0,7%	0,5%
	50	0,4%	0,5%	0,6%	0,6%	0,5%	0,4%
	200	<0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
200	20	0,1%	0,2%	0,3%	0,3%	0,1%	0,2%
	50	0,2%	0,2%	0,1%	0,2%	0,2%	0,2%
	200	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%

Tabela 5.3: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	1,6%	1,3%	4,4%	3,2%	1,4%	1,5%
	50	0,8%	0,7%	0,8%	0,8%	0,7%	0,8%
	200	0,7%	0,7%	0,7%	0,7%	0,7%	0,7%
200	20	1,1%	1,2%	1,3%	1,4%	1,2%	1,1%
	50	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%
	200	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%	0,3%	0,3%

Tabela 5.4: AVR B das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,1$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	39,3%	12,2%	8,6%	7,7%	23,4%	22,6%
	50	17,2%	7,3%	6,1%	5,9%	11,1%	10,9%
	200	1,8%	0,4%	0,7%	0,8%	0,5%	0,4%
200	20	33,8%	23,6%	23,3%	23,2%	40,5%	40,3%
	50	15,4%	9,5%	8,6%	8,6%	13,7%	13,8%
	200	2,3%	0,7%	0,6%	0,5%	1,8%	1,7%

Tabela 5.5: AVR B das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,3$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	52,5%	17,4%	13,0%	11,3%	32,2%	31,3%
	50	23,1%	10,2%	8,5%	8,1%	15,5%	14,9%
	200	6,4%	3,5%	3,1%	2,9%	4,6%	4,5%
200	20	42,8%	28,2%	26,2%	24,9%	48,5%	48,6%
	50	17,3%	10,0%	9,1%	9,0%	15,7%	15,6%
	200	2,3%	0,4%	0,1%	<0,1%	1,5%	1,5%

Tabela 5.6: AVR B das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=2$ - $\delta = 0,5$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	95,7%	37,9%	29,3%	27,6%	67,1%	65,4%
	50	37,2%	17,6%	15,4%	14,6%	25,3%	25,0%
	200	6,7%	2,6%	2,0%	1,9%	4,2%	4,0%
200	20	54,8%	37,8%	38,0%	36,0%	75,6%	75,0%
	50	18,4%	8,1%	6,7%	6,4%	15,9%	15,9%
	200	3,5%	0,8%	0,5%	0,6%	2,6%	2,5%

Como nos modelos de regressão Beta estudados anteriormente, em geral, as estimativas dos β 's se comportaram de forma bem similar entre todos os métodos de estimação abordados, tanto os bayesianos, quanto na abordagem frequentista. Não houve diferenças significativas entre elas.

Vamos iniciar uma análise mais detalhada a respeito dos parâmetros: de precisão (ϕ), o parâmetro de mistura (δ) e o parâmetro da distribuição Bernoulli (γ).

Assim como os demais casos, as estatísticas das estimativas do parâmetro de precisão ϕ apresentaram melhores resultados ao passo que se aumenta o tamanho da amostra e diminui-se o valor

do parâmetro δ . Contudo, é possível verificar que, similarmente nos modelos inflacionados em zero ou um, as estimativas bayesianas sob as prioris: usuais 2, Jeffreys sob independência e as de Jeffreys, apresentaram melhores resultados que os demais métodos. As estimativas oriundas dessas prioris tiveram vícios menores, assim como o menores valores do REQM, na maioria das combinações dos fatores. Quanto ao viés relativo, independente do valor de δ , nota-se que quando o tamanho amostral é 50 ou 200, a maioria dos valores foram aproximadamente 20% ou menores. Somente na combinação de $\phi = 50$, $n=50$ e $\delta=0,5$, que o AVRB foi igual a 37,2%. Frisamos que nas estimativas das prioris usuais 2 e as duas de Jeffreys, para $n=50$ ou $n=200$, que no AVRB não há valores maiores que 18%, em qualquer valor de δ . Como visto para o modelo inflacionado em zero ou um, as estimativas do parâmetro ϕ , quando o n é igual a 20, e δ igual a 0,5, apresentaram alguns AVRB ruins (com percentuais bem altos), alcançando 96% para as estimativas oriundas da priori usual 1. Em resumo, temos que as estimativas com as prioris usuais 2, Jeffreys sob independência e Jeffreys se mostraram um pouco melhores no processo de estimação do parâmetro de precisão ϕ que as demais abordagens.

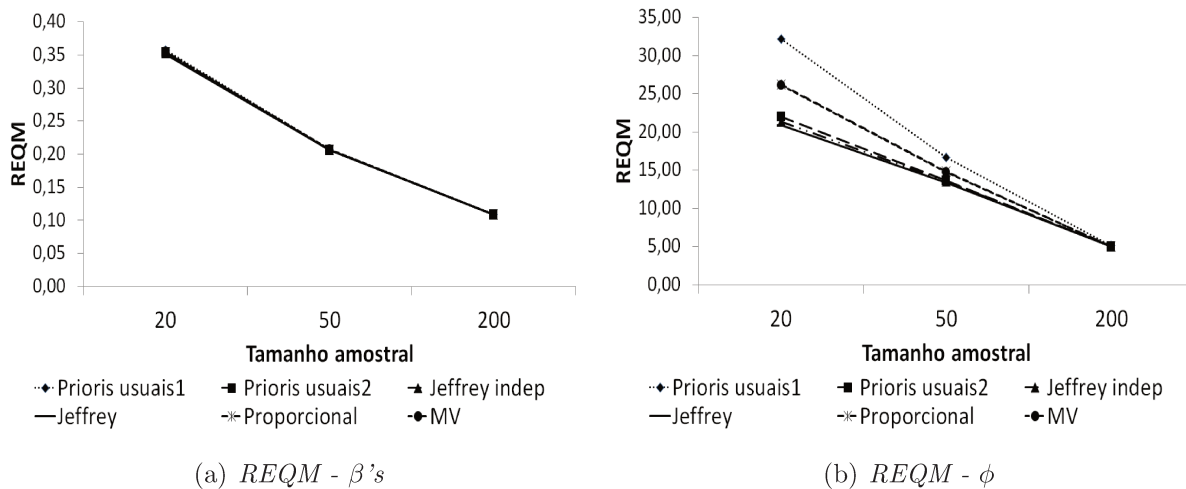
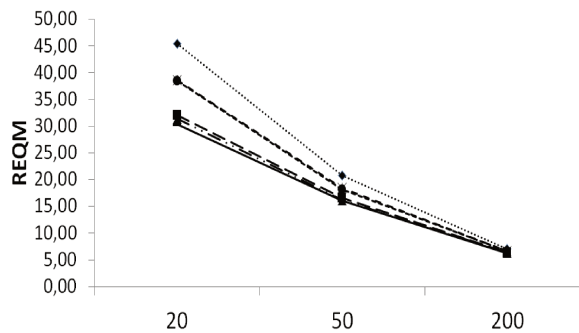
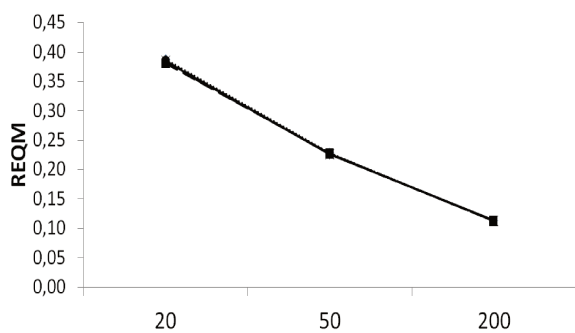


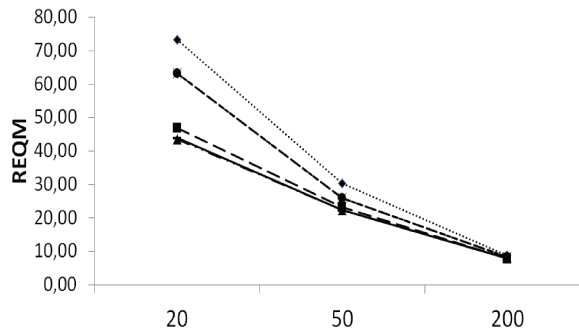
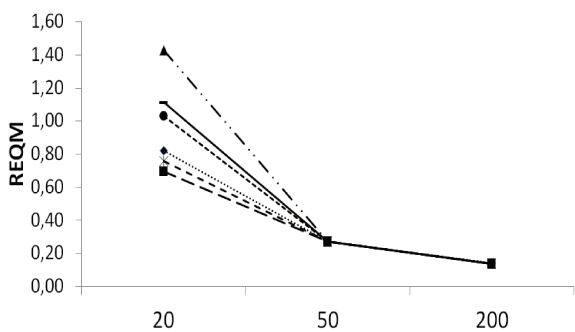
Figura 5.4: REQM dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,1$



(a) $REQM - \beta$'s

(b) $REQM - \phi$

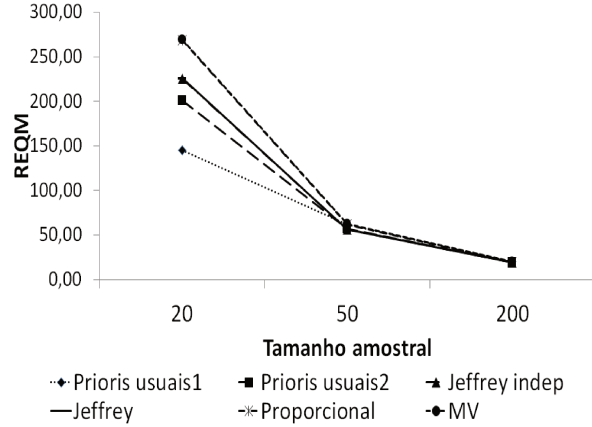
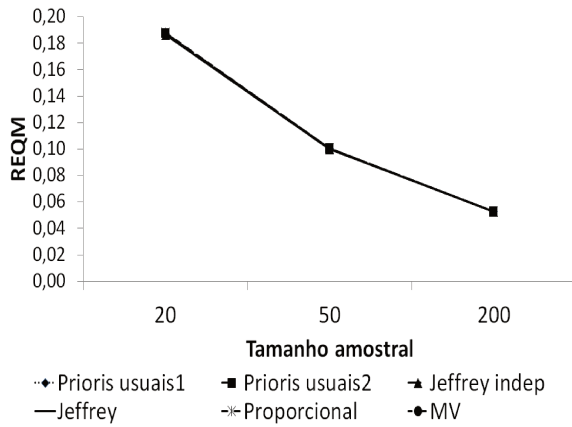
Figura 5.5: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,3$



(a) $REQM - \beta$'s

(b) $REQM - \phi$

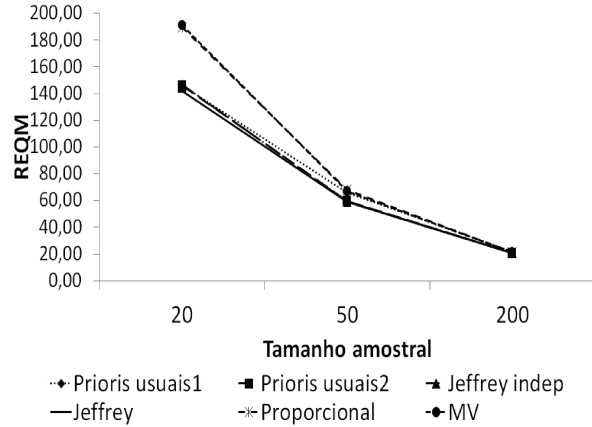
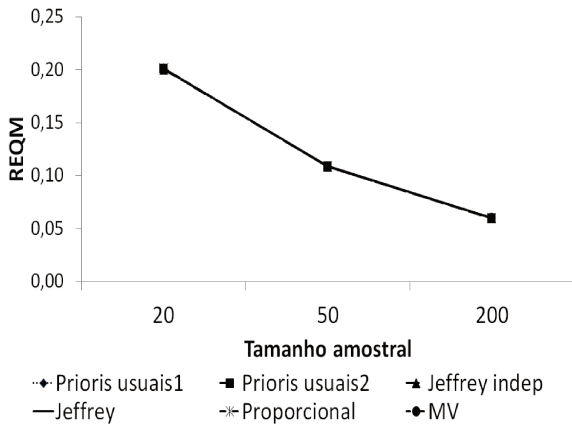
Figura 5.6: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=2$ e $\delta=0,5$



(a) $REQM - \beta$'s

(b) $REQM - \phi$

Figura 5.7: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,1$



(a) $REQM - \beta$'s

(b) $REQM - \phi$

Figura 5.8: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,3$

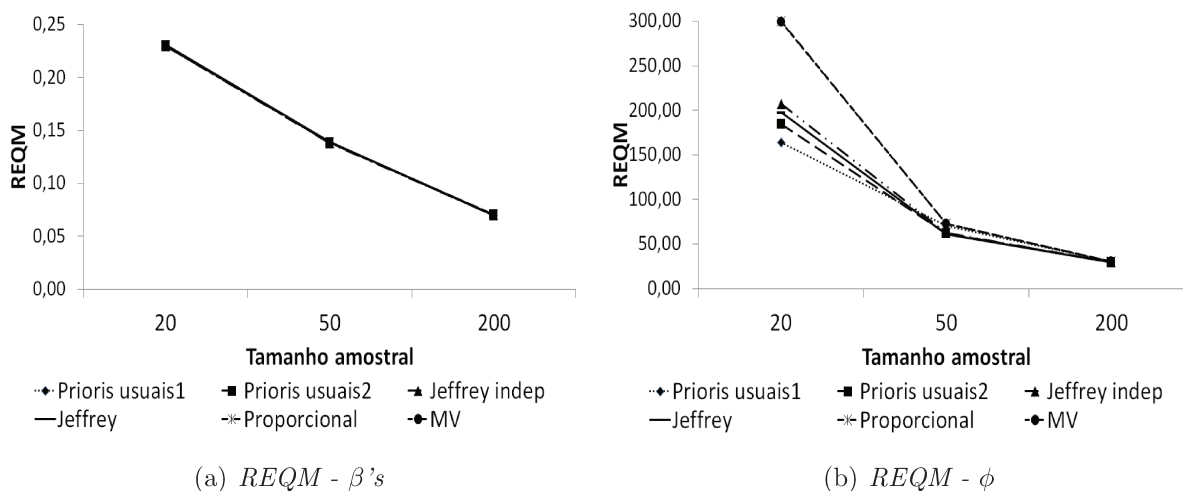


Figura 5.9: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=2$ e $\delta=0,5$

Tabela 5.7: $AVRB$ das Estimativas do parâmetro δ - $p=2$

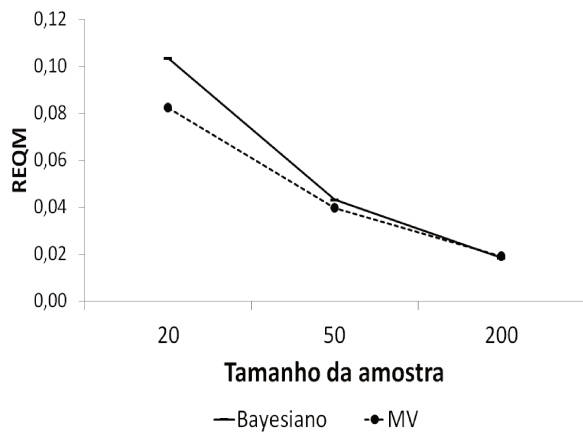
Modelo Inflacionado em Zero e Um

		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	88,2%	57,0%	8,6%	2,8%	0,4%	0,4%
	50	21,5%	6,4%	4,9%	2,5%	1,5%	1,5%
200	200	1,0%	3,0%	1,4%	2,0%	0,5%	0,5%
	20	87,7%	56,5%	12,9%	7,5%	0,1%	0,1%
	50	21,0%	5,8%	0,9%	1,7%	0,8%	0,8%
200	200	3,8%	0,2%	0,1%	0,6%	0,5%	0,5%

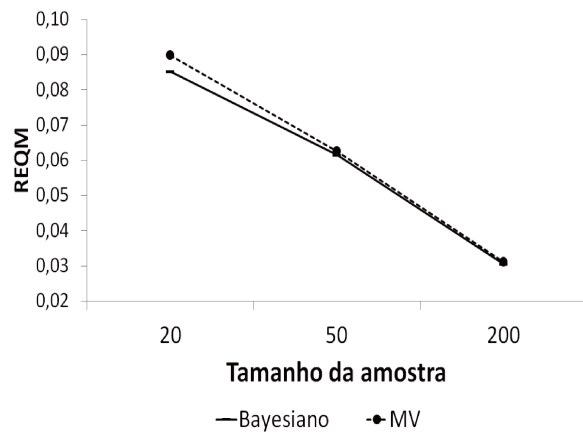
Tabela 5.8: $AVRB$ das Estimativas do parâmetro γ - $p=2$

Modelo Inflacionado em Zero e Um

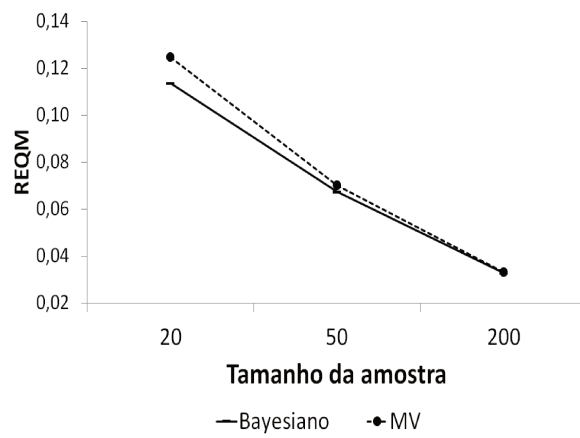
		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	1,7%	3,0%	3,8%	4,8%	0,4%	0,6%
	50	4,1%	5,6%	0,8%	0,9%	0,1%	0,1%
200	200	0,2%	0,3%	0,7%	0,7%	1,1%	1,1%
	20	0,2%	0,6%	0,1%	0,1%	3,1%	3,6%
	50	0,9%	1,3%	1,4%	1,5%	3,8%	4,1%
200	200	1,2%	1,3%	2,6%	2,7%	1,4%	1,4%



(a) $REQM - \delta - \delta=0,1$

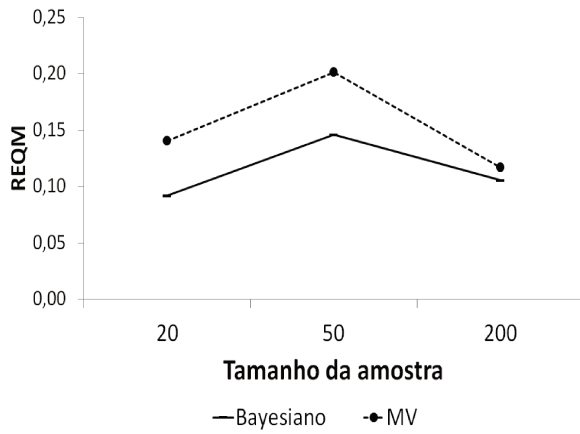


(b) $REQM - \delta - \delta=0,3$

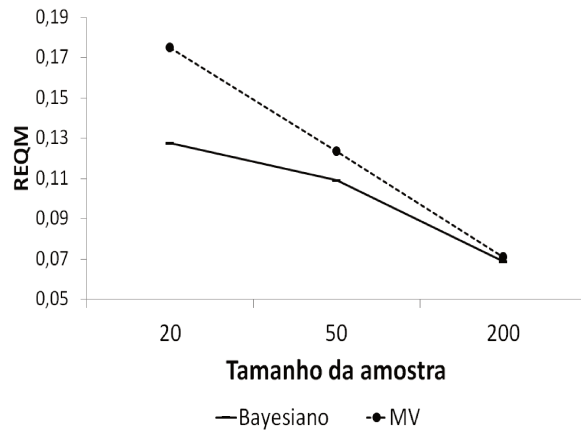


(c) $REQM - \delta - \delta=0,5$

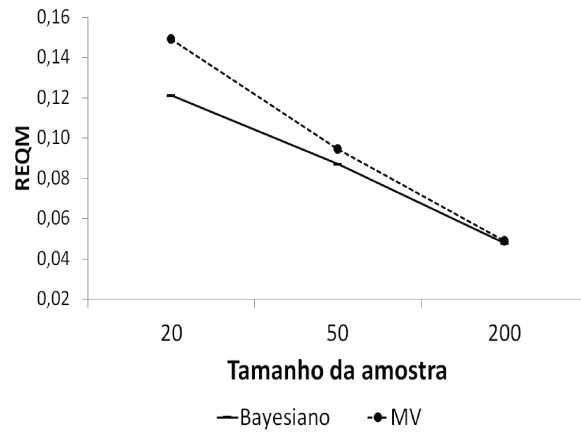
Figura 5.10: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=2$



(a) $REQM - \gamma - \delta=0,1$

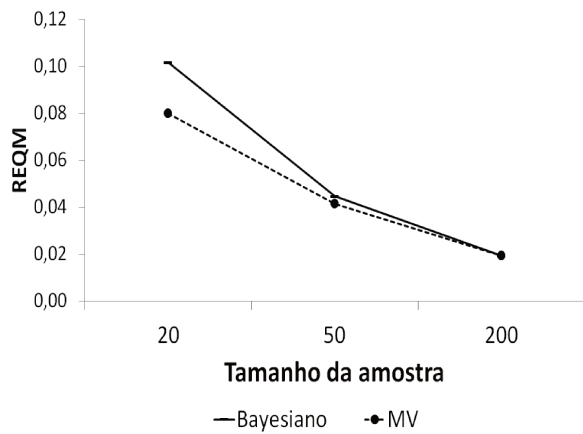


(b) $REQM - \gamma - \delta=0,3$

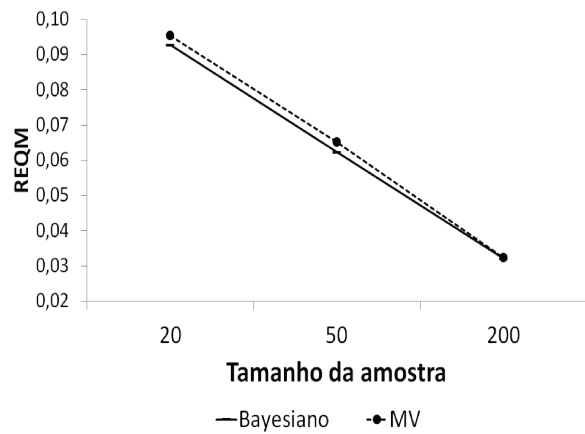


(c) $REQM - \gamma - \delta=0,5$

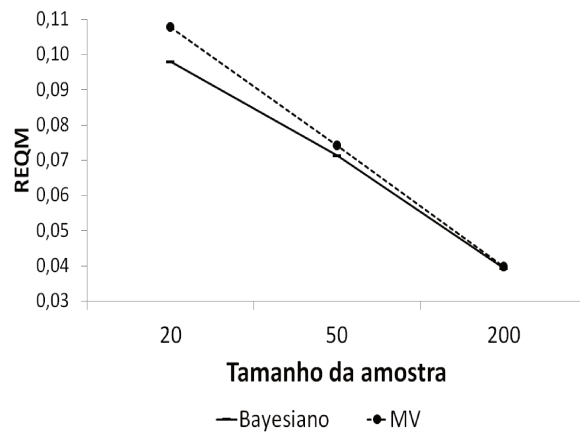
Figura 5.11: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=2$



(a) $REQM - \delta - \delta=0,1$

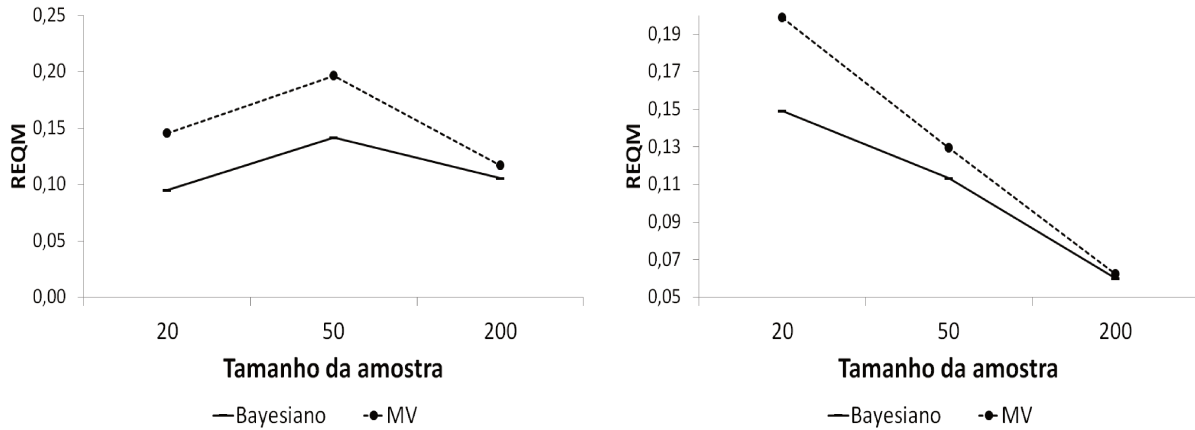


(b) $REQM - \delta - \delta=0,3$



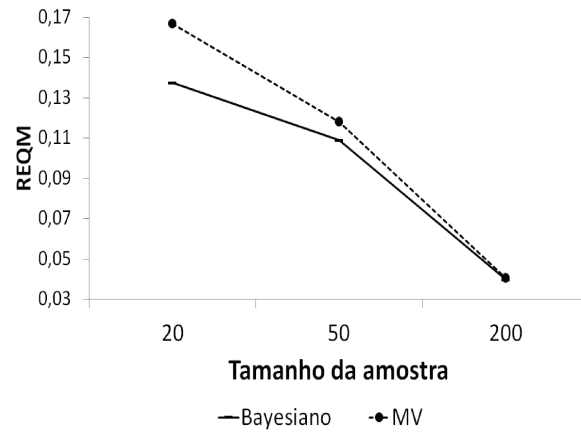
(c) $REQM - \delta - \delta=0,5$

Figura 5.12: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=2$



(a) $REQM - \gamma - \delta=0,1$

(b) $REQM - \gamma - \delta=0,3$



(c) $REQM - \gamma - \delta=0,5$

Figura 5.13: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=2$

Consideremos agora os parâmetros δ e γ . Para eles temos dois conjuntos de estimativas, a bayesiana e a clássica. Para o parâmetro δ , é bem evidente que quando aumenta-se o tamanho amostral e o valor verdadeiro do parâmetro δ , os resultados obtidos são bem melhores para os dois conjuntos de estimativas. Reforçamos que, quanto maior o valor do δ , em média temos mais valores iguais a 0 ou 1, aumentando a amostra utilizada para estimar os parâmetros do componente discreto do modelo. Contudo, para o parâmetro γ , não há grandes diferenças nas estimativas, para qualquer um dos fatores analisados.

Primeiramente para o parâmetro δ , percebe-se que quando há poucas observações inflacionadas

($\delta=0,1$), as estimativas de MV são melhores. Porém, para δ igual a 0,3 ou 0,5, os REQMs obtidos foram menores para as estimativas bayesianas em relação a frequentista. Com relação ao parâmetro γ , o REQM das estimativas bayesianas foram menores que as estimativas frequentistas, independentemente das combinações entre os níveis de fatores. Fato curioso, foi que o valor do REQM aumentou quando o n aumentou, nos casos em que o δ é igual a 0,1. Não foi observado nenhuma grande influência do valor do parâmetro ϕ nas estimativas dos dois parâmetros. As Tabelas 5.7 e 5.8 mostra os valores do *AVRB* obtidos nas simulações para os dois parâmetros. Nas Figuras 5.10 a 5.13 tem-se os REQMs obtidos.

Também vimos que as estimativas dos parâmetros de regressão β se comportaram de modo bem semelhante em todos os seis métodos de estimação. Os resultados foram bem próximos aos encontrados no modelo de regressão Beta não-inflacionado e aos modelos inflacionados em zero ou um. No entanto as estimativas bayesianas com as prioris de Jeffreys (sob a suposição de independência e sem a suposição) e as estimativas provindas das prioris usuais 2 se destacaram por serem bem semelhantes, e ao mesmo tempo, tiveram uma performance um pouco melhor em termos das estatísticas analisadas para a estimação do parâmetro de precisão. Para os parâmetros da parte discreta do modelo (δ, γ) podemos observar que os REQMs foram menores para as estimativas bayesianas em relação à frequentista, porém não se observou nenhuma grande vantagem de um método em relação ao outro.

Apresentaremos agora, as análises resultantes das simulações quando o número de covariáveis é igual a 5. Nas Tabelas 5.9 a 5.11 temos os valores do vício relativo (*AVRB*) para cada um dos conjuntos de estimativas dos parâmetros do modelo de regressão beta inflacionado em zero e um.

Começaremos pelos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 . Podemos afirmar que quanto maior o tamanho da amostra e maior o valor do parâmetro de precisão ϕ melhores são os resultados. Além disso, podemos dizer que quanto menor o valor do parâmetro δ , melhor o desempenho das estimativas. Geralmente, as variâncias, e conseqüentemente o REQM (pois o vício são praticamente nulos), obtidas são menores quando ocorre esses três fatos. Também nenhum dos conjuntos de estimativas se sobressaiu em relação aos demais. Os resultados bayesianos e o frequentista ficaram bem

próximos. Adicionalmente, podemos dizer que o parâmetro γ não exerce influência na estimação dos parâmetros β .

Em geral, observando os vieses das estimativas, não encontramos nenhuma diferença entre os métodos de estimação, e os vícios das estimativas foram muito pequenos. Nota-se que para o AVRB o máximo encontrado nas condições simuladas foi igual a 19,2% para as estimativas via priori de Jeffreys do parâmetro β_4 , na seguinte combinação de níveis: $n=20$, $\phi=50$ e $\delta=0,3$. Nessa combinação a média dos AVRB dos parâmetros β 's é igual a 16,5%. Além disso, nas demais combinações de níveis de fatores, o viés relativo foi bem baixo. Para este modelo (assim como os demais), relembramos que a estatística AVRB não foi calculada para o parâmetro β_2 . Isto porque seu valor verdadeiro é igual a 0, e portanto, o AVRB tende ao infinito, não nos interessando na análise.

Comparando o REQM, não encontramos diferenças significativas entre os conjuntos de estimativas. Mais uma vez é bem visível a melhora nas estatísticas a medida que aumenta-se o n e o ϕ e diminuímos o valor de δ . As Figuras 5.14 a 5.21 exibem os valores da REQM.

As estimativas dos parâmetros de regressão do modelo Beta inflacionado em zero e um, da mesma maneira quando $p=2$, tiveram desempenho bem parecidos em relação as estatísticas propostas para análise. Os parâmetros β 's se comportaram de modo semelhante entre si, nenhum dos 6 métodos de estimação apresentou vantagens em relação aos outros na performance das estimativas. Discutiremos agora sobre os resultados relativos aos parâmetros: ϕ , δ e γ .

Tabela 5.9: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,1$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	6,2%	3,1%	2,7%	5,2%	4,3%	5,8%
	50	1,2%	0,6%	0,5%	1,7%	0,4%	0,9%
	200	0,3%	0,2%	0,2%	0,5%	0,2%	0,3%
200	20	1,9%	1,4%	1,2%	2,0%	1,7%	1,8%
	50	0,2%	0,3%	0,3%	0,6%	0,2%	0,2%
	200	0,3%	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%	0,3%

Tabela 5.10: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,3$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	5,7%	1,5%	1,4%	16,5%	3,9%	5,7%
	50	1,2%	1,3%	1,3%	3,1%	1,3%	1,1%
	200	1,3%	0,9%	0,8%	0,5%	1,1%	1,2%
200	20	0,9%	1,0%	0,8%	5,3%	0,7%	1,2%
	50	0,9%	0,7%	0,7%	0,5%	0,7%	1,0%
	200	0,3%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%

Tabela 5.11: AVRB das Estimativas do parâmetro β 's - $p=5$ - $\delta = 0,5$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	8,5%	4,1%	4,4%	3,3%	6,2%	10,1%
	50	2,9%	2,0%	2,0%	3,7%	1,9%	2,7%
	200	0,7%	0,2%	0,2%	0,5%	0,3%	0,6%
200	20	4,9%	3,0%	4,5%	8,9%	4,6%	5,9%
	50	1,0%	0,7%	0,6%	0,6%	0,9%	1,0%
	200	0,7%	0,7%	0,7%	0,6%	0,7%	0,8%

Primeiramente, vamos iniciar com o parâmetro ϕ . Em geral, nota-se nessa situação que a abordagem bayesiana utilizando a priori de Jeffreys gerou estimativas com as menores variâncias, se comparada aos demais conjuntos de estimativas, para a maioria das combinações dos níveis de fatores. Quando o n é grande, não há grandes diferenças entre os conjuntos das estimativas. À medida que se aumenta o valor do parâmetro δ , a variância obtida para as estimativas do ϕ também aumentam. Observando os valores obtidos para o REQM, destaca-se negativamente, que nos casos em que n é 20, e δ é igual a 0,5, tanto as estimativas bayesianas, quanto a estimativa de MV, tiveram resultados muito elevados, assim como no modelo inflacionado em zero ou um. Isso se deve ao fato de que houve a presença de alguns *out-liers* entre as 100 réplicas. O motivo principal é porque com os valores de $\delta=0,5$ e $n=20$, há algumas réplicas que o número de observações no intervalo (0,1) é menor do que 10. Assim, as estimativas são muito ruins, pois no processo de estimação do ϕ , há poucas observações para se estimar esse parâmetro. Devido a esse fato, os gráficos de REQM do ϕ das Figuras 5.16(b) e 5.20(b) ficaram bem distorcidos, comprometendo a análise. Com o intuito de melhorar a visualização, tomamos o logaritmo natural dos valores de REQM, e nas Figuras 5.17 e 5.21 apresentamos os dois gráficos lado a lado. Com o gráfico do $\log(\text{REQM})$ nota-se que para os tamanhos amostrais iguais a 50 e 200, não há grandes diferenças entre os conjuntos de estimativas. Para $n=20$, as estimativas via prioris usuais ficaram melhores.

Em termos do AVRB das estimativas, o desempenho das estimativas foram bem similares. Entretanto, as estimativas provenientes da priori de Jeffreys apresentaram os menores valores do AVRB, na maioria das situações simuladas. Nota-se, ainda que os valores do AVRB obtidos para o caso em que a amostra é igual a 20 e $\delta=0,5$, foram bem altos em quase todos os métodos. Por exemplo, na Tabela 5.14, temos que o AVRB variou de 237% até 4100%. A explicação para esse fato é que o tamanho amostral utilizado (número de observações entre 0 e 1) para estimar o ϕ , nos casos em que n é 20, fica em torno de 10, que é muito pequeno. Note que para todos os modelos inflacionados, o tamanho amostral pequeno, em conjunto com o número de observações inflacionadas (no caso, $\delta=0,5$) alta, implica em estimativas bem ruins em todos os métodos propostos.

Tabela 5.12: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,1$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	74,5%	36,1%	28,9%	19,9%	53,5%	76,9%
	50	26,1%	13,9%	11,4%	1,3%	18,6%	24,7%
	200	5,6%	3,1%	2,6%	0,3%	4,0%	5,2%
200	20	39,4%	25,0%	21,4%	14,2%	43,0%	71,3%
	50	10,1%	3,5%	2,7%	6,1%	8,3%	15,2%
	200	1,6%	0,1%	0,2%	2,3%	1,0%	2,5%

Tabela 5.13: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,3$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	130,0%	72,2%	60,2%	30,2%	104,6%	149,8%
	50	25,2%	9,9%	7,6%	9,6%	16,2%	23,5%
	200	8,5%	5,2%	4,4%	0,9%	6,7%	8,1%
200	20	55,4%	44,9%	43,7%	18,2%	79,8%	129,5%
	50	22,2%	14,3%	13,0%	0,3%	20,7%	31,3%
	200	4,5%	2,5%	2,2%	0,5%	3,8%	5,9%

Tabela 5.14: AVRB das Estimativas do parâmetro ϕ - $p=5$ - $\delta = 0,5$ *Modelo Inflacionado em Zero e Um*

ϕ	n	Prioris Usuais 1	Prioris Usuais 2	Jeffreys Indep	Jeffreys	Proporcional	MV
50	20	237,1%	284,0%	1668,4%	541,3%	2579,4%	4100,0%
	50	48,5%	25,7%	21,0%	6,9%	34,6%	47,8%
	200	7,3%	2,5%	1,8%	3,1%	4,6%	6,7%
200	20	71,6%	73,1%	191,7%	37,2%	450,2%	902,0%
	50	29,3%	18,9%	16,5%	3,6%	30,2%	45,8%
	200	7,1%	4,4%	4,0%	0,2%	6,4%	9,4%

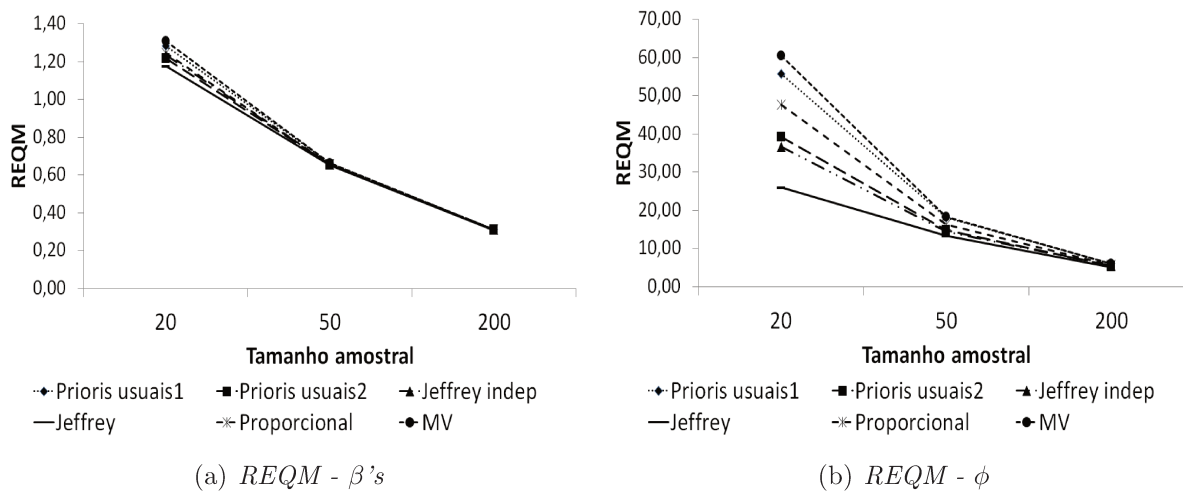


Figura 5.14: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,1$

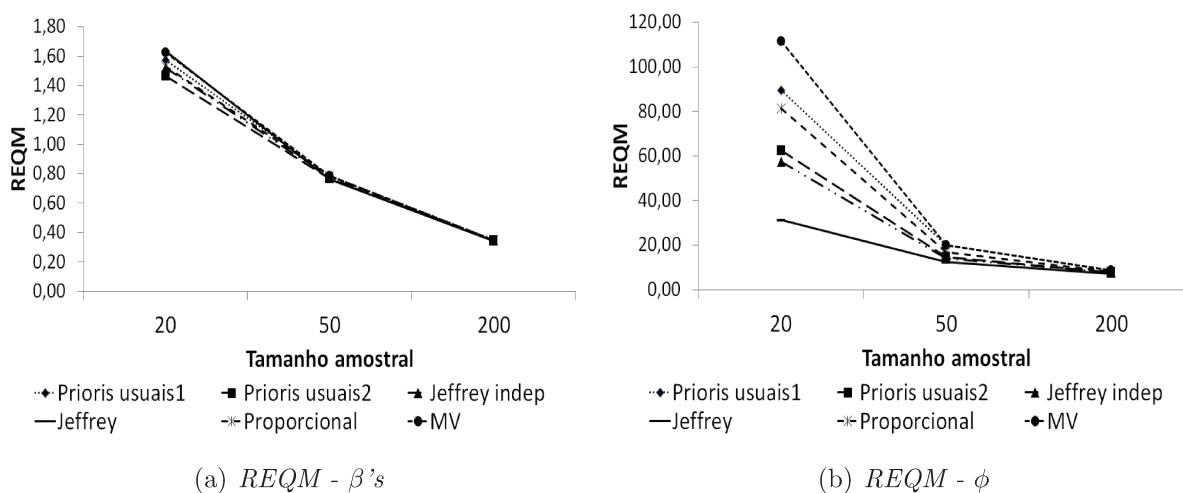
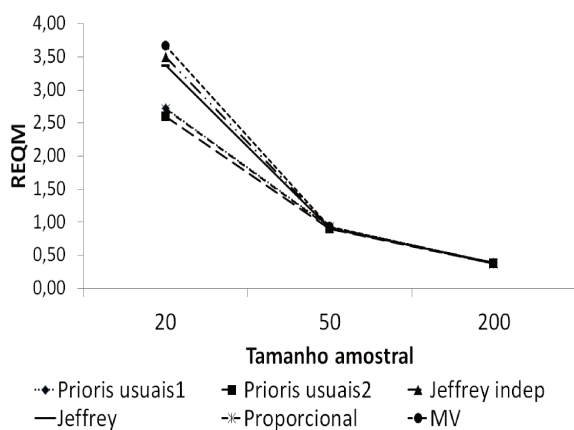
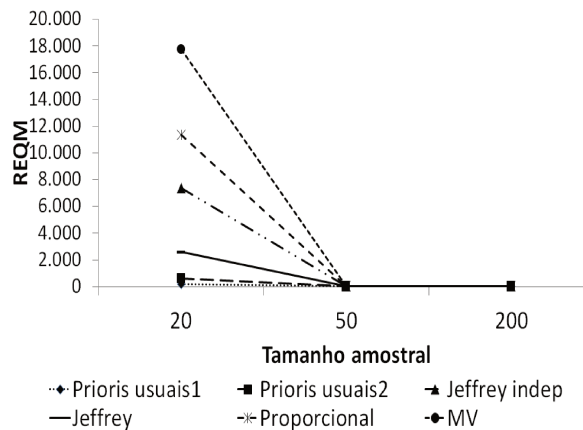


Figura 5.15: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,3$

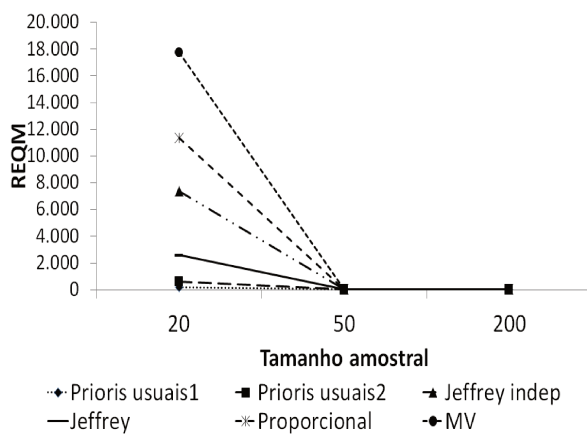


(a) $REQM - \beta$'s

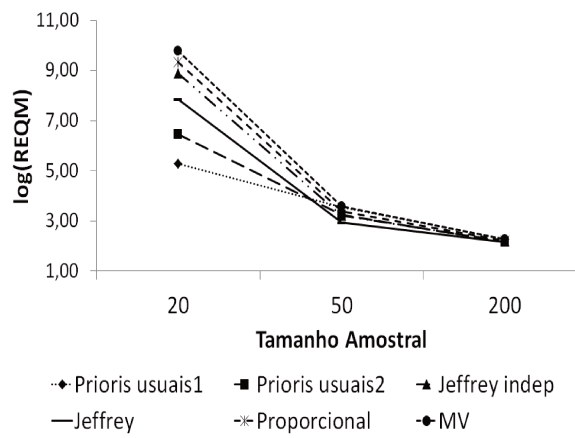


(b) $REQM - \phi$

Figura 5.16: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$



(a) $REQM - \phi$



(b) $\log(REQM) - \phi$

Figura 5.17: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$, $p=5$ e $\delta=0,5$

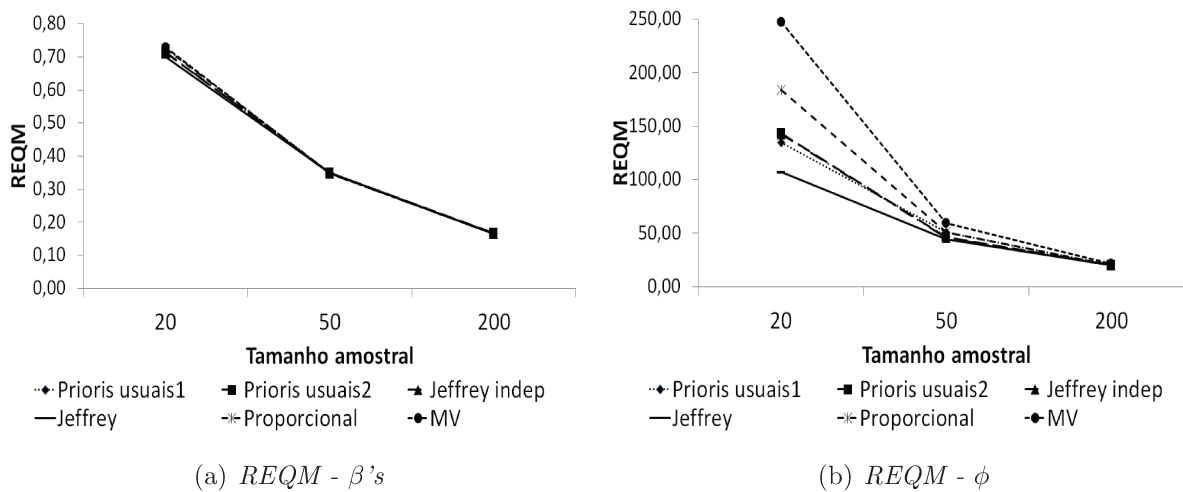


Figura 5.18: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,1$

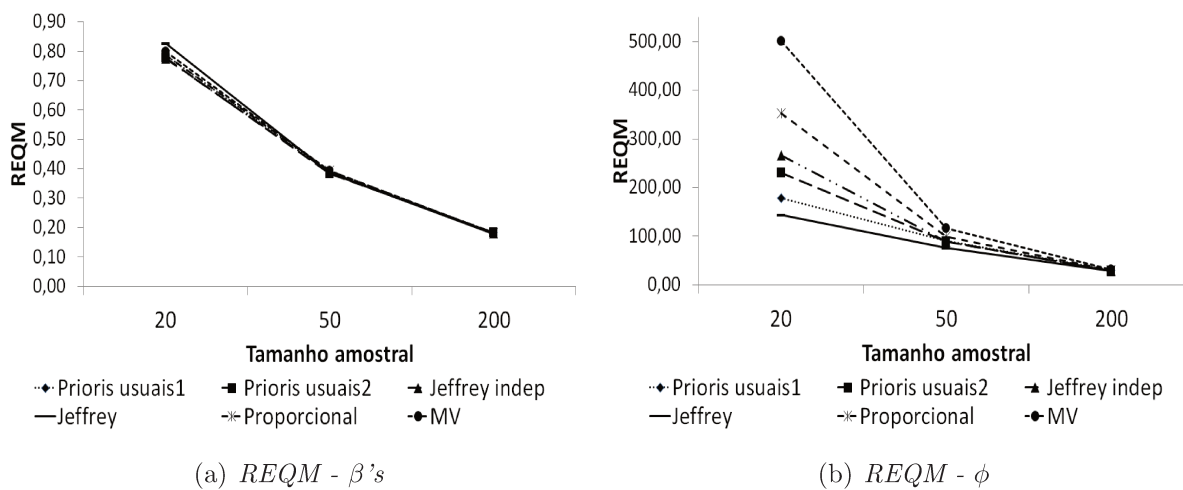


Figura 5.19: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,3$

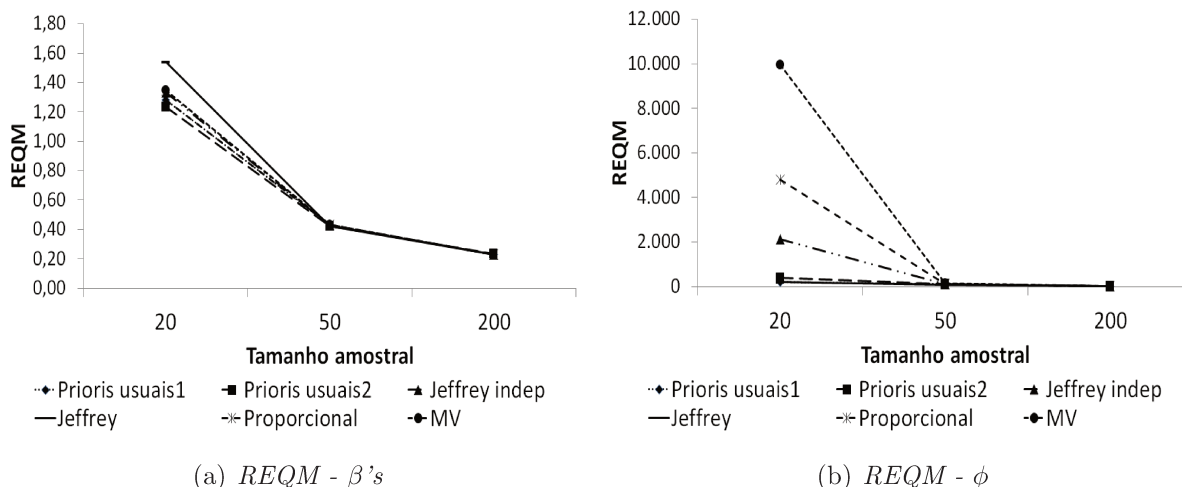


Figura 5.20: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$

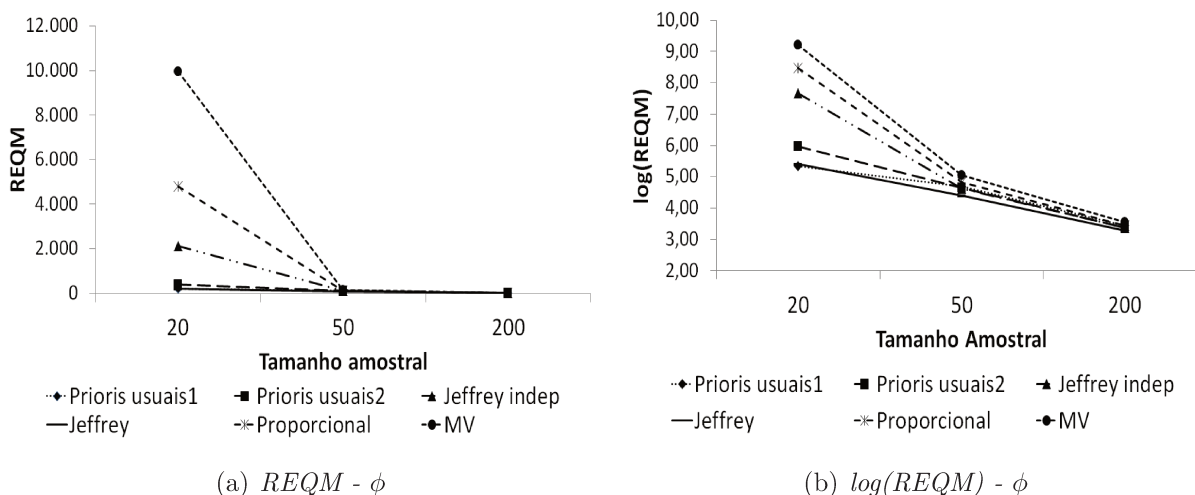


Figura 5.21: $REQM$ e $\log(REQM)$ do parâmetro ϕ do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$, $p=5$ e $\delta=0,5$

Apresentaremos agora os resultados para δ e γ . Para esse parâmetro é bem claro que aumentando-se o tamanho amostral e o valor verdadeiro do parâmetro δ , os resultados obtidos tendem a melhorar. Percebe-se que quando há poucas observações inflacionadas ($\delta=0,1$), as estimativas de MV são melhores, pois apresentam menores AVRBS que as estimativas bayesianas. As Figuras 5.22 e 5.24 ilustram essa situação. Porém, para δ igual a 0,3 ou 0,5, os $REQM$'s obtidos foram menores para as estimativas bayesianas em relação a frequentista. Para o parâmetro γ , as estimativas bayesianas apresentaram melhores resultados em todas as situações propostas, independente da combinação

do nível de fator. Nas Figuras 5.23 e 5.25 ilustram o REQM para o parâmetro γ . Assim como no caso em que $p=2$, que para $\delta=0,1$, os valores dos REQM's obtidos foram menores no caso em que $n=20$ se comparado quando $n=50$.

Não se observou influência dos valores dos parâmetros β e ϕ nas estimativas dos parâmetros da componente discreta do modelo. Os resultados obtidos para $p=2$ e $p=5$ foram bem similares, o que indica que o número de covariáveis não influencia na estimação do parâmetro δ e γ . Vale ressaltar que já era esperado esse evento, pois como apresentado em (2.12), a verossimilhança é fatorável em 3 partes, uma que depende apenas de (β, ϕ) , outra apenas de δ e outra apenas de γ . Assim o processo de estimação desse parâmetros é feito de modo independente.

As Tabelas 5.15 e 5.16 mostram os valores do *AVRB* obtidos nas simulações dos dois parâmetros. Nas Figuras 5.22 a 5.25 apresenta-se os REQM's obtidos.

Tabela 5.15: *AVRB das Estimativas do parâmetro δ - $p=5$*

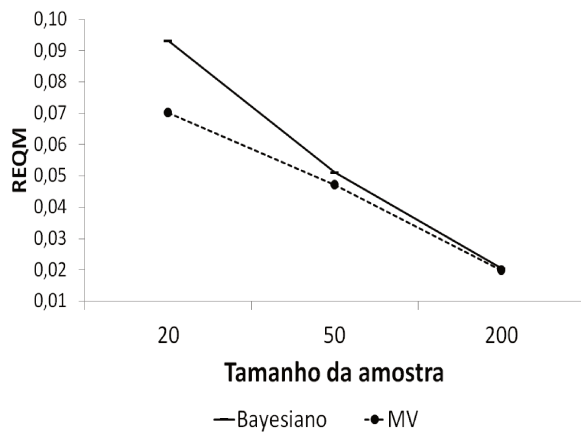
Modelo Inflacionado em Zero e Um

		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	81,8%	50,0%	12,1%	6,7%	2,1%	2,3%
	50	25,6%	10,6%	1,0%	1,6%	1,5%	1,6%
	200	6,4%	2,5%	2,3%	1,7%	0,8%	0,8%
200	20	80,9%	49,0%	7,3%	1,3%	3,7%	4,1%
	50	23,7%	8,6%	2,9%	0,3%	0,9%	0,9%
	200	5,0%	1,0%	1,0%	0,3%	1,7%	1,7%

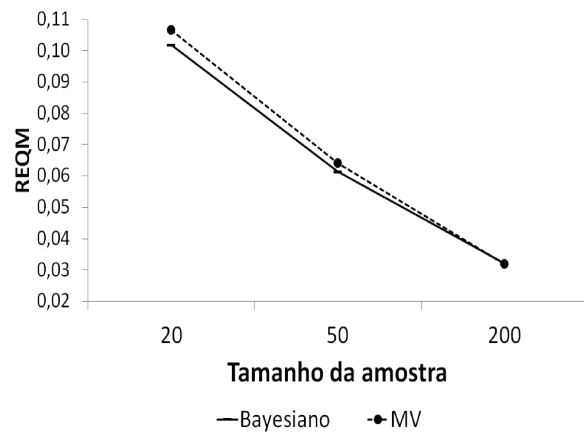
Tabela 5.16: *AVRB das Estimativas do parâmetro γ - $p=5$*

Modelo Inflacionado em Zero e Um

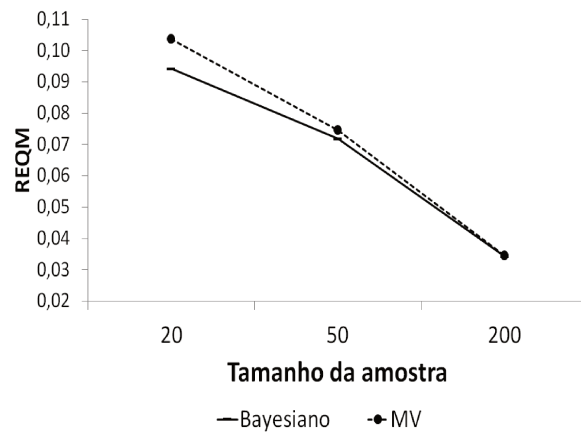
		$\delta=0,1$		$\delta=0,3$		$\delta=0,5$	
ϕ	n	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV	Bayesiano	MV
50	20	0,1%	0,3%	0,9%	1,0%	3,7%	4,5%
	50	7,2%	9,8%	0,1%	0,1%	0,7%	0,8%
	200	1,9%	2,1%	0,3%	0,3%	0,6%	0,6%
200	20	0,4%	0,7%	1,4%	1,3%	0,1%	0,3%
	50	0,3%	0,6%	3,4%	4,2%	1,0%	1,0%
	200	3,7%	4,1%	2,8%	2,9%	0,3%	0,4%



(a) $REQM - \delta - \delta=0,1$

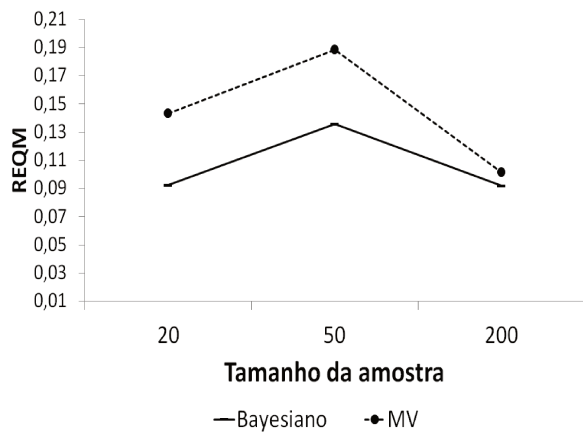


(b) $REQM - \delta - \delta=0,3$

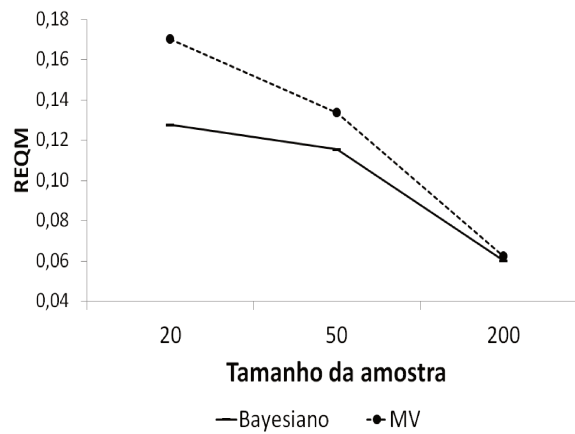


(c) $REQM - \delta - \delta=0,5$

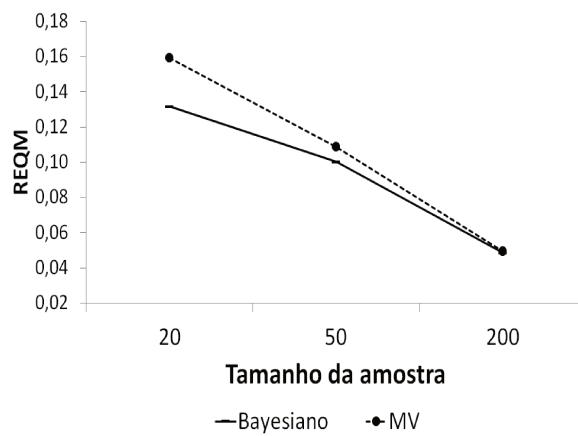
Figura 5.22: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=5$



(a) $REQM - \gamma - \delta=0,1$

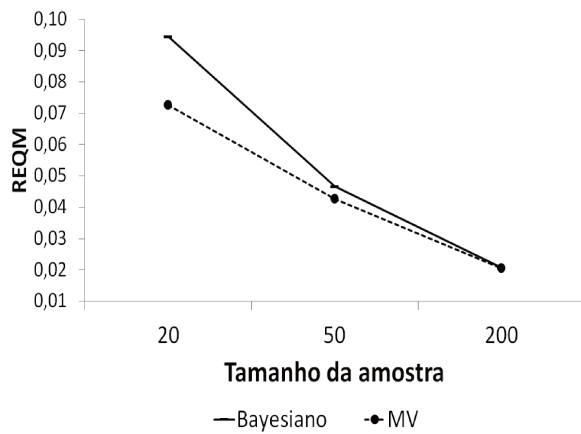


(b) $REQM - \gamma - \delta=0,3$

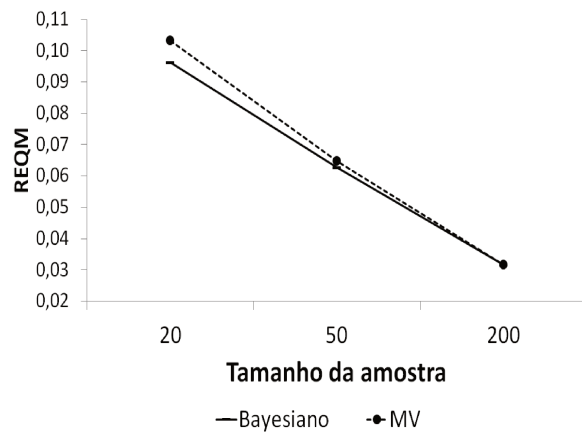


(c) $REQM - \gamma - \delta=0,5$

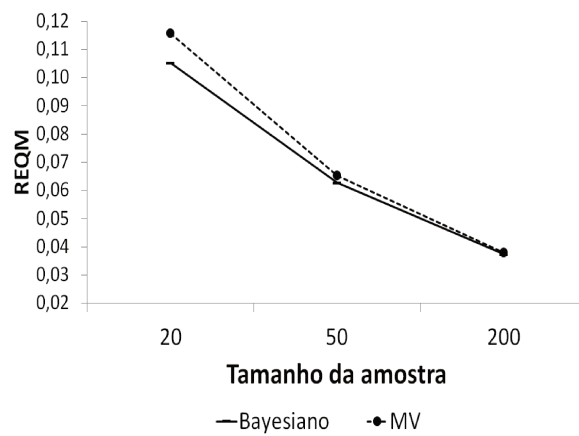
Figura 5.23: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=50$ e $p=5$



(a) $REQM - \delta - \delta=0,1$

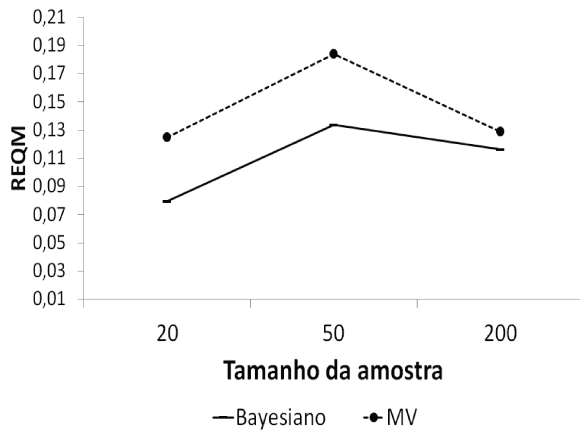


(b) $REQM - \delta - \delta=0,3$

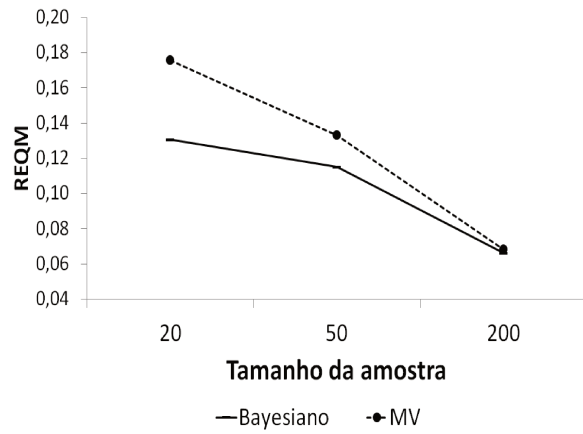


(c) $REQM - \delta - \delta=0,5$

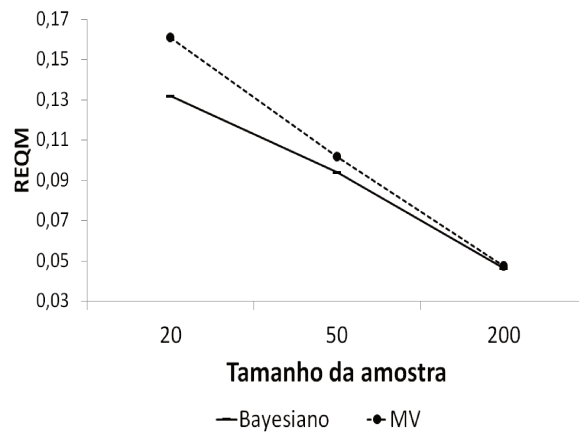
Figura 5.24: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=5$



(a) $REQM - \gamma - \delta=0,1$



(b) $REQM - \gamma - \delta=0,3$



(c) $REQM - \gamma - \delta=0,5$

Figura 5.25: $REQM$ dos parâmetros do modelo inflacionado em zero e um - $\phi=200$ e $p=5$

5.4 Conclusão

Finalmente, conclui-se que as estimativas provenientes do conjunto de priori de Jeffreys se comportaram muito bem na maioria das combinações entre os níveis dos fatores de simulação para estimação dos parâmetros do modelo de regressão Beta inflacionado em zero e um, principalmente em relação ao parâmetro ϕ . Entretanto, a diferença com relação aos demais conjuntos de estimativas bayesianas e as estimativas frequentistas, não foi tão grande. Para o vetor β e o parâmetro δ , praticamente não houve diferenças significativas. Quanto ao parâmetro γ , é possível notar uma pequena vantagem em relação as estimativas bayesianas. Novamente, fica como sugestão, com base nos resultados obtidos, não utilizar o modelo de regressão Beta inflacionado quando não houver muitas observações entre (0,1) para estimar os parâmetros β e ϕ . As estimativas são bem ruins em todas as abordagens simuladas. De modo geral, as diferenças na estimação dos parâmetros são bem pequenas em todos os métodos de estimação propostos. Na maioria dos casos, houve uma pequena vantagem para o conjunto de estimativas da priori de Jeffrey.

Capítulo 6

Aplicações a dados reais

6.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentaremos uma aplicação do ferramental discutido até aqui, em um conjunto de dados reais da área da psicometria. Os dados foram obtidos do trabalho de Carlstrom *et al* (2000), que podem ser encontrados no site http://www.stat.ucla.edu/projects/datasets/risk_perception.html. Esse conjunto de dados é referente a parte subjetiva do estudo, em que os indivíduos foram questionados a respeito do risco de diversas atividades relacionadas a finanças e saúde. Ressaltamos que não encontramos nenhum uso de modelagem com regressão Beta nesse conjunto de dados.

Atualmente, psicologistas estão interessados em medir a percepção de risco das pessoas frente a diversas atividades. Nesse estudo, os indivíduos avaliaram 22 atividades de risco utilizando uma escala de 0-100, sendo 100 o mais alto risco. A variável resposta risco foi definida dentro do intervalo 0-1, inclusive com observações nos dois extremos do intervalo. Sendo assim, respostas iguais a 0, significam que a atividade não tem nenhum risco, enquanto que respostas iguais a 1, que a atividade é muito arriscada.

Os indivíduos foram classificados de acordo com seu gênero, visão do mundo (wvcat) e etnia. Também foi medida a idade do indivíduo. Na covariável visão do mundo (wvcat), temos os seguintes níveis: hierárquicos, individualistas, igualitários ou outra (não-classificado). Na covariável etnia,

temos: caucasiano, africano-americano, mexicano-americano ou taiwanês-americano. A Tabela 6.1 detalha os níveis de cada uma das variáveis categóricas.

Das 22 atividades, foi escolhida a variável NUC, que é a avaliação do risco de se morar perto de uma usina nuclear. Para essa atividade, 592 participantes avaliaram o risco. Dentre eles, temos 3 observações iguais a zero e 181 iguais a um. Note que a quantidade maior que uns dentro da amostra indica que as pessoas avaliam como muito arriscado se morar perto de uma usina nuclear. A Tabela 6.2 resume a quantidade de observações em cada um dos intervalos.

Tabela 6.1: *Níveis das variáveis categóricas*

Variável	Nomenclatura	Níveis
Gênero	Gênero	0=feminino, 1=masculino
Etnia	Etnia	1=caucasiano, 2=africano-americano, 3=mexicano-americano, 4=taiwanês-americano
Visão do Mundo	Wvcat	0=não-classificado, 1=individualista, 2=hierárquico, 3=igualitário

Tabela 6.2: *Número de observações*

	Zero	Um	(0,1)	Total
Nº Observações	3	181	408	592

A Tabela 6.3 apresenta o risco avaliado médio por cada uma das variáveis categóricas. Note que, no geral, o risco médio avaliado foi de 0,78. Para as mulheres o risco médio foi de 0,81 e para os homens de 0,72.

Na Figura 6.1 temos os gráficos de perfis médios. Podemos visualizar as médias considerando as variáveis gênero, etnia e wvcat. Percebemos que o comportamento da média do risco é similar para os indivíduos do gênero masculino, independente da etnia e visão de mundo. Considerando o gênero feminino e mulheres mexicanas-americanas, as com visão de mundo igualitária avaliam que o risco de se morar perto de uma usina nuclear não é tão alto se comparada as mulheres com outra visão do mundo. De modo geral, o risco médio se comportou de maneira similar entre os grupos. Parece haver uma interação entre as variáveis gênero, etnia e o wvcat, conjuntamente.

Tabela 6.3: *Média de Risco*

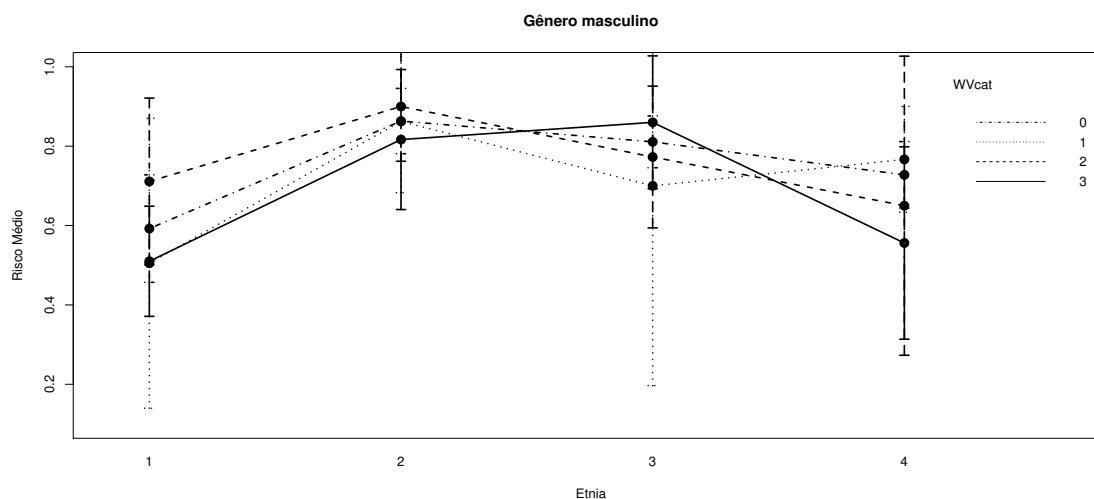
Gênero	Wvcat	Etnia				Total
		0	1	2	3	
0	Total	0,82	0,78	0,83	0,76	0,81
	1	0,71	0,72	0,68	0,74	0,72
	2	0,88	0,97	0,96	0,88	0,89
	3	0,86	0,91	0,88	0,65	0,87
	4	0,82	0,71	0,83	0,71	0,79
1	Total	0,76	0,71	0,76	0,58	0,72
	1	0,59	0,51	0,71	0,51	0,57
	2	0,86	0,86	0,90	0,82	0,87
	3	0,81	0,70	0,77	0,86	0,80
	4	0,73	0,77	0,65	0,56	0,69
Total		0,80	0,76	0,81	0,66	0,78

Analisando a variável idade, temos nas Figuras 6.2 e 6.3 os gráficos de dispersão do logito da variável resposta risco contra a variável idade. As Figuras 6.2(a), 6.2(b) e 6.3(a) destacam em separado de acordo com a sua classificação em etnia, wvcat e gênero respectivamente. Não há indícios de que haja alguma interação entre as variáveis categorizadas com a variável idade. Esses gráficos indicam também que a variável idade não parece ser significativa, isto é, parecem nem ter influência com o risco. Para construir esses gráficos transformamos as observações iguais a zero em 0,001 e as iguais a um em 0,999.

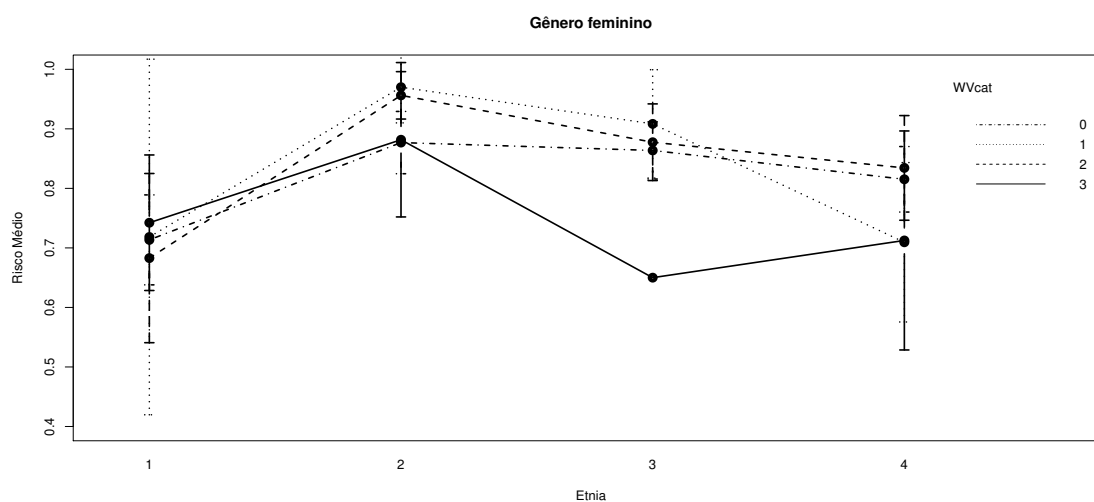
A Tabela 6.4 apresenta a média de idade por cada uma das variáveis categóricas do estudo. A idade média dos participantes é de 28,3 anos, sendo que entre os homens a idade média é de 30,2 e entre as mulheres é de 27,2.

6.2 Análise Inferencial

Nessa aplicação escolhemos o conjunto de prioris de Jeffreys para estimar os parâmetros β e ϕ , nos quatro modelos. Para os parâmetros δ e γ a priori utilizada foi a Beta com hiperparâmetros $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. A densidade proposta usada foi modificada em relação ao estudo de simulação feito, mas somente para a densidade do vetor de parâmetro de regressão. No estudo de simulação utilizamos a distribuição Normal multivariada com vetor de médias igual as estimativas de máxima verossimilhança, e como matriz de variância-covariância a matriz obtida no processo



(a) Gráfico de Médias - Gênero Masculino



(b) Gráfico de Médias - Gênero Feminino

Figura 6.1: Gráfico de Perfis entre as variáveis categorizadas

de estimação por MV. Nessa aplicação, utilizamos apenas a diagonal principal dessa matriz. Essa modificação foi feita para melhorar a convergência do algoritmo de *Metropolis-Hastings*.

Na análise de diagnóstico do modelo, calculamos os resíduos padronizados e os resíduos de-viance. Além disso, na abordagem bayesiana sempre estudamos a convergência das estimativas através do monitoramento visual das cadeias, e das estatísticas de Geweke e Gelman-Rubin.

Utilizamos o mesmo conjunto de dados para aplicar os diferentes modelos estudados. De-

Tabela 6.4: *Média de Idade*

Gênero	Wvcat	Etnia				Total
		0	1	2	3	
0	Total	27,3	26,2	25,7	29,8	27,2
	1	29,8	32,0	29,6	33,1	30,6
	2	33,7	41,0	31,8	31,5	33,8
	3	24,8	24,3	24,1	20,0	24,5
	4	20,3	20,8	21,7	20,8	20,6
1	Total	30,3	29,3	29,3	30,9	30,2
	1	36,6	30,3	36,7	33,0	34,9
	2	41,5	36,8	37,9	47,0	40,9
	3	24,3	25,7	22,0	20,5	23,6
	4	21,0	21,7	19,8	25,1	21,7
Total		28,4	27,1	26,9	30,4	28,3

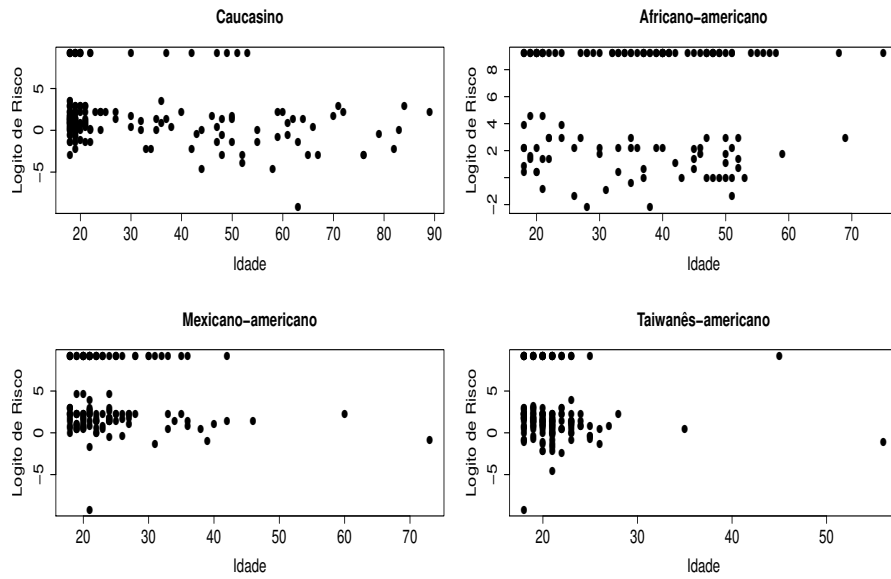
pendendo da situação, transformamos a variável resposta risco de modo que tenhamos somente observações de acordo com o modelo em questão. Por exemplo, quando estamos no modelo inflacionado em zero e um não transformamos os dados. Para o modelo inflacionado em um, todas as observações iguais a zero foram consideradas iguais a 0,001. Para o modelo inflacionado em zero, todas as observações iguais a um foram consideradas iguais a 0,999. Para o modelo não inflacionado, transformamos tanto as observações iguais a zero, quanto as iguais a um, de modo que não tenhamos observações inflacionadas.

As variáveis categorizadas foram parametrizadas de acordo com uma casela de referência. Sendo assim, o parâmetro estimado indica um incremento no logito da média, dado que a observação pertença àquela categoria em relação a referência. Por exemplo, considere um modelo sem interação. O logito da média pode ser representado por:

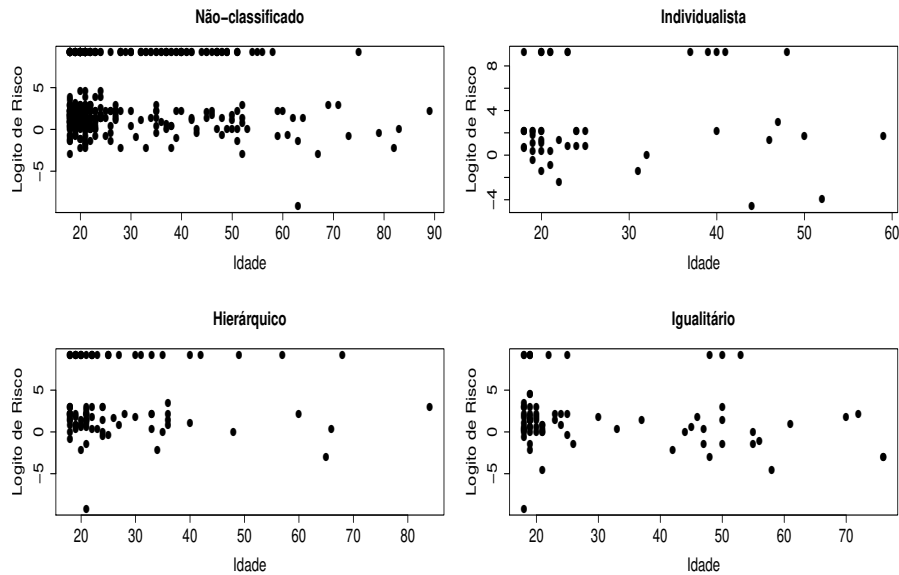
$$\text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k, \quad (6.1)$$

onde $\beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0$.

Na equação (6.1), x_t é a idade da t -ésima observação. Os parâmetros β , θ e α é o incremento no logito da média referente aos fatores gênero, etnia e wvcat, respectivamente.



(a) *Etnia*

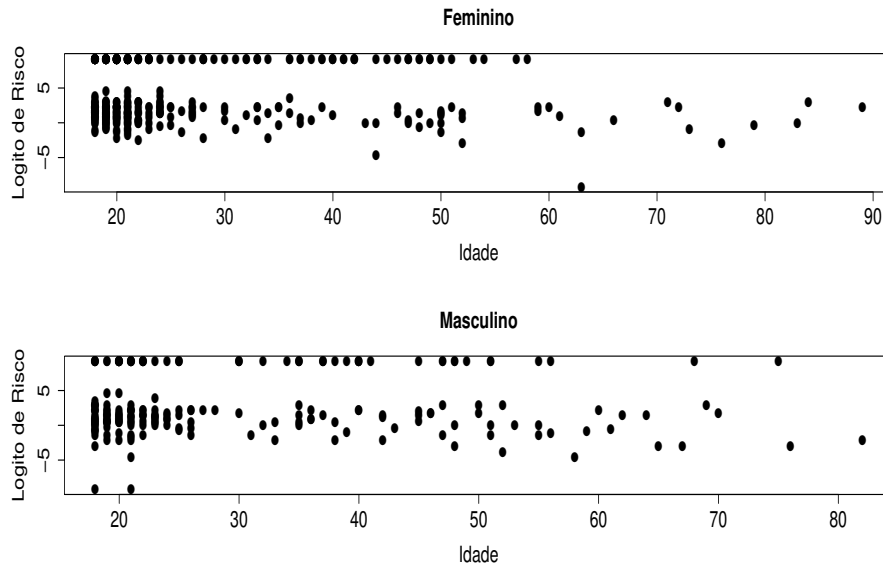


(b) *Wvcat*

Figura 6.2: Gráfico de Dispersão - Idade \times Logito de Risco

6.3 Análise de Diagnóstico

Realizar uma análise de diagnóstico é importante para investigar a adequabilidade do modelo de regressão. Por isso, nesta seção iremos apresentar as estatísticas de diagnóstico utilizadas nesse



(a) *Gênero*

Figura 6.3: *Gráfico de Dispersão - Idade x Logito de Risco*

trabalho. Utilizamos dois resíduos: o resíduo padronizado e o resíduo deviance. Essas quantidades foram todas calculadas seguindo o conceito bayesiano, utilizando-se da amostra preditiva para tal. Também, na análise dos resíduos, construímos gráficos para visualização dos mesmos. Detalhes sobre os resíduos podem ser encontrados em Oliveira (2004), Ospina (2008), Ferrari e Cribari-Neto (2004) e Paulino *et al* (2003).

Primeiramente, obtivemos a amostra preditiva da seguinte maneira: com a amostra válida obtida dos parâmetros através do algoritmo MCMC, geramos novas observações da distribuição Beta ou da distribuição Beta inflacionada (a depender do caso). Com essas observações amostradas, calculamos as estatísticas de diagnóstico. Por exemplo, se a amostra válida resultante do algoritmo MCMC é igual a 1000, temos um conjunto de 1000 parâmetros de regressão e ϕ estimados. Assim com eles, amostramos 1000 observações da distribuição Beta em estudo. Se estivermos no modelo inflacionado, geramos uma amostra da variável resposta utilizando os parâmetros de regressão, o parâmetro de precisão, ϕ e os parâmetros da componente discreta, δ e γ , sendo que estes últimos são fixos para todas as observações. O tamanho da amostra preditiva será igual ao da amostra válida

do algoritmo de *Metropolis-Hastings*. Resumindo, para cada observação, teremos uma amostra preditiva de $n=1000$.

Assim, utilizando-se da amostra preditiva, podemos calcular sua média, que chamaremos de $\tilde{\mu}_t$, e também sua variância, que denotaremos por, $V(\tilde{y}_t)$. Seja também, $l(\cdot)$ a log-verossimilhança de cada indivíduo.

Os resíduos padronizados foram obtidos através de:

$$r_t = \frac{y_t - \tilde{\mu}_t}{\sqrt{V(\tilde{y}_t)}} \quad (6.2)$$

Note que para o cálculo desse resíduo, consideramos apenas as observações não inflacionadas, ou seja, utilizamos apenas as observações não inflacionadas da amostra preditiva. O gráfico desse resíduo contra a ordem das observações, não deveria mostrar nenhuma tendência.

Para os modelos inflacionados em c (c igual a zero ou um), o resíduo padronizado foi ponderado considerando a componente discreta do modelo. Ospina (2008) apresenta um resíduo que considera a componente discreta do modelo. Com isso, medimos o desvio em relação as observações inflacionadas. Na amostra preditiva, conseguimos calcular a proporção de observações inflacionadas, denotada por $\tilde{\delta}_t$. Considere ainda $\hat{\delta}$ a estimativa bayesiana do parâmetro δ . Com isso, calcula-se o seguinte resíduo:

$$r_t^{(c)} = \frac{\hat{\delta} - \tilde{\delta}_t}{\sqrt{\hat{\delta}(1 - \hat{\delta})}}. \quad (6.3)$$

Assim, o resíduo padronizado ponderado para o modelo de regressão Beta inflacionado em zero ou um fica dado por:

$$rp_t^{(c)} = \hat{\delta}r_t^{(c)} + (1 - \hat{\delta})r_t \quad (6.4)$$

Note que o resíduo dado em (6.4) é uma composição dos resíduos dados nas equações (6.2) e (6.3).

A mesma ideia foi feita para os resíduos do modelo inflacionado em zero e um. Seja \tilde{p}_{0t} e \tilde{p}_{1t} a proporção de zeros e uns na amostra preditiva, respectivamente. Considere $\hat{\gamma}$ a estimativa

bayesiana do parâmetro γ . Assim temos mais dois resíduos. O primeiro é considerando a proporção de zeros na amostra:

$$r_t^{(0)} = \frac{\hat{\delta}(1 - \hat{\gamma}) - p_{0t}}{\sqrt{\hat{\delta}(1 - \hat{\gamma})(1 - (\hat{\delta}(1 - \hat{\gamma})))}} \quad (6.5)$$

E o segundo resíduo é considerando a proporção de uns na amostra, que é dado por:

$$r_t^{(1)} = \frac{\hat{\delta}\hat{\gamma} - p_{1t}}{\sqrt{\hat{\delta}\hat{\gamma}(1 - \hat{\delta}\hat{\gamma})}} \quad (6.6)$$

Por fim, o resíduo padronizado ponderado para o modelo de regressão Beta inflacionado em zero e um é dado por:

$$rp_t^{(01)} = \hat{\delta}(1 - \hat{\gamma})r_t^{(0)} + \hat{\delta}\hat{\gamma}r_t^{(1)} + (1 - \hat{\delta})r_t \quad (6.7)$$

O resíduo padronizado ponderado, agora é composto por três resíduos, apresentados nas equações (6.2), (6.5) e (6.6). Valores muito grandes desses resíduos indicam uma possível observação que pode ser influente no modelo. Esperamos que o comportamento ao longo do tempo desse resíduo deve ser aleatório. Se existir algum comportamento diferente do aleatório desses resíduos ao longo do tempo pode indicar alguma falta de ajuste do modelo.

Os resíduos deviance foram apresentados em Oliveira (2004). Esse resíduo é dado por:

$$rd_t = \text{signal}(y_t - \tilde{\mu}_t) \sqrt{2\{(l(y_t) - l(\tilde{\mu}_t))\}}. \quad (6.8)$$

Observações com valor absoluto grande de rd_t podem ser vista como discrepante.

Para cada observação, a log verossimilhança foi construída substituindo o valor de μ_t pela média da distribuição preditiva ($\tilde{\mu}_t$) e o ϕ por $\frac{\tilde{\mu}_t(1-\tilde{\mu}_t)}{V(\tilde{y}_t)} - 1$. Se estivermos trabalhando em algum modelo inflacionado, o δ é substituído pela proporção de observações inflacionadas na amostra preditiva, e γ pela proporção de uns na sub amostra de observações inflacionadas da amostra preditiva. A função $l(\cdot)$ nada mais é que o logaritmo das funções dadas em 2.10, 2.11 e 2.12, dependendo se o modelo de regressão for o Beta não inflacionado, inflacionado em zero ou um e inflacionado em

zero e um, respectivamente.

Essas foram as estatística utilizadas para verificar a adequabilidade do modelo. Todas essas e várias outras podem ser vistas com maiores detalhes em Paulino *et al* (2003) e Ospina (2008). O Resíduo deviance foi calculado com base no apresentado em Oliveira (2004) e Ferrari e Cribari-Neto (2004).

Para avaliar a significância das estimativas dos modelos foram considerados os intervalos de credibilidade de cada parâmetro. Eles foram obtidos com base nos quantis da amostra válida de cada parâmetros, obtidos através do algoritmo MCMC. Por exemplo, para um intervalo de 95%, consideramos os quantis de 2,5% e 97,5% da amostra válida. Se o zero estiver contido no intervalo, o parâmetro não é significativo.

6.4 Aplicação - Modelo de Regressão Beta

Primeiramente, vamos iniciar com o modelo de regressão Beta não inflacionado. Como já mencionado, transformamos a variável resposta risco, que contém observações iguais a 0 e 1, de modo que tenhamos apenas observações no intervalo (0,1). As observações iguais a zero foram transformadas em 0,001 e as iguais a um transformadas em 0,999. Além disso, usamos como função de ligação o logito.

A ideia inicial é estimar um modelo incluindo todas as variáveis, mas sem nenhuma interação, a fim de verificar quais variáveis são significativas para o modelo. Após isso, verificar quais interações de primeira ordem são significativas. Por fim, o modelo final seria um modelo somente com as variáveis significativas do segundo modelo.

O parâmetro ν está relacionado a idade x_t . Os parâmetros β , θ e α estão relacionados aos fatores gênero, etnia e visão do mundo, respectivamente.

Três modelos foram escolhidos para comparar seus resultados. Os modelos foram os seguintes:

$$\text{Modelo 1 : } \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0$$

$$\text{Modelo 2 : } \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k + (\beta\alpha)_{ik} + (\beta\theta)_{ij} + (\theta\alpha)_{jk}$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0$$

$$\beta\alpha_{1k} = \beta\alpha_{i1} = \beta\theta_{1j} = \beta\theta_{i1} = \theta\alpha_{1k} = \theta\alpha_{j1} = 0$$

$$\text{Modelo 3 : } \text{logito}(\mu_{tjl}) = \mu + \nu x_t + \theta_j + (\beta\alpha)_l$$

$$l = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\theta_1 = (\beta\alpha)_1 = 0$$

O modelo 1 é o que está com todas as variáveis, sem nenhuma interação, para verificar quais possíveis variáveis seriam significativas. Nesse modelo, o nível do fator etnia correspondente ao caucasiano não foi significativo, o mesmo ocorreu com os níveis individualistas e hierárquicos da visão do mundo. Então esses níveis foram incorporados à referência. O modelo 2 considerou as variáveis significativas do primeiro modelo, e incluiu as interações de primeira ordem. O modelo 3 contém apenas as variáveis significativas do segundo modelo.

As Tabelas 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam as estimativas bayesianas juntamente com os erros padrão associados a cada uma delas, e também apresentam os intervalos de credibilidade de 95%. O asterisco indica se a variável foi significativa.

No modelo 1, os níveis africano e mexicano-americano foram significativos da variável etnia, e somente o nível igualitário da visão de mundo foi significativo. Além das variáveis gênero e idade. No modelo 2, incluímos as interações de gênero com visão de mundo, gênero e etnia e também, visão de mundo com etnia. A única interação significativa nesse modelo foi a de gênero com visão de mundo, entretanto o efeito principal não foi mais significativo desses fatores. Por fim, o modelo 3 ficou com as seguintes variáveis: idade, gênero, etnia (níveis africano-americano, mexicano-americano e outros) e a interação de gênero (com níveis masculino e feminino) e visão de mundo (com níveis igualitário ou outros). Todas as variáveis desse modelo são significativas. Apesar da análise descritiva indicar que a variável idade não é significativa no modelo, nos resultados de todos os modelos considerados, ela foi significativa, porém seu coeficiente é bem próximo de zero. Não consideramos nenhuma interação das variáveis categorizadas com a variável idade. Não incluímos nenhuma interação de segunda ordem, pois os resultados obtidos com as estimativas dos coeficientes associados as interações no modelo 2, indicaram não haver nenhuma interação maior.

As estimativas para o parâmetro ϕ foram bem pequenas em todos os modelos. Isso indica uma variabilidade grande nos dados.

Ressaltamos que foram feitos estudos de convergência em todos os modelos propostos. Por simplicidade, destacamos os resultados somente do modelo 3. O Apêndice A.1 mostram os gráficos elaborados no estudo de convergência. As estatísticas de convergência apresentaram bons resul-

tados. Assim como nos estudos de simulação, propusemos 3 cadeias iniciando em paralelo. As estatísticas de Geweke e Gelman-Rubin, indicaram que as cadeias já não dependiam do seu valor inicial e que todas convergiram para a mesma distribuição. Além disso, as amostras finais de cada parâmetro não tiveram nenhuma correlação maior que 0,25. O número de iterações usado foi igual a 20000. O *burn-in* de 4000 e espaçamento de 16 nos deixaram com uma amostra de tamanho final 1000.

Tabela 6.5: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 1*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,52	0,13	(1,26; 1,76)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,00)	*
β_2	-0,22	0,10	(-0,41; -0,04)	*
θ_2	-0,24	0,14	(-0,53; 0,00)	
θ_3	0,84	0,14	(0,58; 1,11)	*
θ_4	0,30	0,13	(0,06; 0,57)	*
α_2	-0,19	0,16	(-0,49; 0,13)	
α_3	0,03	0,12	(-0,21; 0,27)	
α_4	-0,34	0,15	(-0,62; -0,03)	*
ϕ	1,60	0,09	(1,43; 1,79)	

Tabela 6.6: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 2*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,46	0,13	(1,22; 1,74)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,15	0,15	(-0,41; 0,14)	
θ_2	0,90	0,15	(0,63; 1,19)	*
θ_3	0,46	0,13	(0,23; 0,73)	*
α_2	-0,06	0,19	(-0,43; 0,26)	
$\beta\alpha_2$	-0,66	0,28	(-1,21; -0,15)	*
$\beta\theta_2$	0,21	0,27	(-0,26; 0,81)	
$\beta\theta_3$	-0,15	0,23	(-0,56; 0,32)	
$\alpha\theta_2$	-0,07	0,42	(-0,87; 0,74)	
$\alpha\theta_3$	0,69	0,60	(-0,40; 1,82)	
ϕ	1,66	0,10	(1,48; 1,87)	

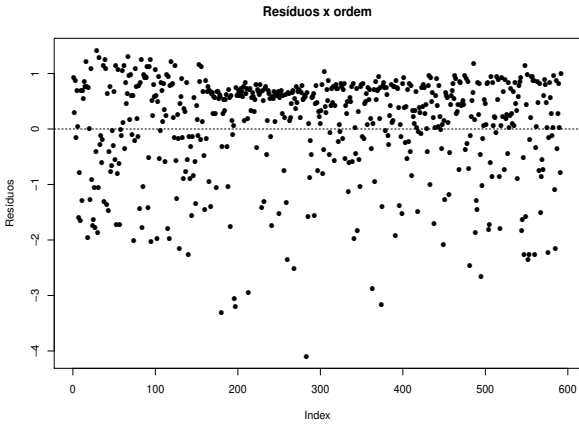
As Figuras 6.4 e 6.5 mostram os resíduos padronizados e deviance, respectivamente, dos 3 modelos em questão. Os resíduos foram calculados conforme as equações (6.2) e (6.8). Eles

Tabela 6.7: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 3*

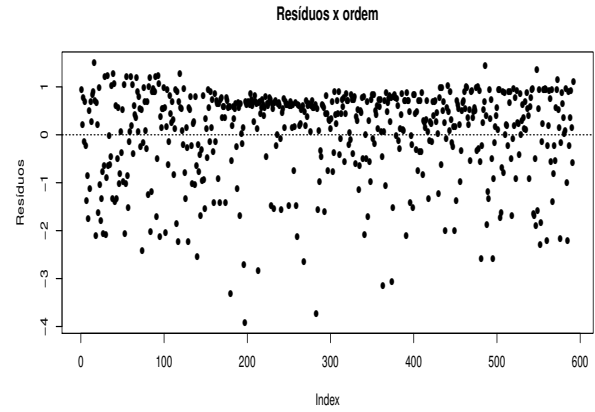
	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,38	0,12	(1,16; 1,61)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
θ_2	0,97	0,12	(0,72; 1,21)	*
θ_3	0,43	0,12	(0,19; 0,67)	*
$\beta\alpha_2$	-0,75	0,19	(-1,09; -0,35)	*
ϕ	1,61	0,09	(1,44; 1,80)	

são bem similares entre si. Há uma concentração em valores acima de zero e abaixo de 1. Isso pode ser um indício de que a transformação feita, a fim de se não se ter nenhuma observação inflacionada, pode influenciar no modelo. Existem algumas observações que apresentam alguns resíduos grandes, que podem ser suspeitos de influenciar nas estimativas dos parâmetros. Porém, os resíduos deviance não evidencia nenhuma observação como possível de ser aberrante. Por isso não retiramos nenhuma observação da análise.

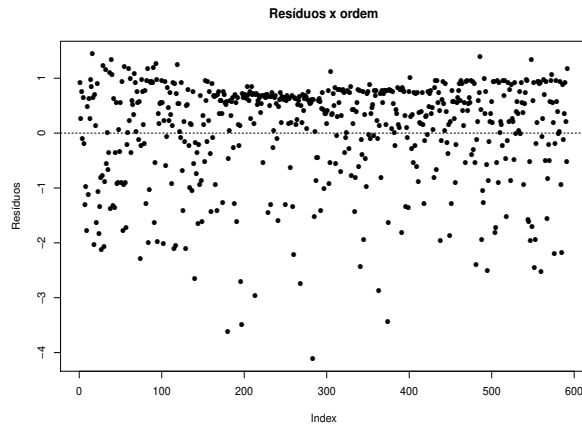
Na Tabela 6.7 temos as estimativas de cada um dos parâmetros estimados para o modelo final (modelo 3). Nota-se que a estimativa de θ_2 ter sinal positivo (0,43), indica que os indivíduos mexicanos-americano avaliam como mais arriscado morar perto de uma usina nuclear do que indivíduos de etnia caucasiano ou taiwanês-americano. Neste caso, $\exp(0,43)$ que é aproximadamente 1,54, significa que dado que o indivíduo é mexicano-americano, a chance do risco médio avaliado de se morar perto de uma usina nuclear é 54% maior que a chance do risco médio avaliado por indivíduos de etnia caucasiana ou taiwanês-americana, considerando as demais covariáveis fixas.



(a) *Modelo 1*

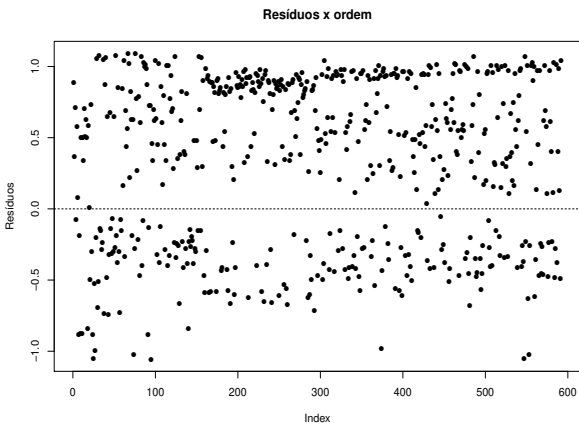


(b) *Modelo 2*

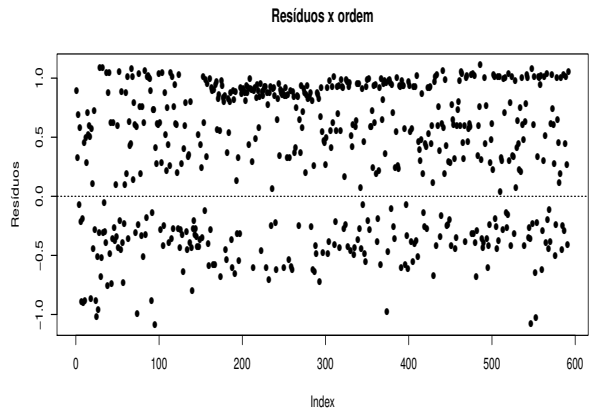


(c) *Modelo 3*

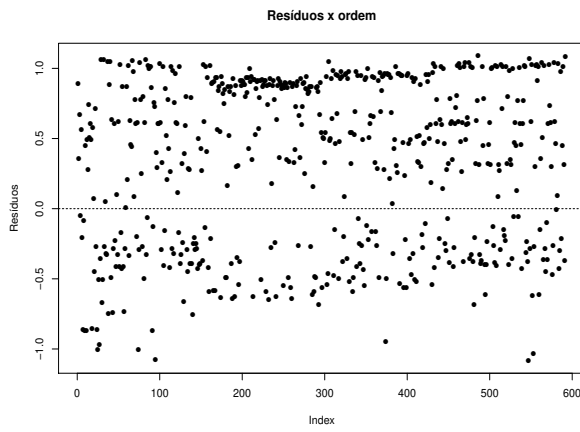
Figura 6.4: *Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Não-Inflacionada*



(a) *Modelo 1*



(b) *Modelo 2*



(c) *Modelo 3*

Figura 6.5: *Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Não-Inflacionada*

6.5 Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero

Introduziremos agora a aplicação do modelo de regressão Beta inflacionado em zero. A variável resposta risco sofreu transformação apenas nas observações que são iguais a 1, que neste caso ficaram iguais a 0,999. Com isso, ficamos apenas observações no intervalo $[0,1)$. A função de ligação usada, novamente foi o logito.

Iniciamos estimando um modelo incluindo todas as variáveis, mas sem nenhuma interação. Assim, podemos verificar quais variáveis são significativas para o modelo. Depois disso, podemos avaliar as interações. Lembrando que o número de observações iguais a zero é bem pequeno. Temos apenas 3 casos.

O parâmetro ν está relacionado a idade x_t . Os parâmetros β , θ e α estão relacionados aos fatores gênero, etnia e visão do mundo, respectivamente.

Três modelos foram escolhidos para comparar seus resultados. Os modelos foram os seguintes:

$$\text{Modelo 1 : } \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0$$

$$\text{Modelo 2 : } \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k + (\beta\alpha)_{ik} + (\beta\theta)_{ij} + (\theta\alpha)_{jk}$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0$$

$$\beta\alpha_{1k} = \beta\alpha_{i1} = \beta\theta_{1j} = \beta\theta_{i1} = \theta\alpha_{1k} = \theta\alpha_{j1} = 0$$

$$\text{Modelo 3 : } \text{logito}(\mu_{tjl}) = \mu + \nu x_t + \theta_j + (\beta\alpha)_l$$

$$l = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n$$

$$\theta_1 = \beta\alpha_1 = 0$$

O modelo 1 é o que está com todas as variáveis, sem nenhuma interação, para verificar quais

possíveis variáveis seriam significativas. Nesse modelo, os níveis individualistas e hierárquicos da visão do mundo não foram significativos. Então esses níveis foram incorporados ao grupo referência. O modelo 2 considerou as variáveis significativas do primeiro modelo, e incluiu as interações de primeira ordem. O modelo 3 contém apenas as variáveis significativas do modelo 2.

As Tabelas 6.8, 6.9 e 6.10 apresentam as estimativas bayesianas juntamente com os erros padrão associados a cada uma delas, e também apresentam os intervalos de credibilidade de 95%. O asterisco indica se a variável foi significativa.

No modelo 1, somente o nível igualitário do fator visão de mundo foi significativo. Além disso, as variáveis etnia, gênero e idade também foram significativas. No modelo 2, incluímos as interações de gênero com visão de mundo, gênero e etnia e também, visão de mundo com etnia. A única interação significativa nesse modelo foi a de gênero com visão de mundo, entretanto o efeito principal não foi mais significativo desses fatores. Também retiramos o nível caucasiano do fator etnia pois ele não foi significativo no modelo 2. Por fim, o modelo final ficou com as seguintes variáveis: idade, gênero, etnia (níveis africano-americano, mexicano-americano e outros) e a interação de gênero (com níveis masculino e feminino) e visão de mundo (com níveis igualitário ou outros). Todas as variáveis desse modelo são significativas. Assim como na aplicação com os dados não inflacionados, a variável idade foi significativa em todos os modelos considerados. Entretanto, novamente seu coeficiente é bem próximo de zero. Não consideramos nenhuma interação das variáveis categorizadas com a variável idade. Os resultados obtidos no modelo 2 em termos das interações nos levaram novamente a não incluir nenhuma interação de segunda ordem.

De novo, as estimativas para o parâmetro ϕ foram bem pequenas em todos os modelos, próximas a 1,73. Isso indica uma variabilidade grande nos dados, pois lembrando quanto menor a precisão (ϕ), maior a variância.

Ressaltamos que foram feitos estudos de convergência em todos os modelos propostos. Por simplicidade, apenas destacamos os resultados do modelo 3, que foi escolhido. O Apêndice A.2 ilustram o estudo de convergência desse modelo. As estatísticas de convergência apresentaram bons resultados. Assim como nos estudos de simulação, propusemos 3 cadeias iniciando em paralelo. As

estatísticas de Geweke e Gelman-Rubin, indicaram que as cadeias já não dependiam do seu valor inicial e que todas convergiram para a mesma distribuição. Além disso, as amostras finais de cada parâmetro não tiveram nenhuma correlação maior que 0,25. O número de iterações usado foi igual a 20000. O *burn-in* de 4000 e espaçamento de 16 nos deixaram com uma amostra de tamanho final 1000.

Tabela 6.8: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 1*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,56	0,13	(1,33; 1,85)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,00)	*
β_2	-0,21	0,10	(-0,41; -0,02)	*
θ_2	-0,28	0,13	(-0,52; -0,04)	*
θ_3	0,80	0,14	(0,52; 1,06)	*
θ_4	0,30	0,13	(0,06; 0,55)	*
α_2	-0,22	0,17	(-0,57; 0,10)	
α_3	0,05	0,13	(-0,19; 0,30)	
α_4	-0,32	0,15	(-0,62; -0,03)	*
ϕ	1,73	0,10	(1,53; 1,93)	

Tabela 6.9: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 2*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,54	0,12	(1,34; 1,77)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,00)	*
β_2	-0,09	0,16	(-0,37; 0,25)	
θ_2	-0,26	0,19	(-0,64; 0,10)	
θ_3	0,73	0,19	(0,29; 1,11)	*
θ_4	0,37	0,15	(0,07; 0,71)	*
α_2	-0,08	0,31	(-0,82; 0,42)	
$\beta\alpha_2$	-0,59	0,29	(-1,19; -0,05)	*
$\beta\theta_2$	-0,13	0,23	(-0,52; 0,32)	
$\beta\theta_3$	0,11	0,25	(-0,34; 0,61)	
$\beta\theta_4$	-0,16	0,27	(-0,73; 0,48)	
$\theta\alpha_2$	0,12	0,31	(-0,51; 0,88)	
$\theta\alpha_3$	-0,06	0,47	(-0,82; 1,09)	
$\theta\alpha_4$	0,68	0,60	(-0,32; 1,84)	
ϕ	1,80	0,11	(1,59; 2,01)	

A Tabela 6.11 apresenta a estimativa bayesiana do parâmetro de inflacionamento, δ . Seu valor

Tabela 6.10: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 3*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,42	0,12	(1,20; 1,66)	*
ν	-0,01	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
θ_2	0,96	0,12	(0,72; 1,21)	*
θ_3	0,44	0,12	(0,20; 0,67)	*
$\beta\alpha_2$	-0,69	0,19	(-1,05; -0,34)	*
ϕ	1,73	0,10	(1,54; 1,93)	

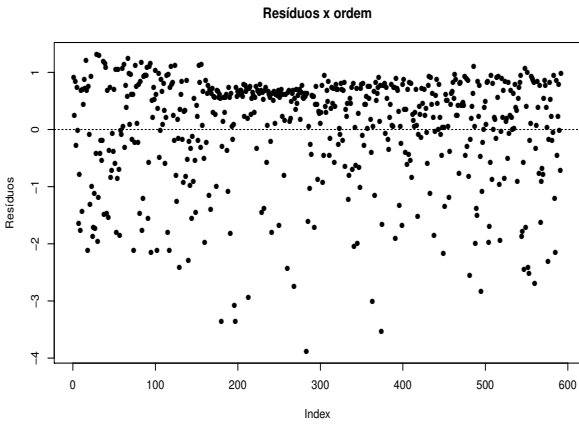
é muito pequeno, o que significa que a probabilidade de zeros na amostra é pequena. Ou seja, é pouco provável que algum indivíduo tenha percepção de risco nulo em se morar perto de uma usina nuclear.

Tabela 6.11: *Estimativa e Erro Padrão (EP) - δ*

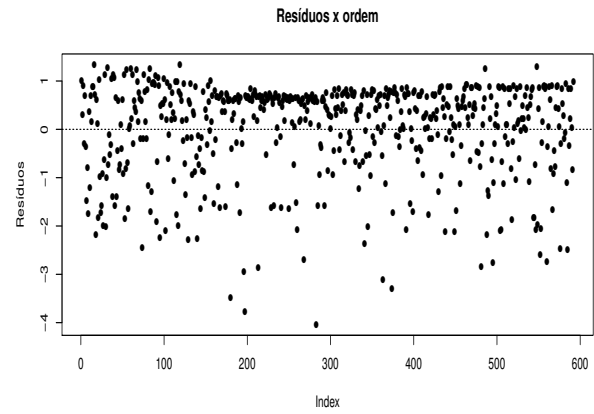
	Estimativa	EP
δ	0,007	0,003

As Figuras 6.6 e 6.7 mostram os resíduos padronizados ponderados e deviance, respectivamente, dos 3 modelos em questão. Nesse modelo, utilizamos os resíduos dados nas equações (6.4) e (6.8). Os resíduos são bem similares entre si. Porém, há uma concentração de valores entre 0 e 1. Isso pode indicar que a transformação na variável respostas iguais a um pode influenciar no modelo. Também pode indicar que a função de ligação pode não ser a mais adequada. Existem algumas observações que apresentam resíduos grandes, que podem nos levar a suspeitar que sejam influentes. Mas, os resíduos deviance não indicam nenhuma observação como possível de ser aberrante.

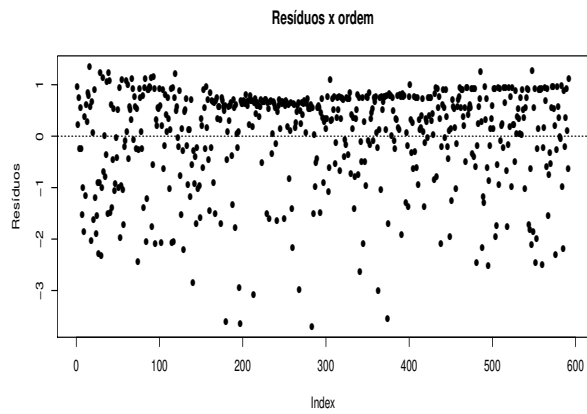
Na Tabela 6.10 temos as estimativas de cada um dos parâmetros do modelo 3. Nota-se que a estimativa de $\beta\alpha_2$ ter sinal negativo (-0,69), indica que dado que o indivíduo pertença ao gênero masculino e tenha visão de mundo igualitária, a chance do risco médio de se morar perto de uma usina nuclear é 50% ($\exp(-0,69) \simeq 0,50$) menor que a chance do risco médio avaliado pelo nível de referência da interação, que é gênero feminino, e visão de mundo diferente da igualitária, considerando que todas as demais covariáveis estejam fixadas.



(a) *Modelo 1*

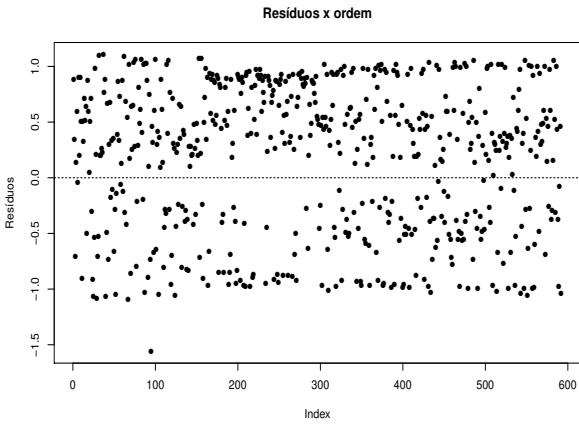


(b) *Modelo 2*

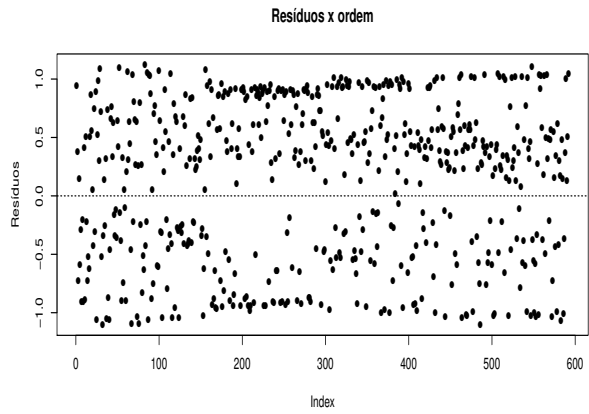


(c) *Modelo 3*

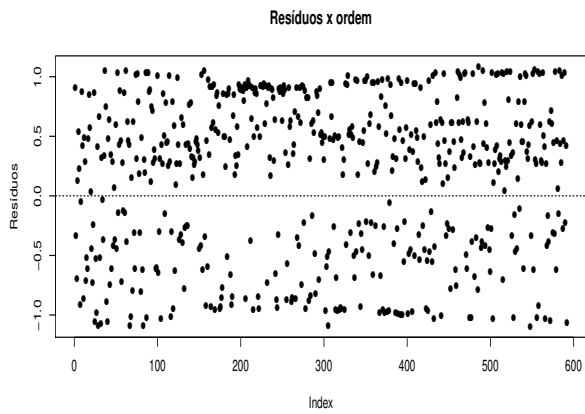
Figura 6.6: *Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Zero*



(a) *Modelo 1*



(b) *Modelo 2*



(c) *Modelo 3*

Figura 6.7: *Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Zero*

6.6 Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Um

Apresentaremos agora a aplicação do modelo de regressão Beta inflacionado em um. Neste caso, a variável resposta risco sofreu transformação nas observações que são iguais a 0. Essas observações foram consideradas iguais a 0,001. Assim, ficamos apenas com observações no intervalo $(0,1]$. A função de ligação usada foi o logito.

Em primeiro lugar, estimamos um modelo incluindo todas as variáveis, mas sem nenhuma interação. Depois disso, avaliamos as interações somente com as variáveis significativas. Neste conjunto de dados, temos 181 casos de observações iguais a um.

O parâmetro ν está relacionado a idade x_t . Os parâmetros β , θ e α estão relacionados aos fatores gênero, etnia e visão do mundo, respectivamente.

Três modelos foram escolhidos para comparar seus resultados. Os modelos foram os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{Modelo 1} & : \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo 2} & : \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + (\beta\theta)_{ij} \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = \beta\theta_{1j} = \beta\theta_{i1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo 3} & : \text{logito}(\mu_{tij}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

O modelo 1 é o que está com todas as variáveis, sem nenhuma interação. Nesse modelo, a variável visão do mundo não foram significativa, assim como o nível caucasiano do fator etnia. O modelo 2 considerou as variáveis significativas do primeiro modelo, e incluiu as interações de

primeira ordem. O modelo 3 é com as variáveis significativas do modelo 2, e mais o nível africano-americano do fator etnia.

As Tabelas 6.12, 6.13 e 6.14 apresentam as estimativas bayesianas juntamente com os erros padrão associados a cada uma delas, e também apresentam os intervalos de credibilidade de 95%. O asterisco indica se a variável foi significativa.

No modelo 1, somente os níveis africano-americano e mexicano-americano do fator etnia foram significativos. Além das variáveis gênero e idade. A variável visão do mundo não foi significativa. No modelo 2, incluímos as interações de gênero e etnia. Nenhuma interação foi significativa nesse modelo. Neste modelo 2, o nível africano-americano do fator etnia não foi significativo. O próximo ajuste não deveria incluir esse nível na variável etnia, pela abordagem sequencial de avaliação dos efeitos das variáveis que apresentamos nesse trabalho. Entretanto, houve um problema na convergência de umas das cadeias utilizadas no estudo de convergência desse modelo. Assim, propusemos como modelo 3 nesse caso, o mesmo modelo final da aplicação do modelo inflacionado em zero e um (Seção 6.7). Então, o modelo final ficou com as seguintes variáveis: idade, gênero e etnia (níveis africano-americano, mexicano-americano e outros). Todas as variáveis desse modelo são significativas.

Em todos os modelos, a variável idade foi significativa. Porém, seu coeficiente é bem próximo de zero, indicando que a relação linear entre o logito da média e essa covariável, é fraca. Não consideramos nenhuma interação das variáveis categóricas com a variável idade. Os resultados obtidos no modelo 2 em termos das interações nos levaram novamente a não incluir nenhuma interação de segunda ordem.

As estimativas para o parâmetro ϕ foram bem pequenas em todos os modelos, próxima a 2,60. Como já visto, isso significa que a variabilidade dos dados é bem grande.

Reforçamos que foram feitos estudos de convergência em todos os modelos propostos. A fim de evitar um prolongamento do trabalho, apenas destacamos os resultados do modelo 3, que foi escolhido como sendo o modelo final. O Apêndice A.3 apresenta os resultados gráficos do estudo de convergência. As estatísticas de convergência apresentaram bons resultados. Assim como

nas demais aplicações, propusemos 3 cadeias iniciando em paralelo. As estatísticas de Geweke e Gelman-Rubin, indicaram que as cadeias não dependiam do seu valor inicial e que todas convergiram para as mesmas estimativas em cada um dos parâmetros. Nesse modelo, as amostras finais de cada parâmetro não tiveram nenhuma correlação maior que 0,25. O número de iterações usado foi igual a 20000. O *burn-in* de 4000 e espaçamento de 16 nos deixaram com uma amostra de tamanho final 1000.

Tabela 6.12: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 1*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,10	0,14	(0,87; 1,39)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,03; -0,01)	*
β_2	-0,35	0,10	(-0,55; -0,15)	*
θ_2	-0,04	0,14	(-0,33; 0,22)	
θ_3	0,55	0,18	(0,16; 0,88)	*
θ_4	0,38	0,15	(0,1; 0,66)	*
α_2	-0,11	0,18	(-0,49; 0,24)	
α_3	0,00	0,14	(-0,27; 0,30)	
α_4	-0,11	0,15	(-0,37; 0,19)	
ϕ	2,58	0,17	(2,25; 2,92)	

Tabela 6.13: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 2*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,12	0,12	(0,92; 1,35)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,50	0,14	(-0,79; -0,22)	*
θ_2	0,39	0,20	(-0,05; 0,79)	
θ_3	0,34	0,16	(0,04; 0,70)	*
$\beta\theta_2$	0,52	0,36	(-0,10; 1,31)	
$\beta\theta_3$	0,24	0,24	(-0,23; 0,67)	
ϕ	2,62	0,16	(2,32; 2,93)	

A Tabela 6.15 apresenta a estimativa bayesiana do parâmetro de inflacionamento, δ . Seu valor é 0,306, o que significa que a probabilidade de uns na amostra é razoavelmente grande. Ou seja, dado um indivíduo selecionado, a probabilidade dele avaliar o risco de se morar perto de uma usina nuclear como sendo o mais alto risco é de 30,6%.

Tabela 6.14: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 3*

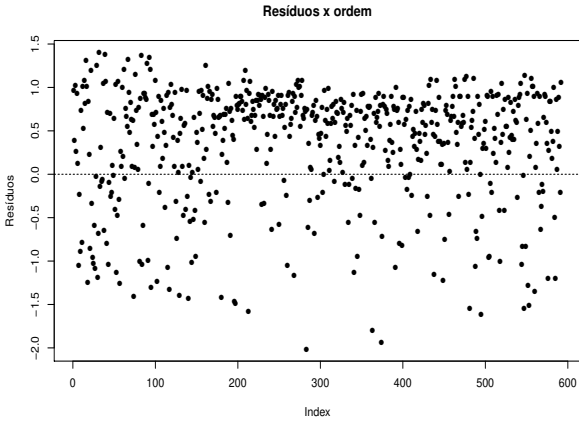
	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,06	0,13	(0,80; 1,32)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,36	0,10	(-0,57; -0,16)	*
θ_2	0,60	0,15	(0,30; 0,90)	*
θ_3	0,43	0,12	(0,19; 0,68)	*
ϕ	2,62	0,16	(2,30; 2,94)	

Tabela 6.15: *Estimativa e Erro Padrão (EP) - δ*

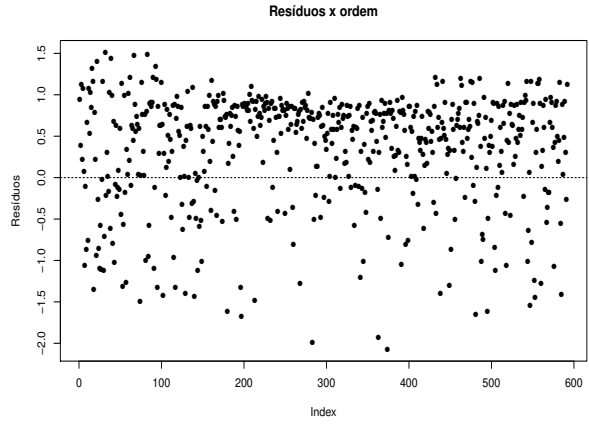
	Estimativa	EP
δ	0,306	0,019

As Figuras 6.8 e 6.9 mostram os resíduos padronizados ponderados e deviance, respectivamente, dos 3 modelos avaliados. Os resíduos foram calculados conforme as equações (6.4) e (6.8). Não há grandes diferenças entre os resíduos. Nos resíduos padronizados ponderados o máximo valor absoluto está próximo de 2, que é bem razoável. Novamente, há uma concentração de resíduos entre 0 e 1. Os resíduos deviance não indicam nenhuma observação como possível de ser aberrante. Seus valores encontram-se no intervalo de -1 a 1.

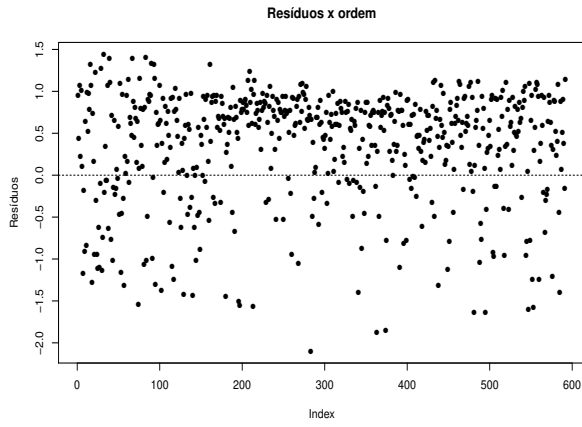
Na Tabela 6.14 temos as estimativas de cada um dos parâmetros do modelo 3. Nota-se que a estimativa de ν , que é a covariável idade, tem sinal negativo (-0,02), indicando que dado que a idade do indivíduo aumente em uma unidade, a chance do risco médio de se morar perto de uma usina nuclear diminui 2% ($\exp(-0,02) \simeq 0,98$), considerando que todas as demais covariáveis estejam fixadas no modelo.



(a) *Modelo 1*

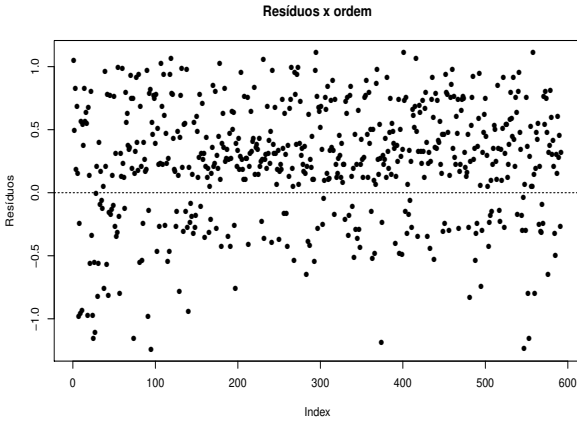


(b) *Modelo 2*

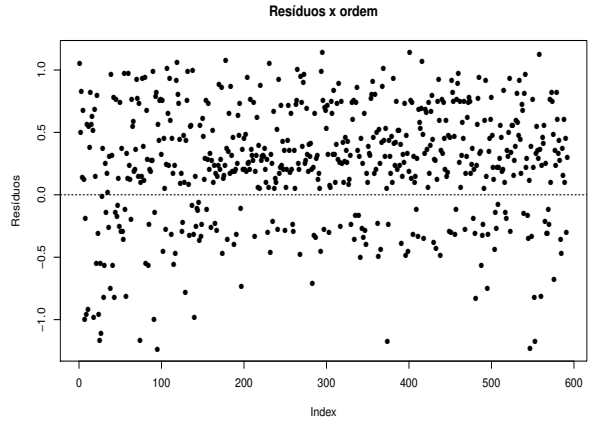


(c) *Modelo 3*

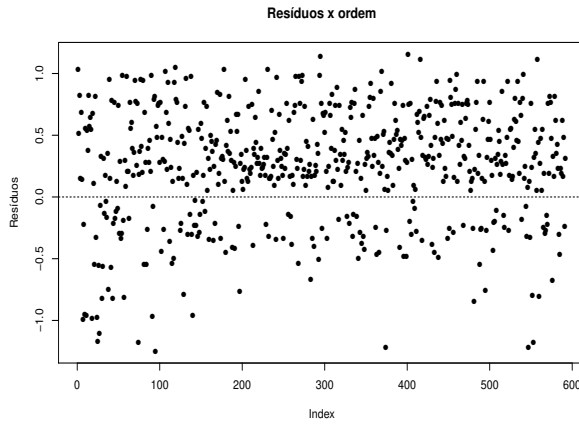
Figura 6.8: *Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Um*



(a) *Modelo 1*



(b) *Modelo 2*



(c) *Modelo 3*

Figura 6.9: *Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Um*

6.7 Aplicação - Modelo de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um

Finalmente, iniciaremos agora a aplicação do modelo de regressão Beta inflacionado em zero e um. A variável resposta risco não sofreu nenhuma transformação nas observações. Assim, ficamos com as observações no intervalo $[0,1]$. Novamente, a função de ligação usada foi o logito.

A ideia inicial foi estimar um modelo incluindo todas as variáveis, mas sem nenhuma interação. Com isso, avaliamos as variáveis significativas no modelo. Depois disso, avaliamos as interações somente com as variáveis significativas. Lembrando que temos 181 casos de observações iguais a um e 3 observações iguais a zero.

O parâmetro ν está relacionado a idade x_t . Os parâmetros β , θ e α estão relacionados aos fatores gênero, etnia e visão do mundo, respectivamente.

Três modelos foram escolhidos para comparar seus resultados. Os modelos foram os seguintes:

$$\begin{aligned}\text{Modelo 1} & : \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + \alpha_k \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = \alpha_1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Modelo 2} & : \text{logito}(\mu_{tijk}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j + (\beta\theta)_{ij} \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = \beta\theta_{1j} = \beta\theta_{i1} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Modelo 3} & : \text{logito}(\mu_{tij}) = \mu + \nu x_t + \beta_i + \theta_j \\ & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad t = 1, \dots, n \\ & \beta_1 = \theta_1 = 0\end{aligned}$$

O modelo 1 é o que está com todas as variáveis, sem nenhuma interação. Nesse modelo, a variável visão do mundo não foram significativa, assim como o nível caucasiano do fator etnia. O modelo 2 considerou as variáveis significativas do primeiro modelo, e incluiu as interações de

primeira ordem. O modelo 3 é com as variáveis significativas do modelo 2.

As Tabelas 6.16, 6.17 e 6.18 apresentam as estimativas bayesianas juntamente com os erros padrão associados a cada uma delas, e também apresentam os intervalos de credibilidade de 95%. O asterisco indica se a variável foi significativa.

No modelo 1, somente os níveis africano-americano e mexicano-americano do fator etnia foram significativos. Além das variáveis gênero e idade. A variável visão do mundo não foi significativa. No modelo 2, incluímos as interações de gênero com etnia. Nenhuma interação foi significativa nesse modelo. Então, o modelo final ficou com as variáveis significativas do modelo 2, que foram: idade, gênero e etnia (níveis africano-americano, mexicano-americano e outros). Todas as variáveis desse modelo são significativas.

As estimativas para o parâmetro ϕ foram bem pequenas em todos os modelos, próxima a 2,96. Como já visto, isso significa que a variabilidade dos dados é bem grande. Esse fato ocorreu em todos os modelos estudados, tanto o modelo de regressão Beta não inflacionado quanto os inflacionados.

Vale ressaltar que foram feitos estudos de convergência em todos os modelos propostos. Neste trabalho, somente destacamos os resultados do modelo 3, que foi escolhido como sendo o modelo final. O Apêndice A.4 ilustram através de gráficos o estudo de convergência feito. As estatísticas de convergência apresentaram bons resultados. Assim como nas demais aplicações, propusemos 3 cadeias iniciando em paralelo. As estatísticas de Geweke e Gelman-Rubin, indicaram que as cadeias não dependiam do seu chute inicial e que todas convergiram para as mesmas estimativas em cada um dos parâmetros. Nesse modelo, as amostras finais de cada parâmetro não tiveram nenhuma correlação maior que 0,25. O número de iterações usado foi igual a 20000. O *burn-in* de 4000 e espaçamento de 16 nos deixaram com uma amostra de tamanho final 1000.

A Tabela 6.19 apresenta a estimativa bayesiana do parâmetro de mistura, o δ , e do parâmetro da probabilidade da observação ser igual a um, dado que ela é inflacionada, o γ . O valor da estimativa do δ foi igual a 0,311, o que significa que a probabilidade da observação ser igual a zero ou um na amostra é razoavelmente grande. O valor da estimativa do parâmetro γ , é 0,978, um valor bem alto. Podemos calcular a probabilidade do indivíduo avaliar o risco de se morar

Tabela 6.16: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 1*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,12	0,14	(0,76; 1,36)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,33	0,11	(-0,55; -0,13)	*
θ_2	-0,07	0,15	(-0,38; 0,22)	
θ_3	0,53	0,18	(0,20; 0,87)	*
θ_4	0,41	0,14	(0,14; 0,67)	*
α_2	-0,13	0,18	(-0,50; 0,24)	
α_3	0,05	0,15	(-0,25; 0,33)	
α_4	-0,07	0,14	(-0,35; 0,19)	
ϕ	2,91	0,19	(2,56; 3,31)	

Tabela 6.17: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 2*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,15	0,13	(0,90; 1,43)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,49	0,12	(-0,72; -0,27)	*
θ_2	0,37	0,18	(0,03; 0,73)	*
θ_3	0,32	0,15	(0,05; 0,62)	*
$\beta\theta_2$	0,51	0,29	(-0,01; 1,08)	
$\beta\theta_3$	0,37	0,23	(-0,06; 0,82)	
ϕ	2,96	0,20	(2,59; 3,35)	

Tabela 6.18: *Estimativas, Erro Padrão (EP) e Intervalos de Credibilidade (IC) - Modelo 3*

	Estimativa	EP	IC 95%	
μ	1,10	0,12	(0,85; 1,32)	*
ν	-0,02	<0,01	(-0,02; -0,01)	*
β_2	-0,34	0,10	(-0,53; -0,14)	*
θ_2	0,57	0,15	(0,29; 0,86)	*
θ_3	0,48	0,12	(0,24; 0,69)	*
ϕ	2,96	0,20	(2,58; 3,37)	

perto de uma usina nuclear como sendo 0, e também como sendo 1. A probabilidade do indivíduo avaliar como sendo 1 o risco, é dada por 0,304 ($\delta\gamma$). Já a probabilidade de um indivíduo avaliar como sendo zero, o risco de se morar perto de uma usina nuclear é igual a 0,007 ($\delta(1 - \gamma)$). Note que essas estimativas apontam que a percepção subjetiva do risco de se morar perto de uma usina nuclear é razoavelmente alta.

Tabela 6.19: *Estimativa e Erro Padrão (EP) - δ e γ*

	Estimativa	EP
δ	0,311	0,019
γ	0,978	0,011

As Figuras 6.10 e 6.11 mostram os resíduos padronizados e deviance, respectivamente, dos 3 modelos em questão. Os resíduos utilizados são dados nas equações (6.7) e (6.8). Eles são bem similares entre si. Existem algumas observações que apresentam alguns resíduos grandes. Tais observações podem ser suspeitas de influenciar nas estimativas dos parâmetros do modelo de regressão. Porém, os resíduos deviance não apontam nenhuma observação como possível de ser aberrante. Por isso não retiramos nenhuma observação da análise. Nos resíduos ponderados, há uma concentração de observações entre zero e um. Isso pode indicar que a função de ligação logito não é a mais adequada para se utilizar.

Comparando as Figuras 6.4, 6.6, 6.8 e 6.10, nota-se que em todas elas há uma concentração dos resíduos entre os valores 0 e 1. Tal fato é mais acentuado nos modelos de regressão Beta não inflacionados e inflacionados em zero. Quando se compara aos gráficos dos modelos inflacionados em um e inflacionados em zero e um. Isso podemos explicar como sendo influência da transformação dos dados. Nos dois primeiros casos, as observações iguais a um foram transformadas em 0,999. Além disso, o número de observações iguais a um na amostra é bem maior que as observações iguais a zero. Essa questão indica que é importante se incorporar a componente discreta do modelo, e não se utilizar nenhuma transformação nos dados, de modo a utilizar o modelo Beta não-inflacionado.

Na Tabela 6.18 temos as estimativas de cada um dos parâmetros do modelo 3. Nota-se que a estimativa de β_2 tem sinal negativo (-0,34), confirmando o observado na análise descritiva de que as mulheres avaliam como mais arriscado morar perto de uma usina nuclear do que os homens. Por exemplo, $\exp(-0,34)$ que é aproximadamente 0,711, significa que dado o indivíduo é do gênero masculino, a chance do risco médio avaliado de se morar perto de uma usina nuclear é 29% menor que a chance do risco médio avaliado por indivíduos do gênero feminino, considerando as demais covariáveis fixas no modelo.

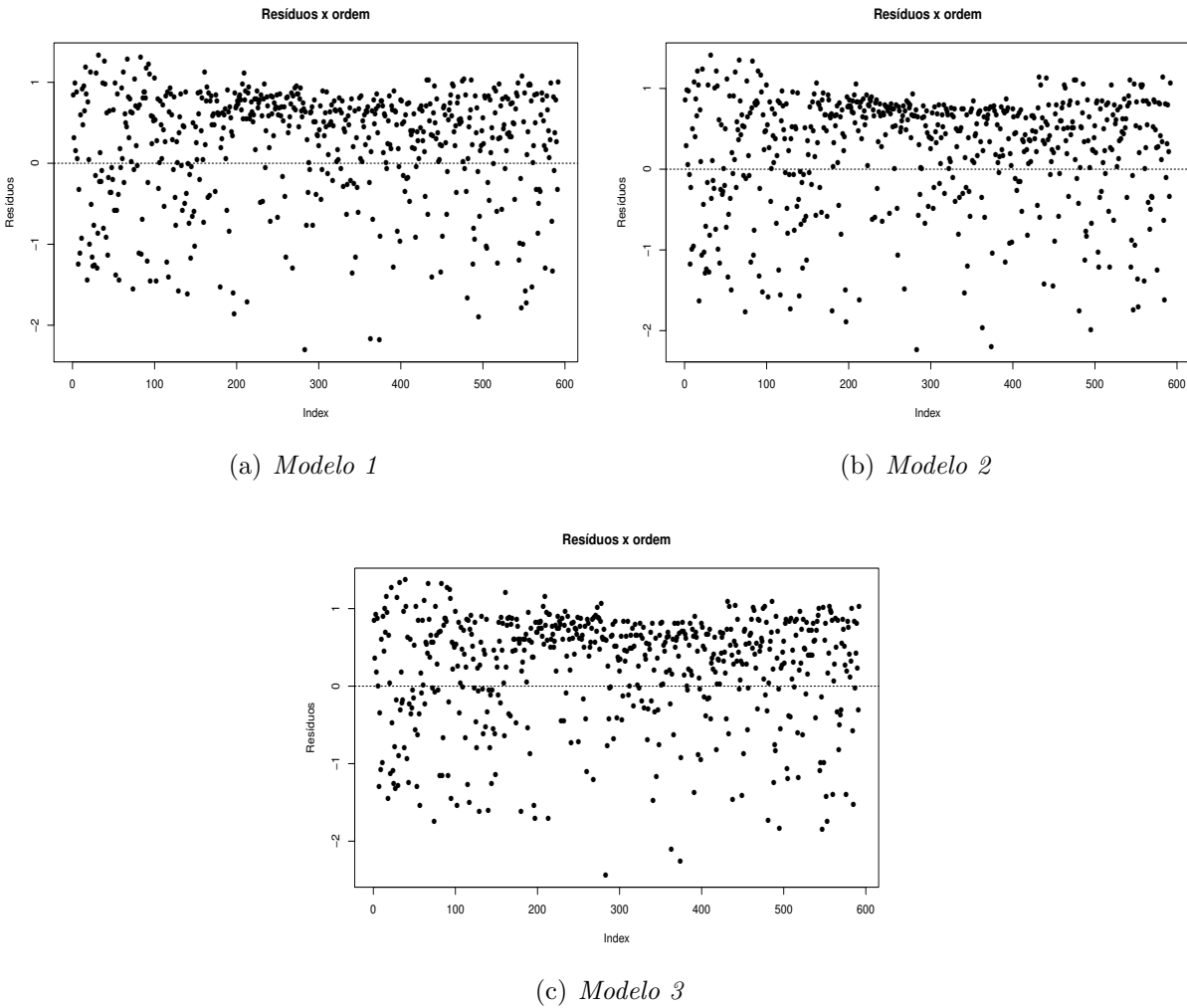
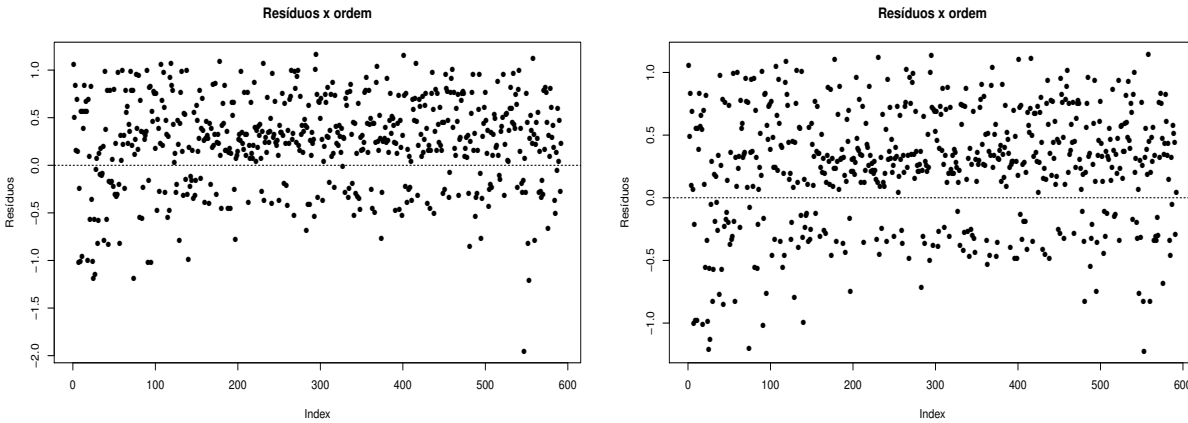


Figura 6.10: *Gráfico dos Resíduos Padronizados - Regressão Beta Inflacionada em Zero e Um*

6.8 Conclusão

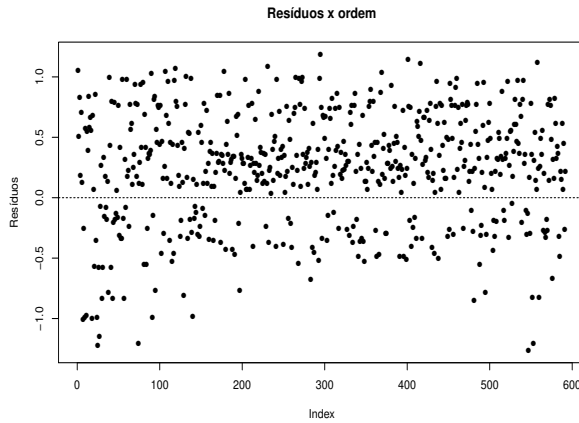
As aplicações dos modelos de regressão Beta, Beta inflacionados em zero ou um e Beta inflacionados em zero e um, nos permitiu, de uma forma resumida, entender como pode ser realizada a aplicação desses modelos. Salientamos ser muito importante a presença de algum especialista da área (nesse caso da área de psicometria) para que as conclusões estatísticas obtidas da modelagem, possam ter um sentido coerente com a realidade do experimento.

Vale salientar que houve algumas diferenças nos resultados obtidos com a transformação dos



(a) *Modelo 1*

(b) *Modelo 2*



(c) *Modelo 3*

Figura 6.11: *Gráfico dos Resíduos Deviance - Regressão Beta Inflacionada em Zero e Um*

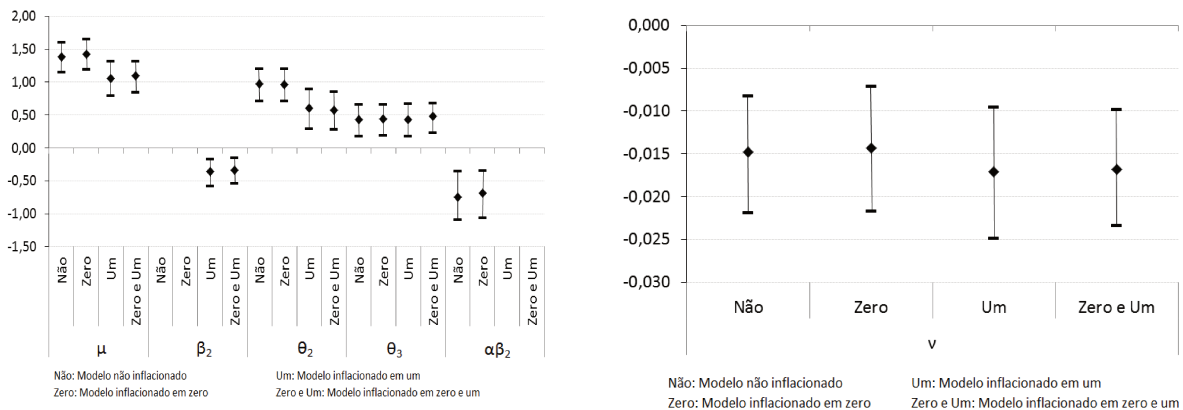
dados e sem essa transformação. Esse fato mostra que é importante não alterar a estrutura dos dados, mantendo os dados inflacionados em sua forma original.

Uma das diferenças é com relação aos resíduos. Nas Figuras 6.4(c) e 6.10(c) temos os resíduos padronizados dos modelos finais (modelo 3) escolhido para o conjunto de dados não inflacionado (com a transformação em zero e um) e o conjunto de dados inflacionado em zero e um (sem transformação), respectivamente. Pode-se notar que no primeiro, a concentração de observações entre 0 e 1, é maior que no segundo caso. Mesma situação ocorre nas Figuras 6.5(c) e 6.11(c), que são os resíduos deviance dos modelos finais dos conjuntos de dados não inflacionados e inflacionados em

zero e um. Essa primeira diferença, evidencia que há impacto no ajuste do modelo a transformação dos dados.

Outra diferença é nas variáveis significativas de cada um dos modelos finais (modelo 3) nas duas situações. Os modelos ficaram diferentes. Esse fato, também é um indício de que a transformação dos dados pode afetar o modelo. A Figura 6.12 mostra as médias com os intervalo de credibilidade das estimativas dos parâmetros do modelo final de cada uma das aplicações. Note que para os modelos inflacionados em um e inflacionados em zero e um as variáveis significativas foram iguais. Assim como para os modelos não inflacionado e inflacionado em zero, que o modelo final também foram iguais, ou seja, as mesmas variáveis foram significativas no modelo 3. As Figuras 6.12(a) e 6.12(b) foram separadas, pois a variável idade (ν) ficaria distorcida se estivesse no mesmo gráfico com as demais.

Para verificar qual o impacto dessa transformação nos dados, é importante a realização de um estudo de simulação mais profundo.



(a) Gráfico de Médias

(b) Gráfico de Médias - Variável ν (Idade)

Figura 6.12: Gráfico de Médias dos Parâmetros do Modelo 3

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Considerações Finais

Durante este trabalho, propomos uma abordagem bayesiana para a inferência realizada através dos modelos de regressão Beta, Beta inflacionado de zero ou um e o Beta inflacionado em zero e um. Apresentamos as características de cada modelo e como é realizada a inferência bayesiana para cada um dos conjuntos de prioris sugeridos.

Conseguimos através do estudo de simulação comparar as estimativas bayesianas com as estimativas de máxima verossimilhança. Concluimos que as abordagens bayesianas sugeridas obtiveram resultados iguais ou até melhores em relação aos resultados clássicos, principalmente nos casos em que o tamanho amostral e o valor verdadeiro do parâmetro ϕ são pequenos. Isso nos leva a afirmar que o uso da inferência bayesiana nesse caso é uma recomendação razoável. Mesmo porque, sua implementação não é tão custosa quanto a implementação da abordagem frequentista, que exige um custo computacional alto no processo de estimação. Nos pacotes atuais já implementados, são usados algoritmos de otimização alternativos, como o BFGS, para melhorar seu desempenho.

Nos estudos de simulação foram elaborados os gráficos com os boxplots das réplicas em cada uma das situações estudada. Porém, não foram apresentados nesse trabalho a fim de evitar um prolongamento desnecessário. Para solicitar esses gráficos, basta enviar um e-mail para `nogarotto.danilo@gmail.com`, que envio os mesmos.

Nos modelos inflacionados propomos apenas modelar a média da distribuição Beta. Outras possibilidades são a modelagem dos parâmetros ϕ, δ e γ . Ospina (2008) apresenta o modelo de regressão Beta inflacionado, sugerindo a modelagem desses parâmetros.

Outro ponto a se discutir é com relação a uma transformação nos dados, com a intenção de não utilizar o modelo inflacionado Beta. Suponha que seja razoável crer que a variável resposta não seja exatamente zero, e sim, suficientemente pequena. Ou mesmo que a variável resposta não seja igual a um, ou próximo disso, por exemplo, 0,9999. Com isso, seria utilizado o modelo de regressão Beta usual. Na aplicação a dados reais transformamos os dados dessa maneira, a fim de exibir didaticamente o ferramental apresentado. Esse é uma sugestão para trabalhos futuros.

Um dos conjuntos de distribuição a priori utilizados que se destacou foi a priori de Jeffreys. Entretanto, não sabemos se tal priori é própria ou não, e mesmo se a posteriori originada dela, é própria. Evidências nesse sentido foram encontradas, porém uma prova formal para tal questionamento é importante para análises futuras.

Os algoritmos de *Metropolis-Hastings* utilizados para amostrar da densidade a posteriori se mostraram muito úteis. Esse método foi implementado no software R. O tempo para se obter os resultados através dos programas variam de acordo com o conjunto de priori utilizados, assim como as variáveis envolvidas (como tamanho amostral, quantidade de observações não inflacionadas na amostra). Por exemplo, para gerar uma cadeia de tamanho 10000, com um tamanho amostral de 200 e número de covariáveis iguais a 5, com o conjunto de prioris usuais, que envolve cálculos mais simples, é aproximadamente doze vezes mais rápido do que se utilizar os conjuntos de prioris de Jeffreys que levam um tempo pouco maior, devido aos cálculos mais complexos. Analisar melhores alternativas para ganho de tempo nesse processamento é importante para aumentar a eficiência desse processo.

Outra proposta para futuros trabalhos é a utilização do RJMCMC. Esse algoritmo é uma extensão da metodologia padrão do MCMC, que permite simular da distribuição a posteriori em espaços de dimensões que variam.

De modo geral, os modelos de regressão Beta não inflacionados e Beta inflacionados são muito

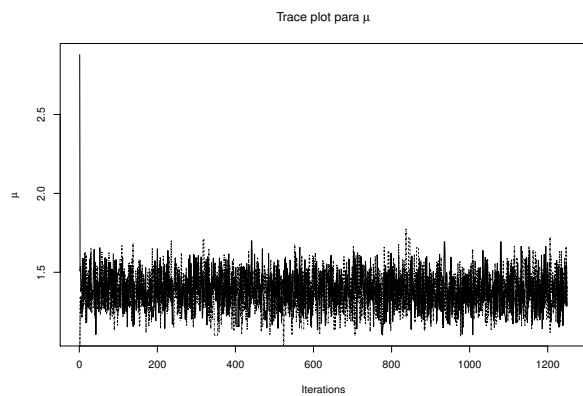
interessantes de se trabalhar. Recomendo sua aplicação, a fim de cada vez mais, novos conhecimentos nessa área se desenvolvam, e se tornem bem úteis nas mais diversas áreas de pesquisa.

Apêndice A

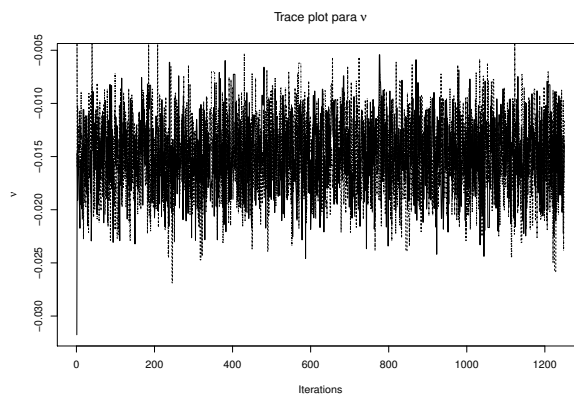
Estudo de Convergência

As Figuras a seguir são os gráficos construídos do estudo de convergência realizado com o conjunto de dados reais do Capítulo 6. Ressaltamos que apresentamos apenas os gráficos referentes ao modelo final escolhido em cada uma das aplicações. No Apêndice A.1 temos os resultados referentes à aplicação do Modelo de Regressão Beta não-inflacionado. Nos Apêndices A.2 e A.3 tem-se os resultados dos Modelos de Regressão Beta Inflacionado de Zero e Inflacionado em Um, respectivamente. Finalmente, no Apêndice A.4 apresentamos os resultados referente à aplicação do Modelo Inflacionado de Zero e Um.

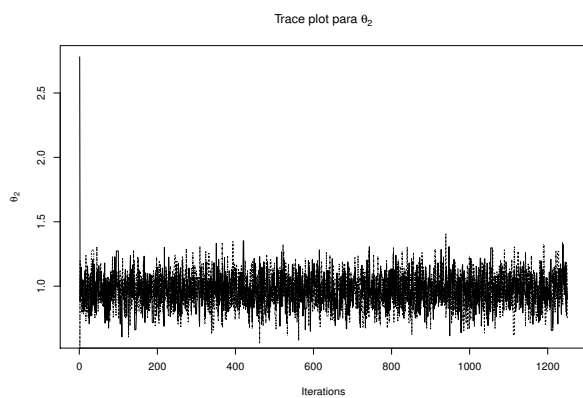
A.1 Modelos de Regressão Beta



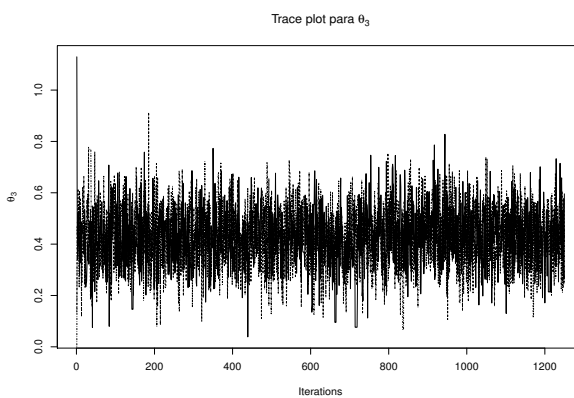
(a) *Parâmetro - μ*



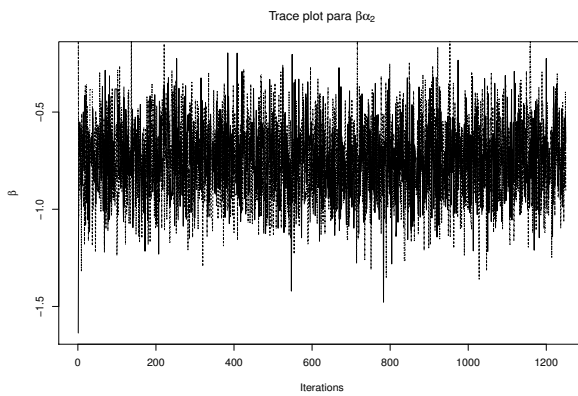
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*

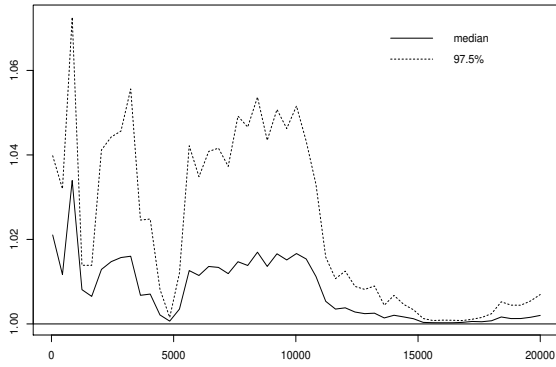


(d) *Parâmetro - θ_3*

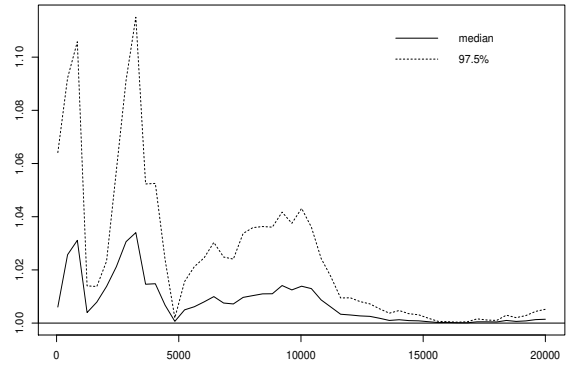


(e) *Parâmetro - β_4*

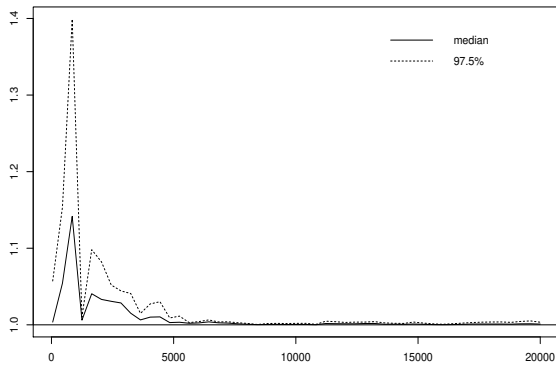
Figura A.1: *Trace plot dos parâmetros*



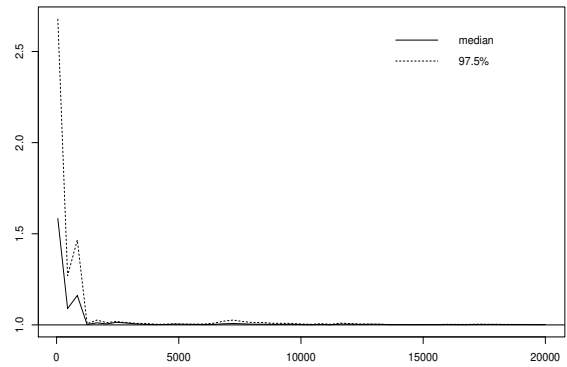
(a) *Parâmetro - μ*



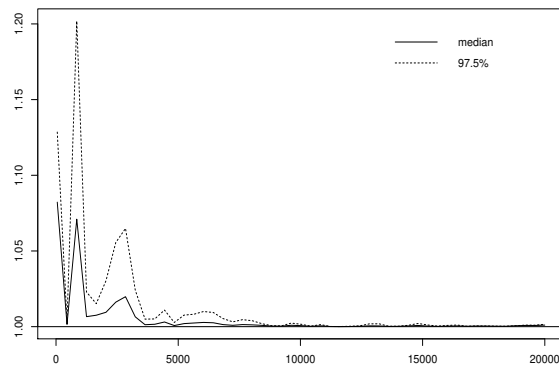
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*

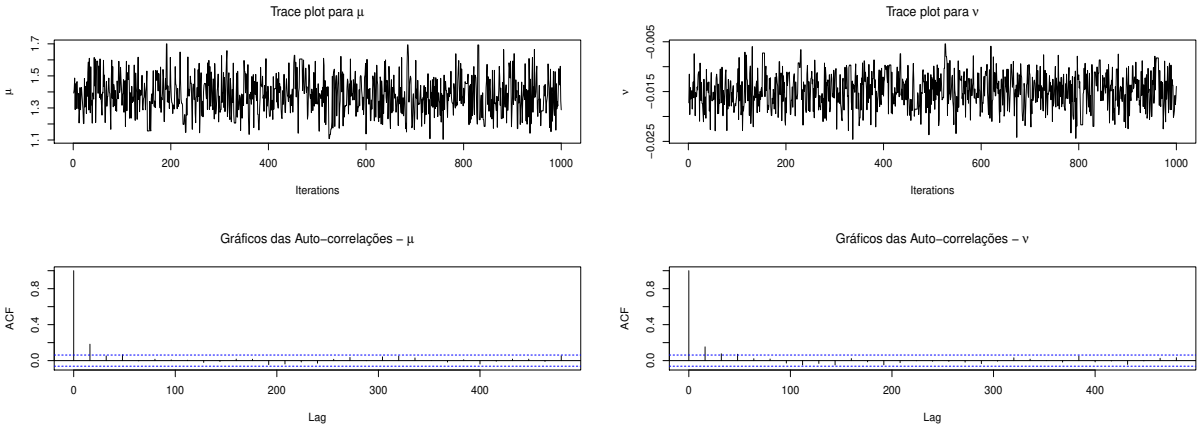


(d) *Parâmetro - θ_3*

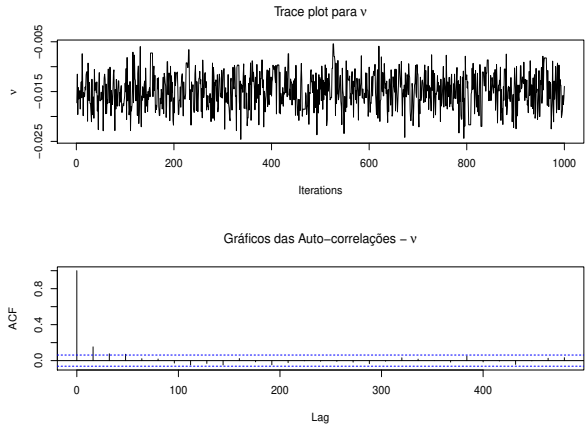


(e) *Parâmetro - $\beta\alpha_2$*

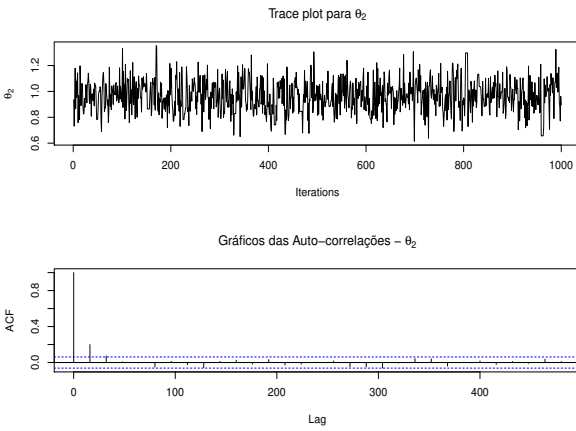
Figura A.2: *Cr terio de Gelman-Rubin*



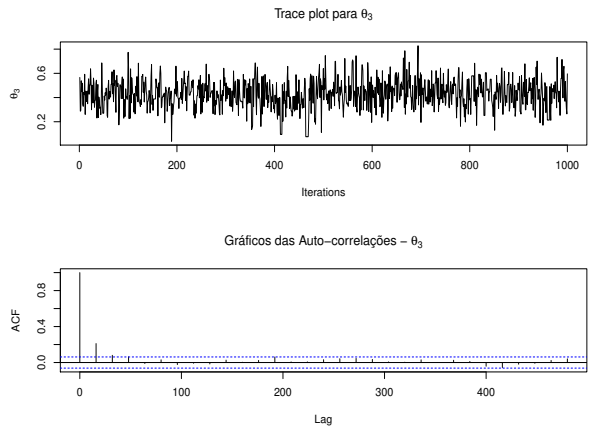
(a) *Parâmetro - μ*



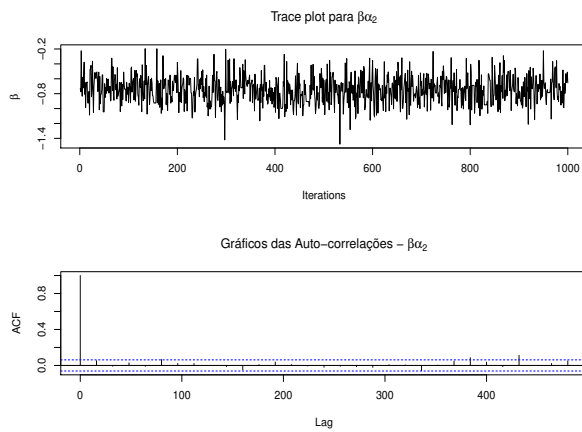
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*



(d) *Parâmetro - θ_3*



(e) *Parâmetro - $\beta\alpha_2$*

Figura A.3: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

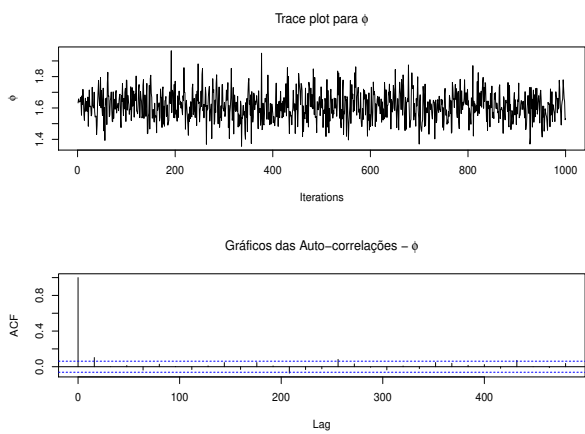
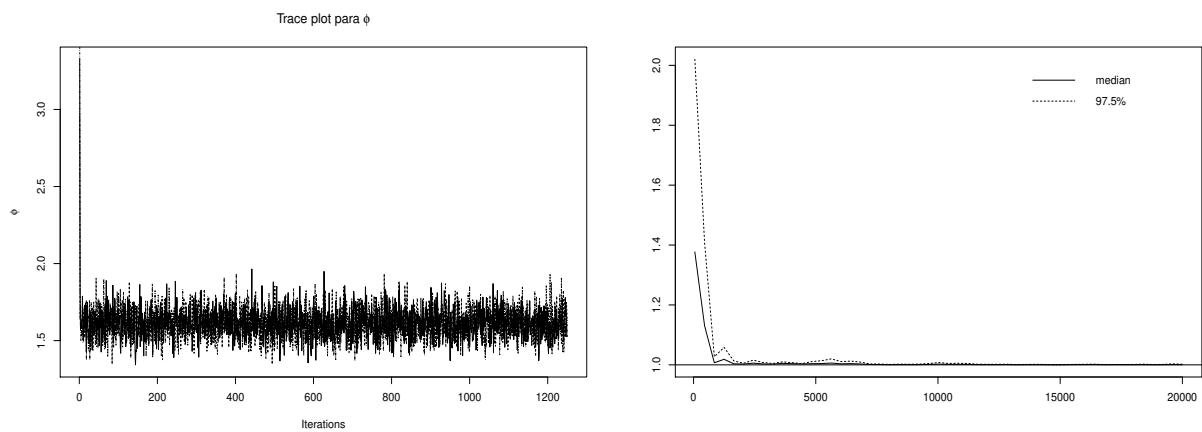
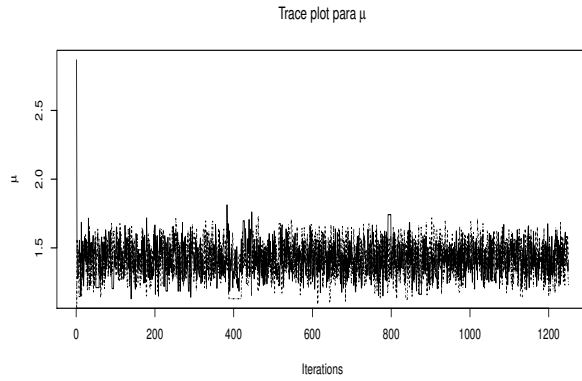
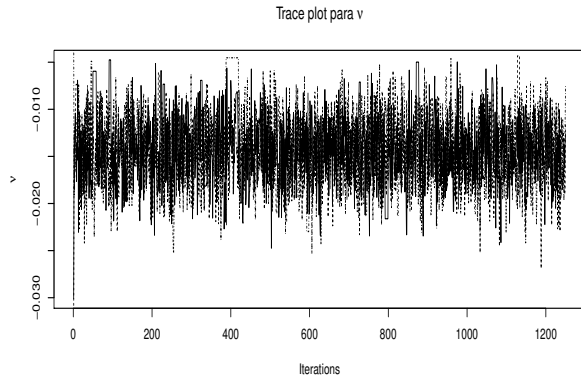


Figura A.4: Estudo de Convergência - ϕ

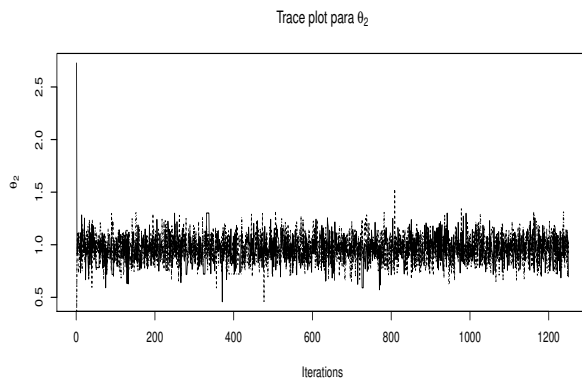
A.2 Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Zero



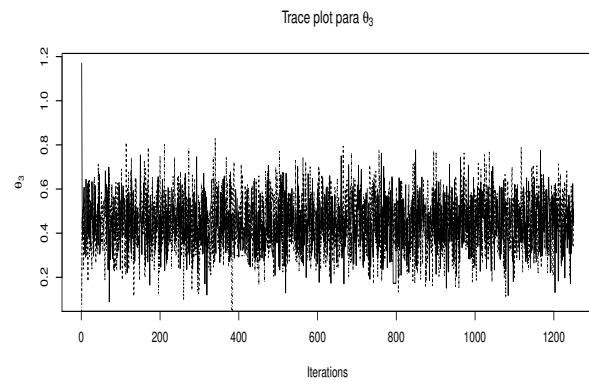
(a) *Parâmetro - μ*



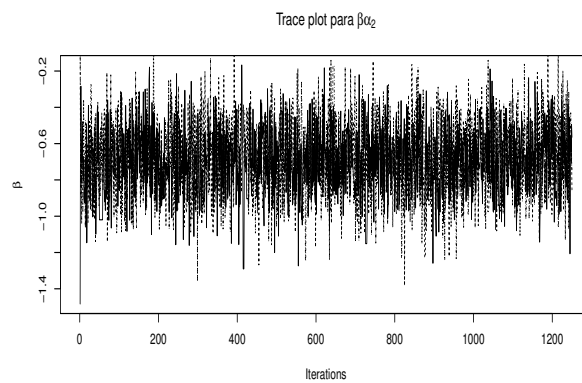
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*

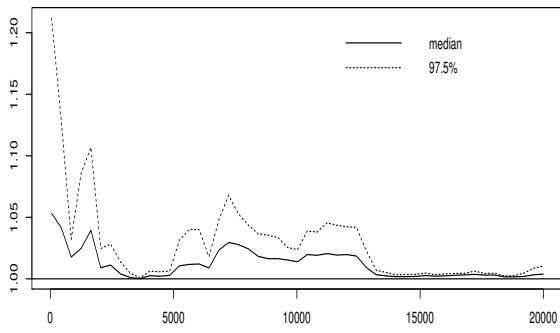


(d) *Parâmetro - θ_3*

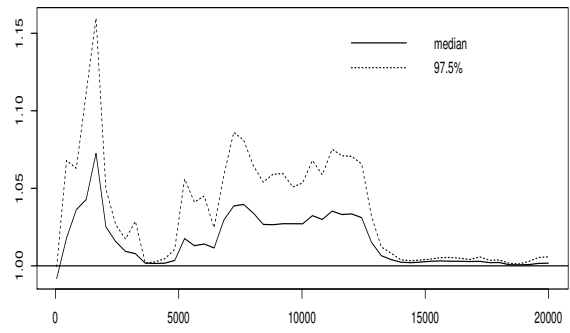


(e) *Parâmetro - $\beta\alpha_2$*

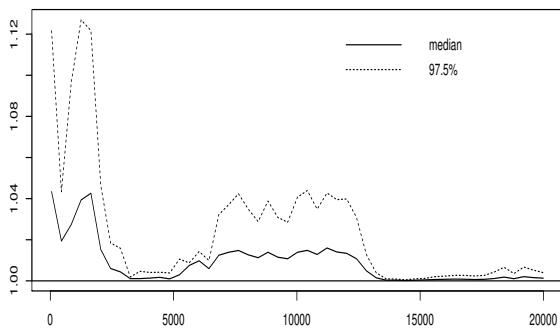
Figura A.5: *Trace plot dos parâmetros*



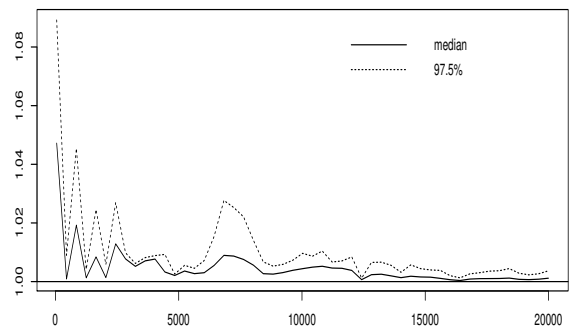
(a) *Parâmetro - μ*



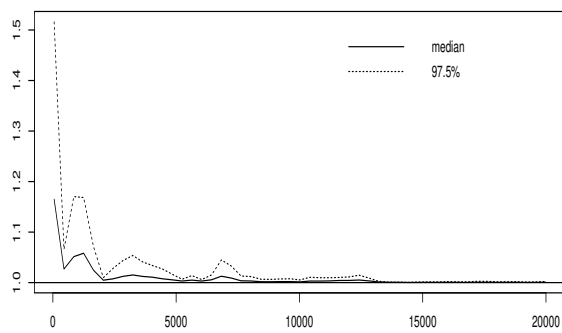
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*

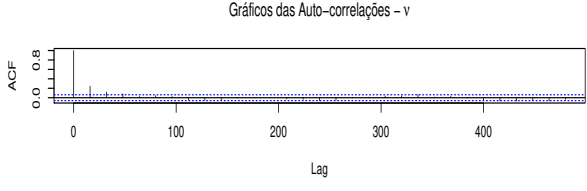
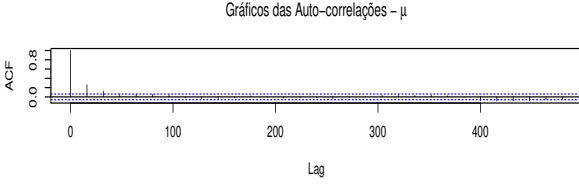
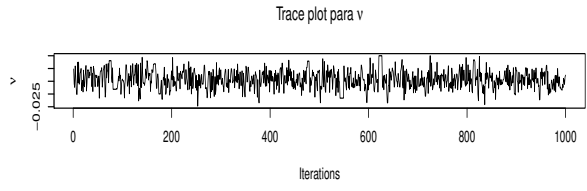


(d) *Parâmetro - θ_3*



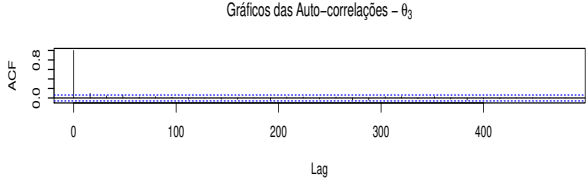
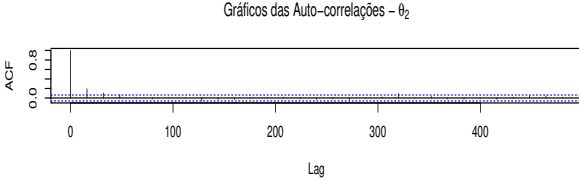
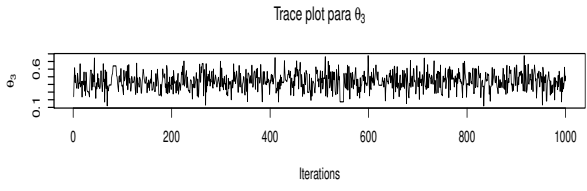
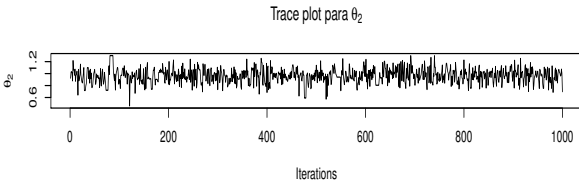
(e) *Parâmetro - $\beta\alpha_2$*

Figura A.6: *Cr terio de Gelman-Rubin*



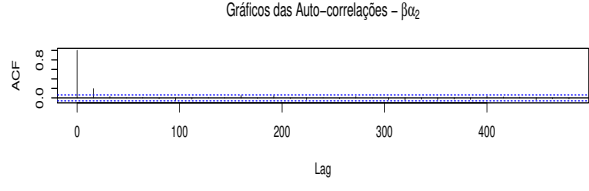
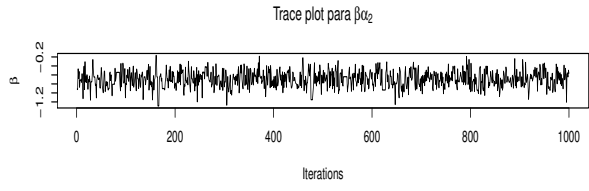
(a) *Parâmetro - μ*

(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - θ_2*

(d) *Parâmetro - θ_3*



(e) *Parâmetro - $\beta\alpha_2$*

Figura A.7: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*

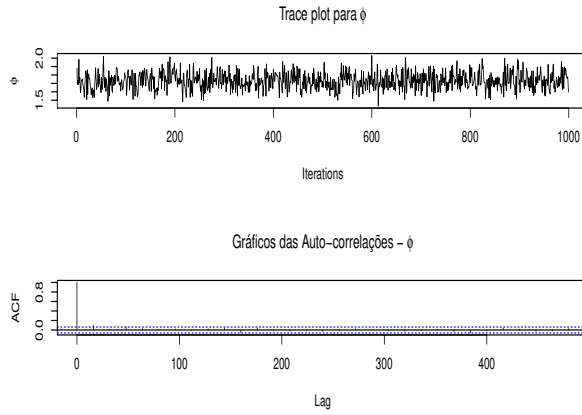
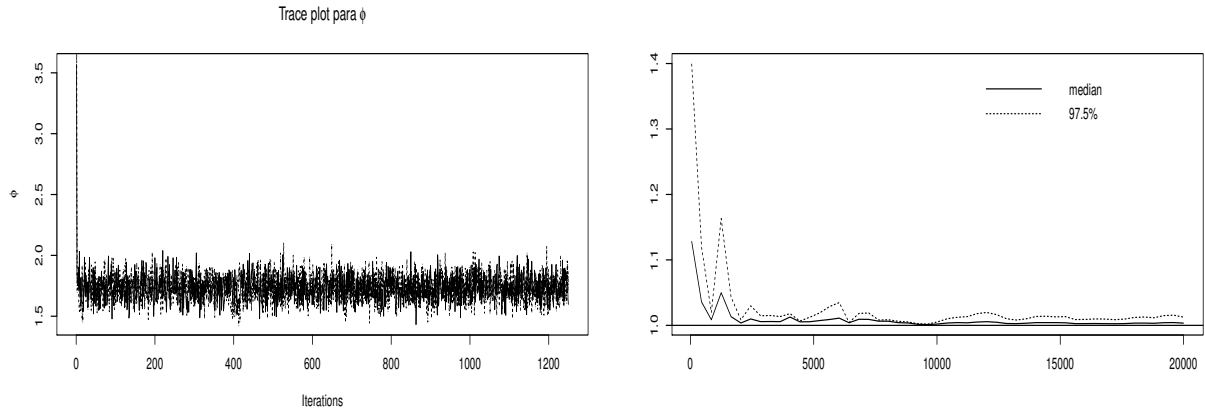
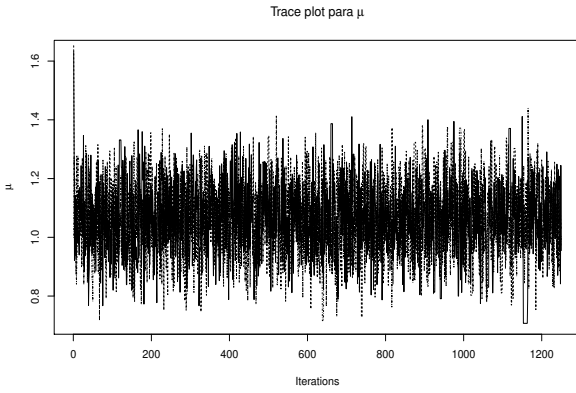
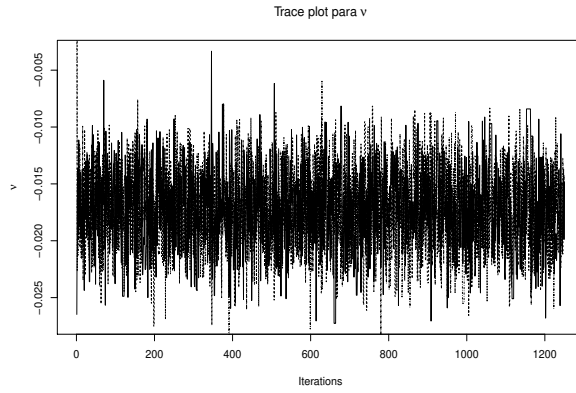


Figura A.8: Estudo de Convergência - ϕ

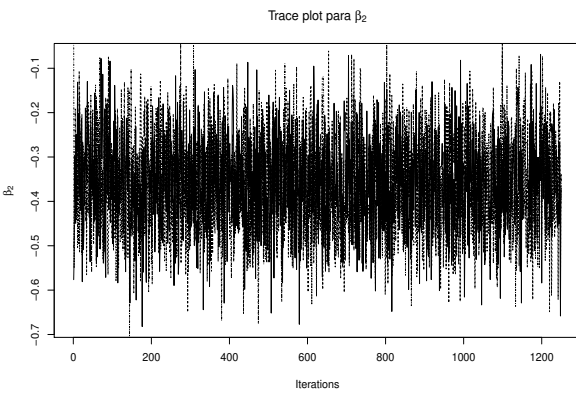
A.3 Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Um



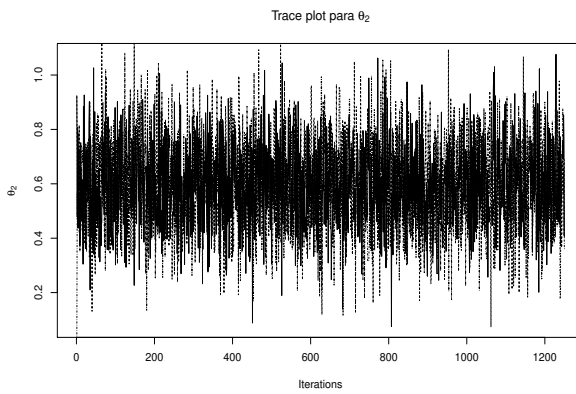
(a) *Parâmetro - μ*



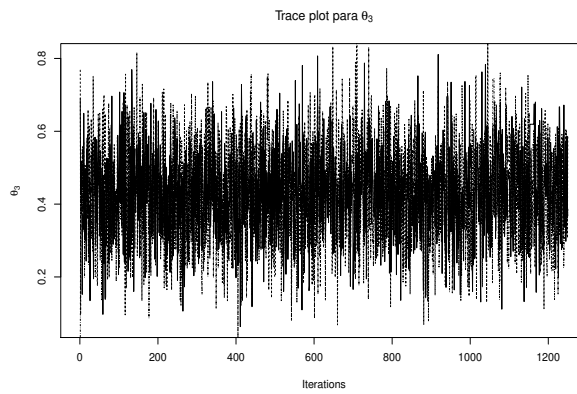
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - β_2*

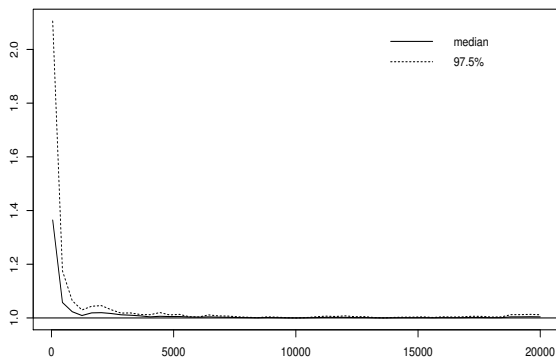


(d) *Parâmetro - θ_2*

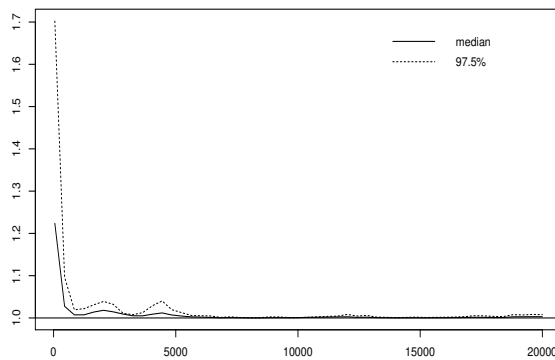


(e) *Parâmetro - θ_3*

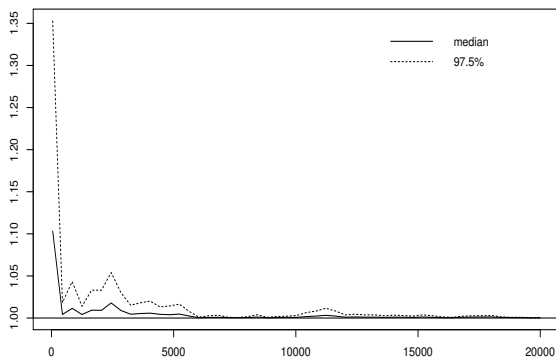
Figura A.9: *Trace plot dos parâmetros*



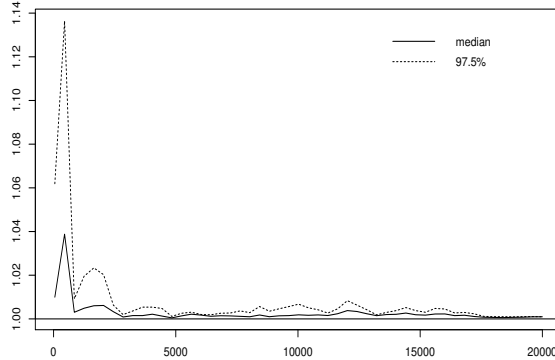
(a) *Parâmetro - μ*



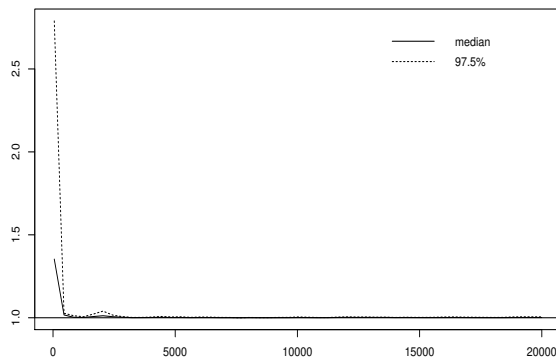
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - β_2*

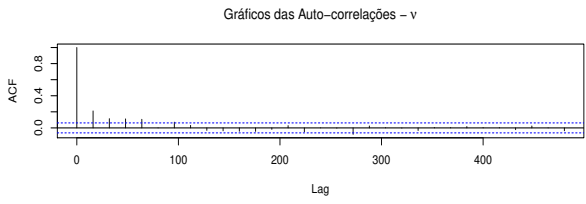
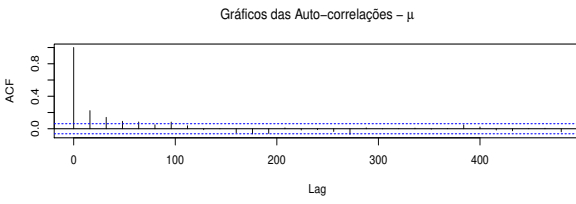
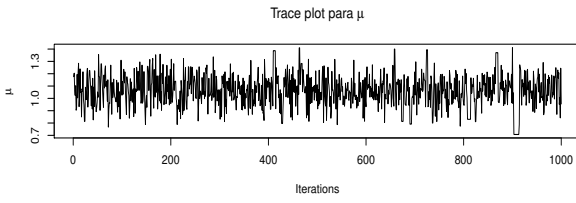


(d) *Parâmetro - θ_2*



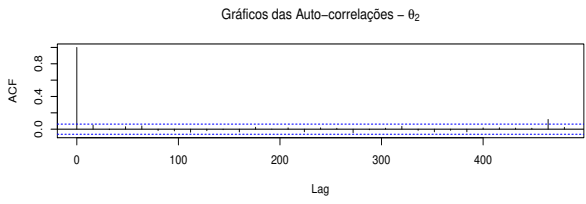
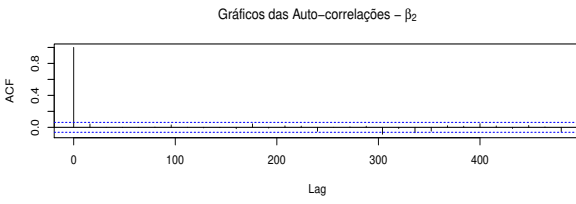
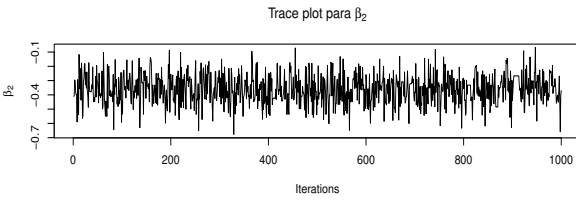
(e) *Parâmetro - θ_3*

Figura A.10: *Critério de Gelman-Rubin*



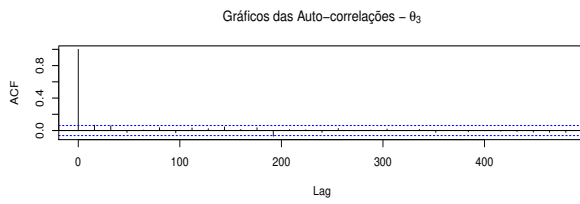
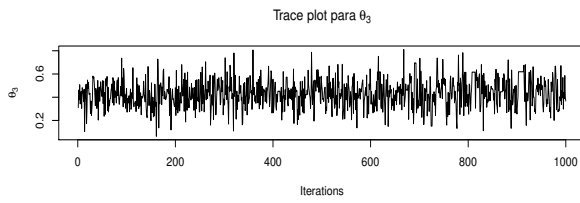
(a) *Parâmetro - μ*

(b) *Parâmetro - ν*



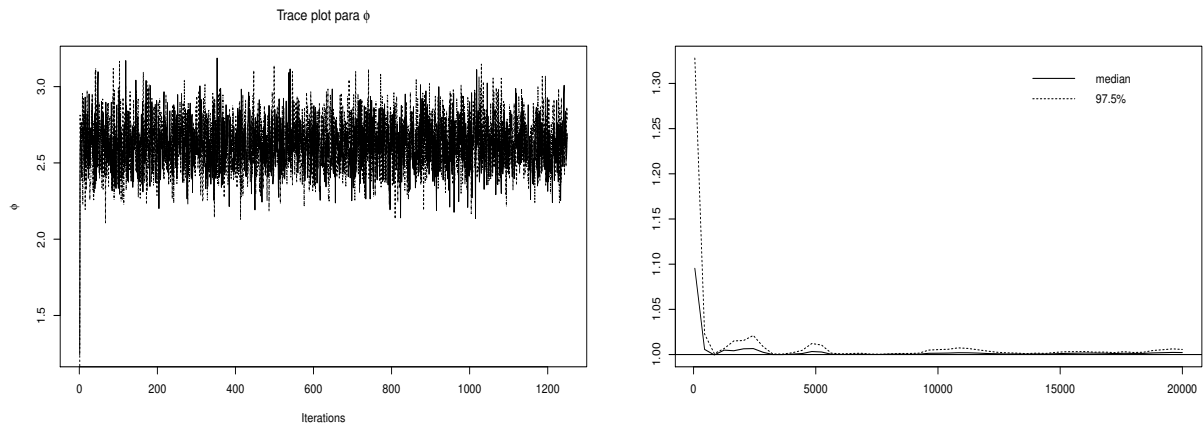
(c) *Parâmetro - β_2*

(d) *Parâmetro - θ_2*



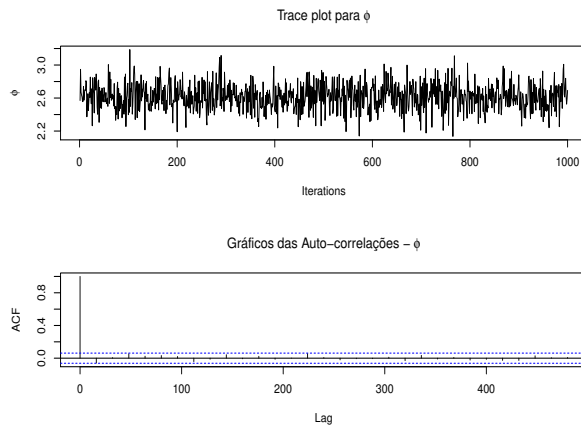
(e) *Parâmetro - θ_3*

Figura A.11: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*



(a) Trace plot - ϕ

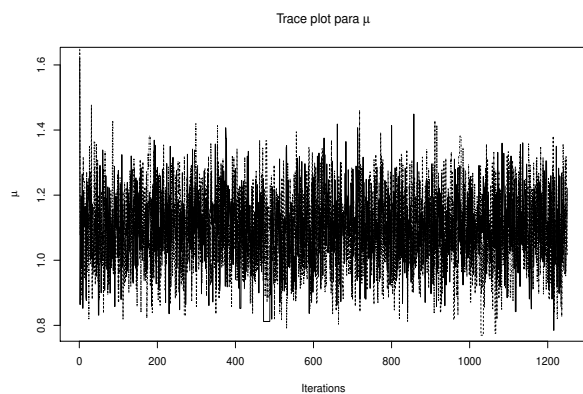
(b) Critério de Gelman-Rubin



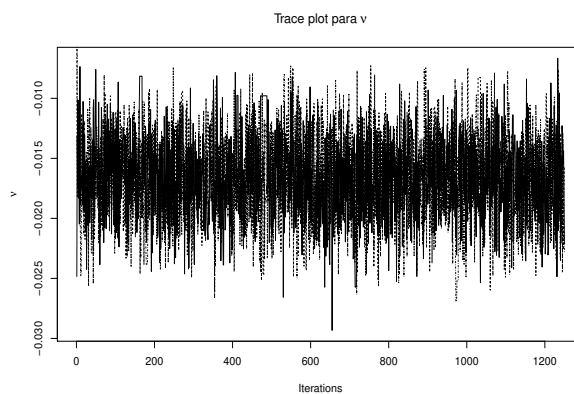
(c) Trace plot da amostra final e Gráfico de Auto-Correlações

Figura A.12: Estudo de Convergência - ϕ

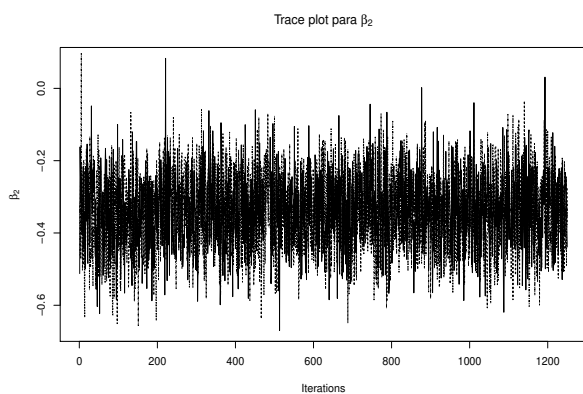
A.4 Modelos de Regressão Beta Inflacionado em Zero e Um



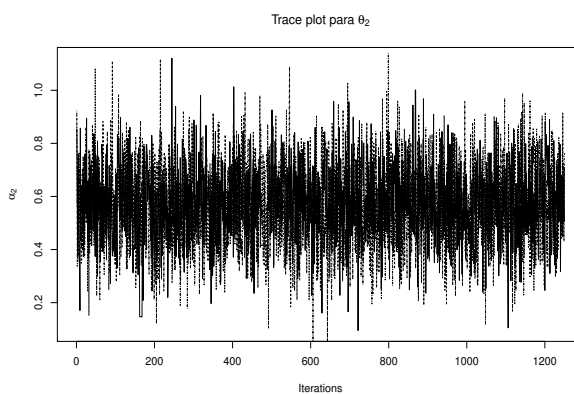
(a) *Parâmetro - μ*



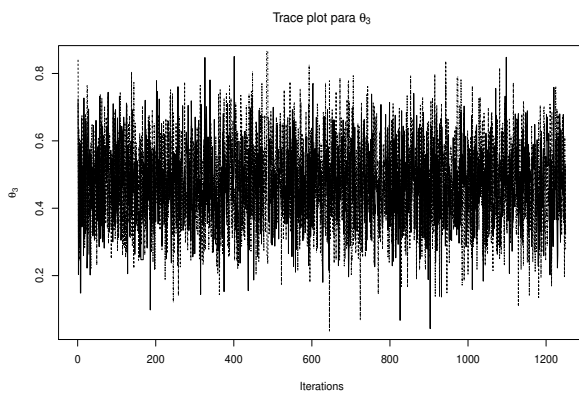
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - β_2*

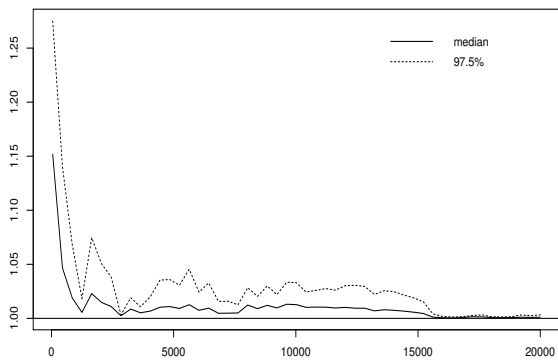


(d) *Parâmetro - θ_2*

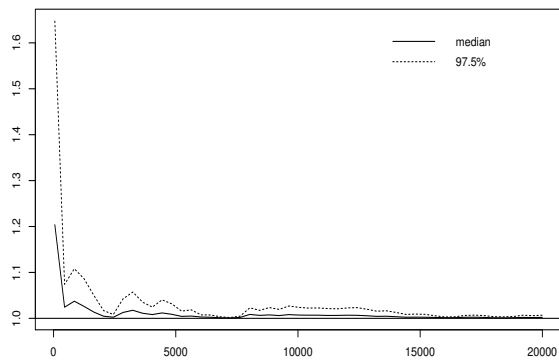


(e) *Parâmetro - θ_3*

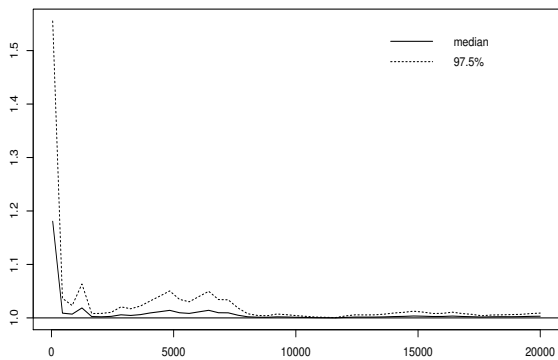
Figura A.13: *Trace plot dos parâmetros*



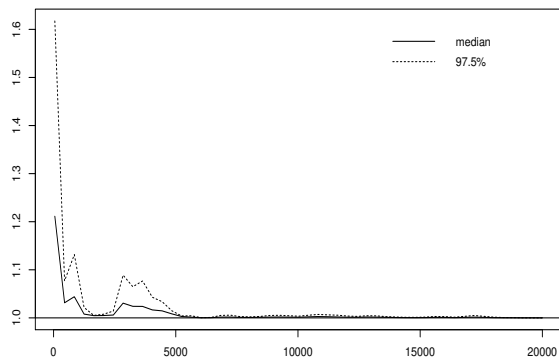
(a) *Parâmetro - μ*



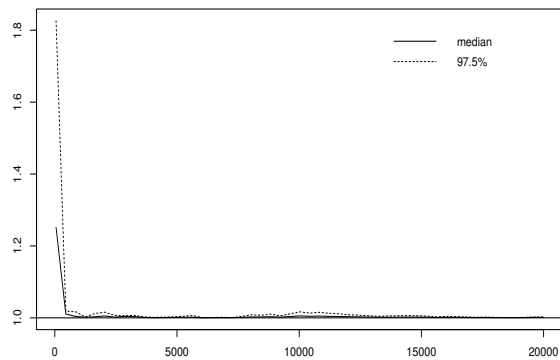
(b) *Parâmetro - ν*



(c) *Parâmetro - β_2*

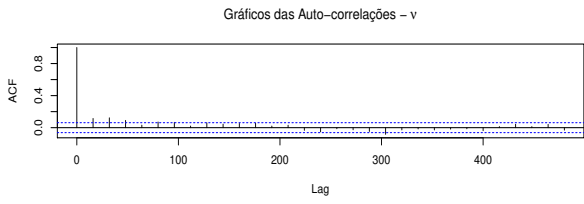
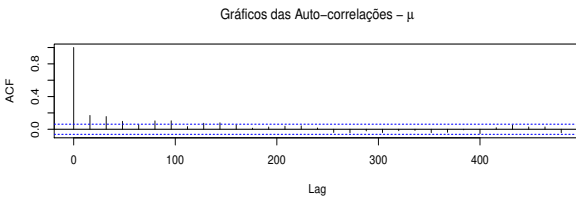


(d) *Parâmetro - θ_2*



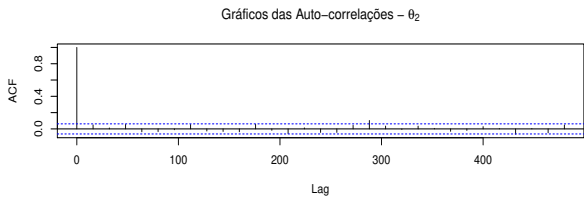
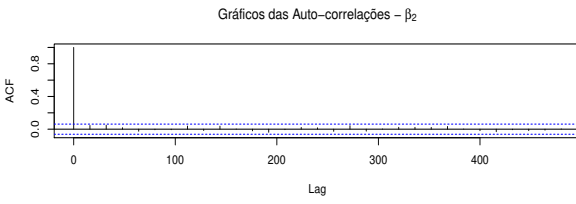
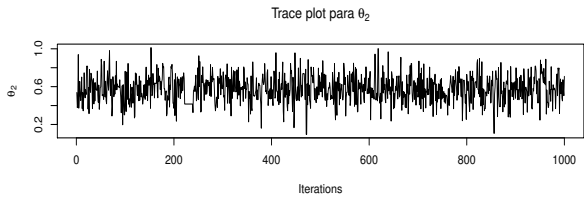
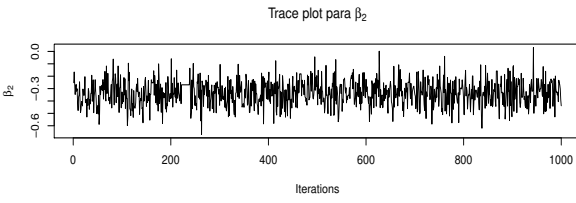
(e) *Parâmetro - θ_3*

Figura A.14: *Critério de Gelman-Rubin*



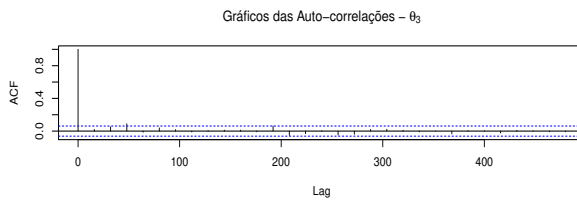
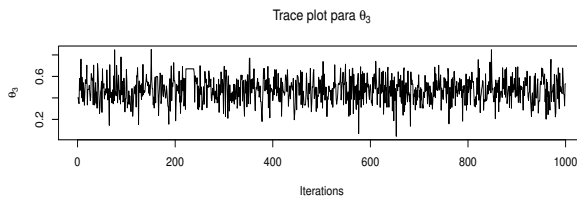
(a) *Parâmetro - μ*

(b) *Parâmetro - ν*



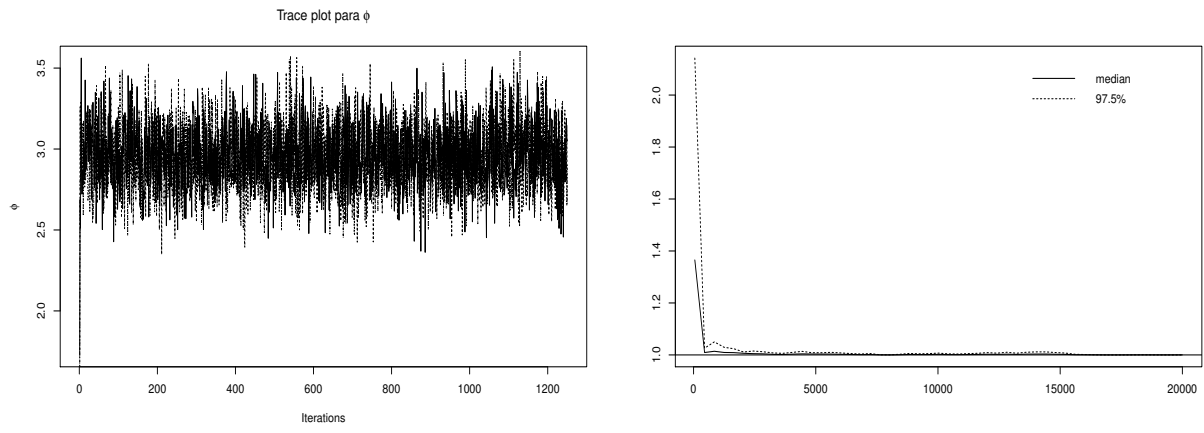
(c) *Parâmetro - β_2*

(d) *Parâmetro - θ_2*



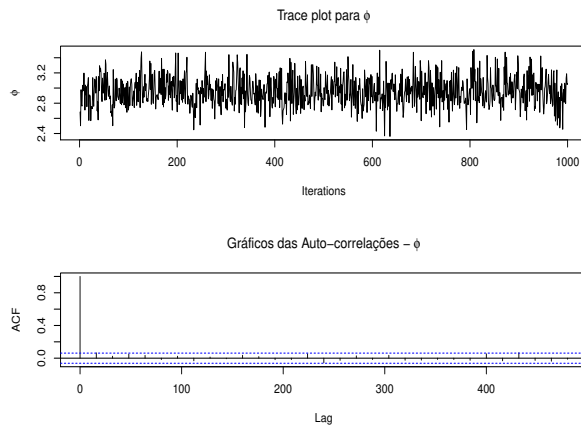
(e) *Parâmetro - θ_3*

Figura A.15: *Trace plot da amostra final e Gráficos de Auto-Correlações*



(a) Trace plot - ϕ

(b) Critério de Gelman-Rubin



(c) Trace plot da amostra final e Gráfico de Auto-Correlações

Figura A.16: Estudo de Convergência - ϕ

Referências Bibliográficas

- [1] CARLSTROM, L., WOODWARD, J., AND PALMER, C. Evaluating the Simplified Conjoint Expected Risk Model: Comparing the Use of Objective and Subjective Information. *Risk Analysis* 20 (2000).
- [2] CHIB, S., AND GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician* 49 (1995), 327–335.
- [3] CRIBARI-NETO, F., AND ZEILEIS, A. Beta regression in r. *Journal of Statistical* 34 (2010), 1–24.
- [4] DE ANDRADE, L. N. *Breve Introdução ao Latex*, 2000. versão 2.1.
- [5] DE ARAUJO PEREIRA, G. H. *Modelos de regressão beta inflacionados truncados*. Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, 2012.
- [6] DE LUNA FREIRE, C. A., CHARNET, E. M. R., BONVINO, H., AND CHARNET, R. *Análise de Modelos de Regressão Linear com aplicações*, 2a ed. Editora Unicamp, 2008.
- [7] DE OLIVEIRA, M. S. Um modelo de Regressão Beta: Teoria e Aplicações. Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, 2004.
- [8] DE SOUZA, D. F. *Regressão Beta Multivariada com Aplicações em Pequenas Áreas*. Doutorado, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.
- [9] DRAGULESCU, A. A. *xlsx: Read, write, format Excel 2007 and Excel 97/2000/XP/2003 files*, 2011. R package version 0.3.0.

- [10] FERRARI, S., AND CRIBARI-NETO, F. Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *Journal of Applied Statistics* 31 (2004), 799–815.
- [11] GAMERMAN, D. Sampling from the posterior distribution in generalized linear mixed models. *Statistics and Computing* 7 (1996), 57–68.
- [12] GAMERMAN, D., AND LOPES, H. F. *Markov Chain Monte Carlo - Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, 2nd ed. Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [13] GELMAN, A., AND RUBIN, D. A single series from the Gibbs sampler provides a false sense of security. *Bayesian Statistics 4* (1992), 625–631.
- [14] GELMAN, A., AND RUBIN, D. Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion). *Statistical Science* 7 (1992), 457–511.
- [15] GEWEKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments (with discussion). *Bayesian Statistics 4* (1992), 169–193.
- [16] HASTINGS, W. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika* 57 (1970), 97–109.
- [17] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A., ROSENBLUTH, M., TELLER, A., AND TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machine. *Journal of Chemical Physics* 21 (1953), 1087–1091.
- [18] MLODINOW, L. *O Andar do Bêbado: Como o acaso determina nossas vidas*. Zahar, 2009. Tradução Diego Alfaro, Consultoria Samuel Jurkiewicz.
- [19] OETIKER, T., PARTL, H., HYNA, I., AND SCHLEGL, E. *Introdução ao Latex*, 2004. Versão 4.14, Tradução de Démerson André Polli.
- [20] OSPINA, P. L. E. Regressão Beta. Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, 2007.

- [21] OSPINA, R. *Modelos de Regressão Beta Inflacionados*. Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, 2008.
- [22] OSPINA, R., AND FERRARI, S. Inflated beta distributions. *Stat Papers* 51 (2010), 111–126.
- [23] OSPINA, R., AND FERRARI, S. A general class of zero-or-one inflated beta regression models. *Computational Statistics and Data Analysis* 56 (2011), 1609–1623.
- [24] PAULA, G. A. *Modelos de Regressão com apoio computacional*, 1a ed. IME-USP, 2004.
- [25] PAULINO, C. D., TURKMAN, M. A. A., AND MURTEIRA, B. *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2003.
- [26] PEREIRA, T. L. *Regressão beta inflacionada: inferência e aplicações*. Doutorado, Departamento de Estatística, UFPE, Recife, 2010.
- [27] PLUMMER, M., BEST, N., COWLES, K., AND VINES, K. Coda: Convergence diagnosis and output analysis for mcmc. *R News* 6, 1 (2006), 7–11.
- [28] REITMAN, D. P. *Uso de Métodos Clássicos e Bayesianos em Modelos de Regressão Beta*. Mestrado, Departamento de Estatística, UFSCAR, São Carlos, 2007.
- [29] RIGBY, R. A., AND STASINOPOULOS, D. M. Generalized additive models for location, scale and shape,(with discussion). *Applied Statistics* 54 (2005), 507–554.
- [30] SPIEGELHALTER, D., BEST, N., CARLIN, B., AND VAN DER LINDE, A. Bayesian Measures of Model Complexity and Fit. *Royal Statistical Society* (2002), 583–639.
- [31] STASINOPOULOS, M., WITH CONTRIBUTIONS FROM CALLIOPE AKANTZILIOTOU, B. R., HELLER, G., OSPINA, R., AND MOTPAN., N. *gamlss.dist: Distributions to be used for GAMLSS modelling.*, 2011. R package version 4.0-5.
- [32] VENABLES, W. N., AND RIPLEY, B. D. *Modern Applied Statistics with S*, fourth ed. Springer, New York, 2002. ISBN 0-387-95457-0.

- [33] WIECZOREK, J., AND HAWALA, S. A Bayesian Zero-One Inflated Beta Model for Estimating Poverty in U.S. Counties. *Survey Research Methods* (2011), 2812–2822.